



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO – UFRPE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PRPPG
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

MARCELA SILVA DE ALBUQUERQUE

**O CONCEITO DE ISOMETRIA EM LIVROS DIDÁTICOS DOS ANOS FINAIS DO
ENSINO FUNDAMENTAL: UM ESTUDO SOB A ÓTICA DAS TEORIA DOS
CAMPOS CONCEITUAIS E DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA**

RECIFE

2021



MARCELA SILVA DE ALBUQUERQUE

**O CONCEITO DE ISOMETRIA EM LIVROS DIDÁTICOS DOS ANOS FINAIS DO
ENSINO FUNDAMENTAL: UM ESTUDO SOB A ÓTICA DAS TEORIAS DOS
CAMPOS CONCEITUAIS E DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências (PPGEC), da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade

Recife, 2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- M314c Albuquerque, Marcela Silva de
 O conceito de isometria em livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental: um estudo sob a
 ótica das teorias dos campos conceituais e da transposição didática / Marcela Silva de Albuquerque. - 2021.
 170 f.
- Orientador: Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade.
 Inclui referências.
- Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em
 Ensino das Ciências, Recife, 2021.
1. Isometrias. 2. Teoria dos campos conceituais. 3. Teoria da transposição didática. 4. livro didático. 5.
 BNCC. I. Andrade, Vladimir Lira Veras Xavier de, orient. II. Título

CDD 507

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PRPPG
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

**O CONCEITO DE ISOMETRIA EM LIVROS DIDÁTICOS DOS ANOS FINAIS DO
ENSINO FUNDAMENTAL: UM ESTUDO SOB A ÓTICA DAS TEORIAS DOS
CAMPOS CONCEITUAIS E DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA**

MARCELA SILVA DE ALBUQUERQUE

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora composta professores:

Prof^o. Dr^o. Vladimir Lira Veras Xavier, Presidente/ 1^o examinador interno/Orientador

Prof^a. Dr^a. Anna Paula de Avelar Brito, 2^a examinadora interna

Prof^a. Dr^a. Elisângela Bastos de Melo Espíndola, 3^a examinadora interna

Prof. Dr. Edelweiss José Tavares Barbosa, 4^o examinador externo

Data de apresentação: 27/08/2021

AGRADECIMENTOS

Aos meus familiares pelo apoio, amor e incentivo.

Aos meus amigos e colegas de turma que me acompanharam durante essa jornada, pelo companheirismo.

Ao Dr. Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade, pela orientação, paciência e ensinamentos.

RESUMO

As isometrias são componentes relevantes do estudo das transformações geométricas, sendo encontradas em diversas esferas do nosso cotidiano. Seu estudo é previsto pela Base Nacional Comum Curricular e conseqüentemente é um conteúdo encontrado nos livros didáticos, sendo assim, esta dissertação teve como objetivo principal analisar a abordagem desse conteúdo em coleções de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, com base nas teorias da Transposição Didática, de acordo com Yves Chevallard, e dos Campos Conceituais, desenvolvida por Gerard Vergnaud. Foram analisados livros dos 7º e 8º anos (séries onde o conteúdo é contemplado) em 5 coleções. Observamos a transposição didática dos conceitos de simetria axial, translação e rotação para os livros didáticos, investigando as modificações realizadas pela noosfera, com ênfase na vigilância epistemológica dos conceitos. A partir desse estudo, percebemos que de maneira geral, a transposição da programabilidade da BNCC para os livros foi seguida pelos autores, porém houveram diferenças na forma como cada coleção interpretou tais recomendações. Encontramos também algumas divergências na conceituação de algumas simetrias em relação ao nosso referencial teórico, onde um dos livros exclui pontos pertencentes ao eixo de simetria da transformação por reflexão. Em relação a investigação de acordo com a Teoria dos Campos Conceituais, criamos critérios de análise baseados nos conceitos de invariante operacional e significantes. Ao observar as atividades propostas pelos livros, percebemos que existe uma preferência por situações com eixos de simetria e vetores paralelos às margens da folha, uso de malha quadriculada e figuras retilíneas, indicando uma lacuna na variedade de situações em relação aos significantes.

Palavras-chave: Isometrias; Teoria dos Campos Conceituais; Teoria da Transposição didática; Livro Didático; BNCC.

ABSTRACT

Isometries are important components of the study of geometric transformations, being present in the Common National Curriculum Base and consequently in textbooks. Therefore, this dissertation aimed to analyze the approach of this content in mathematics collections in the final years of elementary school, with based on the theories of Didactic Transposition, according to Yves Chevallard, and of the Conceptual Fields, developed by Gerard Vergnaud. Books from the 7th and 8th grades were analyzed (series where the content is covered) in 5 collections. We observe the didactic transposition of the concepts of axial symmetry, translation and rotation to textbooks, investigating the changes made by the noosphere, with an emphasis on the epistemological surveillance of the concepts. From this study, we realized that, in general, the transposition of the BNCC programmability to books was followed by the authors, but there were differences in the way each collection interpreted such recommendations. We also found some divergences in the conceptualization of some symmetries in relation to our theoretical framework, where one of the books excludes points belonging to the symmetry axis of transformation by reflection. Regarding the investigation according to the Theory of Conceptual Fields, we created analysis criteria based on the concepts of operational invariant and signifiers. When observing the activities proposed by the books, we noticed that there is a preference for situations with axes of symmetry and vectors parallel to the margins of the sheet, the use of gridded mesh and straight figures, indicating a gap in the variety of situations in relation to the significant ones.

key-words: Isometries; Theory of Didactic Transposition; Theory of Conceptual Fields; Text-books, BNCC.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esquema transposição didática	27
Figura 2 – Exemplo de situação envolvendo simetria segundo Vergnaud	36
Figura 3 – Transformações geométricas.....	42
Figura 4 – Isometria de reflexão.....	43
Figura 5 – Propriedades da simetria de reflexão	44
Figura 6 – Reflexão do triângulo ABC no plano cartesiano	44
Figura 7 – Translação 1	45
Figura 8 – Translação 2	46
Figura 9 – Rotação.....	46
Figura 10 – Reflexão com deslizamento	47
Figura 11 – Simetria em torno de um ponto.....	47
Figura 12 – Organização da metodologia	58
Figura 13 - Capítulo 12, 7º ano, Projeto Araribá	76
Figura 14 - Capítulo 11, 8º ano, Projeto Arariba	76
Figura 15 - Definição de transformação geométrica, Projeto Araribá Plus	80
Figura 16 - Definição de reflexão 7º ano, Projeto Araribá Plus.....	81
Figura 17 - Definição de transformações geométricas, Projeto Araribá Plus, 7º ano.	84
Figura 18 - Definição de reflexão em relação a uma reta, Projeto Araribá Plus, 7º ano.	85
Figura 19 - Definição de simetria em relação a um ponto, Projeto Araribá Plus, 7º ano.	87
Figura 20 - Definição de translação segundo Gay e Silva (2018), 7º ano	88
Figura 21 - Definição de translação segundo Gay e Silva (2018), 7º ano II	89
Figura 22 - Definição de rotação segundo Gay e Silva (2018), 7º ano	90
Figura 23 - Definição de rotação segundo Gay e Silva (2018), 7º ano	91
Figura 24 - Definição de reflexão axial segundo livro Projeto Araribá Plus, 8º ano..	94
Figura 25 - Definição de reflexão em relação a um ponto segundo Gay e Silva (2018), 8º ano.....	95
Figura 26 - Definição de translação segundo livro Projeto Araribá Plus, 8º ano.....	96
Figura 27 - Definição de rotação segundo livro Projeto Araribá Plus, 8º ano.	97

Figura 28 - Unidade 3, 7º ano, A Conquista da Matemática	100
Figura 29 - Unidade 6, 8º ano, A conquista da Matemática	100
Figura 30 - Definição de simetria axial, 7º ano, 'A Conquista da Matemática'	104
Figura 31 - Definição de translação, 7º ano, 'A Conquista da Matemática'	106
Figura 32 - Definição de rotação, 7º ano, 'A Conquista da Matemática'	107
Figura 33 - Definição de reflexão em relação a uma reta, A Conquista da Matemática, 8º ano.	109
Figura 34 - Definição de translação, A Conquista da Matemática, 8º ano.	110
Figura 35 - Definição de rotação, A Conquista da Matemática, 8º ano.	111
Figura 36 - Unidade 8, 7º volume, Apoema.	113
Figura 37 - Unidade 8, 8º volume, Apoema.	113
Figura 38 - Definição de simetria de reflexão, coleção Apoema, 7º ano.	117
Figura 39 - Definição de translação, coleção Apoema, 7º ano.	118
Figura 40 - Definição de rotação, coleção Apoema, 7º ano.	119
Figura 41 - Situação de composição de isometrias, coleção Apoema, 8º ano.	120
Figura 42 - Definição de reflexão axial, coleção Apoema, 8º ano.	121
Figura 43 - Definição de translação, coleção Apoema, 8º ano.	122
Figura 44 – Definição de rotação, coleção Apoema, 8º ano.	123
Figura 45 - Unidade 6, volume 7, coleção Matemática - Realidade e Tecnologia ..	125
Figura 46 - Unidade 2, volume 8, coleção Matemática - Realidade e Tecnologia ..	125
Figura 47 - Definição de simetria axial, 7º ano, coleção Matemática - Realidade e Tecnologia	128
Figura 48 - Definição de simetria axial, 7º ano, coleção Matemática - Realidade e Tecnologia pt.2	129
Figura 49 - Definição de translação, 7º ano, coleção Matemática - Realidade e Tecnologia	129
Figura 50 - Definição de rotação, 7º ano, coleção Matemática - Realidade e Tecnologia	130
Figura 51 - Definição de translação, coleção Matemática - Realidade e Tecnologia, 8º ano.	132

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – coordenada dos triângulos no plano cartesiano.....	45
Quadro 2 – Objetivos específicos: metodologia.....	58
Quadro 3 - isometria na BNCC para os anos finais do Ensino Fundamental	72
Quadro 4 – organização do conteúdo na coleção.....	76
Quadro 5 – Programabilidade da aquisição do saber, Projeto Araribá Plus	77
Quadro 6 – organização da coleção 2	100
Quadro 7 – programabilidade da coleção	102
Quadro 8 – programabilidade BNCC	115
Quadro 9 – programabilidade BNCC 3	126
Quadro 10 – conceitos associados ao conteúdo de isometria, coleção Projeto Araribá.....	135
Quadro 11 – análise elemento 4: tipo de problema, Projeto Araribá	136
Quadro 12 – característica das questões sobre simetria axial, Projeto Araribá.....	136
Quadro 13 – característica das questões sobre simetria em relação a um ponto, Projeto Araribá	137
Quadro 14 – característica das questões sobre simetria de rotação, Projeto Araribá	137
Quadro 15 – característica das questões sobre simetria de translação, Projeto Araribá.....	137
Quadro 16 – situações da BNCC presentes no livro do 7º ano, coleção Projeto Araribá.....	138
Quadro 17 – situações da BNCC presentes no livro do 7º ano, coleção Projeto Araribá.....	138
Quadro 18 – conceitos associados ao conteúdo de isometria, coleção A Conquista da Matemática.....	140
Quadro 19 – tipos de problema, coleção A Conquista da Matemática	141

Quadro 20 – características das questões propostas de simetria axial, A Conquista da Matemática.....	141
Quadro 21 – características das questões propostas de translação, A Conquista da Matemática.....	141
Quadro 22 – características das questões propostas de rotação, A Conquista da Matemática.....	142
Quadro 23 – situações da BNCC presentes no livro do 7º ano, coleção A Conquista da Matemática.....	142
Quadro 24 – situações da BNCC presentes no livro do 8º ano, coleção A Conquista da Matemática.....	143
Quadro 25 – conceitos associados ao conteúdo de isometrias, coleção Apoema Matemática.....	145
Quadro 26 – tipos de problema, coleção Apoema.....	145
Quadro 27 – características das questões proposta sobre simetria axial, coleção Apoema Matemática.....	146
Quadro 28 – características das questões sobre translação.....	146
Quadro 29 – características das questões sobre rotação, coleção Apoema Matemática.....	147
Quadro 30 – situações da BNCC presentes no livro do 7º ano, coleção Apoema Matemática.....	147
Quadro 31 – situações da BNCC presentes no livro do 8º ano, coleção Apoema Matemática.....	148
Quadro 32 – conceitos associados ao conteúdo de isometria, coleção Matemática Realidade e Tecnologia.....	149
Quadro 33 – tipos de problema proposto, coleção Matemática Realidade e Tecnologia.....	149
Quadro 34 – característica das questões sobre reflexão, coleção Matemática Realidade e Tecnologia.....	150

Quadro 35 – característica das questões sobre translação, coleção Matemática Realidade e Tecnologia.....	150
Quadro 36 – característica das questões sobre rotação, coleção Matemática Realidade e Prática	151
Quadro 37 – situações da BNCC presentes no livro do 7º ano, Matemática Realidade e Tecnologia.....	151
Quadro 38 – situações da BNCC presentes no livro do 8º ano, Matemática Realidade e Tecnologia.....	152
Quadro 39 – conceitos relacionados ao conteúdo de isometria por volume.....	154
Quadro 40 – tipo de problema por volume.....	155
Quadro 41 – características das questões sobre simetria axial por volume	155
Quadro 42 – características das questões sobre simetria em relação a um ponto por volume.....	156
Quadro 43 – características das questões sobre rotação por volume	157
Quadro 44 – características das questões sobre translação por volume	157
Quadro 45 – situações da BNCC presentes nos livros do 7º ano.....	158
Quadro 46 – situações da BNCC presentes nos livros do 8º ano.....	158

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
2 REFERENCIAL TEÓRICO	23
2.1 Teoria da Transposição Didática	23
2.1.1 Transposição didática externa e interna.....	27
2.1.2 Vigilância epistemológica	29
2.2 Teoria dos Campos Conceituais	31
2.2.1 Conceitos, Situações e Esquemas	33
2.2.2 Invariantes operatórias, conceitos-em-ação e teoremas-em-ação.....	34
2.2.3 Sentido e significantes.....	35
2.2.4 Situações envolvendo o ensino de simetria segundo Vergnaud	36
2.3 Isometrias	37
2.3.1 Introdução: um breve resgate histórico sobre o ensino das transformações geométricas no Brasil	38
2.3.2 Transformações Geométricas Isométricas/Simetrias no plano	41
2.3.2.1 Simetria de reflexão ou simetria axial no plano	42
2.3.2.2 Simetria de translação	45
2.3.2.3 Simetria de rotação	46
2.3.2.4 Reflexão com deslizamento	47
2.3.2.5 Simetria em torno de um ponto.....	47
2.3.3 Algumas pesquisas sobre o ensino de isometria: obstáculos e contribuições	47
3 METODOLOGIA	57
3.1 Análises sob a ótica da teoria da transposição didática	59
3.1.1 Isometria na BNCC de acordo com a teoria da transposição didática.....	59
3.1.2 Isometria nos livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental de acordo com a teoria da Transposição Didática.....	60
3.2 Análises sob a ótica da teoria dos campos conceituais	62

3.2.1 BNCC de acordo com a teoria dos campos conceituais.....	62
3.2.2 Livros didáticos e manuais do professor de acordo com a teoria dos campos conceituais.....	62
3.3 Análise dos dados	66
4 ISOMETRIA NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR	68
4.1 Isometria na Base Nacional Comum Curricular	68
4.1.1 Isometria na BNCC de acordo com a teoria da transposição didática.....	70
4.1.2 Análise das situações presentes.....	73
5 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS SEGUNDO A TEORIA DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA	75
5.1 Coleção Araribá Plus.....	75
5.1.1 Organização do conteúdo na coleção.....	75
5.1.2 Análise da organização do conteúdo no livro do 7º ano	79
5.1.3 Modificações realizadas pela noosfera	83
5.1.4 Análise da organização do conteúdo no livro do 8º ano	91
5.1.5 Modificações realizadas pela noosfera	93
5.2 Coleção A Conquista da Matemática.....	97
5.2.1 Organização do conteúdo na coleção.....	98
5.2.2 Análise da organização do conteúdo no livro do 7º ano	103
5.2.3 Modificações realizadas pela noosfera	105
5.2.4 Análise da organização do conteúdo no livro do 8º ano	108
5.2.5 Modificações realizadas pela noosfera	109
5.3 Coleção Apoema Matemática	112
5.3.1 Organização do conteúdo da coleção.....	112
5.3.2 Análise da organização do conteúdo no livro do 7º ano	115
5.3.3 Modificações realizadas pela noosfera	116
5.3.4 Análise da organização do conteúdo no livro do 8º ano	119
5.3.5 Modificações realizadas pela noosfera	121
5.4 Coleção Matemática – Realidade e Tecnologia	123
5.4.1 Organização do conteúdo na coleção.....	124
5.4.2 Análise da organização do conteúdo no livro do 7º ano	127

5.4.3 Modificações realizadas pela noosfera	128
5.4.4 Análise da organização do conteúdo no livro do 8º ano	131
5.4.5 Modificações realizadas pela noosfera	132
5.5 Conclusão da análise	133
6 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS À LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS.....	135
6.1 Coleção Projeto Araribá.....	135
6.2 Coleção A Conquista da Matemática.....	140
6.3 Coleção Apoema Matemática	145
6.4 Coleção Matemática Realidade e Tecnologia	149
6.5 Análise dos dados	154
7 CONCLUSÃO	159

1 INTRODUÇÃO

A geometria é uma área da matemática cuja importância justifica-se tanto nos aspectos práticos e cotidianos (está presente na natureza, nas artes, na interpretação de um mapa, no desenho de um esquema, nos jogos eletrônicos, em softwares de desenho assistido por computador – CAD, na leitura de logos e placas de sinalização, entre outros) quanto nos aspectos cognitivos que são importantes para o processo de aprendizagem dos alunos.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (1997), o estudo de conceitos geométricos ajuda os alunos a desenvolverem um tipo especial de pensamento que os permitem compreender, descrever e representar o mundo em que vivem, além de ser um campo fértil para se trabalhar com situações-problema. Enquanto isso, o uso intuitivo ou matemático da noção de simetria pode ser observado em diversos aspectos da vida cotidiana como objetos, obras de arte e construções arquitetônicas de várias culturas desde a pré-história até os dias atuais.

Segundo Lopes, Alves e Ferreira (2015), existem inúmeras evidências do interesse que os povos da antiguidade tinham por simetrias de forma e padrões repetidos (translações) em objetos, decorações e estruturas, podendo ser observadas desde o período neolítico, passando pela Grécia, Roma e Egito antigos e presentes também nas artes islâmicas e árabes, o que nos permite constatar que a noção de simetria é algo que precede e/ou independe de formalismo matemático.

As transformações por isometria não estão presentes apenas em criações humanas, mas também na natureza, como por exemplo na anatomia de alguns animais e na estrutura química de cristais. Luz (2007) também chama atenção para a conexão do conteúdo com outras disciplinas ensinadas na escola: na química onde “um composto químico apolar, por exemplo, tem suas cargas elétricas simetricamente distribuídas” (LUZ, 2007, p. 27), e na biologia, onde a maioria dos animais é bilateralmente simétrica. A presença desse conteúdo em tantos aspectos da nossa vida é o que torna o estudo das simetrias tão relevante para o nosso entendimento e interpretação do mundo.

Além da sua aplicação em problemas cotidianos, é possível também trabalhar através do estudo deste conteúdo, diversos conceitos e noções matemáticas, como por exemplo a noção de congruência, e de conceitos geométricos como

mediatriz, vetor, ponto, reta e perpendicularidade, o que torna a isometria um conteúdo rico para se trabalhar em sala de aula, porém ao mesmo tempo, podendo caracterizá-la como complexa e as vezes de difícil compreensão para os alunos.

Siqueira, Lima e Gitirana (2002) acreditam que o campo de pesquisa que abrange o conceito de simetria é ainda bastante fértil quando a estudamos em espaços mais gerais que o plano euclidiano, segundo os autores:

Além disso, nos vários campos da matemática ocorrem outros conceitos de simetria, em geral, passíveis de inter-relação com o de simetria na geometria. Por fim, quando se investigam modelos matemáticos para os fenômenos do mundo físico, é consensual que o conceito de simetria ocupa um lugar extremamente privilegiado. (SIQUEIRA, LIMA E GITIRANA, 2002, p. 1)

No mesmo artigo, Siqueira, Lima e Gitirana (2002) também citam algumas dificuldades presentes na aquisição do conceito de simetria por alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, tais como na correspondência ortogonal entre os pontos da figura refletida, na invariância dos pontos da figura pertencentes ao eixo de reflexão, no uso indevido das transformações, na preservação do formato da figura, entre outros, e destacam também erros persistentes principalmente em situações em que a figura não possui eixo de simetria.

É importante que essas dificuldades sejam levadas em consideração ao ensinar as simetrias, assim como é importante que professores tenham recursos e ferramentas que auxiliem no processo de aprendizagem, buscando minimizar esses obstáculos.

Um recurso muito usado em sala de aula é o livro didático, que conta com textos teóricos, exercícios propostos e resolvidos, aplicações etc. voltados para cada nível de ensino. Esse recurso didático (incluindo o manual do professor) é um dos principais instrumentos utilizados em sala de aula, e é muitas vezes a partir deles que professores organizam os conteúdos, planejam suas aulas e elaboram exercícios, segundo Costa (2008, p. 31):

Para muitos professores, os livros didáticos se converteram, de recursos auxiliares para o ensino, em quase que determinantes da prática pedagógica em sala de aula. Daí tamanha a importância da análise do livro didático, pois este determina tanto os saberes a serem ensinados, como a maneira pela qual devem ser ensinados, com este papel sendo assumido pelo Manual do Professor, isso porque cabe a ele suprir o professor das orientações necessárias para o cumprimento desta tarefa tão especial. (COSTA, 2008, p. 31)

Bittencourt (2004) considera o livro didático como um objeto cultural de difícil definição devido à sua complexidade, que é caracterizada pela interferência de diversos sujeitos, tanto em sua produção como em sua circulação e consumo, porém, de maneira geral, podemos dizer que o livro didático possui grande importância em sala de aula, sendo utilizada por muitos professores como o principal guia de ensino.

O livro didático também pode ser considerado, de acordo com Alves (2017), como um instrumento tradutor do currículo oficial, ou seja, cabe muitas vezes aos autores e pessoas envolvidas no processo de criação de um livro didático, interpretar e implementar as recomendações presentes nos documentos que orientam o ensino, sendo assim, podemos questionar: como é feita essa interpretação dos currículos para os livros didáticos?

Não acreditamos que um livro didático precise seguir fielmente as orientações curriculares para ser considerado um bom livro, porém, é preciso investigar como que essas adaptações estão sendo feitas de forma a entender a influência que os documentos oficiais tem na produção desses livros didáticos, e conseqüentemente, nas salas de aula.

No Brasil, existe um programa dedicado à avaliação e distribuição de livros didáticos para toda a rede pública de ensino chamado 'Programa Nacional do Livro Didático' (PNLD). Implementado na década de 1980 pelo decreto nº 91.542, o PNLD tem como principal objetivo garantir a distribuição de livros escolares para estudantes da rede pública do Ensino Fundamental, eventualmente expandindo para os níveis Médio e Educação de Jovens e Adultos (EJA) (CHABA, 2019).

A edição de 2020 do PNLD – Anos Finais do Ensino Fundamental é a primeira nesse nível de ensino em que as análises foram pautadas na BNCC (BRASIL, 2018), sendo assim, tem como objetivo de avaliação garantir que os livros contribuam para o desenvolvimento das habilidades e competências definidas pelo documento (BRASIL, 2020). Na análise das obras, o PNLD 2020 aponta:

qualidades, ressalvas, o arranjo das competências e habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a formação cidadã, o respeito à legislação, às diretrizes educacionais, a qualidade do projeto gráfico, ou seja, delinea a proposta pedagógica da obra em sua totalidade: Livro do Estudante, Manual do Professor e o Manual do Professor Digital. (BRASIL, 2020, p. 1)

Em relação as análises feitas pelo PNLD 2020, o documento discute diversas questões como linguagem utilizada, contextualização, utilização de softwares e ferramentas tecnológicas, representações gráficas, coerência com metodologia teórica anunciada, entre outros, porém, apesar de comentar cada unidade temática, as análises apresentadas são feitas para a coleção como um todo, o que dificulta o aprofundamento da análise em conteúdos específicos.

No que diz respeito às transformações geométricas, das 11 coleções apresentadas, o conteúdo é mencionado em quatro análises de forma breve e superficial, como por exemplo, na análise da coleção 'Matemática – Compreensão e Prática' do autor Ênio Silveira, onde é dito: “destaca-se positivamente uma abordagem dinâmica com a exploração das transformações geométricas.” (BRASIL, 2020, p. 128). As demais menções ao conteúdo são análises feitas de forma similar, sendo assim, acreditamos que há necessidade de análises mais profundas da abordagem do conceito de isometria nos livros didáticos.

A edição do PNLD de 2017, também voltada para os anos finais do Ensino Fundamental, faz uma crítica em relação à apresentação das simetrias, dizendo que a maior parte das coleções se limita ao ensino apenas da simetria de reflexão, deixando de lado a translação e rotação, tal questão também é relatada nas pesquisas de Fonseca (2013) e L. F. Santos (2010).

No contexto das pesquisas acadêmicas, encontramos o mesmo problema na revisão de literatura das produções sobre o ensino das isometrias, ou seja, a maioria dos artigos, teses e dissertações analisava, as isometrias como um todo, ou apenas a reflexão, enquanto que as problemáticas relacionadas as particularidades dos conceitos de translação e rotação não eram muito exploradas. Levando em consideração esses estudos, decidimos investigar todas as isometrias recomendadas pela BNCC (2018) que inclui simetria axial, rotação e translação.

Os livros e manuais didáticos são ferramentas bastante utilizadas por professores e alunos, desempenhando um papel de destaque em sala de aula, o que os torna um objeto de pesquisa relevante para a área de ensino. Por serem bastante

importantes, é necessário que os livros e manuais didáticos sejam elaborados de forma a auxiliar professores e alunos a atingirem os objetivos de ensino desejados. No Brasil, tais objetivos de ensino para a educação básica e superior, assim como diversos outros aspectos da educação, são regulados pelo Ministério da Educação (MEC), um órgão federal que possui como área de competência os seguintes assuntos: política nacional de educação, educação infantil, educação em geral que inclui ensino fundamental, ensino médio, ensino superior, educação de jovens e adultos, educação profissional, educação especial, ensino a distância, avaliação, informação e pesquisa educacional, pesquisa e extensão universitária entre outros.

Existem diversos documentos oficiais, criados pelo MEC, que orientam o ensino no país, como os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997) e a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), que tem como objetivo servir como pontos de partida para o trabalho docente e para a elaboração de livros didáticos.

Um dos conteúdos recomendados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) são as transformações geométricas, que incluem as transformações por isometria (simetria de reflexão, translação e rotação), foco dessa pesquisa.

A BNCC é um documento que determina habilidades e conhecimentos que todos os estudantes devem aprender, independente da região, raça ou classe econômica, e o currículo de todas as escolas, tanto públicas quanto particulares, obrigatoriamente devem ter a BNCC como referencial, como previsto pela Lei de Diretrizes e Bases da educação Nacional e pelo Plano Nacional da Educação. Em relação ao ensino da geometria e das transformações geométricas a BNCC (BRASIL, 2018) defende que:

A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência. (BRASIL, 2018, p. 271)

É previsto pela BNCC que o conteúdo de isometria seja ensinado nas duas etapas do Ensino Fundamental, porém, nos anos iniciais, ainda é visto de maneira bastante intuitiva, sendo trabalhada com mais profundidade nos anos finais do Ensino Fundamental, motivo pelo qual escolhemos livros dessa etapa para nossa pesquisa.

É possível perceber a diversidade de fatores que influenciam a elaboração dos livros didáticos, o que faz nos questionar como está sendo feita essa adaptação dos conceitos científicos para serem trabalhados em sala de aula. Sabemos que os conteúdos estudados por professores em formação nos cursos de ensino superior são vistos de forma diferente por alunos da educação básica, ou seja, é necessária uma adaptação do conteúdo científico de acordo com o nível que se quer ensinar. Em relação a essa problemática, podemos citar autores como Michel Verret, que segundo Lopes (1997), cunhou o termo transposição didática, e Yves Chevallard que elaborou a teoria da transposição didática.

A Transposição Didática, preocupa-se com as transformações pela qual um corpo de conhecimento passa, ao sair da instituição na qual foi concebido até chegar às salas de aula. Chevallard (2000) define a Transposição Didática a partir de três níveis do saber: o sábio (científico), aquele a ser ensinado (currículo, livros didáticos) e o ensinado (comunidade escolar); e tem como objetivo estudar as modificações do saber através de todos esses níveis.

Entender o processo de Transposição Didática de um determinado conteúdo pode ser bastante útil para refletir sobre seu ensino e questionar sua abordagem nos livros didáticos e na sala de aula. Entender o processo histórico e as influências culturais e sociais pela qual um determinado conteúdo é considerado relevante ou não para a educação pode também servir de ferramenta para contextualização daquele conceito, entendendo sua importância e sua aplicação em cada área. Através da noção de vigilância epistemológica, a teoria da transposição didática também nos ajuda a entender os obstáculos de ensino relacionados aos processos de transformação sofridos pelos conteúdos, se tais conteúdos foram deturpados ou perderam sua essência durante o processo.

Sendo assim, decidimos utilizar a teoria da transposição didática porque, trazendo conceitos como “programabilidade da aquisição do saber” e “vigilância epistemológica”, é uma teoria que nos proporciona uma análise que leva em consideração os diversos fatores que modificam e influenciam a forma como um conteúdo é adaptado para os livros didáticos e ensinados em sala de aula.

Já do ponto de vista cognitivo, vimos que o conteúdo de isometria apresenta diversos elementos que podem apresentar obstáculos na sua aprendizagem, pois lida com diversas noções e conceitos matemáticos diferentes, por este motivo, decidimos analisar a abordagem do conteúdo em livros didáticos também através da lente de uma teoria cognitivista que estuda o uso de esquemas em situações diversas como a teoria dos campos conceituais.

Desenvolvida por Gerard Vergnaud (1996), a teoria dos campos conceituais, surgiu no contexto da Didática da Matemática francesa, e parte da premissa de que os conceitos matemáticos são aprendidos pelos alunos, a partir da interação com diversas situações, cada uma exigindo a mobilização de esquemas de resolução diferentes, conseqüentemente, é necessário que o aluno se depare com situações variadas para que um conceito seja construído, o que caracteriza a aquisição de novos conteúdos como um processo lento e demorado.

Não há dúvidas que o conteúdo de isometria é fundamental tanto no contexto escolar como no cotidiano, contribuindo para a nossa interpretação do mundo, sendo assim, é importante que os livros didáticos sejam elaborados de forma a auxiliar professores e alunos na aquisição desse conceito. O PNDL 2020 é um documento que avalia os livros didáticos de acordo com as recomendações da BNCC, porém acreditamos que uma análise mais aprofundada e crítica pode contribuir para a reestruturação destes livros. Tal crença nos leva a questionar como está sendo feita essa transição do conteúdo, com influência dos currículos oficiais, para os livros didáticos: o conceito é apresentado com uma fundamentação científica adequada? Que situações envolvendo o conceito de simetria são abordadas nos livros didáticos? Os livros contam com situações variadas que estimulam a aprendizagem do conceito de isometria? Tais reflexões nos levam aos nossos objetivos, geral e específicos.

1.6 Objetivo geral

Devido à importância do conceito de simetria, contando com a diversidade de situações em que é possível trabalhar o conteúdo, e também a relevância do livro didático como ferramenta de ensino criadas e adaptadas com influência dos documentos que orientam a educação, temos como objetivo geral:

- Analisar a abordagem do conteúdo de isometrias em livros didáticos de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental sob a ótica das teorias dos campos conceituais e da transposição didática.

1.6.1 Objetivos específicos

Além das situações presentes, queremos também entender as influências que os documentos e currículos exercem na elaboração desses livros didáticos. Os conhecimentos matemáticos assim como de outras áreas do saber passam por diversas modificações para servirem a propósitos educacionais, esse fenômeno é estudado pela teoria da transposição didática, que nos permite analisar as adaptações realizadas nos conteúdos, desde sua origem, passando por currículos e livros didáticos até o professor em sala de aula. Quais são as recomendações para o ensino desse conteúdo presentes nos documentos que orientam a educação e como essas recomendações se refletem nos livros e manuais didáticos?

Com o objetivo de entender melhor os documentos que influenciam a elaboração de livros didáticos, elencamos como primeiro objetivo específico:

- I. Analisar a programabilidade da aquisição do saber do conteúdo de isometria de acordo com a TTD, buscando identificar também as situações do ponto de vista da Teoria dos Campos Conceituais na BNCC (2018).

Nesta primeira etapa, nossa meta é observar as situações (do ponto de vista da TCC) e a programabilidade (do ponto de vista da TTD) propostas para o conteúdo de isometria presente nos documentos. Os dados obtidos serão usados para comparação nas seguintes etapas:

- II. Analisar a abordagem do conteúdo de isometria em livros didáticos de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, a partir dos conceitos de programabilidade da aquisição do saber e de vigilância epistemológica presentes na teoria da transposição didática;
- III. Analisar, sob a ótica da teoria dos campos conceituais, as situações presentes nos livros didáticos de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental

relativas ao conteúdo de isometria, a partir dos conceitos de invariantes operatórios e significantes trabalhados pela teoria.

A dissertação encontra-se estruturada da seguinte forma: no capítulo 2 apresentamos o referencial teórico da pesquisa, contendo os fundamentos e conceitos das Teorias da Transposição Didática dos Campos Conceituais, em seguida, trabalhamos as definições de isometrias, fazendo também um breve resgate histórico e uma revisão de bibliografia sobre o seu ensino.

No capítulo 3 apresentamos a metodologia dessa pesquisa. A análise da BNCC (2018) sob a ótica das Teorias da Transposição Didática e dos Campos conceituais será apresentada no capítulo 4. No quinto capítulo apresentamos as análises dos livros didáticos de acordo com a TTD, no capítulo 6, em relação a TCC e por fim, no capítulo 7, faremos nossas considerações finais.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Esse capítulo foi dedicado ao referencial teórico dessa dissertação. Iniciamos as nossas referências discutindo as principais ideias e conceitos da Teoria da Transposição Didática desenvolvida por Yves Chevallard (2000), buscando responder perguntas como: o que é a transposição didática? Por que e como ela acontece? Quais são os processos envolvidos na transposição? O que é a vigilância epistemológica?

A segunda parte do capítulo foi dedicada aos preceitos da Teoria dos Campos Conceituais elaborada por Gerard Vergnaud (1996). Em relação a mesma, nosso objetivo principal foi entender qual o seu propósito, o que ela defende, o que é um campo conceitual e como se dá a aprendizagem segundo essa teoria. Discutimos também sobre as invariantes operatórias e os significantes, objetos que fazem parte de um campo conceitual.

Devido a complexidade e densidade das teorias envolvidas, e ao fato de termos mais de uma teoria para realizar a análise dos livros didáticos, não nos aprofundamos demasiadamente em cada uma delas, ao invés disso, direcionamos nosso referencial para os principais conceitos e ideias defendidas pelas teorias.

Um dos propósitos dessa pesquisa é fazer uma reflexão sobre a abordagem do conteúdo de isometria nos livros didáticos de matemática através das teorias elencadas, com isso em mente, delimitamos o referencial teórico de forma a procurar respostas para questões pertinentes a esse propósito e aos nossos objetivos gerais e específicos.

Encerrando o capítulo temos nosso referencial sobre o conteúdo de isometrias. Iniciamos a seção fazendo um breve resgate histórico sobre o seu ensino. Apresentamos as definições de transformação geométrica, isometria, simetria axial, translação, rotação e reflexão com deslizamento. Finalizamos o capítulo fazendo uma revisão bibliográfica sobre o ensino de isometrias.

2.1 Teoria da Transposição Didática

Como discutimos na introdução desse trabalho, existem diversos fatores que influenciam os conhecimentos que chegam às salas de aula: políticos, culturais, econômicos, pessoais (subjetividade das pessoas envolvidas no processo) entre

outros. Temos currículos a nível nacional e estadual, como também aqueles determinados por cada escola, temos livros didáticos (e autores), gestores e também professores, todos envolvidos no processo de ensino.

Levando esses aspectos em consideração, podemos questionar: o conhecimento é estático durante esse processo ou é modificado? Que transformações o conhecimento sofre até chegar as salas de aula? Em torno dessas ideias surge a Teoria da Transposição Didática.

Segundo Lopes (1997), a noção de Transposição Didática foi inicialmente estabelecida pelo sociólogo Michel Verret, que defende a ideia de que a educação escolar não se limita a selecionar os conhecimentos disponíveis da cultura em um determinado momento histórico, mas também objetiva tornar os saberes selecionados efetivamente transmissíveis e assimiláveis, sendo assim, segundo Jardim, Camargo e Zimer (2015), Verret define a didática como a transmissão de um saber adquirido de quem sabe para quem não sabe, e classifica o saber em escolar e não escolar.

Posteriormente, com base nas pesquisas de Michel Verret, Chevallard (2000) desenvolve sua própria teoria, discutindo a problemática em seu estudo "*la transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*", publicado em 1985 que tem como objetivo estudar as transformações sofridas pelo conhecimento ao sair do contexto em que foi concebido até chegar as salas de aula.

Chevallard (2000), defende a existência do conhecimento em três níveis do saber: o saber sábio, que corresponde ao saber produzido na comunidade científica; o saber a ser ensinado, determinado pelos representantes do sistema de ensino; e o saber ensinado, referente a comunidade escolar. Considerando essas três instâncias do saber, temos que um conteúdo de conhecimento sofre um conjunto de transformações adaptativas que o tornam adequado para ocupar um lugar entre os objetos educacionais. O trabalho realizado sobre esse corpo de conhecimento ao passar por todas essas instâncias é chamado de transposição didática (CHEVALLARD, 2000).

Observando as diferenças entre os conhecimentos acadêmicos e os conhecimentos no ensino básico, percebemos que transposição didática acontece e é necessária para o funcionamento escolar. Refletindo sobre essas transformações podemos nos perguntar: por que essas modificações são realizadas? Elas são prejudiciais ou benéficas?

Para Chevallard (2000), a transposição didática existe porque a forma como o conhecimento funciona na esfera didática é diferente da esfera científica, além disso, o conhecimento possui funções e objetivos diferentes de acordo com cada contexto e instituição a qual se submete (CHEVALLARD, 2013).

O saber sábio, que é construído na comunidade científica, tem como função resolver problemas, fazer análises, comunicar reflexões, entre outros, porém não tem como objetivo final o ensino, por esse motivo, para que um conhecimento se torne ensinável, é necessário um esforço intencional com esse objetivo:

Assim, o ensino é confrontado com um problema permanente. O conhecimento a ser ensinado, e cada “pedaço” de conhecimento que compreende, existe apenas em contextos que não podem ser fielmente reproduzidos dentro da escola. Como já foi observado, na medida em que ele é efetivamente utilizado, qualquer parte de conhecimento vem envolto por um ambiente específico, característico das utilizações feitas do mesmo, no qual ele é, por assim dizer, enredado em combinações aleatórias. Estes ambientes não são apenas irrelevantes para o projeto de ensino: eles não costumam sobreviver à transição da prática social específica para a instituição de ensino. Consequentemente, um ambiente didático adequado terá que ser reconstruído a partir do zero. (CHEVALLARD, 2013, p. 12)

O saber sábio, de acordo com Lima (2012), por nascer da produção científica, possui um perfil epistemológico próprio daquele contexto, se distanciando bastante do conhecimento ensinado nas escolas, e essa distância existe porque o objetivo final não é que o aluno se aproprie do conteúdo tal qual ele foi produzido na comunidade científica (MENEZES, 2006). Como consequência dessa divergência, é necessário que o conhecimento passe por alguns processos para que adquira um formato compatível com as aspirações da comunidade escolar.

Com esse objetivo, para que um corpo de conhecimento seja transposto de uma esfera para outra, é necessário que seja submetido, segundo Chevallard (2000), às seguintes etapas: despersonalização do saber, dessincretização do saber, programabilidade da aquisição do saber, publicidade do saber e controle social da aprendizagem.

A despersonalização é caracterizada, de acordo com Menezes (2006), pelo conjunto de supressões realizados pelo pesquisador. O objetivo desse processo é fazer uma espécie de “limpeza”, corrigindo erros, eliminando o que é irrelevante,

afastando o conhecimento criado do pesquisador, ou seja, descartando tudo o que personaliza esse saber (MENEZES, 2006).

A dessincretização consiste em uma certa delimitação de saberes parciais, a partir do saber de referência, onde cada um desses se expressa em um discurso autônomo (CHEVALLARD, 2000). Tal autonomia é, porém, dada por Chevallard (2000) como fictícia, pois tais divisões nem sempre estão presentes na concepção dos objetos de conhecimento do saber sábio.

Esse processo de dessincretização do conhecimento em saberes parciais não é o suficiente para a instituição escolar, sendo necessária ainda, a organização desses saberes. Referido por Chevallard (2000), como uma norma de progressão do conhecimento, essa etapa é denominada programabilidade da aquisição do saber. É nessa fase que ocorre a elaboração de uma sequência entre os objetos que serão ensinados obedecendo a uma determinada lógica.

Finalizando os processos de transformação descritos por Verret e Chevallard, temos a publicidade do saber e controle social das aprendizagens. De acordo com Menezes (2006), essas etapas consistem na definição explícita de quais saberes deverão ser ensinados, em que tempo, e no controle da aprendizagem, em que o saber a ensinar torna-se efetivamente em saber ensinado.

Segundo Chevallard (2000) os conhecimentos designados como aqueles a serem ensinados pelos programas e pela interpretação desses programas são, muitas vezes, verdadeiras criações didáticas que surgem devido as necessidades do ambiente de ensino.

Um exemplo de criação didática é destacado por Sant'Anna, Bittencourt e Olsson (2007) ao discutirem o movimento da matemática moderna, segundo os autores, nessa época, acreditava-se que era possível uma abordagem estruturalista para o ensino da Matemática, o que culminou no desenvolvimento de novas técnicas de ensino para favorecer a aprendizagem. Influenciados por esse objetivo, diversas criações didáticas surgiram para viabilizar a proposta, sendo o diagrama de Venn uma dessas criações didáticas, passando a constituir um novo objeto de ensino (SANT'ANNA; BITTENCOURT, 2007).

Existem diversas pessoas e instituições envolvidas nos diferentes processos que envolvem o saber dentro dos sistemas de ensino e didático, desde sua origem, até as salas de aula, ou seja, diversos fatores que influenciam a construção do saber, a escolha dos saberes considerados relevantes para serem ensinados (a construção

dos programas de ensino), a organização dos saberes em livros didáticos e a forma como os professores ensinam esses saberes em sala de aula. Entendemos assim que a origem de um saber está ligada às necessidades da sociedade em um determinado momento histórico e cultural, surgindo com o propósito de resolver um problema pertinente àquele contexto, porém, para que tal saber seja difundido, esta precisa sujeitar-se às regras das instituições que o utilizarão, sendo tais saberes considerados legítimos por estas.

2.1.1 Transposição didática externa e interna

É possível classificar a transposição didática como externa ou interna: a primeira diz respeito a transformação do saber sábio em saber a ser ensinado, enquanto que a segunda transforma o saber a ser ensinado em saber ensinado (DINIZ; NETO; SILVA, 2015).

Figura 1 – Esquema transposição didática



Fonte: Pereira, Paiva e Freitas (2018)

O processo de Transposição dos conhecimentos que surgem no contexto científico, até os programas de ensino (do saber sábio ao saber a ensinar) é chamado Transposição Didática externa. Os responsáveis pelo processo nessa etapa (professores, didatas, gestores, instituições reguladoras, etc.) fazem parte do que Chevallard (2013) chama de Noosfera.

De acordo com Chevallard e Bosh (2005), o papel da noosfera, ao realizar a transposição didática externa, é de lidar com as demandas feitas pela sociedade no sistema de ensino, fazendo com que o conhecimento ensinado na escola mantenha uma ilusão de “autenticidade”, mascarando as transformações ocorridas no processo para que o conhecimento que é ensinado não aparente ser uma invenção da escola.

Segundo Chevallard (2000) a noosfera constitui uma instância que é essencial para o funcionamento didático, sendo comparada pelo autor a uma espécie de

“peneira”, mediando as interações entre o sistema educacional e a sociedade. É na noosfera que acontecem as negociações entre as demandas do meio social e as pessoas e instituições envolvidos no processo de transposição, constituindo assim a esfera onde se pensa o sistema didático (CHEVALLARD, 2000).

Em outras palavras, a noosfera é responsável pela seleção dos elementos do saber sábio que serão designados como saberes a serem ensinados, criando objetos de ensino a partir de um saber de referência, sendo submetidos então ao trabalho de transposição, conseqüentemente passando por todos os processos necessários para adaptar o saber científico de acordo com os objetivos da instituição educacional. Chevallard (2000) considera esse processo como a parte visível desse trabalho, a qual chama de trabalho externo da transposição didática.

Após a noosfera realizar o trabalho de transposição, cabe ao professor interpretar e transformar esse saber. Essa interpretação está sujeita aos aspectos subjetivos do professor, que a partir das suas experiências, preferências e escolhas, ensinará esse saber para os alunos. Tal processo é denominado transposição interna, caracterizado pela transposição do saber a ser ensinado em saber ensinado.

De acordo com Filho (2000), o saber torna-se objeto de trabalho do professor quando ele, a partir dos livros didáticos, prepara a sua aula, criando nesse momento um terceiro nicho epistemológico que através de um processo interno de transposição didática, transforma o saber a ensinar em saber ensinado. Filho (2000, p. 48) afirma que:

Este último é de extrema instabilidade, pois o ambiente escolar – com os alunos e seus pais, supervisores escolares, diretores ou responsáveis pelas instituições de ensino e o meio social em que a instituição está inserida – exerce fortes pressões sobre o professor, que acabam interferindo em suas ações desde o momento em que preparara sua aula até o lecioná-la de fato. (FILHO, 2000, p. 48)

Percebemos que cada instância do saber sofrerá a influência de diversas pessoas e instituições envolvidas no processo: o saber sábio, da comunidade científica; o saber a ser ensinado, da noosfera e o saber ensinado, de professores, pais, diretores, coordenadores entre outros.

2.1.2 Vigilância epistemológica

Vimos até então que os objetos de conhecimento ensinados nas escolas diferem daqueles que são produzidos fora dessa esfera, e a legitimidade desses conhecimentos é dada pelas mesmas instituições que operam a transposição didática. Diante das transformações sofridas pelo saber podemos questionar: o conhecimento e sua organização, produzidos por esse processo e ensinado nas escolas, são inferiores àqueles que surgem na academia?

Em relação a essa questão, Chevallard e Bosch (2005) defendem que a transposição não necessariamente produz versões inferiores ou degradadas do conhecimento de origem, e que algumas vezes o processo de transposição didática torna o conhecimento mais estruturado e preciso, de forma que o novo conhecimento transformado apresenta melhoras em relação ao original.

Os mesmos autores também comentam que as disciplinas e os campos de conhecimento que existem hoje em dia são frutos de um complexo processo, ocorrido ao longo da história, de transposições didáticas e institucionais que até hoje não são bem conhecidas.

Levando em consideração o propósito da transposição didática bem como dos seus processos adaptativos para tornar o conhecimento didático, percebemos que as transformações realizadas pela noosfera são necessárias para o sistema educacional. A inevitabilidade da transposição didática é reconhecida por autores como Ricardo (2020), que afirma que esse processo de didatização que acontece na transposição didática é uma exigência incontornável, e por esse motivo, a compreensão desse processo é fundamental para a organização dos conhecimentos em função do projeto social de ensino que se deseja.

Araújo (2009) comenta que a teoria de Chevallard (1991) se apoia nos conceitos de instituição, de indivíduo e de objetos do saber, levando em consideração também a relações institucionais e pessoais com tais objetos, e diz que essa teoria surge da preocupação do autor em encontrar respostas para questões como: qual a relação entre os saberes ensinados e científicos e qual a distância ideal entre eles?

Para Chevallard (2000), quanto mais próximo do saber sábio o saber a ser ensinado for, mais legítimo ele é. Contrapondo essa ideia, Menezes (2006) traz Bordet (2007) que concebe a noção de *bonne distance* (boa distância ou distância adequada), defendendo que desejar que essa distância adequada seja uma distância mínima

pode ser um equívoco e que a *bonne distance* deve ser definida em função dos níveis e objetos de ensino.

Apesar de Bordet (2007) criticar a distância ideal proposta por Chevallard, as ideias as quais defende não necessariamente excluem a do autor da teoria. É possível que um objeto de conhecimento se distancie do saber de referência ao ponto de não atender mais aos objetivos de ensino desejados para um determinado nível escolar, podendo levar os alunos a aprenderem um conceito de forma equivocada.

Por este motivo, a realização da vigilância epistemológica, por professores, pesquisadores e noosfera visa a reflexão das modificações realizadas, tendo como objetivo observar se as transposições didáticas pelas quais os conhecimentos foram submetidos contribuem para a aprendizagem dos alunos ou se apresentam como obstáculos.

Uma das formas como essa vigilância pode ser feita é descrita pelo próprio Chevallard (2000), que afirma que o docente, ao se deparar com um conhecimento a ser ensinado, deve se perguntar: qual o objeto de ensino em questão? Qual a relação desse objeto de ensino com o objeto matemático ao qual implicitamente se refere? Ao fazer essas perguntas, comparando os dois saberes, é possível refletir se o objeto de ensino corresponde efetivamente ao objeto do qual se projeta.

Embora a transposição didática não produza obrigatoriamente versões inferiores do conhecimento científico, ainda é possível que um saber seja deturpado durante o processo, podendo criar, segundo Menezes (2006), obstáculos a aprendizagem. Essa preocupação é um dos fatores que torna relevante o conceito de vigilância epistemológica que tem como objetivo garantir que o conhecimento não seja degradado, violado ou substituído no processo de transposição (SOUSA et al, 2012). Segundo Pereira, Paiva e Freitas (2016):

Da academia à escola básica, o saber passa por várias transformações que o distancia cada vez mais do saber sábio. O processo de vigilância epistemológica é uma grande contribuição da teoria da Transposição Didática, pois diante do inevitável distanciamento entre o saber científico e escolar, ele traz à reflexão sobre o quê e como ensinar de forma que seja possível manter a fidelidade ao conceito matemático. (PEREIRA; PAIVA; FREITAS, 2016, p. 4)

Ao realizar a vigilância epistemológica em livros didáticos podemos questionar, ao compará-los com o saber de referência, a que propósitos servem as

modificações feitas pelos autores e se as mesmas estão de acordo com os objetivos pré-estabelecidos. É possível também verificar se após as transformações, os objetos de ensino correspondem ao conhecimento de referência ou não, e de acordo com a avaliação feita, identificar possíveis obstáculos a aprendizagem.

2.2 Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais é uma teoria cognitivista cujo objetivo, segundo o psicólogo, filósofo e matemático francês, autor da teoria, Gerard Vergnaud (1996) é “fornecer um quadro que permita compreender as filiações e as rupturas entre conhecimentos, nas crianças e nos adolescentes, entendendo por <conhecimentos> tanto o saber fazer como os saberes expressos” (VERGNAUD, 1996, p. 155), ou seja, a teoria se preocupa tanto com os conceitos formados pelos alunos quanto com a sua aplicação ao se depararem com diferentes problemas.

Segundo Moreira (2016), a teoria parte do princípio de que o conhecimento está organizado em campos conceituais, definido como um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos e operações de pensamento, conectadas entre si, durante o processo de domínio de um conhecimento por um sujeito. Tal processo de aquisição do conhecimento não é, segundo a Teoria dos Campos Conceituais, imediato, mas ocorre durante um longo período de tempo, através das experiências do sujeito (MOREIRA, 2016), sendo assim, não é através de um único problema ou de um único tipo de problema ou experiência que um aluno constrói um conceito, mas sim através de diversas experiências que colocam seu conhecimento em prova.

Vergnaud também fez parte do grupo de pesquisadores doutorados por Jean Piaget, e faz em sua obra algumas críticas e avanços a partir da teoria da epistemologia genética de seu orientador. Em relação ao conceito de adaptação de Piaget, Vergnaud (2009) afirma que “a teoria do conhecimento como um processo de adaptação é essencial, mas o que é que se adapta e ao que?” (VERGNAUD, 2009, p. 85, tradução nossa) e conclui que são as formas de organização da atividade (os esquemas) que se adaptam às situações:

Portando, o par esquema/situação é conceitualmente mais interessante e mais poderoso que o par resposta/estímulo, e é também mais viável descrever e analisar comportamento e representação usando o par esquema/situação do que o par sujeito/objeto. (VERGNAUD, 2009, p.85, tradução nossa)

Colocando o que foi dito anteriormente nos termos descritos pela teoria, temos que do ponto de vista da aprendizagem, um conceito não é construído a partir de uma única situação, é necessário que o indivíduo se depare com diferentes situações que irão mobilizar diversos esquemas, bem como conceitos já adquiridos, para que um novo seja aprendido, sendo assim, Vergnaud concebe a ideia de campo conceitual como um conjunto de esquemas e situações interligados. A definição de campo conceitual parte de três argumentos principais (VERGNAUD, 1983, p.393 apud MOREIRA, 2002, p. 9):

Um conceito não se forma dentro de um só tipo de situações; 2) uma situação não se analisa com um só conceito; 3) a construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo de muito fôlego que se estende ao longo dos anos, às vezes uma dezena de anos, com analogias e mal entendidos entre situações, entre concepções, entre procedimentos, entre significantes. (VERGNAUD, 1983, p.393 apud MOREIRA, 2002, p. 9)

Além das situações e dos esquemas, os significantes (as representações simbólicas) também possuem um papel importante na aquisição de um novo conhecimento. Sobre a relação entre esses componentes, Vergnaud (1996) diz que as situações dão sentido aos conceitos, porém, o sentido não está nas situações em si, do mesmo jeito que não se encontra nas próprias representações, o sentido encontra-se então na relação do indivíduo com as situações e os significantes, ou, em outras palavras: “são os esquemas evocados, no sujeito individual, por uma situação ou significante que constituem o sentido dessa situação ou desse significante para esse indivíduo” (VERGNAUD, 1996, 179).

Tal relação leva Vergnaud (1996) a considerar o conceito a partir de um tripé: ‘S’ é conjunto das situações que dão sentido ao conceito, ‘I’ é o conjunto de invariantes operatórias (inclui os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação) e ‘s’ corresponde ao significante (permitem representar simbolicamente o conceito): $C = (S, I, s)$

A partir dos princípios de sua teoria apresentados até aqui fica fácil entender porque o domínio de um campo conceitual por um aluno, é um processo demorado,

pois, para que esse processo ocorra, é necessário que ele se depare com diversas situações novas e diferentes, que exijam a mobilização, o desenvolvimento progressivo e a adaptação de diversos esquemas, conduzindo-os à aprendizagem.

2.2.1 Conceitos, Situações e Esquemas

Para Vergnaud (1996), do ponto de vista da aprendizagem, um conceito não pode ser reduzido à sua definição, ou seja, uma simples leitura sobre o objeto a ser conceitualizado não é suficiente para que ele ganhe sentido para os alunos, assim como sabemos que aulas que tendem a ser puramente expositivas não são ideais para a construção de conceitos mais complexos, com base nessas reflexões, Vergnaud (1996) defende que é através de problemas e situações que um conceito adquire sentido para os alunos.

Analisando os tipos de situações que podem ser encontradas, Vergnaud distingue duas classes principais, a primeira diz respeito às situações nas quais o aluno, em um determinado momento do seu desenvolvimento e em uma determinada circunstância, possui as competências necessárias à resolução relativamente imediata da situação, enquanto que a segunda refere-se às situações nas quais o aluno não dispõe de tais competências, sendo assim, ele é obrigado a refletir sobre, e explorar a situação, levando a tentativas e erros, resultando no sucesso ou fracasso da resolução (VERGNAUD, 1996).

Do ponto de vista da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996) o que diferencia as duas classes de situações no contexto da aprendizagem, são os *esquemas* mobilizados para resolvê-los. Na primeira classe de situações, a tendência é que o sujeito utilize um único esquema, resultando em ações que são em grande parte automatizadas, enquanto que na segunda classe de situações, o sujeito poderá evocar diversos esquemas que podem competir entre si, levando a acomodação e recombinação desses esquemas, resultando em descobertas e aprendizagens (VERGNAUD, 1996). É nessa classe de situações que a maior parte da teoria se apoia, pois são os tipos que apresentam maior oportunidade para o desenvolvimento cognitivo e construção dos conceitos.

De acordo com Vergnaud (2009) a função dos esquemas, é tanto de descrever formas ordinárias de resolução para uma situação já dominada quanto de dar dicas de como abordar novas situações, são, portanto, “recursos adaptáveis: eles assimilam

novas situação se acomodando a elas.” (VERGNAUD, 2009, p. 88, tradução nossa), ou seja, a definição de esquema deve abranger tanto aqueles desenvolvidos por situações já dominadas quanto àqueles que podem ainda se adaptar a novas situações, sendo assim, Vergnaud diz que por um lado, um esquema é a organização invariante da atividade para uma certa classe de situações e por outro lado, sua definição deve conter conceitos abertos e possibilidades de inferência (VERGNAUD, 2009, p. 88).

Para que a decomposição e recomposição de esquemas seja possível, Vergnaud (1998) diz que estes devem ser formados por quatro ingredientes:

1. Metas e antecipações;
2. Regras de ação, busca de informação e controle;
3. Invariantes operatórias;
4. Possibilidades de inferências.

O primeiro elemento consiste de objetivos a serem atingidos, potenciais etapas intermediárias e resultados esperados, regras de ação implicam, por exemplo, em lógicas da forma “se... então...”, as invariantes operatórias consistem em teoremas-em-ação e conceitos-em-ação (termos que serão aprofundados mais a frente), e as possibilidades de inferência permitem planejar as regras e antecipações a partir das informações e invariantes operatórios das quais o aluno dispõe, os quais geram uma sequência de ações para se atingir um objetivo (FIOREZE, 2010).

2.2.2 Invariantes operatórias, conceitos-em-ação e teoremas-em-ação

Crianças possuem diversos conhecimentos sobre espaço, quantidade, entre outros que são intuitivos e segundo Vergnaud (1998) essa intuição deve ser analisada em termos matemáticos, para isso, utiliza os conceitos de teoremas-em-ação e conceitos-em-ação que fazem parte das invariantes operatórias. Sendo assim, temos, de acordo com Vergnaud (1998):

- **teoremas-em-ação:** é uma proposição que pode ser verdadeira ou falsa;
- **conceitos-em-ação:** não são susceptíveis de serem verdadeiras ou falsas, são apenas relevantes ou não para identificar e selecionar informação.

Quando um aluno se depara com uma nova situação, tanto para seu entendimento quanto para a sua resolução, é necessário saber alguns conceitos prévios, por exemplo, se a situação pede que o aluno faça a translação de uma figura a partir de um vetor, é necessário que este entenda o conceito de translação e de vetor, bem como os conceitos que os definem. No caso, a definição que o aluno possui de 'vetor' e de 'translação', seja correta ou não, será utilizada para o entendimento daquela situação, porém não serão testadas (conceitos-em-ação), enquanto que os teoremas-em-ação aparecem na forma de uma proposição, sendo assim suscetíveis a serem validadas ou refutadas, dependendo da sua eficácia ao lidar com um determinado problema. Ao se deparar com diferentes situações, as invariantes operatórias vão se modificando e se adaptando para melhor resolver os problemas encontrados e é por esse motivo que é importante que exista variedade nas situações propostas aos alunos.

Existe uma relação dialética entre teoremas-em-ação e conceitos-em-ação, pois “conceitos são ingredientes dos teoremas, e teoremas são propriedades que dão ao conceito o seu conteúdo” (VERGNAUD, 1998, p. 174, tradução nossa). Acreditamos que ao longo dos anos os campos conceituais, do ponto de vista da aprendizagem, vão ficando cada vez mais complexos, pois os teoremas utilizados são compostos por conceitos que se tornam cada vez mais elaborados.

2.2.3 Sentido e significantes

O significante, terceiro termo da composição de conceito da teoria, corresponde ao “conjunto das formas pertencentes e não pertencentes à linguagem, que permitem representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento” (VERGNAUD, 1996, p. 166). Na matemática é possível encontrar uma infinidade de símbolos e representações visuais utilizadas tanto na apresentação de situações como nas suas resoluções e tais representações desempenham, segundo Vergnaud (1996), uma função tripla:

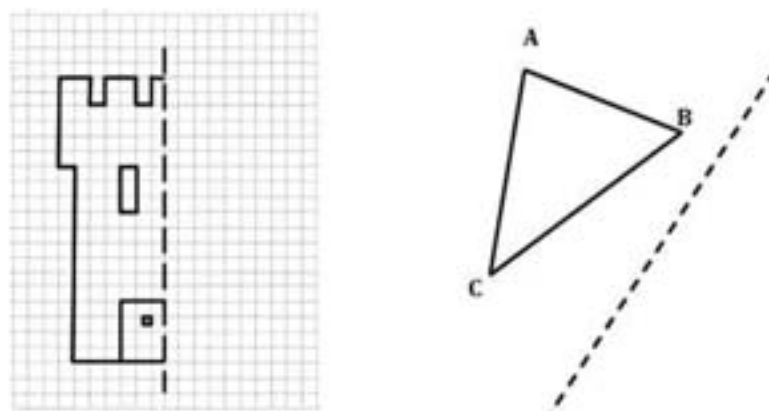
1. Ajudam à designação e identificação de objetos, propriedades, relações e teoremas;
2. Ajudam na inferência;
3. Ajudam a antecipar os efeitos e os objetivos, a planejar e controlar a ação.

Sendo assim, ao analisar a abordagem de um conteúdo em um livro didático é importante entender também o papel que os símbolos e as representações apresentadas desempenham na construção dos conceitos pelos alunos. Em que situações estão sendo utilizados? Que conceitos evocam? Com que função estão sendo empregados? Todos esses são questionamentos evocados pela teoria dos campos conceituais.

2.2.4 Situações envolvendo o ensino de simetria segundo Vergnaud

Em um de seus artigos, Vergnaud exemplifica alguns de seus conceitos através de situações envolvendo o ensino de simetria, sendo assim apresenta duas situações diferentes, a primeira, a qual considera mais simples, consiste na construção de uma figura simétrica a original com auxílio de uma malha quadriculada, em que o eixo de simetria encontra-se na orientação vertical, e a figura possui apenas ângulos retos, como resultado, todos os traços do desenho são paralelos ou perpendiculares ao eixo de simetria (situação que, segundo Vergnaud (2013), é indicada para crianças na faixa dos 8 a 10 anos). A segunda situação envolve a construção de um triângulo escaleno, que não possui nenhuma aresta paralela ou perpendicular ao eixo de simetria, cuja orientação, por sua vez, é inclinada em relação às margens da folha, que ao contrário do primeiro caso, não apresenta malha quadriculada (situação que, segundo Vergnaud (2013), pode ser proposta para crianças entre 12 e 13 anos). As imagens usadas no artigo são as seguintes:

Figura 2 – Exemplo de situação envolvendo simetria segundo Vergnaud



Fonte: Vergnaud (2013)

Vergnaud descreve que a primeira situação é normalmente resolvida de forma trivial pelos alunos, seguindo a lógica: um quadrado para a esquerda no modelo, um passo para a direita na parte simétrica, dois passos pra baixo no modelo, dois passos pra baixo na simetria, e assim por diante.

Já a segunda situação é um pouco mais difícil e exige o uso de instrumentos de desenhos (compasso e par de esquadros). Além disso, segundo Vergnaud (2013) essa situação exige o entendimento de noções de perpendicularidade, equidistância e mediatriz:

A organização da atividade necessária para desenhar o triângulo $A'B'C'$, simétrico ao triângulo ABC , é mais complexo que o desenho da fortaleza na primeira situação, principalmente por conta dos conceitos envolvidos. Uma abordagem do ponto de vista do desenvolvimento da educação matemática precisa prestar atenção a essa discrepância conceitual na forma operacional do conhecimento: o conhecimento que fornece os meios para se fazer e obter sucesso. (VERGNAUD, 2013, p. 43)

O que podemos concluir desses exemplos é que existem diferentes situações que envolvem o conceito de simetria, cada uma delas contendo particularidades que requerem a mobilização de conceitos e esquemas diferentes para sua resolução. Sendo assim, nosso objetivo ao analisar as situações encontradas nos livros didáticos é, identificar, de acordo com algumas variáveis (como a posição do eixo de simetria, características dos problemas, natureza da atividade etc.), tipos diferentes de situações que podem evocar a mobilização de diferentes esquemas e conceitos.

2.3 Isometrias

Esse capítulo foi dedicado a apresentação do referencial teórico sobre o conceito de isometria. As seções trabalhadas aqui discutem aspectos históricos sobre o ensino desse conteúdo e definições de acordo com trabalhos acadêmicos. Encerramos o capítulo fazendo uma revisão de literatura relacionada ao conceito no que diz respeito a área educacional.

2.3.1 Introdução: um breve resgate histórico sobre o ensino das transformações geométricas no Brasil

As transformações geométricas são utilizadas na Geometria Moderna para facilitar uma investigação geométrica, ou seja, quando transformamos uma figura objeto em uma figura imagem relacionada a original, um problema mais complexo torna-se mais simples para ser resolvido e ao final invertemos a transformação obtendo assim a solução referente a figura original (ALVES, 2005).

O ensino da geometria no Brasil, assim como o de outras disciplinas, sofreu diversas alterações ao longo dos anos. De acordo com Barretto (1998):

As reformas educacionais tem sido acompanhadas ou decorrem de mudanças nas determinações legais sobre o ensino, que alteram o perfil dos cursos oferecidos e o peso relativo das disciplinas no seu interior. A tais reformas segue-se, via de regra, um esforço de renovação dos conteúdos curriculares e do modo de abordá-los, realizado pelos órgãos gestores dos sistemas de ensino, que nem sempre corresponde a uma renovação efetiva do seu tratamento nas escolas. (BARRETTO, 1998, p. 185)

Segundo Manoel (2014), a geometria está presente nos currículos nacionais desde a Reforma Januária Cunha Barbosa e a lei de 15 de outubro de 1827, ou seja, desde a instituição do ensino primário no Brasil, porém, seu ensino não foi implementado de imediato, por não haver professores habilitados, e pelo conteúdo não ser cobrado na admissão de instituições de ensino secundário. Desde então, ocorreram diversas mudanças nas legislações e currículos nacionais, e em 1922, alterações foram sugeridas para o ensino de matemática no Brasil, propostas por Euclides Roxo na Reforma Educacional Francisco Campos em 1931, influenciadas por uma tendência internacional de modernização do ensino da matemática, inspirada pelas ideias de Felix Klein na Alemanha (SOUZA, 2010).

Segundo Millman (1977), a geometria no século XIX encontrava-se bastante fragmentada, dessa forma, a proposta de Klein era de uma unificação, partindo da articulação da geometria com a álgebra e a aritmética, o que culminou no Brasil, de acordo com Souza (2010), na unificação dessas três áreas em uma única disciplina de matemática.

Segundo Mpantes (2016), Klein também foi responsável (inspirado pelo trabalho de Arthur Cayley e com contribuições de Sophus Lie) pela perspectiva de

estudar a geometria a partir dos invariantes de grupos de transformações, proposta apresentada em um ensaio publicado em 1872 intitulado 'Uma análise comparativa de pesquisas atuais em geometria' que eventualmente ficou conhecido como o programa de *Erlangen*. A partir do final da década de 1960, o tema começou a chamar a atenção de outros pesquisadores, como Art Coxford e Zalman Usiskin que em 1971 escreveram o livro 'Geometria – uma abordagem por transformação'. Sendo assim, a questão do estudo de geometria a partir de grupos de transformações passa a ser pauta de encontros e reuniões internacionais como na 1º, 2º e 3º edições do Congresso Internacional de Educação Matemática em Lyon na França (MONGELLI, 2005).

No Brasil, como já foi mencionado, as ideias de Klein foram difundidas e influenciadas por Euclides Roxo e depois formalizadas pela Reforma Campos. Esta reforma já defendia a importância do ensino das isometrias, conteúdo que também foi incluído dentro de transformações geométricas nos programas de ensino da reforma do Movimento da Matemática Moderna “como uma tentativa de levar para as salas de aula os mais recentes conhecimentos científicos relacionados à geometria, ou seja, aqueles provenientes do trabalho de Felix Klein para a Universidade de Erlangen” (LUZ, 2007, p. 39-40).

Segundo Luz (2007), o Movimento da Matemática Moderna no Brasil, assim como nos Estados Unidos, foi focado no currículo, enquanto que na França houve uma preocupação com questões didáticas, porém, assim como nos dois países, a geometria intuitiva embasada na geometria euclidiana, deu lugar, no currículo brasileiro, à geometria das transformações fundamentada na Álgebra Linear, o que, segundo D'Ambrosio, devido a formalidade e o rigor dessa abordagem, dificultou o entendimento da disciplina para professores e alunos, fazendo com que o conteúdo de geometria fosse dado no final do ano escolar (quando sequer ensinado).

De acordo com D'Ambrosio (1991), diferente dos outros países, a dinâmica do movimento no Brasil não foi caracterizada por pesquisas para o desenvolvimento do currículo, ao invés disso, focou na transferência de ideias do exterior e na disseminação dessas ideias em todo o país:

A base do movimento no Brasil pode ser descrita como uma mistura de ideias vindas do mundo inteiro, uma síntese que foi feita pelos próprios educadores matemáticos brasileiros. Embora houve obviamente uma forte influência de ideias estrangeiras, houve uma tentativa de adaptar essas ideias ao sistema educacional brasileiro. (D'AMBROSIO, 1991, p. 71, tradução nossa)

D'Ambrosio (1991) também argumenta que a forma como o movimento ocorreu no Brasil, com pouca ou nenhuma análise crítica, foi bastante prejudicial para o currículo brasileiro, gerando diversas inconsistências, além disso, os professores nem sempre estavam capacitados para implementar as mudanças propostas pela reforma.

Ao longo dos anos o MMM foi perdendo força. De acordo com Burigo (1989), o processo de esgotamento do MMM no Brasil é difícil de ser descrito devido aos poucos documentos produzidos na época, porém, descreve que ocorreu em um período de fragmentação dos esforços de renovação do ensino e de repressão ao debate das questões pedagógicas, e atribui o enfraquecimento do movimento à divisão dentro do Grupo de Estudos em Ensino de Matemática (grupo que teve papel importante na disseminação das ideias do MMM no Brasil), e ao desgaste a nível internacional do movimento, que enfrentava muitas críticas.

O objetivo desse resgate histórico foi chamar atenção para o aspecto mutável dos currículos educacionais e para a diversidade de fatores que influenciam as mudanças efetuadas: políticos, sociais, culturais, pessoais entre outros. Um tema também presente diz respeito a adaptação desses currículos até chegar as salas de aula, da quantidade de grupos e pessoas envolvidas no processo e da dificuldade dos professores de implementar essas mudanças. Devido a complexidade de aspectos que influenciam a apresentação de um conteúdo nos currículos escolares e as consequências para o sistema de ensino, acreditamos que é importante analisar a abordagem desses conteúdos nos currículos e como isso se reflete nos livros didáticos.

Além disso, é interessante observar como o estudo das isometrias chegou ao formato que é estudado hoje nas escolas, embora o tratamento puramente algébrico não tenha sido mantido, a definição baseada nos elementos invariantes de uma transformação permanece nos currículos e nos livros didáticos atuais.

2.3.2 Transformações Geométricas Isométricas/Simetrias no plano

As simetrias de reflexão, rotação e translação fazem parte de um grupo de transformações geométricas chamado Isometrias ou simetrias. Definindo inicialmente o que é uma transformação geométrica, sabemos que, de acordo com Pinho, Batista e Carvalho (2010), quando temos um plano p , definimos uma transformação geométrica no plano p :

como sendo uma função de p em p que associa cada ponto M do plano p um ponto M' de p , denotado por $M'=T(M)$. M' é chamado imagem de M por T . Em particular, se F é uma figura no plano, a imagem de F por T é o conjunto de pontos imagens de F , denotado por $F'=T(F)$. (PINHO; BATISTA; CARVALHO, 2010, p. 247)

Dois subgrupos importantes de transformações geométricas, cujos ensinamentos estão previstos pelos documentos oficiais para o ensino básico são as homotetias (semelhanças) e as isometrias (simetrias), sendo esta última, nosso foco neste trabalho.

Em relação às isometrias, podemos defini-las, segundo Lima (1996):

Uma isometria entre os planos Π e Π' é uma função $T: \Pi \rightarrow \Pi'$ que preserva distâncias. Isto significa que, para quaisquer pontos $X, Y \in \Pi$, tendo $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$, tem-se $d(X', Y') = d(X, Y)$ (LIMA, 1996, p. 13)

Ainda de acordo com Lima (1996) temos que toda isometria $T: \Pi \rightarrow \Pi'$ é uma função injetora, pois: " $X \neq Y \Rightarrow d(X, Y) > 0 \Rightarrow d(X', Y') = d(X, Y) > 0 \Rightarrow X' \neq Y'$ " (LIMA, 1996, p.13). Toda isometria também é sobrejetora (tornando-se assim uma função bijetiva). Para demonstrar sua sobrejetividade, Lima (1996) toma um ponto arbitrário $X' \in \Pi'$, buscando determinar um ponto $X \in \Pi$ tal que $T(X) = X'$: traçando uma reta qualquer r em Π , temos então que a imagem de r por T é uma reta r' no plano Π' , sendo $X' \in r'$ logo, por definição de imagem, existe um ponto $X \in r$ tal que $T(X) = X'$.

Uma transformação isométrica produz, pelo menos, três tipos de transformações geométricas (desconsiderando as composições de isometria): reflexões em relação a uma reta, translações e rotações em torno de um ponto (SIQUEIRA; LIMA; GITIRANA, 2002) (SILVA, 2010).

Em relação as características que permanecem invariantes numa

transformação por isometria, podemos listar, segundo Silva (2010), as seguintes propriedades:

- I. A colinearidade de pontos;
- II. A ordem dos pontos em uma reta;
- III. As medidas angulares.

Resumindo o que vimos até aqui, podemos observar o esquema desenvolvido por Silva (2015) apresentado na figura abaixo, representando como as transformações geométricas estão organizadas de acordo com suas propriedades:

Figura 3 – Transformações geométricas



Fonte: Vieira Silva (2015)

2.3.2.1 Simetria de reflexão ou simetria axial no plano

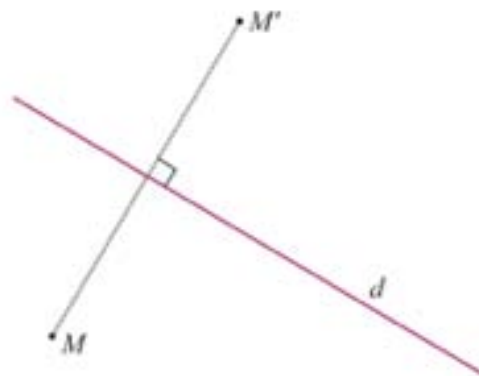
Temos que, de acordo com Siqueira, Lima e Gitirana (2001), a seguinte definição de simetria axial: sendo δ uma transformação por isometria, temos que “ $\delta: \Pi \rightarrow \Pi$ é uma reflexão com relação à r (referida como o eixo de simetria) se esta reta é a mediatriz do segmento de extremidades P e $\delta(P)$, onde P representa um ponto qualquer do plano” (SIQUEIRA; LIMA; GITIRANA, 2001, p. 2). Lima (1996) define a reflexão de forma similar:

Seja r uma reta no plano Π . A reflexão em torno da reta r é a função $R_r: \Pi \rightarrow \Pi$ assim definida: $R_r(X) = X$ para todo $X \in r$, e para $X \notin r$, $R_r(X) = X'$ é tal que a mediatriz do segmento XX' é a reta r . Noutras palavras, seja Y o pé da perpendicular baixada de X sobre r . Então Y é o ponto médio do segmento XX' . (LIMA, 1996, p. 16)

Em outras palavras, de acordo com Pinho, Batista e Carvalho (2010), uma simetria axial pode ser definida a partir de suas propriedades, da seguinte forma: quando temos uma reta d , dizemos que uma simetria de reflexão em relação a d , é uma transformação geométrica assim definida:

- i) se M é um ponto do plano que não pertence a reta d , a imagem de M por esta transformação é um ponto M' tal que d seja a mediatriz do segmento MM' ; ii) se M pertence à reta d , a imagem de M , M' é o próprio ponto M . O ponto M' assim associado ao ponto M é chamado simétrico de M em relação a d , ou ainda, imagem de M pela reflexão do eixo d . (PINHO, BATISTA E CARVALHO, 2010, p. 248)

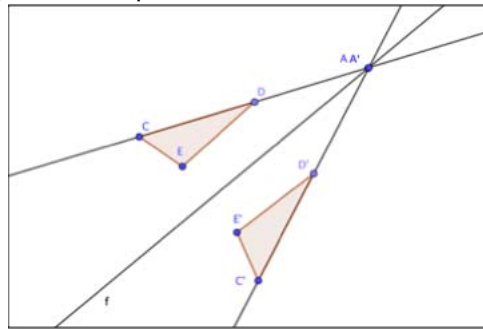
Figura 4 – Isometria de reflexão



Fonte: Pinho, Batista e Carvalho (2010)

Além das propriedades destacadas por Pinho, Batista e Carvalho (2010), podemos identificar também algumas propriedades da simetria de reflexão segundo Baldin, Villagra e Coelho (1999, apud SILVA, 2010) a partir da figura abaixo:

Figura 5 – Propriedades da simetria de reflexão

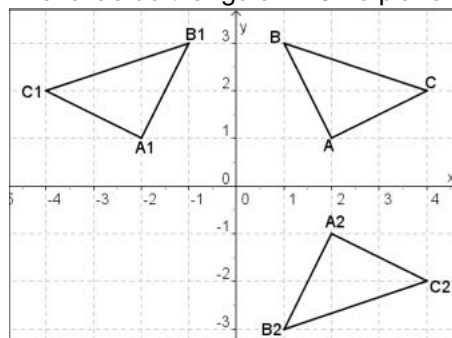


Fonte: elaborado pela autora

- I. A imagem de uma reta é uma outra reta ($T_n(A) = A'$) e o eixo de simetria é a bissetriz do ângulo formado pela reta e sua imagem;
- II. A reflexão é uma transformação inversível ($T_n(D) = D'$, $T_n(D') = D$).

Quando trazemos a simetria de reflexão para o plano cartesiano, podemos dizer que o simétrico de um ponto $P(x,y)$ em relação ao eixo das ordenadas é $P'(-x,y)$, analogamente temos que a imagem do ponto P em relação ao eixo das abscissas é $P'(x,-y)$ (SILVA, 2010). Podemos exemplificar essa propriedade a partir da figura abaixo:

Figura 6 – Reflexão do triângulo ABC no plano cartesiano



Fonte: Silva (2010)

Colocando os pontos que definem os triângulos ABC, A1B1C1 e A2B2C3 numa tabela, podemos notar com mais facilidade a afirmação apresentada por Silva (2010).

Quadro 1 – coordenada dos triângulos no plano cartesiano

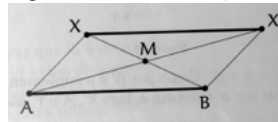
PONTO	SIMÉTRICO EM RELAÇÃO AO EIXO Y	SIMÉTRICO EM RELAÇÃO AO EIXO X
A (2,1)	A1 (-2, 1)	A2 (2, -1)
B (1,3)	B1 (-1, 3)	B2 (1, -3)
C (4,2)	C1 (-4, 2)	C2 (4, -2)

Fonte: adaptado de Silva (2010)

2.3.2.2 Simetria de translação

Segundo Lima (1995): “Sejam A, B pontos distintos do plano Π . A translação $T_{AB}(X): \Pi \rightarrow \Pi$ é a função assim definida: dado $X \in \Pi$, sua imagem $X' = T_{AB}(X)$ é o quarto vértice do paralelogramo que tem AB e AX como lados” (LIMA, 1995, p. 18)

Figura 7 – Translação 1

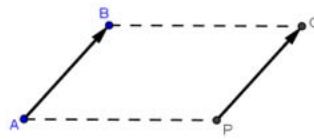


Fonte: Lima (1995, p. 18)

É possível perceber assim, que o conceito de simetria de translação está intimamente ligado a noção de vetor, dessa forma, podemos determinar uma transformação por translação quando conhecemos um segmento orientado AB em que A é a origem, B é a extremidade, sendo assim, o conjunto de todos os segmentos que tem a mesma direção, sentido e comprimento de AB é o vetor $\vec{v} = AB$ (FONSECA, 2013).

Após determinarmos o vetor da transformação, podemos definir uma translação de um ponto da seguinte forma, de acordo com Fonseca (2013): “dados um segmento orientado AB não nulo e um ponto P não alinhado com AB em um plano, existe um único ponto Q nesse plano que é o quarto vértice do paralelogramo ABPQ que tem AB e AP como lados” (FONSECA, 2013, p. 38), dizemos então que o segmento AB transladou o ponto P para o ponto Q.

Figura 8 – Translação 2



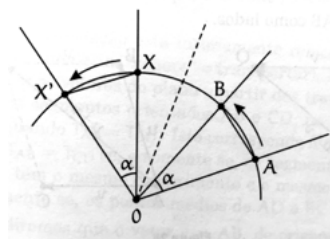
Fonte: Fonseca (2013)

2.3.2.3 Simetria de rotação

Para definirmos a simetria de rotação, tomemos um ponto O no plano Π e $\alpha = \widehat{AÔB}$ um ângulo de vértice O , segundo Lima (1995):

a rotação de ângulo α em torno do ponto O é a função $\rho_{O,\alpha}: \Pi \rightarrow \Pi$ assim definida: $\rho_{O,\alpha}(O) = O$ e, para todo ponto $X \neq O$ em Π , $\rho_{O,\alpha}(X) = X'$ é o ponto do plano Π tal que: $d(X, O) = d(X', O)$, $\widehat{XÔX'} = \alpha$. (LIMA, 1995, p. 22)

Figura 9 – Rotação



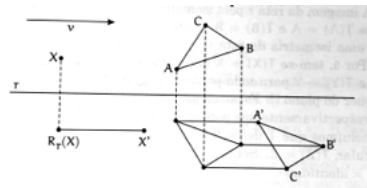
Fonte: Lima (1995, p. 22)

Também podemos definir a simetria de rotação no plano cartesiano, de acordo com Silva e Pietropaolo (2014), através da seguinte função: $P(x,y) = (x\cos(a) - y\sin(a), x\sin(a) + y\cos(a))$, ou também, segundo Chiréia (2013), tomando um ponto fixo O num plano π e um ângulo α de vértice O , temos que “a rotação em torno do ponto O é uma transformação no plano π , onde uma função bijetora $f: \pi \rightarrow \pi$ preserva distâncias e associa a cada ponto P do plano, com $P \neq O$, ao ponto $f(P) = P'$, onde P' é chamado imagem de P , os segmentos OP e OP' são de mesma medida e $\alpha = \widehat{PÔP'}$ ” (CHIRÉIA, 2013, p.54).

2.3.2.4 Reflexão com deslizamento

Definindo um vetor $v = AB$ não nulo e uma reta r paralela a vetor v no plano Π , temos que uma reflexão por deslizamento determinada por v e r , é “a isometria $T = T_v \circ R_r: \Pi \rightarrow \Pi$, obtida fazendo a translação T_v seguir-se à reflexão R_r ” (LIMA, 1995, p.23).

Figura 10 – Reflexão com deslizamento

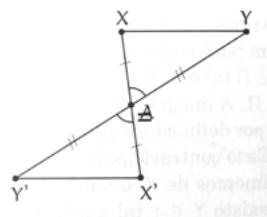


Fonte: Lima (1995, p. 23)

2.3.2.5 Simetria em torno de um ponto

Se tomarmos um ponto A no plano Π , a simetria em torno do ponto A é dada pela função: $AS: \Pi \rightarrow \Pi$ definida da seguinte forma: $AS(A) = A$ e, para $X \neq A$ temos que $AS(X) = X'$ é o simétrico de X relativamente a A , sendo assim, A é o ponto médio do segmento de reta XX' (LIMA, 1995).

Figura 11 – Simetria em torno de um ponto



Fonte: Lima (1995, p.16)

2.3.3 Algumas pesquisas sobre o ensino de isometria: obstáculos e contribuições

Analisando uma sequência didática voltada para a construção do conceito de simetria de rotação com auxílio do Cabri-Géomètre, Araújo e Gitirana (2000), realizaram um estudo com 28 alunos entre 11 e 13 anos de idade de uma turma da 6ª série do Ensino Fundamental (atual 7º ano). A experimentação aconteceu em um ambiente equipado com 16 computadores onde os alunos foram divididos em duplas

e cada dupla recebeu um disquete contendo as figuras e os comandos para serem realizados.

Foram realizadas no total 5 sessões com objetivos específicos diferentes, a primeira intencionava levar o aluno a identificar a circunferência como a forma geométrica em que a distância de quaisquer de seus pontos ao centro é constante, a segunda teve como objetivo fazer com que os alunos desenhassem a imagem de uma figura objeto à partir de uma rotação, a terceira seção pedia que os alunos desenhassem uma figura rotacionada conhecendo-se o número de partes correspondentes, na quarta seção os alunos deveriam desenhar 10 imagens correspondentes consecutivas a partir de umas figuras objeto, ou seja, as duplas deveriam identificar o ângulo de rotação entre as duas primeiras para construir as restantes, na quinta e última seção foi pedido que os alunos desenhassem uma figura com simetria rotacional quando o centro de rotação não havia sido fornecido.

Ao fim da experimentação os autores concluíram que os objetivos propostos haviam sido alcançados, a turma participou de forma motivada demonstrando compreensão dos conceitos relacionados a simetria de rotação. O software foi considerado decisivo para o desenvolvimento dos alunos pois o Cabri-géomètre oferece recursos de mobilidade da figura que permitiram a identificação de invariantes, possibilitando também as construções das imagens. Houve, no entanto, dificuldade por parte dos alunos, do uso de alguns comandos do programa.

Em 2002 Siqueira, Lima e Gitirana publicaram um artigo sobre o ensino de simetria, dessa vez sobre a de reflexão, o estudo também foi realizado a partir de uma sequência didática envolvendo o software Cabri-géomètre. O objetivo do trabalho foi apresentar o desenvolvimento e os resultados de dois projetos de pesquisa (iniciação científica), orientados por Lima e Gitirana, envolvendo simetria de reflexão, que possuem conexão com um projeto desenvolvido por (Araújo; Gitirana, 1998) de investigação da construção do conceito de simetria de rotação, com auxílio do Cabri-géomètre, por alunos do Ensino Fundamental.

A metodologia contou com um pré-teste para diagnosticar os conhecimentos dos alunos sobre o conceito e um pós-teste, contendo as mesmas questões, porém em ordens e com valores diferentes. A sequência aplicada consistiu de três atividades, na primeira os alunos deveriam obter a reflexão de figuras fornecidas na tela do computador por meio do menu simetria axial do software, na segunda atividade foi solicitado que os alunos utilizassem a ferramenta "Rastro/Onf" (ferramenta que simula

a experiência de desenhar com lápis e papel), para construírem o reflexo de uma figura dada, para, em seguida, realizar uma sequência de comandos de construção para que pudessem perceber propriedades básicas da simetria axial, na terceira atividade foi pedido que os alunos identificassem os eixos de simetria (quando existiam) em figuras dadas.

Após a aplicação da sequência, os autores concluíram que muitos dos erros, como congruência, formato da figura, distância etc., foram minimizados, os alunos conseguiram responder muitas questões que anteriormente haviam deixado em branco, principalmente nas questões onde havia intersecção entre a figura e o eixo de simetria, tiveram, porém, dificuldades nas situações em que a figura não possuía um eixo de simetria, devido ao fato das atividades realizadas não contemplarem problemas desse tipo, os erros relacionados ao ângulo de incidência e preservação do formato da figura foram também minimizados.

Em 2010, Bezerra de Melo realizou uma pesquisa sobre as concepções que alunos do ensino fundamental mobilizam quando resolvem problemas de simetria de reflexão, analisando-as a partir do Modelo $ck\phi$ (BALACHEFF, 1995). A pesquisa foi realizada com cinquenta alunos no 9º ano da rede municipal e estadual, e o instrumento aplicado consistiu de cinco questões, duas de reconhecimento de uma figura simétrica e três de construção da figura simétrica.

A partir do seu estudo observou que muitos alunos associavam o conceito de simetria a ideia de um espelho, tal fato, segundo o autor, pode estar relacionado a forma como o professor ensina o conteúdo e/ou aos recursos utilizados pelos livros didáticos. Um outro resultado que também chamou atenção na experiência, ocorreu na construção de uma imagem simétrica utilizando uma malha quadriculada, pois era esperado pelos pesquisadores que a utilização da malha auxiliasse os alunos na questão da conservação da igualdade de distância entre os pontos das figuras objeto e imagem ao eixo de simetria, o que na prática não aconteceu. Outro ponto importante que foi observado na resolução dos problemas pelos alunos, diz respeito a orientação do eixo de simetria: a maior quantidade de acertos ocorreu quando os eixos encontravam-se na horizontal ou na vertical, acreditamos que tal fato reforça o quanto a utilização de situações diferentes pode contribuir para a construção de uma determinada noção.

Silva (2010), realizou uma pesquisa no âmbito do ensino e aprendizagem da Geometria, abordando especificamente a transformação isométrica Simetria Axial,

com o objetivo de investigar o conceito através do uso do erro numa perspectiva reconstrutiva a partir de estratégias pedagógicas com o uso de tecnologias. O autor desenvolveu sua pesquisa em duas etapas, a primeira consistiu de uma sequência de atividades para serem resolvidas com auxílio de instrumentos de desenho (régua, compasso, esquadros), já na segunda etapa foi realizada com a utilização do Geogebra, além disso, analisou também documentos oficiais e livros didáticos, em relação ao último, destaca que, de acordo com o PCN (BRASIL, 1998), o conteúdo de transformações geométricas tende a ser apresentado através da exploração de obras de arte ou objetos do mundo físico, não oferecendo, de acordo com o autor, análises matemáticas, reduzindo assim o conceito a aplicações práticas.

Sua pesquisa também reúne algumas limitações dos livros didáticos de acordo com o PNLD (BRASIL, 2009), uma dessas limitações diz respeito, mais uma vez, a questão de como o conteúdo é sempre associado a aspectos estéticos enquanto que as conexões a outros conceitos matemáticos não é explorado. Outra limitação que o autor destaca, segundo o PNLD, se refere a grande quantidade de atividades em que é solicitado que os alunos identifiquem os eixos de simetria de objetos tridimensionais, sem esclarecer a diferença entre um eixo de simetria para a representação plana do objeto e que no espaço tridimensional pode existir um plano de simetria.

Buscando a conexão entre o conteúdo de simetria e as artes nos livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental, Ferreira dos Santos (2010) analisou 200 atividades que relacionavam o conteúdo de simetria e artes visuais de 17 coleções aprovadas pelo PNLD em 2010. No que diz respeito as dificuldades de aprendizagem relacionadas ao ensino de simetria, a pesquisa cita o estudo de Jaime e Gutiérrez (1996), mencionando que um dos problemas recorrentes está relacionado ao fato da simetria de reflexão ser na maioria das vezes representada com um eixo vertical, prática que influencia os alunos a sempre desenharem a imagem paralela a figura original mesmo quando o eixo não é paralelo a ela.

Ainda sobre os estudos de Jaime e Gutiérrez (1996), a autora destaca que os principais obstáculos encontrados pelos alunos ao aprenderem rotação estão ligados a estimação correta do ângulo, ao reconhecimento da equivalência dos ângulos, ao reconhecimento da equidistância entre os pontos correspondentes das figuras objeto e imagem e o centro de rotação e ao entendimento da congruência das duas figuras.

Partindo para a análise dos livros didáticos, a autora consegue identificar a existência de atividades que relacionam simetria e artes em todas as coleções, dentre

as modalidades de artes presentes, identifica desenho, dobraduras (kirigami e origami), artesanato, mosaico, pinturas, assim como imagens de monumentos arquitetônicos que apresentam mais de uma modalidade artística, sendo as mais recorrentes nos livros didáticos as atividades que envolvem desenho, dobraduras e padrões geométricos.

Das 200 atividades encontradas que relacionavam simetrias e arte, 88% eram sobre reflexão, 12% sobre translação e nenhum sobre rotação mostrando que os autores de livros didáticos privilegiam essa simetria em relação as demais. Na análise qualitativa das atividades, a pesquisadora aponta que a abordagem dos conceitos de simetria é bastante intuitiva o que na verdade é sugerido para os anos iniciais do Ensino Fundamental pelo Guia do Livro Didático (BRASIL, 1997; 1998), porém a autora critica essa abordagem sugerindo que é importante trabalhar esse conteúdo tanto do ponto de vista intuitivo como formal.

Em 2012, Cysneiros, Bellemain e Gitirana publicaram um artigo apresentando os resultados parciais de uma pesquisa que investiga a aprendizagem colaborativa na construção do conceito de simetria de reflexão através de um software de Geometria Dinâmica, Cysneiros, Bellemain e Gitirana. A partir da realização do teste diagnóstico e da revisão de literatura foram levantadas dificuldades e conhecimentos prévios dos alunos, tendo sido encontrados obstáculos relacionados às propriedades de congruência, equidistância, perpendicularidade do eixo com o segmento que une os pontos objeto e imagem, pontos invariantes, posição do eixo, e interseção da figura com o eixo de simetria.

As atividades propostas tinham como objetivo abordar construção do objeto-imagem, localização de eixo(s) e identificação de figuras simétricas. A sequência foi planejada da seguinte forma: inicialmente, cada aluno tem acesso, através do software, a uma geratriz da LOGO escolhida, sem conhecer a logo, no qual é possível construir e gravar como um espaço privado, conjuntamente, existe no ambiente, instruções para que o grupo de cinco alunos gere uma LOGO para um banco a partir da figura dada, utilizando a simetria de reflexão. Em seguida, utilizando a ferramenta Teamviewer, o professor, em um encontro sincronizado com os alunos, disponibiliza o mesmo software com a geratriz em um espaço compartilhado de construção (cada estudante tem acesso a seu espaço individual de construção e ao espaço coletivo, onde eles têm poder de alterar a construção diretamente, podendo ser acompanhado em tempo real a distância pelo professor, se comunicando por chat de voz).

Após os alunos construírem coletivamente a LOGO e discutirem os resultados, os alunos terão acesso, no computador do professor, à LOGO do banco. No final do artigo, os autores fazem algumas considerações em relação a alguns elementos da análise a priori da situação, e concluem que a utilização da Geometria Dinâmica permite variações instantâneas, pela manipulação do objeto quando fixamos o eixo de simetria e a interseção da geratriz com o eixo, proporcionando uma variação de resultados numa etapa de construção da figura, além disso, o dinamismo da ferramenta proporciona uma maior interação do aluno com os estados inicial e final das transformações, enquanto permite que as ideias sejam discutidas e compartilhadas entre os estudantes.

Buscando apresentar uma proposta de trabalho sobre simetria no Ensino Fundamental, Vieira, Paulo e Allevato (2013) publicaram um artigo com os resultados de uma pesquisa desenvolvida no Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática. Foi desenvolvida uma sequência didática para ser aplicada com alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental. Das atividades presentes na sequência, foi apresentado uma com dobradura e outra descrita como uma situação-problema cujo objetivo era fazer com que os alunos percebessem a inversão resultante da simetria de reflexão. Nas considerações finais, os autores concluem que os alunos chegaram à compreensão da simetria bem como suas propriedades devido ao caráter investigativo das atividades propostas, servindo de base para que os alunos argumentassem e expressassem suas ideias sobre o conceito estudado.

Com o objetivo de investigar a abordagem do conceito de simetria nos livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental, Fonseca (2013) analisa 15 coleções dos anos iniciais do Ensino Fundamental e 10 dos anos finais, aprovados pelos PNLD's de 2010 e 2011.

Em sua pesquisa, o autor identificou alguns problemas em relação a apresentação do conceito de simetria de reflexão, como por exemplo, a excessiva ligação do conceito à ideia de “metade da figura”, bem como o uso impreciso de analogias que associam simetria de reflexão à imagem de um espelho e as ambiguidades entre plano de simetria aplicada a objetos tridimensionais do mundo físico e eixo de simetria em imagens gráficas, entre outros.

Uma das problemáticas trabalhadas na dissertação diz respeito a atenção quase exclusiva ao estudo da simetria de reflexão em detrimento das simetrias de rotação e translação, o que se confirma nas suas análises dos livros do Ensino

Fundamental, e segundo o autor, podemos supor, a partir deste fato, que para muitos alunos o conceito de simetria é tido como sinônimo de simetria de reflexão, ao invés do conceito matemático de simetria.

Outra hipótese levantada na pesquisa é de que não haveria um planejamento didático global que promovesse uma progressão coerente e gradual para a construção do conceito de simetria nas coleções aprovadas pelo PNLD, em relação a essa questão, a análise deu fortes indícios de que tal hipótese é verdadeira.

Em 2014, Turgut, Yenilmez e Anapa, investigaram as deficiências e habilidades de 32 futuros professores de matemática estudantes da Universidade de Western Turkey sobre os conceitos de simetria axial e simetria de rotação. Os dados foram coletados a partir de entrevistas estruturadas e um teste contendo 12 problemas, 7 sobre simetria de rotação e 5 sobre simetria axial. Os dados foram analisados individualmente e os erros encontrados foram categorizados.

Na discussão dos resultados, os autores ressaltam que os sujeitos da pesquisa não apresentaram dificuldades ao desenhar a imagem simétrica de um objeto a partir de um eixo, porém, enfrentaram alguns obstáculos ao encontrar o eixo de simetria e determinar se dois objetos eram simétricos um ao outro.

Em relação as habilidades de rotação, os estudantes demonstraram algumas deficiências relacionadas desconsideração do ângulo de rotação, do centro de rotação, distância etc. Os estudantes também falharam nos problemas que pediam para que encontrassem o centro de rotação e segundo os autores, a maioria dos erros ocorreu porque os sujeitos não observaram a conservação da distância ao centro enquanto rotacionavam o objeto.

No geral, os estudantes conseguiam rotacionar a figura quando o eixo (que nesse caso consistia de um círculo indicando a “órbita” pela qual a figura seria movida) era fornecido, embora nem sempre corretamente, quando não era fornecido, eles rotacionavam a figura tomando um dos vértices do próprio objeto, desconsiderando o centro pré-determinado no problema. Os autores acreditam que as dificuldades demonstradas pelos estudantes, tanto nos problemas de simetria axial quanto de rotação, são influenciadas pelas baixas habilidades de visualização, habilidade espacial e rotação mental.

Valença (2014), investigou a mediação didática de uma situação de aprendizagem colaborativa do conceito de simetria de reflexão por meio de softwares de Geometria Dinâmica com compartilhamento a distância. O objetivo da pesquisa

era entender o quanto a abordagem do conteúdo nesse cenário beneficiaria o ensino do conceito, sendo assim, realizou uma engenharia didática, chegando à conclusão de que a experiência levou os alunos a entenderem e resolverem os problemas por meio da visualização e manipulação do objeto de estudo e que as propriedades e variáveis envolvidas no problema com recursos gráficos facilitou a mediação do conteúdo.

Em 2014, Freitas Carneiro, fez um estudo sobre a aplicação das transformações geométricas e da pavimentação do plano com polígonos regulares em atividades realizadas por meio de um software de geometria dinâmica. Os resultados de sua pesquisa demonstraram que os alunos apresentavam uma deficiência em relação aos conceitos necessários para a realização das atividades, sendo necessário uma revisão dos conteúdos trabalhados, porém a utilização do Geogebra contribuiu positivamente para a verificação de algumas propriedades dos polígonos regulares.

Investigando o ensino de Transformações Geométricas numa perspectiva interdisciplinar envolvendo Matemática e Artes, Zioto Barros (2017), realizou um estudo com alunos do 6º ano dos anos finais do Ensino Fundamental. A experimentação ocorreu por meio de três sequências didáticas envolvendo os conceitos de reflexão, rotação e translação, como também os conceitos de simetria, proporção, polígonos, poliedros, pontos, retas, curvas, ângulos etc. Segundo a autora, os alunos encontraram dificuldades ao relacionar os conceitos de Simetria em atividades diversas como a Simetria de reflexão, rotação e translação nas obras de Escher, na segunda sequência os alunos não conseguiram diferenciar os conceitos de simetria e assimetria.

Além das dificuldades relacionadas as transformações, houve também obstáculos no entendimento e nomenclatura de conceitos básicos de geometria como ângulos, polígonos, figuras geométricas etc.

Delgado Valereto (2018), investigou a utilização de softwares no ensino de simetria de translação e reflexão com alunos do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental. Segundo as análises preliminares feitas pela autora, o ensino de simetria no ensino fundamental ocorre de forma bastante frágil, sendo um dos fatores que contribuem para essa fragilidade a ausência do conceito nos livros didáticos, e este, mesmo quando se encontra presente, privilegia a reflexão, deixando o ensino de translação e rotação em segundo plano.

Na análise à posteriori, os resultados mostraram que a utilização dos softwares pelos alunos proporcionou a identificação de padrões, a criação de hipóteses, a validação ou fracasso de suas ideias e a visualização da simetria de translação. Outra conclusão importante da pesquisa diz respeito aos tipos de softwares, pois o estudo aponta que cada software possui diferentes vantagens e desvantagens, ou seja, alguns softwares são relevantes para introduzir os conceitos de simetria, enquanto que outros softwares, como o GeoGebra, possibilitam o aprofundamento e compreensão de propriedades. Em relação as dificuldades encontradas pelos alunos nas atividades, a autora destaca situações envolvendo vetores inclinados, onde quase todos fracassaram.

Com o objetivo de compreender a aprendizagem de matrizes e suas transformações geométricas (reflexão, translação, escala e rotação) por alunos do curso de Redes em Computadores integrado ao Ensino Médio do 2º ano, Azeveno e Maltempi (2019), realizaram uma pesquisa norteados pelas Metodologias Ativas de Aprendizagem. Na coleta dos dados foram utilizados quadro branco, GeoGebra e malha quadriculada, tendo sido realizada em 3 encontros de 140 minutos envolvendo 25 alunos. Os problemas de simetria apresentados aos alunos envolviam também o estudo de matrizes, sendo assim, os alunos deveriam construir as transformações geométricas a partir das matrizes:

A ideia inicial era de relacionar as matrizes ao plano cartesiano a partir de figuras geométricas simples, como triângulos, quadrados, etc. Encorajamos os alunos a pensar na estrutura da matriz associada aos pontos $P(x, y)$ no Plano cartesiano e suas operações, tendo como apoio o uso do GeoGebra, quadro-branco e papéis-quadriculados, que auxiliaram nas produções alinhado-simétricas das figuras. (AZEVENO E MALTEMPI, 2019, p. 111)

Foi pedido que os alunos apresentassem e argumentassem as ideias de matrizes associadas às transformações geométricas por meio de rascunhos de figuras na forma de pixels em uma malha quadriculada. Os alunos deveriam escolher um desenho para trabalhar e em seguida, em conjunto com os pesquisadores, estruturar a matriz de parametrização ao desenho com base nos cálculos correspondentes das matrizes na malha.

Os autores afirmaram que a interação promovida pelas atividades “evidenciam um processo contextualizado e não linear de ideias fixas, que exige do estudante e,

ao mesmo tempo, permite que eles sigam seus interesses” (AZEVENO E MALTEMPI, 2019, p. 117). Os desenhos dos personagens desenvolvidos na pesquisa, influenciaram na compreensão das ideias matemáticas através de um objeto de interesse pessoal dos alunos.

A partir dessa breve revisão da literatura podemos observar que a maioria das pesquisas se concentra no ensino da simetria de reflexão ou das isometrias como um todo, enquanto que a translação e a rotação são dificilmente abordadas isoladamente. Percebemos também que um elemento importante que influencia a aprendizagem do conceito de simetria de reflexão diz respeito a orientação do eixo e da presença da malha quadriculada. Não encontramos muitos dados relacionados as dificuldades ligadas às particularidades do ensino de rotação e translação.

3 METODOLOGIA

O presente trabalho enquadra-se numa pesquisa do tipo documental, que de acordo com Sá-Silva, Almeida e Guindani (2009, p. 4) é uma pesquisa “que se utiliza de métodos e técnicas para a apreensão, compreensão e análise de documentos dos mais variados tipos.” São considerados documentos, de acordo com Gil (2008), qualquer objeto que seja relevante para a investigação de um determinado fato ou fenômeno, incluindo registros institucionais fornecidos pelo governo e livros, dessa forma, selecionamos documentos que norteiam a educação básica no Brasil, livros didáticos bem como manuais do professor dos anos finais do Ensino Fundamental e produções acadêmicas (artigos teses e dissertações) sobre o ensino de isometria.

Objetivando investigar como o conteúdo de isometria é abordado em documentos oficiais, selecionamos para análise a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que define o conjunto de aprendizagens essenciais que os alunos devem desenvolver ao longo da educação básica.

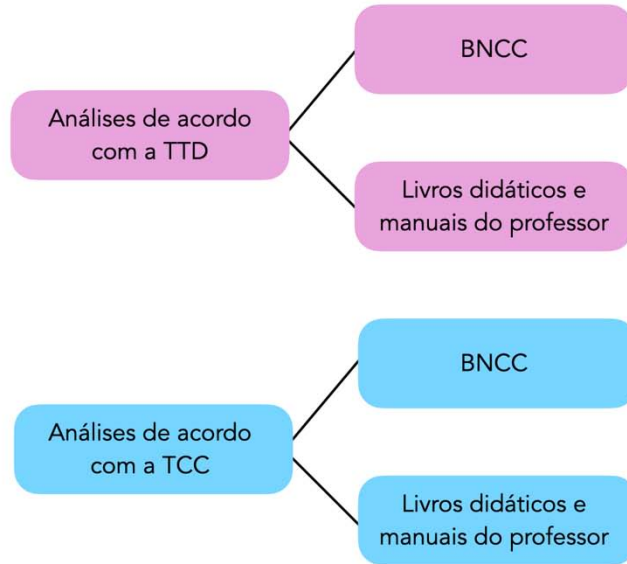
Buscando analisar como o conteúdo de isometria é abordado em livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental, utilizamos como critério de seleção livros aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) 2020, que avalia de forma sistemática obras didáticas, pedagógicas e materiais de apoio à prática didática, disponibilizando às escolas da rede pública, estaduais, municipais e federais.

Dentre os livros aprovados pelo programa, selecionamos 4 coleções para analisarmos todas as séries onde o conteúdo é contemplado. O critério de seleção para as coleções foi baseado na distribuição de exemplares realizada pelo programa, escolhemos livros publicados por editoras com um número significativo de livros distribuídos (acima de 4mi de exemplares): Editora do Brasil, Editora Moderna e FTD.

Decidimos analisar a coleção completa para entender melhor como ocorreu a transposição dos currículos oficiais para os livros didáticos, sendo assim possível comparar a programabilidade da aquisição do conhecimento dos documentos com as das coleções.

Este capítulo encontra-se organizado da seguinte forma:

Figura 12 – Organização da metodologia



Fonte: elaborado pelos autores

A seguir apresentamos a relação entre objetivo específico e item/capítulo onde será trabalhado:

Quadro 2 – Objetivos específicos: metodologia

OBJETIVO ESPECÍFICO	METODOLOGIA
Analisar a programabilidade da aquisição do saber do conteúdo de isometria de acordo com a TTD, buscando identificar também as situações do ponto de vista da Teoria dos Campos Conceituais na BNCC (2018).	Itens 3.1.1 e 3.2.1 da metodologia. Análise realizadas nos capítulos 4 e 5 da dissertação.
Analisar a abordagem do conteúdo de isometria em livros didáticos de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, a partir dos conceitos de programabilidade da aquisição do saber e de vigilância epistemológica presentes na teoria da transposição didática.	Item 3.1.2 da metodologia. Análise realizada no capítulo 5 da dissertação.
Analisar, sob a ótica da teoria dos campos conceituais, as situações presentes nos livros didáticos de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental relativas ao conteúdo de isometria, a partir dos conceitos de invariantes operatórios e significantes trabalhados pela teoria.	Item 3.2.2 da metodologia. Análise realizada no capítulo 6 da dissertação.

Fonte: Elaborado pelos autores

3.1 Análises sob a ótica da teoria da transposição didática

Como descrito na introdução dessa pesquisa, o nosso objetivo geral foi analisar a abordagem do conteúdo de isometria em livros didáticos e manuais do professor de acordo com as teorias dos campos conceituais e da transposição didática. Com a primeira teoria, nosso foco consistiu em analisar as situações que abordam simetria (que tipo de situações são apresentadas? quais as características dessas situações?), enquanto que com a TTD, nosso objetivo principal é observar como ocorreu a transposição do conteúdo e das situações da BNCC para os livros didáticos, utilizamos principalmente os conceitos de vigilância epistemológica e programabilidade da aquisição do saber para formular nossos critérios de análise.

3.1.1 Isometria na BNCC de acordo com a teoria da transposição didática

Uma das modificações sofridas pelo conhecimento quando ocorre uma adaptação para o ambiente didático diz respeito à organização em que o conteúdo está estruturado: em que momento e em que ordem um determinado conteúdo deve ser ensinado? A esse aspecto da transformação do conhecimento a TTD dá o nome de programabilidade da aquisição do saber. A ordem apresentada depende da função que aquele livro possui, ou seja, existe uma diferença entre apresentar um conteúdo para uma audiência que conta com um certo nível de instrução/escolaridade, como por exemplo em livros voltados para o ensino superior e livros voltados para o Ensino Fundamental anos finais.

Para analisar se a programabilidade foi mantida, precisamos inicialmente entender como o conteúdo está organizado no currículo determinado pela BNCC. Acreditamos que a organização de um determinado conteúdo nos livros para a educação básica possui um objetivo didático, as vezes seguindo a lógica do que é mais elementar, as vezes seguindo uma lógica de “pré-requisitos” (certos conhecimentos são necessários para entender outros conhecimentos), podendo essa ordem coincidir ou não com a do saber de referência (livros voltados para o ensino superior e produções científicas) ou dos documentos oficiais, por esse motivo consideramos essa análise relevante para este trabalho e elencamos o seguinte critério que tem como objetivo coletar:

- Como o conteúdo de Isometria está organizado nos documentos oficiais? Em que anos deverão ser trabalhados?

Com os dados obtidos nesse critério, vamos observar a seguir, na análise dos livros didáticos, a transposição da programabilidade da aquisição do saber.

3.1.2 Isometria nos livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental de acordo com a teoria da Transposição Didática

Para poder analisar a transposição da programabilidade da aquisição do saber, precisamos inicialmente entender os seguintes pontos:

- **Como o conteúdo de isometria está organizado na coleção:** do ponto de vista da TTD, uma análise individual dos livros não faria sentido sem antes termos uma visão de como o conteúdo está distribuído na coleção por completo, pois existe uma continuidade que é considerada (ou deveria ser considerada) na sua elaboração.
- **Como o capítulo que trata sobre isometria está organizado nos livros selecionados:** após obtermos uma visão geral do conteúdo na coleção, podemos entender melhor a organização do capítulo que trata sobre isometria em cada livro em que é abordado. Como o capítulo que contém o conteúdo está organizado? Qual a lógica seguida pelos autores na elaboração do livro? Em que ordem as isometrias são apresentadas?

Com os dados obtidos nos pontos acima vamos, em seguida, comparar a organização trazida pela coleção com aquelas determinadas pelos documentos oficiais:

- **A organização da coleção segue a mesma das recomendações curriculares (programabilidade da aquisição do saber)?**

Reforçamos aqui que seguir fielmente os documentos oficiais não é parâmetro para eficiência de um livro didático, o objetivo desse critério é, na verdade, entender como ocorre a transposição do conteúdo dos documentos para os livros didáticos, o

que nos ajuda a entender melhor as influências que os currículos oficiais possuem, permitindo uma reflexão e nos tornando mais cientes das modificações sofridas, o que promove um melhor controle das elaborações tanto dos currículos, quanto dos livros didáticos, sendo essa uma contribuição importante da TTD.

Outro conceito importante trabalhado pela teoria da transposição didática é o de Vigilância Epistemológica. Sabemos que os conhecimentos passam por diversas transformações para se adaptarem as demandas dos materiais didáticos, o que nos leva a questionar se as adaptações realizadas contribuem para a aprendizagem dos conceitos relacionados ao conteúdo de isometria ou se constitui um obstáculo. Chevallard (2000) afirma que a vigilância epistemológica pode ser realizada ao identificar os objetos de ensino (livros e materiais didáticos) e avaliar se estes ainda correspondem aos objetos de saber que dão origem a eles.

Para realizar essa análise decidimos comparar as definições e conceitos apresentadas nos livros (saber a ser ensinado) com o saber de referência (saber sábio/científico). Com esse objetivo, decidimos usar como aproximação do saber de referência, artigos científicos sobre o ensino do conceito, mas principalmente o livro “isometrias” da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) escrito por Elon Lages Lima (1995) (referências apresentadas no capítulo 2 dessa dissertação).

A escolha por este livro se deve ao fato de que o autor fez parte do conselho técnico da Ordem Nacional do Mérito Científico, foi membro da Academia Brasileira de Ciências e professor do Instituto de Matemática Pura e Aplicada, sendo assim uma referência legitimada por instituições reconhecidas no meio científico, e também pelo livro possuir uma linguagem acessível, aproximando-se da linguagem dos livros didáticos da educação básica, o que facilita a comparação e checagem das definições.

Baseado no conceito de vigilância epistemológica formulamos o seguinte critério de análise para os livros didáticos:

- **Quais as modificações realizadas pela noosfera?** As modificações realizadas contribuem para a aprendizagem dos conceitos relacionados ao conteúdo de isometria?

3.2 Análises sob a ótica da teoria dos campos conceituais

Queremos entender como o conteúdo é abordado em livros didáticos observando os aspectos relevantes para o desenvolvimento cognitivo do aluno, para isso utilizaremos a Teoria dos Campos Conceituais para analisar os documentos, livros e materiais selecionados.

3.2.1 BNCC de acordo com a teoria dos campos conceituais

Como vimos no capítulo 2, a teoria dos Campos Conceituais defende que a aprendizagem de um conteúdo é um processo lento e demorado, pois é necessário que o aluno se depare com situações diversas que evoquem o uso de diferentes conceitos-em-ação e teoremas-em-ação, sendo assim, é importante que os documentos oficiais incentivem essa variedade, propondo diferentes situações de ensino. Os livros didáticos e manuais do professor são ferramentas importantes que influenciam a prática docente, porém o processo de criação dos livros didáticos leva em consideração e são influenciados pelas recomendações propostas por documentos e currículos oficiais. Diversos livros didáticos lançados em 2019 e 2020 apresentam um selo indicando que estão dentro das normas da BNCC, por conta disso acreditamos que é importante analisarmos também esse documento. Formulamos assim o seguinte critério:

- Que situações do ponto de vista da teoria dos campos conceituais são propostas pelos documentos oficiais?

Sendo assim o objetivo dessa etapa é identificar as diferentes situações propostas pela BNCC para que na etapa seguinte seja possível verificar se, ou como essas recomendações se manifestaram nos livros e manuais didáticos.

3.2.2 Livros didáticos e manuais do professor de acordo com a teoria dos campos conceituais

A TCC defende que o significado de um conceito não se forma a partir de uma única situação, mas sim de uma variedade de situações, assim como uma situação

também não pode ser analisada com um único conceito (VERGNAUD, 2009), sendo assim, podemos levantar as seguintes questões: os livros didáticos apresentam uma variedade de situações que promovam a construção do conceito de isometria? Quais os tipos de situações apresentadas?

Vergnaud também defende que os esquemas e as situações são as raízes do desenvolvimento cognitivo e por conta disso é necessário que o aluno se depare com situações contrastantes (VERGNAUD, 2009). Entendemos aqui por 'contrastantes', uma variedade de situações que vão exigir do aluno a mobilização de diversos conceitos e teoremas-em-ação diferentes possibilitando a adaptação e o desenvolvimento dos esquemas. Podemos questionar então se as situações propostas nos livros didáticos contribuem para a utilização de diversos tipos de invariantes operatórias ou se apresentam problemas repetitivos e pouco estimulantes do ponto de vista da relação situação-esquema.

Os critérios e a organização de análise tanto para os documentos quanto para os livros didático foram baseados nas análises de Vergnaud (2013), em que utiliza exemplos de isometria para explicar sua teoria, e na tese "Os Conceitos de Medidas de Tendência Central e de Dispersão na Formação Estatística no Ensino Médio no Brasil e na França. Abordagem Exploratória no Quadro da Teoria Antropológica do Didático e da Teoria dos Campos Conceituais." (ANDRADE, 2013).

Elencamos então os seguintes elementos de análise baseadas na Teoria dos Campos Conceituais presentes na tese:

Elemento 1. Um conceito não se encontra isolado. Para a compreensão de um conceito muitas vezes é necessário a mobilização e a compreensão de outros conceitos interligados. Quais os conceitos matemáticos associados a simetria axial, translação e rotação presentes nos livros didáticos?

Ao se deparar com uma situação que apresenta um problema matemático, de acordo com Vergnaud, os conceitos utilizados na interpretação e resolução daquela situação são chamados conceitos-em-ação. É importante que os alunos possuam um bom domínio em relação aos conceitos interligados para que possam aprender o conteúdo sem grandes bloqueios, ou seja, é possível que um bloqueio no

entendimento das isometrias possa estar ligado a uma deficiência do aluno em relação aos conceitos-em-ação necessários para a resolução da situação.

Elemento 2. Características das questões propostas. A partir da nossa revisão de literatura sobre o ensino das simetrias, conseguimos identificar as seguintes características em relação ao tipo de problema:

1. Construção da figura simétrica ou de propriedades;
2. Reconhecimento da figura simétrica ou de propriedades;
3. Descrição do processo/justifique sua resposta;

As três situações apresentadas demandam do aluno uma sequência de ações diferentes, configurando dessa maneira esquemas diferentes. Cada uma dessas situações contribuirá para a aprendizagem de uma forma específica, por esse motivo, é importante que exista situações com tipos de problemas diferentes.

Elemento 3. As Situações estão associadas aos significados e aos significantes: ao abordar o conceito de isometria quais os significantes associados a ele?

Em relação ao **elemento 3**, para Vergnaud, são as situações que dão sentido aos conceitos, porém o sentido não se encontra nas próprias situações, da mesma forma, costumamos dizer que uma representação simbólica ou uma palavra tem sentido, então, o que seria sentido para a TCC? Segundo Vergnaud, seria uma relação do sujeito com as situações e os significantes, ou seja, são os esquemas evocados pelo sujeito, por uma situação ou significante, que constituem o sentido dessa situação ou significante para o próprio sujeito. Não seria possível nessa análise, sabermos a relação dos significantes apresentados no livro e os significados que seriam evocados pelos alunos, porém podemos analisar os recursos utilizados pelo autor (as representações) para dar sentido ao conceito.

Em relação às propriedades da **simetria de reflexão**, analisamos:

1. Posição do eixo em relação às margens do papel (paralelo ou inclinado);

2. Posição do eixo em relação a figura (se toca, corta ou não entra em contato com a figura);
3. Propriedades da figura: curva, retilínea, mista;
4. Complexidade da figura (de uma figura geométrica simples, até uma fotografia, ou imagem mais complexa);
5. Presença de malha quadriculada.

Em relação às propriedades da **simetria de rotação**, analisamos:

1. Posição do centro em relação à figura (centro contido na figura, situado dentro da área da figura ou longe da figura);
2. Presença de malha quadriculada;
3. Propriedades da figura: curva, retilínea, mista.
4. Complexidade da figura (de uma figura geométrica simples, até uma fotografia, ou imagem mais complexa).

Em relação às propriedades da **simetria de translação**, analisamos:

1. Orientação do vetor;
2. Apresentação do vetor (em que formato ele é apresentado, se graficamente ou algebricamente, etc);
3. Propriedades da figura: curva, retilínea, mista.
4. Complexidade da figura (de uma figura geométrica simples, até uma fotografia, ou imagem mais complexa);
5. Presença de malha quadriculada;

Em relação às propriedades da **simetria em relação a um ponto**, analisamos:

1. Posição do centro em relação à figura (centro contido na figura, situado dentro da área da figura ou longe da figura);
2. Presença de malha quadriculada;
3. Propriedades da figura: curva, retilínea, mista.

Em relação a **reflexão com deslizamento**, utilizaremos os mesmos critérios para a simetria axial e translação.

Elemento 4. Como mencionamos anteriormente, além desses elementos, temos como objetivo para essa etapa analisar se ou como as situações propostas pelos documentos oficiais se manifestam nos livros didáticos:

- Quais situações propostas pela BNCC aparecem nos livros didáticos? Quais estão ausentes? Quais aparecem nos livros, mas não foram contempladas pela BNCC?

Elemento 5. Os livros didáticos são instrumentos que auxiliam professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos propostos, mas as situações presentes em sala de aula não se resumem apenas as atividades encontradas nos livros, sendo assim, com o objetivo de obter uma visão mais abrangente da diversidade de situações que podem ser trabalhadas, finalizamos esta etapa com os manuais do professor:

- Quais as situações propostas pelo manual do professor? O que estas situações tem a acrescentar em relação aquelas apresentadas pelo livro?

3.3 Análise dos dados

As análises do livro em relação a TTD serão, em sua maioria, de caráter qualitativo que, de acordo com Raupp e Beuren (2003), essa abordagem concebe uma análise mais profunda em relação a um fenômeno estudado e visa destacar características não observáveis por meio de um estudo quantitativo, consistindo em uma forma adequada de se conhecer a natureza de um fenômeno social, sendo assim, apresentaremos os dados de acordo com os critérios elencados, e para cada informação coletada, faremos nossas observações logo em seguida (por coleção). Na conclusão, apresentaremos uma interpretação geral (referente a todas as coleções) em relação a cada tópico observado.

Enquanto isso, as análises dos livros em relação a TCC serão em sua maioria de carácter quantitativo, que segundo Raupp e Beuren (2003), consiste em uma abordagem caracterizada pelo emprego de instrumentos estatísticos, tanto na coleta quanto no tratamento dos dados, não se aprofundando tanto na realidade dos fenômenos, focando no comportamento geral dos acontecimentos. Nosso objetivo em relação a análise dos livros de acordo com a TCC é focado na diversidade de

situações presentes, não temos como propósito investigar porque as situações são apresentadas desta forma, apenas observar se existe um equilíbrio entre os tipos de situação que classificamos nessa metodologia. Com base nesses argumentos, organizamos o capítulo 6 da seguinte maneira: no início do capítulo vamos computar os tipos de situação em cada livro, para cada elemento que determinamos nessa metodologia, no final, reuniremos todas as informações em relação a cada elemento por volume (7º e 8º ano) e identificaremos quais as situações mais presentes e quais situações poderiam ser mais exploradas.

4 ISOMETRIA NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

Esse capítulo foi dedicado a análise da BNCC (BRASIL, 2018). Como descrevemos na metodologia, vamos observar a programabilidade de acordo com a TTD e as situações segundo a TCC.

4.1 Isometria na Base Nacional Comum Curricular

Em relação as competências específicas listadas na BNCC para matemática no ensino fundamental, a geometria aparece brevemente, dentro de um único item:

Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. (BRASIL, 2018, p. 267)

Porém, a geometria é listada como uma das cinco unidades temáticas que orientam as habilidades a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental, entretanto, conteúdos de geometria também são vistos dentro da unidade temática de Grandezas e Medidas. No que diz respeito a primeira, que contém o ensino das simetrias, a BNCC destaca a amplitude de conceitos e procedimentos necessários para a resolução de problemas do mundo físico e também de outras áreas e aponta o estudo de posição e deslocamentos no espaço, assim como o estudo de figuras planas e espaciais como formas de desenvolver o pensamento geométrico, segundo o documento, "esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes" (BRASIL, 2018, p. 271), e lista o estudo das transformações geométricas, em especial as simetrias, como um aspecto funcional que também é importante para o ensino de Geometria.

O ensino das simetrias na BNCC inicia-se nos anos iniciais do Ensino Fundamental, em que, segundo o documento, deve acontecer através "da manipulação de representações de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano, e com recurso de softwares de geometria dinâmica" (BRASIL, 2018, p. 272). Já nos anos seguintes, (anos finais do Ensino Fundamental), a BNCC defende que o ensino de Geometria deve ser encarado como uma ampliação e

consolidação das aprendizagens e, em seguida, reforça mais uma vez a importância do ensino de transformações geométricas:

Nessa etapa, devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/ reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. Esses conceitos devem ter destaque nessa fase do Ensino Fundamental, de modo que os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo. (BRASIL, 2018, p. 272)

Na apresentação geral da unidade temática de geometria, o conteúdo de simetrias é mencionado como um tópico importante para a unidade como um todo, e a importância de seu ensino é destacada novamente quando descreve os conteúdos e competências importantes para os anos iniciais e finais do Ensino Fundamental. Com o objetivo de entendermos melhor a posição que este conteúdo ocupa na Base Nacional Comum Curricular, listamos a seguir todos os conteúdos e habilidades esperadas e mencionados na apresentação da unidade temática de Geometria (incluindo anos finais e iniciais do Ensino Fundamental):

- I. Posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais;
- II. As transformações geométricas, sobretudo as simetrias;
- III. Identificação e estabelecimento de pontos de referência para a localização e o deslocamento de objetos, construção de representações de espaços conhecidos com estimação de distâncias, usando, como suporte, mapas (em papel, tablets ou smartphones), croquis e outras representações;
- IV. Indicação das características das formas geométricas bidimensionais e tridimensionais;
- V. Associação de figuras espaciais as suas planificações e vice-versa;

- VI. Nomeação e comparação de polígonos por meio de propriedades relativas aos lados, vértices e ângulos;
- VII. O estudo de simetrias a partir da manipulação de representações de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano, e com recurso de softwares de geometria dinâmica;
- VIII. Tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança;
- IX. Reconhecimento das condições necessárias para obtenção de triângulos congruentes ou semelhantes;
- X. Geometria analítica;
- XI. Sistemas de equações do 1º grau articulando conhecimentos decorrentes da ampliação dos conjuntos numéricos e de suas representações na reta numérica.

Podemos observar que o conteúdo de transformações geométricas aparece duas vezes nessa lista, uma vez referindo-se as isometrias e outra vez referindo-se a homotetia.

4.1.1 Isometria na BNCC de acordo com a teoria da transposição didática

Como apresentado no referencial teórico e metodologia, um aspecto da transposição didática de um conhecimento diz respeito a sua programabilidade, ou seja, quando e em que ordem um determinado saber deve ser ensinado.

Tal aspecto da transposição também é destacado pelo próprio documento, na introdução da seção 4.2.1.2 “Matemática no Ensino Fundamental – anos finais: unidades temáticas, objetos de conhecimento e habilidades”, que diz o seguinte:

leitura dos objetos de conhecimento e das habilidades essenciais de cada ano nas cinco unidades temáticas permite uma visão das possíveis articulações entre as habilidades indicadas para as diferentes temáticas. Entretanto, recomenda-se que se faça também uma leitura (vertical) de cada unidade temática, do 6º ao 9º ano, com a finalidade de identificar como foi estabelecida a progressão das habilidades. Essa maneira é conveniente para comparar as habilidades de um dado tema a ser efetivadas em um dado ano escolar com as aprendizagens propostas em anos anteriores e também para reconhecer em que medida elas se articulam com as indicadas para os anos posteriores, tendo em vista que as noções matemáticas são retomadas ano a ano, com ampliação e aprofundamento crescentes. (BRASIL, 2018, p. 298)

Partindo para a lista de conteúdos por ano de ensino, dentre os saberes ligados a unidade temática de Geometria, temos na tabela seguinte, os anos, os objetos de conhecimento e as habilidades relacionadas ao conteúdo de isometria para o Ensino Fundamental (anos iniciais e finais):

Quadro 3 - isometria na BNCC para os anos finais do Ensino Fundamental

ANO	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
7º	Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem	(EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.
7º	Simetrias de translação, rotação e reflexão	(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou <i>softwares</i> de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.
8º	Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação	(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de <i>softwares</i> de geometria dinâmica.

Fonte: (BRASIL, 2018)

Além dos objetos e habilidades descritos acima específicos para isometria, a BNCC traz, na introdução da seção 4.2.1.2. na forma de texto corrido, recomendações que se aplicam a todos os conteúdos de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental os quais sintetizamos na lista seguinte:

1. Levar em consideração conhecimentos prévios, “criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas.” (BRASIL, 2018, p. 298);

2. Levar em consideração a “importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação.” (BRASIL, 2018, p. 298)
3. Incluir, além das malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica, a história da matemática como recurso didático, utilizando-os de forma integrada, contribuindo para a formalização e sistematização dos conceitos matemáticos;
4. Promover um contexto significativo para os alunos, não necessariamente apenas do cotidiano, mas também de outras áreas de conhecimento e da própria história da matemática, porém de forma que eles consigam desenvolver a capacidade de abstração desses contextos, aprendendo relações e significados para aplicarem em outros contextos.

4.1.2 Análise das situações presentes

A partir das recomendações da BNCC podemos destacar as seguintes situações diferentes relacionadas ao conteúdo de isometria:

- I. Análise de transformações de figuras planas, identificando os elementos variantes e invariantes de forma a desenvolver os conceitos de congruência.
- II. Construção de transformações de figuras planas, identificando os elementos variantes e invariantes de forma a desenvolver os conceitos de congruência.
- III. Reconhecimento, no plano cartesiano, do simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.
- IV. Representação, no plano cartesiano, do simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.
- V. Reconhecimento de figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão utilizando instrumentos de desenho.
- VI. Construção de figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão utilizando instrumentos de desenho.
- VII. Reconhecimento de figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão por meio de softwares de geometria dinâmica.
- VIII. Construção de figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão por meio de softwares de geometria dinâmica.

- IX. Vinculação das isometrias às obras de arte, elementos arquitetônicos entre outros.

Em resumo, podemos dividir as situações encontradas em 4 grandes grupos: reconhecimento, construção, análise e contextualização. Em relação aos instrumentos de resolução, temos dois tipos de situação: uma envolvendo softwares e outra envolvendo instrumentos de desenho. Na apresentação das figuras, podemos identificar situações que envolvem malha quadriculada, plano cartesiano e obras de arte/estética.

Para o 8º ano (último ano do ensino fundamental onde o ensino de isometria está previsto na BNCC), é esperado então que os alunos sejam capazes de entender todas as situações listadas acima.

5 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS SEGUNDO A TEORIA DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Nesse capítulo apresentaremos as análises dos livros didáticos utilizando os critérios estabelecidos no capítulo 3.

Serão analisados apenas livros da coleção que contemplam o conteúdo de isometria. Se estiverem seguindo as normas da BNCC, vão apresentar apenas dois livros com o conteúdo, um do 7º ano e um do 8º ano, porém checamos todos os livros caso os autores tenham organizado de forma diferente.

5.1 Coleção Araribá Plus

No manual do professor, os autores apresentam a coleção comentando suas características e o que ela promove de experiência para os alunos. Segundo o manual do volume do 7º ano:

Ao longo da obra, além de atividades e problemas envolvendo situações contextualizadas, a coleção incentiva o uso da calculadora, a resolução de desafios, o trabalho em grupo, o cálculo por estimativa e os cálculos mentais. A obra incentiva os alunos a: raciocinar, relacionar ideias, usar a experiência adquirida fora da escola, refletir sobre a resolução de problemas e sobre os procedimentos utilizados para chegar à solução, analisar textos que envolvem conceitos matemáticos, além de discutir quais foram os assuntos em que tiveram mais ou menos facilidade para aprender. (GAY; SILVA, 2018, p. 27)

Analisamos neste capítulo a primeira edição publicada em 2018, aprovada pelo PNLD 2020 – anos finais Ensino Fundamental.

5.1.1 Organização do conteúdo na coleção

A coleção conta com 4 volumes (6º, 7º, 8º e 9º anos), cada um contendo 4 unidades estruturadas da seguinte forma:

1. **Abertura da unidade:** toda unidade conta com duas páginas de abertura que segundo os autores (GAY; SILVA, 2018), serve de ligação entre o que os alunos já sabem e o que devem saber ao final da unidade;
2. **Conteúdo e seção de atividades;**

3. **Estatística e probabilidade:** como comentaremos mais a frente, os conteúdos relacionados a esses temas encontram-se distribuídos ao longo de todos os capítulos não possuindo um capítulo próprio;
4. **Atividades complementares;**
5. **Compreender um texto;**
6. **Educação financeira:** aparece quatro vezes ao longo de cada livro (uma vez em cada capítulo) ocupando 2 páginas (8 páginas no total);
7. **Informática e matemática:** trabalha conteúdos utilizando softwares;
8. **Problemas para resolver;**

Nessa coleção, o conteúdo de isometria é abordado nos livros do 7º e 8º anos, e em ambas as séries ele é contemplado no último capítulo do livro. A organização do conteúdo na ordem programada pela coleção aparece da seguinte forma:

Quadro 4 – organização do conteúdo na coleção

7º ano	8º ano
<p>Figura 13 - Capítulo 12, 7º ano, Projeto Araribá</p> <p>CAPÍTULO 12 – Transformações geométricas 290</p> <p>1. Localização de pontos no plano 290 Par ordenado 292</p> <p>2. Transformações geométricas no plano 294</p> <p>3. Reflexão 294 Reflexão em relação a uma reta 294 Reflexão em relação a um ponto 298</p> <p>4. Translação 300</p> <p>5. Rotação 302</p> <p>● Informática e Matemática – Figuras obtidas por transformações geométricas 306</p> <p>6. As transformações nas artes 308</p> <p>● Estatística e Probabilidade – Pesquisa amostral e pesquisa censitária 311</p> <p>● Atividades complementares 313</p> <p>● Compreender um texto – Fato ou ficção? ... 314</p> <p>● Educação financeira – Comprar mais ou comprar menos? 316</p> <p>● Problemas para resolver 318</p> <p>● Trabalho em equipe 319</p> <p>● Para finalizar 320</p> <p>Respostas 322</p> <p>Fonte: Gay e Silva (2018)</p>	<p>Figura 14 - Capítulo 11, 8º ano, Projeto Araribá</p> <p>Capítulo 11 – Transformações geométricas 262</p> <p>1. Reflexão em relação a uma reta 262 Composição de reflexões 262</p> <p>2. Reflexão em relação a um ponto 264 Composição de reflexões 264</p> <p>3. Translação 265 Composição de translações 265</p> <p>4. Rotação 266 Composição de rotações 266</p> <p>● Estatística e Probabilidade – Pesquisas estatísticas 268</p> <p>● Atividades complementares 271</p> <p>● Compreender um texto – Localizando terremotos 272</p> <p>● Educação financeira – Decisões a tomar 274</p> <p>● Problemas para resolver 276</p> <p>● Trabalho em equipe 277</p> <p>● Para finalizar 278</p> <p>Fonte: Gay e Silva (2018)</p>

Fonte: Gay e Silva (2018)

Observando a organização do capítulo tanto no 7º quando no 8º ano, percebemos que, intercalados com os conteúdos de isometria, os autores também discutem temas como 'Estatística e Probabilidade' e 'Educação financeira'. Analisando a estrutura do restante do livro constatamos que essa coleção conta com as habilidades relacionadas a esses temas distribuída por todo o livro ao invés de reunidas em um único capítulo sobre o conteúdo, criando uma estrutura incomum, onde você tem um conteúdo diferente, intercalado com o conteúdo principal.

Temos a seguinte ordem em termos de objeto de conhecimento: simetria, probabilidade e estatística, atividades complementares de simetria, compreensão de texto (texto não relacionado a isometria), educação financeira, problemas para resolver (conteúdos variados não relacionados a isometria). Não existe nenhum tipo de ligação sendo feita com isometria nos tópicos que lidam com probabilidade, estatística e matemática financeira.

Comparando a ordem em que as habilidades são trabalhadas no livro com a ordem apresentada pela BNCC, temos o seguinte quadro:

Quadro 5 – Programabilidade da aquisição do saber, Projeto Araribá Plus

BNCC	Coleção Araribá Plus
<p>7º ano:</p> <p>(EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.</p> <p>(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou <i>softwares</i> de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.</p>	<p>7º ano:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Localização de pontos no plano: da página 290 a 293 os autores trabalham com o reconhecimento de pontos e figuras no plano cartesiano, mas sem entrar no assunto de transformações geométricas (base para a habilidade EF07MA20); 2. Transformações geométricas no plano: após trabalhar plano cartesiano, o livro introduz o conceito de transformações geométricas, trabalhando cada uma na malha quadriculada para em seguida partir para os eixos cartesianos (habilidade EF07MA20); 3. Informática e matemática – figuras obtidas por transformações geométricas: nessa seção os autores trabalham as construções das isometrias através de tutoriais mostrando um esquema de interface que se assemelha

	<p>ao GeoGebra. Na seção seguinte trabalha com o reconhecimento das transformações geométricas em obras de arte (habilidade EF07MA21).</p>
<p>8º ano:</p> <p>(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de <i>softwares</i> de geometria dinâmica.</p>	<p>8º ano:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Reflexão em relação a uma reta, composição de reflexões: páginas 262 e 263 (teoria e exercícios), página 271 (atividades complementares); 2. Reflexão em relação a um ponto, composição de reflexões: página 264 (teoria e exercícios), página 271 (atividades complementares); 3. Translação, composição de translações: página 265 (teoria e exercícios), página 271 (atividades complementares); 4. Rotação, composição de rotações: páginas 266 e 267 (teoria e exercícios), página 271 (atividades complementares).

Fonte: Gay e Silva (2018)

A habilidade EF08MA18 consiste apenas em composições de transformações geométricas, porém, o livro traz uma pequena revisão da teoria com exercícios sobre cada isometria. Todas as transformações são trabalhadas na malha quadriculada, porém é sugerido pelas orientações do manual do professor: “Se achar conveniente, peça aos alunos que construam, utilizando um *software* de Geometria dinâmica, reflexões sucessivas de uma mesma figura em relação a dois ou mais pontos diferentes.” (GAY; SILVA, 2018, p. 264)

É possível observar que as habilidades são trabalhadas no livro seguindo a mesma ordem apresentada pela BNCC mantendo a programabilidade da aquisição do saber, embora não exatamente com a mesma estrutura, pois temos temas não relacionados a isometria intercalados no capítulo de transformações geométricas.

Segundo o manual do professor, os autores apresentam o conteúdo como parte da estrutura do livro, apresentado da seguinte forma:

A obra apresenta a seguinte estrutura: Abertura de unidade, Conteúdos, Vamos aplicar, Estatística e Probabilidade, Atividades complementares, Compreender um texto, Educação financeira, Informática e Matemática, Problemas para resolver, Trabalho em equipe e Para finalizar. (GAY; SILVA, 2018, p. XXVII)

Os autores não justificam no manual do professor o motivo pelo qual estruturaram a coleção dessa forma.

Um ponto importante a ser mencionado é que o objeto de conhecimento ‘transformações geométricas’ não se resume apenas à isometria, mas abrange também o conceito de homotetia como previsto pela habilidade **EF07MA19**. Não é nosso objetivo analisar a transposição do conceito de homotetia, mas por fazer parte do mesmo objeto de conhecimento, acreditamos que seja importante mencionar a ausência deste conceito no capítulo sobre transformações geométricas. O autor menciona que o estudo de “localização de pontos no plano” favorece o desenvolvimento da habilidade **EF07MA19**, o que não está errado, porém, o livro não chega a abordar de fato a transformação em si, permanecendo apenas nos conceitos que auxiliariam o estudo da homotetia.

5.1.2 Análise da organização do conteúdo no livro do 7º ano

Já vimos como os volumes estão estruturados em relação as habilidades previstas pela BNCC, porém, nesta seção e na seção seguinte, o nosso objetivo é descrever detalhadamente a estrutura do conteúdo em cada série, buscando entender a lógica por trás da transposição realizada pelos autores.

Como já mencionado, o capítulo 12 sobre transformações geométricas inicia abordando a localização de pontos no plano, estruturando o tema da seguinte forma:

1. Texto introdutório sobre o sistema de coordenadas utilizados do globo terrestre: como funciona a localização em graus de latitude e longitude. Em seguida são apresentadas 4 questões propostas sobre o tópico.
2. Para introduzir a noção de par ordenado, os autores apresentam um breve parágrafo contextualizando com um guia de ruas impressas de um município, e em seguida, aborda o conceito de plano cartesiano e par ordenado (contexto matemático), ensinando como identificar pontos através das coordenadas

utilizando gráficos na malha quadriculada. Finalizando o tópico, propõe 4 questões para serem resolvidas também na malha quadriculada.

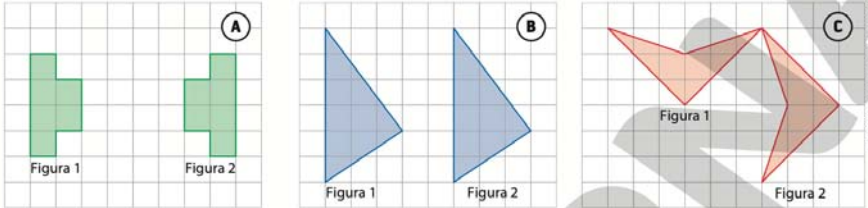
Acreditamos que as questões sobre pontos no plano cartesiano são propostas na malha quadriculada para servirem como base para que os alunos se familiarizem com esse recurso, já que no tópico seguinte, que introduz o conteúdo de transformações geométricas, toda a conceituação é feita em cima das malhas, como descreveremos a seguir:

1. Conceito de transformação geométrica: diferente do livro de Elon Lages e de vários trabalhos acadêmicos sobre o Ensino de isometrias, o conceito é trazido pelos autores de forma bastante intuitiva, não utilizando muitos termos formais matemáticos como os conceitos de função, objeto e imagem, por exemplo, e se apoiando em ilustrações na malha quadriculada (figura 16). Também é sugerido pelo manual que o professor organize uma roda de conversa para que os alunos comentem situações cotidianas onde encontram as transformações geométricas. No box “Para investigar”, o manual sugere que os alunos respondam com suas próprias palavras, e recomenda que o professor valorize as respostas dadas.

Figura 15 - Definição de transformação geométrica, Projeto Araribá Plus

2. Transformações geométricas no plano

Podemos fazer certos movimentos ou transformações com figuras do plano de modo que todas as suas medidas sejam preservadas. Nos exemplos a seguir, a figura 2 foi obtida a partir da figura 1 por meio de uma **transformação geométrica**.



Como as medidas dos lados e ângulos correspondentes das figuras 1 e 2 são iguais, essas transformações são chamadas de **isometrias**. São exemplos de isometrias no plano: **reflexão**, **translação** e **rotação**.

3. Reflexão

Fonte: Gay e Silva (2018)

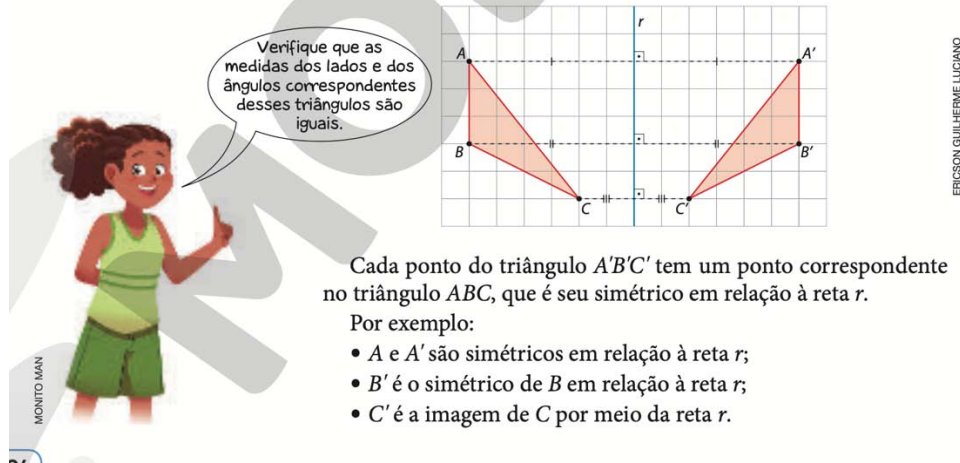
Para investigar
Em cada exemplo, como você acha que a figura 2 foi obtida a partir da figura 1?

2. O segundo tópico diz respeito a Reflexão e começa definindo o conceito de forma similar às transformações geométricas, se apoiando na observação de uma ilustração, porém de maneira mais formal, utilizando a noção de imagem.

Figura 16 - Definição de reflexão 7º ano, Projeto Araribá Plus

Reflexão em relação a uma reta

Na figura abaixo, o triângulo $A'B'C'$ foi obtido do triângulo ABC a partir da **reflexão em relação à reta r** indicada. Dizemos que esses dois triângulos são simétricos em relação à reta r , que é o **eixo de reflexão** ou **eixo de simetria**, e que o triângulo $A'B'C'$ é a imagem do triângulo ABC .



Cada ponto do triângulo $A'B'C'$ tem um ponto correspondente no triângulo ABC , que é seu simétrico em relação à reta r .

Por exemplo:

- A e A' são simétricos em relação à reta r ;
- B' é o simétrico de B em relação à reta r ;
- C' é a imagem de C por meio da reta r .

Fonte – Gay e Silva (2018)

3. Em seguida parte para o tema “figuras com simetria”, mostrando apenas alguns exemplos de figuras geométricas com seus respectivos eixos de simetria.
4. O quarto tópico corresponde ao desenvolvimento da habilidade **(EF07MA20)** “Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.” (BRASIL, 2018). Esse tópico é iniciado com um exemplo e algumas observações, encerrando assim a parte puramente teórica.
5. Após os exemplos no plano cartesiano, são propostos 7 exercícios envolvendo malha quadriculada e coordenadas.
6. Em seguida é trabalhado o conceito de reflexão em relação a um ponto, seguindo uma estrutura e linguagem similar ao conceito de reflexão em relação a uma reta.
7. Após definição e exemplos os autores apresentam 6 questões propostas que trabalham reflexão em relação a um ponto.
8. O tópico seguinte trabalha o conceito de translação, e a estrutura desse tema é bem similar a abordagem da simetria em relação a um ponto: definição apoiada em uma ilustração na malha quadriculada, exemplos que ajudam a conceituar a isometria, e por fim, 4 exercícios propostos envolvendo translação.
9. Quando chegamos na rotação existe uma pequena modificação na estrutura em relação as isometrias anteriores: conceituação com base em ilustração na malha

quadriculada, construção de uma rotação utilizando régua e transferidor, e por fim, 6 exercícios propostos.

10. O penúltimo tópico intitulado “Informática e Matemática” é dedicado a construção das isometrias utilizando software de geometria dinâmica.
11. E encerrando o assunto de transformações geométricas, temos o estudo das isometrias em obras de arte, mostrando alguns exemplos de como as isometrias aparecem em pinturas, ilustrações e peças artesanais. O tópico é finalizado com algumas atividades de construção e pesquisa envolvendo isometria e artes.
12. O tópico seguinte diz respeito ao tema “Estatística e Probabilidade” e fala sobre pesquisa amostral e censitária: começa com um texto teórico e na página seguinte apresenta alguns exercícios relacionados ao assunto.
13. Em seguida o autor propõe algumas atividades complementares sobre transformações geométricas.
14. Na página seguinte o livro traz uma seção intitulada “Compreender um texto” relacionado ao tema de notícias falsas. No final da seção, os autores propõem atividades relacionadas ao assunto.
15. O próximo tópico trabalha o tema “Educação financeira”, em que traz uma história em quadrinhos apresentando uma situação contextualizando o assunto. No final do tópico são propostas atividades sobre o tema.
16. “Problemas para resolver” é o título da página seguinte. Os autores propõem 5 atividades não relacionadas a transformações geométricas. Segundo o manual do professor, o objetivo é “Resolver problemas por meio de estratégias diversas” (GAY; SILVA, 2018, p. 318)
17. Dando continuidade ao capítulo temos o tópico “Trabalho em equipe” cujos objetivos segundo o manual do professor são: “Aplicar, por meio de trabalhos em grupo, os conceitos estudados. Favorecer o desenvolvimento das competências gerais 9 e 10 da BNCC” (GAY; SILVA, 2018, p. 319). O tema do trabalho proposto é uma campanha de conscientização sobre o desperdício de água.
18. Finalizando o capítulo temos o tópico “Para finalizar”, cujo objetivo, segundo o manual do professor, é: “Nessa etapa de conclusão da unidade, os alunos têm a oportunidade de retomar conceitos como razão, proporção e juros, de modo que os usem para se comunicar matematicamente.” (GAY; SILVA, 2018, p. 320).

Ignorando os tópicos intercalados relacionados a outros conteúdos, os autores seguem uma estrutura bastante convencional: teoria apoiada em exemplo, exemplos resolvidos, exercícios propostos, exercícios complementares e contextualização. Existe, porém, uma diferença sutil na introdução do conceito de transformações geométricas: é pedido que os alunos questionem como as transformações foram obtidas, ou seja, existe uma atividade que estimula o raciocínio do aluno antes de dar a definição pronta. Tal atividade não aparece nos tópicos seguintes referentes a cada isometria.

Algo interessante do ponto de vista da transposição didática dos conceitos trabalhadas no livro diz respeito aos recursos e linguagem utilizados: podemos observar que com o objetivo de conceituar as transformações geométricas usando uma linguagem mais próxima do cotidiano dos alunos, fugindo da linguagem formal matemática, os autores recorrem a esquemas e ilustrações, como por exemplo, a personagem que aparece ao lado da definição de reflexão com um balão de diálogo (figura 17), então, ao invés de trazer o conceito formal completo em um só parágrafo, os autores “diluem” a definição em textos, ilustrações, quadros (“para investigar” e “observações”) e propriedades, para facilitar a assimilação, enquanto que em textos voltados para o nível superior, por exemplo, a definição é feita de forma objetiva, precisa e sucinta muitas vezes em um parágrafo único.

5.1.3 Modificações realizadas pela noosfera

Vamos analisar agora quais as modificações sofridas pelo conteúdo em relação ao nosso saber de referência (apresentado na seção 2.3).

As definições apresentadas pelo livro nem sempre estão sintetizadas em um único texto e muitas vezes encontram-se “diluídas” em exemplos e ilustrações, por esse motivo, colocaremos as imagens do livro ao invés da transcrição sempre que isso ocorrer.

Realizamos a mesma análise para todos os livros selecionados, sempre comparando com as definições trazidas pelo nosso referencial teórico. Na análise do primeiro livro, destacamos as definições apresentadas na seção 2.3 e em seguida trouxemos as definições dos autores da coleção, porém, para os livros seguintes, não repetimos as conceituações do referencial teórico, para não ficar cansativo.

Comparando as definições dadas por Pinho, Bastista e Carvalho (2010) e pelos autores do livro sobre transformações geométricas, temos o seguinte:

I. Definição segundo nosso referencial teórico:

Pode ser definida: “como sendo uma função de p em p que associa cada ponto M do plano p um ponto M' de p , denotado por $M'=T(M)$. M' é chamado imagem de M por T . Em particular, se F é uma figura no plano, a imagem de F por T é o conjunto de pontos imagens de F , denotado por $F'=T(F)$.” (PINHO, BATISTA E CARVALHO, 2010, p. 247)

II. Definição segundo Gay e Silva (2018):

Figura 17 - Definição de transformações geométricas, Projeto Araribá Plus, 7º ano.

2. Transformações geométricas no plano

Podemos fazer certos movimentos ou transformações com figuras do plano de modo que todas as suas medidas sejam preservadas. Nos exemplos a seguir, a figura 2 foi obtida a partir da figura 1 por meio de uma **transformação geométrica**.

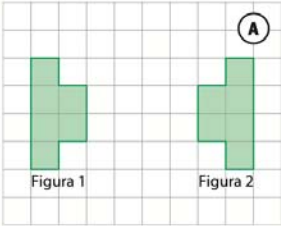


Figura 1 Figura 2

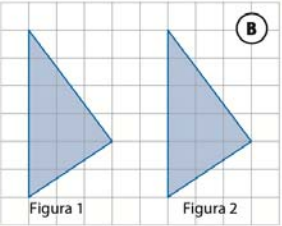


Figura 1 Figura 2

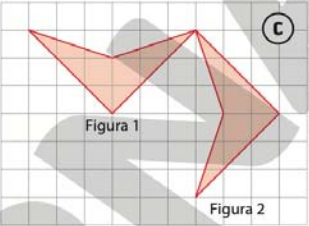


Figura 1 Figura 2

Para investigar

Em cada exemplo, como você acha que a figura 2 foi obtida

Como as medidas dos lados e ângulos correspondentes das figuras 1 e 2 são iguais, essas transformações são chamadas de **isometrias**. São exemplos de isometrias no plano: **reflexão, translação e rotação**.

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 294)

É possível perceber que a principal diferença entre as definições consiste na omissão dos termos “função” e “imagem”. De acordo com a BNCC (2018), o conteúdo de função não é visto antes do 7º ano, o que justifica a ausência dos termos.

Pudemos identificar também uma afirmação que pode facilmente ser mal interpretada: “Podemos fazer certos movimentos ou transformações com figuras do plano de modo que todas as suas medidas sejam preservadas.” (GAY; SILVA, 2018, p. 294) Ignorando o segundo parágrafo do texto (que vem após os exemplos), podemos interpretar que transformações geométricas são apenas aquelas que mantem as dimensões do objeto (definição que exclui as homotetias), não consideramos tal definição como uma deformação do conceito, mas pode contribuir

para a construção de uma noção errada sobre o conceito de transformações geométricas.

Partindo para o conceito de Reflexão em relação a uma reta, temos a seguinte comparação:

I. Definições segundo nosso referencial teórico:

• Definição 1:

sendo δ uma transformação por isometria, temos que “ $\delta: \Pi \rightarrow \Pi$ é uma reflexão com relação à r (referida como o eixo de simetria) se esta reta é a mediatriz do segmento de extremidades P e $\delta(P)$, onde P representa um ponto qualquer do plano” (SIQUEIRA, LIMA E GITIRANA, 2002, p. 2)

• Definição 2:

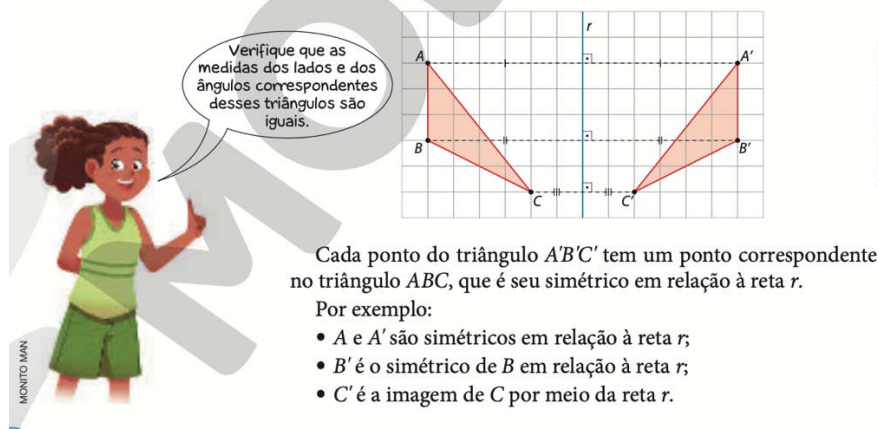
Seja r uma reta no plano Π . A reflexão em torno da reta r é a função $R_r: \Pi \rightarrow \Pi$ assim definida: $R_r(X) = X$ para todo $X \in r$, e para $X \notin r$, $R_r(X) = X'$ é tal que a mediatriz do segmento XX' é a reta r . Noutras palavras, seja Y o pé da perpendicular baixada de X sobre r . Então Y é o ponto médio do segmento XX' . (LIMA, 1995, p. 16)

II. Definição segundo Gay e Silva (2018):

Figura 18 - Definição de reflexão em relação a uma reta, Projeto Araribá Plus, 7º ano.

Reflexão em relação a uma reta

Na figura abaixo, o triângulo $A'B'C'$ foi obtido do triângulo ABC a partir da **reflexão em relação à reta r** indicada. Dizemos que esses dois triângulos são simétricos em relação à reta r , que é o **eixo de reflexão** ou **eixo de simetria**, e que o triângulo $A'B'C'$ é a imagem do triângulo ABC .



Cada ponto do triângulo $A'B'C'$ tem um ponto correspondente no triângulo ABC , que é seu simétrico em relação à reta r .

Por exemplo:

- A e A' são simétricos em relação à reta r ;
- B' é o simétrico de B em relação à reta r ;
- C' é a imagem de C por meio da reta r .

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 294)

Na página seguinte é apresentada a seguinte propriedade:

Observe que dois pontos simétricos em relação à reta r estão à mesma distância dessa reta, em posições opostas. Isso sempre ocorre com duas figuras simétricas em relação a uma reta: cada ponto de uma delas é simétrico a um ponto da outra em relação à reta, e vice-versa, e os pontos simétricos estão à mesma distância da reta considerada. (GAY; SILVA, 2018, p. 295)

Mais uma vez as notações de função não foram utilizadas, porém, foi mantido o termo “imagem”. Os termos ‘mediatriz’ e ‘perpendicular’ também não aparecem na definição do livro. Os conteúdos relacionados a função e a lugar geométrico não são propostos para os níveis que antecedem o 7º ano, justificando a omissão dos termos. A definição dada por Gay e Silva (2018) é similar a segunda definição do nosso referencial teórico, que utiliza propriedades da isometria para conceitua-la. Apesar dos termos omitidos, o objeto de ensino ainda corresponde ao saber de referência.

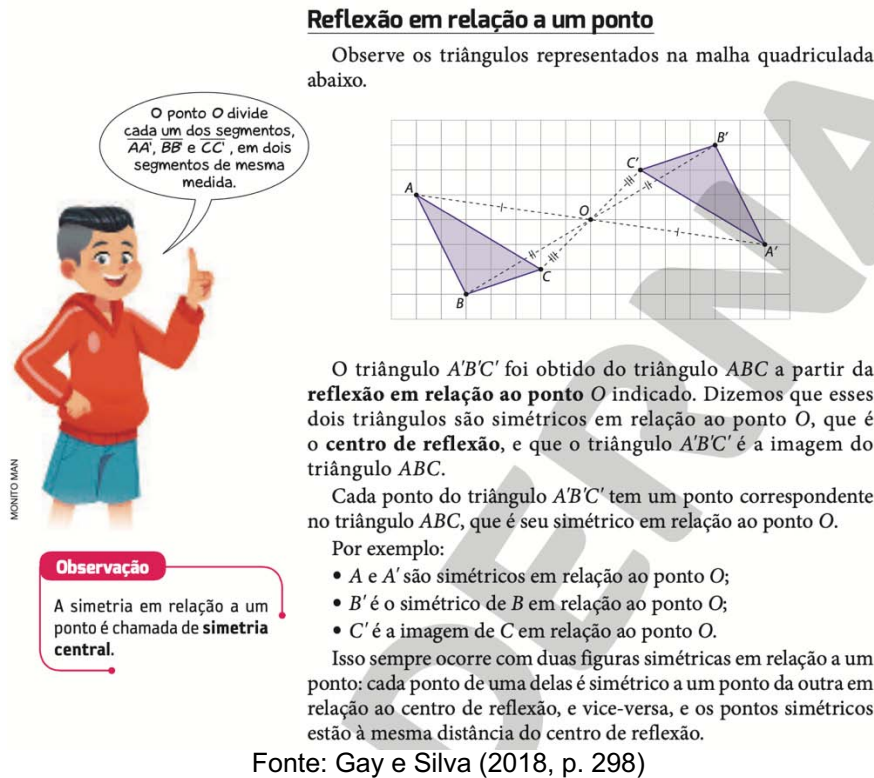
Partindo para o conceito de reflexão em relação a um ponto apresentamos o seguinte quadro:

I. Definição segundo nosso referencial teórico:

Se tomarmos um ponto A no plano Π , a simetria em torno do ponto A é dada pela função: $AS: \Pi \rightarrow \Pi$ definida da seguinte forma: $AS(A) = A$ e, para $X \neq A$ temos que $AS(X) = X'$ é o simétrico de X relativamente a A , sendo assim, A é o ponto médio do segmento de reta XX' (LIMA, 1995)

II. Definição segundo Gay e Silva (2018):

Figura 19 - Definição de simetria em relação a um ponto, Projeto Araribá Plus, 7º ano.



Mais uma vez os termos ‘função’ e ‘ponto médio’ não foram na definição trazida pelo livro de Gay e Silva (2018) devido ao fato que os conteúdos relacionados a esses termos não foram ainda abordados. Os termos foram substituídos por outras expressões com sentidos equivalentes, mantendo a correspondência entre o objeto de ensino e o saber de referência.

O quadro abaixo traz o conceito de translação dado pelo nosso referencial teórico e pelo livro Projeto Araribá Plus 7º ano:

I. Definição segundo nosso referencial teórico:

- **Definição 1:**

Sejam A, B pontos distintos do plano Π . A translação $TAB(X): \Pi \rightarrow \Pi$ é a função assim definida: dado $X \in \Pi$, sua imagem $X' = TAB(X)$ é o quarto vértice do paralelogramo que tem AB e AX como lados. (LIMA, 1995, p. 18)

- **Definição 2:** após determinarmos o vetor AB da transformação, podemos definir uma translação de um ponto da seguinte forma, de acordo com Fonseca (2013):

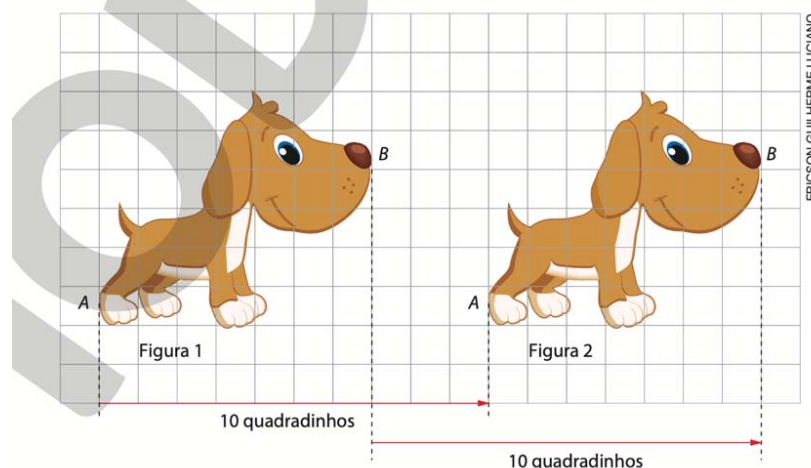
dados um segmento orientado AB não nulo e um ponto P não alinhado com AB em um plano, existe um único ponto Q nesse plano que é o quarto vértice do paralelogramo $ABPQ$ que tem AB e AP como lados (FONSECA, 2013, p. 38)

II. Definição segundo Gay e Silva (2018):

Figura 20 - Definição de translação segundo Gay e Silva (2018), 7º ano

4. Translação

Observe as figuras na malha quadriculada abaixo.



- As setas indicam que a figura 1 foi deslocada 10 quadradinhos na direção horizontal e no sentido da esquerda para a direita, gerando a figura 2.

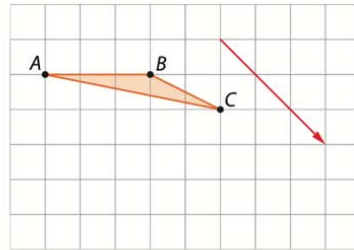
Fonte: Gay e Silva (2018, p. 300)

A definição trazida pelo livro foi dividida em duas páginas. Na primeira temos a figura 20, contendo uma ilustração na malha quadriculada que explica, utilizando um raciocínio baseado em “quadradinhos” como unidade, o movimento de translação. Na página seguinte são apresentados mais esquemas ilustrados

Figura 21 - Definição de translação segundo Gay e Silva (2018), 7º ano II

Considerando que esse mesmo deslocamento foi feito com todos os pontos da figura 1, dizemos que a figura 2 foi obtida por uma **translação** da figura 1, e que a figura 2 é a imagem da figura 1.

Veja, por exemplo, como podemos transladar o triângulo ABC abaixo de acordo com a medida do comprimento, a direção e o sentido da seta.



Para transladar qualquer figura, é preciso saber a direção, o sentido e a distância em que ela será deslocada. Em geral, essas informações são representadas por uma seta que chamamos de **vetor da translação**.



Para transladar o triângulo, deslocamos os vértices A , B e C , 3 quadradinhos para a direita e, depois, 3 quadradinhos para baixo, obtendo os vértices A' , B' e C' , respectivamente. Em seguida, traçamos o triângulo $A'B'C'$.

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 301)

As definições de Lima (1995) e Fonseca (2013) estão ligadas a noção de vetor (implicitamente na primeira definição e explicitamente na segunda), e a definição do livro segue a mesma linha, porém, ao invés de trazer a definição fechada em um texto objetivo no formato “translação é [...]”, os autores usam imagens, exemplos, ilustrações e balões para conceituar a translação, ou seja, a definição é fortemente baseada em como realizar uma translação. Analisando a transposição do conceito, percebemos que os termos ‘função’, ‘segmento orientado’ e ‘paralelogramo’ não foram utilizados, devido ao ano escolar para o qual esse livro é direcionado. As modificações realizadas pela noosfera mantiveram a correspondência entre o objeto de ensino e o saber de referência.

Vamos analisar agora a transposição do conceito de rotação. Comparando as definições do nosso referencial teórico com a do livro Projeto Araribá Plus 7º ano, temos o seguinte:

I. Definição segundo nosso referencial teórico:

- **Definição 1:** de acordo com Lima (1995), tomando um ponto O no plano Π e $\alpha = \widehat{A\hat{O}B}$ um ângulo de vértice O :

a rotação de ângulo α em torno do ponto O é a função $\rho_{O,\alpha}: \Pi \rightarrow \Pi$ assim definida: $\rho_{O,\alpha}(O) = O$ e, para todo ponto $X \neq O$ em Π , $\rho_{O,\alpha}(X) = X'$ é o ponto do plano Π tal que: $d(X, O) = d(X', O)$, $\angle XOX' = \alpha$. (LIMA, 1995, p. 22)

- **Definição 2:** Segundo Silva e Pietropaolo (2014), que definem a rotação a partir da função: $P(x,y) = (x\cos(a) - y\sin(a), x\sin(a) + y\cos(a))$.
- **Definição 3:** temos também a definição trazida por Chiréia (2013) que diz que, tomando um ponto fixo O num plano π e um ângulo α de vértice O , temos que a rotação em torno do ponto O :

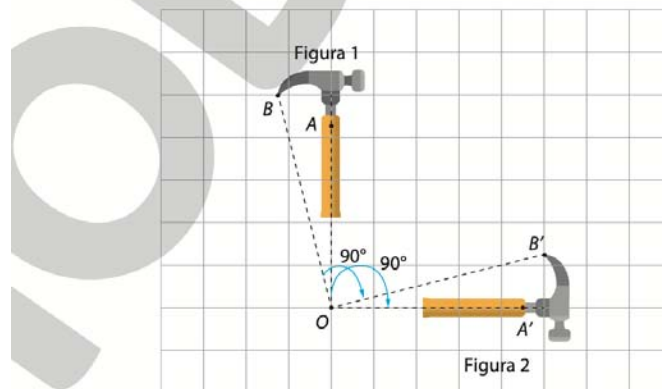
é uma transformação no plano π , onde uma função bijetora $f: \pi \rightarrow \pi$ preserva distâncias e associa a cada ponto P do plano, com $P \neq O$, ao ponto $f(P) = P'$, onde P' é chamado imagem de P , os segmentos OP e OP' são de mesma medida e $\alpha = \angle POP'$ (CHIRÉIA, 2013, p.54).

II. Definição segundo Gay e Silva (2018):

Figura 22 - Definição de rotação segundo Gay e Silva (2018), 7º ano

5. Rotação

Observe as figuras na malha quadriculada abaixo.



Na malha quadriculada acima, temos o desenho de dois martelos idênticos. Observe que a figura 2 foi obtida da figura 1 a partir de um giro, no sentido horário (sentido dos ponteiros do relógio), de 90° ao redor do ponto O . Assim, podemos dizer, por exemplo, que o ponto A gerou o ponto A' , e o ponto B gerou o ponto B' .

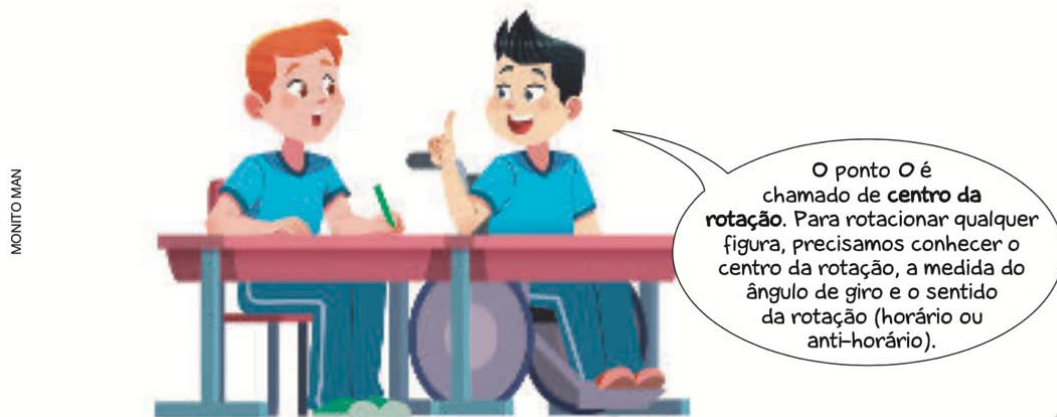
Fonte: Gay e Silva (2018, p. 302)

Mais uma vez temos a definição dividida em duas páginas. Na figura 22, temos a descrição da transformação realizada, utilizando um raciocínio baseado em unidades de “quadrinhos”. Na página seguinte, os autores citam instrumentos com os quais podemos realizar a transformações.

Figura 23 - Definição de rotação segundo Gay e Silva (2018), 7º ano

Considerando que esse mesmo giro foi feito com todos os pontos da figura 1, dizemos que a figura 2 foi obtida por uma **rotação** da figura 1, e que a figura 2 é a imagem da figura 1.

Veja, por exemplo, como podemos construir, usando régua e transferidor, a figura obtida pela rotação do triângulo ABC , em torno do ponto O , considerando um giro de 90° no sentido horário.



Fonte: Gay e Silva (2018, p. 303)

Comparando as definições, percebemos que os termos e notações ligados às noções de função e trigonometria não foram utilizadas no livro. O uso dos sentidos do relógio (horário e anti-horário) e da malha quadriculada aparecem como recursos didáticos utilizados para facilitar o entendimento e a construção da rotação. A correspondência entre o objeto de ensino e o saber de referência foi mantida mesmo após as modificações realizadas pela noosfera.

5.1.4 Análise da organização do conteúdo no livro do 8º ano

No volume do 8º ano, o conteúdo de isometria é trabalhado no capítulo 11 intitulado “Transformações geométricas” (páginas 162 - 279).

Mais uma vez, do ponto de vista da transposição do documento para o livro, o que se sobressai é a inclusão de conteúdos matemáticos não relacionados diretamente com o conteúdo (estatística, probabilidade, compreensão de texto e matemática financeira) intercalados com isometria.

Descrevendo mais detalhadamente a ordem em que os conteúdos são vistos, temos o seguinte:

1. O capítulo é iniciado relembrando o conceito de reflexão em relação a uma reta. É mostrado uma imagem com uma reflexão sendo realizada numa malha quadriculada, seguido da definição de reflexão.
2. É introduzida a noção de composição de reflexões em relação a uma reta de forma similar, ou seja, através de um exemplo utilizando a malha quadriculada.
3. São propostas 3 atividades sobre o conceito.
4. Em seguida o capítulo relembra a definição de uma reflexão em relação a um ponto, onde é mostrado um exemplo na malha quadriculada seguido de sua definição.
5. No mesmo formato do conceito anterior, a noção de composição de reflexões em relação a um ponto é introduzida (exemplo na malha + definição).
6. São propostas 2 atividades sobre o tema.
7. A estrutura utilizada para os conceitos de reflexão e composições se repete para a translação (e composições) e rotação (e composições), mudando apenas a quantidade de atividades: temos apenas 1 atividade para translação e 2 para rotação.
8. No manual do professor é orientado que as isometrias sejam exercitadas utilizando softwares de geometria dinâmica.
9. Após o fim da parte teórica sobre as isometrias, o livro dá início ao tópico “Probabilidade e Estatística”, cujo tema nesse capítulo é “pesquisas estatísticas”.
10. Em seguida, são propostas duas atividades sobre amostra e pesquisa estatística.
11. Atividades complementares: são propostas 4 atividades sobre isometrias. Além das atividades propostas no livro, o manual do professor mais uma vez orienta que os alunos realizem transformações utilizando softwares de geometria dinâmica.
12. Após o estudo sobre probabilidade e estatística é a vez do tópico “obrigatório” da estrutura do livro intitulado “compreender um texto”. Nesse capítulo o tema do texto é localizando terremotos. São propostas 3 atividades sobre esse conteúdo.
13. Em seguida temos a parte do capítulo que trata sobre “Educação financeira”, cujo objetivo é, segundo o manual do professor “refletir sobre o uso consciente de recursos financeiros” (GAY; SILVA, 2018, p. 274). O tópico conta com 3 atividades sobre o assunto.

14. Em “Problemas para resolver”, os autores apresentam atividades não relacionadas ao conteúdo principal do capítulo.
15. O Penúltimo tópico é intitulado “Trabalho em equipe”, cujo objetivo, segundo manual do professor é, aplicar por meio de trabalho em grupo, os conceitos estudados. A proposta é que os alunos organizem uma gincana sobre problemas matemáticos que podem ser resolvidos por cálculo mental. Mais uma vez o conteúdo principal do capítulo não é trabalhado aqui.
16. Concluindo o capítulo temos o tópico “Para finalizar”, com mais atividades não relacionadas a isometria.

A estrutura desse capítulo é bastante similar ao capítulo sobre transformações geométricas do 7º ano, a maior diferença encontra-se na adição das “composições de isometrias”, previstas pela BNCC, e nas definições mais objetivas, menos “diluídas” em imagens e exemplos, o que faz sentido, levando em consideração que o conteúdo já foi visto anteriormente com definições mais intuitivas (focadas em ‘como realizar uma transformação’ ao invés de ‘o que é tal transformação’), ou seja, se ignorarmos mais uma vez os tópicos não relacionados as isometrias intercalados ao longo do capítulo, temos aqui uma estrutura bastante utilizada de ‘definição apoiada em um exemplo seguido de atividades’.

5.1.5 Modificações realizadas pela noosfera

Agora vamos analisar as modificações sofridas pelo conteúdo realizadas pela noosfera em relação ao nosso saber de referência, ou seja, vamos analisar se a correspondência entre o objeto de ensino e o saber sábio foi mantida.

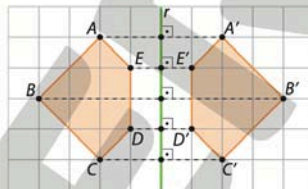
Começamos nossa análise comparando o conceito de reflexão em relação a uma reta trazido pelo livro com o nosso referencial teórico:

- **Definição Segundo Gay e Silva (2018):**

Figura 24 - Definição de reflexão axial segundo livro Projeto Araribá Plus, 8º ano.

1. Reflexão em relação a uma reta

Na figura abaixo, o pentágono $A'B'C'D'E'$ (imagem) foi obtido do pentágono $ABCDE$ por meio da **reflexão em relação à reta r** indicada.



Alguns pontos foram ligados às suas respectivas imagens por segmentos de reta. Note que a reta r é a mediatriz de AA' , BB' , CC' , DD' e EE' .

A **reflexão em relação a uma reta r** é a isometria que associa cada ponto P do plano (P não pertencente a r) ao ponto P' (simétrico de P ou imagem de P), de modo que P e P' estão à mesma distância de r . Dizemos, nesse caso, que os pontos P e P' são simétricos em relação à reta r .

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 262)

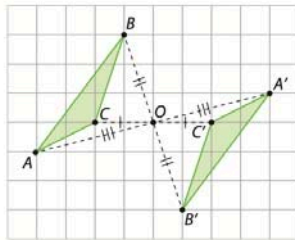
Comparada as definições do volume anterior (7º ano), o livro traz conceituações bem mais próximas do nosso referencial teórico. Observamos que os termos ‘função’ (e suas notações), e o termo ‘perpendicular’ não foram utilizados pelos autores, pelos mesmos motivos citados nas análises anteriores. A malha quadriculada permanece como um recurso didático.

Ao observar a definição trazida pelo livro no quadro verde, podemos identificar uma deformação em relação ao nosso referencial teórico, quando os autores do livro dizem ‘(P não pertencente a r)’: essa condição cria uma divergência entre o objeto de ensino e o saber de referência, pois dá a entender que não é possível realizar transformações quando temos pontos da figura interceptando o eixo de simetria, era necessário afirmar que quando temos P pertencente ao eixo, sua imagem coincidirá com o objeto (como explicitado pela definição de Lima (1995)), alternativamente, os autores do livro poderiam não ter colocado essa condição e a definição ainda permaneceria correta de acordo com Pinho, Batista e Carvalho (2010).

Partindo para a definição de reflexão em relação a um ponto, temos:

- **Definição segundo Gay e Silva (2018):**

Figura 25 - Definição de reflexão em relação a um ponto segundo Gay e Silva (2018), 8º ano.



2. Reflexão em relação a um ponto

Na figura ao lado, o triângulo $A'B'C'$ (imagem) foi obtido do triângulo ABC por meio da **reflexão em relação ao ponto** O indicado.

Alguns pontos foram ligados às suas respectivas imagens por segmentos de reta. Note que O é o ponto médio de $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$.

A **reflexão em relação a um ponto** O é uma isometria, que associa cada ponto P do plano (P distinto de O) ao ponto P' de modo que os segmentos \overline{OP} e $\overline{OP'}$ sejam congruentes. Dizemos, nesse caso, que os pontos P e P' são simétricos em relação ao ponto O .

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 264)

A análise desse conceito é similar ao anterior: mais uma vez os termos ‘função’, bem como suas notações e ‘ponto médio’, não foram utilizados pelos autores pelos mesmos motivos citados anteriormente. Novamente a malha quadriculada foi utilizada como suporte didático.

Observamos uma divergência entre o objeto de ensino e o saber de referência similar ao conceito anterior, quando os autores afirmam ‘(P distinto de O)’, tal condição pode causar um obstáculo ao aprendizado do aluno, pois dá a entender que pontos coincidentes a O , não possuem imagem, quando na verdade a imagem coincide com o objeto, como colocado pela definição de Lima (1995).

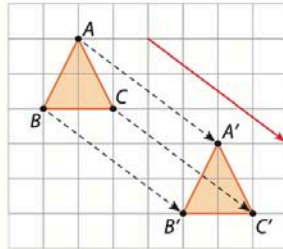
A seguir temos a análise da transposição do conceito de translação:

- **Definição segundo Gay e Silva (2018):**

Figura 26 - Definição de translação segundo livro Projeto Araribá Plus, 8º ano.

3. Translação

Na figura abaixo, o triângulo $A'B'C'$ (imagem) foi obtido por uma **translação** do triângulo ABC . O vetor dessa translação está indicado pela seta vermelha.



A translação que leva A até A' é representada pelo vetor $\overrightarrow{AA'}$ com origem em A e término em A' . Na figura acima, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$, pois as medidas dos vetores $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ e $\overrightarrow{CC'}$ são iguais, e a direção e o sentido de $\overrightarrow{AA'}$ são os mesmos de $\overrightarrow{BB'}$ e $\overrightarrow{CC'}$.

A **translação** é a isometria pela qual uma figura é deslocada em determinada direção e sentido, de modo que a distância entre cada ponto da figura original e o seu correspondente na figura obtida é a mesma.

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 265)

Comparando as definições acima, podemos perceber a omissão dos termos ‘função’ (conteúdo que não é visto antes do 7º ano), juntamente com suas notações, ‘segmento orientado’ e ‘paralelogramo’ (contemplado no 3º ano do Ensino Fundamental). A malha quadriculada foi utilizada como estratégia didática para auxiliar na definição do conceito. Não identificamos divergências entre o objeto de ensino e o saber de referência apesar da omissão dos termos.

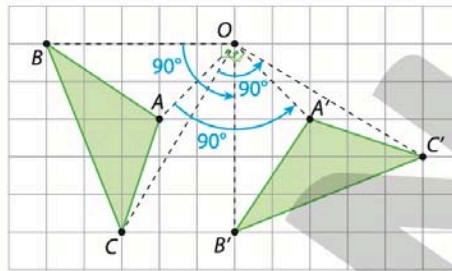
Dando continuidade as análises das modificações realizadas pela noosfera temos as seguintes definições de rotação:

- **Definição Segundo Gay e Silva (2018):**

Figura 27 - Definição de rotação segundo livro Projeto Araribá Plus, 8º ano.

4. Rotação

Na malha quadriculada abaixo, o triângulo $A'B'C'$ (imagem) foi obtido do triângulo ABC por meio de um giro, no sentido anti-horário (sentido contrário ao dos ponteiros do relógio), de 90° ao redor do ponto O .



A **rotação** é a isometria pela qual a nova figura é obtida por meio de um giro da figura inicial ao redor de um ponto fixo, chamado de **centro da rotação**.

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 266)

Os termos 'função', assim como suas notações, 'seno' e 'cosseno', foram omitidos pelos mesmos motivos citados nas análises anteriores. Novamente temos a malha quadriculada e os sentidos do relógio como recursos didáticos usadas como suporte para a definição de rotação. A correspondência entre objeto de ensino e saber de referência foi mantida pelos autores.

5.2 Coleção A Conquista da Matemática

Na apresentação da coleção os autores comentam as expectativas e os objetivos que a obra pretende atingir, segundo Giovanni e Castrucci (2018):

Ao longo dos volumes desta obra, pretendemos ainda estabelecer um elo entre a Educação Matemática e a formação do sujeito autônomo e consciente do seu papel, tendo em vista que paradigmas em Educação apontam para a formação de um aluno crítico, capaz de analisar, interpretar e participar ativamente na sociedade ao seu redor. Para descortinar o contexto permeado por múltiplas linguagens e tecnologias em que se inserem, assumindo-se como cidadãos autônomos e conscientes das relações sociais que vivenciam diariamente, nossos alunos precisam se apropriar dos conhecimentos sócio-historicamente construídos, valendo-se de estratégias e habilidades requeridas pelo mundo contemporâneo. E, no intuito de auxiliar você, professor, a capitanear essa aventura que é o processo de ensino e aprendizagem nos anos finais do Ensino Fundamental, foram elaboradas estas Orientações. Aqui, você encontrará diversas sugestões e bases para o seu trabalho diário. (GIOVANNI; CASTRUCCI, 2018, p. III)

Analisamos nesse capítulo a 4ª edição publicada em 2018 aprovada pelo PNLD 2020 – anos finais do Ensino Fundamental.

5.2.1 Organização do conteúdo na coleção

A coleção do ensino fundamental anos finais conta com 4 volumes (6º, 7º, 8º e 9º anos), cada volume é dividido em unidades e capítulos assim como a coleção anterior, sendo assim, a obra é organizada da seguinte forma:

1. As aberturas de unidades, que segundo os autores:

[...] têm um papel fundamental: elas propiciam o momento de entrada no grande tema que será tratado. Em cada volume, a unidade é introduzida por uma abertura que traz:

- **uma imagem** (ilustração, fotografia ou infográfico) – relacionada com temas que serão estudados ao longo do capítulo e cujo objetivo é instigar os alunos a uma discussão inicial;
- **algumas questões** – para contextualizar os alunos no assunto da unidade e mobilizar conhecimentos anteriores. (GIOVANNI; CASTRUCCI, 2018, p.XXX)

2. Os capítulos:

Em cada capítulo, os alunos contarão com diferentes explorações e recursos, dentre estes textos, imagens e atividades. Ao longo de cada capítulo, podem ser encontradas seções e boxes que buscam favorecer compreensões, aprofundamentos e articulações. (GIOVANNI; CASTRUCCI, 2018, p.XXXI)

3. Atividades;

Nesta seção, os alunos encontrarão diferentes atividades que foram dispostas em ordem crescente de complexidade para facilitar a visualização e a conferência. Eventualmente, surgirão atividades que desafiam os alunos. (GIOVANNI; CASTRUCCI, 2018, p. XXXII)

4. Educação financeira:

Nesta seção, os alunos encontrarão temas como hábitos conscientes de consumo, controle de gastos, economia, entre outros. A partir de leituras e reflexões, serão estimulados a ver e rever suas ações e atitudes ligadas ao consumo e a lidar com o dinheiro. (GIOVANNI; CASTRUCCI, 2018, p.XXXII)

5. Tratamento da informação:

Nesta seção, que reúne propostas de trabalho com temas associados à probabilidade e estatística, os alunos encontrarão textos, imagens, gráficos, tabelas e atividades numeradas, sempre buscando a contextualização desses temas. (GIOVANNI; CASTRUCCI, 2018, p.XXXII)

6. Tecnologia: Segundo os autores Giovanni e Castrucci (2018) consiste em resolução de problemas ou questões matemáticas com uso de ferramentas tecnológicas.

7. Retomando o que aprendeu: revisão dos conteúdos explorados na unidade.

8. Atualidades em foco:

Um dos objetivos é promover a articulação entre as diferentes áreas do conhecimento e minimizar possíveis rupturas existentes nos processos de ensino e aprendizagem. Nesta seção, os alunos terão a oportunidade de aprofundar e ampliar seus conhecimentos e repertório cultural, passear por diferentes temas contemporâneos e perceber a Matemática em variadas situações do cotidiano (GIOVANNI; CASTRUCCI, 2018, p. XXXIII).

Nessa coleção, o conteúdo de isometrias é abordado nos volumes 7 e 8. O assunto é contemplado nas unidades 3 e 6 respectivamente, e foram organizados da seguinte forma:

Quadro 6 – organização da coleção 2

7º ano	8º ano
<p>Figura 28 - Unidade 3, 7º ano, A Conquista da Matemática</p> <p>UNIDADE 3 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E SIMETRIA 76</p> <p>1. Transformações no plano 78 Polígonos e sistema de coordenadas 78 Ampliação e redução 78 Reflexão 79 Ampliação e redução com o uso da malha quadriculada 80 Atividades 82 Por toda parte • Maquetes e miniaturas ... 83 Tratamento da informação • Gráfico de setores 84</p> <p>2. Simetria 86 A ideia de simetria 86 Tipos de simetria 87 Atividades 90</p> <p>Tecnologias • Simetrias com GeoGebra 92 Retomando o que aprendeu 94 Atualidades em foco • Educação ambiental – arte e lixo 96</p> <p>Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 8)</p>	<p>Figura 29 - Unidade 6, 8º ano, A conquista da Matemática</p> <p>UNIDADE 6 POLÍGONOS E TRANSFORMAÇÕES NO PLANO 166</p> <p>1. Polígonos e seus elementos 168 Elementos de um polígono 169 Nomenclatura 170 Atividades 170</p> <p>2. Diagonais de um polígono convexo 171 Cálculo do número de diagonais de um polígono 171 Atividades 172</p> <p>3. Ângulos de um polígono convexo 173 Ângulo interno e ângulo externo 173 Soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo 173 Soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo 175 Atividades 176</p> <p>4. Ângulos de um polígono regular 177 Atividades 178</p> <p>5. Construções geométricas 179 Triângulo equilátero 179 Hexágono regular 180 Atividades 181</p> <p>6. Propriedades dos quadriláteros 182 Paralelogramos 182 Retângulo 183 Losango 184 Quadrado 184 Atividades 185 Trapézios 186 Atividades 187</p> <p>Tratamento da informação • Interpretando um gráfico de setores 188</p> <p>7. Transformações no plano 190 Reflexão 190 Translação 190 Rotação 191 Composição de transformações 192 Atividades 193 Tecnologias • Transformações no plano 194 Retomando o que aprendeu 196 Atualidades em foco • Querer é poder? Mas, o que eu quero? 198</p> <p>Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 10)</p>

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018)

Observando a organização das unidades, percebemos que os autores dedicaram uma unidade inteira só para transformações geométricas, em que o primeiro capítulo da unidade é dedicado a homotetia e o segundo é dedicado as isometrias. Já na organização do conteúdo no 8º volume, percebemos que o conteúdo

“divide” a unidade com o conteúdo de polígonos. Mais uma vez temos o conteúdo de estatística distribuído ao longo do livro ao invés de concentrado em um único capítulo ou unidade.

Podemos perceber uma diferença entre a organização dessa coleção e a da coleção anterior no que diz respeito ao volume do 7º ano: enquanto que na obra de Gay e Silva (2018), o conteúdo de transformações geométricas era concentrado em um único capítulo, fazendo parte de uma unidade maior, na coleção de Giovanni e Castrucci (2018) ele se divide em 2 capítulos.

Com o objetivo de analisar a programabilidade da aquisição do saber, vamos comparar a ordem em que os conteúdos são trabalhados no livro com a ordem apresentada pela BNCC:

Quadro 7 – programabilidade da coleção

BNCC	Coleção 'A Conquista da Matemática'
<p>7º ano:</p> <p>(EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.</p> <p>(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou <i>softwares</i> de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.</p>	<p>1. Teoria: Exemplos de simetrias no cotidiano, a ideia de simetria, tipos de simetria: axial, translação e rotação (malha quadriculada como suporte principal) (EF07MA21);</p> <p>2. Atividades (EF07MA21);</p> <p>3. Tecnologias: simetrias com o GeoGebra (EF07MA21).</p> <p>(Simetria no plano cartesiano, habilidade (EF07MA20), não é trabalhado nesse capítulo, apresentando apenas um exemplo de reflexão axial no capítulo anterior que é dedicado ao conteúdo de homotetia)</p>
<p>8º ano:</p> <p>(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de <i>softwares</i> de geometria dinâmica.</p>	<p>1. Breve revisão das isometrias (EF07MA21);</p> <p>2. Composição de transformações (EF08MA18).</p>

Fonte: Brasil (2018)

Podemos observar que a programabilidade da aquisição do saber difere um pouco da apresentada pela BNCC: no sétimo ano, a habilidade **(EF07MA20)** não é abordada, e no 8º ano, a habilidade **(EF07MA21)** é revisitada.

No quadro apresentado acima, analisamos apenas a organização do conteúdo de isometria, porém ressaltamos que intercalado com esse conceito, os autores também contemplam o estudo de estatística, ou seja, quando analisamos a estrutura do capítulo como um todo, mesmo que a programabilidade da isometria seguisse fielmente a BNCC, a organização do capítulo ainda não seria igual.

5.2.2 Análise da organização do conteúdo no livro do 7º ano

No item anterior analisamos a organização do conteúdo na coleção buscando entender a programabilidade da aquisição do saber. Nesse item, o nosso objetivo é descrever detalhadamente a estrutura do conteúdo em cada série, buscando entender a linha de raciocínio por trás da transposição realizada.

1. O capítulo inicia com exemplos de isometria encontrados no cotidiano, mostrando imagens de mosaicos.
2. Em seguida parte para o tópico 'ideia de simetria', onde trabalha a noção de eixo de simetria de forma intuitiva, focando na identificação de eixos de figuras.
3. O tópico seguinte intitulado 'tipos de simetria', é dividido em: simetria de reflexão, simetria de translação e simetria de rotação. A simetria em relação a um ponto e a translação com deslizamento não são contempladas pelo livro.
 - 3.1. O conceito de simetria de reflexão é introduzido a partir de uma atividade de 'pense e responda' na malha quadriculada. Após uma reflexão sobre a atividade, os alunos devem deduzir as propriedades da simetria axial. É dado mais alguns exemplos na malha quadriculada.
 - 3.2. A simetria de translação segue a mesma estrutura do conceito anterior: atividade de "pense e responda", que exige que o aluno reflita sobre as propriedades daquela isometria, em seguida é dado a definição a partir das propriedades discutidas, e finalizando a seção, é mostrado um exemplo da isometria na arte.
 - 3.3. A simetria de rotação inicia com uma atividade de "pense e responda" que utiliza, papel quadriculado, lápis, folha de papel sulfite, tesoura, palito de sorvete, tachinha, régua e fita adesiva, o objetivo é construir um compasso com o palito e a tachinha, enquanto que os outros materiais são utilizados para construir a figura a ser rotacionada, em seguida, o livro pede que o aluno reflita sobre duas questões sobre a atividade. A definição de rotação é dada a partir de suas propriedades e elementos. Por fim, é dado mais um exemplo.
4. Dando continuidade ao capítulo, temos o tópico "atividades" contendo dez questões sobre o conteúdo de isometria.

5. No tópico intitulado “tecnologias”, as isometrias são trabalhadas usando o software GeoGebra.
6. Em “retomando o que aprendeu” temos mais dez atividades sobre o conteúdo.
7. Encerrando o capítulo, temos: “Atualidade em Foco”, onde é trabalhado o tema “Educação ambiental – arte e lixo”, contém um texto, uma tirinha, e três atividades sobre o assunto.

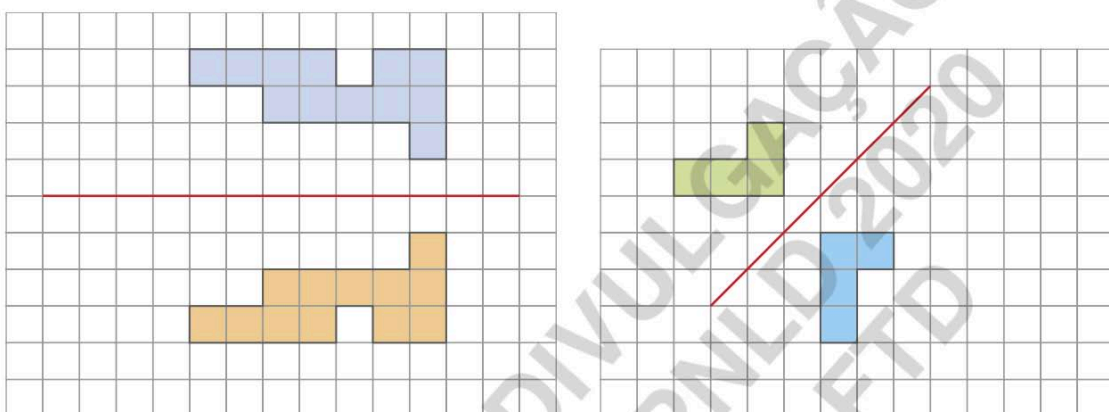
A estrutura do capítulo difere um pouco do que consideramos “tradicional” (em que começamos pela definição e depois exercitamos o que foi visto): os conceitos são introduzidos a partir de atividades cujos autores se referem como “pense e responda” e através das respostas dadas pelos alunos é que o conceito é construído. Simplificando, temos a seguinte estrutura: atividade, definição, exemplo, ou seja, o oposto da estrutura da coleção anterior (exemplo, definição, atividades). A estrutura seguida pelo livro, segue uma lógica que incentiva os estudantes a chegarem na definição da isometria, para que depois isso seja confirmado ou negado pelas definições e exemplos dados pelo livro em seguida.

Algo que vale a pena salientar é o fato de o livro não dar uma definição fechada do tipo “simetria é isso”, mas define através das propriedades e dos elementos que compõem a isometria:

Figura 30 - Definição de simetria axial, 7º ano, 'A Conquista da Matemática'

Quando duas imagens são reflexo uma da outra e esse reflexo se dá em relação a uma linha, dizemos que há **simetria de reflexão** e a linha é seu **eixo de reflexão** ou ainda que as figuras são **simétricas**.

Observe estes exemplos de simetria de reflexão:



Fonte: Giovanni e Castrucci, (2018, p. 87)

5.2.3 Modificações realizadas pela noosfera

O objetivo dessa seção é analisar as transformações sofridas pelo conhecimento em relação ao nosso saber de referência (seção 2.3). Nossa intenção é verificar se o objeto de ensino manteve a correspondência com o saber de referência.

Vamos iniciar nossa análise com o conceito de simetria axial:

- **Definição segundo Giovanni e Castrucci:**

Quando duas imagens são reflexo uma da outra e esse reflexo se dá em relação a uma linha, dizemos que há **simetria de reflexão** e a linha é seu **eixo de reflexão** ou ainda que as figuras são **simétricas**. (GIOVANNI; CASTRUCCI, 2018, p.

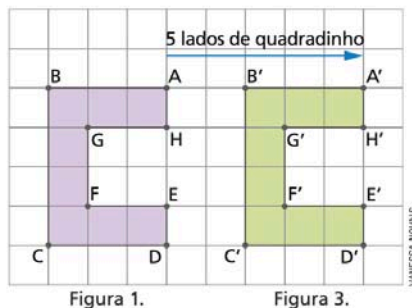
Os termos ‘mediatriz’, ‘imagem’, ‘segmento’, ‘função’ e ‘perpendicularidade’ foram omitidos, o que era esperado para esse nível de ensino porque os conteúdos em questão ainda não foram abordados. É utilizado um termo do cotidiano (reflexo) para substituir as noções omitidas. As modificações realizadas mantem a correspondência entre objeto de ensino e saber de referência.

Analisando a definição de simetria de translação, apresentamos a seguinte comparação:

• **Definição segundo Giovanni e Castrucci (2018):**

Figura 31 - Definição de translação, 7º ano, 'A Conquista da Matemática'

Vamos retomar a Figura 1 e observá-la com a Figura 3, ambas desenhadas na malha quadriculada.



O ponto A da Figura 1 tem, na Figura 3, o ponto A' como seu correspondente. Além disso, o ponto A está a cinco lados de quadradinho do ponto A'.

PENSE E RESPONDA

Resoluções na p. 298

1. Considerando os demais pontos destacados na Figura 1, a quantos lados de quadradinho de distância eles estão de seus correspondentes na Figura 3?

Todos os pontos da Figura 1 estão a cinco lados de quadradinho de distância de seu correspondente na Figura 3.

Observe que todos os pontos da Figura 1 tem seus correspondentes na Figura 3 em uma mesma direção (horizontal), seguindo um mesmo sentido (da esquerda para a direita) e a uma mesma distância (cinco lados de quadradinho), conservando a forma e o tamanho da figura original.

SAIBA QUE

Transladar é transferir para outro lugar.

Note que as duas imagens podem ser sobrepostas de uma maneira que elas coincidam, no entanto, diferentemente da simetria de reflexão, uma imagem não é reflexo da outra. Nesse caso, dizemos que as duas figuras são **simétricas** e que há entre elas uma **simetria de translação**.

Fonte – Giovanni e Castrucci (2018, p. 88)

A definição de translação foi “diluída” na ilustração, na atividade e no texto, dificultando um pouco a análise de forma objetiva, porém, consideramos tudo como definição. Foram omitidos os termos ‘função’, ‘imagem’, ‘segmento orientado’, ‘paralelogramo’ e ‘vetor’ pelos motivos apresentados anteriormente. Não identificamos divergências conceituais entre o objeto de ensino e o saber de referência.

Observando as definições de simetria de rotação, encontramos o seguinte:

• **Definição segundo Giovanni e Castrucci (2018):**

Figura 32 - Definição de rotação, 7º ano, 'A Conquista da Matemática'

Simetria de rotação

PENSE E RESPONDA

Resoluções na p. 299

1. Use lápis, uma folha de papel quadriculada, uma folha de papel sulfite, tesoura, um palito de sorvete, uma tachinha, régua e fita adesiva para realizar esta atividade.



Desenhe uma figura, recorte-a e fixe-a em um palito de sorvete. Usando uma tachinha, prenda uma extremidade do palito e desenhe o contorno da figura em uma folha.



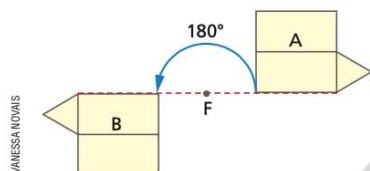
Gire o palito de sorvete e desenhe novamente o contorno da figura. Retire o palito e trace, a partir do ponto representado pela tachinha dois segmentos de reta: um até um vértice do primeiro desenho e outro até o vértice correspondente no segundo desenho.

- a) Obtenha a medida de comprimento dos dois segmentos de reta traçados e depois compare-os. **Os dois segmentos têm a mesma medida.**
- b) Faça, para os demais vértices, a mesma análise do item anterior. A qual conclusão podemos chegar? **A medida do comprimento de um segmento de reta é sempre igual quando comparada a do segmento formado pelo ponto correspondente e o ponto indicado pela tachinha.**

Note que as duas imagens obtidas podem ser sobrepostas de maneira que elas coincidam, embora não tenhamos simetria de reflexão nem simetria de translação.

Nesse caso, dizemos que as duas figuras são **simétricas** e que há entre elas uma **simetria de rotação**.

O ponto fixo ao redor do qual a figura gira (indicado pela tachinha) é chamado de **centro de rotação** e o giro dado nos dá a ideia do **ângulo de rotação**. Veja a representação a seguir:



- A Figura B é simétrica à Figura A por simetria de rotação, com ângulo de rotação de 180° no sentido anti-horário e centro de rotação no ponto F.

SAIBA QUE

Sentido horário é aquele que segue o sentido dos ponteiros de um relógio; sentido anti-horário é contrário ao sentido dos ponteiros do relógio.

Fonte – Giovanni e Castrucci (2018, p. 89)

Mais uma vez a definição é apresentada de forma bastante “diluída”. Os termos ‘função,’ ‘seno,’ ‘cosseno’ e ‘imagem’ não foram utilizados por fazerem parte de conteúdos propostos para níveis acima do 7º ano. Os sentidos do relógio foram utilizados como recursos didáticos. Não identificamos modificações que comprometessem a correspondência entre objeto de ensino e o saber de referência.

5.2.4 Análise da organização do conteúdo no livro do 8º ano

Daremos início agora a análise da organização do conteúdo no livro do 8º ano, com o objetivo de entender a estrutura e a lógica por trás da transposição feita pelos autores.

No volume do 8º da coleção 'A Conquista da Matemática', o conteúdo de simetrias está localizado no capítulo 7, último capítulo da unidade 6 intitulada 'Polígonos e transformações no plano'. O conteúdo de isometrias ficou organizado da seguinte forma:

1. Exemplo de reflexão com ilustração na malha quadriculada seguido de sua definição (ocupando meia página);
2. Exemplo de translação com ilustração na malha quadriculada seguido de sua definição (ocupando meia página);
3. Três exemplos de rotação ilustrados na malha quadriculada, contendo descrição de propriedades seguidos pela definição do conceito;
4. Composição de transformações (uma página dedicada a todos os tipos): os autores apresentam dois exemplos: o primeiro consiste em uma composição de rotação com reflexão, o segundo trata de uma translação seguida de uma rotação;
5. Na seção de atividades o livro propõe sete questões, sendo a maioria delas trabalhadas na malha quadriculada;
6. No tópico intitulado 'Tecnologias', é apresentada uma sequência de atividades para serem realizadas em um software de geometria dinâmica, trabalhando composição de transformações;
7. O conteúdo da unidade inteira (que inclui também polígonos) é revisado na seção 'Retomando o que aprendeu' e conta com doze atividades;
8. Encerrando o capítulo e a unidade, temos o tópico 'Atualidades em foco', apresentando um texto sobre educação para o consumo. Conta também com algumas atividades sobre o texto não relacionadas ao conteúdo de isometrias.

Os três primeiros pontos da estrutura se referem a revisão do conteúdo do ano anterior, não tendo sido aprofundada por não fazer parte das orientações da BNCC. A estrutura utilizada na revisão é mais simples e comum, consistindo em exemplo seguido da definição, diferente do volume anterior que iniciava com uma atividade.

Dos pontos 4 a 7, temos o conteúdo previsto pela BNCC para o 8º ano sobre composição de transformações. O conteúdo segue a mesma estrutura dos pontos 1, 2 e 3: exemplo seguido de definição e atividades.

5.2.5 Modificações realizadas pela noosfera

Comparando as definições trazidas pelo livro com as definições contidas do nosso referencial teórico, vamos analisar as transformações sofridas pelo conteúdo no processo de transposição realizado pela noosfera.

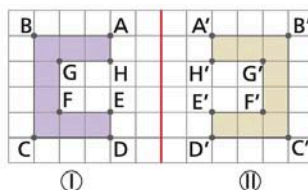
Iniciamos nossa análise pelo conceito de reflexão em relação a uma reta:

- **Definição segundo Giovanni e Castrucci (2018):**

Figura 33 - Definição de reflexão em relação a uma reta, A Conquista da Matemática, 8º ano.

Reflexão

Considere a figura representada a seguir. Podemos dizer que ② é a reflexão de ① em relação à linha vermelha.



Quando duas imagens são reflexo uma da outra e esse reflexo se dá em relação a uma linha, dizemos que há **simetria de reflexão** ou **simetria axial** e a linha é seu **eixo de reflexão** ou **eixo de simetria**.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 190)

Foram omitidos os termos ‘mediatriz’, ‘função’ e ‘perpendicularidade’ e o termo “reflexo” com sentido tirado do contexto cotidiano foi utilizado para descrever a equidistância dos pontos da figura em relação ao eixo de simetria. Apesar da substituição, o objeto de ensino ainda corresponde ao saber sábio de origem.

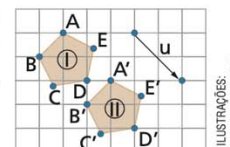
Comparando os conceitos de translação, temos o seguinte:

- **Definição segundo Giovanni e Castrucci (2018):**

Figura 34 - Definição de translação, A Conquista da Matemática, 8º ano.

Translação

O pentágono regular ① foi **transladado** na direção e sentido do vetor u , gerando o pentágono ②. Para transladar o pentágono, deslocamos os vértices A , B , C , D e E dois quadradinhos para a direita e, em seguida, dois quadradinhos para baixo, obtendo os pontos A' , B' , C' , D' e E' . Observe a figura ao lado:



SAIBA QUE

Transladar: transferir para outro lugar.

A **translação** é a transformação no plano que desloca todos os pontos de uma figura na mesma direção e sentido, preservando suas dimensões originais.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 190)

Os termos ‘função’, ‘segmento orientado’, ‘paralelogramo’ não foram utilizados na definição dada por Giovanni e Castrucci (2018) devido a programabilidade dos outros conteúdos. Não identificamos divergências entre o objeto de ensino e o saber sábio de origem.

Partindo para a análise da definição de rotação, temos a seguinte comparação:

- **Definição segundo Giovanni e Castrucci (2018):**

Figura 35 - Definição de rotação, A Conquista da Matemática, 8º ano.

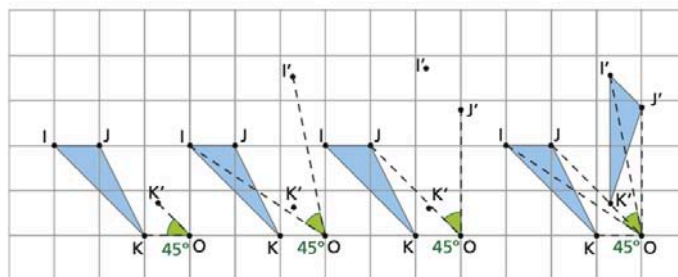
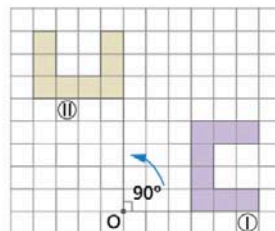
⦿ Rotação

Considere a figura a seguir. Nela, ① foi rotacionada em torno do ponto O , em 90° no sentido anti-horário, obtendo-se a figura ②.

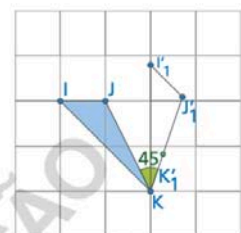
Para construir a rotação de uma figura, é preciso definir o ponto em torno do qual essa figura girará, ou seja, um **centro de rotação**. Também é preciso definir um ângulo e um sentido de rotação.

Abaixo temos a rotação do triângulo IJK , construído passo a passo, em torno do ponto O , com um ângulo de rotação de 45° , no sentido horário.

Observe como cada um dos vértices do triângulo foi unido ao centro de rotação e definiu, de acordo com a medida do ângulo de rotação e o sentido definido, os vértices da imagem $I'J'K'$.



O centro de rotação também pode ser um dos pontos da figura. Agora, vamos rotacionar o triângulo IJK , considerando o vértice K como centro de rotação. Faremos um giro de 45° no sentido horário:



A transformação geométrica **rotação** consiste em girar determinada figura, em torno de um ponto do plano, mantendo o ângulo de deslocamento.

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018, p. 191)

Como podemos perceber pela figura acima, os autores discutem alguns exemplos de rotação para poder defini-la, sendo assim decidimos analisar todo o desenvolvimento. Os termos 'função bijetora', 'seno' e 'cosseno' não foram utilizados pelos autores pelos mesmos motivos citados anteriormente. Os sentidos do relógio foram utilizados como recurso didático. A correspondência entre objeto de ensino e saber sábio foi mantida pelos autores.

5.3 Coleção Apoema Matemática

Analisamos aqui a 1ª edição publicada em 2018 e aprovada pelo PNLD 2020 – Ensino Fundamental anos finais.

Na apresentação da coleção, Longen (2018) comenta sobre o contexto atual de ensino, enfatizando a influencia da tecnologia no cotidiano dos alunos, e defende a necessidade de um equilíbrio entre a Matemática formativa e a informativa:

Além disso, no mundo atual, os motivos para ensinar Matemática talvez não sejam simplesmente os transcendentais explicitados por Platão, e sim as necessidades práticas de entender e utilizar com proveito as tecnologias modernas, atuar de forma plena no campo de trabalho, e nas inúmeras situações do cotidiano. Dessa forma, o sentido da Matemática deve ser um constante equilíbrio entre a Matemática formativa e a Matemática Informativa; a primeira mais mutável, referente a estruturação do pensamento, raciocínio dedutivo e a segunda mais estável, que serve de ferramenta para a atuação de tarefas específicas, voltada para o lado laboral. (LONGEN, 2018, p. v)

5.3.1 Organização do conteúdo da coleção

A coleção conta com 4 volumes para os anos finais do ensino fundamental, trabalhando o conteúdo de isometrias no 7º e 8º. O livro do 7º ano foi dividido em 8 unidades, contendo 27 capítulos no total, com o conteúdo de isometria sendo apresentado no último capítulo, intitulado “Transformações Geométricas”, da última unidade, que possui o tema “Geometria”. O livro do 8º ano também conta com 8 unidades, porém, contendo 24 capítulos no total, com o conteúdo de isometrias sendo abordado no capítulo 23 da última unidade.

Figura 36 - Unidade 8, 7º volume, Apoema.

■ ■ ■ UNIDADE 8 – Geometria.....	232
CAPÍTULO 25 – Circunferência	234
Construção de uma circunferência.....	234
• O comprimento de uma circunferência.....	238
De olho no legado – O número mais famoso do mundo	242
CAPÍTULO 26 – Construções de figuras geométricas.....	243
Construções com instrumentos geométricos.....	243
Conviver – Construção de objetos geométricos	248
CAPÍTULO 27 – Transformações geométricas	250
Translação, rotação e reflexão.....	250
Retomar	254
Gabarito	258
Referências	272

Fonte: Longen (2018, p. 7)

Figura 37 - Unidade 8, 8º volume, Apoema.

■ ■ ■ UNIDADE 8 – Construções geométricas e medidas.....	214
CAPÍTULO 22 – Construções geométricas	216
Construções de ângulos	216
Conviver – Ângulo e bissetriz.....	222
Construções de polígonos regulares.....	224
Conviver – Polígonos regulares.....	230
CAPÍTULO 23 – Transformações geométricas	232
Translação, rotação e reflexão.....	232
Conviver – Translação, rotação e reflexão	236
CAPÍTULO 24 – Volume e capacidade	238
Relacionando volume com capacidade	238
• Cálculo do volume de blocos retangulares	241
• Cálculo do volume de cilindro reto	243
Retomar	250
Gabarito	254
Referências	272

Fonte: Longen (2018, p. 7)

As unidades e capítulos foram organizados da seguinte maneira:

1. **Abertura da unidade:** as unidades são iniciadas com imagens e uma mini seção “antever”, que segundo o autor, conta com indagações que estimulam os alunos a acessarem seus conhecimentos prévios para formar hipóteses sobre os conteúdos que serão vistos na unidade;

2. Capítulos contendo a teoria e as seguintes mini seções:

- ‘atividades’ (tarefas individuais);
- ‘conviver’ (tarefas em grupo);
- ‘de olho no legado’ (textos complementares);
- ‘em foco’ (relaciona matemática a temas de artes, meio ambiente entre outros);
- ‘ampliar’ (recomendações de livros, sites, filmes, etc.);
- ‘viver’ (textos complementares com temas sociais e cotidianos);
- ‘zoom’ (suplementação dos conceitos estimulando conexões e a curiosidade);
- ‘caleidoscópio’ (página dupla que trabalha a interdisciplinaridade);
- e ‘retomar’ (composta por 2 páginas no final da unidade contendo atividades de revisão).

Analisando a programabilidade da aquisição do saber, vamos comparar a organização do conteúdo na coleção com as recomendações da BNCC:

Quadro 8 – programabilidade BNCC

BNCC	Coleção Apoema Matemática
<p>7º ano:</p> <p>(EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.</p> <p>(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou <i>softwares</i> de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.</p>	<p>7º ano:</p> <p>Noções de reflexão, translação e rotação no plano cartesiano. (EF07MA20).</p> <p>Nas orientações do manual do professor, é sugerido que os alunos pesquisem a relação do conceito com as obras do artista holandês M. C. Escher, correspondendo a habilidade EF07MA21 da BNCC.</p> <p>A construção com instrumentos de desenho, também contida na habilidade EF07MA21 da BNCC, aparece nas atividades propostas.</p>
<p>8º ano:</p> <p>(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de <i>softwares</i> de geometria dinâmica.</p>	<p>8º ano:</p> <p>Exemplos e atividades de reconhecimento e construção de composições de transformações geométricas. (EF08MA18)</p>

Fonte: Brasil (2018)

As habilidades propostas pela BNCC para o conteúdo de isometria foram contempladas pela coleção nos anos e ordem estabelecidos pelo documento, mantendo a programabilidade da aquisição do saber.

5.3.2 Análise da organização o conteúdo no livro do 7º ano

Vamos descrever aqui, de forma mais detalhada, a estrutura dos capítulos que tratam sobre isometria, com o objetivo de entender melhor a lógica por trás da transposição realizada.

- I. O capítulo é iniciado com um exemplo de translação onde são feitos alguns questionamentos, em seguida, é dado o conceito de translação. É orientado pelo manual que os alunos pesquisem sobre as obras do artista M. C. Escher

- buscando relacioná-las com o conteúdo. É mostrado também mais um exemplo de translação, sendo trabalhada com eixos coordenados;
- II. O conceito trabalhado em seguida é o de rotação, seguindo uma estrutura similar ao conceito anterior: exemplo com imagens, questionamentos sobre o exemplo dado e conceito de rotação;
 - III. A apresentação do conceito de reflexão segue o mesmo modelo do de rotação: exemplo com imagens, questionamentos sobre o exemplo e conceito de reflexão;
 - IV. Atividades: são propostas 8 questões sobre as simetrias trabalhadas.
 - V. Seção 'retomar': conta com 19 questões no total distribuída pelos assuntos trabalhados na unidade, sendo 6 sobre isometria.

A estrutura apresentada pelo livro não segue a ordem tradicional (definição, exemplo, atividades), ao invés disso, inicia com exemplos ilustrados e perguntas, conduzindo o aluno a chegar na definição. Então temos: exemplo, atividade, definição e exercícios.

5.3.3 Modificações realizadas pela noosfera

Vamos analisar agora as transformações realizadas pela noosfera dos conceitos apresentados no livro.

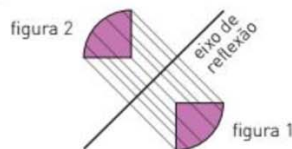
Muitas vezes, o conceito de uma determinada simetria encontra-se “diluído” em exemplos e imagens ao invés de serem resumidos numa única definição textual fechada, por conta disso, algumas definições do livro aparecem aqui como imagens.

Iniciamos nossa análise com o conceito de simetria axial ou reflexão:

- **Definição segundo Longen (2018):**

Figura 38 - Definição de simetria de reflexão, coleção Apoema, 7º ano.

Agora observe as figuras abaixo.



Responda:

1. Na construção anterior, a distância de um ponto qualquer da figura 1 até a reta é a mesma do ponto correspondente a ele na figura 2 em relação à reta? **Sim.**

Observe que a figura 2 pode ser obtida refletindo-se a figura 1 em relação à reta. Dizemos que a figura 2 é uma **reflexão** da figura 1.

Em uma **reflexão**, a figura preserva sua forma e suas medidas. A reta sob a qual a figura é refletida é denominada **eixo de reflexão**.

Fonte: Longen (2018, p. 252)

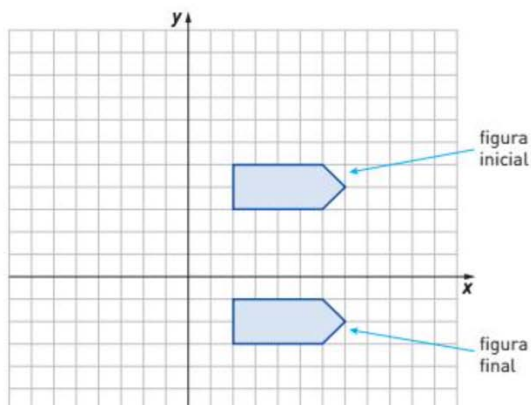
Os termos ‘função’, ‘mediatriz’, ‘perpendicular’ e ‘segmento’ foram supressos na definição dada por Longen (2018) embora suas noções apareçam de forma implícita na descrição dada pelo autor. As modificações realizadas não comprometeram a correspondência entre objeto de ensino e saber de referência.

Partindo para análise das definições de translação, encontramos a seguinte comparação:

- **Definição Segundo Longen (2018):** “A translação de uma figura geométrica corresponde ao deslocamento dessa figura para uma direção e uma distância estabelecidas.” (LONGEN, 2018, p. 250)

Figura 39 - Definição de translação, coleção Apoema, 7º ano.

Para fazermos uma translação, precisamos determinar a direção e a distância do deslocamento a ser feito. Por exemplo, observe no plano cartesiano a seguir que a figura desenhada foi transladada 6 unidades para baixo. Isso significa que cada elemento da figura inicial foi deslocado 6 unidades para baixo para se obter o elemento correspondente na figura final.



Fonte – Longen (2018, p. 251)

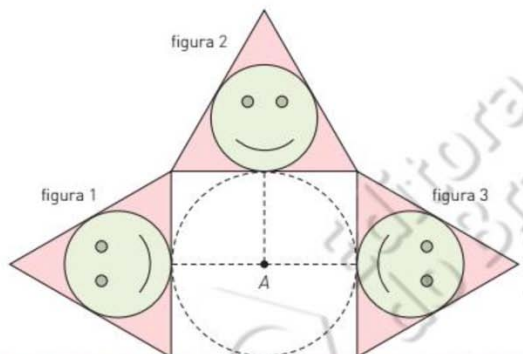
Os termos ‘função’, ‘imagem’, ‘paralelogramo’, ‘vetor’ e ‘segmento orientado’ foram supressos da definição dada pelo autor, embora algumas dessas noções estão presentes de forma implícita. Não identificamos deformações que comprometessem a correspondência do objeto de ensino com o saber de referência.

Finalizando as isometrias abordadas pelo capítulo temos o conceito de rotação. Comparando as definições trazidas pelo nosso referencial teórico com as presentes no livro, temos o seguinte:

- **Definição segundo Longen (2018):**

Figura 40 - Definição de rotação, coleção Apoema, 7º ano.

Observe outra composição criada por Mateus:



A figura 2 representa a figura 1 girada em um ângulo de 90° para a direita, enquanto a figura 3 representa a figura 2 girada em um ângulo de 90° para a direita. Todas as figuras estão situadas à mesma distância do ponto A.

Responda:

1. Qual é a relação entre a figura 1 e a figura 2? E entre a figura 2 e a figura 3?
2. As medidas e a forma dos desenhos foram alteradas? Não.

A figura 1 foi rotacionada em torno do ponto A para que pudéssemos obter a figura 2. Da mesma forma, a figura 2 foi rotacionada em torno do ponto A para obtermos a figura 3.

Em uma **rotação**, a figura mantém sua forma e suas medidas. O ponto em torno do qual a figura é rotacionada é denominado centro de rotação.

Fonte: Longen (2018, p. 251)

Os termos ‘função’, ‘seno’, ‘cosseno’, ‘bijetora’ e ‘imagem’ foram supressos da definição dada pelo livro devido ao fato de não terem sido trabalhadas ainda, embora as noções relacionadas a alguns desses termos são apresentadas de forma implícita.

A correspondência entre objeto de ensino e saber de referência foi mantida pelo autor.

5.3.4 Análise da organização do conteúdo no livro do 8º ano

O capítulo 23 sobre Transformações Geométricas encontra-se na unidade 8 e foi estruturado da seguinte forma:

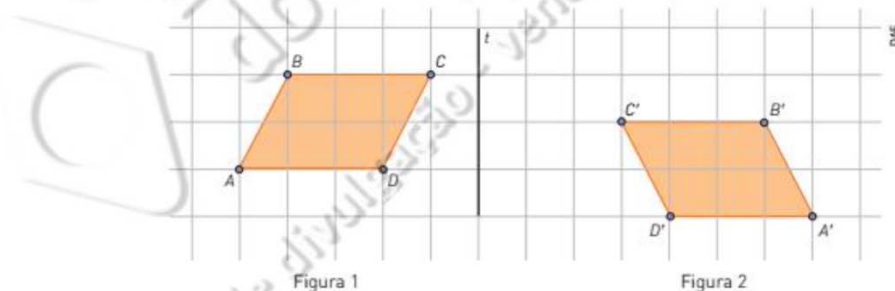
1. O capítulo é iniciado com um texto de título “Translação, rotação e reflexão” e uma imagem explicando o texto, que ilustra um exemplo de composição de reflexões. Algumas perguntas são feitas ao aluno no final.

2. Em seguida é apresentada uma outra situação de forma similar: texto com imagem explicativa com um exemplo de composição de transformações (translação e reflexão) e perguntas sobre a situação ilustrada.

Figura 41 - Situação de composição de isometrias, coleção Apoema, 8º ano.

1ª situação

Luiza e Carlos, utilizando um *software* de Geometria, tinham que representar duas figuras, das quais a segunda figura seria uma transformação geométrica da primeira. Observe o que eles fizeram:



Ao apresentar o resultado da atividade à turma, explicaram que a figura 2 representa uma reflexão da figura 1 em relação ao eixo t , seguida por uma translação após essa reflexão.

Resposta: **Sim, porque tanto a reflexão quanto a translação mantêm as medidas e os ângulos da figura inicial.**

1. As medidas dos segmentos da figura 1 foram mantidas para a composição da figura 2? Por que?
2. É possível obter a figura 2 realizando apenas 1 transformação geométrica (rotação, reflexão ou translação) na figura 1? Por que? **Não, pois foi realizada uma composição de transformações geométricas.**

Fonte: Longen (2018, p. 232)

3. Na próxima página são apresentadas mais duas situações no mesmo formato da página anterior, a primeira abordando reflexões sucessivas e a segunda rotações sucessivas.
4. Na seção de atividades, são propostas sete questões envolvendo tanto construções no papel quanto problemas de múltipla escolha.
5. A página seguinte às atividades, finalizando o capítulo, o livro apresenta uma seção intitulada “conviver”, nela são propostas atividades para serem realizadas no *software* GeoGebra. As atividades contam com tutoriais ilustrados e abordam composições de isometrias.

A estrutura apresentada no capítulo difere do tradicional (teoria seguida de prática) exigindo uma atitude mais ativa do aluno desde a introdução até as atividades, pois trabalha com perguntas para reflexão nos textos introdutórios, sendo difícil assim separar teoria e prática.

5.3.5 Modificações realizadas pela noosfera

Partimos agora para a análise das transformações realizadas pela noosfera no processo de transposição para o livro didático. O capítulo que estamos analisando parte do princípio que os alunos já viram o conteúdo de isometria antes, sendo assim não apresenta definições fechadas e formais das isometrias, aparecendo muitas vezes “diluídas” em textos, exercícios e imagens, quando isso acontecer, colocaremos figuras com todo o contexto. Utilizando nosso capítulo teórico sobre isometria como aproximação do saber de referência, temos a seguinte comparação:

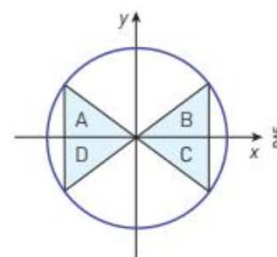
- **Definição Segundo Longen (2018):**

Figura 42 - Definição de reflexão axial, coleção Apoema, 8º ano.

Paula e Ricardo estavam construindo diversas figuras utilizando *softwares* geométricos. Em determinado momento, produziram uma imagem formada por um círculo e quatro triângulos congruentes. Observe-a.

Por meio do triângulo A, Paula e Ricardo obtiveram os triângulos B, C e D fazendo apenas reflexões em torno do eixo x e do eixo y . Após a construção, escreveram as seguintes explicações sobre as construções obtidas.

- Triângulo B – pode ser obtido do triângulo A fazendo-se apenas uma reflexão em relação ao eixo y .
- Triângulo C – pode ser obtido do triângulo B fazendo-se uma reflexão em relação ao eixo x .
- Triângulo D – pode ser obtido do triângulo C fazendo-se apenas uma reflexão em torno do eixo y .



Observando os triângulos representados, explique:

1. como obter o triângulo C por meio do triângulo A; *Resposta pessoal.*
2. como obter o triângulo D por meio do triângulo B. *Resposta pessoal.*

Fonte: Longen (2018)

Os termos ‘transformação’, ‘função’, ‘mediatriz’ e ‘perpendicularidade’ não foram utilizadas para apresentar propriedades de reflexão trabalhadas no livro. O termo ‘reflexo’, palavra do nosso cotidiano, é utilizada para substituir os termos omitidos. Apesar das modificações, o conceito de reflexão trabalhado pelo autor manteve a correspondência com o saber de referência.

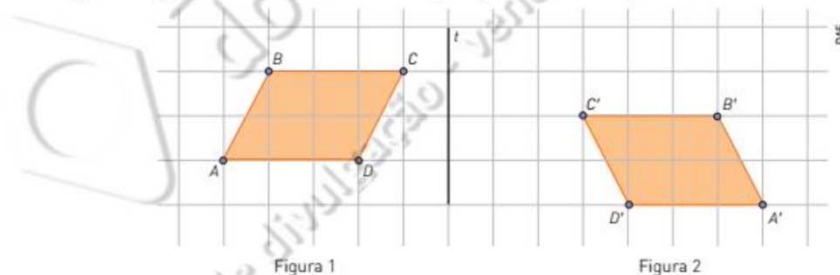
Partindo para a análise das modificações da transposição do conceito de translação, temos a seguinte comparação:

- **Definição segundo Longen (2018):**

Figura 43 - Definição de translação, coleção Apoema, 8º ano.

1ª situação

Luiza e Carlos, utilizando um *software* de Geometria, tinham que representar duas figuras, das quais a segunda figura seria uma transformação geométrica da primeira. Observe o que eles fizeram:



Ao apresentar o resultado da atividade à turma, explicaram que a figura 2 representa uma reflexão da figura 1 em relação ao eixo t , seguida por uma translação após essa reflexão.

- Responda:
1. As medidas dos segmentos da figura 1 foram mantidas para a composição da figura 2? Por que?
2. É possível obter a figura 2 realizando apenas 1 transformação geométrica [rotação, reflexão ou translação] na figura 1? Por que?
- Respostas: **Sim, porque tanto a reflexão quanto a translação mantêm as medidas e os ângulos da figura inicial.**
Não, pois foi realizada uma composição de transformações geométricas.

Fonte: Longen (2018, p. 232)

Em termos teóricos, a translação é abordada de forma superficial por motivos já explicados no início dessa seção de análise. Vamos tomar o exemplo apresentado na figura acima como definição.

As noções de ‘função’, ‘imagem’, ‘paralelogramo’ e ‘vetor’ não foram utilizadas no exemplo dado pelo livro por pertencerem a conteúdos que ainda não foram trabalhados nesse nível de ensino. As modificações realizadas pela noosfera mantiveram a correspondência entre o objeto de ensino e o saber sábio de origem.

Analisando as modificações da definição de rotação, temos o seguinte:

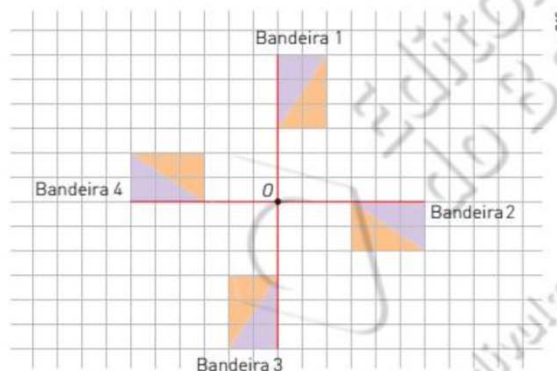
- **Definição segundo Longen (2018):**

Figura 44 – Definição de rotação, coleção Apoema, 8º ano.

3ª situação

Utilizando uma malha quadriculada, Pedro e Ana ficaram encarregados de representar um movimento de rotação. Para isso, iniciaram a construção em um ponto da malha quadriculada (ponto O) e desenharam a bandeira 1. Tendo-a como base, representaram as bandeiras 2, 3 e 4, conforme a figura a seguir.

1. Resposta pessoal.
Sugestão: bandeira 2 é obtida da bandeira 1 por uma rotação de 90° no sentido horário em torno do ponto O ; a bandeira 3 é obtida da bandeira 1 por uma rotação de 180° no sentido horário em torno do ponto O ; a bandeira 4 é obtida da bandeira 1 por uma rotação de 270° no sentido horário em torno do ponto O .



Observando os triângulos representados, explique:

1. Explique como obter a bandeira 2, a bandeira 3 e a bandeira 4 por meio de rotações no mesmo sentido.
2. Com base na bandeira 3, qual é a bandeira que pode ser obtida por uma rotação de 270° no sentido anti-horário? **A bandeira 4.**

Em uma rotação, as figuras permanecem com as mesmas medidas.

Fonte: Longen (2018, p. 233)

Assim como no caso da reflexão e translação, o livro não dá uma definição fechada de rotação e trabalha apenas revisando o conteúdo, sendo assim, tomemos o exemplo teórico/prático acima como definição.

Os termos ‘função’, ‘transformação’, ‘seno’ e ‘cosseno’ foram supressos do exemplo apresentado por Longen (2018) pelos mesmos motivos apresentados anteriormente. Os sentidos do relógio foram utilizados como recurso didático. Não identificamos divergências conceituais entre o objeto de ensino e o saber sábio de origem.

5.4 Coleção Matemática – Realidade e Tecnologia

A coleção analisada aqui é a 1ª edição de 2018 que foi aprovada pelo PNLD 2020 – anos finais do Ensino Fundamental.

Na nota de apresentação do manual do professor, o autor comenta sobre as mudanças que vem ocorrendo na sociedade especialmente no que diz respeito aos avanços tecnológicos:

As novas tecnologias da informação e comunicação, por exemplo, produziram profundas mudanças nas relações interpessoais e na democratização da informação. A internet, os programas de computador e aplicativos de *smartphones* e *tablets* tornaram possível o acesso a conhecimentos que, até pouco tempo atrás, eram restritos a determinados grupos de estudiosos. Todas essas mudanças afetaram diretamente a educação, sobretudo na sala de aula. (SOUZA, 2018)

Sendo assim, o autor afirma que os fatores citados foram levados em consideração no processo de elaboração da coleção e defendem a importância do estudo da matemática na formação de cidadãos aptos a viver em sociedade.

5.4.1 Organização do conteúdo na coleção

A coleção possui 4 volumes para os anos finais do Ensino Fundamental (6º, 7º, 8º e 9º ano), e assim como nas outras coleções, por recomendação da BNCC, contempla o conteúdo de isometrias nos volumes 7 e 8, sendo trabalhado nas 6ª e 2ª unidades, respectivamente. Ambos os volumes contem com 8 unidades no total.

Como estão organizadas as unidades:

1. **Abertura da unidade:** em página dupla, contém imagens, infografias e textos sobre o conteúdo da unidade;
2. **Integrando com:** segundo o autor (SOUZA, 2018), proporciona o estudo da matemática relacionado a outros componentes curriculares;
3. **Você cidadão:** de acordo com Souza (2018), propões o desenvolvimento do pensamento crítico de forma a inferir sobre temas sociais voltados para ética e cidadania.
4. **Você conectado:** atividades com uso de softwares como GeoGebra e Calc (planilha);
5. **O que estudei:** revisão da unidade;

Nas figuras a seguir temos a organização dos conteúdos na unidade em cada volume:

Figura 45 - Unidade 6, volume 7, coleção Matemática - Realidade e Tecnologia

UNIDADE	
6	PROPORCIONALIDADE E SIMETRIA 162
Proporcionalidade	164
Razão	164
Atividades	166
Proporção	169
Atividades	170
Relação entre grandezas	171
Atividades	173
Atividades	179
Simetria	181
Simetria de reflexão	181
Atividades	184
Simetria de translação	186
Atividades	187
Simetria de rotação	189
Atividades	190
INTEGRANDO COM ARTE E LÍNGUA PORTUGUESA Perfeita simetria	192
VOCÊ CONECTADO Figuras simétricas – reflexão em relação	
a um eixo	194
Figuras simétricas – rotação em relação	
a um ponto	196
O QUE ESTUDEI	198

Fonte: Souza (2018, p. 10)

Figura 46 - Unidade 2, volume 8, coleção Matemática - Realidade e Tecnologia

UNIDADE	
2	ÂNGULOS E SIMETRIA 34
Ângulos	36
Ângulos notáveis	37
Atividades	38
Distância entre um ponto e uma reta	40
Bissetriz de um ângulo	40
Mediatriz de um segmento de reta	42
Atividades	44
Simetria	46
Simetria de reflexão	46
Atividades	48
Simetria de rotação	50
Atividades	52
Simetria de translação	54
Atividades	56
VOCÊ CIDADÃO Acessibilidade	58
VOCÊ CONECTADO Construindo mediatriz e bissetriz	
Construindo figuras simétricas	
por translação	62
O QUE ESTUDEI	64

Fonte: Souza (2018, p.8)

No 7º volume, além da parte teórica e das atividades, temos uma seção “Integrando com” que contextualiza o conteúdo de isometria com a língua portuguesa. Ambos os volumes trabalham as isometrias com softwares de geometria dinâmica na seção “Você conectado”. No volume 8, a seção “Você cidadão” é voltada para o conteúdo de ângulos, não aborda as isometrias.

Comparando a programabilidade da aquisição do saber da coleção com a BNCC, temos o seguinte quadro:

Quadro 9 – programabilidade BNCC 3

BNCC	Coleção Matemática – Realidade e Tecnologia
<p>7º ano:</p> <p>(EF07MA20) Reconhecer e representar no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.</p> <p>(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou <i>softwares</i> de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Simetrias nas artes; 2. Simetrias na malha quadriculada; 3. Atividades que contemplam eixos coordenados, dobradura, e simetria em imagens; 4. Atividades com software GeoGebra que contemplam construção de simetrias no plano cartesiano.
<p>8º ano:</p> <p>(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de <i>softwares</i> de geometria dinâmica.</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Simetrias nas artes; 2. Simetrias na malha quadriculada; 3. Simetria de rotação com instrumentos de desenho; 4. Atividades que contemplam malha quadriculada, simetria de imagens e artes; 5. Atividades no GeoGebra.

Fonte: Brasil (2018)

Observando o quadro acima, percebemos que o volume do 7º ano contém todas as habilidades pedidas para o conteúdo de isometria, embora a habilidade (EF7MA20) apareça apenas nas atividades, não apresentando abordagem teórica sobre o assunto. No 8º volume da coleção temos apenas alguns exercícios de composição de transformações, mas o livro também não contém nenhum estudo teórico sobre esse tema.

5.4.2 Análise da organização do conteúdo no livro do 7º ano

1. Simetria de reflexão: texto sobre reflexão na obra do artista Rubem Valentim;
2. Passo a passo de como recriar a obra descrita no texto com dobradura e materiais de pintura;
3. Definição de simetria axial a partir da imagem construída;
4. Diversos exemplos de figuras conhecidas (letras do alfabeto, formas geométricas, bandeiras, etc.) com seus eixos de simetria axial destacados;
5. Passo a passo de como traçar a simetria axial de um trapézio na malha quadriculada;
6. Atividades sobre simetria axial;
7. Simetria de translação: texto sobre a simetria em projetos arquitetônicos, com uma fotografia de uma calçada com padrão geométrico na cidade de São Paulo;
8. Definição de translação a partir do exemplo dado no texto;
9. Exemplos de translação na malha quadriculada;
10. Atividades sobre translação;
11. Simetria de rotação: texto sobre a rotação nas obras do artista M. C. Escher contendo a definição de rotação;
12. Exemplos de rotações na malha quadriculada;
13. Atividades sobre rotação;
14. Texto sobre simetria na língua portuguesa: traz exemplos na obra de Leminski e de Augusto Campos, seguido de um exemplo de simetria nas construções de Oscar Niemeyer. O final da seção conta com atividades relacionadas aos exemplos apresentados;
15. “Você conectado”: atividades para serem realizadas no GeoGebra com perguntas no final da seção;

16. “O que estudei?”: revisão do capítulo;

A parte teórica do conteúdo é composta por muitos exemplos, o autor introduz o conceito de cada simetria mostrando casos na arte, na arquitetura e na malha quadriculada, em seguida são passadas as atividades. A estrutura é bastante similar aos livros analisados aqui até o momento, ao invés de começar com definições fechadas, o livro as desenvolve a partir de exemplos com imagens. Possui uma estrutura que começa com atividades mais passivas, onde o aluno apenas processa os exemplos dados, e depois trabalha as atividades que exigem uma postura mais ativa do aluno.

5.4.3 Modificações realizadas pela noosfera

Vamos analisar, a partir do nosso referencial teórico, se houve acréscimos, supressões, criações didáticas ou deformações no conteúdo.

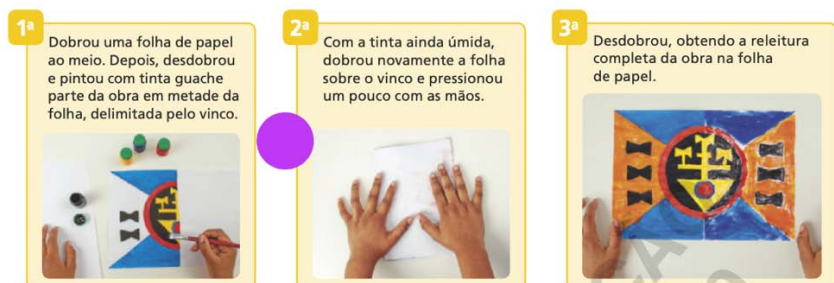
Assim como no livro anterior, as definições das simetrias não aparecem delimitadas em um texto, aparecem distribuídas nos exemplos apresentados, sendo assim, utilizaremos imagens quando necessário.

Começamos a análise pelo conceito de simetria axial:

- **Definição segundo Souza (2018):**

Figura 47 - Definição de simetria axial, 7º ano, coleção Matemática - Realidade e Tecnologia

Observe como um aluno fez uma releitura dessa obra.



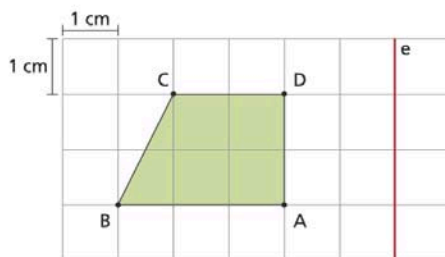
Ao dobrarmos essa folha de acordo com o vinco, observamos que as partes da imagem se sobrepõem. Nesse caso, dizemos que essa imagem apresenta **simetria de reflexão** em relação a um eixo. O vinco formado corresponde ao **eixo de simetria**.

Fonte: Souza (2018, p. 181)

A definição foi dividida em duas páginas. Na primeira, temos um exemplo prático com instrumentos artísticos e dobradura (figura 47). Na figura 48, temos um exemplo na malha quadriculada.

Figura 48 - Definição de simetria axial, 7º ano, coleção Matemática - Realidade e Tecnologia pt.2

Também podemos obter uma figura simétrica à outra em relação a um eixo. Observe o quadrilátero ABCD e o eixo *e* indicados em uma malha quadriculada.



Fonte: Souza (2018, p. 183)

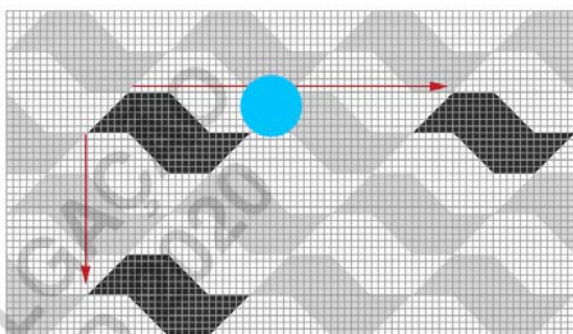
Observamos que os termos ‘função’, ‘mediatriz’, ‘perpendicular’ e ‘transformação’ não foram utilizados na definição dada no livro de Souza (2018). A dobradura é usada para ilustrar a equidistância dos pontos simétricos em relação ao eixo. As modificações realizadas pelo autor não prejudicaram a correspondência entre objeto de ensino e saber sábio.

Comparando as definições de translação temos o seguinte:

- **Definição segundo Souza (2018):**

Figura 49 - Definição de translação, 7º ano, coleção Matemática - Realidade e Tecnologia

Esse padrão pode ser simulado a partir da reprodução e do deslocamento de figuras, conforme segue.



Essa reprodução e esse deslocamento apresentam a ideia de **simetria de translação**. Nesse tipo de transformação, o tamanho e o formato da figura são mantidos e seu deslocamento ocorre de acordo com uma distância, direção e sentido.

Fonte: Souza (2018, p.186)

Os termos ‘função’, ‘paralelogramo’, ‘vetor’ e ‘imagem’ não foram utilizados na definição dada pelo livro. A seta foi usada para ilustrar a noção de vetor, descrevendo o deslocamento da figura, e os termos “distância”, “direção” e “sentido” são utilizados para conceituar a translação. Não identificamos divergências que prejudicassem a correspondência entre o objeto de ensino e o saber sábio.

Encerrando a análise, temos o conceito de rotação

- **Definição segundo Souza (2018):**

Figura 50 - Definição de rotação, 7º ano, coleção Matemática - Realidade e Tecnologia

Simetria de rotação

Maurits Cornelis Escher (1898-1972) foi um artista holandês que empregava em suas obras padrões e efeitos visuais com base em diferentes ideias matemáticas. Observe uma de suas obras.

Nessa obra, podemos identificar que, a partir de uma de suas partes, é possível obter as demais realizando rotações em torno de um ponto. Isso corresponde à ideia de **simetria de rotação**.

Na simetria de rotação, cada ponto da figura é rotacionado de acordo com determinado ângulo e sentido em torno de um ponto **O**, chamado **centro de rotação**.

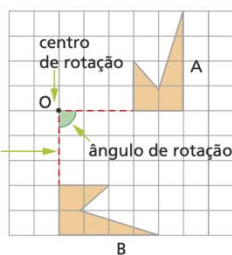
Observe um exemplo.



ESCHER, M. C. **Senda da vida II**. 1958. Xilogravura, 37 cm x 37 cm. Coleção particular.

A figura **B** foi obtida a partir da figura **A**, por meio de simetria de rotação de 90° , em torno do ponto **O**, no sentido horário.

A distância da figura ao centro de rotação não se altera.



! Na simetria de rotação, o giro pode ocorrer no sentido horário ou anti-horário.

Fonte: Souza (2018, p. 189)

Os termos ‘função bijetora’, ‘transformação’, ‘seno’ e ‘cosseno’ foram supressas na definição dada pelo livro por fazerem parte de conteúdos que ainda não foram trabalhados nesse nível de ensino. Os sentidos do relógio aparecem como um recurso didático. As modificações realizadas pela noosfera mantiveram a correspondência entre objeto de ensino e saber sábio.

5.4.4 Análise da organização do conteúdo no livro do 8º ano

Vamos detalhar a organização do conteúdo de isometrias no 8º volume com o objetivo de entender melhor a lógica por trás da estrutura montada pelo autor.

1. Texto sobre simetria de reflexão que acompanha uma ilustração artística com padrões de caleidoscópio (o ilustrador não é especificado);
2. Exemplos de eixos de simetria axial em placas de trânsito;
3. Exemplo de simetria axial na malha quadriculada;
4. Atividades sobre simetria axial;
5. Texto sobre simetria de rotação com imagens do símbolo internacional da reciclagem como exemplo;
6. Definição de rotação com exemplos ilustrados;
7. Construção da simetria de rotação de um trapézio utilizando materiais de desenho;
8. Atividades sobre rotação;
9. Texto sobre simetria de translação que traz como exemplo uma obra do artista Hélio Oiticica;
10. Definição de rotação com exemplos na malha quadriculada;
11. Passo a passo de como realizar uma translação na malha quadriculada;
12. Atividades sobre translação;
13. “Você conectado”: atividade de construção de figuras simétricas por translação no software GeoGebra, seguida de questões sobre a atividade realizada;
14. “O que estudei?”: revisão da unidade.

O volume do 8º ano segue uma estrutura bastante similar ao volume que o antecede. Texto com exemplos na arte e na malha quadriculada, seguido de exemplos de construção e atividades. Apesar de não apresentar uma estrutura muito tradicional pois mistura definições e exemplos, possui uma divisão entre teoria, que exige uma postura menos ativa do aluno, e prática, que exige uma postura mais ativa.

5.4.5 Modificações realizadas pela noosfera

Comparando as definições do livro às do nosso referencial teórico, vamos analisar se houveram acréscimos, criações didáticas, supressões ou deformações dos conceitos trabalhados.

Começamos pela análise das definições de simetria de reflexão/axial:

- **Definição segundo Souza (2018):**

Quando uma reta divide uma figura de maneira que, ao ser dobrada sobre essa reta, as partes obtidas são idênticas por sobreposição, dizemos que essa figura apresenta simetria de reflexão em relação a um eixo. Essa reta corresponde ao eixo de simetria. (SOUZA, 2018, p. 46)

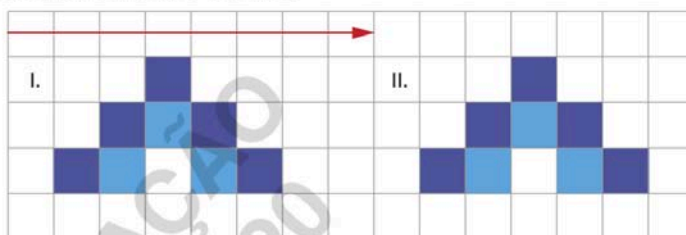
Os termos ‘transformação por isometria’, ‘mediatriz’, ‘função’ e ‘perpendicular’ foram supressos na definição dada pelo livro e substituídas pela comparação a ação de “dobradura” e “sobreposição”. A ideia de dobradura para ilustrar, ensinar ou definir uma simetria axial é bastante utilizada para ilustrar a equidistância entre pontos simétricos ao eixo. Não identificamos modificações que comprometessem a correspondência entre objeto de ensino e saber sábio.

Comparando as definições de translação, temos o seguinte:

- **Definição segundo Souza (2018):**

Figura 51 - Definição de translação, coleção Matemática - Realidade e Tecnologia, 8º ano.

Na simetria de translação, o tamanho e o formato da figura são mantidos e seu deslocamento ocorre de acordo com a distância, a direção e o sentido, que podem ser indicados por meio de uma seta. Nesse tipo de transformação cada ponto da figura original é deslocado da mesma maneira. Observe o exemplo.



A figura II foi obtida ao deslocar a figura I conforme a distância (8 unidades), a direção (horizontal) e o sentido (da esquerda para a direita) indicados pela seta.

Fonte: Souza (2018, p. 54)

Os termos 'vetor', 'segmento orientado' e 'paralelogramo' foram omitidas da definição dada pelo livro. As palavras "distância", "direção" e "sentido" foram utilizadas para apresentar a noção de vetor. A correspondência conceitual entre objeto de ensino e saber sábio foi mantida apesar das modificações.

Para finalizar, temos a análise das definições de rotação:

- **Definição segundo Souza (2018):**

Na simetria de rotação, cada ponto da figura é rotacionado de acordo com determinado ângulo e sentido em torno de um ponto O, chamado centro de rotação. O giro pode ocorrer no sentido horário (para a direita) ou anti-horário (para esquerda). (SOUZA, 2018, p. 50)

Os termos 'função bijetora', 'seno' e 'cosseno' não foram utilizados na definição dada por Souza (2018). Os sentidos do relógio aparecem como um recurso didático. Não identificamos divergências entre o objeto de ensino e o saber sábio que comprometessem a correspondência entre eles.

5.5 Conclusão da análise

Um dos nossos objetivos era investigar a transposição da programabilidade da aquisição do saber da BNCC para os livros didáticos. Ao observar a estrutura das coleções e comparando-as com as habilidades previstas pelo documento, percebemos que de maneira geral, todos os livros seguem a ordem e os conteúdos nos mesmos anos recomendados pela BNCC, porém, acreditamos que é importante chamar atenção para o fato de que nem todas as habilidades propostas possuem abordagem teórica, com alguns temas sendo trabalhados apenas em algumas atividades.

A forma como os capítulos sobre isometria está organizada é bastante similar em todos os livros, a parte teórica das simetrias é feita com apoio de exemplos ilustrados e em seguida são passadas algumas atividades para fixar os conceitos. Alguns livros iniciam o conteúdo com perguntas que estimulam a reflexão do aluno sobre as propriedades das isometrias, diferindo bastante da forma como o conteúdo é conceituado nos artigos acadêmicos da nossa revisão de literatura e do nosso referencial teórico, que se utiliza de várias notações matemáticas relacionadas ao conteúdo de função, fechadas em um único parágrafo.

Nosso outro objetivo era investigar as transformações sofridas pelos conceitos de simetria axial, translação e rotação pela ação da noosfera. Para realizar essa análise, utilizamos nosso referencial teórico sobre isometrias, baseado em livros e artigos acadêmicos, como uma aproximação do saber de referência, comparando-o às definições trabalhadas nas coleções.

Em relação ao conceito de simetria axial, encontramos uma divergência conceitual na definição de um dos livros do 8º ano, onde o autor excluía pontos coincidentes com o eixo de simetria da transformação. Encontramos também uma deformação similar na definição do conceito de reflexão em relação a um ponto, em que o livro excluía a imagem de pontos coincidentes com o centro de reflexão.

Um recurso didático muito presente na conceituação da simetria axial foi substituir termos e notações matemáticas pela palavra “reflexão” do cotidiano, ou utilizar a noção de dobradura, para ilustrar a equidistância dos pontos simétricos em relação ao eixo. Termos como ‘função’, ‘imagem’, ‘perpendicular’ e ‘mediatriz’ não foram utilizadas na maioria das definições dadas, porém em muitos casos, suas noções apareceram de forma implícita.

Nas definições de translação, os termos ‘função’, ‘segmento orientado’, ‘vetor’ e ‘paralelogramo’ foram omitidos na maioria das conceituações apresentadas. As modificações realizadas pela noosfera mantiveram a correspondência entre objeto de ensino e saber sábio.

No que diz respeito ao conceito de rotação, observamos que a maioria dos livros utiliza os sentidos do relógio (horário e anti-horário) para indicar o sentido de rotação, como um recurso didático. Os termos ‘função’, ‘seno’, ‘cosseno’ e imagem foram omitidos da maioria das definições dadas. Não identificamos divergências entre o objeto de ensino e o saber sábio que comprometessem a correspondência entre eles.

6 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS À LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Esse capítulo foi dedicado a análise dos livros didáticos de acordo com a teoria dos Campos Conceituais. Os critérios de análise, que consistem de cinco elementos no total, são focados na variedade de situações apresentadas pelos autores ao abordar o conteúdo de isometrias. Como já mencionamos anteriormente, não seria possível avaliar quais esquemas os alunos mobilizariam ao se deparar com as situações presentes no livro, mas sabemos que quanto maior for a diversidade de situações, maior a variedade de esquemas que podem ser utilizados/desenvolvidos.

Primeiro, apresentaremos os quadros com os dados coletados por coleção (itens 6.1 a 6.4), e no final do capítulo, trazemos a análise dos dados (item 6.5).

No capítulo anterior, iniciamos a análise de cada coleção com uma breve apresentação sobre suas propostas, como estamos trabalhando com os mesmos livros, pularemos essa etapa para não nos repetirmos desnecessariamente, sendo assim, focaremos nas análises dos elementos.

6.1 Coleção Projeto Araribá

O primeiro elemento consiste em observar quais os conceitos associados ao conteúdo de simetria. O quadro a seguir reúne os conceitos encontrados nos livros do 7º e 8º ano:

Quadro 10 – conceitos associados ao conteúdo de isometria, coleção Projeto Araribá

Volume	Conceitos encontrados
7º ano	Transformação geométrica, imagem, quadrilátero, triângulo, losango, quadrado, plano cartesiano, coordenadas, pentágono, polígono, vértices, intersecção, vetor, ângulo, reta, centro, segmento.
8º ano	Transformação geométrica, congruência, pentágono, imagem, mediatriz, hexágono, polígono, perpendicularidade, ponto médio, quadrilátero, vetor, triângulo, coordenadas, reta, segmento, centro.

Fonte: elaborado pelos autores

O elemento 2 de análise consiste em observar a variedade de situações em relação ao tipo de problema enunciado. Determinamos na nossa metodologia os seguintes tipos: construção de figura/propriedades, reconhecimento de

figura/propriedades, descrição do processo/justifique sua resposta. O quadro seguinte reúne as quantidades por tipo de enunciado por volume.

Quadro 11 – análise elemento 4: tipo de problema, Projeto Araribá

Tipo de problema	7º ano	8º ano
Construção de figura e/ou propriedade	29	16
Reconhecimento de figura e/ou propriedade	20	8
Descrição/observação do processo/justifique sua resposta/ etc	11	3

Fonte: elaborado pelos autores

Percebemos que é dada uma maior ênfase nas atividades de construção e reconhecimento da figura ou de propriedades da transformação por simetria.

Apresentamos a seguir, o estudo dos significantes (elemento 3). Elaboramos um quadro para cada isometria, começando pela axial. Lembrando que a quantidade total de questões do quadro abaixo vai diferir daquelas computadas na tabela anterior, porque algumas questões não consistem na construção ou identificação de figuras simétricas (questões teóricas) e também porque alguns conjuntos de questões se referem a mesma figura, sendo assim não as contamos mais de uma vez:

Quadro 12 – característica das questões sobre simetria axial, Projeto Araribá

Característica	7º ano	8º ano
Posição do eixo em relação às margens da folha	Paralelo: 9 Oblíquo: 1 Livre: 6	Paralelo: 6 Oblíquo: 1 Livre: 0
Posição do eixo em relação a figura (se toca, corta ou não entra em contato com a figura)	Toca: 0 Corta: 1 Não entra em contato: 9 Livre: 6	Toca: 0 Corta: 0 Não entra em contato: 7 Livre: 0
Propriedades da figura (curva, retilínea, mista)	Ponto: 0 Curva: 0 Retilínea: 12 Mista: 4 Livre: 0	Ponto: 0 Curva: 0 Retilínea: 7 Mista: 0 Livre: 0
Presença de malha quadriculada	Presente: 11 Ausente: 5 Livre: 0	Presente: 7 Ausente: 0 Livre: 0

Fonte: elaborado pelos autores

Quadro 13 – característica das questões sobre simetria em relação a um ponto, Projeto Araribá

Característica	7º ano	8º ano
Posição do centro em relação a figura (centro contido na figura, tocando a figura ou afastado da figura)	Contido: 0 Tocando: 0 Afastado: 7 Livre: 1	Contido: 0 Tocando: 0 Afastado: 3 Livre: 0
Presença de malha quadriculada	Presente: 7 Ausente: 1 Livre: 0	Presente: 3 Ausente: 0 Livre: 0
Propriedades da figura (curva, retilínea, mista)	Ponto: 0 Curva: 0 Retilínea: 8 Mista: 0 Livre: 0	Ponto: 0 Curva: 0 Retilínea: 3 Mista: 0 Livre: 0

Fonte: elaborado pelos autores

Quadro 14 – característica das questões sobre simetria de rotação, Projeto Araribá

Característica	7º ano	8º ano
Posição do centro em relação a figura (centro contido na figura, tocando a figura ou afastado da figura)	Contido: 0 Tocando: 3 Afastado: 15 Livre: 2	Contido: 0 Tocando: 1 Afastado: 3 Livre: 0
Presença de malha quadriculada	Presente: 11 Ausente: 7 Livre: 2	Presente: 4 Ausente: 0 Livre: 0
Propriedades da figura (curva, retilínea, mista)	Ponto: 0 Curva: 1 Retilínea: 16 Mista: 3 Livre: 0	Ponto: 0 Curva: 0 Retilínea: 4 Mista: 0 Livre: 0

Fonte: elaborado pelos autores

Quadro 15 – característica das questões sobre simetria de translação, Projeto Araribá

Característica	7º ano	8º ano
Orientação do vetor (paralelo ou oblíquo às margens da folha)	Paralelo: 7 Oblíquo: 3 Livre: 3	Paralelo: 3 Oblíquo: 3 Livre: 0
Presença de malha quadriculada	Presente: 8 Ausente: 5 Livre: 0	Presente: 6 Ausente: 0 Livre: 0
Propriedades da figura (curva, retilínea, mista)	Ponto: 0 Curva: 1 Retilínea: 9 Mista: 3 Livre: 0	Ponto: 0 Curva: 0 Retilínea: 6 Mista: 0 Livre: 0

Fonte: elaborado pelos autores

O elemento 4 consiste em comparar as situações propostas pela BNCC com as apresentadas pela coleção: quais situações propostas pelo documento aparecem nos livros didáticos? Quais estão ausentes?

Os quadros a seguir reúnem as situações propostas pelo documento para o ensino das simetrias e a presença destas nos livros do 7º e 8º ano:

Quadro 16 – situações da BNCC presentes no livro do 7º ano, coleção Projeto Araribá

Situações presentes na BNCC relacionadas às simetrias	7º ano
(EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.	Presente
(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho.	Presente
(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando softwares de geometria dinâmica.	Presente
(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.	Presente

Fonte: Brasil (2018)

Quadro 17 – situações da BNCC presentes no livro do 8º ano, coleção Projeto Araribá

Situações presentes na BNCC relacionadas às simetrias	8º ano
(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação) com uso de instrumentos de desenho.	Presente
(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação) com uso de softwares de geometria dinâmica.	Ausente

Fonte: Brasil (2018)

Dando continuidade a nossa análise temos as situações presentes no manual do professor (elemento 5) no livro do 7º ano:

- Roda de conversa sobre situações cotidianas em que os alunos puderam identificar as transformações geométricas;
- Pedir que os alunos respondam à pergunta feita no box “para investigar” com suas próprias palavras;
- É orientado que o professor desenhe figuras que aparentam ser simétricas em relação a uma reta, porém não são e pedir que os alunos justifiquem o motivo pelo qual elas não são simétricas;
- Pedir que os alunos desenhem no caderno outras figuras que apresentam mais de um eixo de simetria e compartilhar os desenhos com os colegas de classe;
- Pedir que os alunos descrevam a localização dos pontos A', B', C', D' e E', em relação ao ponto O, na malha quadriculada;
- Perguntar aos alunos se é possível obter o triângulo A'B'E' apresentado no livro, a partir de reflexões em relação aos eixos;
- Pedir aos alunos que construam uma rotação utilizando instrumentos de desenho da forma como é mostrada no passo a passo no livro, em seguida, pedir aos alunos que compartilhem seus desenhos com os colegas e comparem as medidas da figura objeto com a figura imagem;
- Pedir aos alunos que eles observem a reprodução da obra de arte reconhecendo as transformações geométricas presentes;
- Pesquisar obrar de arte em que é possível reconhecer a presença de algumas transformações geométricas estudadas;
- Formar parceria com professores de Arte ou história para propor um trabalho sobre como as transformações geométricas estão presentes em várias manifestações culturais e artísticas.

No manual do professor do livro do 8º ano, encontramos as seguintes situações:

- Peça aos alunos descrevam o vetor da translação exemplificada;
- Apresente exemplos de reflexões sucessivas no quadro em que os eixos de simetria não são paralelos;

- Pedir aos alunos que construam, utilizando um software de Geometria dinâmica, reflexões sucessivas de uma mesma figura em relação a dois ou mais pontos diferentes;
- Propor aos alunos que, utilizando um software de Geometria dinâmica, rotacionem as figuras sucessivamente em torno de um mesmo ponto e em torno de pontos diferentes;
- Pedir aos alunos que realizem as atividades da seção especificada com apoio de um software de Geometria dinâmica.

Podemos perceber que algumas situações propostas pelo manual diferem bastante daquelas apresentadas no restante do livro. O manual conta com atividades coletivas, não tão exploradas no restante do livro, e com mais atividades que utilizam softwares de Geometria dinâmica. Observamos também a adição de atividades de pesquisa e projetos com parceria de professores de outras disciplinas.

6.2 Coleção A Conquista da Matemática

O primeiro elemento de análise consiste em observar os conceitos associados ao conteúdo de isometria apresentado nos livros. O quadro a seguir reúne os conceitos encontrados:

Quadro 18 – conceitos associados ao conteúdo de isometria, coleção A Conquista da Matemática

Volume	Conceitos encontrados
7º ano	Ângulo, imagem, vértice, circunferência, polígono, vetor, segmento de reta, plano cartesiano, triângulo, retângulo, coordenadas, transformação geométrica, quadrado, quadrante, abscissas, ordenadas, figura geométrica.
8º ano	Polígonos, transformações geométricas, figura geométrica, imagem, plano, pentágono regular, vetor, ângulo, triângulo, vértice, reta, coordenadas, ordenadas, plano cartesiano.

Fonte: elaborado pelos autores

O próximo elemento de análise consiste em observar a diversidade de situações de acordo com enunciado nas questões propostas. O quadro a seguir reúne as quantidades encontradas em cada volume.

Quadro 19 – tipos de problema, coleção A Conquista da Matemática

Tipo de problema	7º ano	8º ano
Construção de figura e/ou propriedade	15	9
Reconhecimento de figura e/ou propriedade	20	4
Descrição/observação do processo/justifique sua resposta, etc.	15	1

Fonte: elaborado pelos autores

Os quadros seguintes reúnem os dados do elemento 3 que se preocupa com os significantes apresentados na abordagem do conteúdo:

Quadro 20 – características das questões propostas de simetria axial, A Conquista da Matemática

Característica	7º ano	8º ano
Posição do eixo em relação às margens da folha	Paralelo: 16 Oblíquo: 3 Livre: 1	Paralelo: 5 Oblíquo: 1 Livre: 0
Posição do eixo em relação a figura	Toca: 9 Corta: 0 Não intercepta: 10 Livre: 1	Toca: 0 Corta: 0 Não intercepta: 5 Livre: 1
Propriedades da figura	Ponto: 0 Curva: 2 Retilínea: 16 Mista: 2 Livre: 0	Ponto: 0 Curva: 0 Retilínea: 5 Mista: 0 Livre: 1
Presença da malha quadriculada	Presente: 6 Ausente: 10 Livre: 4	Presente: 6 Ausente: 0 Livre: 0

Fonte: elaborado pelos autores

Quadro 21 – características das questões propostas de translação, A Conquista da Matemática

Característica	7º ano	8º ano
Orientação do vetor	Paralelo: 5 Oblíquo: 0 Livre: 0	Paralelo: 2 Oblíquo: 1 Livre: 0
Presença de malha quadriculada	Presente: 4 Ausente: 1 Livre: 0	Presente: 3 Ausente: 0 Livre: 0
Propriedades da figura	Ponto: 0 Curva: 0 Retilínea: 5 Mista: 0 Livre: 0	Ponto: 0 Curva: 0 Retilínea: 2 Mista: 0 Livre: 1

Fonte: elaborado pelos autores

Quadro 22 – características das questões propostas de rotação, A Conquista da Matemática

Característica	7º ano	8º ano
Posição do centro em relação a figura	Contido: 0 Tocando: 2 Afastado: 3 Livre: 0	Contido: 0 Tocando: 1 Afastado: 2 Livre: 0
Presença de malha quadriculada	Presente: 3 Ausente: 2 Livre: 0	Presente: 3 Ausente: 0 Livre: 0
Propriedades da figura	Ponto: 0 Curva: 0 Retilínea: 4 Mista: 1 Livre: 0	Ponto: 0 Curva: 0 Retilínea: 3 Mista: 0 Livre: 0

Fonte: elaborado pelos autores

O quadro a seguir foi dedicado à comparação das situações propostas pela BNCC com as apresentadas na coleção (elemento 4):

Quadro 23 – situações da BNCC presentes no livro do 7º ano, coleção A Conquista da Matemática

Situações presentes na BNCC relacionadas às simetrias	7º ano
(EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.	Presente
(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho.	Presente
(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando softwares de geometria dinâmica.	Presente
(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.	Presente

Fonte: Brasil (2018)

Quadro 24 – situações da BNCC presentes no livro do 8º ano, coleção A Conquista da Matemática

Situações presentes na BNCC relacionadas às simetrias	8º ano
(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação) com uso de instrumentos de desenho.	Presente
(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação) com uso de softwares de geometria dinâmica.	Presente

Fonte: Brasil (2018)

Finalizando a coleta dos dados, temos a análise das situações presentes no manual do professor do livro do 7º e 8º ano (elemento 5):

Coleção A Conquista da Matemática 7º ano:

- Levar material de consulta para sala de aula para que os alunos trabalhem em grupos procurando figuras que tenham simetria;
- Jogo online onde o aluno pode gerar diferentes imagens em um mosaico;
- Pedir aos alunos que desenham um polígono e a reta que será o eixo de reflexão e troquem de desenho com um colega para que cada um construa a imagem refletida no desenho criado pelo outro, depois, reunir os alunos para discutir as construções realizadas para que no final cada dupla apresente o seu trabalho;
- Distribuir folhas com desenhos de figuras para que eles procurem simetrias;
- Pedir aos alunos que usem um pequeno espelho plano, colocando-o sobre a linha do eixo de simetria para que eles observem a figura simétrica;
- Entregar figuras planas que não sejam polígonos para que os alunos tracem eixos de simetria quando existirem;
- Propor figuras para que os alunos construam translações, auxiliando-os na construção dos ângulos (com o transferidor) e das medidas;
- Pedir que os alunos acessem o link disponibilizado para conhecer um pouco mais sobre as obras do artista Maurits C. Escher;

- Propor que os alunos construam rotações de figuras utilizando régua e compasso, auxiliando-os no traçado das circunferências. A atividade pode ser em dupla;
- Pedir que os alunos acessem o link disponibilizado contendo simulações de como ocorrem as transformações geométricas;
- Pedir que os alunos realizem as atividades dessa seção em duplas para que possam discutir sobre as estratégias de resolução, consolidando a compreensão dos alunos;
- Perguntar aos alunos o que é necessário para determinar uma translação e uma rotação;
- Encorajar os alunos a pesquisarem sites e vídeos que ensinem a explorar os recursos disponíveis nos softwares de Geometria dinâmica;
- Pedir que os alunos façam um fluxograma dos conteúdos trabalhados na unidade;
- Conversar com os alunos sobre os acertos e erros dos exercícios;

Coleção A Conquista da Matemática 8º ano:

- Pedir que os alunos realizem as simetrias presentes na página utilizando régua, compasso e papel quadriculado;
- Questionar os alunos sobre onde podemos ver exemplos de transformações geométricas no nosso cotidiano;
- Reunir os alunos em duplas e pedir que reproduzam figuras presentes no texto no papel quadriculado;
- Apresentar aos alunos algumas obras do artista M. C. Escher;
- Apresentar aos alunos um simulador de rotação desenvolvido pela Universidade Federal do Rio de Janeiro disponível online;
- Incentivar os alunos a testarem outras composições de transformações com outras figuras utilizando software de Geometria dinâmica;
- Orientar os alunos a retomarem no livro os conceitos que precisam lembrar antes de realizar as atividades presentes na página, fazendo a correção e retomando explicações quando necessário.

O manual do professor sugere atividades em grupos, projetos de pesquisa e experimento práticos, situações que não aparecem tanto no restante do livro, além disso, incentiva os alunos a realizarem mais exercícios utilizando software de Geometria dinâmica e a refletirem sobre o conteúdo através de questionamentos para serem discutidos oralmente.

6.3 Coleção Apoema Matemática

O quadro a seguir reúne os conceitos associados ao conteúdo de isometria apresentados nos livros da coleção, como previsto pelo nosso primeiro elemento:

Quadro 25 – conceitos associados ao conteúdo de isometrias, coleção Apoema Matemática

Volume	Conceitos encontrados
7º ano	Triângulo, círculo, plano cartesiano, retângulo, circunferência, diâmetro, reta, ângulo, isósceles, trapézios.
8º ano	Círculo, triângulo, congruência, transformação geométrica, ângulo, plano cartesiano, coordenadas, abscissas, ordenadas, centro, quadrado, equilátero, retângulo, diagonal, figura geométrica, vértice, trapézio, vetor.

Fonte: elaborado pelos autores

Os próximos quadros reúnem os tipos de situação apresentados nas questões propostas, o primeiro reúne as situações categorizadas pelo tipo de problema enunciado (elemento 2), enquanto os quadros seguintes focam nos significantes apresentados na abordagem do conteúdo (elemento 3):

Quadro 26 – tipos de problema, coleção Apoema

Tipo de problema	7º ano	8º ano
Construção de figura e/ou propriedade	4	7
Reconhecimento de figura e/ou propriedade	19	13
Descrição/observação do processo/justifique sua resposta, etc.	3	8

Fonte: elaborado pelos autores

Quadro 27 – características das questões proposta sobre simetria axial, coleção Apoema Matemática

Característica	7º ano	8º ano
Posição do eixo em relação às margens da folha	Paralelo: 8 Oblíquo: 2 Livre: 1	Paralelo: 5 Oblíquo: 0 Livre: 1
Posição do eixo em relação a figura	Toca: 4 Corta: 0 Não intercepta: 6 Livre: 1	Toca: 0 Corta: 0 Não intercepta: 5 Livre: 1
Propriedades da figura	Ponto: 0 Curva: 2 Retilínea: 5 Mista: 4 Livre: 0	Ponto: 2 Curva: Retilínea: 3 Mista: 0 Livre: 1
Presença da malha quadriculada	Presente: 3 Ausente: 8 Livre: 0	Presente: 4 Ausente: 1 Livre: 1

Fonte: elaborado pelos autores

Quadro 28 – características das questões sobre translação

Característica	7º ano	8º ano
Orientação do vetor	Paralelo: 4 Oblíquo: 2 Livre: 0	Paralelo: 1 Oblíquo: 5 Livre: 0
Presença de malha quadriculada	Presente: 2 Ausente: 4 Livre: 0	Presente: 5 Ausente: 1 Livre: 0
Propriedades da figura	Ponto: 0 Curva: 1 Retilínea: 3 Mista: 2 Livre: 0	Ponto: 3 Curva: 0 Retilínea: 3 Mista: 0 Livre: 0

Fonte: elaborado pelos autores

Quadro 29 – características das questões sobre rotação, coleção Apoema Matemática

Característica	7º ano	8º ano
Posição do centro em relação a figura	Contido: 0 Tocando: 0 Afastado: 3 Livre: 0	Contido: 3 Tocando: 3 Afastado: 1 Livre: 0
Presença de malha quadriculada	Presente: 0 Ausente: 3 Livre: 0	Presente: 2 Ausente: 5 Livre: 0
Propriedades da figura	Curva: 0 Retilínea: 1 Mista: 2 Livre: 0	Curva: 0 Retilínea: 7 Mista: 0 Livre: 0

Fonte: elaborado pelos autores

O quadro a seguir foi dedicado à comparação das situações propostas pela BNCC com as apresentadas na coleção (elemento 4):

Quadro 30 – situações da BNCC presentes no livro do 7º ano, coleção Apoema Matemática

Situações presentes na BNCC relacionadas às simetrias	7º ano
(EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.	Presente
(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho.	Presente
(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando softwares de geometria dinâmica.	Ausente
(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.	Presente

Fonte: Brasil (2018)

Quadro 31 – situações da BNCC presentes no livro do 8º ano, coleção Apoema Matemática

Situações presentes na BNCC relacionadas às simetrias	8º ano
(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação) com uso de instrumentos de desenho.	Presente
(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação) com uso de softwares de geometria dinâmica.	Presente

Fonte: Brasil (2018)

Para finalizar a coleção, temos as situações encontradas nos manuais do professor dos livros do 7º e 8º ano (elemento 5):

Coleção Apoema 7º ano:

- Sugerir que os alunos façam pesquisa sobre artistas que utilizam transformações geométricas em suas obras;
- Perguntar aos alunos em que situações do dia a dia os conceitos estudados aparecem;
- Utilizar dobradura para achar a simetria da figura presente na página;
- Instruir os alunos a elaborarem fluxogramas relacionando os conceitos aprendidos.

Coleção Apoema 8º ano:

- Se possível, levar os alunos ao laboratório de informática para que façam as bandeiras em um software de Geometria dinâmica;
- Pedir que os alunos criem um carimbo para realizar rotações criando um padrão;
- Pedir que os alunos desenhem no caderno outras rotações com os triângulos apresentados na página;
- Propor que os alunos realizem composições de transformações utilizando um software de Geometria dinâmica;

O manual do professor dessa coleção apresenta menos sugestões, porém ainda sim, variadas. Propõe experimentos práticos, discussões orais sobre o conteúdo, atividades de pesquisa, elaboração de fluxogramas e sugere mais atividades com uso de software de Geometria dinâmica.

6.4 Coleção Matemática Realidade e Tecnologia

O quadro a seguir reúne as informações pertinentes ao elemento 1 de análise que diz respeito aos conceitos associados à isometria:

Quadro 32 – conceitos associados ao conteúdo de isometria, coleção Matemática Realidade e Tecnologia

Volume	Conceitos encontrados
7º ano	Quadrilátero, plano cartesiano, triângulo, coordenadas, quadrado, vértice, pentágonos, polígono, centro, ângulo, transformação geométrica.
8º ano	Reta, equidistância, hexágono, vértice, segmento, quadrilátero, transformação geométrica, ângulo, centro, semirreta, triângulo, pentágono.

Fonte: elaborado pelos autores

Os próximos elementos de análise consistem em observar a diversidade de situações nas questões propostas apresentadas na coleção, o elemento 2 se preocupa com os enunciados das questões, enquanto que o elemento 3 se preocupa com os significantes apresentados. Os quadros a seguir reúnem os dados dos elementos 2 e 3 respectivamente:

Quadro 33 – tipos de problema proposto, coleção Matemática Realidade e Tecnologia

Tipo de problema	7º ano	8º ano
Construção de figura e/ou propriedade	11	6
Reconhecimento de figura e/ou propriedade	28	23
Descrição/observação do processo/justifique sua resposta	3	4

Fonte: elaborado pelos autores

Quadro 34 – característica das questões sobre reflexão, coleção Matemática Realidade e Tecnologia

Característica	7º ano	8º ano
Posição do eixo em relação às margens da folha	Paralelo: 8 Oblíquo: 2 Livre: 0	Paralelo: 4 Oblíquo: 0 Livre: 1
Posição do eixo em relação a figura	Toca: 5 Corta: 0 Não intercepta: 5 Livre: 0	Toca: 1 Corta: 0 Não intercepta: 3 Livre: 1
Propriedades da figura	Ponto: 0 Curva: 0 Retilínea: 7 Mista: 3 Livre: 0	Ponto: 0 Curva: 0 Retilínea: 4 Mista: 1 Livre: 0
Presença da malha quadriculada	Presente: 4 Ausente: 6 Livre: 0	Presente: 4 Ausente: 1 Livre: 0

Fonte: elaborado pelos autores

Quadro 35 – característica das questões sobre translação, coleção Matemática Realidade e Tecnologia

Característica	7º ano	8º ano
Orientação do vetor	Paralelo: 2 Oblíquo: 2 Livre: 1	Paralelo: 3 Oblíquo: 3 Livre: 0
Presença de malha quadriculada	Presente: 5 Ausente: 0 Livre: 0	Presente: 5 Ausente: 1 Livre: 0
Propriedades da figura	Ponto: 0 Curva: 0 Retilínea: 4 Mista: 1 Livre: 0	Ponto: 0 Curva: 0 Retilínea: 6 Mista: 0 Livre: 0

Fonte: elaborado pelos autores

Quadro 36 – característica das questões sobre rotação, coleção Matemática Realidade e Prática

Característica	7º ano	8º ano
Posição do centro em relação a figura	Contido: 1 Tocando: 1 Afastado: 9 Livre: 0	Contido: 0 Tocando: 3 Afastado: 4 Livre: 0
Presença de malha quadriculada	Presente: 9 Ausente: 2 Livre: 0	Presente: 2 Ausente: 5 Livre: 0
Propriedades da figura	Ponto: 0 Curva: 0 Retilínea: 9 Mista: 2 Livre: 0	Ponto: 0 Curva: 0 Retilínea: 3 Mista: 4 Livre: 0

Fonte: elaborado pelos autores

Os quadros a seguir reúnem as situações da BNCC presentes nos livros do 7º e 8º ano respectivamente (elemento 4):

Quadro 37 – situações da BNCC presentes no livro do 7º ano, Matemática Realidade e Tecnologia

Situações presentes na BNCC relacionadas às simetrias	7º ano
(EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.	Presente
(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho.	Presente
(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando softwares de geometria dinâmica.	Presente
(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.	Presente

Fonte: Brasil (2018)

Quadro 38 – situações da BNCC presentes no livro do 8º ano, Matemática Realidade e Tecnologia

Situações presentes na BNCC relacionadas às simetrias	8º ano
(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação) com uso de instrumentos de desenho.	Presente
(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação) com uso de softwares de geometria dinâmica.	Ausente

Fonte: Brasil (2018)

Por fim, temos as situações encontradas nos manuais do professor nos livros do 7º e 8º ano respectivamente (elemento 5):

Coleção Matemática Realidade e Tecnologia 7º ano:

- Conversar com os alunos sobre o significado da palavra simetria;
- Pedir que eles expliquem através de imagens o que eles entendem por simetria;
- Sugerir que eles pesquisem o significado em um dicionário;
- Se possível, juntamente a um professor da disciplina de Artes, propor aos alunos que façam a releitura de uma obra de arte do mesmo artista apresentado, utilizando a ideia de simetria;
- Propor aos alunos que desenhem outras figuras em que seja possível identificar pelo menos um eixo de simetria, em seguida, peça que troquem com o colega para que eles identifiquem a simetria no desenho do outro;
- Entregar uma malha quadriculada aos alunos e pedir que desenhem a figura de um polígono qualquer nomeando os vértices desse polígono. Depois pedir que desenhem um eixo de simetria, em seguida, auxilie-os na construção da figura simétrica do polígono;
- Promover uma roda de conversa com os alunos, questionando-os se já viram calçadas com padrões geométricos similares ao apresentado na página;
- Propor aos alunos que façam uma releitura da calçada de São Paulo em uma malha quadriculada com régua e lápis de cor. Pedir que desenhem uma figura geométrica e depois auxilia-los na construção das translações;
- Questionar os alunos: caso o sentido do exemplo apresentado na página seja anti-horário, qual será o ângulo de rotação da figura A para se obter a figura B;

- Sugerir aos alunos que acessem o site disponibilizado para conhecer mais obras de arte que apresentam simetria;
- Compor um esquema na lousa com os alunos, relacionando os conceitos indicados aprendidos no capítulo. Retomar os conceitos que os alunos sentirem mais dificuldade.

Coleção Matemática Realidade e Tecnologia 8º ano:

- Propor aos alunos que desenhem figuras em que seja possível identificar eixos de simetria, em seguida, pedir que troquem o desenho com outros alunos para que identifiquem os eixos de simetria. Outra sugestão: distribuir papéis com malhas quadriculadas e pedir que desenhem um polígono qualquer e um eixo de simetria, por fim, eles devem trocar de desenho com o colega para que o outro construa a figura simetria do polígono desenhado;
- Pedir que os alunos levem embalagens de produtos para a sala de aula, nas quais seja possível identificar o símbolo internacional da reciclagem. Outra sugestão: pedir que os alunos pesquisem alguns produtos de suas residências que contenham esse símbolo;
- Conversar com os alunos sobre a importância de saber o que cada símbolo representa;
- Pedir que eles apresentem outros símbolos que sejam utilizados no dia a dia;
- Disponibilizar para os alunos o site indicado para que possam visualizar mais obras do artista Maurits Cornelis Escher;
- Pedir que os alunos leiam sobre a vida do artista Hélio Oiticida. Se julgar interessante, colaborar com um professor da disciplina de artes ao realizar a atividade;
- Construir na lousa, com os alunos, um esquema relacionando os conceitos trabalhados no capítulo. Retomar algum conteúdo caso os alunos apresentem dificuldade através de um estudo dirigido com a turma;

O manual conta com atividades de pesquisa, discussões orais sobre o conteúdo e projetos feitos com a parceria de um professor de artes. Apresenta muitas

situações onde o professor questiona os alunos sobre as propriedades estudadas e sugere mais exercícios práticos para desenvolver os conceitos.

6.5 Análise dos dados

Nas seções anteriores coletamos os dados das 4 coleções selecionadas de acordo com a nossa metodologia. Reunimos as informações de todos os nossos critérios de análise e os organizamos por volume (7º e 8º ano) nos quadros a seguir.

Reunimos no quadro abaixo, todas os conceitos utilizados na abordagem do conteúdo de simetria pelos livros didáticos do 7º e 8º ano. Os conceitos foram similares em todos os livros coletados. Observando os termos encontrados, podemos concluir que existe uma ligação entre o estudo das simetrias e o estudo de polígonos e geometria analítica, o que é coerente com as recomendações da BNCC que propõem o estudo das transformações geométricas no plano cartesiano.

Quadro 39 – conceitos relacionados ao conteúdo de isometria por volume

Volume	Conceitos encontrados
7º ano	Transformação geométrica, imagem, quadrilátero, triângulo, losango, quadrado, plano cartesiano, coordenadas, pentágono, polígono, vértices, interseção, vetor, ângulo, reta, centro, segmento, circunferência, quadrante, abscissas, ordenadas, figura geométrica, diâmetro, isósceles, trapézio.
8º ano	Transformação geométrica, congruência, pentágono, imagem, mediatriz, hexágono, polígono, perpendicularidade, ponto médio, quadrilátero, vetor, triângulo, coordenadas, reta, segmento, centro, figura geométrica, plano, ordenadas, plano cartesiano, diagonal, trapézio, equidistância, semirreta.

Fonte: elaborado pelos autores

Um dos nossos critérios de análise consiste em observar os tipos de enunciado das questões propostas. Em ambos os volumes, percebemos que é dado um foco maior para as questões de construção e reconhecimento de figura ou propriedade simétrica, enquanto que as questões mais “abertas”, que exigem que os alunos reflitam sobre a atividade e elaborem suas próprias respostas, compõem menos de 20% dos tipos de problema.

Quadro 40 – tipo de problema por volume

Tipo de problema	7º ano	8º ano
Construção de figura e/ou propriedade	59 (33,14%)	38 (37,25%)
Reconhecimento de figura e/ou propriedade	87 (48,87%)	48 (47,05%)
Descrição/observação do processo/justifique sua resposta, etc.	32 (17,97%)	16 (15,68%)

Fonte: elaborado pelos autores

Os quadros a seguir contém as informações sobre os significantes das simetrias apresentadas/solicitadas nas questões propostas (elemento 4). Percebemos que a grande maioria dos problemas sobre simetria axial trabalham com o eixo paralelo às margens da folha, não explorando muitas situações com eixo de reflexão oblíquo. Em relação a posição do eixo em relação a figura, temos que a maioria, especialmente nos livros do 8º ano, trabalham com eixos afastados das figuras, não dando muita atenção para situações onde o eixo corta a figura. Notamos também que existe um equilíbrio maior entre as características das questões nos livros do 7º ano em comparação com os do 8º ano.

Quadro 41 – características das questões sobre simetria axial por volume

Característica	7º ano	8º ano
Posição do eixo em relação às margens da folha	Paralelo: 41 (71,92%) Oblíquo: 8 (14,04%) Livres: 8 (14,04%)	Paralelo: 20 (83,33%) Oblíquo: 2 (8,33%) Livres: 2 (8,33%)
Posição do eixo em relação a figura	Toca: 18 (31,58%) Corta: 1 (1,74%) Não intercepta: 30 (52,63%) Livres: 8 (14,04%)	Toca: 1 (4,17%) Corta: 0 Não intercepta: 20 (83,33%) Livres: 3 (12,5%)
Propriedades da figura	Ponto: 0 Curva: 4 (7,02%) Retilínea: 40 (70,18%) Mista: 13 (22,81%) Livres: 0	Ponto: 2 (8,33%) Curva: 0 Retilínea: 19 (79,17%) Mista: 1 (4,17%) Livres: 2 (8,33%)
Presença de malha quadriculada	Presente: 24 (42,11%) Ausente: 29 (50,88%) Livres: 4 (7,02%)	Presente: 21 (87,5%) Ausente: 2 (8,33%) Livres: 1 (4,17%)

Fonte: elaborado pelos autores

Apenas uma coleção apresentou o conteúdo de simetria em relação a um ponto, o que faz sentido pois seu estudo não é especificado pela BNCC. No que diz respeito a posição do centro de reflexão em relação a figura, percebemos que quase todas as

questões trabalham com esse elemento afastado do objeto a ser refletido. A malha quadriculada está presente em quase 100% das questões sobre essa simetria e não encontramos nenhuma questão proposta que trabalhasse com figuras curvas.

Quadro 42 – características das questões sobre simetria em relação a um ponto por volume

Característica	7º ano	8º ano
Posição do centro em relação a figura	Contido: 0 Tocando: 0 Afastado: 7 (87,5%) Livre: 1 (12,5%)	Contido: 0 Tocando: 0 Afastado: 3 (100%) Livre: 0
Presença de malha quadriculada	Presente: 7 (87,5%) Ausente: 1 (12,5%) Livre: 0	Presente: 3 (100%) Ausente: 0 Livre: 0
Propriedades da curva	Ponto: 0 Curva: 0 Retilínea: 8 (100%) Mista: 0 Livre: 0	Ponto: 0 Curva: 0 Retilínea: 3 (100%) Mista: 0 Livre: 0

Fonte: elaborado pelos autores

Nas questões propostas sobre rotação, encontramos que a maioria dos problemas, especialmente nos livros do 7º ano, trabalham com o centro de rotação afastado da figura, nos livros do 8º ano essa característica é um pouco mais equilibrada, com uma diferença menor entre questões com o centro afastado e questões onde o centro toca a figura. Percebemos uma boa distribuição entre as questões que trabalham com e sem malha quadriculada. Em relação as características das figuras trabalhadas apuramos que a maioria das questões, em ambos os livros do 7º e 8º ano, trabalhou com figuras inteiramente retilíneas, não explorando tanto outros tipos de figura.

Quadro 43 – características das questões sobre rotação por volume

Característica	7º ano	8º ano
Posição do centro em relação a figura	Contido: 1 (2,56%) Tocando: 6 (15,38%) Afastado: 30 (76,92%) Livre: 2 (5,13%)	Contido: 3 (14,29%) Tocando: 8 (38,1%) Afastado: 10 (47,62%) Livre: 0
Presença de malha quadriculada	Presente: 23 (58,98%) Ausente: 14 (35,9%) Livre: 2 (5,13%)	Presente: 11 (52,38%) Ausente: 10 (47,62%) Livre: 0
Propriedades da figura	Ponto: 0 Curva: 1 (2,56%) Retilínea: 30 (76,92%) Mista: 8 (20,51%) Livre: 0	Ponto: 0 Curva: 0 Retilínea: 17 (80,95%) Mista: 4 (19,05%) Livre: 0

Fonte: elaborado pelos autores

Analisando as questões sobre translação, percebemos uma distribuição equilibrada entre questões com vetores paralelos e oblíquos nos livros do 8º ano, já nos livros do 7º ano encontramos mais questões que trabalham com o vetor paralelo às margens da folha. Em ambos os volumes, mas especialmente nos livros do 8º ano, temos que a maioria dos problemas foram trabalhados com auxílio da malha quadriculada. Em relação as características das figuras exploradas nos problemas, observamos que mais de 70% das questões, nos livros do 7º ano, e mais de 80%, nos livros do 8º ano, trabalharam com figuras inteiramente retilíneas. Nos livros do 8º ano, nenhuma figura curva foi explorada em problemas sobre translação.

Quadro 44 – características das questões sobre translação por volume

Característica	7º ano	8º ano
Orientação do vetor:	Paralelo: 18 (62,07%) Oblíquo: 7 (24,14%) Livre: 4 (13,79%)	Paralelo: 9 (42,86%) Oblíquo: 12 (57,14%) Livre: 0
Presença de malha quadriculada:	Presente: 19 (65,52%) Ausente: 10 (34,48%) Livre: 0	Presente: 19 (90,48%) Ausente: 2 (9,52%) Livre: 0
Propriedades da figura:	Ponto: 0 Curva: 2 (6,9%) Retilínea: 21 (72,41%) Mista: 6 (20,69%) Livre: 0	Ponto: 3 (14,29%) Curva: 0 Retilínea: 17 (80,95%) Mista: 0 Livre: 1 (4,76%)

Fonte: elaborado pelos autores

Observando a transposição das situações apresentadas pela BNCC nos livros do 7º ano, observamos que uma coleção não apresentava situações sobre

reconhecimento e construção de figuras com uso de softwares de Geometria dinâmica (EF07MA21).

Quadro 45 – situações da BNCC presentes nos livros do 7º ano

Situações presentes na BNCC relacionadas às simetrias	7º ano
(EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.	Presente: 4 Ausente: 0
(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho.	Presente: 4 Ausente: 0
(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando softwares de geometria dinâmica.	Presente: 3 Ausente: 1
(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.	Presente: 4 Ausente: 0

Fonte: Brasil (2018)

Em relação as situações da BNCC explorada nos livros do 8º ano, percebemos que duas coleções não trabalharam com reconhecimento ou construção de composições de transformações geométricas com auxílio de softwares de Geometria dinâmica, porém todas as coleções trabalharam o conteúdo com uso de instrumentos de desenho.

Quadro 46 – situações da BNCC presentes nos livros do 8º ano

Situações presentes na BNCC relacionadas às simetrias	8º ano
(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação) com uso de instrumentos de desenho.	Presente: 4 Ausente: 0
(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação) com uso de softwares de geometria dinâmica.	Presente: 2 Ausente: 2

Fonte: Brasil (2018)

7 CONCLUSÃO

A noção de simetria está presente em diversas áreas da vida humana, desde as civilizações mais antigas até os dias de hoje, nos livros didáticos, observamos muitas conexões do conteúdo com obras de arte e artefatos culturais, o que demonstra a importância deste conteúdo para educação básica, tendo seu estudo recomendado pela Base Nacional Comum Curricular (2018), bem como por outros documentos que regem a educação no Brasil.

Discutimos nesse trabalho algumas dificuldades encontradas ao ministrar esse conceito no Ensino Fundamental e também defendemos a relevância e influência que os livros didáticos exercem na aprendizagem escolar, por este motivo, nosso objetivo principal foi investigar a abordagem desse conteúdo pelas coleções voltadas para os anos finais do Ensino Fundamental, assim como o processo de transposição da BNCC para os livros, para isso, nos apoiamos em duas teorias da didática francesa: a Teoria da Transposição Didática e a Teoria dos Campos Conceituais.

Nossos pontos principais de análise de acordo com a TTD foram a transposição da programabilidade da aquisição do saber, e também, apoiado no conceito de vigilância epistemológica cunhado por esta teoria, investigar as transformações que os conceitos de simetria axial, translação e reflexão sofreram pela ação da noosfera.

Em relação a programabilidade, comparados à BNCC, observamos que todas as habilidades foram contempladas pelas coleções analisadas, na maioria das vezes com abordagem teórica e prática e algumas vezes sendo trabalhadas apenas em exercícios. As séries em que cada conteúdo deveria ser trabalhado também foi respeitada por todas as coleções. Alguns volumes do 8º ano também revisaram habilidades previstas para o 7º ano.

Nosso objetivo em relação a análise dos livros de acordo com a TTD, era entender melhor como acontece a transposição didática do conteúdo de isometrias para os livros didáticos (observando as transformações ocorridas) buscando entender também qual a influência da noosfera nesse processo. Em relação a esse questionamento, concluímos que apesar da BNCC ditar as habilidades a serem desenvolvidas em cada ano, propondo também algumas abordagens como uso de software de Geometria dinâmica e instrumentos de desenho, encontramos diferenças na forma como cada coleção seguiu essas recomendações: as estruturas dos capítulos, quais simetrias seriam trabalhadas com software e quais seriam

trabalhadas à mão e a forma como as composições de simetria foram trabalhadas (algumas trabalharam transformações sucessivas do mesmo tipo e outras trabalharam com composições de simetrias diferentes), por exemplo, foram bastante diferentes, ou seja, de maneira geral, a programabilidade foi seguida conforme o documento, havendo divergências apenas na abordagem e na interpretação de certas habilidades.

Observando as modificações realizadas pela noosfera, percebemos que a mais comum foi a omissão/substituição de alguns termos matemáticos como ‘função’ (bem como as notações matemáticas associadas a esse conceito), ‘imagem’, ‘vetor’, ‘mediatriz’, ‘perpendicular’ e ‘segmento orientado’, que foram substituídos por expressões mais próximas do cotidiano do aluno, e menos formais do ponto de vista acadêmico, o que condiz com a programabilidade do currículo de matemática para o Ensino Fundamental, tendo em vista o fato de que os conteúdos relacionados a esses termos ainda não foram trabalhados nesses níveis de ensino (7º e 8º anos).

Observamos o uso de algumas expressões utilizadas para conceituar as simetrias axial e de rotação, com o uso da palavra “reflexão”, com sentido trazido do contexto coloquial para ilustrar a propriedade de equidistância dos pontos em relação ao eixo de simetria, e o uso dos sentidos do relógio (horário e anti-horário) para indicar a orientação da rotação.

Identificamos também divergências entre objeto de ensino e saber sábio (em apenas um livro do 8º ano) nas definições de simetria axial e simetria em relação a um ponto, onde os autores excluíram a transformação de pontos contidos no eixo e no centro de reflexão.

Na introdução, mencionamos uma pesquisa desenvolvida por Siqueira, Lima e Gitirana (2002) que cita alguns obstáculos enfrentadas pelos alunos na aquisição do conceito de simetria, sendo um destes a dificuldade de perceber a invariância dos pontos da figura pertencentes ao eixo de simetria. Uma modificação na definição que exclui pontos pertencentes aos eixos e centros de simetria pode contribuir para a persistência das dificuldades salientados pelos autores.

Através da TTD, e de conceitos como vigilância epistemológica, concluímos que é possível fazer uma reflexão sobre as transformações realizadas pela noosfera, questionando as influências positivas e negativas que essas modificações podem exercer na aprendizagem com uso do livro didático, permitindo também verificar se a correspondência entre objeto de ensino e saber sábio foi mantida no processo.

Na análise baseada na Teoria dos Campos Conceituais, o foco era investigar se as coleções dos anos finais do Ensino Fundamental de Matemática apresentavam situações de maneira diversificada em relação aos esquemas (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) que poderiam ser explorados. Afirmamos na nossa metodologia que não é possível ter acesso, através da análise dos livros, aos esquemas utilizados pelos alunos na resolução das situações, mas é possível investigar se os livros apresentam uma diversidade de situações que contribua para a aprendizagem dos estudantes.

O elemento 1 de análise teve como objetivo identificar os conceitos interligados a isometria nas situações envolvendo o conteúdo (conceitos-em-ação). Em praticamente todos os livros, encontramos termos associados a polígonos (triângulos, quadrados, pentágonos, etc.) e geometria analítica (eixo cartesiano, coordenadas, ordenadas, abscissas, etc.).

Na BNCC, é proposto que a simetria de figuras deve ser estudada em relação aos eixos cartesianos, sendo provavelmente esse o motivo pelo qual tais conceitos estiveram presentes. Dessa forma, para que os alunos consigam navegar bem pelo conteúdo, é importante que tenham uma boa base sobre os conceitos interligados encontrados.

Partindo para o próximo elemento que consiste nos tipos de enunciados presentes nas questões propostas, computamos que mais de 80%, dos problemas pediam o reconhecimento ou construção de figuras simétricas, enquanto que as situações que exigiam uma descrição ou justificativa do aluno foram pouco exploradas em comparação.

Atividades que vão além da construção e da identificação de propriedades das simetrias, como as do tipo “justifique sua resposta”, podem ajudar o aluno a refletir sobre os processos realizados para resolver um problema, contribuindo para a assimilação das propriedades da transformação.

Os significantes tem papel importante na construção do significado pelos alunos, por este motivo, dedicamos o elemento 3 a análise das representações utilizadas ao abordar o conteúdo de simetria.

Em relação as características das figuras trabalhadas, observamos que a maioria das situações focou em formas retilíneas, não trabalhando tanto com figuras curvas. A presença de situações apoiadas na malha quadriculada foi bastante notável,

poucos exercícios trabalharam com outros recursos para ilustrar as propriedades das simetrias. Acreditamos que uma variedade de significantes que substituam as malhas poderia enriquecer a aprendizagem dos estudantes.

Partindo para as características presentes nas situações sobre simetria axial, computamos que mais de 70% trabalham com o eixo de simetria paralelo as margens da folha. Do ponto de vista da TCC, seria benéfico à aprendizagem dos alunos, explorar mais situações com o eixo oblíquo, para que o estudante perceba que não é sempre que vamos ter os eixos de simetria em uma configuração específica, o que pode levar o estudante a acreditar que o eixo de simetria só pode estar paralelo às margens.

Quando comparamos a posição dos eixos de simetria em relação as figuras, percebemos que a grande maioria (aproximadamente 83%) nos livros do 8º ano, trabalha com o eixo afastado do objeto, enquanto isso, situações onde o eixo tangencia ou corta a figura poderiam estar mais presentes. Trabalhar com situações onde a figura tem pontos que interceptam eixos ou centros de simetria também pode contribuir de forma positiva para a superação das dificuldades citadas por Siqueira, Lima e Gitirana (2002).

Observamos também os significantes apresentados na abordagem do conceito de rotação e translação. Em relação ao primeiro, encontramos que aproximadamente 77%, nos livros do 7º ano, e 48%, nos livros do 8º ano, das situações trabalharam com o centro de rotação afastado da figura. Enquanto isso, nas situações sobre translação, computamos que 62% dos problemas trabalharam com vetores paralelos às margens da folha, já nos livros do 8º ano, houve um equilíbrio da quantidade de vetores de cada orientação.

Um dos objetivos desse trabalho em relação aos livros didáticos era investigar a variedade de situações apresentadas pelas coleções ao abordar o conteúdo de isometria. Determinamos diferentes categorias, diferenciado as diversas situações possíveis, desde o enunciado até as representações utilizadas. A partir desse estudo observamos que existe uma preferência por situações mais simples do ponto de vista cognitivo (eixos paralelos, figuras retilíneas, uso de malha quadriculada, etc.), porém foi constatada a presença de praticamente todas as situações pré-determinadas pela nossa metodologia.

O elemento 4 tinha como foco comparar as situações presentes na BNCC com as apresentadas nas coleções. Observamos que a maioria das habilidades propostas

pelo documento foram contempladas nos livros, com exceção de um livro do 7º ano que não trabalhou com o reconhecimento e construção de figuras com software de Geometria dinâmica e de dois livros do 8º ano que não trabalharam com composições de transformações também com software de Geometria dinâmica.

Na introdução desse trabalho discutimos um pouco sobre a importância dos manuais do professor no ensino em sala de aula, e no capítulo 3 comentamos que muitas situações sobre as isometrias poderiam ser encontradas no manual, indo além do material acessível aos alunos, por este motivo, decidimos também observá-lo.

Percebemos que as situações contidas dos manuais eram de caráter diferente daquelas apresentadas no restante da coleção. Encontramos muitas sugestões de trabalhos em grupo ou em dupla, projetos para serem realizados com professores de outras disciplinas, discussões orais, trabalhos de pesquisa, elaboração de fluxograma e atividades adicionais para serem realizadas em softwares de Geometria dinâmica. Não seria possível ter uma noção dos significantes ou conceitos-em-ação presentes nestas atividades, mas por serem de natureza diferentes daquelas apresentadas no livro, cada uma com suas particularidades do ponto de vista dos esquemas utilizados para abordá-las, acreditamos que tais situações podem enriquecer e complementar o estudo desse conteúdo.

A partir das análises relacionadas a TCC que realizamos, foi possível entender melhor como as isometrias vem sendo trabalhadas nos livros didáticos de Matemática, através das análises das situações pudemos ter uma ideia de como os livros podem auxiliar e também limitar na aprendizagem desse conteúdo. Análises desse tipo nos ajudam a refletir se os problemas abordados são suficientes para promover o entendimento dos conceitos e também podem servir de inspiração na criação de novas situações.

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, V. L. V. X. de. Os conceitos de medidas de tendência central e de dispersão na formação estatística no ensino médio no Brasil e na França. Abordagem exploratória no quadro da teoria antropológica do didático e da teoria dos campos conceituais. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática e Doutorado em Ciências da Educação – cotutela) - Universidade Federal Rural de Pernambuco/Universidade Lumière Lyon2, Recife, 2013.
- ARAÚJO, Abraão Juvencio de. **O ENSINO DE ÁLGEBRA NO BRASIL E NA FRANÇA: Estudo Sobre o Ensino de Equações do Primeiro Grau à Luz da Teoria Antropológica do Didático.** Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.
- ARAÚJO, Abraão Juvêncio de; GITIRANA, Verônica. *In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 23º.* 2000, Caxambu, 2000.
- ALVES, Maria Lígia Isídio. **Os Saberes nas Práticas Pedagógicas da Educação de Jovens e Adultos: Um Estudo Para Além do Livro Didático.** Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2017.
- ALVES, Deyse Socorro. **SIMETRIA AXIAL: UMA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA PARA ALUNOS DA 6ª SÉRIE COM O USO DE SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA.** Dissertação (Pós-Graduação em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2005.
- AZEVEDO, Greiton Toledo de; MALTEMPI, Marcus Vinícius. Produções criativas de matrizes e de transformações geométricas com metodologias ativas. **BOEM**, Joinville, v. 7, n. 13, p. 100-119, julho/agosto 2019.
- BALACHEFF, N. Conception, Connaissance et Concept. Didactique et Technologies Cognitives en Mathématiques - Séminaires 1994-1995. Grenoble: Université Joseph Fourier, 1995.
- BALDIN, Y. Y; VILLAGRA, G.A.L; COELHO, L.S. Um estudo geométrico de classificação de isometrias do plano com Cabri-Géomètre II. Cabri World 1999. Disponível em http://www.cabri.com.br/pesquisas/c99_anais/pa/pa_yurikobaldin.htm. Busca em 03/2010.
- BARRETTO, Elba Siqueira de Sá. **Os currículos do ensino fundamental para as escolas brasileiras.** São Paulo: Autores Associados, f. 130, 1997. 259 p.
- BARROS, PRISCILA BEZERRA ZIOTO. **A ARTE NA MATEMÁTICA: CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO DE GEOMETRIA.** Dissertação (Mestrado em Docência para a Educação Básica) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Bauru, 2017.
- BITTENCOURT, Circe Maria Fernandes. **Ensino de história: fundamentos e métodos.** 2. ed. São Paulo: Cortez Editora, f. 204, 2004. 408 p.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para a Educação Infantil e o Ensino Fundamental. Ministério de Educação e Cultura/MEC. 2018

BRASIL. (1997) Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEF.

BRASIL. (1998) Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

BRASIL. Congresso Nacional. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, LDB 4.024 de 1961.

BRASIL. Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). Ciências da Natureza e Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. PNLD 2017: matemática – Ensino fundamental anos finais / Ministério da Educação – Secretária de Educação Básica SEB – Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. PNLD 2020: matemática – Ensino fundamental anos finais / Ministério da Educação – Secretária de Educação Básica SEB – Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2020.

BURIGO, Elisabete Zardo. **MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA NO BRASIL**: Estudo da Ação e do Pensamento de Educadores Matemáticos nos Anos 60. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1989.

CARNEIRO, Ronaldo Freitas. **Aplicação das Isometrias na Pavimentação do Plano com Polígonos Regulares**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Fundação Universidade Federal do Abc, Santo André, 2014.

CHABA, Priscila Akemi. **O CONTEÚDO DE FÍSICA NO LIVRO DIDÁTICO PARA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: UMA ANÁLISE DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA**. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação) - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2019

CHIRÉIA, José Vagner. **TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E A SIMETRIA**: Uma proposta para o Ensino Médio. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

CHEVALLARD, Y. La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique Grupo Editor. 2000.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. Didactic Transposition in Mathematics Education. Encyclopedia of Mathematics Education, v. 1, n. 1, p. 131-134, 2005.

CHEVALLARD, Y. Sobre a Teoria da Transposição Didática: algumas considerações introdutórias. In: Revista de Educação Ciências e Matemática. v. 3 n. 2 p. 1-14, 2013.

COSTA, José Roberto. **A IMPORTÂNCIA DO MANUAL DO PROFESSOR NA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DA MATEMÁTICA**. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática) - Universidade Estadual do Maringá, Maringá, 2008.

CYSNEIROS, Mirella ; BELLEMAIN, Franck; GITIRANA, Verônica. Simetria de Reflexão: uma situação de aprendizagem colaborativa à distância. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XVI. 2012, Canoas, 2012. 12 p.

D'AMBROSIO, Beatriz Silva. The Modern Mathematics Reform Movement in Brazil and its Consequences for Brazilian Mathematics Education. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, v. 22, p. 69-85, 1991.

DINIZ, Denize Maria Antas; NETO, José Euzebio Simões; SILVA, Flávia Cristiane Vieira da. UMA ANÁLISE DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DAS REAÇÕES QUÍMICAS. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v. 5, n. 2, p. 97-110, maio/agosto 2015.

FILHO, José de Pinho Alves. REGRAS DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA APLICADAS AO LABORATÓRIO DIDÁTICO. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 17, n. 2, p. 44-58, agosto 2000.

FIGUEIREDO, Leandra Anversa. **Atividades Digitais e a Construção dos Conceitos de Proporcionalidade: uma Análise a Partir da Teoria dos Campos Conceituais**. Tese – Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

FONSECA, Cláudio Roberto Cavalcanti da. **CONCEITO DE SIMETRIA EM LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL**. Dissertação (EDUMATEC) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.

GAY, Mara Regina Garcia ; SILVA, Willian Raphael. **Araribá Mais: Matemática 7º ano**. 1. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2018.

GAY, Mara Regina Garcia ; SILVA, Willian Raphael. **Araribá Mais: Matemática 8º ano**. 1. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2018.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social (6a. ed.)**. 6 ed. São Paulo: Editora Atlas S. A. , f. 109, 2008. 218 p.

GIOVANNI, Jose Ruy; CASTRUCCI, Bedito. **A conquista da matemática: 7º ano**. 4. ed. São Paulo, 2018.

GIOVANNI, Jose Ruy; CASTRUCCI, Benedito. **A conquista da matemática: 8º ano.** 4. ed. São Paulo, 2018.

JAIME, A. P.; GUTIÉRREZ, A. R. El grupo de las isometrias del plano. Madri: Editorial Síntesis, 1996

JARDIM, Luciana de Moraes; CAMARGO, Sérgio; ZIMER, Tania Teresinha Bruns. TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA NO ENSINO DE CIÊNCIAS: Diferentes Olhares. In: XII CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, XII. 2015. 12. ed, Curitiba, 2015.

LIMA, Sandra Maria Alves de. **A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DOS GÊNEROS DO DOMÍNIO DISCURSIVO PUBLICITÁRIO NOS LIVROS DIDÁTICOS DE LÍNGUA PORTUGUESA: ANTES E PÓS PCN.** Dissertação (Pós-Graduação em Estudos da Linguagem) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2012.
LIMA, Elon Lages. **Isometrias**, f. 47. 1995. 94 p.

LONGEN, Adilson. **Apoema Matemática: 7º ano.** 1. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2018.

LONGEN, Adilson. **Apoema Matemática: 8º ano.** 1. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2018.

LOPES, Alice Ribeiro Casimiro. CONHECIMENTO ESCOLAR EM QUÍMICA: PROCESSO DE MEDIAÇÃO DIDÁTICA DA CIÊNCIA. **Química Nova**, Rio de Janeiro, v. 20, p. 563-568, janeiro 1997.

LOPES, Lidiane Schimitz; ALVES, Gilson Leandro Pacheco ; FERREIRA, André Luís Andrejew. A Simetria nas Aulas de Matemática: uma proposta investigativa. **Educação & Realidade**, Porto Alegre, v. 40, n. 2, p. 549-572, abril/junho 2015.

LUZ, Vania de Andrade. **UM ESTUDO SOBRE O ENSINO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS: DA REFORMA DA MATEMÁTICA MODERNA AOS DIAS ATUAIS.** Dissertação (Pós-graduação em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

MANOEL, Wagner Aguilera. **A IMPORTÂNCIA DO ENSINO DA GEOMETRIA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL:** Razões apresentadas em pesquisas brasileiras. Dissertação (Pós Graduação em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.

MELO, Diógenes Macllyne Bezerra de. **A SIMETRIA DE REFLEXÃO: ELEMENTOS DE CONCEPÇÕES MOBILIZADAS POR ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL.** Dissertação (EDUMATEC) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

MILLMAN, Richard S. Kleinian Transformation Geometry. **The American Mathematical Monthly**, Washington, v. 84, n. 5, p. 338-349, 5 maio 1977.

MONGELLI, MAGDA CRISTINA JUNQUEIRA GODINHO . **UM ESTUDO SOBRE PROCEDIMENTOS E INVARIANTES OPERATÓRIOS UTILIZADOS POR ALUNOS DO IV CICLO DO ENSINO FUNDAMENTAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE SIMETRIA AXIAL**. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2005.

MOREIRA, MARCO ANTONIO. **TEORIAS DE APRENDIZAGEM: COGNITIVISMO - HUMANISMO - COMPORTAMENTALISMO**. 1. ed. Porto Alegre, f. 124, 2016. 248 p.

MPANTES, George. **The Erlangen program of Felix Klein**. Academia.edu. 2016. 8 p. Disponível em: <https://auth.academia.edu/GeorgeMpantes>. Acesso em: 25 jul. 2021.

PEREIRA, Rúbia Carla; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela; FREITAS, Rony Cláudio de Oliveira. VIGILÂNCIA EPISTEMOLÓGICA DE CHEVALLARD EM UM ESTUDO DE CASO SOBRE O CONCEITO DE DIVISIBILIDADE EM UMA TURMA DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, XII. 2016. 12. ed, São Paulo, 2016. 11 p.

PIETROPAOLO, Ruy César ; SILVA, Júlio César Deckert da . Um Estudo sobre as Contribuições de Felix Klein para a Introdução das Transformações Geométricas nos Currículos Prescritos de Matemática do Ensino Fundamental. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 7, n. 14, 2014.

PINHO, José Luiz Rosas; BATISTA, Eliezer; CARVALHO, Neri Terezinha Both. **Geometria I**. 2. ed. Florianópolis, f. 175, 2010. 350 p.

Raupp, F. M., & Beuren, I. M. (2003). Metodologia da pesquisa aplicável às Ciências Sociais. In I. M. Beuren (Ed.), *Como Elaborar Trabalhos Monográficos em Contabilidade: Teoria e Prática* (2rd ed., pp. 76-97). São Paulo: Atlas.

SANT'ANNA, Diogo; BITTENCOURT, Jane; OLSSON, Sandra. Transposição e Mediação Didática no Ensino de Frações. **Boletim de Educação Matemática - BOLEMA**, Rio Claro, v. 20, n. 27, p. 1-18, 2007.

SANTOS, Luciana Ferreira dos . **PINTAR, DOBRAR, RECORTAR E DESENHAR: O ensino da Simetria e das Artes Visuais em Livros Didáticos de Matemática para séries iniciais do Ensino Fundamental..** Dissertação (EDUMATEC) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

SÁ-SILVA, Jackson Ronie; ALMEIDA, Cristóvão Domingos de ; GUINDANI, Joel Felipe. Pesquisa documental: pistas teóricas e metodológicas. **Revista Brasileira de História & Ciências Sociais**, v. 1, n. 1, julho 2009.

SILVA, Júnior Teodoro . **O USO RECONSTRUTIVO DO ERRO NA APRENDIZAGEM DE SIMETRIA AXIAL: Uma Abordagem a Partir de Estratégias Pedagógicas com Uso de Tecnologias** . Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

SILVA, Cleusiane Vieira. **A prática docente e sua influência na construção de conceitos geométricos**: um estudo sobre o ensino e a aprendizagem da Simetria Ortogonal. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

SIQUEIRA, J. E. M., LIMA, P. F., GITIRANA, V. Explorando a simetria de reflexão: uma sequência didática no cabri-géomètre. in: Encontro Pernambucano de Educação Matemática, V. 2002, Garanhuns. Anais [...]. 2002, p. 1-16.

SOUZA, Wellington B. de *et al.* A VIGILÂNCIA EPISTEMOLÓGICA DE CHEVALLARD APLICADA AO ESPALHAMENTO DAS PARTÍCULAS ALFA. In: XIV ENCONTRO DE PESQUISA EM ENSINO DE FÍSICA, XIV. 2012. 14. ed, Maresia - SP, 2012. 9 p.

SOUZA, Joamir. **Matemática**: Realidade e Tecnologia 7º ano. 1ª. ed. São Paulo: FTD, 2018.

SOUZA, Joamir. **Matemática**: Realidade e Tecnologia 8º ano. 1ª. ed. São Paulo: FTD, 2018.

SOUZA, Gisele Martins. **Felix Klein e Euclides Roxo**: Debates Sobre o Ensino da Matemática no começo do Século XX. Dissertação (Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2010.

TURGUT, Melih; YENILMEZ, Kürşat; ANAPA, Pınar. Symmetry and Rotation Skills of Prospective Elementary Mathematics Teachers: Habilidades de Simetria y Rotación de los Futuros Profesores de Matemáticas Elementales. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 28, n. 48, p. 383-402, abril 2014.

VALENÇA, MIRELLA CYSNEIROS LANDIM. **SIMETRIA DE REFLEXÃO**: UMA ANÁLISE DE MEDIAÇÕES COM GEOMETRIA DINÂMICA A DISTÂNCIA. Dissertação (EDUMATEC) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2014.

VALERETO, GRAZIELE BOMBONATO DELGADO . **SIMETRIA DE TRANSLAÇÃO**: IDENTIFICANDO POSSÍVEIS APRENDIZAGENS DE ALUNOS DO 8º E 9º ANOS AO UTILIZAR SOFTWARES E TAREFAS. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2018.

VERGNAUD, G. The Theory of Conceptual Fields. In: Human Development. Basel v. 52 n. 2 p. 83 - 94. 2009

VERGNAUD, G. A comprehensive theory of representation for mathematics education. in: Journal of Mathematical Behavior, v. 17 n.2 p. 167-181. 1998

VERGNAUD, G. Conceptual development and learning. in: Revista Currículum, San Cristóbal de La Laguna, v. 26, p. 39-59, março 2013.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos conceituais. In: BRUN, J. Didáctica das matemáticas. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 155–191

VIEIRA, Gilberto; PAULO, Rosa Monteiro ; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Simetria no Ensino Fundamental através da Resolução de Problemas: possibilidades para um trabalho em sala de aula. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 27, n. 46, p. 613-630, agosto 2013.