



ACELERANDO A CONVERGÊNCIA DA SÉRIE DE
TAYLOR DE FUNÇÕES ELEMENTARES: UM
MÉTODO BASEADO EM FRAÇÕES CONTÍNUAS

Eduardo de Melo Beltrão

RECIFE
Fevereiro de 2016

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional

ACCELERANDO A CONVERGÊNCIA DA SÉRIE DE
TAYLOR DE FUNÇÕES ELEMENTARES: UM
MÉTODO BASEADO EM FRAÇÕES CONTÍNUAS

Eduardo de Melo Beltrão

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Departamento de
Matemática da Universidade Fede-
ral Rural de Pernambuco como re-
quisito parcial para a obtenção do
título de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva

RECIFE

Fevereiro de 2016

Ficha catalográfica

B453a Beltrão, Eduardo de Melo

Acelerando a convergência da série de Taylor de funções elementares: um método baseado em frações contínuas / Eduardo de Melo Beltrão. – Recife, 2016.

60 f. : il.

Orientador: Thiago Dias Oliveira Silva.

Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Matemática, Recife, 2016.

Referências.

1. Séries de Taylor
2. Frações contínuas
3. Aproximações
4. Convergência I. Silva, Thiago Dias Oliveira, orientador II. Título

CDD 510

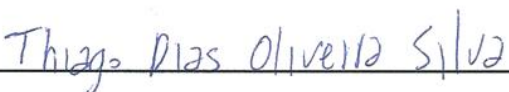
EDUARDO DE MELO BELTRÃO

Acelerando a convergência das séries de Taylor de funções elementares: Um método baseado em frações contínuas.

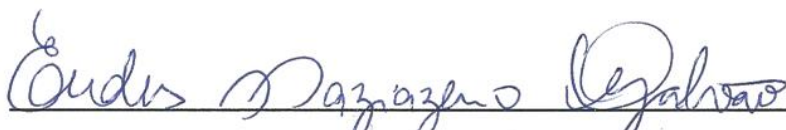
Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 29/02/2016

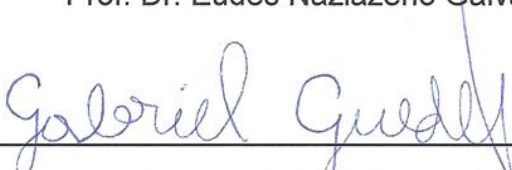
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva (Orientador) – UFRPE



Prof. Dr. Eudes Naziazeno Galvão – UFPE



Prof. Dr. Gabriel Araújo Guedes – UFRPE

Agradecimentos

“Falta pouco, pai! Não desanima.”

Ouvi essas palavras de Luiz Eduardo, meu filho de 8 anos de idade, uma semana antes da apresentação deste trabalho à banca examinadora. Muitos poderiam taxá-la como mais um bordão dito a estudantes que se encontram nesta fase acadêmica. Mas a mim essa mensagem transmitiu um quê de confiança, um pouco de conforto a quem dedicou alguns anos de vida à busca de um ideal.

É absorto neste invólucro de forças positivas que venho agradecer às pessoas que contribuíram direta e indiretamente no resultado ora alcançado, assim como aos que me ajudaram a subir em mais esse degrau.

Primeiramente aos idealizadores do PROFMAT, pela genialidade em criar e oferecer um curso de qualidade ímpar para toda a comunidade matemática nacional, de professores a aficionados nessa área do saber.

Às coordenadoras Rúbia Nascimento e Bárbara Costa, pela presteza com que administraram todo o processo de minha transferência entre os pólos de Belém e Recife.

À Prof^a Maria Eulália, que, sem medir esforços, acolheu meu pedido de orientação e participou efetivamente do processo de concepção deste trabalho.

Ao Prof^o Thiago DK, que mesmo envolto às atividades do Departamento de Matemática, aceitou continuar minha orientação e, com maestria, apontou melhorias significativas na estruturação teórica do tema proposto.

Aos amigos de turma da UFPA e da UFRPE, pela amizade sedimentada ao longo desses anos, a qual nos propiciou um ambiente de cooperação, tão necessário neste curso.

Aos meus pais, Luiz Carlos e Jaciara, pela devoção, amor e educação, fatores que contribuíram para minha formação como pessoa.

À minha esposa, Hermínia, e aos meus filhos, Maria Eduarda e Luiz Eduardo, a quem não apenas agradeço como também dedico este trabalho. Desculpem pelos momentos em que estive “presencialmente ausente”. Ao autor da epígrafe acima digo que nunca desanimei, mas sim descobri que o céu não é mais o limite.

E, por fim, a Deus, por conceder em minha existência a oportunidade de conhecer pessoas tão importantes como as mencionadas acima. Considero-me um vencedor não por ter trilhado o caminho mais estreito ou mais sinuoso, mas por ter sido acompanhado por eles até o fim.

Resumo

Às séries de Taylor de funções elementares são aplicados dois métodos algébricos que permitem convertê-las em frações contínuas. O método de Euler faz com que os convergentes dessa fração sejam exatamente iguais às somas parciais da série que a originou. Já os convergentes da fração contínua gerada pelo método das substituições sucessivas são aproximações racionais para a referida função. Um processo de contração é aplicado às frações contínuas provenientes desses métodos, o que resulta em novas frações contínuas, caracterizadas por convergirem mais rapidamente ao valor da função do que as próprias séries. Comparações gráficas e numéricas entre a série de Taylor da função, as frações contínuas geradas pelos métodos e suas contrações são realizadas. Observa-se que os convergentes de ordem cinco da contração par das frações contínuas obtidas pelo método das substituições sucessivas resultam, em média, aproximações com erro na ordem de 10^{-8} do valor real das funções analisadas, índice que pode ser considerado muito bom quando comparado ao valor dos polinômios de Taylor de mesma ordem. Os métodos descritos possuem características que se complementam, o que atribui à contração de suas frações contínuas uma possível e eficiente implementação algorítmica.

Palavras-chave: Séries de Taylor, Frações Contínuas, Aproximações, Convergência.

Abstract

At Taylor series elementary functions are applied two algebraic methods which converts them into continued fractions. Euler's method causes the convergents of this continued fraction to be exactly equal to partial sums of the series that originated it. Already the convergents of the continued fraction generated by the successive substitution method are a rational approximate for the referred function. A contraction process is applied to the continued fractions originated by these methods, which results in new continued fractions, characterized by converges more quickly to the value of the function than the own series. Graphic and numeric comparisons between Taylor series of the function, the continued fractions generated by the methods and its contractions are performed. It is observed that the convergents of the even contraction order 5 of the continued fractions obtained by the successive substitution method results, in average, approximately with error in the order of 10^{-8} of the real value of the analyzed functions, rate that can be considered very good when it is compared with Taylor's polynomials value of the same order. The described methods have complementary characteristics, which assign to the contraction of its continued fractions a possible and efficient algorithm implementation.

Keywords: Taylor Series, Continued Fractions, Approximations, Convergence.

Lista de Figuras

1.1	Polinômio de Taylor de ordem 2 da função $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$. . .	16
2.1	Convergentes da fração contínua de $\sqrt{2}$ dispostos sobre a reta.	20
4.1	Hierarquia entre as formas algébricas utilizadas para aproximar uma função.	46
4.2	Curvas de aproximação para a função exponencial.	48
4.3	Curvas de aproximação para a função logarítmica.	50
4.4	Curvas de aproximação para a função inversa da tangente.	52
4.5	Curvas de aproximação para a função raiz.	53

Lista de Tabelas

1.1	Valores numéricos do polinômio de Taylor da função $f(x) = e^x$ ao redor do ponto $x_0 = 0$	16
1.2	Séries de Taylor para algumas funções elementares.	17
4.1	Valores aproximados para $e \approx 2,718281828$	48
4.2	Valores aproximados para $\ln(2) \approx 0,693147181$	49
4.3	Valores aproximados para $\pi/4 \approx 0,785398163$	52
4.4	Valores aproximados para $\sqrt{2} \approx 1,414213562$	54
4.5	Vantagem computacional das contrações de frações contínuas obtidas dos métodos de Euler (CME) e das substituições sucessivas (CMSS).	57

Sumário

Introdução	10
1 Uma Sinopse sobre Séries	13
1.1 Séries de Taylor	14
1.2 Polinômios de Taylor	15
2 Frações Contínuas	18
2.1 Preliminares	18
2.2 Propriedades Fundamentais	21
2.3 Convergência	24
2.4 Transformações de Equivalência	32
2.5 Contrações	37
3 Conexão entre Séries e Frações Contínuas	40
3.1 O Método das Substituições Sucessivas	40
3.2 O Método de Euler	44
4 Comparando Séries de Taylor e Frações Contínuas	46
Conclusão	56
Referências Bibliográficas	59

Introdução

Compreender e extrair o máximo de vantagem do mundo computacional é uma prática comum nos dias atuais. Para se obter soluções de problemas relacionados à computação, ferramentas matemáticas cada vez mais vêm sendo aperfeiçoadas, buscando-se, a todo momento, a redução dos chamados custos computacionais. Um exemplo disso é a necessidade de se representar os diversos tipos de funções existentes por expressões matemáticas eficientemente computáveis, isto é, que possam ser calculadas por meio de dispositivos eletrônicos e que consumam o menor esforço computacional possível.

Tais expressões são estruturadas por um conjunto de operações matemáticas, as quais compõem um processo iterativo gerador de uma sequência de aproximações para a solução de um problema. A esse conjunto dá-se o nome de algoritmo. Sua eficiência é definida pela rapidez e precisão com que responde ao problema.

Um dos principais fatores relacionados a essa rapidez é o tempo de processamento, geralmente medido pela quantidade de operações a serem executadas e pela celeridade com que as aproximações convergem à solução real. Quanto menor o número de iterações, mais rápido o processamento e a resposta dada pela máquina. Essa rapidez, também conhecida por velocidade de convergência, é um dos pilares da eficiência algorítmica.

Desde meados do século XX, profissionais vêm estudando e aperfeiçoando métodos para concepção de algoritmos cada vez mais eficientes. Um exemplo disso é o algoritmo utilizado para o cálculo do valor de funções em pontos pré-estabelecidos. Um dos primeiros recursos utilizados para este fim foi o da aproximação polinomial, ferramenta de grande importância no cálculo e ainda utilizada nas mais diversas áreas do conhecimento.

Existem inúmeras formas de se aproximar funções por polinômios. Uma das mais importantes e populares é a decorrente de truncamentos dados às *séries de Taylor*. Devido à simplicidade da manipulação algébrica, da representação gráfica e da computabilidade de seus termos, o uso dos *polinômios de Taylor* como ferramentas de aproximação ainda se faz presente em muitas calculadoras e softwares em geral.

Para ilustrar uma possível aplicação, considere a existência de um dispositivo cujo algoritmo faz uso dos polinômios de Taylor para representar a função exponencial ao redor da origem. O polinômio de quatro termos, determinado pelo truncamento dado após o termo de grau três dessa série, é

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}. \quad (1)$$

Suponha que seja necessário calcular o valor de e por meio desse dispositivo. Atribuindo $x = 1$ no referido polinômio obtêm-se 2,666666667 como resultado, valor que apresenta um erro absoluto na ordem de 10^{-2} do valor real 2,718281828. Na maioria das aplicações, uma aproximação com esse grau de exatidão já se mostra razoável, uma vez que erros estão presentes em todo e qualquer sistema.

Mas, e se houvesse a necessidade de refinar ainda mais essa aproximação? Se, por exemplo, fosse necessário encontrar um resultado que apresentasse erro na ordem de 10^{-3} do valor real? O polinômio de Taylor que satisfaz esse requisito possui cinco termos, o que faz aumentar o número de iterações realizadas e, conseqüentemente, a quantidade de operações matemáticas executadas por esse dispositivo. Isso faz com que o tempo de processamento seja maior, aumentando o esforço e diminuindo a eficiência algorítmica.

Surge então o seguinte embate: seria possível conceber uma expressão matemática computável que, a uma mesma velocidade de convergência, provesse melhores aproximações para uma função do que os polinômios de Taylor? Ou, noutra enfoque, seria possível obter uma expressão que apresentasse erro de mesma ordem que os polinômios de Taylor mas que exigisse menor esforço computacional? O propósito deste trabalho é dar uma resposta a estas perguntas mediante a aplicação de um método baseado nas frações contínuas, considerado um dos mais belos temas da matemática elementar.

A expressão da forma

$$\frac{1}{1 - \frac{\frac{1}{x}}{1 + x - \frac{x}{2 + x - \frac{2x}{3 + x}}}} := \frac{1}{1 - \frac{x}{1 + x} - \frac{x}{2 + x} - \frac{2x}{3 + x}} \quad (2)$$

é a fração contínua originada do *Método de Euler* quando aplicado diretamente sobre os termos de (1). Com alguns poucos cálculos é possível verificar que o truncamento dado após cada fração parcial de (2) resulta em expressões idênticas aos polinômios de Taylor de ordem inferior a (1). Os resultados desses truncamentos, chamados de convergentes, também são utilizados para aproximar a função.

Mas, como se pode perceber, essa transformação não faz com que haja um aumento da velocidade de convergência, e sim a mantém estagnada, devido ao fato de seus convergentes corresponderem às somas parciais de (1). A vantagem dessa transformação se traduz apenas em uma nova forma de computar a função e uma razoável redução na quantidade de operações matemáticas, o que não faz parte do escopo deste trabalho, mas que certamente contribui para diminuir o esforço computacional do algoritmo.

Porém, tomando (2) como base, é possível obter uma nova fração contínua, de convergentes exatamente iguais aos de ordem par (ou ímpar) da primeira. Essa técnica é conhecida por contração. Por exemplo,

$$\frac{1 + x}{1} - \frac{x^2(3 + x)}{6 + 6x + 3x^2 + x^3} - \frac{6x^2(1 + x)(5 + x)}{60 + 20x + 5x^2 + x^3} - \frac{20x^2(3 + x)(7 + x)}{210 + 42x + 7x^2 + x^3} \quad (3)$$

é a contração par da fração contínua (2), a qual permite um aumento da velocidade de convergência da série de Taylor da função exponencial. Atribuindo $x = 1$ em (3) obtêm-se 2,716666667, que possui um erro na ordem de 10^{-3} do valor real de e .

Mas o método de Euler não é único. O *Método das Substituições Sucessivas* permite a construção de uma fração contínua cujos convergentes podem ser reduzidos à forma de funções racionais, ao invés de corresponderem às somas parciais da série que os origina. Apenas a fração contínua gerada por este método já provê uma melhor aproximação para a função do que o polinômio de Taylor de mesma ordem. Suas contrações permitem um aumento substancial na velocidade de convergência. O valor numérico do convergente de ordem quatro de sua contração par, por exemplo, possui erro na ordem de 10^{-5} do valor real de e , o que lhe garante, junto à contração ímpar, notoriedade numa possível implementação algorítmica, apesar da engenhosa forma com que são construídas.

Para prover o necessário amparo teórico a essa constatação prática, este trabalho foi estruturado da seguinte maneira:

- a) No capítulo 1 são abordados os conceitos sobre somas infinitas, com o objetivo de introduzir a forma com que as séries de Taylor representam funções. Além disso, mostra-se como os polinômios de Taylor podem ser empregados na aproximação numérica e gráfica dessas funções.
- b) O capítulo 2 é dedicado à apresentação das frações contínuas. O acompanhamento de fatos históricos a essa apresentação evidencia a evolução teórica do tema. Especial atenção é dada aos critérios de convergência. Além disso, define-se equivalência entre frações contínuas, essencial para a construção das contrações, cerne deste trabalho.
- c) O capítulo 3 discorre sobre os referidos métodos que transformam séries em frações contínuas. Comenta-se as características que lhe são peculiares, as quais servem para analisar a aproximação dada pelas frações contínuas às funções e avaliar os requisitos para a eficiência algorítmica.
- d) O quarto e último capítulo apresenta a comparação gráfica e numérica entre as séries de Taylor de algumas funções elementares, as frações contínuas obtidas pelos referidos métodos e suas contrações.

Para uma leitura mais efetiva, recomenda-se que o leitor possua conhecimentos básicos sobre sequências e séries. Espera-se que este trabalho possa aumentar as escassas fontes bibliográficas nacionais sobre o tema, assim como possa servir de incentivo para seu necessário aprofundamento.

Capítulo 1

Uma Sinopse sobre Séries

Caracterizada pela junção de uma quantidade finita de termos, a adição é a mais simples das operações aritméticas. Embora seja uma ideia razoavelmente simples, sua concepção é falha quando essa quantidade passa a ser infinita. Assim, surgem as chamadas *séries infinitas*, na tentativa de generalizar a definição de adição.

Uma formulação rigorosa para este tema surgiu apenas no século XVIII, com o advento da *Análise Real*, vindo a explicar adequadamente alguns dos numerosos paradoxos matemáticos existentes à época [14]. Para uma melhor compreensão das séries infinitas são empregadas as chamadas *somas parciais*, definidas pela soma de uma quantidade finita de termos iniciais da série. Por meio delas entende-se o porquê de algumas séries infinitas possuírem soma finita.

De maneira informal, se o valor das somas parciais cada vez mais se aproximar de um determinado número diz-se que a série é *convergente*. Por outro lado, uma série que não converge é dita ser *divergente*. Para se averiguar a convergência, ou não, de uma série são utilizados os chamados *testes de convergência*, os quais não fornecem o valor da soma propriamente dita, mas afirmam se ela realmente existe [14]. Isto é suficiente na maioria das aplicações, pois atesta a possibilidade de aproximar este valor com um grau arbitrário de precisão.

Aos testes de convergência estão associadas técnicas para se estimar o valor para o qual a série converge. É fato que qualquer soma parcial representa uma aproximação para este valor, mas somente por meio da análise do *resto* (erro quando se toma uma soma parcial ao invés da série) é que se determina quão boa é essa aproximação [14].

Das séries infinitas fazem parte as chamadas *séries de funções*, cujos termos e soma são representados por uma função. Estas convergem ou divergem de acordo com o valor estipulado para a variável independente. Dentre as séries de funções, desempenham papel especial as *séries de potências*, cujos termos são constituídos por potências de uma variável arbitrária. Respeitadas as diferenças, qualquer soma parcial de uma série de potências pode ser vista como um polinômio. É por isso que essas séries são consideradas a generalização das funções polinomiais, motivo este que lhe conduz a inúmeras aplicações, tanto de cunho teórico quanto prático.

O primeiro indício de utilização deste tipo de série, e talvez o principal, ocorreu juntamente com o surgimento do *Cálculo*, tendo *Isaac Newton* como seu principal protagonista. Este crédito lhe é devido por ter sido o responsável em representar diversos tipos de funções em séries de potências, permitindo cálculos diferenciais e integrais mesmo para algumas funções consideradas não elementares [14].

Uma série de potências, quando convergente, possui diversos valores para sua soma, cada um dos quais dependentes do valor atribuído à variável independente x . Portanto, uma série de potências define uma função, cujo domínio, chamado *intervalo de convergência*, é composto por todos os valores de x para os quais a série converge. Apenas neste intervalo é que são permitidas as operações do cálculo sobre as séries [14].

Este resultado é fundamental para a concepção das *séries de Taylor*, utilizadas para definir as condições suficientes para que uma função possa ser representada por uma série de potências. Estas séries são aplicadas nos mais diversos ramos das ciências. Alguns de seus aspectos teóricos serão revisados na seção seguinte.

1.1 Séries de Taylor

Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em todo seu domínio. Representando-a por uma série de potências centrada em $x = x_0 \in \mathbb{R}$, obtêm-se

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \\ &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots \end{aligned} \quad (1.1)$$

Aplicando sucessivas derivadas aos termos da série acima, dentro do intervalo no qual converge, tem-se

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots \\ f^{(2)}(x) &= 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - x_0) + 3 \cdot 4a_4(x - x_0)^2 + \dots \\ f^{(3)}(x) &= 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x - x_0) + 3 \cdot 4 \cdot 5a_5(x - x_0)^2 + \dots \\ f^{(4)}(x) &= 2 \cdot 3 \cdot 4a_4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5a_5(x - x_0) + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6a_6(x - x_0)^2 + \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Substituindo x por x_0 nas equações acima, tem-se

$$f^{(1)}(x_0) = a_1, \quad f^{(2)}(x_0) = 2a_2, \quad f^{(3)}(x_0) = 3!a_3, \quad f^{(4)}(x_0) = 4!a_4, \quad \dots$$

de onde se deduz que $f^{(n)}(x_0) = n!a_n$ ou, equivalentemente, que

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Substituindo este resultado de volta na série (1.1) é possível dizer que, se f pode ser expandida numa série de potências centrada em $x = x_0$, ela deve ser da forma

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \\ &= f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots \end{aligned}$$

Essa soma é conhecida como série de Taylor da função f em torno do ponto x_0 . Este resultado também é válido quando $n = 0$, bastando convencionar $0! = 1$ e $f^{(0)} = f$.

A série recebe este nome em homenagem ao matemático inglês *Brook Taylor*, que a publicou de forma original em 1715, embora o tema já fosse conhecido por outros matemáticos da época. Apesar dessa dubiedade de autoria, a ideia em representar funções como séries de potências pertence mesmo a Newton.

Tomando-se $x_0 = 0$ na série de Taylor, tem-se as chamadas *séries de Maclaurin*, as quais surgem com frequência no estudo da representação de funções por séries de potências. Apesar de ser um caso particular das séries de Taylor, essa série ficou assim conhecida devido ao matemático escocês *Colin Maclaurin* (1698-1746), que a popularizou numa de suas obras, quatro anos antes de seu falecimento. Observe, por exemplo, que a série de Maclaurin para a função $f(x) = e^x$ (ou série de Taylor para f em $x_0 = 0$) é

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad (1.2)$$

pois $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, para todo n , fazendo com que os coeficientes da série de Taylor (isto é, da série de Maclaurin) para f sejam da forma $a_n = 1/n!$. Se existe uma série de potências que possa representar a função $f(x) = e^x$ em torno do ponto $x_0 = 0$, esta corresponde à série de Taylor (1.2).

1.2 Polinômios de Taylor

As séries de Taylor desempenham papel importante no meio científico, talvez pela simplicidade na manipulação algébrica de seus termos para aproximar funções ao redor de pontos pré-estabelecidos [6]. Para isso se faz necessário truncar a série após um de seus termos, o que resulta numa soma finita, composta pelos termos iniciais da referida série. A essa soma finita dá-se o nome de *polinômio de Taylor*. Assim, a expressão

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

é o polinômio de Taylor de ordem n , formado pela soma dos $n + 1$ primeiros termos da série de Taylor de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, em torno de $x = x_0$, com $n \in \mathbb{N}$.

Se a série de Taylor de uma função f converge, o erro que se comete quando um de seus polinômios T_n é utilizado para representar f é chamado de *resto*, denotado por R_n . É notório que $R_n = f - T_n$. Quando $n \rightarrow \infty$, tem-se que $R_n \rightarrow 0$ e, conseqüentemente, $T_n \rightarrow f$. Ou seja, quanto maior o valor de n , melhor a aproximação de f por T_n , ao ponto do crescimento indefinido de n acarretar a igualdade da função com sua série de Taylor.

Embora se saiba que uma boa aproximação deva ser relativamente precisa ao longo do intervalo no qual a função seja contínua, a aproximação de funções pelos polinômios de Taylor concentra sua precisão próxima de um ponto x_0 previamente escolhido [6].

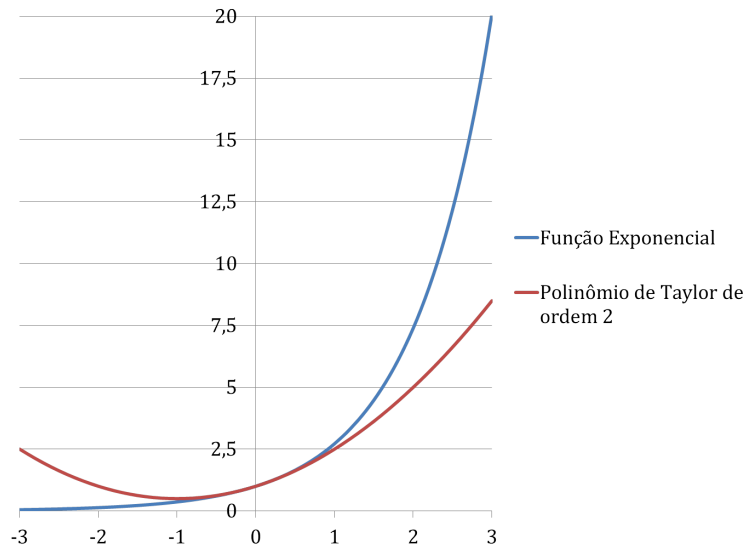


Figura 1.1: Polinômio de Taylor de ordem 2 da função $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$.

Por exemplo, perceba que a “distância” de T_2 para f em $x = 2$ é maior que em $x = 1$, o que evidencia uma boa aproximação à função em pontos mais próximos de $x_0 = 0$.

Também é possível verificar que os polinômios de Taylor convergem de forma “muito lenta” para o valor pretendido, fato este considerado uma de suas principais desvantagens quando são utilizados para aproximar funções [6]. Veja:

Tabela 1.1: Valores numéricos do polinômio de Taylor da função $f(x) = e^x$ ao redor do ponto $x_0 = 0$.

x	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
$T_0(x)$	1.000000000	1.000000000	1.000000000
$T_1(x)$	2.000000000	3.000000000	4.000000000
$T_2(x)$	2.500000000	5.000000000	8.500000000
$T_3(x)$	2.666666667	6.333333333	13.00000000
$T_4(x)$	2.708333333	7.000000000	16.37500000
$T_5(x)$	2.716666667	7.266666667	18.40000000
$T_6(x)$	2.718055556	7.355555556	19.41250000
$T_7(x)$	2.718253968	7.380952381	19.84642857
$T_8(x)$	2.718278770	7.387301587	20.00915179
e^x	2.718281828	7.389056099	20.08553692

Perceba que para $x = 1$, por exemplo, o polinômio de Taylor de ordem 8, ao redor de $x_0 = 0$, dá uma aproximação de quatro casas decimais para f . Já para $x = 2$ e $x = 3$, o polinômio de Taylor de mesma ordem aproxima o valor da função com duas e uma casa decimal, respectivamente. Portanto, é possível afirmar que quanto mais próximo o valor de x estiver de $x_0 = 0$, a rapidez em aproximar o valor da função $f(x) = e^x$ por meio de um polinômio de Taylor é maior.

Segue abaixo a expansão em série de Taylor para outras funções elementares¹ em torno do ponto $x_0 = 0$. Estas, juntamente com a série (1.2) da função exponencial, serão utilizadas na comparação com o método proposto neste trabalho.

Tabela 1.2: Séries de Taylor para algumas funções elementares.

FUNÇÃO	SÉRIE DE TAYLOR
Logarítmica	$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$
Trigonométrica	$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \dots$
Raiz Quadrada	$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} - \dots$

Observe que para haver a expansão em série de Taylor da função logarítmica foi necessário considerar seu logaritmando igual a $(1+x)$. Assim evita-se denominadores nulos nos termos da série, permitindo sua análise ao redor do ponto $x_0 = 0$. O mesmo acontece para a função raiz quadrada.

¹Foi apresentada apenas a expansão em série de Taylor da função trigonométrica inversa da tangente, com o intuito de compará-la com a fração contínua associada desta série na aproximação do valor de π , conforme será visto no capítulo 4. A expansão para as demais funções trigonométricas, tanto as simples como as inversas e hiperbólicas, foi intencionalmente omitida.

Capítulo 2

Frações Contínuas

Os traços mais antigos da ideia de uma fração contínua se perdem no tempo, apesar do *algoritmo de Euclides* ter sido nomeado como seu desenvolvimento inicial. Sua história é bastante ampla, abrangendo mais de dois mil anos, fato este que a torna uma das mais longas teorias matemáticas existentes.

Essa epopeia na história da matemática pode ser abreviada pela metade se for considerado que o tema passou pelo rigor matemático somente a partir do século XVII. Antes dessa formalização as frações contínuas vinham sendo utilizadas basicamente em aplicações específicas, como na prova da transcendência de π , na demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$, etc.

Além dessas especificidades, as frações contínuas desempenharam papel importante no desenvolvimento de alguns ramos da matemática, como na astronomia e na arquitetura, quando foi utilizada para dar uma aproximação à solução das *equações Diofantinas* e das *equações de Pell*. Ainda hoje se observa grande interesse pelo tema em muitos campos da matemática pura e aplicada, principalmente na análise numérica, pois fornecem aproximações computacionais para diversos tipos de funções e, em muitos casos, servem de base para métodos de aceleração da convergência dessas funções. Para um aprofundamento nos fatos de sua história recomenda-se a leitura de [4].

2.1 Preliminares

De forma intuitiva, fração contínua é uma fração cujo denominador é formado pela soma de um inteiro com uma fração, cujo denominador também é formado pela soma de um inteiro com uma fração, que mais uma vez é formado pela soma de um inteiro com uma fração, e assim por diante. Ou seja, fração contínua é uma expressão denotada por

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \frac{a_4}{b_4 + \dots}}}} := b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_4}{b_4} + \dots \quad (2.1)$$

Os números a_n e b_n , com n inteiro, são respectivamente chamados de numeradores e denominadores parciais da fração contínua, e a fração a_n/b_n representa seu n -ésimo quociente parcial. Uma fração contínua é do tipo finita quando possui uma quantidade limitada de denominadores parciais, enquanto que a do tipo infinita possui uma infinidade deles. As finitas representam os números racionais, enquanto as infinitas, os irracionais.

Considere o racional $318/76$. Observe que

$$\begin{aligned} 318 &= 76 \cdot 4 + 14 &\Leftrightarrow & 318/76 = 4 + 14/76 \\ 76 &= 14 \cdot 5 + 6 &\Leftrightarrow & 76/14 = 5 + 6/14 \\ 14 &= 6 \cdot 2 + 2 &\Leftrightarrow & 14/6 = 2 + 2/6 \\ 6 &= 2 \cdot 3 + 0 \end{aligned}$$

A partir da primeira equivalência determina-se a fração contínua para $318/76$ substituindo sucessivamente as demais equivalências, conforme a seguinte manipulação:

$$\begin{aligned} \frac{318}{76} &= 4 + \frac{14}{76} \\ &= 4 + \frac{1}{\frac{76}{14}} = 4 + \frac{1}{5 + \frac{6}{14}} = 4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{\frac{14}{6}}} = 4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{2}{6}}} = 4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} \end{aligned}$$

Este processo possui estreita ligação com o algoritmo de Euclides para determinação do máximo divisor comum entre dois números inteiros quaisquer. Mesmo diante da coincidência não se pode afirmar que Euclides o tenha utilizado como ferramenta para descrever a descoberta de seu algoritmo [4].

Suponha agora que se queira encontrar a fração contínua para o irracional $\sqrt{2}$. Observe a seguinte manipulação de radicais:

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}} = \dots$$

Continuando com o processo de substituir $\sqrt{2} + 1$ por $2 + (\sqrt{2} - 1)$ e, em cada uma dessas substituições, tomar $\sqrt{2} - 1$ como $1/(\sqrt{2} + 1)$, encontra-se uma infinidade de denominadores parciais b_n iguais a 2, com $n \neq 0$, o que caracteriza a fração contínua para $\sqrt{2}$ ser do tipo infinita.

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \quad (2.2)$$

O truncamento dado à expressão (2.1), imediatamente após o quociente parcial a_n/b_n , resulta nos chamados *convergentes*, denotados por P_n/Q_n , sendo n sua ordem.

Os convergentes podem ser considerados frações contínuas reduzidas, compostas por uma quantidade finita de denominadores parciais. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n/Q_n = k$ existe e é finito, então diz-se que a fração contínua é convergente, sendo k o valor para o qual converge. Os convergentes fornecem aproximações para a fração contínua. Por exemplo, os convergentes da fração contínua (2.2) são dados por

$$\begin{aligned} \frac{P_0}{Q_0} &= 1 & &= \frac{1}{1} = 1 \\ \frac{P_1}{Q_1} &= 1 + \frac{1}{2} & &= \frac{3}{2} = 1,5 \\ \frac{P_2}{Q_2} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & &= \frac{7}{5} = 1,4 \\ \frac{P_3}{Q_3} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & &= \frac{17}{12} = 1,41\bar{6} \\ \frac{P_4}{Q_4} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & &= \frac{41}{29} \approx 1,4138 \\ &\vdots & &\vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

Observe que a fração contínua (2.2) representa o número $\sqrt{2} \approx 1,414213562\dots$. Os convergentes dessa fração contínua são aproximações para este valor, ora por falta, ora por excesso. Se o convergente $P_3/Q_3 = 17/12 = 1,41\bar{6}$ for utilizado para representar a referida fração, comete-se um erro por excesso de aproximadamente 0,002. Se essa representação for dada pelo convergente $P_4/Q_4 = 41/29 \approx 1,4138$, o erro passa a ser por falta, com valor aproximado de 0,0004. Isso leva a conjecturar que, quanto maior for a ordem de um convergente, mais próximo seu valor estará do número que a fração contínua representa. E mais, quando dispostos sobre a reta numérica, os convergentes obedecem a um movimento espiral que converge para esse valor, como visto na figura abaixo:

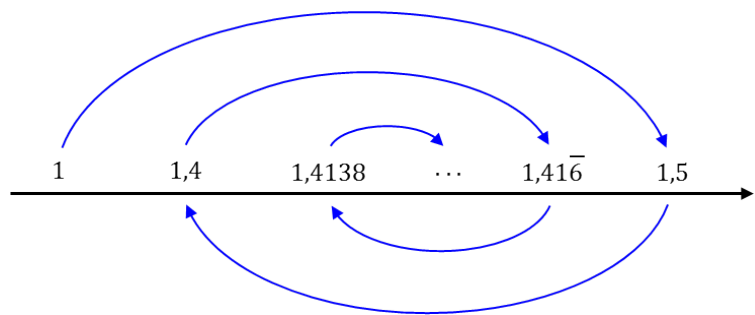


Figura 2.1: Convergentes da fração contínua de $\sqrt{2}$ dispostos sobre a reta.

Essa convergência é assegurada devido ao fato da soma $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2 + 2 + \dots$ divergir. Juntamente com as propriedades fundamentais, esse e outros critérios de convergência serão abordados no decorrer deste capítulo, reunindo o acervo necessário para o desenvolvimento do tema.

2.2 Propriedades Fundamentais

Antes de estudar a convergência de frações contínuas, faz-se necessário apresentar suas propriedades fundamentais, as quais baseiam toda sua teoria.

Considere a fração contínua (2.1). Como visto anteriormente, o truncamento dado após cada quociente parcial dá origem a seus convergentes, representados por

$$\begin{aligned} \frac{P_0}{Q_0} &= b_0 \\ \frac{P_1}{Q_1} &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} \\ \frac{P_2}{Q_2} &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} \\ \frac{P_3}{Q_3} &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Reescrevendo-os em forma de fração, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{P_0}{Q_0} &= \frac{b_0}{1} \\ \frac{P_1}{Q_1} &= \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1} \\ \frac{P_2}{Q_2} &= \frac{b_0 b_1 b_2 + b_0 a_2 + b_2 a_1}{b_1 b_2 + a_2} = \frac{b_2(b_0 b_1 + a_1) + b_0 a_2}{b_1 b_2 + a_2} \\ \frac{P_3}{Q_3} &= \frac{b_0 b_1 b_2 b_3 + b_0 b_1 a_3 + b_0 b_3 a_2 + b_2 b_3 a_1 + a_1 a_3}{b_1 b_2 b_3 + b_1 a_3 + b_3 a_2} = \frac{b_3[b_2(b_0 b_1 + a_1) + b_0 a_2] + a_3(b_0 b_1 + a_1)}{b_3(b_1 b_2 + a_2) + b_1 a_3} \end{aligned}$$

.....

Se for considerado que $P_0 = b_0$, $Q_0 = 1$, $P_1 = b_0 b_1 + a_1$ e $Q_1 = b_1$, é possível reescrever o convergente de ordem dois como

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{b_2 P_1 + a_2 P_0}{b_2 Q_1 + a_2 Q_0}.$$

Da mesma forma, se $P_2 = b_2(b_0 b_1 + a_1) + b_0 a_2$ e $Q_2 = b_1 b_2 + a_2$, tem-se que

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{b_3 P_2 + a_3 P_1}{b_3 Q_2 + a_3 Q_1}.$$

Observe que a escrita destes convergentes segue um mesmo padrão. Tendo em vista essa regularidade, seria possível afirmar que

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}}{b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}}?$$

A resposta para essa pergunta é dada pelo teorema que rege a formação dos convergentes de uma fração contínua, uma das propriedades fundamentais deste tema.

Teorema 2.2.1 (Formação dos Convergentes). *Considere as seguintes recorrências:*

$$\begin{cases} P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2} \\ Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2} \end{cases}, \text{ com } n \geq 1. \quad (2.3)$$

Assuma, por definição, que $P_{-1} = 1$, $P_0 = b_0$, $Q_{-1} = 0$, $Q_0 = 1$ e $a_n \neq 0$, para $n \geq 1$. Logo, o n -ésimo convergente C_n de uma fração contínua é escrito na forma $C_n = P_n/Q_n$, com $n = 0, 1, 2, \dots$

Demonstração. Será provado por indução finita. O resultado é válido para $n = 1$, pois

$$\begin{aligned} P_1 &= b_1 P_0 + a_1 P_{-1} = b_1(b_0) + a_1(1) = b_0 b_1 + a_1 \\ Q_1 &= b_1 Q_0 + a_1 Q_{-1} = b_1(1) + a_1(0) = b_1 \end{aligned}$$

e portanto,

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} = C_1.$$

Agora, suponha que o resultado também seja válido para $n \leq k$, ou seja, que

$$C_k = \frac{b_k P_{k-1} + a_k P_{k-2}}{b_k Q_{k-1} + a_k Q_{k-2}} = \frac{P_k}{Q_k}.$$

Será mostrado que a expressão também é válida para $n = k + 1$. Para tanto, observe que

$$C_{k+1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_k}{b_k} + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_k}{b_k^*} = C_k^*,$$

onde $b_k^* = a_k + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$ e C_k^* é o k -ésimo convergente de

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_k}{b_k^*} + \frac{a_{k+2}}{b_{k+2}} + \dots$$

Assim, aplicando a hipótese de indução para C_k^* , tem-se que

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= C_k^* = \frac{\left(b_k + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right) P_{k-1} + a_k P_{k-2}}{\left(b_k + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right) Q_{k-1} + a_k Q_{k-2}} = \frac{b_k P_{k-1} + a_k P_{k-2} + \left(\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right) P_{k-1}}{b_k Q_{k-1} + a_k Q_{k-2} + \left(\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right) Q_{k-1}} \\ &= \frac{P_k + \left(\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right) P_{k-1}}{Q_k + \left(\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right) Q_{k-1}} = \frac{b_{k+1} P_k + a_{k+1} P_{k-1}}{b_{k+1} Q_k + a_{k+1} Q_{k-1}} = \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio da indução finita, a equação é válida para todo n inteiro. ■

As expressões (2.3) são conhecidas por *Fórmulas de Wallis*, em homenagem ao matemático inglês *John Wallis* (1616-1703), o grande precursor do estudo formal das frações contínuas [1]. Além dessa propriedade, destaca-se também a seguinte:

Teorema 2.2.2 (Diferença entre Convergentes Consecutivos). *Seja P_{n-1}/Q_{n-1} e P_n/Q_n dois convergentes consecutivos de uma fração contínua, com $n \geq 1$, vale a relação*

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = (-1)^{n+1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_n Q_{n-1}}. \quad (2.4)$$

Demonstração. Tomando o primeiro membro da igualdade (2.4), tem-se

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n}{Q_n Q_{n-1}}.$$

Seja $D_n = P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n$. De acordo com as expressões (2.3), tem-se que

$$\begin{aligned} D_n &= (b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}) Q_{n-1} - P_{n-1} (b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}) \\ &= -a_n (P_{n-1} Q_{n-2} - P_{n-2} Q_{n-1}) = -a_n D_{n-1}. \end{aligned}$$

Essa recorrência resulta na seguinte sequência de igualdades:

$$\begin{aligned} D_n &= -a_n D_{n-1} = (-a_n)(-a_{n-1}) D_{n-2} = \dots = (-a_n)(-a_{n-1}) \dots (-a_1) D_0 \\ &= (-a_n)(-a_{n-1}) \dots (-a_1) (P_0 Q_{-1} - P_{-1} Q_0) = (-a_n)(-a_{n-1}) \dots (-a_1) (-1) \end{aligned}$$

Portanto, $D_n = (-1)^{n+1} a_1 a_2 \dots a_n$. Assim,

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = (-1)^{n+1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_n Q_{n-1}}. \quad \blacksquare$$

A expressão (2.4) é conhecida por *Fórmula do Determinante* [1]. Por meio dela é possível expressar o n -ésimo convergente de uma fração contínua de um modo diferente do fornecido pelas fórmulas de Wallis, como visto a seguir:

Teorema 2.2.3. *Se $Q_k \neq 0$, com $1 \leq k \leq n$, então*

$$\frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_{k-1} Q_k}. \quad (2.5)$$

Demonstração. Observe que:

$$\begin{aligned} \frac{P_n}{Q_n} &= \left(\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right) + \left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} \right) + \dots + \left(\frac{P_1}{Q_1} - \frac{P_0}{Q_0} \right) + \frac{P_0}{Q_0} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{a_1 \dots a_n}{Q_n Q_{n-1}} + (-1)^n \frac{a_1 \dots a_{n-1}}{Q_{n-1} Q_{n-2}} + \dots + (-1)^1 \frac{a_1}{Q_1 Q_0} + b_0, \end{aligned}$$

que representa a n -ésima soma parcial da série $b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{a_1 \dots a_k}{Q_{k-1} Q_k}$. \blacksquare

Essa soma, conhecida por *Série de Euler-Minding*, foi utilizada para associar séries infinitas e frações contínuas [5].

2.3 Convergência

A convergência de frações contínuas é um assunto bastante amplo, estudado desde o início do século XIX. Surgiu da necessidade em determinar o intervalo que uma fração contínua converge quando estão representando funções [4]. Em geral, esse intervalo é maior que o da série infinita associada, fato este que permite aplicar as frações contínuas na otimização de algoritmos computacionais [6].

Atualmente, o estudo da convergência está voltado às condições relacionadas a uma fração contínua de numeradores e denominadores parciais compostos por funções de uma variável complexa [3]. Embora seja de suma importância para as aplicações atuais, seu estudo foge ao escopo deste trabalho. A ênfase será dada em torno da convergência clássica dessas frações contínuas, uma vez que dela se extrai a base para as demais teorias [9].

Observa-se que o conceito de convergência está intrinsecamente ligado ao processo de construção das frações contínuas, uma vez que os convergentes representam aproximações para seu valor. A relação de ordem que existe entre esses convergentes explica o movimento espiral representado na figura (2.1).

Teorema 2.3.1 (Monotonicidade dos Convergentes). *Numa fração contínua cujos numeradores e denominadores parciais são positivos,*

i) os convergentes de ordem par crescem e os de ordem ímpar decrescem, à medida que suas ordens aumentam.

ii) os convergentes de ordem ímpar são sempre maiores que os de ordem par.

Demonstração. Primeiramente é preciso saber a relação que existe entre convergentes cujas ordens difiram de duas unidades. Substituindo n por $n + 1$ na equação (2.4) tem-se

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = (-1)^{n+2} \frac{a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}}{Q_n Q_{n+1}} = (-1)^n \frac{a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}}{Q_n Q_{n+1}}. \quad (2.6)$$

Somando as equações (2.4) e (2.6), obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} &= (-1)^n \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_n} \left(\frac{a_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{1}{Q_{n-1}} \right) \\ &= (-1)^n \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{Q_{n-1} Q_n Q_{n+1}} (a_{n+1} Q_{n-1} - Q_{n+1}). \end{aligned}$$

Na diferença contida nos parênteses, substituindo Q_{n+1} por $b_{n+1} Q_n + a_{n+1} Q_{n-1}$, tem-se

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = (-1)^{n+1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n b_{n+1}}{Q_{n-1} Q_{n+1}}. \quad (2.7)$$

Agora, observe que:

(i) substituindo n por $2n$ em (2.7), tem-se que

$$\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} - \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} = (-1)^{2n+1} \frac{a_1 a_2 \dots a_{2n} b_{2n+1}}{Q_{2n-1} Q_{2n+1}} = -\frac{a_1 a_2 \dots a_{2n} b_{2n+1}}{Q_{2n-1} Q_{2n+1}} < 0 \Leftrightarrow \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} < \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}.$$

Isso mostra que o valor dos convergentes de ordem ímpar decresce à medida que suas ordens aumentam. De modo análogo, substituindo n por $2n - 1$ em (2.7), tem-se

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} - \frac{P_{2n-2}}{Q_{2n-2}} = (-1)^{2n} \frac{a_1 a_2 \dots a_{2n-1} b_{2n}}{Q_{2n-2} Q_{2n}} = \frac{a_1 a_2 \dots a_{2n-1} b_{2n}}{Q_{2n-2} Q_{2n}} > 0 \Leftrightarrow \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} > \frac{P_{2n-2}}{Q_{2n-2}},$$

mostrando que o convergente de ordem par cresce à medida que sua ordem aumenta.

(ii) Substituindo n por $2n + 1$ na equação (2.4) tem-se que

$$\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} - \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = (-1)^{2n+2} \frac{a_1 a_2 \dots a_{2n+1}}{Q_{2n+1} Q_{2n}} = \frac{a_1 a_2 \dots a_{2n+1}}{Q_{2n+1} Q_{2n}} > 0 \Leftrightarrow \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} > \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}.$$

Este resultado implica dizer que, entre dois convergentes consecutivos, o de ordem ímpar é sempre maior que o de ordem par. Porém, é possível afirmar que um convergente de ordem ímpar é maior que qualquer convergente de ordem par?

Sejam n e k naturais. Pelo princípio da boa ordenação, $k < n$, $k = n$ ou $k > n$. Suponha, por contradição, que $\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} < \frac{P_{2k}}{Q_{2k}}$.

Se $k = n$, tem-se $\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} < \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$, o que é um absurdo, pois contraria (ii).

Se $k < n$, então $2k < 2n$. Como a sequência dos convergentes de ordem par é crescente, então $\frac{P_{2k}}{Q_{2k}} < \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$. Logo, $\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} < \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} < \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$, o que também contraria (ii).

Se $k > n$, então $2k + 1 > 2n + 1$. Como a sequência dos convergentes de ordem ímpar é decrescente, então $\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} < \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$. Logo, $\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} < \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} < \frac{P_{2k}}{Q_{2k}}$, contrariando (ii).

Portanto, os convergentes de ordem ímpar são sempre maiores que os de ordem par. ■

Os resultados que compõem o teorema (2.3.1) também podem ser representados por meio da seguinte sucessão de desigualdades:

$$\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \frac{P_4}{Q_4} < \dots < \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} < \dots < \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} < \dots < \frac{P_5}{Q_5} < \frac{P_3}{Q_3} < \frac{P_1}{Q_1}.$$

De acordo com o item (ii) do teorema (2.3.1), os convergentes de ordem ímpar de uma fração contínua são sempre maiores que os convergentes de ordem par. Assim, é possível afirmar que a sequência dos convergentes de ordem ímpar é limitada inferiormente, enquanto a dos convergentes de ordem par, superiormente. Ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n}/Q_{2n}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n+1}/Q_{2n+1}$ existem. Assim,

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} \leq \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}.$$

Caso $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n}/Q_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{2n+1}/Q_{2n+1}$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n/Q_n = F$, com $F \in \mathbb{R}$. Quando isto ocorre, a fração contínua converge, e seu valor F , ou está compreendido entre dois convergentes consecutivos, ou coincide com um destes [8].

$$\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \frac{P_4}{Q_4} < \dots < \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} \leq F \leq \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} < \dots < \frac{P_5}{Q_5} < \frac{P_3}{Q_3} < \frac{P_1}{Q_1}.$$

Do contrário, se $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n/Q_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n/Q_n = -\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n/Q_n$ não existir, a fração contínua diverge.

São muitos os critérios para avaliar a convergência de uma fração contínua. Essa diversidade exige que se faça uma seleção das condições que os tornam suficientes.

Primeiramente, observe que o termo b_0 não influencia a análise da convergência de uma fração contínua na forma (2.1). Assim, seu estudo será feito apenas por meio da parte fracionária, também chamada “cauda” da fração contínua.

Definição 2.3.1. *Uma fração contínua*

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_4}{b_4} + \dots$$

é de classe I quando a_n e b_n são, ambos, positivos, para $n \geq 1$.

Observe, por exemplo, que o resultado do teorema (2.3.1) está voltado para frações contínuas de classe I. Antes de revelar um critério de convergência para frações contínuas desta classe, serão apresentados dois resultados necessários para sua demonstração.

Lema 2.3.1. *Numa fração contínua de classe I em que os numeradores parciais são todos iguais a 1, tem-se que $Q_n Q_{n-1} < [(1 + b_1)(1 + b_2) \dots (1 + b_n)]^2$, para $n \geq 2$.*

Demonstração. De acordo com o teorema (2.2.1), numa fração contínua de classe I,

$$\begin{aligned} Q_2 &= b_2 Q_1 + Q_0 \\ &= b_2(b_1 Q_0 + Q_{-1}) + Q_0 \\ &= b_1 b_2 + 1 < b_1 b_2 + 1 + b_1 + b_2 = (1 + b_1)(1 + b_2). \end{aligned}$$

Suponha que a relação seja válida para $2 \leq k \leq n$, ou seja, que

$$Q_k < (1 + b_1)(1 + b_2) \dots (1 + b_k).$$

Observe que, para $n = k + 1$, tem-se

$$\begin{aligned} Q_{k+1} = b_{k+1} Q_k + Q_{k-1} &< b_{k+1} [(1 + b_1) \dots (1 + b_k)] + (1 + b_1) \dots (1 + b_{k-1}) \\ &= (1 + b_1) \dots (1 + b_{k-1}) [b_{k+1} (1 + b_k) + 1] \\ &< (1 + b_1) \dots (1 + b_{k-1}) [b_{k+1} (1 + b_k) + (1 + b_k)] \\ &= (1 + b_1) \dots (1 + b_k) (1 + b_{k+1}). \end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio da indução finita, $Q_n < (1 + b_1)(1 + b_2) \dots (1 + b_n)$, para todo $n \geq 2$. Agora, é fácil ver que

$$\begin{aligned} Q_n Q_{n-1} &< [(1 + b_1) \dots (1 + b_{n-1})]^2 (1 + b_n) \\ &< [(1 + b_1) \dots (1 + b_{n-1})]^2 (1 + b_n)^2 = [(1 + b_1) \dots (1 + b_{n-1})(1 + b_n)]^2. \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. ■

Lema 2.3.2. *Numa fração contínua de classe I de numeradores parciais iguais a 1, tem-se $Q_n > 1$, para todo $n \geq 2$.*

Demonstração. A relação é válida para $n = 2$, pois $Q_2 = b_2 Q_1 + Q_0 = b_2 b_1 + 1 > 1$. Suponha que também seja válida para $2 \leq k \leq n$, ou seja, que $Q_k > 1$. Será visto que a relação se mantém válida para $n = k + 1$. De acordo com a hipótese de indução, observe que $Q_{k+1} = b_{k+1} Q_k + Q_{k-1} > b_{k+1} + 1 > 1$. Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, a relação é válida para todo $n \geq 2$. ■

Teorema 2.3.2. *Uma fração contínua de classe I em que $a_n = 1$, com $n \geq 1$, converge se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.*

Demonstração. Considere convergente uma fração contínua de classe I em que seus numeradores parciais são todos iguais a 1. Pelo lema (2.3.1) tem-se, para $n \geq 2$, que $Q_n Q_{n-1} < [(1 + b_1)(1 + b_2) \dots (1 + b_n)]^2$. É sabido que o produto $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + b_n)$ converge se, e somente se, a soma $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge [12]. Se essa soma converge, o produto também converge e, sendo p seu limite, tem-se que

$$Q_n Q_{n-1} < p^2 \Leftrightarrow \frac{1}{Q_n Q_{n-1}} > \frac{1}{p^2}.$$

Aplicando a equação (2.4) numa fração contínua de classe I, tem-se que

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = (-1)^{n+1} \frac{1}{Q_n Q_{n-1}} \Leftrightarrow \left| \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right| = \frac{1}{Q_n Q_{n-1}} > \frac{1}{p^2}.$$

Ou seja, a fração contínua não converge, pois, como visto, isso só acontece quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \text{ ou melhor, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right) = 0.$$

Portanto, para a fração contínua convergir é necessário que a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverja.

Por outro lado, suponha que a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ seja divergente. Como a fração contínua de classe I considerada possui todos os numeradores parciais iguais a 1, é válida a relação $Q_{2n+1} = b_{2n+1} Q_{2n} + Q_{2n-1}$. Expandindo Q_{2n-1} de modo análogo, e repetindo o processo para todos os Q de ordem ímpar encontrados, obtêm-se

$$Q_{2n+1} = b_{2n+1} Q_{2n} + b_{2n-1} Q_{2n-2} + \dots + b_{2n-2k-1} Q_{2n-2k-2} + \dots + b_1 Q_0.$$

De acordo com o lema (2.3.2), $Q_n > 1$, para $n \geq 2$. Isso implica dizer que

$$Q_{2n+1} > (b_{2n+1} + b_{2n-1} + \cdots + b_1) Q_0.$$

Da mesma forma, nota-se também que $Q_{2n} > (b_{2n} + b_{2n-2} + \cdots + b_2) Q_1$. Como, por hipótese, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n+1}$ divergem. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{Q_n Q_{n-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right| = 0.$$

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n/Q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{n-1}/Q_{n-1}$, ou seja, a fração contínua converge. ■

Este é considerado o primeiro resultado sobre convergência de frações contínuas. Foi encontrado, de forma independente, por *Ludwig Seidel* (1821-1896), em 1846, e por *Abraham Stern* (1807-1894), em 1848. Tais matemáticos foram responsáveis pela descoberta de vários outros critérios, os quais foram refinados por *Alfred Pringsheim* (1850-1941), em 1898. Este contribuiu com muitos outros resultados sobre convergência [4].

Definição 2.3.2. *Uma fração contínua*

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} - \frac{\alpha_2}{\beta_2} - \frac{\alpha_3}{\beta_3} - \frac{\alpha_4}{\beta_4} - \cdots$$

é de classe II se α_n e β_n são, ambos, positivos, com $n \geq 1$.

Note que também é possível escrever uma fração contínua de classe II como

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} + \frac{\alpha_3}{\beta_3} + \frac{\alpha_4}{\beta_4} + \cdots$$

onde $\beta_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 > 0$ e $\alpha_n < 0$, para $n \geq 2$.

Serão apresentadas condições suficientes de convergência para dois casos específicos de frações contínuas de classe II, cada um antecedido por um lema que servirá de emprego em suas demonstrações.

Lema 2.3.3. *Numa fração contínua de classe II em que os numeradores parciais são todos iguais a 1, se $\beta_n \geq 2$, para todo n inteiro, então $Q_n \geq n + 1$.*

Demonstração. Assuma que $\beta_n \geq 2$. Primeiramente será mostrado, por indução, que essa hipótese garante que $Q_n \geq 1 + Q_{n-1}$. Observe que a relação é válida para $n = 2$, pois

$$Q_1 = \beta_1 \geq 2 \quad \text{e} \quad Q_2 = \beta_2 Q_1 - 1 \geq 2Q_1 - 1 \geq 1 + Q_1.$$

Suponha que a relação seja válida para $2 \leq k \leq n$, ou seja, que $Q_k \geq 1 + Q_{k-1}$. Assim,

$$Q_{k+1} = \beta_{k+1} Q_k - Q_{k-1} \geq \beta_{k+1} Q_k - (Q_k - 1) = (\beta_{k+1} - 1) Q_k + 1 \geq 1 + Q_k.$$

Portanto, a relação é válida para qualquer n inteiro. Agora, basta observar que

$$Q_n \geq 1 + Q_{n-1} \geq 2 + Q_{n-2} \geq 3 + Q_{n-3} \geq \cdots \geq n + Q_0 = n + 1. \quad \blacksquare$$

Teorema 2.3.3. *Seja F uma fração contínua de classe II em que os numeradores parciais são todos iguais a 1. Se $\beta_n \geq 2$, para todo n inteiro, então F é convergente.*

Demonstração. É importante observar da definição (2.3.2) que, para esse tipo de fração contínua, $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_n = -1$, com $n \geq 2$, pois

$$\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_3} - \frac{1}{\beta_4} - \cdots = \frac{1}{\beta_1} + \frac{-1}{\beta_2} + \frac{-1}{\beta_3} + \frac{-1}{\beta_4} + \cdots$$

Assim, de (2.4), tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{Q_1} - \frac{P_0}{Q_0} &= (-1)^{1+1} \frac{1}{Q_1 Q_0} = \frac{(-1)^2 \times 1}{Q_1 Q_0} = \frac{1}{Q_1 Q_0} \\ \frac{P_2}{Q_2} - \frac{P_1}{Q_1} &= (-1)^{2+1} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{Q_2 Q_1} = \frac{(-1)^3 \times 1 \times (-1)}{Q_2 Q_1} = \frac{1}{Q_2 Q_1} \\ \frac{P_3}{Q_3} - \frac{P_2}{Q_2} &= (-1)^{3+1} \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{Q_3 Q_2} = \frac{(-1)^4 \times 1 \times (-1) \times (-1)}{Q_3 Q_2} = \frac{1}{Q_3 Q_2} \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

Isso implica dizer que a diferença entre dois convergentes consecutivos dessa fração contínua é sempre positiva e igual ao inverso do produto de seus denominadores. De acordo com o lema (2.3.3), $Q_n \geq n + 1$, ou seja, $1/Q_n \leq 1/(n + 1)$. Logo, para $n \geq 1$, tem-se

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{1}{Q_n Q_{n-1}} \leq \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right) = 0.$$

Portanto, a fração contínua F converge. \blacksquare

Lema 2.3.4. *Numa fração contínua de classe II em que os denominadores parciais são todos iguais a 1 vale a relação $Q_n \geq (n + 1)/2^n$.*

Demonstração. A segunda fórmula de Wallis para frações contínuas desse tipo é dada por $Q_n = Q_{n-1} + \alpha_n Q_{n-2}$, da qual se realiza a seguinte manipulação algébrica:

$$\begin{aligned} Q_n &= \left(\frac{Q_{n-1}}{2} + \frac{Q_{n-1}}{2n} \right) + \left(\frac{Q_{n-1}}{2} - \frac{Q_{n-1}}{2n} \right) + \alpha_n Q_{n-2} \\ &= \left(\frac{n+1}{2n} \right) Q_{n-1} + \left(\frac{n-1}{2n} \right) Q_{n-1} + \alpha_n Q_{n-2}. \end{aligned}$$

Assim, para $n \geq 1$, tem-se que

$$Q_n \geq \left(\frac{n+1}{2n} \right) Q_{n-1}.$$

Agora, observe que dessa desigualdade obtêm-se

$$\begin{aligned}
Q_n &\geq \left(\frac{n+1}{2n}\right) \cdot Q_{n-1} \\
&\geq \left(\frac{n+1}{2n}\right) \cdot \left(\frac{n}{2n-2}\right) \cdot Q_{n-2} \\
&\geq \left(\frac{n+1}{2n}\right) \cdot \left(\frac{n}{2n-2}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{2n-4}\right) \cdot Q_{n-3} \\
&\vdots \\
&\geq \left(\frac{n+1}{2n}\right) \cdot \left(\frac{n}{2n-2}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{2n-4}\right) \cdots \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{2} \cdot Q_0 = \frac{(n+1)!}{2^n(n!)} = \frac{n+1}{2^n}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 2.3.4. *Seja F uma fração contínua de classe II em que os denominadores parciais são todos iguais a 1. Se $0 < \alpha_n \leq 1/4$, para todo n inteiro, então F converge e $0 < F \leq 1/2$.*

Demonstração. Conforme a expressão (2.4) e o apontamento feito no início da prova do teorema (2.3.3), para uma fração contínua de classe II em que $\beta_n = 1$, para $n \geq 1$,

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}{Q_n Q_{n-1}}.$$

Assuma, por hipótese, que $0 < \alpha_n \leq 1/4$. Do lema (2.3.4), sabe-se que $Q_n \geq (n+1)/2^n$, ou melhor, que $1/Q_n \leq 2^n/(n+1)$. Logo,

$$0 < \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \leq \frac{(1/4)^n}{Q_n Q_{n-1}} \leq \left(\frac{1}{2^{2n}}\right) \cdot \left(\frac{2^n}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{2^{n-1}}{n}\right) = \frac{1}{2n^2 + 2n}.$$

Observe que, se $n \rightarrow \infty$, então $1/(2n^2 + 2n) \rightarrow 0$. Logo, pelo teorema do confronto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right) = 0.$$

Portanto, a fração contínua converge.

Por fim, observe também que

$$\begin{aligned}
F = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{P_0}{Q_0} + \left(\frac{P_1}{Q_1} - \frac{P_0}{Q_0} \right) + \left(\frac{P_2}{Q_2} - \frac{P_1}{Q_1} \right) + \cdots + \left(\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{P_0}{Q_0} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} \right) \right].
\end{aligned}$$

Sabe-se, por definição, que $b_0 = 0$, logo, $P_0/Q_0 = 0$. Além disso,

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} \right) \leq \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2k(k+1)} \right] = \frac{1}{2}.$$

Portanto, conclui-se que

$$0 < F = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{P_0}{Q_0} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} \right) \right] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k(k+1)} \right] = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

Muitos matemáticos encontraram a prova para este teorema, mas a primeira foi dada em 1865, por *Theodor Worpitzky* (1835-1895) [4]. A seguir, apresenta-se uma condição suficiente para a convergência de uma fração contínua em sua forma geral (2.1), com $b_0 = 0$, demonstrada por Pringsheim, em 1899.

Teorema 2.3.5. *Seja F uma fração contínua qualquer. Se $|b_n| \geq |a_n| + 1$, com $n \geq 1$, então F converge e $0 < F \leq 1$.*

Demonstração. Assuma, por hipótese, que $|b_n| \geq |a_n| + 1$, com $n \geq 1$. Sabe-se, de (2.3), que $Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}$. Logo,

$$|Q_n| = |b_n| |Q_{n-1}| + |a_n| |Q_{n-2}| \geq |b_n| |Q_{n-1}| - |a_n| |Q_{n-2}| \geq |b_n| |Q_{n-1}| - (|b_n| - 1) |Q_{n-2}|.$$

Subtraindo $|Q_{n-1}|$ de ambos os membros da desigualdade acima, tem-se

$$|Q_n| - |Q_{n-1}| \geq (|b_n| - 1)(|Q_{n-1}| - |Q_{n-2}|).$$

Repetindo o procedimento para todas as diferenças de Q surgidas nos parênteses do lado direito da desigualdade, obtêm-se

$$|Q_n| - |Q_{n-1}| \geq (|b_n| - 1) \dots (|b_2| - 1)(|Q_1| - |Q_0|) = \prod_{k=1}^n (|b_k| - 1) \geq \prod_{k=1}^n |a_k|.$$

Dividindo ambos os membros da desigualdade acima por $|Q_n Q_{n-1}|$, obtêm-se

$$\frac{\prod_{k=1}^n |a_k|}{|Q_k Q_{k-1}|} \leq \frac{|Q_n| - |Q_{n-1}|}{|Q_n Q_{n-1}|} = \frac{1}{|Q_{n-1}|} - \frac{1}{|Q_n|}.$$

Isso permite dizer que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{k=1}^n |a_k|}{|Q_k Q_{k-1}|} &\leq \left(\frac{1}{|Q_0|} - \frac{1}{|Q_1|} \right) + \left(\frac{1}{|Q_1|} - \frac{1}{|Q_2|} \right) + \dots + \left(\frac{1}{|Q_{n-1}|} - \frac{1}{|Q_n|} \right) \\ &\leq \frac{1}{|Q_0|} - \frac{1}{|Q_n|} = 1 - \frac{1}{|Q_n|}. \end{aligned}$$

Observe que a expressão do lado esquerdo da desigualdade acima corresponde à série de Euler-Minding, dada por (2.5), com $b_0 = 0$. Como se sabe, essa série equivale ao convergente de ordem n da fração contínua F . Logo, pelo teorema (2.2.3),

$$\left| \frac{P_n}{Q_n} \right| \leq 1 - \frac{1}{|Q_n|}.$$

Note que o lado direito da desigualdade acima possui valor finito não maior que 1. Logo,

$$|F| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{P_n}{Q_n} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{|Q_n|} \right) \leq 1.$$

Portanto, a fração contínua F é convergente e seu valor é tal que $0 < F \leq 1$. ■

Esses critérios não esgotam os casos de convergência existentes, mas servem de base para todos os demais. Para um aprofundamento recomenda-se a leitura de [7], [9] e [15].

2.4 Transformações de Equivalência

Existem formas alternativas de se escrever uma fração contínua, obtidas por manipulações aritméticas em seus termos. Essas são as chamadas transformações de equivalência, muito úteis para se aplicar os critérios de convergência. Elas modificam a forma da fração contínua sem que haja alteração de seu valor [8]. Observe o seguinte lema:

Lema 2.4.1. *Considere duas frações contínuas*

$$F = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \quad e \quad G = d_0 + \frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2} + \dots + \frac{c_n}{d_n}.$$

Sejam P_n/Q_n e C_n/D_n seus respectivos convergentes. Se existe uma sequência de inteiros não nulos $\{r_n\}$, com $r_0 = 1$, tal que $c_n = r_n r_{n-1} a_n$ e $d_n = r_n b_n$, então $C_n = r_1 \dots r_n P_n$ e $D_n = r_1 \dots r_n Q_n$, para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração. Pela similaridade do raciocínio, será demonstrado apenas que $D_n = r_1 \dots r_n Q_n$, ficando a cargo do leitor a prova de que $C_n = r_1 \dots r_n P_n$. Admitindo a hipótese, a igualdade é válida para $n = 1$, pois, da fórmula de Wallis, $D_{-1} = 0$, $D_0 = 1$ e

$$D_1 = d_1 D_0 + c_1 D_{-1} = r_1 b_1 D_0 = r_1 b_1 = r_1 Q_1.$$

Suponha que a igualdade seja verdadeira para $1 \leq k \leq n$, ou seja, que $D_k = r_1 r_2 \dots r_k Q_k$. Observe que para $n = k + 1$ ela também é verdadeira, pois

$$\begin{aligned} D_{k+1} &= d_{k+1} D_k + c_{k+1} D_{k-1} \\ &= (r_{k+1} b_{k+1})(r_1 r_2 \dots r_k Q_k) + (r_{k+1} r_k a_{k+1})(r_1 r_2 \dots r_{k-1} Q_{k-1}) \\ &= r_1 r_2 \dots r_k r_{k+1} (b_{k+1} Q_k + a_{k+1} Q_{k-1}) = r_1 r_2 \dots r_k r_{k+1} Q_{k+1}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio da indução finita, $D_n = r_1 \dots r_n Q_n$, para todo $n \geq 1$. ■

Observe que deste resultado é possível afirmar que, se os numeradores e denominadores parciais de F e G obedecem às igualdades $c_n = r_n r_{n-1} a_n$ e $d_n = r_n b_n$, dada uma certa sequência de inteiros não nulos $\{r_n\}$, então $P_n/Q_n = C_n/D_n$. Essa é a concepção da equivalência entre frações contínuas, definida como segue:

Definição 2.4.1. Duas frações contínuas F e G são equivalentes ($F \equiv G$) quando seus respectivos convergentes P_n/Q_n e C_n/D_n , com $n \geq 0$, são iguais [1].

A ideia de frações contínuas equivalentes é devida a Seidel [10]. Antes de apresentar o teorema geral que rege a equivalência entre frações contínuas, observe o seguinte lema:

Lema 2.4.2. Se P_n/Q_n e C_n/D_n são os respectivos convergentes de duas frações contínuas equivalentes F e G , então é possível escolher uma sequência de inteiros não nulos $\{r_n\}$, com $r_0 = 1$, tal que $C_n = r_1 \dots r_n P_n$ e $D_n = r_1 \dots r_n Q_n$.

Demonstração. No lema (2.4.1) já se observou a necessidade da existência de tal sequência $\{r_n\}$ para que $C_n = r_1 \dots r_n P_n$ e $D_n = r_1 \dots r_n Q_n$. Agora será mostrado como escolher tal sequência. Por definição, $F \equiv G$ quando $P_n/Q_n = C_n/D_n$, ou melhor, quando

$$C_n = k_n P_n \quad \text{e} \quad D_n = k_n Q_n,$$

com k_n inteiro não nulo. Observe que, tomando $r_0 = 1$ e $r_n = k_n/(r_0 \dots r_{n-1})$, é possível escolher uma sequência de inteiros não nulos $\{r_n\}$ tal que $C_n = r_1 \dots r_n P_n$. De fato, pois

$$\begin{aligned} C_1 = k_1 P_1 &= r_0 \left(\frac{k_1}{r_0} \right) P_1 \\ C_2 = k_2 P_2 &= r_0 r_1 \left(\frac{k_2}{r_0 r_1} \right) P_2 \\ C_3 = k_3 P_3 &= r_0 r_1 r_2 \left(\frac{k_3}{r_0 r_1 r_2} \right) P_3 \\ &\vdots \\ C_n = k_n P_n &= r_0 \dots r_{n-1} \left(\frac{k_n}{r_0 \dots r_{n-1}} \right) P_n. \end{aligned}$$

Analogamente é possível mostrar que a escolha da referida sequência também acarreta $D_n = r_1 \dots r_n Q_n$ (verifique!), o que completa a demonstração. ■

Suponha, por exemplo, que $F \equiv G$, tal que $C_n = (n+1)P_n$, para $n \geq 1$, sendo P_n e C_n seus respectivos numeradores parciais. Logo, $C_1 = 2P_1$, $C_2 = 3P_2$, $C_3 = 4P_3$, etc. Essas igualdades também podem ser verificadas escolhendo uma sequência de inteiros não nulos $\{r_n\}$ tal que $r_0 = 1$ e $r_n = (n+1)/(r_0 \dots r_{n-1})$. Isso resulta $\{r_n\} = \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots\}$, para $n \geq 1$. Dessa forma, por exemplo, $C_3 = r_1 r_2 r_3 P_3 = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot P_3 = 4P_3$.

Teorema 2.4.1. Duas frações contínuas

$$F = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \quad \text{e} \quad G = d_0 + \frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2} + \dots + \frac{c_n}{d_n}$$

são equivalentes se, e somente se, existe uma sequência $\{r_n\}$ de inteiros, com $r_0 = 1$ e $r_n \neq 0$, com $n \geq 1$, tal que $c_n = r_n r_{n-1} a_n$ e $d_n = r_n b_n$.

Demonstração. Sejam P_n/Q_n e C_n/D_n , respectivamente, os convergentes de F e G , com $n \in \mathbb{N}$. Pelo teorema (2.3.3),

$$\frac{C_n}{D_n} = d_0 + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{c_1 c_2 \cdots c_k}{D_{k-1} D_k}.$$

Admita que existe uma sequência de inteiros não nulos $\{r_n\}$, com $r_0 = 1$, tal que $c_n = r_n r_{n-1} a_n$ e $d_n = r_n b_n$. De acordo com o lema (2.4.1),

$$\begin{aligned} \frac{C_n}{D_n} &= r_0 b_0 + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{(r_1 r_0 a_0)(r_2 r_1 a_1) \cdots (r_n r_{n-1} a_k)}{(r_1 r_2 \cdots r_{n-1})(r_1 r_2 \cdots r_{k-1} r_k) Q_{k-1} Q_k} \\ &= r_0 b_0 + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{r_0 (r_1 r_2 \cdots r_{n-1})^2 r_k (a_1 a_2 \cdots a_k)}{(r_1 r_2 \cdots r_{n-1})^2 r_k Q_{k-1} Q_k} \\ &= b_0 + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{a_1 a_2 \cdots a_k}{Q_{k-1} Q_k} = \frac{P_n}{Q_n}. \end{aligned}$$

Portanto, F e G são equivalentes. Por outro lado, enxergando as fórmulas de Wallis da fração contínua G como um sistema de duas equações nas variáveis c_n e d_n , com $n \in \mathbb{N}$, então $d_0 = C_0$, $d_1 = D_1$, $c_1 = C_1 - C_0 D_1$ e, para $n \geq 2$,

$$c_n = \frac{C_{n-1} D_n - C_n D_{n-1}}{C_{n-1} D_{n-2} - C_{n-2} D_{n-1}} \quad \text{e} \quad d_n = \frac{C_n D_{n-2} - C_{n-2} D_n}{C_{n-1} D_{n-2} - C_{n-2} D_{n-1}}. \quad (2.8)$$

Assuma que F e G sejam equivalentes. De acordo com o lema (2.4.2), é possível escolher uma sequência de inteiros não nulos $\{r_n\}$, com $r_0 = 1$, tal que $C_n = r_1 \cdots r_n P_n$ e $D_n = r_1 \cdots r_n Q_n$. Portanto, $D_0 = r_0 Q_0 = 1$ e

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{C_{n-1} D_n - C_n D_{n-1}}{C_{n-1} D_{n-2} - C_{n-2} D_{n-1}} \\ &= \frac{(r_1 \cdots r_{n-1} P_{n-1})(r_1 \cdots r_n Q_n) - (r_1 \cdots r_n P_n)(r_1 \cdots r_{n-1} Q_{n-1})}{(r_1 \cdots r_{n-1} P_{n-1})(r_1 \cdots r_{n-2} Q_{n-2}) - (r_1 \cdots r_{n-2} P_{n-2})(r_1 \cdots r_{n-1} Q_{n-1})} \\ &= \frac{(r_1 \cdots r_{n-1})(r_1 \cdots r_n)(P_{n-1} Q_n - P_n Q_{n-1})}{(r_1 \cdots r_{n-2})(r_1 \cdots r_{n-1})(P_{n-1} Q_{n-2} - P_{n-2} Q_{n-1})} = r_n r_{n-1} a_n. \end{aligned}$$

De forma análoga verifica-se também que $d_n = r_n b_n$, o que completa a demonstração. ■

O teorema (2.4.1) permite dizer que se G pode ser obtida de F por meio de uma transformação de equivalência, então F e G são equivalentes.

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 \pm \frac{a_2}{b_2 \pm \frac{a_3}{b_3 \pm \cdots}}} \equiv b_0 + \frac{r_1 a_1}{r_1 b_1 \pm \frac{r_2 r_1 a_2}{r_2 b_2 \pm \frac{r_3 r_2 a_3}{r_3 b_3 \pm \cdots}}} \quad (2.9)$$

Em alguns casos os testes de convergência podem falhar, mesmo sendo a fração contínua convergente. Formas equivalentes dessa fração contínua podem revelar a tal

convergência, até então oculta [2]. Dentre as transformações de equivalência existentes, duas merecem atenção especial: as que transformam os numeradores e denominadores parciais iguais a 1. Veja:

Se em (2.9), com $b_0 = 0$, for aplicada a transformação de equivalência $r_1 = 1/a_1$ e $r_n = 1/(a_n r_{n-1})$, para $n \geq 2$, obtêm-se uma fração contínua, de classe I ou II, cujos numeradores parciais são todos iguais a 1:

$$\frac{1}{\frac{b_1}{a_1} \pm \frac{1}{\frac{b_2 a_1}{a_2} \pm \frac{1}{\frac{b_3 a_2}{a_1 a_3} \pm \dots}}}$$

Por outro lado, se nessa mesma fração contínua for aplicada a transformação de equivalência $r_n = 1/b_n$, para $n \geq 1$, obtêm-se uma fração contínua, de classe I ou II, com denominadores parciais iguais a 1:

$$\frac{a_1/b_1}{1 \pm \frac{a_2/b_1 b_2}{1 \pm \frac{a_3/b_2 b_3}{1 \pm \dots}}}$$

A utilidade dessas transformações se deve ao fato da possibilidade de aplicar os critérios de convergência vistos na seção (2.3). Se as formas equivalentes, tratadas acima, satisfizerem seus respectivos critérios de convergência, então a fração contínua original convergirá. Observe abaixo exemplos de como aplicar as transformações de equivalência para provar a convergência de certas frações contínuas:

Suponha que se queira construir uma fração contínua cujos convergentes P_n/Q_n obedeam à regra $P_n = n^2$ e $Q_n = n^2 + 1$. Conforme procedimento feito em (2.8), tem-se $b_0 = P_0 = 0$, $b_1 = Q_1 = 1^2 + 1 = 2$, $a_1 = P_1 - P_0 Q_1 = 1^2 = 1$ e, para $n \geq 2$,

$$a_n = \frac{1 - 2n}{2n - 3} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{4n - 4}{2n - 3}.$$

Sob tais condições, a fração contínua fica assim definida:

$$\frac{1}{2} - \frac{3/1}{4/1} - \frac{5/3}{8/3} - \frac{7/5}{12/5} - \frac{9/7}{16/7} - \dots - \frac{\frac{2n+1}{2n-1}}{\frac{4n}{2n-1}} - \dots \quad (2.10)$$

Observe que a fração contínua (2.10) é de classe II, a qual, segundo o resultado do teorema (2.3.5), converge, pois

$$|a_n| + 1 = \left| \frac{2n+1}{2n-1} \right| + 1 = \left| \frac{2n+1}{2n-1} + 1 \right| = \left| \frac{4n}{2n-1} \right| = |b_n|.$$

Ainda de acordo com esse teorema, o valor da referida fração contínua não excede a unidade. De fato, pois

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}} = 1.$$

Observe que, se à fração contínua (2.10) for aplicada a transformação de equivalência $r_n = a_{n-1}/a_n$, para $n \geq 2$, seus numeradores parciais passam a ser iguais a 1:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4/3} - \frac{1}{24/5} - \frac{1}{20/21} - \frac{1}{112/75} - \dots$$

A convergência dessa fração contínua não pode ser evidenciada pelo teorema (2.3.3), pois $b_2 = 4/3 < 2$. O mesmo acontece para todos os denominadores parciais de ordem par dessa fração contínua. Da mesma forma, a convergência da fração contínua

$$\frac{1/2}{1} - \frac{3/8}{1} - \frac{5/32}{1} - \frac{7/32}{1} - \frac{15/64}{1} - \dots,$$

resultado da transformação de equivalência $r_n = 1/b_n$, para $n \geq 2$, a qual reduz à unidade todos os denominadores parciais de (2.10), não pode ser revelada pelo teorema (2.3.4). Observe, por exemplo, que $a_1 = 1/2 > 1/4$.

Por outro lado, considere a fração contínua de classe II

$$\frac{1}{5} - \frac{10}{9} - \frac{27}{13} - \frac{52}{17} - \dots - \frac{4n^2 - 3n}{4n + 1} - \dots \quad (2.11)$$

Observe que o teorema (2.3.5) não evidencia sua convergência, pois $b_n < a_n + 1$, para todo $n \geq 2$. Note também que na forma

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{9/10} - \frac{1}{130/27} - \frac{1}{459/520} - \dots,$$

oriunda da transformação de equivalência $r_n = a_{n-1}/a_n$, com $n \geq 2$, também não é possível visualizar a tal convergência, pois os denominadores de ordem par são menores que 2 e, assim, o teorema (2.3.3) não é satisfeito. Porém, na forma

$$\frac{1/5}{1} - \frac{2/9}{1} - \frac{3/13}{1} - \frac{4/17}{1} - \dots,$$

decorrente da transformação de equivalência $r_n = 1/b_n$, com $n \geq 1$, tem-se que $|a_n| < 1/4$, para todo $n \geq 1$, satisfazendo o resultado do teorema (2.3.4). Portanto, a fração contínua (2.11) é convergente.

Apesar de possível, em muitos casos é complicado reduzir frações contínuas para uma das formas retratadas. Isso atribui importância ímpar a todos os tipos de frações contínuas existentes, o que refuta a ideia de *Joseph-Louis Lagrange* (1736-1813) sobre a excepcionalidade das frações contínuas de numeradores parciais iguais a 1, quando afirmava que todos os outros tipos de frações não possuíam interesse prático, uma vez que poderiam ser facilmente reduzidos à forma reverenciada [8].

2.5 Contrações

Além das formas equivalentes, é possível manipular algebricamente os termos de uma fração contínua F , transformando-a em outra fração contínua G , de modo que a sequência dos convergentes de G esteja contida na sequência dos convergentes de F . A essa manipulação dá-se o nome de *contração*.

O estudo das contrações foi introduzido por Seidel em 1855, após tomar como base os casos especiais tratados por Lagrange em 1774 e 1776 [4]. Dentre as várias formas de se contrair uma fração contínua, duas merecem atenção especial, devido à simplicidade no tratamento algébrico e ao grande número de aplicações no campo da aproximação:

Quando os convergentes de G são iguais aos convergentes de ordem par de F , ou seja, $G_n = F_{2n}$, então G é chamada *contração par* de F . Por outro lado, G será uma *contração ímpar* de F quando $G_n = F_{2n+1}$.

É importante observar que, se F converge, então suas contrações também convergem. Isso só é possível devido ao fato dos convergentes das contrações comporem uma subsequência da sequência dos convergentes de F [11]. Essa conclusão torna-se útil para a análise numérica da aceleração da convergência das frações contínuas por meio de suas contrações, uma vez que estas podem ser utilizadas para se obter a mesma aproximação com menor esforço computacional de uma possível implementação algorítmica [6].

Para se determinar a fórmula das contrações pares e ímpares recorre-se ao problema proposto e resolvido em 1775 por *Daniel Bernoulli* (1700-1782) [4], como segue:

Considere $\{C_n\}$ uma sequência composta por elementos distintos. Suponha que se queira construir uma fração contínua tal que C_n seja seu n -ésimo convergente. Considere $C_n = P_n/Q_n$, com $P_n = C_n$ e $Q_n = 1$. Conforme procedimento feito em (2.8), tem-se que $b_0 = P_0 = C_0$, $a_1 = P_1 - P_0Q_1 = C_1 - C_0$, $b_1 = Q_1 = 1$ e, para $n \geq 2$,

$$a_n = \frac{C_{n-1} - C_n}{C_{n-1} - C_{n-2}} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{C_n - C_{n-2}}{C_{n-1} - C_{n-2}}.$$

Com isso determina-se uma fração contínua que possui os elementos da sequência $\{C_n\}$ como convergentes, dada por

$$C_0 + \frac{C_1 - C_0}{\frac{C_1 - C_2}{C_1 - C_0}} \quad (2.12)$$

$$1 + \frac{\frac{C_2 - C_0}{C_1 - C_0}}{\frac{C_1 - C_0}{C_1 - C_0}} + \dots + \frac{\frac{C_{n-1} - C_n}{C_{n-1} - C_{n-2}}}{\frac{C_n - C_{n-2}}{C_{n-1} - C_{n-2}}}$$

Com base neste resultado, é possível determinar uma fração contínua G tal que a sucessão de seus convergentes G_n seja uma subsequência da sequência dos convergentes F_n de uma outra fração contínua F .

Assim, seja F a fração contínua na forma generalizada (2.1). Suponha que se queira determinar a contração par de F . Substituindo C_n por P_{2n}/Q_{2n} em (2.12), obtêm-se

$$\frac{P_0}{Q_0} + \frac{P_2/Q_2 - P_0/Q_0}{1 + \frac{P_4/Q_4 - P_0/Q_0}{P_2/Q_2 - P_0/Q_0} + \dots + \frac{P_{2n-2}/Q_{2n-2} - P_{2n}/Q_{2n}}{P_{2n-2}/Q_{2n-2} - P_{2n-4}/Q_{2n-4}}}$$

Aplicando a transformação de equivalência $r_n = Q_{2n}/Q_{2n-2}$, com $n \geq 2$, tem-se

$$\frac{P_0}{Q_0} + \frac{\left(\frac{P_2}{Q_2} - \frac{P_0}{Q_0}\right) \frac{Q_2}{Q_0}}{\frac{Q_2}{Q_0} + \frac{\left(\frac{P_2/Q_2 - P_4/Q_4}{P_2/Q_2 - P_0/Q_0}\right) \frac{Q_4}{Q_0}}{\left(\frac{P_4/Q_4 - P_0/Q_0}{P_2/Q_2 - P_0/Q_0}\right) \frac{Q_4}{Q_2} + \dots + \frac{\left(\frac{P_{2n-2}/Q_{2n-2} - P_{2n}/Q_{2n}}{P_{2n-2}/Q_{2n-2} - P_{2n-4}/Q_{2n-4}}\right) \frac{Q_{2n}}{Q_{2n-4}}}}}$$

Sabendo que $P_0 = b_0$ e $Q_0 = 1$ e simplificando a fração contínua acima, obtêm-se

$$b_0 + \frac{P_2 - b_0 Q_2}{Q_2 + \frac{P_2 Q_4 - P_4 Q_2}{P_2 Q_0 - P_0 Q_2} + \dots + \frac{P_{2n-2} Q_{2n} - P_{2n} Q_{2n-2}}{P_{2n-2} Q_{2n-4} - P_{2n-4} Q_{2n-2}}}$$
(2.13)

De (2.7), a relação entre dois convergentes consecutivos de ordem par é dada por

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} - \frac{P_{2n-2}}{Q_{2n-2}} = (-1)^{2n} \frac{a_1 a_2 \dots a_{2n-1} b_{2n}}{Q_{2n} Q_{2n-2}} = \frac{a_1 a_2 \dots a_{2n-1} b_{2n}}{Q_{2n} Q_{2n-2}},$$

que simplificada resulta em

$$P_{2n} Q_{2n-2} - P_{2n-2} Q_{2n} = a_1 a_2 \dots a_{2n-1} b_{2n}. \quad (2.14)$$

Seguindo o mesmo raciocínio, a diferença entre dois convergentes cujas ordens diferem de quatro unidades é dada por

$$\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}} - \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} = (-1)^k \frac{a_1 a_2 \dots a_{k-1}}{Q_{k-2} Q_{k+2}} (a_{k+1} b_{k+2} + b_k b_{k+1} b_{k+2} + a_{k+2} b_k).$$

Nessa expressão, substituindo k por $2n$ e procedendo à mesma simplificação que foi feita em (2.14), obtêm-se como resultado

$$P_{2n+2} Q_{2n-2} - P_{2n-2} Q_{2n+2} = a_1 \dots a_{2n-1} (a_{2n+1} b_{2n+2} + b_{2n} b_{2n+1} b_{2n+2} + a_{2n+2} b_{2n}). \quad (2.15)$$

Assim, basta substituir em (2.13) os resultados encontrados em (2.14) e (2.15) para se obter a fórmula da contração par de F , dada por

$$\begin{aligned} b_0 + \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2} - \frac{a_2 a_3 b_4}{b_2 (a_4 + b_3 b_4) + a_3 b_4} - \\ - \frac{a_4 a_5 b_2 b_6}{b_4 (a_6 + b_5 b_6) + a_5 b_6} - \frac{a_6 a_7 b_4 b_8}{b_6 (a_8 + b_7 b_8) + a_7 b_8} - \dots \end{aligned} \quad (2.16)$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio também é possível encontrar a fórmula da contração ímpar de F , dada por

$$\begin{aligned} \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1} - \frac{a_1 a_2 b_3 / b_1}{b_1 (a_3 + b_2 b_3) + a_2 b_3} - \\ - \frac{a_3 a_4 b_1 b_5}{b_3 (a_5 + b_4 b_5) + a_4 b_5} - \frac{a_5 a_6 b_3 b_7}{b_5 (a_7 + b_6 b_7) + a_6 b_7} - \dots \end{aligned} \quad (2.17)$$

A demonstração para este resultado ficará a cargo do leitor.

Capítulo 3

Conexão entre Séries e Frações Contínuas

No capítulo anterior foi visto que os convergentes de uma fração contínua infinita exprimem aproximações para um determinado número, e a melhor destas é dada pelo convergente de maior ordem possível.

Mas não apenas números podem ser representados por frações contínuas. Também é possível submeter funções às aproximações dadas pelos convergentes. Para tanto, basta tomar a série de Taylor dessa função e manipular algebricamente seus termos, transformando-a numa fração contínua.

Este capítulo tem o objetivo de apresentar dois métodos que permitem expandir séries em frações contínuas. Apesar de não serem os únicos existentes, eles são suficientes para comprovar a aceleração da convergência dada pelas frações contínuas.

3.1 O Método das Substituições Sucessivas

Existem diversas formas de se representar uma série em frações contínuas, e talvez a mais básica de todas seja a oriunda do *método das substituições sucessivas*. O processo para encontrar a fração contínua (2.2) do irracional $\sqrt{2}$ é um exemplo de como este método pode ser aplicado.

De forma geral, o método considera a série de uma função f escrita como $f = b_0 + T_1$, onde b_0 é uma soma parcial da série e T_1 é derivado da recorrência de primeira ordem

$$T_k = \frac{a_k}{b_k + T_{k+1}},$$

para a_k e b_k escolhidos arbitrariamente dentre os termos de f , com $1 \leq k \leq n$. Esse processo recorrente leva à fração contínua de f , dada por

$$f = b_0 + T_1 = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + T_2} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + T_3}} = \cdots = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \cdots}}}$$

Por exemplo, considere a expansão em série de Taylor da função $f(x) = e^x$, dada por (1.2). Tomando-se $b_0 = 1$, tem-se que $e^x = 1 + T_1$, onde

$$\begin{aligned} T_1 &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots = x \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \dots \right) \\ &= \frac{x}{\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \dots \right)^{-1}} \\ &= \frac{x}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \dots} \\ &= \frac{x}{1 - \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{720} - \dots \right)}. \end{aligned}$$

Tomando $a_1 = x$, $b_1 = 1$ e $T_2 = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{720} - \dots$, obtêm-se $T_1 = \frac{a_1}{b_1 - T_2}$, onde

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{720} - \dots = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x}{6} + \frac{x^3}{360} - \dots \right) \\ &= \frac{x}{2 \left(1 - \frac{x}{6} + \frac{x^3}{360} - \dots \right)^{-1}} \\ &= \frac{x}{2 \left(1 + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{36} + \frac{x^3}{540} + \dots \right)} \\ &= \frac{x}{2 + \left(\frac{x}{3} + \frac{x^2}{18} + \frac{x^3}{270} + \dots \right)}. \end{aligned}$$

Tomando $a_2 = x$, $b_2 = 2$ e $T_3 = \frac{x}{3} + \frac{x^2}{18} + \frac{x^3}{270} + \dots$, obtêm-se $T_2 = \frac{a_2}{b_2 + T_3}$.

Continuando com esse procedimento indefinidamente, encontram-se expressões para T_k , todas elas dependentes de T_{k+1} , com $k \geq 1$. Portanto, a substituição das expressões de T_{k+1} nas expressões de T_k , resulta numa fração contínua para e^x , dada por

$$e^x = 1 + \frac{x}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{2} + \frac{x}{5} - \frac{x}{2} + \frac{x}{7} - \frac{x}{2} + \dots \quad (3.1)$$

Observe que dos passos utilizados para se encontrar as expressões T_k , com $k \geq 1$, a passagem da terceira para a quarta igualdade requer o cálculo do inverso de um polinômio cuja quantidade de termos é infinita, ou seja, a divisão do número 1 por tal polinômio. A complexidade dessa operação certamente atribui ao método das substituições sucessivas um caráter engenhoso na construção das frações contínuas.

A expansão de uma série em frações contínuas por este método não é única, fato que decorre da arbitrariedade tomada para os numeradores e denominadores parciais. Por exemplo, se em cada passo do processo for tomado $b_k = k - x$, com $k \geq 1$, tem-se

$$\begin{aligned}
 T_1 &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots = x \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \dots \right) \\
 &= \frac{x}{\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \dots \right)^{-1}} \\
 &= \frac{x}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \dots} \\
 &= \frac{x}{1 - x + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \dots \right)}.
 \end{aligned}$$

Logo, tomando $a_1 = x$ e $b_1 = 1 - x$, obtêm-se $T_1 = \frac{a_1}{b_1 + T_2}$, onde

$$\begin{aligned}
 T_2 &= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \dots = x \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{12} - \frac{x^3}{720} + \dots \right) \\
 &= \frac{x}{\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{12} - \frac{x^3}{720} + \dots \right)^{-1}} \\
 &= \frac{x}{2 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{18} + \dots} \\
 &= \frac{x}{2 - x + \left(\frac{2x}{3} + \frac{x^2}{18} + \dots \right)}.
 \end{aligned}$$

Tomando $a_2 = x$ e $b_2 = 2 - x$, obtêm-se $T_2 = \frac{a_2}{b_2 + T_3}$, onde

$$\begin{aligned}
 T_3 &= \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{18} + \dots = 2x \left(\frac{1}{3} + \frac{x}{36} + \dots \right) \\
 &= \frac{2x}{\left(\frac{1}{3} + \frac{x}{36} + \dots \right)^{-1}} \\
 &= \frac{2x}{3 - \frac{x}{4} + \dots} \\
 &= \frac{2x}{3 - x + \left(\frac{3x}{4} + \dots \right)},
 \end{aligned}$$

com $a_3 = 2x$, $b_3 = 3 - x$ e $T_3 = \frac{a_3}{b_3 + T_4}$.

Continuando com esse processo, encontram-se expressões que, agrupadas sob sucessivas substituições, resultam numa fração contínua alternativa para e^x , dada por

$$e^x = 1 + \frac{x}{1-x} + \frac{x}{2-x} + \frac{2x}{3-x} + \frac{3x}{4-x} + \frac{4x}{5-x} + \dots \quad (3.2)$$

Isso mostra ao leitor a possibilidade de se tomar a_n e b_n arbitrários.

As contrações par e ímpar da fração contínua (3.1) são dadas, respectivamente, por

$$F_{2n} = 1 + \frac{2x}{2-x} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{10} + \frac{x^2}{14} + \frac{x^2}{18} + \dots \quad (3.3)$$

$$F_{2n+1} = \frac{1+x}{1} + \frac{3x^2}{6-2x} + \frac{5x^2}{30-2x} + \frac{21x^2}{70-2x} + \frac{45x^2}{126-2x} + \dots$$

Observe que os convergentes de ordem par de F , denotados por P_{2n}/Q_{2n} , são idênticos aos convergentes de sua contração par F_{2n} , denotados por A_n/B_n :

$$\begin{array}{llll} \frac{P_0}{Q_0} & = & 1 & = \frac{A_0}{B_0} \\ \frac{P_2}{Q_2} & = & \frac{2+x}{2-x} & = 1 + \frac{2x}{2-x} = \frac{A_1}{B_1} \\ \frac{P_4}{Q_4} & = & \frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2} & = 1 + \frac{2x}{2-x} + \frac{x^2}{6} = \frac{A_2}{B_2} \\ \frac{P_6}{Q_6} & = & \frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3} & = 1 + \frac{2x}{2-x} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{10} = \frac{A_3}{B_3} \\ \frac{P_8}{Q_8} & = & \frac{1680-840x+180x^2+20x^3+x^4}{1680-840x+180x^2-20x^3+x^4} & = 1 + \frac{2x}{2-x} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{10} + \frac{x^2}{14} = \frac{A_4}{B_4} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}$$

A verificação da equivalência entre os convergentes de ordem ímpar de F e os convergentes de sua contração ímpar F_{2n+1} será deixada a cargo do leitor.

Uma desvantagem do método das substituições sucessivas é que os numeradores e denominadores parciais da fração contínua resultante não correspondem aos termos da série que a originou. Assim, a construção de uma fórmula geral para se determinar a referida fração é dificultada, pois se faz necessário percorrer o passo-a-passo descrito para cada série que se pretende estudar, e todos eles sendo necessário calcular o inverso de um polinômio infinito, operação algébrica que torna o processo bastante engenhoso.

Essa dificuldade pode ser contornada estabelecendo um modo com que a fração contínua seja construída diretamente dos termos da série. Isso é possível quando se adota um método que faça corresponder a fração contínua com a série, como visto abaixo.

3.2 O Método de Euler

Em 1748, *Leonhard Euler* (1707-1783), autor de várias contribuições para a teoria das frações contínuas, apresentou em seu livro *Introduction in Analysis Inffinitorum* um método para transformar séries em frações contínuas cujos convergentes fossem iguais às somas parciais da referida série [4]. Sua demonstração, além de demasiadamente engenhosa, foi escrita em linguagem bastante rebuscada, normal para os padrões da época.

Uma forma alternativa de provar a tal transformação pode ser derivada do resultado alcançado por Bernoulli [4], como descrito no início da seção (2.5).

Tomando $C_n = \sum_{k=0}^n u_k$ na fração contínua (2.12), obtêm-se

$$u_0 + \frac{u_1}{1} - \frac{\frac{u_2}{u_1}}{1 + \frac{u_2}{u_1}} - \frac{\frac{u_3}{u_2}}{1 + \frac{u_3}{u_2}} - \dots - \frac{\frac{u_n}{u_{n-1}}}{1 + \frac{u_n}{u_{n-1}}} - \dots$$

Observe que este resultado é exatamente igual a $u_0 + \frac{u_1}{1-x}$, onde

$$x = \frac{\frac{u_2}{u_1}}{1 + \frac{u_2}{u_1}} - \frac{\frac{u_3}{u_2}}{1 + \frac{u_3}{u_2}} - \dots - \frac{\frac{u_n}{u_{n-1}}}{1 + \frac{u_n}{u_{n-1}}} - \dots$$

Porém, observe a seguinte manipulação algébrica:

$$\begin{aligned} u_0 + \frac{u_1}{1-x} &= \frac{u_0 + u_1 - u_0x}{1-x} = \frac{u_0 \left(1 + \frac{u_1}{u_0} - x\right)}{1-x} = \\ &= \frac{u_0}{\frac{1-x}{1 + \frac{u_1}{u_0} - x}} = \frac{u_0}{\frac{\left(1 + \frac{u_1}{u_0} - x\right) - \frac{u_1}{u_0}}{1 + \frac{u_1}{u_0} - x}} = \frac{u_0}{1 - \frac{\frac{u_1}{u_0}}{1 + \frac{u_1}{u_0} - x}}. \end{aligned}$$

Logo, substituindo o valor de x no resultado dessa manipulação obtêm-se a chamada *Fração Contínua de Euler*, dada por

$$\frac{u_0}{1} - \frac{\frac{u_1}{u_0}}{1 + \frac{u_1}{u_0}} - \frac{\frac{u_2}{u_1}}{1 + \frac{u_2}{u_1}} - \frac{\frac{u_3}{u_2}}{1 + \frac{u_3}{u_2}} - \dots - \frac{\frac{u_n}{u_{n-1}}}{1 + \frac{u_n}{u_{n-1}}} - \dots \quad (3.4)$$

É possível aplicar a transformação de equivalência $r_n = u_{n-2}$, com $n \geq 2$, na fração contínua de Euler (3.4). Isso faz com que a forma fracionária de seus numeradores e denominadores parciais seja eliminada, dando origem à fração contínua de Euler escrita na forma usual:

$$\frac{u_0}{1} - \frac{u_1}{u_0 + u_1} - \frac{u_0 u_2}{u_1 + u_2} - \frac{u_1 u_3}{u_2 + u_3} - \dots - \frac{u_{n-2} u_n}{u_{n-1} + u_n} - \dots \quad (3.5)$$

Observe que as variáveis u_n , com $n \geq 0$, correspondem aos termos da série tomada como referência para a construção da fração contínua.

Por exemplo, para a função e^x , representada pela série de Taylor (1.2), a fração contínua de Euler é dada por

$$e^x = \frac{1}{1} - \frac{\frac{x}{1}}{1 + \frac{x}{1}} - \frac{\frac{x}{2}}{1 + \frac{x}{2}} - \frac{\frac{x}{3}}{1 + \frac{x}{3}} - \dots - \frac{\frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}} - \dots$$

Para representar essa fração em sua forma usual basta aplicar a transformação de equivalência $r_n = n - 1$, para $n \geq 2$, o que resulta em

$$e^x = \frac{1}{1} - \frac{x}{1+x} - \frac{x}{2+x} - \frac{2x}{3+x} - \frac{3x}{4+x} - \dots - \frac{(n-1)x}{n+x} - \dots \quad (3.6)$$

A singularidade de sua demonstração contrasta com a eficiência do método, uma vez que a fração contínua passa a ser composta apenas pelos termos da série que a originou, o que lhe permite ser objeto de uma fácil e possível implementação algorítmica.

Outra característica atribuída à fração contínua de Euler é sua correspondência com a série de referência. Isso significa que seu n -ésimo convergente é exatamente igual à n -ésima soma parcial da série. Veja que, para a função e^x , tomando (1.2) e (3.6), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{P_0}{Q_0} &= \frac{1}{1} &= 1 &= T_0 \\ \frac{P_1}{Q_1} &= \frac{1}{1} - \frac{x}{1+x} &= 1+x &= T_1 \\ \frac{P_2}{Q_2} &= \frac{1}{1} - \frac{x}{1+x} - \frac{x}{2+x} &= 1+x + \frac{x^2}{2} &= T_2 \\ \frac{P_3}{Q_3} &= \frac{1}{1} - \frac{x}{1+x} - \frac{x}{2+x} - \frac{2x}{3+x} &= 1+x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} &= T_3 \\ &\vdots &&\vdots \end{aligned}$$

Em virtude dessa correspondência, é fácil perceber que, se a série converge, então a fração contínua de Euler também converge [5].

As contrações par e ímpar de (3.6) são dadas por

$$\begin{aligned} F_{2n} &= \frac{1+x}{1} - \frac{x^2(3+x)}{6+6x+3x^2+x^3} - \\ &\quad - \frac{6x^2(1+x)(5+x)}{60+20x+5x^2+x^3} - \frac{20x^2(3+x)(7+x)}{210+42x+7x^2+x^3} - \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$F_{2n+1} = \frac{1}{1} + \frac{x(2+x)}{2} - \frac{2x^2(4+x)}{24+12x+4x^2+x^3} - \frac{12x^2(2+x)(6+x)}{120+30x+6x^2+x^3} - \dots$$

Observe que a forma com que se apresentam os termos das contrações (3.7) é muito mais rebuscada que a das contrações (3.3), fato este que certamente exige a execução de mais operações matemáticas para que seja determinado seu valor numérico.

Capítulo 4

Comparando Séries de Taylor e Frações Contínuas

Como visto, a série de Taylor de uma determinada função pode ser transformada algebricamente numa fração contínua por meio dos métodos de Euler ou das substituições sucessivas. E mais, é possível contrair essa fração contínua para se obter outra cujos convergentes sejam exatamente iguais aos convergentes de ordem par ou ímpar daquela que a originou. Todas essas formas algébricas visam aproximar o valor de uma determinada função em algum ponto de seu domínio.

Abaixo segue um esquema do processo descrito:

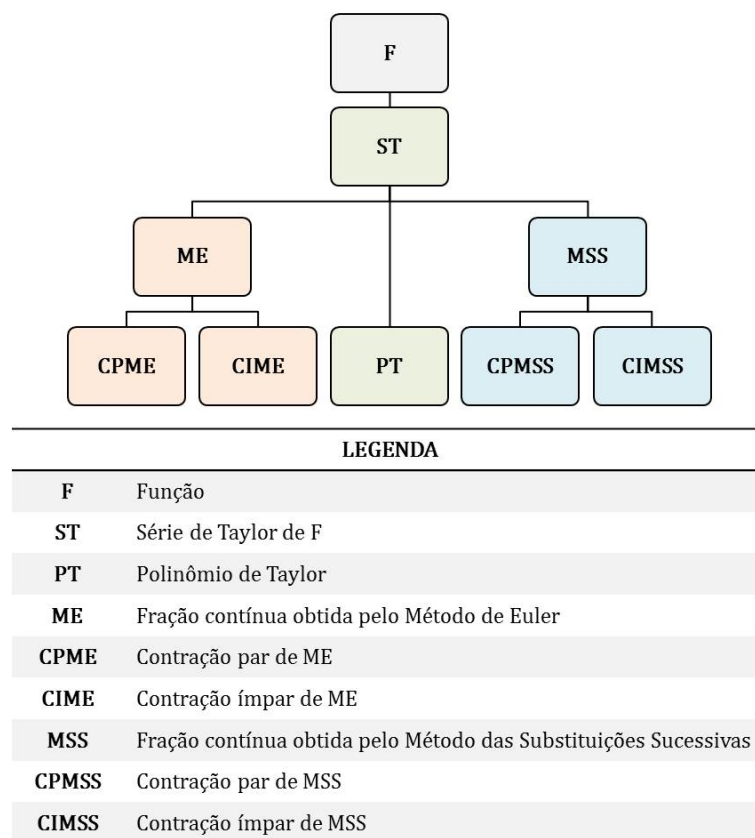


Figura 4.1: Hierarquia entre as formas algébricas utilizadas para aproximar uma função.

Sabe-se que a aproximação de uma função por meio da série de Taylor é dada por uma soma parcial (polinômio de Taylor), resultado da soma dos termos compreendidos entre o primeiro e último termo após o qual é dado um truncamento. Já pelas frações contínuas essa aproximação é feita por meio dos convergentes, fração contínua finita resultante do truncamento dado após um determinado quociente parcial.

Neste capítulo pretende-se fazer uma comparação numérica dessas formas algébricas (particularmente entre PT, ME, CPME, MSS e CPMSS), buscando a evidência de suas vantagens computacionais quando utilizadas na aproximação de uma função elementar. Essa vantagem diz respeito ao esforço computacional despendido, principalmente ao que se refere à velocidade de convergência. A comparação com as contrações ímpares ficará a cargo do leitor.

Para servir de base experimental, serão tomadas as funções elementares elencadas na tabela (1.2). Estas são suficientes para se ter uma ideia de como empregar os métodos estudados, os quais não se limitam apenas a esses tipos de funções.

Função Exponencial

Como visto, a série de Taylor para a função exponencial é dada de forma única por (1.2). Viu-se também que é possível empregar o método das substituições sucessivas e o de Euler na construção de uma fração contínua para essa série, o que resultou, respectivamente, nas expressões (3.1) e (3.6).

Apesar de não serem os únicos métodos para se converter uma série em fração contínua, estes possuem características que lhe são peculiares: o método de Euler permite estruturar a fração contínua de modo mais dinâmico, pois utiliza os próprios termos da série para construção de seus numeradores e denominadores parciais, embora o cálculo das aproximações seja bem mais complexo que a própria série; já a fração contínua obtida pelo método das substituições sucessivas possui uma forma bem menos rebuscada, facilitando o cálculo das aproximações. Porém, o processo que utiliza para construção dessa fração contínua não é tão simples quanto o método de Euler.

Empregar apenas a fração contínua obtida de tais métodos não é considerado um procedimento vantajoso, pois seus valores numéricos se assemelham ao gerado pela série que as originaram. No caso do método de Euler a desvantagem é ainda maior, pois os convergentes da fração contínua são exatamente iguais às somas parciais da referida série, o que, na ótica da aproximação, em nada contribui.

Para contornar este percalço foi utilizado o resultado de Bernoulli, construindo-se, a partir deste, duas outras frações contínuas, chamadas de contração par e contração ímpar, dadas por (3.3) e (3.7), tanto para a fração contínua obtida pelo método das substituições sucessivas quanto para a oriunda do método de Euler, respectivamente. Como a sequência de seus convergentes pertence à sequência dos convergentes da fração contínua que as geraram, então as contrações convergem para o mesmo valor, porém, com maior velocidade.

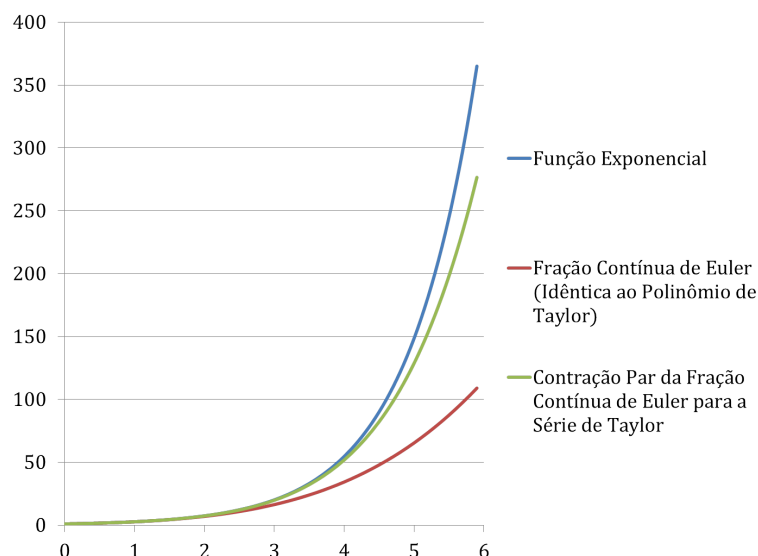


Figura 4.2: Curvas de aproximação para a função exponencial.

A figura acima mostra a comparação do PT de ordem quatro com o convergente de mesma ordem de CPME, com relação à função $f(x) = e^x$. Perceba que, para um determinado valor de x , a “distância” da curva da fração contínua à curva da função é menor que a “distância” tomada da curva do polinômio de Taylor.

O refinamento da aproximação, dado pelas contrações, também pode ser visto numericamente. Por exemplo, tomando $x = 1$ nas expressões algébricas citadas acima, obtêm-se aproximações para o valor de e , algumas das quais catalogadas na tabela abaixo:

Tabela 4.1: Valores aproximados para $e \approx 2,718281828$.

Ordem	PT	MSS	CPMSS	ME	CPME
0	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000	0.000000000
1	<u>2.000000000</u>	<u>2.000000000</u>	3.000000000	<u>2.000000000</u>	<u>2.000000000</u>
2	<u>2.500000000</u>	3.000000000	<u>2.714285714</u>	<u>2.500000000</u>	<u>2.666666667</u>
3	<u>2.666666667</u>	<u>2.750000000</u>	<u>2.718309859</u>	<u>2.666666667</u>	<u>2.716666667</u>
4	<u>2.708333333</u>	<u>2.714285714</u>	<u>2.718281718</u>	<u>2.708333333</u>	<u>2.718253968</u>
5	<u>2.716666667</u>	<u>2.717948718</u>	<u>2.718281829</u>	<u>2.716666667</u>	<u>2.718281526</u>

Observe que o truncamento na série de Taylor logo após seu sexto termo produz um polinômio PT de quinta ordem cujo valor numérico é exatamente igual ao convergente de ordem cinco de ME, um número com duas casas decimais exatas do valor de e . Assim, as referidas formas algébricas produzem aproximações na mesma velocidade de convergência. Apesar de prover a mesma aproximação, o convergente de ordem cinco de MSS expressa uma singela melhora na aproximação, comprovado por suas demais casas decimais.

Mas, observe que o valor numérico do convergente de ordem cinco da contração CPME produz um número com seis casas decimais exatas do valor de e . Essa aproximação é mais significativa quando se toma o convergente de mesma ordem da contração CPMSS, que contém oito casas decimais exatas para o referido número.

Em suma, conclui-se que a convergência da série de Taylor é acelerada pela contração par aplicada à fração contínua gerada por essa série. E mais, quanto maior a ordem do convergente dessa contração, melhor a aproximação.

Função Logarítmica

A série de Taylor da função $f(x) = \ln(1+x)$ em torno da origem é dada por

$$\text{ST} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \dots$$

Empregando os métodos das substituições sucessivas e de Euler encontram-se, respectivamente, as seguintes frações contínuas:

$$\text{MSS} = \frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{2x}{2} + \frac{2x}{5} + \frac{3x}{2} + \frac{3x}{7} + \frac{4x}{2} + \frac{4x}{9} + \dots$$

$$\text{ME} = \frac{x}{1} + \frac{x}{2-x} + \frac{4x}{3-2x} + \frac{9x}{4-3x} + \frac{16x}{5-4x} + \frac{25x}{6-5x} + \dots$$

A contração par das referidas frações contínuas são dadas respectivamente por

$$\text{CPMSS} = \frac{2x}{2+x} - \frac{x^2}{3x+6} - \frac{4x^2}{5x+10} - \frac{9x^2}{7x+14} - \frac{16x^2}{9x+18} - \frac{25x^2}{11x+22} - \dots$$

$$\begin{aligned} \text{CPME} = & \frac{x(2-x)}{2} + \frac{2x^2(4-3x)}{3x^3-4x^2+6x-12} \\ & - \frac{12x^2(2-x)(6-5x)}{10x^3-12x^2+15x-20} - \frac{75x^2(4-3x)(8-7x)}{105x^3-120x^2+140x-168} - \dots \end{aligned}$$

É possível notar a forma rebuscada com que se apresentam os termos da fração contínua e da contração par, obtidas pelo método de Euler. Já os termos das oriundas do método das substituições sucessivas são mais simples.

Suponha que se queira determinar valores aproximados para $\ln(2)$. Tomando $x = 1$ nas referidas expressões algébricas, obtêm-se:

Tabela 4.2: Valores aproximados para $\ln(2) \approx 0,693147181$.

Ordem	PT	MSS	CPMSS	ME	CPME
0	<u>0.000000000</u>	<u>0.000000000</u>	<u>0.000000000</u>	<u>0.000000000</u>	<u>0.000000000</u>
1	<u>1.000000000</u>	<u>1.000000000</u>	<u>0.666666667</u>	<u>1.000000000</u>	<u>0.500000000</u>
2	<u>0.500000000</u>	<u>0.666666667</u>	<u>0.692307692</u>	<u>0.500000000</u>	<u>0.583333333</u>
3	<u>0.833333333</u>	<u>0.700000000</u>	<u>0.693121693</u>	<u>0.833333333</u>	<u>0.616666667</u>
4	<u>0.583333333</u>	<u>0.692307692</u>	<u>0.693146417</u>	<u>0.583333333</u>	<u>0.634523810</u>
5	<u>0.783333333</u>	<u>0.693333333</u>	<u>0.693147158</u>	<u>0.783333333</u>	<u>0.645634921</u>

Primeiramente observe que a disposição dos valores de PT (e consequentemente dos convergentes de ME) e dos valores dos convergentes de MSS sobre a reta obedece

ao movimento espiral representado na figura (2.1). Por outro lado, os convergentes de CPME e CPMSS aproximam-se unidirecionalmente do valor pretendido. Essa observação é suficiente para mostrar que as contrações fornecem melhores aproximações para uma função do que os polinômios de Taylor.

Para reforçar essa constatação nota-se, por exemplo, que o convergente de ordem cinco CPMSS possui sete casas decimais exatas para o valor de $\ln(2)$, resultado bastante expressivo frente ao determinado pelo PT de mesma ordem. Essa vantagem também se faz presente nos convergentes CPME, mas o erro que se comete quando se toma seu quinto convergente ao invés do valor real, em valor absoluto, é de aproximadamente 0,475, incomparável com o nível de aproximação dado pelos convergentes de CPMSS.

A vantagem dos convergentes das contrações de frações contínuas sobre os polinômios de Taylor de mesma ordem pode ser vista pictorialmente abaixo:

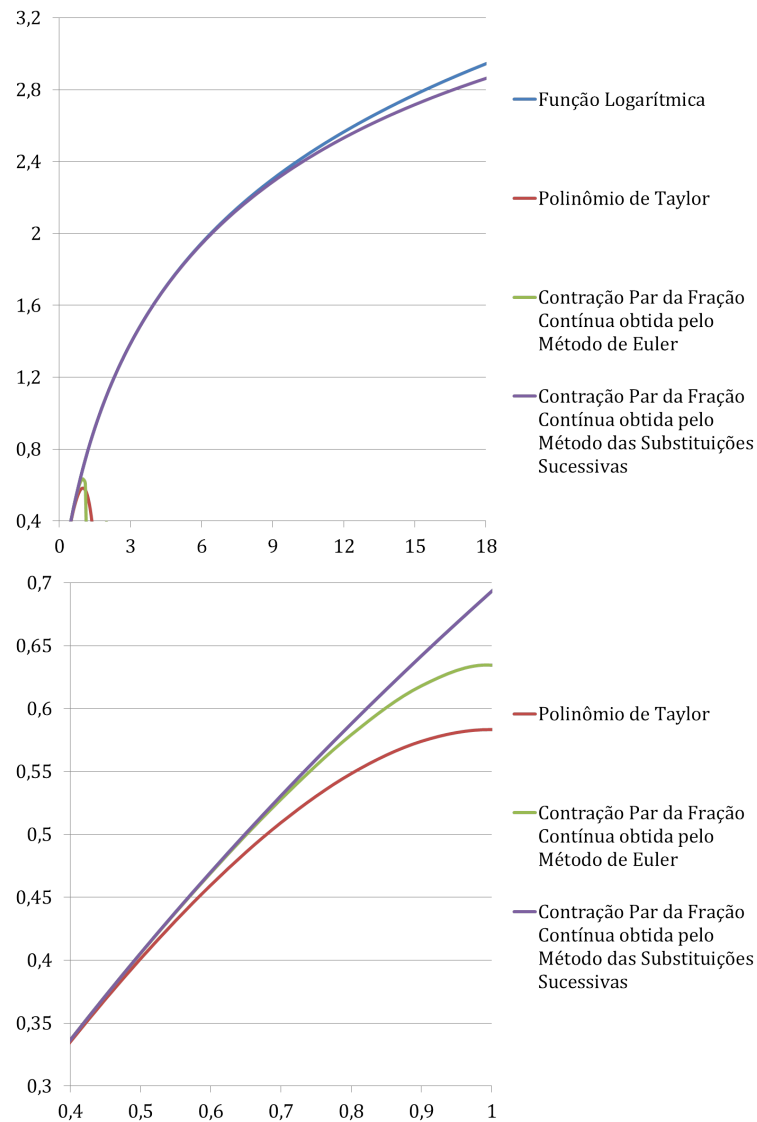


Figura 4.3: Curvas de aproximação para a função logarítmica.

Na figura compara-se o PT de ordem quatro da função logarítmica com os convergentes de mesma ordem de CPME e CPMSS.

Perceba que a curva das contrações estão mais próximas da curva da função do que a curva do polinômio de Taylor. E mais, a curva de CPMSS se aproxima da função por um intervalo bem maior do que a de CPME.

Funções Trigonômicas

Será analisada apenas a função trigonométrica inversa da tangente, embora o método proposto também seja aplicável às demais funções trigonométricas. Como visto, deve-se primeiramente determinar as seguintes expressões algébricas:

i) Série de Taylor da função $f(x) = \arctan(x)$ ao redor do ponto $x_0 = 0$:

$$\text{ST} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \dots$$

ii) Fração contínua obtida pelo método das substituições sucessivas e de Euler quando aplicados na referida série:

$$\text{MSS} = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{3 + \frac{4x^2}{5 + \frac{9x^2}{7 + \frac{16x^2}{9 + \frac{25x^2}{11 + \frac{36x^2}{13 + \dots}}}}}}}$$

$$\text{ME} = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{3 - x^2 + \frac{9x^2}{5 - 3x^2 + \frac{25x^2}{7 - 5x^2 + \frac{49x^2}{9 - 7x^2 + \dots}}}}}$$

iii) Contração par das respectivas frações contínuas:

$$\begin{aligned} \text{CPMSS} = & \frac{3x}{3 + x^2} - \frac{28x^4}{55x^2 + 105} - \frac{4752x^4}{191x^2 + 693} - \\ & - \frac{94500x^4}{1079x^2 + 2145} - \frac{655424x^4}{2431x^2 + 4845} - \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{CPME} = & \frac{3x - x^3}{3} - \frac{63x^4 - 45x^6}{105 - 35x^2 + 21x^4 - 15x^6} - \\ & - \frac{40425x^4 - 46550x^6 + 11025x^8}{693 - 495x^2 + 385x^4 - 315x^6} - \\ & - \frac{1029105x^4 - 1626966x^6 + 637065x^8}{2145 - 1755x^2 + 1485x^4 - 1287x^6} - \dots \end{aligned}$$

Em posse dessas expressões traça-se um gráfico comparativo entre essas entidades na aproximação da função $\arctan(x)$. Neste gráfico, visto abaixo, é visível que a curva vermelha (PT de ordem quatro) está mais “afastada” da curva azul (função inversa da tangente) do que as curvas verde (convergente de ordem quatro de CPME) e lilás (convergente de ordem quatro de CPMSS). Isso mostra que as contrações fornecem melhor aproximação para a função do que os polinômios de Taylor, levando em consideração que todos possuem a mesma ordem.

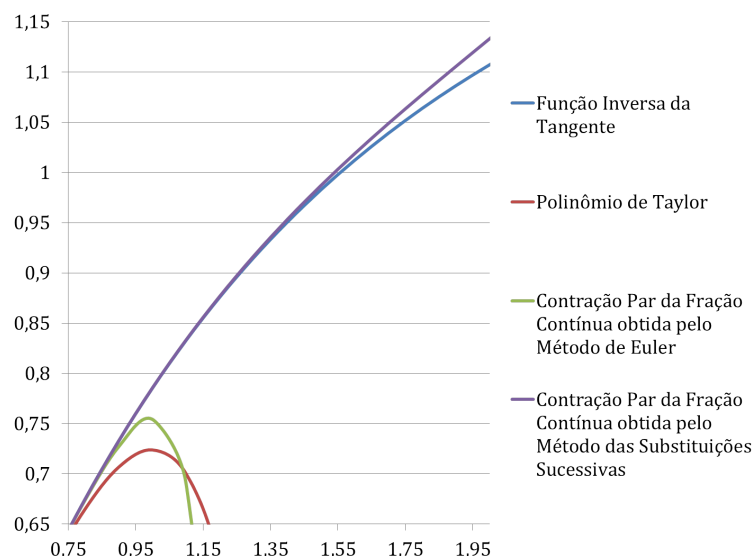


Figura 4.4: Curvas de aproximação para a função inversa da tangente.

Para uma análise numérica, atribua o valor $x = 1$ nas referidas expressões algébricas. Sucessivos truncamentos nessas expressões fornecem aproximações para o valor de $\pi/4 = \arctan(1)$. A tabela abaixo contém alguns desses valores:

Tabela 4.3: Valores aproximados para $\pi/4 \approx 0,785398163$.

Ordem	PT	MSS	CPMSS	ME	CPME
0	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000
1	1.000000000	1.000000000	0.750000000	1.000000000	0.666666667
2	0.666666667	0.750000000	0.784313725	0.666666667	0.723809524
3	0.866666667	0.791666667	0.785365854	0.866666667	0.744011544
4	0.723809524	0.784313725	0.785397206	0.723809524	0.754267954
5	0.834920635	0.785585586	0.785398135	0.834920635	0.760459905

Como se pode perceber, comete-se um erro, em valor absoluto, de aproximadamente 0,05 quando se toma o valor numérico do PT de ordem cinco como valor para $\pi/4$. Esse erro é reduzido para 0,025 quando se considera o valor numérico do convergente de mesma ordem de CPME como aproximação para o referido número. Essa sutil melhora é irrisória quando comparada ao valor do convergente de mesma ordem de CPMSS, cujo erro, em valor absoluto, é da ordem de 10^{-8} , praticamente desprezível dentro do intervalo de convergência da série.

Fica a cargo do leitor realizar a verificação gráfica e numérica da aproximação fornecida por essas expressões algébricas para as demais funções trigonométricas.

Função Raiz

A história da matemática aponta a função raiz como a mais antiga das funções a sofrer estudos sobre aproximação, com vestígios que remontam ao período babilônico [4].

Ao invés de se construir frações contínuas a partir da série de Taylor, as quais seguem o mesmo procedimento utilizado com as outras funções, será utilizada a manipulação de

radicais para determinar essa fração contínua, técnica utilizada desde a antiguidade. Em seguida será realizada a análise numérica dessa fração em comparação com a soma infinita decorrente da série Taylor para a função raiz $f(x) = \sqrt{1+x}$.

Primeiramente, observe que

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + (\sqrt{1+x} - 1) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x} + 1} \\ &= 1 + \frac{x}{2 + (\sqrt{1+x} - 1)} = 1 + \frac{x}{2 + \frac{x}{2 + (\sqrt{1+x} - 1)}} = \dots\end{aligned}$$

Assim, obtêm-se a seguinte fração contínua para a função raiz, aqui nomeada MR, significando ter sido obtida por “Manipulação de Radicais”:

$$\text{MR} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \dots$$

A série de Taylor para a função raiz, em torno de $x_0 = 0$, é dada por

$$\text{ST} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} - \frac{21x^6}{1024} + \dots$$

Observe na figura abaixo que o polinômio de Taylor PT de ordem cinco está muito aquém quando comparado ao convergente de mesma ordem da fração contínua MR, a qual oferece uma excelente aproximação para a função raiz sem ao menos sofrer o processo de contração.

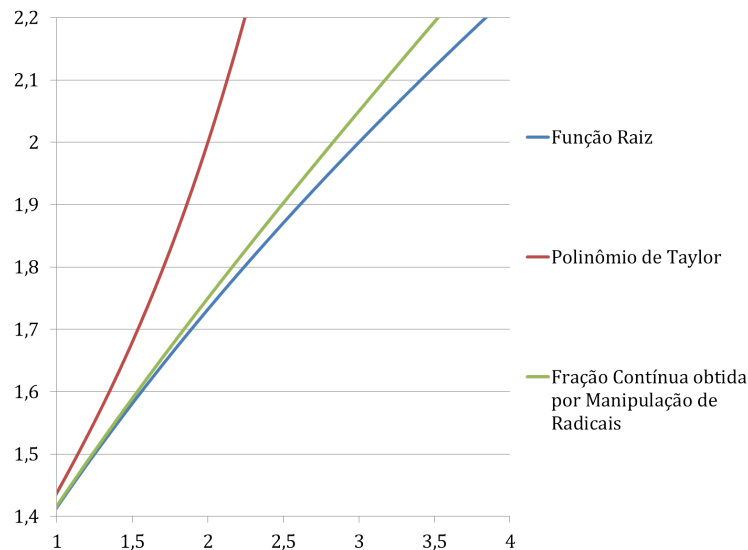


Figura 4.5: Curvas de aproximação para a função raiz.

Observe agora que, tomando $x = 1$ nas referidas expressões, encontram-se expressões numéricas para o irracional $\sqrt{2}$. Sucessivos truncamentos nessas expressões geram aproximações para este valor, alguns dos quais catalogados na tabela abaixo:

Tabela 4.4: Valores aproximados para $\sqrt{2} \approx 1,414213562$.

Ordem	PT	MR
0	0.000000000	<u>1</u> .000000000
1	<u>1</u> .000000000	<u>1</u> .500000000
2	<u>1</u> .500000000	<u>1</u> .400000000
3	<u>1</u> .375000000	<u>1</u> .416666667
4	<u>1</u> .437500000	<u>1</u> .413793103
5	<u>1</u> .398437500	<u>1</u> .414285714

É possível notar que, dentre os valores numéricos dos seis primeiros polinômios de Taylor PT, apenas um consegue prover a aproximação de uma casa decimal exata para o valor de $\sqrt{2}$, enquanto o sexto convergente da fração contínua MR fornece uma aproximação de quatro casas decimais exatas para esse número.

Fica a cargo do leitor realizar a análise numérica da contração par dessa fração contínua, assim como das frações contínuas originadas dos métodos da substituição sucessiva e de Euler, o que dá uma noção geral do melhor método de aproximação a ser empregado para esse tipo de função.

Como foi possível perceber, contrações de frações contínuas alcançam melhores resultados na aproximação de funções elementares do que as séries de Taylor, apesar de pertencerem ao estágio final de uma sequência de transformações algébricas, iniciada pela expansão da função na referida série. Isto porque a sequência composta por seus convergentes é um extrato da sequência dos convergentes da fração contínua que as geram. Mas este não é um extrato qualquer!

Como visto no teorema (2.3.1), o valor dos convergentes de ordem par cresce, e o dos convergentes de ordem ímpar decresce, em direção ao valor real a ser aproximado. Assim, quando tais convergentes são dispostos de acordo com a sequência crescente de suas ordens, seus valores oscilam entre um número por falta e outro por excesso do valor real. Já com as contrações, a aproximação ocorre em sentido unilateral, devido ao fato de seus convergentes serem exatamente iguais aos convergentes de ordem par ou de ordem ímpar da fração contínua geradora, o que acelera a convergência dessas frações, e consequentemente, da série de Taylor que lhe dá origem.

Note também que os convergentes da fração contínua originada de uma série que não seja do tipo alternada, como é o caso da série de Taylor da função exponencial, possuem valores que não seguem o padrão oscilatório descrito pelo teorema (2.3.1). Somente nestes casos é possível perceber grandes vantagens na aproximação de funções dada pelas contrações decorrentes da fração contínua gerada pelo método de Euler. Porém, mesmo seguindo tal padrão oscilatório, os convergentes das contrações destas frações contínuas possuem valores numéricos sutilmente mais próximos do valor real procurado, quando comparados aos das somas parciais de mesma ordem da série de Taylor.

A grande vantagem da fração contínua de Euler é sua correspondência com a série que lhe dá origem, o que permite a construção de seus numeradores e denominadores par-

ciais por meio da aplicação direta dos termos da referida série. Isso facilita uma possível implementação algorítmica quando aplicadas a máquinas de computar. Porém, essa simplicidade de construção contrasta com a forma rebuscada de seus quocientes parciais. A complexidade das expressões algébricas com que são formadas exige uma maior quantidade de cálculos na determinação de seu valor numérico, o que de fato exige maior esforço computacional da suposta máquina.

Em contrapartida, a forma com que se apresentam os numeradores e denominadores parciais da fração contínua obtida pelo método das substituições sucessivas é bem menos complexa. Utilizando-a como algoritmo computacional, tal fração exigiria bem menos esforço da máquina, pois o número de multiplicações (operação matemática utilizada na avaliação da complexidade computacional de um algoritmo) é menor quando comparada com a quantidade utilizada pelas frações contínuas de Euler.

Por outro lado, a construção dessas frações contínuas não é tão trivial quanto as de Euler. São necessários engenhosos cálculos algébricos na determinação de cada quociente parcial dessa fração contínua, o que certamente demandaria tempo para a referida implementação algorítmica.

Apesar da adversidade entre essas duas formas, a contração da fração contínua obtida pelo método das substituições sucessivas mostrou-se mais eficiente que a oriunda do método de Euler, pois resultou, em média, aproximações com erro na ordem de 10^{-8} do valor real procurado. Essa vantagem é verificada pela possibilidade de reduzir seus convergentes a funções do tipo racional, as quais proporcionam maior suavidade (menor oscilação) à curva do que as funções polinomiais decorrentes das somas parciais da série de Taylor da função.

Conclusão

Nos dias atuais, a resolução de problemas nas mais diversas áreas das ciências exatas passou a ser tratada pelos computadores. A automatização dos cálculos e a apresentação dos resultados em menos tempo impuseram a necessidade de conhecer o funcionamento dos algoritmos dessas máquinas. Sendo assim, a busca pelo aperfeiçoamento desses algoritmos deve ser algo constante, com o propósito de torná-los cada vez mais eficientes.

Baseado nessa premissa, foram encontradas razões para se buscar modelos alternativos e computáveis na representação aproximada de funções, em particular das elementares, objetivo fim deste trabalho. E, pelo fato de sua teoria ser fundamentada essencialmente no estudo das aproximações, as frações contínuas satisfizeram tais requisitos.

É bem sabido que os polinômios de Taylor, a mais conhecida forma em aproximar funções, ainda podem ser encontrados em alguns algoritmos. Mas a velocidade com que convergem à solução de um problema é bem menor quando comparada aos convergentes de uma fração contínua. Por exemplo, para uma aproximação de quatro casas decimais do valor de e é preciso tomar um polinômio composto pelos nove primeiros termos da série de Taylor. Em contrapartida, com o convergente de ordem quatro da contração par da fração contínua de Euler chegou-se ao mesmo nível de aproximação. Sob outro ponto de vista, o valor do convergente que possui mesma ordem que o referido polinômio, mas que é originado da contração par da fração contínua obtida pelo método das substituições sucessivas, ultrapassa nove casas decimais exatas para o real valor de e .

Esse resultado é bastante significativo, tendo em vista que há um aumento substancial da velocidade de convergência e, conseqüentemente, da eficiência algorítmica. Diante dessa constatação, chega-se à conclusão que as frações contínuas podem ser consideradas excelentes ferramentas matemáticas para emprego na aproximação de funções. Porém, faz-se necessário tecer alguns comentários a respeito da característica tríade de cada um dos métodos pelos quais essas frações contínuas foram obtidas: computabilidade, complexidade de representação e velocidade de convergência.

Observou-se que a fração contínua oriunda do método de Euler é construída diretamente dos termos da série de Taylor, o que facilita sobremaneira a forma de ser computada. Porém, ainda que sejam mais vantajosas que as funções polinomiais extraídas da referida série, a velocidade com que suas contrações convergem ao valor real da função não chega a ser algo notório. Por exemplo, o valor do convergente de ordem cinco da contração par dessa fração contínua difere, em módulo, de aproximadamente 0,05 do valor de $\log(2)$, en-

quanto o polinômio de Taylor de mesma ordem, de 0,09, valores relativamente próximos, com ligeira vantagem para o convergente. Isso se deve ao fato da fração contínua de Euler corresponder à série de Taylor que a origina, ou seja, de que seus convergentes são exatamente iguais às somas parciais da referida série. Além disso, os numeradores e denominadores parciais das contrações da fração contínua de Euler são compostos por funções que exigem uma maior quantidade de cálculos aritméticos, o que possivelmente aumenta a complexidade computacional de uma possível implementação algorítmica.

Já a fração contínua obtida pelo método das substituições sucessivas possui termos mais simples, exigindo poucas operações aritméticas. Além disso, a velocidade com que suas contrações convergem ao valor real da função é substancialmente maior que a provida pelas contrações das frações contínuas de Euler. Para se ter uma ideia, o valor do convergente de ordem cinco da contração par dessa fração contínua para $\log(2)$ possui erro na ordem de 10^{-8} do valor real. Essa característica, aliada à simplicidade na escrita de seus termos, atribui-lhe significativa distinção frente às frações contínuas de Euler. Porém, a forma engenhosa com que são construídas possivelmente demandaria um trabalho árduo na concepção do algoritmo.

A comparação da vantagem computacional entre as contrações das frações contínuas oriundas dos métodos utilizados neste trabalho pode ser resumida na seguinte tabela:

Tabela 4.5: Vantagem computacional das contrações de frações contínuas obtidas dos métodos de Euler (CME) e das substituições sucessivas (CMSS).

CONTRAÇÕES	COMPUTABILIDADE	REPRESENTAÇÃO	VELOCIDADE
CME	Fácil	Complexa	Lenta
CMSS	Engenhosa	Simples	Rápida

Como tais métodos não são únicos, assim como a capacidade do ser humano não é limitada, sugere-se que a continuidade dos estudos apresentados neste trabalho esteja voltada aos seguintes tópicos:

1. Análise da aproximação de funções por métodos diversos que convertam séries em frações contínuas, como é o caso do Algoritmo QD, dentre outros;
2. Comparação gráfica e numérica dos métodos de Euler e das substituições sucessivas quando aplicados a outras formas polinomiais que representem funções, como é o caso dos polinômios interpoladores;
3. Implementação algorítmica de funções elementares utilizando a contração das frações contínuas oriundas dos métodos de Euler e das substituições sucessivas, de modo a permitir uma análise da complexidade computacional relacionada à quantidade de operações matemáticas envolvidas nos cálculos e no tempo de processamento para sua execução; e

4. Estudo dos intervalos em que as frações contínuas convergem, assim como de outros critérios de convergência, uma vez que a forma contraída dessas frações se aproxima muito mais das funções do que as séries de Taylor, principalmente a que decorre do método das substituições sucessivas.

Este trabalho não serve apenas como uma reprodução de ideias. Ele resgata o apreço de uma teoria praticamente esquecida que, embora banida de obras referenciais, encontra-se latente em grandes problemas, tanto clássicos quanto modernos, permitindo, assim, brilhantes conclusões matemáticas.

Referências Bibliográficas

- [1] ANDRADE, E. X. L.; BRACCIALI, C. F. *Frações contínuas: propriedades e aplicações*. Notas em Matemática Aplicada, v. 20, 2.ed. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional. São Paulo: São Carlos, 2012.
- [2] BATTIN, R.H. *An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics*. American Institute of Aeronautics and Astronautics. Reston: Virgínia, 1999.
- [3] BLANCH, G. *Numerical evaluation of continued fractions*. Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM Review, v. 6, n. 4, pp. 383-421. 1964.
- [4] BREZINSKI, C. *History of continued fractions and Padé approximants*. Springer Series in Computational Mathematics, 12. Springer-Verlag. Berlin: Heidelberg, 1991.
- [5] CUYT, A.; WUYTACK, L. *Nonlinear methods in numerical analysis*. North-Holland Mathematics Studies, 136. Studies in Computational Mathematics, 1. Elsevier Science Publishers B.V. Amsterdam, 1987.
- [6] FIKE, C. T. *Computer evaluation of mathematical functions*. Series in Automatic Computation. Prentice-Hall. Englewood Cliffs: New Jersey, 1968.
- [7] JONES, W. B.; THRON, W. J. *Continued fractions: analytic theory and applications*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, v. 11. Addison-Wesley Publishing Company. Massachusetts, 1980.
- [8] KHOVANSKII, A. N. *The application of continued fractions and their generalizations to problems in approximation theory*. Library of Applied Analysis and Computational Mathematics. P. Noordhoff Ltd. Groningen: The Netherlands, 1963.
- [9] LORENTZEN, L.; WAADELAND, H. *Continued fractions: convergence theory*. v. 1, 2.ed. Atlantis Press. Amsterdam: Paris, 2008.
- [10] LORENTZEN, L.; WAADELAND, H. *Continued fractions with applications*. Studies in Computational Mathematics 3. Elsevier Science Publishers B.V. North-Holland: Netherland, 1992.
- [11] MELO, M. E. M.; VERA, J. A. H. *Números reais*, volume 2. Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco. Editora Universitária da UFRPE, 2013.

- [12] MELO, M. E. M.; VERA, J. A. H. *Números reais*, volume 3. Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco. Editora Universitária da UFRPE, 2013.
- [13] OLIVEIRA, I. C. *Complexidade computacional e o problema P vs NP*. 2010. 125f. Dissertação de Mestrado - Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo. 2010.
- [14] STEWART, J. *Cálculo*, volume 2. São Paulo: Thomson Learning, 2007.
- [15] WALL, H. S. *Analytic theory of continued fractions*. Chelsea Publishing Company. Bronx: New York, 1967.