



Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

EXPLORANDO A ASTRONOMIA COMO CONTEXTO PARA O
ENSINO DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

THIAGO ALBERTO CORREIA MAGALHÃES

Orientador

Marcelo Pedro dos Santos

Recife-PE

Agosto de 2016

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

EXPLORANDO A ASTRONOMIA COMO CONTEXTO PARA O
ENSINO DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

THIAGO ALBERTO CORREIA MAGALHÃES

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede - PROFMAT da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Recife-PE

Agosto de 2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

L732p Magalhães, Thiago Alberto Correia
Explorando a astronomia como contexto para o ensino de matemática no ensino
médio / Thiago Alberto Correia Magalhães . – 2016.
145 f. : il.

Orientador: Marcelo Pedro dos Santos.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional –
PROFMAT) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, BR-PE, 2016.
Inclui referências.

1. Astronomia 2. Mecânica celeste 3. Matemática – Estudo e ensino 4. Ensino
Médio I. Santos, Marcelo Pedro dos, orient. II. Título

CDD 510

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Pedro dos Santos (Orientador)

Prof. Dr. Clessius Silva (Membro externo da banca)

Prof. Dr. Ross Alves do Nascimento (Membro interno da banca)

À Maria Luísa, que diante da vastidão do tempo e da imensidão do Universo, é um grande prazer dividir uma vida contigo.

Epígrafe

“Nós somos uma maneira do Cosmos conhecer a si mesmo.”

Carl Sagan

Agradecimentos

Inicio meus agradecimentos ao grande geômetra do Universo, o poder criador do Cosmos, Deus. Ele colocou pessoas tão especiais ao meu lado, sem as quais certamente não teria dado conta.

À Nossa Senhora Auxiliadora que me guia e me auxilia, pois, segundo São João Bosco, *foi ela quem tudo fez*. E ao próprio São João Bosco pela educação recebida desde os 7 anos de idade em um ambiente que é “casa que acolhe, escola que educa, paróquia que evangeliza e pátio para se encontrar com os amigos”.

Aos meus pais, João Alberto e Maria Verônica, que na mitologia Guarani são os meus Ñande Ru Paven e Ñande Sy, exemplos de determinação, fé, luta e esperança, que me apoiaram e comigo sofreram ao longo de toda essa caminhada, sem o apoio deles nada teria sido possível.

À Maria Luísa Santana Magalhães; minha estrela binária primária, minha inspiração e meu refúgio. Quando ela chegar no estágio de evolução da Alfa Centauri, entenderá as minhas ausências durante essa fase da existência, no qual ela é uma Próxima Centauri. À Telma, a estrela par do sistema binário formado com Maria Luísa, pelos mais de 13 anos que estivemos juntos.

Aos meus irmãos; Maria Paula, somos poeira das mesmas estrelas, e Davi, a estrela guia, que sempre me apoiaram e estão juntos nessa jornada.

A Alice, meu Sol, minha companheira, meu alicerce e minha fortaleza, ela que faz todo o esforço valer à pena, por suportar minha ausência, minhas angústias, e todas as dificuldades enfrentadas ao longo do caminho.

Um agradecimento especial ao meu orientador o Professor Dr. Marcelo Pedro dos Santos pela inestimável ajuda e contribuição que muito enriqueceu não só este trabalho, mas toda a minha visão da Mecânica Celeste. Foi um verdadeiro Tycho Brahe.

Aos meus grandes colegas de mestrado da nossa *Ordem do Golfinho* que se tornaram mais do que isto: Emanuel Rodrigo, Erivaldo Júnior, Herison Batista, Josenilda Abreu e Maurílio Vilaça. Por diversas vezes, quando um de nós estava desmotivado ou cansado

da rotina de estudos, os outros nos trazia de volta ao foco.

Aos colegas de mestrado da *Confraria do Mercado* nos quais estivemos juntos no pós-aula conversando e debatendo matemática: Adriano Chagas, Airton Magalhães, Geraldo Silveira, João Gonçalves e Kléber Filho.

Aos grandes acadêmicos colegas de mestrado que sabemos que os conhecimentos matemáticos que eles repassam e possuem transcendem aos títulos adquiridos: Cícero Brito, Francisca Alves e Teófilo Viturino.

Aos professores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da UFRPE, por todo conhecimento adquirido e apoio, no período do mestrado.

Aos professores Clessius Silva e Ross Alves do Nascimento por todos os préstimos e apoio na análise deste trabalho.

Ao apoio financeiro da CAPES, fundamental para vencer alguns obstáculos.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), pelo excelente projeto que é o PROF-MAT.

Aos professores e coordenadores do Colégio Militar de Brasília que me ajudaram e me abriram as portas para que eu pudesse juntar as duas coisas que me realizam, lecionar e trabalhar com Astronomia: Adelino Bandeira, Eduardo Fetter Nunes, Fernando Córes, Jorge Coelho e Frank Sales.

Aos professores do Colégio Militar do Recife que me apoiaram e estiveram juntos comigo em todos os momentos de alegria e tristeza: Luis Corrêa da Cunha, Ronaldo Melo Júnior, Pedro Júnior, Aderivaldo Silva, Darlei Miranda, Angélica Valença, Carlos Felipe Sarmiento, Raul Bueno e Fernando Ivo.

Por fim, agradeço a todos aqueles que contribuíram diretamente ou indiretamente para vencer mais uma etapa da minha vida.

Resumo

O presente trabalho tem o objetivo de explorar conceitos matemáticos em saberes da Astronomia como um recurso motivador e intuitivamente fornecer mais significado aos temas da Matemática estudados em sala de aula, possibilitando ao discente a vivência de algumas situações que necessitam da utilização dos conhecimentos já adquiridos. A proposta pode ser considerada uma ferramenta motivacional que vai auxiliar na qualidade do ensino e da aprendizagem da Matemática no Ensino Médio. O trabalho está dividido em três capítulos. Cada capítulo corresponde aos conteúdos matemáticos das séries sucessivas do Ensino Médio. Ao finalizar cada conteúdo matemático aplicado em Astronomia, são descritos um ou mais exercícios. Procurou-se, assim, atender a um dos objetivos do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, que é o de elaboração de uma proposta da atividade educacional, cumprindo um dos requisitos do programa e ao mesmo tempo desenvolvendo uma atividade não convencional na aplicação dos conteúdos matemáticos. Sendo, portanto, útil não somente aos professores de Matemática e Física do Ensino Médio, como também aos alunos de Graduação de Licenciatura em Matemática e em Física.

Abstract

The present work has the objective of exploring mathematical concepts in astronomy in order to provide more meaning to the themes of mathematics studied in the classroom and allow the student the experience of some situations that require the use of the knowledge already acquired. The proposal can be considered a motivational tool that will help in the quality of the teaching and learning of mathematics in high school. The work is divided into three chapters, which are divided according to the grades of high school: in chapter 1, the contents of the first grade of high school, and so on. At the end of each mathematical concept applied in astronomy, are given one or more exercises for the content. It was, thus, meet one of the goals of the PROFMAT, which is the preparation of a proposal of the educational activity, fulfilling one of the requirements of the program and at the same time developing an unconventional activity on application of mathematical content. And therefore useful for teachers of mathematics and physics in high school, in the same way that the undergraduate degree in mathematics and physics.

Lista de Figuras

1	Quadro organizador dos temas e suas unidades.	5
1.1	Diagrama HR para algumas estrelas mais brilhantes do céu ou estrelas mais próximas do Sol ($d < 5$ parsec).	13
1.2	Diagrama de Hubble na forma original.	19
1.3	Universo em expansão.	20
1.4	Gráfico da Distância (em Mpc) pela Velocidade de recessão (em km/s).	22
1.5	Esferas de luz emitidas pelas estrelas.	33
1.6	A quantidade que faltava para Eratóstenes.	40
1.7	Esboço da propagação dos raios de luz na visão de Eratóstenes.	41
1.8	Esboço da dedução de Aristarco onde α , para ele, era igual a 3°	45
1.9	Deslocamento aparente dos objetos vistos de ângulos distintos.	46
1.10	Ângulo paralítico p quando a base tem valor D à uma distância d	47
1.11	Triângulo retângulo com hipotenusa B e catetos D e d	47
1.12	Distância para um diâmetro aparente α de $30'$	49
1.13	Quando a Terra se move em sua órbita em torno do Sol, uma estrela mais próxima parece se deslocar em relação às estrelas mais distantes	50
1.14	Essa é a geometria para se medir 1 parsec, onde $p = 1''$	51

2.1	Elipse e seus principais elementos.	58
2.2	Coordenadas cartesianas e polares.	60
2.3	Ciclo Trigonométrico.	61
2.4	Elipse em coordenadas polares.	62
2.5	Revolução de uma semicircunferência sobre um eixo vertical.	67
2.6	São mostrados os pontos cardeais no horizonte do observador.	71
2.7	Altura e azimute de uma estrela, e o almucântar na altura dessa mesma estrela.	72
2.8	AR e Dec no Sistema Equatorial Celeste.	72
2.9	Foto de satélite da cratera principal da Serra da Cangalha.	77
2.10	Diagrama que relaciona o intervalo anual entre impactos e o diâmetro do objeto que colide com a Terra.	80
3.1	Lei das Áreas.	86
3.2	Partícula em movimento circular.	93
3.3	Elipse.	103
3.4	Órbita de um planeta ao redor do Sol e a variação de sua distância.	104
3.5	Desenho em escala correta de 14 elipses com as excentricidades dadas na Tabela 3.4.	105
3.6	Elipses das órbitas dos 9 planetas desenhadas com eixo maior de 4u.	108

Sumário

Introdução	1
1 Conteúdos da Primeira Série do Ensino Médio	9
1.1 Diagrama HR (Noção de Função e Análise Gráfica)	11
1.2 Lei de Hubble (Função Afim)	17
1.3 Sequência de Titius-Bode (Sequências Numéricas)	23
1.4 Magnitudes Estelares (Função Logarítmica)	29
1.5 Medindo o Raio da Terra (Geometria plana: semelhança e congruência)	38
1.5.1 Semelhança de Triângulos	40
1.5.2 Projeto Eratóstenes Brasil	42
1.6 Distâncias no Sistema Solar (Trigonometria do triângulo retângulo)	44
1.6.1 Determinação da Distância Terra-Lua	49
1.6.2 Paralaxe Heliocêntrica	50
2 Conteúdos da Segunda Série do Ensino Médio	56
2.1 Elipse em Coordenadas Polares (Funções Trigonométricas e Lei dos Cossenos)	57

2.1.1	Elipse	57
2.1.2	Coordenadas Polares	59
2.2	A Esfera Celeste (Geometria Espacial: sólidos redondos)	66
2.2.1	Esfera	67
2.2.2	Sistema de Coordenadas	70
2.3	A Possibilidade Real de Colisões (Estatística: análise de dados)	76
2.3.1	Análise de Dados	78
3	Conteúdos da Terceira Série do Ensino Médio	84
3.1	Segunda Lei de Kepler (Taxas de variação de grandezas)	85
3.1.1	Taxa de Variação	87
3.2	Lei de Newton da Gravitação Universal (Taxas de variação de grandezas)	90
3.2.1	Aceleração dos corpos em órbitas circulares	92
3.2.2	Proporcionalidade entre Grandezas	94
3.2.3	Terceira Lei de Kepler	96
3.2.4	Gravitação Universal	97
3.3	Primeira Lei de Kepler (Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações - Elipse)	100
3.3.1	Elipse	102
3.3.2	A excentricidade das órbitas dos planetas	106
3.4	Possibilidade de vida fora do Sistema Solar (Probabilidade)	110
	Considerações Finais	119

Introdução

“A verdade do Universo conduz à verdade do espírito”, escreveu o filósofo francês Léon Brunschvicg (1869 – 1944). A Astronomia aborda uma série de mistérios considerados sagrados pela humanidade desde a antiguidade mais remota. Talvez seja esta uma das razões pela qual a Astronomia fascina tanto o espírito humano. Há milênios o homem contempla os fenômenos celestes, ora como um sinal divino, ora como uma ameaça.

Mourão (1997, p. 22) diz que a Astronomia é na sua essência, a ciência da observação dos astros. Ele afirma que “[...] o objetivo da Astronomia é situá-los, no espaço e no tempo, explicar os seus movimentos e as suas origens, descobrir a sua natureza e as suas características”.

De acordo com Verdet (1997, p. 1):

É durante o período Assírio que os progressos na Astronomia são mais significativos que se delineia claramente a tendência à descrição matemática, mas é necessário esperar os três últimos séculos antes da nossa era, os dos reinados dos selêucidas e dos arsácidas, para que surjam os primeiros textos em que o estudo dos movimentos celestes esteja baseado em observações contínuas e em teorias matemáticas algebricamente astutas.

Assim, em um milênio e meio, os sábios da Mesopotâmia acumularam as observações e elaboraram as teorias matemáticas que lhes permitiram uma boa descrição empírica dos movimentos da Lua, do Sol e dos planetas, da variação dos dias e das noites.

Segundo Mourão (1991, p. 7):

A verdade da história da ciência que procura compreender o Universo é, na realidade, uma tentativa humana de entender o complexo universo indecifrável da mente humana. Por este motivo, nenhum estudo do desenvolvimento de qualquer outra ciência, através do tempo, é tão importante como o da Astronomia.

Assim, ao pensarmos a Astronomia como a ciência da observação dos astros e base de todas as ciências, ela influencia praticamente todos os ramos do conhecimento científico. De acordo com Nogueira & Canalle (2009, p. 20):

(...) Há uma crescente repartição do saber em gavetas estanques (como, por exemplo, as disciplinas lecionadas separadamente em todas as escolas), dessa maneira, as noções astronômicas também foram diluídas e, conseqüentemente, sua importância no ensino decresceu de forma extremada.

A escola utiliza bem pouco a Astronomia porque o modelo tradicional de ensino enfatiza de forma mais abrangente os conteúdos do que os esquemas de aprendizagem construtivos como História da Astronomia na História da Matemática na organização pedagógica do tempo. Na visão tradicional, a Astronomia na educação não tem espaço, por ser entendida apenas como uma matéria lúdica. As práticas de ensino da Matemática no nível de Ensino Médio continuam a ser dominadas por uma visão tradicionalista.

De acordo com Moraes (2003, pp. 8 e 9):

A interação permanente entre Astronomia e Matemática, de alguma forma pode ser aproveitada para tentar ultrapassar essa visão tradicionalista. As dificuldades que a maioria dos alunos experimenta, quer na compreensão dos conceitos matemáticos, quer na sua aplicação à realidade, podem ser vencidas tirando partido da Astronomia, pois ela por si só é bastante motivadora pela curiosidade que desperta nas pessoas.

Ainda segundo Nogueira & Canalle (2009, p. 21):

Quando um professor menciona os planetas e a busca por vida extraterrestre, ele desperta nos alunos o interesse romântico associado à pesquisa espacial e, assim, evocando uma curiosidade inata do discente. É o mesmo sentimento que impulsionou o ser humano para a ciência.

Ou seja, é uma excelente maneira de fazer com que os alunos se interessem pelos avanços científicos – pré-requisito indispensável para o desenvolvimento da cidadania nos dias de hoje – e, mais que isso, motivá-los aos estudos.

O objetivo geral deste trabalho é explorar a Astronomia como recurso pedagógico para as aprendizagens em Matemática do Ensino Médio, etapa final da Educação Básica, no intuito de resgatar esse interesse perdido com a compartimentalização da ciência. Trabalhar-se-á a integração entre a Astronomia e a Matemática na busca de situações reprodutíveis, denominadas de situações didáticas. De acordo com Brousseau (1986, p. 10), “docentes e discentes são atores indispensáveis da relação de ensino e aprendizagem, bem como o meio em que a situação didática se faz presente”.

Os objetivos específicos são:

- Identificar como a Astronomia pode contribuir para os processos de raciocínio na formulação das relações entre conteúdo teórico e prática educativa nas etapas de produção do conhecimento matemático do Ensino Médio;
- Relacionar as formas de atuação a partir dos Parâmetros Curriculares Nacionais de técnicas e métodos de utilização da Astronomia como recurso pedagógico do Ensino Médio;
- Levantar as habilidades desenvolvidas para modelar situações-problema relativas ao conhecimento de Astronomia.

De acordo com o PCNEM+ (Brasil, 2002, p. 24):

(...) A Matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como Ciência com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador importante junto às demais Ciências da Natureza. É necessário explicitar vínculos e aspectos comuns entre as disciplinas da área, assim como mostrar como as Ciências da Natureza e a Matemática traduzem as competências gerais. Isso será mais concretizado ao se organizar o programa de ensino das disciplinas em temas que estruturam o conhecimento disciplinar e, ao mesmo tempo, são um espaço com ênfases e características próprias de promoção de competências e habilidades. Na elaboração do programa de ensino de cada uma das quatro disciplinas (Matemática, Química, Física e Biologia), está se levando em conta o fato de que elas incorporam e compartilham, de forma explícita e integrada, conteúdos de disciplinas afins, como **Astronomia** (grifo nosso) e Geologia.

Sabe-se pelas Orientações Educacionais Complementares (Brasil, 2006, p. 85):

(...) Que ao final do Ensino Médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico.

“A compreensão dos conceitos matemáticos pode de alguma forma ser facilitada aos alunos com o recurso a situações onde a aplicação da Astronomia seja determinante na resolução de problemas concretos.” (MORAIS, 2003, p. 9)

Aqui a Astronomia fornece bastantes exemplos, como os que são tratados neste trabalho:

1. Conceitos de números e funções

- A disposição das estrelas em um diagrama permite estimar a evolução delas.
- A declividade de uma reta da função afim permite estimar a idade do Universo e a velocidade de afastamento dos planetas.
- A taxa de variação permite calcular a velocidade areolar dos planetas. A relação entre a distância dos planetas e o Sol no Sistema Solar é uma sequência numérica.
- A relação entre a distância de uma estrela e o seu brilho é uma função logarítmica.
- O uso de funções trigonométricas permite mostrar, por exemplo, a regularidade das órbitas dos planetas em torno do Sol.

2. Conceitos de geometria

- Semelhança de triângulos permite medir o raio da Terra.
- Razões trigonométricas permitem calcular a distância Terra - Lua.
- A elipse permite representar as órbitas dos planetas, de acordo com Kepler.

3. Conceitos de análise de dados

- Os dados estatísticos permitem analisar a possibilidade de colisões de objetos extraterrestres na superfície da Terra.
- A probabilidade permite mostrar a possibilidade de vida fora do Sistema Solar.

O programa do Ensino Médio está dividido em cada um dos anos em 3 grandes temas como se mostra no quadro seguinte:

Figura 1: Quadro organizador dos temas e suas unidades.

1ª série	2ª série	3ª série
1. Noção de função; funções analíticas e não-analíticas; análise gráfica; sequências numéricas; função exponencial ou logarítmica. 1. Trigonometria do triângulo retângulo. 2. Geometria plana: semelhança e congruência; representação de figuras.	1. Funções seno, cosseno e tangente. 1. Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta. 2. Geometria espacial: poliedros; sólidos redondos; propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos. 2. Métrica: áreas e volumes; estimativas.	1. Taxas de variação de grandezas 2. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.
3. Estatística: descrição de dados; representações gráficas.	3. Estatística: análise de dados. 3. Contagem.	3. Probabilidade.

Fonte: PCNEM+ (BRASIL, 2002, p. 128)

Além dos temas transversais que aparecem nos Parâmetros Curriculares Nacionais a serem ensinados ao longo dos três anos, estão contempladas neste programa as principais áreas da Matemática (temas estruturadores):

1. Álgebra: números e funções
2. Geometria e medidas
3. Análise de dados

Encontramos no programa proposto várias opções metodológicas para determinados temas, os quais podem ser associados com a Astronomia. Neste trabalho essa associação é concretizada da seguinte forma:

Álgebra: números e funções

- Noção de função; funções analíticas e não analíticas; análise gráfica; sequências numéricas; função exponencial ou logarítmica.
- Trigonometria do triângulo retângulo.
- Funções seno, cosseno e tangente.
- Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta.
- Taxas de variação de grandezas.

Neste tema vamos encontrar:

- Diagrama HR.
- Lei de Hubble.
- Sequência de Titius-Bode.
- Magnitudes estelares.
- Elipse em Coordenadas Polares.
- Segunda Lei de Kepler.
- Lei de Newton da Gravitação Universal.

Geometria e medidas

- Geometria plana: Semelhança e congruência; representações de figuras.
- Geometria espacial: Poliedros; sólidos redondos; propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos.

- Métrica: Áreas e volumes; estimativas.
- Geometria Analítica: Representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.

Este tema é contemplado em:

- Medindo o raio da Terra.
- Distâncias no Sistema Solar.
- A Esfera celeste.
- Primeira Lei de Kepler.

Análise de dados

- Estatística: Descrição de dados; representações gráficas.
- Estatística: Análise de dados.
- Contagem.
- Probabilidade.

A aplicação de análise de dados surge nos seguintes casos:

- A possibilidade real de colisões.
- Possibilidade de vida fora do Sistema Solar.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma:

- Três capítulos, seguindo a ordem das séries do Ensino Médio da Álgebra até Análise de dados.
- Em cada capítulo é feita uma introdução situando os temas matemáticos na Astronomia e no contexto do programa apresentado nos PCNEM+.

- No final dos tópicos, são propostas algumas questões que permitem aplicar a Matemática no contexto da Astronomia, ficando ao cargo do leitor o desenvolvimento de outros exercícios ou buscá-los no material oferecido nas referências.
- Todos os cálculos envolvidos são apresentados, sendo alguns (poucos) remetidos para o leitor de forma a envolvê-lo na sua concretização.

Capítulo 1

Conteúdos da Primeira Série do Ensino Médio

O PCNEM+ (Brasil, 2006, p.19) considera que “há um conjunto de conhecimentos que são necessários ao aluno para que ele compreenda a sua realidade e possa nela intervir com autonomia e competência”. No ensino de Matemática, esse conjunto necessita, segundo o PCNEM+ (Brasil, 2006, p.19), de

(...) Uma articulação lógica das ideias e conteúdos matemáticos que podem ser sistematizado em três eixos ou temas estruturadores, desenvolvidos de forma concomitante nas três séries do Ensino Médio:

- Álgebra: números e funções
- Geometria e medidas
- Análise de dados

Neste capítulo, serão trabalhados os conteúdos da primeira série do Ensino Médio, que estão relacionados no PCNEM+, sendo o primeiro tema ou eixo estruturador a ser trabalhado, a Álgebra, que abordará os seguintes itens:

- Noção de função;
- Funções Analíticas e não-analíticas;
- Análise gráfica;

- Sequências numéricas;
- Função exponencial ou logarítmica e
- Trigonometria do triângulo retângulo

e faremos o uso desses conhecimentos matemáticos aplicados aos conceitos astronômicos:

- Noção de função e Análise gráfica \implies Diagrama HR.
- Funções Analíticas e não-analíticas \implies Lei de Hubble.
- Sequências numéricas \implies Sequência de Titius-Bode.
- Função exponencial ou logarítmica \implies Magnitudes Estelares.
- Trigonometria do triângulo retângulo \implies Determinação de distâncias.

Já no segundo eixo estruturador, a Geometria, o PCNEM+ traz os seguintes conteúdos:

- Geometria plana: semelhança e congruência e
- Representação de figuras.

e o conteúdo *Geometria plana: semelhança e congruência* será aplicado na Astronomia no tópico *Medindo o Raio da Terra*.

E para pensarmos em Astronomia será necessário fazermos uma viagem em busca de diversas respostas no Universo, onde dificilmente os astrônomos podem estimar as distâncias em quilômetros ou milhas. No estudo do Sistema Solar a unidade de comprimento que utilizam é a Unidade Astronômica (UA), ou seja, a distância média da Terra ao Sol, aproximadamente 150 milhões de quilômetros. As estrelas e as galáxias estão longe demais para que essa unidade possa ser empregada. O ano-luz é a unidade de distância que ocupa o seu lugar: é o caminho percorrido pela luz em um ano, isto é, à razão de 300 mil quilômetros por segundo, que equivalem a um caminho percorrido de 9 trilhões e 460 bilhões de quilômetros. Isto significa que a luz pode dar 8 (oito) voltas em torno da Terra em apenas 1 (um) segundo. Depois vem o parsec (pc), distância na qual o raio da órbita

terrestre é visto sob um ângulo de um segundo de arco. Têm-se as relações: 1 parsec = 3,26 anos-luz = 206 mil unidades astronômicas. (*Ver o conteúdo sobre Determinação de distâncias - O parsec, páginas 47 e 48*)

1.1 Diagrama HR (Noção de Função e Análise Gráfica)

“O primeiro tema ou eixo estruturador (Álgebra: números e funções) apresenta-se com enorme importância enquanto linguagem, como na variedade de gráficos presentes diariamente nos noticiários e jornais.” PCNEM+ (BRASIL, 2002, p. 120)

O Diagrama HR entra na unidade temática *Variação de grandezas: Representação e Análise Gráfica* e será apresentado para lermos e interpretarmos dados ou informações apresentados em diferentes linguagens e representações, como tabelas e gráficos.

No início do século XX, dois astrônomos de forma independente trabalharam na classificação das estrelas e obtiveram resultados muito similares. De acordo com Oliveira Filho e Saraiva (2014, p. 234, grifo nosso):

O Diagrama de Hertzsprung Russell, conhecido como Diagrama HR, foi descoberto independentemente pelo dinamarquês Ejnar Hertzsprung (1873 - 1967), em 1911, e pelo americano Henry Norris Russell (1877 - 1957), em 1913, como uma **relação existente entre a luminosidade de uma estrela e sua temperatura superficial**.

O Diagrama HR é uma compilação do trabalho de ambos.

Há uma relação entre a cor da estrela e a temperatura na superfície dela. Mas a análise do espectro de absorção possibilitou determinar essa temperatura com muito maior precisão.

O espectro de absorção de uma determinada substância consiste em um conjunto de comprimentos de ondas (ou de frequências) que são absorvidos pela substância quando incidimos uma radiação com espectro contínuo sobre ela.

Mesmo através de uma comparação visual, os espectros de absorção das estrelas podem ser classificados em um número relativamente pequeno de tipos espectrais. Por outro lado,

a análise teórica permitiu associar uma temperatura de superfície a cada tipo espectral. Assim, uma vez que uma estrela é classificada pelo seu tipo espectral, sua temperatura de superfície já está determinada. Os principais tipos espectrais são denominados O, B, A, F, G, K, M. Eles correspondem a temperaturas que decrescem de 50 mil Kelvin a 3 mil Kelvin.

Tabela 1.1: Relaciona o tipo espectral da estrela com sua respectiva temperatura média em Kelvin.

Tipo espectral	Temperatura média (K)
O	50.000
B	28.000
A	10.000
F	7.400
G	6.000
K	4.900
M	3.000

Fonte: ARANY-PRADO (2006, pp. 87 - 94)

Além da temperatura da superfície, é muito importante conhecer a luminosidade da estrela. A luminosidade é a potência irradiada. A luminosidade do Sol é equivalente a 4 setilhões de lâmpadas de 100 watts. Mas a observação nos fornece apenas o brilho. Para determinarmos a luminosidade a partir do brilho, precisamos conhecer também a distância da estrela, pois o brilho decresce no inverso do quadrado da distância. (*Ver o conteúdo sobre Magnitudes, páginas 26 a 33.*)

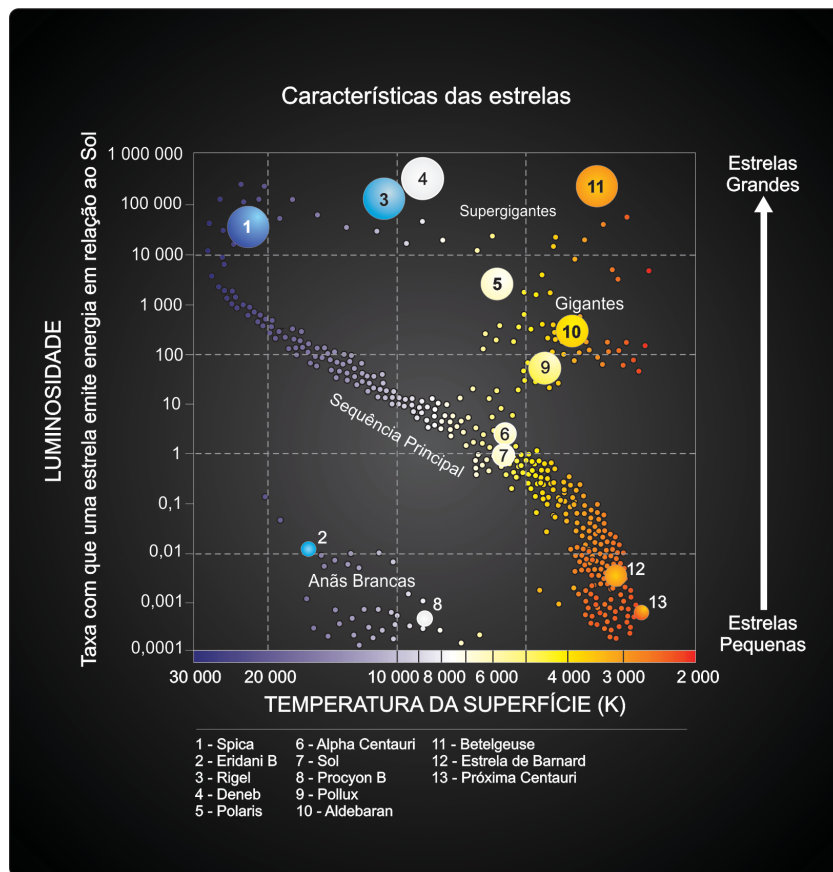
Uma vez determinada a distância da estrela por um ou mais métodos, o brilho observado poderá ser convertido em luminosidade, de modo que teremos, ao final, duas informações da estrela: temperatura da superfície e luminosidade.

De acordo com Canalle e Matsuura (2007, pp. 129 e 130):

Nos catálogos a luminosidade é simbolizada por algarismos romanos. I denota as supergigantes, II as gigantes brilhantes, III as gigantes normais, IV as subgigantes e V as estrelas da Sequência principal e as anãs brancas. Uma combinação da letra indicativa do tipo espectral, com o algarismo romano indicativo da luminosidade, denota a posição de uma estrela no Diagrama HR.

Tendo uma amostra de estrelas cuja temperatura de superfície e luminosidade sejam conhecidas, podemos construir o seu Diagrama HR e com isso fazer uma representação gráfica das grandezas dadas.

Figura 1.1: Diagrama HR para algumas estrelas mais brilhantes do céu ou estrelas mais próximas do Sol ($d < 5$ parsec).



Disponível em: <<http://astro.if.ufrgs.br/estrelas/node2.htm>>. Acesso em 15 de novembro de 2015.

A abscissa (eixo horizontal) do Diagrama está associada à cor ou à temperatura, com valores que crescem para a esquerda (diferente do que estamos acostumados). A ordenada (eixo vertical) do Diagrama está associada à luminosidade.

Analisando o gráfico, segundo Oliveira Filho e Saraiva (2014, pp. 234 e 235):

A primeira coisa que se nota no Diagrama HR é que as estrelas não se distribuem igualmente nele, mas se concentram em algumas partes. A maior parte das estrelas da vizinhança solar está alinhada ao longo de uma estreita faixa na diagonal que vai do extremo superior esquerdo (estrelas quentes e muito luminosas), até o extremo inferior direito (estrelas frias e pouco luminosas). Essa faixa é chamada sequência principal. O fator que determina onde uma estrela se localiza na sequência principal é a sua massa e há um caráter evolutivo: estrelas mais massivas são mais quentes e mais luminosas. As estrelas da sequência principal têm, por definição, classe de luminosidade V, e são chamadas de anãs. Um número substancial de estrelas também se concentra acima da sequência principal.

A temperatura de superfície das estrelas se confina entre 3 mil e 40 mil kelvin, e a luminosidade entre 100 milionésimos e 100 mil vezes a luminosidade do Sol. Notar no gráfico acima que o Sol ocupa uma posição mediana. A estrela Alfa de Centauro, que faz parte de um sistema triplo, é uma das que se encontram mais perto da Terra. Trata-se de uma estrela muito semelhante ao nosso Sol, portanto ocupa a mesma posição no Diagrama HR.

Se considerarmos apenas as 20 estrelas mais brilhantes, excluindo o Sol, 10 pertencem à Sequência Principal, 7 são gigantes e 3 supergigantes. Nenhuma é anã branca. Metade tem superfície com temperatura maior que 10 mil kelvin. Dessas 20 estrelas, a mais distante encontra-se a 1400 anos-luz - essa distância é praticamente a espessura do disco da nossa Galáxia.

O fato de numa amostra tomada ao acaso encontrarmos uma maioria de estrelas da Sequência Principal indica que nossas estrelas estão na etapa mais longa de suas vidas.

A quantidade de estrelas encontradas nas diversas regiões do Diagrama HR, além da sequência principal, reflete aspectos evolutivos. Fases rápidas da evolução estelar devem estar associadas a um número menor de estrelas e fases mais longas de estabilidade estão associadas a um número maior de estrelas observadas no Diagrama HR.

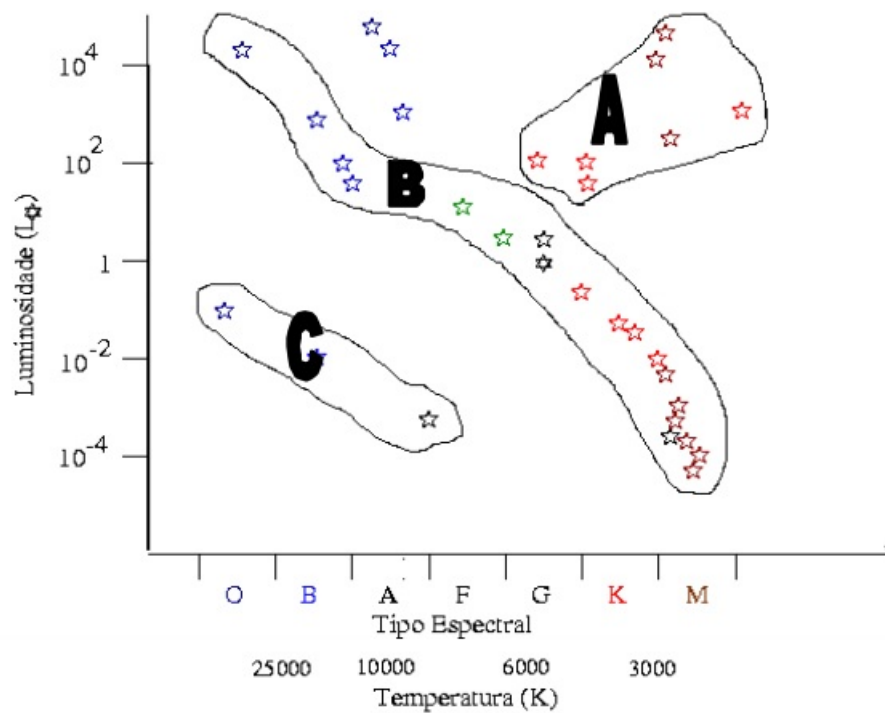
O estudo da estrutura e evolução estelar basicamente consiste em explicar o Diagrama HR com base em leis físicas. Cálculos são feitos levando em conta, ao mesmo tempo, o equilíbrio hidrostático, a geração de energia nuclear, o transporte de energia do interior à superfície. Uma composição química inicial deve ser estipulada. Ao reproduzirem a

temperatura de superfície e a luminosidade observadas, os cálculos informam-nos o raio, a massa, a idade e a estrutura interna da estrela.

Exercícios

Exercícios retirados das Provas da Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica dos anos de 2000 (Nível III) e 2004 (Nível IV)¹:

O Diagrama de Hertzsprung-Russell, conhecido como diagrama HR, foi descoberto independentemente pelo dinamarquês Ejnar Hertzsprung (1873-1967), em 1911, e pelo americano Henry Norris Russell (1877-1957), em 1913. Russel representou algumas estrelas estudadas em um diagrama Luminosidade x Temperatura superficial. A partir do estudo desse diagrama, podemos determinar propriedades das estrelas. Uma das aplicações mais importantes do diagrama HR é a determinação de distâncias estelares. O fator que determina onde uma estrela se localiza na sequência principal é a sua massa: estrelas mais massivas são mais quentes e mais luminosas.



Observação: A luminosidade 1 é a luminosidade do Sol.

¹Resoluções retiradas dos respectivos gabaritos das provas.

1) De acordo com a figura associe os nomes das áreas assinaladas como A, B e C aos grupos de estrelas conhecidos como gigantes vermelhas, anãs brancas e sequência principal.

Resolução: A = Gigantes Vermelhas, B = Sequência Principal, C = Anãs Brancas.

2) Determine em qual faixa espectral se localiza o Sol e a que região (A, B ou C) ele atualmente pertence, sabendo que sua temperatura superficial é algo em torno de 6000 K.

Resolução: Faixa espectral G, região B.

3) Determine em qual faixa espectral se localiza uma estrela bem mais quente que o Sol e quando ainda estão na fase de queima de Hidrogênio.

Resolução: A região superior da sequência principal (B).

4) Em sua evolução o Sol passará pelos três estágios definidos pelos grupos A, B e C. Determine esta sequência e diga em qual região do gráfico ele permanecerá por menos tempo.

Resolução: Sequência principal, gigantes vermelhas e anãs brancas. Gigantes vermelhas.

5) Explique porque a ideia de evolução estelar (isto é, a ideia de que as estrelas mudam de aspecto ao longo de suas vidas) nasceu da montagem do Diagrama HR.

Resposta: Esta resposta é mais sutil. A idéia geral é a de que as estrelas não estão distribuídas aleatoriamente no Diagrama HR, mas sim estão concentradas nas regiões já descritas. Segundo que a maior presença de estrelas na sequência principal indica que ela deve corresponder a uma fase que todas as estrelas, de alguma forma, atravessam na maior parte de suas existências.

1.2 Lei de Hubble (Função Afim)

Nesse momento chegamos no estudo das funções. De acordo com o PCNEM+ (Brasil, 2006, p. 121):

Esse estudo permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções.

Veremos que a Lei de Hubble está modelada de acordo com a função afim ou polinomial de grau 1.

Sabemos que qualquer função linear f de \mathbb{R} em \mathbb{R} dada por uma lei de formação do tipo: $f(x) = ax + b$, onde a e b são números reais dados e $a \neq 0$, é uma função polinomial do 1º grau. Na função $f(x) = ax + b$, o a é chamado de coeficiente angular e o b é chamado de coeficiente linear ou termo independente.

Segundo Andreolla (2015, p. 1):

As teorias que envolvem o início do universo estão relacionadas com energia, conceito que surgiu na metade do século XIX. Hoje, a teoria mais aceita é a teoria do Big Bang ou da “grande explosão”. Ela consiste em dizer que o Universo iniciou-se em uma região pequena onde toda a massa do universo estava concentrada e, com isso a densidade era muito grande.

De acordo com Silva (2015):

(...) Apesar de usarmos o termo *grande explosão*, não se deve pensar nesse evento como algo pirotécnico e que podemos ficar de um ponto externo como expectadores. Pois, de acordo com a teoria do Big Bang, não havia outro ponto! O Big Bang é o princípio do próprio espaço-tempo.

No início da década de 1910, já se sabia que as galáxias mais distantes apresentavam um espectro deslocado para o vermelho (redshift). Depois se notou que esse deslocamento era tanto maior, quanto maior a distância da galáxia.

De acordo com De Amôres e Aleman (2015):

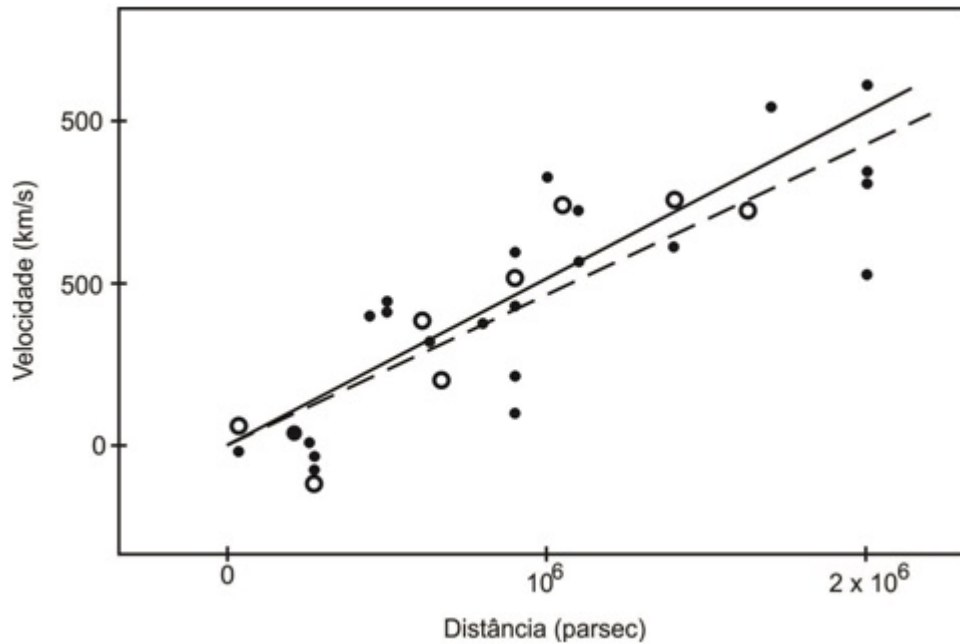
O *redshift* - em português *desvio para o vermelho* - é uma medida da velocidade relativa a nós de um objeto. Se você alguma vez conseguiu identificar se um carro na estrada estava se aproximando ou se afastando e se ele estava rápido ou não só pelo som, você já fez uma “medida” do redshift. A mudança da frequência do som conforme seu movimento relativo é devida ao efeito Doppler. Conforme o carro se aproxima de você, as ondas sonoras são comprimidas (som mais agudo, maior frequência), se ele se afasta as ondas sonoras são expandidas (som mais grave, menor frequência). O mesmo efeito acontece com a luz: se um objeto se afasta de nós, o comprimento de onda da luz que ele emite aumenta, ou seja, é desviado para o vermelho (redshift). Se ele se aproxima, o comprimento de onda diminui, ou seja, é desviado para o azul (blueshift). O desvio é maior se a velocidade for maior.

Em 1929, ainda segundo De Amôres e Aleman (2015):

o astrônomo Edwin Powell Hubble mostrou que as galáxias se afastam umas das outras com velocidades proporcionais a sua distância e, medindo suas distâncias, verificou que quanto mais distante, maior era sua velocidade de afastamento. Isso constituiu a primeira evidência para a expansão do Universo. Hubble descobriu que a luz proveniente de galáxias distantes sofre um desvio para o vermelho. Esse tipo de desvio acontece quando o observador e a fonte luminosa estão se afastando e, a velocidade com que a galáxia está se afastando da Terra pode ser calculada pelo desvio observado.

Ele demonstrou que a velocidade de recessão das galáxias é determinada pela expressão $v = c.z$, onde c é a velocidade da luz no vácuo (300.000 km/s) e z é o redshift da galáxia. E a partir da determinação das velocidades de recessão das galáxias foi possível fazer a relação delas com as distâncias, que serão vistas na figura 1.2.

Figura 1.2: Diagrama de Hubble na forma original.



Disponível em: <<http://www.if.ufrgs.br/fis02001/aulas/cosmo2.html>>. Acesso em 20 de novembro de 2015.

A Lei de Hubble é a expressão matemática do gráfico que o próprio astrônomo obteve. Na figura 1.2, a linha contínua é a reta que melhor ajusta os círculos pretos cheios, correspondentes a medidas de velocidade e distância de galáxias individuais; a linha tracejada é o ajuste dos círculos brancos vazados, correspondentes às combinações das galáxias em grupos. Como a aproximação deste gráfico é uma reta, temos uma função afim (polinomial de grau 1) do tipo:

$$v = H.d$$

- v = velocidade de fuga (ou recessão) em km/s.
- d = distância em megaparsec (Mpc).
- H = taxa de expansão atual (constante de Hubble) e vale 71 km/s/Mpc (significa que a velocidade de fuga das galáxias aumenta 71 km/s a cada megaparsec de distância).

Oliveira Filho e Saraiva (2014, p. 639) realizaram os cálculos abaixo utilizando a função $v = H.d$:

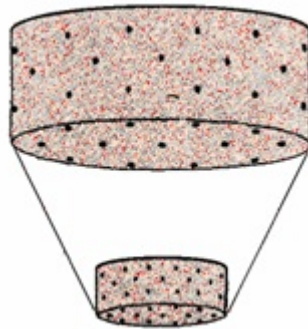
- Galáxias a 1 Mpc têm velocidade de recessão de 71 km/s.
- Galáxias a 10 Mpc têm velocidade de recessão de 710 km/s.
- Galáxias a 11 Mpc têm velocidade de recessão de 780 km/s.
- Galáxias a 100 Mpc têm velocidade de recessão de 7100 km/s.

Comparando a lei de Hubble com a função polinomial de grau 1 $y = ax + b$, percebe-se que o coeficiente angular a é a constante de Hubble e o coeficiente linear b é igual a zero.

Segundo Oliveira Filho e Saraiva (2014, p. 633):

O Universo está em expansão (como um bolo de passas no forno). Em um bolo de passas em crescimento, todas as passas se afastam umas das outras... As passas não se movem dentro do bolo, os espaços entre elas que aumentam. Ou seja, a expansão do Universo não é uma expansão das galáxias no espaço, mas uma expansão do próprio espaço. A expansão do Universo não tem centro, qualquer observador, em qualquer lugar, vê a mesma expansão.

Figura 1.3: Universo em expansão.



Disponível em: <<http://www.if.ufrgs.br/fis02001/aulas/cosmo2.html>>.

Acesso em 20 de novembro de 2015.

“Podemos estimar a idade máxima do Universo t_0 , calculando o tempo que as galáxias distantes, movendo-se a mesma velocidade de hoje, levaram para chegar onde estão.” (OLIVEIRA FILHO e SARAIVA, 2014, p. 639)

Segundo Canalle e Matsuura (2007, p. 162), “o inverso da constante de Hubble dá uma estimativa da idade do Universo”: a lei relaciona a velocidade de expansão da galáxia v com a distância ao *centro da galáxia* d , é dada por:

$$\begin{cases} v = H.d \\ v = \frac{d}{t_0} \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{t_0} = H.d \Rightarrow t_0 = \frac{1}{H}$$

Ou seja, $\frac{1}{H} = 13,7$ bilhões de anos. Ainda de acordo com Canalle e Matsuura (2007, p. 162), essa estimativa vale para um Universo idealmente vazio em que a expansão não fosse desacelerada.

Exercício

Para a construção deste problema, foram utilizados dados de quatro galáxias que estão em uma tabela na atividade Galáxias - Redshift e Lei de Hubble da referência DE AMÔRES e ALEMAN. Nesse material, são fornecidas as distâncias de um grupo de galáxias próximas e seus redshifts. Pede-se para determinar as respectivas velocidades de recessão e, com esse resultado, a constante de Hubble (H).²

Tabela 1.2: Relaciona a distância (em Mpc) da galáxia à Terra com sua respectiva velocidade de recessão (em km/s).

Galáxia	Redshift (z)	Distância [Mpc]	Velocidade [km/s]
NGC 3034	0,000677	2,72	
NGC 3147	0,009407	34,15	
NGC 3227	0,003859	15,43	
NGC 3245	0,004610	17,52	

Resolução: Sabemos que a velocidade de recessão dessas galáxias será determinada pela expressão $v = c.z$, onde c é a velocidade da luz no vácuo (300.000 km/s) e z é o redshift da galáxia. Nesse caso, não precisamos utilizar a correção relativística, pois $z \ll 1$ e a aproximação de baixas velocidades é válida.

²Resoluções nossas.

- NGC 3034: $v = c.z \Rightarrow v = 300000.0,000677 \Rightarrow v = 203,1km/s$.
- NGC 3147: $v = c.z \Rightarrow v = 300000.0,009497 \Rightarrow v = 2822,1km/s$.
- NGC 3227: $v = c.z \Rightarrow v = 300000.0,003859 \Rightarrow v = 1157,7km/s$.
- NGC 3245: $v = c.z \Rightarrow v = 300000.0,004610 \Rightarrow v = 1383km/s$.

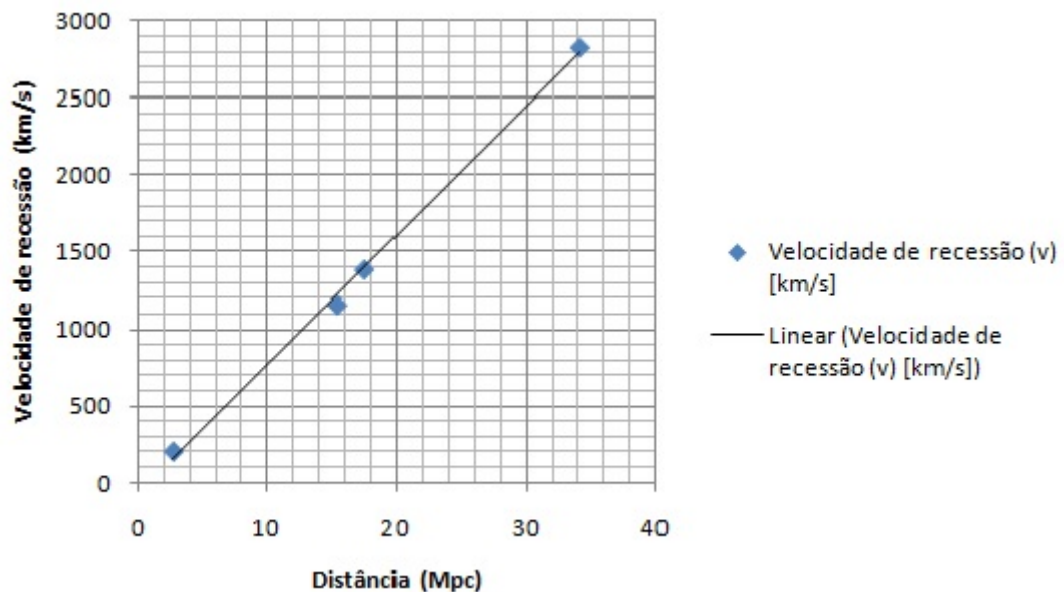
Agora, podemos completar a tabela:

Tabela 1.3: Relaciona a distância (em Mpc) da galáxia à Terra com sua respectiva velocidade de recessão (em km/s).

Galáxia	Redshift (z)	Distância [Mpc]	Velocidade [km/s]
NGC 3034	0,000677	2,72	203,1
NGC 3147	0,009407	34,15	2822,1
NGC 3227	0,003859	15,43	1157,7
NGC 3245	0,004610	17,52	1383

E com o uso de algum software, do programa LibreOffice Calc ou no próprio quadro escolar montamos o seguinte gráfico:

Figura 1.4: Gráfico da Distância (em Mpc) pela Velocidade de recessão (em km/s).



Por fim, podemos determinar a constante de Hubble (H) e compará-la com o valor tabelado. Sabemos que $v = H.d$, logo, **H** é o coeficiente angular.

Assim, na tabela, H será determinado pela tangente do ângulo de inclinação da reta:

$$H = \frac{\Delta v}{\Delta d} \implies H = \frac{2822,1 - 203,1}{34,15 - 2,72} = \frac{2619}{31,43} = 83,32 \text{ km/s/Mpc}$$

O valor esperado é de 71 km/s/Mpc e aqui pode-se discutir, se assim o professor desejar, sobre variância e desvio padrão.

1.3 Sequência de Titius-Bode (Sequências Numéricas)

Segundo Freitas (2016):

Geralmente quando queremos determinar certos elementos de um conjunto, ordenamos esses elementos seguindo um determinado padrão. Dizemos que esse conjunto corresponde a uma sequência ou sucessão. Cada um desses elementos dos conjuntos que chamamos de sequência ou sucessões é denominado termo.

As Orientações Educacionais complementares (Brasil, 2006, p. 121) relatam que “é preciso garantir uma abordagem conectada à ideia de função, na qual as relações com diferentes funções possam ser analisadas. O ensino de sequências deve se ater à lei de formação e a mostrar aos alunos quais propriedades decorrem delas.”

Estudaremos neste tópico uma sequência pouco conhecida, chamada inicialmente de Lei de Titius, no qual foi estabelecida no fim do século XVIII, e acabou sendo expressa por uma sucessão de números onde, com uma grande precisão admirável, os termos reproduziam as distâncias do Sol a cada um dos seis planetas conhecidos naquela época: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno.

Segundo Fernandes (2015):

A ideia da existência de uma regularidade no Sistema Solar, que veio a ser materializada pela *Sequência de Titius-Bode*, remonta a passados distantes. Por exemplo: a escola pitagórica defendia que a razão entre as distâncias a dois planetas consecutivos era constante e igual a 3 e Hipolytus, no ano 230, argumentava que seria uma heresia imaginar a não existência de ordem nos espaços interplanetários. Mas só depois de alguns séculos, em 1766, Johann Daniel Titius (1729-1796), professor de Física na Universidade de Wittenberg, Alemanha, traduz para o alemão a obra “Contemplation de La Nature”, do naturalista e filósofo suíço Charles Bonnet (1720-1793).

De acordo com Bonnet (1764, p. 12):

Se considerarmos 100 unidades a distância entre Sol e Saturno, Mercúrio estará a 4 unidades de distância do Sol. As distâncias ao Sol dos demais planetas, anteriores a Saturno, poderão ser obtidos, na unidade considerada, a partir da construção de uma sequência numérica. Nessa sequência, os termos que registram as distâncias dos planetas ao Sol são obtidos a partir seguinte regularidade: para se obter um termo adiciona-se ao anterior uma parcela formada pela multiplicação entre 3 e uma potência de expoente positivo de base 2.

“Titius mostrou que tomando o valor 10 para a distância Terra-Sol, as distâncias médias dos planetas poderiam ser representadas partindo-se da sequência” (FERNANDES, 2015):

$$0, 1, 2, 4, 8, 16 \text{ e } 32$$

que corresponde, a partir do segundo termo, a uma progressão geométrica de razão 2.

Temos que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, onde $a_1 = 1$ e $q = 2$.

Multiplicando cada um de seus termos por 3:

$$0, 3, 6, 12, 24, 48 \text{ e } 96$$

que corresponde a uma sequência expressa pela lei:

$$a_n = \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = 3 \cdot 2^{n-2}, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2 \end{cases}$$

e adicionando-se 4 unidades a cada um deles, obtemos:

$$4, 7, 10, 16, 28, 52 \text{ e } 100$$

Essa nova sequência corresponde à lei:

$$a_n = \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = 4 + 3 \cdot 2^{n-2}, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2 \end{cases}$$

E, por fim, dividimos esses valores por 10, que chegaremos aos valores das distâncias em Unidades Astronômicas (UA).

$$0,4; 0,7; 1,0; 1,6; 2,8; 5,2 \text{ e } 10,0$$

para chegarmos à lei que expressa a sequência final:

$$a_n = \begin{cases} a_1 = 0,4 \\ a_n = 0,4 + 0,3 \cdot 2^{n-2}, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2 \end{cases}$$

Analisando os termos dessa sequência, Fernandes (2015) mostra que eles:

Podem ser representados, com exceção do primeiro termo, por $d_n = 0,4 + 0,3 \cdot 2^{n-2}, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2$. Os termos da sequência correspondiam às distâncias (em UA) ao Sol dos planetas de Mercúrio a Saturno com uma única exceção: a posição correspondente a $n = 5$ ($d = 2,8$). Para $n = 2$, obtemos 0,7; que corresponde à distância de Vênus ao Sol; para $n = 3$, obtemos 1,0 (distância Terra-Sol, em UA) e assim por diante.

De acordo Nieto (1972, p.2):

É talvez interessante introduzir aqui um episódio relacionado com a descoberta desta sucessão: sendo o livro de Titius uma tradução, seria de esperar que o original contivesse também a parte do texto que aqui transcrevemos. Na realidade não é assim. O livro de Bonnet nada diz sobre esta *curiosa relação*. Foi Titius que da sua cabeça introduziu esta parte sem se ter referido a ela como uma *nota do tradutor*. Uns anos mais tarde, em 1772, o famoso astrônomo alemão Johann Elert Bode (1747 - 1826), no seu livro *Guia para o conhecimento do céu das estrelas*, transcreve quase integralmente o texto de Titius, sem fazer referência ao seu autor. Assim, um pouco injustamente, mas seguramente por se tratar uma referência do seu tempo, Bode associa o seu nome a esta descoberta e a História acabou por denominar a sucessão d_n por “Lei (ou Sequência) de Titius-Bode”.

Segundo Fernandes (2015):

Voltemos ao fato da Sequência de Titius-Bode prever as distâncias (médias) Sol – Planetas. Levantaram-se logo dois grupos: por um lado os que argumentavam ser esta coincidência fruto do acaso e tratar-se de uma questão de numerologia, uma vez que não havia argumento científico que pudesse explicar tal relação; por outro lado, os partidários da relação contra-atacavam dizendo que era impossível ser o acaso responsável por tão belo resultado. Uns e outros, no entanto, estavam de acordo na necessidade de mais provas. Que provas poderiam ser essas? Um bom teste seria, por exemplo, a eventual descoberta de novos planetas para lá de Saturno (para $n > 7$).

E assim aconteceu. Em 1781 o astrônomo inglês William Herschel (1738 - 1822) descobriu Urano a uma distância de 2.880.000.000km do Sol, ou seja, 19,2 UA. Essa descoberta chegou com muita aproximação para o oitavo termo da Sequência de Titius-Bode, que é $n = 8$, $d_8 = 19,6$ UA.

Há ainda uma lacuna na Sequência. É o “planeta”, entre Marte e Júpiter, que Titius diz *que falta* para $n = 5$. De acordo com Fernandes (2015), em 1800, começa uma campanha de observação com vista à descoberta do planeta *ausente*: o céu foi dividido em 24 zonas, uma para cada um de 24 astrônomos que se dispuseram para esta busca.

Em 1801, o astrônomo italiano Giuseppe Piazzi anuncia a descoberta dos asteroides entre Marte e Júpiter, ao qual deram o nome de Ceres (no qual hoje é denominado de planeta-anão), Pallas e Vesta, à distância do Sol de 415.500.000 km; ou seja; 2,77 UA. A Sequência de Titius-Bode, para $n= 5$, indica $d_5 = 2,8$ UA. Assim, cobriu-se a lacuna do quinto termo e, também, foi encontrado o cinturão de asteróides.

Mas, em 1846, o astrônomo inglês John Couch Adams (1819 - 1892) e o astrônomo francês Urbain Jean Joseph Leverrier (1811 - 1877) descobriram o planeta Netuno, a partir de perturbações na órbita de Urano. E, dessa maneira, foi-se observada a primeira falha fundamental da Sequência de Titius-Bode, pois a distância desse planeta ao Sol é de 30,1 UA, em lugar do que a Lei previa para $n = 9$, $d_9 = 38,8$ UA. Nunca a lei se tinha afastado tanto da realidade.

“No entanto é curioso salientar que Adams e Le Verrier fizeram os seus cálculos tomando como verdadeira a Lei de Titius-Bode. De fato, a observação confirmou a existência do planeta, mas não à distância prevista.”(FERNANDES, 2015)

De acordo com Kilhian (2012):

Em 1930, C. Tombaugh descobriu Plutão, com base em irregularidades observadas na órbita de Netuno. O desvio em relação à Lei de Titius-Bode é ainda maior. Até hoje não se sabe se o bom acordo com a sequência de Titius até Urano tem alguma explicação ou se é uma mera coincidência. Os raios das órbitas dos planetas, que Kepler também havia querido deduzir, dependem das condições de sua formação, e talvez estejam ligados ao problema matemático extremamente difícil e ainda não resolvido da estabilidade do Sistema Solar.

Por fim, Fernandes (2015) afirma:

Que a Sequência de Titius-Bode deu uma contribuição considerável para o avanço da astronomia: além de toda a discussão que suscitou entre os adeptos e os opositores, que abriu caminhos a uma melhor compreensão do Sistema Solar como sistema dinâmico, influenciou decisivamente a procura de planetas até então desconhecidos, Ceres e Netuno são os casos mais evidentes. Naturalmente que o cinturão de asteróides e Netuno teriam sido descobertos mais tarde ou mais cedo. No entanto, a vontade de testar a Lei de Titius - Bode antecipou tais descobertas.

Exercício

Em 1922, o astrônomo italiano Giuseppe Armellini (1887 - 1958) encontrou outra lei empírica das distâncias médias dos planetas ao Sol, muito mais aproximada que a Lei de Titius-Bode. É uma progressão geométrica cuja razão é 1,53.

Os termos da sequência de Armellini podem ser representados por $d = 1,53^{n-3}$ onde

n é um número natural compreendido entre 1 e 12.

Segundo Varella (1991, p. 4):

Nem todos, dos doze termos, correspondiam aos planetas. O planeta Plutão, correspondente ao valor $1,53^9 = 45,94$ ainda não havia sido descoberto. Aos termos $1,53^2 = 2,34$ e $1,53^3 = 3,58$ se fez corresponder respectivamente aos asteroides Vesta e Camilla. Restou a lacuna $1,53^6 = 12,83$ entre os planetas Saturno e Urano que somente foi preenchida em 1977, quando Charles Kowall descobriu Chiron, um objeto do tipo centauro, que se encontra a uma distância de 13,87 UA do Sol.

Complete a tabela abaixo com as distâncias pela sequência de Armellini.³

Tabela 1.4: Distância dos Planetas e de Asteroides ao Sol.

Planetas e possíveis planetas	Distância Real (UA)	Distância Armellini (UA)
Mercúrio	0,39	
Vênus	0,72	
Terra	1,00	
Marte	1,52	
Vesta (Asteroide)	2,36	
Camilla (Asteroide)	3,48	
Júpiter	5,20	
Saturno	9,54	
Chiron (Objeto centauro)	13,87	
Urano	19,2	
Netuno	30,1	
Plutão	39,5	

Resolução:

- Para $n = 1$, temos: $d = 1,53^{1-3} = 1,53^{-2} = 0,43$.
- Para $n = 2$, temos: $d = 1,53^{2-3} = 1,53^{-1} = 0,65$.
- Para $n = 3$, temos: $d = 1,53^{3-3} = 1,53^0 = 1,00$.

³Resoluções nossas.

- Para $n = 4$, temos: $d = 1,53^{4-3} = 1,53^1 = 1,53$.
- Para $n = 5$, temos: $d = 1,53^{5-3} = 1,53^2 = 2,34$.
- Para $n = 6$, temos: $d = 1,53^{6-3} = 1,53^3 = 3,58$.
- Para $n = 7$, temos: $d = 1,53^{7-3} = 1,53^4 = 5,48$.
- Para $n = 8$, temos: $d = 1,53^{8-3} = 1,53^5 = 8,38$.
- Para $n = 9$, temos: $d = 1,53^{9-3} = 1,53^6 = 12,82$.
- Para $n = 10$, temos: $d = 1,53^{10-3} = 1,53^7 = 19,16$.
- Para $n = 11$, temos: $d = 1,53^{11-3} = 1,53^8 = 29,76$.
- Para $n = 12$, temos: $d = 1,53^{12-3} = 1,53^9 = 45,88$.

Tabela 1.5: Distância dos Planetas e de Asteroides ao Sol.

Planetas e possíveis planetas	Distância Real (UA)	Distância Armellini (UA)
Mercúrio	0,39	0,43
Vênus	0,72	0,65
Terra	1,00	1,00
Marte	1,52	1,53
Vesta (Asteroide)	2,36	2,34
Camilla (Asteroide)	3,48	3,58
Júpiter	5,20	5,48
Saturno	9,54	8,38
Chiron (Objeto centauro)	13,87	12,82
Urano	19,2	19,16
Netuno	30,1	29,76
Plutão	39,5	45,88

1.4 Magnitudes Estelares (Função Logarítmica)

De acordo com o PCNEM+ (Brasil, 2002, p. 121):

Os problemas de aplicação de funções não devem ser deixados para o final desse estudo, mas devem ser motivo e contextos para o aluno aprender funções. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas. As funções exponencial e logarítmica, por exemplo, são usadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicada em áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações, intensidade sonora, pH de substâncias e outras.

Nessas outras, podemos incluir a descrição das Magnitudes Estelares. Veremos que as distâncias entre os objetos observados podem ser determinadas utilizando a física das estrelas e o estudo dos logaritmos. A ideia básica é a seguinte: o brilho aparente, ou magnitude m , de uma estrela é uma função do seu brilho absoluto, ou magnitude absoluta M , e de sua distância.

Explorar o Universo significa, em primeiro lugar, determinar as dimensões dos objetos observados e suas distâncias. Para isso, os astrônomos elaboraram uma série de métodos que permitem mergulhar progressivamente no Universo. O ponto de partida é o Sistema Solar; o método, geométrico, assemelha-se ao utilizado em geodésia: mede-se uma mudança da direção de um objeto quando ele é observado de dois pontos os mais afastados possíveis um do outro. A base é a órbita terrestre – com seis meses de intervalo, a Terra ocupa duas posições distantes entre si 300 milhões de quilômetros. Para a estrela Próxima de Centauro, muito perto, aliás, o deslocamento aparente é de 2,6 segundos de arco, isto é, sua distância equivale a 1,3 parsec ou 4,25 anos-luz. O número de estrelas cuja distância é assim determinada atinge cerca de dez mil, e a distância que esse método permite alcançar é da ordem de uma centena de parsecs. (*Ver o conteúdo sobre Determinação de distâncias, páginas 41 a 51.*)

A magnitude aparente, segundo Munaretto (2016):

Refere-se à magnitude de um astro, da forma como é percebida visualmente, a olho nu. Em muitos casos, uma estrela parece mais brilhante apenas porque está mais próxima do que outras. A magnitude absoluta refere-se à magnitude que as estrelas apresentariam, se estivessem todas a uma mesma distância do observador.

De acordo com O projeto astroinfo (2016), “existem várias escalas de magnitudes em uso - as principais são magnitude aparente, magnitude absoluta e módulo de distância - cada uma servindo a um propósito diferente”. A mais comum, segundo Placco (2106):

É a escala de magnitude aparente; escala essa criada por Hiparco, brilhante astrônomo grego que viveu entre 190 e 120 a.C. desenvolveu (entre muitas outras coisas) um sistema de classificação dos objetos no céu. Para ele, a estrela mais brilhante que conseguia ver foi chamada de *estrela de primeira grandeza* (ou de primeira magnitude).

Da mesma forma, a estrela mais fraca que seu olho conseguia enxergar foi chamada de *estrela de sexta grandeza* (ou sexta magnitude) é apenas a medida de como estrelas brilhantes (e outros objetos) parecem ao olho humano.

Neste esquema de magnitudes, em 1856, Norman Pogson (1829 – 1891) propôs que a escala de magnitude fosse tal que uma estrela de primeira magnitude fosse exatamente 100 vezes mais brilhante que uma estrela de sexta magnitude. Isso significa:

$$\frac{\text{brilho de uma estrela de 1ª magnitude}}{\text{brilho de uma estrela de 6ª magnitude}} = \frac{B_1}{B_6} = 100 \quad (1.1)$$

Para determinarmos uma relação entre os brilhos, precisaremos resolver a equação 1.2.

Chamando de B_2 a B_5 os brilhos respectivamente de estrelas de segunda a quinta magnitudes, podemos escrever:

$$\frac{B_1}{B_2} \cdot \frac{B_2}{B_3} \cdot \frac{B_3}{B_4} \cdot \frac{B_4}{B_5} \cdot \frac{B_5}{B_6} = \frac{B_1}{B_6} = 100 \quad (1.2)$$

Agora, tome as razões constantes dos brilhos de duas estrelas com magnitudes adjacentes:

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{B_2}{B_3} = \frac{B_3}{B_4} = \frac{B_4}{B_5} = \frac{B_5}{B_6} = \text{constante}$$

e vamos chamar essa constante de k . Então, podemos escrever que

$$\frac{B_1}{B_6} = k.k.k.k.k = k^5 = 100 = 10^2,$$

o que resulta em

$$k = 10^{\frac{2}{5}} = 2,512.$$

Foi esse o valor assumido por Pogson para a razão entre os brilhos de estrelas com magnitudes adjacentes. Note que k aparece cinco vezes multiplicado, o que corresponde à diferença de magnitude $6 - 1 = 5$. Agora, pode-se calcular a relação entre quaisquer magnitudes de quaisquer estrelas, mesmo aquelas de magnitudes maiores do que seis, mais fracas em brilho, que à época de Hiparco não podiam ser vistas, pois não havia telescópios.

Sejam duas estrelas com magnitude m e n , cuja diferença entre elas é $(m-n)$. Analogamente ao cálculo anterior, deve-se multiplicar k tantas vezes quanto for o valor de $(m-n)$ para encontrar a razão entre os brilhos das estrelas, ou seja:

$$\begin{aligned} \underbrace{k.k \cdots k}_{(m-n)\text{vezes}} &= \\ &= k^{(m-n)} = \frac{B_n}{B_m} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Substituindo na equação (1.3), o valor de $k = 10^{\frac{2}{5}}$, temos uma equação exponencial:

$$k^{(m-n)} = 10^{\frac{2}{5} \cdot (m-n)} = \frac{B_n}{B_m}$$

onde ela é resolvida utilizando logaritmo na base 10:

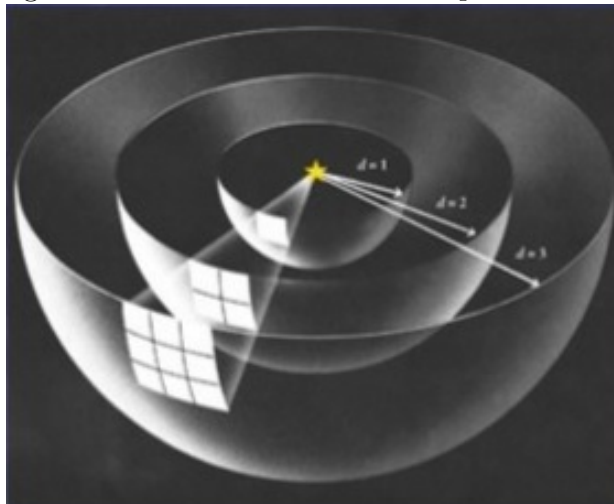
$$\frac{2}{5} \cdot (m-n) = \log \frac{B_n}{B_m}$$

ou

$$m-n = \frac{5}{2} \cdot \log \frac{B_n}{B_m} = 2,5 \log \frac{B_n}{B_m},$$

que é a famosa equação de Pogson para magnitudes. Note que, comparando essa demonstração com a anterior, vemos que a magnitude m é maior que n e, portanto, a primeira estrela considerada (m) é menos brilhante que a segunda (n).

Figura 1.5: Esferas de luz emitidas pelas estrelas.



Disponível em: <<http://www.physics.unc.edu/~evans/pub/A31/Lecture16-Stars/>>.

Acesso em: 20 de novembro de 2015.

O brilho aparente de uma estrela é a razão entre a luminosidade L dela e a área das esferas de luz emitidas por ela, de acordo com a figura acima.

$$B = \frac{L}{4 \cdot \pi \cdot d^2},$$

onde d é a distância à estrela.

Podemos escrever a relação entre a razão de brilhos e a razão de luminosidade na forma:

$$\frac{B_n}{B_m} = \frac{\frac{L_n}{4 \cdot \pi \cdot d_n^2}}{\frac{L_m}{4 \cdot \pi \cdot d_m^2}} = \frac{L_n}{4 \cdot \pi \cdot d_n^2} \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot d_m^2}{L_m} = \left(\frac{d_m}{d_n} \right)^2 \cdot \frac{L_n}{L_m} \quad (1.4)$$

A luminosidade é uma característica intrínseca da própria estrela e Lopes (2014, p. 127) relatou uma analogia realizada com lâmpadas elétricas comuns pelo físico sueco Max Tegmark:

Imagina-se que uma lâmpada de 10 watts é colocada no teto de uma sala e é sabida a luminosidade por ela emitida. Por conveniência, a luminosidade do teto da sala será chamada de luminosidade intrínseca da lâmpada, ou seja, é o mais perto que se pode chegar de sua luminosidade “real”, por assim dizer. Do mesmo modo, sabe-se que as lâmpadas dos postes de rua que se consegue ver de muito longe também são de 10 watts. Ora, está comprovado experimentalmente que a luminosidade aparente – ou a força da luz da lâmpada (ou de qualquer outro objeto luminoso) que se consegue ver à distância, e não quando a dita lâmpada está muito perto – vai caindo conforme o inverso do quadrado da lonjura (sic). Ou seja, se a distância entre uma pessoa e a lâmpada dobra, a luminosidade aparente do objeto luminoso passa a ser apenas um quarto da que era quando ela estava perto – e assim por diante com distâncias maiores. Com isso, desde que a pessoa tenha uma ideia da luminosidade intrínseca do objeto celeste que está sendo visto pelo telescópio, ganha-se inteiramente de graça a informação da distância, bastando fazer as contas que relacionam luminosidade aparente com luminosidade intrínseca.

A magnitude absoluta de uma estrela é definida assumindo a distância fictícia de todas as estrelas como sendo de 10 pc. Para encontrar uma relação matemática entre a magnitude absoluta e a magnitude aparente de uma mesma estrela, podemos utilizar a equação 1.4. Vamos representar a magnitude aparente por m e magnitude absoluta por M .

Já sabemos que a luminosidade é uma característica intrínseca da própria estrela e, portanto, independe da distância. Uma vez que se trata da mesma estrela, as luminosidades serão simplificadas na equação anterior, pois $L_n = L_m$. A partir da equação 1.4, podemos escrever para a estrela escolhida a razão entre brilhos, considerando n a magnitude da estrela situada hipoteticamente a 10 pc de distância (mas n agora é substituída pela letra M , que designa a magnitude absoluta):

$$\frac{B_n}{B_m} = \frac{B_M}{B_m} = \left(\frac{d_m}{d_n} \right)^2$$

Substituindo a razão acima na fórmula da magnitude de Pogson, temos

$$m - n = m - M = 2,5 \cdot \log \frac{B_M}{B_m} = 2,5 \cdot \log \left(\frac{d_m}{d_n} \right)^2,$$

então, utilizando a propriedade da potenciação do logaritmando,

$$m - M = 5 \cdot \log \frac{d_m}{d_M} = 5 \cdot (\log d_m - \log d_M),$$

onde $d_M = 10$ e, portanto, $\log d_M = 1$.

Assim,

$$m - M = 5 (\log d_m - 1) \quad (1.5)$$

Por conseguinte, multiplicando por (-1) todos os termos na equação 1.5 chegamos a uma função logarítmica para a diferença entre a magnitude absoluta e aparente de uma estrela, também chamada de módulo de distância:

$$M - m = 5. (1 - \log d_m),$$

onde M é a magnitude absoluta, m é a magnitude aparente e d_m é a distância à estrela em parsec.

As medidas de magnitudes são feitas por meio das técnicas fotométricas, para as quais devem ser levadas em conta correções para eliminar o efeito da absorção da luz devido à poeira do meio interestelar e à atmosfera terrestre.

Exercício

Exercícios retirados da Prova da Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica do ano de 2005 (Nível IV)⁴:

Desde a antiguidade os astrônomos e estudiosos observam e tentam compreender as estrelas. Uma das primeiras formas de distingui-las entre si foi através do seu brilho. Assim, estes astrônomos logo as classificaram em categorias, denominadas genericamente de magnitudes, termo ainda hoje utilizado. Foram estimadas seis magnitudes para classificar desde as estrelas mais brilhantes até aquelas menos brilhantes. Com o passar do tempo, verificou-se que esta distinção fundamentava-se em uma propriedade de percepção do olho humano. Posteriormente foi possível matematizar a relação entre as magnitudes com o uso de logaritmos. Com relação à escala de magnitudes, percebeu-se, então, que as magnitudes definidas na antiguidade eram dadas por logaritmos da intensidade de luz. A diferença de magnitudes entre duas estrelas pode ser representada pela expressão

⁴Resoluções retiradas do respectivo gabarito da prova.

$m_2 - m_1 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{B_2}{B_1}\right)$, em que o termo entre parênteses é a razão dos fluxos luminosos recebidos pelos detectores (e o primeiro detector da história foi o próprio olho humano!). Assim, uma estrela de sexta magnitude faz chegar aos nossos olhos cem vezes menos luz do que uma estrela de primeira magnitude (segundo a fórmula apresentada, temos: $6 - 1 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{1}{100}\right) = (-2,5) \cdot (-2)$). O sinal negativo nos informa que, quanto mais brilhante for a estrela, menor será algebricamente sua magnitude. Estamos falando de magnitude visual, ou seja aquela que leva em conta simplesmente o brilho aparente de um dado astro, isto é, o brilho que vemos aqui da Terra. Assim, planetas e o nosso satélite, a Lua, mesmo não produzindo luz, apresentam brilho mais intenso, simplesmente porque estão muito mais próximos do que qualquer estrela. Se você participou da VII OBA, em 2004, ou estudou por seu gabarito disponibilizado na Internet, talvez você se lembre da relação matemática que expressa a variação do fluxo com a distância: o fluxo cai com o quadrado da distância, ou seja o fluxo B é proporcional a $\frac{1}{d^2}$ ($f \propto \frac{1}{d^2}$). Para você ter uma ideia, a estrela mais luminosa no céu noturno, Sírius, brilha com uma magnitude visual de $-1,5$. Júpiter pode brilhar aproximadamente com uma magnitude visual -3 e a magnitude de Vênus pode chegar até a -4 . A Lua cheia tem magnitude próxima a -13 , e a magnitude do Sol é próxima a -26 ! Você pode inclusive se perguntar por que a estrela mais brilhante apresenta magnitude negativa e não nula. Esta pergunta tem uma resposta histórica: as primeiras escalas deste tipo foram elaboradas por astrônomos gregos, que não observavam estrelas mais brilhantes do que Vega, que foi tomada como zero da escala.

1) Como discutimos acima, o brilho de uma estrela cai com a distância. Determine qual seria a magnitude do Sol se ele estivesse a uma distancia igual à de alfa do centauro, a qual é uma estrela de, aproximadamente, o mesmo brilho real do Sol. Na verdade ela está a uma distância de cerca de 260000 vezes a distância Terra-Sol. Mas somente para averiguar as ordens de grandezas, consideremos uma distância de 100000 vezes a distância Terra-Sol. i) Calcule, primeiro, a razão entre os fluxos atual do Sol visto da Terra e aquele visto se ele estivesse à distância de alfa do centauro, isto é a uma distância 100000 vezes maior do que atual. ii) A seguir, substitua na fórmula de magnitude apresentada acima esta razão dos fluxos, e utilize o valor informado da magnitude do Sol visto da Terra para calcular a magnitude que o Sol teria, visto da Terra, se ele estivesse junto ao lado de alfa do centauro.

Resolução: Sejam B_1 e B_2 o fluxo da radiação solar à distância atual ($= d$) e à distância de $100000d$, respectivamente e m_1 e m_2 a magnitude do Sol na posição atual ($m_1 = -26$) e quando ao lado de Alfa do Centauro, respectivamente.

i) Como foi afirmado no enunciado que B é proporcional a $\frac{1}{d^2}$, a razão entre os fluxos $\frac{B_1}{B_2}$ é dada por:

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{\frac{1}{d_1^2}}{\frac{1}{d_2^2}} = \frac{d_2^2}{d_1^2} = \frac{(100000d)^2}{d^2} = 100000^2 = 10^{10}$$

ii) Calculando m_2 :

$$m_2 - m_1 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{B_2}{B_1}\right) \Rightarrow m_2 - (-26) = -2,5 \cdot \log\left(\frac{1}{10^{10}}\right) = -2,5 \cdot \log 10^{-10} = -2,5 \cdot (-10)$$

$$m_2 - m_1 = 25$$

Assim,

$$m_2 + 26 = 25 \Rightarrow m_2 = -1$$

2) Imagine agora duas estrelas de mesmo brilho e mesmo diâmetro num sistema binário, isto é, duas estrelas girando em torno de um centro de massa comum. Mas este sistema não pode ser visto como binário nem mesmo ao telescópio. A única informação que temos é a variação de seu brilho; não podemos ver cada uma das estrelas separadamente, uma vez que estão muito próximas uma da outra e estão a enormes distâncias de nós. Sabe-se que a partir do ângulo que vemos este sistema, estas estrelas se eclipsam total e mutuamente, isto é, ora uma fica completamente em frente da outra, ora esta outra fica completamente em frente daquela uma. Qual será a magnitude observada no momento do eclipse total na situação em que a magnitude correspondente ao par de estrelas do sistema binário fora de eclipse vale 5,0. **Dado:** $\log 2 = 0,30$

Resolução: Foi dado que fora do eclipse a magnitude do sistema vale 5,0 e nesta situação recebemos o fluxo das duas estrelas. Pede-se a magnitude quando se eclipsam, e nesta situação o fluxo do sistema é reduzido à metade. Tal como no item anterior, sejam $m_1 = 5,0$ a magnitude para um fluxo B_1 e m_2 a magnitude quando o fluxo B_2 é reduzido à metade do fluxo B_1 ou seja: $B_2 = \frac{B_1}{2}$. Substituindo estes valores na fórmula

da magnitude:

$$m_2 - m_1 = -2,5 \log \left(\frac{B_2}{B_1} \right) \Rightarrow m_2 - 5 = -2,5 \log \left(\frac{B_2}{B_1} \right) = -2,5 \log \left(\frac{1}{2} \right) = -2,5 \cdot (\log 1 - \log 2)$$

Assim,

$$m_2 - 5 = -2,5 \cdot (0 - 0,30) \Rightarrow m_2 = 0,75 + 5 \Rightarrow m_2 = 5,75$$

A magnitude do sistema quando se eclipsam é de 5,75.

1.5 Medindo o Raio da Terra (Geometria plana: semelhança e congruência)

De acordo com o PCNEM+ (Brasil, 2002, p. 123):

A Geometria, ostensivamente presente nas formas naturais e construídas, é essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas.

Para desenvolver o raciocínio geométrico, vamos contemplar nesse momento o estudo de propriedades de congruência e semelhança de figuras planas. Há uma aplicação muito antiga na busca de solução para problemas, que é a medida do raio da Terra. Com a nossa tecnologia atual, é muito fácil determinar esse comprimento, mas imaginemos o problema para fazer essa medida sem instrumento algum. E foi isso que Eratóstenes de Alexandria fez.

Normalmente, aprendemos nos livros escolares que até a Idade Média acreditava-se que a Terra era plana, mas o formato esférico do nosso planeta era conhecido pelo menos desde os gregos 300 anos Antes da Era Comum.⁵ Um dos mais famosos nomes da Astronomia grega, Eratóstenes, conseguiu *medir* o raio da Terra com uma ótima precisão.

⁵“Era Comum é o período que mede o tempo a partir do ano primeiro no calendário gregoriano. É um termo alternativo para *Depois de Cristo*. Quando o termo Era Comum é usado, anos antecedentes são descritos como Antes da Era Comum, ou seja, Antes de Cristo.” (ERA, 2015)

Eratóstenes, que era ao mesmo tempo poeta, gramático, filósofo, geômetra, geógrafo, bibliotecário e astrônomo, deu, provavelmente, a menor parte de seu tempo às observações astronômicas. Porém, é graças à sua medida do raio da Terra, que diz respeito tanto à geografia quanto à matemática e à astronomia, que ele tornou-se conhecido. No livro *De motu circulari corporum caelestium*, de Cleômedes, encontramos a descrição do método de Eratóstenes para determinar o raio da Terra.

No entanto, os autores matemáticos quando escrevem sobre Eratóstenes é para relatar o Crivo (ou peneira) que leva o próprio nome dele, no qual é um método para separar sistematicamente os números primos.

Segundo Verdet (1991, p. 205), “era um fenômeno conhecido desde a Antiguidade que em Siene, atual Assuã, no Egito, no dia do solstício de verão (21 de junho), ao meio-dia, um poço era iluminado até o fundo” (alguns autores escreveram que Eratóstenes encontrou o relato desse fenômeno em um dos papiros da Biblioteca de Alexandria). Logo, Siene se localizava no trópico de Câncer: a altura do pólo acima do horizonte era igual ali à obliquidade da eclíptica⁶. Em compensação, em Alexandria, Eratóstenes observou que nesse mesmo dia e no mesmo horário, no ano seguinte, ao se colocar uma vara vertical (denominada gnômon) fincada no solo ela produzia sombra. Isso intrigou Eratóstenes, pois em Siene não existia nenhuma sombra ao meio-dia, ou seja, o Sol incidia na vertical, porém, em Alexandria, ele conferiu que havia sombra, ao qual ele julgou impossível numa Terra plana.

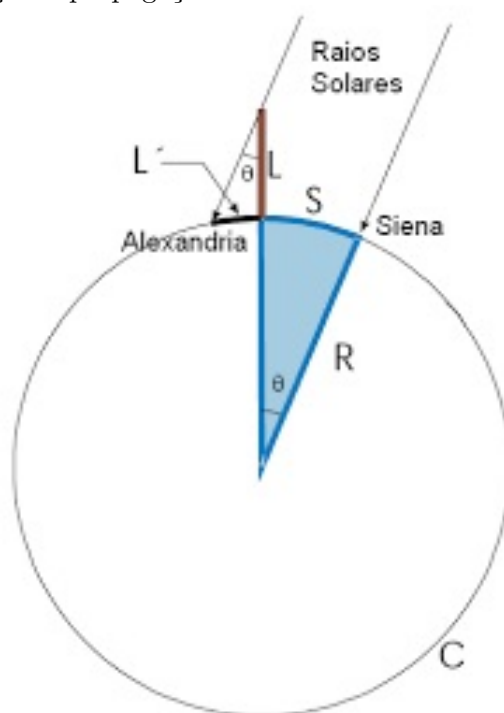
Eratóstenes encomendou a contagem da distância D entre as duas cidades às caravanas de camelos e depois utilizou a semelhança de triângulos para determinar o raio terrestre (Figura abaixo), resultado que obteve com um erro mínimo levando em conta todas as incertezas envolvidas.

⁶Sabemos que os planetas têm órbitas em torno do sol praticamente coplanares. A órbita da Terra é chamada de eclíptica. A inclinação axial ou obliquidade da Terra em relação à eclíptica é o ângulo entre o eixo de rotação e seu plano orbital, ele permanece confinado entre $21,8^\circ$ e $24,4^\circ$.

Assim, temos: $\triangle ABC \approx \triangle DEF \Leftrightarrow \angle A \cong \angle D; \angle B \cong \angle E; \angle C \cong \angle F$ e $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FC} = k$; se $k = 1$, os triângulos são congruentes.

Como já foi dito, para determinar o raio da Terra, Eratóstenes utilizou a semelhança de triângulos, pois Siene e Alexandria estão praticamente no mesmo meridiano e, assim, bastava conhecer a distância linear (S) entre as duas cidades para determinar o valor de toda a circunferência da Terra. Ao encomendar essa medida às caravanas de camelos, foi encontrado a distância de 5 mil estádios entre as duas cidades.

Figura 1.7: Esboço da propagação dos raios de luz na visão de Eratóstenes.



Fonte: HORVATH, J.E. O ABCD da Astronomia e Astrofísica. p.22

Percebamos que há dois triângulos na figura acima. Há um triângulo formado por um ponto da cidade de Siene (onde ficava o poço), o centro da Terra e um ponto da cidade de Alexandria (onde terminou a sombra da vara) e outro formado por este último ponto, pelo local em que a vara está no solo e pelo ponto mais alto da vara. R é o raio da Terra, L é a altura da vara, S é a distância entre as duas cidades e L' é a sombra produzida pela vara no dia 21 de junho.

O ângulo θ é o mesmo em ambos os triângulos (ângulos alternos internos) e surge um ângulo aproximadamente reto em cada um dos triângulos, logo, o terceiro ângulo é dado

por: $\theta + 90^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow x = 90^\circ - \theta$ (comum aos dois triângulos).

Esse ângulo x é comum aos dois triângulos, pois são ângulos opostos pelo vértice.

Conclui-se que os triângulos são semelhantes e Eratóstenes chegou à seguinte razão de semelhança: $\frac{R}{L} = \frac{S}{L'}$, onde já sabemos que R é o raio da Terra, L é a altura da vara, S é a distância entre as duas cidades e L' é a sombra produzida pela vara no dia 21 de junho.

Sendo assim, $R = S \cdot \frac{L}{L'}$.

Os valores de L e L' não foram deixados para a história, somente a razão $\frac{L}{L'}$, que Eratóstenes determinou como sendo 8.

Conseqüentemente, o valor do raio é de 5 mil estádios vezes 8, ou seja, 40 mil estádios.

Chegar a um valor em quilômetros do Raio da Terra, a partir desses dados, cria alguns problemas. Além do mais, o valor de 5 mil estádios era visivelmente arredondado, o que aliás Eratóstenes sabia, ficando difícil conhecer o valor do estádio utilizado. Digamos que o Raio da Terra, assim determinado, dava um pouco mais de 6 mil e 300 quilômetros, e notemos a simplicidade do método, que consiste em avaliar linearmente a distância entre dois pontos de um mesmo meridiano, e depois determinar o raio da Terra por semelhança de triângulos.

“Atualmente o raio médio da Terra está em 6.378 km pelo que o valor obtido por Eratóstenes difere do atual em menos de 1,6%, o que é notável.” (MORAIS, 2003, p. 19)

1.5.2 Projeto Eratóstenes Brasil

O Projeto Eratóstenes Brasil é um dos projetos da Comissão de Ensino e Divulgação da Sociedade Astronômica Brasileira. O texto abaixo foi retirado do site do Projeto

<<https://sites.google.com/site/projetoerato/get-started>>:

Anualmente, professores, alunos de qualquer idade e nível escolar, além de clubes de Astronomia são convidados a participar do Projeto Eratóstenes, cujas atividades reproduzem este experimento histórico de maneira semelhante, em parceria com outras escolas e grupos localizados no Brasil e em outros países da América Latina e do mundo.

Com grande importância histórica para a Ciência, este experimento também traz uma rica experiência interdisciplinar para professores e alunos.

A participação consiste em pares de escolas medirem simultaneamente a sombra de uma haste vertical e comunicarem seus resultados entre si, calculando um valor comum do raio terrestre. Ao obter esses dados, o professor junto com os alunos podem resolver um bom exercício. No site do evento é proposta para os professores a construção da ferramenta de coleta de dados com materiais de baixo custo, no entanto, fica a critério dos professores e envolvidos a forma da estrutura.

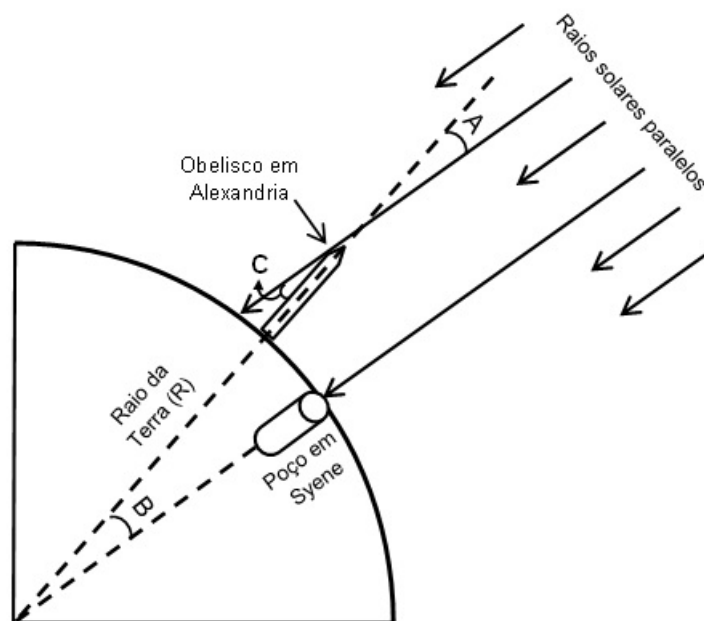
Os professores e alunos devem se registrar no próprio site do Projeto.

Exercício

Exercícios retirados da Prova da Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica do ano de 2013 (Nível IV)⁷:

Num círculo, de raio R , seu comprimento mede $2\pi R$ e temos 360 graus. Eratóstenes (cerca de 276 a.C. – 193 a.C.), sábio grego, nascido em Cirene e falecido em Alexandria, diretor da grande biblioteca desta cidade, no Egito, sabia disso. Ele também sabia que num certo dia, ao meio dia, em Syene, atual Assuã, uma cidade a 800 km de Alexandria, ao Sul do Egito, o Sol incidia diretamente no fundo de um poço e nenhum obelisco projetava sombra neste instante. Porém, no mesmo dia, em Alexandria, um obelisco projetava uma sombra! Tal fato só seria possível se a Terra fosse esférica, concluiu ele. Coincidentemente ambas as cidades estão próximas do mesmo meridiano. (Use $\pi = 3$)

⁷Resoluções retiradas do respectivo gabarito da prova.



Eratóstenes mediu o ângulo C, indicado na figura, e encontrou o valor de 7° (sete graus). Com isso ele determinou o raio da Terra (R). Determine o valor encontrado por Eratóstenes para o raio da Terra, em km.

Resolução: Depois de perceber que os ângulos A, B, C são idênticos, é só fazer uma regra de três. Em 360° temos $2\pi R$ e em 7° temos 800 km, ou na forma de comparações de frações:

$$\frac{360^\circ}{7^\circ} = \frac{2\pi \cdot R}{800}$$

Logo,

$$2\pi \cdot R = \frac{360^\circ \cdot 800}{7^\circ}$$

Assim,

$$R = \frac{360^\circ \cdot 800}{2\pi \cdot 7^\circ} = \frac{360 \cdot 800}{2 \cdot 3.7} = \frac{60 \cdot 800}{7} = 6857 \text{ km}$$

1.6 Distâncias no Sistema Solar (Trigonometria do triângulo retângulo)

Neste tópico, trabalharemos com a trigonometria do triângulo retângulo para determinarmos algumas distâncias no Sistema Solar. Pois, segundo o PCNEM+ (Brasil, 2002,

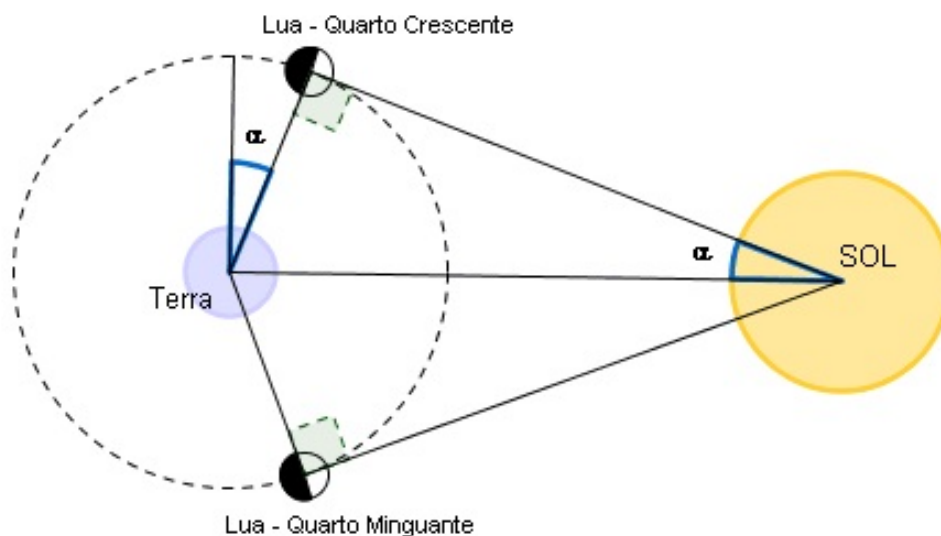
p. 122):

O que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. (*Ver o conteúdo sobre Elipse em Coordenadas Polares no 2º capítulo, páginas 54 a 61*) Outro aspecto importante do estudo de trigonometria é o fato desse conhecimento ter sido responsável pelo avanço tecnológico em diferentes épocas, como é o caso do período das navegações ou, atualmente, na agrimensura, o que permite aos alunos perceberem o conhecimento matemático como forma de resolver problemas que os homens se propuseram e continuam se propondo.

De acordo com Stewart (2014, p. 88):

A trigonometria parece ter se originado na Astronomia, onde é relativamente fácil medir ângulos, mas difícil medir as grandes distâncias. O astrônomo grego Aristarco, numa obra de cerca de 260 a.C., *Sobre tamanhos e distâncias do Sol e da Lua*, deduziu que o Sol fica a uma distância da Terra de 18 a 20 vezes maior que a distância da Lua. (O número correto é mais próximo de 400, mas Eudoxo e Fídias haviam argumentado que seria 10.) Seu raciocínio era que quando a Lua está semi-cheia, o ângulo entre as direções do observador ao Sol e à Lua é cerca de 87° (em unidades atuais). Usando as propriedades dos triângulos que resultam em estimativas trigonométricas, deduziu (também em notação atual) que o $\sin 3^\circ$ está entre $1/18$ e $1/20$, levando à sua estimativa da razão entre as distâncias até o Sol e até a Lua. O método estava correto, mas a observação imprecisa; o ângulo correto é $89,8^\circ$.

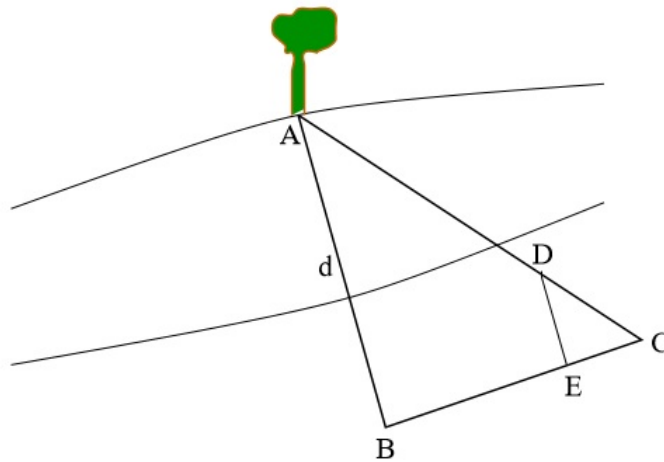
Figura 1.8: Esboço da dedução de Aristarco onde α , para ele, era igual a 3° .



Oliveira Filho e Saraiva (2014, p. 173) mostram-nos que

(...) O métodos mais comum para se medir distâncias grandes, a pontos inacessíveis, é a triangulação. Na figura abaixo, está esquematizada, como exemplo, a maneira de medir a distância de uma árvore localizada do outro lado de um rio, sem atravessá-lo:

Figura 1.9: Deslocamento aparente dos objetos vistos de ângulos distintos.



Fonte: OLIVEIRA FILHO, K.S. & SARAIVA, M.F.O. Astronomia e Astrofísica. p. 173

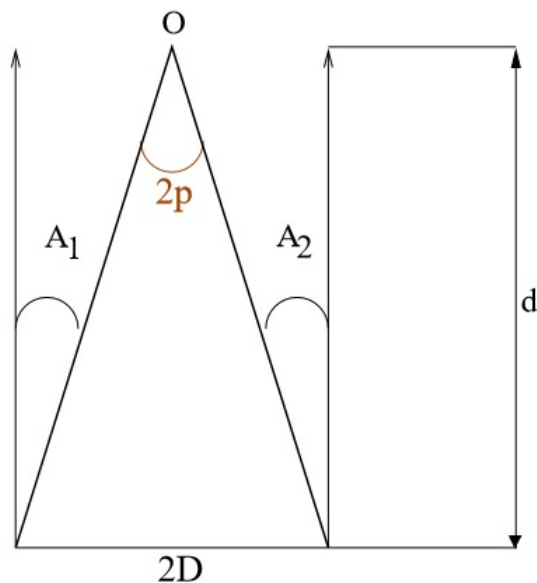
Tomando a árvore como um dos vértices, construímos os triângulos semelhantes ABC e DEC. BC é a linha de base do triângulo grande, AB e AC são os lados, que são as direções do objeto (a árvore) vistas de cada extremidade da linha base. Logo, por semelhança de triângulos”:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EC}$$

Ainda segundo Oliveira Filho e Saraiva (2014, p. 174):

Como podemos medir BC, DE e EC; então podemos calcular o lado AB e, assim, conhecer a distância da árvore. Vemos que a direção da árvore, vista de B, é diferente da direção da árvore vista de C. Esse deslocamento aparente na direção do objeto observado devido à mudança de posição do observador chama-se paralaxe. Em Astronomia, no entanto, costuma-se definir a paralaxe como a metade do deslocamento angular total medido, como está ilustrado na figura a seguir.

Figura 1.10: Ângulo paralítico p quando a base tem valor D à uma distância d .



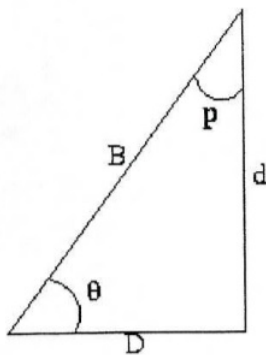
Fonte: OLIVEIRA FILHO, K.S. & SARAIVA, M.F.O. Astronomia e Astrofísica. p. 174

De acordo com Moraes (2003, p. 23):

Suponha que o ponto O seja o objeto cuja distância se quer medir (a árvore da figura 1.9). $2D$ é a linha de base do triângulo, e os ângulos A_1 e A_2 são os ângulos entre a direção do objeto visto de cada extremidade da linha de base e a direção de um objeto muito mais distante, tomado como referência (pode ser uma montanha no horizonte, no exemplo anterior).

Oliveira Filho e Saraiva (2014, p. 173) recordam-nos que “em um triângulo retângulo de cateto D , outro cateto d , hipotenusa B e ângulo θ entre D e B , temos”:

Figura 1.11: Triângulo retângulo com hipotenusa B e catetos D e d .



Fonte: OLIVEIRA FILHO, K.S. & SARAIVA, M.F.O. Astronomia e Astrofísica. p. 173

$$\cos\theta = \frac{D}{B} \Leftrightarrow B = \frac{D}{\cos\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{d}{B} \Leftrightarrow d = D \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = D \cdot \tan\theta$$

De acordo com Morais (2003, p. 23), “como na paralaxe medimos o ângulo p entre B e d , temos”:

$$\tan p = \frac{D}{d} \Leftrightarrow d = \frac{D}{\tan p} \cong \frac{d}{p(\text{rad})}$$

para ângulos suficientemente pequenos.

“Obs.: Use uma calculadora e verifique que $\tan p \cong \sin p \cong p$, com p em radianos e valores inferiores a 1° (transformado em radiano).” (MORAIS, 2003, p. 23)

Retornando à figura 1.10, ainda segundo Morais (2003, p. 24), por trigonometria, que:

$$\tan p = \frac{D}{d}$$

Medindo A_1 e A_2 (com teodolitos, por exemplo) podemos calcular p pois no triângulo:

$$2p + (90^\circ - A_1) + (90^\circ - A_2) = 180^\circ$$

De onde resulta

$$p = \frac{A_1 + A_2}{2}$$

De acordo Oliveira Filho e Saraiva (2014, p. 174), como D também é conhecido, podemos medir a distância d . Para ângulos pequenos, já sabemos que a tangente do ângulo é aproximadamente igual ao próprio ângulo medido em radianos. Então:

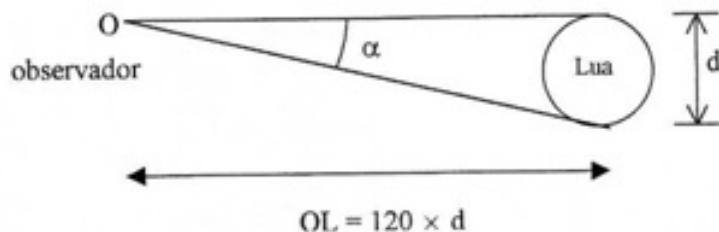
$$d = \frac{D}{p(\text{rad})}$$

Como p é medido em radianos, d terá a mesma medida de D .

1.6.1 Determinação da Distância Terra-Lua

A partir do Diâmetro Angular

Figura 1.12: Distância para um diâmetro aparente α de $30'$.



Fonte: OLIVEIRA FILHO, K.S. & SARAIVA, M.F.O. *Astronomia e Astrofísica*. p. 174

Segundo Morais (2003, p. 20):

Sendo já conhecido ($30'$) o diâmetro aparente da Lua, e tendo os geômetras da época estabelecido que o afastamento necessário, para ver um disco segundo um ângulo de $30'$ é 120 vezes o seu diâmetro (figura 1.12).

Dessa maneira, teremos:

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{d}{120 \cdot d} \\ \alpha &= \arctan \left(\frac{1}{120} \right) \\ \alpha &= 30'\end{aligned}$$

Assim sendo, a distância Terra-Lua (D_{TL}) será:

$$D_{TL} = \frac{DL}{\tan 30'} = \frac{2.1580}{87,3 \cdot 10^{-4}} = 362.100 \text{ km}$$

Sabendo que a distância média Terra-Lua é de 384.400km, vemos que o “erro” cometido pelos geômetras daquela época foi de 0,058, ou seja, inferior a 6%, o que é notável.

A partir da Paralaxe Geocêntrica

De acordo com Oliveira Filho e Saraiva (2014, p. 176):

Atualmente, a determinação de distâncias de planetas é feita por radar e não mais por triangulação, mas, antes da invenção do radar, os astrônomos mediam a distância da Lua e de alguns planetas usando o diâmetro da Terra como linha de base. A posição da Lua em relação às estrelas distantes é medida duas vezes, em lados opostos da Terra e a paralaxe corresponde à metade da variação total na direção observada dos dois lados opostos da Terra. Essa paralaxe é chamada **paralaxe geocêntrica** e é expressa por:

$$p(\text{rad}) = \frac{R_{Terra}}{d} \Leftrightarrow d = \frac{R_{Terra}}{p(\text{rad})}$$

Segundo Oliveira Filho e Saraiva (2014, p. 178) e Moraes (2003, p. 25):

Por observação, verifica-se que o valor médio de p (média de valores de p obtidos com a Lua em diferentes posições ao longo da sua órbita) é de $57'$, transformando esse valor para radiano, temos:

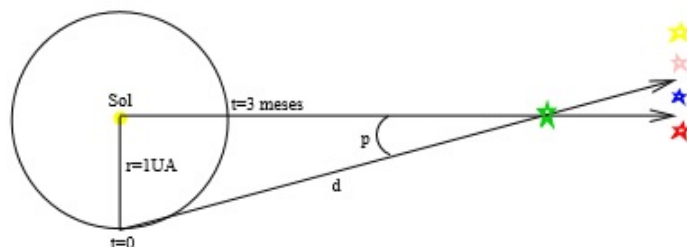
$$57' = \frac{57}{60} \text{ graus Assim, } p(\text{rad}) = \frac{57}{60} \cdot \frac{2\pi}{360} = 0,166 \text{ rad}$$

$$d = \frac{6370}{0,166} = 384183\text{km}$$

Ou seja, a distância média da Lua à Terra é de aproximadamente 384000km.

1.6.2 Paralaxe Heliocêntrica

Figura 1.13: Quando a Terra se move em sua órbita em torno do Sol, uma estrela mais próxima parece se deslocar em relação às estrelas mais distantes



Fonte: OLIVEIRA FILHO, K.S. & SARAIVA, M.F.O. Astronomia e Astrofísica. p. 180

De acordo com Oliveira Filho e Saraiva (2014, p. 176):

A paralaxe heliocêntrica é usada para medir a distância das estrelas mais próximas. À medida que a Terra gira em torno do Sol, podemos medir a direção de uma estrela em relação às estrelas de fundo quando a Terra está de um lado do Sol, e tornamos a fazer a medida seis meses mais tarde, quando a Terra está do outro lado do Sol. A metade do desvio total na posição da estrela corresponde à paralaxe heliocêntrica, que é expressa por:

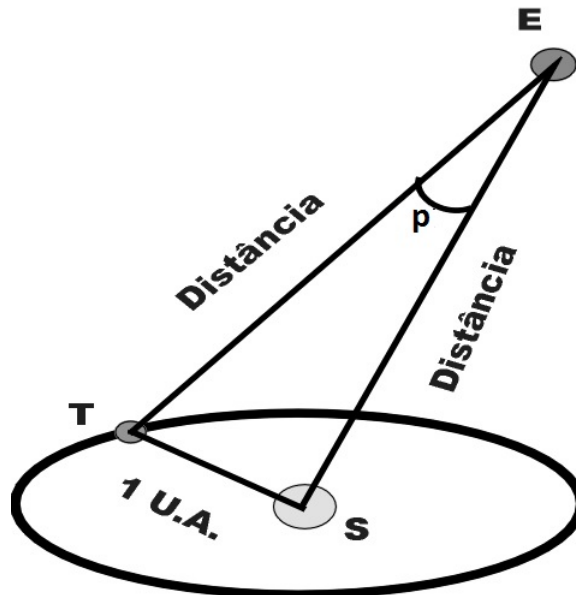
$$p(\text{rad}) = \frac{\text{raio da órbita}}{d} \Leftrightarrow d = \frac{1 \text{ UA}}{p(\text{rad})}$$

para p sendo a paralaxe heliocêntrica.

O Parsec

Segundo Oliveira Filho e Saraiva (2014, p. 179), “um (1) *parsec* é a distância de um objeto tal, que um observador nesse objeto veria o raio da órbita da Terra com um tamanho angular de 1”, ou, em outras palavras, é a distância de um objeto que apresenta paralaxe heliocêntrica de 1”.”

Figura 1.14: Essa é a geometria para se medir 1 parsec, onde $p = 1''$.



Disponível em: <<http://www.if.ufrgs.br/oei/santiago/fis2005/textos/varcrds.htm>>.

Acesso em: 02 de fevereiro de 2016.

A distância de qualquer objeto, em unidades astronômicas, corresponde a:

$$\tan p = \frac{1 \text{ UA}}{d} \Leftrightarrow d = \frac{1 \text{ UA}}{\tan p}$$

Se a distância d for 1 parsec, então a paralaxe será 1". O ângulo de 1", expresso em radianos, vale:

$$1'' = \frac{1}{3600} \text{ graus} \quad 1'' = \frac{1}{3600} \cdot \frac{2\pi}{360} = 4,848 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

Como $p = 4,848 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$, então $\tan p \cong p(\text{rad})$. Assim, $d = \frac{1 \text{ UA}}{p(\text{rad})}$ Logo:

$$1 \text{ parsec} = \frac{1 \text{ UA}}{4,84 \cdot 10^{-6}} = 206265 \text{ UA}$$

A distância de um objeto, expressa em parsec, é dada por:

$$d(\text{parsec}) = \frac{1}{p('')}$$

Um (1) parsec, portanto, é igual a 206265 UA, e é igual a 3,26 anos-luz.

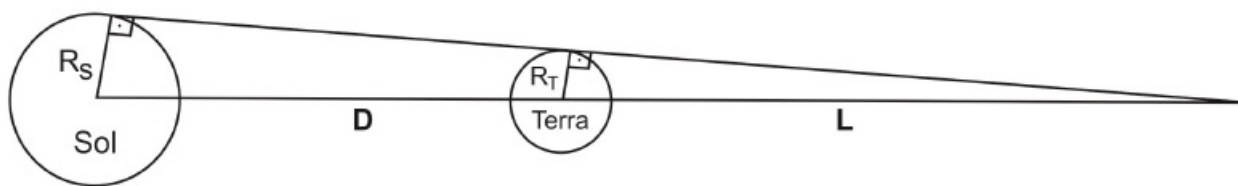
“A estrela mais próxima da Terra, Próxima Centauri, está a uma distância de 4,3 anos-luz, que é maior que 1 parsec. Logo, mesmo para a estrela mais próxima, a paralaxe é de aproximadamente 0,76”, ou seja, menor que 1”.” (OLIVEIRA FILHO E SARAIVA, 2014, p. 180)

Exercício

Exercícios retirados da Prova da Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica do ano de 2012 (Nível IV)⁸:

O eclipse total do Sol é impressionante, pois o céu fica escuro, podemos ver as estrelas e planetas e podemos ver também a fabulosa *coroa solar*. Mas, infelizmente, o eclipse solar total tem curta duração, no máximo alguns minutos. O da Lua, por outro lado, pode durar horas. Vejamos o porquê. Abaixo está um esquema mostrando o Sol, de raio R_S , a Terra, de raio R_T e metade do *cone de sombra* da Terra. Sabemos que $R_S = 109 \cdot R_T$. A distância, D , entre os centros do Sol e da Terra é $D = 23680 \cdot R_T$.

⁸Resoluções retiradas do respectivo gabarito da prova.



1) Determine, em termos do raio da Terra, R_T , qual é o comprimento, L , da sombra da Terra, mostrado na figura acima. Observação: L é medido do vértice do cone de sombra até o centro da Terra.

Resolução: Usaremos a trigonometria do triângulo retângulo para resolvê-la. Chamando de θ o ângulo oposto a R_S e R_T nos respectivos triângulos, pois é o ângulo comum aos dois triângulos, temos, no triângulo maior:

$$\text{sen}\theta = \frac{R_S}{D + L}$$

E no triângulo menor:

$$\text{sen}\theta = \frac{R_T}{L}$$

Assim,

$$\frac{R_S}{D + L} = \frac{R_T}{L}$$

e

$$\frac{R_S}{R_T} = \frac{D + L}{L}$$

Substituindo $R_S = 109.R_T$ na equação acima, temos:

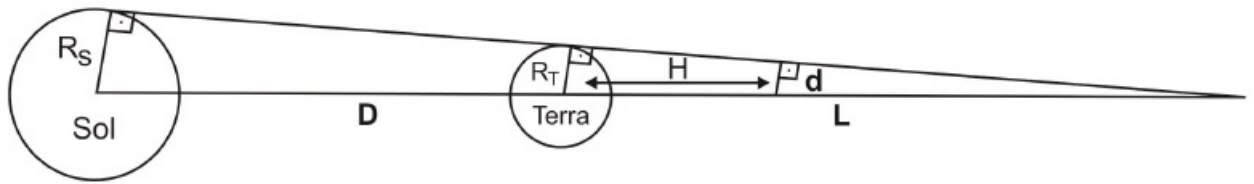
$$\frac{109.R_T}{R_T} = \frac{D + L}{L} \Rightarrow 109 = \frac{D + L}{L} \Rightarrow D + L = 109L \Rightarrow L = \frac{D}{108}$$

Mas como $D = 23680.R_T$, então

$$L = \frac{23680.R_T}{108}$$

E, finalmente, $L = 219,3.R_T$

2) A Lua cruza o cone de sombra da Terra à distância $H = 60.R_T$. Calcule o raio, d , do cone de sombra nesta distância H , medido entre os centros da Terra e da Lua (não desenhada na figura), em função do raio da Terra, R_T .



Resolução: Usaremos a trigonometria do triângulo retângulo para resolver essa questão também. Chamando de θ o ângulo oposto a R_S e R_T nos respectivos triângulos, pois é o ângulo comum aos dois triângulos, temos, no triângulo intermediário:

$$\text{sen}\theta = \frac{R_T}{L}$$

E no triângulo menor:

$$\text{sen}\theta = \frac{d}{L - H}$$

Assim,

$$\frac{R_T}{L} = \frac{d}{L - H}$$

e

$$d = \frac{R_T \cdot (L - H)}{L} \Rightarrow d = R_T \cdot \left(1 - \frac{H}{L}\right)$$

Substituindo $H = 60 \cdot R_T$ e $L = 219,3 \cdot R_T$ na equação acima, temos:

$$d = R_T \cdot \left(1 - \frac{H}{L}\right) \Rightarrow d = R_T \cdot \left(1 - \frac{60R_T}{219,3R_T}\right) \Rightarrow d = R_T \cdot (1 - 0,27)$$

E, finalmente, $d = 0,73 \cdot R_T$.

3) Sabendo-se que $R_T = 3,6 \cdot R_L$, onde R_L é o raio da Lua, calcule quantas vezes d é maior do que R_L . Isso explica o porquê do eclipse lunar ser longo.

Resolução: Para obtermos a resposta é só multiplicar o resultado anterior por $3,6 \cdot R_L$:

$$d = 0,73 \cdot R_T \Rightarrow d = 0,73 \cdot 3,6 \cdot R_L$$

Assim, $d = 2,63 \cdot R_L$

Observemos que $2,63 \cdot R_L$ é apenas a metade da distância que a Lua vai caminhar sob a sombra da Terra. Ou seja, a distância total que a Lua caminha sob a sombra é igual a

5,26. R_L .

Capítulo 2

Conteúdos da Segunda Série do Ensino Médio

No segundo capítulo, serão trabalhados os conteúdos da segunda série do Ensino Médio, que estão relacionados no PCNEM+, no qual a Álgebra deverá ser abordada de acordo com os seguintes itens:

- Função seno, cosseno e tangente e
- Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta.

e faremos o uso desses conhecimentos matemáticos, *Função trigonométrica e a trigonometria do triângulo qualquer (Lei dos Cossenos)*, aplicados ao conceito astronômico da *Elipse em Coordenada Polares*.

Já para o segundo eixo estruturador, a Geometria, o PCNEM+ traz os seguintes conteúdos:

- Geometria espacial: poliedros; sólidos redondos; propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos e
- Métricas: áreas e volumes; estimativas.

e o conteúdo *Geometria espacial: sólidos redondos* será aplicado na Astronomia no tópico *A Esfera Celeste*.

Aqui, na segunda série do Ensino Médio, é possível visualizar uma aplicação no terceiro eixo estruturador, que é Análise de Dados. No PCNEM+ há os seguintes conteúdos:

- Estatística: análise de dados e
- Contagem

onde o conteúdo *Estatística: Análise de dados* será trabalhado em Astronomia no tópico *A Possibilidade Real de Colisões*.

2.1 Elipse em Coordenadas Polares (Funções Trigonométricas e Lei dos Cossenos)

Neste tópico, trabalharemos com as funções trigonométricas e Trigonometria do triângulo qualquer (utilizando a Lei dos Cossenos). No tópico sobre Distâncias no Sistema Solar, segundo o PCNEM+ (Brasil, 2002, p. 122), “o que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos”.

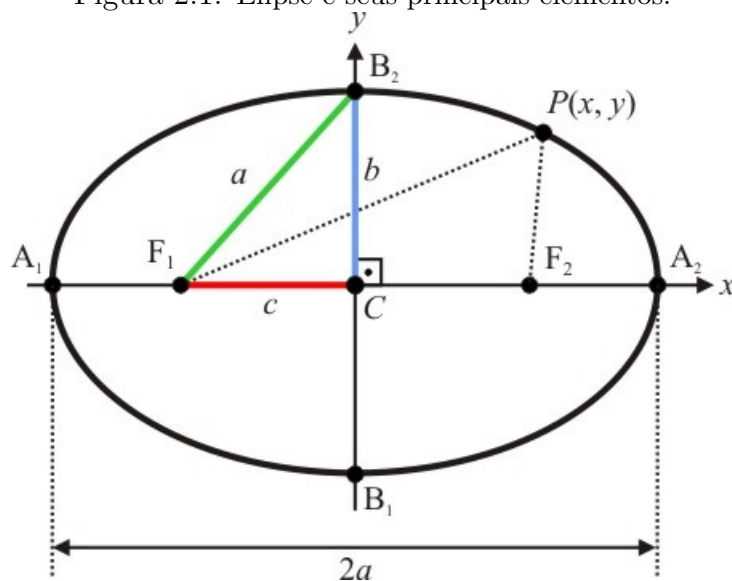
Um modelo que corresponde a um fenômeno periódico será construído a partir da equação da elipse em coordenadas polares. Veremos que há uma periodicidade do movimentos dos planetas em torno do Sol, como a humanidade já sabe há séculos e que só a partir Johannes Kepler (1571 - 1630), com suas três leis, foi conseguida a modelagem destes movimentos. (*Ver o conteúdo sobre a Primeira e a Segunda Leis de Kepler no 3º capítulo - Páginas 82 a 85, 92 e 93.*)

2.1.1 Elipse

De acordo com Behling (2004, p. 8):

Uma elipse é o conjunto de todos os pontos no plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados é uma constante positiva dada. Os dois pontos fixados são chamados de **focos** da elipse, e o ponto médio do segmento que une os focos é chamado de **centro**. O segmento de reta que contém os focos e possui extremidades na própria elipse é chamado de **eixo maior** e sua distância é denotada por $2a$; já o segmento que atravessa o centro da elipse, é perpendicular ao eixo maior, tem extremidades na elipse chama-se **eixo menor** e sua distância denotada por $2b$ (figura 2.1).

Figura 2.1: Elipse e seus principais elementos.



Disponível em: <<http://tudodeconcursosevestibulares.blogspot.com.br/2013/07/geometria-analitica-estudo-da-elipse.html>>. Acesso em: 25 de novembro de 2015.

“Há uma relação básica entre os números a , b e c que pode ser obtida examinando a soma das distâncias aos focos a partir do ponto C na extremidade do eixo maior, e do ponto A na extremidade do eixo menor.” (OLIVEIRA FILHO E SARAIVA, 2014, p. 79)

Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo CF_1B_2 , segue então que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \iff c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Adiantando o que veremos no capítulo 3 sobre elipse com mais detalhes na Primeira Lei de Kepler, temos:

“Fixado dois pontos, F_1 e F_2 os focos, de um plano α , tal que a distância entre F_1 e F_1 é igual $2c$ (distância focal), com $c > 0$, chama-se elipse o conjunto dos pontos P do plano

α cuja soma das distâncias PF_1 e PF_2 é uma constante $2a$, com $2a > 2c$.” (FRENSEL E DELGADO, 2016, aula 18)

$$PF_1 + PF_2 = \text{constante} = 2a$$

Segundo Oliveira Filho e Saraiva (2014, p. 75), “quanto maior a distância entre dois focos, maior é a excentricidade – *achatamento* - (e) da elipse. Sendo c a distância do centro a cada foco, a o semi-eixo maior, e b o semi-eixo menor, a excentricidade é definida por”:

$$e = \frac{c}{a}$$

2.1.2 Coordenadas Polares

De acordo com Coordenadas (2016), “em Matemática, um sistema de coordenadas polares é um sistema de coordenadas bidimensional, no qual cada ponto de um plano é determinado pela sua distância em relação a um ponto fixo e do ângulo em relação a uma direção fixa”.

Ainda segundo Coordenadas (2016):

Este ponto fixo, semelhante à origem de um sistema de coordenadas cartesiano, é denominado “polo”. O raio a partir do polo numa determinada direção denomina-se “eixo polar”. A distância entre o polo e o ponto denomina-se “coordenada radial” ou “raio”, e o ângulo “coordenada angular”, “ângulo polar” ou “azimute”.

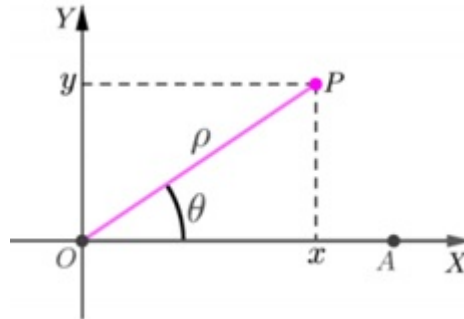
As coordenadas polares, ρ e θ , de um ponto sobre o plano euclidiano \mathbb{R}^2 cuja origem é denotada por O são definidas como:

1. ρ ou r : a distância entre esse ponto e a origem O ,
2. θ : o ângulo formado entre o segmento de reta que une esse ponto à origem e o eixo x , também chamado ângulo azimutal.

Segundo Frensel e Delgado (2016, aula 4), seja $O\rho\theta$ um sistema de coordenadas polares no plano. Consideremos o sistema cartesiano ortogonal OXY tal que o eixo polar seja

o semi-eixo positivo OX e o eixo $-OY$ seja obtido rotacionando o eixo $-OX$ de 90° no sentido anti-horário.

Figura 2.2: Coordenadas cartesianas e polares.



Disponível em: <http://www.professores.uff.br/katia_frensel/aulasga2/ga2-aula4.pdf>. Acesso em: 22 de fevereiro de 2016.

Ainda de acordo com Frensel e Delgado (2016, aula 4), seja $P \neq 0$ um ponto no plano com coordenadas ρ e θ no sistema $O\rho\theta$ e coordenadas x e y no sistema OXY . As relações entre estas coordenadas são dadas por:

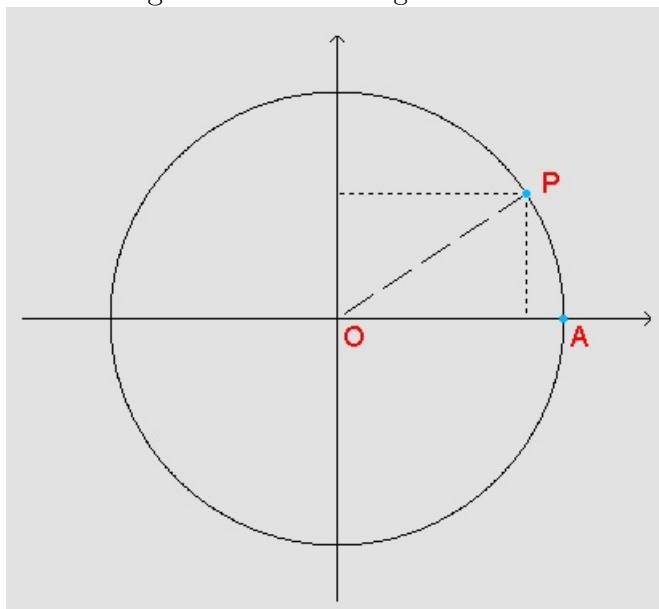
$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} \Rightarrow x = \rho.\cos\theta$$

e

$$\sin\theta = \frac{y}{\rho} \Rightarrow y = \rho.\sin\theta$$

Função Trigonométrica

Figura 2.3: Ciclo Trigonométrico.



Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/trigonometricas/popups/funcoes_trigon.htm>

Acesso em: 12 de abril de 2016.

De acordo com Ime (2016):

Dado um número real x , associamos a ele o ponto $P = P(x)$ no círculo unitário, de tal modo que o comprimento do arco AP é x unidades de medida de comprimento, ou seja, a medida do arco AP é x radianos. Também podemos dizer que o arco AP e, portanto, o ângulo central $A\hat{O}P$ possui $(\frac{180 \cdot x}{\pi})^\circ$.

Definimos as funções seno, cosseno e tangente do número real x da seguinte maneira:

$\cos x$: é a abscissa de P .

$\sin x$: é a ordenada de P .

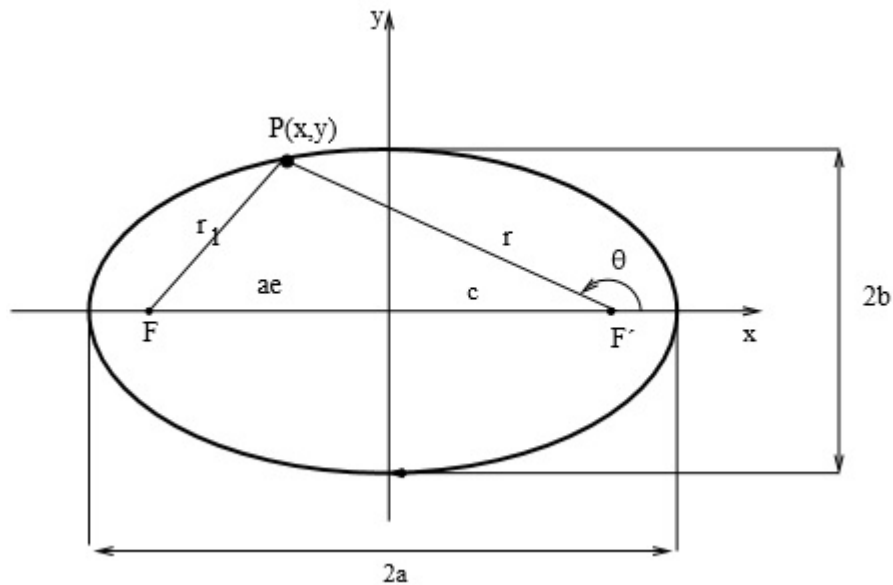
$\tan x$: $\frac{\sin x}{\cos x}$, se $\cos x \neq 0$.

Desse modo, ainda segundo Ime (2016), dado um número x real, fica determinado, na circunferência trigonométrica, o ponto: $P = P(x) = (\cos x, \sin x)$.

Lei dos Cossenos

“A lei dos cossenos é utilizada nas situações que envolvem triângulos não retângulos, isto é, triângulos quaisquer. Esses triângulos não possuem ângulo reto (90°); assim, as relações trigonométricas do triângulo retângulo não são válidas.” (SILVA, 2016)

Figura 2.4: Elipse em coordenadas polares.



OLIVEIRA FILHO, K.S. & SARAIVA, M.F.O. *Astronomia e Astrofísica*. p. 78

Segundo Oliveira Filho e Saraiva (2014, p. 76), seja um ponto $P(r,\theta) = P(\rho,\theta)$ ou $P(x,y)$ sobre a elipse, onde θ é chamado de anomalia verdadeira.

Ainda de acordo com Oliveira Filho e Saraiva (2014, p. 76), utilizando a lei dos cossenos, temos:

$$r_1^2 = r^2 + (2ae)^2 + 2r.(2ae).cos\theta$$

Por definição de elipse,

$$r + r_1 \equiv 2a$$

Ou seja,

$$r_1 = 2a - r$$

Então, substituindo na lei dos cossenos:

$$\begin{aligned} (2a - r)^2 &= r^2 + 4a_2e^2 + 4r.a.e.cos\theta \\ 4a^2 + r^2 - 4a.r &= r^2 + 4a_2e^2 + 4r.a.e.cos\theta \\ a^2.(1 - e)^2 &= a.r.(1 + e).cos\theta \end{aligned}$$

e, finalmente:

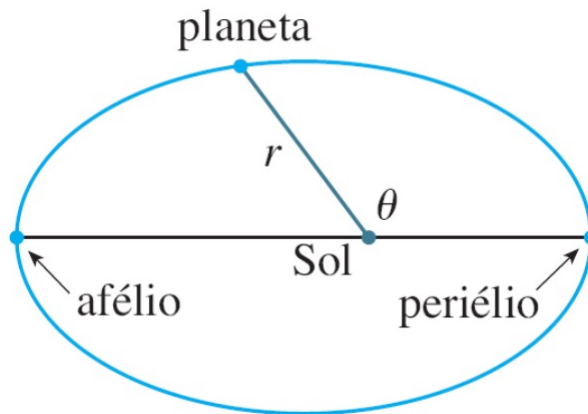
$$r = \frac{a.(1 - e)^2}{1 + e.cos\theta} \quad (2.1)$$

Sendo r função do $\cos(\theta)$, ou seja, r é uma função trigonométrica, podemos concluir que realmente há uma periodicidade dos movimentos dos planetas em torno do Sol e também que a órbita é elíptica, como Kepler inferiu. O período (T) das órbitas elípticas dos planetas é determinado pela Terceira Lei de Kepler, sendo T função de r .

Exercício

1) As posições de um planeta que estão mais próximas e mais distantes do Sol são chamadas periélio e afélio, respectivamente, e correspondem aos vértices da elipse¹.

¹Resoluções nossas.



Disponível em: <http://www.uranometrianova.pro.br/jornal/ca/CoelumAustrale_024.pdf>.

Acesso em 13 de outubro de 2015.

As distâncias do Sol ao periélio e afélio são chamadas distância do periélio e distância do afélio, respectivamente.

Determine, em função da excentricidade, as distâncias do afélio e do periélio de um planeta ao Sol.

Resolução: Observando a figura, quando o planeta está no periélio, $\theta = 0$. Sendo assim, utilizando a equação 2.1, temos:

$$r = \frac{a \cdot (1 - e)^2}{1 + e \cdot \cos \theta} \Rightarrow r = \frac{a \cdot (1 - e)^2}{1 + e \cdot \cos 0} \Rightarrow r = \frac{a \cdot (1 - e)^2}{1 + e \cdot 1}.$$

Logo,

$$r = \frac{a \cdot (1 - e) \cdot (1 + e)}{1 + e}.$$

E, a distância do periélio de um planeta ao Sol é:

$$r = a \cdot (1 - e)$$

Fazendo os mesmos cálculos para determinarmos a distância do afélio, mas, nesse caso, com $\theta = \pi$, temos:

$$r = \frac{a \cdot (1 - e)^2}{1 + e \cdot \cos \theta} \Rightarrow r = \frac{a \cdot (1 - e)^2}{1 + e \cdot \cos \pi} \Rightarrow r = \frac{a \cdot (1 - e)^2}{1 + e \cdot (-1)}.$$

Logo,

$$r = \frac{a.(1 - e).(1 + e)}{1 - e}.$$

E, a distância do afélio de um planeta ao Sol é:

$$r = a.(1 + e)$$

2) Encontre a distância da Terra ao Sol no periélio e no afélio, dado que a excentricidade da órbita da Terra é de aproximadamente 0,017 e o comprimento do semi-eixo maior ($2a$) vale cerca de 3.10^8 km.

Resolução: A distância do periélio da Terra ao Sol é:

$$r = a.(1 - e) \Rightarrow r = 1,5.10^8.(1 - 0,017) \Rightarrow r_p = 1,47.10^8 km$$

E, a distância do afélio da Terra ao Sol é:

$$r = a.(1 + e) \Rightarrow r = 1,5.10^8.(1 + 0,017) \Rightarrow r_a = 1,52.10^8 km$$

3) Encontre uma equação polar aproximada para a órbita elíptica da Terra em torno do Sol (em um foco), dado que a excentricidade da órbita da Terra é de aproximadamente 0,017 e o comprimento do semi-eixo maior ($2a$) vale cerca de 3.10^8 km.

Resolução: Assim, da equação 2.1, uma equação da órbita da Terra em torno do Sol é:

$$r = \frac{a.(1 - e)^2}{1 + e.\cos\theta} = \frac{(1,5.10^8).(1 - 0,017)}{1 + 0,017.\cos\theta}$$

Ou, aproximadamente,

$$r = \frac{1,5.10^8}{1 + 0,017.\cos\theta}$$

2.2 A Esfera Celeste (Geometria Espacial: sólidos redondos)

De acordo com o PCNEM+ (Brasil, 2002, p. 124):

(...) O ensino de Geometria no Ensino Médio deve contemplar também o estudo de propriedades de posições relativas de objetos geométricos; relações entre figuras espaciais e planas em sólidos geométricos; propriedades de congruência e semelhança de figuras planas e espaciais; análise de diferentes representações das figuras planas e espaciais, tais como desenho, planificações e construções com instrumentos.

Nesse intuito, usaremos uma forma geométrica espacial, sólido redondo, para representar e visualizar partes do mundo real, que é a esfera celeste.

“Observando o céu numa noite estrelada, não podemos evitar a impressão de que estamos no meio de uma grande esfera incrustada de estrelas. Isso inspirou nos antigos gregos a ideia do céu como uma **Esfera Celeste**.” (OLIVEIRA FILHO e SARAIVA, 2014, p. 9. grifo nosso)

Esses antigos gregos “costumavam chamar as estrelas de *estrelas fixas* para distingui-las de planetas errantes. Todavia, na verdade, as estrelas também estão em constante movimento real e aparente. O céu inteiro gira acima de nossas cabeças porque a Terra gira”. (MARAN, 2011, p. 23)

Segundo Canalle e Matsuura (2007, p. 10):

A esfera celeste não tem nenhuma realidade física. É apenas uma construção mental. Quando observamos o céu estrelado, de fato, umas estrelas mais perto de nós, outras mais longe. Há, portanto, uma distribuição de astros no espaço tridimensional ao nosso redor. Nesse espaço, a posição de um astro requer a definição de 3 coordenadas, umas das quais é a distância ao observador. A esfera celeste ignorará intencionalmente essas diferentes distâncias do observador aos astros.

As estrelas “nascem” a leste e “põe-se” a oeste, como o Sol e a Lua, mas elas continuam com a mesma forma. De acordo com Oliveira Filho e Saraiva (2014, p. 9):

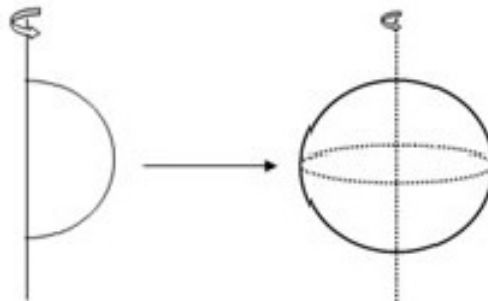
Isso causa a impressão que a esfera celeste vai girando de leste para oeste em torno de um eixo imaginário, que intercepta a esfera em dois pontos fixo, os **Polos Celestes** (grifo nosso). Na verdade, esse movimento, chamado movimento diurno dos astros, é um reflexo do movimento de rotação da Terra que se faz de oeste para leste. O eixo de rotação da esfera celeste é o prolongamento do eixo de rotação de Terra, e os polos celestes são as projeções no céu, dos polos terrestres.

2.2.1 Esfera

Segundo A esfera (2016):

A Esfera é uma figura simétrica tridimensional que faz parte dos estudos de Geometria Espacial na parte de sólidos redondos, de acordo com o PCN. Em outras palavras, a esfera é um sólido geométrico obtido através da revolução da semicircunferência sobre um eixo, composto por uma superfície fechada na medida que todos os pontos estão equidistantes do centro (O).

Figura 2.5: Revolução de uma semicircunferência sobre um eixo vertical.



Disponível em: <<http://quatrosabios.blogspot.com.br/>>. Acesso em 10 de fevereiro de 2016.

Ainda segundo A esfera (2016), *os componentes da esfera são:*

1. Superfície Esférica: corresponde ao conjunto de pontos do espaço no qual a distância do centro (O) é equivalente ao raio (R).
2. Cunha Esférica: corresponde à parte da esfera obtida ao girar um semicírculo em torno de seu eixo.
3. Fuso Esférico: corresponde à parte da superfície esférica que se obtém ao girar uma semicircunferência de um ângulo em torno de seu eixo.
4. Calota Esférica: corresponde a parte da esfera (semiesfera) cortada por um plano.

De acordo com Oliveira Filho e Saraiva (2014, p. 9 a 12):

Os antigos gregos definiram alguns planos e pontos na esfera celeste, que são úteis para a determinação da posição dos astros no céu.

- **Horizonte:** linha aparente ao longo da qual, em lugares abertos e planos, observamos que o céu parece tocar a terra ou o mar. Como o raio da Terra é desprezível face ao raio da esfera celeste, considera-se que o Horizonte é um círculo máximo da esfera celeste, ou seja, passa pelo seu centro.
- **Zênite:** é o ponto (imaginário) interceptado por um eixo vertical (imaginário) traçado a partir da cabeça de um observador (localizado sobre a superfície terrestre) e que se prolonga até a esfera celeste.
- **Nadir:** é o ponto (sobre a esfera celeste) traçado por um eixo vertical de sentido oposto ao Zênite.
- **Equador Celeste:** é o círculo máximo determinado pela intersecção da esfera celeste com o plano perpendicular ao eixo terrestre que passa pelo centro da Terra. Esse círculo máximo divide a esfera celeste em dois hemisférios: o hemisfério celestial norte e o hemisfério celestial sul.
- **Polo Norte Celeste (PNC):** é o ponto em que o prolongamento do eixo de rotação da Terra intercepta a esfera celeste, no hemisfério norte.
- **Polo Sul Celeste (PSC):** é o ponto em que o prolongamento do eixo de rotação da Terra intercepta a esfera celeste, no hemisfério sul.
- **Círculo vertical:** qualquer semi-círculo máximo da esfera celeste contendo a vertical do lugar. Os círculos verticais começam no Zênite e terminam no Nadir.
- **Ponto Geográfico Norte (PGN):** também chamado de Ponto Cardeal Norte, é o ponto em que o círculo vertical que passa pelo Polo Norte Celeste intercepta o Horizonte.
- **Ponto Geográfico Sul (PGS):** também chamado de Ponto Cardeal Sul, é o ponto em que o círculo vertical que passa pelo Polo Celeste Sul intercepta o Horizonte. A linha sobre o Horizonte que liga os pontos cardeais Norte e Sul chama-se linha Norte-Sul, ou meridiana. A linha Leste-Oeste é obtida traçando-se, sobre o Horizonte, a perpendicular à meridiana.
- **Círculo de altura:** qualquer círculo da esfera celeste paralelo ao Horizonte. É também chamado almucântar, ou paralelo de altura.
- **Círculo horário ou meridiano:** qualquer círculo máximo da esfera celeste que contém os dois polos celestes. É também chamado meridiano. O meridiano que passa pelo Zênite se chama Meridiano Local.
- **Paralelo:** qualquer círculo da esfera celeste paralelo ao equador celeste. É também chamado círculo diurno.

2.2.2 Sistema de Coordenadas

De acordo com Morais (2003, p. 104):

Uma vez estabelecida a esfera celeste como representação do Universo visível, torna-se simples posicionar um astro no céu em qualquer instante do seu movimento através de um sistema de coordenadas. Nesse sistema, vamos utilizar apenas coordenadas angulares sem nos preocuparmos com as distâncias aos astros. A posição do astro será determinada através de dois ângulos de posição, um medido sobre um plano fundamental e outro medido perpendicularmente a ele.

Sistema Horizontal

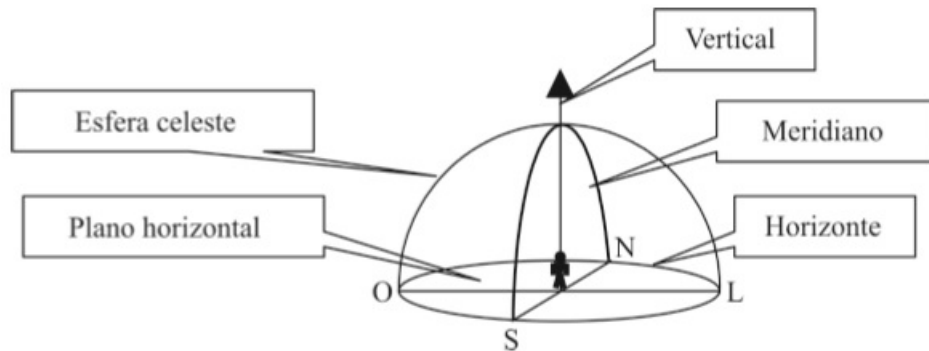
De acordo com Canalle e Matsuura (2007, p. 12), “este é um dos sistemas que possibilita quantificar precisamente a posição dos astros na esfera celeste”.

Ainda segundo Canalle e Matsuura (2007, p. 12):

Se um astro se move no céu, seu movimento pode ser também descrito quantitativamente pelo tabelamento da posição em sucessivos instantes de tempo. Mas, neste sistema de coordenadas celestes, a descrição da posição e movimento dos astros é referida ao observador, ou melhor, à posição do observador na superfície da Terra. Cada sistema de coordenadas celestes baseia-se num plano fundamental. Neste caso o plano fundamental é a superfície horizontal do observador.

No plano horizontal o observador deverá definir os **pontos cardeais** (Figura abaixo): N (norte), S (sul), L (leste) e O (oeste). Planos verticais podem ser construídos, todos eles se interceptando na vertical do observador. A intersecção dos planos verticais com a esfera celeste define os círculos verticais. Um deles é especial: aquele que passa pelos pontos cardeais N e S. Esse é o círculo meridiano ou simplesmente **meridiano do observador** (Figura abaixo).

Figura 2.6: São mostrados os pontos cardeais no horizonte do observador.



Fonte: CANALLE, J.B.G. e MATSUURA, O.T. Astronomia. Formação continuada de professores.

Curso Astronáutica e Ciência do Espaço. Brasília: Agência Espacial Brasileira, 2007. p.12

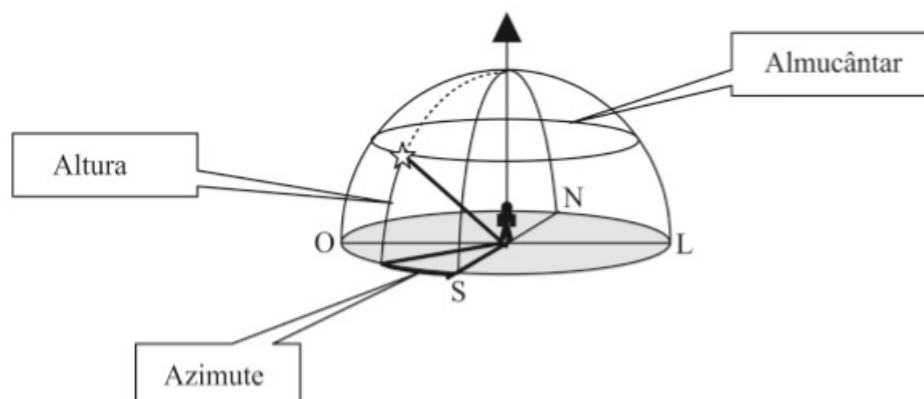
Continuando com Canalle e Matsuura (2007, p. 12):

Vimos que a posição de um astro na esfera celeste fica perfeitamente definida se especificarmos apenas a sua direção. A sua distância pode ser ignorada. Portanto precisamos determinar apenas duas coordenadas. No sistema horizontal elas são a altura e o azimute (Figura abaixo). A altura é o ângulo medido, a partir do horizonte até o astro, ao longo de um círculo vertical que passa pelo astro. A altura de qualquer objeto no horizonte é 0° e no zênite, 90° .

O **azimute** é o ângulo medido ao longo do horizonte a partir do S no sentido S-O-N-L. Os azimutes dos pontos cardeais S, O, N e L são, respectivamente, 0° , 90° , 180° e 270° . Alguns autores adotam o N para origem dos azimutes mantendo o mesmo sentido de rotação para a contagem.

“O sistema horizontal é um sistema local, no sentido de que é fixo na Terra. As coordenadas azimute e altura (ou azimute e distância zenital) dependem do lugar e do instante da observação, e não são características do astro.” (OLIVEIRA FILHO E SARAIVA, 2014, p. 16)

Figura 2.7: Altura e azimute de uma estrela, e o almucântar na altura dessa mesma estrela.

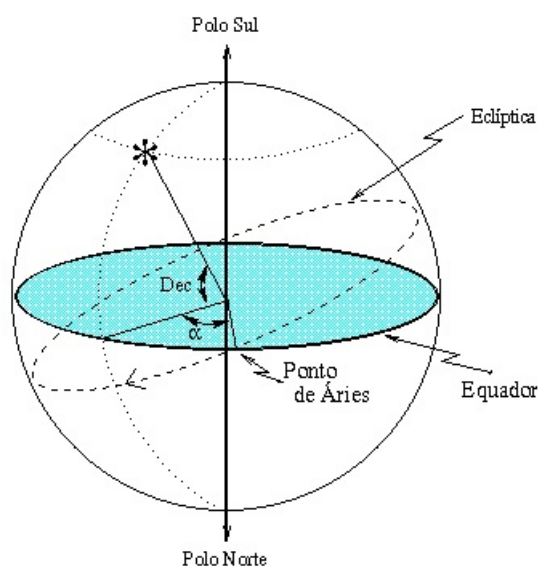


Fonte: CANALLE, J.B.G. e MATSUURA, O.T. Astronomia. Formação continuada de professores.

Curso Astronáutica e Ciência do Espaço. Brasília: Agência Espacial Brasileira, 2007. p.13

Sistema Equatorial Celeste

Figura 2.8: AR e Dec no Sistema Equatorial Celeste.



Disponível em: <<http://astro.if.ufrgs.br/coord.htm>>. Acesso em: 12 de fevereiro de 2016.

De acordo com Maran (2011, p. 24):

Astrônomos mediram as posições de milhões de estrelas, e muitas delas estão tabe-
ladas em catálogos e marcadas em mapas estelares. As posições estão listadas em
um sistema chamado “ascensão reta e declinação” – conhecido como *AR* e *Dec*.

1. *AR* é a posição da estrela medida no sentido leste-oeste no céu (como a longi-
tude, a posição de um local na Terra é medida a leste ou a oeste do meridiano
principal em Greenwich, Inglaterra). O Ponto Áries, também chamado Ponto
Gama (γ), ou Ponto Vernal, é um ponto do equador, ocupado pelo Sol no
equinócio de primavera do hemisfério norte, isto é quando o Sol cruza o equa-
dor vindo do hemisfério sul (geralmente em 22 de março de cada ano).
2. *Dec* é a posição da estrela medida na direção norte-sul, como a latitude de
uma cidade, que é medida a norte ou a sul do equador.

Ainda segundo Maran (2011, p. 25):

Normalmente a *AR* é listada em horas, minutos e segundos, como o tempo. E o
Dec, em graus, minutos e segundos de arco. Noventa graus fazem um ângulo reto,
sessenta minutos de um arco compõem um grau e sessenta segundos de arco formam
um minuto de arco. Um minuto ou segundo de arco, geralmente, é chamado de
“arcominuto” ou um “arcossegundo”, respectivamente.

As linhas imaginárias de igual *AR* passam pelo PNC e pelo PSC como semicírculos
centralizados no centro da Terra. Elas podem ser imaginárias, mas elas aparecem
desenhadas na maioria dos mapas celestes para ajudar as pessoas a achar as estrelas
em *ARs* específicas.

As linhas imaginárias de igual *Dec*, como a linha no céu que marca *Dec* 30° Norte,
passa acima de suas latitudes geográficas correspondentes. Então, se estiver no
Recife, latitude 08° Sul, o ponto em cima estará sempre em *Dec* 08° Sul, embora
sua *AR* mude constantemente com a rotação da Terra. Essas linhas imaginárias
aparecem nos mapas estelares também como círculos de declinação.

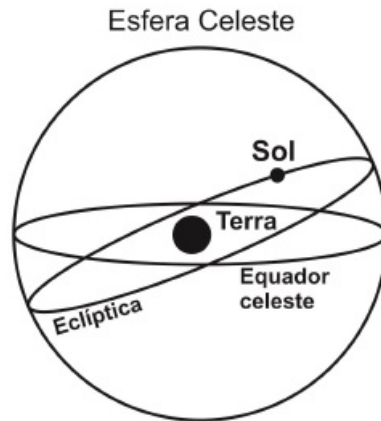
Exercício

Exercícios retirados da Prova da Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica
dos anos de 2012 e 2013 (Nível IV)²:

O Sol, visto da Terra, se desloca, aparentemente, pelas constelações zodiacais contidas
na esfera celeste, sobre uma linha imaginária chamada eclíptica. A expansão do plano do

²Resoluções retiradas dos respectivos gabaritos das provas.

equador terrestre até a esfera celeste define o equador celeste. Eclíptica e equador tem o mesmo centro, e estão inclinadas entre si de 23,5 graus, logo, se cruzam. Veja a ilustração abaixo.



1) Calcule quantos graus o Sol, visto da Terra, caminha sobre a eclíptica num dia. Dado: Período sideral do Sol: aproximadamente 365 dias. *Observação importante: A Lua se desloca ao redor da Terra, supondo esta imóvel, em apenas uma hora, de um ângulo igual à metade do valor obtido para o Sol.*

Resolução: O Sol gasta 365 dias para dar uma volta completa ao redor da Terra, logo ele percorre 360 graus. Para saber quantos graus por dia, basta dividir 360 graus por 365 dias:

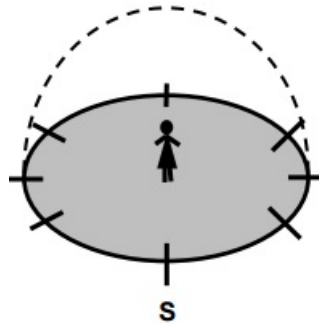
$$\frac{360\text{graus}}{365\text{dias}} = 0,986\frac{\text{grau}}{\text{dia}} \cong 1\frac{\text{grau}}{\text{dia}}$$

2) Quando o Sol está na intersecção da eclíptica com o Equador celeste (pontos B (20/03 em 2013) ou D (22/09 em 2013)) dizemos que está ocorrendo o Equinócio. Neste dia o Sol nasce exatamente no ponto cardeal leste para qualquer observador. De quantas horas é a duração da noite quando o Sol está nos Equinócios?

Resolução: Devido à inclinação do eixo de rotação da Terra em relação à perpendicular ao plano da órbita, somente nestas datas, Equinócios, a noite e a parte diurna do dia duram 12 horas cada.

3) No problema anterior temos uma vista externa ao sistema Sol-Terra, estando esta imóvel. Neste problema você volta à superfície da Terra. A figura esquemática abaixo representa o horizonte de um lugar qualquer do Hemisfério Sul, excluído o Polo Geográfico

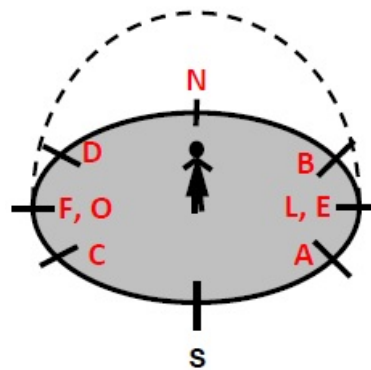
Sul. O “boneco” no centro do horizonte representa um observador, você, por exemplo. Estão marcados sobre este horizonte várias direções (os tracinhos). A figura e o enunciado do problema anterior ajudam a responder esta questão, também.



Veja a tabela abaixo e coloque a letra correspondente junto ao tracinho que identifica aquele local ou fenômeno na figura acima. Tem tracinho com mais de uma letra. Já fizemos um para você.

- | | |
|---|---|
| S Direção cardeal Sul. | B Nascer do Sol no solstício de inverno. |
| N Direção cardeal Norte | C Ocaso do Sol no solstício de verão. |
| L Direção cardeal Leste. | D Ocaso do Sol no solstício de inverno. |
| O Direção cardeal Oeste. | E Nascer do Sol no equinócio da primavera. |
| A Nascer do Sol no solstício de verão. | F Ocaso do Sol no equinócio de outono. |

Resolução:



2.3 A Possibilidade Real de Colisões (Estatística: análise de dados)

De acordo com o PCNEM+ (Brasil, 2002, p. 126):

(...) A análise de dados permite o desenvolvimento de várias competências relativas à contextualização sócio-cultural, como a análise de situações reais presentes no mundo contemporâneo e a articulação de diferentes áreas do conhecimento. Contribui também para a compreensão e o uso de representações gráficas, identificação de regularidades, interpretação e uso de modelos matemáticos e conhecimento de formas específicas de raciocinar em Matemática.

Neste tópico, trabalharemos a *Análise de dados em Estatística* como “uma maneira para compreendermos e emitirmos juízos sobre informações estatísticas de natureza social, econômica, política ou científica apresentadas em textos, notícias, censos, pesquisas, etc.”. (PCNEM+, BRASIL, 2006, p.123)

Há evidências de que impactos de asteroides e cometas tenham ocorrido com bastante frequência na Terra: pelo menos 150 crateras provocadas por esses impactos são conhecidas em nosso planeta. E se considerarmos o aspecto da Lua, com sua enorme quantidade de crateras, podemos concluir que houve muito mais impactos sobre a Terra, mas que a grande maioria foi erodida pela ação de ventos e chuvas – que não existem na Lua.

De acordo com Leite (1999, p. 121):

Já houve, no passado, impactos cujas consequências foram tão drásticas quanto as que há 65 milhões de anos, no fim do período cretáceo e início do terciário, provocaram o desaparecimento de 70% das espécies existentes então, como os dinossauros. O que provocou esse cataclisma foi provavelmente a queda de um meteorito de aproximadamente 10km de diâmetro na península de Yucatã, no golfo do México. O impacto, que gerou 10 milhões de megatons de energia, levantou uma quantidade de poeira da ordem de dez a 100 vezes a massa do meteorito. A extinção dos dinossauros está relacionada ao fato de que a nuvem de poeira levantada teria obstruído a penetração dos raios solares por cerca de quatro anos, reduzindo drasticamente a fotossíntese e rompendo o equilíbrio alimentar dos animais. Por outro lado, essa catástrofe também pode ser vista como parte do processo evolutivo que possibilitou o surgimento da raça humana.

Existe no Canadá um cinturão de rochas muito antigas e bem preservadas contra a

erosão, o que possibilita o estudo de impactos de meteoritos. Há indícios de que existam ali crateras originárias da queda de meteoritos, com diâmetros que variam entre 2,5 e 140km, sendo suas idades estimadas de 50 milhões a até 2 bilhões de anos.

No Brasil, apesar de a erosão ser bastante intensa, há na região sul do Maranhão uma cratera circundada por dois anéis concêntricos – o interno com cerca de 3km de diâmetro, e o externo com aproximadamente 12km. Essa formação é chamada Serra da Cangalha, devido à forma do anel externo, que não chega a se fechar inteiramente. Estima-se que essa formação date de 220 milhões de anos atrás.

Figura 2.9: Foto de satélite da cratera principal da Serra da Cangalha.



<<http://portal.ifma.edu.br/2013/12/02/>

campus-imperatriz-projeto-de-extensao-explora-cratera-de-impacto-de-meteoro>

Não se deve pensar, no entanto, que quedas de meteoros ou outro corpos tenham acontecido apenas num passado remoto, alertas recentes sobre as ameaças do céu têm feito com que a humanidade estude com mais atenção esses fenômenos. Em 1937, por exemplo, o asteroide Hermes passou bem próximo à Terra, a menos de 735 mil km. E em 1989, por uma questão de seis horas, o asteróide 4581 Asclepius *quase* colidiu com a Terra, passando a 690 mil km (menos de duas vezes a distância entre a Terra e a Lua, que é de 384 mil km), um raspão em escala astronômica. O registro do asteróide Asclepius somente ocorreu quatro dias após a sua maior aproximação da Terra deixou os astrônomos preocupados, já que essa ameaça não fora prevista pelos cientistas: o conhecimento do perigo que esse asteróide representava só foi percebido uma semana depois. Se ele tivesse

golpeado a Terra, teria aberto uma cratera de no mínimo 5km de diâmetro, gerando terremotos de grande magnitude nas regiões vizinhas; caso caísse no oceano, o impacto provocaria maremotos tão intensos que poderiam devastar regiões costeiras, destruindo as cidades litorâneas.

Em março de 1998 foi detectado que o asteroide XF11 viajava em direção próxima à da Terra, uma eventual colisão seria uma catástrofe: o XF11, que mede pelo menos 1,5km de diâmetro, atingiria a Terra a uma velocidade de 27 mil km/h, num impacto de grandes proporções.

De acordo com Leite (1999, p. 122):

Por razões deste tipo, o Congresso norte-americano aprovou o programa Spaceguard Survey, com a finalidade de detectar todos os objetos que possam representar algum perigo para a Terra nas próximas décadas, evitando-se assim uma catástrofe que pudesse levar à destruição parcial da civilização ou à completa extinção da raça humana. Acredita-se que a maioria dos asteróides que têm órbitas próximas à da Terra e possuem mais de 1km de diâmetro já esteja sendo monitorada, enquanto apenas 10% dos que possuem entre 100m e 1km de diâmetro – que também são uma ameaça à Terra – foram devidamente encontrados. Mas mesmo que se usasse a mais alta tecnologia atual e uma soma de 50 milhões de dólares para a instalação de equipamentos, estima-se que seriam necessários vários séculos para se encontrar esses pequenos objetos.

No início de 1998, o presidente dos Estados Unidos vetou orçamentos para o programa Clementine, que visava, além da detecção, meios para, em caso de urgência, destruir meteoros e outros corpos ainda no espaço. Das boas intenções só restaram fantasias, como nos filmes Asteroides, Impacto profundo e Armagedon, que exploram o lado catastrófico da possibilidade de impactos.

2.3.1 Análise de Dados

Mesmo sendo ínfimo o perigo de colisão entre um asteroide e a Terra, ele ainda existe. Várias centenas de asteroides já foram detectados em órbitas próximas a do nosso planeta. Supõe-se que esses objetos saiam da parte mais interna do Cinturão de Asteroides existentes entre as órbitas de Marte e Júpiter.

O problema-chave para os peritos em queda de asteroides, no entanto, é apresentar um quadro de probabilidades de perigo, comparando as colisões de asteroides com outros riscos que se apresentam à humanidade diariamente. Por exemplo, a chance de que um asteroide de 1km de diâmetro venha a colidir com a Terra no tempo de vida de um ser humano e a probabilidade de esse mesmo ser humano morrer em um acidente aéreo são praticamente iguais – muito embora seja difícil fazer a comparação entre um acidente que acontece com mais frequência e tem um baixo número de vítimas e um impacto que raramente ocorre, mas que gera uma grande número de vítimas.

Tabela 2.1: Relaciona causas e chances de morte, nos Estados Unidos.

Causa de morte	Chance de morte
Acidente automobilístico	1 em 100
Assassinato	1 em 300
Incêndio	1 em 800
Acidente com armas de fogo	1 em 2500
Impacto de asteroide/cometa (mínima)	1 em 3000
Eletrocussão	1 em 5000
Acidente com armas de fogo	1 em 2500
Impacto de asteroide/cometa (média)	1 em 20000
Acidente aéreo	1 em 20000
Enchente	1 em 30000
Tornado	1 em 60000
Mordida ou picada venenosa	1 em 100000
Acidente com armas de fogo	1 em 2500
Impacto de asteroide/cometa (máxima)	1 em 250000
Acidente com fogos de artifício	1 em 1 milhão

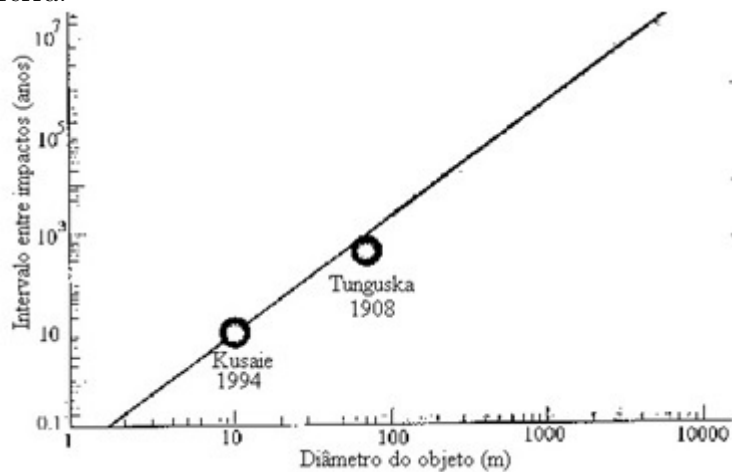
Fonte: CHAPMAN, C.R. e MORRISON, D. *Impacts on Earth by Asteroids and Comets*, p. 39, tradução nossa.

Há uma chance em 10 mil de que um cometa ou asteroide (de aproximadamente 2km de diâmetro) venha a colidir com a Terra até o fim deste século, perturbando a ecosfera e matando uma significativa parcela da população mundial. Embora impactos dessa magnitude sejam frequentes numa escala geológica maior, os perigos a longo prazo são estatisticamente comparáveis aos de muitos outros desastres naturais bem mais familiares,

como enchentes, terremotos, maremotos ou furacões.

Calcular a frequência de tais eventos não é uma tarefa muito fácil, pois não há suficientes observações de impactos desses objetos para se obter uma boa estimativa. Uma das possibilidades é investigar as crateras formadas sobre a superfície da Terra, para que possam ser determinados a data do impacto e o tamanho do objeto. Embora cerca de 150 crateras sejam conhecidas, a vasta maioria delas tem sofrido os efeitos da erosão, algumas já tendo sido varridas pela ação do tempo.

Figura 2.10: Diagrama que relaciona o intervalo anual entre impactos e o diâmetro do objeto que colide com a Terra.



Disponível em: <<http://astro.if.ufrgs.br/comast/comast.htm>>. Acesso em 10 de novembro de 2015.

Quanto ao intervalo em que os impactos podem ocorrer, pode-se dizer que um evento como o Tunguska acontece cerca de uma vez a cada 500 anos, um impacto que possa causar uma catástrofe global ocorre a cada 70 mil anos e um da dimensão do que teria extinguido os dinossauros há 65 milhões de anos pode acontecer a cada 100 milhões de anos. Contudo, qualquer um desses impactos poderia ocorrer amanhã ou daqui a 1 milhão de anos – esses números são apenas médias e não dizem nada quanto a uma data determinada. Só é possível computar certa data quando a órbita de um objeto em particular é conhecida, o que é um caso raro. Assim, não se surpreenda se algum impacto sobre a Terra acontecer amanhã; mas não espere por isso, pois poderá não ocorrer nenhum durante toda sua vida.

Evento Tunguska

Um incidente de origem cósmica bastante curioso foi o que ocorreu em 30 de junho de 1908, quando um objeto explodiu sobre Tunguska, na Sibéria, a uma altura de 8,5km na atmosfera. Essa explosão tem recebido explicações exóticas, como as que seria a antimatéria, um pequeno buraco negro que se abriu ou - inevitavelmente - um disco voador.

Costa (2008) assim relatou o evento:

O amanhecer daquele dia de verão nas margens do rio Podkamennaya Tunguska, na Sibéria, parecia igual a qualquer outro. Os primeiros raios de Sol aqueciam brandamente a floresta boreal, com seus pinheiros silvestres e charcos úmidos, quando o céu explodiu e a terra sentiu sua fúria. Por volta das 7h15 da manhã, do dia 30 de junho de 1908 uma onda de choque quase mil vezes mais forte que a bomba de Hiroshima devastou 80 milhões de árvores em mais de 2.000 km^2 de floresta. Renas, ursos, lobos, raposas e milhares de outros animais tombaram junto com a vegetação, que até hoje não se recompôs inteiramente. A explosão de Tunguska foi o maior impacto que a Terra sofreu em toda a história do homem civilizado. Eventos parecidos, mesmo em épocas mais remotas, permaneceram desconhecidos até o advento dos satélites artificiais.

Infelizmente, a primeira expedição científica a Tunguska ocorreu apenas em 1927, quase 20 anos após o fenômeno. Apesar do longo tempo, ainda se pode encontrar uma grande área devastada, com árvores derrubadas radialmente a partir do epicentro.

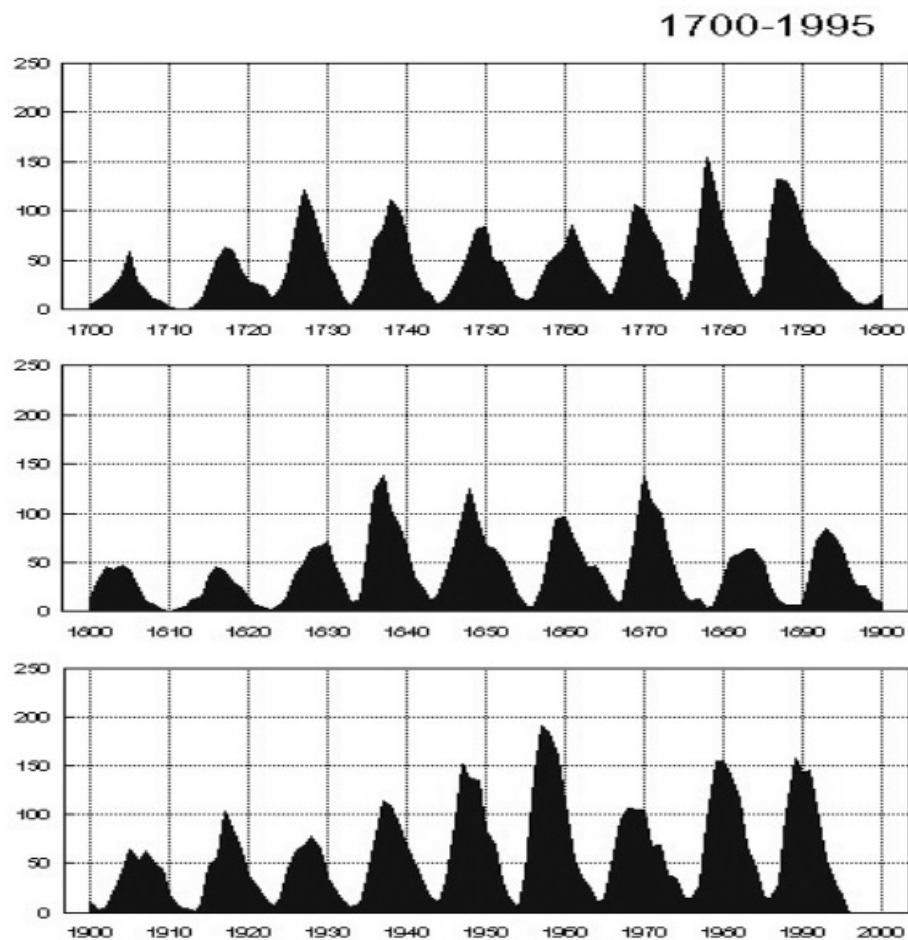
Exercício

Exercícios retirados da Prova da Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica do ano de 2003 (Nível III)³:

Desde que Galileu observou as manchas solares com seu telescópio no início do século XVII, os astrônomos vêm monitorando o número de manchas solares periodicamente. O gráfico abaixo mostra o número de manchas observadas ao longo dos anos. Como podemos

³Os exercícios não são sobre possibilidades reais de colisões, mas sim sobre Análise de Dados. E a resolução foi retirada do respectivo gabarito da prova

notar, o comportamento do número de manchas é cíclico, sendo que existem períodos com muitas manchas no Sol seguidos de períodos no qual o Sol quase não apresenta manchas. Na verdade, o número de manchas solares é um indicador da atividade solar. (Atenção: observações do Sol ao telescópio não são feitas colocando o olho no telescópio! Isto fará você ficar cego imediatamente! A observação da superfície do Sol é realizada fazendo-se projetar a imagem do Sol num anteparo. Atualmente câmeras são adaptadas ao telescópio e, então, as manchas solares podem ser vistas na tela de um computador.)



1) No gráfico acima estão apresentados os ciclos das manchas solares desde 1700 até quase o final do século passado. Estime o período deste ciclo.

Resposta: Entre 10 e 11 anos.

2) Qual o ano do último máximo que pode ser estimado pela leitura direta do gráfico?

Resposta: Entre 1989 e 1990.

3) Com a sua estimativa da duração do ciclo faça a previsão de quando ocorreu o último máximo de atividade solar?

Resposta: Entre 1999 e 2001.

Capítulo 3

Conteúdos da Terceira Série do Ensino Médio

No terceiro capítulo, serão trabalhados os conteúdos da terceira série do Ensino Médio, que estão relacionados no PCNEM+, no qual a Álgebra deverá ser abordada de acordo com o seguinte item:

- Taxas de variação de grandezas

e o utilizaremos esse conhecimento matemático aplicado aos conceitos astronômicos da *Segunda Lei de Kepler* e da *Lei de Newton da Gravitação Universal*.

Já para a Geometria, o PCNEM+ traz o seguinte conteúdo:

- Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.

e o conteúdo *Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações* será aplicado na Astronomia no tópico *Primeira Lei de Kepler*.

Como no caso da segunda série do Ensino Médio, de acordo com o PCNEM+, na terceira série do Ensino Médio também é possível visualizar uma aplicação da Análise de Dados:

- Probabilidade

onde esse conteúdo será trabalhado em Astronomia no tópico *Possibilidade de vida fora do Sistema Solar*.

3.1 Segunda Lei de Kepler (Taxas de variação de grandezas)

Segundo o PCNEM+ (Brasil, 2002, p. 135):

(...) O conteúdo referente a Taxas de variação de grandezas auxilia-nos a ler e interpretar diferentes linguagens e representações envolvendo variações de grandezas. E também ajuda-nos a identificar regularidades em expressões matemáticas e estabelecer relações entre variáveis.

Nesse intuito, é possível trabalhar a Segunda Lei de Kepler no referido conteúdo *Taxas de Variação de Grandezas* no qual nos é apresentado pelo PCNEM+ na 3^a série do Ensino Médio.

De acordo com A Harmonia (2015), “Johannes Kepler (1571-1630) foi um matemático e filósofo natural alemão, e figura chave na evolução científica do século XVII, pois foi quem apresentou o modelo definitivo para explicar os movimentos dos planetas”. Essa explicação veio na forma de três leis fundamentais da mecânica celeste, conhecidas como Leis de Kepler, ou leis dos movimentos planetários.

Ele acreditou, como Pitágoras fez muitos séculos antes, que o mundo em torno de nós poderia ser medido e expresso em termos de números.

Segundo A Harmonia (2015), os principais trabalhos científicos publicados de Kepler foram: *Astronomia Nova* (1609), *A Harmonia dos Mundos* (1619) e *Compêndio da Astronomia Copernicana* (entre 1617 e 1621, Kepler publicou sete volumes).

“Na Universidade, Kepler leu sobre os *Princípios* de Nicolau Copérnico (1473-1543) e logo se tornou um entusiástico defensor do heliocentrismo.” (O MENSAGEIRO, 2015)

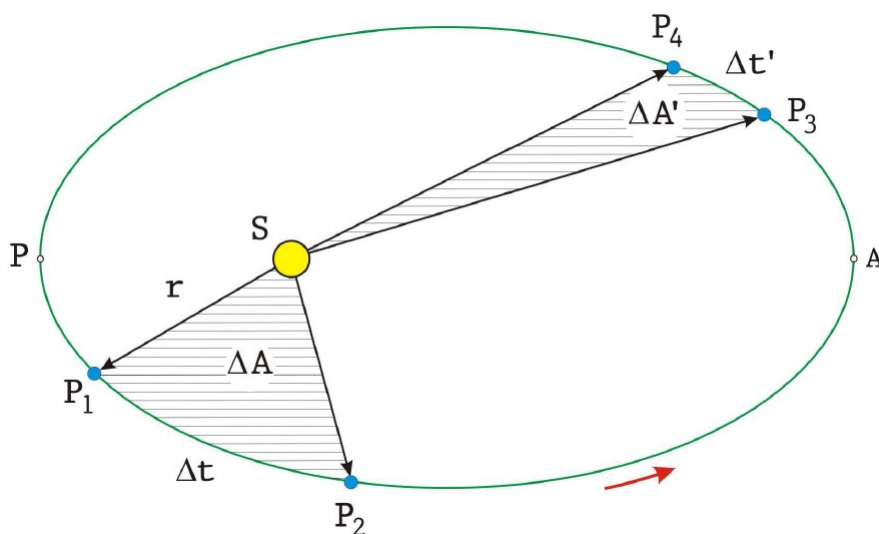
Segundo Oliveira Filho e Saraiva (2014, p. 57), em 1594, ele conseguiu um posto de professor de matemática e astronomia em uma escola secundária na Áustria, mas, durante a Contra-Reforma, Kepler, que era protestante, foi expulso da cidade, e foi, então, para Praga trabalhar como assistente de Tycho Brahe (1546-1601).

Com a morte de Tycho, Kepler foi nomeado para o seu posto (matemático imperial). A partir daí, analisando os dados de Brahe, e se dedicando pelos vinte anos seguintes, conseguiu chegar às suas três leis.

Kepler tem sido chamado de o legislador do céu, depois de ter descoberto as três leis simples que regem o curso dos planetas aparentemente tão complicados. O próprio Kepler, satisfeito com o seu trabalho, estampou estas palavras expressivas em seu livro *A Harmonia dos Mundos - Livro V*, publicado em 1619: *O próprio Deus esperou seis mil anos pra que alguém interpretasse sua obra.*

De acordo com Alves (2016, grifo nosso), “após elaborar a Lei das Órbitas (*Ver o conteúdo sobre a Primeira Lei de Kepler*), Johannes Kepler escreveu uma lei relacionada à velocidade dos planetas em sua órbita (*trajetória*)”. Sua Segunda Lei, conhecida como Lei das Áreas, afirma que, em um referencial fixo no Sol, a reta que une o planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais.

Figura 3.1: Lei das Áreas.



Disponível em: <http://www.uranometrianova.pro.br/jornal/ca/CoelumAustrale_024.pdf>.

Acesso em 13 de outubro de 2015.

Segundo Varella (2012, p. 5):

O vetor (\vec{r}) com origem no centro do Sol e extremidade no centro do planeta é chamado de raio vetor do planeta. Consideremos, como na figura 3.1, um planeta descrevendo uma órbita ao redor do Sol. Sejam P_1 , P_2 , P_3 e P_4 , quatro posições do planeta. Se os arcos de elipse $P_1 P_2$ e $P_3 P_4$ forem percorridos no mesmo intervalo de tempo, então as áreas dos setores da elipse P_1SP_2 e P_3SP_4 serão iguais.

Assim, ainda de acordo com Varella (2012, p. 5):

Se $\Delta t = \Delta t'$, então $\Delta A = \Delta A'$. A grandeza $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ é chamada de velocidade areolar, ou seja, ela é a taxa na qual uma determinada área é *varrida* durante a trajetória do raio vetor. A Segunda Lei de Kepler afirma, então, que a velocidade areolar é constante. Ela permite, ainda, tirar conclusões sobre a velocidade do planeta em sua órbita ao redor do Sol. Nota-se, pela figura, que tendo as regiões hachuradas P_1SP_2 e P_3SP_4 as mesmas áreas, porém alturas diferentes, segue-se que suas bases serão diferentes também. Como a base da região hachurada P_1SP_2 é maior que a base da região hachurada P_3SP_4 e ambas foram percorridas no mesmo intervalo de tempo, conclui-se que o arco de elipse $P_1 P_2$ foi percorrido com velocidade maior que o arco $P_3 P_4$. Desta forma, quando a distância do planeta ao Sol é pequena, a sua velocidade de translação é grande e vice-versa.

“De qualquer forma, como as órbitas são aproximadamente circunferências, a variação relativa do módulo da velocidade linear dos planetas é pequena.” (LEIS, 2016)

3.1.1 Taxa de Variação

Segundo Gimenez (2011), “seja $y = f(x)$ uma função definida em $[a,b]$. A taxa de variação média de $f(x)$ em $[a,b]$ é a razão”:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

“ou seja, é o quociente da variação de $f(x)$ pela variação de x ”.

Ela pode ser interpretada como a taxa de variação da variável y em relação à variável x , isto é, esta taxa pode ser interpretada como uma forma de medir “quão rápido” a variável y está mudando à medida em que a variável x muda¹.

¹Disponível em: <<http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto.html>> Acesso em 05 de fevereiro de 2016.

No caso de funções afim (ou do primeiro grau), esta taxa é sempre constante, isto é, a acréscimos constantes em x , correspondem acréscimos constantes em y .

“Pela Segunda Lei de Kepler, sabemos que o segmento que une o centro do Sol e um planeta varre áreas (A) iguais em intervalo de tempos (Δt) iguais, logo, a velocidade areolar (v_A) é uma taxa sempre constante” (ALVES, 2016):

$$v_A = \frac{A_2 - A_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

Assim,

$$\frac{\Delta A_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta A_2}{\Delta t_2} = \text{constante}$$

E,

$$\Delta A = v_A \cdot \Delta t$$

que é uma função do primeiro grau, como era de se esperar pela definição da taxa de variação. No qual a área corresponde à variável y ; o intervalo de tempo, à variável x e a velocidade areolar, ao coeficiente angular.

Cada planeta possui a sua própria velocidade areolar, fazendo com que a distância média do planeta ao Sol aumente se tornando mínima para Mercúrio e máxima para Plutão (planeta anão) e a unidade dela é usualmente dada por

$$\frac{UA^2}{\text{ano terrestre}}$$

Lembremos que UA é a chamada Unidade Astrônômica definida como a distância média entre a Terra e o Sol, cuja $1 UA = 149.597.870 \text{ km}$.

Exercício

Vamos determinar a velocidade areolar de cada planeta partindo do princípio da translação completa em torno do Sol²:

- ΔA é a área de uma elipse, que é dada por $\pi \cdot a \cdot b$ (a prova dessa fórmula utiliza o

²Resoluções nossas.

cálculo integral, conteúdo do Ensino Superior), onde a é o semi-eixo maior da elipse e b o semi-eixo menor.

- Δt é o período de translação de um planeta em torno do Sol.

Tabela 3.1: Valores de a , b e T para os planetas do Sistema Solar.

Planeta/Planeta Anão	a (UA)	b (UA)	T (ano terrestre)
Mercúrio	0,4667	0,3075	0,24
Vênus	0,7282	0,7184	0,62
Terra	1,0176	0,9833	1
Marte	1,6660	1,3814	1,88
Júpiter	5,4546	4,9510	11,86
Saturno	10,0701	9,0075	29,46
Urano	20,0874	18,2766	84,01
Netuno	30,3163	29,7993	164,79
Plutão	49,3063	29,5711	247,70

Fonte: <<http://www.nasa.gov/offices/education/about/newsreleases/index.html>> (Tradução nossa)

Acesso em 12 de fevereiro de 2016.

Agora, utilizando a relação da velocidade areolar:

$$v_A = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{T}$$

- Mercúrio: $v_A = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{T} \Rightarrow v = \frac{\pi \cdot 0,4667 \cdot 0,3075}{0,24} \Rightarrow v = 1,88$.
- Vênus: $v_A = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{T} \Rightarrow v = \frac{\pi \cdot 0,7282 \cdot 0,7184}{0,62} \Rightarrow v = 2,65$.
- Terra: $v_A = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{T} \Rightarrow v = \frac{\pi \cdot 1,0176 \cdot 0,9833}{1,0} \Rightarrow v = 3,14$.
- Marte: $v_A = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{T} \Rightarrow v = \frac{\pi \cdot 1,6660 \cdot 1,3814}{1,88} \Rightarrow v = 3,85$.
- Júpiter: $v_A = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{T} \Rightarrow v = \frac{\pi \cdot 5,4546 \cdot 4,9510}{11,86} \Rightarrow v = 7,15$.
- Saturno: $v_A = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{T} \Rightarrow v = \frac{\pi \cdot 10,0701 \cdot 9,0075}{29,46} \Rightarrow v = 9,67$.
- Urano: $v_A = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{T} \Rightarrow v = \frac{\pi \cdot 20,0874 \cdot 18,2766}{84,01} \Rightarrow v = 13,73$.

- Netuno: $v_A = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{T} \Rightarrow v = \frac{\pi \cdot 30,3163 \cdot 29,7993}{164,79} \Rightarrow v = 17,22$.
- Plutão: $v_A = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{T} \Rightarrow v = \frac{\pi \cdot 49,3063 \cdot 29,5711}{247,7} \Rightarrow v = 18,49$.

Obs.: Faça uma análise com os alunos entre as distâncias dos planetas ao Sol e suas respectivas velocidades areolares. Também sobre o porquê da velocidade areolar da Terra ser aproximadamente igual a π .

Tabela 3.2: Valores das velocidades areolares para os planetas do Sistema Solar.

Planeta/Planeta Anão	Velocidade Areolar ($\frac{UA^2}{\text{ano terrestre}}$)	T (ano terrestre)
Mercúrio	1,88	0,24
Vênus	2,65	0,62
Terra	3,14	1
Marte	3,85	1,88
Júpiter	7,15	11,86
Saturno	9,67	29,46
Urano	13,73	84,01
Netuno	17,22	164,79
Plutão	18,49	247,70

3.2 Lei de Newton da Gravitação Universal (Taxas de variação de grandezas)

Aqui, continuaremos mais um exemplo da Astronomia sobre Taxas de variação de grandezas, mas com o viés da proporcionalidade. A Lei de Newton da Gravitação Universal também nos ajudará a ler e interpretar diferentes linguagens e representações envolvendo variações de grandezas. Ela contempla a identificação de regularidades em expressões matemáticas e estabelece relações entre variáveis.

Segundo Horvath (2008, p. 45):

Galileu Galilei (1564 – 1642) empreendeu um estudo abrangente das leis que regem a Mecânica (corpos em queda livre, pêndulos e outros), e participou da construção dos primeiros telescópios para depois explorar os céus com eles. Porém, Galileu ainda não havia conseguido uma formulação definitiva da Mecânica, embora estabelecesse algumas ideias e resultados muito importantes, sem os quais não poderia ter havido avanços posteriores, tais como a ideia de inércia: “um corpo que se move, continuará em movimento a menos que uma força seja aplicada e que o force a parar”, o qual foi incorporada depois por Newton.

De acordo com Oliveira Filho e Saraiva (2014, p. 735):

Galileu argumentou que o movimento é tão natural quanto o repouso, isto é, um corpo que está em repouso permanece em repouso a menos que seja submetido a uma força que o faça mover-se. Se um objeto já está se movimentando, ele continuará em movimento a menos que seja submetido a uma força que o faça parar.

Ainda segundo Horvath (2008, pp. 45 e 46):

Depois das mudanças efetuadas nos céus pelos trabalhos de Copérnico, Tycho, Kepler e outros, a Astronomia encontrava-se num estado bastante peculiar: embora fosse possível compreender os movimentos planetários e outras questões relacionadas em geral, pouco se sabia ainda da forma na qual os planetas estava ligados ao Sol, nem como outros corpos (pedras, pessoas, etc.) grudavam na Terra e se havia alguma relação entre estas coisas. Coube ao inglês Isaac Newton a maior síntese na época e a formulação matemática da chamada gravitação.

De acordo com Verdet (1991, p. 144):

Quando a história da gravitação de Newton é lembrada, surge o episódio da maçã. A anedota, embora haja contada pelo próprio Newton, é muitas vezes tida por lendária pelos professores, que preferem nem tocar no caso. Lendária ou real, é no entanto exemplar, não que se deduza daí que basta sonhar ao luar, debaixo de uma macieira, para descobrir uma lei tão fundamental como a da gravitação universal – e sim porque ela nos revela o núcleo irreduzível, espantoso em sua simplicidade, dessa descoberta: colocar uma questão de tal modo elementar, como “Porque a Lua não cai como esta maçã?” e entrever a resposta paradoxal e genial: “A cada instante a Lua cai na direção da Terra” e a órbita da Lua ao redor da Terra é apenas o compromisso entre essa queda constante e a tendência – o *conatus de movimento*^a – de correr em linha reta no Universo. Colocar isso em forma e daí extrair as Leis de Newton é inteiramente outra questão ... que ocupará o próprio durante vinte anos, mas é evidente que, de estalo, Newton se fez a pergunta fundamental: a queda dos corpos, cujas leis nos foram dadas por Galileu, e a revolução da Lua ao redor da Terra, segundo as regras empíricas de Kepler, obedecem por acaso à mesma lei física?

^aApós o advento da física newtoniana, o conceito de *conatus* dos corpos físicos foi em grande parte substituído pelo princípio da inércia e pela Lei da conservação do momento linear. Da mesma forma, *conatus* foi usado por muitos filósofos para descrever outros conceitos que têm se tornado lentamente obsoletos. *Conatus recedendi*, por exemplo, tornou-se a força centrífuga, e a gravidade é utilizada onde o *conatus a centro* havia sido anteriormente. “Kollerstrom, Nicholas (1999), **The Path of Halley’s Comet, and Newton’s Late Apprehension of the Law of Gravity**, *Annals of Science* 59 (4): 331–356”

Quase certo de que as coisas se passavam bem assim, ainda segundo Verdet (1991, p. 14):

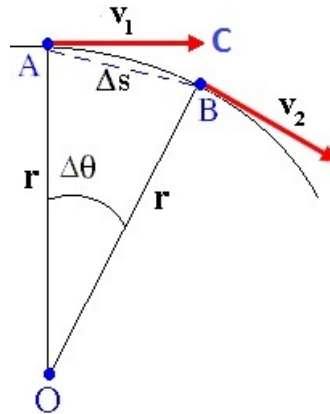
Newton supôs que, já que a Lua está sessenta vezes mais distante do centro da Terra do que a maçã, por uma relação inversa do quadrado ela devia ter uma aceleração de queda livre 3600 vezes mais fraca que a maçã. Como evidentemente ela não caía, era preciso supor que sua aceleração centrípeta compensava a do peso. Questão cuja resposta passava pelo cálculo efetivo da força centrípeta no caso do sistema Terra-Lua. Nessa época, em 1667 ou 1668, Newton não tinha condições de chegar a alguma conclusão. Diz-se, com frequência, que essa incapacidade provisória estaria ligada à imprecisão de um dos dados numéricos: o valor do raio da Terra. Entretanto, a essa dificuldade deveria somar-se outra, anulatória, que Newton não podia resolver na época: mostrar que a Lua e a Terra podiam ser consideradas como dois objetos pontuais afetados pelas massas respectivas dos dois astros. Seria necessário esperar até 1684 para que Newton retomasse seus trabalhos sobre a gravitação.

3.2.1 Aceleração dos corpos em órbitas circulares

A aceleração dos corpos em órbitas circulares é atribuída como prioridade para Christiann Huygens (1629 – 1695) e dessa aceleração, que chamou de força centrífuga, deduziu

uma pressão exercida pelo corpo em movimento sobre o corte vertical da trajetória – Newton falou de força centrípeta – dela deduzindo o que era para ele a própria razão da trajetória. Dois pontos de vista opostos e igualmente válidos, pois correspondem às noções de ação e reação, mas o de Newton traz consigo o desenvolvimento futuro da mecânica celeste.

Figura 3.2: Partícula em movimento circular.



Fonte: OLIVEIRA FILHO E SARAIVA, 2014, p.84.

“Consideremos uma partícula que se move em um círculo. No instante t a partícula está em A, com velocidade vetorial v_1 na direção AC. Pela Primeira Lei de Newton, se não existe uma força agindo sobre o corpo, ele continuará em movimento na direção AC.” (OLIVEIRA FILHO E SARAIVA, 2014, p. 84)

Após um intervalo de tempo Δt , a partícula está em B, percorreu a distância $v \cdot \Delta t$, e está com velocidade vetorial v_2 , de mesmo módulo v , mas em outra direção.

Ainda segundo Oliveira Filho e Saraiva (2014, p. 85):

Ou seja, $\Delta\theta$ o ângulo entre o ponto A e o ponto B. Mas $\Delta\theta$ também é o ângulo entre os vetores v_1 e v_2 , já que v_1 é perpendicular a OA e v_2 é perpendicular a OB. Portanto,

$$\Delta\theta = v \cdot \frac{\Delta t}{r} = \frac{\Delta v}{v} \Rightarrow v \cdot \frac{\Delta t}{r} = \frac{\Delta v}{v} \Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

e, portanto, a aceleração:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{v^2}{r}$$

Se a partícula tem massa m , a força central necessária para produzir a aceleração é:

$$F = m \cdot a \Rightarrow F = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

3.2.2 Proporcionalidade entre Grandezas

A proporcionalidade é a mais simples e comum relação entre as grandezas. Segundo Silva (2016), “grandeza é tudo aquilo que pode ser contado e medido, como o tempo, a velocidade, comprimento, preço, idade, temperatura entre outros”.

De acordo com Lima (2001, p. 193):

Em regra, a proporcionalidade é uma relação binária que pode ocorrer numa dupla de funções reais de mesmo domínio. Uma função é proporcional a outra se e somente se existe(m) alguma(s) constante(s) real(is) – denominada(s) constante(s) de proporcionalidade – que igual(em) cada razão entre as valorações. Então, dados um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ e duas funções $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$, temos que: f é proporcional a g se e só se existe alguma constante real k tal que, para todo x ao longo de X , $\frac{f(x)}{g(x)} = k$. Isto é:

$$f \propto g \iff \exists k \in \mathbb{R}. \quad \forall x \in X. \quad \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

O símbolo \propto é utilizado significando “é proporcional a”.

No estudo de Taxa de variação de grandezas, podemos trabalhar as relações que existem entre as grandezas. Essas relações são classificadas em: diretamente proporcionais e inversamente proporcionais.

Grandezas Diretamente Proporcionais

Grandezas diretamente proporcionais, segundo Silva (2016), “são aquelas grandezas onde a variação de uma provoca a variação da outra numa mesma razão. Se uma dobra a outra dobra, se uma é dividida em duas partes iguais a outra também é dividida à metade”.

De acordo com Sodré (2016), “se duas grandezas x e y são diretamente proporcionais, os números que expressam essas grandezas variam na mesma razão”, isto é:

$$x \propto y$$

e, continuando com Sodré (2016), “existe uma constante k tal que”:

$$x = k.y$$

Grandezas Inversamente Proporcionais

De acordo com Silva (2016):

Uma grandeza é inversamente proporcional quando operações inversas são utilizadas nas grandezas. Por exemplo, se dobramos uma das grandezas temos que dividir a outra por dois, se triplicamos uma delas devemos dividir a outra por três e assim sucessivamente. A velocidade e o tempo são considerados grandezas inversas, pois aumentarmos a velocidade, o tempo é reduzido, e se diminuirmos a velocidade, o tempo aumenta.

Segundo Sodré (2016), “se duas grandezas x e y são inversamente proporcionais, os números que expressam essas grandezas variam na mesma razão”, isto é:

$$x \propto \frac{1}{y}$$

e, também continuando com Sodré (2016), “existe uma constante k tal que”:

$$x = k.\frac{1}{y} \Rightarrow x.y = k$$

3.2.3 Terceira Lei de Kepler

Sempre guiado pela busca de harmonia, segundo Gregorio-Hetem & Jatenco-Pereira (2011):

Kepler trabalhou durante 10 anos até apresentar a 3ª Lei: *o quadrado do período orbital dos planetas é diretamente proporcional ao cubo de sua distância média ao Sol*. Essa lei estabelece que planetas com órbitas maiores se movem mais lentamente em torno do Sol e, portanto, isso implica que a força entre o Sol e o planeta decresce com a distância ao Sol.

De acordo com Morais (2003, p. 60), “sendo T o período sideral do planeta e a o semi-eixo maior da órbita, que é igual à distância média do planeta ao Sol, temos a seguinte proporcionalidade”:

$$T^2 \propto a^3$$

Ao transformarmos uma proporcionalidade em uma equação precisamos de uma constante de proporcionalidade, a qual chamaremos de k (conhecida aqui como constante de Kepler). Sendo assim, podemos escrever a 3ª Lei da seguinte maneira:

$$T^2 = k.a^3$$

A tabela a seguir mostra como fica a 3ª Lei de Kepler para os planetas visíveis a olho nu.

Tabela 3.3: Terceira Lei de Kepler para os planetas visíveis a olho nu.

Planeta	Semi-eixo maior (a) (UA)	Período (T) (ano terrestre)	a^3	T^2
Mercúrio	0,387	0,241	0,058	0,058
Vênus	0,723	0,615	0,378	0,378
Terra	1,000	1,000	1,000	1,000
Marte	1,524	1,881	3,537	3,537
Júpiter	5,203	11,862	140,8	140,7
Saturno	9,534	29,456	867,9	867,9

Fonte: <<http://www.nasa.gov/offices/education/about/newsreleases/index.html>> (Tradução nossa)

Fonte: Acesso em 13 de fevereiro de 2016.

3.2.4 Gravitação Universal

Segundo Oliveira Filho e Saraiva (2014, pp. 86 e 87):

É óbvio que a Terra exerce uma atração sobre os objetos que estão sobre sua superfície. Newton se deu conta de que esta força se estendia até a Lua e produzia a aceleração centrípeta necessária para manter a Lua em órbita. O mesmo acontece com o Sol e os planetas. Então Newton formulou a hipótese da existência de uma força de atração universal entre os corpos em qualquer parte do Universo.

A força centrípeta que o Sol exerce sobre um planeta de massa m , que se move com velocidade v à uma distância r do Sol, é dada por:

$$F = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Assumindo neste instante uma órbita circular, que mais tarde será generalizada para qualquer tipo de órbita, o período T do planeta é dado por:

$$T = \frac{2\pi \cdot r}{v} \Rightarrow v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Pela 3ª Lei de Kepler,

$$T^2 = k \cdot a^3$$

onde a constante k depende das unidades de T e r . Temos, então, que

$$v^2 = \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{k \cdot r^3} = \frac{4\pi^2}{k \cdot r} \Rightarrow v^2 \propto \frac{1}{r}$$

Seja m a massa do planeta e M a massa do Sol. Substituindo-se esta velocidade na expressão da força centrípeta exercida pelo Sol no planeta, a força pode então ser escrita como:

$$F = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow F \propto m \cdot \frac{(\frac{1}{r})}{r} \Rightarrow F \propto m \cdot \frac{1}{r^2}$$

e, de acordo com a 3ª Lei de Newton, o planeta exerce uma força igual e contrária sobre o Sol. A força centrípeta exercida pelo planeta sobre o Sol, de massa M é dada por:

$$F \propto M \cdot \frac{1}{r^2}$$

Newton deduziu, então, que a força entre duas massas M e m é proporcional ao produto das duas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas $\frac{1}{r^2}$, mantendo-se sempre na linha que une M a m . Sendo assim, a Lei da Gravitação Universal é escrita da seguinte maneira:

$$F \propto m \cdot M \cdot \frac{1}{r^2} \Rightarrow F = k' \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

onde k' é uma constante de proporcionalidade que foi denominada como G (constante da gravitação universal).

$$F = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

e o sinal negativo é para representar que a força é atrativa.

Tanto o Sol quanto o planeta que se move em torno dele experimentam a mesma força, mas o Sol permanece aproximadamente no centro do Sistema Solar porque a massa do Sol é aproximadamente mil vezes maior que a massa de todos os planetas somados. Newton então concluiu que para que a atração universal seja correta, deve existir uma força atrativa entre pares de objetos em qualquer região do universo, e esta força deve ser proporcional a suas massas e inversamente proporcional ao quadrado de suas distâncias. A constante de proporcionalidade G depende das unidades das massas e da distância.

Exercício

Exercício retirado da Prova da Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica do ano de 2013 (Nível IV)³:

No famoso livro *O Pequeno Príncipe* de Antoine de Saint-Exupéry, o Pequeno Príncipe habita, por algum tempo, o minúsculo asteroide B-612, o qual teria, aparentemente, cerca de 1 m de diâmetro. Contudo, para que o pequeno príncipe não sinta qualquer desconforto sobre ele, o seu peso (P_A) no asteroide, deveria ser o mesmo peso (P_T) que tinha sobre a Terra, ou seja, $P_A = P_T$. Mas como você sabe o peso, $P = m \cdot g$ (m é a massa do Pequeno Príncipe e g a aceleração gravitacional local), é a resultante da força gravitacional, F_g , entre o astro e o Pequeno Príncipe, ou seja,

$$P = F_g = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2},$$

onde M é a massa e R o raio da Terra ou do asteroide e G a constante da gravitação universal.

1) Calcule a massa M do asteroide B-612 para que o Pequeno Príncipe tenha lá, o mesmo peso que aqui na Terra. Dados: Massa da Terra: $6 \cdot 10^{24}$ kg, Raio da Terra (simplificadamente): 6000 km.

Resolução: Sejam P_A e P_T o peso do príncipe no Asteroide e na Terra, M_A e R_A massa e raio do Asteroide, M_T e R_T massa e raio da Terra e m_p a massa do príncipe.

Assim,

$$P_A = P_T,$$

ou seja,

$$G \frac{M_A m_p}{R_A^2} = G \frac{M_T m_p}{R_T^2}$$

Simplificando,

$$\frac{M_A}{R_A^2} = \frac{M_T}{R_T^2},$$

³Resoluções retiradas do respectivo gabarito da prova.

temos:

$$M_A = M_T \cdot \frac{R_A^2}{R_T^2}$$

Substituindo os valores:

$$M_A = 6 \cdot 10^{24} \cdot \frac{(1/2m)^2}{(6000000m)^2} = \frac{6}{4} \cdot \frac{10^{24}}{36 \cdot 10^{12}} = \frac{1}{24} \cdot 10^{12} = 0,04167 \cdot 10^{12} = 4,167 \cdot 10^{10} kg$$

2) Use o resultado anterior e calcule quantas vezes a densidade (d_A) do asteroide B-612 é maior do que a densidade típica de uma estrela Anã Branca (d_{AB}) cuja densidade é aproximadamente $1 \cdot 10^9 \text{ kg} \cdot m^{-3}$, ou seja, calcule a razão: $\frac{d_A}{d_{AB}}$. Dado $\pi = 3$ Observação: Anãs Brancas são estrelas degeneradas que não possuem mais fusão nuclear, têm massa máxima de 1,4 vezes a Massa do Sol e diâmetro similar ao da Terra. São mantidas pela pressão de degenerescência dos elétrons. A mais próxima ao Sol é a companheira de Sirius.

Resolução: Calculando a densidade do Asteroide (M_A , V_A e d_A representam a massa, volume e a densidade do Asteroide),

$$d_A = \frac{M_A}{V_A} = \frac{M_A}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3} = \frac{4,167 \cdot 10^{10}}{\frac{4}{3} \cdot 3 \cdot (\frac{1}{2})^3} = 8,334 \cdot 10^{10} \frac{kg}{m^3}$$

Calculando a razão solicitada,

$$\frac{d_A}{d_{AB}} = \frac{8,334 \cdot 10^{10}}{1 \cdot 10^9} = 83,34$$

Comentário: Seria, portanto, impossível existir tal asteroide, pois seria 83,34 vezes mais denso do que uma estrela Anã Branca!

3.3 Primeira Lei de Kepler (Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações - Elipse)

Na primeiro tópico, foi tratado a Segunda Lei de Kepler, no qual o vetor que tem origem no Sol e indica a posição do planeta varre áreas iguais e intervalos de tempos

iguais. Aqui será mostrada a Primeira Lei de Kepler e uma análise da excentricidade da elipse.

Abordaremos o estudo de Geometria Analítica com a representação da elipse e poderemos associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa.

De acordo com o PCNEM+ (Brasil, 2002, p. 124):

A unidade Geometria Analítica tem como função tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos. O aluno da terceira série do Ensino Médio terá a oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações.

Os estudos de Kepler, segundo Horvath (2008, p. 44):

Mostraram que as órbitas supostas circulares, predição da Astronomia aristotélica eram uma hipótese muito boa, mas não completamente exata. Em particular, como será mostrado abaixo, as posições de Marte não podiam ser ajustadas por uma circunferência sem que os erros ficassem *maiores* dos que Tycho tinha calculado em suas observações. Kepler, que tinha apreciado a qualidade do trabalho do seu mestre, convenceu-se de que era impossível que ele tivesse errado tanto assim. Depois de mais de uma década, muito a contragosto e em desespero da causa, decidiu provar um ajuste com uma *elipse* em vez de uma circunferência. Os dados de Marte, e posteriormente de todos os planetas, encaixavam-se perfeitamente. Kepler conferiu que a distância dos planetas ao Sol era *variável*, e não fixa como nas órbitas circulares.

De acordo com Oliveira Filho e Saraiva (2014, p. 124):

O planeta para o qual havia o maior número de dados era Marte. Kepler conseguiu determinar as diferentes posições da Terra após cada período sideral de Marte e, assim, conseguiu traçar a órbita da Terra. Verificou que essa órbita era muito bem ajustada por um círculo excêntrico, isto é, com o Sol um pouco afastado do centro. Kepler conseguiu também determinar a órbita de Marte, mas, ao tentar, ajustá-la com um círculo, não teve sucesso. Ele continuou insistindo nessa tentativa por vários anos e, em certo ponto, encontrou uma órbita circular que concordava com as observações com um erro de 8 minutos de arco. Mas sabendo que as observações de Tycho não poderiam ter um erro desse tamanho (apesar disso significar um erro de apenas $\frac{1}{4}$ do tamanho do Sol), Kepler, com a integridade que lhe era peculiar, descartou essa possibilidade. Finalmente, passou à tentativa de representar a órbita de Marte com uma oval, e rapidamente descobriu que uma elipse (cônica já conhecida dos gregos) ajustava muito bem os dados. A posição do Sol coincidia com um dos focos da elipse. Ficou assim explicada também a trajetória quase circular da Terra, com o Sol afastado do centro.

A Primeira Lei foi enunciada por Kepler da seguinte maneira: Cada planeta move-se em trajetória elíptica, com o Sol ocupando um dos focos da elipse.

Sabendo que um dos focos da órbita do planeta é ocupado pelo Sol, o ponto da órbita (trajetória) que está mais próximo do Sol é chamado **periélio** e o que está mais afastado é chamado de **afélio**.

As órbitas dos planetas estão aproximadamente contidas em um mesmo plano, sendo o plano da órbita da Terra chamado **plano da eclíptica**. Sabe-se que também que essas órbitas são elipses de pequenas excentricidades (*achatamento*), isto é, são quase circunferências.

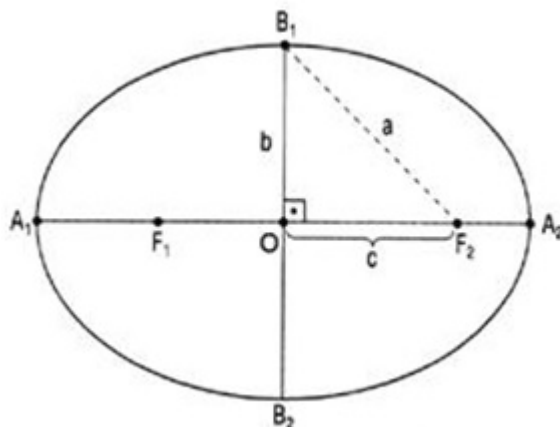
Mas o que é uma elipse?

3.3.1 Elipse

O conteúdo sobre elipse foi tratado no capítulo 2.⁴ A análise nesta seção será em relação à excentricidade.

⁴Ver o conteúdo sobre Elipse, páginas 55 a 57

Figura 3.3: Elipse.



Disponível em: <<http://www.colegioweb.com.br/estudo-das-conicas/elipse.html>>.

Como já sabemos do capítulo 2:

- $A_1 A_2$ é o eixo maior da elipse e sua medida é a soma que consta da definição (2a).
- $B_1 B_2$ é o eixo menor da elipse e sua medida é $2b$.
- O é o centro da elipse.
- Quanto maior a distância entre dois focos, maior é a excentricidade – *achatamento* - (e) da elipse. Sendo c a distância do centro a cada foco, a o semi-eixo maior, e b o semi-eixo menor, a excentricidade é definida por:

$$e = \frac{c}{a}$$

A excentricidade, de acordo com Canalle (2003, p. 2):

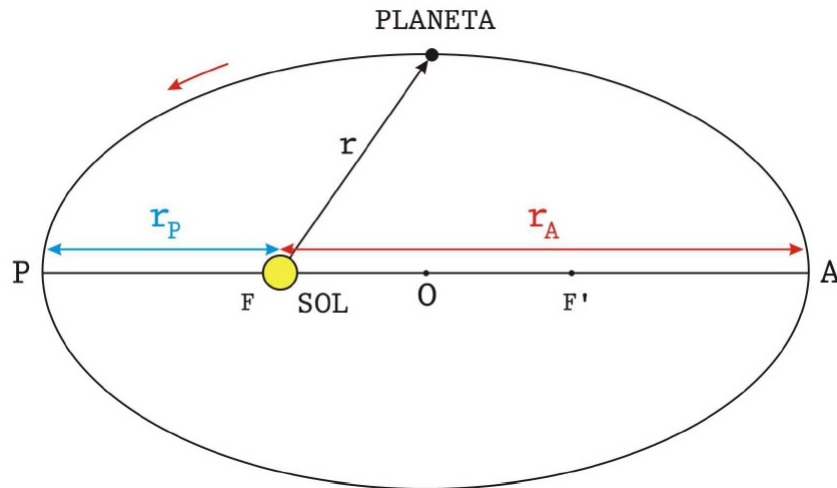
A excentricidade de uma elipse é dada por um número que varia entre 0 e 1, ou seja, $0 < e < 1$. A excentricidade será zero quando F_1 e F_2 forem coincidentes, ou seja, a distância c será igual a zero, e eles estarão exatamente no centro O da elipse e esta será chamada, neste caso particular, de círculo. No outro extremo, quando a distância entre F_1 e F_2 aumentar a tal ponto de se aproximar do comprimento do eixo maior, $2a$, da elipse, teremos a excentricidade se aproximando de 1 e a elipse será tão achatada quanto uma reta.

Notemos que o triângulo B_1OF_2 é retângulo, e que, pelo teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$. Pela definição da elipse: B_1F_2 é congruente a $OA_2 = a$.

Sendo assim:

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

Figura 3.4: Órbita de um planeta ao redor do Sol e a variação de sua distância.



Disponível em: <http://www.uranometrianova.pro.br/jornal/ca/CoelumAustrale_024.pdf>.

A distância do periélio ao foco (r_p) é⁵:

$$r_p = PF = PO - FO = a - c = a - a.e = a.(1 - e)$$

E a distância do afélio ao foco (r_a) é⁴:

$$r_a = FA = FO + OA = a + c = a + a.e = a.(1 + e)$$

Para exemplificar, Canalle (2003, p. 3) mostra-nos que:

Notemos que a excentricidade define a forma da elipse. O tamanho da elipse depende de quão grande ou pequena queremos desenhar a elipse. Ou seja, se precisarmos desenhar uma elipse de excentricidade qualquer, precisaremos escolher, **arbitrariamente**, o tamanho da elipse, logo, o comprimento do eixo maior $2a$.

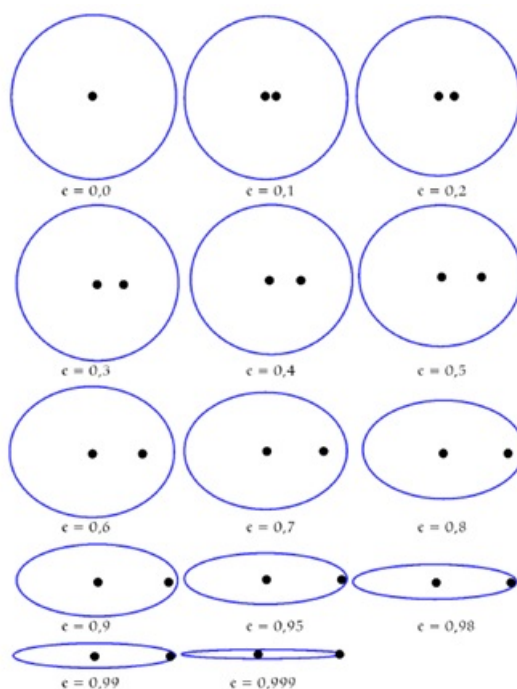
⁵Ver o exercício de Elipse em Coordenadas Polares no Capítulo 2

Para termos uma ideia da forma da elipse em função da excentricidade, foram desenhadas 14 elipses com as excentricidades das na tabela 3.4. Como normalmente queremos representar o Sol nestas elipses, o qual ocupa um dos focos, será indicada também a distância entre o centro da elipse e posição de um dos focos da elipse representada por c .

Na figura 3.5, segundo Canalle (2003, p. 3) “todas as elipse têm o mesmo comprimento para o seu eixo-maior, o qual foram escolhidos arbitrariamente como sendo igual a $4u$. A excentricidade de cada elipse está abaixo de cada uma delas”.

Olhando a figura 3.5, percebe-se que $e = 0,0$ é uma elipse particular que chamamos de círculo, pois não tem nenhum achatamento. Mas também é imperceptível qualquer achatamento para a figura com $e = 0,1$ e também é quase imperceptível qualquer achatamento para as figuras com $e = 0,2$ e com $e = 0,3$.

Figura 3.5: Desenho em escala correta de 14 elipses com as excentricidades dadas na Tabela 3.4.



Fonte: CANALLE, J.B.G. O Problema do Ensino da Órbita da Terra.

Revista Física na Escola, v.4, n.2, 2003. p. 14

Tabela 3.4: Na primeira coluna são dados os valores de 14 diferentes excentricidades e a segunda coluna as respectivas distâncias do centro da elipse a um dos seus focos.

Fonte: CANALLE, J.B.G. O Problema do Ensino da Órbita da Terra.

Revista Física na Escola, v.4, n.2, 2003. p. 14

e	c(unidade arbitrária - u)
0,000	0,00
0,100	0,20
0,200	0,40
0,300	0,60
0,400	0,80
0,500	1,00
0,600	1,20
0,700	1,40
0,800	1,60
0,900	1,80
0,950	1,90
0,980	1,96
0,990	1,98
0,999	1,99

3.3.2 A excentricidade das órbitas dos planetas

Os valores aproximados das excentricidades das órbitas dos planetas estão na Tabela abaixo. Notemos que a maior excentricidade é a da órbita do ex-planeta Plutão cujo valor é $e = 0,25$.

Tabela 3.5: Excentricidades aproximadas das órbitas dos planetas

Planeta	Excentricidade
Mercúrio	0,2
Vênus	0,007
Terra	0,02
Marte	0,09
Júpiter	0,05
Saturno	0,06
Urano	0,05
Netuno	0,09
Plutão	0,25

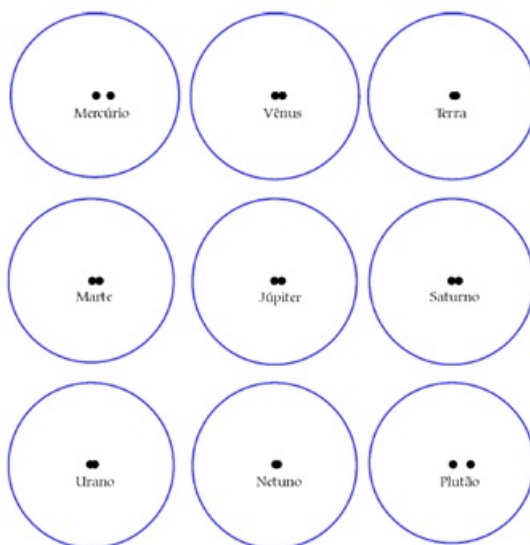
Fonte: <<http://www.nasa.gov/offices/education/about/newsreleases/index.html>>

Fonte: Acesso em 20 de fevereiro de 2016. Tradução nossa.

Ainda segundo Canalle (2003, p. 3):

A figura 3.6 mostra as elipses que representam as órbitas dos 9 planetas (naquela época) do Sistema Solar. Elas foram calculadas usando os dados da tabela 3.5. Observemos que todas as elipses da figura 3.6 possuem o eixo maior igual a $4u$, o qual foi escolhido arbitrariamente. O ponto central em cada elipse representa o centro da elipse e ponto à direita dele é um dos focos da elipse, o qual é ocupado pelo Sol. A distância entre o centro e foco está dada na tabela 3.5 e foi calculada usando a relação $c = e.a$.

Figura 3.6: Elipses das órbitas dos 9 planetas desenhadas com eixo maior de $4u$.



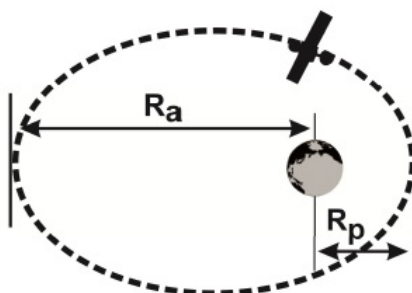
Fonte: CANALLE, J.B.G. O Problema do Ensino da Órbita da Terra.

Revista Física na Escola, v.4, n.2, 2003. p. 14

Exercício

Exercício retirado da Prova da Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica do ano de 2012 (Nível IV)⁶:

A tabela abaixo apresenta informações sobre 4 diferentes satélites lançados no ano de 2011. O apogeu (R_a) é o ponto de maior distância entre o satélite e a Terra enquanto o perigeu (R_p) representa o ponto de menor distância, sendo ambos medidos a partir do centro da Terra, conforme ilustrado na figura abaixo. Conforme pode ser observado na tabela, as trajetórias dos satélites em torno da Terra (órbitas) não são circulares, mas elípticas.



⁶Resoluções retiradas do respectivo gabarito da prova.

Dos satélites apresentados na tabela, qual deles possui a órbita mais excêntrica?

Nome do Satélite	Aplicação	R_a (km)	R_p (km)	Massa (kg)
ABS-7	Comunicações	42.148	42.137	3.500
Galileo IOV-1	GPS	29.664	29.599	700
USA-224	Militar	7.357	6.557	18.000
Jugnu	Observação da Terra	7.225	7.206	3

Resolução: Basta calcular a excentricidade (e) para cada satélite e escolher aquele de maior e . Sabemos que a excentricidade é dada por $e = \frac{c}{a}$ e observando a figura chegamos as seguintes conclusões:

- O eixo-maior da elipse (2a) é a soma da distância do apogeu com a distância do perigeu. Assim,

$$2a = R_a + R_p \Rightarrow a = \frac{R_a + R_p}{2}$$

- A distância focal da elipse (2c) é a subtração da distância do apogeu com a distância do perigeu. Assim,

$$2c = R_a - R_p \Rightarrow c = \frac{R_a - R_p}{2}$$

Logo, a excentricidade será dada por:

$$e = \frac{\frac{R_a - R_p}{2}}{\frac{R_a + R_p}{2}} = \frac{R_a - R_p}{R_a + R_p}$$

Determinaremos agora a excentricidade de cada satélite:

- $e_{ABS-7} = \frac{42148 - 42137}{42148 + 42137} = \frac{11}{84285} = 0,000131$
- $e_{GalileoIOV-1} = \frac{29664 - 29599}{29664 + 29599} = \frac{65}{59263} = 0,001097$
- $e_{USA-224} = \frac{7357 - 6557}{7357 + 6557} = \frac{800}{13914} = 0,057$
- $e_{Jugnu} = \frac{7225 - 7206}{7225 + 7206} = \frac{19}{14431} = 0,001317$

Assim, a órbita mais excêntrica é a do satélite USA-224.

3.4 Possibilidade de vida fora do Sistema Solar (Probabilidade)

O estudo sobre a possibilidade de vida fora do Sistema Solar servirá para abordarmos o conteúdo de Probabilidade que está contido no Tema Estruturador do PCNEM+ *Análise de dados*.

De acordo com o PCNEM+ (Brasil, 2002, p. 126):

(...) A Probabilidade deve ser vista, então, como um conjunto de ideias e procedimentos que permite aplicar a Matemática em questões do mundo real, mais especialmente aquelas provenientes de outras áreas. Deve ser vista também como forma de a Matemática quantificar e interpretar conjuntos de dados ou informações que não podem ser quantificados direta ou exatamente. Ela lida com dados e informações em conjuntos finitos e utiliza procedimentos que permitem controlar com certa segurança a incerteza e mobilidade desses dados.

Assim, ainda segundo o PCNEM+ (Brasil, 2002, p. 126), “será possível quantificarmos e fazermos previsões em situações aplicadas a diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolvam o pensamento probabilístico”.

De 1992 até abril de 2014 foram detectados 1696 planetas extrassolares, 1671 destes através das evidências gravitacionais pelo deslocamento Doppler nas linhas espectrais das estrelas causada pela órbita do planeta em torno da estrela o que produz o movimento da estrela em torno do centro de massa, como no caso do nosso Sol.

Segundo Oliveira Filho e Saraiva (2014, p. 169):

Desde 2004, já é possível obter imagens de planetas extrassolares diretamente, embora as estrelas em volta das quais os planetas orbitam sejam muito mais brilhantes que os planetas e, portanto, em geral, ofusca-os. Em 2009, foi possível obter a primeira imagem de um sistema planetário, com três planetas gigantes, orbitando a estrela denominada HR8799. Todos os métodos detectam mais facilmente os grandes planetas, tipo Júpiter, que não podem conter vida como a conhecemos, porque têm atmosferas imensas e de altíssima pressão sobre pequenos núcleos rochosos. Detectar planetas pequenos, como a Terra, requerem precisão maior do que a atingível pelas observações atuais, mas o satélite Kepler, por exemplo, lançado em 2009, está reduzindo este limite de detecção. Como só determinamos a massa do planeta e a distância do planeta à estrela, e em casos raros a temperatura e o raio do planeta, não podemos detectar nenhum sinal de vida.

Há algumas centenas de bilhões (10^{11}) de galáxias, cada uma contendo em média centena de bilhão de estrelas. Em todas as galáxias, há, talvez, tantos planetas quanto estrelas, $10^{11} \cdot 10^{11} = 10^{22}$, dez bilhões de trilhão. Face a estes números esmagadores, de acordo com Sagan (1980, p. 7), “qual a probabilidade que uma única estrela comum, o Sol, seja acompanhada por um planeta habitável? Por que seríamos nós, aconchegados em alguma esquina perdida do Cosmos, tão afortunados?”

A resposta pode estar na Equação de Drake, criada pelo astrofísico americano Frank Donald Drake (1930-). Em 1961, Drake era astrônomo no National Radio Astronomy Observatory, em Green Bank, Estados Unidos e um dos criadores do Projeto Ozma, precursor do SETI (sigla em inglês para Busca por Inteligência Extraterrestre), que caça sinais eletromagnéticos soltos no espaço provindo de fontes alienígenas. Essa equação enumera sete condições (probabilidades) indispensáveis para que um planeta abrigue seres inteligentes e com comunicação avançada.

Segundo Steiw (2015):

(...) Nas contas do próprio Drake, N – o número de civilizações na nossa galáxia capazes de se comunicar com a Terra – chegaria a 10 mil. Nos últimos anos, Drake passou a acreditar que esse número possa ser maior. Um dos motivos é que a ciência passou recentemente a admitir a possibilidade de que estrelas anãs vermelhas – que representam 80% do total – tenham planetas habitáveis. “Uma vez que tal entendimento é recente, com implicações que ainda precisam ser mais bem analisadas, podemos por ora apenas ‘chutar’ quanto isso aumentaria N ”, disse Drake. “É bem possível que esse número aumente em dez vezes, mas, no momento, trata-se de uma especulação.”

Há 50 anos, quando o homem ainda não havia descoberto planetas extrassolares, viajado até a Lua ou encontrado indícios de água em Marte, ele tentava estimar o número de planetas com civilizações tão avançadas quanto a nossa. Drake sabia que não havia um número exato para a questão, mas decidiu simplificar o raciocínio. O que seria necessário para a vida se desenvolver e evoluir a padrões tecnológicos semelhantes aos da Terra? A resposta está em cada uma das sete variáveis da equação, que ele apresentou.

Ainda segundo Nogueira (2014, p. 49), “em novembro de 1961, um grupo de 11 cientistas brilhantes se reuniu em Green Bank, na Virgínia Ocidental, Estados Unidos, para discutir um tema no mínimo pouco ortodoxo: *vida extraterrestre inteligente*”.

Ainda de acordo com Nogueira (2014, p. 54), “no começo da reunião, depois que os convidados se sentaram e tomaram um chá, Frank Drake foi à lousa e escreveu”:

$$N = N^* \cdot f_p \cdot n_e \cdot f_v \cdot f_i \cdot f_c \cdot T_t$$

A Equação de Drake, como acabou conhecida, foi relatada por Nogueira (2014, p. 54) como:

Uma sequência de probabilidades que ajudou - e ainda ajuda - pesquisadores ligados à busca por extraterrestres a compreender a complexidade da questão. Ela reúne, em forma matemática simples, estimativas de astronomia, biologia e sociologia. Para perceber isso, basta uma olhada no significado de cada um dos termos:

- N é o número de civilizações comunicativas na Via Láctea, a nossa galáxia.
- N^* é a taxa anual de produção de estrelas a Via Láctea.
- f_p é a fração de estrelas que têm planetas.
- n_e é o número de planetas habitáveis por sistema planetário.
- f_v é a fração de planetas habitáveis que efetivamente desenvolvem vida.
- f_i é a fração de planetas vivos que desenvolvem vida inteligente.
- f_c é a fração de planetas com vida inteligente que atingem o estágio tecnológico necessário para se comunicar por rádio com outras civilizações.
- T_t é o tempo de vida médio de uma civilização comunicativa.

“Nos dias subsequentes, Drake e seus colegas discutiram detidamente cada um dos termos. Como se podia esperar, quanto mais se avança na equação, mais complicado se torna estimar números para colocar nela.”(NOGUEIRA, 2014, p. 54)

Segundo Nogueira (2014, p. 55), o grupo se autoproclamou como “a Ordem do Golfinho - inspirado pelos trabalhos de Lilly, que sugeriam que esses cetáceos poderiam ser uma segunda espécie inteligente a emergir na Terra -, duelou com a equação em busca de uma resposta”.

Analisando termo a termo da Equação de Drake, Nogueira (2014, pp. 55 e 56) relata-nos que:

N^* é o número que causa menos controvérsias e o único que já permitia uma estimativa mais ou menos segura em 1961, pois exige basicamente dividir o total de estrelas presentes na Via Láctea pela idade da galáxia. Para aquele grupo pioneiro de cientistas, $N^* = 1$ estrela por ano.

O termo f_p era, na época, bem mais controverso, uma vez que nenhum planeta fora do Sistema Solar havia sido descoberto ainda. O grupo preferiu mais uma vez ser conservador, imaginando que apenas 20% a 50% das estrelas acabavam abrigando planetas - uma estimativa baseada na suposição de que somente estrelas solitárias, como o Sol, minoria na galáxia, tinha estabilidade suficiente para ter um sistema planetário.

Para n_e , a Ordem nem sabia por onde começar e não chegou a um consenso. Usando o exemplo da Terra, eles podiam afirmar que um planeta por sistema seria adequado, mas até cinco poderiam ter condições para a vida. Segundo o grupo, n_e ficaria em algum lugar entre 1 e 5.

O termo f_v é um valor de consenso, pois sem levar em conta quaisquer complexidades envolvidas nos processos que conduzem à origem da vida, a Ordem calçou-se no registro fóssil terrestre para fazer sua estimativa. Os sinais mais antigos de vida na Terra remontam a quase 4 bilhões de anos atrás - a mesma época em que o ambiente planetário teria se estabilizado e se tornado favorável à atividade biológica. O fato de que isso se deu com relativa rapidez fez os cientistas imaginarem que, uma vez que as condições certas se apresentam, a vida logo aparece. De forma destemida, calcularam que $f_v = 1$. Ou seja, em todos os lugares em que a vida pode surgir, ela acaba aparecendo.

O item seguinte diz respeito a vida complexa e inteligente. Enviesados pelo exemplo terrestre, que sabidamente possui uma civilização tecnológica e pode ter pelo menos mais um grupo de espécies inteligentes, os membros da Ordem do Golfinho imaginaram que a inteligência era um desfecho natural da evolução biológica. Para eles, $f_v = 1$. Otimismo a toda prova.

O termo f_c foi um dos que causaram o maior debate entre os membros do grupo. Ainda segundo Nogueira (2014, p. 56):

A história humana sugeria que a emergência de sociedades tecnológicas poderia ser um fenômeno convergente. As antigas civilizações na China, no Oriente Médio e na América apareceram independentemente e seguiram linhas gerais de desenvolvimento similares. Ainda assim, ao fim das contas elas trilharam caminhos diferentes, e não estava claro quais seriam os impulsores dessas mudanças sociais e dos progressos tecnológicos. (...) É impossível prever se uma civilização tecnológica, além de poder, decidirá efetivamente transmitir mensagem para as estrelas - um empreendimento para lá de especulativo. Por conta disso, a Ordem do Golfinho imaginou que apenas 10% a 20% de todas as civilizações tecnológicas se disporem a tentar comunicação interestelar.

Continuando a análise termo a termo da Equação de Drake, Nogueira (2014, p. 56) relata que:

Restava o último - e mais importante - fator da equação: T_t , o tempo de vida médio de uma civilização comunicativa. Isso causava imensa apreensão entre os membros da Ordem do Golfinho. Drake acreditava que o número total de civilizações estava atrelado indissolavelmente a seu tempo de vida. Se houvesse espécies inteligentes muito longevas, elas acabariam se acumulando pela galáxia, mesmo que sua ocorrência fosse bem rara. Por outro lado, se civilizações comunicativas se astrodestruíssem logo após atingir esse estágio, mesmo que elas fossem comuns, provavelmente jamais encontraríamos outra, nem estaríamos por aqui por muito tempo para procurá-las. O grupo estimou o valor de T_t entre mil e 100 milhões de anos.

Adotando os valores mais pessimistas das estimativas da Ordem do Golfinho, segundo Nogueira (2014, p. 57), temos a seguinte solução:

$$N = 1.(0, 2).1.1.1.(0, 1).1000$$

$N = 20$ civilizações comunicativas na Via Láctea.

De acordo com Steiw (2015):

Como a fórmula liberou a imaginação dos simpatizantes da teoria extraterrestre, otimistas e pessimistas resolveram apresentar as suas versões. No primeiro time, o astrônomo Carl Sagan calculou nada menos do que 1 milhão de civilizações. O escritor de ficção científica Isaac Asimov obteve 530 mil. O astrofísico Thomas R. McDonough chegou a 4 mil. No lado oposto, o psicólogo e diretor da revista *Skeptical*, Michael Shermer, arredondou as contas para apenas três civilizações avançadas. Apesar dos resultados divergentes, todos brincaram com as variáveis da equação, apoiados por suas opiniões pessoais sobre a composição do Universo. Já o escritor Michael Crichton – autor de *O Parque dos Dinossauros* – tachou a fórmula de “pseudociência”. “Ela é sem sentido e nada tem a ver com ciência. Acredito que ciência envolve a criação de hipóteses testáveis, e a Equação de Drake não pode ser testada”, declarou Crichton.

Quando diversos cientistas tentam estimar uma determinada quantidade e esse número gira entre 20 e 1 milhão, segundo Nogueira (2014, p. 56):

(...) Há de admitir que ninguém está seguro da resposta. De forma surpreendente, esse é sem dúvida um dos grandes apelos da equação de Drake. Ela não responde nada, só permite que cada um coloque suas próprias estimativas a fim de calcular o tamanho da nossa solidão cósmica. Mais que um cálculo sobre alienígenas, ela ficou famosa como uma expressão do tamanho da nossa ignorância. Apesar disso, diversos cientistas se arriscaram a realizar esse exercício desde 1961.

Exercício

Exercício retirado de Saraiva (2016)⁷.

A estimativa do número N de civilizações na nossa Galáxia pode ser discutida com o auxílio da equação de Drake, proposta pelo astrônomo Frank Drake (1930-), diretor do projeto SETI:

$$N = N^* \cdot f_p \cdot n_e \cdot f_v \cdot f_i \cdot f_c \cdot T_t$$

onde:

- N é o número de civilizações em nossa Galáxia capazes de se comunicar.
- N^* é a taxa de formação de estrelas na Galáxia.
- f_p é a fração de estrelas que têm planetas.
- n_e é o número de planetas habitáveis por sistema planetário.
- f_v é a fração de planetas habitáveis que abrigam vida.
- f_i é a fração de planetas vivos que desenvolvem vida inteligente.
- f_c é a fração de espécies inteligentes que podem e querem se comunicar.
- T_t é o tempo de vida de tal civilização.

De acordo com Saraiva (2016), entre todas essas variáveis, o único número conhecido é $N^* =$ taxa de formação de estrelas na Galáxia = 3/ano. Também sabe-se que a fração provável de estrelas que têm planetas é menor do que 0,4.

1) Usando a equação de Drake, faça uma estimativa otimista e outra pessimista do número de civilizações em nossa Galáxia que seriam capazes de fazer contato.

	N^*	f_p	n_e	f_v	f_i	f_c	T_t
Hipótese otimista							
Hipótese pessimista							

$$N_{otimista} = \text{-----}$$

⁷Disponível em <<http://www.if.ufrgs.br/fatima/trabalhos/biet.html>> Acesso em 11 de julho de 2016. Resoluções nossas.

$$N_{pessimista} = \text{-----}$$

Resposta pessoal.

2) Na nossa Galáxia existem da ordem de 10^{12} estrelas. Divida o número N estimado pelo número de estrelas na nossa Galáxia para estimar a fração de estrelas em nossa Galáxia que têm um planeta com vida inteligente capaz de fazer contato.

$$\frac{N_{otimista}}{10^{12}} = \text{-----}$$

$$\frac{N_{pessimista}}{10^{12}} = \text{-----}$$

Resposta pessoal de acordo com o N determinado no item 1.

Se no item anterior foi encontrado, por exemplo, 10^{-8} /estrela, isso significa 1 estrela com vida inteligente capaz de fazer contato em 10^8 estrelas, e portanto a distância dessa estrela é o raio da região que contém 10^8 estrelas. Ou seja, $10^{12}/N$ estrelas. A distribuição de estrelas na nossa Galáxia é aproximadamente 0,0025 estrelas/(anos-luz)³. O volume da região que contém $10^{12}/N$ estrelas é:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot d^3 (\text{anos} - \text{luz})^3 = \frac{1}{0,0025} \cdot \frac{10^{12}}{N}$$

3) Mostre que o raio (d) dessa região é aproximadamente

$$d \cong \left(\frac{400}{N} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot 10^4$$

e calcule a distância da civilização nas duas hipóteses.

$$d_{otimista} = \text{-----}$$

$$d_{pessimista} = \text{-----}$$

Resposta pessoal de acordo com o N determinado no item 1.

4) Determine o tempo que leva para fazer o contato, usando comunicação por rádio, que se desloca à velocidade da luz. Dados: velocidade = $\frac{\text{distância}}{\text{tempo}}$ e a velocidade da luz é igual a $3 \cdot 10^8$ m/s

$t_{otimista} = \text{-----}$

$t_{pessimista} = \text{-----}$

Resposta pessoal de acordo com o d determinado no item 3.

Considerações Finais

Esse estudo teve como objetivo trabalhar a integração entre a Astronomia e a Matemática a partir das relações existentes entre as ciências irmãs. As relações propostas no campo astronômico permitirão que o conhecimento matemático seja apropriado e aprendido pelos alunos.

A explicação matemática de fenômenos astronômicos será utilizada para introduzir a Astronomia na sala de aula e, dessa maneira, consolidar os conceitos matemáticos associados a esses fenômenos.

Sendo a Matemática uma construção humana, logo histórica, ela pode dar-se com o desenvolvimento de conceitos no confronto com dados experimentais e com ideias cotidianas. A relação entre conceitos matemáticos e fenômenos astronômicos faz com que possamos trabalhar o ensino de Matemática a partir de situações experimentais. Pois as Orientações Complementares não nos deixam esquecer que a prática e a experimentação devem estar presentes na ação pedagógica.

Um dos objetivos do ensino escolarizado deveria ser, antes de dar informações, o de realmente formar, no discente, o espírito crítico, o espírito científico. Uma das grandes competências que a escola deveria desenvolver no aluno seria o de torná-lo “cientista”. Mas cientista em uma visão ampla: cientista na literatura, nas artes, na linguagem, na forma de lidar com o mundo, na forma de agir. Isto é, desenvolver habilidades que o capacitassem a analisar uma informação e “descobrir” os aspectos verdadeiros e os aspectos falsos, os aspectos relevantes e os irrelevantes: buscar diferentes formas de consulta, analisar linhas de tempo, pesquisar a história. Principalmente em uma época em que a quantidade de informações via meios eletrônicos consegue ocupar uma extensão maior que a de uma galáxia, mas com profundidade menor que a largura de um dedo.

Porquanto, percebemos que cada vez mais é preciso incentivar o Ensino da Astronomia no Ensino Médio. E é preciso admitir a ampliação dos objetivos educacionais propostos nesta pesquisa, no sentido de uma aprendizagem mais significativa. Essa ampliação poderá ser feita por meio de sugestões para novos e futuros trabalhos a serem realizados sob essa temática, como:

- Montagem de oficinas e cursos de aperfeiçoamento para professores de Matemática;
- Organização de palestras e seminários que envolvam metodologias para o Ensino de Astronomia nas escolas de Ensino Médio;
- Jogos educativos com temáticas que envolvam Matemática e Astronomia.

Espera-se que esse estudo sirva de inspiração e também como um apoio pedagógico aos professores de Matemática do Ensino Médio. E que os discentes consigam aprender de uma forma multidisciplinar, ampliando seus conhecimentos através da contextualização histórica e com a relação entre a Astronomia e a Matemática.

Com isso, o ambiente escolar tornar-se-á um elemento motivador no qual não se prioriza apenas a memorização de conhecimentos acadêmicos, mas a formação de indivíduos cultural e socialmente ativos. Nesse contexto, o discente percebe o conteúdo relevante para seus objetivos e participa do processo educativo de forma responsável, desenvolvendo a capacidade de autodirigir sua aprendizagem.

O leitor interessado em conhecer ou aprofundar seus conhecimentos em Astronomia, Ensino de Astronomia para a Educação Básica e História da Astronomia, pode consultar, por exemplo, as referências:

- CANALLE, J.B.G. e MATSUURA, O.T. **Astronomia. Formação continuada de professores.** Curso Astronáutica e Ciência do Espaço. Brasília: Agência Espacial Brasileira, 2007.
- KEPLER, S.O. e SARAIVA, M. de F. O. **Astronomia e Astrofísica.** Departamento de Astronomia – Instituto de Física. Porto Alegre: UFRGS, 2014.
- VERDET, Jean-Pierre. **Uma história da Astronomia.** Tradução, Fernando Py. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1991.

e que nós nos estimulemos em publicar mais trabalhos e artigos sobre o Ensino de Astronomia e, assim, aproximarmos ainda mais os fenômenos astronômicos do ensino em todos os níveis e melhorando a formação dos professores e estudantes enquanto cidadãos.

Para que essa questão sobre mais publicações torne-se realidade, um dos trabalhos futuros será realizar um doutorado para complementar essa dissertação com os conteúdos matemáticos que faltaram e incluir atividades distintas de exercícios, como, por exemplo, o uso do laboratório de Ciências. E, assim, transformar a futura tese em um livro para os professores de Matemática e Física do Ensino Médio.

Por fim, ressaltamos a importância de ensinar Astronomia no Ensino Médio. O Ensino de Matemática deve se estender para todos os lados, ter outro alcance. Ele deve ir além do seu objetivo. Ele deve despertar a pessoa para a curiosidade científica, deve ajudar a integrar o ser humano com suas questões pessoais e que dão sentido às nossas vidas em muitos aspectos.

Referências Bibliográficas

Introdução

1. BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+ Ensino Médio) - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2006.
2. BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio + (PCNEM+): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2002.
3. BROUSSEAU, G. **Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques**. Recherches em Didactique des Mathématiques, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.
4. MORAIS, C.A.L. **A Astronomia no Ensino da Matemática. Uma proposta para o Ensino Secundário** Dissertação de Mestrado em Ensino de Astronomia. Departamento de Matemática Aplicada - Faculdade de Ciências. Porto: Universidade do Porto, 2003.
5. MOURÃO, R. R. F. (1997). **Da terra às galáxias: uma introdução à astrofísica**. Petrópolis, RJ: Ed. Vozes.
6. MOURÃO, R. R. F. (1991). Apresentação. In: J. P. VERDET (aut). Uma história da Astronomia (pp. 7-9). Tradução: Fernando Py. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor.

7. NOGUEIRA, S. e CANALLE, J. B. G. **Astronomia : ensino fundamental e médio**. Brasília : MEC, SEB ; MCT ; AEB, 2009.
8. VERDET, Jean-Pierre. **Uma história da Astronomia**. Tradução, Fernando Py. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1991.

Capítulo 1

1. ANDREOLLA, Tina. **Big Bang - Evolução de uma ideia**. Disponível em:
<<https://educacaoespacial.files.wordpress.com/2010/10/big-bang-evolucao-de-uma-ideia.pdf>> Acesso em: 03 de dezembro de 2015.
2. ARANY-PRADO, L.I. **À luz das estrelas: ciência através da Astronomia**. Rio de Janeiro: DPeA, 2006.
3. BONNET, C. **Contemplation de La Nature**. Amsterdam, 1764. Vol 1.
4. BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+ Ensino Médio) - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2006.
5. BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio + (PCNEM+): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2002.
6. CANALLE, J.B.G. e MATSUURA, O.T. **Astronomia. Formação continuada de professores**. Curso Astronáutica e Ciência do Espaço. Brasília: Agência Espacial Brasileira, 2007.
7. DE AMÔRES, E. B. e ALEMAN, I.G. **Galáxias - Redshift e Lei de Hubble**. São Paulo: IAG-USP. Disponível em:
<<http://www.telescopiosnaescola.pro.br/hubble.pdf>>. Acesso em: 06 de outubro de 2015.

8. ERA comum. In: Wikipédia: a enciclopédia livre.
Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Coordenadas_polares>
Acesso em: 14 out 2015.
9. FERNANDES, J. Disponível em:
<<http://www.mat.uc.pt/helios/Mestre/H34bode.htm>>. Acesso em: 18 de dezembro de 2015.
10. GREGORIO-HETEM e JATENCO-PEREIRA. **Observatórios Virtuais – Fundamento de Astronomia** Instituto de Astronomia e Geofísica. São Paulo: USP, 2011. Cap.10.
11. HORVATH, J.E. **O ABCD da Astronomia e Astrofísica**. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2008.
12. LOPES, R.J. **Os 11 maiores mistérios do Universo**. São Paulo: Ed. Abril, 2014.
13. MORAIS, C.A.L. **A Astronomia no Ensino da Matemática. Uma proposta para o Ensino Secundário** Dissertação de Mestrado em Ensino de Astronomia. Departamento de Matemática Aplicada - Faculdade de Ciências. Porto: Universidade do Porto, 2003.
14. MUNARETTO, F. Disponível em:
<<http://www.ibahia.com/a/blogs/estrelas/2014/01/29/magnitude-das-estrelas-2/>>. Acesso em: 05 de junho de 2016.
15. NIETO, M.M. **The Titius-Bode Law of Planetary Distances: Its History and Theory**. New Mexico: Pergamom Press, 1972.
16. OBA - Olimpíada Brasileira de Astronomia. Provas e Gabaritos.
Disponível em: <<http://www.oba.org.br/site/index.php>> Acesso: em 22 de novembro de 2015.
17. OLIVEIRA FILHO, K.S. e SARAIVA, M.F.O. **Astronomia e Astrofísica**. Departamento de Astronomia – Instituto de Física. Porto Alegre: UFRGS, 2014.

18. OLIVEIRA, N. **Roteiro sobre espectros de absorção da disciplina Estrutura da Matéria I**. Departamento de Física do Estado Sólido – Instituto de Física: UFBA, 2002.
19. O projeto astroinfo. Disponível em:
<https://docs.kde.org/trunk5/pt_BR/kdeedu/kstars/ai-magnitude.html>
Acesso em: 30 de maio de 2016.
20. PLACCO, V. Disponível em:
<<https://cafeconciencia.wordpress.com/2009/08/29/hiparco-pogson-e-as-magnitudes/>>. Acesso em: 16 de junho de 2016.
21. SILVA, Paulo Soares Da. **A Lei de Hubble e expansão do Universo**. Brasil Escola: <<http://brasilecola.uol.com.br/fisica/a-lei-hubble-expansao-universo.htm>>
Acesso em 14 de dezembro de 2015.
22. STWEART, Ian. **Em busca do infinito: uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos**. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.
23. VERDET, Jean-Pierre. **Uma história da Astronomia**. Tradução, Fernando Py. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1991. VARELLA, I.G. - A Sequência de Titius-Bode e Outras Sequências - Planet. SP - 1991
24. <<http://www.if.ufrgs.br/fis02001/aulas/cosmo2.html>>. Acesso em: 20 de novembro de 2015.
25. <<http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2012/03/descoberta-de-outros-planetase-lei-de.html>>. Acesso em: 18 de dezembro de 2015.
26. <<http://saladeprofessor.tvescola.org.br/fasciculos/ano2/s21/>>. Acesso em 18 de dezembro de 2015.
27. <<http://www.infoescola.com/matematica/sequencias/>>. Acesso em 02 de janeiro de 2016.

28. <<https://sites.google.com/site/projetoerato/get-started>>. Acesso em 15 de março de 2016.
29. <<http://brasilecola.uol.com.br/fisica/a-lei-hubble-expansao-universo.htm>>. Acesso em 15 de março de 2016.

Capítulo 2

1. A ESFERA na geometria espacial. Disponível em: <<http://www.todamateria.com.br/a-esfera-na-geometria-espacial/>> Acesso em 08 de janeiro de 2016.
2. ALVES, Luciano Calaça. **Segunda Lei de Kepler**. Mundo Educação. Disponível em: <<http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/segunda-lei-kepler.htm>> Acesso em 21 de julho de 2016.
3. BEHLING, Roger **A equação de Kepler por Bessel e Fourier**. Trabalho de conclusão de curso. Departamento de Matemática - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2004.
4. BOCZKO, Roberto. **Conceitos de Astronomia**. São Paulo: Edgard Blücher, 1984.
5. BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+ Ensino Médio) - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2006.
6. BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio + (PCNEM+): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2002.
7. CANALLE, J.B.G. e MATSUURA, O.T. **Astronomia. Formação continuada de professores**. Curso Astronáutica e Ciência do Espaço. Brasília: Agência Espacial Brasileira, 2007.

8. COORDENADAS polares. In: Wikipédia: a enciclopédia livre.
Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Coordenadas_polares>
Acesso em: 12 jan 2016.
9. CHAPMAN, C.R. e MORRISON, D. **Impacts on Earth by Asteroids and Comets**. Tucson-USA: Nature Publishing Group, n° 367, pp. 33–40, 06 de janeiro de 1994.
10. COSTA, J.R.V. **O Evento Tunguska. Astronomia no Zênite, jun. 2008**.
Disponível em: <<http://www.zenite.nu/o-evento-tunguska>> Acesso em: 30 de novembro de 2015.
11. FRENSEL, K. e DELGADO, J. **Geometria Analítica 2 - Aula 4**. Disponível em: <http://www.professores.uff.br/katia_frensel/aulasga2/ga2-aula4.pdf> Acesso em: 22 de fevereiro de 2016.
12. FRENSEL, K. e DELGADO, J. **Geometria Analítica 2 - Aula 18**. Disponível em: <http://www.professores.uff.br/katia_frensel/aulasga/aula18.pdf> Acesso em: 22 de fevereiro de 2016.
13. IME - USP-SP. **Cálculo Diferencial e Integral - MA1351 e MA1352**. Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/trigonometricas/popups/funcoes_trigon.htm>. Acesso em: 12 de abril de 2016.
14. LEITE, B. e WINTHER, O. **Fim do milênio: uma história dos calendários, profecias e catástrofes cósmicas**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1999.
15. MARAN, Stephen P. **Astronomia para leigos**. Rio de Janeiro: Alta Books, 2011. pp. 23-26.
16. MORAIS, C.A.L. **A Astronomia no Ensino da Matemática. Uma proposta para o Ensino Secundário** Dissertação de Mestrado em Ensino de Astronomia. Departamento de Matemática Aplicada - Faculdade de Ciências. Porto: Universidade do Porto, 2003.
17. OBA - Olimpíada Brasileira de Astronomia. Provas e Gabaritos.

Disponível em: <<http://www.oba.org.br/site/index.php>> Acesso: em 13 de outubro de 2015.

18. OLIVEIRA FILHO, K.S. e SARAIVA, M.F.O. **Astronomia e Astrofísica**. Departamento de Astronomia – Instituto de Física. Porto Alegre: UFRGS, 2014.

19. SILVA, Marcos Noé Pedro Da. **Lei do cosseno**. Brasil Escola.

Disponível em: <<http://brasilescola.uol.com.br/matematica/lei-coseno.htm>>

Acesso em 12 de janeiro de 2016.

20. UNIP/Objetivo. **Semelhança de triângulos**.

Disponível em: <<http://conteudoonline.objetivo.br/Conteudo/Index/1755?token=5%2f2Yd2%2bzzv%2f29umTApxi0Q%3d%3d>>

Acesso em: 20 de março de 2016.

21. <<http://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcoes-periodicas.htm>>. Acesso em: 12 de abril de 2016.

22. <<http://traprendizado.blogspot.com.br/2011/08/fenomenos-periodicos.html>>. Acesso em: 12 de abril de 2016.

23. <<https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96666/Roger.pdf?sequence=1/>>. Acesso em: 10 de abril de 2016.

Capítulo 3

1. A HARMONIA do universo de johannes kepler.

Disponível em: <<http://www.cdcc.usp.br/cda/sessao-astronomia/2009/a-harmonia-do-universo-de-johannes-kepler-28-02-2009.doc>> Acesso em 11 de outubro de 2015.

2. ALVES, Luciano Calaça. **Segunda Lei de Kepler**. Mundo Educação.

Disponível em: <<http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/segunda-lei>>

kepler.htm>

Acesso em 21 de julho de 2016.

3. BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+ Ensino Médio) - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2006.
4. BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio + (PCNEM+): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2002.
5. BRUSKIEWICH, Patrick. **Johannes Kepler, The Keplerian Revolution and his Three Planetary Laws**. Volume Five: The New Mathematics For the Millions. Vancouver, BC, Canada, 2013.
6. CANALLE, J.B.G. **O Problema do Ensino da Órbita da Terra**. Revista Física na Escola, v.4, n.2, 2003.
Disponível em: <<http://www.sbfisica.org.br/fne/Vol4/Num2/v4n2a06.pdf>>
Acesso em: 11 de outubro de 2015.
7. HORVATH, J.E. **O ABCD da Astronomia e Astrofísica**. São Paulo: Editora da Física, 2008.
8. GIMENEZ, Carmem S. C. **Cálculo I - 2.ed.** - Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2011.
9. GREGORIO-HETEM & JATENCO-PEREIRA. **Observatórios Virtuais – Fundamento de Astronomia** Instituto de Astronomia e Geofísica. São Paulo: USP, 2011. Cap. 1.
10. LEIS de Kepler. **Grupo de Ensino de Física da Universidade Federal de Santa Maria**.
Disponível em: <<http://coral.ufsm.br/gef/Dinamica/dinami14.pdf>>
Acesso em: 11 de julho de 2016.

11. LIMA, Elon Lages. **Temas e problemas**. 1.ed. SBM, 2001.
12. MORAIS, C.A.L. **A Astronomia no Ensino da Matemática. Uma proposta para o Ensino Secundário** Dissertação de Mestrado em Ensino de Astronomia. Departamento de Matemática Aplicada - Faculdade de Ciências. Porto: Universidade do Porto, 2003.
13. NOGUEIRA, Salvador. **Extraterrestres**. São Paulo: Abril, 2014.
14. OBA - Olimpíada Brasileira de Astronomia. Provas e Gabaritos.
Disponível em: <<http://www.oba.org.br/site/index.php>> Acesso: em 05 de setembro de 2015.
15. OLIVEIRA FILHO, K.S. e SARAIVA, M.F.O. **Astronomia e Astrofísica**. Departamento de Astronomia – Instituto de Física. Porto Alegre: UFRGS, 2014.
16. O MENSAGEIRO das estrelas.
Disponível em: <<http://messageirodasestrelas.blogspot.com.br/2009/12/johannes-kepler.html>> Acesso em 11 de outubro de 2015.
17. SAGAN, C. **Cosmos**. New York: Random House, 1980.
18. SARAIVA, M. F. O.
Disponível em: <<http://www.if.ufrgs.br/fatima/trabalhos/biet.html>>
Acesso em 11 de julho de 2016.
19. SODRÉ, Ulysses. **Aplicações das Razões e Proporções**.
Disponível em: <<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/razoes/razoes-aplic.htm>>
Acesso em 30 de junho de 2016.
20. SILVA, Marcos Noé Pedro Da. “Proporcionalidade entre Grandezas”; Brasil Escola.
Disponível em:
<<http://brasilecola.uol.com.br/matematica/proporcionalidade-entre-grandezas.htm>> Acesso em 28 de abril de 2016.

21. STEIW, Leandro. Disponível em: <<http://super.abril.com.br/tecnologia/ele-sao-quantos>>. Acesso em 16 de dezembro de 2015
22. VARELLA, I.G. **Órbitas Planetárias e Leis de Kepler**. Jornal pessoal de Astronomia, Física e Matemática, *Coelum Australe*, São Paulo: Setembro, 2012. Disponível em:
<http://www.uranometrianova.pro.br/jornal/ca/CoelumAustrale_024.pdf>
Acesso em: 20 de novembro de 2015.
23. VERDET, Jean-Pierre. **Uma história da Astronomia**. Tradução, Fernando Py. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1991.
24. <<http://www.colegioweb.com.br/estudo-das-conicas/elipse.html#ixzz3uxLSbwQt>>. Acesso em 19 de dezembro de 2015.