UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Sérgio José Pessoa da Silva Barreto

Problemas de Otimização: Uma Proposta de Abordagem no Ensino Médio

RECIFE
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Sérgio José Pessoa da Silva Barreto

Problemas de Otimização: Uma Proposta de Abordagem no Ensino Médio

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Bárbara Costa da Silva

RECIFE
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

B273p Barreto, Sérgio José Pessoa da Silva
Problemas de otimização: uma proposta de abordagem no ensino médio / Sérgio José Pessoa da Silva Barreto. – 2017.
81 f.: il.

Orientadora: Bárbara Costa da Silva.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Recife, BR-PE, 2017.
Inclui referências.

1. Matriz 2. Desigualdade 3. Otimização 4. Linear
5. Programação I. Silva, Bárbara Costa da, orient. II. Título

CDD 510

SÉRGIO JOSÉ PESSOA DA SILVA BARRETO

Problemas de Otimização: Uma proposta de Abordagem no Ensino Médio

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em ____ /____/_____

BANCA EXAMINADORA

____

Prof[a] Dr[a] Bárbara Costa da Silva (Orientador(a))– UFRPE

____

Prof. Dr. Felipe Wergete Cruz – **DMAT-UFPE**

____

Prof. Dr. Paulo Roberto Santiago– PROFMAT/UFRPE

Aos meus pais,
à minha esposa e
aos meus filhos.

Agradecimentos

Ao Prof. Msc. Olavo Otávio Nunes, pelos ensinamentos e incentivos transmitidos desde a graduação e o privilégio da amizade por mais de trinta anos.

À Profa. Dra. Bárbara Costa da Silva, pela orientação paciente, competente e encorajadora durante a realização deste trabalho.

Ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE, pela dedicação dispensada a nós do Corpo Discente.

À CAPES pelo financiamento de bolsa de mestrado durante o curso.

Aos colegas professores do Instituto Federal de Pernambuco - IFPE, *Campus* Recife, pelo apoio e incentivo, especialmente ao Corpo Docente de Matemática, por ter assumido uma grande parte do meu esforço acadêmico, para que eu pudesse me dedicar ao trabalho de escrever esta dissertação.

Ao CAP PM Fabiano Rodrigues dos Santos, Coordenador Geral do Ensino Médio do Colégio da Polícia Militar de Pernambuco - CPM, pela compreensão e ajuda nos momentos de ausência ao CPM para a conclusão deste trabalho.

"Frequentemente, os peritos não dão atenção suficiente à força da vontade humana. Se os seres humanos estiverem determinados a fazer alguma coisa, eles a farão, mesmo que todos os cálculos demonstrem que ela é impossível".

Josip Broz Tito (07/05/1892 - 04/05/1980)

Declaração

Eu, **Sérgio José Pessoa da Silva Barreto**, declaro para devidos fins e efeitos, que a dissertação sob título **Problemas de Otimização: Uma Proposta de Abordagem no Ensino Médio**, entregue como Trabalho de Conclusão de curso para obtenção do título de mestre, com exceção das citações diretas e inderetas claramente indicadas e refereniadas, é um trabalho original. Eu estou consciente que a utilização de material de terceiros incluindo uso de paráfrase sem a devida indicação das fontes será considerado plágio, e estará sujeito a processos administrativos da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais. Declaro ainda que respeitei todos os requesitos dos direitos de autor e isento a Pós-graduação PROFMAT/UFRPE, bem como o professor orientador **Bárbara Costa da Silva**, de qualquer ônus ou responsabilidade sobre a sua autoria.

Recife, 27 de Abril de 2017.

Resumo

O objetivo do trabalho é apresentar ao professor do Ensino Médio uma abordagem de resolução de problemas de otimização utilizando conceitos básicos como matriz, determinante e sistema linear. Para tal intuito, apresentamos também alguns tópicos de desigualdades lineares e programação linear necessários para fundamentar a metodologia sugerida na resolução dos problemas. Fizemos a resolução gráfica e algébrica de um problema para servir de modelo na resolução do conjunto de cinco problemas aqui propostos bem como em algum outro das referências bibliográficas.

Palavras-chave: Matriz. Desigualdade. Programação. Linear. Otimização.

Abstract

The objective of this work is to present to the high school teacher an approach to solving optimization problems using basic concepts such as matrix, determinant and linear system. For this purpose, we also present some topics of linear inequalities and linear programming necessary to support the methodology suggested in problem solving. We did the graphic and algebraic resolution of a problem to serve as a model in solving the set of five problems proposed here as well as in some other of the bibliographical references.

Keywords: Matrix. Inequality. Programming. Linear. Optimization.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Gráfico da Reta $2x + y = 4$ 42
Figura 2 – O ponto A' pertence ao conjunto $R_1 = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2\, ;\, 2x + y < 4\}$ . . . 43
Figura 3 – Gráfico da inequação $2x + y < 4$ 43
Figura 4 – Gráfico da inequação $2x + y > 4$ 44
Figura 5 – A figura (a) é um Conjunto Convexo e a figura (b) não é um Conjunto Convexo 45
Figura 6 – Representação do Segmento de Reta P_1P_2 46
Figura 7 – Região viável do problema de Programação Linear 52
Figura 8 – Retas paralelas a $r : 30x + 45y = 0$ para a solução ótima 53
Figura 9 – região viável do problema ilimitado 54
Figura 10 – região viável do problema inviável 55
Figura 11 – Região viável 56
Figura 12 – Região Convexa $\mathcal{S}$ de vértices $P_1,\, P_2,\, \cdots,\, P_n$ 72

Sumário

Introdução 21

1 CONCEITOS BÁSICOS 25
1.1 Matrizes 25
1.2 Determinantes 31
1.3 Sistemas de Equações Lineares 32

2 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO 41
2.1 Desigualdades Lineares no Plano 41
2.1.1 Conjuntos Convexos 45
2.2 Programação Linear 48
2.2.1 Conceitos Básicos 48
2.2.2 Modelos de Programação Linear 50
2.2.3 Resolução Gráfica de um Problema de Programação Linear . . 51
2.2.4 Método Algébrico Utilizando Soluções Básicas Viáveis 57
2.2.5 Problemas Propostos de Programação Linear 75

Conclusão 79

REFERÊNCIAS 81

Introdução

No período de 1987 a 2008, lecionamos no Ensino Médio e Cursinho de várias escolas da rede particular da cidade do Recife. E, em muitas delas, lecionamos a Geometria Analítica no terceiro ano do Ensino Médio. Em 1990, assumimos o ensino de Geometria Analítica, nas duas turmas de terceiro ano do Colégio Vera Cruz, a partir da programação feita por um colega.

Nessa programação, no capítulo *"Estudo da Reta"*, aparecia o tópico *"Estudo do Sinal da Função $f(x, y)$"*. E, no livro texto da disciplina, *Fundamentos da Matemática Elementar* (1), justifica-se o estudo desse tópico para conhecer os subconjuntos de pontos do plano cuja função $f(x, y)$ é nula, positiva e negativa, desprovido de algum significado prático.

Em 2009, assumimos parte da disciplina *Pesquisa Operacional I* no curso de Engenharia de Produção Civil do Instituto Federal de Pernambuco - IFPE. O conteúdo inicial era *Programação Linear*. E, verificamos que a resolução gráfica dos problemas de Programação Linear que envolvem duas variáveis são boas aplicações dos conceitos básicos da Matemática apresentada no Ensino Médio, tais como matriz, determinante, sistema linear e estudo da reta.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (2) apontam na direção de que a Matemática do Ensino Médio deve ser trabalhada na perspectiva de *"intervenção no real"*, observando os seus aspectos formativos e a capacidade de ser usada como uma ferramenta indispensável no desenvolvimento de projetos interdisciplinares. Neste sentido, os problemas de Programação Linear contemplam tal perspectiva.

A Programação Linear é um ramo da Matemática Aplicada que se ocupa dos problemas de Otimização, ou seja, problemas que visam maximizar ou minimizar uma função linear de duas ou mais variáveis reais que está sujeita a algumas restrições. Em particular, as restrições envolvidas em um problema de programação linear podem ser expressas por inequações lineares. Por esse motivo é possível obter métodos numéricos simples, porém eficazes, para resolver esses problemas.

O desenvolvimento teórico da Programação Linear foi estabelecido entre 1947 e 1949, pelo matemático americano George Dantzig (1914 - 2005), com o objetivo de resolver problemas ligados a área militar, desde a área de logística até à de estratégica. Foi Dantzig o primeiro a reconhecer que um programa de planejamento poderia ser expresso por um sistema de desigualdades lineares, assim como foi o primeiro a apresentar, na forma de uma expressão matemática explícita, um critério para seleção do melhor programa de planejamento, o que hoje é conhecida como função objetivo do problema de Programação

Linear.

Vale salientar que o matemático e economista russo Leonid Kantorovich (1912 - 1986), que em 1975 recebeu o prêmio Nobel de Economia, é considerado um dos pioneiros da Programação Linear por ter formulado e desenvolvido, em 1939, um problema de Programação Linear para aplicação no planejamento da produção.

Os problemas de Programação Linear que envolvem duas variáveis reais podem ser resolvidos tanto algebricamente quanto graficamente. Alguns problemas que envolvem três variáveis reais, também, podem ser resolvidos graficamente, porém em um grande número de problemas de três variáveis reais isso não é uma tarefa fácil. Os problemas em que aparecem funções com mais de três variáveis reais só podem ser resolvidos algebricamente.

Na abordagem de problemas de Programação Linear com mais de duas variáveis é inevitável o uso do computador. Vale ressaltar que a utilização desta ferramenta poderosa no ensino da Matemática através de atividades desenvolvidas em laboratório de informática, é um processo inadiável. O uso do computador pode tornar o ensino desta disciplina mais interessante e menos trabalhoso, liberando o tempo que seria gasto em manipulações algébricas, para que os alunos possam pensar criativamente, possibilitando uma melhor compreensão dos conceitos, formulando a construção de modelos, permitindo a troca de experiências nas atividades desenvolvidas em grupo.

No primeiro capítulo deste Trabalho de Conclusão, que chamamos de *Conceitos Básicos*, apresentamos na primeira seção o estudo de matrizes envolvendo a definição, operações, matriz inversa e submatriz. Na segunda seção, tratamos de determinate apresentando a definição usando a linguagem de função, as definições de cofator e menor complementar e utilizando o Teorema de Laplace para definir determinante. Na terceira seção, tratamos de sistemas de equações lineares, definindo equação linear, solução de uma equação linear, sistema linear, classificação de sistemas e sistemas equivalentes.

No segundo capítulo, tratamos da Programação Linear. Na primeira seção, temos uma discussão sobre desigualdades lineares no plano. Nela apresentamos a definição de desigualdade linear e gráfico e terminamos a seção com a definição de conjunto convexo e algumas proposições a ele relacionadas. Na segunda seção, tratamos dos conceitos básicos de Programação Linear, modelos dos problemas e as resoluções gráfica e algébrica. Terminamos a seção com uma pequena lista de exercícios, com sua solução completa ou apenas a resposta, que podem ser utilizados em sala de aula.

Na Conclusão, estão as nossas justificativas para a inclusão e exclusão de determinados tópicos relacionados com os assuntos aqui tratados e o que nos levou a apresentar este trabalho.

Há vinte e seis anos numa conversa com um grupo de professores defendemos um ponto de vista onde fizemos uma analogia entre a televisão e a sala de aula: *"o que o* *professor mostra na sala de aula é o que aparece para nós na tela da televisão porém, ele tem que saber tudo o que ocorre atrás das câmeras"*. Ou seja, devemos saber bem mais do que é necessário para o exercício diário em sala da aula.

Esta ideia foi o que tentamos passar com este Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT.

1 Conceitos Básicos

Neste capítulo apresentaremos conceitos matemáticos que serão necessários para justificar os "passos" da resolução dos problemas de Programação Linear. Nosso objetivo é o de apresentar definições, teoremas e proposições, cujas demonstrações serão feitas no decorrer do capítulo, de forma que os professores do Ensino Médio possam relembrar e acompanhar as ideias aqui apresentadas.

Apresentaremos conceitos sobre o estudo de matrizes, determinantes e sistema de equações lineares. Esses conceitos acrescidos de outros que serão apresentados no capítulo seguinte, justificarão todas as passagens da resolução de um problema de Programação Linear.

1.1 Matrizes

Trataremos nesta seção de matrizes cujos elementos são números reais e suas operações. Vejamos a definição de matriz.

Definição 1.1.1. *Sejam m e n dois números inteiros maiores do que ou iguais a 1. Uma **matriz**, de ordem $m \times n$, é uma ordenação retangular de números reais, distribuídos em m linhas e n colunas.*

Representamos uma matriz com m linhas e n colunas da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \dots & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \dots & a_{m\,n} \end{bmatrix}.$$

Podemos escrever uma matriz abreviadamente na forma $A = (a_{i\,j})_{m \times n}$, onde $a_{i\,j}$ representa um elemento qualquer da matriz, o índice i indica a linha e o índice j indica a coluna a qual o elemento pertence, respectivamente.

As linhas são ordenadas de cima para baixo e as colunas são ordenadas da esquerda para direita.

Por exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ é uma matriz de ordem 2×3, ela tem duas linhas e três colunas.

A matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz de ordem 3×3, pois tem três linhas e três colunas. Ou podemos dizer uma matriz de ordem 3 já que o número de linhas é igual ao número de colunas.

Indicaremos por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes de ordem $m\times n$ cujos elementos são números reais. As matrizes em que o número de linhas é igual ao número de colunas será indicado por $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, ou, como é mais usual, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Acima temos a matriz A que é um elemento do conjunto $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e a matriz B é um elemento do conjunto $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Definição 1.1.2. *Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ matrizes de mesma ordem. Diz-se que A e B são* ***matrizes iguais****, e indicamos por $A = B$, se, e somente se, $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $i, j \in \mathbb{Z}$, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.*

Por exemplo, as matrizes $A = \begin{bmatrix} x+y & 0 \\ z & x-2y \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ são iguais para $x = 10$, $y = 3$ e $z = 1$. De fato,

$$A = \begin{bmatrix} x+y & 0 \\ z & x-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+3 & 0 \\ 1 & 10-2\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = B\,.$$

Vejamos agora as operações com matrizes. Começaremos com a ***adição de matrizes*** e em seguida veremos a ***multiplicação de uma matriz por um número*** e a ***multiplicação de matrizes***.

Definição 1.1.3. *Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ matrizes de mesma ordem. A* ***soma das matrizes*** *A e B, que indicamos por $A + B$, é uma matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.*

Exemplo: Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 13 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, temos

$$C = A + B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+13 & 3+2 & 0+0 \\ 2+1 & 1+4 & -2+1 \\ 0-1 & 4-2 & -4+0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

A adição de matrizes possui as seguintes propriedades abaixo relacionadas:

1. **Associativa:** $(A+B)+C = A+(B+C)$, $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

2. **Comutativa:** $A+B = B+A$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

3. **Existência do Elemento Neutro:** $\exists O \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$; $A+O = A, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

4. **Existência do Elemento Oposto:** $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \exists -A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$; $A + (-A) = O$.

Definição 1.1.4. *Sejam $A = (a_{i\,j})_{m\times n}$ uma matriz e α um número real. O* ***produto por escalar*** *da matriz A por α é uma matriz $B = (b_{i\,j})_{m\times n}$, que indicamos por $B = \alpha A$, tal que $b_{i\,j} = \alpha\, a_{i\,j}$.*

Exemplo: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ temos que a matriz $B = 3A$ é

$$B = 3A = 3 \times \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 1 & 3\times(-2) & 3\times 3 \\ 3\times 4 & 3\times 1 & 3\times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

A multiplicação de uma matriz por um número real possui as propriedades abaixo relacionadas:

1. **Associativa:** $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2. **Distributiva:** $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3. **Distributiva:** $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

4. **Elemento Unidade:** $1A = A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Definição 1.1.5. *Sejam as matrizes $A = (a_{i\,j})_{m\times n}$ e $B = (b_{j\,k})_{n\times p}$. O* ***produto das matrizes*** *A e B, nessa ordem, indicado por AB, é uma nova matriz $C = AB$, de ordem $m\times p$, tal que cada elemento $c_{i\,k}$ é dado por*

$$c_{i\,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} b_{j\,k} = a_{i\,1} b_{1\,k} + a_{i\,2} b_{2\,k} + \ldots + a_{i\,n} b_{n\,k}\ .$$

Pela definição só podemos efetuar o produto AB se o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B. Além disso, a nova matriz tem o mesmo número de linhas da matriz A e o mesmo número de colunas da matriz B.

Assim, o produto da matriz $A = (a_{i\,j})_{3\times 2}$ pela matriz $B = (a_{i\,j})_{2\times 4}$ é possível de ser realizado, pois o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B.

Observe que o produto da matriz $B = (a_{i\,j})_{2\times 4}$ pela matriz $A = (a_{i\,j})_{3\times 2}$ não é possível de ser efetuado. Pois, o número de colunas da matriz B não é igual ao número de linhas da matriz A.

Considere as matrizes $A = (a_{ij})_{3\times 2}$ e $B = (a_{ij})_{2\times 3}$. Note que é possível efetuar os produtos AB e BA. Mas, eles não resultam na mesma matriz. De fato,

$$A_{3\times 2} \cdot B_{2\times 3} = C_{3\times 3} \quad \text{e} \quad B_{2\times 3} \cdot A_{3\times 2} = D_{2\times 2}\,.$$

Como as matrizes $C_{3\times 3}$ e $D_{2\times 2}$ não são de mesma ordem, não podemos fazer a comparação. Então, podemos afirmar que em geral o produto de matrizes não é comutativo.

Existem casos em que os produtos AB e BA existem e, além disso, resultam na mesma matriz. Nestes casos, dizemos que as matrizes A e B ***comutam*** ou são ***comutáveis***.

O elemento c_{ik} da matriz $C = AB$ é obtido, multiplicando os elementos da linha i da matriz A pelos elementos correspondentes da coluna k da matriz B, em seguida somando esses produtos.

Por exemplo, multiplicando a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ pela matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ obteremos uma matriz $C = (a_{ij})_{2\times 3}$, onde cada elemento c_{ik} será

$$c_{11} = 2\times 1 + (-1)\times 0 + 3\times 4 = 2 + 0 + 12 = 14\,,$$

$$c_{12} = 2\times 2 + (-1)\times 2 + 3\times 1 = 4 + (-2) + 3 = 5\,,$$

$$c_{13} = 2\times 3 + (-1)\times 5 + 3\times 3 = 6 + (-5) + 9 = 10\,,$$

$$c_{21} = 0\times 1 + 1\times 0 + 4\times 4 = 0 + 0 + 16 = 16\,,$$

$$c_{22} = 0\times 2 + 1\times 2 + 4\times 1 = 0 + 2 + 4 = 6\,,$$

$$c_{23} = 0\times 3 + 1\times 5 + 4\times 3 = 0 + 5 + 12 = 17\,.$$

Então, o resultado do produto AB é matriz $C = \begin{bmatrix} 14 & 5 & 10 \\ 16 & 6 & 17 \end{bmatrix}$.

A multiplicação de matrizes possui as seguintes propriedades abaixo relacionadas:

1. **Associativa:** $(AB)\,C = A\,(BC)$, sendo $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{jk})_{n\times p}$ e $C = (c_{kr})_{p\times q}$.

2. **Distributiva:** $A\,(B + C) = AB + AC$, tomando $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{jk})_{n\times p}$ e $C = (c_{jk})_{n\times p}$.

3. **Distributiva:** $(A + B)\,C = AC + BC$, considerando $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{jk})_{n\times p}$.

4. **Associativa:** Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{jk})_{n\times p}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $(\alpha A)\,B = \alpha\,(AB)$.

Definição 1.1.6. *A matriz quadrada* $I = [x_{i\,j}]_n$ *tal que*

$$x_{i\,j} = \begin{cases} 1,\ i = j \\ 0,\ i \neq j \end{cases}$$

*é chamada de **matriz identidade** ou **matriz unidade** de ordem n.*

Por exemplo, $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de 4ª ordem.

A matriz identidade é o elemento neutro na multiplicação de matrizes. Vejamos, multiplicando a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ pela matriz $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ obtemos

$$\begin{aligned} A \times I_2 &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 \times 1 + (-1) \times 0 & 3 \times 0 + (-1) \times 1 \\ 4 \times 1 + (-2) \times 0 & 4 \times 0 + (-2) \times 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = A\ . \end{aligned}$$

Dada uma matriz A entendemos por ***operações elementares*** com as linhas de A as operações abaixo:

1. Permutar duas linhas de A;

2. Multiplicar uma linha de A por um número real não nulo;

3. Somar a uma linha de A uma outra linha de A multiplicada por um real.

Se uma matriz B puder ser obtida de uma matriz A através de um número finito dessas operações, diz-se que B é equivalente a A e escreve-se $B \sim A$.

Definição 1.1.7. *Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A matriz A é **inversível** se, e somente se, existe uma matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $AB = BA = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n.*

A matriz inversa de A é representada por A^{-1}.

Uma matriz A é inversível se, e somente se, $I_n \sim A$. Neste caso, a mesma sucessão de operações elementares que transformam A em I_n, transformam I_n em A^{-1}, ver as referências (3) ou (4).

Tomemos a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. A matriz inversa da matriz A é

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_4]{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \leftrightarrow L_4 - L_1]{L_3 \leftrightarrow L_3 - 3L_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \leftrightarrow L_4 - 3L_2]{L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

Portanto, a matriz inversa da matriz A é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$.

Uma definição que não é citada nos livros de Ensino Médio é a de ***submatriz***, que pode ser uma matriz quadrada ou não. Para mais detalhes sobre matrizes ver as referências (5), (6) ou (7).

Definição 1.1.8. *A matriz cujos os elementos pertencem as linhas $i_1, i_2, \cdots, i_r$ e colunas $j_1, j_2, \cdots, j_s$ (não necessariamente consecutivas) de uma matriz A é chamada de **submatriz** de ordem r por s.*

Por exemplo, considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.

Tomando i_1 e i_2 a 1ª e a 2ª linhas de A, respectivamente, e j_1 e j_2 a 1ª e a 2ª coluna de A, respectivamente, obtemos a submatriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

e tomando i_1 e i_2 a 1ª e a 2ª linhas de A, respectivamente, e j_1 a 3ªcoluna de A, obtemos a submatriz

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Uma submatriz quadrada é importante neste trabalho porque ela é utilizada para definir uma matriz quadrada chamada de ***matriz base*** de um sistema linear. Ela aparece na resolução de um problema de Programação Linear.

Definição 1.1.9. *Dada qualquer matriz A de ordem m por n, uma **submatriz quadrada** de ordem r pode ser obtida selecionando-se os elementos em quaisquer r linhas e r colunas da matriz A.*

Por exemplo, dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 12 & -4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, se tomarmos as três linhas de A e fizermos j_1, j_2 e j_3 igual as três primeiras colunas de A, obtemos a seguinte submatriz quadrada

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 12 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

1.2 Determinantes

Abordaremos nesta seção sobre determinantes. Nos limitaremos a poucos conceitos que nos interessa para o desenvolvimento deste trabalho.

Seja $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes quadradas de ordem n cujos os elementos são números reais. A cada matriz A do conjunto $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associaremos um número real que será chamado de ***determinante***. O determinante de uma matriz quadrada A será representado por $det\,(A)$ ou $|A|$.

Definição 1.2.1. *Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Considere A_{pj} a matriz obtida da matriz A eliminando a linha p e a coluna j. O determinante da matriz A é definido por:*

$$det\,(A) = \begin{cases} a_{1\,1} & , \quad n = 1 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{p+j}\, a_{p\,j}\, det\,(A_{p\,j}) \;, & n \geq 2\,, \quad \forall p\,, 1 \leq p \leq n \end{cases}.$$

Exemplos:

(1) Se a matriz é $A = [-2]$, então $det\,(A) = -2$.

(2) Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Escolhendo a 2ª linha como "pivô" temos:

$$\begin{aligned} det\,(B) &= (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot |\,3\,| + (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot |\,1\,| \\ &= (-1)^{3} \cdot 0 \cdot 3 + (-1)^{4} \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 0 + 1 = 1\,. \end{aligned}$$

Na definição de determinante utilizamos a linha p, porém poderíamos ter escolhido qualquer outra linha. Poderíamos, também utilizar, ao invés de uma linha, qualquer uma das colunas da matriz.

A escolha da fila (linha ou coluna) para aplicar a definição deve recair sobre a que tiver o maior número de elementos iguais a zero, já que para cada zero da fila escolhida não é necessário calcular a parcela $(-1)^{p+j}\, a_{p\,j}\, det\,(A_{p\,j})$.

O determinante de uma matriz quadrada pode ser qualquer número real. Se o determinante da matriz é diferente de zero, então ela é chamada de ***matriz não-singular***.

Utilizando determinante podemos obter um critério para afirmar se uma matriz quadrada é ou não inversível. Então, ***uma matriz quadrada* A *é inversível se, e somente se, o seu determinante é não nulo***. Essa proposição pode ser verificada em uma das referências (3), (5), (6) ou (7).

1.3 Sistemas de Equações Lineares

Ao modelar certas situações, por exemplo na área de Economia, usamos conjuntos que são formados por equações lineares. Esses conjuntos são chamados de ***sistema de equações lineares*** ou apenas ***sistema linear***.

Mais adiante veremos que as restrições de um problema de Programação Linear podem ser escritas como um sistema de desigualdades lineares. Um sistema de desigualdades lineares pode ser escrito como um sistema de equações lineares a partir da adição de uma constante em cada uma de suas equações.

No Ensino Fundamental estuda-se as equações do 1º grau. São equações em que aparece uma variável representada pela letra x. Conforme a natureza do problema que queremos modelar, a equação pode ter mais de uma variável.

Quando temos equações em que na sua expressão aparece adições de termos que são constantes ou o produto de uma constante por uma variável de primeiro grau, damos o nome de ***equação linear***.

Definição 1.3.1. *Sejam $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ e b números reais. Chama-se de* ***equação linear*** *toda equação da forma*

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b\ ,$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as variáveis ou incógnitas. Os números reais $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ são os coeficientes e b é o termo independente.

Como o primeiro membro de uma equação linear é a soma de produtos, podemos representa-la usando o símbolo de somatório, $\sum$, da seguinte forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1i}\,x_i = b\ .$$

Por exemplo, as equações $-3x+2y-z=1$ e $2x-3y=0$ são equações lineares. Pois, em cada parcela do primeiro membro da equação temos um número real multiplicando uma variável de primeiro grau.

A equação linear $2x-3y=0$ é chamada de homogênea porque o termo independente é igual a zero. Então, toda equação linear da forma $a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = 0$ é chamada de ***equação linear homogênea***.

As equações $xy=1$ e $x^2+3y-z=0$ não são equações lineares porque na primeira tem-se um produto de variáveis e na segunda a variável x encontra-se elevada ao quadrado.

Considere a equação linear $2x-3y=5$. Observe que o par ordenado $(1,\,-1)$ satisfaz a equação. De fato, $2\times 1-3\times(-1)=5$. Já o par ordenado $(-1,\,1)$ não satisfaz a equação porque $2\times(-1)-3\times 1=-5\neq 5$.

Assim, o par ordenado $(1,\,-1)$ é uma solução da equação linear $2x-3y=5$ e o par ordenado $(-1,\,1)$ não é uma solução da equação. Vamos, então, definir o que é uma ***solução*** de uma equação linear.

Definição 1.3.2. *O conjunto de números reais, também chamada de n-upla,* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *é uma* ***solução da equação linear*** $a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b$ *se, e somente se,* $a_{11}\,\alpha_1 + a_{12}\,\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\,\alpha_n = b$.

Observe que o par $(1,\,-1)$ é uma solução da equação linear $2x-3y=5$ como vimos acima. Mas, essa solução não é única. Note que todo par ordenado da forma $\left(x,\,\frac{2x-5}{3}\right)$, com $x\in\mathbb{R}$ é uma solução da equação. Assim, como $\mathbb{R}$ tem infinitos elementos, então teremos uma infinidade de pares ordenados que são soluções da equação.

A n-upla $(0,0,\ldots,0)$ é sempre solução da equação linear homogênea $a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = 0$. Essa solução é chamada de ***solução nula*** ou ***solução trivial***. Se houverem outras soluções, diferentes de $(0,0,\ldots,0)$, de uma equação linear homogênea estas serão chamadas de ***soluções não triviais***.

Para modelar alguns problemas usamos conjuntos que são formado por equações lineares. Esses conjuntos recebem o nome de ***sistema de equações lineares***. Vamos defini-lo formalmente.

Definição 1.3.3. *Um* ***sistema de equações lineares*** *de m equações com n incógnitas é um conjunto de m equações lineares cada uma com n incógnitas. Todo sistema linear tem a seguinte forma*

$$S:\left\{\begin{array}{c} a_{1\,1}\,x_1 + a_{1\,2}\,x_2 + \ldots + a_{1\,n}\,x_n = b_1 \\ a_{2\,1}\,x_1 + a_{2\,2}\,x_2 + \ldots + a_{2\,n}\,x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m\,1}\,x_1 + a_{m\,2}\,x_2 + \ldots + a_{m\,n}\,x_n = b_m \end{array}\right. ,$$

onde os números $a_{i\,j}$ *e* b_i*, com* $i, j \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leq i \leq m$ *e* $1 \leq j \leq n$*, são reais. O par de índices* (i, j) *indica que* $a_{i\,j}$ *é o coeficiente da incógnita* x_j *na i-ésima equação do sistema.*

O sistema linear S acima tem m equações e n incógnitas. É comum nos referirmos a S como um *sistema linear* $m \times n$.

A i-ésima equação linear do sistema pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i \ .$$

Para representar todas as equações do sistema temos que mostrar a variação do i. Assim,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i, \text{ com } i = 1, 2, \ldots, m \ .$$

São exemplos de sistemas lineares,

$$S_1 : \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x + 5y = 0 \end{cases}$$

chamado de quadrado porque o número de equações é igual a número de variáveis,

$$S_2 : \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad S_3 : \begin{cases} 4x + 5y = 1 \\ -x + 3y = 2 \\ 3x - 4y = -1 \end{cases}$$

chamados de retangular porque o número de equações é diferente do número de variáveis.

No sistema linear S_2, todas as equações são homogêneas, por esse motivo chamamos de ***sistema linear homogêneo***.

Um sistema linear pode ser escrito como uma equação envolvendo matrizes que recebe o nome de equação matricial. Esse modo de escrever um sistema será utilizado no próximo capítulo quando tratarmos dos problemas de Programação Linear.

Então, considere o sistema linear

$$S : \begin{cases} a_{1\,1}\, x_1 + a_{1\,2}\, x_2 + \ldots + a_{1\,n}\, x_n = b_1 \\ a_{2\,1}\, x_1 + a_{2\,2}\, x_2 + \ldots + a_{2\,n}\, x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m\,1}\, x_1 + a_{m\,2}\, x_2 + \ldots + a_{m\,n}\, x_n = b_m \end{cases} .$$

Vamos, inicialmente, escrever os primeiros e os segundos membros das equações como matrizes coluna. Em seguida, a matriz coluna da esquerda escrevemos como um produto de matrizes. Assim,

$$\begin{cases} a_{1\,1}\, x_1 + a_{1\,2}\, x_2 + \ldots + a_{1\,n}\, x_n = b_1 \\ a_{2\,1}\, x_1 + a_{2\,2}\, x_2 + \ldots + a_{2\,n}\, x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m\,1}\, x_1 + a_{m\,2}\, x_2 + \ldots + a_{m\,n}\, x_n = b_m \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_{1\,1}\, x_1 + a_{1\,2}\, x_2 + \ldots + a_{1\,n}\, x_n \\ a_{2\,1}\, x_1 + a_{2\,2}\, x_2 + \ldots + a_{2\,n}\, x_n \\ \vdots \\ a_{m\,1}\, x_1 + a_{m\,2}\, x_2 + \ldots + a_{m\,n}\, x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \ldots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \ldots & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \ldots & a_{m\,n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

A matriz $A = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \ldots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \ldots & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \ldots & a_{m\,n} \end{bmatrix}$ é chamada ***matriz dos coeficientes***, a matriz $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ é chamada de ***matriz das variáveis*** e a matriz $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ é chamada de ***matriz dos termos independentes***.

Assim, podemos escrever o sistema linear S pela equação matricial $A\,X = B$, onde A, X e B são as matrizes descritas acima.

Vamos considerar o sistema linear $S_1 : \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x + 5y = 0 \end{cases}$. Observe que o par $\left(\frac{15}{14}, -\frac{6}{7}\right)$ é solução das duas equações do sistema. Pois, $2\left(\frac{15}{14}\right) - \left(-\frac{6}{7}\right) = \frac{15}{7} + \frac{6}{7} = \frac{21}{7} = 3$ e $4\left(\frac{15}{14}\right) + 5\left(-\frac{6}{7}\right) = \frac{30}{7} - \frac{30}{7} = 0$.

E esta é a única solução do sistema, porque da primeira equação temos

$$2x - y = 3 \Leftrightarrow y = 2x - 3\ ,$$

subtituindo na segunda equação temos

$$4x + 5\,(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow 4x + 10x - 15 = 0 \Leftrightarrow 14x = 15 \Leftrightarrow x = \frac{15}{14}\ .$$

O que nos dá $y = 2\left(\frac{15}{14}\right) - 3 = \frac{15}{7} - 3 = -\frac{6}{7}$.

Já no sistema $S_2 : \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$, que é homogêneo, apresenta a solução trivial $(0,\,0,\,0)$. Note que além da solução trivial, temos os ternos da forma $(-2z,\,-z,\,z)$, com $z \in \mathbb{R}$. Então, esse sistema apresenta uma infinidade de soluções.

Assim, podemos definir o que é ***solução de um sistema linear*** bem como fazer uma ***classificação dos sistemas lineares*** a partir do número de soluções que o sistema apresenta.

Definição 1.3.4. *Dizemos que o conjunto de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é uma* ***solução do sistema linear*** *S se, e somente se, esse conjunto for solução de cada equação de S.*

Observe que $(5, 1)$ é solução do sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$, pois $2 \times 5 + 3 \times 1 = 13$ e $5 - 2 \times 1 = 3$, ou seja, o par $(5,\ 1)$ é solução de todas as equações do sistema.

O terno $(2,\ 3,\ 4)$ não é solução do sistema $\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$, pois $2 \times 2 + 3 - 4 = 3$ e $-2 + 2 \times 3 + 4 = 8 \neq 0$, ou seja, o terno $(2,\ 3,\ 4)$ não é solução de todas as equações do sistema.

A classificação de um sistema linear é feita quanto ao número de soluções.

Definição 1.3.5. *Um sistema de equações lineares é dito* ***compatível*** *ou* ***possível*** *se possui solução.*

Os sistemas lineares compatíveis são **determinados** se possui uma única solução; e são **indeterminados** se possui uma infinidade de soluções.

Como exemplo de sistema linear compatível e determinado temos o sistema linear S_1, e como exemplo de sistema linear compatível e indeterminado temos o sistema linear S_2 apesentados anteriormente.

Todo sistema linear homogêneo é sempre compatível, uma vez que admite pelo menos a solução nula ou trivial $(0, 0, \ldots, 0)$.

Definição 1.3.6. *Um sistema de equações lineares é dito* ***incompatível*** *ou* ***impossível*** *se não possui solução.*

Por exemplo, o sistema linear $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$ não tem solução, pois a solução da equação linear $x + y = 0$ é da forma $(x,\ -x)$ e a solução da equação $x + y = 1$ é da forma $(x,\ 1 - x)$. Então, não existe uma solução comum as duas equações.

Considere os sistemas lineares $S_1 : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$ e $S_2 : \begin{cases} 4x - 6y = -1 \\ 5x + 7y = 6 \end{cases}$. Observe que o par $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ é solução do sistema S_1 e também é solução do sistema S_2.

Como os sistemas tem a mesma solução dizemos que eles são ***equivalentes*** e escrevemos $S_1 \sim S_2$. Formalizaremos essa definição a seguir.

Definição 1.3.7. *Dois sistemas lineares são ditos* ***equivalentes*** *quando eles têm as mesmas soluções. Neste caso, escrevemos $S_1 \sim S_2$.*

Sejam S_1, S_2 e S_3 sistemas lineares verificamos que:

(1) todo sistema de equações lineares é equivalente a si mesmo, ou seja, $S_1 \sim S_1$;

(2) sendo o sistema S_1 equivalente ao S_2 isso acarreta que o sistema S_2 é equivalente ao sistema S_1, ou seja, $S_1 \sim S_2 \Rightarrow S_2 \sim S_1$;

(3) sendo o sistema S_1 equivalente ao S_2, e ao mesmo tempo o sistema S_2 é equivalente ao S_3, isso acarreta que o sistema S_1 é equivalente ao sistema S_3, ou seja, $S_1 \sim S_2$ e $S_2 \sim S_3 \Rightarrow S_1 \sim S_3$.

Se dois sistemas lineares S_1 e S_2 são equivalentes, então toda solução de S_1 é também solução de S_2 e vice-versa. Em particular, se S_1 é incompatível, então S_2 também é incompatível.

Um dos métodos de resolução de sistema lineares utiliza as chamadas ***operações elementares***. São operações que realizamos em um sistema sem alterar sua solução. Então, transformamos um sistema linear em outro mais simples e que tem a mesma solução.

As operações elementares são:

($\mathbf{O_1}$) Permutar duas das equações (ou variáveis) do sistema;

($\mathbf{O_2}$) Multiplicar uma das equações do sistema por um número real diferente de zero;

($\mathbf{O_3}$) Adicionar a uma das equações do sistema uma outra equação do sistema multiplicada por um número real.

Dado um sistema S_1, um sistema S_2 obtido do primeiro, através de um número finito de operações elementares, será equivalente ao sistema S_1.

Utilizaremos as operações elementares para discutir e resolver um sistema linear. Dizemos que um sistema linear está ***escalonado*** se o número de coeficientes iniciais nulos em cada equação, a partir da segunda, é maior do que na equação precedente.

Por exemplo, vamos resolver o sistema $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$. Assim,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & - & y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \overset{\substack{L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_3 - 3L_1}}{\sim} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 1 \\ & & 3y & & & = & -2 \\ & & 2y & - & 2z & = & -2 \end{array}\right. \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim}$$

$$\sim \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & z & - & y & = & 1 \\ & & -z & + & y & = & -1 \\ & & & & 3y & = & -2 \end{array}\right.$$

Neste caso, dizemos que o sistema está escalonado.

Da última equação temos $3y = -2 \iff y = -\frac{2}{3}$. Substituindo o valor de y na segunda equação obtemos o valor de z. Assim, $-z + \left(-\frac{2}{3}\right) = -1 \iff z = 1 - \frac{2}{3} \iff z = \frac{1}{3}$.

Substituindo os valores de y e z na primeira equação encontramos o valor de x. Então, $x + \frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = 1 \Longleftrightarrow x + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \Longleftrightarrow x + 1 = 1 \Longleftrightarrow x = 0$. Portanto, a solução do sistema linear é $\left(0,\, -\frac{2}{3},\, \frac{1}{3}\right)$.

O sistem linear que acabamos de resolver acima é compatível e determinado, ou seja, tem uma única solução, e sua única solução é $\left(0,\, -\frac{2}{3},\, \frac{1}{3}\right)$.

Como vimos uma sistema linear pode ser escrito na forma de uma equação linear. Então, no sistema acima temos $AX = B$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz dos coeficientes cujo determinante é -6, X é a matriz coluna cujos elementos são as variáveis do sistema e B é a matriz coluna forma pelos termos independentes do sistema.

Como o determinante da matriz A é não nulo, então A tem inversa. Tomando a equação $AX = B$ temos

$$AX = B \Longleftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Longleftrightarrow \left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}B \Longleftrightarrow$$

$$I_n X = A^{-1}B \Longleftrightarrow X = A^{-1}B\ .$$

Encontrando a matriz inversa de A, temos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow -\frac{1}{2}L_3]{L_2 \leftrightarrow \frac{1}{3}L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_3 + L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_1 + L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_1 - L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Então, a matriz inversa da matriz A é $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Substituindo as matrizes A^{-1} e B em $X = A^{-1}B$, temos

$$X = A^{-1}B \Longleftrightarrow X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$X = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 + 0 \times 0 + \left(\frac{1}{2}\right) \times 1 \\ \left(-\frac{2}{3}\right) \times 1 + \left(\frac{1}{3}\right) \times 0 + 0 \times 1 \\ \left(\frac{5}{6}\right) \times 1 + \left(\frac{1}{3}\right) \times 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow X = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Observe que a solução obtida utilizando a equação matricial e matriz inversa, no procedimento acima, é a mesma que obtivemos utilizando escalonamento de sistema.

2 Problemas de Otimização

Neste capítulo apresentaremos os conceitos de desigualdade linear, conjunto convexo e alguns teoremas relacionados a esses tópicos.

Veremos também os conceitos básicos de Programação Linear (PL), tais como função objetivo, região viável, solução ótima, tipos de problemas de PL, resolução gráfica e um procedimento algébrico envolvendo matrizes, determinantes e sistemas lineares para a resolução de um problema de PL.

Terminaremos este capítulo propondo uma lista de exercícios, que poderá servir de base para o professor do Ensino Médio.

O professor interessado em aprofundar-se no assunto e encontrar mais exemplos para aplicar em sala de aula poderá consultar as seguintes referências (3), (8), (9), (10) e (11).

2.1 Desigualdades Lineares no Plano

Uma equação da forma $ax+by=c$, com a e b não simultaneamente nulos, representa uma reta no plano. Os pontos $P=(x',\, y')$ do $\mathbb{R}^2$ tais que

$$ax'+by'=c$$

são pontos que pertencem à reta $r: ax+by=c$, ou seja, os pontos do plano que estão sobre a reta r.

A reta r divide o plano em conjuntos de pontos que são representados por uma das inequações

$$ax+by<c\ , \quad ax+by\leq c\ , \quad ax+by>c \quad \text{e} \quad ax+by\geq c\ .$$

Essas inequações são chamadas de ***desigualdades lineares no plano***.

Por exemplo, seja a reta r de equação $2x+y=4$, então as seguintes inequações

$$2x+y<4\ , \quad 2x+y\leq 4\ , \quad 2x+y>4 \quad \text{e} \quad 2x+y\geq 4$$

são desigualdades lineares no plano.

O conjunto de todos os pontos P do $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas satisfazem à uma equação nas variáveis x e y é chamado de ***gráfico*** da equação. Assim, os pontos do conjunto

$$R=\Big\{(x,\, y)\in\mathbb{R}^2\,;\, 2x+y=4\Big\}$$

formam o gráfico da equação $2x + y = 4$, que representa uma reta no plano. Note que os pontos $P = (2,\, 0)$ e $Q = (0,\, 4)$ são elementos do conjunto R, pois $2 \times 2 + 0 = 4 + 0 = 4$ e $2 \times 0 + 4 = 0 + 4 = 4$.

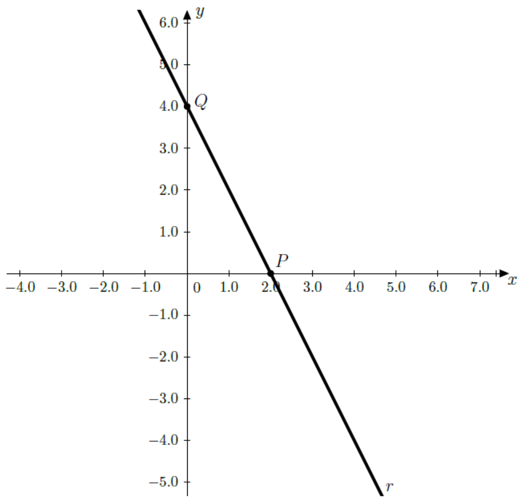

Figura 1 – Gráfico da Reta $2x + y = 4$

O conjunto dos pontos P do $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas satisfazem a uma desigualdade linear também é chamado de gráfico. Vejamos os gráficos das desigualdades lineares $2x + y < 4$ e $2x + y > 4$.

Considere o conjunto $R_1 = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 2x + y < 4\}$. O ponto $O = (0,\, 0)$ pertence ao conjunto R_1, pois $2 \times 0 + 0 < 4$. Dizemos que o ponto O está abaixo da reta r.

Vamos verificar que todos os pontos do plano que estão abaixo da reta r pertencem ao conjunto R_1. Para isso, tomemos um ponto qualquer $A = (x_A,\, y_A)$ da reta $r : 2x+y = 4$. Assim, temos que $2x_A + y_A = 4$. Consideremos $A' = (x_A,\, y)$ um ponto do $\mathbb{R}^2$ com a mesma abscissa do ponto A e cuja ordenada $y < y_A$. Segue que

$$y < y_A \Longrightarrow 2x_A + y < 2x_A + y_A \Longrightarrow 2x_A + y < 4 \,.$$

Tomemos, agora, um ponto qualquer $A = (x_A,\, y_A)$ da reta $r : 2x + y = 4$. Assim, temos que $2x_A + y_A = 4$. Consideremos $A' = (x_A,\, y)$ um ponto do $\mathbb{R}^2$ com a mesma abscissa do ponto A tal que $2x_A + y < 4$, segue que

$$2x_A + y < 4 \Longrightarrow 2x_A + y < 2x_A + y_A \Longrightarrow y < y_A \,.$$

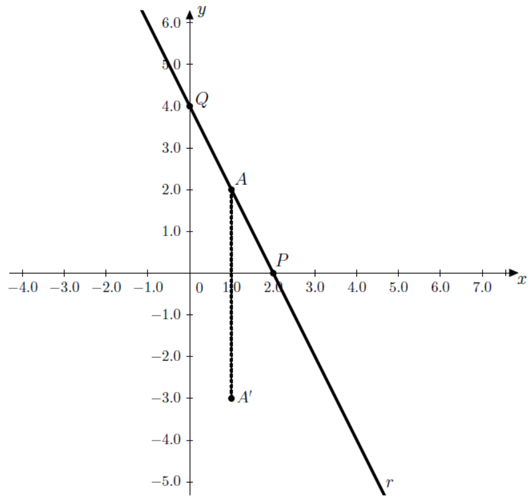

Figura 2 – O ponto A' pertence ao conjunto $R_1 = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 2x + y < 4\}$

Portanto, todos os pontos do $\mathbb{R}^2$ que encontram-se abaixo da reta r pertencem ao conjunto R_1, conforme mostrado na figura abaixo.

Note que a reta r está tracejada para indicar que os pontos da reta não pertencem ao conjunto R_1.

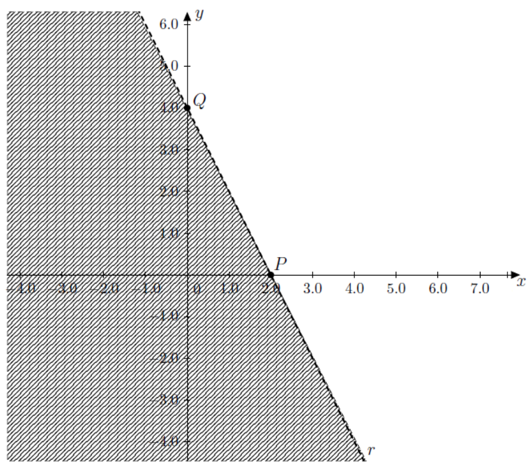

Figura 3 – Gráfico da inequação $2x + y < 4$

Considere o conjunto $R_2 = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 2x + y > 4\}$. O ponto $P = (2,\, 4)$ pertence ao conjunto R_2, pois $2 \times 2 + 4 > 4$. Dizemos que o ponto P está acima da reta r.

De modo análogo verificamos que todos os pontos do plano que estão acima da reta r pertencem ao conjunto R_2.

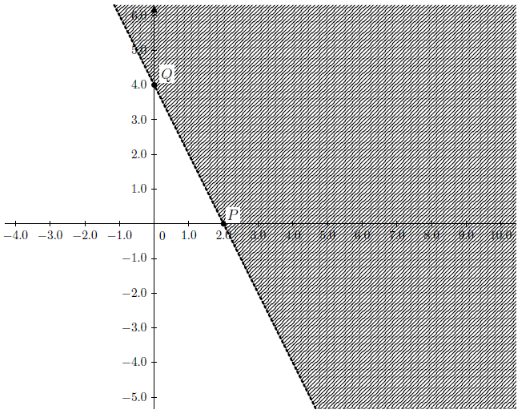

Figura 4 – Gráfico da inequação $2x + y > 4$

O gráfico das desigualdades lineares da forma $ax + by < c$ ou $ax + by > c$ são chamados ***semiplanos abertos***.

Os gráficos das desigualdades lineares $2x + y \leq 4$ e $2x + y \geq 4$ são os conjuntos $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 2x + y \leq 4\}$ e $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 2x + y \geq 4\}$, respectivamente. Podemos escrever $R_3 = R \cup R_1$ e $R_4 = R \cup R_2$.

Os gráficos das desigualdades lineares da forma $ax + by \leq c$ ou $ax + by \geq c$ são chamados de ***semiplanos fechados***.

A reta r é chamada de ***fronteira*** do semiplano.

A discussão feita acima nos leva a uma generalização através do teorema a seguir.

Teorema 2.1.1. *Seja r a reta de equação $ax + by = c$. Se $b > 0$, então $ax + by > c$ é o semiplano aberto acima de r e $ax + by < c$ é o semiplano aberto abaixo de r.*

Demonstração. Sejam $P = (x, y)$ um ponto qualquer do $\mathbb{R}^2$, que não pertence à reta r, e $P_0 = (x, y_0)$ um ponto que pertence à reta r e que tem a mesma abscissa do ponto P. Então,

1. $ax + by > c \iff ax + by > ax + by_0 \iff by > by_0 \iff b\,(y - y_0) > 0$. Como por hipótese $b > 0$ e o produto é positivo, segue que $y - y_0 > 0 \iff y > y_0$. Portanto, o ponto P está acima da reta r.

2. $ax + by < c \iff ax + by < ax + by_0 \iff by < by_0 \iff b\,(y - y_0) < 0$. Como por hipótese $b > 0$ e o produto é negativo, segue que $y - y_0 < 0 \iff y < y_0$. Portanto, o ponto P está abaixo da reta r. □

Se no Teorema 2.1.1 tomarmos $b < 0$ usaremos os mesmos argumentos da demonstração multiplicando inicialmente a equação $ax + by = c$ por -1.

De forma análoga ao que foi discutido acima podemos dizer que se r a reta de equação $ax + by = c$, com $b = 0$ (r é uma reta vertical) e $a > 0$, então o gráfico de $ax + by > c$ é o semiplano aberto à direita de r e o gráfico de $ax + by < c$ é o semiplano aberto à esquerda de r.

2.1.1 Conjuntos Convexos

Definição 2.1.1. *Seja $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$. Dizemos que $\mathcal{S}$ é um **conjunto convexo** se todo segmento de reta ligando dois pontos quaisquer de $\mathcal{S}$ está inteiramente contido em $\mathcal{S}$.*

Na Figura 5(a) o conjunto $\mathcal{S}$ é um conjunto convexo pois todo segmento de reta determinado por dois pontos quaisquer de $\mathcal{S}$ estará sempre contido em $\mathcal{S}$.

Já na Figura 5(b) o conjunto $\mathcal{S}$ não é um conjunto convexo pois existe pelo menos um segmento de reta determinado por dois pontos distintos de $\mathcal{S}$ que não está inteiramente contido em $\mathcal{S}$

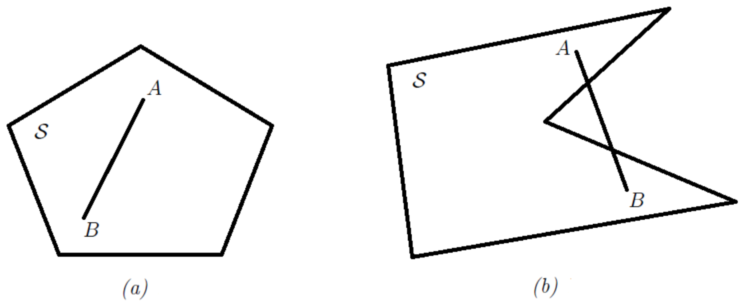

Figura 5 – A figura (a) é um Conjunto Convexo e a figura (b) não é um Conjunto Convexo

O conjunto vazio e o conjunto unitário são considerados conjuntos convexos.

Lema 2.1.1. *Se $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ são dois pontos quaisquer do $\mathbb{R}^2$, então todo ponto do segmento de reta P_1P_2 tem coordenadas da forma $((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2)$, onde t é um número real tal que $0 \leq t \leq 1$.*

Demonstração. Note que a afirmação é verdadeira para $t = 0$ e para $t = 1$ pois obtemos os pontos P_1 e P_2, respectivamente, extremos do segmento de reta P_1P_2.

Seja, agora, $P = (x,\, y)$ um ponto qualquer do segmento de reta P_1P_2. Representando em um sistema de coordenadas o segmento P_1P_2 e os vetores OP_1, OP_2 e OP, temos

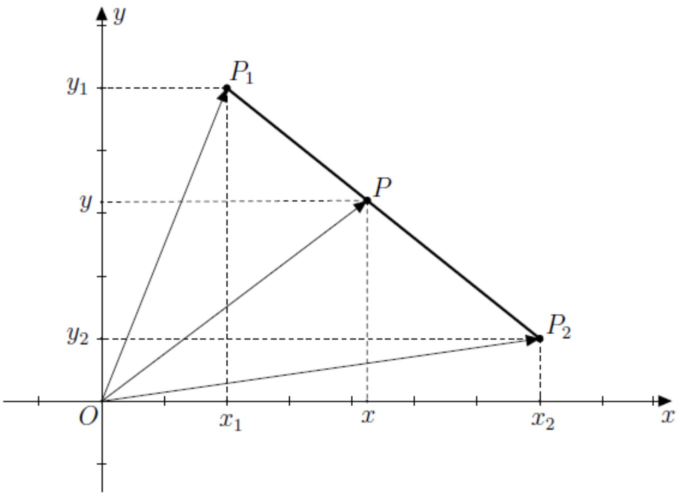

Figura 6 – Representação do Segmento de Reta P_1P_2

Usando as noções de vetores escrevemos

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{OP_1} + t\,\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_1} + t\left(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}\right) =$$

$$= \overrightarrow{OP_1} + t\,\overrightarrow{OP_2} - t\,\overrightarrow{OP_1} = (1-t)\,\overrightarrow{OP_1} + t\,\overrightarrow{OP_2}\ ,\quad t \in [0,\, 1]\ .$$

Escrevendo os vetores em termos de suas coordenadas segue que

$$(x,\, y) = (1-t)\,(x_1,\, y_1) + t\,(x_2,\, y_2) = ((1-t)\,x_1,\, (1-t)\,y_1) + (tx_2,\, ty_2) =$$

$$= ((1-t)\,x_1 + tx_2,\, (1-t)\,y_1 + ty_2)\ ,\quad t \in [0,\, 1]\ .$$

Portanto, qualquer ponto do segmento de reta P_1P_2 tem coordenadas da forma

$$((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2)$$

onde t é um número real tal que $0 \leq t \leq 1$. □

Assim, sendo $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ extremos do segmento de reta P_1P_2, então qualquer ponto P do segmento P_1P_2 pode ser escrito da forma $P = (1-t)\,P_1 + tP_2$. Esta forma de escrever o ponto P é chamada de ***combinação linear convexa***.

Utilizaremos este Lema para mostrar que o gráfico de uma inequação linear é um conjunto convexo. E em seguida, que a interseção de conjuntos convexos ainda é um conjunto convexo. Vejamos.

Teorema 2.1.2. *O gráfico da desigualdade linear $ax + by \leq c$ é um conjunto convexo.*

Demonstração. Seja $\mathcal{S}$ o gráfico da desigualdade linear $ax + by \leq c$ e sejam $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ dois pontos quaisquer de $\mathcal{S}$. Segue que

$$\begin{cases} ax_1 & + & by_1 & \leq & c \\ ax_2 & + & by_2 & \leq & c \end{cases} .$$

Considere P um ponto qualquer do segmento P_1P_2. Pelo lema anterior, as coordenadas de P são da forma $((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2)$, onde t é um número real, com $0 \leq t \leq 1$.

Como t é um número real e $0 \leq t \leq 1$, temos que t e $1-t$ são números não negativos. Então, podemos escrever

$$\begin{cases} a(1-t)x_1 & + & b(1-t)y_1 & \leq & (1-t)c \\ atx_2 & + & bty_2 & \leq & tc \end{cases}.$$

Somando membro a membro as desigualdades do sistema, obtemos

$$a(1-t)x_1 + b(1-t)y_1 + atx_2 + bty_2 \leq (1-t)c + tc \Longleftrightarrow$$

$$a\Big((1-t)x_1 + tx_2\Big) + b\Big((1-t)y_1 + ty_2\Big) \leq c \ .$$

Isso mostra que as coordenadas do ponto P satisfazem a condição $ax + by \leq c$ e portanto $P \in \mathcal{S}$. Como P é um ponto qualquer do segmento P_1P_2, concluímos que $\mathcal{S}$ é um conjunto convexo. $\square$

Observe que para as desigualdades lineares $ax + by \geq c$, $ax + by < c$ e $ax + by > c$ vale o mesmo argumento anterior. Podemos, então, afirmar que um semiplano (aberto ou fechado) é um conjunto convexo.

Teorema 2.1.3. *A interseção de um número finito de conjuntos convexos é um conjunto convexo.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, ..., $\mathcal{S}_n$ conjuntos convexos. Vamos considerar o conjunto $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{S}_n$. Se $\mathcal{S} = \emptyset$ ou $\mathcal{S}$ é unitário, então por definição $\mathcal{S}$ é um conjunto convexo.

Suponha agora $\mathcal{S}$ não vazio e nem unitário. Sejam $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ dois pontos quaisquer de $\mathcal{S}$. Como $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{S}_n$, segue que P_1 e P_2 pertence a cada um dos conjuntos $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, ..., $\mathcal{S}_n$. Por hipótese, $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, ..., $\mathcal{S}_n$ são conjuntos convexos, então, dado um ponto qualquer P do segmento P_1P_2, temos que P pertence a cada um dos conjuntos $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, ..., $\mathcal{S}_n$.

Como P pertence a cada um dos conjuntos $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, ..., $\mathcal{S}_n$ e $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{S}_n$, segue que P pertence a $\mathcal{S}$. Portanto, $\mathcal{S}$ é um conjunto convexo. $\square$

Corolário 2.1.4. *Seja $\mathcal{S}$ o conjunto solução do sistema de desigualdades lineares*

$$\begin{cases} a_1x & + & b_1y & \leq & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & \leq & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_nx & + & b_ny & \leq & c_n \end{cases}.$$

Então, $\mathcal{S}$ é convexo.

Demonstração. O conjunto $\mathcal{S}$ é o gráfico do sistema. Então, por definição $\mathcal{S}$ é o gráfico de cada desigualdade linear do sistema. Pelos Teoremas 2.1.2 e 2.1.3 segue o resultado. $\square$

Vamos a partir de agora formalizar os conceitos de Programação Linear. Começaremos pelos conceitos básicos para nos apropriarmos da terminologia e terminaremos com o método algébrico de resolução de um problema de Programação Linear.

Utilizaremos o que já foi apresentado para justificar os passos tomados na resolução gráfica e na resolução algébrica de um problema de Programação Linear.

2.2 Programação Linear

Os problemas que a Programação Linear trata envolvem a distribuição de recursos, que podem ser mão de obra, matéria prima, energia entre outros, visando a otimização.

Por otimização entende-se a maximização ou minimização de certas situações. Por exemplo, numa indústria a otimização poderia ser vista como maximização de lucros da venda ou minimização de custos de produção de produtos.

Vejamos alguns conceitos básicos da Programação Linear.

2.2.1 Conceitos Básicos

A matematização de um problema de Programação Linear envolve uma função linear de duas ou mais variáveis e um conjunto de inequações ou equações lineares. Esses entes matemáticos tem nomes próprios na Programação Linear.

Para ilustrar as definições a seguir vamos tomar o seguinte problema: *Certa empresa fabrica dois produtos P_1 e P_2. O lucro unitário do produto P_1 é de 1000 unidades monetárias e o lucro unitário de P_2 é de 1800 unidades monetárias. A empresa precisa de 20 horas para fabricar uma unidade de P_1 e de 30 horas para fabricar uma unidade de P_2. O tempo anual de produção disponível para isso é de 1200 horas. A demanda esperada para cada produto é de 40 unidades anuais para P_1 e 30 unidades anuais para P_2. Qual é o plano de produção para que a empresa maximize seu lucro nesses itens?* (Extraído de (10))

Definição 2.2.1. *As variáveis envolvidas no problema são chamadas de **variáveis de decisão**. Essas variáveis são não negativas.*

No problema queremos determinar as quantidades que devem ser produzidas dos produtos P_1 e P_2 para que se tenha o maior lucro possível. Podemos dizer que as quantidades de P_1 e P_2 são, respectivamente, x e y. Essas são as variáveis de decisão.

Definição 2.2.2. *A função, cujas variáveis são as variáveis de decisão, envolvida no problema de Programação Linear a qual queremos otimizar é chamada de **função objetivo**.*

No problema os lucros unitários dos produtos P_1 e P_2 são, respectivamente, 1000 e 1800 unidades monetárias. Pelas características de um problema de Programação Linear não há sobras das variáveis de decisão. Então, o lucro da empresa é dado pela expressão $1000x + 1800y$. Portanto, a função objetivo é $f(x, y) = 1000x + 1800y$.

Definição 2.2.3. *As condições impostas no problema para as variáveis de decisão formam um conjunto de inequações (ou equações) que é chamado de* ***restrições do problema****.*

No problema temos as horas gastas para a produção de cada produto bem como o limite do total de horas que podem ser gastas. Além disso tem-se o limite de produção de P_1 e P_2 em função da demanda. Assim, as restrições do problema são

$$\begin{cases} 20x + 30y & \leq & 1200 \\ x & \leq & 40 \\ y & \leq & 30 \end{cases},$$

com $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Definição 2.2.4. *O conjunto de pontos que satisfazem a todas as restrições de um problema de Programação Linear é chamado de* ***região viável*** *ou* ***conjunto de pontos viáveis****.*

Observação: Como já vimos anteriormente a solução de um sistema de desigualdades lineares é um conjunto convexo. Então, a região viável de um problema de Programação Linear é um conjunto convexo.

Os valores das variáveis de decisão que otimizam um problema de Programação Linear são chamados de ***solução ótima***. Esses valores representam as coordenadas de uma ponto da região viável. Assim, chamamos também de ***ponto ótimo***. O valor que a função objetivo assume no ponto ótimo é chamado de ***valor ótimo*** do problema.

Vamos verificar que os pontos $A = (15, 30)$ e $B = (10, 15)$ pertencem a região viável do problema. Para isto basta verificar que esses pontos satisfazem ao conjunto das restrições. Assim,

$$20 \times 15 + 30 \times 30 = 300 + 900 \leq 1200\,,\ 15 \leq 40 \text{ e } 30 \leq 30 \quad \text{e}$$

$$20 \times 10 + 30 \times 15 = 200 + 450 \leq 1200\,,\ 10 \leq 40 \text{ e } 15 \leq 30\,.$$

Portanto, os pontos A e B pertencem a região viável do problema.

Substituindo na expressão da função $x = 15$ e $y = 30$ temos

$$f(15, 30) = 1000 \times 15 + 1800 \times 30 = 15000 + 54000 = 69000\,.$$

E, substituindo na expressão da função $x = 10$ e $y = 15$ temos

$$f(10, 15) = 1000 \times 10 + 1800 \times 15 = 10000 + 27000 = 37000\,.$$

Como o valor de $f\,(15,\,30)$ é maior do que $f\,(10,\,15)$, mais adiante veremos como resolver um problema de Programação Linear e mostraremos que isso ocorrerá para todos os pontos da região viável, o ponto ótimo é $(15,\,30)$ e o valor ótimo é $f\,(15,\,30) = 69000$.

Um modelo matemático é a representação de um fenômeno ou problema real através de relações onde procuramos interpretar os seus aspectos mais importantes.

Nos modelos de Programação Linear utilizamos uma função linear com duas ou mais variáveis reais, que é a função objetivo, e um sistema de inequações lineares, que são as restrições do problema.

Vejamos alguns modelos de Programação Linear.

2.2.2 Modelos de Programação Linear

Na Programação Linear temos modelos que podem ser adaptados a várias situações do cotidiano. Os modelos mais conhecidos da Programação Linear são chamados de: *problema da análise das atividades*, *problema da dieta*, *problema do transporte* e *problema da designação.*

Optamos neste trabalho de objetivar o uso dos conhecimentos a nível de Ensino Médio. Os problemas do transporte e da designação utilizam um algoritmo para a sua resolução que extrapola o nosso objetivo e por este motivo deixaremos de fora desse trabalho.

O problema da análise das atividades e o problema da dieta são de aspecto mais amplo e, portanto, estão em mais sintonia com os assuntos ministrados no Ensino Médio. Vejamos uma pequena descrição deles.

1. Problema da análise das atividades: consiste em achar as variáveis do problema que maximize a função objetivo onde essas variáveis satisfazem às restrições impostas pelo problema. Essas restrições, em geral, são apresentadas por um sistema de desigualdades lineares.

2. Problema da dieta: consiste em achar as variáveis do problema que minimizem a função objetivo onde as variáveis cumprem às restrições impostas pelo problema. Essas restrições são também, em geral, apresentadas por um sistema de desigualdades lineares.

Apesar dos nomes específicos, esses modelos podem ser aplicados em problemas que envolvem maximização ou minimização, ou seja, problemas de otimização. Por exemplo, no cotidiano de uma empresa quer-se maximizar o lucro ou minimizar os custos da produção de certo produto.

2.2.3 Resolução Gráfica de um Problema de Programação Linear

O nosso objetivo são problemas de Programação Linear que envolvam duas variáveis porque estão mais ao alcance dos alunos de Ensino Médio. E os problemas que apresentam duas variáveis são possíveis de serem resolvidos graficamente.

Vamos, então, resolver graficamente um problema que envolve duas variáveis e que se encaixa no primeiro modelo de problema de Programação Linear.

O problema a seguir foi retirado e adaptado de (12).

Suponha que se tenha numa pequena marcenaria a produção de dois artigos A e B. A manufatura de cada unidade do produto A requer 3 homens/hora de mão de obra e $1\,kw/h$ de energia e do produto B, 2 homens/hora de mão de obra e $3\,kw/h$ de energia. A marcenaria dispõe de matéria prima para produzir 600 unidades do produto A e 800 unidades do produto B, um total de 2450 homens/hora de mão de obra e 2100 kw/h de energia. Na comercialização dos produtos A e B o lucro por unidade é de R\$30,00 do produto A e de R\$45,00 do produto B. Chamaremos o número de unidades produzidas do produto A de x e do produto B de y. Qual deve ser os valores de x e de y para que a marcenaria tenha o maior lucro possível?

Vamos traduzir o problema para a linguagem matemática.

As variáveis de decisão são x e y, que representam as quantidades produzidas dos produtos A e B, respectivamente.

Como os lucros por unidade dos produtos A e B são, respectivamente, R\$30,00 e R\$45,00, a função objetivo é dada por $f(x, y) = 30x + 45y$.

Temos limitações na disponibilidade de homem/hora de mão de obra, no consumo de energia e nas matérias primas dos artigos A e B. Essas limitações nos dão as restrições

$$\begin{cases} 3x + 2y & \leq & 2450 \\ x + 3y & \leq & 2100 \\ x & \leq & 600 \\ y & \leq & 800 \end{cases}$$

com $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Pelo o que apresentado na Seção 2.1 temos que os pontos das desigualdades lineares $3x + 2y \leq 2450$ e $x + 3y \leq 2100$ estão abaixo das retas $3x + 2y = 2450$ e $x + 3y = 2100$, respectivamente.

Os pontos das desigualdades lineares $x \leq 600$ e $y \leq 800$ estão à esquerda e abaixo das retas $x = 600$ e $y = 800$, respectivamente.

E como $x \geq 0$ e $y \geq 0$ temos os pontos acima do eixo das abscissas e à direita do eixo das ordenadas, respectivamente.

Como a região viável é formada pela intersecção das desigualdades lineares, temos que essa região é a apresentada na figura abaixo, o pentágono $ABGHF$.

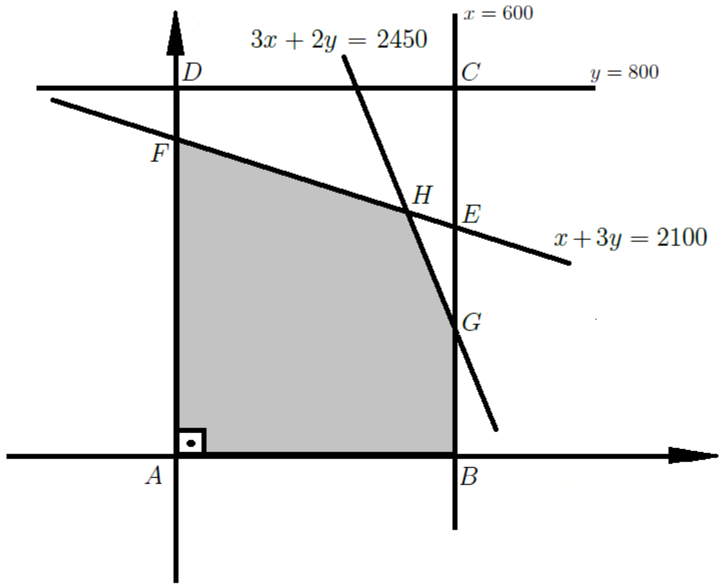

Figura 7 – Região viável do problema de Programação Linear

Os pontos que satisfarão todas as restrições do problema, que são dadas pelas limitações de matéria prima, mão de obra e energia, estarão na região $ABGHF$.

Queremos, agora, saber qual dos pontos do polígono $ABGHF$ maximiza a função objetivo $f\,(x,\,y) = 30x + 45y$.

A *solução ótima* do problema é um ponto P cujas coordenadas x e y maximiza a função $f\,(x,\,y) = 30x + 45y$ sujeito a

$$\begin{cases} 3x + 2y & \leq & 2450 \\ x + 3y & \leq & 2100 \\ x & \leq & 600 \\ y & \leq & 800 \end{cases}$$

com $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

A fim de encontrar a solução ótima, tomamos a reta $r : 30x + 45y = 0$. Observe que se $P = (x_0,\,y_0)$ é um ponto da reta r então $f\,(x_0,\,y_0) = 30x_0 + 45y_0$. logo, a função objetivo assumirá o mesmo valor sobre qualquer reta paralela à reta r.

Dentre essas retas, assumirá o maior valor a reta mais afastada da origem. De fato, uma reta paralela a r será da forma $30x + 45y = k$, $k \in \mathbb{R}$. Como a distância entre a reta r e uma reta paralela s é $d\,(r,\,s) = \frac{|\,k\,|}{\sqrt{30^2+45^2}}$. Portanto, quanto maior o valor de $|\,k\,|$ mais afastada da reta r estará a reta s.

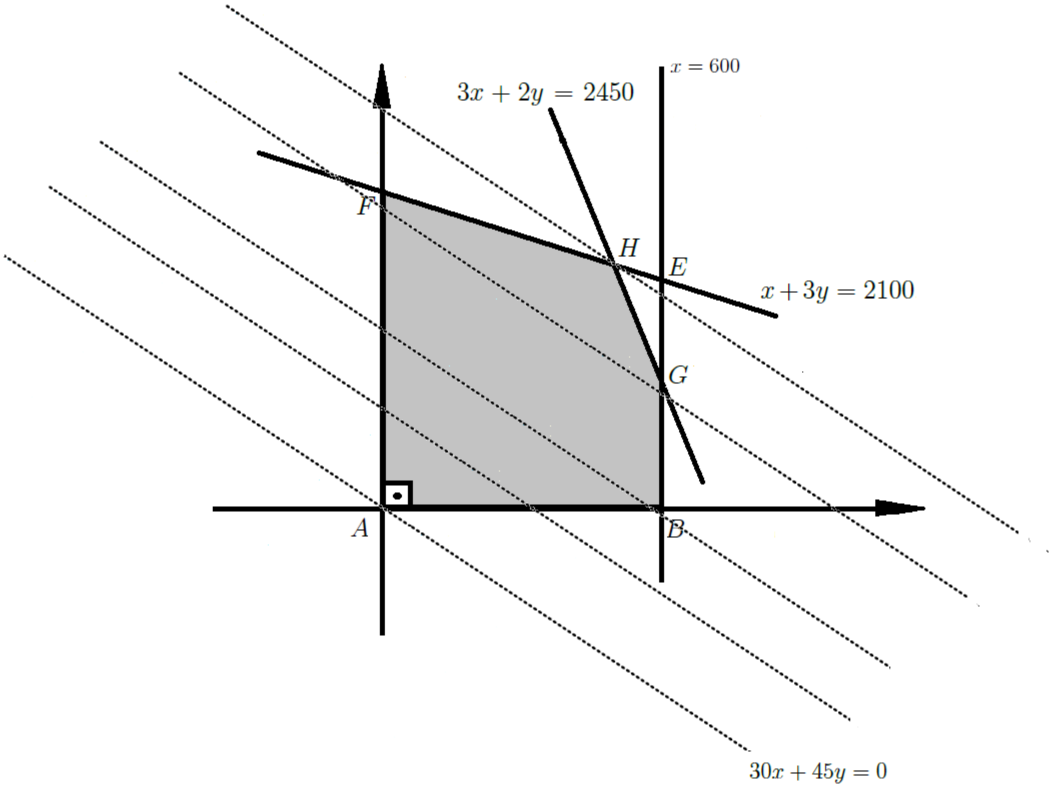

Figura 8 – Retas paralelas a $r : 30x + 45y = 0$ para a solução ótima

Logo, é o ponto H que maximizará a função $f\,(x,\,y) = 30x + 45y$ no conjunto dos pontos compatíveis com as restrições do problema. Podemos obter as coordenadas no ponto H fazendo a interseção das retas $x + 3y = 2100$ e $3x + 2y = 2450$, assim,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 3y & = & 2100 \\ 3x + 2y & = & 2450 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcl} x + 3y & = & 2100 \\ -7y & = & -3850 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{l} x = 450 \\ y = 550 \end{array}\right. .$$

Portanto, o lucro máximo possível é $f\,(450,\,550) = 30 \times 450 + 45 \times 550 = 13500 + 24750 = 38250$.

Neste exemplo que acabamos de resolver encontramos uma única solução ótima para o problema. Mas, nem sempre isso ocorre.

Caso a função objetivo aumente valor indefinidamente nos pontos que pertencem a região viável, dizemos que o problema não possui solução ótima finita e o problema é dito ***ilimitado***.

Exemplo: "Maximizar a função $f\,(x,\,y) = x + 2y$ sujeita as restrições

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4x + y & \geq & 20 \\ x + 2y & \geq & 10 \\ x & \geq & 2 \end{array}\right. ,$$

com $x \geq 0$ e $y \geq 0$."(Extraído de (13))

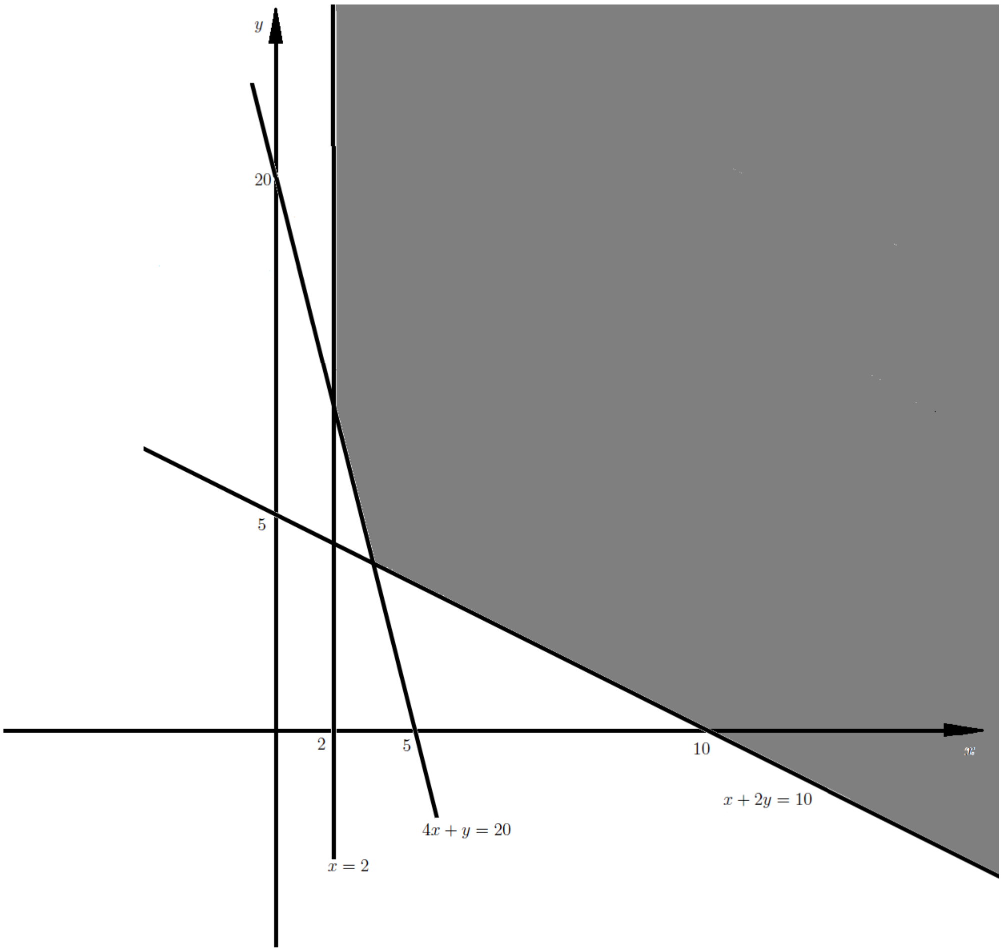

Figura 9 – região viável do problema ilimitado

Observe que qualquer reta paralela à reta $x + 2y = 0$, mais afastada da origem, faz com que o valor da função objetivo aumente indefinidamente. Logo, o problema não possui uma solução ótima finita.

Pode ocorrer que a interseção dos semi-planos determinados pelas restrições do problema seja o conjunto vazio. Neste caso, diz-se que o problema não possui solução e ele é dito ***inviável***.

Exemplo: "Minimizar a função $f(x, y) = x + y$ sujeita as restrições

$$\begin{cases} -2x + y & \geq & 2 \\ x - 2y & \geq & 2 \end{cases},$$

com $x \geq 0$ e $y \geq 0$."(Extraído de (13))

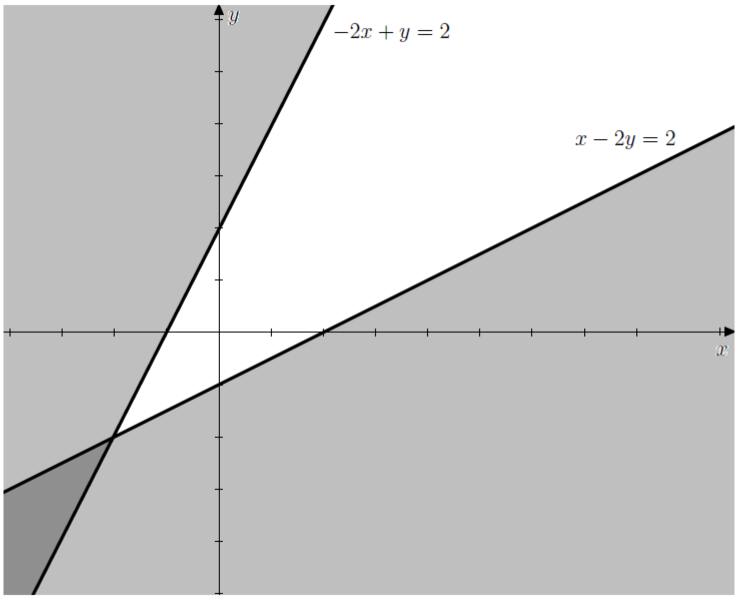

Figura 10 – região viável do problema inviável

Observe que a interseção dos semi-planos $-2x + y \geq 2$, $x - 2y \geq 2$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$ é o conjunto vazio. Logo, o problema é inviável.

Diz-se que um problema de Programação Linear possui ***infinitas soluções*** se:

1. os pontos de um segmento de reta otimizam o problema. Neste caso, sendo os pontos P_1 e P_2 extremos do segmento que otimiza o problema, então qualquer solução ótima é uma combinação linear convexa de P_1 e P_2.

2. os pontos de uma semi-reta otimizam o problema. Neste caso, qualquer ponto P da forma $P = P_1 + \alpha \left(P_2 - P_1\right)$, com α um número real não-negativo, P_1 a origem da semirreta e P_2 um ponto qualquer da semirreta, é uma solução ótima.

Voltemos, agora, ao problema apresentado na Seção 2.2.1:

Certa empresa fabrica dois produtos P_1 e P_2. O lucro unitário do produto P_1 é de 1000 unidades monetárias e o lucro unitário de P_2 é de 1800 unidades monetárias. A empresa precisa de 20 horas para fabricar uma unidade de P_1 e de 30 horas para fabricar uma unidade de P_2. O tempo anual de produção disponível para isso é de 1200 horas. A demanda esperada para cada produto é de 40 unidades anuais para P_1 e 30 unidades anuais para P_2. Qual é o plano de produção para que a empresa maximize seu lucro nesses itens? (Extraído de (10))

A função objetivo é $f\left(x,\, y\right) = 1000x + 1800y$ e as restrições do problema são

$$\left\{\begin{array}{rcl} 20x + 30y & \leq & 1200 \\ x & \leq & 40 \\ y & \leq & 30 \end{array}\right. , \quad \text{com} \quad x \geq 0 \quad \text{e} \quad y \geq 0\,.$$

Como foi apresentado na Seção 2.2.1 o ponto $(15,\, 30)$ é o ponto ótimo e $f\,(15,\, 30)$ é o valor ótimo do problema. Vejamos agora a sua resolução gráfica.

Pela discussão feita na resolução gráfica do problema da Seção 2.2.3 temos que os pontos que satisfazem a restrição $20x + 30y \leq 1200$ estão abaixo da reta $20x + 30y = 1200$, os pontos que satisfazem a $x \leq 40$ estão à esquerda da reta $x = 40$ e os pontos que satisfazem a $y \leq 30$ abaixo da reta $y = 30$.

As retas $20x+30y = 1200$, $x = 40$ e $y = 30$ e a interseção dos semiplano determinado pelo conjunto das restrições está apresentado na figura a seguir. Assim temos,

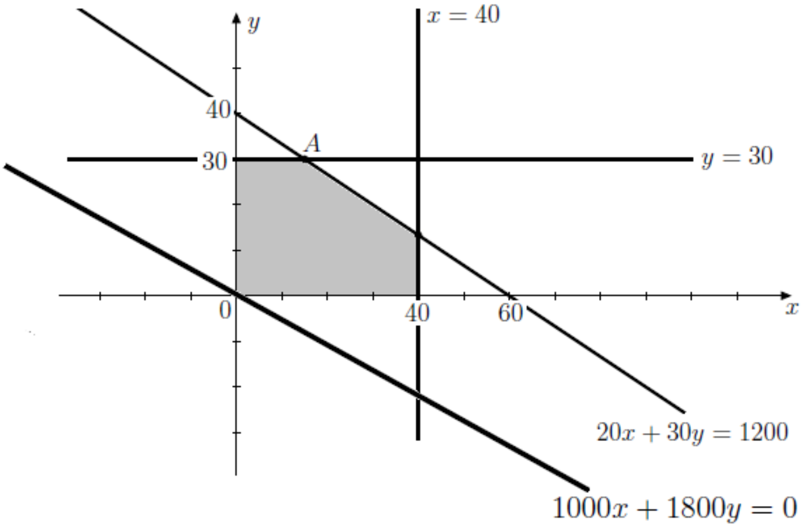

Figura 11 – Região viável

Encontrando a interseção das retas $20x + 30y = 1200$ e $y = 30$ determinamos o ponto $A = (15,\, 30)$. Note que das retas paralelas a reta $1000x + 1800y = 0$ uma delas passa pelo ponto A e não tem nenhum outro ponto em comum com a região viável. Isso garante que o ponto A é o ponto ótimo.

Podemos, então, adotar o seguinte procedimento para a resolução gráfica de um problema de Programação Linear. Vejamos passo a passo:

(1) Determinar os semiplanos definidos por cada umas das inequações que formam as restrições do problema;

(2) Encontrar a interseção dos semiplanos (região viável) definidos por cada umas das inequações do conjunto das restrições;

(3) Traçar a reta $f\,(x,\, y) = 0$, onde $f\,(x,\, y)$ é a função objetivo;

(4) Se o problema for de maximização tomar a reta paralela mais afastada da reta $f\,(x,\, y) = 0$ que passe por um ponto da região viável; se o problema for de minimização tomar a reta paralela mais próxima da reta $f\,(x,\,y) = 0$ que passa por um ponto da região viável;

(5) o ponto $(x_0,\,y_0)$ de interseção da região viável com a reta paralela mais afastada ou mais próxima da reta $f\,(x,\,y) = 0$ é o ponto ótimo e $f\,(x_0,\,y_0)$ é o valor ótimo.

Alguns problemas de Programação Linear que envolvem três variáveis ainda é possível de serem resolvidos graficamente. Outros não. Os problemas com mais de três variáveis só podem ser resolvidos algebricamente.

O processo algébrico para resolver um problema de Programação Linear com qualquer quantidade de variáveis é chamado de ***Método Simplex***.

Como estamos visando uma motivação e aplicabilidade para os assuntos de Ensino Médio, recorreremos a processos algébricos, um pouco mais trabalhosos, porém, mais simples e que possam utilizar apenas conhecimentos sobre matriz, determinante e sistema linear.

2.2.4 Método Algébrico Utilizando Soluções Básicas Viáveis

Por suas características um problema de Programação Linear pode ser apresentado de diversas formas. Em particular, para o nosso trabalho, apresentaremos aqui a forma padrão e a forma canônica do problema.

A noção de ***par ordenado*** está presente no no 9º ano do Ensino Fundamental II e durante todo o Ensino Médio. Então, o par ordenado de números reais x e y é representado por $(x,\,y)$. Dizemos que o par $(x,\,y)$ é um elemento do $\mathbb{R}^2$.

Chama-se de ***terno ordenado*** de números reais x, y e z a sequência $(x,\,y,\,z)$. Um terno ordenado $(x,\,y,\,z)$ é um elemento do $\mathbb{R}^3$.

Uma sequência ordenada de números reais da forma $(x_1,\,x_2,\,\cdots,\,x_n)$ é chamada de **n-*upla ordenada***. As n-uplas ordenadas de números reais pertencem ao conjunto representado por $\mathbb{R}^n$.

Considere $\overrightarrow{a} = (x_1,\,x_2,\,\cdots,\,x_n)$ e $\overrightarrow{b} = (y_1,\,y_2,\,\cdots,\,y_n)$ elementos do $\mathbb{R}^n$. O produto interno de $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$, que denotamos por $\langle\overrightarrow{a},\,\overrightarrow{b}\rangle$, é o número real dado por

$$\langle\overrightarrow{a},\,\overrightarrow{b}\rangle = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + \cdots + x_n\,y_n\,.$$

Apresentaremos as formas padrão e canônica para um número n de variáveis. A função objetivo como um produto interno dos vetores $\overrightarrow{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, cujas componentes são os coeficientes da função objetivo, e $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, cujas componentes são as variáveis do problema, e as restrições usando a notação de somatório. Vejamos.

Um problema de Programação Linear na ***forma padrão*** é apresentado assim:

$$\begin{gathered}\text{Maximizar (ou Minimizar) } \langle \overrightarrow{c},\, \overrightarrow{x} \rangle\\ \text{sujeito a } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq b_i, \text{ com } i = 1, 2, \ldots, m,\\ \text{com } x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n.\end{gathered}$$

Um problema de Programação Linear na ***forma canônica*** é apresentado assim:

$$\begin{gathered}\text{Maximizar (ou Minimizar) } \langle \overrightarrow{c},\, \overrightarrow{x} \rangle\\ \text{sujeito a } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i, \text{ com } i = 1, 2, \ldots, m,\\ \text{com } x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n.\end{gathered}$$

Observe que uma diferença entre as duas formas que salta aos olhos é em relação as restrições. Numa forma temos um sistema de inequações lineares e na outra um sistema de equações lineares.

Nesse sentido a utilização da forma canônica é mais conveniente por apresentar nas suas restrições equações lineares formando um sistema de equações lineares, cujos métodos de resolução são conhecidos tanto no final do Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio.

Para transformar uma inequação linear numa equação linear acrescentamos uma variável. No nosso caso será uma variável não negativa que chamaremos de ***variável de folga*** ou ***variável residual***.

Vamos retomar o problema resolvido na Seção 2.2.3. Assim, escrevendo o problema na forma padrão temos:

$$\begin{gathered}\text{Maximizar } \langle \overrightarrow{c},\, \overrightarrow{x} \rangle, \text{ com } \overrightarrow{c} = (30,\, 45) \text{ e } \overrightarrow{x} = (x,\, y)\\ \text{sujeito a } \begin{cases} 3x + 2y & \leq & 2450\\ x + 3y & \leq & 2100\\ x & \leq & 600\\ y & \leq & 800 \end{cases}\\ \text{com } x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\end{gathered}$$

Para escrever o problema na forma canônica acrescentaremos a cada inequação das restrições as variáveis de folga não-negativas z, t, w e u.

Com o acréscimo das variáveis de folga a função objetivo é dada pela expressão

$$f\,(x,\, y,\, z,\, t,\, w,\, u) = 30x + 45y + 0z + 0t + 0w + 0u\ .$$

Usando produto interno escreveremos a função objetivo da seguinte forma

$$\begin{gathered}f\,(x,\, y,\, z,\, t,\, w,\, u) = 30x + 45y + 0z + 0t + 0w + 0u =\\ = \langle (30,\, 45,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0)\,,\, (x,\, y,\, z,\, t,\, w,\, u) \rangle = \langle \overrightarrow{c_1},\, \overrightarrow{x_1} \rangle\ .\end{gathered}$$

Utilizando os vetores do produto interno acima, o problema será escrito na forma canônica como:

$$\text{Maximizar } \langle \overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{x_1} \rangle$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} 3x + 2y + z = 2450 \\ x + 3y + t = 2100 \\ x + w = 600 \\ y + u = 800 \end{cases}$$

com $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $t \geq 0$, $w \geq 0$ e $u \geq 0$.

A fim de encontrar a solução ótima de um problema de Programação Linear, utilizaremos a noção de submatriz associada a matriz dos coeficientes de um sistema de equações lineares.

Definição 2.2.5. *Considere um sistema linear $m \times n$, com $m \leq n$. Seja A a matriz dos coeficientes. Diz-se que uma submatriz $M \in \mathcal{M}_{m\times m}$ é uma* ***matriz base*** *da matriz A se M é uma matriz não-singular.*

A fim de exemplificar, tomemos o sistema linear 4×6 da forma canônica do nosso problema.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2450 \\ x + 3y + t = 2100 \\ x + w = 600 \\ y + u = 800 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes do sistema linear é uma matriz 4×6 dada por

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz quadrada M, 4×4, onde $M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz base, pois além de ser uma matriz quadrada cuja ordem é o número de equações do sistema temos que M é uma matriz não-singular. De fato, aplicando a definição de determinante temos

$$det\,(M) = 1 \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{4} \times 1 \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \times (-1)^4 \times 1 \times (-1)^4 \times (1 \times 1 - 0 \times 0) = 1\,.$$

A matriz quadrada M', 4×4 onde $M' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ não é uma matriz base.
Com efeito, como a matriz M' tem todos os elementos de uma linha (4ª linha) iguais a zero então seu determinante é igual a zero. Portanto, M' é uma matriz singular.

Vejamos agora os conceitos de ***variáveis básicas*** e ***variáveis não-básicas***.

Como vimos a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz base do sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} 3x & + & 2y & + & z & & & & & & & = & 2450 \\ x & + & 3y & & & + & t & & & & & = & 2100 \\ x & & & & & & & + & w & & & = & 600 \\ & & y & & & & & & & + & u & = & 800 \end{array}\right. .$$

As variáveis do sistema linear correspondente a uma matriz base M são chamadas de ***variáveis básicas*** de M. Neste caso as variáveis básicas de M são x, y, z e t. Representaremos por X_M a matriz formada pelas variáveis básicas de M.

Então, a nossa matriz das variáveis básicas é $X_M = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$.

As colunas da matriz A que não formam a matriz base M formarão uma matriz N_M cuja ordem é $m \times (n - m)$. No nosso exemplo a matriz N_M é

$$N_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

As variáveis do sistema linear correspondentes a matriz N_M são chamadas de ***variáveis não-básicas***. Representaremos a matriz das variáveis não-básicas de M por Y_M. No nosso exemplo, temos $Y_M = \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$.

Voltemos ao sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} 3x & + & 2y & + & z & & & & & & & = & 2450 \\ x & + & 3y & & & + & t & & & & & = & 2100 \\ x & & & & & & & + & w & & & = & 600 \\ & & y & & & & & & & + & u & = & 800 \end{array}\right. (*) \,.$$

A matriz dos coeficientes, a matriz das variáveis e a matriz dos termos independentes do sistema são, respectivamente,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2450 \\ 2100 \\ 600 \\ 800 \end{bmatrix}.$$

A matriz $M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz base e temos a matriz $N_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Além dessas, temos as matrizes das variáveis básicas e das variáveis não-básicas são as matrizes $X_M = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$ e $Y_M = \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$, respectivamente.

Observe que a matriz $\begin{bmatrix} M & N_M \end{bmatrix}$ é uma partição da matriz A e a matriz $\begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \end{bmatrix}$ é uma partição da matriz X.

Caso as matrizes $\begin{bmatrix} M & N_M \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \end{bmatrix}$ não sejam partições das matrizes A e X podemos, por meio de uma permutação das colunas da matriz A e, usando a mesma permutação, nas linhas de X, obter $A = \begin{bmatrix} M & N_M \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \end{bmatrix}$.

Logo, a equação matricial do sistema pode ser escrita da seguinte forma

$$AX = B \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} M & N_M \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \end{bmatrix} = B \Longleftrightarrow MX_M + N_M Y_M = B \,.$$

A matriz M é uma matriz inversível, pois ela é uma matriz não-singular. Então, podemos multiplicar os dois membros da igualdade acima pela inversa da matriz M. Dessa maneira obtemos as variáveis básicas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} MX_M + N_M Y_M = B &\iff M^{-1}MX_M + M^{-1}N_M Y_M = M^{-1}B \\ &\iff I_m X_M + M^{-1}N_M Y_M = M^{-1}B \\ &\iff X_M + M^{-1}N_M Y_M = M^{-1}B \\ &\iff X_M = M^{-1}B - M^{-1}N_M Y_M \end{aligned} \tag{2.1}$$

Para concluirmos o desenvolvimento apresentaremos duas outras definições necessárias ao estudo. São elas:

Definição 2.2.6. *Considere um sistema linear $m \times n$, com $m \leq n$, de equação matricial $AX = B$. Diz-se que a matriz $\overline{X} \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ tal que $A\overline{X} = B$ é uma* ***solução básica*** *se as variáveis não-básicas forem todas nulas.*

Tomando $Y_M = \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ em (2.1) obtemos a matriz das variáveis básicas X_M,

$$\begin{aligned} X_M = M^{-1}B - M^{-1}N_M Y_M &\iff X_M = M^{-1}B - M^{-1}N_M \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff X_M = M^{-1}B - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff X_M = M^{-1}B \end{aligned} \tag{2.2}$$

Tomemos o sistema linear $(*)$. As matrizes das variáveis, das variáveis básicas e das variáveis não-básicas são, respectivamente,

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \\ u \end{bmatrix}, \qquad X_M = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \qquad \text{e} \qquad Y_M = \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}.$$

Pela Definição 2.2.6 se $w = 0$ e $u = 0$, então a matriz

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é uma solução básica do sistema linear.

Definição 2.2.7. *Considere um sistema linear $m \times n$, com $m \leq n$, de equação matricial $AX = B$. Diz-se que uma solução básica $\overline{X}$ é uma **solução básica viável** se as variáveis básicas são não negativas.*

Para ajudar na compreensão vamos encontrar as soluções básicas e dentre elas identificar quais são as soluções básicas viáveis no problema apresentado na Seção 2.2.3.

Tomemos, então, o sistema linear que foi escrito na forma canônica do problema

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2450 \\ x + 3y + t = 2100 \\ x + w = 600 \\ y + u = 800 \end{cases}.$$

A matriz dos coeficientes do sistema linear é

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz A tem 4 linhas e 6 colunas teremos, então, um total de

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\,(6-4)!} = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

submatrizes quadradas de ordem 4. Essas matrizes serão as candidatas a matriz base do sistema.

Essas 15 submatrizes são:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_5 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_6 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_7 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_8 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_9 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_{10} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{14} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_{15} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Utilizando a Definição 2.2.5 podemos identificar quais dessas 15 matrizes são matrizes bases. Faremos alguns casos para exemplificar. Além disso, dentre as matrizes bases que possuem soluções básicas vamos verificar quais são as soluções básicas viáveis.

A primeira submatriz é $M_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

O determinante desta matriz pela Definição 2.2.5 é igual a 1.

Como a matriz M_1 é uma matriz quadrada cuja ordem é igual ao número de linhas da matriz A e seu determinante é diferente de zero, temos que M_1 é uma matriz base.

Tomando as variáveis correspondentes a matriz M_1, que serão as variáveis básicas, temos a matriz

$$X_{M_1} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}.$$

As variáveis não-básicas serão w e u, então, $Y_{M_1} = \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$.

A matriz inversa da matriz M_1 é

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_4]{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \leftrightarrow L_4 - L_1]{L_3 \leftrightarrow L_3 - 3L_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \leftrightarrow L_4 - 3L_2]{L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

Portanto, a matriz inversa da matriz M_1 é $M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$.

Sendo B a matriz dos termos independentes e por (2.2) segue que

$$X_{M_1} = M_1^{-1} \times B \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2450 \\ 2100 \\ 600 \\ 800 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \times 2450 + 0 \times 2100 + 1 \times 600 + 0 \times 800 \\ 0 \times 2450 + 0 \times 2100 + 0 \times 600 + 1 \times 800 \\ 1 \times 2450 + 0 \times 2100 + (-3) \times 600 + (-2) \times 800 \\ 0 \times 2450 + 1 \times 2100 + (-1) \times 600 + (-3) \times 800 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 800 \\ -950 \\ -900 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow X_{M_1} = \begin{bmatrix} 600 \\ 800 \\ -950 \\ -900 \end{bmatrix}.$$

Nem todos os elementos da matriz X_{M_1} são não negativos. Concluímos que a matriz

$$\overline{X}_1 = \begin{bmatrix} 600 \\ 800 \\ -950 \\ -900 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

não é uma solução básica viável.

Verifiquemos, agora, as submatrizes $M_7 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $M_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Como as matrizes possuem todos os elementos de uma de suas linhas iguais a zero, então os seus determinantes são iguais a zero. Portanto, pela Definição 2.2.5 as matrizes M_7 e M_{12} não são matrizes bases.

Nas matrizes acima vimos como devemos proceder para verificar se a matriz é base ou não como também se uma solução básica é viável ou não. Para não ficar enfadonho, vamos verificar as cinco matrizes que nos interessam para o problema.

Considere a submatriz

$$M_{15} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que essa matriz é a matriz identidade de 4ª ordem e seu determinante é igual a 1. Portanto, a matriz M_{15} é uma matriz base.

A matriz inversa da matriz unidade de ordem n é a própria matriz. Assim temos

$$M_{15}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz das variáveis básicas é correspondente a matriz M_{15} é

$$X_{M_{15}} = \begin{bmatrix} z \\ t \\ w \\ u \end{bmatrix}.$$

Sendo B a matriz dos termos independentes e pela Definição 2.2.6 segue que

$$X_{M_{15}} = M_{15}^{-1} \times B \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} z \\ t \\ w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2450 \\ 2100 \\ 600 \\ 800 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} z \\ t \\ w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 2450 + 0 \times 2100 + 0 \times 600 + 0 \times 800 \\ 0 \times 2450 + 1 \times 2100 + 0 \times 600 + 0 \times 800 \\ 0 \times 2450 + 0 \times 2100 + 1 \times 600 + 0 \times 800 \\ 0 \times 2450 + 0 \times 2100 + 0 \times 600 + 1 \times 800 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} z \\ t \\ w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2450 \\ 2100 \\ 600 \\ 800 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow X_{M_{15}} = \begin{bmatrix} 2450 \\ 2100 \\ 600 \\ 800 \end{bmatrix}.$$

A matriz $X_{M_{15}}$ tem todos os seus elementos positivos e as variáveis não básicas são nulas, então

$$\overline{X}_{15} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2450 \\ 2100 \\ 600 \\ 800 \end{bmatrix}$$

é uma solução básica viável.

Considere a submatriz $M_8 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Aplicando o mesmo procedimento utilizado para a matriz M_{15}, concluímos que a matriz M_8 é uma matriz base.

A matriz inversa da matriz M_8 é $M_8^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Tomando as variáveis correspondentes a matriz M_8, que serão as variáveis básicas, temos a matriz

$$X_{M_8} = \begin{bmatrix} x \\ z \\ t \\ u \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad X_{M_8} = \begin{bmatrix} 600 \\ 650 \\ 1500 \\ 800 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz X_{M_8} tem seus elementos positivos e as variáveis não-básicas nulas, então a matriz

$$\overline{X}_8 = \begin{bmatrix} 600 \\ 0 \\ 650 \\ 1500 \\ 0 \\ 800 \end{bmatrix}$$

é uma solução básica viável.

Considere a submatriz $M_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Aplicando o mesmo procedimento utilizado para a matriz M_{15}, concluímos que a matriz M_{13} é uma matriz base.

A matriz inversa da matriz M_{13} é $M_{13}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Tomando as variáveis correspondentes a matriz M_{13}, que serão as variáveis básicas, temos a matriz

$$X_{M_{13}} = \begin{bmatrix} y \\ z \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad X_{M_{13}} = \begin{bmatrix} 700 \\ 1050 \\ 600 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz $X_{M_{13}}$ tem seus elementos positivos e as variáveis não-básicas nulas, então a matriz

$$\overline{X}_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 700 \\ 1050 \\ 0 \\ 600 \\ 100 \end{bmatrix}$$

é uma solução básica viável.

Considere a submatriz $M_6 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Como o determinante é diferente de zero, temos que M_6 é uma matriz base.

A matriz inversa da matriz M_6 é $M_6^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Tomando as variáveis correspondentes a matriz M_6, que serão as variáveis básicas, temos a matriz

$$X_{M_6} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad X_{M_6} = \begin{bmatrix} 450 \\ 550 \\ 150 \\ 250 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz X_{M_6} tem seus elementos positivos e as variáveis não-básicas iguais a zero, então a matriz

$$\overline{X}_6 = \begin{bmatrix} 450 \\ 550 \\ 0 \\ 0 \\ 150 \\ 250 \end{bmatrix}$$

é uma solução básica viável.

Considere a submatriz $M_5 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Como a matriz M_5 tem determinante diferente de zero, temos que M_5 é uma matriz base.

A matriz inversa da matriz M_5 é $M_5^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{7}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$.

Tomando as variáveis correspondentes a matriz M_5, que serão as variáveis básicas, temos a matriz

$$X_{M_5} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \\ u \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad X_{M_5} = \begin{bmatrix} 600 \\ 325 \\ 525 \\ 475 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz X_{M_5} tem seus elementos positivos e as variáveis não-básicas iguais a zero, então a matriz

$$\overline{X}_5 = \begin{bmatrix} 600 \\ 325 \\ 0 \\ 525 \\ 0 \\ 475 \end{bmatrix}$$

é uma solução básica viável.

As outras matrizes da lista das quinze ou não são matrizes bases ou são matrizes bases mas a solução não é básica viável.

Note que a região viável do problema da Seção 2.2.3 era um pentágono, ver Figura 7 na página 50, e nos cálculos acima encontramos exatamente cinco soluções básicas viáveis. Portanto, podemos utilizar as soluções básicas viáveis para resolver algebricamente um problema de Programação Linear.

Vamos resolver o problema de Programação Linear apresentado na Seção 2.2.3 utilizando o conhecimento de soluções básicas viáveis. Para tanto necessitamos da definição de ***ponto extremo*** e de proposições que nos garanta (i) que uma solução básica viável é um ponto extremo da região viável e (ii) que a solução ótima é um ponto extremo da região viável.

Definição 2.2.8. *Se denomina **ponto extremo** de um conjunto convexo $\mathcal{S}$ qualquer ponto P de $\mathcal{S}$ que não pode ser escrito como uma combinação linear convexa de dois pontos distintos de $\mathcal{S}$.*

Um segmento de reta AB é um conjunto convexo, uma vez que qualquer um de seus pontos pode ser escrito como uma combinação linear convexa de A e B. Neste caso, os pontos A e B são pontos extremos do conjunto convexo.

No caso de um polígono no plano os pontos extremos não serão outros senão os seus vértices. Assim, no plano, os pontos extremos de um conjunto convexo $\mathcal{S}$ são os vértices do polígono que representa o conjunto.

A proposição a seguir nos garante que uma solução básica viável é um ponto extremo da região viável do problema.

Proposição 2.2.1. *Toda solução básica viável de um sistema linear $m \times n$, com $m \leq n$, de equação matricial $AX = B$ é um ponto extremo da região viável do problema.*

Demonstração. Chamemos a região viável do problema de $\mathcal{S}$. Consideremos um sistema linear de equação matricial $AX = B$.

Sem perda de generalidade tomemos uma solução básica viável

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{com } \ \overline{x}_i \geq 0\,, \ \text{ para todo } \ i = 1, \ldots, n\,.$$

do sistema $AX = B$ e M a matriz base associada a A, cuja a matriz das variáveis básicas é $X_M = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_m \end{bmatrix}$.

Suponha que $\overline{X}$ não seja um ponto extremo de $\mathcal{S}$. Então, podemos escrever $\overline{X}$ como uma combinação linear convexa de dois pontos distintos P e Q de $\mathcal{S}$. Assim,

$$\overline{X} = (1-t)\,P + tQ\,, \quad \text{com} \quad 0 < t < 1\,.$$

Tomando os elementos $\overline{x}_i$ da matriz $\overline{X}$ temos

$$\overline{x_i} = (1-t)\, p_i + tq_i \,, \quad i = 1,\, 2,\, \cdots,\, n \,.$$

Como $0 < t < 1$ temos que t e $1-t$ são números positivos, então $\overline{x}_i = 0$ se, e somente se, $p_i = 0$ e $q_i = 0$.

Segue que as últimas $(n-m)$ igualdades serão satisfeitas se

$$p_{m+i} = q_{m+i} = 0 \quad \text{para} \quad i = 1,\, 2,\, \cdots,\, (n-m) \;.$$

Logo, P e Q são soluções básicas.

Sejam $P_M = \begin{bmatrix} \overline{p}_1 \\ \vdots \\ \overline{p}_m \end{bmatrix}$, e $Q_M = \begin{bmatrix} \overline{q}_1 \\ \vdots \\ \overline{q}_m \end{bmatrix}$, com $P_M \neq Q_M$, matrizes de variáveis básicas. Então, podemos por 2.2 escrever $MP_M = B$ e $MQ_M = B$. Subtraindo membro a membro temos

$$MP_M - MQ_M = B - B \Longleftrightarrow M\,(P_M - Q_M) = O \;,$$

onde O é a matriz nula. Como $P_M - Q_M \neq O$, segue que $det\,(M) = 0$ e com isso M não é uma matriz base (contradição).

Concluímos que não existem $P, Q \in \mathcal{S}$ distintos tais que $\overline{X}$ pode ser escrita como uma combinação linear convexa de P e Q. Então, $\overline{X}$ é um ponto extremo de $\mathcal{S}$.

Portanto, toda solução básica viável é um ponto extremo da região viável do problema. $\square$

Por exemplo, a região viável do problema da Seção 2.2.3 é um pentágono, ver figura 7 na página 50, cujos vértices são $A = \overline{X}_{15}$, $B = \overline{X}_8$, $G = \overline{X}_5$, $H = \overline{X}_6$ e $F = \overline{X}_{13}$,

Vejamos um lema que nos ajudará na demonstração da próxima proposição.

Lema 2.2.1. *Sejam $P_1,\, P_2,\, \cdots,\, P_n$ pontos extremos de um conjunto convexo $\mathcal{S}$. Então, qualquer ponto X de $\mathcal{S}$ pode ser escrito da forma*

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, P_i \;,\, com\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \;e\; \alpha_i \geq 0 \,,\; \forall\, i = 1,\, 2,\, \cdots,\, n \,.$$

Demonstração. Considere uma região convexa $\mathcal{S}$ de vértices $P_1,\, P_2,\, \cdots,\, P_n$, pontos extremos. Sejam X um ponto qualquer na região interna de $\mathcal{S}$ e P_w, com $w = 1,\, 2,\, \cdots,\, n$, um vértice de $\mathcal{S}$.

A semirreta com origem em P_w e que passa por X intercepta o segmento P_kP_{k+1}, $w \neq k$ e $w \neq k+1$, na fronteira de $\mathcal{S}$, no ponto X', ver Figura 12.

Então, existem $\alpha_1,\, \alpha_2,\, \beta_1,\, \beta_2 \in [0,\, 1]$, com $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ e $\beta_1 + \beta_2 = 1$, tais que

$$X' = \alpha_1 P_k + \alpha_2 P_{k+1} \quad \text{e} \quad X = \beta_1 X' + \beta_2 P_w \;.$$

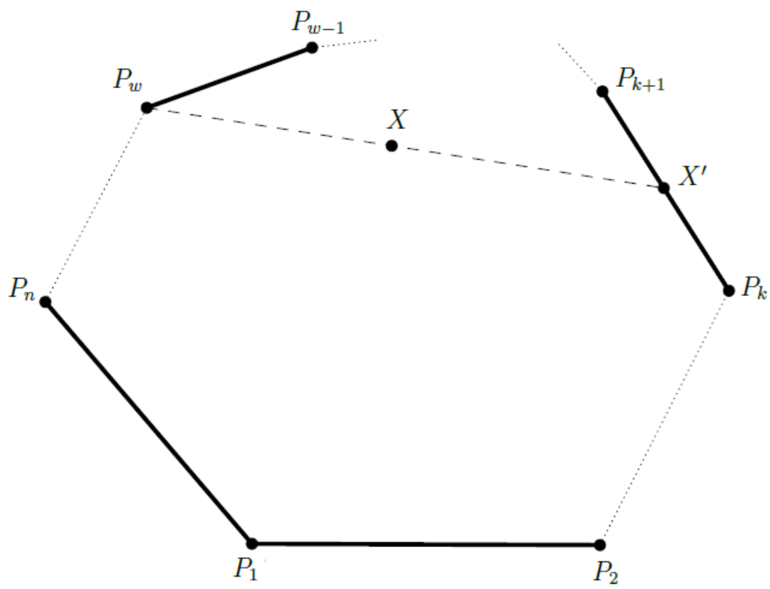

Figura 12 – Região Convexa $\mathcal{S}$ de vértices $P_1, P_2, \cdots, P_n$

Segue que

$$X = \beta_1 \left(\alpha_1 P_k + \alpha_2 P_{k+1}\right) + \beta_2 P_w \Longleftrightarrow X = \beta_1\alpha_1 P_k + \beta_1\alpha_2 P_{k+1} + \beta_2 P_w$$

$$\Longleftrightarrow X = 0P_1 + \cdots + 0P_{k-1} + \lambda_1 P_k + \lambda_2 P_{k+1} + \cdots + 0P_{w-1} + \lambda_3 P_w + \cdots + 0P_n\,,$$

$$\text{com } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\,.$$

Se X estiver na fronteira da região convexa $\mathcal{S}$ concluímos, de forma análoga, o resultado. □

A proposição abaixo garante que a solução ótima do problema é um ponto extremo.

Proposição 2.2.2. *Se o problema de Programação Linear admitir uma solução ótima, então pelo menos um ponto extremo da região viável é a solução ótima.*

Demonstração. Suponha $\mathcal{S}$ a região viável limitada. Sejam $P_1, P_2, \cdots, P_n$ pontos extremos de $\mathcal{S}$. Pelo Lema 2.2.1 temos,

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, P_i\,, \text{ com } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\,, \alpha_i \geq 0\,, \forall\, i = 1,\, 2,\, \cdots,\, n\,,$$

onde X é qualquer ponto de $\mathcal{S}$.

Tomando a função objetivo f como um produto interno, $f = \langle \overrightarrow{c},\, \overrightarrow{x}\rangle$, onde $\overrightarrow{c}$ é o vetor cujas componentes são os coeficientes da função objetivo e $\overrightarrow{x} = X$, segue que

$$\langle \overrightarrow{c},\, \overrightarrow{x}\rangle = \left\langle \overrightarrow{c},\, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, P_i \right\rangle = \alpha_1 \langle \overrightarrow{c},\, P_1\rangle + \alpha_2 \langle \overrightarrow{c},\, P_2\rangle + \cdots + \alpha_n \langle \overrightarrow{c},\, P_n\rangle\,.$$

Seja P_k, $1 \leq k \leq n$, um ponto extremo tal que $\langle \overrightarrow{c},\, P_k\rangle \geq \langle \overrightarrow{c},\, P_i\rangle$, $\forall\, i = 1,\, 2,\, \cdots,\, n$. Então,

$$\langle \overrightarrow{c},\, \overrightarrow{x}\rangle = \alpha_1 \langle \overrightarrow{c},\, P_1\rangle + \alpha_2 \langle \overrightarrow{c},\, P_2\rangle + \cdots + \alpha_n \langle \overrightarrow{c},\, P_n\rangle \leq$$

$$\leq \alpha_1\langle \overrightarrow{c}, P_k\rangle + \alpha_2\langle \overrightarrow{c}, P_k\rangle + \cdots + \alpha_n\langle \overrightarrow{c}, P_k\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \overrightarrow{c}, P_k\rangle \, .$$

Como $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$ segue que $\langle \overrightarrow{c}, \overrightarrow{x}\rangle \leq \langle \overrightarrow{c}, P_k\rangle$, para todo $X \in \mathcal{S}$.

De forma análoga, se supormos que $\langle \overrightarrow{c}, P_k\rangle \leq \langle \overrightarrow{c}, P_i\rangle$, $\forall\, i = 1, 2, \cdots, n$, concluiríamos $\langle \overrightarrow{c}, \overrightarrow{x}\rangle \geq \langle \overrightarrow{c}, P_k\rangle$, para todo $X \in \mathcal{S}$.

Portanto, P_k é a solução ótima, o que demonstra a proposição. □

Voltemos ao nosso problema que foi resolvido graficamente na Seção 2.2.3, cuja solução ótima é o ponto (450, 550), e vamos utilizar solução básica viável para resolvê-lo.

O nosso problema na forma padrão é escrito da seguinte forma

$$\begin{array}{c} \text{Maximizar } \langle \overrightarrow{c}, \overrightarrow{x}\rangle, \text{ com } \overrightarrow{c} = (30, 45) \text{ e } \overrightarrow{x} = (x, y) \\ \text{sujeito a } \left\{ \begin{array}{rcl} 3x + 2y & \leq & 2450 \\ x + 3y & \leq & 2100 \\ x & \leq & 600 \\ y & \leq & 800 \end{array} \right. \\ \text{com } x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \end{array}$$

e na forma canônica temos

$$\begin{array}{c} \text{Maximizar } \langle \overrightarrow{c'}, \overrightarrow{x'}\rangle, \text{ onde } \overrightarrow{c'} = (30, 45, 0, 0, 0, 0) \text{ e } \overrightarrow{x'} = (x, y, z, t, w, u) \\ \text{sujeito a } \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} 3x & + & 2y & + & z & & & & & & & = & 2450 \\ x & + & 3y & & & + & t & & & & & = & 2100 \\ x & & & & & & & + & w & & & = & 600 \\ & & y & & & & & & & + & u & = & 800 \end{array} \right. \\ \text{com } x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ t \geq 0,\ w \geq 0 \text{ e } u \geq 0. \end{array}$$

Efetuando o produto interno, a função objetivo na forma canônica é

$$f\,(x, y, z, t, w, u) = 30x + 45y + 0z + 0t + 0w + 0u \, .$$

Utilizando as soluções básicas viáveis temos:

1. Tomemos a solução básica viável

$$\overline{X}_{15} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2450 \\ 2100 \\ 600 \\ 800 \end{bmatrix} .$$

Substituindo os valores na função objetivo temos

$$f\,(0,\,0,\,2450,\,2100,\,600,\,800) = 30{\times}0{+}45{\times}0{+}0{\times}2450{+}0{\times}2100{+}0{\times}600{+}0{\times}800 \Longleftrightarrow$$

$$f\,(0,\,0,\,2450,\,2100,\,600,\,800) = 0\ .$$

Note que $\overline{X}_{M_{15}}$ corresponde ao vértice A da Figura 8.

2. Seja a solução básica viável

$$\overline{X}_8 = \begin{bmatrix} 600 \\ 0 \\ 650 \\ 1500 \\ 0 \\ 800 \end{bmatrix}.$$

Substituindo os valores na função objetivo temos

$$f\,(600,\,0,\,650,\,1500,\,0,\,800) = 30{\times}600{+}45{\times}0{+}0{\times}650{+}0{\times}1500{+}0{\times}600{+}0{\times}800 \Longleftrightarrow$$

$$f\,(600,\,0,\,650,\,1500,\,0,\,800) = 18000\ .$$

Note que $\overline{X}_{M_8}$ corresponde ao vértice B da Figura 8.

3. Considere a solução básica viável

$$\overline{X}_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 700 \\ 1050 \\ 0 \\ 600 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

Substituindo os valores na função objetivo temos

$$f\,(0,\,700,\,1050,\,0,\,600,\,100) = 30{\times}0{+}45{\times}700{+}0{\times}1050{+}0{\times}0{+}0{\times}600{+}0{\times}100 \Longleftrightarrow$$

$$f\,(0,\,700,\,1050,\,0,\,600,\,100) = 31500\ .$$

Note que $\overline{X}_{M_{13}}$ corresponde ao vértice F da Figura 8.

4. Considere a solução básica viável

$$\overline{X}_6 = \begin{bmatrix} 450 \\ 550 \\ 0 \\ 0 \\ 150 \\ 250 \end{bmatrix}.$$

Substituindo os valores na função objetivo temos

$$f\,(450,\,550,\,0,\,0,\,150,\,250) = 30\times 450+45\times 550+0\times 0+0\times 0+0\times 150+0\times 250 \iff$$

$$f\,(450,\,550,\,0,\,0,\,150,\,250) = 38250\ .$$

Note que $\overline{X}_{M_6}$ corresponde ao vértice H da Figura 8. Este ponto é a solução ótima do problema.

5. Por fim, seja a solução básica viável

$$\overline{X}_5 = \begin{bmatrix} 600 \\ 325 \\ 0 \\ 525 \\ 0 \\ 475 \end{bmatrix}.$$

Substituindo os valores na função objetivo temos

$$f\,(600,\,325,\,0,\,525,\,0,\,475) = 30\times 600+45\times 325+0\times 0+0\times 525+0\times 0+0\times 475 \iff$$

$$f\,(450,\,550,\,0,\,0,\,150,\,250) = 32625\ .$$

Note que $\overline{X}_{M_5}$ corresponde ao vértice G da Figura 8.

Podemos, então, adotar o seguinte procedimento para a resolução algébrica de um problema de Programação Linear. Vejamos passo a passo:

(1) Escrever o problema na forma padrão e em seguida na forma canônica;

(2) Determinar quais são as matrizes bases da matriz dos coeficientes do sistema na forma canônica;

(3) Encontrar as matrizes inversas das matrizes bases;

(4) Encontrar as soluções básicas e verificar quais delas são soluções básicas viáveis;

(5) Encontrar as imagens, pela função objetivo, das soluções básicas viáveis. O maior ou menor valor das imagens é o valor ótimo do problema.

2.2.5 Problemas Propostos de Programação Linear

Nesta seção apresentaremos uma lista de cinco exercícios de problemas de Programação Linear que pode ser utilizada pelo docente do Ensino Médio nas suas aulas de Geometria Analítica. Esses problemas podem ser resolvidos sem o auxílio de computadores.

Caso se tenha um laboratório de Ensino de Matemática pode-se utilizar o Geogebra para a verificação das regiões convexas de cada restrição e a região viável de um problema de Programação Linear.

A fonte das questões estará colocada logo após o enunciado e em algumas fizemos pequenas adaptações. Vamos as questões.

Questão 1. Uma pessoa em dieta necessita ingerir pelo menos 20 unidades de vitamina "A", 10 unidades de vitamina "B"e 2 unidades de vitamina "C". Ela deve conseguir essas vitaminas a partir de dois tipos diferentes de alimentos: $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$. A quantidade de vitaminas que esses produtos contêm por unidade e o preço unitário de cada um deles estão expressos na seguinte tabela:

Alimento	Vitamina "A"	Vitamina "B"	Vitamina "C"	Preço Unitário
$\mathcal{A}_1$	4	1	1	R\$30,00
$\mathcal{A}_2$	1	2	-	R\$20,00

Qual a programação de compra dos alimentos $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ que essa pessoa deve fazer para cumprir sua dieta, a menor custo possível?
(Extraído de (13))

Questão 2. Uma fábrica tem 3 tipos de máquinas $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ e $\mathcal{M}_3$, a serem utilizadas na fabricação dos produtos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$. O quadro abaixo descreve como a fábrica opera diariamente:

Máquinas	Produto $\mathcal{P}_1$	Produto $\mathcal{P}_2$	Disponibilidade Diária
$\mathcal{M}_1$	3	2	20 horas
$\mathcal{M}_2$	4	0	12 horas
$\mathcal{M}_3$	2	5	18 horas

Qual a produção diária a fim de que o lucro seja o máximo possível, sabendo que o produto $\mathcal{P}_1$ dá lucro de 200 unidades monetárias e $\mathcal{P}_2$, 50 unidades?
(Extraído de (13))

Questão 3. Suponhamos que um agricultor queira adubar a sua plantação e disponha de dois tipos de adubo. O primeiro contém $3g$ de fósforo, $1g$ de nitrogênio e $8g$ de potássio, e custa 10 u.m. (unidades monetárias) por quilograma. O segundo tipo contém $2g$ de fósforo, $3g$ de nitrogênio e $2g$ de potássio, e custa 8 u.m. por quilograma. Sabemos que um quilograma de adubo dá para $10m^2$ de terra, e que o solo em que estão suas plantações necessita de pelo menos $3g$ de fósforo, $1,5g$ de nitrogênio e $4g$ de potássio a cada $10m^2$.

Quanto o agricultor deve comprar de cada adubo, para cada $10m^2$ de terra, de modo a conseguir ter o mínimo custo?
(Extraído de (3))

Questão 4. Uma fábrica produz dois tipos de geradores, tipo A e tipo B, e cada um deles deve passar por duas máquinas, C e D. Para fazer um gerador do tipo A, a máquina C deve trabalhar 2 horas e a máquina D deve trabalhar 4 horas. Para fazer uma unidade do tipo B, as máquinas C e D devem trabalhar respectivamente, 4 e 2 horas. As máquinas podem trabalhar 24 horas por dia. Sabe-se que a fábrica tem um lucro de 3.000 u.m. por gerador do tipo A e um lucro de 5.000 u.m. por um do tipo B. Além disso, ela vende toda a sua produção. Sendo assim, perguntamos: quantos geradores de cada tipo a fábrica deve produzir, para que seu lucro seja máximo?
(Extraído de (3))

Questão 5. Certa empresa fabrica dois produtos: P_1 e P_2. O lucro unitário do produto P_1 é de 1000 unidades monetárias e o lucro unitário de P_2 é de 1800 unidades monetárias. A empresa precisa de 20 horas para fabricar uma unidade de P_1 e de 30 horas para fabricar uma unidade de P_2. O tempo anual de produção disponível para isso é de 1200 horas. A demanda esperada para cada produto é de 40 unidades anuais para P_1 e 30 unidades anuais para P_2. Qual é o plano de produção para que a empresa maximize seu lucro nesses itens?
(Extraído de (10))

Conclusão

Quando ingressamos no programa do Mestrado Profissional um dos arquivos existentes no sítio do PROFMAT era as Normas Acadêmicas. No item *2.5 Disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso*, um trecho de um parágrafo continha:

> *"Os Trabalhos de Conclusão de Curso devem versar sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula"*.

Então, o interesse do tema originou de uma experiência pessoal vivida no ano de 1990 no terceiro ano do Ensino Médio do Colégio Vera Cruz quando lecionamos Geometria Analítica e depois no ano de 2008 quando lecionamos, no Curso de Engenharia de Produção Civil do Instituto Federal de Pernambuco, a disciplina Pesquisa Operacional I.

Portanto, o objetivo desse nosso trabalho é servir de base para que o professor de Ensino Médio tenha subsídios para mostrar ao aluno aplicações do estudo de, dentre outros assuntos, Matrizes, Determinantes, Sistemas Lineares e Geometria Analítica em problemas concretos e interessantes.

Não temos resultados para mostrar oriundos de atividades desenvolvidas em sala de aula, pois não aplicamos essa proposta em turmas de Ensino Médio. Porém, acreditamos, com base nas três décadas de experiência nos Ensinos Fundamental II, Médio e Superior, que é uma proposta viável para Ensino Médio.

Optamos por apresentar uma solução algébrica de um problema de Programação Linear utilizando soluções básicas viáveis ao invés do Método Simplex, pois apesar de mais trabalhoso, a utilização das soluções básicas viáveis estão mais presentes no cotidiano escolar de um aluno do Ensino Médio já que envolve cálculo de determinante, cálculo de matriz inversa e multiplicação de matrizes que são assuntos de Matemática do segundo ano do Ensino Médio.

Referências

1 IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar, 7: Geometria Analítica*. São Paulo: Atual Editora, 2005.

2 NACIONAIS, P. C. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: Ministério da Educação e Cultura, 1998.

3 BOLDRINI, J. L. e. a. *Álgebra Linear*. São Paulo: Harper & Row do Brasil Ltda, 1980.

4 HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. d. S. *Introdução à álgebra linear*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemàtica, 2012.

5 SCHNEIDER, H.; BARKER, G. P. *Matrices and Linear Algebra*. New York: Dover Publications, 1989.

6 PETTOFREZZO, A. J. *Matrices and Transformations*. New York: Dover Publications, 1978.

7 EVES, H. W. *Elementary Matrix Theory*. New York: Dover Publications, 1966.

8 PUCCINI, A. d. L. *Introduçã à Programação Linear*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1975.

9 LOESCH, C.; HEIN, N. *Pesquisa Operacional: Fundamentos e Modelos*. São Paulo: Editora Saraiva, 2009.

10 SILVA, H. M. *Pesquisa Operacional: Programação Linear*. São Paulo: Editora Atlas, 2009.

11 LAGES, E. L. *Coordenadas no Plano: Geometria Analítica, Vetores e Transformações Geométricas*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

12 BARSOV, A.; OKHLOPKOVA, A. *Programação Linear*. Moscou, URSS: MIR, 1984.

13 YOSHIDA, L. K. *Métodos Quantitativos: Programação Linear*. São Paulo: Atual Editora, 1987.