



Teorema de Casey: Uma
generalização do
Teorema de Ptolomeu para
quadriláteros inscritíveis

Eduardo Alexandre da Silva

RECIFE
Novembro de 2016

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Teorema de Casey: Uma generalização do Teorema de Ptolomeu para quadriláteros inscritíveis

Eduardo Alexandre da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT DM-UFRPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera

RECIFE
Novembro de 2016

**Teorema de Casey: Uma generalização do
Teorema de Ptolomeu para
quadriláteros inscritíveis**

por

Eduardo Alexandre da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - DM - UFRPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria.

Aprovada por:

Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera - DM-UFRPE (Orientador)

Prof. Dr. Ricardo Nunes Machado Júnior - DM-UFRPE

Prof. Dr. Claudio Tadeu Cristino - DEINFO-UFRPE

11/2016

*Dedico este trabalho a Deus, sem o qual eu não conseguiria nada, e à
minha esposa e aos meus filhos, meus maiores incentivadores.*

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, por ter me dado forças e todas as outras coisas necessárias ao cumprimento de mais uma etapa da minha vida.

Agradeço a minha esposa, Ítala Rose, que me incentivou e apoiou em todos os momentos deste curso.

Aos meus filhos, Eduardo, Giovanna, Gabriella e Hanny, por entenderem a minha ausência e me apoiarem durante a realização deste aperfeiçoamento.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera, que, com toda sua dedicação e simplicidade, fez comentários e sugestões muito relevantes ao meu trabalho.

Aos meus colegas da turma do PROFMAT que, nos estudos em grupo, foram, de certa forma, incentivadores para a conclusão de mais essa etapa. Em especial a Jaildo e sua esposa, Rosemary, Felipe, Raul, Cícero, Aliomar e Eduardo Beltrão que, com toda sua dedicação e presteza, foi peça fundamental na confecção deste trabalho.

Resumo

Este trabalho apresenta em seu conteúdo central uma generalização do Teorema de Ptolomeu publicada pela primeira vez no ano de 1866 por John Casey, matemático irlandês. Esse Teorema, denominado Teorema de Casey, está sendo apresentado nesse trabalho com suas demonstrações detalhadas, separadas em duas situações, com muitas imagens para facilitar o entendimento do leitor. Também apresenta uma demonstração do Teorema de Ptolomeu, da desigualdade de Ptolomeu, bem como uma aplicação destes, o Ponto de Fermat e, aplicações na resolução de alguns problemas de olimpíadas de matemática, assim como alguns teoremas, axiomas e propriedades da Geometria Euclidiana Plana, os quais são utilizados nas demonstrações dos teoremas centrais do trabalho.

Palavras-chave: Teorema, Ptolomeu, Casey.

Abstract

This work shows in its main content a generalization of Ptolomy's Theorem first published in 1866 by John Casey, an Irish mathematician. This theorem denominated Casey's Theorem is being presented in this work with its detailed demonstrations, separated in two situations, with a lot of images to facilitate the reader's comprehension. It also presents a demonstration of Ptolomy's Theorem, several applications when solving some problems of Mathematics Olympiad, as well as some theorems, axioms and properties of Plane Euclidian Geometry, which are used in the demonstrations of the main theorems of this work.

Key words: Ptolomy, Casey.

Lista de Figuras

1.1	Feixe de retas paralelas sobre duas secantes	12
1.2	Paralela a um dos lados de um triângulo	13
1.3	Semelhança de triângulos	13
1.4	Teorema de Pitágoras	14
1.5	ângulos de um triângulo	15
1.6	ângulos na circunferência	16
1.7	Relações métricas na circunferência	17
1.8	Segmentos tangentes	18
1.9	Lei dos senos	18
1.10	Lei dos cossenos	18
1.11	Teorema 1.11	19
1.12	Teorema 1.12	19
2.1	Demonstração da Proposição 1 (parte 1)	21
2.2	Demonstração da Proposição 1 (parte 2)	21
2.3	Quadrilátero inscrito	22
2.4	Quadrilátero inscrito com C interior à circunferência	23
2.5	Quadriláteros inscritos com C exterior à circunferência	23
2.6	Quadriláteros inscritos II	24
2.7	Quadriláteros inscritos III	24
2.8	Exemplo 1	24
2.9	Problema 2.1	25
2.10	Teorema de Hiparco	26
2.11	Triângulo órtico $H_aH_bH_c$	26
2.12	Quadriláteros circunscritos	27
2.13	Quadriláteros circunscritos. CD não intersecta a circunferência	28
2.14	Quadriláteros circunscritos. CD não intersecta a circunferência	29
2.15	Quadriláteros circunscritos. CD não intersecta a circunferência	29
2.16	Problema 2.2	30
2.17	Problema 2.2, parte 1	30
2.18	Problema 2.2, parte 2	31

3.1	Teorema de Ptolomeu	34
3.2	Recíproca do Teorema de Ptolomeu	35
3.3	Desigualdade de Ptolomeu	36
3.4	Problema 3.1	37
3.5	Problema 3.2	38
3.6	Problema 3.3	39
3.7	Problema 3.4	40
3.8	Resolução Geométrica do Problema de Fermat, proposta por Torricelli . . .	41
3.9	O ponto de Fermat	42
3.10	$\triangle AFC \cong \triangle ABE$ e Quadriláteros $APBF$ e $APCE$ inscritíveis	42
3.11	Retas pelos vértices do triângulo ABC dividem o plano em sete regiões . .	43
3.12	Para $Q \in R_7$, temos $d(C) < d(Q)$	43
3.13	Para $Q \in R_4$, temos $d(Q') < d(Q)$	44
3.14	Para pontos Q sobre ou no interior ao triângulo ABC tem-se $d(P) \leq d(Q)$	45
4.1	Lema 1	48
4.2	Lema 2	49
4.3	Visualização geral do caso 1 do Teorema de Casey	51
4.4	Visualização geral do caso 2 do Teorema de Casey	52
4.5	Problema 4.1	53
4.6	Problema 4.2	54
5.1	Problema 5.1	57
5.2	Problema 5.2	58
5.3	Problema 5.3	59
5.4	Problema 5.4	60
5.5	Solução do problema 5.4	60
5.6	Solução do problema 5.5	62
5.7	Problema 5.6	62
5.8	Solução do problema 5.6	62
5.9	Solução do problema 5.7	64
5.10	Problema 5.8	65
5.11	Aplicação 1	65
5.12	Aplicação 2	66
5.13	Aplicação 3	67
5.14	Aplicação 4	67

Sumário

Introdução	10
1 Preliminares	12
2 Quadriláteros	20
2.1 Generalidades	20
2.2 Quadriláteros Inscritíveis	22
2.3 Quadriláteros Circunscritíveis	27
3 O Teorema de Ptolomeu	33
3.1 Ptolomeu	33
3.2 O Teorema de Ptolomeu	34
3.3 Problemas	37
3.4 O Ponto de Fermat	40
4 Generalização do Teorema de Ptolomeu	47
4.1 Casey	47
4.2 O Teorema de Casey	48
4.3 Problemas	52
5 Problemas e Aplicações	57
5.1 Problemas	57
5.2 Aplicações	65
Conclusão	68
Referências Bibliográficas	68
Referências Bibliográficas	69

Introdução

Uma divisão básica da Matemática, que é apresentada aos estudantes do Ensino Fundamental e Médio de nossas escolas, é Aritmética, Álgebra e Geometria. Esse trabalho contemplará essa última parte, a saber: Geometria. E desta, abordar-se-ão alguns tópicos da Geometria Euclidiana Plana.

A Geometria Euclidiana plana, apresentada nos ensinamentos fundamental e médio, é, de certa forma, abordada como conteúdo das últimas unidades do ano letivo. Muito embora já haja alguns autores e professores que tenham demonstrado uma preocupação em trabalhar esses conceitos, ao longo de todo o ano, ainda encontramos quem trabalhe apenas o nome do teorema, o resultado e alguns exemplos.

Dessa forma, o estudo da geometria com todos os seus teoremas, axiomas, postulados e propriedades são ministrados, na maioria das vezes, de forma rápida e muito resumida, de modo a evitar aspectos históricos e demonstrações. Assim, apresentamos nesse trabalho, uma contribuição para o estudo e ensino da Geometria Euclidiana Plana.

No primeiro capítulo, contemplar-se-ão, sem as respectivas demonstrações, alguns teoremas, axiomas e propriedades, que serão usados nas demonstrações centrais, como resultados auxiliares no desenvolvimento desse trabalho.

Já no segundo capítulo, apresentaremos as propriedades dos quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis, um resultado interessante neste capítulo é o Teorema de Pitot. Suas demonstrações e algumas aplicações, os quais envolverão resoluções de problemas apresentados em polos de preparação para olimpíadas de matemática.

No terceiro capítulo, por sua vez, será contemplado o Teorema de Ptolomeu, a sua demonstração e algumas aplicações. Também apresentamos a desigualdade de Ptolomeu e uma aplicação interessante: o Ponto de Fermat.

No quarto capítulo, apresentamos a generalização do Teorema de Ptolomeu, a saber, o Teorema de Casey, bem como suas demonstrações nos respectivos casos. Dessa forma, o conteúdo deste capítulo será o tema central deste trabalho.

Outrossim, no quarto capítulo, serão abordados alguns exemplos resolvidos, cujos utilizarão o Teorema de Casey.

No quinto e último capítulo deste trabalho, estamos apresentando alguns problemas e algumas aplicações relacionados com os teoremas que envolvem quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis, em especial o Teorema de Ptolomeu.

Dessa maneira, através deste trabalho, queremos dar uma contribuição ao processo de ensino de Geometria Euclidiana Plana.

Capítulo 1

Preliminares

Neste Capítulo está apresentado os conceitos, teoremas e propriedades que serão utilizados nas demonstrações dos teoremas centrais deste trabalho, cujo público alvo são alunos e professores do ensino médio. Portanto, o conteúdo a ser percorrido é simplesmente apresentado e utilizado como suporte para os outros capítulos, acreditando-se que sejam de conhecimento do público para o qual esse trabalho fora pensado e escrito. As referências utilizadas neste Capítulo são [1],[4],[7].

Axioma 1.1 (Axioma V de Euclides). *Por um ponto fora de uma reta m pode-se traçar uma única reta paralela a m .*

Teorema 1.1. (Teorema de Tales) *Um feixe de retas paralelas determina sobre duas secantes quaisquer segmentos proporcionais. Ou seja, se as retas a , b e c são paralelas,*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

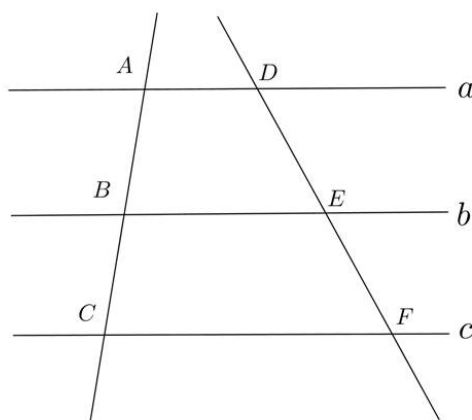


Figura 1.1: Feixe de retas paralelas sobre duas secantes

Teorema 1.2. (Aplicação do Teorema de Tales nos Triângulos) *Toda paralela a um dos lados de um triângulo determina um outro triângulo de lados respectivamente proporcionais ao primeiro. Ou seja, quando $DE \parallel BC$,*

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{MN}{BC}.$$

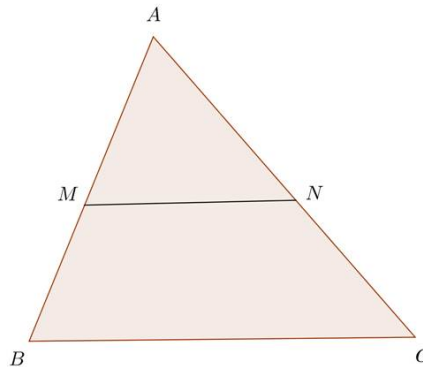


Figura 1.2: Paralela a um dos lados de um triângulo

Definição 1.1. *Dizemos que dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais. Assim, se os triângulos ABC e DEF são dois triângulos semelhantes e se A corresponde a D , B corresponde a E e C corresponde a F , então valem as relações:*

$$\hat{A} \equiv \hat{D}, \hat{B} \equiv \hat{E}, \hat{C} \equiv \hat{F} \quad e \quad \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}.$$

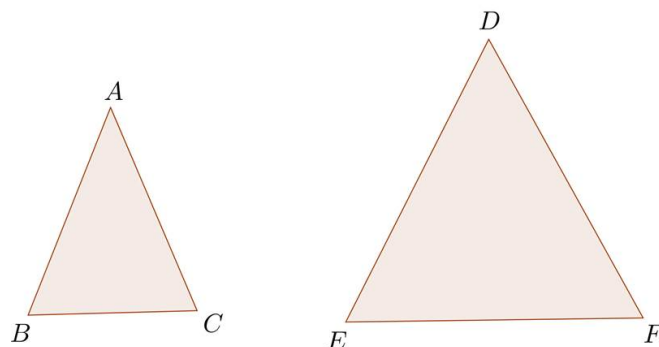


Figura 1.3: Semelhança de triângulos

Existem três casos de semelhança de triângulos.

Teorema 1.3. (1º caso de semelhança) *Dado os dois triângulos ABC e DEF , se $\hat{A} \equiv \hat{D}$ e $\hat{B} \equiv \hat{E}$, então ABC e DEF são semelhantes.*

Teorema 1.4. (2º caso de semelhança) *Se, em dois triângulos ABC e DEF , tem-se $\hat{A} \equiv \hat{D}$ e $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$, então ABC e DEF são semelhantes.*

Teorema 1.5. (3º Caso de semelhança) *Se, em dois triângulos ABC e DEF , tem-se $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$, então ABC e DEF são semelhantes.*

Estes três casos de semelhança de triângulos também são chamados, respectivamente, por *AA*, *LAL* e *LLL*.

O seguinte teorema é um dos mais importantes e úteis na Geometria Euclidiana Plana, levando o nome do grande geômetra da Grécia Antiga.

Teorema 1.6. (Teorema de Pitágoras) *Em todo triângulo retângulo (triângulo que possui um ângulo reto), o quadrado do comprimento da hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto) é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos (lados opostos aos ângulos agudos do triângulo retângulo). Isto é,*

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

sendo a , b e c as medidas da hipotenusa e dos catetos, respectivamente.

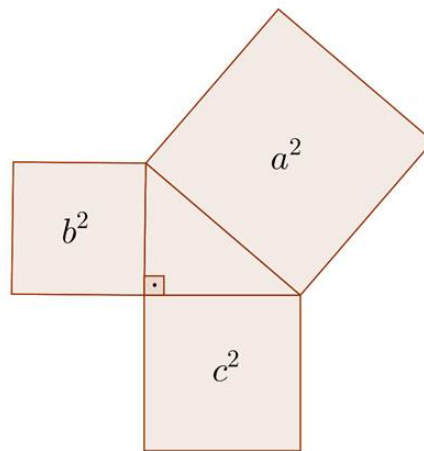


Figura 1.4: Teorema de Pitágoras

Teorema 1.7. (Ângulos de um Triângulo)

a) *A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° . Na Figura (1.5),*

$$\hat{BAC} + \hat{ABC} + \hat{ACB} = 180^\circ.$$

b) *A medida do ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele. Na Figura (1.5),*

$$\hat{DCA} = \hat{BAC} + \hat{ABC}.$$

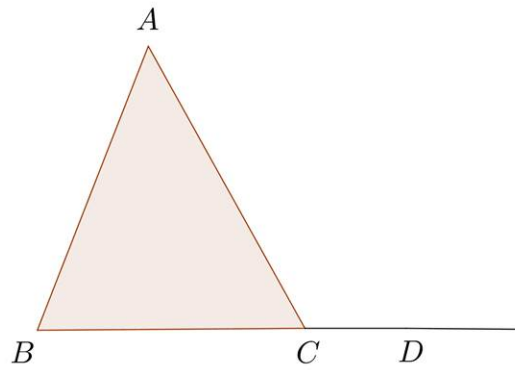


Figura 1.5: ângulos de um triângulo

Teorema 1.8. (Desigualdade Triangular) *A medida do lado de um triângulo é menor que a soma das medidas dos outros dois lados. Isto é, sendo ABC o triângulo, então*

$$AB < BC + AC \quad BC < AB + AC \quad AC < AB + BC$$

Como vamos trabalhar com quadriláteros e circunferências, vale lembrar algumas definições. Assim, relacionaremos, agora, ângulos cujos lados têm, cada um, no mínimo, um ponto de interseção com a circunferência dada. Queremos determinar a relação entre a medida desses ângulos e as medidas angulares dos arcos determinados pelos mesmos, na circunferência dada.

Definição 1.2. (Ângulos na Circunferência):

- a) **Ângulo Central:** *um ângulo é chamado central em uma circunferência se o seu vértice for o centro da mesma (Figura 1.6-A).*
- b) **Ângulo Inscrito:** *um ângulo é denominado inscrito em uma circunferência se o seu vértice pertence à mesma e seus lados forem secantes a ela (Figura 1.6-B).*

Numa circunferência existem ainda dois outros ângulos, denominados ex-inscritos interno e externo:

- c) **Ângulo Ex-Inscrito Interno ou Excêntrico Interno:** *ângulos cujos vértices são pontos interiores à circunferência (Figura 1.6-C).*
- d) **Ângulo Ex-Inscrito Externo ou Excêntrico Externo:** *ângulos cujos vértices são pontos exteriores à circunferência (Figura 1.6-D).*

Teorema 1.9. (Ângulo Central) *O Ângulo central possui medida igual a $\alpha = \widehat{AB}$*

Teorema 1.10. (Ângulo Inscrito) *A medida do ângulo inscrito é igual à metade da medida do arco por ele delimitado, como mostra a relação*

$$\beta = \frac{\widehat{CD}}{2}.$$

Teorema 1.11. (Ângulo Ex-Inscrito Interno ou Excêntrico Interno) *A medida do ângulo excêntrico interno é dada por*

$$\theta = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}.$$

Teorema 1.12. (Ângulo Ex-Inscrito Externo ou Excêntrico Externo) *A medida do ângulo excêntrico externo é dada por*

$$\varphi = \frac{\widehat{MN} - \widehat{PQ}}{2}.$$

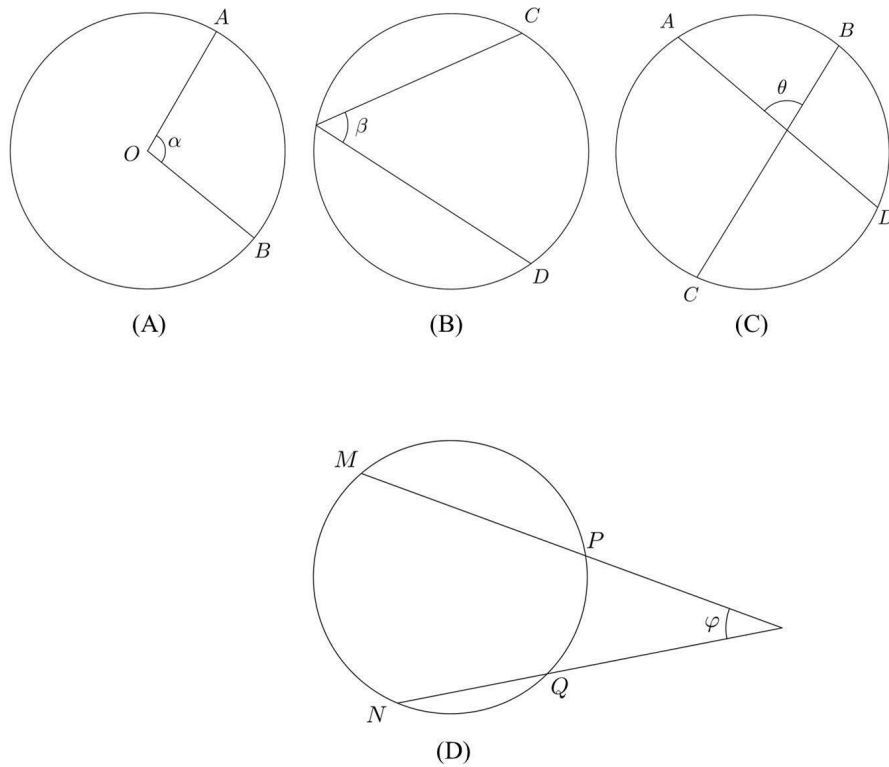


Figura 1.6: ângulos na circunferência

Vamos relacionar agora os segmentos formados por retas tangentes e secantes à circunferência.

Teorema 1.13. (Relações Métricas na Circunferência):

- a) Se duas secantes a uma circunferência concorrem em um ponto P interior à mesma, temos (Figura 1.7-A)

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD,$$

e, no caso de P ser exterior à circunferência, temos (Figura 1.7-B)

$$RS \cdot RT = RU \cdot RV.$$

- b) Se A é um ponto exterior a uma circunferência, \overline{ACD} uma secante qualquer e \overline{AB} o segmento da tangente traçada deste ponto à mesma, então (Figura 1.7-C)

$$(AB)^2 = AC \cdot AD.$$

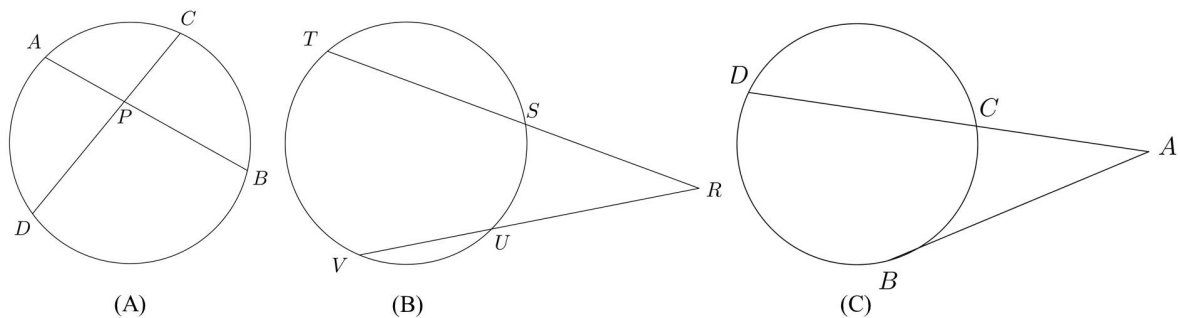


Figura 1.7: Relações métricas na circunferência

Uma propriedade muito simples, mas muito usada nas demonstrações é a seguinte:

Proposição 1.1. (Segmentos Tangentes) Se de um ponto P , exterior a uma circunferência, traçamos os segmentos PA e PB , tangentes à circunferência nos pontos A e B , respectivamente, então

$$PA = PB.$$

Duas leis que serão utilizadas nas demonstrações e/ou aplicações são:

Teorema 1.14. (Lei dos Senos) Os lados de um triângulo são proporcionais ao seno dos ângulos opostos na mesma razão do diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo. Na Figura 1.9,

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} = 2R.$$

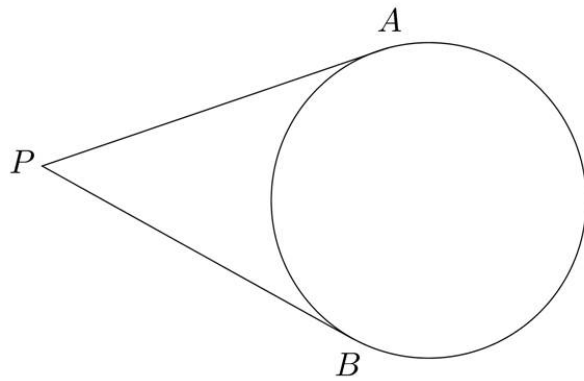


Figura 1.8: Segmentos tangentes

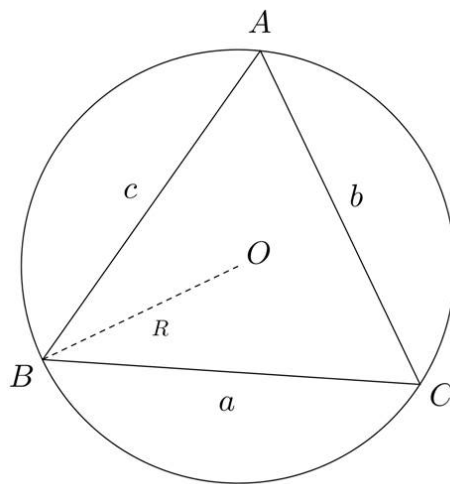


Figura 1.9: Lei dos senos

Teorema 1.15. (Lei dos Cossenos) *Em um triângulo qualquer, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois menos o dobro do produto entre esses dois lados e o cosseno do ângulo formado entre eles. Na Figura 1.10,*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha.$$

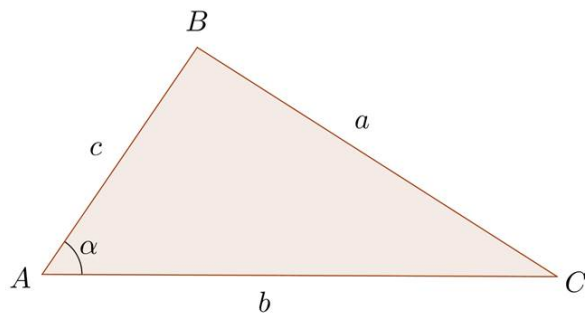


Figura 1.10: Lei dos cossenos

Teorema 1.16. *A área de um triângulo inscrito numa circunferência de raio R , sabendo que as medidas dos lados do triângulo ABC são $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$, é igual a*

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

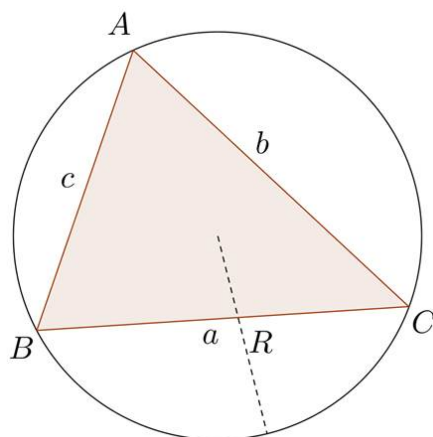


Figura 1.11: Teorema 1.11

Teorema 1.17 (da Bissetriz interna e recíproco). *A bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos outros dois lados. Isto é, se ABC é o triângulo e AD é a bissetriz do ângulo A sendo D um ponto do lado AC , então:*

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad (1.1)$$

Reciprocamente, se AD é ceviana do triângulo ABC que satisfaz a relação (1.1), então AD é a bissetriz do ângulo A .

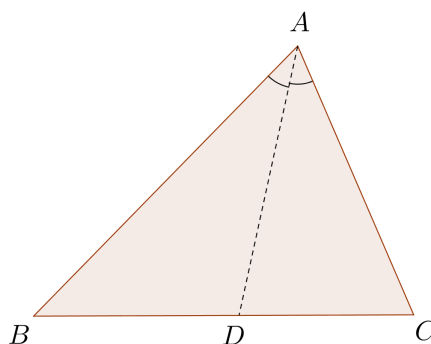


Figura 1.12: Teorema 1.12

Assim, após apresentados conceitos, teoremas e propriedades, que servirão de embasamento para os capítulos posteriores, apresentar-se-ão, no próximo capítulo, resultados, referentes a quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis cujos mesmos serão utilizados, de forma mais recorrente no Teorema de Ptolomeu e Teorema de Casey.

Capítulo 2

Quadriláteros

Neste Capítulo serão estudadas algumas propriedades e resultados sobre quadriláteros (polígonos de quatro lados), com enfoque especial aos quadriláteros convexos.

Denotaremos um quadrilátero com vértices A , B , C e D na forma $ABCD$. Os vértices A e C , bem como os vértices B e D , são ditos opostos. Também são chamados opostos os lados AB e CD , bem como os lados BC e AD . Os segmentos AC e BD são as diagonais do quadriláteros $ABCD$. Essas são as características gerais dos quadriláteros.

Nas seções abaixo serão apresentados resultados importantes para o desenvolvimento do tema, tratando de assuntos acerca dos quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis. As referências [7] e [5] serão utilizadas como base para o que se pretende expor neste capítulo.

2.1 Generalidades

Nesta Seção vamos trabalhar com os polígonos convexos de quatro lados, os chamados quadriláteros. Dos vários tipos de quadriláteros existentes vamos considerar apenas os principais, os chamados paralelogramos.

Existem várias formas de definir um paralelogramo. A seguir, estão descritas algumas proposições que exemplificam isso:

Definição 2.1. *Um quadrilátero convexo é dito um paralelogramo se possuir lados opostos paralelos.*

Proposição 2.1. *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e somente se, seus ângulos opostos forem iguais.*

Demonstração. Suponha que o quadrilátero convexo $ABCD$ é um paralelogramo.

Logo, $AB \parallel CD$ e $AD \parallel BC$. Como os ângulos \hat{A} e \hat{B} do paralelogramo são suplementares em relação à reta AB , temos que $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$. Analogamente, $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$, e daí, $\hat{A} = 180^\circ - \hat{B}$. Dessa forma, $\hat{A} = \hat{C}$ e $\hat{B} = \hat{D}$.

Suponha agora que no quadrilátero convexo $ABCD$ se tenha $\hat{A} = \hat{C}$ e $\hat{B} = \hat{D}$.

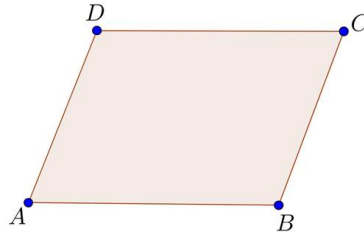


Figura 2.1: Demonstração da Proposição 1 (parte 1)

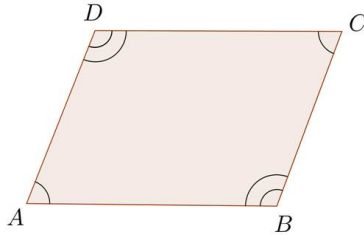


Figura 2.2: Demonstração da Proposição 1 (parte 2)

Somando essas igualdades membro a membro, temos que $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D}$ e, como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$, então $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ e $\hat{C} + \hat{D} = 180^\circ$. Como os ângulos \hat{A} e \hat{B} são suplementares, então as retas AD e BC são paralelas, ou seja, $AD \parallel BC$. De modo análogo, $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$. Então, as retas AB e CD são paralelas, ou seja, $AB \parallel CD$. Dessa forma, $ABCD$ possui os lados opostos paralelos. Portanto, pela definição 2.1, $ABCD$ é um paralelogramo. ■

Proposição 2.2. *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e somente se, seus pares de lados opostos forem iguais.*

Proposição 2.3. *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e somente se, suas diagonais se interceptam no ponto médio das mesmas.*

Outros quadriláteros ditos notáveis apresentam essas mesmas propriedades, como os retângulos, losangos e quadrados. Todos esses quadriláteros são tipos de paralelogramos, porém apresentam algumas propriedades específicas, tais como:

Definição 2.2. *Todo quadrilátero convexo que possui os quatro ângulos retos, ou seja, medindo 90° , é um retângulo.*

Definição 2.3. *Um quadrilátero convexo é um losango se todos os seus lados forem iguais.*

E, por fim, o quadrado é um quadrilátero convexo que, de forma simultânea, é retângulo e losango. Desse modo, podemos concluir que:

- i) Todo quadrado é paralelogramo, retângulo e losango;
- ii) Todo retângulo é um paralelogramo; e

iii) Todo losango é um paralelogramo.

Por outro lado, se dois lados opostos de um quadrilátero convexo são paralelos, deduz-se que ele é um paralelogramo. O que pode acontecer, entretanto, é que o quadrilátero convexo tenha somente dois lados opostos paralelos. Nesse caso, o quadrilátero é chamado de trapézio.

2.2 Quadriláteros Inscritíveis

Definição 2.4. *Um quadrilátero está inscrito numa circunferência quando seus quatro vértices pertencem à mesma.*

Existe uma condição para que um quadrilátero seja inscritível, a qual será apresentada e demonstrada a seguir.

Teorema 2.1. (Quadriláteros Inscritíveis) *Um quadrilátero é inscritível em uma circunferência se, e somente se, os seus ângulos opostos forem suplementares.*

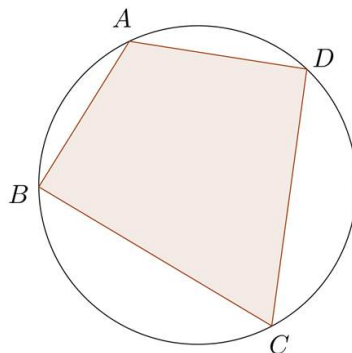


Figura 2.3: Quadrilátero inscritível

Demonstração. Suponha que $ABCD$ seja um quadrilátero inscritível. Pelo teorema (1.2-b), temos que

$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{BCD}}{2} + \frac{\widehat{BAD}}{2} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{BAD}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

De modo análogo, demonstra-se também que $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$. Isso mostra que os ângulos opostos do quadrilátero são suplementares.

Considere agora que $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$. Suponha que haja uma circunferência que passe pelos pontos A , B e D . Queremos provar que o ponto C também pertence a esta circunferência. Por absurdo, suponha que isso não aconteça, o que nos leva a considerar dois possíveis casos:

i) C é interior à circunferência, conforme Figura (2.4).

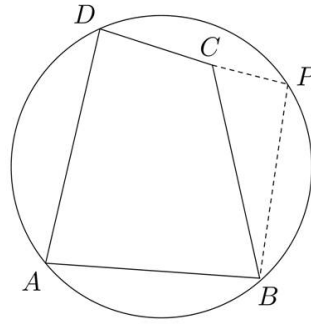


Figura 2.4: Quadrilátero inscritível com C interior à circunferência

Observe que prolongando o lado DC até que este intercepte a circunferência no ponto P , temos que o quadrilátero $ABPD$ é inscritível, ou seja, $\hat{A} + \hat{P} = 180^\circ$. Note que o ângulo $B\hat{C}D$ é externo ao triângulo BPC . Então, pelo teorema (1.7-b), $B\hat{C}D = B\hat{P}C + C\hat{B}P$. Dessa forma, $B\hat{C}D > B\hat{P}C$, ou melhor, $\hat{C} > \hat{P}$. Temos também que $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$. Como $\hat{A} + \hat{P} = 180^\circ$, concluímos que $\hat{C} = \hat{P}$, o que é uma contradição! Portanto, o ponto C não é interior à circunferência.

ii) C é exterior à circunferência, conforme Figura (2.5).

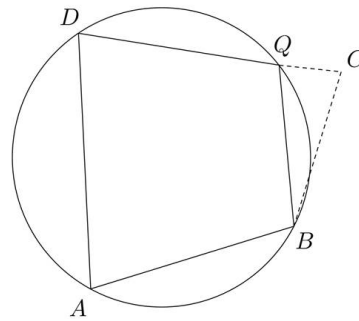


Figura 2.5: Quadriláteros inscritíveis com C exterior à circunferência

Observe que CD intersecta a circunferência no ponto Q . Dessa forma, o quadrilátero $ABQD$ é inscritível, ou seja, $\hat{A} + \hat{Q} = 180^\circ$. Observe que o ângulo $B\hat{Q}D$ é externo ao triângulo BCQ . Logo, pelo teorema (1.7-b), $B\hat{Q}D = C\hat{B}Q + B\hat{C}Q$. Dessa forma, $B\hat{Q}D > B\hat{C}Q$, ou seja, $\hat{Q} > \hat{C}$. Por outro lado, temos que $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$. Logo, $\hat{C} = \hat{Q}$, o que é uma contradição! Portanto, o ponto C também não é exterior à circunferência.

Se C não é interior e nem exterior à circunferência, concluímos que C pertence à circunferência, ou seja, o quadrilátero $ABCD$ é inscritível, o que completa a demonstração. ■

O Teorema a seguir será utilizado posteriormente.

Teorema 2.2. *Um quadrilátero é inscrito se, e somente se, o ângulo entre um lado e uma diagonal é igual ao ângulo entre o lado oposto e a outra diagonal.*

Demonstração. Considere $ABCD$ um quadrilátero inscrito como indica a Figura 2.6.

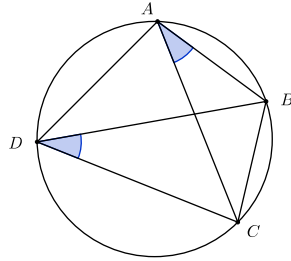


Figura 2.6: Quadriláteros inscritíveis II

Então (veja Teorema (1.2)) $C\hat{D}B = C\hat{A}B = \frac{\widehat{CB}}{2}$.

Reciprocamente, seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $C\hat{D}B = C\hat{A}B$. Suponha, por absurdo que o quadrilátero $ABCD$ não é inscrito. Seja E a interseção do prolongamento do segmento CD com a circunferência circunscrita ao triângulo ABC , como indica a Figura 2.7.

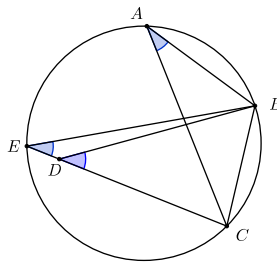


Figura 2.7: Quadriláteros inscritíveis III

Sendo assim, pela primeira parte do teorema, $C\hat{D}B = C\hat{A}B = C\hat{E}B$, o que é um absurdo pela propriedade do ângulo externo. ■

Exemplo 1. *Calcular o valor de α na Figura abaixo.*

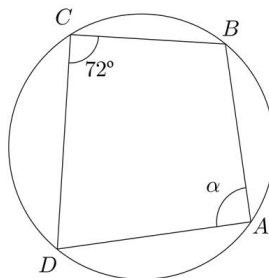


Figura 2.8: Exemplo 1

Solução. Como o quadrilátero $ABCD$ é inscrito, a soma dos ângulos opostos é igual a 180° . Logo,

$$\alpha + 72^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 108^\circ. \quad \blacksquare$$

Problema 2.1. Seja AB o diâmetro de um semicírculo. Seja M um ponto do semicírculo e K um ponto sobre AB . Sejam P o centro do círculo que passa por A , M e K , e Q o centro do círculo que passa por M , K e B . Prove que quadrilátero $MPKQ$ é inscrito.

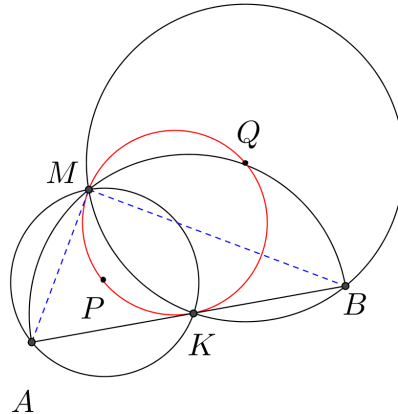


Figura 2.9: Problema 2.1

Resolução. No círculo circunscrito ao triângulo AMK , pelo teorema (1.2-a,b), temos que $M\hat{P}K = 2 \cdot M\hat{A}K$. De modo análogo, no círculo circunscrito ao triângulo BMK , temos que $M\hat{Q}K = 2 \cdot M\hat{B}K$. Como AB é diâmetro do semicírculo, temos $A\hat{M}B = 90^\circ$. Assim, $M\hat{A}K + M\hat{B}K = 90^\circ$. Logo,

$$M\hat{P}K + M\hat{Q}K = 2 \cdot M\hat{A}K + 2 \cdot M\hat{B}K = 2 \cdot (M\hat{A}K + M\hat{B}K) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ.$$

Portanto, pelo teorema (2.1), o quadrilátero $MPKQ$ é inscrito. ■

A seguir, acrescentamos o Teorema de Hiparco, para que nos próximos capítulos possamos utilizá-lo em algumas demonstrações e/ou problemas.

Teorema 2.3 (Teorema de Hiparco). *A razão das diagonais de um quadrilátero inscrito é igual à razão entre as somas dos produtos dos lados que concorrem com as respectivas diagonais. Ou seja,*

$$\frac{p}{q} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Demonstração. Sendo $S_{(\triangle ABC)}$ a área do triângulo ABC , $S_{(\triangle ACD)}$ a área do triângulo ACD , $S_{(\triangle ABD)}$ a área do triângulo ABD e $S_{(\triangle BCD)}$ a área do triângulo BCD , então

$$S_{(\triangle ABC)} + S_{(\triangle ACD)} = S_{(\triangle ABD)} + S_{(\triangle BCD)}.$$

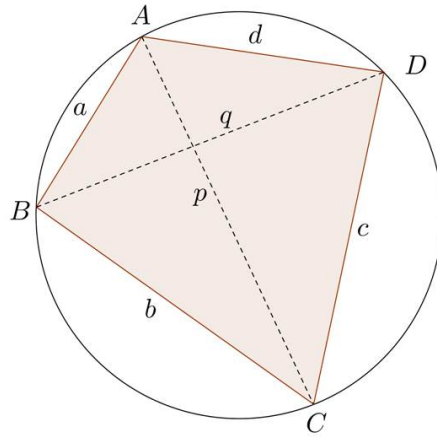


Figura 2.10: Teorema de Hiparco

Utilizando a relação que consta no teorema (1.16), temos

$$\frac{abp}{4R} + \frac{cdp}{4R} = \frac{adq}{4R} + \frac{bcq}{4R},$$

sendo R o raio da circunferência na qual o quadrilátero $ABCD$ está inscrito. Como $R \neq 0$ e os triângulos ABC , ACD , ABD e BCD estão inscritos nessa circunferência, então

$$abp + cdp = adq + bcq \Rightarrow p(ab + cd) = q(ad + bc) \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{ad + bc}{ab + cd}. \quad \blacksquare$$

Definição 2.5. O triângulo órtico é aquele que possui como vértices os pés das alturas do triângulo que o forma.

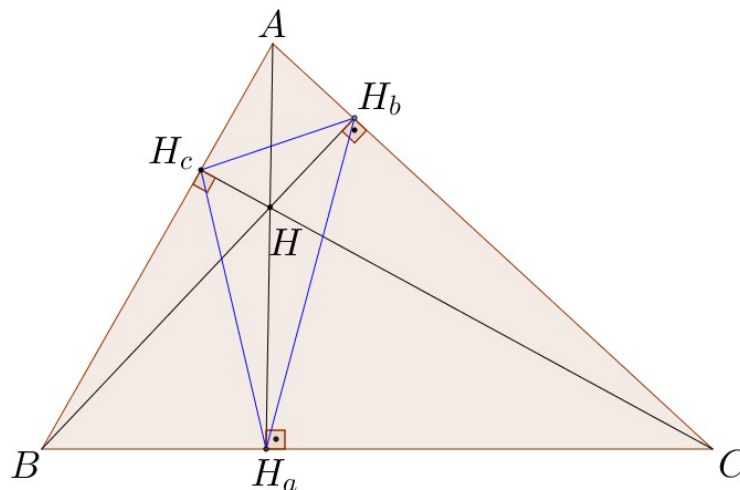


Figura 2.11: Triângulo órtico $H_aH_bH_c$

Proposição 2.4. Em todo triângulo acutângulo, o ortocentro coincide com o incentro do triângulo órtico.

Demonstração. Inicialmente, lembrando que o incentro é o ponto de intersecção das bissetrizes do triângulo e, ortocentro, o ponto de intersecção entre as alturas.

Seja H o ortocentro do triângulo ABC , temos que $H\hat{H}_aB + H\hat{H}_cB = 180^\circ$. Segue do teorema (2.1) que o quadrilátero HH_aBH_c é inscrito. Logo, pelo (2.2) temos

$$H\hat{H}_aH_c = H\hat{B}H_c = H_b\hat{B}A = 90^\circ - \hat{A}.$$

Por outro lado, como $H\hat{H}_aC + H\hat{H}_bC = 180^\circ$, temos que HH_aCH_b também é inscrito. Assim, temos

$$H\hat{H}_aH_b = H\hat{C}H_b = H_c\hat{C}A = 90^\circ - \hat{A}.$$

Dessa forma, provamos que $H\hat{H}_aH_c = H\hat{H}_aH_b$, ou seja, o segmento HH_a é bissetriz do ângulo $H_c\hat{H}_aH_b$ do triângulo órtico. De modo análogo, HH_b e HH_c são bissetrizes dos outros dois ângulo do triângulo órtico, de modo que H (ortocentro de ABC) é o incentro de $H_aH_bH_c$. ■

2.3 Quadriláteros Circunscritíveis

Definição 2.6. Um quadrilátero está circunscrito a uma circunferência quando todos os seus lados tangenciam à mesma.

Existe também uma condição para que o quadrilátero seja circunscritível, a qual será apresentada e demonstrada no teorema a seguir.

Teorema 2.4. (Teorema de Pitot) Um quadrilátero é circunscritível se, e somente se, as somas das medidas dos lados opostos são iguais.

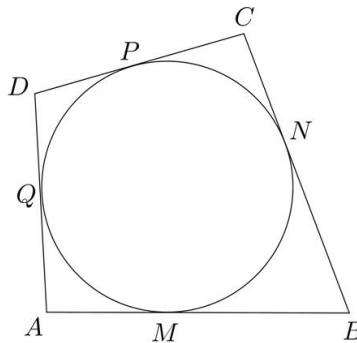


Figura 2.12: Quadriláteros circunscritíveis

Demonstração. Suponha que $ABCD$ seja um quadrilátero circunscritível, conforme Figura (2.12).

Sejam M , N , P e Q os pontos de tangência da circunferência inscrita no quadrilátero com os lados AB , BC , CD e DA , respectivamente. Pela Proposição 1.1, temos que $AM = AQ$,

$BM = BN$, $CP = CN$ e $DP = DQ$, que somados resulta em

$$(AM + AQ) + (CP + DP) = (BN + CN) + (AQ + DQ) \Rightarrow AB + CD = BC + AD$$

Por outro lado, suponha que $AB + CD = BC + AD$. Então deve-se provar que uma possível circunferência inscrita ao quadrilátero $ABCD$ é a circunferência tangente aos três lados AB , AD e BC . O centro desta circunferência é o ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos \hat{A} e \hat{B} . A ideia é provar que o quarto lado, CD , também é tangente àquela circunferência. Sendo assim, temos dois casos a analisar:

- i) Suponha que não haja intersecção de CD com a circunferência, conforme a Figura (2.13). Considere E um ponto sobre AD tal que CE seja tangente à circunferência no ponto P . Note que E está entre A e D . Assim, $AE + ED = AD$. Como $ABCE$ é um quadrilátero, $BC + AE = AB + CE$. Somando ED a seus membros, temos $BC + (AE + ED) = AB + CE + ED$, ou melhor, $BC + AD = AB + CE + ED$. Porém, pelo Teorema (1.8), $CD < CE + ED$. Logo, $BC + AD > AB + CD$, o que contraria a hipótese de que $AB + CD = BC + AD$.

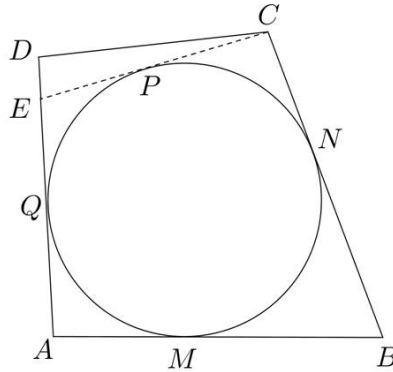


Figura 2.13: Quadriláteros circunscritíveis. CD não intersecta a circunferência

- ii) Por outro lado, suponha que CD seja secante à circunferência, como mostra a Figura (2.14). Observe que $ABCE$ está circunscrito à circunferência. Logo, $AE + BC = AB + CE$, ou melhor, $BC - AB = CE - AE$. Mas, por hipótese, $AD + BC = AB + CD$, ou melhor, $BC - AB = CD - AD$. Portanto, $CE - AE = CD - AD$, ou melhor, $AE - AD = CE - CD$. Mas, como visto na Figura (2.14), $AE - AD = DE$. Logo, $DE = CE - CD$, ou melhor, $DE + CD = CE$, que é um absurdo! Note que DE , CD e CE são lados do triângulo DEC e, assim, a soma de dois lados quaisquer desse triângulo é sempre maior que o terceiro, como descrito no Teorema (1.8).

Portanto, se o lado CD do quadrilátero $ABCD$ intersecta a circunferência e esta intersecção não é secante, conclui-se que CD é tangente à circunferência. Ou seja, o quadrilátero é circunscritível, o que completa a demonstração. ■

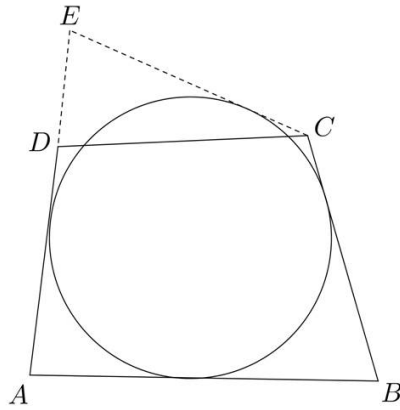


Figura 2.14: Quadriláteros circunscritíveis. CD não intersecta a circunferência

Exemplo 2. *A diferença de dois lados opostos de um quadrilátero circunscritível é igual a 8 cm e a diferença dos outros dois lados é 4 cm. Determine os lados do quadrilátero, sendo 56 cm a sua soma.*

Solução. Observe a Figura abaixo:

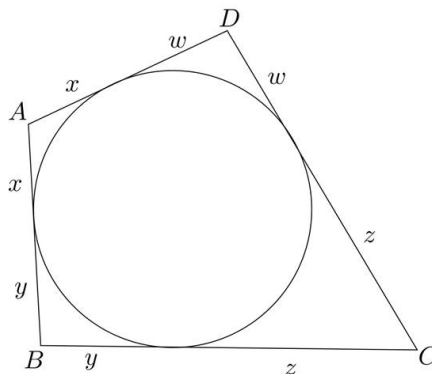


Figura 2.15: Quadriláteros circunscritíveis. CD não intersecta a circunferência

É possível extrair da Figura (2.15) as seguintes equações:

$$(x + y) - (z + w) = 8 \Rightarrow x + y = 8 + z + w \quad (2.1)$$

$$(y + z) - (x + w) = 4 \Rightarrow y + z = 4 + x + w \quad (2.2)$$

$$2x + 2y + 2z + 2w = 56 \Rightarrow x + y + z + w = 28 \quad (2.3)$$

Substituindo a equação (2.1) na equação (2.3), temos que

$$(8 + z + w) + z + w = 28 \Rightarrow z + w = CD = 10.$$

Substituindo esse resultado na equação (2.1), temos

$$x + y = 8 + 10 \Rightarrow x + y = AB = 18.$$

De forma análoga, substituindo a equação (2.2) na equação (2.3), obtemos

$$x + (4 + x + w) + w = 28 \Rightarrow x + w = DA = 12.$$

Finalmente, substituindo esse resultado na equação (2.2), temos que

$$y + z = 4 + 12 \Rightarrow y + z = BC = 16.$$

Portanto, as medidas dos lados do quadrilátero $ABCD$ são $AB = 18$ cm, $BC = 16$ cm, $CD = 10$ cm e $DA = 12$ cm. ■

Problema 2.2. Considere um quadrilátero inscrito e circunscrito, como indica a Figura abaixo. O diâmetro da circunferência λ_1 mede 9, e o diâmetro da circunferência λ_2 mede 4. Calcule o diâmetro da circunferência λ .

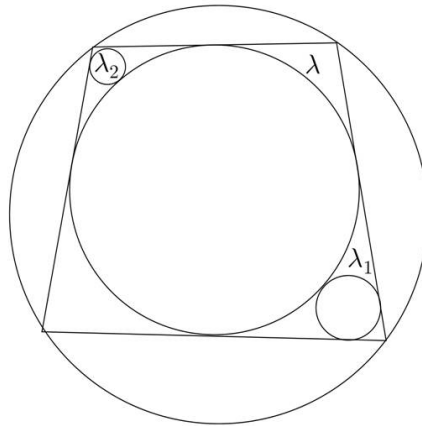


Figura 2.16: Problema 2.2

Resolução. Sejam R , R_1 e R_2 os raios das circunferências λ , λ_1 e λ_2 , respectivamente. Considere os pontos demarcados sobre a Figura (2.16), como observado na Figura (2.17).

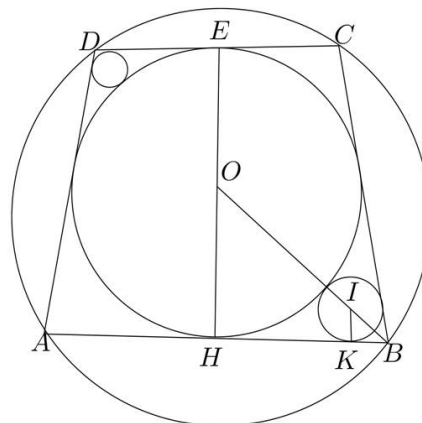


Figura 2.17: Problema 2.2, parte 1

Sejam $HB = a$, $EC = b$ e $OH = OE = R$. Com relação à circunferência λ_1 , temos pelo Teorema de Pitágoras no triângulo $OH'I$, onde $H' \in OH$ é tal que $H'H = IK = R_1$,

$$(R + R_1)^2 = (R - R_1)^2 + HK^2 \Rightarrow HK = 2\sqrt{RR_1}.$$

Observe que os triângulos OHB e IKB são semelhantes. Logo,

$$\frac{IK}{KB} = \frac{OH}{HB} \Rightarrow \frac{R_1}{a - 2\sqrt{RR_1}} = \frac{R}{a} \Rightarrow a = \frac{2R\sqrt{RR_1}}{R - R_1}. \quad (2.4)$$

Agora, considerando os pontos demarcados sobre a Figura (2.13) com relação à circunferência λ_2 , como mostra a Figura (2.18).

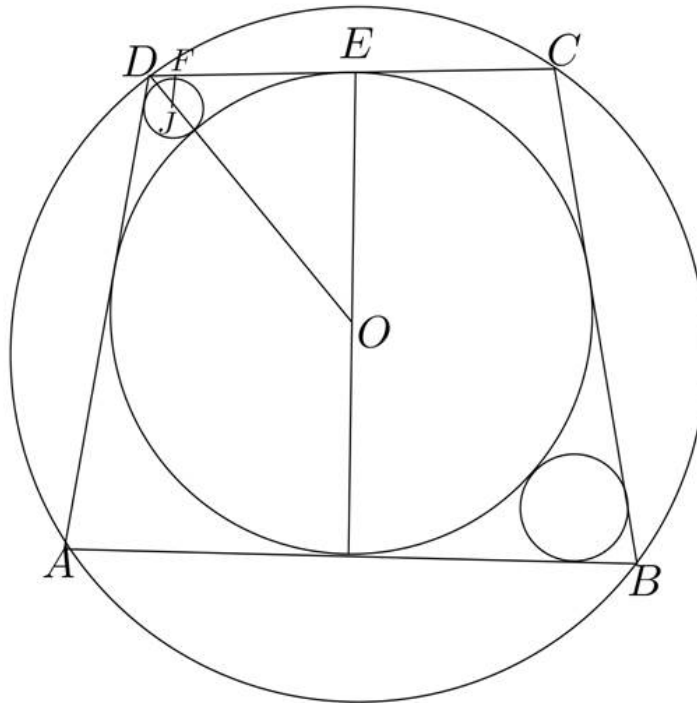


Figura 2.18: Problema 2.2, parte 2

Temos, pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo $OE'J$, onde $E' \in OE$ é tal que $E'E = JF$,

$$(R + R_2)^2 = (R - R_2)^2 + EF^2 \Rightarrow EF = 2\sqrt{RR_2}.$$

Observe que os triângulos OED e JFD são semelhantes. Logo,

$$\frac{FJ}{FD} = \frac{OE}{ED} \Rightarrow \frac{R_2}{b - 2\sqrt{RR_2}} = \frac{R}{b} \Rightarrow b = \frac{2R\sqrt{RR_2}}{R - R_2}. \quad (2.5)$$

Observe que $AD = BC$, pois

$$AD^2 = (a - b)^2 + (2R)^2 = BC^2 \Rightarrow AD = BC = \sqrt{4R^2 + (a - b)^2}.$$

Como o quadrilátero $ABCD$ está circunscrito à circunferência λ , temos, segundo o teorema (2.4), que $AB + CD = AD + BC$, ou seja,

$$\begin{aligned}
 2a + 2b = 2\sqrt{4R^2 + (a - b)^2} &\Rightarrow a + b = \sqrt{4R^2 + (a - b)^2} \\
 &\Rightarrow (a + b)^2 = 4R^2 + (a - b)^2 \\
 &\Rightarrow (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4R^2 \\
 &\Rightarrow (2a)(2b) = 4R^2 \\
 &\Rightarrow ab = R^2.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Substituindo (2.4) e (2.5) na equação (2.6), temos que

$$R^2 = \frac{2R\sqrt{RR_1}}{R - R_1} \cdot \frac{2R\sqrt{RR_2}}{R - R_2} = \frac{4R^3\sqrt{R_1R_2}}{(R - R_1)(R - R_2)}.$$

Como $R \neq 0$, temos que

$$R = \frac{(R - R_1)(R - R_2)}{4\sqrt{R_1R_2}} \Rightarrow R^2 - (R_1 + R_2 + 4\sqrt{R_1R_2})R + R_1R_2 = 0.$$

Como $R_1 = 9/2$ e $R_2 = 2$, temos que $R^2 - (37/2)R + 9 = 0$. Isto significa que, ou $R = 18$ ou $R = 1/2$. Como $R > R_1 > R_2$, então $R = 18$. Portanto, o diâmetro de λ é 36. ■

Capítulo 3

O Teorema de Ptolomeu

Neste Capítulo será apresentado um breve histórico sobre Ptolomeu, um dos resultados importantes da geometria plana, o Teorema de Ptolomeu, bem como sua demonstração, algumas aplicações e um resultado não menos importante, a Desigualdade de Ptolomeu, a qual permite que possamos concluir se um quadrilátero é inscrito ou não apenas conhecendo as medidas dos seus lados e das suas diagonais.

3.1 Ptolomeu

Sabemos das variadas contribuições de matemáticos do passado nos campos da álgebra, trigonometria, geometria e nas demais áreas da matemática, tais como Pitágoras, Arquimedes, Pascal, Heron de Alexandria, dentre outros.

Ptolomeu também foi um desses grandes matemáticos. Trabalhou em Alexandria, no Egito (120-145), e foi o último dos grandes sábios gregos. Procurou sintetizar o trabalho de seus predecessores e, por meio de suas obras em astronomia, matemática, geometria, física e geografia, a civilização medieval teve seu primeiro contato com a ciência.

Pioneiro no emprego de meridianos como segmentos de reta divergentes a partir dos polos e paralelos como arcos de círculos concêntricos, seu mapa-múndi era composto por um conjunto de 26 mapas regionais e sua obra foi fundamental para a evolução da cartografia.

Morreu em Alexandria, e vários de seus escritos chegaram aos nossos dias, dentre os quais a influente e significativa obra em trigonometria e uma síntese de todo o conhecimento de astronomia da antiguidade. Além de suas contribuições, Ptolomeu propôs um teorema que leva seu nome: o Teorema de Ptolomeu.

Com seus estudos e livros, Ptolomeu contribuiu para vários ramos do saber científico. Infelizmente, parte de seus escritos foram perdidos. Os que restaram, no entanto, são suficientes para documentar a importância de seu trabalho.

Sua obra mais importante é a Síntese Matemática, que é um trabalho de natureza enciclopédica, composto por 13 livros, que constitui a síntese dos trabalhos obtidos

pelos astrônomos gregos da antiguidade, e nos apresenta argumentos a favor da teoria geocêntrica do universo.

Este Capítulo apresenta, como tema principal, o teorema de Ptolomeu, sua demonstração e algumas de suas aplicações. O texto base para este capítulo tem como referência [4].

3.2 O Teorema de Ptolomeu

Teorema 3.1. (Teorema de Ptolomeu) *Num quadrilátero inscrito, o produto dos comprimentos das diagonais é igual à soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos, ou seja, pela Figura 3.1, tem-se $pq = ac + bd$.*

Demonstração. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito. Considere $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, $AC = p$ e $BD = q$, conforme Figura (3.1).

Seja J um ponto sobre BD de forma que $\hat{B}AJ \equiv \hat{C}AD$. Assim, os triângulos ABJ e ACD são semelhantes, pois também $\hat{A}CD \equiv \hat{A}BJ$. Logo,

$$\frac{BJ}{CD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AC \cdot BJ = AB \cdot CD \Rightarrow p \cdot BJ = ac. \quad (3.1)$$

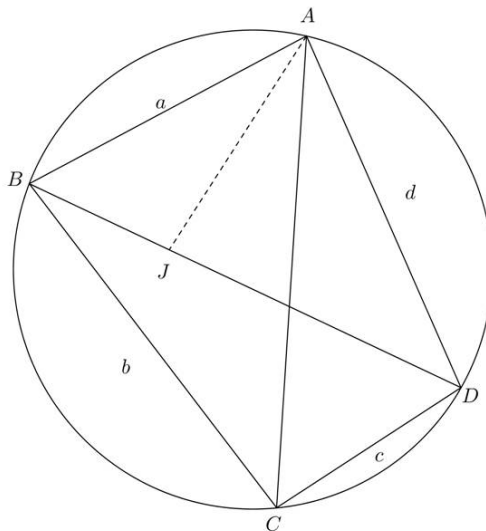


Figura 3.1: Teorema de Ptolomeu

Observe também que os ADJ e ABC são semelhantes, pois $\hat{A}CB \equiv \hat{A}DJ$ e $\hat{B}AC \equiv \hat{J}AD$. Assim,

$$\frac{JD}{BC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow JD \cdot AC = BC \cdot AD \Rightarrow p \cdot JD = bd. \quad (3.2)$$

Somando os membros das equações (3.1) e (3.2), temos

$$p \cdot BJ + p \cdot JD = ac + bd \Rightarrow p \cdot (BJ + JD) = ac + bd.$$

Como $BJ + JD = BD = q$, então $pq = ac + bd$. ■

A seguir demonstraremos o recíproco do Teorema de Ptolomeu.

Teorema 3.2. (Recíproco do Teorema de Ptolomeu) *Reciprocamente, se num quadrilátero convexo o produto dos comprimentos das diagonais é igual à soma do produto dos comprimentos dos lados opostos, então ele é inscritível.*

Demonstração. Suponha que o quadrilátero convexo $ABCD$ satisfaz $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

Seja E um ponto tal que, $\hat{BAE} = \hat{CAD}$ e $\hat{ABE} = \hat{ACD}$.

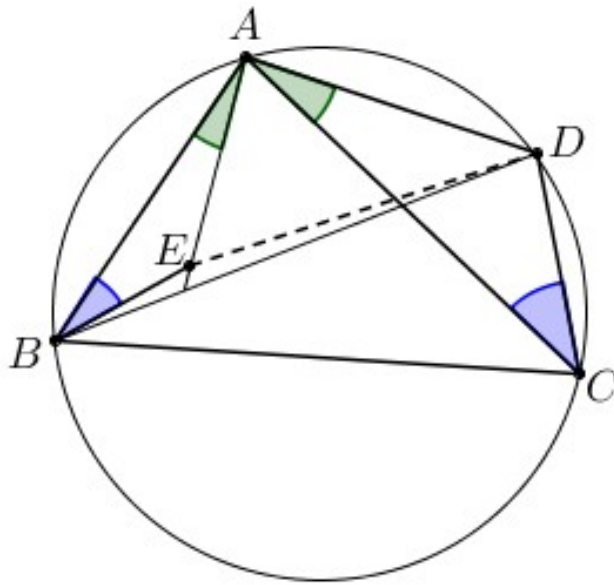


Figura 3.2: Recíproca do Teorema de Ptolomeu

Para mostrar que $ABCD$ é inscritível, basta mostrar que $E \in BD$ assim $\hat{ABD} = \hat{ABE} = \hat{ACD}$, seguirá do Teorema 2.2 que $ABCD$ é inscritível.

Por construção $\triangle ABE \sim \triangle ACD$. Daí, $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{DC} \Rightarrow AC \cdot BE = AB \cdot CD \dots (1)$. Também $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$ e $\hat{BAC} = \hat{EAD}$. Logo, pelo caso de semelhança de triângulos (PAP), temos $\triangle ABC \sim \triangle AED$. Daí $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{ED} \Rightarrow AC \cdot ED = BC \cdot AD \dots (2)$. Somando (1) e (2), obtemos $AC(BE + ED) = AB \cdot CD + BC \cdot AD$. Pela hipótese, $BE + ED = BD$. Logo, $E \in BD$ e $\hat{ABD} = \hat{ABE} = \hat{ACD}$. ■

Teorema 3.3 (Desigualdade de Ptolomeu). *Se ABC é um triângulo e P um ponto do plano deste triângulo, tal que o quadrilátero $ABCP$ seja convexo, então*

$$AB \cdot CP + BC \cdot AP \geq AC \cdot BP.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, o quadrilátero $ABCP$ é inscritível.

Demonstração. Inicialmente, observamos que a última afirmação segue do Teorema de Ptolomeu e seu recíproco. Agora, vamos demonstrar a desigualdade. Sejam $B_1 \in AC$, $A_1 \in BC$ e $C_1 \in AB$, tais que $PC_1 \perp AB$, $PB_1 \perp AC$ e $PA_1 \perp BC$, conforme Figura 3.3.

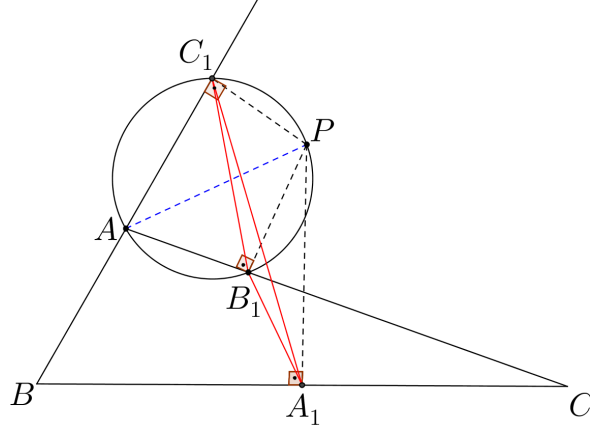


Figura 3.3: Desigualdade de Ptolomeu

Consideremos os segmentos A_1C_1 , A_1B_1 e B_1C_1 . Como $\widehat{AC_1P} + \widehat{AB_1P} = 180^\circ$, pelo teorema (2.1), o quadrilátero AB_1PC_1 é inscrito, sendo AP um diâmetro do círculo circunscrito, pois $\widehat{AC_1P} = 90^\circ$. Além disso, $\widehat{B_1PC_1} + \widehat{C_1AB_1} = 180^\circ$. Como $\widehat{C_1AB_1} = 180^\circ - \widehat{A}$, onde \widehat{A} é um ângulo interno do triângulo ABC , então $\widehat{B_1PC_1} = \widehat{A}$. Aplicando a lei dos senos (1.14) no triângulo PB_1C_1 , temos que

$$\frac{B_1C_1}{\text{sen}\widehat{A}} = AP. \quad (3.3)$$

Aplicando a lei dos senos (1.14) no triângulo ABC , temos que

$$\text{sen}\widehat{A} = \frac{BC}{2R}, \quad (3.4)$$

em que R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo ABC . De (3.3) e (3.4), obtemos

$$B_1C_1 = \frac{BC \cdot AP}{2R}.$$

De modo análogo, os quadriláteros BA_1PC_1 e CPB_1A_1 também são inscritíveis. Logo,

$$A_1C_1 = \frac{AC \cdot BP}{2R} \quad \text{e} \quad A_1B_1 = \frac{AB \cdot CP}{2R}.$$

Pela desigualdade triangular (1.8) no triângulo $A_1B_1C_1$, temos que

$$A_1B_1 + B_1C_1 \geq A_1C_1 \Rightarrow \frac{AB \cdot CP}{2R} + \frac{BC \cdot AP}{2R} \geq \frac{AC \cdot BP}{2R}.$$

Logo, $AB \cdot CP + BC \cdot AP \geq AC \cdot BP$. ■

A Desigualdade de Ptolomeu permite concluir, a partir das medidas dos lados e das diagonais, se o quadrilátero é inscrito ou não, sem a necessidade de verificar se os ângulos opostos são suplementares.

Agora, será feita algumas aplicações do Teorema de Ptolomeu, para que haja um melhor entendimento do mesmo.

3.3 Problemas

Nesta Seção estarão apresentados problemas resolvidos com aplicações do Teorema de Ptolomeu. A resolução de problemas de geometria por meio desse teorema torna-se mais rápida, fornecendo aos alunos maior conhecimento de geometria plana, área pouco trabalhada nas escolas, e, principalmente, deste teorema, que na maioria das instituições de ensino não chega a ser abordado.

Problema 3.1. *Seja ABC um triângulo equilátero e P um ponto sobre o arco \widehat{BC} , que não contém A , da circunferência circunscrita ao triângulo ABC . Prove que $PA = PB + PC$.*

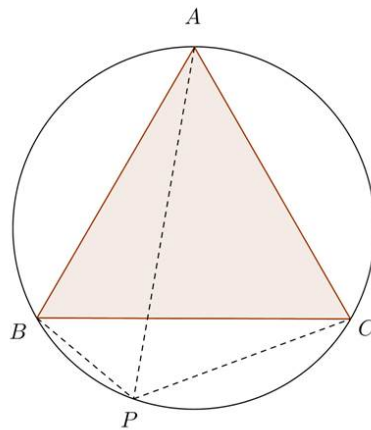


Figura 3.4: Problema 3.1

Resolução. Observe a Figura (3.4). Aplicando o Teorema de Ptolomeu ao quadrilátero $ABPC$, temos

$$PA \cdot BC = AB \cdot PC + PB \cdot AC.$$

Como o triângulo ABC é equilátero, então $AB = BC = AC = l$, com $l \neq 0$. Logo,

$$PA \cdot l = l \cdot PC + l \cdot PB \Rightarrow PA = PC + PB. \quad \blacksquare$$

Problema 3.2. *Seja ABC um triângulo isósceles, com $AB = AC$, inscrito em uma circunferência Γ . Seja P um ponto sobre o arco \widehat{BC} de Γ , que não contenha A . Prove que*

$$\frac{PA}{PB + PC} = \frac{AC}{BC}.$$

Resolução. Observe a Figura (3.5):

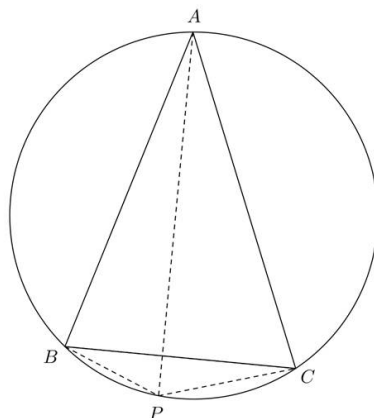


Figura 3.5: Problema 3.2

Aplicando o Teorema de Ptolomeu no quadrilátero $ABPC$, temos

$$PA \cdot BC = AB \cdot PC + PB \cdot AC.$$

Como o triângulo ABC é isósceles, então $AB = AC$. Logo,

$$PA \cdot BC = AC \cdot PC + PB \cdot AC = AC(PC + PB).$$

Portanto,

$$\frac{PA}{PC + PB} = \frac{AC}{BC}. \quad \blacksquare$$

Problema 3.3. *Seja $ABCD$ um quadrado inscrito em uma circunferência Γ . Seja P um ponto sobre o arco \widehat{BC} da circunferência Γ que não contenha A e D . Prove que*

$$\frac{PA + PC}{PB + PD} = \frac{PD}{PA}.$$

Resolução. Observe a Figura 3.6

Aplicando o Teorema de Ptolomeu no quadrilátero $ABPC$, temos

$$PA \cdot BC = AB \cdot PC + PB \cdot AC. \quad (3.5)$$

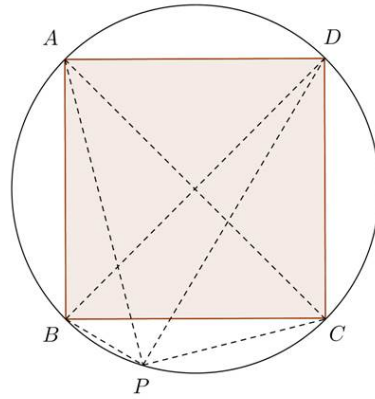


Figura 3.6: Problema 3.3

Como $ABCD$ é um quadrado, então $AB = BC = CD = AD = l$ e $d = AC = BD$. Logo, substituindo em (3.5), teremos

$$PA \cdot d = l \cdot (PD + PB). \quad (3.6)$$

Aplicando o mesmo raciocínio para o quadrilátero $APCD$, temos, pelo Teorema de Ptolomeu, que $AC \cdot PD = PA \cdot CD + AD \cdot PC$. E assim,

$$d \cdot PB = l \cdot (PA + PC). \quad (3.7)$$

Dividindo as equações (3.6) e (3.7), temos

$$\frac{d \cdot PB}{d \cdot PA} = \frac{l \cdot (PA + PC)}{l \cdot (PD + PB)},$$

e como $l \neq 0$ e $d \neq 0$, então

$$\frac{PB}{PA} = \frac{PA + PC}{PD + PB}. \quad \blacksquare$$

Problema 3.4. *Uma circunferência passa pelo vértice A de um paralelogramo $ABCD$ intersectando os lados AB e AD nos pontos P e R , respectivamente. Além disso, intersecta também a diagonal AC no ponto Q . Prove que*

$$AQ \cdot AC = AP \cdot AB + AR \cdot AD.$$

Resolução. Observe a Figura 3.7

Aplicando o teorema de Ptolomeu no quadrilátero $APQR$, temos

$$AQ \cdot RP = AP \cdot RQ + AR \cdot PQ. \quad (3.8)$$

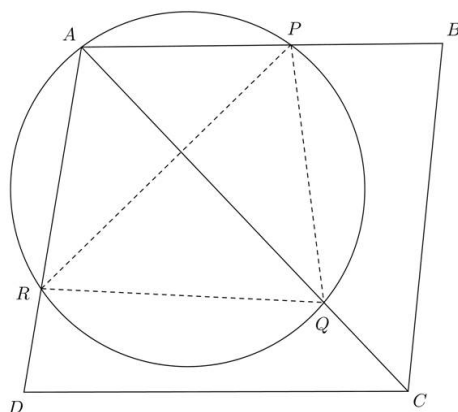


Figura 3.7: Problema 3.4

Agora, observe que o triângulo RPQ é semelhante ao triângulo CAD . De fato, como $ABCD$ é um paralelogramo, temos $\widehat{BAC} \equiv \widehat{ACD}$ e, como $\widehat{PAQ} \equiv \widehat{PRQ}$, são inscritos e correspondem ao mesmo arco \widehat{PQ} , temos, então que $\widehat{PRQ} \equiv \widehat{ACD}$. Além disso, $\widehat{RPQ} \equiv \widehat{CAD}$ são ângulos inscritos sustentando o mesmo arco \widehat{RQ} . Agora, pela semelhança desses triângulos, seus lados correspondentes são proporcionais. Dessa forma, temos

$$\frac{RQ}{DC} = \frac{RP}{AC} = \frac{PQ}{AD}.$$

Como $ABCD$ é um paralelogramo, então $AD = BC$ e $AB = CD$. Logo, substituindo em (3.3), teremos,

$$\frac{RQ}{AB} = \frac{RP}{AC} = \frac{PQ}{AD} = k.$$

Com isso, $RQ = k \cdot AB$, $RP = k \cdot AC$ e $PQ = k \cdot AD$. Estas equações, quando substituídas em (3.8), resulta em

$$AQ \cdot (k \cdot AC) = AP \cdot (k \cdot AB) + AR \cdot (k \cdot AD).$$

Como $k \neq 0$, então

$$AQ \cdot AC = AP \cdot AB + AR \cdot AD. \quad \blacksquare$$

3.4 O Ponto de Fermat

Finalizasse este Capítulo mostrando uma aplicação do Teorema e Desigualdade de Ptolomeu. Para esta Seção foram consultadas as referências [2] e [9].

O ponto de Fermat. O ponto de Fermat de um triângulo, também chamado de ponto de Torricelli, é o ponto tal que a soma das distâncias deste ponto aos vértices é mínima.

Ele é assim chamado porque o problema de encontrá-lo foi levantado por Fermat em uma carta particular endereçada a Evangelista Torricelli, que o resolveu.

Na solução de Evangelista Torricelli do problema de Fermat, dada por volta de 1640, afirmou-se que: As circunferências que circunscvem os triângulos equiláteros construídos externamente sobre os lados do triângulo dado interseam-se num ponto, o ponto de Fermat. Isto é, o ponto de interseção das circunferências construídas exteriormente sobre os lados do triângulo minimiza a soma das distâncias deste ponto aos vértices do triângulo.

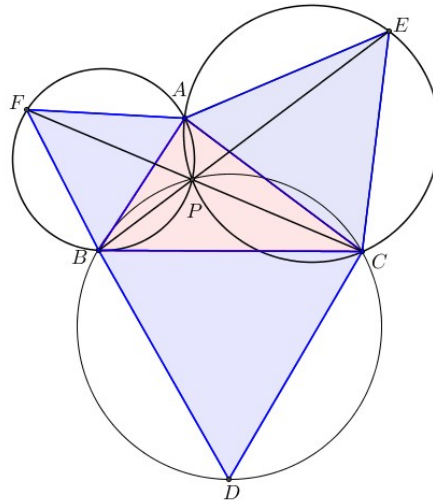


Figura 3.8: Resolução Geométrica do Problema de Fermat, proposta por Torricelli

No entanto, esta solução geométrica nem sempre é o ponto que minimiza as distâncias. Quando um dos ângulos do triângulo é igual ou superior a 120° o ponto de Fermat não está no interior do triângulo. Esta falha da proposta de Torricelli foi descoberta por Heinen em 1834, que propôs a seguinte solução para o Problema de Fermat: Se um dos ângulos do triângulo formado pelos três pontos dados for igual ou superior a 120° , o ponto que minimiza a soma das distâncias é o vértice desse ângulo, caso contrário, a solução é a proposta por Torricelli.

Em toda esta seção ABC denotará um triângulo, cujos ângulos interiores são menores que 120° . Além disso, BCD , ACE e ABF denotaram os triângulos equiláteros construídos exteriormente sobre os lados do triângulo ABC .

A seguir, mostraremos que o Ponto de Fermat, para triângulos cujos ângulos interiores são todos menores que 120° , pode ser obtido na intersecção dos segmentos que ligam cada vértice do triângulo ao vértice do triângulo equilátero construído sobre o lado oposto. Veja Figura 3.9.

Inicialmente, mostraremos que segmentos AD , BE e CF são concorrentes no mesmo ponto de intersecção das circunferências que circunscvem os triângulos equiláteros BCD , ACE e ABF , o ponto de Fermat. Com isto, também mostraremos que tais circunferências são concorrentes.

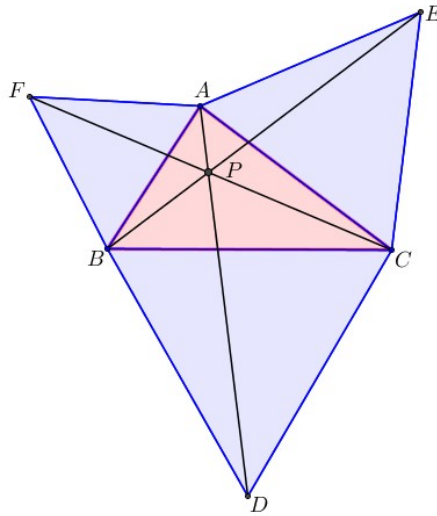


Figura 3.9: O ponto de Fermat

Note que, pelo critério LAL de congruência de triângulos, temos

$$\triangle AFC \cong \triangle ABE, \text{ pois } \begin{cases} AF = AB, \\ \widehat{FAC} = 60^\circ + \widehat{BAC} = \widehat{BAE}, \\ AC = AE. \end{cases}$$

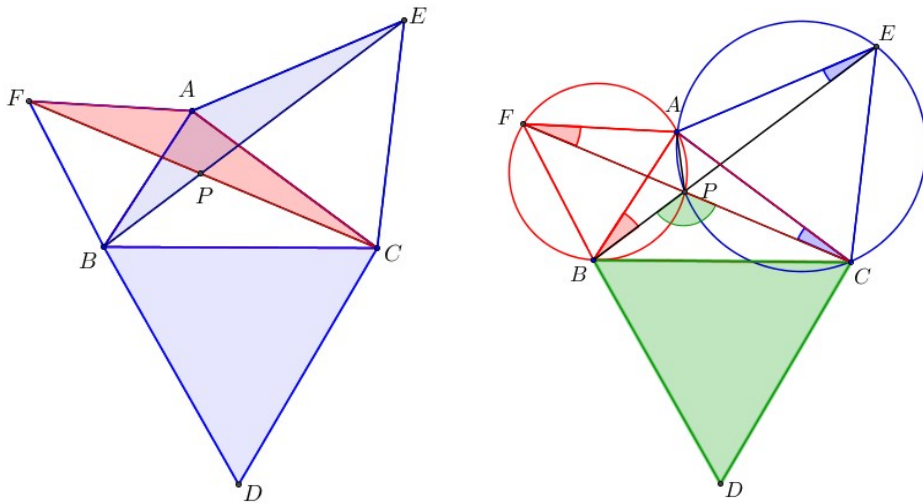


Figura 3.10: $\triangle AFC \cong \triangle ABE$ e Quadriláteros $APBF$ e $APCE$ inscritíveis

Donde concluímos que $\widehat{AFC} = \widehat{ABE}$ e $\widehat{AEB} = \widehat{ACB}$. Portanto, pelo Teorema (2.1), os quadriláteros $APBF$ e $APCE$ são inscritíveis. Segue do Teorema (2.1) que

$$\widehat{APB} = \widehat{APC} = 120^\circ. \quad (3.9)$$

Logo, $\widehat{BPC} = 120^\circ$ e, novamente pelo Teorema (2.1), o quadrilátero $BPCD$ é inscritível.

Além disso, unindo o ponto P com o ponto D , temos pelo Teorema (2.2) que

$$B\hat{P}D = B\hat{C}D = 60^\circ \quad e \quad C\hat{P}D = C\hat{B}D. \quad (3.10)$$

Segue das relações (3.9) e (3.10) que os pontos A , P e D são colineares. Isto finaliza a prova da nossa primeira afirmação.

Será mostrado agora que este ponto minimiza a soma das distâncias aos vértices do triângulo. Inicialmente, observamos que as retas definidas por cada par dos vértices do triângulo dividem o plano em sete regiões: o triângulo propriamente dito mais seis regiões exteriores a esse triângulo.

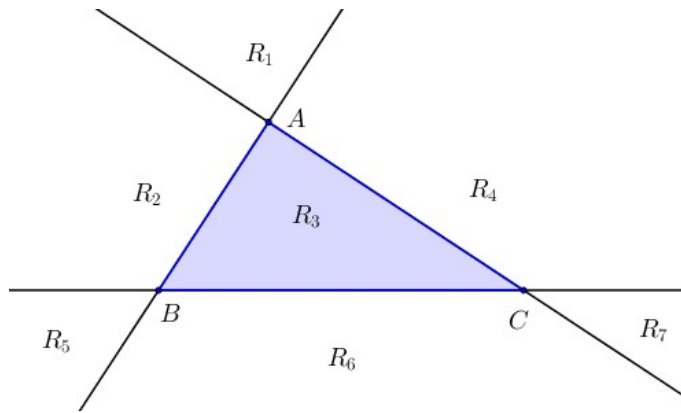


Figura 3.11: Retas pelos vértices do triângulo ABC dividem o plano em sete regiões

Para um ponto Q do plano, denotamos $d(Q) = QA + QB + QC$. A seguir mostraremos que se um ponto Q é exterior ao triângulo, então existe um ponto Q' sobre o triângulo ABC tal que

$$d(Q') = Q'A + Q'B + Q'C < QA + QB + QC = d(Q).$$

De fato, suponha, por exemplo, que $Q \in R_7$, onde R_7 é a região exterior ao triângulo especificada na Figura 3.11.

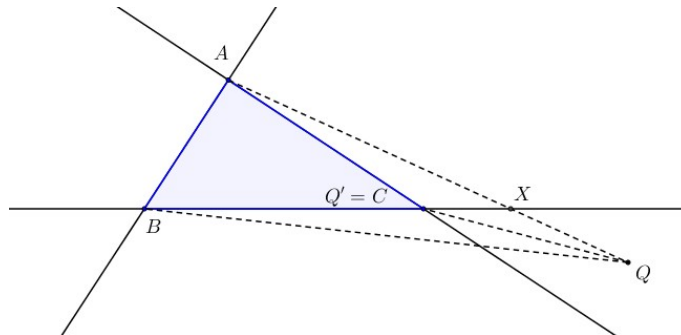


Figura 3.12: Para $Q \in R_7$, temos $d(C) < d(Q)$

Seja X o ponto de interseção do segmento QA com a reta que passa por B e C , veja

Figura 3.12. Temos,

$$\begin{aligned} d(Q) = QA + QB + QC &> QA + QB = QX + XA + QB \\ &\geq XA + XB = XA + XC + CB \\ &\geq CA + CB = d(C) \end{aligned}$$

Notamos também que para o ponto X dado acima, temos

$$\begin{aligned} d(X) = XA + XB + XC &> XA + XB = XA + BC + CX \\ &\geq CA + CB = d(C) \end{aligned}$$

Agora, caso $Q \in R_4$, seja Q' o ponto de interseção do segmento QB com a reta que passa pelos vértices A e C . Veja Figura 3.13

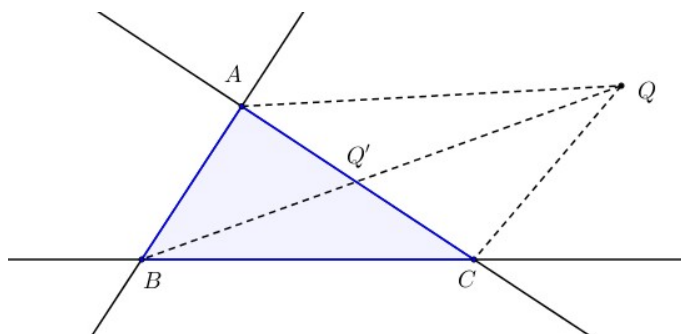


Figura 3.13: Para $Q \in R_4$, temos $d(Q') < d(Q)$

Temos,

$$\begin{aligned} d(Q) = QA + QB + QC &= QA + QQ' + Q'B + QC \\ &> Q'B + AQ + QC \geq Q'B + AC \\ &= Q'A + Q'B + Q'C = d(Q') \end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se quando ponto Q está nas outras regiões exteriores ao triângulo ABC .

Finalmente, foi demonstrado que o ponto P dado como a interseção das circunferências que circunscrevem os triângulos equiláteros construídos externamente sobre os lados do triângulo ABC (cujos ângulos interiores são todos menor que 120°) minimiza a soma das distâncias aos vértices do triângulo. Pela observação, basta mostrar que se Q é um ponto sobre o triângulo ou interior ao triângulo ABC , então

$$d(P) = PA + PB + PC \leq QA + QB + QC = d(Q).$$

Para isto, note que a congruência dos triângulos AFC e ABF , estabelecida no início,

fornece que $BE = CF$. Analogamente, pela congruência dos triângulos ABD e FBC , temos $AD = CF$. Portanto,

$$AD = BE = CF.$$

Aplicando o Teorema de Ptolomeu ao quadrilátero inscrito $PCDB$, temos

$$PD \cdot BC = PB \cdot DC + PC \cdot BD.$$

Sendo BCD um triângulo equilátero, $BC = DC = BD$, segue que $PD = PB + PC$. Portanto,

$$PA + PB + PC = AP + PD = AD = BE = CF. \quad (3.11)$$

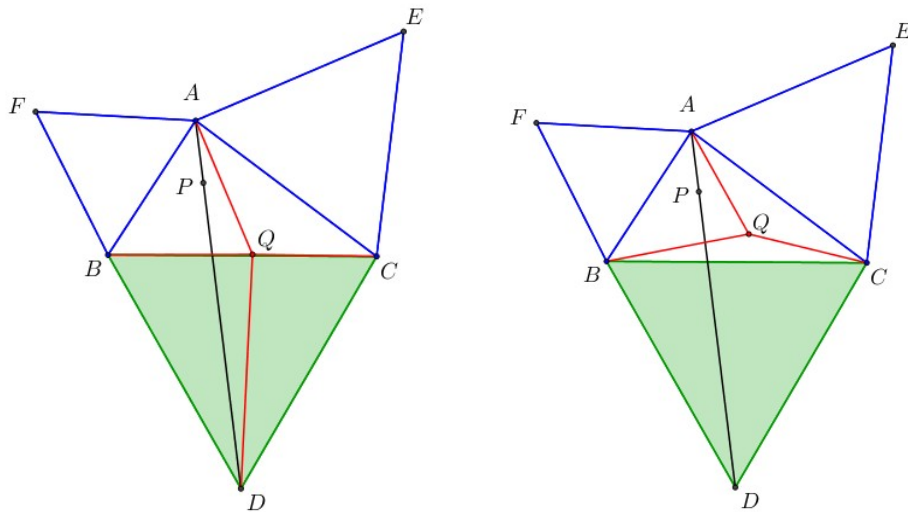


Figura 3.14: Para pontos Q sobre ou no interior ao triângulo ABC tem-se $d(P) \leq d(Q)$

Suponha que Q é um ponto sobre o lado BC do triângulo ABC , usando a desigualdade triangular, obtemos (veja a imagem à esquerda da Figura 3.14)

$$d(Q) = QA + QB + QC = QA + BC \geq QA + QD \geq AD = d(P)$$

Agora, se Q é um ponto qualquer sobre ou interior ao triângulo ABC que não está sobre o segmento BC , como indica a imagem à direita da Figura 3.14. Temos que $BDCQ$ é um quadrilátero convexo. Assim, pela Desigualdade de Ptolomeu, aplicada a este quadrilátero, obtemos

$$QD \cdot BC \leq QB \cdot CD + QC \cdot BD.$$

Sendo, o triângulo BCD equilátero, segue que $QD \leq QB + QC$. Portanto, a desigualdade

triangular junto com a relação (3.11), fornece

$$PA + PB + PC = AD \leq AQ + QD \leq QA + QB + QC.$$

Esta desigualdade mostra que o ponto obtido como a interseção das circunferências que circunscrevem os triângulos equiláteros construídos externamente sobre os lados do triângulo minimiza a soma das distâncias de um ponto qualquer aos vértices do triângulo.

Dessa forma, apresentados histórico, Teorema de Ptolomeu, assim como suas demonstrações e Desigualdade, pode-se apresentar a generalização do mesmo.

Capítulo 4

Generalização do Teorema de Ptolomeu

Neste Capítulo será apresentado o tema central deste trabalho, o Teorema de Casey. Portanto, será apresentado, demonstrado e aplicado, buscando atingir o melhor entendimento do assunto. Todos os capítulos vistos anteriormente serão utilizados como base para sua apresentação. O material base tem como referência a obra de [8].

4.1 Casey

Um pouco sobre a biografia do grande geômetra irlandês John Casey. Nasceu em 12 de maio de 1820, em Kilbehenny, na Irlanda. Foi um respeitado geômetra, contribuiu com várias novas demonstrações e outras perspectivas sobre a Geometria Euclidiana. Destacou-se no meio acadêmico pela generalização do Teorema de Ptolomeu, o resultado que leva o seu nome, o Teorema de Casey.

Cursou matemática no Trinity College (1858-1862) e fez mestrado em matemática na Kingston School (1862-1873). Lecionou Matemática superior e Física-Matemática na Universidade Católica da Irlanda (1873-1881) e, também, foi professor de matemática na University College, Dublin (1881-1891). Em 1869 foi agraciado com o grau honorário de Doutor. Foi membro da Real Academia Irlandesa e da Societe Matemática de France.

Publicou várias obras, das quais podemos destacar as Transformações Cúbicas (1880), Um Tratado sobre a Geometria Analítica do Ponto, Linha, Círculo e Secções Cônicas (1885) e Um Tratado sobre Geometria Esférica (1889).

Faleceu em Dublein, em 03 de janeiro de 1891. Veja agora o Teorema deste grande nome da geometria, o Teorema de Casey.

4.2 O Teorema de Casey

Teorema 4.1. *Seja K uma circunferência de raio R e quatro pontos A, B, C e D sobre K , dispostos, nesta ordem, no sentido anti-horário. Sejam K_1, K_2, K_3 , e K_4 circunferências arbitrárias, tangentes a K nos pontos A, B, C e D , respectivamente. Se t_{xy} denota o comprimento da tangente externa comum às circunferências K_x e K_y , então*

$$t_{13} \cdot t_{24} = t_{12} \cdot t_{34} + t_{14} \cdot t_{23}. \quad (4.1)$$

Antes de demonstrar o Teorema de Casey vejamos os seguintes lemas:

Lema 4.1. *Sejam K_1 e K_2 circunferências tangentes interiores a uma circunferência K nos pontos A e B , respectivamente. Se t_{12} é a tangente comum a K_1 e K_2 , então*

$$t_{12} = \frac{AB}{R} \sqrt{(R - R_1)(R - R_2)},$$

sendo R_1, R_2 e R os raios de K_1, K_2 e K , respectivamente.

Demonstração. Observe a Figura (4.1), como t_{12} é tangente comum a K_1 e K_2 , ele é perpendicular aos raios nos pontos de tangência. Supondo $R_1 > R_2$, seja T um ponto sobre o raio de K_1 tal que TO_2 seja paralelo a t_{12} . Assim, o triângulo TO_1O_2 é reto em T e ainda valem as relações, $TO_2 = t_{12}$ e $TO_1 = R_1 - R_2$,

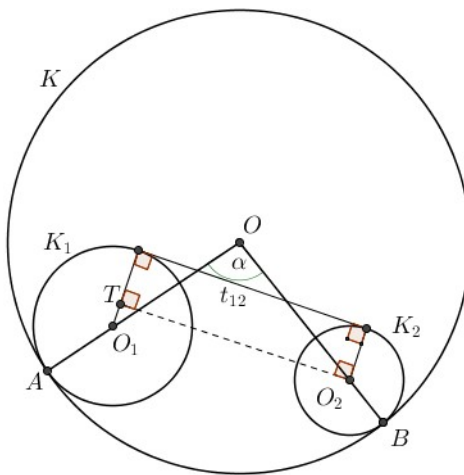


Figura 4.1: Lema 1

Portanto, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo TO_1O_2 , temos

$$t_{12}^2 = (O_1O_2)^2 - (R_1 - R_2)^2. \quad (4.2)$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo OO_1O_2 , temos

$$(O_1O_2)^2 = (R - R_1)^2 + (R - R_2)^2 - 2(R - R_1)(R - R_2) \cos \alpha. \quad (4.3)$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABO , temos

$$(AB)^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos \alpha = 2R^2(1 - \cos \alpha) \Rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{(AB)^2}{2R^2}. \quad (4.4)$$

Substituindo (4.4) em (4.3), temos

$$(O_1O_2)^2 = (R - R_1)^2 + (R - R_2)^2 - 2(R - R_1)(R - R_2) \left[1 - \frac{(AB)^2}{2R^2} \right]. \quad (4.5)$$

Agora, substituindo (4.5) em (4.2), temos

$$t_{12}^2 = (R - R_1)^2 + (R - R_2)^2 - 2(R - R_1)(R - R_2) \left[1 - \frac{(AB)^2}{2R^2} \right] - (R_1 - R_2)^2.$$

Efetuada as potências e reduzindo os termos semelhantes, temos

$$t_{12}^2 = \frac{(AB)^2}{R^2}(R - R_1)(R - R_2) \Rightarrow t_{12} = \frac{AB}{R} \sqrt{(R - R_1)(R - R_2)}. \quad (4.6)$$

o que completa a demonstração. ■

Lema 4.2. *Seja K_1 e K_2 circunferências tangentes exteriores à circunferência K nos pontos A e B , respectivamente, então a tangente comum a K_1 e K_2 é dada por*

$$t_{12} = \frac{AB}{R} \sqrt{(R + R_1)(R + R_2)},$$

onde R_1 , R_2 e R são os raios das circunferências K_1 , K_2 e K , respectivamente.

Demonstração. Observe a Figura (4.2) abaixo:

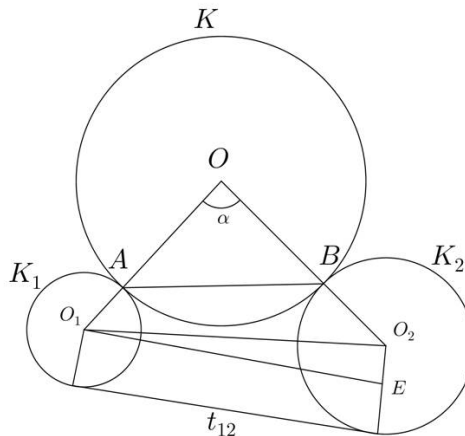


Figura 4.2: Lema 2

Se $R_1 = R_2$, temos $t_{12} = \frac{AB}{R}(R + R_1)$.

Suponha que $R_2 > R_1$. Seja E um ponto sobre o raio de K_2 tal que O_1E seja paralela a t_{12} .

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo EO_1O_2 , retângulo em E , onde $EO_1 = t_{12}$ e $EO_2 = R_2 - R_1$, temos

$$t_{12}^2 = (O_1O_2)^2 - (R_2 - R_1)^2. \quad (4.7)$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo OO_1O_2 , temos

$$(O_1O_2)^2 = (R + R_1)^2 + (R + R_2)^2 - 2(R + R_1)(R + R_2) \cos \alpha. \quad (4.8)$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABO , temos

$$(AB)^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{(AB)^2}{2R^2}. \quad (4.9)$$

Substituindo (4.9) em (4.8) temos

$$(O_1O_2)^2 = (R + R_1)^2 + (R + R_2)^2 - 2(R + R_1)(R + R_2) \left[1 - \frac{(AB)^2}{2R^2} \right]. \quad (4.10)$$

Agora, substituindo (4.10) em (4.7), temos

$$t_{12}^2 = (R + R_1)^2 + (R + R_2)^2 - 2(R + R_1)(R + R_2) \left[1 - \frac{(AB)^2}{2R^2} \right] - (R_2 - R_1)^2.$$

Efetuada as potências e reduzindo os termos semelhantes, temos que

$$t_{12}^2 = \frac{(AB)^2}{R^2} (R + R_1)(R + R_2) \Rightarrow t_{12} = \frac{AB}{R} \sqrt{(R + R_1)(R + R_2)}. \quad (4.11)$$

o que completa a demonstração. ■

Em posse desses resultados, demonstraremos o Teorema de Casey, a generalização do Teorema de Ptolomeu.

OBS: Demonstraremos o Teorema para dois casos possíveis: quando as circunferências K_1, K_2, K_3 , e K_4 são tangentes internamente (caso 1) e externamente (caso 2) à K .

Demonstração do caso 1. Observe a Figura 4.3:

Com a ajuda do lema (4.1), a demonstração do caso 1 do teorema de Casey é praticamente imediata pois, de forma análoga, teremos

$$\begin{aligned} t_{13} &= \frac{AC}{R} \sqrt{(R - R_1)(R - R_3)} & t_{14} &= \frac{AD}{R} \sqrt{(R - R_1)(R - R_4)} \\ t_{23} &= \frac{BC}{R} \sqrt{(R - R_2)(R - R_3)} & t_{24} &= \frac{BD}{R} \sqrt{(R - R_2)(R - R_4)} \\ t_{34} &= \frac{CD}{R} \sqrt{(R - R_3)(R - R_4)} \end{aligned}$$

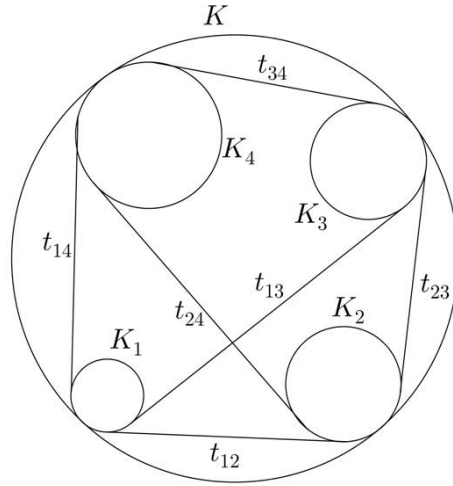


Figura 4.3: Visualização geral do caso 1 do Teorema de Casey

Utilizando as expressões acima, o valor correspondente à expressão $t_{14} \cdot t_{23} + t_{12} \cdot t_{34}$ é

$$\begin{aligned} \frac{AD}{R} \sqrt{(R - R_1)(R - R_4)} &\cdot \frac{BC}{R} \sqrt{(R - R_2)(R - R_3)} \\ &+ \frac{AB}{R} \sqrt{(R - R_1)(R - R_2)} \cdot \frac{CD}{R} \sqrt{(R - R_3)(R - R_4)} \end{aligned}$$

Efetuada os produtos acima e, em seguida, isolando o termo comum às parcelas resultantes, temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{AD \cdot BC}{R^2} + \frac{AB \cdot CD}{R^2} \right) \sqrt{(R - R_1)(R - R_2)(R - R_3)(R - R_4)} \\ \left(\frac{AD \cdot BC + AB \cdot CD}{R^2} \right) \sqrt{(R - R_1)(R - R_2)(R - R_3)(R - R_4)} \quad (4.12) \end{aligned}$$

Agora, observe que aplicando o Teorema de Ptolomeu no quadrilátero $ABCD$ temos que

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD.$$

Substituindo este resultado em (4.12), temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{AC \cdot BD}{R^2} \right) \sqrt{(R - R_1)(R - R_2)(R - R_3)(R - R_4)} = \\ \frac{AC}{R} \sqrt{(R - R_1)(R - R_3)} \cdot \frac{BD}{R} \sqrt{(R - R_2)(R - R_4)} = t_{13} \cdot t_{24}, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. ■

Demonstração do caso 2. Observe a Figura (4.4):

Tomando por base o lema (4.2), a demonstração do caso 2 do Teorema de Casey é prati-

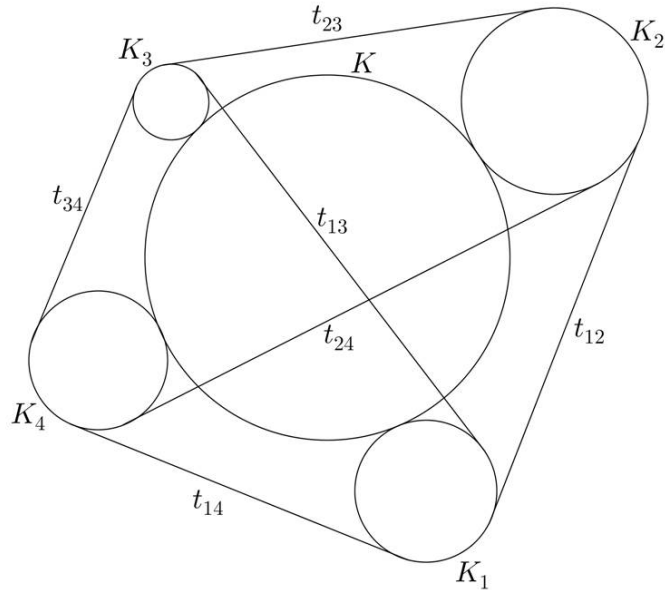


Figura 4.4: Visualização geral do caso 2 do Teorema de Casey

camente imediata, pois

$$\begin{aligned}
 t_{13} &= \frac{AC}{R} \sqrt{(R + R_1)(R + R_3)} & t_{14} &= \frac{AD}{R} \sqrt{(R + R_1)(R + R_4)} \\
 t_{23} &= \frac{BC}{R} \sqrt{(R + R_2)(R + R_3)} & t_{24} &= \frac{BD}{R} \sqrt{(R + R_2)(R + R_4)} \\
 t_{34} &= \frac{CD}{R} \sqrt{(R + R_3)(R + R_4)}
 \end{aligned}$$

Em posse desses resultados é possível verificar, por meio do teorema de Ptolomeu, que a expressão $t_{14} \cdot t_{23} + t_{12} \cdot t_{34}$ corresponde a $t_{13} \cdot t_{24}$, o que completa a demonstração. ■

Vale salientar que, independente do caso, se os valores de R_1 , R_2 , R_3 e R_4 se aproximarem de zero, temos exatamente o teorema de Ptolomeu, pois $t_{12} = AB$, $t_{13} = AC$, $t_{14} = AD$, $t_{23} = BC$, $t_{24} = BD$ e $t_{34} = CD$, e assim

$$t_{14} \cdot t_{23} + t_{12} \cdot t_{34} = AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD = t_{13} \cdot t_{24}.$$

4.3 Problemas

A proposta nesta Secção é apresentar a resolução de alguns problemas, digamos interessantes, para que o leitor possa perceber a importância do Teorema de Casey.

Problema 4.1. (IMO - International Mathematical Olympiad de Moscú, 1992, Índia) *As circunferências C_1 e C_2 são tangentes externamente no ponto I , e ambas são tangentes internamente a uma terceira circunferência C . Uma tangente comum às duas primeiras (C_1 e C_2) corta a terceira nos pontos B e C , enquanto a tangente comum a C_1 e C_2 , que*

passa por I , corta a terceira no ponto A e BC no ponto D . Demonstrar que I é o incentro de ABC .

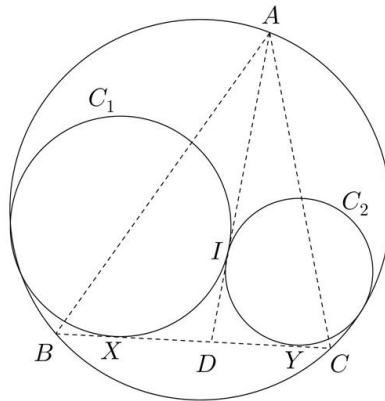


Figura 4.5: Problema 4.1

Resolução. Seja $BC \cap C_1 = X$, $BC \cap C_2 = Y$, $z = AI$, $u = ID$ e a, b, c as respectivas medidas de BC , AC e AB . Sejam também $BX = x$, $CY = y$ e $DX = DY = DI = u$. Aplicando o Teorema de Casey à quádrupla (A, C_1, B, C) , temos:

$$\begin{aligned} t_{12} &= AI = z, & t_{13} &= AB = c, & t_{14} &= AC = b, \\ t_{23} &= BX = x, & t_{24} &= CX = 2u + y, & t_{34} &= BC = a. \end{aligned}$$

Portanto,

$$az + bx = c(2u + y) \quad (4.13)$$

Analogamente, agora aplicando o teorema de Casey à quádrupla (A, C_2, C, B) , temos

$$\begin{aligned} t_{12} &= AI = z, & t_{13} &= AC = b, & t_{14} &= AB = c, \\ t_{23} &= YC = y, & t_{24} &= YB = 2u + x, & t_{34} &= BC = a. \end{aligned}$$

Portanto,

$$az + cy = b(2u + x) \quad (4.14)$$

Subtraindo (4.13) e (4.14), obtemos

$$\begin{aligned} bx - cy &= 2u(c - b) + cy - bx \Rightarrow 2bx - 2cy = 2u(c - b) \\ &\Rightarrow bx - cy = u(c - b) \\ &\Rightarrow bx + ub = cy + uc \\ &\Rightarrow \frac{x + u}{y + u} = \frac{c}{b}, \end{aligned}$$

ou melhor, $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$, de onde, pelo recíproco do Teorema da Bissetriz Interna (veja Teorema 1.17), se conclui que AI é bissetriz de \hat{BAC} . Agora, somando (4.13) e (4.14),

temos $az = u(b + c)$, ou melhor,

$$\frac{z}{u} = \frac{b + c}{a}.$$

Isso quer dizer que $\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BC}$, de onde, novamente pelo Teorema (1.17), se conclui que BI é bissetriz de $\hat{A}BC$. Assim, como $AI \cap BI = I$, podemos concluir que I é incentro de ABC . ■

Problema 4.2. *Seja D um ponto pertencente ao lado AB de um triângulo ABC . Seja $K_1(O_1, r_1)$ um círculo tangente internamente ao círculo K , circunscrito a ABC , bem como tangente a AD , no ponto M , e a CD . Seja também $K_2(O_2, r_2)$ um outro círculo tangente internamente a K , assim como a BD , no ponto N , e a CD . Se r é o raio de K , demonstrar que $r = r_1 \cdot \cos^2(\frac{\alpha}{2}) + r_2 \cdot \sen^2(\frac{\alpha}{2})$, onde $\alpha = \hat{A}DC$.*

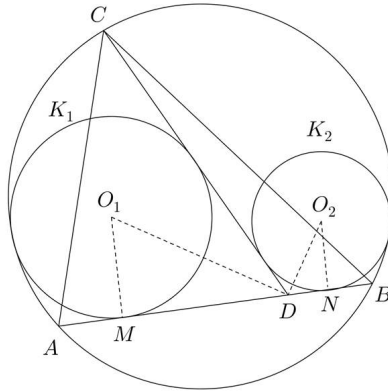


Figura 4.6: Problema 4.2

Demonstração. Seja $x = DM$. Aplicando o teorema de Casey à quádrupla (A, B, C, K_1) , temos

$$\begin{aligned} t_{12} = AB = c, & & t_{13} = AC = b, & & t_{14} = AM = AD - x, \\ t_{23} = BC = a, & & t_{24} = BM = BD + x, & & t_{34} = CD - x. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} c(CD - x) + a(AD - x) &= b(BD + x) \\ c \cdot CD - cx + a \cdot AD - ax &= b \cdot BD + bx \\ a \cdot AD + c \cdot CD - b \cdot BD &= x(a + b + c) \end{aligned} \tag{4.15}$$

Agora, seja $y = DN$. Aplicando o teorema de Casey à quádrupla (A, B, K_2, C) , temos

$$\begin{aligned} t_{12} = AB = c, & & t_{13} = AN = AD + y, & & t_{14} = AC = b, \\ t_{23} = BN = BD - y, & & t_{24} = BC = a, & & t_{34} = CD - y. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
c(CD - y) + b(BD - y) &= a(AD + y) \\
c \cdot CD - cy + b \cdot BD - by &= a \cdot AD + ay \\
c \cdot CD + b \cdot BD - a \cdot AD &= y(a + b + c)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Somando (4.15) e (4.16) obtemos

$$2c \cdot CD = (x + y)(a + b + c) \Rightarrow x + y = \frac{2c \cdot CD}{a + b + c}.$$

Porém, no triângulo O_1MD temos que $x = r_1 \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Já no triângulo O_2ND temos que $y = r_2 \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Logo,

$$r_1 \cdot \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) + r_2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2c \cdot CD}{a + b + c}. \tag{4.17}$$

Por outro lado, sabe-se que $\operatorname{tg}(2 \cdot \frac{\alpha}{2}) = \frac{2 \operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2})}{1 - \operatorname{tg}^2(\frac{\alpha}{2})}$, ou melhor,

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \operatorname{tg}\alpha \left[1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] \\
&= \operatorname{tg}\alpha \left[\frac{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right] \\
&= \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right) \cdot \left[\frac{\cos\alpha}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right] \\
&= \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{e} \quad \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}\alpha}. \tag{4.18}$$

Substituindo as equações (4.18) em (4.17), temos que

$$r_1 \left[\frac{2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}\alpha}\right] + r_2 \left[\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right] = \frac{2c \cdot CD}{a + b + c}.$$

Multiplicando a expressão acima por $\operatorname{sen}\alpha$, temos

$$2r_1 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + r_2 \left[\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right] = \frac{2c \cdot CD \cdot \operatorname{sen}\alpha}{a + b + c}.$$

Como $\operatorname{sen}^2\alpha = 4 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, temos que

$$2r_1 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + r_2 \left[\frac{4 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right] = \frac{2c \cdot CD \cdot \operatorname{sen}\alpha}{a + b + c}$$

$$r_1 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + r_2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{c \cdot CD \cdot \operatorname{sen}\alpha}{a + b + c}.$$

Seja h_c a altura do triângulo ADC relativa ao lado AD . Logo, $CD \cdot \operatorname{sen}\alpha = h_c$. Sendo A a área do triângulo ABC , temos que

$$r_1 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + r_2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{c \cdot h_c}{a + b + c} = \frac{2A}{a + b + c}.$$

Como $A = p \cdot r$, sendo p o semiperímetro do triângulo ABC , temos

$$r_1 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + r_2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2A}{a + b + c} = \frac{2pr}{a + b + c} = r,$$

o que completa a demonstração. ■

Capítulo 5

Problemas e Aplicações

Neste Capítulo será apresentado alguns problemas e algumas aplicações dos vários teoremas e resultados que foram abordados ao longo dessa dissertação. Como são problemas com várias referências, as mesmas estarão indicadas em cada um deles.

5.1 Problemas

Problema 5.1. *Calcule as diagonais de um quadrilátero inscrito em função das medidas dos lados ([4], páginas 197 e 198).*

Resolução. Sendo as medidas dos lados do quadrilátero inscrito na circunferência, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ e $AD = d$. Observe a Figura abaixo:

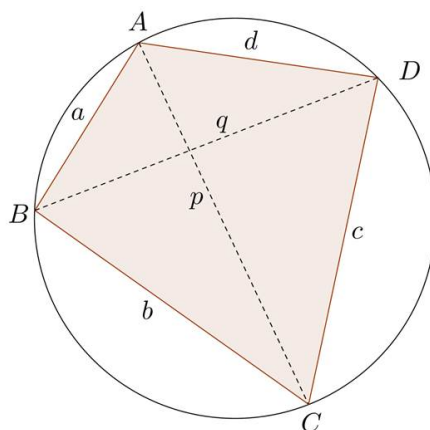


Figura 5.1: Problema 5.1

Aplicando o Teorema de Ptolomeu (3.1) e o Teorema de Hiparco (2.3). Sendo $BD = q$ e $AC = p$, teremos, respectivamente,

$$pq = ac + bd \quad \text{e} \quad \frac{p}{q} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Multiplicando essas equações membro a membro,

$$pq \cdot \frac{p}{q} = (ac + bd) \left(\frac{ad + bc}{ab + cd} \right) \Rightarrow p^2 = (ac + bd) \left(\frac{ad + bc}{ab + cd} \right) \Rightarrow$$

$$p = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}.$$

Por outro lado, dividindo as mesmas equações membro a membro,

$$pq \cdot \frac{q}{p} = (ac + bd) \left(\frac{ab + cd}{ad + bc} \right) \Rightarrow q^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc} \Rightarrow$$

$$q = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}. \quad \blacksquare$$

Problema 5.2. (IME - Instituto Militar de Engenharia) *Em um círculo com $10\sqrt{2}$ de diâmetro temos duas cordas medindo 2 e 10. Achar a corda do arco soma dos arcos das cordas anteriores.*

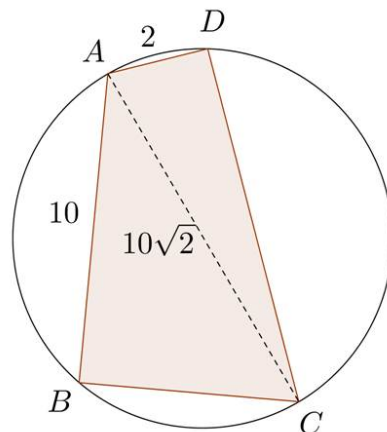


Figura 5.2: Problema 5.2

Resolução. Seja AC um diâmetro da circunferência, bem como AD e AB as cordas que medem 2 e 10, respectivamente. Note que ABC e ADC são triângulos retângulos em B e D , respectivamente. Então, aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos ABC e ADC , temos

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (10\sqrt{2})^2 = 10^2 + (BC)^2 \Rightarrow BC = 10.$$

$$(AC)^2 = (AD)^2 + (CD)^2 \Rightarrow (10\sqrt{2})^2 = 2^2 + (CD)^2 \Rightarrow CD = 14.$$

Observe que a corda do arco soma dos arcos das cordas coincide com a diagonal BD do quadrilátero $ABCD$ inscrito na circunferência. Dessa forma, aplicando o Teorema de

Ptolomeu, temos

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC \Rightarrow$$

$$10\sqrt{2} \cdot BD = 10 \cdot 14 + 2 \cdot 10 \Rightarrow BD = 8\sqrt{2}. \quad \blacksquare$$

Problema 5.3. (Seletiva do Brasil para a Olimpíada do Cone Sul) *Prove que as distâncias entre um ponto sobre uma circunferência e os quatro vértices de um quadrado nessa inscrita não podem ser todas números racionais.*

Resolução. Observe que $ABCD$ é um quadrado. Logo, temos $AB = BC = CD = DA = a$.

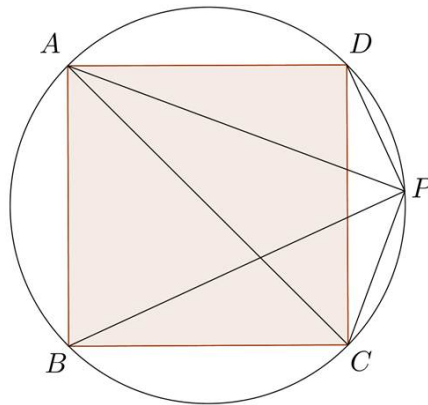


Figura 5.3: Problema 5.3

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC , temos

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (AC)^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{2}.$$

Aplicando o Teorema de Ptolomeu ao quadrilátero inscrito $ABCP$, temos

$$AC \cdot BP = AP \cdot BC + AB \cdot PC \Rightarrow a\sqrt{2} \cdot BP = a \cdot AP + a \cdot PC \Rightarrow \frac{AP + PC}{BP} = \sqrt{2}.$$

Como $\sqrt{2}$ não é um número racional, conclui-se que uma dessas medidas não é um número racional. ■

Problema 5.4 (Prova da disciplina MA13 - PROFMAT 2013). *O quadrilátero $ABCD$ está inscrito em uma circunferência. Seja M o ponto médio do arco CD , como mostra a Figura. Os segmentos MA e MB cortam o lado CD em P e Q , respectivamente.*

- a) *Mostre que o quadrilátero $ABQP$ é inscritível.*
- b) *Mostre que os ângulos $D\hat{A}Q$ e $P\hat{B}C$ são iguais.*

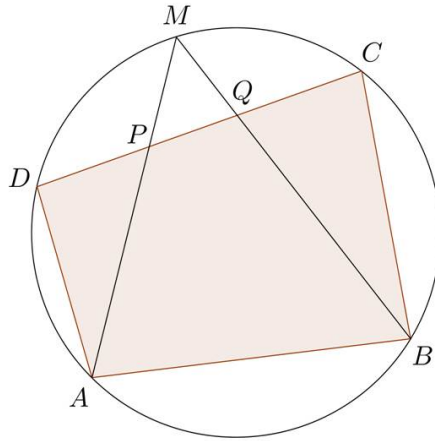


Figura 5.4: Problema 5.4

Solução. Vejamos a solução para ambos os itens.

- a) Para mostrar que o quadrilátero $ABQP$ é inscritível basta mostrar que a soma de dois ângulos internos opostos é igual a 180° . Assim, sejam a , b , c e d as medidas angulares dos arcos \widehat{DA} , \widehat{AB} , \widehat{BC} , \widehat{CM} e \widehat{MD} , respectivamente, como mostra a Figura abaixo:

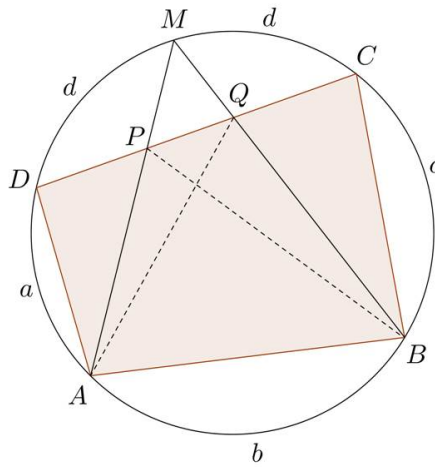


Figura 5.5: Solução do problema 5.4

Pelo Teorema (1.2-B), o ângulo $M\hat{A}B$ é um ângulo inscrito. Logo

$$P\hat{A}B = M\hat{A}B = \frac{\widehat{BM}}{2} = \frac{c+d}{2}. \quad (5.1)$$

Agora, pelo Teorema (1.2-C), o ângulo $B\hat{Q}P$ é excêntrico interno. Logo

$$B\hat{Q}P = B\hat{Q}D = \frac{\widehat{DAB} + \widehat{CM}}{2} = \frac{a+b+d}{2}. \quad (5.2)$$

Somando as equações 5.1 e 5.2, temos

$$P\hat{A}B + B\hat{Q}P = \frac{a + b + c + d + d}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

Portanto, o quadrilátero $ABQP$ é inscrito.

b) Vemos que $D\hat{A}Q = D\hat{A}P + P\hat{A}Q$. Como $D\hat{A}P = D\hat{A}M$, então

$$D\hat{A}Q = D\hat{A}M + P\hat{A}Q = \frac{d}{2} + P\hat{A}Q.$$

Seguindo o mesmo raciocínio, $P\hat{B}C = P\hat{B}Q + Q\hat{B}C$. Como $Q\hat{B}C = M\hat{B}C$, então

$$P\hat{B}C = P\hat{B}Q + M\hat{B}C = P\hat{B}Q + \frac{d}{2}.$$

Como o quadrilátero $ABQP$ é inscrito, então os ângulos $P\hat{A}Q$ e $P\hat{B}Q$ são congruentes. Logo $D\hat{A}Q = P\hat{B}C$. ■

Problema 5.5 (Primeira avaliação da disciplina MA13 - PROFMAT 2014). *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Prove que se os ângulos BDA e ACB são iguais ($B\hat{D}A = A\hat{C}B$), então o quadrilátero é inscrito em um círculo. Verifique, justificando, se a recíproca é verdadeira.*

Solução. Considere o círculo determinado por A , B e C . Queremos provar que D pertence a esta circunferência. Seja D' a interseção ($D' \neq B$) da semirreta \overrightarrow{BD} com a circunferência. Supondo, por absurdo, que D não pertença à circunferência, teremos $D' \neq D$. Com isso, os ângulos $B\hat{D}'A$ e $A\hat{C}B$ são congruentes, ou seja, $B\hat{D}'A = A\hat{C}B$, pois ambos são ângulos inscritos na circunferência (veja Teorema 1.2-B), e determinam o mesmo arco \widehat{AB} e, com isso, os ângulos $B\hat{D}'A$ e $B\hat{D}A$ são congruentes, pois os ângulos $B\hat{D}A$ e $A\hat{C}B$ são congruentes, por hipótese.

Caso D esteja entre D' e B , o ângulo externo $A\hat{D}B$ do triângulo ADD' seria congruente ao ângulo interno $A\hat{D}'D$, o que é um absurdo; Caso D' esteja entre D e B , o ângulo externo $A\hat{D}'B$ seria congruente ao ângulo interno $A\hat{D}D'$, o que também é absurdo; A recíproca é obviamente verdadeira, pois se $ABCD$ é inscrito em um círculo, os ângulos inscritos $B\hat{D}A$ e $A\hat{C}B$ determinarão o mesmo arco \widehat{AB} . Portanto, os ângulos $B\hat{D}A$ e $A\hat{C}B$ são congruentes ($B\hat{D}A = A\hat{C}B$). ■

Problema 5.6. *Num quadrilátero inscrito $ABCD$, $AD = DC$. Se as diagonais desse quadrilátero intersectam-se no ponto I , e se $AI = 6$, $CI = 4$ e $BI = 8$, quanto mede o maior lado desse quadrilátero? ([4], página 319).*

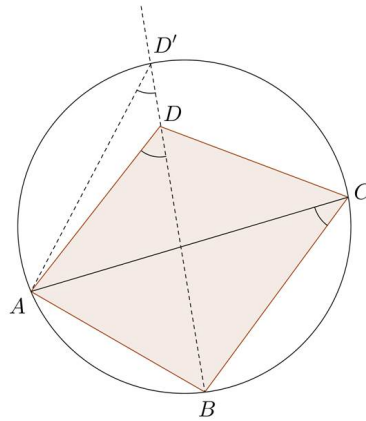


Figura 5.6: Solução do problema 5.5

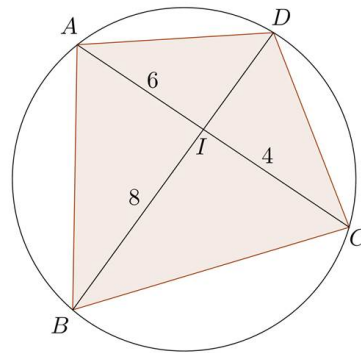


Figura 5.7: Problema 5.6

Solução. Segundo o Teorema (1.2-B), os ângulos $\hat{A}DB$ e $\hat{A}CB$ são congruentes, da mesma forma que $\hat{A}ID$ e $\hat{B}IC$, por serem opostos pelo vértice. Assim, os triângulos AID e BIC são semelhantes. Logo,

$$\frac{ID}{4} = \frac{6}{8} \Rightarrow ID = 3.$$

Considere a Figura abaixo, onde $AB = a$, $BC = b$ e $CD = AD = c$.

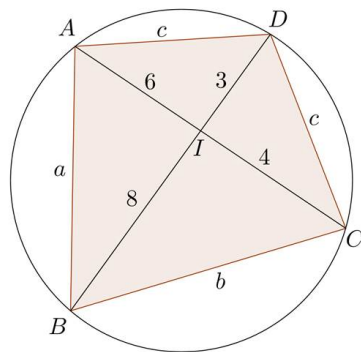


Figura 5.8: Solução do problema 5.6

Ainda pela semelhança dos triângulos AID e BIC ,

$$\frac{BC}{AD} = \frac{BI}{AI} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{8}{6} \Rightarrow b = \frac{4c}{3}. \quad (5.3)$$

Os triângulos AIB e DIC também são semelhantes, pois os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{D}C$ são congruentes (Teorema 1.2-B), e os ângulos $A\hat{I}B$ e $D\hat{I}C$ também são, por serem opostos pelo vértice. Portanto, temos que

$$\frac{AB}{CD} = \frac{BI}{CI} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{8}{4} \Rightarrow a = 2c. \quad (5.4)$$

Agora, aplicando o Teorema de Ptolomeu (3.1) ao quadrilátero $ABCD$, e tomando os resultados (5.3) e (5.4), temos

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD \therefore ac + bc = 10 \cdot 11$$

$$2c^2 + (4/3)c^2 = 110 \therefore c = \sqrt{33}.$$

Assim, os lados do quadrilátero $ABCD$ são

$$\begin{aligned} AB &= a = 2c = 2\sqrt{33} \\ BC &= b = (4/3)\sqrt{33} \\ AD &= CD = c = \sqrt{33} \end{aligned}$$

Dessa forma, a medida do maior lado é $2\sqrt{33}$. ■

Problema 5.7 (IMO - Irã). *Seja ABC um triângulo com $BC > CA > AB$. Seja D um ponto sobre o lado BC e seja E o ponto no prolongamento de BA , com A entre E e B , tal que $BD = BE = CA$. Seja P o ponto sobre AC tal que E, B, D e P são concíclicos e seja Q o segundo ponto de interseção de BP com o círculo circunscrito ao triângulo ABC . Prove que $AQ + CQ = BP$.*

Solução. Observe a Figura 5.9

Veja que os triângulos AQC e EPD são semelhantes, pois

$$C\hat{A}Q = C\hat{B}Q = D\hat{E}P \quad \text{e} \quad A\hat{Q}C = 180^\circ - A\hat{B}D = E\hat{P}D.$$

Aplicando o Teorema de Ptolomeu no quadrilátero $BDPE$, temos

$$BP \cdot DE = BE \cdot DP + BD \cdot EP \Rightarrow BP = BE \cdot \frac{DP}{DE} + BD \cdot \frac{EP}{DE}. \quad (5.5)$$

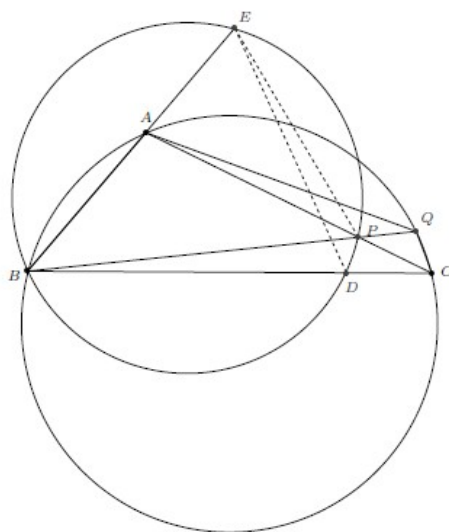


Figura 5.9: Solução do problema 5.7

Utilizando a semelhança entre os triângulos AQC e EPD , temos

$$\frac{AQ}{EP} = \frac{CQ}{DP} = \frac{CA}{DE}.$$

Ou seja,

$$\frac{DP}{DE} = \frac{CQ}{CA} \quad \text{e} \quad \frac{EP}{DE} = \frac{AQ}{CA}.$$

Substituindo esses resultados na Equação (5.5) e, como $BD = BE = CA$ (enunciado do problema) , temos

$$BP = CA \cdot \frac{CQ}{CA} + CA \cdot \frac{AQ}{CA} \Rightarrow BP = CQ + AQ. \quad \blacksquare$$

Problema 5.8. *Seja $A_1A_2A_3 \dots A_n$ um polígono regular de n lados, tal que*

$$\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_4}. \quad (5.6)$$

Determine n , ou seja, o número de lados de polígono regular. [5].

Solução. Observe a Figura abaixo:

Da equação (5.6) temos que

$$A_1A_2 \cdot A_1A_3 + A_1A_2 \cdot A_1A_4 = A_1A_3 \cdot A_1A_4. \quad (5.7)$$

Como o quadrilátero $A_1A_3A_4A_5$ é inscrito, podemos aplicar o Teorema de Ptolomeu (3.1). Assim,

$$A_4A_5 \cdot A_1A_3 + A_3A_4 \cdot A_1A_5 = A_3A_5 \cdot A_1A_4. \quad (5.8)$$

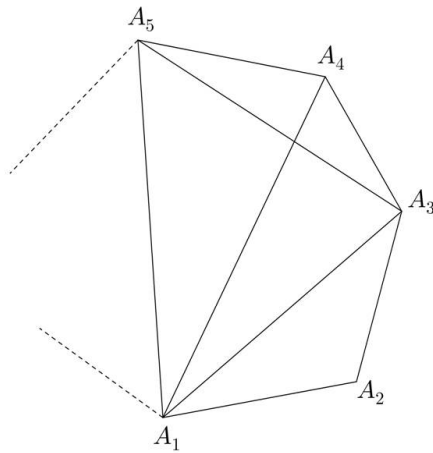


Figura 5.10: Problema 5.8

Além disso, como o polígono é regular, temos

$$A_1A_2 = A_4A_5, \quad A_1A_2 = A_3A_4, \quad A_1A_3 = A_3A_5.$$

Comparando as equações (5.7) e (5.8), obtemos

$$A_1A_4 = A_1A_5.$$

Como as diagonais A_1A_4 e A_1A_5 são iguais, segue que existe o mesmo número de vértices entre A_1 e A_4 e entre A_1 e A_5 . Dessa forma, concluímos que $n = 7$. ■

5.2 Aplicações

Aplicação 1.

Demonstração da fórmula: $(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\operatorname{cos} \alpha)^2 = 1$

Solução: Considere um retângulo $ABCD$ inscrito numa circunferência de diâmetro igual a 1.

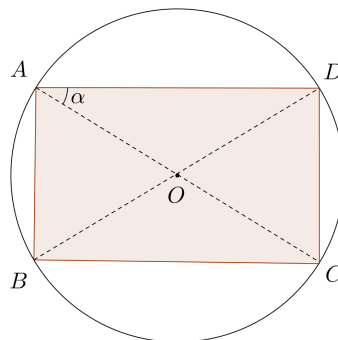


Figura 5.11: Aplicação 1

Note que $AC = BD = 1$. Observe também que, sendo $\widehat{CAD} = \alpha$, temos $\text{sen}\alpha = CD$ e $\text{cos}\alpha = AD$. Como $ABCD$ é um retângulo, então teremos $AB = CD = \text{sen}\alpha$ e $AD = BC = \text{cos}\alpha$. Aplicando o Teorema de Ptolomeu (3.1), temos $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$. Assim, $(\text{sen}\alpha)^2 + (\text{cos}\alpha)^2 = 1$, relação fundamental da trigonometria. Observe que a relação vale para qualquer ângulo α , pois o que muda são os sinais do $\text{sen}\alpha$ e $\text{cos}\alpha$, porém os termos da relação estão elevados ao quadrado.

Aplicação 2.

Demonstração do Teorema de Pitágoras

Solução: Inicialmente, considere o triângulo ABC retângulo em B . Seja D um ponto do plano tal que $ABCD$ seja retângulo.

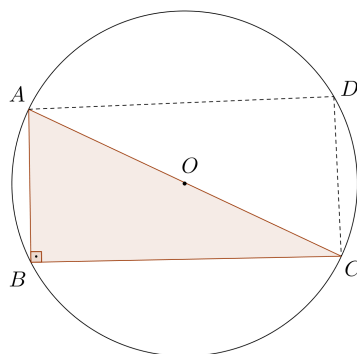


Figura 5.12: Aplicação 2

Como $ABCD$ é um retângulo, então $AB = CD$, $AD = BC$ e $AC = BD$. Aplicando o teorema de Ptolomeu (3.1), no quadrilátero inscritível $ABCD$, obtemos $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$, ou melhor, $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$. Temos, assim, o teorema de Pitágoras, obtido no triângulo ABC .

Aplicação 3.

Demonstração da fórmula: $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha \text{cos}\beta + \text{sen}\beta \text{cos}\alpha$.

Solução: Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito numa circunferência de diâmetro igual a 1 e $\alpha + \beta < 180^\circ$. Considere AC , uma de suas diagonais, igual ao diâmetro da circunferência, assim como $\widehat{BAC} = \alpha$ e $\widehat{CAD} = \beta$.

No triângulo ABC , temos que $\text{sen}\alpha = BC$ e $\text{cos}\alpha = AB$. Já no triângulo ADC temos que $\text{sen}\beta = CD$ e $\text{cos}\beta = AD$. Aplicando a lei dos senos (1.14) no triângulo ABD , obtemos

$$\frac{BD}{\text{sen}(\alpha + \beta)} = 1,$$

ou seja, $\text{sen}(\alpha + \beta) = BD$. Aplicando o teorema de Ptolomeu (3.1), temos $AC \cdot BD =$

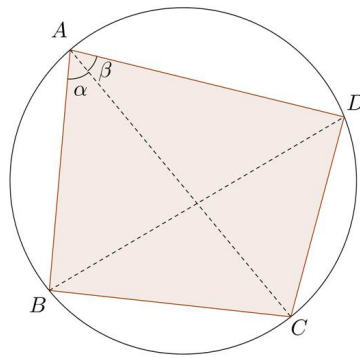


Figura 5.13: Aplicação 3

$AB \cdot CD + AD \cdot BC$. Logo, $1 \cdot \text{sen}(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \text{sen} \beta + \cos \beta \cdot \text{sen} \alpha$, ou melhor, $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen} \alpha \cos \beta + \text{sen} \beta \cos \alpha$.

Aplicação 4.

Demonstração da fórmula: $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen} \alpha \cos \beta - \text{sen} \beta \cos \alpha$.

Solução: Considere um quadrilátero inscrito numa circunferência de diâmetro igual a 1. Seja AD um dos lados do quadrilátero de tal modo que AD coincida com um diâmetro da circunferência.

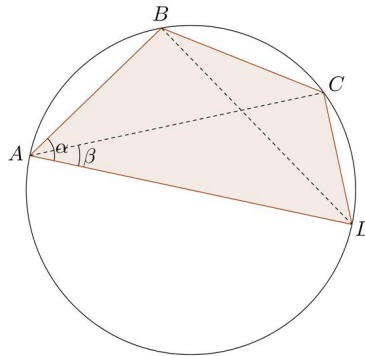


Figura 5.14: Aplicação 4

Note que os triângulos ABD e ACD são retângulos em B e C , respectivamente. Sendo $\widehat{BAD} = \alpha$ e $\widehat{CAD} = \beta$, então $\text{sen} \alpha = BD$, $\cos \alpha = AB$, $\text{sen} \beta = CD$ e $\cos \beta = AC$. Observe que o ângulo \widehat{BAC} é igual a $\alpha - \beta$. Aplicando a lei dos senos (1.14) no triângulo ABC , temos

$$\frac{BC}{\text{sen}(\alpha - \beta)} = 1,$$

ou seja, $\text{sen}(\alpha - \beta) = BC$. Agora, aplicando o teorema de Ptolomeu (3.1) no quadrilátero $ABCD$, temos $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$, ou melhor, $\cos \beta \cdot \text{sen} \alpha = \cos \alpha \cdot \text{sen} \beta + 1 \cdot \text{sen}(\alpha - \beta)$. Ou seja, $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen} \alpha \cos \beta - \text{sen} \beta \cos \alpha$.

Conclusão

Esse trabalho teve como finalidade apresentar o Teorema de Ptolomeu e, numa generalização do mesmo, o Teorema de Casey, de modo que alunos do Ensino Médio e estudantes, em âmbito geral, tenham um bom entendimento desses teoremas, bem como de suas aplicações.

Apresentamos definições, propriedades e resultados como pré-requisitos para que o estudante não necessite buscá-los em outras fontes, permitindo-lhes melhor compreensão dos teoremas presentes nesta dissertação.

Desse modo, todas as proposições, aplicações, definições e problemas foram acompanhados por figuras, com o intuito de facilitar o entendimento, da melhor forma possível, sobre os resultados, demonstrações e soluções que constam neste trabalho.

Houve também a pretensão de que os resultados apresentados nessa pesquisa contribuíssem com o estudo e com o ensino da Geometria Plana, abordando um pouco de história da matemática, bem como demonstrações e soluções de problemas, os quais servem como aspectos motivadores para o processo de ensino-aprendizagem.

Enfatizamos o estudo da geometria porque acreditamos que os professores, já muito atribulados com conteúdo, indisciplina em sala de aula, tempo exíguo para ministrar esses assuntos, resistência por parte dos diretores, coordenadores, pais e, principalmente, dos próprios estudantes, acabam optando por uma abordagem mais resumida e direta dos conteúdos.

Além disso, procuramos ressaltar a importância de apresentar as demonstrações para os seus teoremas, postulados e, também, alguns momentos da história dos personagens que muito contribuíram nesta ciência, como forma de deixar a Matemática mais acessível e atraente aos estudantes.

Dessa maneira, com a realização deste trabalho, aprendemos mais sobre este ramo eminente e tão interessante da matemática: a Geometria.

Referências Bibliográficas

- [1] BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. 6ª Edição. Coleção do Professor de Matemática, SBM. Rio de Janeiro, 2003.
- [2] DE MATOS, Elisabete Olívia Monteiro, *Uma Abordagem ao Problema de Steiner*. Faculdade de Ciências, Universidade de Porto, Portugal.
- [3] MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. *Geometria I*. 5ª Edição. Editora Francisco Alves. Rio de Janeiro, 1990.
- [4] MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. *Geometria II*. 2ª Edição. Editora Francisco Alves. Rio de Janeiro, 1990.
- [5] NETO, A. C. M. *Geometria*. Coleção PROFMAT, SBM. Rio de Janeiro, 2013.
- [6] NETO, A. C. M. *Geometria Euclidiana Plana*, vol. 2. Tópicos de Matemática Elementar, Coleção Professor de Matemática, SBM. Rio de Janeiro, 2012.
- [7] PINHO, J. L. R.; BATISTA, E.; CARVALHO, N. T. B. *Geometria I*. 2ª Edição. EAD/UFSC/CED/CFM. Florianópolis, 2010.
- [8] Bellot, F. R. *Los teoremas de Ptolomeo y su generalización por Casey. Aplicaciones*. Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, n. 1. 2002.
- [9] wikipedia, *Fermat point*. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_point