Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

ARITMÉTICA EM SALA DE AULA: JOGOS, MÁGICAS, DIVERSÃO E DESAFIOS

NILCIEDE SILVA CRUZ

Orientadora

ANETE SOARES CAVALCANTI

Recife-PE

Abril de 2017

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

ARITMÉTICA EM SALA DE AULA: JOGOS, MÁGICA, DIVERSÃO E DESAFIOS

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre Profissional em Matemática.

NILCIEDE SILVA CRUZ

Recife-PE
Abril de 2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

C957a Cruz, Nilciede Silva.
Aritmética em sala de aula: jogos, mágica, diversão e desafios / Nilciede Silva Cruz. – 2017.
153 f : il.

Orientadora: Anete Soares Cavalcanti.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Recife, BR-PE, 2017.
Inclui referências.

1. Ensino-aprendizagem 2. Matemática e atividades lúdicas I. Cavalcanti, Anete Soares, orient. II. Título

CDD 510

NILCIEDE SILVA CRUZ

Aritmética em sala de aula: Jogos, Mágica, Diversão e Desafios.

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 11/ 04 / 2017

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Anete Soares Cavalcanti (Orientador(a)) - UFRPE

Profª. Drª. Cleide Soares Martins Gomes - UPE

Profª. Drª. Elisângela Bastos de Melo Espíndola-DED/UFRPE

Dedico ao meu Deus e aos professores.

[...] em termos de modelos de aprendizagem [...] não podemos nos prender a um determinado modelo, pois assim corremos o risco de cegar-nos ao invés de participar do ensino e aprendizagem com criatividade própria.

Ocsana Sônia Danyluk

Agradecimentos

Inicialmente a Deus por ter me guiado na elaboração deste trabalho. Seguidamente aos meus familiares pelo apoio. Agradeço também a Anete Soares Cavalcanti pelas preciosas orientações e ao professor Ross Nascimento. A banca por ter gentilmente aceitado o convite e por fim aos alunos que participaram deste estudo.

Resumo

Aritmética em Sala de Aula: Jogos, Mágicas, Diversão e Desafios têm como proposta intervir na realidade da sala de aula; ao professor, oferecer atividades diversas sobre um mesmo assunto; aos estudantes, permitir o surgimento de atitudes favoráveis à aritmética. Sobre forma de resumos apresentamos neste trabalho, um pouco sobre a estrutura curricular da matemática ao longo dos anos, também as variadas formulações sobre o processo de ensino aprendizagem, o papel do aluno e do professor nesse sistema, especificamente na construção lógica matemática. Procura-se compreender algumas estratégias e métodos no campo do ensino desta disciplina. Além disso, apresentar as especificidades que o educando deve desenvolver para uma educação integral coerente ao presente século, e as contribuições que esta área do conhecimento pode promover. A pesquisa foi dividida em três etapas: a primeira delas corresponde à fundamentação teórica sobre o processo de ensino aprendizagem; seguidamente de uma coletânea de atividades desenvolvidas por outros pesquisadores e por vezes adaptada pelos próprios discentes e a terceira, com a concepção de aspectos relevantes à prática do professor, resultando em sequências que fomentam a diversidade de atividades que a classificamos por lúdicas, todas de baixo custo e de fácil construção e manipulação; resolução de problemas, com ênfase em questões da OBMEP e ENEM; atreladas à curiosidades históricas inseridas em um mesmo tema. À exemplo de como se pode trabalhar a proposta metodológica abordada, foi escolhido o tema "Matemática Financeira"e apresentada uma sequência didática. Ao final do projeto foi aplicado aos estudantes um questionário, a fim de compreender se as práticas tiveram alguma relevância na aprendizagem destes educandos ou se produziram atitudes positivas em relação à disciplina. É sabido e ratificado neste trabalho, que a combinação de tais atividades prioriza o processo de construção do conhecimento de forma substancial as mudanças atitudinais, podem levar dias, meses e até anos. Entretanto, as múltiplas experiências são concebidas de forma interessante e desafiadoras por partes dos aprendizes.

Palavras-Chaves: Ensino Aprendizagem; Matemática e Atividades Lúdicas.

Abstract

Arithmetic in Classroom: Games, Magic, Fun and Challenges have as their purpose to intervene in the reality of the classroom; to the teacher is to offer diverse activities on the same subject; to the student is to allow the emergence of attitudes favorable to Arithmetic. This work is presented in a form of summaries; it has a little about the curricular structure of Mathematics over the years and also the various formulations about the teaching- learning process, the roles of the student and the teacher in this system, specifically in the logical construction of Mathematics. It is needed to understand some strategies and methods in the field of the teaching of this discipline. In addition, to show some of the specificities that the learner should develop an integral education which is consistent to the current century and also contributions that this field of knowledge can promote. The research was divided in three stages: the first one corresponds to the theoretical foundation on the process of teaching learning; Followed by a collection of activities developed by other researchers and sometimes adapted by the students themselves and the third, with the conception of relevant aspects to the teacher's practice, resulting in sequences that foster the diversity of activities that are classified as playful, low cost and easy to build and manipulate; problem solving, with emphasis on OBMEP and ENEM issues; linked to historical curiosities which are inserted in the same theme. As an example of how to work the methodological proposal addressed, the theme "Financial Mathematics"was chosen and a didactic sequence was presented. At the end of the project, a questionnaire was applied to the students in order to understand if the practices had any relevance in their learning or if they have produced positive attitudes towards the subject studied. It is known and ratified in this work that the combination of such activities prioritizes the process of knowledge construction in a substantial way, although behavioral changes can take days, months and even years. Yet, multiple experiences are designed in an interesting and challenging way by the learners.

Keywords: Teaching- Learning; Mathematics and Playful activities.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Graças à popularização dos Smartphones é fácil encontrar nas salas de aula os alunos envolvidos no mundo tecnológico, mergulhados nas redes sociais, competindo com os professores e quase sempre vencendo, afinal, quadro não parece interativo. Este trabalho, na tentativa de auxiliar uma prática baseada fundamentalmente na palavra e nas trocas entre um professor e um grupo de alunos, preconiza alguns métodos de ensino utilizando recursos acessíveis aos professores de matemática do ensino médio em especial no campo da aritmética, que ministram aulas presenciais, que não possuem uma lousa digital e que não possuem um ambiente virtual específico de aprendizagem matemática.

As ideias correntes ao longo dos anos sobre o ensino e a aprendizagem de matemática foram se adequando às necessidades reais ao contexto cultural de sua época. Por muito tempo a educação era seletiva, apenas os ricos poderiam ter acesso, posteriormente tornou-se direito de todos sem a igualdade de acesso. Só no final do último século, de fato, o direito à educação com igualdade de acesso foi ampliada de forma significativa no país. No entanto, trouxe-nos salas lotadas de alunos com características socioeconômicas e culturais diferentes, que implicará ainda mais um melhor desempenho do professor em sua prática.

Aulas em que se expõem conceitos, fórmulas e regras e depois é exigida a repetição de exercícios, tão usadas até hoje, têm origem no começo do século 20. Aprender é algo complexo que não pode ser medido por quantidades de respostas corretas. O que antes era considerado erro do aluno ou falta de conhecimento do conteúdo agora se revela como a expressão de diferentes formas de raciocinar sobre um problema, que devem ser compreendidas e levadas em consideração pelo professor no planejamento das intervenções.

O ensino é uma prática de quem sabe aonde quer chegar. Não se vai de um lugar a outro sem antes haver definido o melhor caminho a seguir, os métodos são caminhos. A maneira de situar algumas atividades em relação às outras, e não apenas o tipo de tarefa, é um critério que permite realizar algumas identificações ou caracterização preliminares da forma de ensinar. É importante perceber que os métodos não revolucionarão a prática de ensino do professor, eles são apenas uma parte crucial na aquisição do conhecimento.

Segundo Zabala (2010, p. 34), "Como se aprende e o ritmo da aprendizagem variam segundo as capacidades, motivações e interesses de cada um dos estudantes, enfim, as aprendizagens são resultados de processos singulares e pessoais". É notório que a diversidade na utilização dos métodos de ensino torna as aulas mais interessantes e menos monótonas. É imprescindível conhecer, ou até mesmo desenvolver hábitos balizados em técnicas que dinamizem a prática docente.

Por compreender que o ser humano é biológico e histórico, e que se desenvolvem com características e capacidades diferentes, sua inteligência que é, segundo o dicionário Aurélio, a faculdade de conhecer, compreender e aprender se concebe de forma distinta. A dificuldade, portanto, consistirá em oferecer os desafios e ajudas adequados às características de cada um dos alunos. Depreender essas diferenças significa, no mínimo, promover atividades que contemplem essas especificidades diferentes.

A fim de intervir na realidade do ensino na área da aritmética, em especial para alguns temas, este trabalho propõe-se a transcrever diversas estratégias, apoiadas em estudos de psicólogos e especialistas em Educação Matemática, dentro da perspectiva de exemplificar o processo de ensino aprendizagem no âmbito tecnicista perpassando ao construtivismo. Deste modo, elucidar a importância em desenvolver sequências de ensino que reviste algumas dessas tendências.

A proposta é diminuir o distanciamento que a maioria dos alunos do 1º ano do ensino médio, nosso público alvo, possui em relação à Matemática, em especial, no campo da aritmética dinamizando a aula na busca de envolver todos os estudantes, ou pelo menos a maioria deles. Neste sentido, procuramos durante o ano letivo de 2016, aplicar a maioria das atividades propostas neste trabalho à estudantes da escola de referência em ensino médio Padre Osmar Novaes (EREMPON), escola pública no município do Paulista do estado de Pernambuco.

Assentados em pesquisa bibliográfica, este trabalho considera no primeiro capítulo, o currículo e as formas de ensino da matemática ao longo dos anos, em vista disso, destaca-se o papel do aluno e o do professor neste processo, e as concepções de ensino-aprendizagem que permearam essas práticas. Acentua algumas tendências pedagógicas no ensino desta disciplina à luz dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN_s) e revisita os elementos que norteiam uma sequência didática, e aponta esta, como o recurso meio para viabilizar a aplicação das atividades propostas para cada tema deste trabalho.

Nessa perspectiva, apresenta-se no segundo capítulo o tema "Matemática Financeira", com este, faz-se alusão a alguns aspectos e etapas relevantes que devem compor uma sequência didática, e vincula as tendências pedagógicas do ensino-aprendizagem, comentadas no capítulo anterior, e as atividades atreladas ao assunto a uma sequência didática. Nela, propõe-se um modelo do que pôde ser construído com os outros temas.

Os assuntos escolhidos, e comentados nos capítulos 2 e 3, são constituídos de um breve resumo de conteúdos, assim como, uma coletânea das atividades classificadas em **lúdicas**; **história e/ou curiosidades** e **resolução de problemas** decorrentes dos temas: operações nos racionais; notação científica; mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum; razão e proporção; matemática financeira; progressão aritmética (P.A.) e progressão geométrica (P.G.) requeridos no vestibular seriado da Universidade de Pernambuco (UPE) e Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Desta forma, disponibiliza-se aos professores um material de apoio pedagógico, uma vez que, foi verificado a pouca ou quase nenhuma fundamentação teórica da maioria dos temas citados anteriormente nos livros didáticos do ensino médio, unidos aos demais conteúdos propostos ao 1º ano.

verificam-se nestes mesmos capítulos a exposição das atividades aplicadas em formato de sequência, representadas para cada tema por meio de uma tabela, titulada "plano de ação", seguidos dos comentários da mestranda que tenta descrever a reação dos estudantes frente a essa nova didática, como também, a resolução de um problema desafio feito por alguns dos estudantes, fruto desta experiência.

Declara-se, no último capítulo, o resultado de um questionário aplicado aos estudantes sobre seu rendimento e empatia referente à disciplina, decorrentes das sequências vivenciadas durante todo o ano letivo. Seus diagnósticos foram, em parte, expressos numa tabela e em parte em síntese textual. De modo geral, os resultados apontaram a aprovação dos estudantes sobre as práticas desenvolvidas, por fim, acrescenta-se as considerações finais da mestranda.

Capítulo 1

METODOLOGIAS PROPOSTAS AO ENSINO DE MATEMÁTICA

O que é Metodologia? É uma palavra derivada de *"método"*, do Latim *"methodus"* cujo significado é caminho ou a via para a realização de algo. Método é o processo para se atingir um determinado fim ou para se chegar ao conhecimento. Metodologia portanto, é o campo em que se estuda os melhores métodos praticados em determinada área para a produção do conhecimento. Consequentemente, a metodologia de ensino é a aplicação de diferentes métodos no processo ensino-aprendizagem [1].

Porque é preciso percorrer "o melhor caminho"para desenvolver uma prática de ensino satisfatório, neste sentido, o capítulo se propõe a dissertar sobre a estrutura curricular e o ensino da matemática do último século aos dias de hoje, assim como, vaguear pelas concepções de ensino-aprendizagem que permearam essas práticas. À luz dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), descrever algumas estratégias e metodologias aplicáveis à disciplina, como também, propor a utilização de uma sequência didática como recurso viabilizador à aplicação da coleção de atividades descritas nos capítulos que seguem.

Estrutura Curricular em Matemática no Brasil

O currículo de Matemática antes do início do século XX no Brasil, retratava uma ausência de base curricular nacional comum, o que existiam eram sistemas estaduais, sem ar-

[1]Fonte: < *https://www.significados.com.br/metodologia* > - acessado em outubro de 2016

ticulação com o sistema nacional. Os pressupostos pedagógicos possuíam práticas educativas baseadas na autoridade e com intuito de fazer com que a criança contraísse hábitos conformes às exigências do meio social. A saber, a base do ensino era a observação concreta e a experimentação. Por outro lado, seu estudo era desmembrado em aritmética, álgebra e geometria.

A mudança ocorreu com a implementação da escola nova, ativa ou progressivista, na década de 1930, o manifesto que embasou a reforma foi estruturado nos princípios da gratuidade e seguridade do ensino em todos os graus de forma pública, a implantação das escolas técnicas e a efetivação da disciplina em todas as séries do ensino básico. Esta reforma trouxe uma valorização do princípio da atividade e da contextualização. Além disso, ocorreu a unificação das Matemáticas em uma única disciplina e teve as funções como ideia central unificadora. Conhecida como reforma de Francisco Campo, sofreu resistência por parte dos professores que não se sentiam preparados para trabalhar com essa nova matemática que dava ênfase na descoberta, aplicações e resoluções de problemas, uma vez que não existia livro didático que complementasse essas ideias. Outra crítica pertinente a este movimento é que, embora houvesse obrigatoriedade do governo em oferecer o ensino gratuitamente, limitava o acesso à capacidade didática da instituição e uma prova de inteligência, ou seja, não havia a preocupação de expandir e regulamentar essas avaliações. Além de deixar claro no artigo 129 que os cursos técnicos eram voltados para a classe social menos favorecida, fazendo distinção social, sendo assim conhecida como a escola do pobre.

A "moderna"Matemática surgiu por volta da década 1960, em função da necessidade de reflexão e fundamentação dos conceitos e teorias surgidos nos séculos XVII e XVIII, de experimentação dos estudos matemáticos relacionados à Mecânica e à Astronomia. A preocupação central desta reforma era propor uma Matemática útil para técnica, para a ciência e para a economia moderna. Por isso, tinha como base uma cultura voltada para a ciência e tecnologia. Entre muitas justificativas à corporação desta "moderna"matemática no Brasil destacamos:

> "*...Como muitas outras ciências, ela experimentou nos últimos tempos uma evolução extraordinária, provocando uma enorme defasagem entre pesquisa e o ensino da matéria.* O que deve ser feito, e isso é importante, é uma reformulação radical dos programas, para adaptá-los às novas concepções surgidas, reformulação essa que deve atingir as técnicas e estratégias utilizadas para obtenção dos objetivos

propostos"(PIRES, 2000 p. 33).

Valorizava o predomínio da área cognitiva sobre os domínios afetivo e psicomotor. Estimava a forma axiomática tendo como elementos essenciais os conjuntos, as relações e as estruturas. Houve neste período a publicação dos primeiros livros didáticos de acordo com a Matemática moderna. Perdendo assim, o vínculo entre o cotidiano das pessoas e a matemática. Uma das criticas à Matemática moderna fora o agravamento da situação do ensino de Matemática pelo enfoque centralizado apenas na linguagem, distanciando da matemática do cotidiano.

A contra-reforma dos anos 80 estrutura a educação básica em três ciclos, o que denomina-se hoje de fundamental I, II e ensino médio. Dirigem seus esforços na área de matemática à organização das estruturas mentais, à construção de conceitos básicos e à aquisição de certos automatismos operativos. Sua incumbência é rever os princípios da matemática moderna, tornar a matemática para todos. Pires (2000) descreve a reforma que no Brasil tratava de reverter o quadro que se tinha, que tornava a disciplina seletiva e pouco atraente aos alunos, projetava um referencial que orientasse a prática escolar afim de garantir o acesso matemático que possibilitasse sua inserção, como cidadão, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura. Embora tivesse começado nos estados com visão particular, a reforma foi implementada nacionalmente com a formalização dos Parâmetros Curriculares Nacionais na década de 1990 e destaca além da álgebra, aritmética e geometria, o tratamento da informação como também grandezas e unidades de medidas. Valoriza a necessidade de conteúdos não apenas em sua dimensão conceitual, mas também na dimensão de procedimentos e desenvolvimento de atitudes. Faz referência ao uso das tecnologias da informação e reiteram a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática.

O que se propões para o século XXI?

Repensar, não os eixos norteadores de aprendizagem, mas a prática de ensino. Uma das mudanças requeridas pelo relatório para UNESCO da comissão internacional sobre educação para o século XXI coordenado por Jacques Delors é de uma educação que perpasse da individualidade à coletividade, e tem como eixo norteador os quatro pilares: aprender a ser, fazer, conhecer e conviver citados nos Parâmetro Curriculares Nacionais (1997) e vislumbra a formação integral do estudante.

◇ *Aprender a conhecer* é refletir sobre o pensamento já feito, pensado, acima de tudo é aprender

a aprender. Indica interesse de compreender mais linguagens e metodologias do que conteúdos.
◇ *Aprender a Fazer* refere-se ao saber pôr em prática os conhecimentos, ou melhor, tem a ver com a coragem de executar, de correr riscos, de errar mesmo na busca de acertar.
◇ *Aprender a Conviver* traz o desafio de compreender o outro, de se relacionar com o diferente e proporcionar um mundo mais solidário.
◇ *Aprender a Ser* tem a ver com o desenvolvimento integral da pessoa, inteligência, responsabilidade espiritualidade e pensamento autônomo. Este pilar depende diretamente dos outros três e por explicitar o papel do cidadão e o objetivo de viver.

Neste sentido, o PCN indica as competências e habilidades a serem desenvolvidas em matemática, ao invés de indicar o conteúdo mínimo a serem trabalhados. Direciona o professor para uma aula que proporcionem aos estudantes o enfrentamento de desafios, aplicados ao desenvolvimento de diversas habilidades e a relação entre elas, peculiares à resolução de problemas. Desta forma, expõe e desenvolve o aprender a ser, fazer e conhecer também no perseverar de busca de soluções que desencadeia o aprender a aprender. Assim, apontam o ensino sobre a *resolução de problemas* como o método mais eficiente por toda história da educação matemática do último século.

Situações problemas podem ser atividades planejadas com abordagens contextualizadas, que remetam a história da matemática por exemplo, ou mesmo um problema de aplicação, que descreva uma situação do cotidiano dos discentes, sendo também, os jogos um poderoso instrumento lúdico para ajudar os alunos a refletir sobre suas próprias descobertas. Vale salientar, que sobre os jogos observa-se a necessidade de reciclar, pois os recursos tecnológicos abre um leque de possibilidades. Vale salientar que hoje é possível apresentar documentários sobre a História da Matemática, trabalhar paradidáticos que envolvam a matemática em muitos mistérios, bem como, utilizar-se de simuladores games que possuem conceito matemático, etc. O que precisa ser feito? Prepara-los para essa nova forma de se relacionar com o conhecimento, porque geralmente tenta-se ensinar da mesma forma que se aprende, não obstante, é preciso reverter essa dinâmica.

É fato que a matemática e a forma de ensiná-la não é uma área pronta, acabada, perfeita e pertencente ao mundo das ideias. Pelo contrário, em suma, os métodos e metodologias organizam o trabalho do professor e devem traduzir a teoria que embasa sua ação pedagógica na direção da construção conjunta do conhecimento e seu ressignificado. À luz destes estudos, faz-se necessário revisitar algumas concepções de ensino aprendizagem e estratégias que podem contribuir para um método eficiente à prática.

1.1 Teorias do ensino-aprendizagem

Teorias do ensino-aprendizagem são modelos teóricos científicos que tentam explicar o processo de ensino-aprendizagem, isto é, o processo pelo qual as competências, habilidades, conhecimentos, comportamentos ou valores são adquiridos ou modificados. Neste sentido, buscam responder algumas inquietudes nascidas em institutos de ensino. Destacam-se aqui cinco delas, tradicional, Comportamentalista, humanista, construtivista e sociocultural. O trabalho reverencia a concepção construtivista.

Abordagem Tradicional

A abordagem tradicional enfatiza a transmissão de conceitos e a imitação dos modelos aprendidos. Esta corrente se preocupa com a variedade e a quantidade de noções, conceitos e informações em detrimento do pensamento reflexivo. A verbalização dos conteúdos pelo professor tem papel proeminente cabendo ao aluno a memorização. A inteligência é uma faculdade capaz de armazenar informações, de onde se supõe o papel importante da educação formal e da instituição escola. A instituição terá como foco apenas a cultura, sendo os problemas sociais resguardados apenas à própria sociedade. Os alunos são submetidos à provas, necessárias, para a verificação de conteúdo mínimo exigido para cada série. Caso o mínimo não seja atingido, cabe reprovação ao estudante.

Abordagem Comportamentalista

Bordenave e Pereira (2005) decorrem sobre as correntes psicológicas as contribuições de Skinner, onde este, deseja explicar o comportamento e a aprendizagem como consequências dos estímulos ambientes e permeia a corrente teórica Behaviorista. Recorre ao poderoso papel da "recompensa"ou "reforço"e parte da premissa de que toda ação que produza satisfação tenderá a ser repetida e aprendida. A ideia é intervir no comportamento de outras pessoas, por exemplo, para ajudar a aprender mais rápido. Entretanto, Skinner é averso às agressões físicas comumente usadas na década de 70, pois tem como premissa a construção do aprendizado de forma linear, para ele é necessário partir do mais fácil ao mais difícil, abstrato. Dentro desta teoria, a função do professor é facilitar o aprendizado, e deve estar disponível para ensinar o que o aluno deseja aprender, pois este precisa ser participante ativo na construção do conhecimento. Por outras palavras, para o educador, esse processo necessita do *feedback* imediato para a acetificação do saber construído.

Perpassando essa corrente, os autores Huete e Bravo(2007) situam **Gagné**, que permeia os fundamentos de seus estudos em estímulos, respostas, estimulação ambiente versus processos internos de aprendizagem e a importância da teoria de aprendizagem. Este afirma a necessidade de uma continuidade ou sequência lógica e psicológica na aprendizagem de qualquer assunto e classifica os tipos desta aquisição, consequentemente exigindo uma estratégia de ensino cada tipo mais adequada que outras sob uma hierarquia.

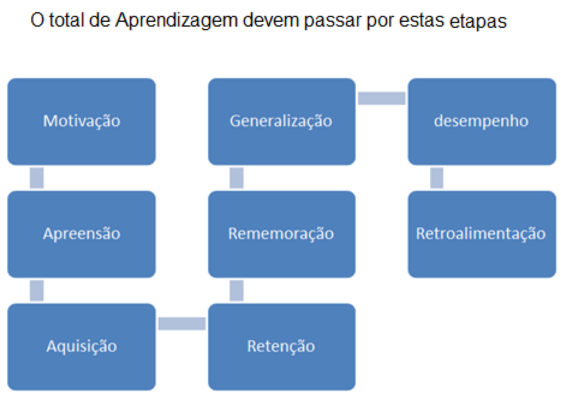


Figura 1.1: Esquema ilustrativo segundo Gagné das fases da aprendizagem.

Segundo os autores, segue por Gagné os tipos de aprendizagem, que consequentemente exigem uma estratégia de ensino para cada tipo:

Aprendizagem de signos: aprende a dar uma resposta geral e difusa de um sinal, como interpretar fenômenos da natureza;

aprendizagem do estimulo-respostas: aprende a dar uma resposta específica a um estímulo discriminado, no aprendizado de uma língua estrangeiras por exemplo;

aprendizagem em cadeia, consiste na aquisição de duas ou mais conexões estímulos respostas cozinha por exemplo;

aprendizagem de associações verbais: aprendizagem de cadeias verbais, por exemplo a língua materna;

aprendizagem de discriminação múltipla: neste caso, o aprendiz necessita dar respostas diferenciadas a diferentes estímulos, no momento em que as crianças distinguem modelos e marca de carros por exemplo;

aprendizagem de conceitos: significa responder a estímulos em termo de propriedades abstratas, tais como cor, forma, posição por exemplo, neste caso torna possível reagir a pessoas ou fatos como um todo;

aprendizagem de princípios: A é a causa de B ou A está para B, ou ainda A é parte de B por exemplo, neste um princípio é uma cadeia de dois ou mais conceitos e representa a relação existente entre estes conceitos;

aprendizagem de resolução de problemas: este consiste em elaborar um novo princípio combinando princípios já aprendidos; neste processo, o aluno não somente aprende novos princípios que os resolvem, mas também uma série de estratégias mentais mais eficientes para combinar princípios já conhecidos. Neste aprende a pensar, as operações mentais são mais complexas.

Abordagem Humanista

Nesta abordagem a pessoa está incluída no processo de ensino-aprendizagem. Defende que cada pessoa tem o seu próprio percurso e tem maior responsabilidade para decidir o que quer aprender, tornando-a autônoma no seu processo de aprendizagem. “Mesmo Quando o impulso ou estímulo vem de fora, o sentido da descoberta, do alcançar, do captar e do compreender vem de dentro”(MASETTO, 1997, p. 43). A avaliação é feita pelo próprio aluno.

Abordagem Construtivista

Aprender por muito tempo foi o ato de memorização “decoreba”, de forma mecânica resumia-se a meras repetições, hoje é atribuir novos significados e demanda reflexão sobre o pensamento referindo-se a uma transformação estrutural da inteligência da pessoa. Essa abordagem se preocupa em como se dá a aprendizagem. Ela se propõe a não fixar curriculum, antes motiva a situações desafiadoras, como jogos, oficinas, etc. A aprendizagem consiste em processos e não em produtos de aprendizagem, e esta só acontece quando o aluno elabora seu conhecimento uma vez que para a corrente conhecer um objeto é agir sobre ele e transformá-lo. Bordenave e Pereira(1997) afirmam que a teoria Piagetiana, isto é, sob abordagem de Piaget, considera que a aprendizagem se processa através de dois movimentos simultâneos e integrados, mas de sentido contrário: assimilação e a acomodação. O processo por assimilação se dá quando o organismo explora o ambiente, toma parte dele, transformando-o e incorporando-o a si. Segundo esta teoria as crianças que crescem em um ambiente rico em estímulos desenvolverá mais ativamente seus esquemas de assimilação. No Processo de acomodação, o organismo transforma sua própria estrutura para adequar-se à natureza dos objetos que serão aprendidos. Explica-se certas formas de loucuras, como paranóias, na falta de capacidade de acomodação. Esta teoria permeia a abordagem cognitivista.

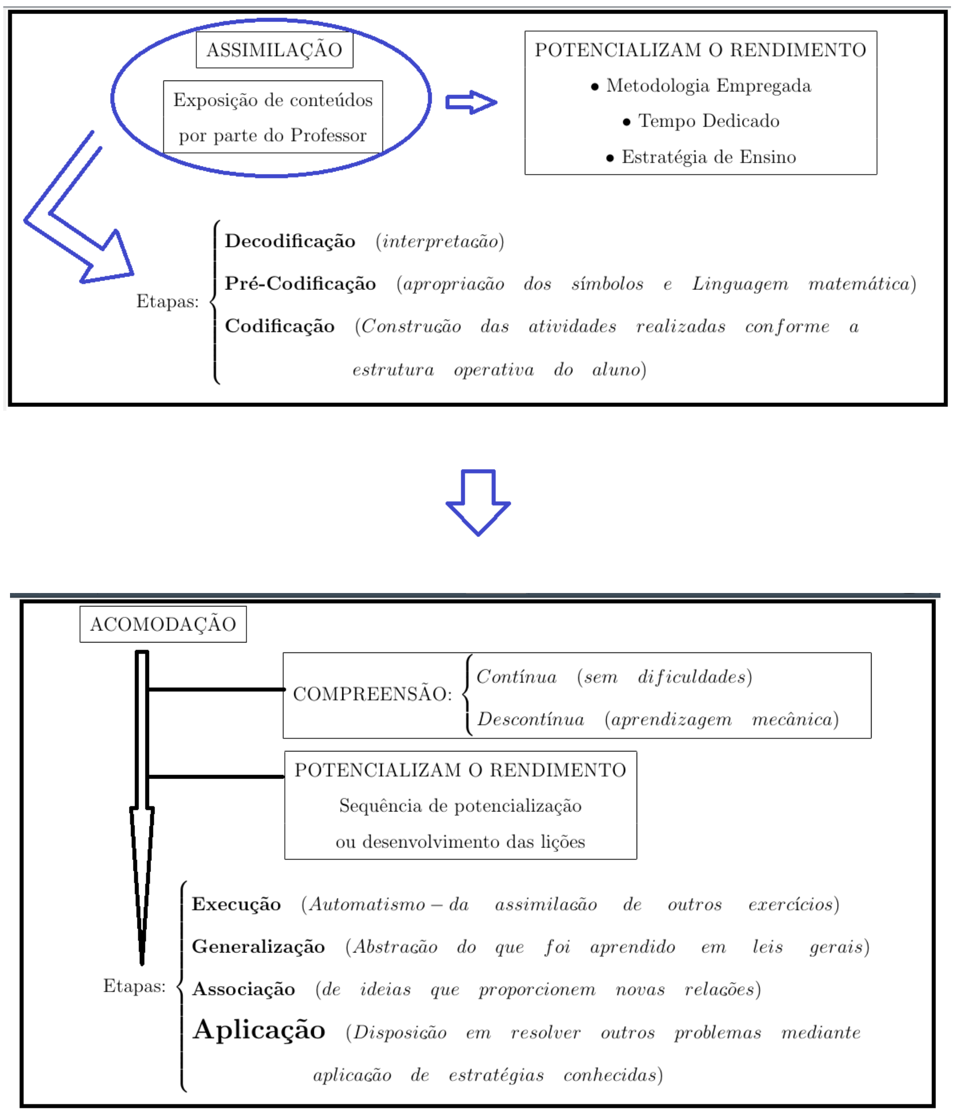


Figura 1.2: Estrutura que compõe a aprendizagem segundo a teoria Piagetiana.

Vale salientar, que o cérebro precisa ser desafiado, estimulado a restruturar todo o tempo em suas potencialidades. De acordo com a neurociência "a emoção está para o prazer assim como o prazer está para o aprendizado"(RELVAS, 2009, p. 123), responsável por tal estimulo é o sistema límbico, e a falta de estímulos nessa área gera o desânimo de aprender, inibindo o processo de aprendizagem, pois aprender é um ato desejante e sua negação é não aprender, destacando-se a autoestima como uma ferramenta que movimenta o desejo de aprender. Segundo Huete e Bravo(2007) "correntes construtivistas indicam que, quem aprende, o faz construindo o seu próprio conhecimento". É importante o professor restruturar essa informação e verificar de que maneira será mais interessante para que o estudante possa passar pela relação da aprendizagem, levando em consideração os diversos recursos, porque temos várias formas de aprender e aí varias formas de ensinar.

Abordagem Sociocultural

Esta abordagem busca da superação da relação opressor-oprimido, sob esta corrente Paulo Freire (2006) defende a ideia de que aprender é a primeira condição para o ato de ensinar. Brasileiro reconhecido por sua eficiência em alfabetizar jovens e adultos concebe o processo como um ato que não decorre da imposição ou memorização, define o ato de educar como ação política e explica que aprender, a partir de seus discentes, surge da realidade concreta, isto é, da situação real vivida pelos estudantes e só tem sentido se resulta de uma aproximação crítica dessa realidade e desenha a educação como constante ato de desvelamento da realidade.

1.2 Como ensinar Matemática?

A grande dificuldade entre os educadores está na concepção de ensinar,uma vez que, por muito tempo entendia-se ensinar como sinônimo de transmitir o conteúdo, sem levar em consideração que aprender a pensar sobre o assunto é mais importante que aprender fatos sobre o assunto. Entretanto, atualmente encontra-se essa prática consolidada, talvez por ser mais cômoda, ou pela prática de atribuir-se muitas vezes a incapacidade de desenvolvimento do aluno a fatores genéticos ou socioeconômicos.

É importante entender que esta cultura de transferências de responsabilidades em algum momento da história foi concebida nas concepções de aprendizagem defendidas pela psicologia que estão em desuso, são as concepções do *inatismo* e do *emperísmo.* A primeira também conhecida como determinismo biológico acredita que as condições de aprendizado são pré-determinadas, independente dos fatores externos. Enquanto que o *emperísmo* também conhecida como o determinismo social defende o conhecimento através das experiências, neste os fatores externos preponderam aos internos. Observe que diante dos recursos tecnológicos disponíveis aos estudantes, bastaria ouvi-los, revê-los, aplica-los com atenção, incansavelmente até a apropriação e as escolas tornariam-se dispensáveis.

> A tentativa de apenas transmitir o conteúdo contrapõe-se com duas realidades inevitáveis: a primeira delas que a tomada de informação não é uma operação de simples recepção, onde o sujeito assimila o desconhecido de maneira ativa e raramente espontânea, a outra é que a apropriação não pode estar associada a simples repetição.(MEIRIEU, 1998, p.53)

Assim quando associamos o aprendizado à simples repetição há preocupação com o processo cognitivo que determinou a executar o exercício. Recaindo em uma teoria de aprendizagem comportamentalista, também conhecida como Movimento Behaviorista e avalia o aprendizado pelos fatores externos, tais como: avaliações, que tem sua importância para temas específicos, mas não para o conceito da memorização. Para a neurociência, ela se torna significativa à medida que esse sujeito aprende, entende e compreende aquilo que traz sentido, pelo contrário, deixa de ser memorização e torna-se “decoreba”. Thorndeke (apoud Morrieu, 1998 p.51) observou que uma aprendizagem que não inscreve dentro de um projeto e da qual o sujeito não percebe os efeitos positivos em seu desenvolvimento não está estabilizada.

A concepção de ensino muda à medida que a concepção de aprendizagem muda, ela deixa de exercer a sua função sempre que a mesma não consegue atender às expectativas da sociedade vigente. O papel do professor nesse processo, é ajustar-se às novas realidades. Afirma o PCN que as competências a serem desenvolvidas na área de matemática dizem respeito aos domínios da representação e comunicação, investigação, compreensão, e contextualização sociocultural. Ensinar matemática significa fazer o aluno aprendê-la, não importa o método adotado, é peculiar perceber o que funciona durante o processo.

De acordo com a Psicologia Cognitiva, a missão do professor é ajudar o aluno a descobrir e aprender e seu sucesso como educador é avaliado pelo o sucesso de seus alunos. Esta concepção se fundamenta no Interacionismo que considera o conhecimento construído graças a interação sujeito e meio externo (físico e social). Consequentemente, o conhecimento não é externo ao indivíduo , nem interno, mas uma interação entre eles. Em termos de seu sucesso com os alunos, não basta o professor desejar que eles aprendam, o educador deve possuir também a capacidade e a aptidão de alcançar essa meta. Entretanto, sabe-se, que de tudo quanto é ensinado, uma parte é efetivamente aprendida, provavelmente a maioria dos professores procurará nos seus alunos uma explicação desta falha. O desafio para o docente seria então, verificar se a principal causa dos fracassos do ensino não estaria no ato em si e não na resistência dos aprendizes.

Quando acontece o aprendizado matemático?

Segundo a corrente construtivista, o aprendizado acontece sempre quando os conhecimentos passam do estado de equilíbrio, a estado de desequilíbrio. A ação está relacionada, refiro-me a sala de aula, pela participação, questionamentos e contribuições dos estudantes. A ação se concretiza, quando torna-se para o aluno um instrumento de contribuição acadêmica, na resolução de problemas, interpretação e modelagem de fenômenos. Desta forma, destacamos os seguintes aspectos da apropriação matemática.

1. **Quando o pensamento matemático são fatos objetivos e estuda a razão da lógica**: conseguimos construir matemática, pelo princípio da recorrência indução, demonstração e generalização.

2. **Quando é instrumento para resolver problemas**: busca a veracidade dos fatos por meio de técnicas precisas e exatas com aplicação da matemática e da lógica.

3. **Quando oferta maneiras para modelar situações reais**: pois a matemática interpreta fatos, revela os segredos da natureza, conecta-se com outra ciências e reflete as leis sociais. Em suma, toda aprendizagem significativa deve promover a curiosidade, a observação, formulação de hipótese, estratégias, conclusões lógicas, mudanças cognitivas e interpretação da realidade.

Sobre Competências e Habilidades

Concernente à definição de competências e habilidades, a primeira enaltece o aprender a aprender, refere-se à ação mental e mobilizadora de diversas habilidades, conhecimentos, valores, recursos e atitudes, para resolver problemas com eficácia. Enquanto que habilidades estão intimamente ligadas ao saber fazer e refere-se a um tipo de inteligência, isto é, uma competência de ordem particular.

A proposta de trabalhar por competência é tornar o aluno protagonista do seu aprendizado. Esclarece os PCNs que no âmbito do ensino de Matemática, o desenvolvimento de competências e habilidades é essencialmente formador, à medida que instrumentaliza e estrutura o pensamento do discente, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação.

Cabe, ainda, referenciar a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional 9394/96 (BRASIL, 1996), que em seu artigo 32, inciso III, relata: "o desenvolvimento da capacidade de aprendizagem, tendo em vista a aquisição de conhecimentos e habilidades e a formação de atitudes e valores". Nesta perspectiva, o conteúdo é mero meio e não mais um fim em si mesmo, pautada em tarefas que desafiem e incentive os alunos a mobilizar conhecimentos já adquiridos na busca de novos, o que lhe confere habilidades atitudes e competências.

Sobre a aprendizagem matemática, destaca-se quatro tipos de habilidades que a constrói. Huete e Bravo (2007) as classificam por:

1. **Memorização**: acontece quando vai de encontro a simples repetição, isto é, quando há organização dos conceitos mediante uma inter-relação entre eles e constrói uma memória que o autor chamou de *memória operativa*, que é a de longo prazo.

2. **Aprendizagem algorítmica**: fundamenta-se na memorização e neste estágio o aluno é capaz de repetir procedimento sem compreender seu funcionamento, a exemplo disto são as repetições das regras.

3. **Aprendizagem de conceitos**: o processo ocorre de forma mais complexa, pois um conceito é construído abalizado em outros conceitos, não definido em si mesmo, e possibilita responder a estímulos específicos de uma maneira determinada.

4. **Resolução de problemas**: que para os autores esse tipo de aprendizagem concentra-se em facilitar o conhecimento das habilidades e a relação entre elas, esta proposta contempla o potencial cognitivo e favorece a formação integral. De tal forma que quando um problema é resolvido, aprende-se algo novo.

Huete e Bravo (2007) aborda o processo de ensino aprendizagem matemática em caráter conciliador com processo cognitivo e as competências de base para a compreensão de conceitos superiores. Afirma que a aprendizagem parte da intuição e progressivamente aproxima-se da dedução, afirma ainda que aprender um conceito matemático é acrescentá-lo à estrutura cognitiva já existente. O fato é que não existe uma fórmula ou uma sequência adequada a todos os tipos de aulas ou turmas, pois o princípios mudam quando as correntes teóricas mudam. Buscamos nesse contexto apresentar alguns recursos e estratégias que serão melhor exemplificadas nas próximas seções.

1.3 Estratégias de ensino-aprendizagem à Matemática

O que regia a velha sociedade eram as nossas necessidades e não o mercado. Nela havia autoridade, memorização de conceitos, regras moral e distinção entre responsabilidades do professor e do aluno. A nova sociedade, que é globalizada, automatizada e conectada incita a tolerância com as diferenças, os valores éticos políticos e busca promover desenvolvimento de competências. Portanto a forma de ensinar e aprender mudou ao longo dos anos, em consequência mudaram as práticas pedagógicas.

Estratégia é uma palavra com origem no termo grego *estrategia*, que significa plano, método, manobras ou estratagemas usados para alcançar um objetivo ou resultado específico. Estratégia de ensino- aprendizagem estuda os modos usados para implementar o ensino e permitir que o objetivo de aprendizagem aconteça. Motiva-se por tentar responder as perguntas: *como fazer para que os alunos aprendam?* Isto é, *quais procedimentos utilizar*? métodos, técnicas e processos; *que meios empregar?* Materiais recursos e instrumentos; *quais eventos efetivar?* Os acontecimentos momentos e passos usados para aprendizagem. Vale salientar que a estratégia escolhida depende dos objetivos, dos conteúdos, do tempo disponível e deve se assentar nas competências adquiridas pelos alunos. "Só se pode ensinar apoiando-se no sujeito, em suas aquisições anteriores, nas estratégias que lhe são familiares". (MEIRIEU, 1998, p. 134)

Etnomatemática

Começamos por entender o que significa a palavra Etnomatemática, D'Ambrósio (1996) explica *etno* refere-se ao contexto cultural; *matema* vai na direção de explicar, entender; *tica* vem de *techne* que é a mesma raiz da arte e técnica. Portanto, etnomatemática refere-se a arte ou técnica de explicar, de conhecer nos diversos contextos culturais. Sua proposta, por conseguinte, segue a prática de contextualizar a matemática no cotidiano em diferentes grupos de interesse, comunidades, povos e nações, levando em consideração os conhecimentos que já possuem e os obstáculos do dia-a-dia.

> Dentre os trabalhos que ganharam expressão nesta última década, destaca-se o Programa Etnomatemática, com suas propostas alternativas para a ação pedagógica. Do ponto de vista educacional, procura entender os processos de pensamento, os modos de explicar, de entender e de atuar na realidade, dentro do contexto cultural do próprio indivíduo. A Etnomatemática procura partir da realidade e chegar à ação pedagógica de maneira natural, mediante um enfoque cognitivo com forte fundamentação cultural.(BRASIL 1997 p.21)

Essa metodologia surgiu na década de 1970, vem se consolidando no Brasil e no mundo, sua fundamentação especificamente está inserida em práticas do cotidiano, sob corrente construtivista tendo como expoente no Brasil, o estudioso Ubiratan D'Ambrósio que declara: “A matemática é uma estratégia desenvolvida pela espécie humana ao longo de sua história para explicar, para entender, para manejar e conviver com a realidade sensível e perceptível, e com o seu mundo imaginário, naturalmente dentro de um contexto natural e cultural.”(D'AMBRÓSIO 1996, p. 7)

Por que Etnomatemática?

De acordo com os PCN, essas relações com o cotidiano “são fundamentais para conferir significados a muitos conteúdos”(BRASIL, 1997, p. 23). D'Ambrósio explica que os conteúdos devem ser trabalhados com compreensão e, sempre que possível, ligados à realidade do educando, não desprezando o seu saber, mas valorizando-o.

Na busca de demonstrar que existem várias e diferenciadas formas de se fazer matemática, aponta a etnomatemática como uma ferramenta efetiva e decisiva para melhorar o aprendizado em matemática e esclarece: a construção do conhecimento parte da necessidade de resolver problemas cotidianos; consiste em um recurso que facilita a educação intercultural; a relação entre a etnomatemática e a matemática se baseia em uma pedagogia que desenvolve processos cognitivos, centrados no aluno construtor de suas aprendizagens a partir de seu contexto; a diversidade cultural deve servir de processo de aprendizagem; o afeto à matemática desde um enfoque intercultural.

Mostra que o conhecimento não é adquirido apenas na escola, e trata a matemática numa linguagem mais próxima da realidade do aluno. Destacando-se assim; a entrevista, o questionamento e a observação como técnicas para trabalhar com a etnomatemática sobre os modos de contar, medir, classificar, ordenar, organizar espaço e tempo, calcular e estimar. Ao educador, cabe um olhar mais amplo e complexo do contexto escolar, com práticas que transcendem o espaço físico escolar e passam a acolher os saberes e fazeres presentes em todo contexto sócio-cultural dos educandos.

Modelagem Matemática

Modelagem Matemática é um exemplar que apoia-se em linguagem e argumentos matemáticos. O tema em estudo tenta juntar dados suficientes sobre o mundo real, nele descreve e explica as razões causais a fim de predizer situações futuras. Em razão da formalidade e rigor da linguagem, a modelagem pode ocasionar ao aluno um apego às formalidades e desencadear um desinteresse e um distanciamento da compreensão. Sua principal característica segundo Biembengut e Hein (2003), é o fato de o problema advir de uma situação real e que depois de formular e resolver um modelo que solucione o problema, este possa ser aplicado, também, como suporte para outras aplicações.

Dante (2004, p. 308) cita D'Ambrósio que sugere a modelagem inserida em um contexto etnomatemático. E explica: a modelagem é eficiente a partir do momento em que nos conscientizamos de que estamos sempre trabalhando com aproximações da situação real, que, na verdade estamos elaborando sobre representações. Assim, a modelagem pode ser uma metodologia de ensino muito útil e se enquadrada no programa Etnomatemática, que inclui a crítica, também de natureza histórica, sobre representações, que deve estar subjacente ao processo de modelagem.

Sobre o aspecto pedagógico voltado a estudantes do ensino médio, é pertinente que a modelagem matemática seja feita a partir de problemas reais. Como diz D'ambrósio (1986, p.17), " Através da modelagem matemática o aluno se torna mais consciente da utilidade da matemática para resolver e analisar problemas do dia a dia". E sugere a compreensão dos fenômenos que os cercam para interferir ou não em seu processo de construção. Além de aproximar outra área do conhecimento da matemática e despertar o interesse por esta disciplina ante a aplicabilidade. É pertinente que haja seu manejo dentro de um contexto abrangente.

Por que utilizar Modelagem Matemática?

A Modelagem Matemática é livre e espontânea, ela surge da necessidade do homem em compreender os fenômenos que a cercam para interferir ou não em seu processo de construção. Embora reconhecendo que a Modelagem Matemática possa ser analisada em diversas linhas de segmentos; passando pelo campo científico, pela matemática aplicada, pelos experimentos sociais, será analisada sob o ponto de vista do ensino e aprendizagem.

É importante frisar que há alguns benefícios da Modelagem Matemática: motivar os alunos; dar significado ao aprendizado, uma vez que o conteúdo matemático deixa de ser abstrato e passa a ser concreto; devido à interatividade com outras disciplinas, o aluno vislumbra preparação à futuras profissões; promove compreensão do papel sócio-cultural da matemática, tornando-a mais importante e, consequentemente, responde pela formação de cidadãos críticos e transformadores da realidade.

Dentro do contexto escolar, é importante ressaltar alguns aspectos que compõem as fases da modelagem matemática tais como: o tempo de interação com o assunto, o reconhecimento da situação problema e a formalização por meio de um modelo que chamaremos de *matematização*. Nesta, Biembengut e Hein (2003) destacam ser possível que o estudante em um processo de observação, perceba as variáveis relevantes, levante hipóteses e tente resolver o problema por meio de modelos. A validação ocorre quando está em consonância com o mundo real. Caso contrário, pedagogicamente é necessário repensar o caminho, é possível que os erros cometidos sejam de observação.

O papel do professor: excluir a relação transmissor – receptor no ensino da disciplina. O professor, em sua função de conduzir o processo, deverá, pela sua competência técnica e política, problematizar as questões norteadoras do tema e conteúdos abordados. Deve proporcionar aos sujeitos o uso da imaginação criadora e o desenvolvimento da capacidade de ler e interpretar a realidade e os saberes matemáticos. Aos alunos, é possível a escolha dos temas a serem estudados.

Avaliação: a estrutura dos conteúdos programáticos não constituiu foco central do estudo; avaliam-se a produção, o conhecimento matemático, a produção do trabalho de modelagem em grupo, a extensão e aplicação do conhecimento para, assim, redirecionar o trabalho

História da matemática

Sem a preocupação de apresentar um guia metodológico, a proposta aqui é elucidar diversas razões pelas quais se faz necessário a introdução da História da Matemática como estratégia. Esta pode servir como motivação para o desenvolvimento de diversos conceitos matemáticos, por uma maior compreensão da evolução do conceito, isto é, a lógica matemática em construção com o seu significado político social, a desfragmentação dos conteúdos e seus estágios de desenvolvimento em diferentes grupos. Desmistifica o conceito de matemática exata e finalizada que a matemática possui.

> Desvincular a matemática das outras atividades humanas é um dos maiores erros que se pratica particularmente na Educação da Matemática. Em toda a evolução da humanidade, as ideias matemáticas vêm definindo estratégia de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumento para esse fim e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para própria existência (D'AMBRÓSIO, 1999, p.9)

A História da Matemática neste caso se apresenta como agente consolidador motivacional para o ensino- aprendizagem, e estabelece uma relação da matemática com os costumes, valores e crenças dos povos. Sua funcionalidade é de contextualizar e estabelecer comparações entre o processo matemático do passado e do presente. Além de ilustrar as necessidades próprias do seu contexto histórico, inserindo-a de forma significativa.

Como introduzir a História da Matemática?

Proporcionar aos alunos o contato com alguns fatos do passado é uma dinâmica interessante para introduzir um novo objeto matemático em sala de aula. Todavia, não basta utilizar a História da Matemática apenas como ilustração, presa a fatos isolados, nomes famosos e datas. Ela deve favorecer uma visão ampla dessa ciência, fornecendo um contexto com uma abordagem menos artificial dos tópicos matemáticos. Por Cury e Motta (2008) destacamos alguns itens, para aplicação desta estratégia.

1. Fugir de uma postura linear, considerando a existência de várias formas possíveis de se realizar reconstituições históricas.

2. Buscar novas soluções para problemas já resolvidos;

3. Apresentar tentativas de solucionar problemas não resolvidos com recursos atuais mais potentes;

4. Buscar, em livros antigos ou filmes, de conhecimentos sobre o ensino de determinados conteúdos e compará-los com a forma como é trabalhado atualmente;

5. Apresentar problemas clássicos através de animações computacionais.

A elaboração de sequências contemplando episódios ou problemas históricos motivadores são caminhos para a inserção da História da Matemática nas aulas. Tornando-se um elemento orientador no planejamento de atividades, na elaboração das situações-problema, na melhor compreensão dos conceitos matemáticos.

> Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns porquês e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento. Assim, a própria história dos conceitos. (BRASIL 1997, p.42)

Dessa forma possibilita ao aluno analisar e discutir determinados fatos, raciocínios e procedimentos. Entendendo que, ela sozinha não resolve o problema de aquisição, mas que, deve sempre está interligado a outros recursos e até outras estratégias.

Uso das atividades lúdicas

Difundido desde do século XIX pela *Escola Ativa*, o *lúdico*, entenda como atividade lúdica, uma excelente ferramenta para promover algum tipo de aprendizado, seja no campo social ou cognitivo, favorecendo diferentes processos de raciocínio e interação com os alunos. Definimos aqui *atividades lúdicas*, toda atividade que promova divertimento sujeito à regras, que devem ser observadas enquanto às executam. Os jogos passatempo, desafios, mágicas e oficinas possuem essa característica e elas podem ser classificadas por objetivos de competências, tais como àquelas aplicada ao desenvolvimento de estratégias, melhor jogada ou melhor escolha, respostas etc. Seguidamente, as que desenvolvem o campo socioafetivo pois treinam a empatia, o companheirismo, o respeito e o enfrentamento das conquistas e perdas.

Observe que o lúdico nos permite alterar o modelo tradicional de ensino, pois "A dimensão lúdica envolve desafio, surpresas, possibilidade de fazer de novo, de querer superar os obstáculos iniciais e o incômodo por não controlar todos os resultados"(SMOLE; DINIZ; et al; 2008, p. 10). Quando aplicada em conexão com a resolução de problemas, elas podem substituir exercícios enfadonhos e de mero treino dos algoritmos convencionais. Outra questão relevante, é o fato do próprio aluno refletir sobre suas descobertas, uma vez que ele pode estabelecer estratégias, constatar seus erros e quando entendemos os caminhos que levaram ao erro, nos apropriamos do conhecimento com mais consistência.

Sobre o ensino-aprendizagem em matemática, é recomendável e fundamental, a abordagem das atividades como recursos motivadores e de aprofundamento de conteúdo. Além disso, e principalmente como o de instrumento para a construção de estratégias de resolução de problemas, isto é, deixar as aulas de matemática mais interessantes e proveitosas para os aprendizes. "Para que os estudantes possam aprender e desenvolver quanto jogam, é preciso que o jogo tenha nas aulas tanto a dimensão lúdica quanto a educativa"(SMOLE; DINIZ et al 2008, p.17). Porquanto, o lúdico desperta e desenvolve várias habilidades, dentre elas as que ilustram o raciocínio lógico a cooperação, atividade motora entre outros. Elas podem ser trabalhadas em grupo ou individualmente. Nos jogos por exemplo, pode-se trabalhar a sua produção baseado em conteúdos já conhecidos pelos estudante, modificando regras e trazendo uma nova roupagem. Nas oficinas há interação entre as habilidades motoras com o momento do pensamento matemático. Enfim, entre outros exemplos que poderiam aqui ser explanados, deve-se compreender o potencial didático deste recurso.

O papel do Professor entre muitas atribuições Starepravo (2009) considera crucial um planejamento cuidadoso das atividades, promover aos estudantes um ambiente e tempo adequado para apropriação delas, e neste caso também é o de orientador, aquele que incita as discussões sobre estratégias, o que deve verificar o envolvimento dos alunos nas atividades, e sua evolução na aprendizagem seja na superação das dificuldades encontradas ou na busca de novas estratégias. Outrossim, na resolução de conflitos que possam existir.

Sobre a Avaliação Smole Diniz (2008) *et al* esclarecem que é fundamental no método avaliativo estabelecer algum tipo de reflexão, registro, pré-formalização do pensamento matemático subjacentes à ação da atividade. Não se pode promover apenas a compreensão e cumprimento das regras, pertinente a avaliação durante as atividades, uma vez, que percebe-se o aprendizado que acontece através do jogo, fazendo alusão quanto à regra na competição entre os estudantes e com as intervenções cabíveis do professor.

É consenso dos autores aqui citados, ainda que as atividades lúdicas sejam uma ferramenta prazerosa para os aprendizes, não poderá ser escolhida ao acaso, mas deve fazer parte de um projeto de ensino do educador, que possui uma intencionalidade. A proposta deste trabalho, é elucidar sua importância e adequação ao cenário de ensino-aprendizagem. Percebe-se também que, a diversificação dos temas e das ferramentas para tratar de conteúdos que exigem habilidades diferentes podem garantir um vasto tempo da aplicação desta proposta.

Resolução de problemas

Inicialmente, apresentaremos três interpretações que tentam explicar o que é resolução de problemas. Em seu artigo Branca (apud SCHASTAI; PEDROSA, 1980), retrata a primeira delas, como a concepção de que se ensina matemática para resolver problemas. Reforça a necessidade de o aluno possuir todas as informações e os conceitos envolvidos na resolução de problemas para que depois possa enfrentá-los.

A segunda, nasce com os trabalhos de Polya (1977) na década de 80, quando os educadores passam a centralizar sua atenção sobre os processos ou procedimentos usados pelos alunos para resolver problemas. Os trabalhos e as pesquisas voltam-se para melhor entender como se resolvem **problemas**, com o objetivo de então poder ensinar a outros como fazê-los. Nessa concepção, surge a classificação de tipos de problemas, tipos de estratégias de resolução e esquemas, de passos a serem seguidos para as respostas. Quanto a estes pré-requisitos os pesquisadores, em Educação Matemática, imediatamente reconheceram serem úteis para gerar descrições, feitas depois do ato, dos comportamentos passados por muitos hábeis resolvedores de problemas. De sorte, que para o indivíduo possa ser inserido no mundo do conhecimento e do trabalho, deve possuir, no mínimo, esta competência de resolução de problemas.

E por fim, estudos sobre resolução de problemas pós Polya – década de 90. Silver (1985 apud ONUCHIE) “concluiu que, mesmo em estudos onde alguma aprendizagem bem sucedida tenha sido relatada, validade da face aparente das heurísticas (estratégia) de Polya, a transferência de aprendizagem tem sido inexpressiva. O que impulsionou novo enfoque às salas de aula". Seguidamente, a nova proposta seria ensinar matemática através da *Resolução de Problemas*, nesta, o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos. Os alunos são co-construtores do seu próprio conhecimento e os professores responsáveis por conduzir este processo. Outra característica encontrada nesses currículos é o uso de contextos na resolução de problemas como um meio de desenvolver os conteúdos matemáticos e fazer conexões com outras áreas. Estes currículos retratam a matemática como uma disciplina unificada por tópicos coerentemente integrados. Mais recentemente, estudos sobre modelação matemática

É importante perceber que, as três interpretações descritas acima apresentam distintos momentos das pesquisas e consequente reflexo nos currículos, nos materiais didáticos e nas orientações do ensino, como enfatizam as autoras já citadas.

O que é um problema?

"Um problema matemático é toda situação que requer a descoberta de informações matemáticas desconhecidas para a pessoa que tenta resolvê-lo e/ou invenção de uma demonstração de um resultado matemático dado." Silveira (2001, apud, SOUSA, 2005). "É qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la. Será problema matemático se exigir pensamento matemático e conhecimento matemático para solucioná-la." (DANTE, 2000, pp. 9,10). "O problema é o meio pela qual a Matemática se desenvolve, ou seja, o "alimento" da evolução Matemática." (POLYA, 1995). Isto é, *Problema* necessariamente envolve invenção, criação, tomada de decisão, metodologia, etc. Portanto, exercícios matemáticos que exaltam a fixação não possuem essa peculiaridade e constituem simples treino de técnicas operatórias e de memorização de tabuada, caracterizadas pelas expressões arme e efetue. Sendo assim, há distinção entre exercício simples e de fixação de problemas.

Desse modo, Diniz (2001 apud GINO; SILVA et al, 2008) aponta a primeira característica da perspectiva metodológica da Resolução de Problemas, que é considerar como problema toda situação que permita alguma problematização. Essas situações podem ser atividades planejadas, jogos, busca e seleção de informações, resolução de problemas não-convencionais e mesmo convencionais, desde que permitam o processo investigativo. Independente do tipo de "problemas", o principal papel é analisar o potencial destas questões no desenvolvimento de capacidades cognitivas, procedimentos e atitudes, na construção de conceitos e aquisição de fatos da Matemática.

O ensino por meio de solução de problemas se mostra como uma alternativa válida, não só para a construção do conhecimento ou sua redescoberta, como também, para criação de um ambiente de pesquisa em que o aluno e professor se aproximam de forma real. "A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios". (PCNs p.112). Ao enfrentamento desses desafios, para a obtenção de um melhor desempenho nesta competência, Polya sugere: *Compreender o problema*, *elaborar um plano*, *executar o plano* e *efetuar um Retrospecto.*

Explica que para resolver um problema, é necessário compreendê-lo, ser capaz de identificar seus dados, suas incógnitas, e sobre quais condições essas variantes se encontram. Como também traçar uma estratégia, relacionando sempre o raciocínio com os dados do problema, ou seja, colocar sua estratégia em prática. E por fim, verificar se o plano foi bem executado, se há a necessidade de ajustes, se a resposta está coerente, se é possível executar com praticidade e segurança. Tais técnicas podem ser aplicadas de forma geral aos diversos tipos de problemas, aos quais Santana; Silva *et al*; (2000, p.20) classificam-os pelos seus objetivos, dentre eles temos:

1. **Problemas de Enredo**: são problemas que envolvem as operações que estão sendo estudas no momento. Além de construir um treino do uso dos algoritmos, ajuda a aprofundar as ideias ligadas a cada uma das operações e desenvolvem no aluno a capacidade de traduzir em expressões matemáticas as situações descritas em linguagem comum. Apresenta sempre solução e única. Diniz (2001, p.101) alerta que: "Centrar o trabalho nos problemas convencionais e considerar os demais tipos de problemas como curiosidades ou desafios esporádicos evidenciam uma visão limitada do ensino de matemática."De modo a engessar o ensino e reproduzir uma aprendizagem focada em respostas certas.

2. **Problemas não-Convencionais**: desenvolvem no aluno a capacidade de planejar, elaborar estratégias gerais de compreensão do problema, tentar soluções e avaliar a adequação do raciocínio desenvolvido e os resultados encontrados. Eles podem ser: problemas sem solução, com mais de uma solução, com excesso de dados, de lógica, de estratégia e outros

não-convencionais.

3. **Problemas de aplicação**: esse tipo de problema é elaborado a partir de uma situação de vivência dos alunos, e a solução requer o uso de conceitos, técnicas e processos matemáticos. Também chamados de situação-problema. Na prática, não significa apenas a obtenção da resposta correta, além disso, requer uma atitude de investigação em relação àquilo que está pronto.

Destacamos ainda **a formulação de problemas** que é uma importante estratégia de trabalho na perspectiva metodológica de Resolução de Problemas. "Na formulação de problemas, o estudante empenha-se em pensar nela como um todo, não se detendo apenas nos números, em algumas palavras chave ou na pergunta. Ela se familiariza e compreende melhor as características das situações-problema."(CHICA 2001 apud GINO; SILVA et al). Incentivar o hábito pela problematização e a busca de respostas de suas próprias indagações e questionamentos, como forma de aprender.

Os tipos de problemas acima descritos podem ser aplicados como critério de aprendizagem, como motor de aprendizagem e como recurso de aprendizagem. Todo ele desencadeia ação e estratégia, um procedimento de resolução. "É importante que o problema possa gerar muitos processos de pensamento, seja desafiador, mas possível de ser resolvido. Um nível de dificuldade muito além do razoável pode provocar frustrações traumatizando-os não só em relação à resolução de problemas, mas também em relação à Matemática."(TOLEDO; TOLEDO, 1997, p. 85).

O grande desafio do professor é fugir do enredo que compõe a maioria dos livros didático que seguem o conceito , as propriedades, o algoritmo que resolve e, por fim, uma série de problemas que envolvem as operações em estudo. Neste padrão o aluno após resolver três ou quatro problemas percebe que não precisa analisar outros enunciados, basta retirar os números dos textos e fazer as contas. Desta forma assegura o movimento apoiado na imitação de intensões, muitas vezes não compreendidas. Perde-se com isso o aspecto lúdico que um problema pode ter quando encarado como um desafio.

É imprescindível que haja por parte do educando a compreensão do problema afim de desencadear um plano, executar o plano e fazer a verificação. É função do professor criar um ambiente de tranquilidade, em que o aluno não tenha medo de estabelecer hipóteses, mesmo correndo o risco de errar. Os objetivos da resolução de problemas são proporcionar o pensamento produtivo, desenvolver o raciocínio, oportunizar o enfreamento de situações novas e envolver os alunos com aplicações matemáticas.

"A avaliação se faz naturalmente no contato do aluno com a experiência e na análise que realiza junto com o professor."(CANDU, 1982, p.74). As capacidades aprendidas são demonstradas à medida que os estudantes têm oportunidade de compartilhar suas opiniões e algoritmo concernentes ao problema proposto, isto é a compreensão do problema a elaboração de um plano de execução a efetivação deste plano e o cuidado de verificação ou a certificação junto ao professor de que funciona. É o ponto de vista baseado em suas experiências anteriores e a capacidade de adequá-las à situação proposta.

Independente do modelo escolhido para compor seu plano de ensino, é fundamental dirigir a atenção do estudante para a natureza específica da tarefa de aprendizagem, de modo que aquele saiba exatamente o que dele se espera, evitar um excesso de frustração ou fracassos, desenvolver e preservar atitudes positivas para consigo mesmo, o professor, a matéria e o processo educacional em geral.

Existem atividades de ensino que contribuem para a aprendizagem, mas existem atividades que não contribuem da mesma forma, o que é outro dado a ser levado em conta. Consequentemente, é preciso entender as variáveis que configuram a prática educativa. Uma combinação de métodos de ensino será, provavelmente, sempre superior a qualquer método empregado com exclusividade. A escolha da técnica apropriada requer uma combinação de bom senso e uma compreensão básica dos fundamentos do processo ensino-aprendizagem.

1.4 Sequência Didática

Não é suficiente dizer que os alunos precisam dominar os conhecimentos; é necessário dizer como fazê-lo, isto é, investigar objetivos e métodos seguros e eficazes para a assimilação dos conhecimentos. Esta é a função da didática, ao estudar o processo de ensino.

O que é didática?

A didática se preocupa com alguns aspectos fundamentais no processo de ensino, tais como: O compromisso social e político do professor, acreditando que a educação compreende os processos formativos que ocorrem no meio social, nos quais os indivíduos estão envolvidos de modo necessário e inevitável pelo simples fato de existirem socialmente. Os conteúdos dos livros didáticos, os métodos e as formas organizadas do ensino, as atividades do professor e dos alunos e as diretrizes que regulam e orientam esse processo.

Afirma Libâneo (2013) ser o conjunto das ações desenvolvidas no processo de ensino e por conseguinte estuda os objetivos, os conteúdos, os meios e as condições do processo de ensino. Reúne em seu campo de conhecimentos objetivos e modos de ação pedagógica. Empenha-se em promover a melhor mediação entre o ensino-aprendizagem. Entretanto, muitos acreditam que o desempenho satisfatório do professor na sala de aula depende apenas de vocação natural em detrimento do domínio das bases teóricos- científicas e técnicas, esquecendo que tais técnicas articuladas com as exigências concretas do ensino, permitem maior segurança profissional promovendo um aprimoramento na qualidade de seu trabalho.

Didática da matemática

A saber, didática da matemática estuda as atividades que tem o objetivo o ensino da matemática. Presta-se a viabilizar meios que garantam, aos professores e estudantes, ordenar suas atividades e acumular um máximo de saberes, declara BRUMM (1996). Sendo assim, acentua o que é relevante no processo de ensino-aprendizagem.

Neste sentido, a didática da matemática pode atuar sobre dois aspectos, fixando sua atenção na fase do ensino e/ou da aprendizagem. Isto é, a primeira com o objetivo de melhorar a imagem da matemática, a atenção, ativar o interesse e motivação; a segunda do ponto de vista dos fundamentos da aprendizagem, não reverenciando um modelo único de teoria de aprendizagem. Embora, tenhamos o construtivismo como candidata mais autorizada à assumir o papel de organizadora da fundamentação de muitas experiências de investigação.

Por conseguinte, compreende que saber matemática não é apenas aprender definições e teoremas, a fim de reconhecer as ocasiões em que eles podem ser utilizados e aplicados. Para ela, fazer matemática implica em resolver problemas. Para alguns a didática da matemática deveria ter o objetivo de desenhar o currículo para contribuir com a teoria e prática.

O que é sequência Didática?

Define-se sequência didática como um conjunto ordenado de atividades didáticas idealizadas para promover o processo ensino-aprendizagem. Tal sequência afirma, Zabala (2010), deve estar abalizada na identificação de suas fases, das atividades que as formam, das relações que estabelecem. Portanto, é concebível que as fases de uma sequência estejam em consonância com as etapas de ensino-aprendizagem, em estudo, o da matemática. Sobre uma abordagem construtivista, compreendemos que o aprendizado não acontece de forma linear, mas aponta para uma sequência temporal específica, na qual alguns conceitos articulam-se sobre o conhecimento de outros.

Por que sequência?

Construir uma sequência didática significa encaminhar o trabalho, de forma que, tanto o professor como o aluno sejam protagonistas, construindo e desenvolvendo uma relação com o conhecimento ativo e consciente. É dirigida e supõe uma ação e um fim específicos com passos predeterminados que são cumulativos, que permitem um controle do próprio processo. Entretanto, será eficiente se o professor possuir o controle total da atividade também da percepção de envolvimento, e da mesma forma os alunos.

Aspectos relevantes para construir uma sequência didática adequada

As atividades de uma sequência didática devem estar fundamentadas na relação entre os pares e o professor, nos objetivos que se propõe a aula, e nos tipos de atividades seguidos do monitoramento dos resultados. Nesse aspecto, importa salientar a interação dos componentes afetivos , motores e cognitivos. É relevante que o material ajuste-se às características cognitivas dos alunos, assim como é pertinente a conexão do texto com recursos motivadores dos quais exijam as competências e habilidades dos estudantes sem detrimento aos conteúdos. O próximo passo é identificar as varáveis que interferem no processo de ensino. É importante refletir que muitas dificuldades foram produzidas por um ensino inadequado e pouco funcional dos conteúdos.

Elementos norteadores de uma sequência didática sob perspectiva construtivista adequada deve compor, segundo Zabala (2010):

1. **Elementos motivadores**, são métodos as estratégias, os recursos capazes de favorecer

o interesse dos estudantes no aprendizado matemático;

2. **Atividades que promovam a compreensão**, estão intimamente ligadas à associação entre os conteúdos a serem lembrados e outros conteúdos a serem aprendidos. Elas não podem requerer um nível de complexidade acima da maturação cognitiva do estudante. A exemplo disto, não se pode exigir compreensão de conceitos abstratos a crianças sem introduzir construção concreta;

3. **Foco não apenas em conteúdo, mas também nas competências e habilidades**, a competência é importante pois, revela a capacidade cognitiva do aluno em relacionar diversas habilidades, entre elas a de memorização ativa, a aprendizagem algorítmica, aprendizagem conceitual e a de resolução de problemas.

É imprescindível compreender que sequência didática não é um objetivo final do trabalho do professor e sim uma ferramenta. De acordo com Zabala (2010) "a busca por uma melhor prática passa pelo campo do conhecimento das variáveis que intervém na prática e a experiência para dominá- las". Uma vez que, para o autor, a aprendizagem de um conteúdo nunca pode ser acabada, é sempre possível uma aprendizagem mais significativa.

Como fazer uma sequência Didática?

Não existe um padrão, embora seja substancial que suas fases compreendam os tipos de conteúdos, os seus respectivos objetivos desejáveis as atividades que a compõe, as relações que se estabelecem e as razões que as justificam. Zabala (2010) apresenta oito perguntas que ajudarão o professor direcionar suas ações, são elas:

1. Existem atividades que nos permitem determinar os conhecimentos prévios que cada aluno tem em relação aos novos conteúdos de aprendizagem?

2. Os conteúdos são propostos de forma significativa e funcionais? (Diferentes formas de resolver um conflito ou um problema).

3. Existe atividade que infere o nível de desenvolvimento da cada estudante? (É possível quando o conceito não aparece antes de que tenha se apresentado sua necessidade)

4. Existem atividades que representem desafio alcançável para o aluno? (Ocorre quando

os próprios alunos propõem soluções diferentes aos desafios/problemas colocados pelo professor)

5. Existem atividades que provoquem um conflito cognitivo nos estudantes? (Ocorre quando o problema proposto não é fácil, para não causar desinteresse, e nem difícil ao discente para não causar frustração)

6. Existem atividades que promovam uma atitude favorável, e sejam motivadoras em relação à aprendizagem de novos conteúdos? (Compõe o nível de interesse que o estudante tem em aprender)

7. Que estimule a auto-estima e o autoconhecimento em relação à aprendizagem? (Refere-se às contribuições dos alunos em resolver os problemas).

8. Que ajudem os alunos adquirir habilidades relacionadas com o aprender a aprender? (Ocorre quando o estudante desenvolve habilidades e competências, sua forma de pensar promove estratégias cognitivas).

Unir o velho e o novo para melhorar as estratégias de ensino

Não é possível impor o método de ensino válido a partir de uma generalidade, nem para todos os alunos nem para todos os conteúdos. Se basearmos o ensino da aritmética como mera imitações de modelos tornaremos ineficazes para situações que fujam à de sua apreensão. Que toda prática docente integre a sua prática, estratégias adequadas a fim de satisfazer a necessidade de aprendizagem de cada aluno. Tomando como critério o potencial intelectual dos estudantes, é perceptível que existem variações que partem de escassa inteligência e rendimento nulo à alunos de potencial intelectual alto e grande rendimento. Na perspectiva de atender às diferenças e servir de suporte e estímulo, propomos uma variada quantidade de atividades de aprendizagem nas quais o aluno possa exercitar suas faculdades.

Capítulo 2

APLICAÇÃO À MATEMÁTICA FINANCEIRA

Nesta seção apresentaremos uma sequência didática para o tema "Matemática Financeira". Esta sequência torna possível a utilização de diversas estratégias de ensino, o manuseio de vários recursos para promover o ensino-aprendizagem e que, portanto, favorecem sua aplicação a todos os temas abordados neste trabalho.

Neste sentido buscamos oportunizar a inspiração do leitor à aplicação de sequências aos conteúdos, contidos ou não neste trabalho. Por esta razão, o tema escolhido, Matemática Financeira, é apresentado detalhadamente em sua proposta, fundamentação e organização. Isto é, as etapas, fases e a realização do projeto no formato de uma sequência didática. Para os demais temas optamos por exibir todo o conteúdo, suas atividades e algumas contribuições pedagógicas. Esta última contém um *Plano de Ação* apresentado ao final de cada tema. A proposta é não tornar este trabalho extenso e cansativo ao leitor, uma vez que os critérios para organizar uma sequência didática, comentadas no capítulo 1 e ratificada neste, é o mesmo.

A todos os temas são atribuídos as curiosidades históricas, matemágicas, jogos e problemas desafios, desta forma, a escolha do tema "Matemática Financeira"destaca-se por evidenciar o envolvimento dos estudantes na elaboração de um jogo, mesmo sendo produto de uma adaptação, como também, a utilização de recursos tecnológicos como calculadora, internet e a utilização de um quadro de desafios, que não se tinha antes desta sequência. A sequência apresenta 1. Mágica: Tempo para dobrar o investimento; 2. Jogos: bombardeio matemático e Pequenos Empreendedores; 3. Desafios: Atividade para pesquisa: Produtos de higiene e tributos e compras: Câmbio – BR e EUA.

2.1 Montando a Sequência Didática

> Na escola, a aula é a forma predominante de organização dos processos de ensino. Na aula se criam, se desenvolvem e se transformam as condições necessárias para que os alunos assimilem conhecimentos, habilidades, atitudes e convicções e, assim desenvolvem suas capacidades cognitivas. (LIBÂNEO 2013, p. 195)

Devemos entender a aula como o conjunto de meios e condições pelos quais o professor dirige e estimula o processo de ensino. Isto pode ser feito em função da atividade própria do aluno ao longo da sua aprendizagem. Esta requer uma estruturação didática que estabelece uma sequência de ensino. Isto não significa que todas as aulas devam seguir um esquema inflexível. É necessário estabelecer critérios que orientem a escolha tais como: "Atender ao mesmo tempo os objetivos, a estrutura do assunto a ser ensinado, tipos de estudantes, o tempo disponível, as facilidades materiais que a escola oferece"(BORDENAVE; PEREIRA, 2008, p. 121). As atividades são usadas para criar situações e abordar conteúdos. Cada uma tem um potencial didático diferente, a possibilidade de combinar atividades se traduz em uma compensar os limites da outra. A proposta é apresentar estímulos diferentes que produzam aprendizagem semelhante e contemple o maior número de estudantes.

Neste sentido, destacamos na sequência onze etapas que compreendem uma combinação de ideias, técnicas ou abordagens utilizadas à luz da psicologia cognitiva. Fundamentada em alguns princípios de aprendizagem matemática, a organização das atividades foi submetida às fases: motivacional, conceitual, da consolidação e resolução de problemas. O eixo norteador transcorreu as competências e habilidades sugeridas no PCN, todas comentadas no capítulo 1.

Nesse contexto, foram elaboradas atividades com relevância social e intelectual para a construção de habilidades comuns. Buscamos fomentar as conexões interdisciplinares, acessibilidade e adequação aos interesses dos alunos. Sugerimos a gênese da história considerando relevante agente consolidador motivacional, diversidade de tarefas propostas, assim como uso de recursos manipulativos de baixo custo, além da utilização de recursos tecnológicos.

Como iniciar uma sequência didática?

A saber, uma sequência começa com a escolha de um tema e seus aspectos. Destacando o que é imprescindível aprender, para conduzir o ensino. Sujeitando as atividades ao desenvolvimento de habilidades e competências que o aluno deve se apropriar.

Nesta perspectiva, abordaremos o conceito de porcentagem, situações que envolvem tributos, impostos, juros simples e juros compostos, que estudam os procedimentos em pagamentos de empréstimos, bem como análise de investimentos. Sendo assim, para o tema proposto "Matemática Financeira"segue seu resumo teórico.

Breve Resumo da parte Teórica dos Conteúdos

Porcentagem é muito utilizada no mercado financeiro, seja na hora de obter um desconto, calcular o lucro na venda de um produto ou medir as taxas de juros. É frequente o uso de expressões que refletem acréscimos ou reduções em preços, números ou quantidades, sempre tomando por base 100 unidades. Alguns exemplos:

• *A gasolina teve um aumento de 11%*

Significa que em cada R$100 houve um acréscimo de R$11,00.

• *O cliente recebeu um desconto de 10% em todas as mercadorias.*

Significa que em cada R$ 100,00 foi dado um desconto de R$10,00.

• *Dos jogadores que jogam na seleção brasileira, 70% são craques.*

Significa que em cada 100 jogadores que jogam na seleção brasileira, 70 são craques.

• *A falta de chuvas não só deixou a conta de luz mais cara em 2015, como também ganhou mais peso no cálculo da inflação. Sozinha, a crise da água já encareceu a energia elétrica nas residências em torno de 8% entre janeiro e fevereiro.*

Significa que em cada R$ 100,00 pagos houve um acréscimo de R$ 8,00 na conta de energia.

Note que porcentagem é uma razão de denominador 100 também chamada de razões centesimais ou taxas percentuais. As porcentagens costumam ser indicadas pelo numerador seguido do símbolo % (lê-se: "por cento"). As porcentagens também costumam ser expressas sob a forma de decimal, obtida dividindo-se o numerador por 100. Essa é a maneira habitual quando se utiliza a calculadora. De modo geral, calcular a% de x, corresponde a multiplicar

$\frac{a}{100}$ por x.

1 Exemplo.

$$a)\quad 2\% = \frac{2}{100} = 0,02 \quad b)\quad 41\% = \frac{41}{100} = 0,41 \quad c)\quad 130\% = \frac{130}{100} = 1,3$$

$$d)\quad 29,4\% = \frac{29,4}{100} = \frac{294}{1000} = 0,294 \quad e)\quad 3\%\ de\ 300 \leftrightarrow \frac{3}{100} \times 300 = 9.$$

f) Um vestido que custava R$ 400,00 sofreu um aumento de R$ 32,00. Qual o valor percentual de aumento sobre o vestido?

$$\frac{32}{400} = \frac{x}{100} \longrightarrow x = 8;\ segue\ \frac{8}{100} = 8\%$$

Juros. O conceito de juros surgiu no momento em que o homem percebeu a existência de uma afinidade entre o dinheiro e o tempo. Juro é a remuneração cobrada pelo empréstimo de dinheiro. É expresso como um percentual, sobre o valor emprestado (taxa de juro) e pode ser calculado de duas formas: juros simples ou juros compostos.

Juros simples. De acordo com esse regime, os juros gerados em cada período são sempre os mesmos e são dados pelo produto do capital pela taxa. Os juros são pagos somente no final da aplicação. Quando uma pessoa empresta a outra um valor monetário, durante certo tempo, essa quantia é chamada de capital (ou principal) e é indicado por C. O valor que o emprestador cobra pelo uso do dinheiro, ou valor pago pelo tomador do empréstimo é chamado de juro e indicado por J. A taxa de juro, indicada por i, é expressa como porcentagem do capital e é dada pela razão $i = \frac{J}{C}$. Ela representa o juro numa certa unidade de tempo, normalmente indicada da seguinte forma: ao dia (a.d.), ao mês (a.m.), ao ano (a.a), etc. Exemplo:

Um capital de R$ 3000,00 é aplicado a juros simples durante 3 anos à taxa de 10% a.a. Vamos calcular os juros gerados em cada período e o montante após aplicação.

$J = C \times i$ (juros no período da taxa)

Os juros gerados no 1º ano são $3000 \times (0,10) = 300$.

Os juros gerados no 2º ano são $3000 \times (0,10) = 300$.

Os juros gerados no 3º ano são $3000 \times (0,10) = 300$.

Se o pagamento do empréstimo for feito numa única parcela, ao final do prazo do empréstimo, o tomador pagará a soma do capital em prestado com o juro, que chamaremos de montante e indicaremos por M.

$$M = C + J \longleftrightarrow M = C + C \times J \longleftrightarrow M = C + C \times i \longleftrightarrow M = C \times (1 + i \times 1)$$

Para n períodos

$$M \ = \ C \ + \ J \ \times n \ \longleftrightarrow \ M \ = \ C \ + \ C \ \times i \ \times n \ \longleftrightarrow \ M \ = \ C \ \times (1 \ + \ i \times \ n)$$

No caso da questão anterior o Montante após 3 anos vale:

$$3000,00 + 300,00 + 300,00 + 300,00 = 3900,00 \text{ Ou}$$
$$M = 3000,00 + 3 \times 300,00 = 3900,00 \text{ ou ainda } M = 3000,00(1 + 0,10 \times 3) = 3900,00$$

Juros compostos. Neste regime, o juro é sobre o juro, portanto os juros gerados em cada período são diferentes, e crescentes à medida que o período vai crescendo. Ou seja, os juros do 1º período correspondem ao produto do capital pela taxa; esses juros são adicionados ao capital, gerando o montante M_1 após 1 período. Os juros do 2º período são obtidos multiplicando-se a taxa pelo montante M_1; esses juros são adicionados a M_1, gerando o montanteM_2 após 2 períodos. Os juros do 3º período são obtidos multiplicando-se a taxa pelo montante M_2; esses juros são adicionados a M_2, gerando o montante M_3 após 3 períodos.

Dessa forma, os juros em cada período são iguais ao montante do início do período multiplicado pela taxa, e esses juros são adicionados ao montante do início do período, gerando o montante do final do período. Retomemos o exemplo acima agora calculando os juros de cada período no regime de juros compostos.

Teremos:

Os juros gerados no 1º ano são $3000 \times (0,10) = 300 \; e \; M_1 = C + J \rightarrow M_1 = 3000,00 + 300,0 = 3300,00$.

Os juros gerados no 2º ano são $J_2 = M_1 \times (0,10) \rightarrow J_2 = 3300,00 \times (0,10) \rightarrow J_2 = 330,00$

$M_2 = 3300,00 + 330 = 3630,00$.

Os juros gerados no 3º ano são $J_3 = M_2 \times (0,10) \rightarrow J_3 = 3630,00 \times (0,10) \rightarrow J_2 = 363,00$

$M_3 = 3630 + 363,00 = 3993,00$.

Observe que $J_1 = 300,00 > J_2 = 330,00 > J_3 = 363,00$

$M_1 = C + C \times i \rightarrow M_1 = C \times (1 + i)$

$M_2 = M_1 + M_1 \times i \rightarrow M_2 = M_1 \times (1 + i) \rightarrow M_2 = C \times (1 + i) \times (1 + i)$

$M_3 = M_2 + M_2 \times i \rightarrow M_3 = M_2 \times (1+i) \rightarrow M_3 = C(1+i) \times (1+i) \times (1+i)$
Segue que para n períodos teremos:

$$M = C \times (1+i)^n$$

Se $C = 3000,00$ $i = 0,10$ e $n = 3$, então
$M = 3000,00 \times (1 + 0,10) \times 3 = 3993,00$

Apresentaremos agora algumas observações:

1. **Taxa equivalentes**. Se a taxa de juros relativa a um determinado período de tempo t, é igual a i, num prazo q, a taxa de juros relativamente a n períodos de tempo é I tal que:
$$1 + I = (1+i)^{\frac{q}{t}}$$

   2 Exemplo. *A taxa anual de juros equivalente a* 12% *ao mês é* I *tal que* $1 + I = (1 + 0,12)^{12}$. *Resultando em* $I \cong 2,90 = 290\%$

2. **Taxas Proporcionais** Muito utilizada para transformar taxas e período na mesma unidade de tempo, pois a razão entre elas é igual à razão dos períodos aos quais elas se referem e não podem ser confundidas com as taxas equivalentes.

   3 Exemplo. *A taxa* 144% *ao ano é proporcional a taxa* 12% *ao mês e corresponde a taxa equivalente de 7,72/a.m.*

Critérios de Organização da sequência

Os critérios posteriormente descritos tentam direcionar as escolhas de atividades, como também, o designo que as mesmas devem fomentar.

1. Promover ou despertar motivação para aprender;

2. Oportunizar a percepção e análise de diversas maneiras o conteúdo trabalhado;

3. Ir do passado ao presente e ao futuro (histórias e curiosidades);

4. Adequar as atividades à estrutura física e recursos disponíveis e a capacidade de compreensão dos estudantes.

Operacionalização dos Princípios de aprendizagem que permeiam as sequências Estes estão assentados em correntes destacadas por Huete e Bravo 2007, p. 68.

1. A construção do conhecimento será realizada a partir da variedade de atividades e experiências que possibilitem mais facilmente a aprendizagem, provoquem a generalização e a formalização dos conceitos;
2. A informação organizada em um contexto favorece a aprendizagem;
3. Os conceitos de ordem superior aos já possuídos não devem ser ensinados por uma definição, mas abordados segundo uma apropriada coleção de exemplos;
4. A relação de tarefas diferentes faze com que a transferência da aprendizagem ocorra de modo eficaz;
5. A formação de conceitos matemáticos baseada em atividades em que predominam o caráter lúdico é uma inigualável introdução para aqueles.

Balizados nos elementos que compõe o critério de organização e o princípios de aprendizagem, buscamos desenvolver atividades organizadas de modo à favorecer a aprendizagem. Assim, devem ser instrutivas, divertidas e conter significado para quem aprende. Nas quais destacamos o contexto histórico, matemágica, jogo e problema desafio. Validamos, assim, ações que remetessem a contextos de interesse dos estudantes, abaixo destacamos as atividades reverenciadas.

Problemas Desafios.

1. Atividade para pesquisa.
   Fazer uma lista de compras sobre o que você consome mensalmente em produtos de higiene pessoal e verificar o tributo de cada produto. Com esse percentual, calcular em reais o quanto você pagaria a mais pela lista e quanto esse valor representa em percentual do valor final da compra. (sugestão: acessar $< http://www.fiepr.org.br >$)

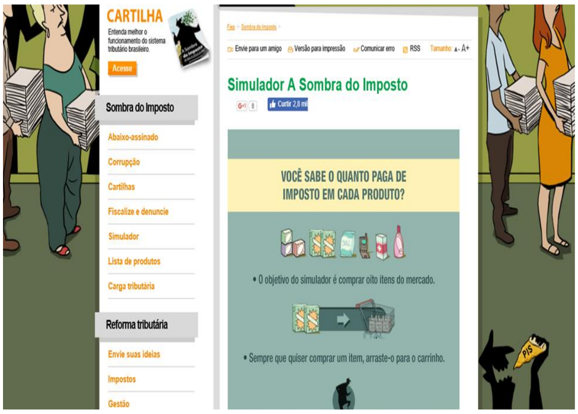


Figura 2.1: Ambiente virtual: simulador-de-impostos

2. Um jovem ganhou um prêmio de R\$ 4000,00 e deseja comprar com o valor do prêmio um Playstation4. Pesquisando os preços verificou que seu valor médio no Brasil é de exatamente R\$ 4000,00 e que nas lojas nos Estados Unidos o mesmo aparelho custa US\$ 400,00. Efetuando os cálculos o jovem deseja saber o que é mais vantajoso, se comprar no Brasil ou nos Estados Unidos, sabendo que produtos eletrônicos trazidos do exterior não podem exceder US\$ 500,00 para ser isento de impostos e que passagens de ida e volta compradas com antecedência para New York, por exemplo, custam US\$ 1000,00. O que o jovem concluiu? Por quê? Considere a questão anterior e admita que 37% do valor final do produto corresponde ao lucro da empresa (fornecedora) e que 20% o preço de custo (fabricação). Quanto em reais de impostos no Brasil, são pagos pela aquisição do produto? (sugestão US\$ 1,00 = R\$ 2,85)

Mágica

Determinando o tempo necessário para duplicar, triplicar, reduzir a metade seus rendimentos e até mesmo descobrir sua hora trabalhada. Diga-me a taxa de rendimento (ou de juros) e te direi o tempo para dobrar o investimento (ou a dívida).

1. TEMPO PARA DOBRAR O INVESTIMENTO

   A regra é conhecida por *regra dos 70*[1], devido a utilização deste número para conhecer o que se pede, isto é, basta dividir o número 70 por sua taxa de crescimento. **Exemplo**:

[1]Disponível em: $< http : //www.educacaofinanceira.info/1506/truques - de - matematica - que - facilitam - calculos - financeiros/ >$ Acesso em outubro de 20016.

se a taxa de crescimento de seus rendimentos for 10% então, você levará 7 anos para duplicar.

Observe que isto funciona também para o outro lado. Ou seja, é possível saber em quanto tempo teríamos o dobro da dívida se deixar sem pagar a fatura do cartão de crédito. Suponha que a fatura do cartão mostre uma taxa de juros anual de 35%. Dividindo 70 por 35 temos 2. Isto significa dizer que em dois anos a dívida terá dobrado de tamanho.

JOGO: Bombardeio Matemático.

O jogo "Bombardeio Matemático"é uma adaptação do jogo batalha naval. Neste montamos uma matriz formada por cartas com a expressão "Pense e responda"e cartas com o símbolo de uma bomba. Cada participante escolhe uma posição e vira a carta. Somente aquele que virar a carta "Pense e responda"tem chance de obter pontos. Basta acertar a pergunta. Caso vire uma bomba, o jogador perde a vez. Ganha aquele que fizer o maior número de pontos. A sorte está lançada. Quem consegue responder ao maior número de perguntas corretamente? As perguntas devem ser relativas ao tema: porcentagem, esta atividade pode ser jogada por duas ou mais pessoas, o professor pode ainda dividir a turma em dois grupos e com uma matriz gigante ser o mediador do jogo.

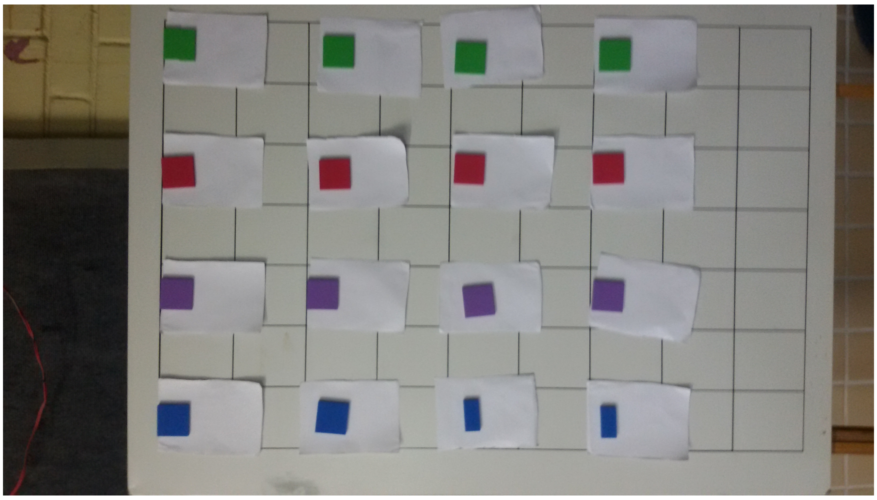


Figura 2.2: Jogo: Bombardeio Matemático.

Elaborando o seu próprio jogo.

A sugestão é solicitar que esta atividade seja realizada em grupos e que, os mesmos, explorem na elaboração do jogo o conhecimento aprendido por meio da sequência didática matemática financeira.

Eixos norteadores da sequência

1. Quais são os objetivos da aula?
   (a) Enfrentamento de situações problemas;
   (b) Construção da Argumentação;
2. Qual(is) elemento(s) motivador(es)?
   Destacaremos aqui o contexto histórico e a mágica. Por ter uma projeção em práticas cotidianas, os alunos demostraram interesse em participar, mesmo os que não demostram afinidade com a disciplina. Nesta introdução, foram apresentadas imagens que exemplificam a ideia de escambo e evolução das moedas. Através de perguntas, aplicamos nossa *avaliação diagnóstica* à turma, em relação ao tema, o recurso usado foi o data-show.
3. Quais atividades promovem compreensão?
   São as atividades lúdicas, os problemas desafios e o contexto histórico. Este último foi tratado anteriormente, nos limitaremos a apresentar os demais.

   (a) Atividades Lúdicas:
      i. O primeiro jogo "Bombardeio Matemático" foi trabalhado com toda a sala, dividindo-a em dois grupos, sendo a mestranda a mediadora. Nele foram requeridos o cálculo mental e/ou o algoritmo, o respeito e a negociação entre os pares do mesmo grupo. Nesta etapa a habilidade pretendida é a memorização e a aprendizagem algorítmica.
      ii. O segundo jogo "Pequenos Empreendedores", foi uma adaptação do jogo Banco Imobiliário, elaborado pelos estudantes. Nesta atividade, a proposta foi conduzir os estudantes a vivência e execução de tarefas em equipe, isto é, apropriação ou construção coletiva de saberes. Enquanto jogam articulam conceitos, pressupostos e noções com ações concretas, vivenciadas pelo participante ou aprendiz. A oficina desenvolve as habilidades de conceituar que se assenta nas de memorizar e aprendizagem algorítmica.

iii. Mágica: A regra dos 70 “Tempo para duplicar o investimento ou conhecer o tempo necessário para duplicar uma dívida”. Nela, associamos práticas rotineiras do mundo financeiro e aguçamos o desenvolvimento intelectual, na busca por uma melhor compreensão de conceitos e propriedades do tema proposto.

(b) Problemas Desafios:

i. Atividade 1: propõe a utilização de um computador com acesso a internet, nela os alunos encontram um simulador. A proposta é simularem compras que fariam na vida real, e verifiquem a relação percentual de impostos pagos ao final de sua compra. Além de desencadear a consolidação do tema em estudo proporciona uma roda de discussão sobre as práticas sócio-políticas, dando significado ao conteúdo aprendido.

ii. Atividade 2: aspira aprendizagem de resolução de problemas, uma vez que diante da situação apresentada, o estudante precisa compreender o problema, elaborar um plano de ação que tem a ver em conhecer o valor do câmbio e efetuar conversões. A emissão da resposta estará intimamente ligada ao nível motivacional do aluno em conhecer outro país, pois mesmo verificando alguma desvantagem financeira , os estudantes podem concluir que assim é vantajoso pelo prazer de viajar, ou o contrário se obtiver alguma vantagem financeira, em que o estudante acredite não valer a pena o deslocamento.

iii. Quadro de Desafios: tem esse nome porque sua proposta é propiciar um espaço em que os estudantes sintam-se desafiados além da sala de aula. Ele foi colocado em ambiente comum a toda comunidade escola. Os problemas apresentados nele tem relação com os temas abordados em sala de aula. As resoluções devem ser sugeridas pelos próprios estudantes, inclusive são permitidas aquelas de esforços coletivos. A proposta é continuar o desenvolvimento cognitivo fora da sala e instigar outros estudantes a trabalhar sobre o assunto. Ao tema proposto para esta sequência, apresentamos:

Questão 1. Conhecida a inflação do período que é 3% ao ano, calcule o tempo necessário para que se tenha desvalorização dos rendimentos à metade.

4. Quais habilidades e competências desenvolvidas?

(a) Competências em resolução de problemas

(b) Habilidades de interpretar, relacionar, fazer, conceituar, desenvolver estratégias e argumentar.

2.2 Aplicando a Sequência Didática - Matemática Financeira.

Fizemos inicialmente uma abordagem histórica valendo-se de sites tais como Só matemática e dia a dia educação, para relatar a gênese deste tema. Segue o texto utilizado como consulta para ministração da aula.

Um Pouco de História

Os juros e os impostos existem desde a época dos primeiros registros de civilizações existentes na Terra. Um dos primeiros indícios apareceu já na Babilônia no ano de 2000 ac. Nas citações mais antigas, os juros eram pagos pelo uso de sementes ou de outras conveniências emprestadas; por não existir uma moeda de troca. Esta prática, denominou-se escambo.

Muitas das práticas existentes originaram-se dos antigos costumes de empréstimo e devolução de sementes e de outros produtos agrícolas. Entretanto, devemos lembrar que todas as antigas práticas que ainda persistem foram inteiramente lógicas no tempo de sua origem. Por exemplo, quando as sementes eram emprestadas para a semeadura de uma certa área, era lógico esperar o pagamento na próxima colheita - no prazo de um ano. Assim, o cálculo de juros numa base anual era mais razoável; tão quanto o estabelecimento de juros compostos para o financiamento das antigas viagens comerciais, que não poderiam ser concluídas em um ano. Conforme a necessidade de cada época, foi se criando novas formas de se trabalhar com a relação tempo-juros (juros semestral, bimestral, diário, etc.).

A História também revela que a ideia se tinha tornado tão bem estabelecida que já existia uma firma de banqueiros internacionais em 575 ac, com os escritórios centrais na Babilônia. Sua renda era proveniente das altas taxas de juros cobradas pelo uso de seu dinheiro para o financiamento do comércio internacional. O juro não é apenas uma das nossas mais antigas aplicações da Matemática Financeira e Economia, mas também seus usos sofreram poucas mudanças através dos tempos.

Nos tempos antigos, a operação de escambo, longe de ser um ato simples, devia ser, ao contrário, envolta de formalidades complexas, muito provavelmente ligadas à mística e às práticas mágicas. É, em todo caso, o que revela a análise etnológica feita nas sociedades "primitivas"contemporâneas, que se viu confirmar por certo número de descobertas arqueológicas. Pode-se, portanto, supor que nas culturas pastorais a ideia de boi-padrão (moeda de sangue) sucedeu à ideia de "boi de sacrifício", ela mesma ligada ao valor intrínseco estimado do animal. Em contrapartida, nas ilhas do Pacífico as mercadorias foram estimadas em colares de pérolas ou de conchas. Após certo período, começou-se por trocar faixas de tecido por animais ou objetos. O tecido era a moeda; a unidade era o palmo da fita de duas vezes oitenta fios de largura.

Tais métodos apresentavam, contudo, sérias dificuldades de aplicação. Assim, à medida que o comércio se desenvolvia, os metais desempenharam um papel cada vez maior nas transações comerciais, vindo a tornar-se no fim das contas a "moeda de troca"preferida dos vendedores e compradores. E as avaliações das diversas mercadorias passaram a ser feitas quantitativamente pelo peso, cada uma delas referindo a uma espécie de peso-padrão relativo a um ou a outro metal. Igualmente no Egito faraônico, os gêneros e as mercadorias foram frequentemente estimados e pagos em metal (cobre, bronze e, por vezes, ouro ou prata), que se dividia inicialmente em pepitas e palhetas. A avaliação era feita também sob a forma de lingotes que é uma massa de metal geralmente em forma de bloco ou barra, ou de anéis, cujo valor se determinava em seguida pela pesagem. Até o momento não somente tratamos de um simples escambo, mas também um verdadeiro sistema econômico. A partir de então, graças ao padrão de metal, as mercadorias passaram a não mais ser trocadas ao simples prazer dos contratantes ou segundo usos consagrados frequentemente arbitrários, mas em função de seu "justo preço".

Com o surgimento do dinheiro, originou a criação de mecanismos controlados inicialmente por pessoas denominadas cambistas. Eles exerciam a profissão que hoje é atribuída aos banqueiros, sentados num banco, nos mercados, eles realizavam operações de empréstimo, que eram quitados acrescidos os juros e na organização de ordens de pagamentos para particulares. Dessa forma, os cambistas tinham seus lucros e comissões pelos serviços prestados. Mas, foi no século XVII que os bancos se firmaram, com o lançamento do dinheiro de papel (papel-moeda) pelo Banco de Estocolmo.

Figura 2.3: Imagem ilustrativa de história da matemática financeira.

A proposta foi introduzir o tema de forma significativa, além de oportunizar momentos de sondagem sobre o conteúdo por meio de perguntas. Nesse contexto, discutimos a relevância do tema, a necessidade de aprendê-lo, com exemplos do cotidiano introduzimos definições e propriedades.

Seguidamente, o jogo "Bombardeio Matemático" foi introduzido, neste dividimos a sala em dois grupos, a proposta foi despertar a cooperação, aprendizagens e desenvolvimento.

Figura 2.4: Bombardeio matemático

Em ambas as turmas a competição surgiu como força motriz que gerou empenho, participação e apropriação do conteúdo. Nela, foi desencadeado o cálculo mental, a cooperação, como também ficou evidenciado nos participantes entusiasmo pelo tema.

Em outro momento da sequência, e com auxílio de recursos tecnológicos, solicitamos aos nossos estudantes a realização de uma atividade cuja proposta era simular uma eventual compra de supermercado. O ambiente virtual sugerido, figura 2.1, simulava uma prateleira com produtos e seus respectivos valores, com e sem impostos. À medida que o visitante enchia um carrinho com suas compras, o simulador apresentava os dois possíveis valores finais das compras. Desta forma, o consumidor tinha a possibilidade de observar a diferença entre os valores com e sem impostos. A apresentação desta atividade promoveu uma roda de conversa sobre o contexto socioeconômico.

Posteriormente aplicamos em sala a atividade A2), nela vislumbrando os interesses da faixa etária e propondo um problema desafio, a roda de discussão permitiu aos estudantes desenvolver suas estratégias e apresentar seus resultados. No que foi possível observar, os estudantes perceberam que precisariam desenvolver as seguintes etapas: efetuar conversões e cálculos percentuais.

Desta forma, Os alunos desenvolveram o problema da seguinte forma: para a compra do aparelho teremos que reservar US$ 400,00 = R$ 1140,00. Para a passagem teremos que reservar US$ 1000,00 = R$ 2850,00. Totalizando R$ 3990,00, portanto sobram 10,00 reais. Ficando assim, possível a viagem. A maioria deles decidiram por viajar, apenas pelo prazer de viajar. Quanto aos impostos cobrados no Brasil foram efetuadas as seguintes etapas: 37% de R$ 4000,00 são 1480,00 reais; 20% de 4000,00 são 800,00 reais, totalizando $1480,00 + 800,00 = 2280,00 \quad reais.$ fazendo $4000,00 - 2280,00 = 1720,00 \quad reais.$ Concluindo assim, 1720,00 reais em impostos.

Na seguinte etapa, retomamos formalmente ao subtema juros com a introdução da mágica. Por ela apontamos situações cotidianas, como juros do cartão de crédito, investimentos e remuneração de horas trabalhadas. Para isso, exploramos o uso da calculadora do celular e nos apropriamos dos algoritmos da mágica e da fundamentação teórica. Segue a explicação da matemágica aplicada.

Por que o truque funciona [2]?

[2]Disponível em: $< http : //www.educacaofinanceira.info/1506/truques - de - matematica - que -$

Antes de justificar os cálculos é importante conceber que a explicação não será de fácil compreensão para a maioria dos estudantes do primeiro ano do ensino médio, portanto, trataremos os dados por aproximação recorrendo ao uso de calculadora científica. Para isso, usaremos a função logaritmo natural de x, $x > 0$, denotada por $ln(x)$, que pode ser definida como sendo a função inversa da exponencial e^x. Logo, "o logaritmo natural de x é a potência de e necessária para se obter x."

$$y = ln(x) \leftrightarrow x = e^y$$

Precisamos de uma forma prática para calcular o valor numérico do logaritmo, mesmo que aproximado. Usaremos a expressão apresentada, com notas históricas

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ..., para - 1 < x < 1.$$

Tal expressão, conhecida como série de Taylor da função $ln(1+x)$, permite aproximar $ln(1+x) \approx x$ para valores de x positivos e próximos de 0.

Para ilustramos a relação de Taylor, quando x possui valores próximos de zero, utilizamos o recurso da calculadora e montamos o seguinte esquema:

ln (1 - x)	x	ln(1+ x)
-0,0100503359	0,01	0,099503309
-0,020202707	0,02	0,0198026273
-0,0304592075	0,03	0,295588022
...	...	...
-0,10536005157	0,1	0,0953101798
-0,1165338163	0,11	0,1043600153
-0,1278333715	0,12	0,1133286853

Essa correspondência, permitirá uma melhor compreensão desta relação pelos estudantes, notavelmente, os valores superiores a 0,11 apresentam aproximações discordantes. Seguidamente, aplicaremos a relação de Taylor na demonstração do truque.

Observe que Um capital C, aplicado à taxa anual de $i\%$, transformando-se, após 1 ano, em

$$C(1) = C + \frac{i}{100}C = C(1 + \frac{i}{100})$$

$facilitam - calculos - financeiros/ >$ Acesso em outubro de 20016.

Após dois anos teremos:

$$C(2) = C(1) + \frac{i}{100}C(1) = C(1 + \frac{1}{100})^2$$

De forma geral, após "n"anos teremos $C(t) = C(1 + \frac{1}{100})^n$
Logo, o tempo "n" necessário para duplicação é obtida da equação:

$$2C = C(1 + \frac{i}{100})^n$$

ou

$$2 = (1 + \frac{i}{100})^n$$

que implica em

$$n = \frac{ln(2)}{ln(1 + \frac{i}{100})}$$

Usando a aproximação mencionada para o cálculo de $ln(1 + \frac{i}{100}) \approx \frac{i}{100}$
sendo $ln(2) \approx 0,70$ podemos escrever

$$n \approx \frac{0,70}{\frac{i}{100}} = \frac{70}{i},$$

como estabelecido na Regra dos 70.

Tome Nota: 1. A observação é que esta relação é valida quando a taxa é relativamente pequena.
2. Fórmula que determina o valor futuro de um recurso aplicado é dado por:

$$V_F = V_P(1 + i)^n$$

V_F- Valor Futuro (montante)

V_P - Valor Presente (capital)

i - Taxa, note que esta deve estar na mesma unidade de tempo do período

n - Período

Como queremos dobrar o capital investido:

$$2V_P = V_P(1 + i)^n \quad \longrightarrow \quad 2 = (1 + i)^n$$

Sabemos o valor da taxa de juros e queremos encontrar o número de tempo (n). Então

$$n = ln2/ln1,1 \simeq 0,693/0,09531 \simeq 7$$

Note que podemos introduzir o uso da calculadora para calcular a potência da expressão.

A brincadeira que tentou ilustrar ações corriqueiras, como o uso do cartão de crédito, encorajou os estudantes a buscar, mesmo que neste caso de forma ineficiente, a resolução deste truque. A proposta foi reforçar a importância desta ferramenta na vida adulta. A introdução do conteúdo e o uso da calculadora permitiu uma melhor compreensão da justificativa da mágica.

Posteriormente, o desafio para os estudantes do 1º ano, era desenvolver uma atividade lúdica que explorasse o tema aprendido. Desta proposta surgiu o jogo "Pequenos Empreendedores" que demandou empenho de vários discentes. Abaixo explicitamos a proposta do jogo. Sendo assim, depois de aprovada a ideia, foram reproduzidos alguns exemplares.

Figura 2.5: Jogo Pequenos Empreendedores.

Baseado no jogo "banco imobiliário" este jogo foi desenvolvido por alunos do 1º ano em parceria com os do 3º ano da escola pública de Pernambuco, Padre Osmar Novaes. Tem como objetivo trabalhar noções de lucro, prejuízo, juros simples e compostos. Sobre o tabuleiro é descrito um percurso em que as casas podem representar lojas seguros contra incêndios, bancos, shoppings, galerias, imposto de renda e perda total. Cada jogador deve comprar uma franquia por meio de um empréstimo feito no início do jogo ao banco, tal empréstimo não deve exceder R$ 2000,00, sendo obrigatório o pagamento dos juros a cada percurso completo do participante.

Seis franquias estão distribuídas no percurso do tabuleiro, todos partem do início, porém se um concorrente cair na franquia do outro, este deve pagar uma taxa. Se o participante cair em um shopping ou em uma galeria pode abrir uma filial, e a medida que os outros participantes vão caindo nos centros comerciais os mesmos devem pagar aluguel a quem primeiro se instalou, cessa quando todos tiverem filial no mesmo centro comercial. Se o participante cair em perda total e não tiver comprado o seguro então esse sai do jogo, é importante lembrar que o seguro só vale a um percurso completo. Também sai do jogo quem abrir falência, isto é, não tiver recursos para pagar os juros, os aluguéis. O ícone do imposto de renda te impede de jogar por duas rodadas. Vence o jogador que não abriu falência, este jogo pode durar bastante tempo.

Os alunos desempenharam a função de explicar e jogar com os outros colegas. O desafio aflorou nos estudantes a corresponsabilidade do aprendizado.

Figura 2.6: Jogo pequenos Empreendedores

Naquilo que é possível observar, a sequência cumpriu sua proposta inicial, o envolvimento, a curiosidade, a cooperação e o desenvolvimento cognitivo dos estudantes foram verificados em cada etapa, a saber as fases descritas na tabela 2.1. Durante sua aplicação, não achamos necessária a reelaboração, ou ajustes, nas atividades desenvolvidas.

Programação Realizada

Esta sequência foi efetivada em dez aulas que correspondem a cinco semanas. Sendo as duas últimas aulas apenas para jogar o jogo desenvolvido pelos estudantes, sua confecção foi

F	Motivação	História/curiosidade e Mágica	Significância e validades dos conteúdos
A	Conceituação	Resumo Teórico	Conteúdos
S	Consolidação	Atividade 1 e Jogos	Atitudes Favoráveis
E S	Resolução de Problemas	Atividade 2, Oficina e Quadro de Desafios	Conflitos Cognitivos Aprender a Aprender

Tabela 2.1: Fases da sequência didática.

feita em uma gráfica e produzimos cinco exemplares. O termo "Momentos" tratados no esquema didático que segue significa aulas ministradas, exceto pelo momento 2.

Momentos	Eventos
1	Apresentação do tema sobre introdução histórica; Fundamentação teórica: Porcentagem, por meio de exemplos contextualizados; O jogo "bombardeio"/ avaliação;
2	Atividade 1 (simulador);
3	Roda de discussão sobre os resultados/ avaliação; Atividade 2 Roda de discussão sobre as conclusões/avaliação;
4	Mágica Fundamentação teórica: juros;
5	Oficina: elaboração de um jogo (adaptação)/ avaliação;
6	Avaliação: o jogo na prática/ avaliação.

Tabela 2.2: Plano de Ação.

Esse esquema didático, tabela 2.2, será apresentado para resumir a sequência didática das atividades realizadas em cada tema que serão descritos no capítulo seguinte. Isto será feito em uma subseção de título Plano de ação e observações pedagógicas.

Capítulo 3

OUTRAS ATIVIDADES LÚDICAS REALIZADAS

Sobre a escolha dos conteúdos, vagueamos na área de Aritmética abalizada na Matriz de Referência com os descritores das competências e habilidades requeridas no ENEM e também requeridas no sistema de avaliação seriado da UPE, remetida como “construção numérica”segue os tópicos escolhidos para este trabalho: Conhecimentos numéricos: operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões.

Com exceção dos tópicos: conjunto numérico, sequência e matemática financeira, os demais são trabalhados apenas nos livros de ensino fundamental. Por esta razão, foi verificada nenhuma, ou quase nenhuma, citação sobre recursos e estratégias para o ensino dos referidos temas, pelas editoras FTD, SARIVA, MODERNA e ÁTICA, aprovadas e recomendadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), aqui pesquisadas. O desejo de esperar que um estudante chegue ao ensino médio sem nenhuma ou muito pouca deficiência no aprendizado desses tópicos, pode ser a provável justificativa desta ausência. Contudo, a prática mostra que o ideal se distância da realidade, sugerindo ao professor a consulta de outros materiais para suprir essa falta. A tabela a seguir apresenta a organização metodológica dos conteúdos: conjunto numérico, sequência e matemática financeira das editoras já citadas.

Editora	Atividade Lúdica	História	Desafios
FTD	x	x	x
SARAIVA		x	x
MODERNA		x	x
ÁTICA		x	x

Dentre a três especificidades no ensino dos conjuntos numéricos, sequência e matemática financeira, a tabela demonstra que todas as editoras pesquisadas compreendem a importância de um problema desafiador, no entanto, sempre este é sugerido ao final da fundamentação teórica e muitas vezes depois de outros exercícios de fixação, quase nunca no início, como método motivador. Embora os tópicos sejam introduzidos por meio de exemplos, segue as editora Ftd e Ática, de forma contextualizada com ações do trabalho e cotidiano. Outra observação pertinente é que as competências e mesmo as habilidades solicitadas nos problemas são apresentados apenas pelas editoras Ática e Moderna. Já os conteúdo históricos possuem citações sobre a sequência de Fibonacci e o método de Gaus. Enquanto que apenas a Ftd traz o jogo como um problema desafiador no estudo de sequências.

O que motivou este trabalho foi perceber que ao longo dos últimos anos a forma de aprender mudou, assim como a forma dos estudantes se relacionarem com a informação, e necessariamente, deveríamos diversificar a forma de ensinar também. Dentro das limitações impostas pelo espaço físico e de recursos disponíveis, buscamos em outras literaturas sugestões que pudessem implementar as aulas e contribuíssem no processo de ensino-aprendizagem. Neste sentido, propõem-se mesclar recursos conhecidos, porém, pouco usado com os de uso sistemático, como quadro. Inicialmente, percebe-se que, para o nosso público alvo, a apresentação dos conteúdos, nos programas oficiais não coaduna com as necessidades de cada aluno, menos ainda com as diferenças entre eles.

Embora as salas contenham estudantes com visões de mundo diferentes e perspectivas distintas, tentamos dividir os alunos em três grandes grupos, tomando como critério o rendimento acadêmico e afinidade em áreas do conhecimento. A classificação destacou-se em um grupo que tem altos e moderados rendimentos acadêmicos na disciplina e possui afinidade com ela, o segundo grupo tem rendimento moderado e afirma não ter empatia com esta matéria e, por último, o que apresenta escasso ou nulo rendimento e afirma possuir aversão a este tipo de conteúdo.

Com auxílio de teorias da aprendizagem, acrescentar às aulas expositivas os problemas de aplicação que buscam a vivência do aluno e desafiá-lo numa abordagem lúdica como jogos e mágicas e as curiosidades de histórias da matemática. A proposta é motivar os estudantes que admiram a sociologia ou ciências humanas com o uso da história, os que demostram habilidades manuais nos jogos que estimulam o raciocínio com o uso do concreto, os demais, sentem-se motivados pela própria aprendizagem e podem ser desafiados nos problemas que não são caracterizados como de fixação e estimulam estratégias.

Nesse sentido, procuramos durante o ano letivo de 2016 aplicar a maioria das atividades propostas neste trabalho. Estas são explicitadas na tabela 3.1. Todas, foram vivenciadas pelos estudantes do 1º ano do ensino médio da escola pública Padre Osmar Novaes em Paulista Pernambuco, escola em que a mestranda atua.

TEMA	Curiosidades históricas	Matemágica	Jogo	Problema desafio
Operações com os inteiros	x	x	x	x
Operações com os racionais	x	x	x	x
Notação científica	x		x	x
MMC & MDC	x	x	x	x
Razão e proporção	x	x	x	x
Matemática financeira	x	x	x	x
P.A. & P.G.	x	x	x	x

Tabela 3.1: Atividades lúdicas vivenciadas.

A nossa coletânea, assim organizada, tenta oferecer aos professores um instrumento de consulta em adequação dos procedimentos propostos. Ela aborda os temas por diversos ângulos, de forma instrutiva e divertida. Procura elucidar os caminhos percorridos para montar e aplicar as atividades referentes aos seis temas propostos. Destaca os critérios de organização e, para isto, trabalha os temas em formato de *sequência didática.* Ao final de cada tema exibe, como sugestão, uma tabela denominada “Plano de ação”e transcreve as práticas efetivadas pela mestranda. Para cada tema abordado traz uma atividade resolvida baseada nas resoluções dos estudantes.

3.1 Conjunto Numérico em $\mathbb{Z}$

Nesta seção, nos limitaremos apenas as operações de soma subtração, multiplicação, divisão e potenciação. Apresentaremos o teorema fundamental da aritmética, que classifica todos os números naturais diferente de um, em primo ou composto. Ainda falaremos do Crivo de Eratóstenes e alguns critérios de divisibilidade, seguidos de um pouco de história, atividade desafiadora, jogo e uma adivinhação que associaremos à "matemágica", que utiliza o tema da aula para solucionar a adivinhação.

Um Pouco de História

Os primeiros a entender realmente a importância dos números primos foram os gregos antigos, eles planejaram a base do que os matemáticos construíram desde então, os matemáticos talvez achassem que poderiam eternizar seus nomes se conseguissem escrever todos os números primos em uma tabela. Por volta de 300 a.C. Euclides descobriu que isto era impossível, ele provou que existem infinitos números primos. No entanto, Euclides não encontrou uma fórmula de prever quais eram os números primos. Foi o responsável pela demonstração do importante teorema fundamental da aritmética. Outro grego, agora Erastóstenes, desenvolveu um método simples, um algoritmo, para encontrar números primos em um intervalo, na época denominado de *Crivo de Erastóstenes*.

Somente no século XVII, Pierre de Fermat, em uma de suas conjecturas, acreditava que seria primo todo numero da forma $F_n = 2^{2^n} + 1$ e que posteriormente, Leonhard Euler mostrou que falhara para n=5. Isto é $F_5 = 2^{2^5}+1 = 4.294.967.297 = 641\times 6.700.417$. Por volta do século XVIII, um garoto, chamado Gauss se perguntou quantos números primos existiam, e trabalhou no cálculo da probabilidade deles. Dedicou-se em dividir os números em milhares, a medida que esses milhares possuíam valores absolutos cada vez maior, os intervalos apresentavam uma diminuição de números primos, e procurou investigar se isto ocorria proporcionalmente. Gauss percebeu que parecia existir uma relação entre esse valor e os logaritmos que o levou, por fim, até a descoberta da integral logarítmica. Riemann, também alemão, em 1859 descobre que a função zeta daria informações sobre o padrão dos números primos, embora não se tenha provado tal afirmação.

Os números primos, além de belos e desafiadores do ponto de vista matemático, são extremamente importantes para as atividades usuais de nosso dia a dia. Por exemplo, nenhuma transação bancária ou pela internet estaria segura sem o uso dos números primos muito grandes. Isso porque, o processo de fatoração é praticamente impossível, que é a ideia chave por trás dos sistemas de criptografia modernos que todos nós usamos todos os dias. É graças a estes números que é possível que tenhamos segurança em nossas transações financeiras e em sistema de comunicação on-line.

Fatores primos de números de ordem muito grande são usados na criptografia. Apesar de ser tecnicamente possível encontrar esses fatores primos, eles requerem muito tempo e dedicação. Um moderno supercomputador pode necessitar alguns milhões ou talvez bilhões de anos para resolver um problema de fatoração de 256 bits. Por isso as chaves criptográficas, que são números primos dessa fatoração, são tão importantes.

Curiosidade!

Martin Gardner, famoso matemático americano, fez um desafio para a decodificação de um texto cifrado por ele em agosto de 1977, e forneceu para a chave um número enorme:

114.381.625.757.888.867.669.235.779.976.146.612.010.218.296.721.242.362.562.561.842.935
706.935.245.733.897.830.597.123.563.958.705.058.989.075.147.599.290.026.879.543.541

Para decifrar o texto seria necessário obter os fatores primos desse número. E isso só foi conseguido dezessete anos depois, pelo esforço conjunto de 600 pessoas de várias nacionalidades e com a utilização de computadores e supercomputadores, em 26 de abril de 1994. Os fatores primos desse número são:

$$p = 3.490.529.510.847.650.949.147.849.619.903.898.133.417.764.638.493.387.843.990.820.577$$

$$q = 32.769.132.933.266.709.549.961.988.190.834.461.413.177.642.967.992.942.539.798.288.533$$

Ou seja, $n = p \times q$

Breve Resumo da parte Teórica do conteúdo

Os números do sistema decimal são posicional composto por dez algarismos que são 0 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Inicialmente, nos deteremos ao conjunto dos números naturais, que são classificados em primos ou compostos. Isto é, um primo é todo número que possui apenas dois divisores, um e ele mesmo. Consequentemente, todos os números diferente de um com mais de dois divisores são ditos compostos. A releitura dos tais números é transcrita pelo processo de fatoração, que nada mais é que a apresentação do tal número pelo produto dos fatores primos que os compõem. A aritmética é assentada no teorema abaixo, conhecido como Teorema Fundamental.

3.1.1 Teorema (Teorema Fundamental da Aritmética)**.** *Todo número natural n maior que 1 pode ser escrito como produto $n = {p_1}^{\alpha_1}$. ${p_2}^{\alpha_2}$. ${p_3}^{\alpha_3}$ .... ${p_m}^{\alpha_m}$ onde $m \geq 1$ é um número natural, $\alpha_1\ \epsilon N$ e p_i é primo para todo $1 \leq i \leq m$. Além disso, a fatoração é única se exigirmos que $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_m$.*

Demonstração. Seja n um número natural, $n > 1$ e observe que se n for um primo não há nada para ser demonstrado. Tomemos, então, um número n composto. Como n tem divisores diferentes de 1; seja p_1 o menor dentre esses divisores de n diferente de 1. Assim existe um número natural n_1 tal que

$$n = p_1 \cdot n_1 \tag{3.1}$$

Afirmação 1: p_1 é primo.

De fato, pois se p_1 não fosse primo, estão existiria um número natural d, $1 < d < p_1$, tal que $d|p_1$. Como $p_1|n$, pela transitividade, teríamos que $d|n$, com $d < p_1$, o que contraria a escolha de p_1. Assim por(2.1), $n = p_1 \cdot n_1$, com p_1 primo.

Se n_1 for primo, terminamos a demonstração, pois n será um produto de dois primos: p_1 e n_1,. Suponha então que n_1 não seja primo e tome p_2 o menor dentre os divisores de n_1 que são maiores que 1. Assim, existe um número n_2 tal que $n_1 = p_2 \cdot n_2$ e, portanto, por (2.1)

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot n_2 \tag{3.2}$$

Afirmação 2: p_2 é primo.

De fato, procederemos como na afirmação 1. Se p_2 não fosse primo, existiria um número natural k, $1 < k < p_2$, tal que $k|n_1$, com $k < p_2$, o que contraria a escolha de p_2. Assim por (2.1),

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot n_2$$

com p_1 e p_2 primos.

Se n_2 for primo, teríamos a demonstração, caso não procederemos como nas afirmações 1 e 2 e encontraríamos um número primo $1 < p_3$ o menor dentre os divisores de n_2 tal que $p_3|n_2$, consequentemente $p_3|n$ e por tanto

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot n_3 \tag{3.3}$$

com p_1, p_2 e p_3 primos.

Se n_3 for primo, terminamos a demonstração, pois teríamos escrito n como um produto de quatro primos: p_1, p_2, p_3 e n_3.

Prosseguindo com o procedimento, obteremos, então, números primos p_1 , p_2, $p_3 \cdots p_j$ e uma sequência de números naturais $n_1 > n_2 > n_3 > \cdots > n_j \geq 1$ tais que $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_j \cdot n_j$, com a possibilidade de continuarmos com a decomposição de n, sempre que $n_j > 1$. Como existe uma quantidade finita de números naturais entre 1 e n, o procedimento de decomposição tem um último passo no qual obtemos $n_r = 1$ e, então, teremos

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_r,$$

com p_1 , p_2, $p_3 \cdots p_r$

Não apresentaremos uma justificativa para a unicidade da representação de um número natural maior do que 1 como produto de primos, pois ela foge dos objetivos pelos quais o Teorema foi apresentado. Entretanto, a demonstração da unicidade pode ser facilmente verificada e está em livros clássicos de álgebra básica. □

Critérios de Divisibilidade

Apresentaremos agora alguns critérios de divisibilidade:

Divisibilidade por 2 . Um número é divisível por dois quando o mesmo for par, isto é, números que terminam em 0 2, 4, 6 e 8.

Divisibilidade por 3 . Um número será divisível por 3 quando a soma de seus algarismos for múltiplo de 3.

Divisibilidade por 4 . Um número será divisível por 4 quando os dois últimos algarismos for divisível por 4 ou terminado em 00.

Divisibilidade por 5 . Um número será divisível por 5 quando este terminar em 0 ou 5.

Divisibilidade por 6 . Um número será divisível por 6, quando for por 2 e 3 simultaneamente ou seja deve ser par e a soma de seus algarismos for múltipla de 3.

Divisibilidade por 7 . Um número será divisível por sete quando for possível separar o último algarismo do número original e fazer a diferença entre o novo número com o dobro do último algarismo retirado resultando em um novo número que deverá ser divisível por 7, se após esse processo não conseguir perceber tal relação, será necessário efetuar sucessivas operações como citadas acima até concluir se existe ou não a relação de divisibilidade.

Divisibilidade por 8 . Um número será divisível por 8 se os últimos três algarismos for divisível por 8 ou se os três últimos algarismos for 000.

Divisibilidade por 9 . Um número será divisível por 9 quando a soma de seus algarismos for múltiplo de 9.

Divisibilidade por 10 . Um número será divisível por 10 quando terminado em 0.

Divisibilidade por 11 . Um número será divisível por 11 quando a diferença entre os algarismos de ordem ímpar e os de ordem par resultar em um múltiplo de 11.

Divisibilidade por 12 . Um número será divisível por 12 quando for por 3 e 4 ao mesmo tempo.

Divisibilidade por 15 . Um número será divisível por 15 quando for por 3 e 5 ao meso tempo.

Note que, se $n = {p_1}^{\alpha_1}\ .\ {p_2}^{\alpha_2}\ .\ {p_3}^{\alpha_3}\ ....\ {p_m}^{\alpha_m}$ então $p_1, p_2, ..., p_m$. dividem n.
Exemplo: Seja $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ então, ele é divisível por 2, 3 e 5.

Caso deseje encontrar outros primos que não foram citados no texto, podemos utilizar vários métodos, aqui escolhemos o Crivo de Eratóstenes. Este permite encontrar todos os números primos menores que um natural n dado. O método consiste nos seguintes passos: escrever os números de forma ordenada a partir de 2, isto é, $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ..., n$. Imagine, hipoteticamente, que o tal número seja 40, organize os dados em uma tabela e siga as seguintes instruções: elimine de modo sistemático todos os números compostos da tabela, seguindo um roteiro. Risque todos os múltiplos de 2 acima de dois, já que nenhum deles é primo. O segundo número não eliminado é 3, que é primo. Elimine todos os múltiplos de 3 maiores do que 3 pois esses não são primos. O terceiro número não riscado é o 5, que é primo. Retire todos os múltiplos de 5 maiores do que 5 pois esses não são primos. Será necessário repetir esse processo até chegar a 40? Não, basta verificar até $\sqrt{40} \simeq 6,32$, verificaremos até 7. É fácil ver que, os demais números que segue na tabela serão primos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	22	13	14	15	16	17	18	19	20
21	32	23	24	25	26	27	28	29	30
31	42	33	34	35	36	37	38	39	40

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			

Figura 3.1: Crivo de Eratóstenes.

As seguintes afirmações são clássicos e de demonstração simples, mas iremos nos ater apenas aos enunciados; e faremos usos dos mesmos ao longo das atividades.

- Existem mais números primos entre 1 e 100 do que 101 e 200;
- Existem infinitos números primos;
- Os números primos, exceto o número 2, são todos ímpares e se dividem em duas classes: uma composta de múltiplos de 4 menos 1 $(3, 11, 19, etc)$ e outra formada de múltiplos de 4 mais 1 $(5, 13, 17, etc)$.

Atividades

A1) MÁGICA: Fixando um Número

Na brincadeira, o professor pede para algum aluno escrever secretamente um número de três algarismos num pedacinho de papel. Digamos que ele escolha o número 345. Em seguida, pede-se para ele colocar em uma calculadora o número de seis algarismos formado quando se repete o número de três algarismos escolhido. No exemplo mencionado o aluno digitaria 345345.

O professor alega que irá "ler a mente" de modo a indicar operações de divisão, fazendo com que, mais adiante, um dos voluntários chegue ao número que está escrito no papel. Solicita-se então que se passe a calculadora para o segundo voluntário, que este divida o número de seis algarismos por 13, passando- se a calculadora para um terceiro voluntário, que deverá dividir o resultado por 11, e finalmente o último voluntário dividirá ainda o resultado por 7. Nesse instante o professor diz: "chega, já encontramos o número que está no papel!" A surpresa costuma ser geral, ao constatar que o resultado obtido na tela é de fato o que foi escrito no papel, no início da brincadeira.

Por que o truque funciona? Quando o aluno escreve, por exemplo, o número 243 no papel, digitando 243243, observa-se que o valor digitado corresponde a 243 multiplicado por 1001, pois: $243243 = 243000 + 243 = 243 \times 1000 + 243 = 243(1000 + 1) = 243 \times 1001$. Como $13 \times 11 \times 7 = 1001$, quando solicitamos a divisão do número de seis algarismos sucessivamente por 13, 11 e 7, isso equivale a dividir esse número por 1001, e partindo de 243243, o resultado só pode ser 243. A explicação relativa à escolha inicial de um número arbitrário de três algarismos segue os mesmos passos.

A2) JOGO: Bingo dos Divisores

Cartelas

1	2	4	6	9	14
15	16	17	25	28	29
44	45	51	53	80	100

1	2	3	6	8	11
13	16	17	18	19	23
25	31	32	45	47	51

1	3	5	7	11	13
17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	57	59

1	3	4	5	6	9
12	14	16	17	18	20
25	32	51	80	100	120

1	2	3	8	9	11
14	15	17	18	28	29
32	44	45	53	80	100

1	2	3	4	5	6
8	10	12	15	16	24
30	40	48	60	80	120

1	2	3	4	6	8
15	16	17	25	28	30
44	45	47	51	59	80

1	2	4	5	9	11
14	15	16	17	18	30
32	43	44	45	51	100

Lista de números

1	3	5	6	7	11	13	17	18	19	23	25	28	29
31	32	37	41	43	44	45	47	51	53	57	59	100	240

Fonte: Editora Moderna, livro Aribabá 6º ano.

Figura 3.2: Bingo dos Divisores

Material necessário: Uma cartela por grupo. Uma lista com os números que serão sorteados. Papéis ou contas de acordo com a lista de números. **Participantes**: A classe toda dividida em grupos; **Objetivo**: Completar a cartela toda.

Regra: antes de iniciar o jogo, cada grupo deverá escolher uma cartela, que estará apresentada no quadro, e copiá-la em uma folha de papel. Sorteie um número e cante-o para a classe. Cada grupo deverá determiná os divisores dos números cantados e marcá-lo(s). Repita esse procedimento até que algum grupo consiga preencher a cartela toda.

Para Pensar com os alunos. Sugerimos realizar os questionamentos com os estudantes.

1. No primeiro sorteio, existe um número que será marcado por todos os grupos?

2. Existem cartelas que podem ser completadas com o sorteio de apenas um número? Quais e por quê?

3. Que cartela necessita de mais números a serem sorteados para que fique completa?

A3) DESAFIO: **Abrindo e fechando portas**

(OBMEP - 2013) Os 50 primeiros números naturais atravessarão um corredor que contém 50 portas numeradas de 1 a 50, todas elas inicialmente trancadas. O primeiro a atravessar será o número 1, o segundo será o número 2, em seguida o número 3 e assim por diante, até o número 50 que será o último a atravessar. Ao atravessar o corredor, o número n carregará consigo as chaves das portas numeradas com múltiplos de n. Assim, por exemplo, o número 1 carregará as chaves de todas as portas, enquanto que o número 2 carregará somente as chaves das portas com numeração par e o número 25 carregará somente as chaves das portas numeradas com 25 e 50. Durante o seu percurso, cada número usa as chaves que possui para trancar as portas que estiverem abertas e destrancar aquelas que estiverem fechadas.

a) Quais serão as portas destrancadas pelo número 15?

b) Mostre que, depois do número 50 ter percorrido o corredor, a porta de número 10 ficará trancada enquanto que a porta de número 9 ficará destrancada.

c) Depois do número 50 ter percorrido o corredor, quais serão as portas destrancadas?

Plano de ação e observações pedagógicas.

A dinâmica das atividades está abaixo exemplificada através do plano de ação realizado. A nossa sequência transcorreu em quatro momentos que corresponderam a oito aulas.

Momentos	Eventos
1	Mágica: Fixando um número; Contexto histórico: Crivo de Eratóstenes e a importância do primo na criptografia; Fundamentação teórica: T.F.A. e Divisibilidade.
2	Jogo " Bingo dos divisores"/ avaliação Atividade desafio;
3	Roda de discussão sobre os resultados/ avaliação;
4	Atividade 2: Abrindo e fechando portas; Roda de discussão sobre as conclusões/avaliação.

Tabela 3.2: Plano de ação: operações nos Inteiros

Sugestões.

1. Explore a utilização da calculadora, apenas, para a apropriação das regras do jogo, isto é, feito essa adaptação, uma próxima rodada deve realizar-se sem a utilização deste equipamento;

2. Caso sinta necessidade, permita outras rodadas do jogo para efetivação do aprendizado. Neste caso, basta permutar as cartelas.

3. Inicie o problema desafio com um número menor de portas, a estratégia é favorecer a apropriação do algoritmo da solução;

Problemas desafios propostos e suas respectivas soluções segundo a interpretações de alguns estudantes.

1. No primeiro sorteio, existe um número que será marcado por todos os grupos?

2. Existem cartelas que podem ser completadas com o sorteio de apenas um número? Quais e por quê?

3. Que cartela necessita de mais números a serem sorteados para que fique completa?

Resolução do item (1): a resposta foi facilmente encontrada, que é o número 1.
Resolução do item (2): Sim, muitos utilizando o recurso da calculadora, por meio de verificação, concluíram que o número 240 garante o bingo da cartela descrita abaixo. A estratégia da maioria foi começar a verificação pelo maior número.

1	2	3	4	5	6
8	10	12	15	16	24
30	40	48	60	80	120

Os que preferiram fatorar o número 240, perceberam de imediato que o número 17, presente na maioria das cartelas, exceto em uma, não era divisor de 240. Logo ficou rápida a conclusão.

Resolução do item (3): apenas um pequeno grupo percebeu, que seria àquela com maior número de primos sem seus respectivos múltiplos. Segue abaixo a cartela encontrada.

1	3	5	7	11	13
17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	57	59

Abrindo e Fechando portas - Resolução[1]
Resolução do item (a): como os múltiplos de 15 que são menores que 50 são os números 15, 30 e 45, temos que o número 15 carrega apenas as chaves para as portas numeradas com 15, 30 e 45. Vamos analisar cada uma dessas três portas separadamente.

Porta 15: Os divisores de 15 são os números 1, 3, 5 e 15. Assim, esses são os números que modificarão o estado dessa porta. O número 1 vai destrancá-la, enquanto o número 3 vai trancá-la novamente. Em seguida o número 5 vai destrancá-la e finalmente o número 15 vai trancá-la. Concluímos que essa porta não será destrancada pelo número 15. **Porta 30**: os

[1]Resolução segundo o End.: < *https* : //*www.obmep.org.br* > OBMEP – Banco de Questões 2013

divisores de 30 são os números 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 e 30. Assim, o número 15 será o sétimo número a modificar o estado dessa porta. Como a porta começa trancada e sete é um número ímpar, temos que o número 15 irá destrancar essa porta. **Porta 45**: os divisores de 45 são os números 1, 3, 5, 9, 15 e 45. Assim, o número 15 será o quinto número a modificar o estado dessa porta, portanto ele irá destrancá-la. Concluímos assim que o número 15 irá, de fato, destrancar as portas numeradas com o 30 e o 45.

Resolução do item (b): os divisores de 10 são os números 1, 2, 5 e 10 assim, ao atravessarem o corredor, esses são os únicos números que podem trancar ou destrancar a porta de número 10. Segue daí que essa porta terá o seu estado modificado exatamente quatro vezes. Como ela começa trancada, ela acabará também trancada. Os divisores de 9 são os números 1, 3 e 9. Assim a porta de número 9 terá o seu estado modificado exatamente três vezes. Como ela começa trancada, ela acabará destrancada. **Observação**: seja k a numeração de uma das portas. Da solução do item acima, podemos concluir que, se k possui uma quantidade par de divisores, então essa porta acabará trancada. Por outro lado, se k possui uma quantidade ímpar de divisores, então essa porta acabará destrancada.

Resolução do item (c): para cada $k\epsilon\{1, 2, ..., 50\}$ denotemos por $D(k)$ o número de divisores de k. Pelo enunciado do problema sabemos que existem exatamente $D(k)$ números naturais que carregam a chave da porta número k. Decorre daí que a porta número k terá o seu estado alterado exatamente $D(k)$ vezes. Portanto as portas que acabarão abertas serão as portas de número k tais que $D(k)$ é ímpar. Fixemos um k número natural e escrevamos sua decomposição em fatores primos:

$$k = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_m^{\alpha_m}.$$

Qualquer divisor de k deve ser um elemento da forma:

$$k = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \cdots \times p_m^{\beta_m}$$

onde cada β_i é um número inteiro escolhido em $\{0, 1, ..., \alpha_i\}$. Então $D(k)$ é constituído pelos números dessa forma.

Note que, a cada escolha dos expoentes $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$, corresponde um único elemento de $D(K)$, ou seja, um único divisor de k. Podemos contar então o número de maneiras de se escolherem expoentes $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m,$. Mas como cada β_i deve pertencer ao conjunto $\{0, 1, ..., \alpha_i\}$, temos que a quantidade total de escolhas para o valor de β_i é igual a $\alpha_i + 1$. Logo, existem

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_m + 1)$$

escolhas para os valores dos expoentes β_1, $\beta_2, ...,$ β_m, e, como consequência,

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_m + 1)$$

divisores do número k. Para que k tenha uma quantidade ímpar de divisores, é suficiente e necessário que cada um dos fatores $\alpha_i + 1$ seja um número ímpar, ou seja, que α_i seja par. Isso mostra que k possui um número ímpar de divisores se, e somente se, k é um quadrado perfeito. Portanto as portas que ficam abertas são precisamente aquelas com números: 1, 4, 9, 16, 25, 36 e 49.

3.2 Operações com os Racionais

Um Pouco de História.

O surgimento dos números racionais está associado à noção de medidas. Medir significa "comparar duas grandezas do mesmo tipo": dois comprimentos, duas áreas, duas massas etc. O conjunto dos números racionais herdam os números inteiros e suas as propriedades, e pode ser escrito em forma de fração, isto é, da forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$. Para representar o conjunto dos racionais, utilizamos a letra $\mathbb{Q}$, além dos inteiros as dizimas periódicas e decimais são números racionais. É sabido ainda que entre dois racionais diferentes existem infinitos racionais e negamos as propriedades de um número racional quando sua escrita decimal é infinita e não periódica[2].

Breve resumo da parte Teórica do conteúdo

Observe que as propriedades que acompanham as operações com frações e decimais são cruciais, para o entendimento na realização das atividades propostas neste módulo. Nossa sugestão é revisitar com os estudantes, a transformação de números decimais em fração e consultar a tabela 3.3 com alguns exemplos. Fica disponível ao professor a tabela 3.5 que explicita as propriedades das potências de dez.

[2]Disponível em: $< http://webeduc.mec.gov.br/portaldoprofessor/matematica/ >$

Operações	Propriedades	Exemplos
Número decimal	$a,bcde = \frac{abcde}{10000}$	A potencia de 10 corresponde ao nº de casas decimais.
Soma e Subtração	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a.d \pm c.b}{b.d}$	$\frac{2}{3} \pm \frac{7}{2} = \frac{7.3 \pm 2.2}{2.3} = \frac{21 \pm 4}{6}$
Multiplicação	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a.b}{c.d}$	$\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{3.4}{5.7} = \frac{28}{35}$
Divisão	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}$	$\frac{3}{4} \div \frac{5}{2} = \frac{3.2}{4.5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$
Potenciação	$(\frac{a^p}{b^q})^n = \frac{a^{p.n}}{b^{q.n}}$	$(\frac{2}{3})^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$
Radiciação	$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$	$\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2}$

Tabela 3.3: Operações com frações

Atividades

A1) MÁGICA: Um Número Esperto

A mágica aqui proposta, foi retirada do livro: Mágicas Matemáticas e outro mistérios, dos autores SAMPAIO, João Carlos Vieira, MALAGUTTI, Pedro Luiz Aparecido. cuja referência está em nossa bibliografia.

O mágico professor solicita um voluntário para participar da brincadeira, dizendo que vai adivinhar um número inteiro pensado por ele, de 40 a 99. Pede a essa pessoa que anote o número pensado em uma folha de papel. Pede-lhe ainda, para escrever, abaixo de seu número, o número 85 (este pode ser mudado cada vez que a brincadeira é repetida, ele é o "número esperto").

O mágico pede então, ao voluntário, para somar os dois números e manter a soma em segredo. O número esperto deve ser de tamanho que possibilite uma soma maior que 100. Suponhamos, por exemplo que o espectador voluntário tenha escolhido o número 45. Ele fará os cálculos descritos abaixo.

45	número do voluntário
85	número esperto
130	soma obtida

Em seguida, pede que o voluntário risque, na soma obtida, o algarismo das centenas, ficando com um número de dois algarismos apenas. Pede-lhe, posteriormente, que escreva o algarismo das centenas, que foi suprimido, abaixo do número resultante de dois algarismo e faça a soma desses dois últimos números.

No nosso exemplo, o resultado final seria 31. O mágico pede ao voluntário que diga o resultado final. Ouvida a resposta, o mágico revela ao voluntário o número pensado por ele. $45+85 = 130 \rightarrow$(elimina o número das centenas) $= 30+1$ (acrescentamos o algarismo das unidades) $= 31$

Porque o truque funciona? A supressão do dígito 1 subtrai 100 do número 130, deixando 30 como diferença. A adição do dígito 1 a essa diferença produz o efeito de subtrair 99 do número 130. De fato,

$$\boxed{30 + 1 = 130 - 100 + 1 = 130 - 99}$$

Como 130 é a soma do número pensado(pela pessoa que participa da brincadeira) com o número "esperto", basta acrescentar, ao resultado final, um número que complete 99 quando somado ao número esperto. No exemplo, o número pensado pela pessoa foi 45, e o número esperto utilizado pelo mágico foi 85. A pessoa calculará $45 + 85 = 130$. Após o cálculo intermediário (supressão do dígito das centenas, transferência desse digito para baixo do número resultante e subsequente adição), ocorre um decréscimo de 99 em relação ao número 130. Para resgatar o número pensado, o mágico soma (mentalmente) 14 ao número 31 e obtém 45, o número escolhido em pensamento pela pessoa. O número 14 é estrategicamente tomado, pois $14+85 = 99$. Assim, nesta última adição mental, o mágico completa o acréscimo do 99 que foi subtraído.

A2.1) JOGO: Contig 60 [3]

0	1	2	3	4	5	6	7
27	28	29	30	31	32	33	8
26	54	55	60	64	66	34	9
25	50	120	125	144	72	35	10
24	48	108	180	150	75	36	11
23	45	100	96	90	80	37	12
22	44	42	41	40	39	38	13
21	20	19	18	17	16	15	14

Figura 3.3: Cartela Contig 60.

[3] Disponível em: < *http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=52* >.

Regras: os jogadores decidem qual dupla inicia o jogo, cada dupla começa o jogo com 60 pontos. As duplas jogam alternativamente. Na sua vez de jogar, a dupla joga os três dados e constrói uma sentença numérica usando uma ou duas operações diferentes com os obtido nos dados. Por exemplo, com os números 2, 3 e 4 construir $(2 + 3) \times 4 = 20$. A dupla, neste caso cobrirá o espaço marcado com o 20 usando um marcador de sua cor. Só é permitido utilizar as quatro operações básicas.

Contagem de pontos: um ponto é ganho quando se coloca um marcador num espaço desocupado que seja vizinho a um espaço que já tenha outro marcador (horizontalmente, verticalmente ou diagonalmente); a dupla subtrai de 60 (marcação inicial) o ponto ganho. Colocando-se outro marcador num espaço vizinho, junto a um espaço já ocupado, mais pontos poderão ser ganhos; por exemplo, (veja o tabuleiro) se os espaços 0, 1 e 27 estiverem ocupados, a dupla ganharia 3 pontos colocando um marcador no espaço 28. A cor dos marcadores dos espaços ocupados não importa para essa contagem. Os pontos obtidos numa jogada são subtraídos total de pontos da dupla.

Se um jogador construir uma sentença errada, o adversário pode acusar o erro, ganhando com isso dois pontos, a serem subtraídos do seu total; aquele que errou reitera seu marcador do tabuleiro e corrige seu total de pontos, caso já tenha efetuado a subtração. Se uma dupla passar sua jogada, por acreditar que não é possível fazer uma sentença numérica com aqueles valores dos dados e, se a dupla adversária achar que é possível fazer uma sentença com os dados jogados pelos colegas, ela pode fazê-la, antes de fazer sua própria jogada. Se estiver correta, a dupla que fez a sentença ganhará o dobro do número de pontos correspondentes e em seguida poderá fazer sua própria jogada.

O jogo termina quando uma das duplas conseguir colocar 5 marcadores da mesma cor, em linha reta, sem nenhum marcador do adversário intercalado. Essa linha poderá ser horizontal, vertical ou diagonal. O jogo também acaba se acabarem os marcadores de uma das duplas. Nesse caso a dupla vencedora será aquela que tiver o menor número de pontos.

A2.2) JOGO: Labirinto

Número de participantes: 2; material necessário: um tabuleiro, de acordo a figura 2.4, um marcador com um peão de xadrez ou um grão de feijão e uma folha para cada jogador registrar seus cálculos.

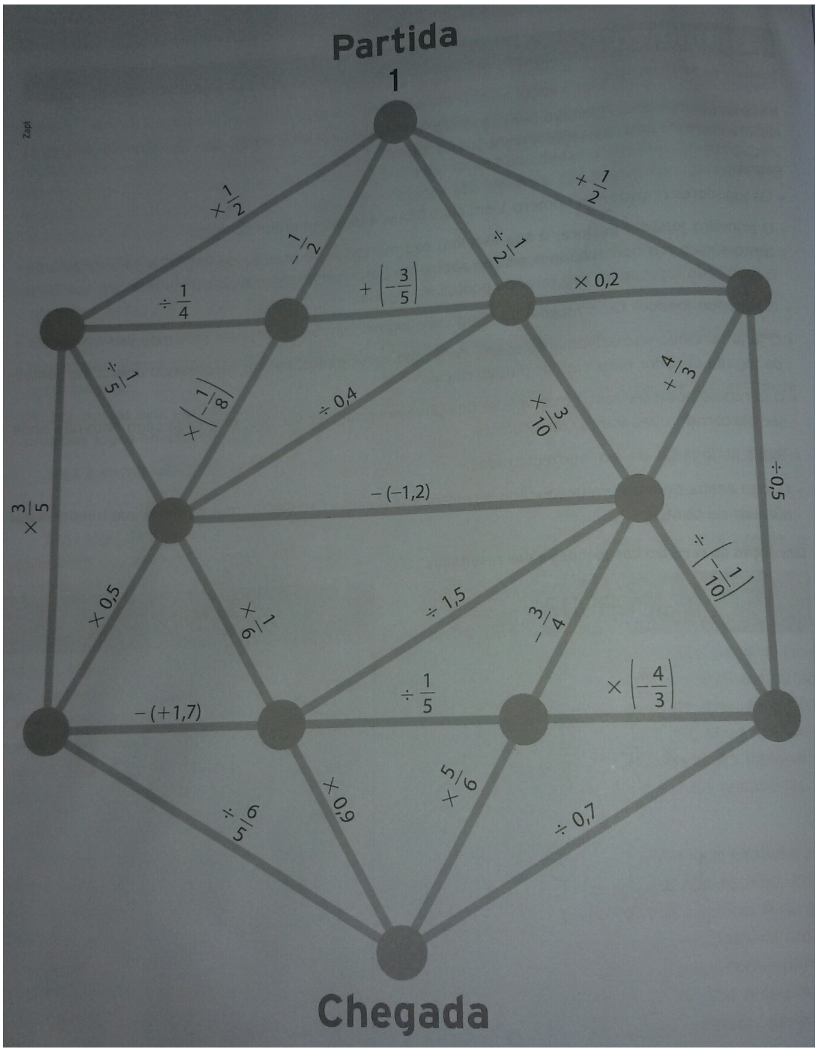


Figura 3.4: Labirinto com Número Racionais.

Coleção Matemática do Ensino Médio da editora Saraiva vol. 1

Regras: os jogadores registram o número 1 em suas folhas e decidem quem começa. O primeiro jogador desloca, à sua escolha, seu marcador da posição de Partida para outra adjacente e efetua a operação indicada no segmento percorrido, registrando o resultado em sua folha. O resultado representa seu total de pontos na jogada. O segundo jogador faz o mesmo, iniciando sua jogada com o valor 1, mas movendo seu marcador. O jogo continua sucessivamente assim, com cada participante, na sua vez, usando o valor de pontos da jogada anterior para efetuar o novo cálculo. O percurso pode ser feito em qualquer direção e em qualquer sentido, mas cada segmento não pode ser percorrido duas vezes consecutivas. Todas as jogadas devem ser registradas. O jogo acaba quando um dos jogadores alcançar a posição CHEGADA, mas ganha o que tiver o maior número de pontos.

A3) DESAFIO: Resolvendo o Problema da Calculadora

1. (OBMEP 2012) Uma calculadora esquisita tem apenas as teclas numéricas de 0 a 9 e duas teclas especiais A e B. Quando a tecla A é apertada, o número que aparece no visor é elevado ao quadrado; quando a tecla B é apertada, soma-se 3 ao número que aparece no visor. Nessa calculadora é possível obter 22 a partir do 1 apertando as teclas A e B na ordem BABB, como ilustrado abaixo:

$$1 \overset{B}{\to} 4 \overset{A}{\to} 16 \overset{B}{\to} 19 \overset{B}{\to} 22$$

   (a) Com o 3 inicialmente no visor, qual o número que vai aparecer depois de apertar as teclas A e B na ordem BBAB?

   (b) Mostre como obter 55 a partir do 1 usando as teclas A e B.

   (c) Explique porque não é possível obter 54 a partir do 2 usando as teclas A e B.

Plano de ação e observações pedagógicas.

O plano de ação abaixo transcreve a aplicação das atividades vivenciadas com os nossos estudantes. Esta sequência, demandou um mês e apontou a necessidade do reensino das operações básicas para as duas turmas.

Momentos	Eventos
1	Mágica: Um número esperto; Fundamentação teórica: operações nos racionais;
2	Jogo: Contig 60 / avaliação.
3	Jogo: Labirinto / avaliação.
4	Desafio: Resolvendo o problema da calculadora.

Tabela 3.4: Plano de ação: operações nos racionais

Sugestões:

1. Repita a matemágica e os jogos, para efetivação da aprendizagem;

2. Destaque alunos auxiliares para as atividades em grupo;

3. É possível explorar o jogo "Labirinto"estabelecendo metas, como valores fixos, para estimular estratégias de resolução, identificando o caminho mais eficiente. Exemplo: o professor conhecendo os possíveis resultados, e dentro dessas possibilidades, solicita a meta de obter um valor realizável, qual a estratégia, o caminho escolhido?

4. Apresente apenas um problema desafio por encontro.

Problemas desafios propostos e suas respectivas soluções segundo a interpretações de alguns estudantes.

Resolvendo o Problema de Calculadora- Nela, as soluções apresentadas foram verificadas de modo empírico, não houve uma generalização, apenas constatação.

Resolução do item (a): BBAB.

$$3 \xrightarrow[+3]{B} 6 \xrightarrow[+3]{B} 9 \xrightarrow[(9)^2]{A} 81 \xrightarrow[+3]{B} 84$$

Resolução do item (b): BBABB

$$1 \xrightarrow[+3]{B} 4 \xrightarrow[+3]{B} 7 \xrightarrow[(7)^2]{A} 49 \xrightarrow[+3]{B} 52 \xrightarrow[+3]{B} 55$$

Resolução do item (c): das três situações apresentadas, a primeira delas foi descartada, por semelhança no item (b), BBABB. Não foram apresentadas as situações (ABBBBBBBBBBBBBBBBB), (ABABB) e (AABBBBBBBBBBBBBB). Pelas apresentadas concluíram que não era possível partir de 2 e chegar a 54 utilizando apenas as teclas A e B.

$$2 \xrightarrow[(2)^2]{A} 4 \xrightarrow[+3]{B} 7 \xrightarrow[(7)^2]{A} 49 \xrightarrow[+3]{B} 52 \xrightarrow[+3]{B} 55$$

$$2 \xrightarrow[+3]{B} 5 \xrightarrow[(5)^2]{A} 25 \xrightarrow[+3]{B} 28 \quad \{\text{ B por 8 vezes}\} \quad 52 \xrightarrow[+3]{B} 55$$

$$2 \xrightarrow[+3]{B} 5 \xrightarrow[+3]{B} 8 \xrightarrow[+3]{B} \quad \{\text{ B por 31 vezes}\} \quad \xrightarrow[+3]{B} 53 \xrightarrow[+3]{B} 56$$

Dentre as sugestões do caderno da OBMEP, os itens (a) e (b), foram realizados de maneira idêntica, para o item (c) acrescentaremos mais uma resolução, de acordo com a solução 3, do caderno 2012.
Vamos chegar a 54 a partir do 2. Como 54 não é múltiplo de 3, vemos que não é possível usar apenas a tecla B, ou seja, a tecla A deve ser usada pelo menos uma vez. Por outro lado, a tecla A só pode ser usada em números menores ou igual a 7. Os números obtidos a partir do 2 que são menores ou iguais a 7 são 2, $4 = 2^2$, $5 = 2 + 3$ e $7 = 2^2 + 3$; seus quadrados são 4, 16, 25, 49. A partir de 16, 25 e 49 não podemos usar a tecla A outra vez, e como nenhum desses números difere de 54 por um múltiplo de 3, vemos que a partir deles não é possível obter 54 a partir do 2.

3.3 Notação Científica

Para introduzir o conteúdo notação científica de forma lúdica e eficiente apresentaremos o vídeo [4] "A imensidão do Macro e do Micro". Neste vídeo destacamos a funcionalidade de se compreender a releitura de números ora muito grande e ora muito pequeno em notação científica. Seguidamente, abordamos um pouco de história breve resumo de conteúdo, jogo e desafio.

Um Pouco de História

A primeira tentativa conhecida de representar números demasiadamente extensos foi empreendida pelo matemático e filósofo grego Arquimedes, e descrita em sua obra O Contador de Areia, no século III a.C. Ele desenvolveu um método de representação numérica para estimar quantos grãos de areia existiam no universo. O número estimado por ele foi de 1×10^{63} grãos.

Foi através da notação científica que foi concebido o modelo de representação de números reais através de ponto flutuante. Ponto flutuante é o modo como o computador representa números reais. Por exemplo, o número 31,267 é representado na notação científica como $3,1267 \times 10^1$. Essa ideia foi proposta independentemente por Leonardo Torres e Quevedo

[4]Disponibilizado no endereço $< http://www.youtube.com/watch?v = Fklq07Svm9c >$.

(1914), Konrad Zuse (1936) e George Robert Stibitz (1939). A codificação em ponto flutuante dos computadores atuais é basicamente uma notação científica de base 2.

A programação com o uso de números em notação científica consagrou uma representação sem números sobrescritos, em que a letra e (ou E) separa a mantissa do expoente. Assim, $1,785 \times 10^5$ e $2,36 \times 10^{-14}$ são representados respectivamente por $1.785E5$ e $2.36E - 14$ (como a maioria das linguagens de programação são baseadas na língua inglesa, as vírgulas são substituídas por pontos)[5].

Breve Resumo da parte teórica do Conteúdo

Notação científica, é a releitura de números demasiadamente grandes (100000000000000) ou pequenos (0,0000000000001) na forma exponencial, para escreve-los, basta transforma-los no produto de um número maior que 1 e menor que 10 multiplicado por uma potência de 10 com expoente inteiro.

4 Exemplo. *1. O coração de um jovem bate cerca de 115200 vezes por ano, isto é,* $1,152 \times 10^5$. *2. A massa de um próton é, aproximadamente, 0,0000000000000000000000000197 gramas. Em notação científica escrevemos* $1,97 \times 10^{-27}$.

Na prática sempre que um número for muito pequeno, ao reescreve-lo em notação científica, precisamos deslocar a vírgula para direita uma quantidade casas decimais necessárias para tornar o número maior que 1 e menor que 10, seguidamente multiplicar pela potência de 10 com expoente negativo, sendo este o tal número que represente o deslocamento. Diferentemente se o número for muito grande, a vírgula deve ser deslocada para a esquerda e o expoente deve ser positivo. Isso acontece porque podemos multiplicar qualquer número por 1, desta forma, reescreveremos os números citados anteriormente, a fim de interpretar o movimento da vírgula comentada anteriormente.

$$115200 = \frac{115200 \times 100000}{100000} = 1,152 \times 100000 = 1,152 \times 10^5$$

Podemos proceder de maneira análoga, para os números decimais.

$$0,0000000000000000000000000197 = \frac{1,97}{100000000000000000000000000} = \frac{1,97}{10^{26}}$$

$$\frac{1,97}{10^{26}} = \frac{1,97}{10^{26}} \times \frac{10^{-26}}{10^{-26}} = 1,97 \times 10^{-26}$$

[5]Disponível em: Fonte: $< https://pt.wikipedia.org/wiki/Nota >$ acessado em outubro de 2016.

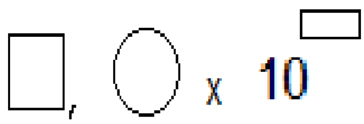
Operações	Propriedades	Exemplos
Soma	$(a.10^n) + (b.10^n) = c.10^n$ $c = a + b$	$3,2.10^3 + 5,1.10_3 = 8,3.10^3$ $(3,2 + 5,1) = 8,3$
Subtração	$(a.10^n) - (b.10^n) = c.10^n$ $c = a - b$	$5,1.10^3 - 3,2.10^3 = 1,9.10^3$ $(5,1 - 3,2) = 1,9$
Multiplicação	$= (a.10^n) \times (b.10^m) = c.10^p$ $c = a.b$ e $p = n + m$	$2,1.10^4 \times 1,2.10^3 = 5,292.10^7$ $(2,1 \times 1,2 = 5,292)$ e $3 + 4 = 7$
Divisão	$(a.10^n) \div (b.10^m) = c.10^p$ $c = a \div b$ e $p = n - m$	$2,1.10^4 \div 1,2.10^3 = 1,75.10^1$ $(2,1 \div 1,2 = 1,75)$ e $4 - 3 = 1$
Potenciação	$(a.10^n)^m = b.10^p$ $b = a^m$ e $p = n.m$	$(3.10^2)^3 = 27.10^6$ $3^3 = 27$ e $2.3 = 6$
Radiciação	$\sqrt[m]{a.10^n} = b.10^p$ $b = \sqrt[m]{a}$ e $p = n \div m$	$\sqrt[3]{8.10^6} = 2.10^2$ $\sqrt[3]{8} = 2$ e $6 \div 3 = 2$

Tabela 3.5: Algumas propriedades de potenciação

Observe que as propriedades da potenciação são cruciais, para o entendimento da manipulação da vírgula na escrita científica. Por isto, apresentaremos em uma tabela, que segue, algumas propriedades de potenciação.

Atividades

A2) JOGO: Scino



Número de participantes : 2 ou 3. Material necessário: Um tabuleiro, três dados marcadores diferentes para cada jogador (com fichas de cores diferentes ou sinais tipo X, O e V e uma folha de papel para cada jogador registrar sua jogada.

Regras: Os jogadores decidem a ordem que cada um jogará. Na sua vez, cada jogador lança os três dados e usa para substituir cada um dos símbolos no registro a seguir.

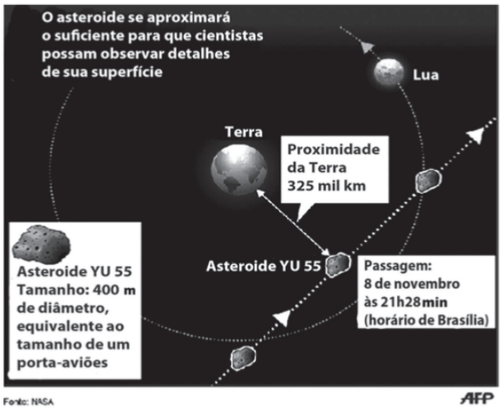
Em seguida, registra sua jogada, calcula o resultado e coloca uma de suas marcas no tabuleiro, na casa cujo intervalo corresponde ao valor obtido, anotando em sua folha de cálculo a letra nela marcada.
Por exemplo: Se no dados saíram os números 1, 3 e 6, o jogador poderá fazer:
$3,6 \times 10^1$ marca a letra A
ou $1,6 \times 10^3$ marca a letra E
ou $3,1 \times 10^6$ marca a letra L

O jogo prossegue dessa forma sem que uma casa do tabuleiro ocupada por um jogador possa também ser ocupada por outro. Se todas as casas possíveis com os números tirados por um jogador já estiverem ocupadas, ele perde a vez. Ganha o jogo aquele que em primeiro lugar alinhar três de suas marcas na horizontal ou na vertical, sem nenhuma marca de seu(s) oponente(s) intercalada.

A Entre 1 e 50	B entre 51 e 100	C Entre 101 e 500	D entre 501 e 1000
E Entre 101 e 5000	F Entre 5001 e 10000	G Entre 10001 e 50000	H Entre 50001 e 100 000
I Entre 100001 e 500000	J Entre 500001 e 1000000	K Entre 1000001 e 5000000	L Entre 5000001 e 10000000

A3) DESAFIO:

1. (Enem 2012) A Agência Espacial Norte Americana (NASA) informou que o asteroide YU 55 cruzou o espaço entre a Terra e a Lua no mês de novembro de 2011. A ilustração a seguir sugere que o asteroide percorreu sua trajetória no mesmo plano que contém a órbita descrita pela Lua em torno da Terra. Na figura, está indicada a proximidade do asteroide em relação à Terra, ou seja, a menor distância que ele passou da superfície terrestre.



Com base nessas informações, a menor distância que o asteroide YU 55 passou da superfície da Terra é igual a:

(a) $3,25 \times 10^2$km.

(b) $3,25 \times 10^3$km.

(c) $3,25 \times 10^4$km.

(d) $3,25 \times 10^5$km.

(e) $3,25 \times 10^6$km.

Plano de ação e observações pedagógicas.

Segue o plano de ação realizado por um período de três semanas. Nesta sequência foi possível solicitar aos próprios estudantes , após a apropriação do assunto, que descrevam as variações possíveis do jogo como uma atividade desafio.

Momentos	Eventos
1	Vídeo: A imensidão do macro e do micro; Fundamentação teórica: Notação científica.
2	Contexto histórico: Números flutuantes; Jogo: Scino / avaliação.
3	Desafio: Enem 2012 - Notação científica/ avaliação;

Tabela 3.6: Plano de ação: Notação científica.

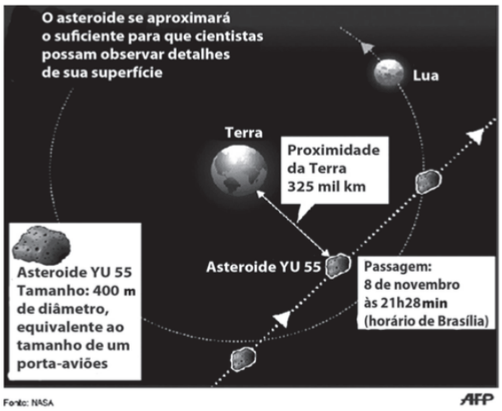
Sugestões:

1. Considere a utilização da calculadora para ratificar as operações desenvolvidas na fundamentação teórica;

2. Incie a aula com a pergunta "o que são números flutuantes?"Permita, a quem tiver acesso, a utilização da internet para pesquisa.

3. O jogo "Scino"pode sofrer variações, a dica é tornar os números menores que zero, para isto, basta introduzir o sinal negativo na expressão que define a lei matemática da jogada. Exemplo: Se os dados saíram os números 1, 3 e 6, o jogador poderá fazer: 3,6 $\times 10^{-1}$. Neste caso, deve-se modificar a tabela.

Problema desafio proposto e sua respectiva solução, segundo a interpretações de alguns estudantes.



Com base nessas informações, a menor distância que o asteroide YU 55 passou da superfície da Terra é igual a?

A solução apresentada pela maioria dos estudantes, recorreu apenas a manipulação da vírgula, sem o uso das propriedades que o justificasse. Isto é, 325 mil km = 325000 km = $3,25 \times 10^5$. Resposta "d".

3.4 Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e Máximo Divisor Comum (MDC)

Nesta seção, apresentaremos um breve resumo de conteúdos com definições propriedades e teoremas, nos limitando apenas à demonstração de teoremas. A utilização do mínimo múltiplo comum (MMC) e do máximo divisor comum (MDC) está ligado aos cálculos envolvendo múltiplos e divisores de um número natural. Esses conteúdos são utilizados na resolução de situações cotidianas, as quais serão demonstradas nas explicações posteriores.

Um Pouco de História

A história relata que o mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum não se tornaram protagonista dos grandes feitos arquitetônico ou mesmo comercial, porém foram a base para o desenvolvimento dos grandes centros urbanos de antigamente. Antes das civilizações Mesopotâmicas ou Egípcias não temos registros de grandes descobertas ou mesmo desenvolvimento matemático relevante, exceto pelos assentamentos simples de contagem.

Mesmo discretamente, é fácil perceber que, por exemplo, considerando o pressuposto das divisões de colheitas, entre outras divisões de bens comercias que compunha o universo econômico babilônico, elucida-se que, apesar de não registrado, os Babilônios realizavam operações de comparação entre divisores de dois ou mais números e, desta forma, fincavam mais uma base para a conceituação do Máximo Divisor Comum de dois números ou duas grandezas.

No contexto egípcio, que também foi uma referência arquitetônica pela construção das grandes pirâmides. Muitos registros de problemas matemáticos elaborados e resolvidos pelos egípcios chegaram aos dias de hoje através dos papiros escritos em hieróglifos. A ideia de múltiplos e divisores aparece com alguma frequência dentro de muitos dos problemas.

Não diferente de antigamente, o mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum sustentam toda uma estrutura lógica da proporção e relação entre grandezas, o primeiro a definir como nós os concebemos hoje, foi o grego Euclides de Alexandria. Em sua coleção de treze volumes,“ os elementos de geometria”, elaborado de proposições matemáticas sobre geometria e algumas de ordem aritmética. Por muito tempo utilizados como livro texto no ensino da matemática e considerado um dos mais lidos e editados também.

Breve Resumo da parte Teórica do conteúdo

1 Definição. *Sejam a e b inteiros. Dizemos que a divide b se existe um inteiro q tal que $b = a \cdot q$. Também usaremos a frase a é divisor de b ou b é múltiplo de a para significar esta situação.*

Usaremos a notação $a|b$ para representar todas as frases equivalentes ditas na definição acima. Se a não for divisor de b, então escreveremos $a \nmid b$.

5 Exemplo. $3|15$ *pois* $15 = 3 \cdot 5$. *Por outro lado* $3 \nmid 8$ *pois considerando o conjunto* $M = \{3m, m \in \mathbb{N}\} = \{3, 6, 9, ...\}$, *dos múltiplos de 3, vemos que 8 não pertence ao mesmo.*

3.4.1 Proposição. . *Sejam a, b e c números inteiros. Então*

a) *se $a|b$ e $b|c$ então $a|c$;*

b) *se $a|b$ e $a|c$ então $a|(a+b)$ e $a|(b-c)$;*

c) *se a e b são positivos e $a|b$ então $0 < a \leq b$;*

d) *Se $a|b$ e $b|a$ então $a = b$ ou $a = -b$.*

Dois números inteiros, a e b, se relacionam de acordo com o seguinte teorema.

3.4.2 Teorema (Divisão Euclidiana)**.** *Dados dois inteiros a e b, sendo a positivo, existem únicos inteiros q e r tais que*

$$b \ = \ aq \ + \ r, \ 0 \ \leq r \ < \ a.$$

Se $a \nmid b$, então r satisfaz a desigualdade estrita $0 < r < a$.

Demonstração. Suponha que $b > a$ e considere, enquanto fizer sentido nos naturais, os números

$$b, \ b-a, \ b-2\cdot a, \ ..., \ b - \cdot n.a, \ ...$$

Pela Propriedade da Boa Ordem, o conjunto S formado pelos elementos acima tem um menor elemento $r = b - q \cdot a$. Vamos provar que r tem a propriedade requerida, ou seja, que $r < a$. Se $a|b$, então $r = 0$ e nada mais temos a provar. Se, por outro lado, $a \nmid b$, então $r \neq a$, e, portanto, basta mostrar que não pode ocorrer $r > a$. De fato, se isto ocorresse, existiria um número natural $c < r$ tal que $r = c + a$. Consequentemente, sendo $r = c + a = b - q \cdot a$, teríamos $c = b - (q+1) \cdot a \in S$, com $c < r$, contradição com o fato de r ser o menor elemento de S. Portanto, temos que $b = a \cdot q + r$ com $r < a$, o que prova a existência de q e r.

Agora, vamos provar a unicidade. Note que, dados dois elementos distintos de S, a diferença entre o maior e o menor desses elementos, sendo um múltiplo de a, é pelo menos a. Logo, se $r = b - a \cdot q$ e $r' = b - a \cdot q'$, com $r < r' < a$, teríamos $r' - r \geq a$, o que acarretaria $r' \geq r + a \geq a$, absurdo. Portanto, $r = r'$ Daí segue-se que $b - a \cdot q = b - a \cdot q'$, o que implica que $a \cdot q = a \cdot q'$ e, portanto, $q = q'$. □

Nas condições do teorema acima, os números q e r são chamados, respectivamente, de quociente e de resto da divisão de b por a. Note que o resto da divisão de b por a é zero se, e somente se, a divide b.

2 Definição (Máximo Divisor Comum)**.** *Sejam a e b inteiros diferentes de zero. O máximo Divisor Comum, resumidamente mdc, entre a e b é o número d que satisfaz as seguintes condições:*
(a) *d é um divisor de a e b, isto é, $d|a$ e $d|b$;*
(b) *d é o maior natural com a propriedade **(a)**.*

Neste caso, denotamos o *mdc* entre a e b por $d = mdc(a, b)$ ou por $d = (a, b)$. Se $(a, b) = 1$, então dizemos que a e b são primos entre si.

6 Exemplo. *Observando que* $14 = 2 \cdot 7$, $21 = 3 \cdot 7$ *temos que* $mdc(14, 21) = 7$. *Por outro lado,* $mdc(5, 14) = 1$, *logo são primos entre si.*

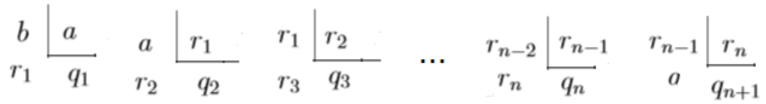
Outra forma de discernirmos o mdc é pelo método da fatoração, isto é,dispomos os números e separadamente efetuamos divisões sucessivas por números primos, reescrevendo-os como produto de fatores primos poderemos usar a seguinte relação: considere os números a, b, c, ..., z. O mdc(a, b, c, ... , z) será o produto dos fatores primos comuns aos números de menor expoentes.

7 Exemplo. *O mdc(24,30) utilizando o método da fatoração teremos:*
$24 = 2^3 \times 3$
$30 = 2 \times 3 \times 5$
$mdc(24, 30) = 2 \times 3 = 6$

Obs.: Se achar conveniente efetue as divisões sucessivas simultaneamente, considerando apenas os fatores comum às divisões.

$$\begin{array}{rr|l} 24, & 30 & 2 \\ 12, & 15 & 3 \\ 4, & 5 & 6 \end{array}$$

Uma terceira forma de interpretar o mdc é pelo método de Euclides: **método das divisões sucessivas**



$$mdc(a, b) = mdc(a, r_1) = mdc(r_1, r_2) = \cdots = mdc(r_n, 0) = r_n$$

	q_1	
b	a	
r_1		

	q_1	q_2	
b	a	r_1	
r_1	r_2		

	q_1	q_2	q_3	
b	a	r_1	r_2	
r_1	r_2	r_3		

Prosseguindo, enquanto for possível, teremos:

	q_1	q_2	q_3	...	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}
b	a	r_1	r_2	...	r_{n-2}	r_{n-1}	$r_n = (a, b)$
r_1	r_2	r_3	r_4	...	r_n		

Considere os números a e b. Vejamos agora algumas propriedades mais importantes dos divisores comuns de dois termos.

3.4.3 Proposição. *Sejam a, b, $c \in \mathbb{Z}$ e $d, \lambda \in \mathbb{N}$, Então vale as seguintes afirmações:*

(a) *Se a é múltiplo de b , então $(a, b) = b$*

(b) *Se $a = bq + r, r \neq 0$, então o conjunto dos divisores comuns dos números a e b coincide com o conjunto dos divisores comuns dos números r e b. Particularmente, $(a, b) = (r, b)$.*

(c) $(\lambda \cdot a, \lambda \cdot b) = \lambda \cdot (a, b)$

(d) *Se $d|a$ e $d|b$, então $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = \frac{1}{d}(a, b)$. Consequentemente, $(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}) = 1$*

(e) *Se $(a, b) = (b, c) = 1$, então $(ab, c) = 1$.*

(f) *Se $c|ab$ e $(a, b) = 1$, então $c|a$.*

8 Exemplo. *Achar o máximo divisor comum dos números 471 e 1.176.*
Solução:

$$1176 = 471 \cdot 2 + 234$$
$$471 = 234 \cdot 2 + 3,$$
$$234 = 78 \cdot 3,$$

Então o $mdc(471, 1176) = 3$.

3 Definição (Mínimo Múltiplo Comum)**.** *Sejam a e b inteiros diferentes de zero. O mínimo múltiplo comum, resumidamente mmc, entre a e b é o inteiro positivo m que satisfaz as seguintes condições:*
(a) *m é um múltiplo comum de a e b, isto é,* $a|m$ *e* $b|m$*;*
(b) *m é o menor inteiro positivo com a propriedade* ***(a)****.*
Neste caso, denotamos o mmc entre a e b por $m = mmc(a, b)$ *ou por* $m = [a, b]$*.*

O mínimo múltiplo comum de dois ou mais números, isto é, o MMC, quando fatorados, é o produto dos fatores,comuns e não-comuns a eles, cada um elevado ao maior expoente

9 Exemplo. *O MMC (26.18.30) = 1170*
pois:
$26 = 2 \times 13$
$18 = 2 \times 3^2$
$30 = 2 \times 3 \times 5$
$MMC(26, 18, 30) = 2 \times 5 \times 3^2 \times 13 = 1170$

Se preferir podemos efetuar a decomposição de forma simultânea, neste caso o produto dos fatores primos que obtemos nessa decomposição é o MMC desses números. ainda considerando o exemplo acima faremos:

$$\begin{array}{c|l} 18,\ 26,\ 30 & 2 \\ 9,\ 13,\ 15 & 3 \\ 3,\ 13,\ 5 & 3 \\ 1,\ 13,\ 5 & 5 \\ 1,\ 13,\ 1 & 13 \\ 1,\ 1,\ 1 & \\ & 2 \times 3^2 \times 5 \times 13 = 1170 \end{array}$$

A seguir algumas propriedades importantes do *mmc* de dois termos.

3.4.4 Proposição. *Sejam* a, b *e* $c \in \mathbb{Z}$ *e* $\lambda \in \mathbb{Z}$. *Então valem as seguintes afirmações:*
(a) *Se* c *é múltiplo comum de* a *e* b, *então* $[a, b]|c$
(b) $[\lambda \cdot a, \lambda \cdot b] = \lambda \cdot [a, b]$;
(c) $|ab| = [a, b] \cdot (a, b)$.

10 Exemplo. *Dois amigos passeiam de bicicleta, na mesma direção, em torno a uma pista circular, Para dar uma volta completa um deles demora 10 minutos e outro demora 12 minutos. Eles partem juntos e combinam interromper o passeio quando os dois se encontrarem pela primeira vez no ponto de partida. Quantas voltas deu cada um?*

Solução: *Denotemos por* n_1 *e* n_2, *respectivamente, o número de voltas que dá cada um dos amigos. Notemos que o tempo total da corrida é o menor valor positivo de* T *que satisfaz as igualdades*
$T = 10n_1 = 12n_2$, *ou seja,*
$T = [10, 12] = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60$
Por tanto, $n_1 = 6$ *e* $n_2 = 5$;

Tome nota. A relação entre o MMC e MDC é dada por:

$$\boxed{\text{MMC (a,b) x MDC (a,b) = —a . b—}}$$

Atividades.

A1) MÁGICA: Cálculo Geométrico do MDC e MMC.

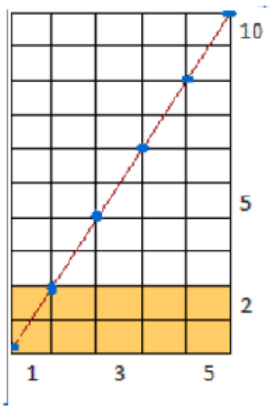
A mágica aqui proposta é uma adaptação do cálculo geométrico do MDC e MMC por Marcelo Rigonatto Polezzi especialista em Estatística e Modelagem Matemática, sua aplicação é possível apenas para dois valores por vez e limitados às medidas do papel quadriculado. Nossa sugestão, é que seja realizada a atividade sobre papel quadriculado de escala 1 cm, o objetivo é não confundir a espessura do lápis com a espessura da malha. Isto é, se tivermos um papel quadriculado e dois números inteiros, como sugerido anteriormente, podemos descobrir os seus MMC e o MDC.

Solicitamos a um voluntário para participar da brincadeira, dizendo que vamos descobrir o menor múltiplo comum e o máximo divisor comum de dois números inteiros pensados pelo estudante, utilizando apenas um papel quadriculado. O professor pode utilizar a lousa quadriculada para ilustrar, aos estudantes, os passos da mágica.

Sobre um papel quadriculado solicitamos que o participante desenhe um retângulo, de medidas correspondentes aos valores inteiros pensados por ele, seguidamente peça que trace a diagonal. Pronto! Com uma contagem rápida descobrimos o MDC e o MMC dos números pensados pelo o estudante. Isto é, o número de vértices que encontra a diagonal desenhada corresponde ao MDC e o número de quadrados unitários limitados pelas linhas verticais e horizontais passando por cada ponto marcado, unindo os lados opostos do retângulo é o MMC.

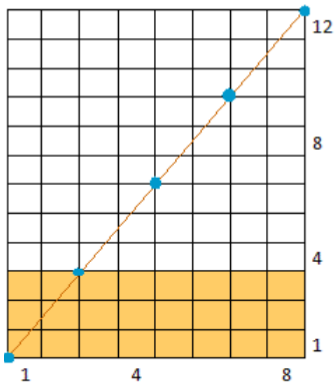
O exemplo a seguir ilustra a mágica, e deve ser introduzida aos estudantes antes de explicar porque o truque funciona.

11 Exemplo. *Vamos calcular o MMC(5, 10) e MDC(5, 10).*



Observe que a diagonal do retângulo passa pelos vértices de 6 quadradinhos unitários e consequentemente fica dividida em 5 partes iguais, portanto, MDC(5, 10) = 5. Perceba também que a diagonal divide o retângulo maior em 5 retângulos menores e cada um deles *possui, igualmente, 10 quadradinhos unitários (parte amarela), concluindo que MMC(5, 10) = 10.*

12 Exemplo. *Vamos calcular o MMC(8, 12) e MDC(8, 12).*

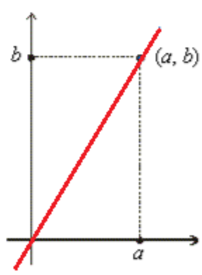


Dessa forma, para o MDC e o MMC de 8 e 12, teremos: a diagonal do retângulo está dividida em 4 partes, assim, MDC(8, 12) = 4. Observe que a diagonal divide o retângulo maior em quatro retângulos menores, cada um contendo 24 quadradinhos unitários, portanto, MMC(8,12) = 24.

É interessante notar que trabalhando o conteúdo de múltiplos e divisores, menor múltiplo comum e maior divisor comum com essa abordagem também fixamos conceitos geométricos como a área de um retângulo, vértices e diagonais.

Porque o truque funciona? Se $d = mdc(a, b)$, existem inteiros u e v tais que $a = d \cdot u$ e $b = d \cdot v$, com u e v primos entre si.

Considerando um sistema de eixo ortogonais com a origem num dos vértices do retângulo, como na figura a seguir, a equação da reta que contém a diagonal considerada é $y = \frac{b}{a} \cdot x$.



Logo pertencem à diagonal de pontos: $(0, 0)$; (u, v); $(2u, 2v)$; $(du, dv) = (a, b)$ pois $\frac{b}{a} = \frac{v \cdot d}{u \cdot d} = \frac{v}{u}$; portanto, $y = \frac{b}{a} \cdot x$ corresponde à $y = \frac{v}{u} \cdot x$, consequentemente:

$$\frac{v}{u} \times u = v; (u, v)$$

.

$$\frac{v}{u} \times x = \frac{v}{u} \times 2 \cdot u = 2 \cdot v; (2u, 2v)$$

$$\frac{v}{u} \times x = \frac{v}{u} \times d \cdot u = d \cdot v; (d \cdot u, d \cdot v) = (a, b)$$

Ou seja, $d+1$ pontos de coordenadas inteiras, igualmente espaçadas. Para verificar que são apenas esses pontos da diagonal com coordenadas inteiras, suponha que (p, q) pertença a diagonal e tenha coordenadas inteiras. Então, $q = \frac{b}{a} \times p = \frac{v}{u} \times p$, o que implica $q \cdot u = v \cdot p$ e, sendo $mdc(u, v) = 1$, vem que $q = r \cdot v$ e $p = r \cdot u$, como $0 \leq r \leq d$. Logo a diagonal fica dividida em d pedaços iguais.

Como $d + 1$ pontos são igualmente espaçados, os retângulos obtidos, tem a mesma área "m". Logo $m \cdot d = a \cdot b$, o que mostra que $m = mmc(a, b)$, e m é também o número de quadradinhos contidos no retângulo.

A2.1) JOGO: Baralho do MDC

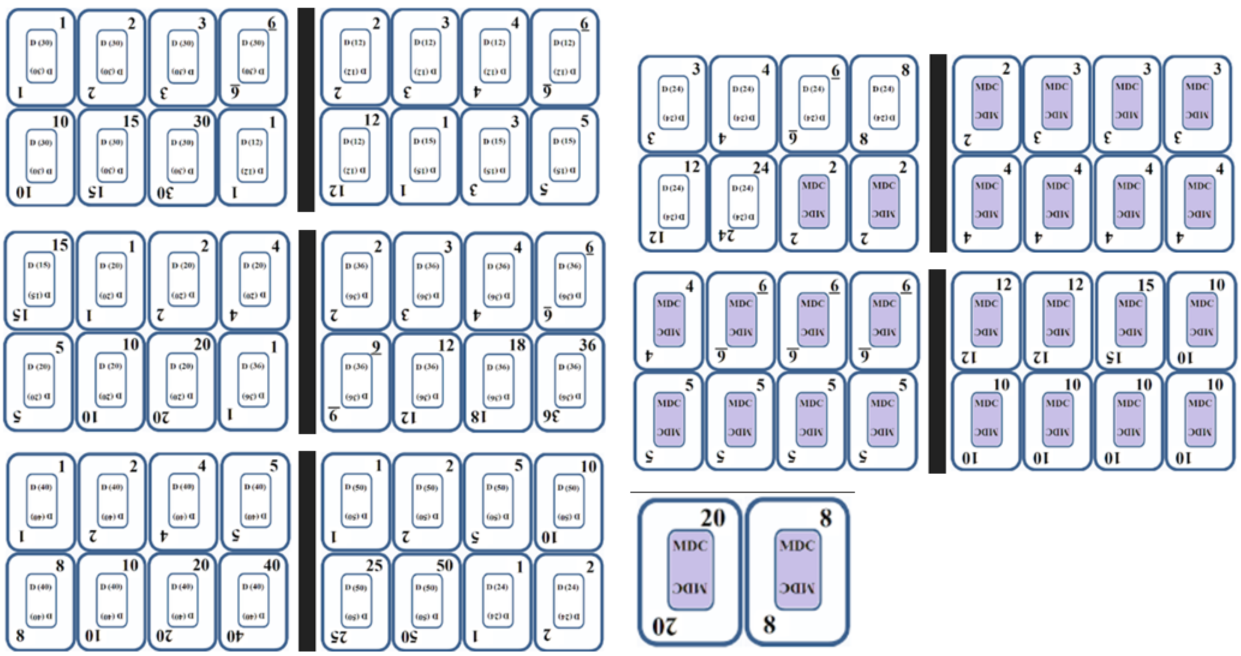


Figura 3.5: Baralho do MDC.

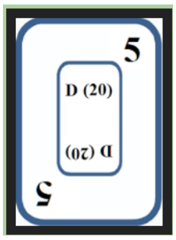
O objetivo do baralho[6] é trabalhar os conceitos de MDC. Para isso escolhemos 8 números

[6]Disponível em: $<$ *http : //bisbilhotarte.blogspot.com.br/p/jogos.html* $>$

e construímos os seus conjuntos de divisores:

D (12)= $1, 2, 3, 4, 6, 12$	D (15)= $1, 3, 5, 15$
D (20)= $1, 2, 4, 5, 10, 20$	D (24)= $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$
D (30)= $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$	D (36)= $1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$
D (40)= $1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40$	D (50)= $1, 2, 5, 10, 25, 50$

Cada conjunto de divisores é um “naipe”do baralho, exatamente igual a ideia do jogo de buraco do baralho comum. Sendo assim, são 8 naipes, e no nosso caso, cada naipe tem uma quantidade diferente de cartas. Observe:



A parte interna da carta identifica de qual naipe (conjunto de divisores) ela é e as pontas indicam um dos valores desse conjunto.

Objetivo do jogo: é formar a sequência correta de cada conjunto de divisores; identificar o MDC entre dois conjuntos de divisores; observar e concluir que todo conjunto de divisores começa com 1 e termina no próprio número. As cartas com valores que representam MDC entre as possibilidades de formação de pares de conjuntos foram marcadas de forma diferente.

Regras: quando o grupo forma uma sequência de divisores completa ganha 200 pontos; quando o grupo ao comparar 2 conjuntos de divisores, mesmo que estejam incompletos, mas que estejam sendo formados na mesa, identificar o MDC e colocar a carta de MDC nesse valor correto para os 2 números de conjunto de divisores em questão, ganhará mais 200 pontos; se o grupo conseguir formar as duas sequências de divisores e ainda tiver a carta de MDC entre os dois ganha 500 pontos. Para iniciar o jogo, basta expor uma sequência correta de 3 cartas de qualquer naipe; são 4 jogadores (exatamente como no jogo de “buraco”do baralho comum), 2 duplas que sentam cruzadas, ou seja, os jogadores da mesma dupla não sentam lado a lado, pois um completará o jogo do outro sem saber as cartas que o outro tem e por isso, devem sentar-se afastados. Cada jogador recebe 11 cartas e o que sobra forma o “dorme”da mesa. No final ganha quem acumular maior número de pontos.

A2.2) DIVERTIMENTO: Cruzadinha de MMC

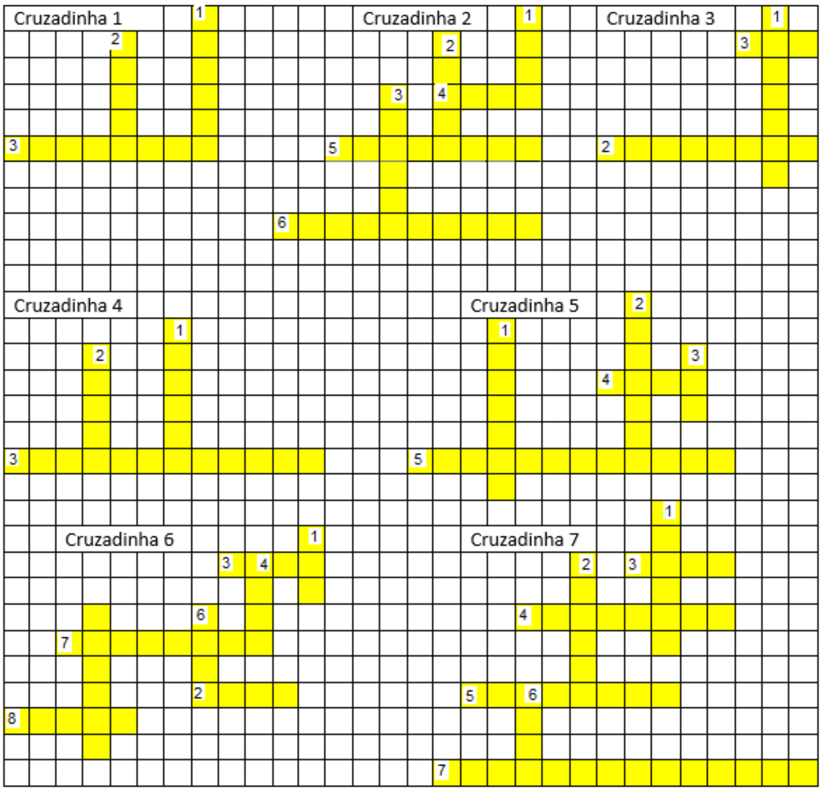


Figura 3.6: Cruzadinhas do MMC

Cruzadinha 1

1. Calcule o MMC(6,5)?

2. Calcule o MMC(4,5)?

3. Calcule o MMC(20,30)?

Cruzadinha 2

1. MMC(1,70)?

2. Maria pesca em um clube a cada 5 dias enquanto Jônatas a cada 4 dias, se hoje estão pescando juntos, quantos dias depois tornarão a pescar juntos?

3. Calcule o MMC(2,4)?

4. No alto de uma emissora de televisão duas luzes “piscam”com frequências diferentes. A primeira “pisca”9 vezes por minuto e a segunda “pisca”3 vezes por minuto. Se

num certo instante as luzes “piscam”ao mesmo tempo, após quantos elas voltarão a piscar simultaneamente?

5. Um Relógio bate a cada 5 minutos, outro relógio a cada 20 minutos e um terceiro a cada 40 minutos. O menor intervalo de tempo decorrido entre duas batidas simultâneas dos três relógios é?
6. Se o mínimo comum entre os números 6 e K é maior do que 97 e menor do que 107, então o número K é?

Cruzadinha 3

1. O maior múltiplo comum a 9, 2, 3 e 6 de dois dígitos é?
2. Três viajantes partem num mesmo dia de uma cidade A. Cada um desses três viajantes retorna à cidade A exatamente a cada 2, 4 e 5 dias, respectivamente. O número mínimo de dias transcorridos para que os três viajantes estejam juntos novamente na cidade A é:
3. Calcule o MMC(25,20,4)?

Cruzadinha 4

1. Ronaldo e Tadeu lavaram suas roupas hoje. Ronaldo lava suas roupas a cada 6 dias e Tadeu lava suas roupas a cada 5 dias. Quantos dias terão até que Ronaldo e Tadeu lavem as roupas no mesmo dia novamente?
2. Certo fenômeno raro ocorre de 3 em 3 anos. Outro fenômeno, mais raro ainda, ocorre de 10 em 10 anos. Se e os dois eventos ocorreram juntos, em quantos anos eles irão ocorrer juntos novamente?
3. Em uma floricultura, há menos de 75 botões de rosas e um funcionário está encarregado de fazer ramalhetes, todos com a mesma quantidade de botões. Ao iniciar o trabalho, esse funcionário percebeu que se colocasse em cada ramalhete 2, 5 ou 7 botões de rosas, sempre sobrariam 2 botões. O número de botões de rosas era?

Cruzadinha 5

1. Calcule o MMC(2,3,6,9)?
2. No estoque de uma papelaria, há uma caixa com várias borrachas iguais e, para facilitar as vendas, o dono dessa papelaria decidiu fazer pacotinhos, todos com a mesma quantidade de borrachas. Ao fazer isso, notou que era possível colocar 8 ou 16 ou 5 borrachas em cada pacotinho e, assim, não sobraria borracha alguma na caixa. O menor número de borrachas que essa caixa poderia conter era?
3. O Mínimo Múltiplo comum entre 5 e 2?
4. João corre a cada 13 dias na praça Luz do dia, e Verônica a cada 4 dias na mesma praça. João está interessado em Verônica, e por isso fez as contas e descobriu, a partir daquele dia, quantos dias veria Verônica naquela praça novamente. determine a soma dos dígitos do número de dias que João encontrou.
5. Calcule o MMC(8,13)?

Cruzadinha 6

1. Qual o $MMC(1,5,2)$?
2. Uma estrada circular tem 18 estações. Um trem parte da estação inicial e faz parada de 7 em 7 estações. Quantas voltas terá dado na estrada quando fizer nova parada na estação inicial?
3. Qual o $MMC(3,9)$?
4. Qual o $MMC(1,11)$?
5. Qual o $MMC(1,3,5)$?
6. Numa república hipotética, o presidente deve permanecer 4 anos em seu cargo; os senadores, 6 anos e os deputados, 3 anos. Nessa república, houve eleição para os três cargos em 1989. A próxima eleição simultânea para esses três cargos ocorrerá, novamente, em? Dê como resposta a soma dos dígitos.
7. Qual o $MMC(2,7,14)$?
8. Qual o $MMC(1,13)$?

Cruzadinha 7

1. Três viajantes seguiram para Petrolina. O mais jovem viaja com o mesmo destino de 5 em 5 dias, o segundo, de 6 em 6 dias e o mais velho, de 15 em 15 dias. Daqui a quantos dias viajarão novamente juntos?

2. Qual o $MMC(15, 5)$?

3. Qual o $MMC(8, 2)$?

4. Em uma casa há quatro lâmpadas, a primeira acende a cada 20 horas, a segunda acende a cada 10 horas, a terceira acende a cada 125 horas e a quarta só acende quando as outras três estão acesas ao mesmo tempo. De quantas em quantas horas a quarta lâmpada vai acender?

5. Qual o $MMC(7, 21)$?

6. Qual o $MMC(3, 9)$?

7. Uma pizzaria funciona todos os dias da semana e sempre tem promoções para seus clientes. A cada 4 dias, o cliente tem desconto na compra da pizza de calabresa; a cada 3 dias, na compra de duas pizzas, ganha uma mini pizza doce, e uma vez por semana tem a promoção de refrigerantes. Se hoje estão as três promoções vigentes, esse ocorrido voltará a acontecer daqui a quantas semanas?

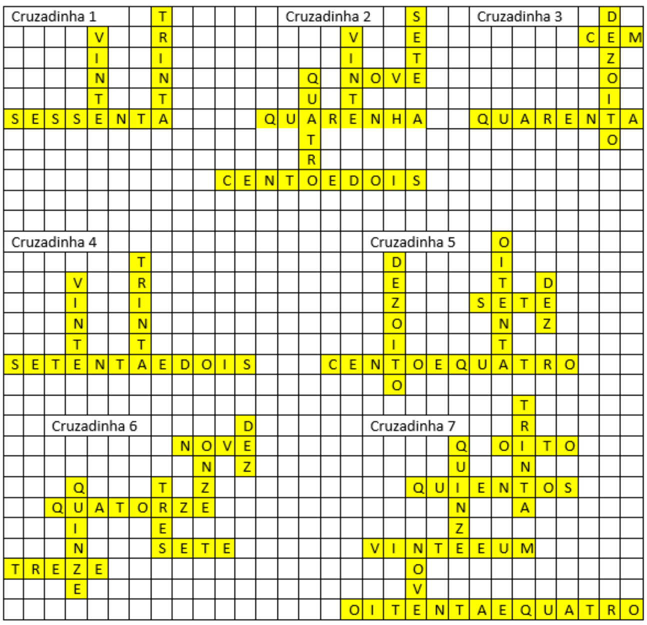


Figura 3.7: Cruzadinhas preenchidas.

A3) DESAFIO:

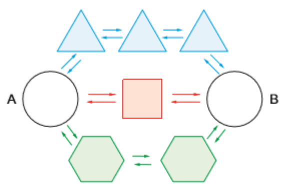
1. O maior MDC. Quais são os seis números de dois algarismos cujo máximo divisor comum possível é o maior possível?

2. **(OBMEP 2013 / Nível 2)** Quantos andares. Um prédio possui três escadas diferentes, todas começando na base do prédio e terminado no topo. Uma escada tem 104 degraus, outra tem 117 degraus, e a outra tem 156 degraus. Sempre que os degraus das três escadas estão na mesma altura, há um andar. Quantos andares possui o prédio?

3. **(OBMEP 2008 / Nível 3)** Conjunto sem múltiplos. Qual é o subconjunto de $1, 2, ..., 100$ com o maior número possível de elementos e sem elementos que sejam múltiplos um do outro?
   Atividade comentada na seção posterior.

4. **(OBMEP 2016 / Nível 1)** Na brincadeira do vai e volta, Xavier, Yara e Zezé começam juntos na casa A e pulam, simultaneamente, de casa em casa, indo de A para B ou voltando de B para A várias vezes. Xavier faz o caminho pelas casas triangulares, Yara pela casa quadrada e Zezé pelas casas hexagonais. Cada uma das crianças só retorna pelo caminho em que veio depois de chegar à casa A ou à casa B.

   (a) Em que casa cada uma das crianças estará após pular exatamente dez vezes? Use a letra X para marcar a casa em que estará Xavier, a letra Y para marcar a casa em que estará Yara, e a letra Z para marcar a casa em que estará Zezé.

   (b) Após iniciar a brincadeira, quantos pulos cada uma delas dará até se encontrarem novamente na casa A?

   (c) Explique por que as crianças nunca se encontrarão na casa B.

Plano de ação e observações pedagógicas.

Nesta sequência ao introduzir a fundamentação teórica, recorremos a cartazes espalhados pelas paredes com exemplos, generalizações e perguntas que solicitavam a resposta dos estudantes, isso foi possível, por possuirmos sala fixa. Abaixo seque o plano de ação realizado com período de cinco semanas.

Momentos	Eventos
1	Desafio: Conjunto sem múltiplos; História: A base das conquistas arquitetônica; Fundamentação teórica: Mínimo múltiplo comum (MMC).
2	Jogo: Cruzadinha do MMC / avaliação.
3	Mágica: Cálculo geométrico/ avaliação; Fundamentação teórica: Máximo divisor comum (MDC);
5	Jogo: Baralho do MDC / avaliação.

Tabela 3.7: Plano de ação: Mínimo Múltiplo Comum & Máximo Divisor Comum.

Sugestões:

1. Distribua folhas quadrangulares aos alunos, para que eles possam brincar de matemágica com os outros estudantes;
2. A cruzadinha pode ser aplicada a exemplo do programa do Silvio Santos, transcrita a malha no quadro, solicita-se a solução da pergunta-linha. Para cada rorada, a escolha do participante pode ocorrer tirando a sorte, como senhas.
3. Permita a exploração das cartas do baralho antes de iniciar os jogos;
4. Após a familiarização do jogo "baralho", promova um minicampeonato;

Resolução dos problemas:
O maior mdc - solução:
Designemos por d o máximo divisor comum dos seis números. Então, esses seis números de dois algarismos são múltiplos distintos de d e podemos reformular a pergunta: queremos saber qual é o maior número d que possui seis múltiplos distintos menores do que 100. Note que d, $2d$, $3d$, $4d$, $5d$ e $6d$ são todos múltiplos de d. Logo, a melhor situação possível é quando esses seis números são os múltiplos considerados. Para isso, é preciso que $6d \leq 99$.

Dividindo 99 por 6, obtemos o quociente 16 e o resto 3, ou seja, $99 = 6 \times 16 + 3$. Logo, $d = 16$. Portanto, os seis números de dois algarismos cujo MDC é o maior possível são 16, 32, 48, 64, 80, *e* 96. O MDC desses seis números é 16.

Quantos andares - resolução

Vamos chamar de A, B e C as três escadas, que têm 104, 117 e 156 degraus, respectivamente. Seja a o número de degraus da escada A entre cada dois andares, b o número de degraus da escada B entre cada dois andares, e c o número de degraus da escada C entre cada dois andares. Dividindo o número total de degraus de uma escada pelo número de degraus que esta escada tem entre cada dois andares, obtêm-se o número de andares! Logo,

$$\frac{104}{a} = \frac{117}{b} = \frac{156}{c} = d$$

onde d é o número de andares do prédio. Ou seja, d é um divisor comum de 104, 117 e 156. Além disso, d deve ser o maior possível, pois a, b e c são os menores possíveis! Logo, d é o maior divisor comum (*mdc*) de 104, 117 e 156. Calculando o *mdc* de 104, 117 e 156, obtemos o número 13 como resposta. Logo, o número de andares deste prédio é 13.

Problema desafio proposto e sua respectiva solução segundo a interpretações de alguns estudantes.

Conjunto sem múltiplos - resolução.

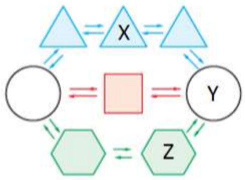
A questão proposta foi resolvida em grupo, a análise foi feita número a número. Após algum tempo, levantamos os seguintes questionamentos. Iniciamos com a pergunta, se o número 1 faria parte desse conjunto. É interessante que o número 2 componha esse conjunto? O conjunto foi se formando pouco a pouco. Apenas ao chegar ao número 63, perceberam que qualquer número a partir daí, não apresentava mais múltiplos menores que 100. Então reiniciaram a formação do conjunto solicitado.

$$\{50, 51, 52, ..., 99, 100\}$$

satisfaz a condição requerida. Assim o subconjunto, com mais elementos, tem no mínimo 50 elementos.

Brincadeira do vai e volta - resolução

Item (a). Basta acompanhar o movimento realizado pelas crianças até completarem 10 pulos. O resultado final é:



Item (b). Xavier estará na casa A de 8 em 8 pulos, Yara estará em A de 4 em 4 pulos e Zezé estará em A de 6 em 6 pulos. Como o mínimo múltiplo comum de 4, 6 e 8 é 24, após 24 pulos os três estarão em A pela primeira vez após o início da brincadeira.

Item (c). Vamos analisar os possíveis encontros em B. Xavier estará em B após 4 pulos, em seguida, após o 12º pulo, depois após o 20º pulo e assim por diante, isto é, de 8 em 8 pulos após os primeiros 4 pulos. Ou seja, Xavier estará na casa B imediatamente após (4+ múltiplos de 8) pulos. Yara estará em B após realizar os pulos 2, 6, 10, etc., isto é, de 4 em 4 pulos após os dois primeiros. Assim, Yara estará na casa B imediatamente após (2 + múltiplos de 4) pulos. Zezé estará em B imediatamente após os pulos 3, 9, 15, ..., isto é, de 6 em 6 pulos após os 3 primeiros pulos, ou seja, após (3+múltiplos de 6) pulos. Assim, eles nunca se encontrarão em B, pois Xavier e Yara estarão na casa B após um número par de pulos, enquanto Zezé estará em B após um número ímpar de pulos. Na verdade a argumentação acima mostra que Xavier e Yara, Xavier e Zezé ou Yara e Zezé nunca se encontrarão na casa B, quanto mais os três.

Todas as questões, exceto o item 2, foram transcritas segundo o caderno da OBMEP.

3.5 Razão e Proporção

Nesta seção apresentaremos alguns assuntos ligados à ideia de razão e proporção, tais como: escalas, velocidades médias, densidade demográfica, entre outros. Além disso, trabalharemos a relação de proporcionalidade entre grandezas. Destacaremos ainda, a apresentação de vídeos, a série da TV escola que retrata o tema a partir de situações cotidianas e um trecho do vídeo, pato Donald no país da matemática, que apresenta a razão áurea e explica as proporções em desenho animado.

Para introduzir o tema, sugerimos os vídeos[7] da série Razão e Proporção, produzido

[7]Disponível em $http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/video/showVideo.php?video = 6958$

pela Fundação Universidade de Brasília em parceria com Secretaria de Educação a Distância do Ministério da Educação e TV Escola. De forma bastante interessante e divertida os vídeos apresentam os conceitos de razão e proporção, a partir de situações do dia a dia.

Um Pouco de História

Um pouco de história dentro do contexto das civilizações egípcia, babilônica e grega. As necessidades cotidianas na administração de colheitas, das obras públicas e da cobrança de imposto fizeram surgir a matemática como uma ciência prática. No papiro de Rhind, que apresenta 85 problemas, entre os quais, problemas aritméticos e do 1º grau resolvidos pelo método da falsa posição que se utiliza do princípio multiplicativo da proporção, é notório uma matemática elementar. Observe os problemas aritmético 24, 72 e 63 com suas respectivas soluções:

Problema 24. Um valor desconhecido (aha) somado a um sétimo deste valor corresponde a 24, encontre o valor desconhecido (aha). Na resolução admitia-se um valor falso e as operações indicadas eram sobre esse número suposto. O resultado era então comparado com o resultado que se pretendia obter, e usando proporções eles chegavam a uma resposta correta. Observe neste caso, admita que o tal número é 7, provavelmente falso, a ideia é eliminar a fração $\frac{1}{7}$. Segue então $7 + 7 \times \frac{1}{7} = 8$, como o resultado esperado era 24, então se $8 \times 3 = 24$ o tal número será $3 \times 7 = 21$.

Problema 72. "Qual o número de pães de força 45 que são equivalentes a 100 de força 10" que representa a seguinte proporção

$$\frac{100}{10} \times 45 \text{ ou } 450 \text{ pães.}$$

Problema 63. Sejam repartidos 700 pães entre quatro pessoas, em partes proporcionais a $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ cuja solução apresentada foi

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8+6+4+3}{12} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$$

corresponde a $\frac{700}{\frac{7}{4}} = 700 \times \frac{4}{7} = 100 \times 4 = 400$
então o inteiro corresponde a 400.

Assim $\frac{2}{3} \times 400 \simeq 266,66..$; $\frac{1}{2} \times 400 = 200$; $\frac{1}{3} \times 400 = 133,33...$; $\frac{1}{4} \times 400 = 100$. Temos:

$$266.\frac{2}{3} + \frac{1}{2}.200 + \frac{1}{3} \times 133 + \frac{1}{4} \times 100 \simeq 700$$

Na babilônia, região conhecida como Mesopotâmia e que hoje compreende os territórios dos países da Síria, Iraque e Turquia, tinha-se uma aritmética muito evoluída. Os achados de tabletas de argilas com conteúdo matemático mostram uma álgebra retórica bem desenvolvida. Esta civilização, diferente da egípcia possuía um sistema sexagesimal e não recorria a falsos valores para resolver equações. Contudo, utilizaram semelhantemente o conceito de proporcionalidade fundamentado no princípio multiplicativo, que é um raciocínio equivalente à multiplicação de ambos os membros de uma equação por um mesmo número, obtendo-se uma equação proporcional à primeira. Acredita-se também que os babilônicos conheciam a proporcionalidade entre lados de triângulos semelhantes segundo a interpretação da tableta de Plimpton 322, por Eves (2004). Para os gregos o conceito de proporção foi objeto de estudo por

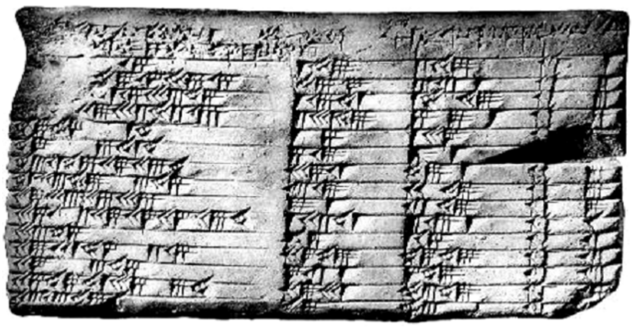


Figura 3.8: Tableta Babilônica Plimpton.

muitos séculos, principalmente na arquitetura e na agrimensura. Um fato que sugere o uso de proporção por parte dos gregos diz respeito a Tales de Mileto, considerado um dos sete sábios da antiguidade. Conhecido pelo teorema que leva seu nome descreve a proporcionalidade de segmentos determinados por um feixe de retas paralelas e outro de retas transversais. Vale ressaltar que a demonstração deste teorema pelos gregos, era voltada para medidas comensuráveis. Outros destaques no emprego da proporção pelos gregos foram as estrelas de cinco pontas que mais tarde constituía-se em um símbolo especial para os pitagóricos e a razão áurea, mesmo que não conhecidas por esta nomenclatura pelos gregos, acredita-se que desenvolveram a noção de "razão áurea"a partir da construção do pentagrama estrelado. A estrela é obtida ao traçar as cinco diagonais de uma face do dodecaedro regular, e que as interseções das diagonais desta

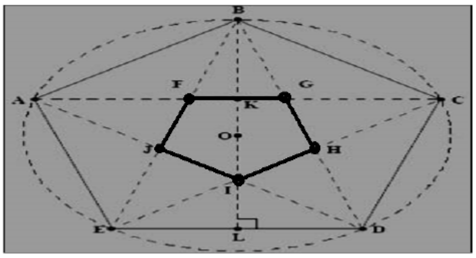
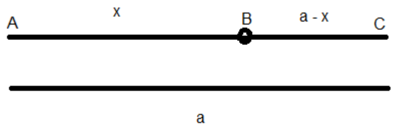


Figura 3.9: Face Pentagonal do Dodecaedro Regular.

estrela formam outro pentágono regular. A razão áurea é uma constante real algébrica e irracional, também chamada de secção áurea a divisão em média e extrema razão de um segmento demostrado por Euclides equivale à resolução de uma equação quadrática.



Se $AC = a$ e $AB = x$, então pela propriedade de secção áurea $\dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{a-x}$.
Encontraremos $x^2 = a^2 – a \times x$; esse tipo de equação já era conhecido pelos babilônicos, embora os gregos mantivessem a razão na dimensão exclusivamente geométrica. Mais tarde a razão áurea foi representada pela letra grega ϕ (*phi*). A partir do século XI e XII o poeta árabe Khayyan substituiu a teoria das proporções de Euclides por um método numérico, chegando perto da definição de números irracionais, além de lidar com o conceito de número real. A razão áurea é aproximadamente 1,618033987.

Breve Resumo da Parte Teórica do Conteúdo

4 Definição. *Razão é a comparação entre duas gradezas, uma vez que grandeza é tudo que pode contar medir, pesar, enfim, enumerar e é medida a partir da divisão de dois valores. Tempo, unidade de comprimento, área e volume são exemplos de grandezas. É importante que esses valores estejam na mesma unidade de medida e que o denominador seja diferente de zero.*

13 Exemplo. *Em uma partida de voleibol, o time do Brasil venceu o primeiro set com 25 pontos em cima dos Estados Unidos. Nesse set, Lucão marcou 10 pontos. Qual a razão entre o número de pontos marcados por Lucão e o total de pontos do time?*

A razão é 10/25, que na forma simplificada corresponde à 2/5, quer dizer que a cada

5 pontos que a equipe marcava, Lucão marcava dois. As razões podem ser representadas de várias maneiras. Observe: $2 \div 5 = \frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$

As razões estão relacionadas a situações importantes, como velocidade média, densidade demográfica e escalas.

Velocidade Média: razão entre a distância percorrida e o tempo gasto para percorrer essa distância.

14 Exemplo. *Um carro percorreu a distância de 60 km em 2 horas, portanto, a velocidade média é calculada da seguinte maneira:* $60/2 = 30$. *Assim, o carro manteve a velocidade média de* $30Km/h$.

Densidade demográfica: razão entre o número de habitantes e a área da superfície do território.

15 Exemplo. . *Qual a densidade demográfica da população de* 8796032 *habitantes de Pernambuco que vivem em uma área de* $98311,616km^2$*?*
$D = \dfrac{8796032}{98311,616} = 89,47$ *habitantes por quilômetro quadrado ou* $89,47hab/km^2$.

Escala : razão existente nos mapas, plantas e maquetes onde relacionamos a medida no mapa com a medida no tamanho real.

16 Exemplo. *No mapa, da figura do estado de Pernambuco, a escala corresponde a razão 1:800000, isto é, cada 1 cm no mapa corresponde a 8 Km na realidade.*

Figura 3.10: Estado de Pernambuco.

Note:

Razão inversa é o inverso da razão. Já a **proporção** é a igualdade entre duas ou mais razões. Ou seja, se $a|b$ corresponde à razão, logo $a|b = c|d$ equivale a uma proporção. É frequente que esse conteúdo se apresente na forma de problema.

Conceito de proporcionalidade: Sejam x e y dois tipos de grandezas. Diz-se que y é proporcional a x quando:

1. As grandezas x e y acham-se de tal modo relacionadas que a cada valor de x corresponde um valor bem determinado de y. Diz-se então que existe uma correspondência $x \mapsto y$ e que y é função de x.

   Quando escrevemos $x \mapsto y$ estaremos querendo dizer que y é o valor que corresponde a x.

2. Quanto maior for x, maior será y. Em símbolos: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$. Então $x < x'$ implica $y < y'$.

3. Se um valor x_0 corresponde y_0 e c é um número qualquer então o valor de y que corresponde a cx_0 é cy_0. Simbolicamente: se $x_0 \mapsto y_0$ então $cx_0 \mapsto cy_0$.

17 Exemplo. *Se uma estrada de comprimento x necessita de y dias para ser asfaltada, então uma estrada de comprimento $2x$ (ou $5x$, ou $31x$) necessita $2y$ dias (ou $5y$, ou $31y$).*

Quando se tem uma proporcionalidade $x \mapsto y$, escreve-se $y = f(x)$ para significar que y é o valor que corresponde a x.

Dada uma proporcionalidade $x \mapsto y$, o número k, que indica o valor de y corresponde a $x = 1$, chama-se o *fator de proporcionalidade*. Simbolicamente: $1 \mapsto k$. Então, em virtude do item 3 da definição, para cada c, ao valor $c = c \cdot 1$ corresponde a $c \cdot k$. Ou então, usando a letra x em vez de c, temos $x \mapsto xk$. Resumindo: quando $x \mapsto y$ é uma proporcionalidade, existe um número k, chamado de fator de proporcionalidade, tal que $y = k \cdot x$ para todo x.

Grandezas inversamente proporcionais: Sejam x e y dois tipos de grandezas. Diz-se que y é INVERSAMENTE proporcional a x quando:

1. As grandezas x e y acham-se tal modo relacionadas que a cada valor de x corresponde um valor bem determinado de y. Dize-se então que existe uma correspondência $x \mapsto y$ e que y é função de x. Costuma-se também escrever $y = f(x)$.

2. Quanto maior for x, menor será y. Em símbolos: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$. Então $x < x'$ implica $y > y'$. Ou ainda: se $y = f(x)$ e $y' = f(x')$, tem-se a implicação $x < x' \mapsto f(x') < f(x)$.

3. Se y_0 é o valor de y que corresponde x_0 de x e c é qualquer número então o valor de cy_0 corresponde $\frac{1}{c} \cdot y_0$. Ou seja: se $x_0 \mapsto y_0$ então $cx_0 \mapsto \frac{1}{c} \cdot y_0$. Na notação funcional: $f(cx) = \frac{1}{c} f(x)$

18 Exemplo. *Viajando de carro, a uma velocidade média de* $60km$ *por hora, consigo ir da cidade A para a cidade B em 2 horas e 30 minutos. Qual deve ser a minha velocidade média para que eu percorra a mesma rota em 1 hora?*

Aqui temos uma correspondência tempo gasto $\mapsto$ velocidade empregada.

É claro que quanto maior for o tempo disponível, menor será a velocidade necessária. É também claro que dobrando (ou triplicando, etc.) o tempo disponível, será necessária apenas a metade (ou um terço, etc.) da velocidade empregada. Para indicar a relação tempo $\mapsto$ *velocidade, teremos* $f(n \cdot t) = \frac{1}{n} \cdot f(t)$. *Portanto, a velocidade média no percurso de A para B é inversamente proporcional ao tempo gasto na viagem.*

Divisão em Partes Proporcionais

5 Definição. *Dada duas sequências* $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ *e* $(b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$, *diz-se que os números* $(b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$ *são proporcionais aos números* $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ *quando*

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = ... = \frac{b_n}{a_n}$$

Se chamarmos de k *o valor comum dessas* n *razões isto significa que* $b_1 = ka_1, b_2 = ka_2, ..., b_n = ka_n$. *Ou ainda, isto quer dizer que os pontos do plano dados pelas coordenadas* $P_1 = (a_1, b_1), P_2 = (a_2, b_2), ..., P_n = (a_n, b_n)$ *encontram-se todos sobre a reta* $y = kx$. *Assim por exemplo, (6, 9, 12, 18) são proporcionais a (4, 6, 8, 12). A ordem dos elementos nas sequências proporcionais é fundamental.*

A propriedade das grandezas proporcionais acima mencionada é a seguinte.

Seja $x \mapsto y$ uma proporcionalidade:

se $x_1 \mapsto y_1, x_2 \mapsto y_2, ..., x_n \mapsto y_n$ então, $x_1 + x_2 + ... + x_n \mapsto y_1 + y_2 + ... + y_n$.

Com efeito, tendo-se $y_1 = kx_1, y_2 = kx_2, ..., y_n = kx_n$,

segue-se que

$y_1 + y_2 + ... + y_n = kx_1 + kx_2 + ... + kx_n = k(x_1 + x_2 + ... + x_n)$.

Noutras palavras, se

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = ... = \frac{b_n}{a_n}$$

então

$$\frac{b_1+b_2+...+b_n}{a_1+a_2+...+a_n} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = ... = \frac{b_n}{a_n}$$

Dividir um número a em partes proporcionais a $a_1, a_2, ..., a_n$ significa encontrar $x_1, x_2, ..., x_n$, proporcionais a $a_1, a_2, ..., a_n$ e tais que $x_1 + x_2 + ... + x_n = a$. Ora se devemos ter

$x_1 = ka_1, x_2 = ka_2, ..., x_n = ka_n$ então

$a = x_1 + x_2 + ... + x_n = k(a_1 + a_2 + ... + a_n)$, logo

$k = \frac{a}{a_1+a_2+...+a_n}$ e daí resulta que

$x_1 = \frac{a \cdot a_1}{a_1+a_2+...+a_n}$, $x_2 = \frac{a \cdot a_2}{a_1+a_2+...+a_n}$,..., $x_n = \frac{a \cdot a_n}{a_1+a_2+...+a_n}$

19 Exemplo. *Para dividir 24 em partes proporcionais a 4, 5 e 6, primeiro dividimos 24 por* $15 = (4+5+6)$ *encontrando* $\frac{8}{5}$, *e depois tomamos* $4 \times \frac{8}{5} = 6,4$; $5 \times \frac{8}{5} = 8$ *e* $6 \times \frac{8}{5} = 9,6$. *Estas são as partes procuradas.*

Atividades.

A1) MÁGICA: Razão Áurea

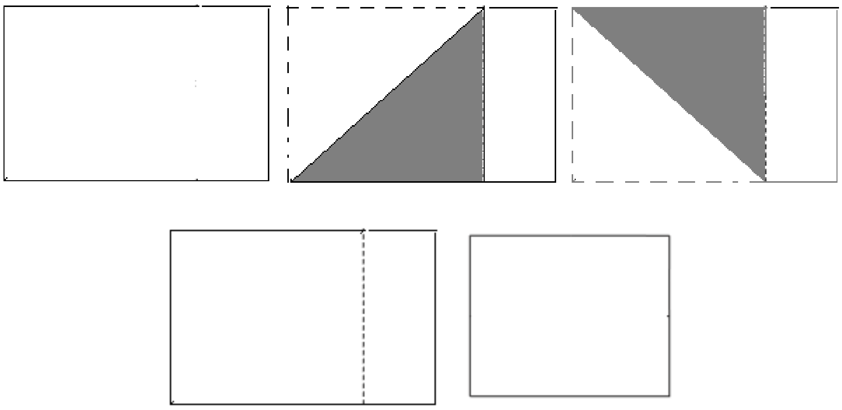
Nesta seção, a mágica fica por conta da razão Áurea apresentada na natureza, em diversa obras de arte e da arquitetura. O link abaixo apresenta um trecho do vídeo *Donald no país da matemática*, este explica as proporções em desenho animado. Disponível em: < *https://www.youtube.com/watch?v=SUSyRUkFKHY* > , acessado em dezembro de 2016.

Razão Áurea ou Número de Ouro.

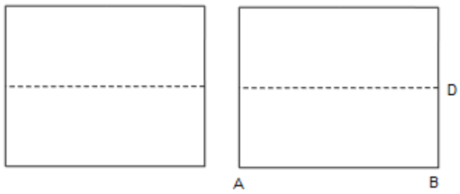
A Mágica com dobraduras. Com uma folha de papel, encontraremos de forma mágica o ponto que determina a razão áurea. Procedimentos:

1. Dobre a folha e sobreponha o menor lado sobre o maior marcando o ponto de encontro entre o vértice de menor lado com o maior segmento, analogamente com o outro lado menor da folha marcaremos o outro de ponto de encontro;

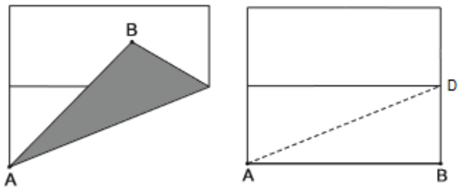
2. Com uma tesoura corte o papel, iniciando e terminado pelos pontos marcados no item anterior;



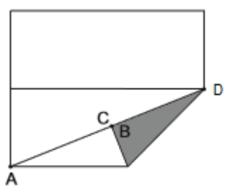
3. Escolha dois vértices adjacentes do quadrado e denomine-os por vértice A e vértice B;
4. Divida a folha de papel quadrada ao meio, formando dois retângulos de forma que os vértice A e B estejam em um mesmo lado de um dos retângulos;
5. Observando o retângulo que contém os vértices A e B denomine por D o vértice adjacente a B;



6. Dobre o papel formando a diagonal $\overline{AD}$;



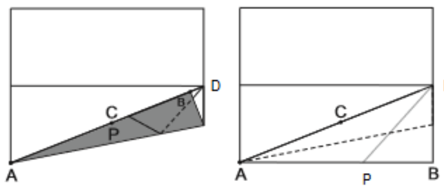
7. Dobre o papel levando o segmento $\overline{BD}$ ao segmento $\overline{AD}$, seguidamente marque por C o ponto em que o vértice B encontra o segmento $\overline{AD}$;



8. Usando dobradura leve o segmento $\overline{AB}$ sobre o segmento $\overline{AD}$ seguidamente projete o ponto C sobre $\overline{AB}$ e denomine-o por P;

9. A razão $\overline{AP}$ e $\overline{AB}$ é igual à razão entre $\overline{PB}$ e $\overline{AP}$ que é igual ao número de ouro.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$$



Por que o truque funciona? Iniciamos com uma folha quadrada e dividimos ao meio. Denotamos $\overline{AB}$ o segmento correspondente ao lado inferior da folha. Seja D o ponto médio do lado direito.
Se B' é a imagem de reflexão de B sobre $\overline{AD}$, então:

$$|B'D| = |BD| = \frac{|AB|}{2} \tag{3.4}$$

Pelo teorema de Pitágoras:

$$|AD|^2 = |AB|^2 + |DB|^2 \tag{3.5}$$

Podendo ser reescrito da seguinte forma: de (2.1) em (2.2)

$$|AD|^2 = |AB|^2 + (\frac{|AB|}{2})^2$$

$$|AD|^2 = |AB|^2 + (\frac{|AB|}{2})^2 = \frac{|AB|}{4}.5$$

Portanto

$$|AB'| = |AD| - |B'D| = \frac{\sqrt{5}}{2}|AB| - \frac{|AB|}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}|AB|$$

Ou seja,

$$|AB| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}|AB'|.$$

Na etapa final a reflexão foi usada simplesmente para trazer comprimento $|AB'|$ para o seguimento $\overline{AB}$, determinando assim o ponto P.
De modo que $\dfrac{|AB|}{|AP|} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$ seja o número de ouro ou razão Áurea.

A2) JOGO: Concurso de Beleza

Material necessário para realização do concurso: fitas métricas; calculadoras; canetas, lápis, borrachas; cópias da tabela abaixo, para registrar as medidas dos alunos.

Procedimentos: escolher 5 meninos e 5 meninas, realizar as medições 01, 02, 04, 05, 07 e 08 descritas na tabela 2.11 para cada uma das pessoas escolhidas e registrar nas tabelas. Na sequência, efetuar o cálculo das razões pré-estabelecidas (03, 06 e 09) e da média aritmética dessas razões, referente a cada aluno(a), registrando os valores obtidos nas respectivas tabelas. Concluído o cálculo das médias aritméticas, verificar qual delas se aproxima mais da razão áurea tanto no grupo masculino, quanto no grupo feminino. O aluno que obtiver a média aritmética das razões mais próxima da razão áurea será o "Mister Beleza Áurea" ou a "Miss Beleza Áurea [8]".

Escolha da Miss e do Mister Beleza Áurea

Medidas		Alunos					
01	Altura do Aluno						
02	Comprimento do umbigo até o chão						
03	Razão entre as medidas 01 e 02						
04	Comprimento do braço: do ombro até a extremidade do dedo médio						
05	Medida do cotovelo até a extremidade do dedo médio						
06	Razão entre as medidas 04 e 05						
07	Comprimento da perna						
08	Medida do joelho até o chão						
09	Razão entre as medidas 07 e 08						
10	Média aritmética das razões 03, 06 e 09.						

Tabela nº ______

Figura 3.11: Concurso de Beleza

A3) DESAFIO

1. O Google Maps é um serviço gratuito para visualização de mapas e imagens de satélite da Terra. Graças ao Google Maps, é possível traçar rotas nos mapas, visualizar grandes centros urbanos com zoom e cadastrar empresas e negócios no mapa.

[8] Disponível em: < *http://clubes.obmep.org.br/blog/atividade-a-razao-aurea-proporcao-aurea-um-concurso-de-beleza/* > acessado em outubro de 2015.

Caso consigam visualizar sua cidade utilizando o Google Maps: Tracem a rota da casa de um de vocês até a escola e vejam a distância real fornecida para esse trajeto. Imprimam o mapa e utilize uma linha sobre o trajeto destacado, em seguida estiquem a linha e meçam a distância do percurso no desenho. Deixem as duas medidas na mesma unidade de comprimento e descubram a escala do mapa. Comparem o valor encontrado com o fornecido no canto inferior direito da tela do Google Maps.
Atividade comentada na seção posterior.

2. **(Olimpíada de Minas Gerais-2004)**Uma mistura do tipo I contém suco de limão, óleo e vinagre na proporção 1:2:3.
   Numa segunda mistura, do tipo II, a proporção é 3:4:5.
   Qual é a proporção de suco de limão, óleo e vinagre numa mistura composta de 1 litro da mistura do tipo I e 1 litro da mistura do tipo II?

Plano de ação e observações pedagógicas.

Nossa sequência foi concretizada em um período de quatro semanas, abaixo segue o plano de ação realizado. A saber, no problema desafio, a ação de valer-se de uma ferramenta que os estudantes dominam favoreceu um ambiente de instrução. O concurso foi considerado muito mais uma brincadeira do que um momento de aprendizado, pelo tamanho da bagunça pedagógica, porque houve aprendizado, este momento foi muito elogiado pelos estudantes.

Momentos	Eventos
1	Video: Série razão e proporção no dia-a-dia - TV escola; Problema Desafio: Google Maps.
2	Fundamentação teórica: Razão e proporção;/ avaliação; Problemas históricos - egípcios, babilônio e gregos
3	vídeo: Donald no país da matemática; Mágica: Oficina com dobraduras ; Roda de discussão sobre as conclusões/avaliação.
4	Jogo: Miss e Mister Beleza Áurea.

Tabela 3.8: Plano de ação: Razão e Proporção.

Sugestões:

1. Após a apresentação dos vídeos disponibilize um momento de debate. Tente perceber, neste momento, o nível de compreensão dos estudantes em relação ao que foi apresentado;
2. Realize a oficina e o concurso de beleza em dias distintos.

Problema desafio proposto e sua respectivas solução segundo as interpretações de alguns estudantes.

Escala - Google Maps

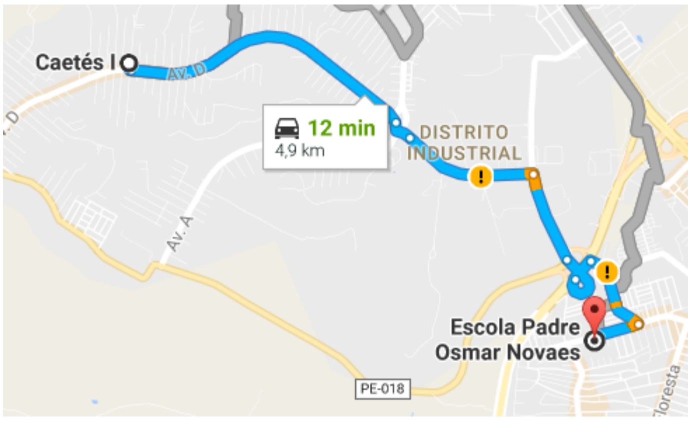


Figura 3.12: Figura ilustrativa do percusso da casa de um estudante à escola.

Sem ter a imagem impressa, o estudante mediu a distância na tela do celular, encontrando 6cm de distância. Seguidamente, 4,9 km equivalente à 490000 cm, a escala que é (medida imaginária/medida real) calculada foi de $\frac{6}{490000} \quad = \quad 0,0000122448$

Olimpíada de MG /2004 - resolução

Tipo I: 1L de limão, 2L de óleo, 3L de vinagre em 6L de mistura:

1/6 de limão; 1/3 de óleo e 1/2 de vinagre.

Tipo II: 3L de limão, 4L de óleo, 5L de vinagre em 12L de mistura:

1/4 de limão; 1/3 de óleo e 5/12 de vinagre.

somando 1L de cada tipo teremos

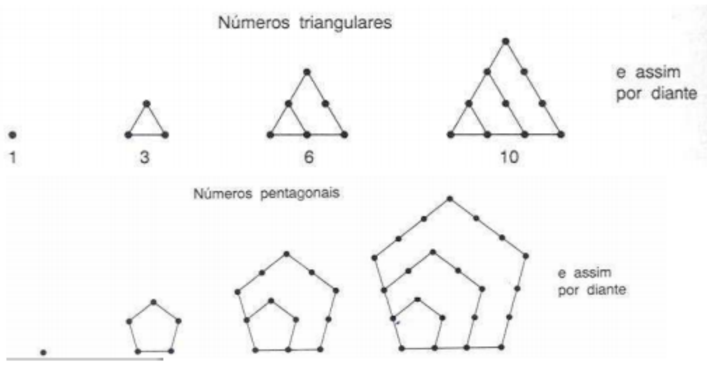
$1/6 + 1/4$ de litro de limão em 2L de mistura $\rightarrow 5/24p/L$ $1/3 + 1/3$ de óleo $\rightarrow 2/3$ $p/2L \rightarrow 8/24p/L$ $1/2 + 5/12$ de vinagre $\rightarrow 11/24p/L$.

3.6 Progressões Aritmética e Geométrica

As progressões aritméticas e geométricas estão bastante presentes no nosso cotidiano e são necessárias para calcular as grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempos iguais, ou seja dentro de um padrão, como o crescimento populacional, o crescimento de uma bactéria, dentre outras. Nossa sugestão é introduzir alguns problemas, questão desafio, antes de abordamos a fundamentação histórica e teórica. A ideia é fazer o aluno estudar o comportamento identificando o padrão e completar a sequência, sem conhecer sua lei de formação.

Um Pouco de História

As progressões começaram a ser estudadas desde os povos muito antigos como os babilônicos, temos registros desde 1900 a.c.. Na Babilônia, antiga Mesopotâmia, o mais importante registro foi a de Plimpton, que traz a progressão geométrica, a expressão $1+2+2^2+...+2^9$ é somada de forma que a série de quadrados $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2$ é achada. No Egito, sem o conhecimento matemático equivalente aos babilônicos, temos o papiro de Rhind com 85 problemas, no qual o problema 79, cita apenas "7 casas, 49 gatos, 343 ratos, 2041 espigas de trigo, 16 807 hectares". É presumível que o escriba estava tratando de um problema bem conhecido, em que uma das sete casas havia sete gatos, cada um deles come sete ratos, cada um dos quais havia comido sete espigas, cada uma delas teria produzido sete medidas de grão. O problema evidentemente não pedia uma resposta prática, que seria o número de medidas de grãos poupadas, mas a, nada prática, soma dos números de casas, gatos, ratos, espigas e medidas de grão. Com o passar dos anos tivemos muitas contribuições importantes tais como as observações feitas pela escola pitagórica 600 a.c. como a relação entre a *música e os números*, em que os intervalos musicais se colocam de modo que admite expressão através de progressões aritméticas além dos *números Figurados.*



O Elementos de Euclides apresenta o estudo das proporções contínuas e Progressões Geométricas relacionadas, de forma que, se temos uma proporção contínua $a \div b = b \div c = c \div d$, então a, b, c, d formam uma Progressão Geométrica. Fibonacci em um dos problemas encontrados no seu livro *paria coniculorum* (1228 d.c.), desejando saber quantos pares de coelhos podem ser gerados deste par em um ano, se de um modo natural a cada mês ocorre a produção de um par e um par começa a produzir coelhos quando completa dois meses de vida.

O brilhante matemático Friedrich Gauss (1777-1855) que aos dez anos de idade, durante uma aula de matemática seu professor pediu para que todos os alunos obtivessem a soma dos números de 1 a 100. Em poucos minutos Gauss apresentou o resultado correto. Até então ninguém era capaz desse feito. Ele se baseou no fato de que a soma dos números opostos é sempre constante. Então multiplicou a constante pelo número de termos e dividiu pela metade, chegando a fórmula da soma de uma P.A.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$$

Breve Resumo da Parte Teórica de Conteúdo

Sequência é uma função $f : A \subset \mathbb{N} \to B$, A pode ser um conjunto finito ou infinito, neste último caso teríamos A = $\mathbb{N}$ donde todo elemento da sequencia passaria a possuir um sucessor, assim como o conjunto dos números naturais.

Os elementos de uma sequência são representados por variáveis com subíndices, os quais indicam as posições em que os elementos se encontram dentro da sequência dispostos entre parênteses, a exemplo disto $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...)$ isto é, a_i o elemento e i com i= 1,2,3,..., sua posição na sequência. Elas podem representar sequências de figuras números, palavras etc.

Nesta proposta, nos limitaremos ao estudo das sequências que apresentam um padrão de regularidade, aplicaremos a relação de recorrência que é uma técnica que permite definir algoritmos partindo de problemas particulares para problemas genéricos. Em particular, faremos o estudo das Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas.

3.6.1 Progressão Aritmética (P.A.)

Chama-se de progressão aritmética (P.A.), toda sucessão de números que, a partir do segundo, a diferença entre cada termo e o seu antecessor é constante, e a denominamos de *razão* e indicamos pela letra r, isto é, toda P.A. $(a_1, a_2, a_3, a_4, .., a_n, ...)$ possui $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ... = a_n - a_{(n-1)} = r$, denominado de razão.

20 Exemplo. *considere a progressão aritmética (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,..)*
$4 - 2 = 6 - 4 = 8 - 6 = ... = a_n - a_{(n-1)} = 2$, $n \in \mathbb{N}$

Note que pela lei da tricotomia r pode ser: 1. $r = 0$ (P.A. é **constante**); 2. $r > 0$ (P.A. é **crescente**); e 3. $r < 0$ (P.A. é **decrescente**). Como sabemos, o sucessor de um termo de uma P.A. é igual ao referido termo mais a razão r. Para uma P.A. genérica podemos dizer que o termo geral de uma progressão aritmética é:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \times r$$

Pelo método da observação poderemos ainda concluir que

$$a_n = a_m + (n - m) \times r$$

Faremos algumas observações:

1. **Como escrever em termos de uma P.A.**.
   Para 3 termos: $(x, x + r, x + 2.r)$ ou $(x - r, x, x + r)$;
   Para 4 termos: $(x, x + r, x + 2.r, x + 3.r)$ ou $(x - 3.y, x - y, x + y, x + 3.y)$, onde $y = \frac{r}{2}$;
   Para 5 termos: $(x, x + r, x + 2.r, x + 3.r, x + 4.r)$ ou $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2.r)$.

2. **Interpolação de meios Aritméticos**.
   Interpolar ou inserir k meios aritméticos entre dois números a_1 e a_n, significa obter uma

progressão aritmética de $k+2$ termos, cujos extremos são a_1 e a_n. Pode-se dizer que todo problema que envolve interpolação se resume em calcularmos a razão da P.A.

21 Exemplo. *Seja a sequência* $(1,\ldots,10)$ *uma Progressão Aritmética, vamos inserir 8 meios aritméticos, logo a P.A. terá* $8+2$ *termos, onde:* $a_1 = 1$*;* $a_n = 10$*;* $k = 8$ *e* $n = k+2 = 10$ *termos.*

$$a_n = a_1 + (n-1)\times r \rightarrow r = \frac{(a_n - a_1)}{(n-1)} = \frac{(10-1)}{(10-1)} = 1$$

Desta forma a P.A. resultante é (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10).

Somas dos termos de uma P.A.

O método utilizado por Gaus para calcular os n primeiros termos de uma P.A. já citados no contexto histórico do tema, foi desenvolvida da seguinte forma:

$$S = 1+2+3+4+5+...+(n-1)+n \quad \text{e} \quad S = n+(n-1)+...+5+4+3+2+1$$

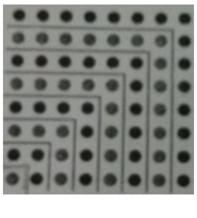
Somando, obtemos $2S = (n+1)+(n+1)+..+(n+1)$ com n parcelas, ou seja,

$$S = \frac{n\times(n+1)}{2}$$

Introduziremos algumas somas que podem ser visualizadas geometricamente através das figuras abaixo. A ideia é apresentar algumas demonstrações já conhecidas pelos gregos antigos (apud Revista do professor de Matemática: 2009:96)

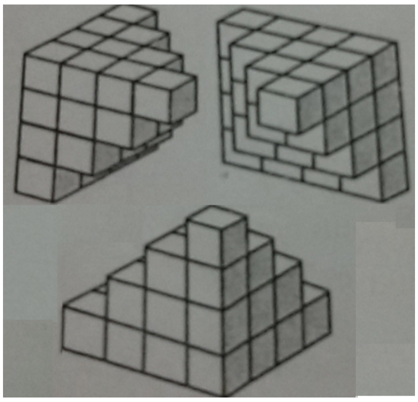
A soma dos n primeiros números Naturais.

$$1+2+3+4+5+6+...+n = \frac{(n+1)\times n}{2}$$

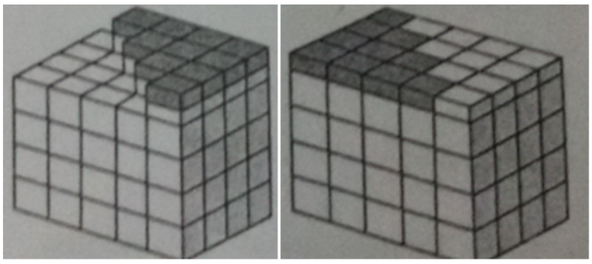


$$1+3+5+7+9+...+(2.n-1) = n^2$$

A soma dos quadrados dos n primeiros números Naturais.



Inicialmente consideramos cada figura formada por $1+4+9+...+n^2$ cubos unitários. Reunindo as três figuras, nota-se que o último andar possui apenas metade dos cubos necessários para completar um paralelepípedo. Se considerarmos o último andar cortados pela metade para completar o paralelepípedo, concluiremos que a soma $1+22+32+...+n^2$, que é o volume de uma das três figuras reunidas, corresponde a um terço do volume de um paralelepípedo de base n por $(n+1)$ e altura $\frac{n+1}{2}$.



Segue então que $1+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n}{3} \times (n+1) \times (n+\frac{1}{2}) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Atividades.

A1) MÁGICA: Adivinhando Três Dias Consecutivos, Escolhidos em Segredo.

O mágico dá ao espectador a página de um calendário. Pede-se que escolha mentalmente três dias consecutivos mas que não os revele. Pede-lhe então que calcule a soma desses três dias. Pede-lhe para informar o valor da soma. Se o espectador escolheu os dias destacados no exemplo da figura, ele dirá 72. O mágico, então, revela-lhe quais dias foram escolhidos.

S	T	Q	Q	S	S	D
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

Por que o truque funciona? Uma sequência de três dias consecutivos tem a seguinte forma:

$$d-1,\ d,\ d+1$$

A soma desses três termos é obviamente $3d$. Sendo assim, ao dizer a soma o espectador estará revelando o triplo do 2º termo. Portanto, basta dividir por 3 a soma revelada para "adivinhar"a data d e, consequentemente, a sequência de 3 dias.

No exemplo da figura anterior, $23 + 24 + 25 = 75$, e $72 \div 3 = 24$, a data central. O mágico pode repetir a brincadeira, aumentando o número de dias consecutivos a serem escolhidos, para 4 dias, ou 5 dias e, informando sobre o valor da soma, revelar os dias pensados pelo espectador.

Com o mesmo calendário podemos adivinhar três datas consecutivas de um dia da semana, ou seja, três números consecutivos de uma mesma coluna. Novamente pedimos que a pessoa escolha um dia da semana e marque no calendário três datas consecutivas deste dia escolhido. Seguidamente, ao pedir que revele a soma das datas escolhidas, o mágico procede como no truque anterior, perceba que neste caso, teremos

$$d-7,\ d,\ d+7$$

Assim sendo, a soma desses três números é $3d$. Basta então dividir a soma revelada por 3, e obter o segundo termo do dia escolhido. Subtrai-se 7 a d, tem-se o primeiro dia, somando-se 7 a d, tem-se o terceiro. $3 + 10 + 17 = 30$, $30 \div 3 = 10$ a data central,

S	T	Q	Q	S	S	D
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

$10 - 7 = 3$ a primeira data e $10 + 7 = 17$ a terceira data escolhida. Observe que esse truque pode ser adaptado para um maior número de dias consecutivos.

A2.1) JOGO: Baralho de P.A.

Jogando com PA foi desenvolvido pelas estudantes Paloma Rhayka, Rosa Katiani Pereira da Conceição e Renata Camacho Bezerra do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE (2006)[9].

Tem como proposta estruturar sequências lógicas, na forma de uma Progressão Aritmética, onde exista: uma razão (r); um 1º termo (a_1); o número de termos (n) e o último termo da sequência (a_n). O número de termos será fixo em todos os jogos, pois equivale ao número de cartas, seis. O jogo formado por dois baralhos com cartas enumeradas de 1 a 30. O desenvolvimento do jogo "Jogando com a P. A."acontece da seguinte forma:
1. Um dos jogadores distribui seis cartas a cada participante, uma a uma. **2**. De acordo com as cartas em mãos, cada jogador raciocina de maneira lógica, e define qual será a razão de sua sequência. Essa razão deve variar de dois a cinco, impreterivelmente. Essa razão pode ser modificada de acordo com a estratégia do jogador e o andamento do jogo. A razão escolhida deve ser mantida sobre sigilo. **3**. O jogador à direita de quem distribuiu as cartas, pega uma carta e descarta outra que não é compatível à sua sequência. **4**. As cartas descartadas só podem ser adquiridas pelo jogador à direita do descartante. **5**. Esse movimento continua até o final do jogo. **6**. O jogador que errar a sequência ou os termos da P.A. sai do jogo e os outros participantes continuam. **7**. Caso as cartas acabem sem nenhum dos participantes ter completado sua sequência, todas as cartas que foram descartadas serão embaralhadas e adquiridas novamente até uma sequência ser completada. Será considerado vencedor do jogo, quem completar primeiro sua sequência, com a razão escolhida, e falar aos outros participantes qual é a razão, e os termos, a_1 e a_n.

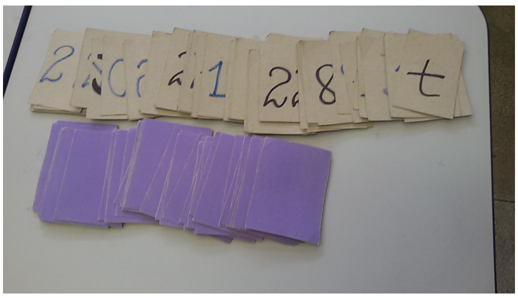
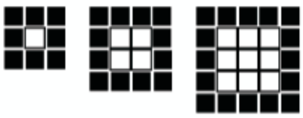


Figura 3.13: Cartas do baralho jogando com P.A..

[9]disponível em: < *http* :
www.sbembrasil.org.br >

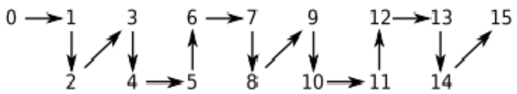
A3) DESAFIO

1. (OBMEP- 2010) Mosaicos quadrados. Uma sequência de mosaicos quadrados é construída com azulejos quadrados pretos e brancos, todos de mesmo tamanho, sendo o primeiro cercado por azulejos pretos, o segundo por quatro azulejos brancos cercados por azulejos pretos e assim, sucessivamente, como indica a figura. Se numa sequência de mosaicos formada de acordo com esta regra forem usados 80 azulejos pretos, quantos serão os azulejos brancos utilizados?

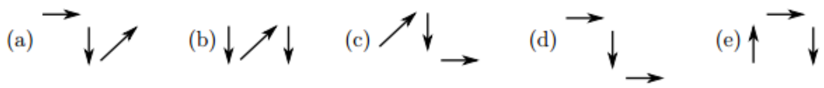


(a) 55 (b) 65 (c) 75 (d) 85 (e) 100

2. (OBMEP - 2010) Ligando números por flechas. Os números de 0 a 2000 foram ligados por flechas; a figura dada mostra o começo do processo.



Qual é a sucessão de flechas que liga o número 1997 ao número 2000?



Plano de ação e observações pedagógicas.

O plano de ação descrito abaixo, apresenta uma sequência sugerida por alguns estudantes. Neste sentido, os alunos já estavam acostumados e opinavam sobre as ordens das atividades. Sendo assim, começamos pelo jogo e este desencadeou um campeonato, logo repetido na outra turma. Na interpretação geométrica da soma, utilizamos cubos coloridos de madeira que a escola possuía e foi permitida a manipulação dos objetos aos estudantes a fim de uma melhor compreensão, é possível fazê-los de papel.

Momentos	Eventos
1	Jogo: Baralho de P.A.;
2	Fundamentação teórica: Progressão Aritmética (P.A.). Mágica: Adivinhando 3 dias consecutivos
3	Problema desafio: Sentido das flechas
4	Fundamentação teórica: A soma dos termos de uma PA, segundo Gauss; Interpretação geométrica da soma.

Tabela 3.9: Plano de ação: Progressão Aritmética.

Sugestões:

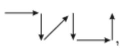
1. Após revelar a mágica, continue a brincadeira ampliando o número de dias consecutivos;
2. Use a história de Gauss para propor o mesmo desafio aos estudantes;
3. É possível recorrer a cubos de papel coloridos, ou madeiras, para exemplificar a soma geométrica;

Problema desafio proposto e sua respectiva solução, segundo a interpretações de alguns estudantes.

Ligando números por flechas- solução.

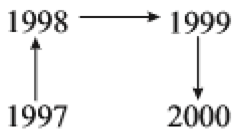
Para a resolução deste problema foi sugerido aos estudantes, após algum tempo de tentativa, investigar algum padrão de comportamento das flechas. Seguidamente foi percebido e comentado entre eles. Dando continuidade ao comportamento das flechas, ao transcrever, perceberam o padrão dos números que sempre começavam com as flechas. A partir desta percepção efetuaram a divisão que resulta como 1998 o múltiplo de 6 mais próximo de 2000, completando a sequência desejada. De maneira geral, a maioria dos estudantes conseguiram compreender e resolver este problema.

solução segundo o caderno da OBMEP 2010. O caminho-padrão é o que se repete, a saber, formado por seis flechas, sempre começando nos múltiplos de 6, ou seja, em 0, 6, 12, etc.



Vamos averiguar qual é a posição de 1997 em relação ao múltiplo de 6 mais próximo. Dividindo

1997 por 6, obtemos $1997 = 6 \times 332 + 5$, correspondendo a 336 caminhos-padrão mais o resto de 5 flechas. Portanto, 1998 é múltiplo de 6 mais próximo de 1997, ocupando a primeira posição no caminho-padrão. Assim, é o caminho que ocorre entre 1997 e 2000. A opção correta é (e).

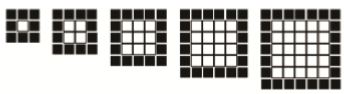


Mosaicos quadrados - resolução

No primeiro mosaico, temos $3+3+1+1 = 8$ azulejos pretos, no segundo, temos $4+4+2+2 = 12$, no terceiro, temos $5+5+3+3 = 16$ e não é difícil perceber (e verificar) que os próximos mosaicos têm 20 e 24 azulejos pretos, pois a cada novo mosaico são usados mais quatro azulejos pretos, um em cada lado. Como $8 + 12 + 16 + 20 + 24 = 80$, é possível construir exatamente cinco mosaicos. Finalmente, o número total de azulejos brancos nesta sequência de cinco mosaicos é

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55.$$

A opção correta é (a).



3.6.2 Progressão Geométrica (P.G.)

Definimos uma progressão geométrica (P.G.) toda sucessão de números em que cada termo a partir do segundo é igual ao seu antecessor multiplicado por uma constante q. Isto é, se b_i representa um elemento da sequência na posição i, vale:

$$b_i = b_{i-1} \cdot q, \text{ segue} \quad q = \frac{b_i}{b_{i-1}} \qquad \forall i \epsilon \mathbb{N}.$$

Portanto toda P.G. $(b_1, b_2, b_3, b_4, .., b_n, ...)$ possui $\dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{b_3}{b_2} = \dfrac{b_4}{b_3} = ... = \dfrac{b_n}{b_{(n-1)}} = q$, denominamos de *razão*.

22 Exemplo. *Considere a progressão Geométrica* $(3, 6, 12, 24, ...)$
$\dfrac{24}{12} = \dfrac{12}{6} = \dfrac{6}{3} = ... = \dfrac{b_n}{b_{(n-1)}} = 2 \; n \in \mathbb{N}$

Note que:

1. $q = 1$ (P.G. é constante)

2. $q > 1$ (P.G. é crescente)

3. $0 < q < 1$ (P.G. é decrescente)

4. $q < 0$ (P.G. alternada)

Por definição, o próximo termo de uma P.G. é igual ao referido termo multiplicado pela razão q. Para uma P.G. genérica podemos dizer que o termo geral de uma progressão geométrica é:

$$b_n = b_1.q^{(n-1)}.$$

Poderemos ainda concluir que:

$$b_n = b_m.q^{(n-m)}$$

Apresentaremos aqui algumas observações importantes:

1. **Como escrever em termos de uma P.G.**.
   Para 3 termos: $(x, x.q, x.q^2)$ ou $(\frac{x}{q}, x, x.q)$
   Para 4 termos: $(x, x.q, x.q^2, x.q^3)$ ou $(\frac{x}{y^3}, \frac{x}{y}, x.y, x.y^3)$. Onde $y = \sqrt{q}$
   Para 5 termos: $(x, x.q, x.q^2, x.q^3, x.^4)$ ou $(\frac{x}{q^2}, \frac{x}{q}, x, x.q, x.q^2)$

2. **Interpolação de meios Geométricos**.
   Interpolar ou inserir k meios geométricos entre dois números b_1 e b_n, significa obter uma progressão geométrica de $k+2$ termos, cujos extremos são b_1 e b_n. Pode-se dizer que todo problema que envolve interpolação se resume em calcularmos a razão da P.G.

23 Exemplo. *seja P.G.* $(1, \ldots, 625)$, *vamos inserir 3 meios geométricos, logo a P.G. terá* $3+2$ *termos, onde:*

$b_1 = 1$; $b_n = 625$; $k = 3$ *e* $n = k + 2 = 5$ *termos.*

$b_n = b_1.q^{(n-1)} \rightarrow q^{(n-1)} = \frac{(b_n)}{(b_1)} = \frac{(b_5)}{(b_1)}$

$q^4 = \frac{625}{1} \rightarrow q = \sqrt[4]{625} = 5$ *Desta forma a P.G. resultante é (1, 5, 25, 125, 625).*

Chamemos de S_n a soma dos n termos de uma P.G. com $q \neq 1$. seja ainda $S_n.q$ todos os termos multiplicados por q

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + ... + b_{(n-1)} + b_n \quad (1)$$

$$S_n.q = b_n.q + b_{(n-1)}.q + ... + b_5.q + b_4.q + b_3.q + b_2.q + b_1.q \quad (2)$$

Subtraindo as equações: (1) - (2), segue $S_n - S_n.q = b_1 - b_n.q \rightarrow S_n.(1-q) = b_1 - b_1.q^{(n-1)}.q$

$$S_n = b_1.\frac{1-q^n}{1-q}$$

Poderemos ainda rescrever a expressão: $S_n = \dfrac{a_1}{1-q} - \dfrac{a_1.q^n}{1-q}$

24 Exemplo. *Diz a lenda que o inventor do xadrez pediu como recompensa 1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos pela segunda, 4 pela terceira e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada casa nova. Como o tabuleiro de xadrez tem 64 casas, o número de grãos pedido pelo inventor do jogo é a soma dos 64 primeiros termos da progressão geométrica* $1, 2, 4, ...$ *O valor dessa soma é*

$$S_n = b_1 = \frac{1-q^n}{1-q} = 1.\frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1.$$

Note que a soma dos termo de uma P.G. infinita com $0 < q < 1$, significa $n \rightarrow \infty$, Deste modo a expressão:

$$S_{n\rightarrow\infty} = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1.q^n}{1-q} \Longrightarrow S_{n\rightarrow\infty} = \frac{a_1}{1-q}$$

25 Exemplo. *O limite da soma* $0,4 + 0,04 + 0,004 + ...$ *quando o número de parcelas tende ao infinito é igual a:*

$$\frac{0,4}{1-0,1} = \frac{4}{9} \text{ \textit{observe que} } 0,4 + 0,04 + 0,004 + ... = 0,44444...$$

Atividades.

A1) MÁGICA: Quadrado Mágico Multiplicativo [10].

Inicialmente, proponha aos estudantes que ditem, ou escolham, nove termo consecutivos com propriedades de uma P.G. seguidamente, apresente o tal quadrado. A proposta é colocarmos nove termos consecutivos de uma progressão geométrica qualquer, e torna-los suficientes para formação de um quadrado mágico multiplicativo. Aqui abordaremos os quadrados mágicos de ordem 3, ou seja, os quadrados de ordem 3 cuja multiplicação dos termos de cada coluna linha ou diagonal é igual. O quadrado mágico de ordem 3 formado pelos números de 1 a 9 admite essencialmente uma única solução, sendo as demais obtidas através de simetrias. Uma dessas soluções é conhecido como quadrado de Loh-Shu e sua constante mágica (soma de cada uma das linhas, colunas e diagonais) é igual a 15. Esse experimento é totalmente análogo em termos de metodologia e de conteúdo ao experimento Quadrados Mágicos Aditivos. Dada uma expressão geométrica de nove termos, se posicionarmos todos os seus termos a_i na posição que o número i ocupa no quadrado de LOH-SHU, o quadrado resultante também será mágico.

26 Exemplo. *Considere a sequência a P.G* (3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768) *com os termos* $a_1 = 3$, $a_2 = 6, a_3 = 12, ..., a_9 = 768$ *com o auxilio do quadrado mágico de LOH-SHU, posicionaremos os termos para que satisfaça a propriedade do quadrado mágico multiplicativo.*

8	1	6
3	5	7
4	9	2

⇨

a_8	a_1	a_6
a_3	a_5	a_7
a_4	a_9	a_2

⇨

384	3	96
12	48	192
24	768	6

$384 \times 48 \times 6 = 24 \times 48 \times 96 = 110592$

$384 \times 3 \times 96 = 12 \times 48 \times 192 = 24 \times 768 \times 6 = 110592$

$384 \times 12 \times 24 = 3 \times 48 \times 768 = 96 \times 192 \times 6 = 110592$

Além disso, para se obter a constante mágica, basta notar que a multiplicação de todos os nove termos é igual à multiplicação das três linhas; portanto, é igual ao cubo da constante

[10]Disponível em: < $http : //objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/17064/index.html?sequence =$ 19 >

mágica. $\sqrt[3]{384 \times 3 \times 96 \times 12 \times 48 \times 192 \times 24 \times 768 \times 6} = 110592$

Porque o truque funciona? Observe que os elementos que compõe o quadrado fazem parte de uma P.G., e por tanto, segue as seguintes equivalências:

$$\boxed{\begin{array}{c}
a_8 \cdot a_1 \cdot a_6 = a_1.q^7 \cdot a_1 \cdot a_1.q^5 = a_1^3.q^{12} \\
a_3 \cdot a_5 \cdot a_7 = a_1.q^2 \cdot a_1.q^4 \cdot a_1.q^6 = a_1^3.q^{12} \\
a_4 \cdot a_9 \cdot a_2 = a_1.q^3 \cdot a_1.q^8 \cdot a_1.q^1 = a_1^3.q^{12} \\
a_8 \cdot a_3 \cdot a_4 = a_1.q^7 \cdot a_1.q^2 \cdot a_1.q^3 = a_1^3.q^{12} \\
a_1 \cdot a_5 \cdot a_9 = a_1 \cdot a_1.q^4 \cdot a_1.q^8 = a_1^3.q^{12} \\
a_6 \cdot a_7 \cdot a_2 = a_1.q^5 \cdot a_1.q^6 \cdot a_1.q^1 = a_1^3.q^{12} \\
a_6 \cdot a_5 \cdot a_4 = a_1.q^5 \cdot a_1.q^4 \cdot a_1.q^3 = a_1^3.q^{12} \\
a_8 \cdot a_5 \cdot a_2 = a_1.q^7 \cdot a_1.q^4 \cdot a_1.q = a_1^3.q^{12}
\end{array}}$$

por fim temos

$$\sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 \cdot a_9} = \sqrt[3]{a_1.a_1.q \cdot a_1.q^2 \cdot a_1.q^3 \cdot a_1.q^4 \cdot a_1.q^5 \cdot a_1.q^6 \cdot a_1.q^7 \cdot a_1.q^8}$$

$$\sqrt[3]{a_1.a_1.q \cdot a_1.q^2 \cdot a_1.q^3 \cdot a_1.q^4 \cdot a_1.q^5 \cdot a_1.q^6 \cdot a_1.q^7 \cdot a_1.q^8} = \sqrt[3]{\cdot a_1^9.q^{36}}$$

$$\sqrt[3]{a_1^9.q^{36}} = a_1^3.q^{12}$$

A2) JOGO: Jogando com a P.G.

Este jogo é totalmente análogo ao “jogando com P.A.”. Nele faremos um baralho com 52 cartas, com 4 naipes, cada naipe correspondente a coleção dos múltiplos consecutivos dos números 2, 3, 4, e 5. totalizando 48 cartas, adicione um coringa a cada naipe. O desenvolvimento do jogo “Jogando com a P. G.”acontece da seguinte forma:

1. Um dos jogadores distribui nove cartas a cada participante, uma a uma. **2**. De acordo com as cartas em mãos, cada jogador raciocina de maneira lógica, e define qual será a razão de sua sequência. Essa razão deve variar de um a doze. Essa razão pode ser modificada de acordo com a estratégia do jogador e o andamento do jogo. A razão escolhida deve ser mantida sobre sigilo. caso a sequência seja constante a P.G. deve ter naipes diferentes. **3**. O jogador à direita de quem distribuiu as cartas, pega uma carta e descarta outra que não é compatível à sua sequência. **4**. As cartas descartadas só podem ser adquiridas pelo jogador à direita do descartante. **5**. Esse movimento continua até o final do jogo, em sentido anti-horário. **6**. O jogador que errar a sequência ou os termos da P.G. sai do jogo e os outros participantes continuam. **7**. Caso as cartas acabem sem nenhum dos participantes ter completado sua sequência, todas as cartas que foram descartadas serão embaralhadas e adquiridas novamente até uma sequência ser completada.Será considerado vencedor do jogo, quem completar primeiro três sequência, com a razão escolhida, e falar aos outros participantes qual é a razão, e os termos,a_1, a_2 e a_3.

A3) DESAFIO

1. "Quando estava indo para Sant Ives, encontrei um homem com sete esposas. Cada esposa possuía sete sacos e em cada saco havia sete gatos. Cada gato tinha sete filhotes. Se contarmos os filhotes, os gatos, os sacos e as esposas quantos estavam indo para Sant. Ives?"
   Solução comentada na seção posterior.
2. Uma pessoa começando com R$ 64,00, faz seis apostas consecutivas, em cada uma das quais arrisca perder ou ganhar a metade do que possui na ocasião. Se ela ganha três vezes e perde três dessas apostas, pode-se afirmar que ela:
   (a) Ganha dinheiro;
   (b) Não ganha nem perde dinheiro;
   (c) Perde R$ 27,00;
   (d) Perde R$ 37,00;
   (e) Ganha ou perde dinheiro, dependendo da ordem em que ocorreram suas vitórias e derrotas.
3. Um garrafão contém p litros de vinho. Retira-se um litro de vinho do garrafão e acrescenta-se, um litro de água. obtendo-se uma mistura homogênea; retira-se, a seguir um litro da mistura e acrescenta -se um litro de água e assim por diante. Qual a quantidade de vinho que restará no garrafão após n dessas operações?

Plano de ação e observações pedagógicas.

A nossa última sequência transcorreu em um período de 6 semanas. Reverenciou o contexto histórico, e conduziu um problema citado em achados arqueológicos como problema desafio. Para potencializar o aprendizado do último tópico " a soma dos termos de uma

PG"solicitamos uma pesquisa, qual a relação entre torre de Hanói, conhecida pela maioria dos estudantes, e o tema em estudo. Embora, o trabalho fosse rico para explorar outros saberes, o tempo letivo não nos permitiu prosseguir. Por esta razão nos limitamos apenas cita-lo.

Momentos	Eventos
1	Contexto histórico: Problemas de P.G. na Babilônia, Egito e Grécia; Problema desafio: Sant Ives (descrito no papiro de Rhind).
2	Fundamentação teórica: Progressão Geométrica (P.G.). Mágica: quadrado mágico multiplicativo
3	Jogo: Baralho de P.G.
4	Fundamentação teórica: A soma dos termos de uma P.G.

Tabela 3.10: Plano de ação: Progressão Geométrica.

Sugestões:

1. Introduza o contexto histórico com as perguntas: qual a relação entre a música e a matemática; o que determinam as proporções contínuas e conclua com o problema de Sant Ives, solicitando a solução dos estudantes;

2. Revelada a mágica, desafie os estudantes a apresentar um quadrado mágico de ordem superior a 3;

3. Pela familiaridade com o baralho de PA é possível proporcionar um campeonato com o baralho de PG.

Problema desafio proposto e sua respectiva solução, segundo a interpretações de alguns estudantes.

Indo para Sant Ives - resolução

O que descreveremos aqui, será segundo o raciocínio dos estudantes. A sugestão dada inicialmente, é que tentassem montar um esquema, em formato de árvore, com uma quantidade menor de participantes para compreender o problema. Após o caso em que havia apenas 2 esposas, sacos, gatos e filhotes. A discussão coletiva sobre essa situação, facilitou a compreensão para o problema em questão.

São 7 esposas; 7 esposas $\times$ 7 sacos $=$ 49 sacos; 49 $\times$ 7 gatos $=$ 343 gatos grandes e são 343 $\times$ 7 $=$ 2401 filhotes. Totalizando $7 + 49 + 343 + 2041 = 2.440$ Observação feita por nós: se quisermos considerar que todos estavam indo para Sant Ives, devemos somar o narrador, o que resulta em 2.441. Caso contrário só poderemos afirmar a ida do narrador, resultando em 1.

Seis apostas consecutivas [11] *- resolução*

$$64 \rightarrow 64.\frac{3}{2}.\frac{3}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = 27 \quad reais$$

Fica claro que se as vitórias e derrotas tivessem ocorrido em outra ordem, isso apenas mudaria a ordem dos fatores, sem alterar o produto, e a pessoa também terminaria com R$ 27,00. Se ela começou com R$64,00 e terminou com R$ 27,00 ela perdeu R$ 37,00. **A resposta é o item (d)**

Um garrafão de vinho [12] *-resolução*

Supondo que a solução é homogênea, após cada operação é retirada $\frac{1}{p}$ do volume de vinho e $\frac{1}{p}$ do volume de água. Sendo assim, o volume de vinho após cada etapa será o volume da etapa anterior multiplicado por $(1-\frac{1}{p})$, ou seja, os volumes de vinho formam uma P.G. de primeiro termo p e de razão $(1-\frac{1}{p})$. Após n operações, teremos

$$V_{n+1} = p \cdot (1-\frac{1}{p})^n \quad = \quad p \cdot (\frac{p-1}{p})^n \quad = \quad \frac{(p-1)^n}{p^{n-1}}$$

[11] Resolução segundo LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto, WAGNER,Eduardo; MORGADO, Augusto Cézar. Matemática do Ensino Médio, vol. 2, SBM. 2004. p.24

[12] Disponível em:< *http : //clubes.obmep.org.br/blog/problema−de−gincana−uma−mistura−de−vinho/* >

Capítulo 4

RESULTADOS

Em decorrência de tudo que foi vivenciado, relata-se uma pesquisa com os discentes, que tenta descrever se diversas estratégias e atividades, realizadas durante todo ano letivo, promoveram a tão desejável empatia à disciplina. além disso, as considerações da mestranda.

4.1 Pesquisa com os discentes

Neste tópico relatam-se os resultados obtidos do questionários aplicados aos 87 alunos do 1º ano do ensino médio, os quais participaram das atividades ao longo do ano letivo de 2016. Vale salientar que os estudantes avaliados tiveram a mestranda apenas como professora de aritmética, deixando assim os demais conteúdos da turma para ministração de outros professores.

Pesquisados com o objetivo de estudar as estratégias de ensino-aprendizagem mais significativas na visão dos entrevistados, foram elaborados 4 perguntas. A primeira com múltipla escolha e as outras abertas. Desta forma, apenas para a primeira é possível a elaboração de uma tabela quantitativa, nas demais, por se tratar de questões subjetivas, buscaremos apresentar as ideias que permearam as respostas de nossos estudantes.

Questionário

Questão 1: Dentre as modalidades descritas abaixo, assinale duas alternativas em que você julga aprender mais.

a)Mágica b)Jogo c)Contexto Histórico d)Problemas Desafios e)Aulas Expositivas

Questão 2: Na sua opinião, de modo geral, as aulas desenvolvidas pela professora conseguem fazer você gostar mais da matemática?

Questão 3: Na sua opinião, sobre as aulas de aritmética, promoveram um aumento do rendimento escolar?

Questão 4. Destaque um ponto positivo e um negativo das aulas de Aritmética.

Resultados:

Sobre a questão 1: com destaque para os jogos e as mágicas, percebemos através dos dados da tabela 4.1 que as atividades foram bem recebidas no processo de ensino. Percebe-se ainda, que de alguma forma, isto é, por algumas atividades, a maioria dos estudantes não priorizam as aulas expositivas. Talvez o resultado esteja associado aos momentos descontraídos que as outras ações proporcionaram, seguidas da possibilidade de aprender fazendo.

	Valor absoluto	Valor percentual
Jogos e Mágica	57	65,52%
Problema Desfio	47	54,02%
História/curiosidades	39	44,83%
Aula expositiva	31	35,63%
Total	174	200%

Tabela 4.1: Participação dos estudantes na Questão 1.

Analisando a questão 2: verificamos que a maiorias das respostas são positivas com relação as aulas, no entanto há uma ressalva sobre "gostar mais de Matemática". Nela, reverencia-se o "sim"em 13,79% das respostas. Já o "sim"acompanhado de uma certa adversidade, que evidenciara o não favoritismos em relação as outras disciplinas, se deu em 51,72% das afirmativas. Quando não, respondidas em parte, isto é, "mais ou menos".

Considerando a questão 3: quanto a percepção do rendimento escolar, 65,52% dos estudantes declaram que as aulas ajudaram na própria matemática e em outras disciplinas. As variáveis levantadas pelos estudantes neste ponto, refere-se as notas que os mesmos obtiveram e o reflexo de comentários positivos de outros professores. Isto é, o comparativo de notas foram elencadas, como também, expressões: "o professor disse". Na contra mão, os que se limitaram em responder "não"e "não sei responder".

Observando a questão 4: Dentre muito itens levantados pelos estudantes, tais como: ter mais tempo para aprender; a explicação da professora; o barulho da sala; o calor. Destaca-se com 68,97% a "diversidade de atividades", os estudantes referenciaram mais de uma atividade proposta por assunto como ponto positivo. Já para o ponto negativo destaca-se com 36,78% os horários em que aconteceram as aulas.

Desta forma, os dados revelam a satisfação dos estudantes em participar de aulas que possuem atividades diversificadas, com preferência pelos exercícios lúdicos seguidos de problema desafio. Declararam ser "aulas que fogem do normal"e consideraram essa dinâmica como ponto positivo. A relação com a disciplina melhorou e desencadeou bons rendimentos, principalmente quando ela é fruto de um a avaliação contínua.

No aspecto do "gostar mais da matemática"destacamos a ressalva feita pelos estudantes, que pode ser, resultado da bagagem de toda uma vida escolar, como também, as condições e estruturas físicas muitas vezes inapropriadas. Aqui referimo-nos ao calor, bancos duros para um tempo de utilização muito extenso, salas lotadas e o horário apontado pelos próprios estudantes, logo após o almoço ou nas últimas do turno da tarde, em dias de aula integral, o que demandava um esforço maior para estarem ativos.

4.2 Considerações Finais

Sabemos que muitos estudantes ingressam no ensino médio apresentando dificuldades em matemática, e chegam até produzir aversão à disciplina. Muitas das dificuldades foram produzidas por um ensino inadequado e pouco funcional dos conteúdos. Não se deve ignorar que o desenvolvimento de novos conceitos e conhecimentos depende das habilidades intelectuais básicas, tais como: Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão. Por sua vez, o conhecimento só existe quando se cria uma nova estrutura sistêmica do organismo e entendemos que a percepção não é um fenômeno de uma via só, de fora pra dentro, ela também é de dentro para fora, resultando na representação simbólica do mundo. Consequentemente, deve-se considerar os diferentes "estilos cognitivos"e habilidades diversas, o que induz o professor a diversificar seu método de ensino.

Saber o que somos é a questão chave para melhorar o desempenho do ensino. Segundo Santos (2004) "O indivíduo constrói o conhecimento usando sensações, emoções, razão e intuição". Não somos seres lineares previsíveis, pelo contrário somos dinâmicos e criativos. O conhecimento só emerge em sua dimensão vitalizadora quando tem algum tipo de ligação com o prazer. (ASSMANN, 1996, p.31 apoud SANTOS, 2004 p.30)

Um professor experiente sabe que as atividades que cria, por mais preparadas que sejam, nem sempre dão os resultados esperados. A construção de atitudes, de competências ou de conhecimentos leva meses, até mesmo anos. Entretanto, o objetivo do docente sempre será auxiliar cada um a aprender. Nesta perspectiva, a experiência vivenciada com aplicação das atividades apresentadas aqui neste trabalho durante todo ano letivo de 2016, apontam para um caminho frutífero. Perseguir o prazer de aprender Matemática é corresponsabilidade de quem ensina.

O que fica é a missão que o professor deve desempenhar: deixar de ser um mero transmissor de conteúdos e assumir o papel de criador de situações estimulantes; adequar-se às novas exigências que percorre o caminho do saber a luz das ciências; conciliar métodos à sua realidade escolar; ajustar-se às expectativas de melhoria no processo de ensino aprendizagem; não contemplar apenas um ponto de vista, pois a variedade em atividades realizadas potencializa o desenvolvimento do aprendizado. Deste modo, pretende-se proporcionar aos estudantes desenvolvimento cognitivo; a corresponsabilidade de sua aprendizagem; cooperação; postura reflexiva; diversão; atitudes positivas à Matemática.

Percorrer o caminho da docência significa estar predisposto aos ajustes pedagógicos contínuos, tendo como objetivo principal o aprendizado dos estudantes. Vale salientar que andar neste compasso exige contínua adequação de mais e melhor aprimoramento técnico que perpassam as práticas da formação inicial de um professor. Neste contexto a própria essência do trabalho na escola demanda do docente uma organização interior e uma disposição para desenvolver-se intelectualmente.

Acreditamos que o resultado obtido neste trabalho gerou melhorias significativas no nosso fazer pedagógico e abriu caminhos para um trabalho reflexivo sobre nossa prática. Desejamos colocar à disposição dos colegas docentes a experiência que adquirimos.

O sistema escolhido para avaliar o desempenho dos estudantes em relação às atividades aplicadas foi realizado através de uma observação focada nas mudanças de atitudes dos mesmos. A conquista, neste caso, é desenvolver uma cultura de empenho e prazer em aprender. Portanto, não apresentaremos aqui tabelas quantitativas, apenas, relatos do que a experiência proporcionou.

O que faz esse trabalho diferenciado, para ativar o interesse e a motivação dos nossos estudantes por aritmética, é a variedade de práticas pedagógicas e o tempo que foi executado. Isto se justifica, porque os conteúdos que compõe a aritmética do 1^o ano do ensino médio foram abordados integralmente utilizando sequências didáticas, que transcorressem do conhecimento ao prazer de aprender. Essas práticas foram realizadas durante todo ano letivo de 2016.

Sabe-se que o desenvolvimento da empatia em relação à matemática não acontecerá através de uma aula ou assunto específico, apenas, isto é fruto de um plano contínuo. Neste sentido, é percebido que a trajetória de atividades, comentadas neste trabalho, desencadeou em nossos estudantes uma consciência de que é possível ter prazer em aprender, um determinado conteúdo, mesmo que inicialmente isto esteja distante de seu objetivo. Além de nos conduzir ao caminho que favorecesse a compreensão e consolidação dos conteúdos, propostos aos docentes, que se concretizou com o cumprimento dos desafios.

Todas as sequências desenvolvidas ao longo do ano destacam as fases que permeia a motivação, conceituação, consolidação e resolução de problemas, sugeridas por Zabala (2010). Sobre essas fases, apontamos a motivação relacionada a todos os elementos que fogem de uma aula expositiva sem a ação contextualizada de conteúdos. Tanto a conceituação quanto a consolidação englobam a formalização dos temas e as atividades lúdicas. O aprender a aprender se concretiza quando promove a potencialização de habilidades possíveis nas práticas desenvolvidas neste trabalho e seguidamente comentadas.

Ao refletir sobre as habilidades, e principalmente sobre a competência, em resolver problemas que nossos estudantes precisam desenvolver dentro de um contexto em que turmas possuem, em sua maioria, alunos com dificuldade de concentração e compreensão textual é relevante permitir o construir matemático em conjunto. Essa parceria visa complementar o limite de suas faculdades. O debater, o argumentar e o contra argumentar entre seus pares objetiva a segurança para o enfrentamento do novo. Entretanto, para nosso público alvo, destacamos não ser interessante apresentar em uma mesma aula mais de um problema desafio. Para eles, são significativas propostas que mesclem um problema desafio e uma atividade de outra natureza (histórias, curiosidades, vídeos ou jogos).

Na perspectiva dos jogos, observamos a responsabilidade que muitos assumiram em ensinar ao outro, além de conseguir identificar erros de aprendizagem, e conhecer os sentimentos dos colegas ao enfrentar as frustrações e conquistas que tais atividades promoveram. Inferir que toda energia, causa de conversas aleatórias e saídas sem propósito, não se dissipou e foi redirecionada aos jogos. Certamente foi a atividade que demandou mais tempo, dedicação dos estudantes e demonstrações de entusiasmo.

As adivinhações, denominadas matemágicas, foram bem recebidas pelos os estudantes. O empoderamento do conhecer o truque, isto é, a matemática por trás dele, foram levadas para além das salas dos 1º anos. Envolvendo os corredores da escola e uma interação com outros alunos, seguida pela disputa em desvendar os truques.

Em termos gerais, as sequências revelam as atividades diagnósticas como importantes instrumentos para perceber o ponto de partida do ensino, ou reensino, dos conteúdos que precisam estar contextualizados. Dispor das curiosidades históricas sempre associadas aos recursos visuais ou dinâmicos, distante de um monólogo. Todo problema desafio é bem aceito quando a resolução é feita em grupo, e denota ser crucial a inserção de "estudantes monitores"em todas as equipes. Os jogos possibilitam aprimorar várias habilidades e atitudes. É importante salientar os vários momentos de descontração e motivação que uma aula deve possuir, afim de desenvolver empatia e estabelecer relação de confiança aos estudantes.

Entendemos que o "consolidar"do que foi ensinado vagueia nos laços que os estudantes estabelecem com os conteúdos. Desta forma, contextualizar problemas, contar histórias, brincar em quanto se aprende aponta para uma aprendizagem desejável. Acreditamos que o rendimento apresentou melhoras para todos os estudantes, embora em ritmos diferentes, seja consequência dessas ações.

Como legado, este trabalho apresenta um material de ensino referente a um ano letivo. Proporcionando um ganho de tempo e esforço na busca e seleção do material de modo a assegurar aos estudantes, uma oportunidade de vivenciar diferentes experiências associadas a um mesmo assunto, crucial para uma aprendizagem satisfatória.

Referências Bibliográficas

[1] ALBERTI, Leon Batista; *Matemática Lúdica*. Tradução, André Telles, Jorge Zahar. 3. Ed. Rio de Janeiro, 2006.

[2] ANNA, Ilza Martins Santa; *Por que avaliar? Como avaliar?*. 17. ed. Petrópolis- RJ: VOZES, 2014.

[3] ANTUNES, Celso; *Jogos para estimulação das múltiplas inteligências*. 9. ed. Petrópolis-RJ: Vozes, 1999.

[4] BARBOSA, Ruy Madsen; *Conexão e educação matemática: brincadeiras, explorações e ações*. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

[5] BARONI, Rosa L.S. e NOBRE, Sergio. *A pesquisa em história da Matemática e suas relações com a Educação*, Matemática, in BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (org.) Pesquisa em Educação Matemática Concepções e Perspectivas. São Paulo: UNESP. 1999. pp. 129-136.

[6] BIEMBENGUT, M. S., *Modelação Matemática como Método de Ensino Aprendizagem de Matemática em cursos de* 1^o *e* 2^o *graus*. Rio Claro - SP:UNESP, 1990.

[7] BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson; *Modelagem Matemática no Ensino*. São Paulo: Contexto. 2003.

[8] BORDENAVE, Juan Díaz; PEREIRA, Adair Martins; *Estratégias de ensino-aprendizagem*, 29. ed. São Paulo: CORTEZ, 2005.

[9] BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros curriculares nacionais: novo ensino médio. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 1999.

[10] BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Disponível em: $< http : //www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm >$. Acesso em: 10 de outubro 2016.

[11] BRASIL. Resolução CNE/CP n.1, de 18/2/2002 que institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores na educação básica. 2002. Disponível em: $< http : //www.mec.gov.br >$. Acesso em: 10 outubro 2016.

[12] BRUMM, Jean; *Didática das matemáticas*, coleção: horizontes pedagógicos. Tradução de Maria José Figuereido. São Paulo: instituto PIAGET, 1996.

[13] D'AMBROSIO, Ubiratan. *A História da Matemática: Questões Historiográficas e Políticas e Reflexivas na Educação Matemática*, in Bicudo, Maris Aparecida Viggiani (org.) Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, p. 97, 1999.

[14] CURY, Helena Noronha; MOTTA, Carlos Eduardo Mathias . *A História da Matemática. In: Carvalho, Luiz Mariano et al. (Ed.). História e tecnologia no ensino da Matemática.*, in Bicudo, Maris Aparecida Viggiani (org.) Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP. 1999. p. 97.

[15] CAMPOS, Edson Nascimento *et al* Pimenta, Selma Garrido, organização; *Saberes pedagógico e atividades docentes*. 4. ed. São Paulo - SP: CORTEZ, 2005.

[16] CANDAU, Vera Maria; *a DIDÁTICA em QUESTÃO*. 26. ed. São Paulo - SP: VOZES, 1987.

[17] CARVALHO, Dione Lucchesi de; *Metodologia do Ensino da Matemática*, Série formação do professor. São Paulo-SP: CORTEZ, 1991.

[18] D'AMBROSIO, Ubiratan; *Métodos da Topologia: Introdução e Aplicações*, Livros Técnicos e Científicos. Rio de Janeiro - RJ: S.A., 1977.

[19] DANTE, Roberto José; *Didática Da Resolução De Problemas De Matemática*. 12. ed. São paulo-SP: Ática, 2005.

[20] Dicionário eletrônico Aurélio, Disponível em: $< https : //dicionariodoaurelio.com/ >$, acessado em dezembro de 2016.

[21] DIENES, Zoltan P.;*O poder da Matemática* . 1. ed. São Paulo: Atual Editora. 2006.

[22] FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia; *Círculos Matemáticos A experiência Russa*. Instituto de matemática pura e apicada IMPA, Rio de Janeiro- RJ, 2010.

[23] FONSECA, Vitor da; *Introdução às dificuldades de aprendizagem*. 2. ed. Porto Alegre: Editora Artes Médicas, pp. 127-146, 1995.

[24] FREIRE, Paulo; *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. 33. ed. São Paulo: PAZ E TERRA, 1996.

[25] GARDNER, Martin; *AH, DESCOBRI!*, Coleção: O prazer da Matemática. Lisboa: gradiva, 1990.

[26] GINO, Adréia Silva; SILVA, Auro da *et al.* SEED, MG, 2008, vol.4 -*Resolução de problemas: Problemas ou solução*. Caderno de Educação Matemática. Disponível em: $< http : //pactuando.files.wordpress.com/2015/04/material-suporte-para-modulo-8-e-9-resoluu00c7u00c3o-de-problemas. >$ acessado em Janeiro de 2017.

[27] GRANDO, Regina Célia. *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.* 2000. 224f.. Tese (Doutorado em Educação)- Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2000.

[28] GRANDO, Regina Célia. *O jogo suas possibilidades metodológicas no processo de ensino-aprendizagem da matemática*, 1995. 167f.. Dissertação (Dissertação em Educação)- Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1995.

[29] HUETE,J. C. Sánchez; BRAVO, J. A. Fernádez; *O ENSINO DA MATEMÁTICA: Fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas.* Porto Alegre: ARTMED, 2007.

[30] KANNII, Constance; DECLARK, Georgea; *Reinventando a Aritmética.* 4. ed. Campinas -SP: Saraiva. 1991. pp. 225-230.

[31] LIBÂNEO, José Carlos; *DIDÁTICA*. 2. ed. São Paulo- SP: CORTEZ, 2013.

[32] LIMA, Elon Lages; Carvalho, Paulo César Pinto de; Wagner, Eduardo e Morgado, Augusto César; *A Matemática do Ensino Médio*, Volume 2, Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro- RJ: SBM, 2004.

[33] LIMA, Elon Lages; Carvalho, Paulo César Pinto de; Wagner, Eduardo e Morgado, Augusto César; *Temas e Problemas Elementares*. 2. ed. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro- RJ: SBM, 2005.

[34] LUZIO, Nildo; ARAÚJO, C.Henrique. INEP, Brasília, novembro, 2004, Artigos- O Ensino da Matemática na Educação Básica. Disponível em: $< http : //www.inep.gov.br/imprensa/artigos/ensino_matematica.htm >$. Acessado em setembro de 2016

[35] MASETTO, Marcos Tarcíso; *Didática: a aula como centro*, Didática da Matemática. São Paulo- SP: FTD, 1997.

[36] MEIRIEU, Philippe; tradução, Vanise Pereira Dresch*APRENDER... SIM, MAS COMO?*. 7. ed. Porto Alegre: ARTMED, 1998.

[37] NUNES, Terezinha *et al*; *Educação Matemática: números e operações numéricas*. 29. ed. Petrópolis- RJ: VOZES, 2008.

[38] OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; FERNÁNDEZ, Adán José Carcho; *Iniciação à Matemática: um curso com prolemas e soluções*, Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro- RJ: SBM, 2010.

[39] PERRENOUD, Philippe; *10 novas competências para ensinar*. Porto Alegre: ARTMED, 2000.

[40] PIRES, Célia Maria Carolina; *Currículos de Matemática: da organização linear à ideia de rede*. São Paulo- SP: FTD, 2000.

[41] POLYA, George; *Sobre a resolução de problemas de matemática na escola secundária*. São Paulo: Atual. 1997. pp.1-3.

[42] POLYA, G.;*A Arte de Resolver Problemas* . Ed. INTERCIENCIAS, 1986

[43] Portal das OBMEP, Disponível em: $< http : //www.obmep.org.br/ >$, acessado em novembro de 2016.

[44] REDLING, Julyette Priscila. *Metodologia de ensino aprendizagem através de resolução de problemas: A visão e ação de alguns professores de matemática do ensino fundamental*

II., 2011. 166f.. Dissertação (Mestrado em ensino de ciências)- Faculdade de ciências da UNESP, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"Bauru. 2011.

[45] ROMANELLI, Otaíza de Oliveira; *História da educação no Brasil.* 30. ed. Petrópolis - RJ: VOZES, 2006.

[46] SÁ, Ilydio Pereira de; *A magia da da Matemática: Atividades Investigativas, Curiosidades e História da Matemática.* Rio de Janeiro: Moderna, 2007.

[47] SAMPAIO, João Carlos; MALAGUTE, Pedro Luiz Aparecido; *Mágicas, Matemática e outros Mistérios.* São Carlos: EDUFSCAR, 2009.

[48] SCHASTAI, Marta Burda ; PEDROSO, Sandra Mara Dias. SEED, Pará, 2009, Artigo- A resolução de problemas numa perspectiva metodológica. Disponível em: < *http : www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos*/1573 − 8 > acessado em Janeiro de 2017.

[49] Secretaria de Estado de Educação do Paraná. Portal Dia-a-dia Educação. Disponível em: < *http : //www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo* = 52 >- 2009, acessado em outubro de 2016.

[50] SMOLE, Kátia Stocco, DINIZ, Maria Ignez, PESSOA, Neide, ISHIHARA, Cristiane. *Jogos Matemáticos.* Porto Alegre: Grupo A. 2008

[51] STAREPRAVO, Ana Ruth; *Jogando com a matemática: números e operações.* Curitiba: Aymará, 2009.

[52] SOUZA, Júlio César de Mello; *A Matemática Divertida e Curiosa.* 26. ed. Rio de Janeiro: Record, 2009.

[53] TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro; *Como dois e dois: A construção da Matemática.* Didática da Matemática, São Paulo- SP: FTD, 1997.

[54] VALENÇA, Filho Décio; *Subversão Matemática: para jovens de 8 a 80 anos.* Recife: Cepe, 2014.

[55] VIGOTSKI, L.S.; organizadores Michael Cole... *et al*; *A formação Social da Mente.* Tradução: José Cipola Neto, Luíz Silveira Menna Barreto e Solange Castro Afeche; 7. ed. Campinas- SP: MARTINS FONTE. 2007. pp. 87-149.

[56] WEISS, Maria Lúcia Lemme; *Psicopedagogia Clínica- uma visão diagnóstica dos problemas de aprendizagem escolar*. 12. ed. Rio de Janeiro-RJ: Lamparina. 1991. pp. 225-230.

[57] ZABALA, Antoni; *A Prática Educativa: Como Ensinar*. Tradução Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: ARTMED, 2010.