



Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação  
Departamento de Física

Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada

Estudo de supercondutores em espaços curvos: a abordagem de  
Atanasov para o acoplamento da teoria de Ginzburg-Landau e a  
teoria da relatividade geral

*Rhimon Alves de Assis Souza*

Dissertação de Mestrado

Recife - PE

28 de Fevereiro de 2020

Universidade Federal Rural de Pernambuco

Departamento de Física

*Rhimon Alves de Assis Souza*

**Estudo de supercondutores em espaços curvos: a abordagem de Atanasov para o acoplamento da teoria de Ginzburg-Landau e a teoria da relatividade geral**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada do Departamento de Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física Aplicada.

**Orientador: Dr. Antônio R. de C. Romagueira**

**Coorientador: Dr. Fernando J. S. Moraes**

**Coorientador: Dr. Antônio de P. Santos**

**Recife - PE**

**28 de Fevereiro de 2020**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Sistema Integrado de Bibliotecas  
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- S729e Souza, Rhimon Alves de Assis  
Estudo de supercondutores em espaços curvos: a abordagem de Atanasov para o acoplamento da teoria de Ginzburg-Landau e a teoria da relatividade geral / Rhimon Alves de Assis Souza. - 2020.  
77 f. : il.
- Orientador: Antonio Rodrigues de Castro Romaguera.  
Coorientador: Fernando Jorge Sampaio Moraes.  
Inclui referências.
- Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada, Recife, 2021.
1. Ginzburg-Landau. 2. Supercondutor. 3. Buraco negro. 4. Espaço-tempo. I. Romaguera, Antonio Rodrigues de Castro, orient. II. Moraes, Fernando Jorge Sampaio, coorient. III. Título

*"Estude muito o que mais lhe interessa da maneira mais indisciplinada, irreverente e original possível."*

*(Richard P. Feynman)*

Dedico esse trabalho a minha avó, Dona Marina, heroína do sertão de Pernambuco, que venceu a extrema pobreza e com muita luta educou os três filhos. Passou para mim a sua fé na educação, e se hoje estou em posição de privilégio, foi porque essa guerreira me amou muito antes de eu nascer. Por seu amor incondicional, sua força excepcional, por todo seu exemplo. Sempre te amarei vovó.

---

# AGRADECIMENTOS

Dedico esta dissertação a todas as partes que foram diretamente responsáveis por esse empreendimento. Primeiramente, não por força do costume e sim por acreditar veementemente em um criador supremo de todas as coisas, agradeço a Deus. Agradeço também a minha família: meu pai (Francisco), sempre entusiasmado, minha mãe (Noêmia) heroína de todas as minhas manhãs, meu irmão (Rhodrigo) e minha prima (Jussara), por sempre ter um canto de desabafo em minha casa. Agradeço, a agora, minha esposa (Manu) por ser um pilar de sustentação que me manteve de pé e me fez seguir adiante, mesmo diante do mais forte cansaço, ela conseguiu ser forte por nós dois. Gostaria de incluir junto a minha família a comunidade de fé que participo, a Fonte Caxangá, por me incentivarem e apoiarem espiritualmente.

Agradeço a meus mestres, aos que ministraram disciplinas com o esforço e a vontade de me ajudar a ser um melhor profissional. Sou grato também pela amizade, conselhos e cobranças de meus orientadores: Professor Fernando Moraes, Professor Antônio de Pádua e Professor Antônio Romaguera. É fato que fui ajudado, e muitas vezes carregado por meus amigos de jornada, por isso agradeço a irmandade de André, Ícaro, Josafary, Vinícius, Caio e Eduardo, se fui mais longe foi porque me ajudaram. Agradeço também a CAPES pelo suporte financeiro.

---

# RESUMO

Em um artigo recente, Victor Atanasov [Physica B, 517(2017)] propôs um acoplamento entre o parâmetro de ordem supercondutor e a geometria do espaço-tempo. Em uma versão estendida de Ginzburg-Landau (TGL). Nesta versão, a curvatura desempenha um papel de um potencial químico efetivo. Verificou-se que o parâmetro de teoria de Ginzburg-Landau,  $\kappa$ , pode ser afetado pela gravidade, de maneira a mudar um supercondutor de Tipo I para Tipo II e vice-versa. Além disso, se a curvatura do espaço-tempo for suficientemente negativa, a supercondutividade é destruída. Em nosso trabalho, no âmbito da TGL estendida de Atanasov, estudamos os efeitos de um campo gravitacional nos vórtices de um supercondutor tipo II próximo à temperatura de transição. O trabalho consiste em investigar se a perturbação gravitacional é suficiente para modificar o estado supercondutor. Minimizamos a energia do condensado supercondutor proposta na TGL mais o termo proposto por Atanasov, a partir do modelo da teoria de campos de Abelian-Higgs, não minimamente acoplado à gravidade apresentado por Y. Verbin [Phys. Rev. D, 59(1999)]. Estudamos o problema de um campo gravitacional estático. O caso escolhido foi o de um supercondutor nas proximidades de um buraco negro. Descrevemos as equações da TGL e a TGL estendida de Atanasov, de forma necessária para obter as equações de campo de Einstein-Higgs acopladas, que foram posteriormente escritas admissionalmente para se obter uma solução numérica.

**Palavras-chave:** Ginzburg-Landau, supercondutor, buraco negro, espaço-tempo .

---

# ABSTRACT

In a recent article, Victor Atanasov [Physica B, 517(2017)] proposed a coupling between the superconducting order parameter and the geometry of spacetime, in an extended Ginzburg-Landau Theory (GLT). In this version, the curvature plays an effective role of a chemical potential. It is found that the coherence length and the Ginzburg-Landau parameter of the superconductor are affected by gravity in such a way as to change a superconductor from Type-I to Type-II and vice-versa. Moreover, for a sufficiently negative curvature of space-time the superconductivity is destroyed. In our work, in the framework of Atanasov's extended GLT, we study the effects of a gravitational field in a vortex dynamics of a Type-II superconductor near the transition temperature. The work consists of investigating whether the perturbation caused by gravitational fields is enough to modify the superconducting state. We minimize the energy of the superconducting Condensate proposed in TGL plus the term proposed by Atanasov, starting from the Abelian-Higgs field theory model, non-minimally coupled to gravity proposed by Y. Verbin [Phys. Rev. D, 59(1999)]. We study a problem of a static gravitational field. The chosen case was that of a superconductor near a black hole. We describe a GLT equations and Atanasov's extended GLT necessary for obtaining the coupled Einstein-Higgs field equations, that were subsequently written dimensionless form to obtain a numerical solution.

**Keywords:** Ginzburg-Landau, superconductor, black hole, spacetime .

---

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teoria Geral da Relatividade</b>	<b>3</b>
2.1	Contexto Histórico . . . . .	3
2.2	Geometria Diferencial . . . . .	4
2.2.1	Tensores . . . . .	5
2.2.2	Derivação covariante . . . . .	7
2.2.3	Transporte paralelo . . . . .	10
2.2.4	Tensor de curvatura . . . . .	11
2.2.5	Geometria riemanniana . . . . .	13
2.3	Relatividade Geral . . . . .	14
2.3.1	Princípio da equivalência . . . . .	14
2.3.2	Equação de campo de Einstein . . . . .	15
2.3.3	O escalar de curvatura de Ricci ( $R$ ) . . . . .	16
2.3.4	Solução de Schwarzschild . . . . .	17
2.3.5	O buraco negro . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Teoria de Ginzburg-Landau</b>	<b>20</b>

3.1	Contexto Histórico . . . . .	20
3.2	Teoria de London . . . . .	23
3.3	Teoria de Ginzburg-Landau . . . . .	24
3.3.1	Energia Livre de Ginzburg-Landau . . . . .	25
3.3.2	Equações de Ginzburg-Landau . . . . .	28
3.3.3	Comprimentos Característicos . . . . .	29
3.3.4	Tipos de Supercondutores . . . . .	32
3.3.5	Rede de Abrikosov . . . . .	33
3.3.6	Equações de Ginzburg-Landau Dependentes do Tempo - TDGL . . . . .	35
3.4	Teoria BCS . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Extensão da Teoria de Ginzburg-Landau</b>	<b>38</b>
4.1	Extensão ao TDGL proposta por Atanasov . . . . .	38
4.1.1	A densidade extra de energia livre . . . . .	39
4.2	Consequências da TDGL estendida . . . . .	41
4.3	Introduzindo a Função $\chi$ . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Dinâmica de Vórtices na Presença de um Campo Gravitacional</b>	<b>48</b>
5.1	Equações de Ginzburg-Landau Modificadas pelo Campo Gravitacional . . . . .	49
5.2	Definições Importantes . . . . .	50
5.3	Forma Adimensional das Equações de TDGL . . . . .	51
5.3.1	As equações TDGL modificadas . . . . .	54
5.4	Campo auxiliar . . . . .	55
5.5	Definindo a análise do supercondutor na presença do campo gravitacional . . . . .	57
5.5.1	Condições de Contorno . . . . .	58
5.6	Conclusão e perspectivas . . . . .	59
	<b>Referências</b>	<b>64</b>

---

# LISTA DE FIGURAS

2.1	Transporte em paralelo de um vetor tangente a superfície esférica. . . . .	11
2.2	Diferentes deformações no espaço-tempo [1]. . . . .	19
3.1	Relação entre temperatura e resistividade elétrica em uma amostra de mercúrio, resultados obtidos por Onnes [31]. . . . .	21
3.2	Relação entre temperatura e resistividade em um supercondutor [2]. . . . .	21
3.3	Efeito Meissner em um supercondutor esférico submetido a um campo magnético constante. . . . .	22
3.4	Penetração do campo magnético( $\mathbf{H}$ ) através de um supercondutor. . . . .	24
3.5	Diferença de densidade de energia livre para os casos onde $\alpha < 0$ e para $\alpha > 0$ . . . . .	27
3.6	Dependência espacial do parâmetro $\psi$ na interface entre uma amostra supercondutora e um metal comum [37]. . . . .	30
3.7	Dependência espacial do parâmetro $\psi$ e do campo magnético $\mathbf{h}$ na interface entre uma amostra supercondutora e um isolante, expressando o significado físico dos comprimentos $\lambda(T)$ e $\xi(T)$ [37]. . . . .	31
3.8	Variações espaciais do parâmetro de ordem $\psi$ e do campo magnético $H$ na interface de uma interface de metal normal supercondutor para <b>(a)</b> $\kappa \ll 1$ e <b>(b)</b> $\kappa \gg 1$ [30]. . . . .	32

3.9	Campos criticos em função da temperatura para supercondutores do tipo-I (a) e do tipo-II (b). . . . .	33
3.10	Diagrama das soluções das equações de GL para uma rede periódica de vórtices em uma rede quadra (a) e uma triangular(hexagonal) (b). . . . .	34
4.1	Em unidades naturais, o comportamento do parâmetro de Ginzburg-Landau( $\kappa$ ) com a influência de um campo gravitacional estático, ou seja, sem dependência temporal. . . . .	46
4.2	O comprimento de Ricci $\xi_R$ para o caso de um buraco negro. . . . .	47
5.1	Relação entre temperatura e resistividade em um supercondutor [2]. . . . .	57
5.2	Geometria do supercondutor a ser simulada numericamente, sendo que um dos eixos (x,y) da amostra, deve coincidir com o raio do buraco negro. . . . .	58

---

# LISTA DE TABELAS

2.1	Tipos de Tensores . . . . .	6
5.1	Tabela comparativa entre a TDGL clássica e a modificada com o termo geométrico.	55

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## INTRODUÇÃO

Desde que Einstein postulou a Teoria da Relatividade Especial [16], até seu formalismo completo com a Teoria da Relatividade Geral(TRG) [14], a nossa compreensão sobre como a realidade se organiza mudou muito. Os conceitos de matéria e energia começaram a se entrelaçar levando também a novas descobertas, principalmente ao se testar os limites dessa teoria. Essa teoria nos possibilitou enxergar a gravidade como um campo geométrico, permitindo encontrar soluções como a proposta pelo físico K. Schwarzschild [36], e recentemente recebeu mais uma confirmação com descoberta das ondas gravitacionais [5], previstas pelo próprio Einstein [15]. Um avanço proposto por essa teoria é a relação da energia com a curvatura do espaço-tempo, que permite que um espaço possa ser curvado pela presença de massa ou de energia.

No ano de 1908, muito próximo a postulação feita por Einstein, outro cientista também ganharia notoriedade pela descoberta de um novo estado da matéria. Heike Kamerlingh-Onnes descobriu [31] que certos materiais ao serem resfriados apresentam características curiosas em sua condutividade elétrica. Após aproximadamente quarenta anos, a chamada Teoria de Ginzburg-Landau(TGL) [19] surgiu e conseguiu não apenas explicar o fenômeno descoberto por Onnes, como também conseguiu prever novas características desse novo estado da matéria.

A curiosidade a respeito dessas teorias é que a TGL dependente do tempo [21], também conhecida com TDGL, pode oferecer uma forma de afetar as propriedades do espaço-tempo de

---

maneira reversível, ou seja, obedecendo às leis de conservação de energia. Isso se faz necessário quando queremos pensar se é possível alterar as propriedades eletrônicas de um dado material em escala macro ou microscópica, o submetendo a um campo gravitacional.

A seguinte dissertação tem como finalidade mostrar como algumas relações entre transições de fase, em um condensado supercondutor, podem ser percebidas de modo que se tenha como construir artificialmente um processo onde essa interação entre campo gravitacional e a energia de um condensado possam interagir, a fim de ter algum valor mensurável por um experimento. Sendo assim, precisamos estudar ambas as teorias mencionadas e observar como elas podem interagir. Para isso, vamos usar um modelo de interação proposto por Atanasov [10], que nos oferece um modelo de interação reversível, que seria a capacidade de um supercondutor afetar, através de sua energia, o campo gravitacional e vice-versa.

---

---

# CAPÍTULO 2

---

## TEORIA GERAL DA RELATIVIDADE

Aqui nesse capítulo descreveremos como o físico alemão Albert Einstein (1879-1955), desenvolveu uma teoria que conseguiu explicar os campos gravitacionais através de geometria diferencial. Para esse fim, precisamos entender o formalismo matemático adotado por Einstein, e nesse processo ver como essas concepções podem ser aplicadas e o que conseguiram explicar, como o caso apresentado no final desse capítulo: o buraco negro.

### 2.1 Contexto Histórico

Após a teoria da relatividade restrita [16], que até então considerava apenas os sistemas observados em referenciais inerciais; a teoria da relatividade geral [15], desenvolvida por Einstein, foi apresentada à Academia de Ciências da Prússia em novembro de 1915. Pensando em incorporar a gravidade, aceita com base no pensamento de Newton até ao início do século XX, Einstein em 1907 propôs, quando ainda trabalhava no escritório de patentes em Berna, na Suíça, a ideia de que um observador em queda livre que tem um movimento inercial e, portanto, as equações da relatividade restrita poderão ser aplicadas a ele, o que constitui a base do princípio da equivalência [33]. Em 1908 publicou um artigo sobre essa equivalência e, em 1911, um outro artigo sobre o caso em que duas caixas são indistinguíveis, tendo uma delas um movimento

uniformemente acelerado e estando a outra em repouso num campo gravitacional constante. Imaginando relógios no topo e no fundo dessa caixa acelerada concluiu que eles marcariam tempos diferentes dependendo da posição no campo, diferença essa que em primeira aproximação era proporcional ao potencial gravitacional. Einstein tinha abandonado uma aproximação covariante para a sua teoria gravitacional por ter encontrado inconsistências e começou então a procurar equações de campo por outras vias. No final de 1915, retornou à teoria covariante e, desta vez, conseguiu compatibilizá-la com o determinismo em que acreditava.

Em consequência, tentou resolver as equações de campo para vários casos e interpretar as suas soluções não triviais, bem como encontrar novas verificações observacionais ou experimentais para a sua teoria. Como as equações são não-lineares, Einstein supôs que elas eram insolúveis. No entanto, em 1916, o astrofísico Karl Schwarzschild encontrou a primeira solução não trivial exata para as equações de campo, a métrica de Schwarzschild, descobrindo uma solução para um espaço-tempo com simetria esférica nas vizinhanças de um objeto maciço, encontrando matematicamente o que hoje se entende como buraco negro [36].

Em 1922, Alexander Friedmann, propôs soluções [18] em que o universo podia expandir-se ou contrair-se. Porém como Einstein acreditava num universo estático, ele introduziu uma constante cosmológica para tornar as soluções estacionárias, apesar de instáveis. Quando, em 1929, Edwin Hubble descobriu [24] que o universo parecia estar a expandir-se, Einstein retirou a constante cosmológica, tendo-a considerado o “maior erro” da sua vida. Contudo, a partir da década de 90, com a descoberta da aceleração da expansão cósmica, ressurgiu o interesse por esta constante.

A teoria tornou-se consolidada na física teórica e na astrofísica apenas por volta de 1960 e 1975, hoje conhecidos como a era dourada da relatividade geral.

## 2.2 Geometria Diferencial

A geometria diferencial é uma disciplina da matemática que utiliza as técnicas de cálculo diferencial, cálculo integral, álgebra linear e álgebra multilinear para estudar problemas em geometria. Posteriormente passou a ser de grande utilidade na Astronomia e na Engenharia. Foi sobre os alicerces da Geometria Diferencial que a Teoria da Relatividade Geral nasceu e

teve o seu conhecimento estabelecido [32].

### 2.2.1 Tensores

Para o estudo da Teoria da Relatividade Geral (TGR), é útil o uso de uma linguagem matemática apropriada, com objetos bem definidos como vetores e tensores. É importante primeiramente entender o que é um vetor, para na sequência vermos a ligação dessa primeira definição, com a definição de um tensor. Um vetor pode ser associado a uma reta. Em uma dada base particular, o vetor pode ser descrito como um conjunto de coordenadas, ligadas a suas componentes. Se a base sofrer alguma alteração, as componentes do vetor sofrerão uma mudança, porém o comprimento da reta será mantido [4].

Na teoria da relatividade de Einstein os vetores tem quatro componentes e são chamados de quadri-vetores. No espaço-tempo o quadri-vetor tem uma coordenada temporal e três espaciais, representadas como  $\mathbf{x} = (t, \vec{x})$ , ou também como  $\mathbf{x}^\mu$  para  $\mu = 0, 1, 2, 3$  [34]. Uma forma mais geral de se expressar um vetor, utilizando a notação de Einstein, onde uma soma é entendida como a repetições de índices, é da seguinte maneira:

$$\vec{x} = \sum_{a=0}^3 x^a \hat{e}_a = x^a \hat{e}_a, \quad (2.1)$$

onde  $x^a$  é a componente do vetor e  $\hat{e}_a$  é a base do espaço vetorial onde o vetor  $\vec{x}$  está definido. Os tensores são objetos matemáticos que podem descrever propriedades físicas, tal como vetores e escalares. De fato os tensores são generalizações de escalares e vetores; um escalar é um tensor de ordem zero, e um vetor é um tensor de primeira ordem [23].

A ordem do tensor é definida pelo número de direções que ele pode ter. Por exemplo, em três dimensões as propriedades que precisam de apenas uma direção (primeira ordem) podem ser completamente descritas como uma vetor coluna, ou seja, uma matriz  $3 \times 1$ . Quando as características físicas do sistema precisa de duas direções (segunda ordem), esse tensor pode ser escrito como uma matriz  $3 \times 3$ . De forma mais geral um tensor pode ser descrito por  $3^n$  coeficientes [23].

Qualquer transformação de sistema de referência deve respeitar as leis de transformação da tabela 2.1. Então ao levar o vetor do sistema de coordenadas  $S$  para o  $S'$  deve existir uma

matriz de transformação  $\Lambda_b^a$ , tal que um vetor covariante  $\bar{x}^\mu$  seja transportado para o novo sistema de coordenadas através da seguinte transformação:

$$\bar{x}^\mu = \left( \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \right) x^\nu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu, \quad (2.2)$$

onde  $\Lambda_\nu^\mu \equiv \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu}$ . Um exemplo útil ocorre nas transformações de Lorentz, que ao mudar as componentes de um quadri vetor, o comprimento desse mesmo quadri vetor  $x$  não vai se alterar. Esse comprimento pode ser dado pela seguinte relação:

Tabela 2.1: Tipos de Tensores

Tensor	Expressão	Lei de Transformação
Covariante	$T_{ij\dots k}$	$\bar{T}_{rs\dots t} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^r} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^s} \dots \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^t} T_{ij\dots k}$
Contravariante	$T^{ij\dots k}$	$\bar{T}^{rs\dots t} = \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^j} \dots \frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^k} T^{ij\dots k}$

$$|\mathbf{x}|^2 = x \cdot x = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \quad (2.3)$$

Em geral, o produto interno do quadri vetor é:

$$x \cdot x' = x^0 x'^0 - x^1 x'^1 - x^2 x'^2 - x^3 x'^3, \quad (2.4)$$

escrevendo de outra maneira:

$$x \cdot x' = g_{\mu\nu} x^\mu x'^\nu. \quad (2.5)$$

Deste modo ainda se pode escrever o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  como:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Deste ponto em diante o conceito de métrica vai ser utilizado para calcular a distância entre dois pontos ou o comprimento de um vetor. A métrica é dada por um tensor de segunda ordem chamado  $g_{ab}$ . A distância espaço-temporal infinitesimal entre dois eventos é determinada por:

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b. \quad (2.7)$$

De maneira mais geral  $g_{ab}$  é escrito como uma matriz, sendo a matriz inversa escrita como  $g^{ab}$ , tal que:

$$g_{ab}g^{ac} = \delta_b^c, \quad (2.8)$$

onde  $\delta_b^c$  é o delta de Kronecker.

### 2.2.2 Derivação covariante

Para as análises que serão aplicadas ao problema apresentado nesse trabalho é de interesse que seja definida apenas um tipo de derivada covariante. Essa é a derivada de um tensor cartesiano de 2<sup>o</sup> ordem, pois é o que se apresenta mais adiante e que contém todos os conceitos úteis para o entendimento da parte da teoria da relatividade geral que será utilizado aqui. Para fazer essa análise admita-se um tensor  $T_{ij}$  com componentes que são funções das coordenadas  $x^i$ . O tensor com essas propriedades é função do espaço quadridimensional, esse tensor deve

obedecer a lei de transformação como está descrito na tabela 2.1, no item covariante. Sabendo que  $\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^r}$  e  $\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^s} \dots \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^t}$  são constantes, pois são as taxas de variação de uma transformação linear, então não dependem das coordenadas. A expressão para derivada de  $\bar{T}_{ij}$  em relação as coordenadas  $\bar{x}^l$  é:

$$\frac{\partial \bar{T}_{ij}}{\partial \bar{x}^l} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \left( \frac{\partial T_{pq}}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^l} \right). \quad (2.9)$$

Pensando agora na derivada dos vetores da base, é interessante definir um vetor  $u^k$  contravariante que seja função de  $x^i$ , onde  $x^i$  é dado pela curva paramétrica  $x^i(t)$ , escrita em um referencial  $X^i$ . Fazendo uso das leis de transformações de vetores, tem-se para um referencial curvilíneo  $\bar{X}^i$  a seguinte relação:

$$\bar{u}^l = \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^k} u^k. \quad (2.10)$$

Derivando a equação 2.10 em relação ao parâmetro  $t$  obtem-se:

$$\frac{d\bar{u}^l}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{du^k}{dt} + \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial x^l} \frac{dx^l}{dt} u^k. \quad (2.11)$$

O estudo do segundo termo à direita da equação acima pode ser feito, caso seja considerado um sistema de referencial cartesiano  $X^i$ , como também o sistema de referência curvilíneo  $\bar{X}^i$ , com os versores  $\mathbf{e}_i$  e  $\mathbf{g}_i$ , respectivamente. Definindo-se um vetor posição  $\mathbf{r}$  do ponto  $P(x^i)$  em relação ao sistema referencial  $X^i$  por meio de suas componentes, pode-se escrever:

$$\mathbf{r} = x^i \mathbf{e}_i, \quad (2.12)$$

logo

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}. \quad (2.13)$$

Em relação ao sistema  $\bar{X}^i$  a diferencial total para o vetor  $\mathbf{r}$  é:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_{,i} d\bar{x}^i, \quad (2.14)$$

sendo  $\mathbf{r}_{,i} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{x}^i}$ , de onde resulta os vetores da base curvilínea, dados por:

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{r}_{,i}, \quad (2.15)$$

este sistema varia em cada ponto do espaço vetorial  $E_3$  e como os versores  $e_i$  são invariáveis temos que:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \mathbf{e}_i, \quad (2.16)$$

comparando as equações 2.16 e 2.15, é possível escrever as seguintes relações:

$$\mathbf{g}_k = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \mathbf{e}_i, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \mathbf{g}_j. \quad (2.18)$$

A derivada da base covariante do sistema de coordenadas curvo  $\bar{X}^i$ , é escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{g}_{\mathbf{k},l} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^l} \mathbf{e}_i. \quad (2.19)$$

Conhecendo  $\mathbf{e}_i$  da expressão 2.18, tem-se:

$$\mathbf{g}_{\mathbf{k},l} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^l} \mathbf{g}_j. \quad (2.20)$$

Agora é possível definir a grandeza:

$$\Gamma_{\mathbf{kl}}^{\mathbf{j}} \equiv \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^l}. \quad (2.21)$$

Onde  $\Gamma_{\mathbf{kl}}^{\mathbf{j}}$  são funções das coordenadas chamadas de símbolos de Cristoffel de segunda espécie [32]. No espaço plano  $\Gamma_{\mathbf{kl}}^{\mathbf{j}} = 0$ , mas no espaço curvo não é possível que todas os  $\Gamma_{\mathbf{kl}}^{\mathbf{j}}$  se anulem. Esses símbolos também podem ser definidos em relação ao tensor métrico:

$$\Gamma_{\mathbf{bc}}^{\mathbf{a}} = \frac{1}{2} g^{ad} \left( \frac{\partial g_{dc}}{\partial x^b} + \frac{\partial g_{bd}}{\partial x^c} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^d} \right) \quad (2.22)$$

Então que os símbolos de Cristoffel são utilizados como conexão, que servem como corretores na curvatura para as diferentes variações nas coordenadas que o espaço pode apresentar. E essa conexão pode ser definida completamente pelo tensor métrico em espaços curvos, ou seja, dado um certo tensor métrico é possível correlacionar a curvatura do espaço ao tensor de curvatura (que será apresentado mais a frente) através desses símbolos.

Torna-se possível agora definir a derivada covariante de um vetor contravariante em um espaço curvo, dada pela seguinte expressão:

$$\nabla_c X^a = \partial_c X^a + \Gamma_{\mathbf{bc}}^{\mathbf{a}} X^b \quad (2.23)$$

onde  $\partial_c = \frac{\partial}{\partial x^c}$  e  $X^a$  é um vetor contravariante. Para entender a derivada covariante de um vetor covariante é conveniente que uma dada função escalar  $\phi$  possa existir de tal forma que seja escrita como um produto interno:

$$\phi = X_a Y^a. \quad (2.24)$$

Um fato importante é que a derivada covariante de um escalar é igual a uma derivada comum, ou seja,  $\nabla_c \phi = \partial_c \phi$ , o que possibilita escrever:

$$\begin{aligned} \nabla_c \phi &= \nabla_c (X_a Y^a) \\ \nabla_c \phi &= \nabla_c (X_a) Y^a + X^a (\nabla_c Y^a) \\ \nabla_c \phi &= \nabla_c (X_a) Y^a + X^a \left( \partial_c Y^a + \Gamma_{bc}^a Y^b \right), \end{aligned} \quad (2.25)$$

e também a derivada comum que é dada por:

$$\partial_c \phi = \partial_c (X_a) Y^a + X^a (\partial_c Y^a). \quad (2.26)$$

Substituindo as equações 2.25 e 2.26 na equação 2.24, tem-se:

$$\nabla_c X_a = \partial_c X_a - \Gamma_{bc}^a X_b, \quad (2.27)$$

a relação que aparece na equação 2.27 é chamada derivada covariante.

### 2.2.3 Transporte paralelo

Um vetor é transportado em paralelo quando levado de um ponto ao outro do sistema de referencia e sua magnitude e direção permanecem a mesma. O transporte paralelo de um vetor tangente  $X^a = \frac{dx^a}{d\tau}$  ao longo de uma curva  $x^a(\tau)$ , onde  $\tau$  é apenas um parâmetro pode ser visualizado como o esquema mostrado na figura 2.1, imagem retirada na referência [3].

A derivada de um vetor tangente é sempre ortogonal ao mesmo, uma consequência direta que pode ser observada é que o produto interno do vetor tangente com a derivada covariante deve ser nulo. Por tanto é possível escrever:

$$X^a \nabla_a X^a = 0. \quad (2.28)$$

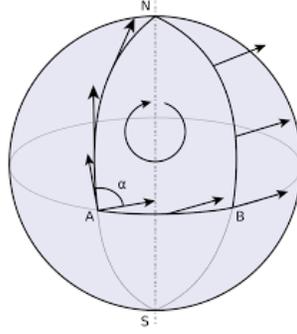


Figura 2.1: Transporte em paralelo de um vetor tangente a superfície esférica.

se substituir a equação 2.23 na expressão 2.28, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dx^a}{d\tau} \left( \partial_a \frac{dx^b}{d\tau} + \Gamma_{ac}^b \frac{dx^c}{d\tau} \right) &= 0, \\ \frac{dx^a}{d\tau} \partial_a \frac{dx^b}{d\tau} + \Gamma_{ac}^b \frac{dx^a}{d\tau} \frac{dx^c}{d\tau} &= 0, \\ \frac{d}{d\tau} \left( \frac{dx^b}{d\tau} \right) + \Gamma_{ac}^b \frac{dx^a}{d\tau} \frac{dx^c}{d\tau} &= 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Permutando  $a \rightarrow b$  e  $b \rightarrow a$ , tem-se a seguinte relação:

$$\frac{d^2 x^a}{d\tau^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{d\tau} \frac{dx^c}{d\tau} = 0. \quad (2.30)$$

Esta equação 2.30 que recebe o nome de geodésica, que é a minimização de um vetor tangente no espaço curvo em relação a um parâmetro  $\tau$ . Por isso a distância geodésica é a menor distância entre dois pontos em um sistema de referência curvo.

## 2.2.4 Tensor de curvatura

O transporte paralelo para um vetor depende dos pontos iniciais e finais, porém não depende apenas desses fatores, a curva pela qual ele é transportado também o afeta. Um caso interessante é quando a curvatura do espaço é nula, assim o transporte paralelo de um dado ponto P para um ponto K nesse espaço será independente da curva que for escolhida para transportá-lo [32]. Quando desse caso, tem-se que a derivada covariante nesse espaço comuta,

ou seja:

$$\nabla_c \nabla_d X^a - \nabla_d \nabla_c X^a = 0. \quad (2.31)$$

Utilizando a equação 2.27 e substituindo na relação apresentada na parte esquerda da equação 2.31, obtém-se:

$$\nabla_c \nabla_d X^a - \nabla_d \nabla_c X^a = (\partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{bd}^e \Gamma_{ec}^a - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ed}^a) X^b. \quad (2.32)$$

Fazendo agora a seguinte definição:

$$R_{bcd}^a = \partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{bd}^e \Gamma_{ec}^a - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ed}^a, \quad (2.33)$$

onde,  $R_{bcd}^a$  é chamado tensor de curvatura ou tensor de Riemann. E o termo da direita a equação 2.32, pode ser reescrito em função desse tensor, tomando a forma de:

$$\nabla_c \nabla_d X^a - \nabla_d \nabla_c X^a = R_{bcd}^a X^b. \quad (2.34)$$

Algumas propriedades do tensor de Riemann são:

$$R_{bcd}^a = -R_{bdc}^a \implies R_{bcd}^a + R_{dbc}^a + R_{cdb}^a = 0, \quad (2.35)$$

$$R_{abcd} = -R_{cdab}, \quad (2.36)$$

$$R_{abcd} = -R_{bacd}, \quad (2.37)$$

$$R_{abcd} = -R_{abdc} = -R_{bacd} = -R_{cdab}, \quad (2.38)$$

$$R_{abcd} + R_{adbc} + R_{acdb} = 0. \quad (2.39)$$

O Tensor de curvatura obedece a um conjunto de identidades diferenciais conhecidas como identidades de Bianchi [32]. Escrevendo as identidades, segue que:

$$\nabla_a R_{bcde} + \nabla_c R_{abde} + \nabla_b R_{cade} = 0. \quad (2.40)$$

### 2.2.5 Geometria riemanniana

O ponto de partida de Riemann foi a fórmula da distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos. Na geometria euclidiana, por exemplo, essa distância é dada por:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.41)$$

Dessa forma a métrica  $g_{ab}$  para esse espaço euclidiano é uma matriz de ordem 3, que também é uma matriz identidade. Riemann mostrou que existem muitas formas de apresentar distâncias e propriedades de um espaço a partir de uma dada métrica. Na geometria de Riemann qualquer espaço pode ser caracterizado por um intervalo do tipo:

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b. \quad (2.42)$$

Em um espaço provido de um tensor métrico é possível transformar índices contravariantes em covariantes e vice-versa e definir operações como o produto escalar; por exemplo, na expressão da identidade de Bianchi 2.40, tem-se:

$$R_{abcd} = g_{af}R_{bcd}^f. \quad (2.43)$$

Definindo agora o tensor de curvatura de Ricci  $R_{ab}$ :

$$R_{ab} = R_{acb}^c = g_{cd}R_{dacb}. \quad (2.44)$$

A curvatura escalar é uma *variedade de Riemann*<sup>1</sup> definida como o traço do tensor de Ricci. E em coordenadas locais tem-se:

$$R = g^{ab}R_{ab}. \quad (2.45)$$

Com esses elementos é possível definir o tensor de Einstein, que se apresenta na forma:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R. \quad (2.46)$$

---

<sup>1</sup>Variedade de Riemann é uma generalização do conceito métrico, diferencial e topológico do espaço euclidiano a objetos geométricos que localmente tem a mesma estrutura que o espaço euclidiano mas globalmente podem representar uma forma “curva” [27].

Esse tensor é um tensor simétrico, então  $G_{ab} = G_{ba}$ . Usando a identidade de Bianchi da equação 2.40, tem-se:

$$\nabla^b G_{ab} = 0. \quad (2.47)$$

## 2.3 Relatividade Geral

A relatividade geral, também conhecida como teoria da relatividade geral (TRG), é a teoria geométrica da gravitação publicada por Albert Einstein em 1915 [15] e a descrição atual da gravitação na física moderna. A relatividade geral generaliza a relatividade especial e refina a lei da gravitação universal de Newton, fornecendo uma descrição unificada da gravidade como uma propriedade geométrica do espaço e do tempo, ou espaço-tempo. Em particular, a curvatura do espaço-tempo está diretamente relacionada à energia e momento de qualquer matéria e radiação presente. A relação é especificada pelas equações de campo de Einstein, um sistema de equações diferenciais parciais.

### 2.3.1 Princípio da equivalência

Antes de discutir sobre o princípio da equivalência é necessário analisar os diferentes tipos de massa que se apresentam na natureza, e que são estudadas pela mecânica clássica, são elas: a massa inercial e a massa gravitacional. Pensando em dois sistemas distintos onde essas massas podem ser medidas, defini-se um sistema inercial como aquele em que uma partícula livre se move com velocidade constante, com forças externas nulas, e o outro sistema que está sob a ação força da gravidade, força esta que atua a longo alcance. Essa divergência entre esses dois conceitos leva a conclusão que, a rigor, não existe um sistema inercial no universo. Olhando agora a teoria da gravitação de Newton, quando a aceleração gravitacional atua sobre um corpo, ela na verdade está atuando na massa gravitacional desse corpo,  $m_g$ . O curioso é que, apesar das duas massas serem independentes, o resultado da ação da força corresponde a aceleração da massa inercial desse corpo,  $m_i$ .

$$m_i = m_g. \quad (2.48)$$

Por conta da relação que aparece na equação 2.48, o princípio da equivalência se torna evidente, mostrando que não se pode distinguir o movimento de um corpo em um sistema de referência inercial de um não-inercial na presença de campos gravitacionais. Ou seja, se lançados vários corpos no vácuo sob a ação de um campo gravitacional, todos esses corpos vão cair com a mesma aceleração, podendo também ser observado que a razão entre as massas  $m_g$  e  $m_i$  continuam sendo 1 independente do formato e ou tamanho dos corpos. Então, pode-se dizer que um experimento realizado em um laboratório submetido a um campo gravitacional, terá os fenômenos mecânicos iguais aqueles observados em um sistema inercial na ausência desse mesmo campo.

Em suma, o princípio da equivalência estabelece que um corpo em queda livre sob a influência de um campo gravitacional estará submetido as mesmas leis da física observadas em um sistema inercial na ausência desse campo gravitacional.

### 2.3.2 Equação de campo de Einstein

Devido a equivalência entre matéria e energia da relatividade especial e do princípio da equivalência, pode-se concluir que toda forma de energia gera um campo gravitacional, o que leva a crer que o tensor momento-energia,  $T_{ab}$ , é um termo fonte das equações de Einstein. As equações de campo de Einstein estabelecem então que a métrica corresponde a geometria do espaço e a geometria é o efeito de uma quantidade de matéria. A matéria causa curvatura no espaço tempo e é expressa através do tensor momento-energia. Usando o formalismo riemanniano para conectar matéria e métrica, é possível escrever a divergência do tensor de Einstein como:

$$\nabla^b G_{ab} = 0. \quad (2.49)$$

Ainda é possível impor a condição da relatividade especial, de que o tensor de energia-momento é conservado, pois existe a conservação da energia e do momento no campo de matéria. Por essas leis de conservação pode-se generalizar a derivada covariante do tensor  $T_{ab}$  para um espaço curvo como:

$$\nabla^b T_{ab} = 0. \quad (2.50)$$

Sendo assim, é possível dizer que  $G_{ab}$  é proporcional ao tensor  $T_{ab}$ , ou seja:

$$G_{ab} = \kappa T_{ab}. \quad (2.51)$$

Como o tensor de Einstein é dado pela equação 2.46, é possível escrever a seguinte relação:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \kappa T_{ab}, \quad (2.52)$$

onde  $\kappa \equiv \frac{8\pi G}{c^4}$ , em que  $G$  é a constante gravitacional de Newton e  $c$  é a velocidade da luz. A equação 2.52 é chamada equação de Campo de Einstein.

### 2.3.3 O escalar de curvatura de Ricci (R)

Na equação de Einstein o tensor energia-momento se relaciona diretamente com o termo do escalar de Ricci. Para entender essa relação e papel do  $R$  nessa equação, temos que pensar no que significa o  $T_{ab}$ . O tensor energia-momento abrange tudo que precisamos saber da energia e do momento dos campos que atuam como fonte de gravidade. Sendo assim, o lado esquerdo da equação 2.52 nos informa a curvatura do espaço, e do lado direito dessa mesma equação podemos mensurar a energia e o momento contida na curvatura. Usando a relação  $T_{ab} = g_{ai}g_{bj}T^{ij}$ , temos que:

- (i)  $T^{00} \rightarrow$  densidade de massa energia;
- (ii)  $T^{j0} \rightarrow$  densidade da componente j do momento;
- (iii)  $T^{0k} \rightarrow$  densidade da componente k do fluxo de energia;
- (iv)  $T^{jk} \rightarrow$  componente k do fluxo da componente j do momento.

Contraindo a equação 2.52 com  $g_{ab}$  podemos obter uma forma alternativa para essa relação, escrevemos então:

$$R = \kappa T^a_a. \quad (2.53)$$

Esse resultado é importante por mostrar como a função que determina a curvatura do espaço varia, para cada uma das suas componentes, em relação com as componentes do tensor  $T_{aa}$ . Um exemplo, é que no vácuo  $T_{aa}$  se anula e a equação de campo de Einstein se resume a  $R = 0$ , o que nos mostra que na ausência de matéria ou energia, a curvatura do espaço é nula.

### 2.3.4 Solução de Schwarzschild

O físico alemão Karl Schwarzschild em 1916 ofereceu a primeira solução das equações de campo de Einstein. Ele trabalhava nas soluções para o caso de vácuo antes mesmo das equações de campo finais serem divulgadas. Essas só foram divulgadas em 1915. Ele acabou por usar uma versão anterior dos trabalhos de Einstein. A solução proposta para as equações de campo levou o nome do próprio Schwarzschild. Essa solução desencadeou uma série de experimentos para testar a validade da teoria da relatividade geral. Testes como o valor do desvio do periélio de Mercúrio e a predição de desvio da luz de origem gravitacional[32].

A solução de Schwarzschild é a solução mais simples para as equações de Einstein [36]. Essa solução descreve o campo gravitacional em uma região nas proximidades de um corpo celeste, uma estrela por exemplo. Essa solução é independente do tempo e possui uma simetria esférica. Restringindo o estudo a região sem a presença de matéria, o tensor  $T_{ab} = 0$  e portanto  $R_{ab} = 0$ . Para uma distância muito grande a métrica deve se reduzir a métrica de Minkowski, dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.54)$$

Como essa métrica é independente do tempo, é possível escrever  $-dt$  como  $dt$ , sem afetar a métrica. As componentes da métrica devem ser independentes do tempo. Uma forma geral de escrever essa métrica é:

$$ds^2 = -e^{\alpha(r)} dt^2 + e^{\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.55)$$

Escrevendo dessa forma, as exponenciais aparecem para que as funções de  $r$  garantam que a assinatura da métrica permaneça a mesma, e  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ . A partir da equação 2.55, calcula-se os símbolos de Christoffel e depois deles o tensor de Riemann. Fazendo as contrações

se obtém o tensor de Ricci e por último, impondo a condição  $R_{tt} = R_{\theta\theta} = R_{\varphi\varphi} = 0$ , obtendo dessa forma a seguinte relação:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.56)$$

em que  $r_s$  é uma constante, também conhecida como o raio de Schwarzschild. No limite newtoniano  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ , o que permite a interpretação de  $M$  como a massa newtoniana. A relação entre a métrica de Schwarzschild e a métrica de Minkowski se dá no limite em que  $r \rightarrow \infty$ , mostrando que o termo  $t$  corresponde ao tempo medido por um observador distante da origem [32].

### 2.3.5 O buraco negro

Segundo a teoria da relatividade de Einstein, a gravidade ocorre pela deformação do espaço-tempo na presença de um corpo celeste, um planeta ou uma estrela, por exemplo. Nesse caso, quanto maior a massa desse corpo celeste maior a deformação que o tecido do espaço-tempo sofre, e a força da gravidade é proporcional a essa deformação.

No caso do buraco negro a concentração de massa é muito grande em uma região do espaço muito pequena, gerando assim uma grande deformação no espaço-tempo, por consequência criando uma grande força de atração de origem gravitacional. Para todo campo gravitacional tem-se uma velocidade característica,  $v_{esq}$ , que é proporcional a quantidade de movimento que se precisa ter para escapar da atração desse campo. Essa velocidade também é conhecida como velocidade de escape. No caso do buraco negro o  $v_{esq} > c$  no horizonte de evento, ou seja, nem a luz consegue escapar a sua atração, por isso o nome buraco negro, como mostra a figura 2.2.

Na mecânica clássica é relativamente simples calcular a velocidade de escape que um objeto precisa ter para fugir de uma atração gravitacional de um segundo objeto. A velocidade de escape é obtida a partir da condição de que no infinito a energia mecânica do corpo lançado é nula. Logo:

$$\frac{m \cdot v_{esq}^2}{2} - G \frac{mM}{r} = 0, \quad (2.57)$$

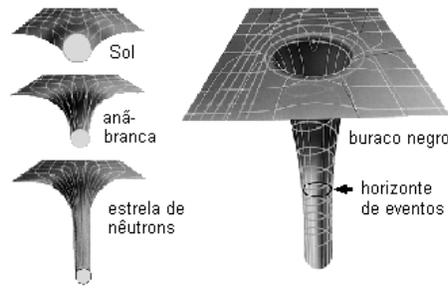


Figura 2.2: Diferentes deformações no espaço-tempo [1].

então tem-se:

$$v_{esq} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}. \quad (2.58)$$

Se a velocidade de escape necessária for igual a velocidade da luz,  $c$ , então pode-se encontrar o raio de um objeto de massa  $M$  para que nem a luz consiga escapar dele. Invertendo e substituindo a velocidade, tem-se que:

$$r_h = \frac{2GM}{c^2}. \quad (2.59)$$

Esse é o raio do horizonte de evento de um buraco negro, dentro da teoria newtoniana. Curiosamente esse raio,  $r_h$  é o mesmo valor do raio de Schwarzschild,  $r_s$ .

---

---

# CAPÍTULO 3

---

## TEORIA DE GINZBURG-LANDAU

### 3.1 Contexto Histórico

No ano de 1911 em seu laboratório na Universidade de Leiden na Holanda, o físico Heike Kamerlingh-Onnes, foi o único a ter um nível quase industrial de aparelhos. Esses por sua vez foram úteis para a liquefação de oxigênio e, posteriormente, de hidrogênio, e ainda ter quantidades suficientes de hélio para poder o liquefazer também [31]. Entretanto, foi Gilles Holst, um colaborador de Onnes, o primeiro a observar que resfriando uma amostra de Mercúrio abaixo de 4,2 Kelvin ( $K$ ) ou  $-268,8^{\circ}\text{C}$  existia um mudança abrupta na resistividade elétrica do material, ver figura 3.1. Com a ausência de resistência elétrica, a corrente elétrica podia fluir sem perdas no mercúrio, culminando na descoberta da supercondutividade [31].

Essas temperaturas baixas foram possíveis graças a liquefação do hélio, obtida em 1908. O procedimento era tão difícil que durante 15 anos a universidade de Leiden era a única do mundo a deter tal técnica. Atingindo esse novo estado da matéria é possível fazer um fluxo de corrente elétrica em um circuito sem qualquer fonte de tensão. Uma vez iniciado, os elétrons atingem indefinidamente a velocidade constante, sem qualquer perda de velocidade. Com esses estudos de propriedades da matéria a baixas temperaturas, Onnes foi laureado com o prêmio Nobel de Física de 1913.

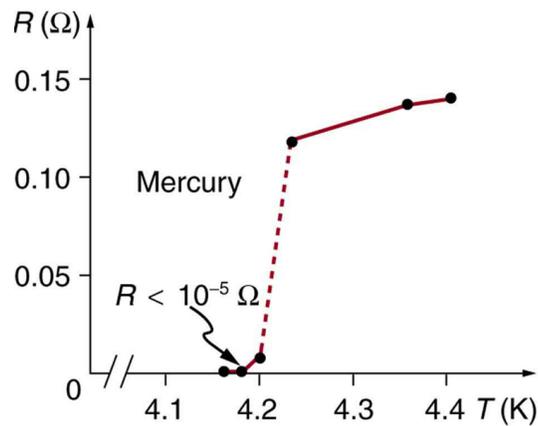


Figura 3.1: Relação entre temperatura e resistividade elétrica em uma amostra de mercúrio, resultados obtidos por Onnes [31].

Essa temperatura de transição ficou conhecida como temperatura crítica,  $T_c$ , uma temperatura tão baixa que se aproximava do zero absoluto, zero Kelvin, e marcava a transição de fase de um chamado estado normal de um material para um estado supercondutor. Como mostra a figura 3.2, essa é a primeira marca de um supercondutor, a *condutividade perfeita*.

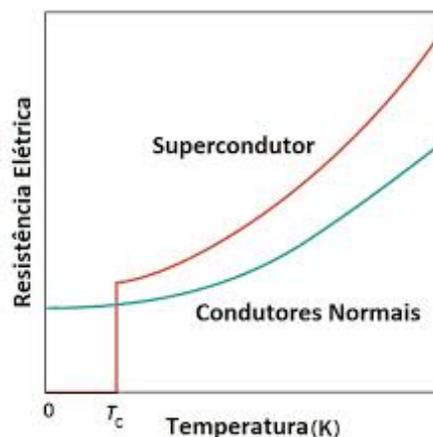


Figura 3.2: Relação entre temperatura e resistividade em um supercondutor [2].

Um outro marco para o estudo da supercondutividade foi o descobrimento do *diamagnetismo perfeito*. Sendo a supercondutividade uma característica intrínseca de determinados materiais, alguns estudos foram realizados e essa outra característica importante dos supercondutores foi descoberta por W. Meissner e R. Ochsenfeld em 1933. Eles descobriram que os materiais na sua fase de supercondutores interagem com um campo magnético de tal forma que

as linhas de magnetização são completamente expelidas, ou seja, não atravessam o interior de seu corpo, até um determinado campo crítico,  $H_c$ , que está relacionado com a energia livre do estado normal e do estado supercondutor a campo nulo [17]. Esse efeito levou o nome de seu descobridor e pode ser visualizado como mostra a figura 3.3 [30].

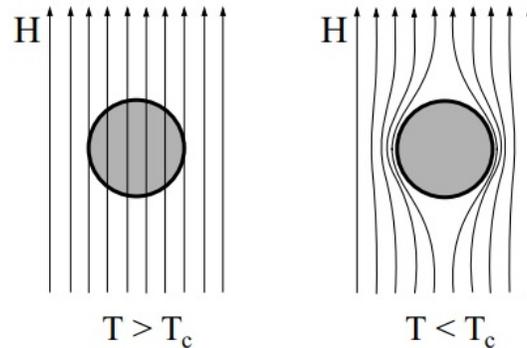


Figura 3.3: Efeito Meissner em um supercondutor esférico submetido a um campo magnético constante.

A partir dessas descobertas, a curiosidade dos cientistas aumenta para explicar esse novo fenômeno, a supercondutividade, mas somente em 1935, surge uma explicação fenomenológica para descrevê-la. Essa teoria “explicativa” aparece com os irmãos London, Fritz e Heinz London. Eles conseguiram incluir os efeitos de condutividade perfeita e efeito Meissner e explicar o comportamento de vórtices em supercondutores do tipo-II, definindo ainda na mesma teoria, um comprimento de penetração que determina a espessura da região em que o campo magnético penetra no supercondutor [28].

Na sequência histórica, um outro passo para a explicação do fenômeno da supercondutividade, aparece no ano 1950, com o trabalho de Vitaly Ginzburg e Lev Landau, que propuseram uma explicação que abrangia a maioria das características macroscópicas de um supercondutor. Essa teoria ficou conhecida como Teoria de Ginzburg-Landau [19] e introduz uma função de onda complexa  $\psi(\mathbf{r})$  e um potencial vetor  $A(\mathbf{r})$ , incluindo ainda as características essenciais de um supercondutor como: comprimento de penetração,  $\lambda(T)$ , e o comprimento de coerência,  $\xi(T)$ , que descreve a variação espacial do parâmetro  $\psi(\mathbf{r})$  [37]. Com esse ferramental, a teoria de Ginzburg-Landau fornece um novo parâmetro, dado pela razão entre os dois comprimentos

característicos,  $\kappa \equiv \lambda/\xi$ . Esse novo parâmetro leva o nome de seus propositores, e permite através dele classificar os supercondutores em tipo-I e tipo-II. É possível mostrar que com o  $\kappa \rightarrow \infty$  recupera-se a teoria de London.

## 3.2 Teoria de London

Como já fora discutido anteriormente, o efeito Meissner-Ochsenfeld é um dos mais importantes na supercondutividade, passou-se 2 anos da descoberta do fenômeno até uma teoria que explicasse os seus efeitos, e mais 20 anos até a teoria BCS que explicaria seus efeitos a partir de um ponto de vista microscópico. A teoria dos irmãos London é uma explicação fenomenológica que descreve os supercondutores [28], introduzindo o parâmetro  $\lambda(T)$  e explicando os vórtices no supercondutor do tipo-II. Essa teoria se baseia em suposições simples: a primeira delas é que um estado supercondutor existe quando  $T < T_c$  e que apenas uma densidade  $n_s(T)$  da densidade total de elétrons,  $n$ , consegue participar da supercorrente que aparece.

A densidade de superelétrons de condução,  $n_s$ , depende da temperatura. Uma primeira consequência disso é quando  $T = T_c$ ,  $n_s(T_c) = 0$ , ou seja, não existe mais o estado supercondutor. Outra consequência é quando  $T \ll T_c$ , a densidade de superelétrons aumenta até quase a densidade total,  $n$ , e para  $T = 0$ , tem-se que  $n_s(0) = n$ . A fração remanescente de elétrons constitui um “fluido normal”, dado por  $n - n_s$ , que fica praticamente inerte [29].

As equações de London no S.I. são as seguintes [37]:

$$\mathbf{E} = \mu_0 \lambda_L^2 \frac{d}{dt} \mathbf{J}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{H} = -\mu_0 \lambda_L^2 \nabla \times \mathbf{J}, \quad (3.2)$$

onde  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{E}$  são os campos magnético e elétrico, respectivamente.  $\mathbf{J}$  é a densidade de corrente,  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo, e  $\lambda_L$  é o comprimento de penetração,

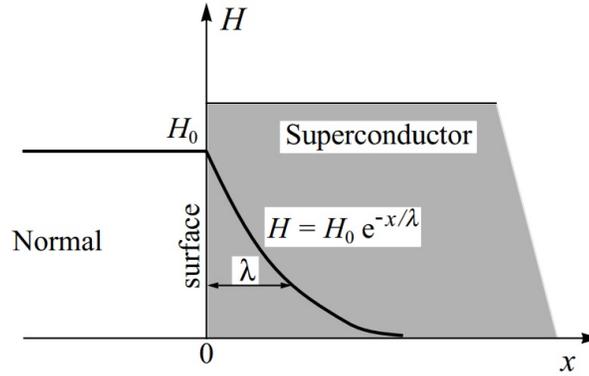


Figura 3.4: Penetração do campo magnético ( $\mathbf{H}$ ) através de um supercondutor.

dado por:

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m^*}{\mu_0 n_s e^{*2}}}, \quad (3.3)$$

onde  $m^*$  é a massa dos portadores de carga do estado supercondutor, e  $e^*$  é a carga do elétron. Para o caso unidimensional, é possível escrever a seguinte relação:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} = \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{H}, \quad (3.4)$$

que tem como solução:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cdot e^{-\frac{x}{\lambda_L}}. \quad (3.5)$$

Sendo assim, a equação de London acarreta no efeito Meissiner, prevendo em sua solução que o campo só pode ocupar uma camada de espessura  $\lambda_L$  da superfície. A figura 3.4 mostra como o efeito Meissiner aparece através da solução da equação de London [30].

### 3.3 Teoria de Ginzburg-Landau

Em 1950, V.L. Ginzburg e L.D. Landau propuseram uma teoria que foi um triunfo da intuição física, introduzindo uma pseudo-autofunção  $\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2 \cdot e^{i\phi(\mathbf{r})}$ , como um parâmetro de ordem complexo. A função  $\psi(\mathbf{r})$  tem o seu módulo quadrado representando a densidade

local de elétrons supercondutores.

$$|\psi(\mathbf{r})|^2 = n_s. \quad (3.6)$$

A teoria foi desenvolvida a partir do método variacional expandindo a densidade de energia livre do sistema em potências de  $|\psi(\mathbf{r})|^2$  e  $|\nabla\psi(\mathbf{r})|^2$  e com isso é possível escrever a energia livre de um supercondutor em função do parâmetro de ordem  $\psi(\mathbf{r})$  e do potencial vetor  $\mathbf{A}$  [37].

### 3.3.1 Energia Livre de Ginzburg-Landau

O postulado básico da teoria diz que  $\psi$  é pequeno e evolui lentamente no espaço<sup>1</sup>. Assume-se que a descrição termodinâmica do sistema pode ser feita expandindo a densidade de energia livre de Helmholtz e que próximo a temperatura de transição,  $T_c$ , para isso é suficiente reter apenas os primeiros termos desta expansão. Esta abordagem está inspirada na teoria de transição de fase de 2<sup>a</sup> ordem proposta por Landau. Esta expansão em campo nulo tem a forma:

$$\mathcal{F}_s[\psi] = \int_{\Omega} \left[ f_n + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \gamma|\nabla\psi|^2 \right] dV, \quad (3.7)$$

onde  $\mathcal{F}_s$  é a energia livre de Helmholtz do estado supercondutor. Já o  $f_n$  é a densidade de energia do estado normal. Os termos que estão associados aos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  são oriundos da expansão da energia de condensação de um supercondutor proposta por Landau. O termo que é acompanhado do parâmetro  $\gamma$  é o custo da energia livre pela variação espacial em  $\psi$ , com  $\gamma = \hbar/2m^*$ . Em um caso de uma amostra homogênea, a energia livre não varia com a posição, então o termo  $\nabla\psi$  é nulo. Sendo assim é possível escrever a seguinte equação:

$$f_s[\psi] = f_n + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4. \quad (3.8)$$

O estado de equilíbrio para um sistema com essa energia pode ser encontrado minimizando essa energia em relação a  $\psi$ , que dita o comportamento dos elétrons supercondutores na amostra.

---

<sup>1</sup>A energia livre para esse sistema vai ser expandida em série de potências pares do parâmetro de ordem  $|\psi|^2$  para garantir a possibilidade de uma simetria na inversão  $\psi \rightarrow -\psi$ .

Fazendo essa minimização, tem-se:

$$\frac{\partial f_s}{\partial \psi^*} = 0, \quad (3.9)$$

e

$$\frac{\partial f_s}{\partial \psi^*} = 2\alpha(T)|\psi| + 2\beta|\psi|^2\psi. \quad (3.10)$$

Então é possível escrever a seguinte relação:

$$2\alpha(T)|\psi| + 2\beta|\psi|^2\psi = 0. \quad (3.11)$$

As soluções para equação 3.11 são  $|\psi|^2 = 0$  e  $|\psi|^2 = -\alpha/\beta$ . Fazendo a suposição que  $\beta$  seja uma constante positiva relacionada ao material, para cada uma dessas soluções existirá uma condição física distinta. A partir dessa informação, é inferível que a solução  $|\psi|^2 = 0$  ocorra quando a temperatura  $T$  da amostra esteja acima de  $T_c$ , pois não deverá mais existir superelétrons, fica mais evidente se olharmos a diferença na densidade de energia livre como mostra a figura 3.5. Olhando agora para segunda solução,  $|\psi|^2 = -\alpha/\beta$ , percebe-se que o termo  $-\alpha/\beta$  deve ser positivo abaixo de  $T_c$ , o que gera uma necessidade que  $\alpha(T)$  mude de sinal quando atingir a temperatura  $T_c$ , de modo que o mínimo de  $f_s$  ocorra em  $n_s = 0$ . Assumindo  $\alpha(T) = \alpha_0(T - T_c)$ , onde  $\alpha_0$  é uma constante positiva, torna-se possível escrever a seguinte relação:

$$f_s - f_n = \alpha_0(T - T_c)|\psi|^2 + \beta|\psi|^4. \quad (3.12)$$

Na presença de um campo magnético externo, a análise feita da energia de Ginzburg-Landau até aqui continua válida, com o acréscimo de outros termos, no entanto. Para isso é preciso reescrever do termo que acompanha  $\gamma$  na equação 3.7, da seguinte forma:

$$\frac{\hbar}{i}\nabla \rightarrow \frac{\hbar}{i}\nabla - e^*\mathbf{A}. \quad (3.13)$$

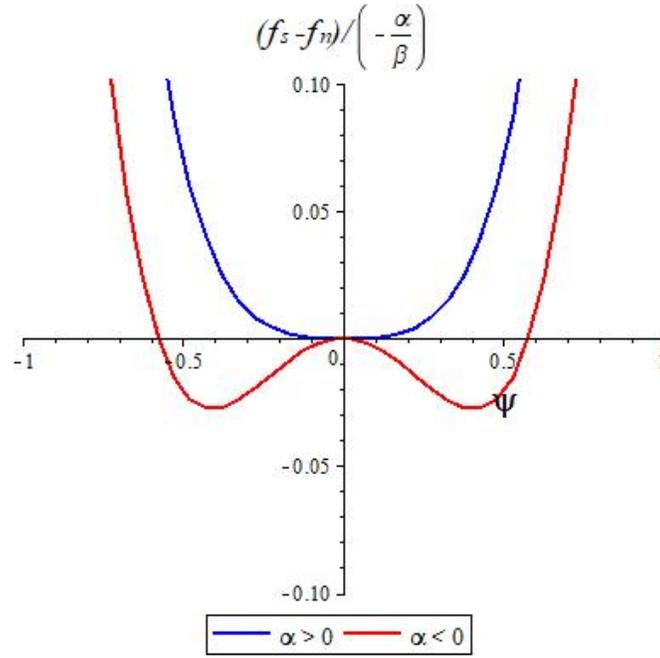


Figura 3.5: Diferença de densidade de energia livre para os casos onde  $\alpha < 0$  e para  $\alpha > 0$ .

onde  $m^*$  e  $e^*$  são, respectivamente, a massa e a carga dos portadores e  $\mathbf{A}$  está relacionado com o campo magnético microscópico,  $\mathbf{h} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Sendo a mudança apresentada na equação 3.13 necessária para garantir a invariância de calibre na energia de GL. Assim a energia GL pode ser escrita como:

$$\mathcal{F}_s[\psi, \mathbf{A}] = \int_{\Omega} \left[ f_n + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - e^* \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{\mathbf{h}^2}{2\mu_0} \right] dV. \quad (3.14)$$

A constante  $\beta$  é sempre positiva e o parâmetro  $\alpha$  pode ser negativo ou positivo, a depender se  $T$  é maior ou menor que  $T_c$ , como já foi descrito. Para o caso com  $T < T_c$ , espera-se que o efeito Meissner apareça. Com isso um campo magnético  $H < H_c$  externo será expulso de dentro da amostra. Para que isso seja possível é necessária uma energia magnética da ordem de  $\mu_0 H_0/2$ . Se o campo externo aplicado for maior que  $H_c$ , o estado supercondutor é destruído, retornando assim ao estado normal. O campo crítico,  $H_c$ , se relaciona com a temperatura da

seguinte maneira [13]:

$$H_c(T) = H_c(0) \left[ 1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right]. \quad (3.15)$$

A diferença entre as duas fases, a normal e a supercondutora, à mesma temperatura e campo nulo é dada por:

$$f_s - f_n = \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \rightarrow \mu_0 H_c = \frac{\alpha^2}{\beta}. \quad (3.16)$$

### 3.3.2 Equações de Ginzburg-Landau

Para obter as equações de GL é necessário minimizar a densidade energia em relação a seus parâmetros,  $\psi$  e  $\mathbf{A}$ . Na ausência de condições de contornos, correntes, gradientes e campos a energia livre apresentada na equação 3.14, tem a função de onda  $\psi = \psi_\infty$  como solução, que é uma função de onda homogênea em uma amostra de dimensões espaciais infinitas. Minimizando a energia livre em relação a  $\psi^*$ ,

$$\frac{\partial \mathcal{F}[\psi, \mathbf{A}]}{\partial \psi^*} = 0, \quad (3.17)$$

obtém-se a primeira equação de GL:

$$\alpha\psi(\mathbf{r}) + \beta|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2m^*} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - e^* \mathbf{A} \right)^2 \psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.18)$$

Quando campos, correntes ou gradientes são impostos ao sistema, a função de onda pode assumir a seguinte solução  $\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|e^{i\varphi(\mathbf{r})}$ . O próximo passo, após integrar a densidade de energia do supercondutor, é minimizar a equação 3.14 em relação ao potencial vetor,  $\mathbf{A}$ , e obter a segunda equação de GL

$$\mathbf{j}_s = \frac{-ie^* \hbar}{2m^*} [\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*] - \frac{e^{*2}}{m^*} |\psi|^2 \mathbf{A} \quad (3.19)$$

ou

$$\mathbf{j}_s = \frac{e^{*2}}{m^*} |\psi|^2 (\hbar \nabla \phi - e^* \mathbf{A}) \quad (3.20)$$

onde  $\mathbf{j}_s$  é a densidade de supercorrente. Nota-se também que a expressão 3.19 é a mesma utilizada usualmente no cálculo da corrente na mecânica quântica para uma partícula de carga  $e^*$  e massa  $m^*$ . A equação 3.18 é similar a equação de Schrödinger, exceto pelo termo não linear  $\beta |\psi|^2 \psi$ , que atua como potencial repulsivo sobre a própria função de onda, o que gera uma tendência de se espalhar e criar uma uniformidade espacial para função de onda  $\psi$ . Ainda sobre a primeira equação de GL, sua função de onda é  $\psi$  e o seu autovalor de energia é  $-\alpha$ . Ao executar um procedimento variacional, é necessário fornecer condições de contorno. Uma escolha possível que garante que a corrente que não passe pelas superfícies:

$$\left( \frac{\hbar}{i} \nabla - e^* \mathbf{A} \right) \psi|_{\hat{n}} = 0, \quad (3.21)$$

essa é a condição de contorno usada por de Gennes [13], que é apropriada para uma superfície isolante. Se a superfície estiver em contato com um meio qualquer, utilizando a teoria microscópica, de Gennes mostrou que em uma interface metal-supercondutor sem corrente externa, pode ser generalizada para:

$$\left( \frac{\hbar}{i} \nabla - e^* \mathbf{A} \right) \psi|_{\hat{n}} = \frac{i\hbar}{b} \psi, \quad (3.22)$$

onde  $b$  é uma constante positiva. A figura 3.6 mostra que  $b$  é o comprimento de extrapolação, que mede como o parâmetro  $\psi$  vai a zero se a inclinação que se tinha antes de ultrapassar a superfície fosse mantida. O valor de  $b$  depende da natureza do material com o qual é feito o contato.

### 3.3.3 Comprimentos Característicos

A teoria de Ginzburg-Landau introduz dois comprimentos característicos. O primeiro é o comprimento de penetração  $\lambda(T)$ , já discutido anteriormente e apresentado na equação 3.3. Para ver o segundo comprimento, o que é oriundo da formulação de Ginzburg e Landau, podemos começar olhando para Eq. 3.18, e supor algumas condições de contorno que darão argumentos para introduzir esse segundo comprimento característico do condensado. Esperamos

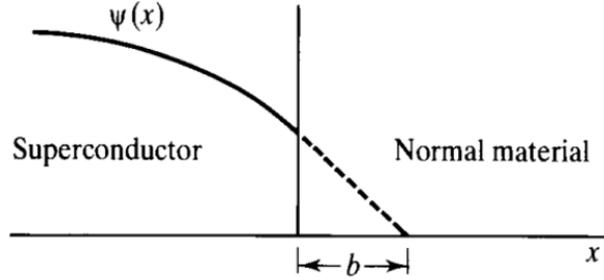


Figura 3.6: Dependência espacial do parâmetro  $\psi$  na interface entre uma amostra supercondutora e um metal comum [37].

que na superfície do material a supercondutividade se anule, o que equivale a  $\psi = 0$ . Uma outra condição importante é utilizar o valor de  $\psi$  homogêneo na ausência de campos magnéticos externos ( $\mathbf{A} = 0$ ), chamamos essa função de onda de  $\psi_\infty$ , que é o valor de  $\psi$  muito afastado da superfície. Reescrevendo a Eq. 3.18, temos:

$$\alpha\psi_\infty + \beta|\psi_\infty|^2\psi_\infty = 0, \quad (3.23)$$

e usando a mesma definição anterior

$$n_{s\infty} \equiv |\psi_\infty|^2 = -\frac{\alpha}{\beta} > 0. \quad (3.24)$$

Se introduzirmos uma função de onda normalizada,  $\phi = \psi/\psi_\infty$ , a equação em uma dimensão se torna:

$$\frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|} \frac{d^2\phi}{dx^2} + \phi - \phi^3 = 0. \quad (3.25)$$

É natural definir o comprimento de coerência  $\xi(T)$  por variação de  $\psi$  como:

$$\xi^2(T) = \frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha(T)|}, \quad (3.26)$$

com essas definições, chegamos a seguinte solução exata para equação 3.25:

$$\phi = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi}\right) \quad (3.27)$$

Em síntese, esse segundo comprimento característico é chamado de comprimento de coerência  $\xi(T)$  e está associado a variação do parâmetro de ordem ao longo do condensado. Sendo assim, ele descreve o comportamento dos elétrons supercondutores dentro da amostra supercondutora. Essa relação fica mais clara na figura 3.7, e como vimos a TGL fornece o comprimento de coerência dado por:

$$\xi(T) = \frac{\hbar}{|2m^*\alpha(T)|^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.28)$$

Esse comprimento caracteriza a distância pela qual  $\psi$  pode variar. Em distâncias  $\gg \xi$ ,  $\psi$  é constante. Em distâncias  $\ll \xi$ ,  $\psi$  pode variar muito. Em um supercondutor puro, próximo a temperatura  $T_c$ ,  $\xi(T) \approx \xi_0$  (sem dependência com a temperatura). Próximo a temperatura crítica  $\xi(T)$  diverge, pois  $\alpha \rightarrow 0$ . Então é possível ver que os dois comprimentos tem relação entre si.

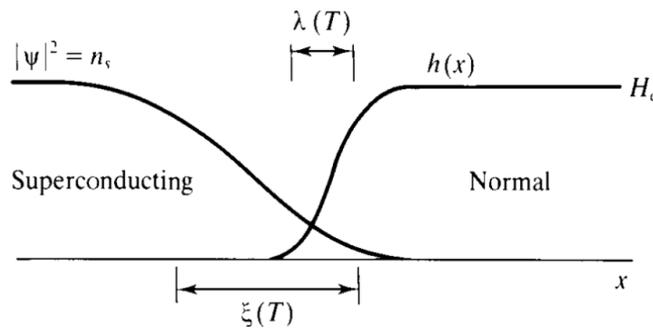


Figura 3.7: Dependência espacial do parâmetro  $\psi$  e do campo magnético  $\mathbf{h}$  na interface entre uma amostra supercondutora e um isolante, expressando o significado físico dos comprimentos  $\lambda(T)$  e  $\xi(T)$  [37].

A razão entre os dois comprimentos característicos define o parâmetro de Ginzburg-

Landau:

$$\kappa = \frac{\lambda(T)}{\xi(T)}, \quad (3.29)$$

como o  $\lambda$  diverge à medida que  $T$  se aproxima da temperatura crítica, com  $\lambda \propto \frac{1}{T}$ , essa razão adimensional,  $\kappa$ , é independente da temperatura.

### 3.3.4 Tipos de Supercondutores

A classificação dos supercondutores é feita em dois tipos: tipo-I e tipo-II. O parâmetro de GL,  $\kappa$ , é quem permite essa classificação. Essa classificação vai mostrar como um material supercondutor reage na presença de um campo magnético externo  $\mathbf{H}_0$  aplicado. Conforme definido por Abrikosov [6], um supercondutor é do tipo I se  $\kappa < 1/\sqrt{2}$ , caso  $\kappa > 1/\sqrt{2}$  o supercondutor é do tipo-II. Essa relação é apresentada na figura 3.8.

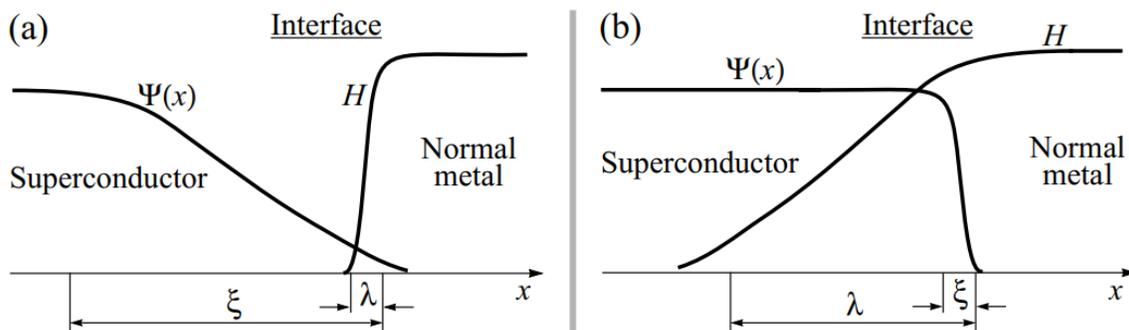


Figura 3.8: Variações espaciais do parâmetro de ordem  $\psi$  e do campo magnético  $H$  na interface de uma interface de metal normal supercondutor para (a)  $\kappa \ll 1$  e (b)  $\kappa \gg 1$  [30].

A figura acima demonstra a relação entre o comprimento de penetração e o comprimento de coerência, onde  $\lambda$  se relaciona diretamente com a distribuição do campo magnético e das supercorrentes na interface supercondutor-normal, da amostra supercondutora, já o  $\xi$  caracteriza a variação espacial do parâmetro de ordem. Qualitativamente, vemos que a energia da superfície é positiva para  $k \ll 1$ , uma vez que existe uma região de espessura  $\sim (\xi - \lambda)$  a partir da qual o campo magnético é mantido (contribuindo para a energia diamagnética positiva), embora não aproveite a condensação total energia associada com  $\psi_\infty$ . O argumento é invertido para  $\kappa \gg 1$ , levando a uma energia de superfície negativa [37].

Em supercondutores do tipo-I, a transição da fase normal para fase supercondutora ocorre quando a temperatura  $T$  do material atinge o valor de  $T_c$ . Valores acima de  $T_c$  não exibem o estado supercondutor, o que inclui também o supercondutor do tipo-II. Esse estado pode ser destruído também com a aplicação de um campo magnético  $H_c$ . Então se aplicado um campo  $H_0 < H_c$ , o efeito Meissner é observado. Já em um supercondutor do tipo-II, existem dois campos críticos:  $H_{c1}$  e  $H_{c2}$ .

Para supercondutores do tipo-II o efeito Meissner existe quando o campo aplicado  $H_0$  é menor que  $H_{c1}$ . Para campos em que  $H_{c1} < H_0 < H_{c2}$  um novo estado se apresenta, o chamado estado misto, onde existe uma penetração parcial do campo magnético externo, como mostra a figura 3.9, que foi extraída da referência [8].

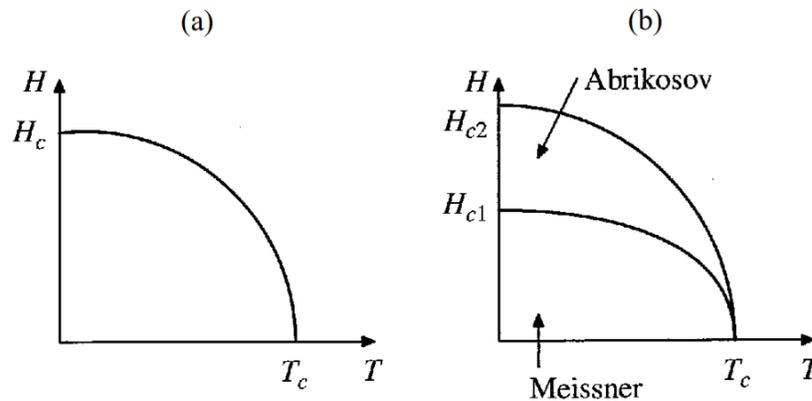


Figura 3.9: Campos críticos em função da temperatura para supercondutores do tipo-I (a) e do tipo-II (b).

### 3.3.5 Rede de Abrikosov

Nos campos logo acima de  $H_{c1}$ , o fluxo de campo magnético começa a penetrar no supercondutor em filamentos microscópicos chamados vórtices. Os vórtices formam uma rede regular (triangular), a rede de Abrikosov. Cada vórtice consiste em um núcleo normal, no qual o campo magnético é grande, cercado por uma região supercondutora e que pode ser aproximado por um cilindro longo com vórtices formando uma rede periódica com soluções para as equações de GL com espaçamentos  $a_{\square}$  e  $a_{\Delta}$ , para uma rede quadrada e outra hexagonal, respectivamente,

ver figura 3.10 obtida na referência [37]. Já na parte interna do cilindro, o parâmetro da ordem supercondutor  $\psi$  é zero. A teoria de Ginzburg-Landau prevê que:

$$H_c(T)\lambda(T)\xi(T) = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}e\mu_0} = \frac{\Phi_0}{2\sqrt{2}\pi\mu_0}, \quad (3.30)$$

onde

$$\Phi_0 \equiv \frac{h}{2e}, \quad (3.31)$$

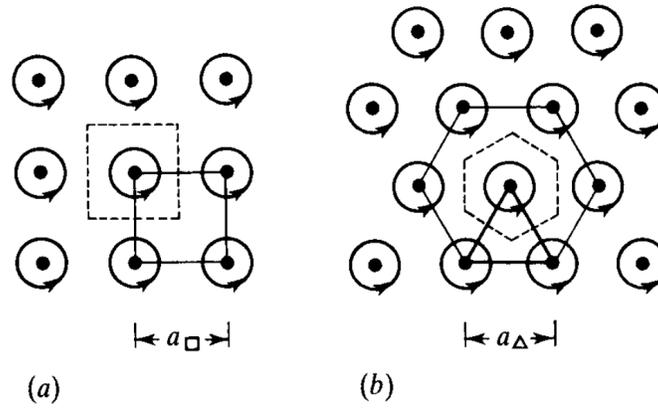


Figura 3.10: Diagrama das soluções das equações de GL para uma rede periódica de vórtices em uma rede quadrada (a) e uma triangular(hexagonal) (b).

$\Phi_0$  é o fluxo magnético quantizado. E se a equação do fluxo for substituída na Eq. 3.30 obtém-se:

$$\Phi_0 = 2\pi\xi(T)^2 H_{c2}. \quad (3.32)$$

Esta é uma importante relação usada com frequência para se encontrar os valores de comprimento de coerência em supercondutores do tipo-II. Ainda é possível descrever uma distância aproximada entre os vórtices a partir dessa solução. Para a rede hexagonal, tem-se:

$$a_{\Delta} = \left(\frac{16}{3}\right)^{1/4} \left(\frac{\Phi_0}{H}\right)^{1/2}, \quad (3.33)$$

e para o caso da rede quadrada:

$$a_{\square} = \left( \frac{\Phi_0}{H} \right)^{1/2}. \quad (3.34)$$

Portanto, por causa da densidade de fluxo,  $a_{\square} < a_{\Delta}$  para o mesmo campo aplicado  $H$ .

### 3.3.6 Equações de Ginzburg-Landau Dependentes do Tempo - TDGL

Em 1968 foi proposto por Gor'kov, um trabalho em que introduzia nas equações de Ginzburg-Landau a dependência temporal do parâmetro de ordem e do potencial vetor [20]. Em um trabalho anterior [21], o mesmo pesquisador, comprovou que para temperaturas próximas a  $T_c$ , a teoria de Ginzburg-Landau emerge naturalmente da teoria BCS <sup>2</sup>. Dessa nova maneira de visualizar a teoria de GL surgiram essas novas equações, que traziam a possibilidade de estudar a dinâmica dos supercondutores ao longo do tempo, e assim acompanhar a evolução dos vórtices entre dois estados estacionários consecutivos [35]. As novas equações são dadas por:

$$\frac{\hbar^2}{2m^*D} \left( \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar e^* \varphi \right) \psi = -\frac{\partial f_s}{\partial \psi^*}, \quad (3.35)$$

e

$$\beta \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \varphi \right) \psi = -\frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{A}}, \quad (3.36)$$

onde  $\varphi$  é o potencial escalar, que está relacionado a uma corrente de transporte;  $\beta$  é a condutividade elétrica;  $D$  é um coeficiente de difusão. O lado direito das equações 3.35 e 3.36, são respectivamente, a primeira e a segunda equação de Ginzburg-Landau. Se substituirmos a energia de GL, equação 3.14, nas equações acima, teremos:

$$\frac{\hbar^2}{2m^*D} \left( \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar e^* \varphi \right) \psi = -\frac{1}{2m^*} \Pi^2 \psi - \alpha \psi - \frac{\beta}{2} |\psi|^2 \psi, \quad (3.37)$$

---

<sup>2</sup>A Teoria BCS foi proposta por John Bardeen, Leon Cooper, e John Robert Schrieffer e explica microscopicamente o fenômeno da supercondutividade [12].

$$\beta \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \varphi \right) = \mathbf{J}_s - \nabla \times \mathbf{h}, \quad (3.38)$$

onde a densidade de supercorrente é dada por:

$$\mathbf{J}_s = \frac{e^*}{m^*} \text{Re}(\psi^* \Pi \psi), \quad (3.39)$$

onde  $\Pi = \left( -i\hbar \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right)$ . As equações resultantes ficaram conhecidas por TDGL (*time-dependent Ginzburg-Landau*).

### 3.4 Teoria BCS

A teoria BCS [11], proposta pelos físicos Bardeen, Cooper e Schrieffer, foi desenvolvida em 1957 e seus autores ganharam o prêmio Nobel de 1972. Essa teoria forneceu um conjunto de ferramentas para a explicação do cálculo dos parâmetros fenomenológicos da supercondutividade, tais como  $H_c$  e  $\lambda$ , mostrando como essas grandezas são resultados de fenômenos microscópicos.

Essa teoria se mostrou correta de várias maneiras distintas, uma das previsões centrais da teoria foi a existência de um gap de energia,  $2\Delta$ , no nível de Fermi. Em um condutor normal, no nível de energia Fermi,  $\epsilon_F$ , os estados estão todos ocupados e existe um número finito de densidades de estados no nível de Fermi,  $g(\epsilon_F)$  [8]. Porém, quando a temperatura do condutor fica abaixo de  $T_c$ , a densidade de estados adquire um gap de  $2\Delta$  separando os estados ocupados dos não ocupados.

Esse gap como parâmetro tem outra importância, em 1960 Gor'kov utilizou a teoria BCS para derivar as equações de Ginzburg-Landau, e deu uma explicação para o parâmetro de ordem,  $\psi$  [21]. Ele relacionou o parâmetro de ordem com a função de onda dos pares de Cooper e também com o parâmetro gap  $\Delta$ .

As três contribuições centrais da teoria BCS para explicar a supercondutividade em um breve resumo, foram:

1. O acoplamento entre elétrons e fônons da estrutura cristalina subjacente. Mostrando assim que podem existir forças efetivas de atração entre dois elétrons;

- 
2. Dois elétrons fora da superfície de Fermi formam um estado ligado estável, mesmo que a anergia seja pequena entre eles;
  3. Schrieffer construiu uma função de onda de muitas partículas em que todos os elétrons próximos da superfície de Fermi são emparelhados. Isso tem a forma de uma função de onda de estado coerente.

---

---

# CAPÍTULO 4

---

## EXTENSÃO DA TEORIA DE GINZBURG-LANDAU

### 4.1 Extensão ao TDGL proposta por Atanasov

Uma tentativa de explorar uma extensão da TDGL é tentar entender como a energia do supercondutor pode ser usada para mudar a curvatura do espaço-tempo. Da mesma forma o caminho inverso: como a curvatura do espaço-tempo possa alterar o estado do condensado. Portanto, é necessário assumir que o condensado é sensível a curvatura do espaço-tempo (ou à sua parte espacial), ou seja, deve-se supor um mecanismo na energia do condensado que acople com o campo geométrico [10]. Esse campo interage gravitacionalmente com outros corpos, seguindo a teoria da Relatividade Geral.

O estudo da interação do campo geométrico com o meio material, pode se dar com a maneira pela qual a curvatura do espaço-tempo afeta as propriedades eletrônicas de um sistema. Se existir uma situação onde a matéria condensada possa afetar as propriedades do espaço-tempo, ou seja, acoplar ao campo geométrico a energia livre desse sistema, de maneira reversível, e que obedeça às leis de conservação de energia, seria então observado a interação

gravitacional com a matéria. Portanto, mudando seu estado, a energia pode ser canalizada para o campo geométrico. Atanasov [9] usou a teoria da supercondutividade de Ginzburg-Landau para incluir uma interação do parâmetro de ordem com o campo geométrico e explorou as suas consequências. Devemos fazer alguns paralelos entre as consequências por ele apresentadas e outras levando em consideração apenas a energia de TDGL com acoplamento aproximado de um campo gravitacional.

#### 4.1.1 A densidade extra de energia livre

Seguindo as propostas do trabalho de Atanasov [9], pretendemos estender as equações usuais de Ginzburg-Landau, explorando não só a possibilidade de usar supercondutores para sondar a curvatura do espaço-tempo, mas também como a curvatura do espaço-tempo pode alterar o estado do condensado. Para isso, neste trabalho, adicionamos uma métrica para o acoplamento entre o campo geométrico e o parâmetro de ordem. Esse termo relaciona o campo gravitacional com o parâmetro de ordem do condensado. Por isso temos algumas consequências que devemos considerar.

Antes de apresentar o termo geométrico de acoplamento, é necessário ver as suposições que precedem a aparição do termo. A primeira delas é que o espaço-tempo onde o supercondutor esteja seja curvo. A segunda, é que preciso supor um espaço quadridimensional  $M$  sendo um produto topológico  $M \approx \mathbb{R} \times \Sigma$ , onde  $\Sigma$  representa um espaço como hiperplano tri-dimensional. Podemos procurar em  $M$  um conjunto de parâmetros que estejam embebidos nesse espaço de forma a obedecer o mapa  $\tau_t : \Sigma \rightarrow M$ , sendo  $\Sigma_t = \tau_t(\Sigma) \subset M$ , ou seja,  $\Sigma_t$  é uma imagem do mapa  $\tau$  em  $M$  com o tempo fixo. Efetivamente o espaço tempo é separável como  $3 + 1$  dimensões e pode induzir uma métrica Riemanniana  $g_{ij}$  tridimensional, para o espaço  $\Sigma_t$ , usando o operador de Laplace-Beltrami,  $\Delta_{LB}\Psi = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_j(\sqrt{|g|}g^{jk}\partial_k\Psi)$ , onde  $\Delta$  é o laplaciano no espaço plano. Utilizando então esse operador, temos que a energia cinética da equação da Schrödinger é sujeita ao campo geométrico do condensado quântico. Sendo que o surgimento de um termo geométrico da energia cinética fica a cargo de uma expansão em série de Taylor em torno da

origem da métrica  $g_{ij}$ , que em coordenadas naturais <sup>1</sup> seria:

$$g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{3}R_{ikjl}x^k x^l + O(|x|^3). \quad (4.1)$$

Usando uma normalização padrão da função de onda,  $\Psi = \psi/|g|^{1/4}$ , temos que:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{LB}\frac{\psi}{|g|^{1/4}} = \frac{1}{|g|^{1/4}}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi - \frac{\hbar^2}{24m}R^{(3d)}\psi\right) + O(|x|). \quad (4.2)$$

Então surge o termo do potencial geométrico associado a energia cinética. A equação de Schrödinger assume a forma de:

$$i\hbar\partial_t\psi = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}\right)\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}\right)\psi + qU\psi + V_{geom}\psi, \quad (4.3)$$

sendo  $V_{geom} = -\frac{\hbar^2}{2m}\sigma R^{(3d)}$ , onde  $R$  é o escalar de Ricci tridimensional e  $\sigma = 1/12$  é um coeficiente numérico devido ao uso do operador de Laplace-Beltrami. Um ponto importante a se observar é que estamos usando o escalar de curvatura de Ricci tridimensional que está relacionado ao quadridimensional através da relação  $R^{(4d)} = \frac{4}{3}R^{(3d)}$ . Essa relação é um produto da suposição inicial que o condensado quântico pode interagir com um espaço-tempo curvo. Assim sendo, podemos analisar a extensão da TDGL. Primeiramente escrevamos a forma usual da energia livre do condensado:

$$\mathcal{F}[\psi, \mathbf{A}] = \int d^3x \mathcal{F}_{GL} \quad (4.4)$$

onde  $\mathcal{F}_{GL}$  é apresentado na Eq. 3.14. Agora para a teoria de GL estendida precisamos incluir o termo geométrico na energia. Esse termo geométrico é dado por:

$$\mathcal{F}_{geom} = \gamma' R^{(3d)} |\psi|^2 \quad (4.5)$$

---

<sup>1</sup>Unidades naturais são unidades físicas de medida definidas em termos de constantes físicas universais de modo tal que quaisquer constantes físicas escolhidas tomam o valor de 1 quando expressos em termos de um conjunto particular de unidades naturais.

e  $\gamma' = \sigma\gamma$ , essa redefinição de  $\gamma$  se dá pela aparição de uma termo multiplicativo na expansão em série do termo geométrico. A nova energia do sistema se apresenta na forma:

$$\mathcal{F}[\psi, \mathbf{A}] = \int d^3x (\mathcal{F}_{GL} + \mathcal{F}_{geom}) \quad (4.6)$$

A energia livre de Ginzburg-Landau tem uma alteração na Eq 3.14 e assumindo a forma da Eq 4.6. Essa extensão da teoria de GL não altera as propriedades de invariância das transformações de gauge.

## 4.2 Consequências da TDGL estendida

Analisando algumas consequências diretas na perturbação da energia livre do condensado, podemos focar o olhar inicialmente para os comprimentos característicos apresentados no capítulo anterior. Primeiramente o comprimento de penetração  $\lambda$ , que se relaciona com o potencial vetor,  $\mathbf{A}$ , e em seguida o comprimento de coerência,  $\xi$ , que por sua vez tem relação com a distribuição da função de onda no material supercondutor. Ainda é possível observar o comportamento do  $\kappa$ , o parâmetro de Ginzburg-Landau, e tentar encontrar alguma distorção nesses termos. Espera-se que qualquer alteração nessa energia possa levar a alguma alteração no comportamento desse parâmetro, e assim se observar possíveis transições de fase no supercondutor. As transições de fase no condensado, como já foi abordado no capítulo anterior, podem ser observadas a partir do comportamento dos comprimentos característicos, principalmente através do  $\kappa$ , que como mostra a Eq. 3.29 relaciona os outros dois comprimentos, gerando um aparato de observação. Com um valor de transição bem definido,  $\kappa_{trans} = 1/\sqrt{2}$ , nos ajudará a prever um ponto onde o supercondutor é do tipo I ou do tipo II, como mostra a figura 3.8. Assim sendo, é útil escrever a energia desse sistema:

$$\mathcal{F}_{GLE} = \mathcal{F}_L + \mathcal{F}_{grad} + w_{mag} + \mathcal{F}_{geom}, \quad (4.7)$$

onde todos os termos já são conhecidos,  $\mathcal{F}_L = \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4$  é o termo de Landau,  $\mathcal{F}_{grad} = \left| \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - e^* \mathbf{A} \right) \psi \right|^2$  é o termo cinético e  $w_{mag} = \mathbf{h}^2/2\mu_0$  é o trabalho realizado pelo campo mag-

nético dentro do supercondutor para anular o campo magnético externo aplicado na amostra, como visto na Eq. 3.14.

Com a expressão conhecida para o funcional da energia livre, o passo seguinte é minimizá-la em relação aos seus parâmetros. Fazendo isso primeiro para o parâmetro de ordem do sistema,  $\psi^*$ , e tomando  $\nabla\psi = 0$ , o que equivale a termos uma amostra homogênea, definindo  $\gamma' \equiv -\hbar/24m^*$ , a equação de movimento se torna:

$$\left(\alpha + \gamma' R^{(3d)}\right) \psi + \beta |\psi|^2 \psi = 0. \quad (4.8)$$

A Eq. 4.8 acima é a primeira equação de Ginzburg-Landau modificada e serve para observar como ficam as soluções para energia de Landau apresentadas para Eq. 3.8. Para esse caso, então a solução mais interessante seria a que  $\psi \neq 0$ , ou seja:

$$\psi_{\gamma 0}^2 = \frac{\alpha + \gamma' R^{3d}}{\beta}. \quad (4.9)$$

Um fato importante é que se não houver curvatura do espaço-tempo, ou seja,  $R^{3d} = 0$  temos que  $\psi_0^2 = |\alpha|/\beta$ . Outra possibilidade é quando  $R$  for da ordem de  $-\alpha/\gamma$  o  $\psi$  zera e a supercondutividade é destruída. Essa mudança apresenta uma alteração em um dos comprimentos característicos, o comprimento de coerência ( $\xi$ ). Se reescrevermos a Eq. 3.18, com o termo geométrico, sem o campo magnético externo, teremos:

$$\left(\alpha + \gamma' R^{(3d)}\right) \psi + \beta |\psi|^2 \psi - \frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 \psi = 0. \quad (4.10)$$

E se realizarmos o mesmo procedimento descrito no tópico 3.3.3 teremos como solução  $\psi \propto e^{-x/\xi_\gamma}$ , e para este caso a mudança nesse parâmetro da teoria fica evidente como:

$$\xi_{\gamma'} = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2}{2m^*}\right) \frac{1}{|\alpha + \gamma' R^{(3d)}|}}. \quad (4.11)$$

Uma primeira análise dessa mudança no comprimento de coerência ocorre quando  $R^{(3d)} \propto -|\alpha|/|\gamma|$ . Se isto acontecer o parâmetro de ordem  $\psi \rightarrow 0$  e  $\xi_\gamma \rightarrow \infty$ , destruindo o estado

supercondutor, como já mencionado anteriormente. Outra análise é com a curvatura do espaço-tempo nula, que se recupera o valor de  $\xi$  apresentado na Eq. 3.28. Porém, o que atrai nosso interesse é entender como essa nova quantidade vai afetar os valores usuais desse comprimento. Um passo importante em relação a isso é recuperar a definição usual e redefinir esse parâmetro a partir de seu formato na teoria de TDGL. Para uma curvatura pequena do espaço-tempo é possível expandir a Eq. 4.11. Em primeira ordem temos que:

$$(1 + f)^{1/2} \approx \left(1 + \frac{f}{2}\right), \quad (4.12)$$

utilizando essa transformação é possível escrever:

$$\xi_\gamma \approx \xi \left(1 - \frac{|\gamma'|R^{(3d)}}{|\alpha|}\right) = \xi \left(1 - \frac{\xi^2 R^{(3d)}}{24}\right). \quad (4.13)$$

Vemos também que o termo geométrico não afeta a equação de London e o comprimento de penetração. O termo extra também não afeta a conservação de carga

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} = -\nabla \mathbf{J}, \quad (4.14)$$

onde  $\mathbf{J}$  é o operador de supercorrente

$$\mathbf{J} = \frac{\hbar}{m^*} n_s \left(\nabla \theta - \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}\right). \quad (4.15)$$

Por conta da mudança apresentada no comprimento de coerência, o parâmetro de Ginzburg-Landau também é afetado, ele se torna

$$\kappa_{\gamma'} = \frac{\lambda}{\xi_{\gamma'}} \approx \kappa \left(1 - \frac{|\gamma'|R^{(3d)}}{2|\alpha|}\right). \quad (4.16)$$

Sendo esse último parâmetro primordial para relacionar a energia na interface do um supercondutor, definindo então esse como tipo-I ou tipo-II. Quando observamos que existe uma mudança nesse parâmetro, a energia na transição de fase pode ser alterada também, esse  $\kappa_\gamma$

indica um outro ponto de transição de fase para a amostra. Isso se revela na forma de uma temperatura crítica efetiva,  $T_{Ceff}$ , devido a:

$$\alpha'(T) = \alpha_0(T - T_c) + |\gamma'|R^{(3d)}. \quad (4.17)$$

Então podemos esperar que o ponto crítico, para transição de fase, de um supercondutor pode ser alterado, seja para mudar de um supercondutor tipo-I para o tipo tipo-II (com o surgimento da rede de Abrikosov na amostra), tipo-I  $\rightarrow$  normal (destruição da supercondutividade) ou até tipo-II  $\rightarrow$  normal (destruição da supercondutividade). Essas relações entre temperaturas e campos magnéticos críticos para esses tipos de transições ficam mais claros na figura 3.9. Outra possibilidade é olhar para o potencial químico,  $\mu$ , do supercondutor. Podemos obter essa grandeza se lembrarmos que:

$$\mu = \left( \frac{\partial \mathcal{F}_{GLe}}{\partial n_s} \right), \quad (4.18)$$

onde  $\mathcal{F}_{GLe}$  vem da equação 4.7, portanto:

$$\mu = \alpha'(T) + \beta|\psi|^2. \quad (4.19)$$

Então chegamos a uma expressão do potencial químico, que é a energia para criar um par de superelétrons ou destruir um desses pares, que foi modificada devido a dependência do termo  $\alpha'(T)$ . O que confirmaria a ideia de uma temperatura efetiva de transição de fase, como uma combinação de  $T_c$  com uma adição de um valor, para mais ou para menos, a depender da forma com que o campo gravitacional afeta o espaço-tempo nas imediações do condensado, ou seja, a depender de um  $R^{3d}$  positivo ou negativo, teremos  $T_{ceff}$  maior ou menor.

### 4.3 Introduzindo a Função $\chi$

Para descrever uma aplicação da influência de um campo geométrico na TDGL escolhamos o problema envolvendo um buraco negro. No caso de um buraco negro a geometria do espaço-tempo pode ser aproximada pela métrica de Schwarzschild. A métrica de Schwarzschild pode

ser reescrita da seguinte maneira:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{c^2 r + 2GM}{rc^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-c^2 r + 2GM}{rc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional e  $M$  é a massa do buraco negro. Nesse caso, o escalar de Ricci ( $R$ ) é:

$$R = -\frac{8G^2 M^2 (c^4 r^2 + 3rGMc^2 + 4G^2 M^2)}{r^2 (rc^2 + 2GM)^2 (-rc^2 + 2GM)^2}. \quad (4.21)$$

Para o nosso problema, podemos imaginar que colocamos um fio supercondutor ao longo do eixo  $x$  de forma que ele esteja orientado ao longo da distância radial do buraco negro, ou seja,  $r$  se tornou  $x$  nas equações de  $R$ . Assim podemos definir uma função  $\chi$ , que dependerá só de  $R$ . Essa função tem origem, nos termos de comprimento característicos alterados pelo termo de Atanasov e  $\kappa_\gamma$ , a fim de escrevermos todas as equações em termos das grandezas originais do problema de GL. Sendo assim, escrevemos  $\chi$  como:

$$\chi \equiv \left( 1 - \frac{\gamma R^{3d}}{2|\alpha|} \right). \quad (4.22)$$

Com o  $R$  conhecido, todas as informações sobre como o termo geométrico se relaciona com o condensado supercondutor estão definidas. Vale observar que com a mudança da métrica, os valores de  $R$  são modificados, mas a estrutura da função  $\chi$ , que é adimensional, permanece a mesma.

Com a amostra se aproximando do horizonte de eventos, o comportamento de um supercondutor ao longo do raio do buraco negro, apresenta uma mudança mensurável.

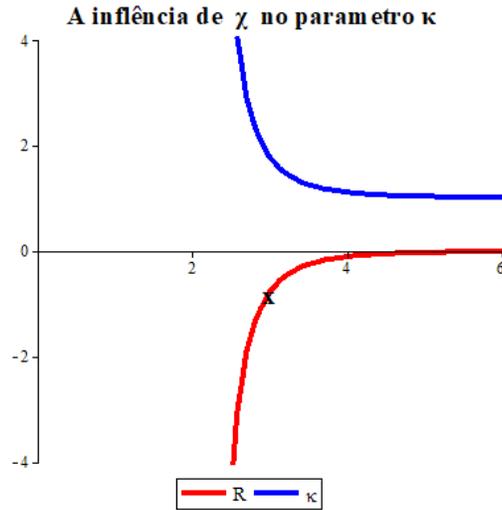


Figura 4.1: Em unidades naturais, o comportamento do parâmetro de Ginzburg-Landau( $\kappa$ ) com a influência de um campo gravitacional estático, ou seja, sem dependência temporal.

A figura 4.1 mostra em unidades naturais, e normalizadas, como em um campo gravitacional estático o parâmetro que serve como medida para estipular a mudança de um tipo de supercondutor para outro varia, segundo mostra a equação 4.16. Em linhas mais gerais seria possível perceber que em uma amostra supercondutora ao longo do raio de um buraco negro, o mesmo material, daria sinais a detectar efeitos Meissner e ao longo do supercondutor a rede de Abrikosov ou mesmo estágios intermediários entre os tipo-I e tipo-II. Continuaremos agora, tentando entender como essas transições podem ser percebidas em uma análise de vórtices em um condensado.

Um outro aspecto que surge da modificação da TDGL é que, a partir da origem da deformação espaço-temporal até onde ela pode ser sentida por um sistema físico, ou seja, quando  $R^{3d} \rightarrow 0$ . Nesse intervalo podemos inserir um termo de comprimento característico, o comprimento de Ricci ( $\xi_R$ ), que seria a distância entre dois pontos no espaço para que se possa medir uma diferença na energia da curvatura de Ricci. Por isso, esse comprimento vai depender do tipo de curvatura, como mostra a figura 4.2. Em outras palavras, esse comprimento serve para avaliar a variação do tamanho da deformidade que vai da fonte até onde podemos medir o efeito curvatura. Observamos também, que para o caso do buraco negro e um supercondutor típico,  $\xi \ll \xi_R$ . Então, os efeitos da gravidade no condensado só poderiam ser sentidos próximo

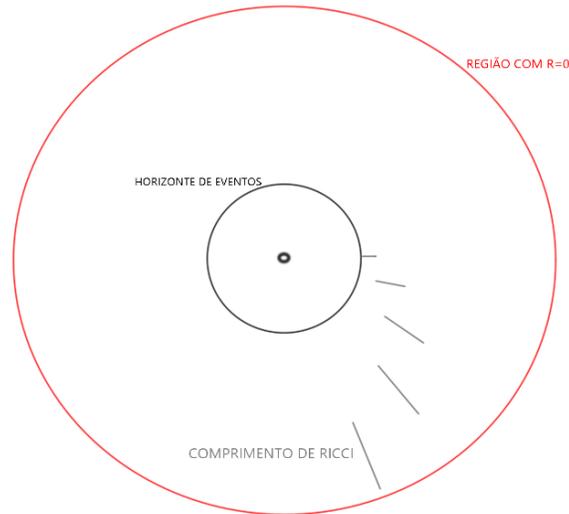


Figura 4.2: O comprimento de Ricci  $\xi_R$  para o caso de um buraco negro.

ao horizonte de eventos, onde a variação da curvatura é maior, e o valor de  $\xi_R$  será mínimo, se aproximando de  $\xi$  de GL.

A modificação da TDGL, tem seus efeitos para o sistema físico escolhido no intervalo entre o horizonte de eventos do buraco negro e  $R \rightarrow 0$ , o termo de comprimento característico de Ricci, ( $\xi_R$ ), aparece da seguinte forma:

$$\xi_R = \int_A^B \frac{dr}{\sqrt{1 - r_s/r}} \propto \frac{\alpha}{\gamma}, \quad (4.23)$$

onde  $A$  e  $B$  são pontos ao longo do supercondutor e  $r_s$  é a distância do centro do buraco negro até o seu horizonte de eventos, e é dado por  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ . Quanto mais próximo ao buraco negro, menor serão as distâncias que separam os pontos  $A$  e  $B$ , e que satisfaçam a equação 4.23.

---

---

## CAPÍTULO 5

---

# DINÂMICA DE VÓRTICES NA PRESENÇA DE UM CAMPO GRAVITACIONAL

Compreender o comportamento dos vórtices em um supercondutor passará pelo estudo das equações de Ginzburg-Landau, que descrevem o comportamento fenomenológico de um supercondutor. O estudo desse comportamento através dessas equações podem fornecer informações sobre o comportamento da amostra em relação a sua temperatura e campos aplicados nela. Essas equações definem como o condensado se comporta eletronicamente. Os comprimentos característicos encontrados em cada supercondutor, definem por exemplo como se comporta a função de onda  $\psi$ , em relação aos comprimentos característicos do condensado, nesse caso ele influenciará diretamente nas distribuições dos vórtices de campo magnético dentro da amostra [37]. Sendo assim, a TDGL é essencial para compreensão do comportamento dos superelétrons dentro do supercondutor, e com isso se torna essencial para o caso de um condensado na presença de um campo gravitacional. Sua abordagem ainda nos ajuda a compreender a física do supercondutor, do macroscópico ao mesoscópico.

Ao passo que a teoria original de Ginzburg-Landau sofre uma alteração, queremos saber como um acréscimo de energia pode alterar os comprimentos característicos do condensado, e propor uma mudança nas equações a serem integradas. Esse capítulo se presta a mostrar como

as equações devem ser alteradas e quais as expectativas com essas mudanças, principalmente em relação a energia necessária para as diversas transições de fase que são possíveis em um estado supercondutor.

## 5.1 Equações de Ginzburg-Landau Modificadas pelo Campo Gravitacional

Como foi visto no capítulo anterior, a energia livre do condensado sofre algumas alterações, assumindo a forma de:

$$\mathcal{F}_{GLe} = \int_V \left\{ [\alpha_0(T - T_c) + \gamma' R^{(3d)}] |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - e^* \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{\mathbf{h}^2}{2\mu_0} \right\} dV. \quad (5.1)$$

Segundo Abrikosov [7] as equações de TDGL são ordinariamente obtidas por:

$$\frac{\hbar^2}{2m^* D} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie^*}{\hbar} \varphi \right) \psi = - \frac{\partial \mathcal{F}_{GLe}}{\partial \psi^*}, \quad (5.2)$$

$$\frac{4\pi}{c} \sigma \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \varphi \right) \psi = - \frac{\partial \mathcal{F}_{GLe}}{\partial \mathbf{A}} - \nabla \times \left[ \frac{\partial \mathcal{F}_{GLe}}{\partial (\nabla \times \mathbf{A})} \right]. \quad (5.3)$$

Todos os termos que aparecem nas equações acima representam as grandezas usuais. Para escrever as equações de TDGL vamos substituir as equações 5.2 e 5.3 na equação 5.1. Temos então:

$$\frac{\hbar^2}{2m^* D} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie^*}{\hbar} \varphi \right) \psi = - \frac{1}{2m^*} \Pi^2 \psi - \alpha' \psi - \frac{\beta}{2} |\psi|^2 \psi, \quad (5.4)$$

$$\frac{4\pi}{c} \sigma \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \varphi \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_s - \nabla \times \mathbf{h}, \quad (5.5)$$

onde a densidade de supercorrente é dada por:

$$\mathbf{J}_s = \frac{e^*}{m^*} \text{Re}(\psi^* \Pi \psi), \quad (5.6)$$

onde  $D$  é o coeficiente de difusão,  $\sigma$  é a condutividade elétrica, e os outros termos são os valores usuais. Com o acréscimo de energia sofrido pela presença do campo geométrico, para

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{GLE}}{\partial \psi^*} = 0 \quad (5.7)$$

quando o termo cinético é mínimo, a solução equação 5.7 se torna

$$\alpha + \gamma' R^{3d} + \beta |\psi_\gamma|^2, \quad (5.8)$$

com

$$|\psi_\gamma|^2 = -\frac{\alpha_0(T - T_c) + \gamma' \cdot R^{(3d)}}{\beta}. \quad (5.9)$$

## 5.2 Definições Importantes

Para TDGL é importante mensurar os comprimentos característicos em suas unidades. Para o comprimento se utiliza o *comprimento de penetração* ( $\lambda$ ); para o tempo se trabalha com o *tempo de relaxação*,  $\tau = \xi^2/D$ ; os campos magnéticos em unidades de  $H_c$ ; e as unidades de energia em termos de  $H_c^2/4\pi$ . Com  $\psi_0 = |\alpha|/\beta$ , nós temos:

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{\frac{m^* c^2}{4\pi \psi_0^2 e^{*2}}}, \\ \xi &= \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m^* |\alpha|}}, \\ H_c &= \sqrt{4\pi |\alpha| \psi_0}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Aplicando a transformação de  $\alpha \rightarrow \alpha'$ , e sabendo que  $\gamma' = -\hbar^2/24m$ , teremos as seguintes mudanças nas equações da teoria TGDL e as novas grandezas ficam assim definidas:

$$\psi_\gamma \approx \psi_0 \left( 1 - \frac{R\xi^2}{24} \right) = \psi_0 \left( 1 - \frac{|\gamma'| R^{(3d)}}{|\alpha|} \right), \quad (5.11)$$

$$\xi_\gamma \approx \xi \left( 1 - \frac{R\xi^2}{24} \right) = \xi \left( 1 - \frac{|\gamma'|R^{(3d)}}{|\alpha|} \right), \quad (5.12)$$

$$H_\gamma \approx H_c \left( 1 - \frac{R\xi^2}{24} \right) = H_c \left( 1 - \frac{|\gamma'|R^{(3d)}}{|\alpha|} \right), \quad (5.13)$$

$$\kappa_\gamma = \frac{\lambda}{\xi_\gamma} \approx \kappa \left( 1 - \frac{R\xi^2}{24} \right) = \kappa \left( 1 - \frac{|\gamma'|R^{(3d)}}{|\alpha|} \right). \quad (5.14)$$

Essas mudanças sinalizam a diferença no comportamento do condensado na presença de um campo gravitacional. Um termo importante a ser avaliado nessas equações é o escalar de curvatura,  $R$ , que irá dizer a forma da curvatura e como ela se comporta espacialmente.

### 5.3 Forma Adimensional das Equações de TDGL

Dentro da proposta numérica de solução para equações de TDGL, vamos fazer umas substituições para tornar adimensional cada um de seus termos. Para podermos fazer uma integração numérica quando necessário, uma mudança conveniente é:

$$R = \frac{1}{\xi_R^2} \bar{R}, \quad (5.15)$$

$$\xi' = \frac{\xi}{\xi_R} \quad (5.16)$$

$$\chi = \left( 1 - \frac{\bar{R}\xi'^2}{24} \right), \quad (5.17)$$

$$\psi = \chi \psi_0 \bar{\psi}, \quad (5.18)$$

$$T = T_c \bar{T}, \quad (5.19)$$

$$\nabla = \frac{1}{\chi\xi} \bar{\nabla}, \quad (5.20)$$

$$t = \frac{\chi^2 \xi^2}{D} \bar{t}, \quad (5.21)$$

$$A = H_c \xi \chi^2 \bar{A}, \quad (5.22)$$

$$\varphi = \frac{H_c D \chi}{c} \bar{\varphi}, \quad (5.23)$$

$$h = H_c \chi \bar{h}, \quad (5.24)$$

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m\alpha\chi^2}. \quad (5.25)$$

Todas as transformações mantêm os significados de cada termo como já definidos anteriormente. Então, aplicando essas transformações as equações de TDGL, temos do lado esquerdo as equações escritas em unidades reais e do lado direito em unidades reduzidas:

1. *Energia de Landau mais o campo geométrico no condensado:*

$$[(\alpha + \gamma R) + \beta|\psi|^2] \psi = \alpha \chi \psi_0 \bar{\psi} (2\chi - 1 + \chi^2 \bar{\psi}^2), \quad (5.26)$$

2. *Campo crítico:*

$$\frac{e\xi}{\hbar c} = \frac{1}{H_c \xi}, \quad (5.27)$$

3. *Termo cinético:*

$$\frac{1}{2m^*} \left( -\frac{i\hbar}{\xi\chi} \bar{\nabla} - \frac{eH_c \xi \chi^2}{c} \bar{A} \right)^2 \psi = \psi_0 \alpha (-i\bar{\nabla} - \bar{A}) \bar{\psi} \chi, \quad (5.28)$$

4. *Derivada temporal:*

$$\frac{\hbar^2 \psi_0}{2m(\chi\xi)^2} \frac{\partial}{\partial t} \psi = \alpha \psi_0 \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \chi \bar{\psi}, \quad (5.29)$$

5. *Potencial elétrico:*

$$\frac{\hbar^2}{2mD} \left( \frac{ie H_c D \chi}{\hbar} \varphi \right) \psi = \psi_0 \alpha (i\bar{\varphi}) \chi \bar{\psi}, \quad (5.30)$$

Se simplificarmos a notação fazendo  $\bar{\psi} \rightarrow \psi$ , com as consequências das transformações, vamos poder escrever a primeira equação de TDGL como:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + i\varphi \right) \psi = -\frac{1}{\chi} \Pi^2 \chi \psi + \psi (2\chi - 1 + \chi^2 \psi^2). \quad (5.31)$$

Para o contexto da segunda equação de TDGL, para reduzir as unidades precisamos escrever:

1. *Campo magnético:*

$$\nabla \times \mathbf{h} = \frac{H_{c2} \xi}{\lambda^2 \chi^3} \kappa^2 \bar{\nabla} \times \chi \bar{\mathbf{h}}, \quad (5.32)$$

2. *Densidade de supercorrente:*

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_s = \frac{H_{c2} \xi}{\lambda^2} \Re[\bar{\psi}^* (-i\bar{\nabla} - \bar{A}) \chi \bar{\psi}], \quad (5.33)$$

3. *Potencial elétrico:*

$$\frac{4\pi}{c} \sigma \nabla \varphi = \frac{\xi H_{c2}}{\lambda^2} \frac{\beta}{\chi^3} \bar{\nabla} (\chi \bar{\varphi}), \quad (5.34)$$

4. *Derivada temporal:*

$$\frac{4\pi}{c} \sigma \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = \frac{H_{c2} \xi}{\lambda^2} \frac{\beta}{\xi^4} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} (\chi^2 \bar{A}), \quad (5.35)$$

então a segunda equação de Ginzburg-Landau, se torna:

$$\beta \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{\chi} \nabla (\chi \varphi) \right) = J_s - \frac{\kappa^2}{\chi} \nabla \times \chi h, \quad (5.36)$$

e

$$J_s = \chi^2 \Re [\psi^* (-i \nabla - A) \chi \psi]. \quad (5.37)$$

Desta forma com as transformações sugeridas, as equações de TDGL assumem uma forma adimensional, ideal para o cálculo numérico.

### 5.3.1 As equações TDGL modificadas

As equações de TDGL assumem as formas propostas abaixo:

$$\frac{\hbar^2}{2m^* D} \left( \frac{\partial}{\partial t} + i \hbar e^* \varphi \right) \psi = -\frac{1}{2m^*} \Pi^2 \psi - \alpha \psi - \frac{\beta}{2} |\psi|^2 \psi, \quad (5.38)$$

$$\beta \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \varphi \right) = \mathbf{J}_s - \nabla \times \mathbf{h}, \quad (5.39)$$

e

$$\mathbf{J}_s = \frac{e^*}{m^*} \text{Re}(\psi^* \Pi \psi), \quad (5.40)$$

Essas equações são as da TDGL, além da proposta por Atanasov [9]. Portanto, é o novo TDGL considerando o acoplamento entre a métrica e o parâmetro de ordem. Observe que quando ajustamos a constante de acoplamento  $\gamma$  a zero, temos o parâmetro  $\chi = 1$ , as equações tendem a retornar às equações usuais da TDGL. Comparando com as equações da forma clássica proposta na referência [22], com o acréscimo da função  $\chi$  dependendo apenas da posição, temos:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + i \varphi \right) \psi = -\frac{1}{\chi} \Pi^2 \chi \psi + \psi (2\chi - 1 + \chi^2 \psi^2), \quad (5.41)$$

$$\beta \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{\chi} \nabla (\chi \varphi) \right) = J_s - \frac{\kappa^2}{\chi} \nabla \times \chi h, \quad (5.42)$$

e

$$J_s = \chi^2 \text{Re} [\psi^* \Pi \chi \psi]. \quad (5.43)$$

Tabela 5.1: Tabela comparativa entre a TDGL clássica e a modificada com o termo geométrico.

TDGL Clássica	TDGL Modificada
$\xi$	$\xi$
$H_{c2}$	$H_{c2}$
$\kappa$	$\kappa$
$\psi$	$\psi$
$\left( \frac{\partial}{\partial t} + i\varphi \right) \psi = -\Pi^2 \psi + \psi (1 + \psi^2)$	$\left( \frac{\partial}{\partial t} + i\varphi \right) \psi = -\frac{1}{\chi} \Pi^2 \chi \psi + \psi (2\chi - 1 + \chi^2 \psi^2)$
$\beta \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \varphi \right) = J_s - \kappa^2 \nabla \times h$	$\beta \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{\chi} \nabla (\chi \varphi) \right) = J_s - \frac{\kappa^2}{\chi} \nabla \times \chi h$
$J_s = \text{Re} [\psi^* (-i\nabla - A) \psi]$	$J_s = \chi^2 \text{Re} [\psi^* (-i\nabla - A) \chi \psi]$

## 5.4 Campo auxiliar

O uso de campos auxiliares vem da necessidade de manter as equações de GL invariantes mediante a discretização [25, 26], que se fará necessária para resolver numericamente o caso em

que o supercondutor é colocado nas imediações de um buraco negro, fazendo um dos eixos do supercondutor coincidir com o raio do mesmo. Uma forma conveniente de escrever os campos auxiliares é:

$$U_k = \exp\left[-i \int_{k_0}^k A_k dk\right]. \quad (5.44)$$

Também é possível usar a identidade:

$$\frac{\partial U_k}{\partial k} = i A_k U_k, \quad (5.45)$$

onde para as equações 5.44, 5.45 em duas dimensões  $k = (x, y)$ . Os campos auxiliares são funções uni-modulares, isto é,  $U_k U_k^* = 1$ . Podemos mostrar que:

$$-i U_k^* \frac{\partial (U_k f)}{\partial k} = \left(-i \frac{\partial}{\partial k} - A_k\right) f. \quad (5.46)$$

Essa identidade mostrada na equação 5.46 é válida para qualquer função complexa  $f$ . Então vamos utilizar essa transformação primeiro fazendo  $f = \psi$ . Na sequência utilizaremos o resultado da substituição feita anteriormente e aplicaremos novamente a identidade da equação 5.46, considerando agora com  $f = -i U_k^* \partial(U_k \psi) / \partial k$ . Então seremos capazes de mostrar que:

$$\left(-i \frac{\partial}{\partial k} - A_k\right)^2 \psi = -U_k^* \frac{\partial^2}{\partial k^2} (U_k \psi). \quad (5.47)$$

Usando esses campos, reescrevemos a Eq 5.31,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\varphi\right) \psi = \frac{1}{\chi} \left[ U_x^* \frac{\partial^2 (U_x \chi \psi)}{\partial^2 x} + U_y^* \frac{\partial^2 (U_y \chi \psi)}{\partial^2 y} \right] + \psi (2\chi - 1 + \chi^2 \psi^2). \quad (5.48)$$

A densidade de supercorrente também pode ser expressa em termos dos campos auxiliares, então temos:

$$J_{sx} = \text{Im} \left[ -i U_x^* \frac{\partial (U_x \chi \psi)}{\partial x} \right], \quad (5.49)$$

$$J_{sy} = \text{Im} \left[ -iU_y^* \frac{\partial (U_y \chi \psi)}{\partial y} \right]. \quad (5.50)$$

## 5.5 Definindo a análise do supercondutor na presença do campo gravitacional

Para as condições de contorno desse problema é necessário definir a geometria e as influências externas do sistema a ser analisado. A geometria estudada corresponde a uma supercondutor retangular de lados  $a$  e  $b$ , na presença de uma campo magnético externo  $H$ , como mostrado na figura 5.2. Assumindo que não existem correntes de transporte, podemos então utilizar o gauge de Coulomb,  $\varphi = 0$ .

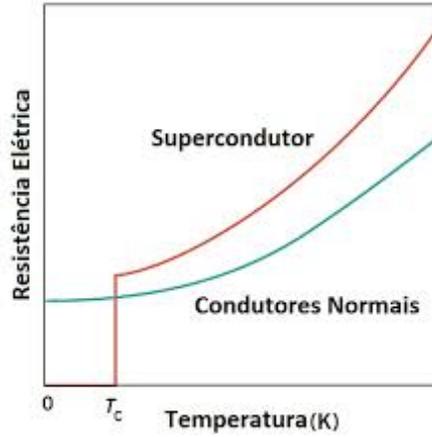


Figura 5.1: Relação entre temperatura e resistividade em um supercondutor [2].

Então temos:

1. *Primeira equação Ginzburg-Landau modificada:*

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{\chi} \left[ U_x^* \frac{\partial^2 (U_x \chi \psi)}{\partial^2 x} + U_y^* \frac{\partial^2 (U_y \chi \psi)}{\partial^2 y} \right] + \psi (2\chi - 1 + \chi^2 \psi^2) \quad (5.51)$$

2. *Densidade de supercorrente*

$$J_{sx} = \text{Im} \left[ -iU_x^* \frac{\partial (U_x \chi \psi)}{\partial x} \right] \quad (5.52)$$

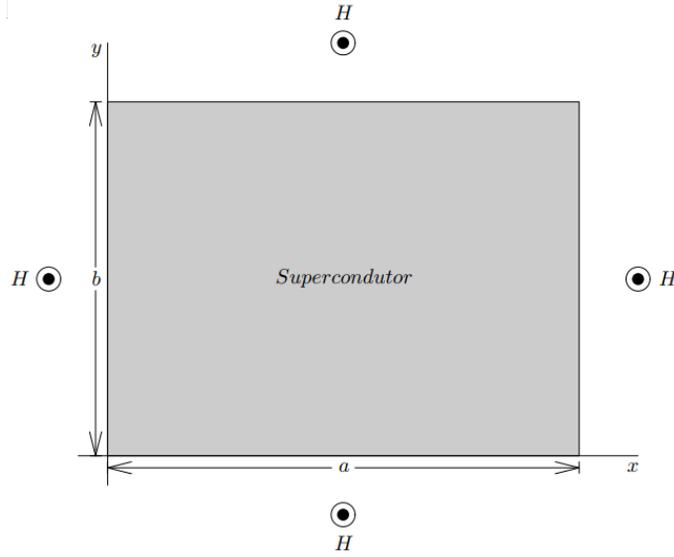


Figura 5.2: Geometria do supercondutor a ser simulada numericamente, sendo que um dos eixos (x,y) da amostra, deve coincidir com o raio do buraco negro.

e

$$J_{sy} = \text{Im} \left[ -iU_y^* \frac{\partial (U_y \chi \psi)}{\partial y} \right] \quad (5.53)$$

3. A segunda equação de Ginzburg-Landau:

$$\beta \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{J}_s - \frac{\kappa^2}{\chi} \vec{\nabla} \times \chi \mathbf{h}. \quad (5.54)$$

### 5.5.1 Condições de Contorno

Dentro do proposto retângulo é possível pensar nas condições necessárias para que as propriedades físicas do supercondutor sejam respeitadas, tais como a não existência de supercorrentes nas bordas da amostra, para que o parâmetro de ordem exista apenas no interior do condensado. Para isso, a primeira condição a ser satisfeita é que nas bordas do sistema a função seja constante, ou seja, não existe supercorrente perpendicularmente orientada nas bordas do retângulo, ou seja:

$$\left( \frac{\partial (U_k \chi \psi)}{\partial k} \right)_{\partial \Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0, \quad (5.55)$$

com  $k = (x, y)$ , e  $\partial\Omega$  sendo a derivada parcial em relação ao ângulo sólido.

E a segunda condição é que fora do retângulo, o campo seja orientado perpendicular ao plano onde se encontra o retângulo que representa a amostra supercondutora. Sendo assim o campo pode ser representado da seguinte maneira:

$$h_z = H|_{\partial\Omega}, \quad (5.56)$$

como mostra a figura 5.2.

## 5.6 Conclusão e perspectivas

Em suma a presente dissertação teve como objetivo estudar um supercondutor sobre a influência de um campo gravitacional. Notamos que com as alterações nos comprimentos característicos do supercondutor, é possível mudar a temperatura de transição efetiva, ou seja, o material não terá nenhuma característica alterada intrinsecamente, porém efetivamente uma nova  $T_c$  poderá ser medida. Esse efeito deve ser observado ao alterarmos o parâmetro de Ginzburg-Landau,  $\kappa$ , da amostra com um campo gravitacional. Como visto, esse parâmetro se relaciona aos comprimentos característicos do condensado, sendo assim, uma transição de fase acaba sendo por consequência observada onde classicamente não existiria motivos físicos externos ou internos para isso.

A mudança do  $\kappa$  deve ser analisada em vista de alguns parâmetros. O caso apresentado aqui faz a suposição de um supercondutor na presença das imediações de uma singularidade de origem gravitacional, um buraco negro. Para esse problema em particular esperamos notar uma mudança na temperatura efetiva de transição de fase do condensado, ao longo da amostra, devido ao potencial químico estar dependendo da posição segundo equação 4.19. Um ponto interessante é perceber que essa transição de fase pode ser observada em um supercondutor do tipo-I para sua fase normal, de um tipo-I para um tipo-II, como também tipo-II para sua fase normal.

Um segundo ponto e o principal abordado aqui é a expectativa de ao longo de uma amostra, que sem a presença do campo gravitacional apresente vórtices, poderíamos então observar

uma mudança na disposição espacial dos vórtices de campo magnético em um supercondutor do tipo-II. Fazemos isso utilizando as mesmas equações que envolvem os valores do caso clássico, mostrado por Groppe [22], com o acréscimo do termo gravitacional  $\chi$ , também adimensional.

Mostramos que com essas alterações na primeira equação de Ginzburg-Landau, as supercorrentes geram um comportamento diferente do clássico, já que a geometria varia com o comportamento do fluxo magnético,  $\Phi_0$ , que por sua vez está relacionado o comprimento de coerência,  $\xi$ , ao passo que esse último sendo modificado altera a estrutura e configuração dos vórtices dentro do condensado, pois depende diretamente de  $\alpha'$ , como mostra a figura 3.10 e as equações 3.33 e 3.34.

Um próximo passo possível logo de imediato é estimar a variação de  $\kappa$  com a posição, para uma amostra ao longo do raio de um buraco negro. Essa informação deve mostrar os efeitos para um campo gravitacional estático. Esse conhecimento vai ajudar a pensar em outras possibilidades de análise, como a de uma onda gravitacional ou dimensões espaço-temporais extras (branas). Conhecendo então o efeito da variação da curvatura espacialmente seria possível relacionar o tempo ligado ao comportamento de uma onda gravitacional ao tempo de relaxação  $\tau$  do condensado, o que possibilitaria usar um supercondutor para detectar a passagem de uma onda gravitacional pela amostra.

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Deformação do espaço-tempo para diferentes fontes de gravidade. <https://www.algosobre.com.br/fisica/buracos-negros.html>. Acesso: 28/11/2019.
- [2] Relação entre temperatura e resistividade em um supercondutor. [http://mesonpi.cat.cbpf.br/\\_escola2019/downloads/poster-profcm/supercondutividade.pdf](http://mesonpi.cat.cbpf.br/_escola2019/downloads/poster-profcm/supercondutividade.pdf). Acesso: 13/10/2019.
- [3] Transporte paralelo em uma superfície curva. [https://pt.wikipedia.org/wiki/Transporte\\_paralelo](https://pt.wikipedia.org/wiki/Transporte_paralelo). Acesso: 19/11/2019.
- [4] What is a tensor? [https://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/tensors/what\\_is\\_tensor.php](https://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/tensors/what_is_tensor.php). Acesso: 19/11/2019.
- [5] B. P. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, M. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. Adhikari, et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters*, 116(6):061102, 2016.
- [6] A. Abrikosov. The magnetic properties of superconducting alloys. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 2(3):199–208, 1957.
- [7] A. Abrikosov. *Fundamentals of the Theory of Metals*. Courier Dover Publications, 2017.

- [8] J. F. Annett et al. *Superconductivity, superfluids and condensates*, volume 5. Oxford University Press, 2004.
- [9] V. Atanasov. The geometric field (gravity) as an electro-chemical potential in a ginzburg-landau theory of superconductivity. *Physica B: Condensed Matter*, 517:53–58, 2017.
- [10] V. Atanasov. Gravity at a quantum condensate. *Journal of the Physical Society of Japan*, 86(7):074004, 2017.
- [11] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of superconductivity. *Physical review*, 108(5):1175, 1957.
- [12] J. Berger and J. Rubinstein. *Connectivity and superconductivity*, volume 62. Springer Science & Business Media, 2001.
- [13] P.-G. De Gennes. *Superconductivity of metals and alloys*. CRC Press, 2018.
- [14] A. Einstein. The formal foundation of the general theory of relativity. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1914:1030–1085, 1914.
- [15] A. Einstein. On gravitational waves. In *Albert Einsteins Relativitätstheorie*, pages 304–316. Springer, 1990.
- [16] A. Einstein et al. On the electrodynamics of moving bodies. *Annalen der physik*, 17(10):891–921, 1905.
- [17] A. M. Forrest. Meissner and ochsenfeld revisited. *European Journal of Physics*, 4(2):117, 1983.
- [18] A. Friedman. Über die krümmung des raumes. *Zeitschrift für Physik*, 10(1):377–386, 1922.
- [19] V. L. Ginzburg and L. D. Landau. On the Theory of superconductivity. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 20:1064–1082, 1950.
- [20] L. P. GOR'KOV and G. Eliashberg. Generalization of the ginzburg-landau equations for non-stationary problems in the case of alloys with paramagnetic impurities. In *30 Years Of The Landau Institute—Selected Papers*, pages 16–22. World Scientific, 1996.

- [21] L. P. Gor'kov. Microscopic derivation of the ginzburg-landau equations in the theory of superconductivity. *Sov. Phys. JETP*, 9(6):1364–1367, 1959.
- [22] W. D. Gropp, H. G. Kaper, G. K. Leaf, D. M. Levine, M. Palumbo, and V. M. Vinokur. Numerical simulation of vortex dynamics in type-ii superconductors. *Journal of Computational Physics*, 123(2):254–266, 1996.
- [23] W. Hackbusch. *Tensor spaces and numerical tensor calculus*, volume 42. Springer, 2012.
- [24] E. Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the national academy of sciences*, 15(3):168–173, 1929.
- [25] J. B. Kogut. An introduction to lattice gauge theory and spin systems. *Reviews of Modern Physics*, 51(4):659, 1979.
- [26] J. B. Kogut. The lattice gauge theory approach to quantum chromodynamics. *Reviews of Modern Physics*, 55(3):775, 1983.
- [27] J. M. Lee. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*, volume 176. Springer Science & Business Media, 2006.
- [28] F. London and H. London. The electromagnetic equations of the supraconductor. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, 149(866):71–88, 1935.
- [29] F. London and H. London. Supraleitung und diamagnetismus. *Physica*, 2(1-12):341–354, 1935.
- [30] A. Mourachkine. *Room-temperature superconductivity*. Cambridge Int Science Publishing, 2004.
- [31] H. K. Onnes. The resistance of pure mercury at helium temperatures. *Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden*, vol.12(p.120), 1911.
- [32] A. S. Pires. Geometria diferencial para físicos. *Livraria da Física*, 2015.

- 
- [33] J. Renn. A física clássica de cabeça para baixo: como einstein descobriu a teoria da relatividade especial. *Revista brasileira de ensino de física*, 2004.
- [34] E. Sanchez. Cálculo tensorial. *Interciência, Rio de Janeiro*, 2011.
- [35] E. Sardella, A. L. Malvezzi, P. N. Lisboa-Filho, and W. A. Ortiz. Temperature-dependent vortex motion in a square mesoscopic superconducting cylinder: Ginzburg-landau calculations. *Physical Review B*, 74(1):014512, 2006.
- [36] K. Schwarzschild. Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, 1916, Seite 189-196, 1916.
- [37] M. Tinkham. *Introduction to superconductivity*. Courier Corporation, 2004.