



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



**José Ferreira de Queiroz Filho**

**A Reta de Nagel: Uma Abordagem Geométrica e Algébrica de  
um Alinhamento Notável**

RECIFE  
2017





UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



**José Ferreira de Queiroz Filho**

**A Reta de Nagel: Uma Abordagem Geométrica e Algébrica de  
um Alinhamento Notável**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva

RECIFE  
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE  
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

Q3r      Queiroz Filho, José Ferreira de.  
A reta de Nagel : uma abordagem geométrica e algébrica de um alinhamento  
Notável / José Ferreira de Queiroz Filho. – 2017.  
123 f. : il.

Orientador: Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco,  
Mestrado Profissional em Matemática, Recife, BR-PE, 2017.  
Inclui referências.

1. Geometria 2. Algebra linear 3. Pontos notáveis no triângulo 4. Reta de Euler  
5. Circunferência dos Nove Pontos 6. Geometria afim 7. Reta de Nagel 8. Círculo de  
Spieker I. Silva, Adriano Regis Melo Rodrigues da, orient. II. Título

CDD 510

JOSE FERREIRA DE QUEIROZ FILHO

**A Reta de Nagel: uma abordagem geométrica e algébrica de um alinhamento notável**

*Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

Aprovado em \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_

BANCA EXAMINADORA

---

**Prof. Dr. Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva** (Orientador(a))– UFRPE

---

**Prof. Dr. César Augusto Rodrigues Castilho** – DMAT-UFPE

---

**Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva**– PROFMAT/UFRPE



*Dedico este trabalho à minha família*



# Agradecimentos

Quero agradecer a Deus pela vida, saúde, coragem e por ser essa infinita fonte de sabedoria.

À minha esposa Michelle Duarte, aos meus filhos Millena Duarte e Miguel Duarte pela paciência, compreensão e por acreditarem sempre no meu potencial.

Aos meus pais, José Ferreira de Queiroz (In memoriam) e Maria José Cavalcanti de Queiroz, que apesar das dificuldades da vida souberam me educar.

Ao meu orientador Professor Dr. Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva, pela orientação motivadora, pelos ensinamentos, pelas sugestões, atenção, paciência e principalmente pela confiança depositada em meu trabalho.

Aos meus colegas de curso, com os quais convivi e compartilhei bons momentos, em especial Emerson Dantas, Márcio Rodrigo, Josemar Claudino e Carlos Eduardo.

À Professora Dra. Bárbara Costa, sempre atenciosa.

Agradeço à CAPES e à SBM pelos incentivos ao longo de todo o curso de Mestrado.

Agradeço a cada professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE.



*"O Senhor é sutil, mas não malicioso."  
(Albert Einstein)*



# Declaração

Eu, **José Ferreira de Queiroz Filho**, declaro para devidos fins e efeitos, que a dissertação sob título **A Reta de Nagel: Uma Abordagem Geométrica e Algébrica de um Alinhamento Notável**, entregue como Trabalho de Conclusão de curso para obtenção do título de mestre, com exceção das citações diretas e indiretas claramente indicadas e referenciadas, é um trabalho original. Eu estou consciente que a utilização de material de terceiros incluindo uso de paráfrase sem a devida indicação das fontes será considerado plágio, e estará sujeito à processo administrativos da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais. Declaro ainda que respeitei todos os requisitos dos direitos de autor e isento a Pós-graduação PROFMAT/UFRPE, bem como o professor orientador **Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva**, de qualquer ônus ou responsabilidade sobre a sua autoria.

Recife, 29 de Novembro de 2017.

---



# Resumo

Este trabalho tem por objetivo abordar conceitos importantes da Geometria Euclidiana a partir do estudo do triângulo e seus pontos notáveis, dando forma ao nosso objeto principal que é a Reta de Nagel e o círculo de Spieker. Buscamos com isso, estimular professores de matemática e alunos, em particular do ensino médio, a trabalharem em sala de aula com essa geometria, visando à melhoria dos processos de ensino e aprendizagem da matemática. Inicialmente abordamos conceitos introdutórios necessários ao nosso estudo, utilizando a Geometria Euclidiana Plana. Em seguida, exibimos os resultados que caracterizam os pontos notáveis do triângulo através das propriedades e conceitos vistos anteriormente e que são necessários à construção do nosso objeto de estudo. Mostramos um quadro comparativo entre as retas de Euler e Nagel, destacando suas principais propriedades e características. Com o objetivo de explorar novos conceitos, estendemos o nosso estudo tomando como base o artigo *A Reta de Euler e a Circunferência de Nove Pontos* dos autores Rojas e Mendoza. Abordamos a Geometria Afim, apresentando definições fundamentais básicas, formando uma linguagem necessária para falar sobre Álgebra Linear com enfoque em conceitos geométricos que são desenvolvidos e utilizados. Mostramos que a propriedade universal dos pontos no plano é fundamental para caracterizar os pontos notáveis de um triângulo. Utilizamos álgebra e métodos vetoriais em geometria, para obter as demonstrações e resultados relativos ao nosso objeto de estudo.

**Palavras-chave:** Geometria, Álgebra Linear, Pontos Notáveis no Triângulo, Reta de Euler, Circunferência dos Nove Pontos, Geometria Afim, Reta de Nagel, Círculo de Spieker.



# Abstract

This work aims to address important concepts of Euclidian Geometry originally from the study of the triangle and its remarkable points, giving shape to our main object which is the Nagel Point and the Spieker Circle. By that, we seek to stimulate maths teachers and students, particularly in high school, to work in the classroom with this geometry, aiming to improve the processes of teaching and learning of mathematics. Initially, we present necessary introductory concepts to our study, using Flat Euclidean Geometry. Then, we show the results that characterize the remarkable points of the triangle through the properties and concepts previously seen that are necessary to the construction of our object of study. We show a comparative picture between the Euler and Nagel straight lines, highlighting their main properties and characteristics. In order to explore new concepts, we extend our study by taking Euler's Line and the Circumference of Nine Points of Tores Rojas and Mendoza. We approach Affine Geometry, presenting essential basic definitions, forming a necessary language to speak about Linear Algebra focusing on geometric concepts that are developed and used. We show that the universal property of points in the plane is fundamental for characterizing the remarkable points of a triangle. We use algebra and vector methods to obtain the statements and results related to our study object.

**Keywords:** Geometry, Linear Algebra, Notable Points of a Triangle, Euler Line, Nine-points Circle, Affine Geometry, Nagel Line, Spieker Circle.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Ângulo Interno Alternado . . . . .	23
Figura 2 – Paralelogramo . . . . .	23
Figura 3 – Bases Médias de um Triângulo . . . . .	24
Figura 4 – Teorema de Ceva . . . . .	25
Figura 5 – Recíproco do Teorema de Ceva . . . . .	26
Figura 6 – Teorema de Menelau . . . . .	27
Figura 7 – Demonstração - Teorema de Menelau . . . . .	28
Figura 8 – Bissetriz do Ângulo . . . . .	29
Figura 9 – Mediatriz de um Segmento . . . . .	30
Figura 10 – Mediatriz do Segmento $\overline{AB}$ . . . . .	30
Figura 11 – Teorema da Bissetriz Interna . . . . .	31
Figura 12 – Consequência do Teorema da Bissetriz Interna . . . . .	32
Figura 13 – Círculo Ex-inscrito ao Lado $AC$ do Triângulo $ABC$ . . . . .	32
Figura 14 – Segmentos Notáveis do Triângulo $ABC$ . . . . .	33
Figura 15 – Homotetia de Ponto . . . . .	35
Figura 16 – Homotetia de razão (2,5) Transforma $F$ em $F'$ . . . . .	35
Figura 17 – Homotetia de Razão (-2) Transforma $F$ em $F'$ . . . . .	36
Figura 18 – Homotetia Transforma $r$ em $r'$ . . . . .	36
Figura 19 – Homotetia - Semelhança dos Triângulos . . . . .	37
Figura 20 – Bissetrizes Concorrentes . . . . .	38
Figura 21 – Circunferência Inscrita . . . . .	39
Figura 22 – Medianas Concorrentes . . . . .	40
Figura 23 – Medianas Concorrentes - Demonstração . . . . .	41
Figura 24 – Mediatrizes Concorrentes . . . . .	42
Figura 25 – Ortocentro de um Triângulo Acutângulo . . . . .	43
Figura 26 – Ponto de Gergonne . . . . .	44
Figura 27 – Ponto de Nagel . . . . .	45
Figura 28 – Unicidade da Reta de Nagel . . . . .	46
Figura 29 – Ponto de Spieker . . . . .	47
Figura 30 – Reta de Nagel . . . . .	49
Figura 31 – Reta de Nagel - Triângulo Isósceles . . . . .	50
Figura 32 – Reta de Nagel - Demonstração . . . . .	50
Figura 33 – Reta de Nagel - Construção para Demonstração . . . . .	51
Figura 34 – Demonstração: $S$ é o Ponto Médio de $\overline{IN}$ . . . . .	53
Figura 35 – Triângulos $Q_1Q_2Q_3$ e $M_aM_bM_c$ Congruentes . . . . .	55
Figura 36 – Ponto de Contato - Cevianas de Nagel . . . . .	57

Figura 37 – Reta de Euler . . . . .	58
Figura 38 – Circunferência de Nove Pontos . . . . .	59
Figura 39 – Reta de Nagel do Triângulo ABC . . . . .	61
Figura 40 – Reta de Euler do Triângulo ABC . . . . .	61
Figura 41 – Segmentos $OGRH$ e $IGSN$ . . . . .	61
Figura 42 – Proporcionalidade dos Segmentos . . . . .	63
Figura 43 – Linhas Paralelas e Segmentos Proporcionais . . . . .	63
Figura 44 – Representação Geométrica da Soma de Vetores . . . . .	70
Figura 45 – Conjunto de Três Pontos não Colineares . . . . .	78
Figura 46 – Ângulo Interno Alternado . . . . .	85
Figura 47 – Cevianas Concorrentes - Teorema de Ceva . . . . .	86
Figura 48 – Cevianas Concorrentes . . . . .	91
Figura 49 – Caracterização do Baricentro . . . . .	95
Figura 50 – Caracterização do Incentro . . . . .	96
Figura 51 – Caracterização do Ponto de Nagel . . . . .	97
Figura 52 – Caracterização do Ponto de Spieker . . . . .	99
Figura 53 – Colinearidade dos Pontos $I$ , $G$ e $N$ . . . . .	105
Figura 54 – Pontos de Tangência do Círculo de Spieker . . . . .	106
Figura 55 – Círculos Inscritos nos Triângulos Medial e Principal . . . . .	110
Figura 56 – Triângulo Congruente ao Triângulo Medial . . . . .	114

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>21</b>
<b>1 Noções Preliminares</b>	<b>23</b>
1.1 Conceitos e Resultados Básicos	23
1.2 Relações Métricas no Triângulo em Relação aos Círculos Inscrito e Ex-inscritos	32
1.3 Semelhança	34
1.4 Homotetia	35
1.5 Pontos Notáveis do Triângulo	38
1.5.1 Incentro	38
1.5.2 Baricentro	40
1.5.3 Circuncentro	42
1.5.4 Ortocentro	43
1.5.5 Ponto de Gergonne	44
1.5.6 Ponto de Nagel	45
1.5.7 Ponto de Spieker	47
<b>2 A Reta de Nagel e o Círculo de Spieker</b>	<b>49</b>
2.1 Demonstração da Reta de Nagel	49
2.2 O Círculo de Spieker	53
2.3 A Reta de Euler	57
2.4 A Circunferência de Nove Pontos	58
2.5 Analogia entre as Retas de Nagel e de Euler de um triângulo	61
<b>3 Os Fundamentos da Geometria Afim</b>	<b>65</b>
3.1 Espaços Vetoriais e Subespaços	66
3.2 Combinação Linear	67
3.2.1 Dependência Linear	67
3.2.2 Base de Espaços Vetoriais	68
3.2.3 Dimensão de Espaços Vetoriais	68
3.3 Espaço Afim	69
3.3.1 Subespaço Afim	71
3.3.2 Dimensão do Espaço Afim	72
3.4 Os Fundamentos Da Geometria Euclidiana	72
3.4.1 Produto Interno	72
3.4.2 Norma de um Vetor	73
3.4.3 Espaço Vetorial Euclidiano	74
3.4.4 Vetor Unitário	74
3.4.5 Vetores Ortogonais	74
3.5 Espaços Euclidianos	75

3.5.1	Espaço Afim Euclidiano . . . . .	75
3.6	Retas, Planos e Triângulos . . . . .	76
3.6.1	Retas . . . . .	76
3.6.2	Planos . . . . .	77
3.6.3	Triângulos . . . . .	78
3.6.4	Circunferência . . . . .	79
3.7	Propriedade Universal de Pontos num Plano $\mathcal{P}$ . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Caracterização dos Pontos Notáveis do Triângulo . . . . .</b>	<b>83</b>
4.1	Ponto que divide um segmento em uma razão dada . . . . .	83
4.2	Ponto Médio entre Dois Pontos . . . . .	84
4.3	Cevianas determinadas pelos pontos que dividem os lados numa dada razão	85
4.4	Teorema de Ceva . . . . .	86
4.5	Cevianas Concorrentes de um Triângulo . . . . .	91
4.6	Caracterização dos Pontos Notáveis de um Triângulo . . . . .	94
4.6.1	Caracterização do Baricentro . . . . .	94
4.6.2	Caracterização do Incentro . . . . .	95
4.6.3	Caracterização do Ponto de Nagel . . . . .	97
4.6.4	Caracterização do Ponto de Spieker . . . . .	99
4.6.5	Caracterização do Ponto de Nagel do Triângulo Medial . . . . .	102
4.7	A Reta de Nagel . . . . .	104
4.8	Consequências da Caracterização dos Pontos Notáveis . . . . .	106
	<b>Conclusão . . . . .</b>	<b>119</b>
	 <b>Referências Bibliográficas . . . . .</b>	 <b>121</b>

# Introdução

A Geometria, seus axiomas, postulados, definições e teoremas sempre fascinaram os homens desde os tempos primitivos. O interesse em seu estudo nasceu da necessidade dos povos antigos de construir navios, casas, calcular distâncias, pois era preciso sistematizar as aplicações usadas no dia a dia, já que as formas geométricas estavam presentes na maioria das atividades realizadas por eles. Euclides foi um dos primeiros a mostrar de forma coerente a construção e provas de teoremas da geometria que são utilizados até hoje. A Geometria Euclidiana, tem grande importância histórica tanto para a matemática como para sociedade em geral. Se hoje temos uma geometria plana sólida e eficaz, devemos isso as civilizações antigas que conseguiram explorar e sistematizar esse ramo da ciência.

Acompanhando o desenvolvimento da Geometria esteve sempre o Triângulo, que despertou o interesse de muitos sábios. Alguns como Pitágoras, que provou a existência de relações entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo.

A geometria do triângulo é rica, ampla, surpreendente e apaixonante. Leonhard Euler, século XVIII, foi um dos matemáticos que mais contribuiu com esta geometria. A colinearidade dos principais pontos notáveis do triângulo despertou o seu interesse que, em 1765, provou que o ortocentro, o baricentro e o circuncentro são sempre colineares independentemente do triângulo escolhido e a reta que contém estes pontos foi chamada de Reta de Euler.

Continuando o estudo dos triângulos, verificamos a existência de outros pontos notáveis constituindo mais um alinhamento especial formado pelo incentro, o baricentro e o ponto de Nagel, e a reta que contém esses pontos é conhecida como Reta de Nagel. O Ponto de Nagel é o encontro das cevianas determinadas pelos pontos de tangência dos círculos ex-inscritos com os lados do triângulo.

Com a finalidade de apresentar alguns teoremas e utilizar argumentos que facilitem suas demonstrações, pretende-se com este trabalho levantar questões e discussões que proporcionarão o desenvolvimento de tópicos da geometria plana, complementando e auxiliando no seu aprendizado.

No primeiro capítulo é feita uma abordagem de alguns resultados básicos da geometria do triângulo e seus pontos notáveis que serão utilizados nos capítulos seguintes.

No segundo capítulo mostraremos através da Geometria Euclidiana, a existência da Reta de Euler e da Reta de Nagel, suas construções e propriedades e um estudo comparativo. Ainda neste capítulo falaremos da existência do círculo de Spieker e mostraremos que o seu centro também pertence a Reta de Nagel.

No terceiro capítulo proporcionaremos a fundamentação teórica da Geometria afim do plano euclidiano. Apresentaremos as propriedades que nos darão o suporte para provar a existência dos pontos notáveis necessários à construção da Reta de Nagel, utilizando conceitos algébricos e operações vetoriais.

E, no último capítulo, sabendo da existência da Reta de Nagel, faremos um estudo de acordo com o artigo *A Reta de Euler e a Circunferência de Nove Pontos*, dos autores Rojas e Mendoza, veja [25], que nos proporcionará um estudo algébrico para determinar a existência do incentro, do baricentro e do ponto de Nagel e a sua colinearidade, que definem uma reta.

# 1 Noções Preliminares

Apresentaremos nesse capítulo alguns resultados e definições importantes relacionados à geometria do triângulo e seus pontos notáveis, que nos darão suporte no decorrer do trabalho.

## 1.1 Conceitos e Resultados Básicos

Nesta seção algumas definições e demonstrações foram extraídas de [16], [19] e [21].

**Definição 1.1.1.** *Duas retas são ditas paralelas se elas não se intersectam.*

**Teorema 1.1.1** (Ângulo Alternado). *Se uma reta intersecta duas outras retas de modo que os ângulos alternos internos sejam congruentes, então as duas retas são paralelas.*

A demonstração deste teorema é encontrada na referência [10], páginas 71 e 72.

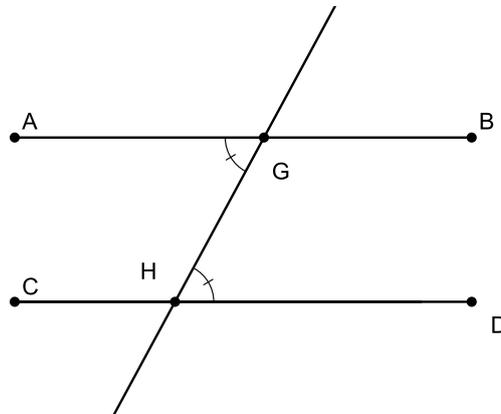


Figura 1 – Ângulo Interno Alternado

**Definição 1.1.2.** *Paralelogramo é um quadrilátero convexo que possui os lados opostos paralelos.*

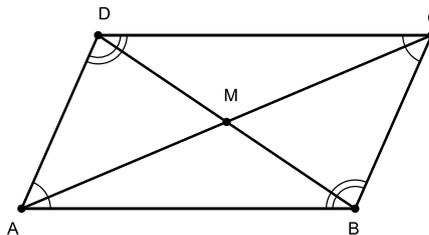


Figura 2 – Paralelogramo

**Teorema 1.1.2.** *Se  $ABCD$  é um **paralelogramo**, então:*

- i) *Os lados opostos são congruentes.*
- ii) *Os ângulos opostos são congruentes.*
- iii) *Dois ângulos consecutivos são suplementares.*
- iv) *As diagonais cortam-se ao meio.*
- v) *Seus pares de lados opostos são congruentes.*

*Reciprocamente, se um quadrilátero convexo satisfaz qualquer item acima esse quadrilátero é um paralelogramo.*

As demonstrações acerca desses teoremas, são encontradas em [21] e [7].

**Teorema 1.1.3** (Base Média). *Em um triângulo qualquer o segmento que une os pontos médios de dois dos seus lados é paralelo ao terceiro lado e tem como medida a metade da medida deste lado.*

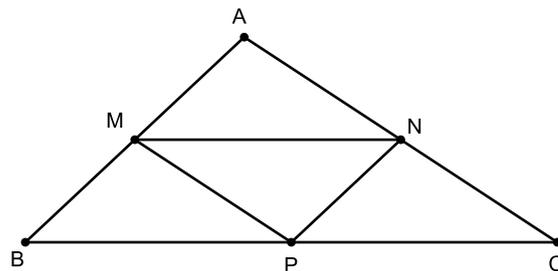


Figura 3 – Bases Médias de um Triângulo

Na figura 3 os pontos  $M$  e  $N$  são pontos médios de  $AB$  e  $AC$ , respectivamente, o segmento  $MN$  é paralelo a  $BC$  e  $2 \cdot \overline{MN} = \overline{BC}$ .

Uma demonstração deste teorema é encontrada na referência [21].

Uma consequência do Teorema da Base Média é que todo triângulo possui exatamente três bases médias. De acordo com a figura 3, as bases médias do triângulo  $ABC$  são os segmentos  $MN$ ,  $NP$  e  $MP$ . Sendo que  $MN$  é a base média relativa ao vértice  $A$  (ou lado  $BC$ ); analogamente,  $NP$  e  $MP$  são, respectivamente, as bases médias de  $ABC$  relativas aos vértices  $B$  e  $C$  (ou os lados  $AB$  e  $AC$ , também respectivamente). O triângulo  $MNP$  que tem por lados as bases médias do triângulo  $ABC$  é o **triângulo medial** de  $ABC$ .

**Definição 1.1.3.** Uma ceviana de um triângulo é um segmento que une um vértice a um ponto do lado oposto.

**Teorema 1.1.4** (Teorema de Ceva). Três cevianas  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$  de um triângulo  $ABC$  são concorrentes se, e somente se,

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1.$$

*Demonstração.* Suponha que as três cevianas sejam concorrentes.

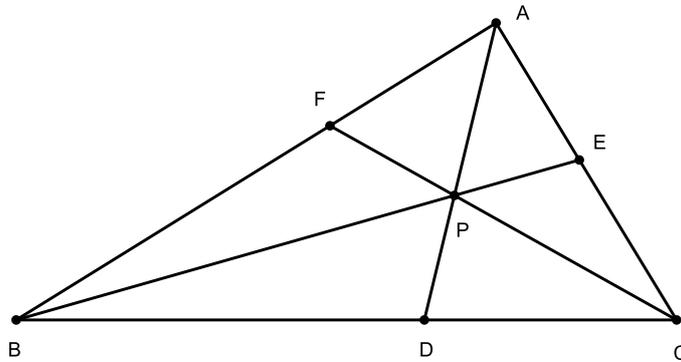


Figura 4 – Teorema de Ceva

Seja  $P$  o ponto de encontro das três cevianas. Consideremos, a partir de agora, que  $[ABC]$  denota a área de um triângulo  $ABC$ . Observe que os triângulos  $BDP$  e  $CDP$  possuem a mesma altura  $h$  com respeito às bases  $BD$  e  $DC$ , respectivamente.

E os triângulos  $ABD$  e  $ACD$  têm altura  $H$  com respeito às bases  $\overline{BD}$  e  $\overline{DC}$ , respectivamente.

Assim,

$$[ABD] = \frac{1}{2}H \cdot \overline{BD} \quad \text{e} \quad [ACD] = \frac{1}{2}H \cdot \overline{DC},$$

$$[BDP] = \frac{1}{2}h \cdot \overline{BD} \quad \text{e} \quad [CDP] = \frac{1}{2}h \cdot \overline{DC}.$$

Isto implica que

$$\frac{[ABP]}{[ACP]} = \frac{[ABD] - [BDP]}{[ACD] - [CDP]} = \frac{\frac{1}{2}H \cdot \overline{BD} - \frac{1}{2}h \cdot \overline{BD}}{\frac{1}{2}H \cdot \overline{DC} - \frac{1}{2}h \cdot \overline{DC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}.$$

Portanto

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{[ABP]}{[ACP]}.$$

Da mesma forma, obtemos

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{[BCP]}{[ABP]} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{[ACP]}{[BCP]}.$$

Fazendo o produto das três igualdades temos:

$$\frac{[ABP]}{[ACP]} \cdot \frac{[BCP]}{[ABP]} \cdot \frac{[ACP]}{[BCP]} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1.$$

Suponha agora que

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1. \quad (1.1)$$

Vamos mostrar que as três cevianas são concorrentes.

Seja  $P$  o ponto de interseção das cevianas  $\overline{AD}$  e  $\overline{BE}$ . Vamos mostrar que  $\overline{CF}$  passa por  $P$ .

Seja  $\overline{CF'}$  a ceviana que passa por  $P$ . Pelo caso anterior, temos

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} = 1. \quad (1.2)$$

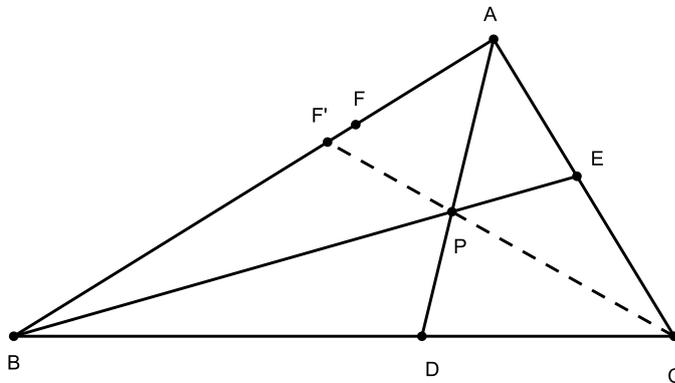


Figura 5 – Recíproco do Teorema de Ceva

Devemos concluir que  $F = F'$ .

Por (1.1) e (1.2), obtemos

$$\frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}.$$

O que é equivalente a

$$\frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} + \frac{\overline{F'B}}{\overline{F'B}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} + \frac{\overline{FB}}{\overline{FB}}.$$

Como  $F$  e  $F'$  pertencem ao segmento  $\overline{AB}$ , então,

$$\frac{\overline{AF'} + \overline{F'B}}{\overline{F'B}} = \frac{\overline{AF} + \overline{FB}}{\overline{FB}} \iff \frac{\overline{AB}}{\overline{F'B}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{FB}} \iff \overline{F'B} = \overline{FB}.$$

Logo,  $F = F'$ .

□

**Teorema 1.1.5** (Teorema de Menelau). *Considere um triângulo  $ABC$  e os pontos  $N$  e  $M$  interiores aos segmentos  $AB$  e  $AC$ , respectivamente, e  $L$  na semirreta  $BC$ , tal que  $C$  está entre  $B$  e  $L$ . Então:*

$$\frac{\overline{LC}}{\overline{LB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{MA}}{\overline{MC}} = 1.$$

se, e só se, os pontos  $L$ ,  $M$ , e  $N$  forem colineares.

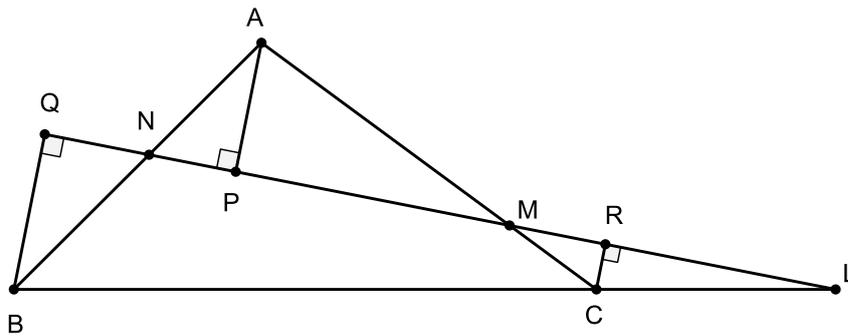


Figura 6 – Teorema de Menelau

*Demonstração.* Suponha  $L$ ,  $M$  e  $N$  colineares e sejam  $AP$ ,  $BQ$  e  $CR$  as perpendiculares traçadas a partir de  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente, à reta em que se encontram  $L$ ,  $M$ , e  $N$ . É fácil ver que os triângulos retângulos  $APN$  e  $BQN$  são semelhantes, assim como os triângulos retângulos  $QBL$  e  $RCL$ . Então

$$\frac{\overline{NB}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{AP}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{LC}}{\overline{LB}} = \frac{\overline{RC}}{\overline{QB}}.$$

Por outro lado, os triângulos retângulos  $APM$  e  $CRM$  também são semelhantes. De modo que

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{CR}}.$$

Portanto,

$$\frac{\overline{LC}}{\overline{LB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{MA}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{AP}} \cdot \frac{\overline{RC}}{\overline{QB}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{CR}} = 1.$$

Reciprocamente, vamos supor que

$$\frac{\overline{LC}}{\overline{LB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{MA}}{\overline{MC}} = 1$$

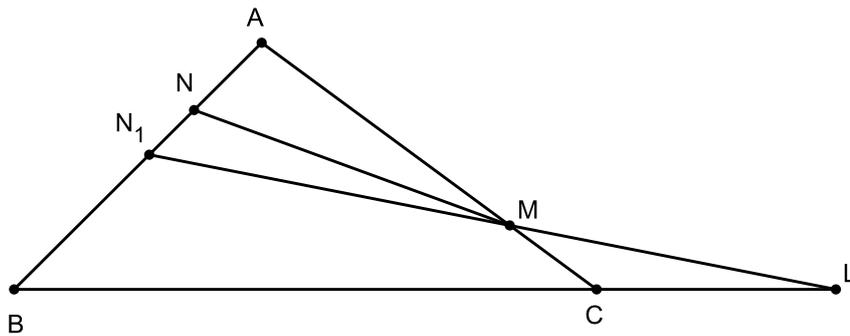


Figura 7 – Demonstração - Teorema de Menelau

e que os pontos  $L$ ,  $M$  e  $N$  não são colineares. Prolongamos  $LM$  até intersectar  $AB$  em  $N_1$ . Pelo que provamos anteriormente, temos que

$$\frac{\overline{LC}}{\overline{LB}} \cdot \frac{\overline{N_1B}}{\overline{N_1A}} \cdot \frac{\overline{MA}}{\overline{MC}} = 1,$$

assim

$$\frac{\overline{N_1B}}{\overline{N_1A}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{NA}} \Leftrightarrow N = N_1,$$

o que é um absurdo.

Dessa forma,  $L$ ,  $M$ , e  $N$  são colineares.

□

**Definição 1.1.4.** *Lugar Geométrico é o conjunto de todos os pontos em um plano que gozam de uma mesma propriedade geométrica.*

**Proposição 1.1.6** (Bissetriz de um Ângulo). *A Bissetriz de um Ângulo é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos lados desse ângulo.*

*Demonstração.* Seja  $\widehat{AOB}$  um ângulo dado. Vamos mostrar que sendo  $P$  um ponto do mesmo, então  $d(P, AO) = d(P, BO) \iff P \in (\text{bissetriz de } \widehat{AOB})$ .

De fato, suponha que  $P$  pertença a bissetriz de  $\widehat{AOB}$  e sejam  $M$  e  $N$ , respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de  $P$  às retas  $OA$  e  $OB$ . Como  $\widehat{MOP} = \widehat{NOP}$ ,  $\widehat{OMP} = \widehat{ONP} = (90^\circ)$  e  $OP$  é comum, segue que os triângulos  $OMP$  e  $ONP$  são congruentes por  $LAA_0$ . Daí,  $\overline{PM} = \overline{PN}$ , ou seja,  $d(P, AO) = d(P, BO)$ .

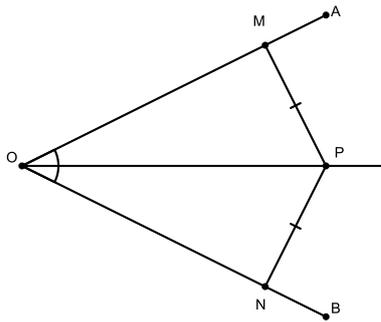


Figura 8 – Bissetriz do Ângulo

Reciprocamente, seja  $P$  um ponto interior do ângulo  $\widehat{AOB}$ , tal que  $\overline{PM} = \overline{PN}$ , onde  $M$  e  $N$  são os pés das perpendiculares baixadas de  $P$ , respectivamente às retas  $OA$  e  $OB$ . Então, os triângulos  $MOP$  e  $NOP$  são novamente congruentes, agora pelo caso  $CH^1$ , conseqüentemente  $\widehat{MOP} = \widehat{NOP}$ , aonde  $P$  está sobre a bissetriz de  $\widehat{AOB}$ .

□

**Proposição 1.1.7** (Mediatriz de um Segmento). *Dado dois pontos  $A$  e  $B$  no plano, a mediatriz de  $AB$  é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de  $A$  e de  $B$ .*

*Demonstração.* Seja  $P$  um ponto da mediatriz  $m$  do segmento  $AB$ . Se  $P$  é o ponto médio  $M$  de  $AB$ , então  $\overline{PA} = \overline{PB}$ .

<sup>1</sup> Caso CH (cateto, hipotenusa) Esse caso é um caso particular do  $LLL$  e pode ser expresso da seguinte forma: Se dois triângulos retângulos têm congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes

Agora suponha  $P \neq M$ , então teremos os triângulos  $APM$  e  $BPM$  congruentes pelo caso  $LAL$ , pois como  $M$  é ponto médio do segmento de reta  $AB$  então  $AM = MB$ , os ângulos  $\widehat{AMP}$  e  $\widehat{BMP}$  ambos retos pois a reta  $m$  é uma perpendicular e o segmento  $PM$  é comum aos dois triângulos, portando  $\overline{PA} = \overline{PB}$ .

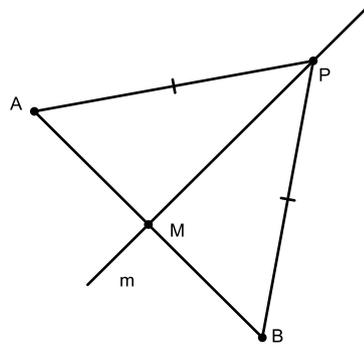


Figura 9 – Mediatriz de um Segmento

Agora considere o lugar geométrico (LG) dos pontos, do plano, equidistantes aos pontos  $A$  e  $B$ . Tome um ponto  $P$  qualquer de  $LG$ , logo  $\overline{PA} = \overline{PB}$ . Considere  $M$  ponto médio de  $AB$ , e  $r$  a reta que passa por  $P$  e  $M$  forma os triângulos  $AMP$  e  $BMP$  congruentes pelo caso  $LLL$ , pois o segmento  $PM$  é comum aos dois triângulos, os lados  $AM$  e  $MB$  por  $M$  ser ponto médio e  $PA = PB$  por  $P$  pertencer a  $LG$ . Assim os ângulos  $\widehat{AMP}$  e  $\widehat{BMP}$  são congruentes e iguais a  $90^\circ$ . Logo a reta  $r$  é a mediatriz do segmento  $AB$ .

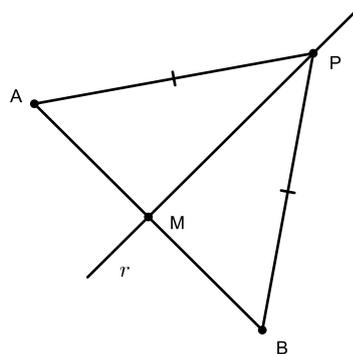


Figura 10 – Mediatriz do Segmento  $\overline{AB}$

□

**Teorema 1.1.8** (Bissetriz Interna). *A bissetriz interna  $AI_a$  do ângulo  $\widehat{A}$  de um triângulo  $ABC$  divide o lado oposto  $BC$  na razão  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ , ou seja,*

$$\frac{\overline{I_a B}}{\overline{I_a C}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}},$$

em que  $I_a$  é o ponto de intersecção da bissetriz interna com o lado  $BC$ .

*Demonstração.* Seja  $R$  o ponto de intersecção da paralela à bissetriz  $AI_a$  traçada pelo ponto  $C$ , com a reta  $AB$ . É fácil ver que  $B\hat{A}I_a = C\hat{A}I_a = A\hat{C}R = A\hat{R}C$ , com isso,  $\overline{AR} = \overline{AC}$ . Pelo teorema de Tales, temos que

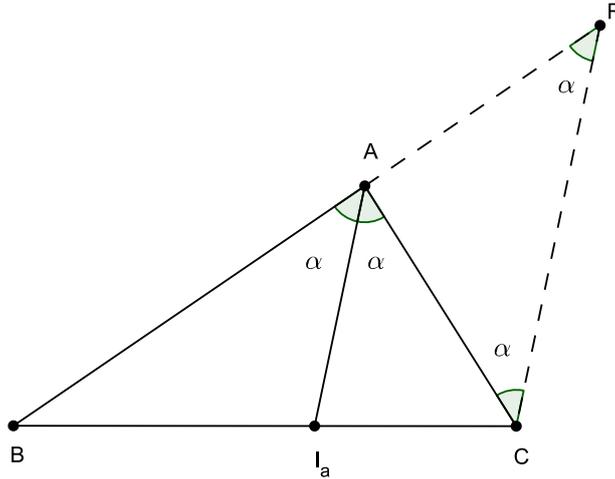


Figura 11 – Teorema da Bissetriz Interna

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{RA}} = \frac{\overline{I_aB}}{\overline{I_aC}}$$

Como  $\overline{RA} = \overline{AC}$ , temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{I_aB}}{\overline{I_aC}}.$$

□

**Proposição 1.1.9.** *Seja  $ABC$  um triângulo tal que  $\overline{BC} = a$ ,  $\overline{CA} = b$ ,  $\overline{AB} = c$ , e seja  $AI_a$  a bissetriz relativa ao ângulo  $\hat{A}$ , com  $I_a$  em  $BC$ . Definindo  $m = \overline{I_aB}$ , então  $\overline{I_aB} = \frac{a \cdot c}{b + c}$  e  $\overline{I_aC} = \frac{a \cdot b}{b + c}$ .*

*Demonstração.* Usando o teorema 1.1.8 temos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{I_aB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{I_aC}} \Leftrightarrow \frac{c}{m} = \frac{b}{a - m} \Leftrightarrow m = \frac{a \cdot c}{b + c}.$$

Portanto,

$$\overline{I_aB} = \frac{a \cdot c}{b + c},$$

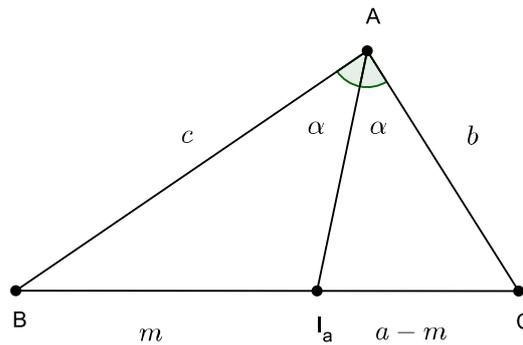


Figura 12 – Consequência do Teorema da Bissetriz Interna

Consequentemente

$$\overline{I_a C} = a - m = a - \frac{a \cdot c}{b + c} \Leftrightarrow \overline{I_a C} = \frac{a \cdot b}{b + c}.$$

□

## 1.2 Relações Métricas no Triângulo em Relação aos Círculos Inscrito e Ex-inscritos

**Definição 1.2.1.** Um círculo ex-inscrito de um triângulo é um círculo externo ao triângulo, tangente a um de seus lados e às extensões dos outros dois.

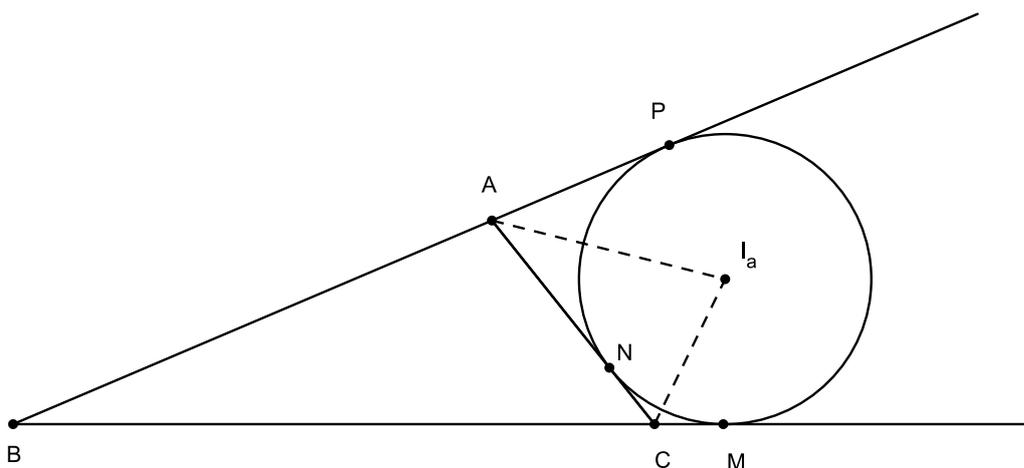


Figura 13 – Círculo Ex-inscrito ao Lado AC do Triângulo ABC

Todo triângulo possui três círculos ex-inscritos distintos, cada um tangente a um dos lados do triângulo. O centro do círculo ex-inscrito é chamado de ex-incentro do triângulo que é o ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos externos de um triângulo.

**Proposição 1.2.1.** *Seja  $ABC$  um triângulo de lados  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{BC} = a$ ,  $\overline{CA} = b$  e semiperímetro  $p$ . Sejam  $D$ ,  $E$  e  $F$  os pontos onde o círculo inscrito em  $ABC$  tangencia os lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AB}$ , respectivamente, e suponha, ainda, que o círculo ex-inscrito a  $\overline{AC}$  tangencia tal lado em  $N$  e os prolongamentos de  $\overline{BC}$  e  $\overline{BA}$  respectivamente em  $M$  e  $P$ . Então,*

$$(a) \overline{AE} = \overline{AF} = p - a, \overline{BF} = \overline{BD} = p - b, \overline{CE} = \overline{CD} = p - c.$$

$$(b) \overline{BM} = \overline{BP} = p.$$

$$(c) \overline{CN} = \overline{CM} = p - a, \overline{AP} = \overline{AN} = p - c.$$

$$(d) \overline{DM} = \overline{FP} = b.$$

(e) *O ponto médio de  $AC$  também é o ponto médio de  $EN$ .*

$$(f) \overline{BC} + \overline{CN} = \overline{BA} + \overline{AN} = p.$$

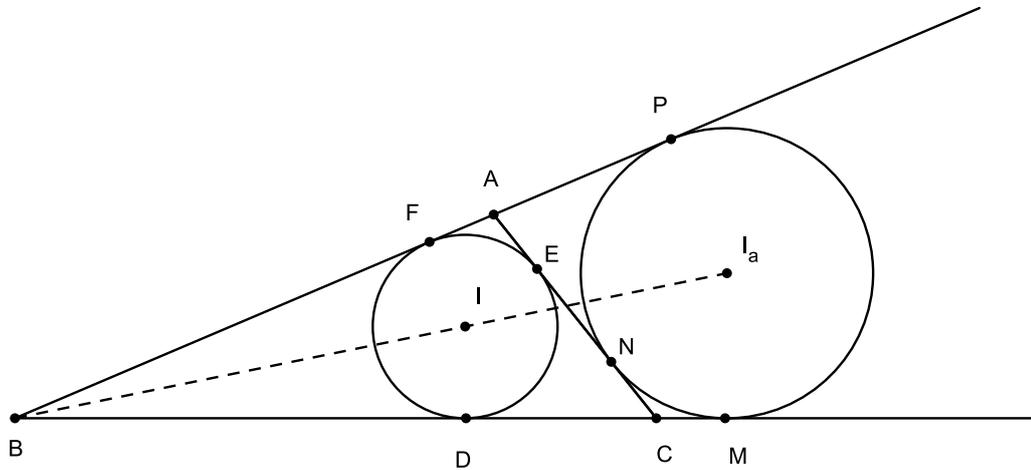


Figura 14 – Segmentos Notáveis do Triângulo  $ABC$

*Demonstração.*

(a) Denotando  $\overline{AF} = \overline{AE} = x$ ,  $\overline{BF} = \overline{BD} = y$  e  $\overline{CE} = \overline{CD} = z$ . Temos que  $y + z = a$ ,  $x + z = b$  e  $x + y = c$ . Resolvendo o sistema encontramos  $x = p - a$ ,  $y = p - b$  e  $z = p - c$ .

(b) Sendo  $\overline{BM} = \overline{BP} = t$  e  $\overline{CM} = \overline{CN}$  e  $\overline{AP} = \overline{AN}$ , temos que

$$2t = \overline{BM} + \overline{BP} = (\overline{BC} + \overline{CM}) + (\overline{BA} + \overline{AP})$$

$$2t = (\overline{BC} + \overline{BA}) + (\overline{CN} + \overline{AN})$$

$$2t = a + c + \overline{AC} = a + b + c = 2p,$$

de modo que  $t = p$ .

(c) Como em (b), temos que  $\overline{CM} = \overline{CN}$  e  $\overline{AP} = \overline{AN}$ . Por outro lado,

$$\overline{AP} = \overline{BP} - \overline{BA} = p - c \quad \text{e} \quad \overline{CM} = \overline{BM} - \overline{BC} = p - a.$$

(d) Temos que  $\overline{DM} = \overline{BM} - \overline{BD} = p - (p - b) = b$ . A prova que  $\overline{FP} = b$  é análoga.

(e) Basta provar que  $\overline{CN} = \overline{AE}$ .

De fato, pelo item (a), temos  $\overline{AE} = p - a$  e pelo item (c), temos também que  $\overline{CN} = p - a$ .

(f) Temos que  $\overline{CM} = \overline{CN}$  e  $\overline{AP} = \overline{AN}$ . Logo  $\overline{BC} + \overline{CN} = a + (p - a) = p$  e  $\overline{BA} + \overline{AN} = c + (p - c) = p$ .

□

### 1.3 Semelhança

Até o momento, consideramos apenas conceitos básicos de semelhança de triângulos e seus critérios conhecidos. Nesta seção, abordaremos brevemente a noção de semelhança em um contexto mais geral, de forma independente da definição clássica para semelhança de triângulos. Para uma leitura mais detalhada sobre o assunto, recomenda-se consultar as referências [14] e [28].

**Definição 1.3.1.** *Seja  $r$  um número real positivo. Uma semelhança de razão  $r$  no plano  $\pi$  é uma transformação  $\sigma : \pi \rightarrow \pi$  que satisfaz a seguinte condição: se  $X$  e  $Y$  são pontos quaisquer de  $\pi$  e  $X' = \sigma(X)$ ,  $Y' = \sigma(Y)$  são os seus correspondentes, então  $\overline{X'Y'} = r \cdot \overline{XY}$ .*

Toda semelhança é uma bijeção e sua inversa  $\sigma^{-1}$ , é uma semelhança, de razão  $\frac{1}{r}$ , se  $r$  for a razão de  $\sigma$ .

Duas figuras  $F$  e  $F'$  são ditas semelhantes, se existe uma semelhança  $\sigma$  que transforma uma na outra tal que  $\sigma(F) = F'$ .

Uma semelhança de razão 1 é chamada de isometria. Neste caso, as figuras semelhantes são ditas congruentes.

## 1.4 Homotetia

A abordagem realizada nesta seção pode ser encontrada nas referências [14] e [28].

Seja  $O$  um ponto arbitrário do plano  $\pi$  e  $k$  um número real tal que  $k \neq 0$ .

**Definição 1.4.1.** A homotetia de centro  $O$  e razão  $k$  é a transformação  $\phi : \pi \rightarrow \pi$  que a cada ponto  $A$  do plano  $\pi$  associa o ponto  $A' = \phi(A)$  tal que  $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$ .

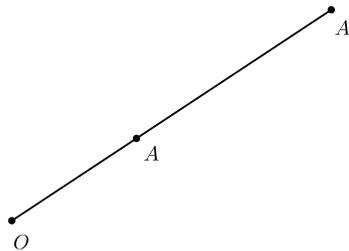


Figura 15 – Homotetia de Ponto

Toda homotetia é uma correspondência biunívoca, cuja inversa é a homotetia de mesmo centro e razão  $1/k$ .

Se  $k = 1$ , então  $A = A'$  e portanto a homotetia é simplesmente a transformação identidade. Se  $k = -1$ , então  $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$  e, neste caso, a transformação é uma simetria em relação ao ponto  $O$  (ou rotação de  $180^\circ$  em torno de  $O$ ).

A figura 16 ilustra um exemplo de homotetia direta, que se obtém considerando a figura  $F$  com centro  $O$  e razão  $k > 1$ . A transformação geométrica associa cada ponto  $X$  de  $F$  ao ponto  $X'$  de  $F'$  sobre a semirreta-reta  $OX$ , de origem  $O$ .

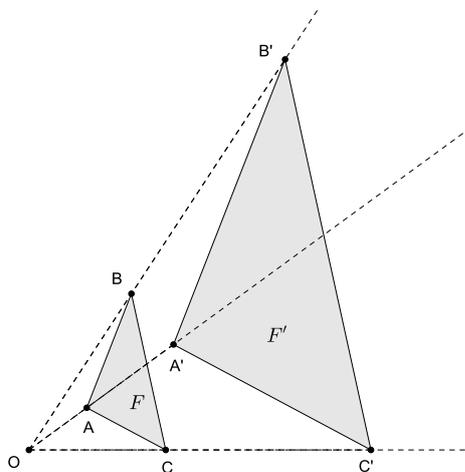


Figura 16 – Homotetia de razão (2,5) Transforma  $F$  em  $F'$ .

A figura 17 ilustra um exemplo de homotetia inversa, que se obtém considerando a figura  $F$  com centro  $O$  e razão  $k < 0$ .

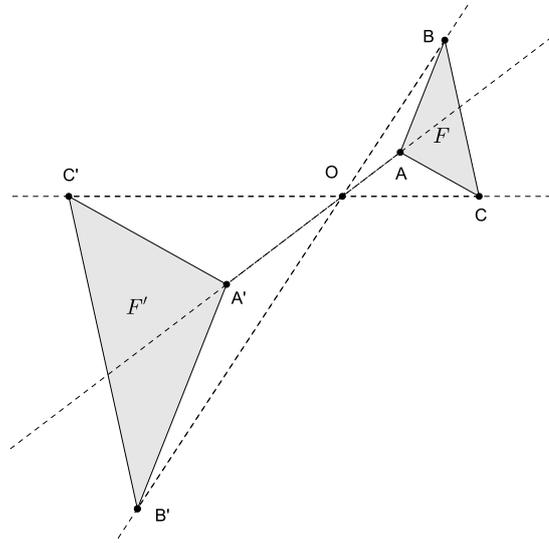


Figura 17 – Homotetia de Razão (-2) Transforma  $F$  em  $F'$ .

Se o ponto  $O$  pertence a uma reta  $r$ , então a imagem de  $r$  por uma homotetia de centro  $O$  é coincidente com  $r$ . Se  $O$  não pertence a uma reta  $r$  então  $r' = \phi(r)$  é uma reta paralela a  $r$ , conforme ilustra a figura .

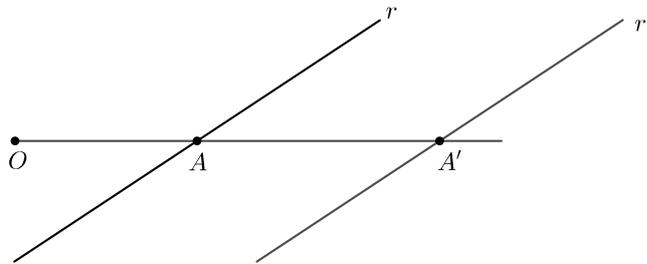


Figura 18 – Homotetia Transforma  $r$  em  $r'$

A homotetia, portanto, preserva ângulos. Além disso, se  $A$  e  $B$  são dois pontos quaisquer do plano e se  $A' = \phi(A)$  e  $B' = \phi(B)$  então  $\overline{A'B'} = |k| \cdot \overline{AB}$ . De fato,  $\overline{OA'} = |k| \cdot \overline{OA}$  e  $\overline{OB'} = |k| \cdot \overline{OB}$ , logo os triângulos  $OAB$  e  $OA'B'$  são semelhantes pelo critério  $LAL$ .

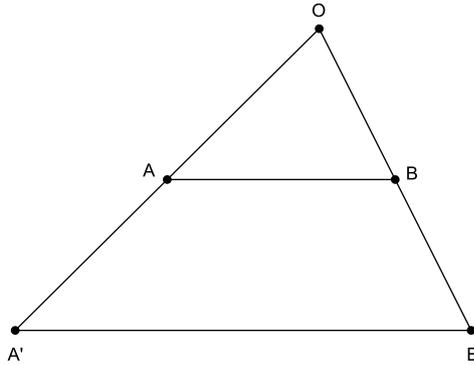


Figura 19 – Homotetia - Semelhança dos Triângulos

Portanto, toda homotetia é uma semelhança. Logo, a homotetia transforma qualquer figura  $F$  em uma figura  $F'$  semelhante a  $F$ .

**Proposição 1.4.1.** *Uma homotetia de razão  $k$ , transforma uma circunferência de raio  $r$  e centro  $C$  numa circunferência de raio  $|k|r$  cujo centro é a imagem de  $C$  pela homotetia.*

*Demonstração.* Considere uma homotetia  $\phi$  de centro  $O$  e razão  $k$ . Seja  $P$  um ponto arbitrário da circunferência  $\Gamma(C, r)$  de centro  $C$  e raio  $r$ . Se  $P' = \phi(P)$  e  $C' = \phi(C)$ , então  $\overline{C'P'} = |k| \cdot \overline{CP} = |k|r$ , ou seja,  $P'$  pertence a circunferência  $\Gamma(C', r')$  de centro  $C'$  e raio  $r' = |k|r$ . Logo a imagem de  $\Gamma(C, r)$  pela homotetia está contida na circunferência  $\Gamma(C', r')$ .

Agora, tome um ponto  $Q$  arbitrário da circunferência  $\Gamma(C', r')$ . Seja  $\phi^{-1}$  a homotetia (inversa) de centro  $O$  e raio  $1/k$ . Então,  $\phi^{-1}(C') = C$  e o ponto  $P = \phi^{-1}(Q)$  pertence a  $\Gamma(C, r)$ . De fato, da homotetia  $\phi^{-1}$  segue-se que:  $\overline{PC} = \left| \frac{1}{k} \right| \cdot \overline{QC'}$ . Como  $Q \in \Gamma(C', r')$ , temos que  $\overline{QC'} = |k|r$ , logo  $\overline{PC} = \frac{1}{|k|} \cdot |k|r = r$ .

Por outro lado,  $\phi(P) = \phi(\phi^{-1}(Q)) = Q$ , donde concluímos que  $\Gamma(C', r')$  está contida na imagem de  $\Gamma(C, r)$  pela homotetia  $\phi$ .

Portanto, a homotetia  $\phi$  transforma a circunferência  $\Gamma(C, r)$  na circunferência  $\Gamma(C', r')$ .

□

## 1.5 Pontos Notáveis do Triângulo

Nesta seção apresentaremos algumas definições e propriedades geométricas relativas aos pontos notáveis mais conhecidos do triângulo que são o Incentro, o Circuncentro, o Baricentro e o Ortocentro, bem como outros que são bem menos conhecidos como o ponto de Gergonne, o ponto de Nagel e o ponto de Spieker, e que constituirão os pré-requisitos necessários para auxiliar na construção do objetivo do nosso trabalho.

### 1.5.1 Incentro

**Proposição 1.5.1.** *Dado um triângulo  $ABC$  qualquer, as três bissetrizes internas se intersectam num ponto chamado de **incentro**.*

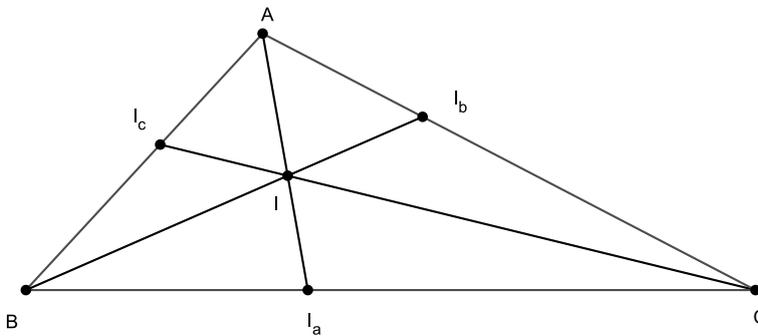


Figura 20 – Bissetrizes Concorrentes

*Demonstração.* Seja  $ABC$  um triângulo e  $AI_a$ ,  $AI_b$  e  $AI_c$  suas bissetrizes, conforme a figura 20.

Utilizando o teorema 1.1.8, em relação as suas bissetrizes, temos

$$\frac{\overline{I_a B}}{\overline{I_a C}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

$$\frac{\overline{I_b C}}{\overline{I_b A}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

$$\frac{\overline{I_c A}}{\overline{I_c B}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

Multiplicando as três igualdades temos

$$\frac{\overline{I_a B}}{\overline{I_a C}} \cdot \frac{\overline{I_b C}}{\overline{I_b A}} \cdot \frac{\overline{I_c A}}{\overline{I_c B}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 1,$$

e pelo teorema 1.1.4 concluímos que as três bissetrizes se intersectam em “ $I$ ”.

□

Uma outra maneira de provar que as três bissetrizes internas se intersectam num único ponto, é verificando que o Lugar Geométrico dos pontos interiores ao triângulo  $ABC$  e que equidistam dos seus lados é o conjunto formado apenas pelo incentro.

**Proposição 1.5.2.** *O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo, onde o raio é igual à distância do incentro a um dos lados do triângulo.*

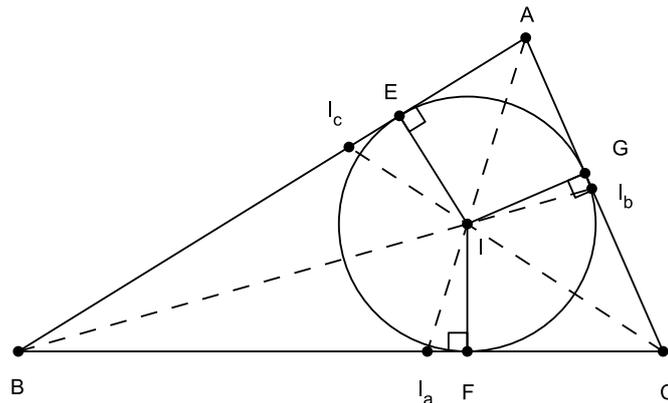


Figura 21 – Circunferência Inscrita

*Demonstração.* Sejam  $BI_b$  e  $CI_c$  as bissetrizes relativas aos vértices  $B$  e  $C$ , respectivamente, e  $I$  o seu ponto de interseção. Como o ponto  $I$  pertence às bissetrizes  $BI_b$  e  $CI_c$ , então  $\overline{IF} = \overline{IE}$  e  $\overline{IG} = \overline{IF}$ , em que  $E, F, G$  são os pés das perpendiculares baixadas desde  $I$  sobre os lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$ , respectivamente. Como  $\overline{IE} = \overline{IG}$ , então, pela proposição anterior,  $I$  pertence à bissetriz do ângulo  $\hat{A}$ . Logo, as três bissetrizes passam por um mesmo ponto  $I$  chamado de incentro que será o centro da circunferência inscrita no triângulo, pois equidista dos lados do triângulo e  $E, F$  e  $G$  são os pontos de tangência do círculo com os lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$ .

□

O teorema a seguir mostra a área de um triângulo em função do raio da circunferência inscrita.

**Teorema 1.5.3.** *Sejam  $a, b$  e  $c$  as medidas dos lados  $BC, CA$  e  $AB$  do triângulo  $ABC$ , respectivamente, e seja  $r$  a medida do raio da circunferência inscrita. Então, a área do triângulo  $ABC$  pode ser calculada por*

$$[ABC] = p \cdot r,$$

$$\text{onde } p = \frac{a + b + c}{2}.$$

*Demonstração.* De acordo com a fig 21, a área do triângulo ABC é a soma das áreas dos triângulos AIB, BIC e CIA, que possuem altura igual a  $r$ , raio da circunferência inscrita. Portanto,

$$[ABC] = [BIC] + [CIA] + [AIB]$$

$$[ABC] = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2}$$

$$[ABC] = \left( \frac{a + b + c}{2} \right) \cdot r$$

$$[ABC] = p \cdot r.$$

□

## 1.5.2 Baricentro

**Definição 1.5.1.** A mediana de um triângulo, é um segmento de reta que liga o vértice ao ponto médio do lado oposto.

**Proposição 1.5.4.** As três medianas de um triângulo se encontram em um único ponto. Este ponto é chamado de **baricentro** do triângulo.

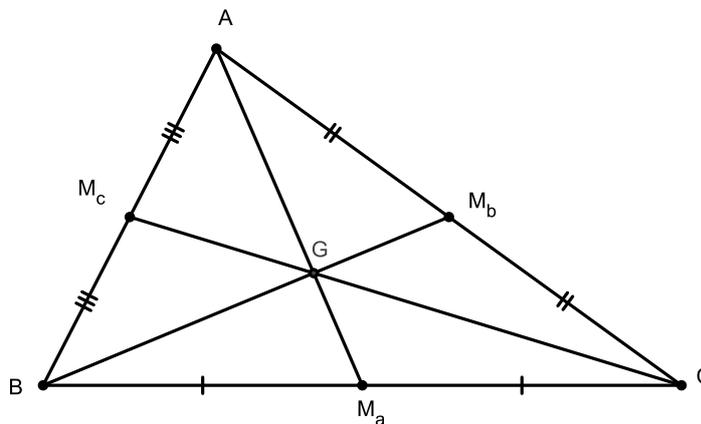


Figura 22 – Medianas Concorrentes

*Demonstração.* Podemos verificar esta afirmação, utilizando o teorema 1.1.4. Se  $M_a$ ,  $M_b$  e  $M_c$  são os pontos médios relativos aos lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$ , respectivamente, temos

$$\frac{\overline{BM_a}}{\overline{M_aC}} = \frac{\overline{CM_b}}{\overline{M_bA}} = \frac{\overline{AM_c}}{\overline{M_cB}} = 1.$$

Então

$$\frac{\overline{BM_a}}{\overline{M_aC}} \cdot \frac{\overline{CM_b}}{\overline{M_bA}} \cdot \frac{\overline{AM_c}}{\overline{M_cB}} = 1.$$

Consequentemente,  $AM_a$ ,  $BM_b$  e  $CM_c$  se encontram em um ponto  $G$  chamado de baricentro.

□

**Proposição 1.5.5.** *O baricentro divide cada mediana, a partir do vértice correspondente, na razão de 2:1.*

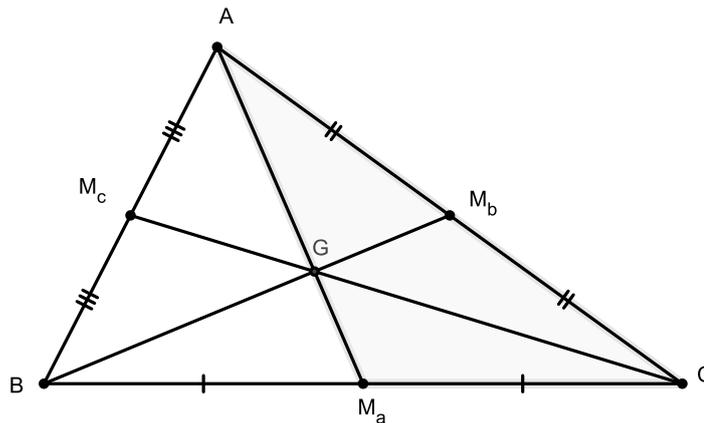


Figura 23 – Medianas Concorrentes - Demonstração

*Demonstração.* Sejam  $M_a$ ,  $M_b$  e  $M_c$  os pontos médios dos lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$ . Aplicando o teorema 1.1.5 (**Teorema de Menelau**) no triângulo  $AM_aC$ , temos

$$\frac{\overline{BM_a}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{M_bC}}{\overline{M_bA}} \cdot \frac{\overline{GA}}{\overline{GM_a}} = 1. \quad (1.3)$$

Observando a figura 23, verificamos que

$$\frac{\overline{BM_a}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{M_bC}}{\overline{M_bA}} = 1.$$

Logo, substituindo em (1.3), temos

$$\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{1}\right) \cdot \left(\frac{\overline{GA}}{\overline{GM}_a}\right) = 1.$$

Desse modo

$$\frac{\overline{GA}}{\overline{GM}_a} = 2.$$

De maneira análoga, podemos fazer o mesmo para as outras medianas e encontraremos

$$\frac{\overline{GB}}{\overline{GM}_b} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{\overline{GC}}{\overline{GM}_c} = 2.$$

□

### 1.5.3 Circuncentro

**Proposição 1.5.6.** *As três mediatrizes dos lados de um triângulo  $ABC$  qualquer se encontram num ponto chamado **circuncentro** que é o centro da circunferência circunscrita.*

*Demonstração.* Seja  $ABC$  um triângulo qualquer,  $r$ ,  $s$  e  $t$ , respectivamente, as mediatrizes dos lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , e  $O$  o ponto de interseção das retas  $r$  e  $s$ .

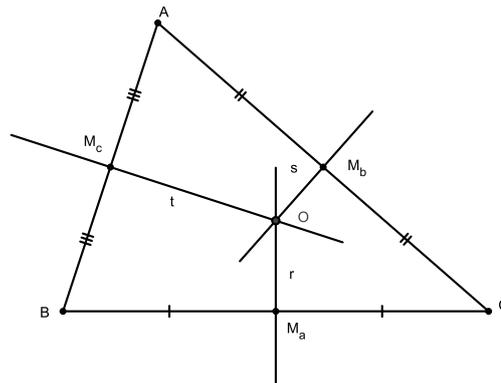


Figura 24 – Mediatrizes Concorrentes

Pela caracterização de mediatriz de um segmento como lugar geométrico, temos  $\overline{OB} = \overline{OC}$  (pois  $O \in r$ ) e  $\overline{OC} = \overline{OA}$  (pois  $O \in s$ ). Concluindo assim que  $\overline{OB} = \overline{OA}$  e segue novamente da caracterização de mediatriz como lugar geométrico que  $O \in t$ . Logo o circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo com raio igual a distância do circuncentro a um dos vértices. □

### 1.5.4 Ortocentro

Os segmentos de reta que passam pelo vértice de um triângulo e intersectam o lado oposto (ou prolongamento) perpendicularmente é a altura do triângulo relativo a este vértice.

**Proposição 1.5.7.** *Em qualquer triângulo  $ABC$ , as três alturas se intersectam em um só ponto que é chamado de **ortocentro**.*

*Demonstração.* Considere um triângulo  $ABC$  qualquer, representado pela figura 25. trace por  $A, B$  e  $C$ , respectivamente, retas  $r, s$  e  $t$  paralelas a  $BC, CA$  e  $AB$ , também respectivamente, e sejam  $r \cap s = \{P\}$ ,  $s \cap t = \{M\}$ ,  $t \cap r = \{N\}$ . Como os quadriláteros  $ABCN$  e  $ABMC$  são paralelogramos, segue que  $\overline{CN} = \overline{AB} = \overline{CM}$  e daí,  $C$  é o ponto médio de  $\overline{MN}$ . Analogamente,  $B$  é o ponto médio de  $\overline{MP}$  e  $A$  é o ponto médio de  $\overline{PN}$ . Por outro lado, a altura relativa a  $\overline{BC}$  também é perpendicular  $\overline{PN}$ , já que  $\overline{BC}$  e  $\overline{PN}$  são paralelos. Do mesmo modo, as alturas relativas  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  são perpendiculares respectivamente a  $\overline{MP}$  e  $\overline{MN}$ . Segue que as alturas do triângulo  $ABC$  são mediatrizes dos lados do triângulo  $MNP$ . Como já provamos que as mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes, concluímos assim que as alturas de  $ABC$  também são concorrentes. Utilizamos nessa demonstração um triângulo acutângulo, mas o mesmo raciocínio pode ser aplicado aos casos de triângulos retângulos e obtusângulos.

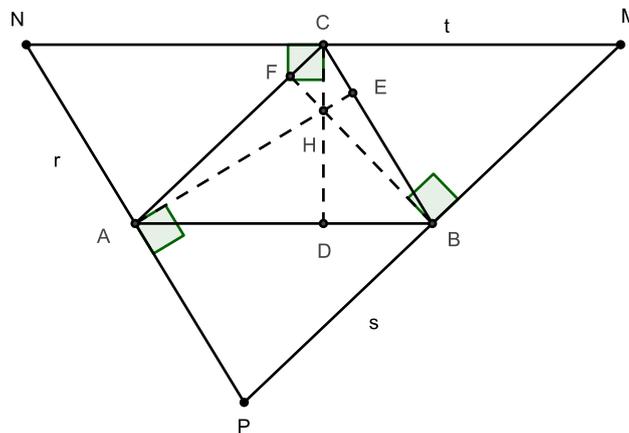


Figura 25 – Ortocentro de um Triângulo Acutângulo

□

**Corolário 1.5.8.** *O circuncentro de um triângulo é o ortocentro de seu triângulo medial.*

*Demonstração.* Pela demonstração da proposição 1.5.7, sabemos que  $ABC$  é o triângulo medial do triângulo  $MNP$  e as mediatrizes dos lados de  $MNP$  são as alturas de  $ABC$ ;

portanto, o circuncentro de  $MNP$  coincide com o ortocentro de  $ABC$ . Os demais casos são análogos.  $\square$

### 1.5.5 Ponto de Gergonne

**Proposição 1.5.9.** *As cevianas que unem cada vértice de um triângulo  $ABC$  ao ponto de contato do círculo inscrito com o lado oposto intersectam-se no mesmo ponto chamado de **Ponto de Gergonne**.<sup>1</sup>*

Usaremos o Teorema de Ceva para demonstrar a existência do ponto de Gergonne.

*Demonstração.* Sendo a bissetriz o conjunto de pontos que equidista dos dois segmentos que formam o ângulo e o centro da circunferência inscrita é o incentro, temos que

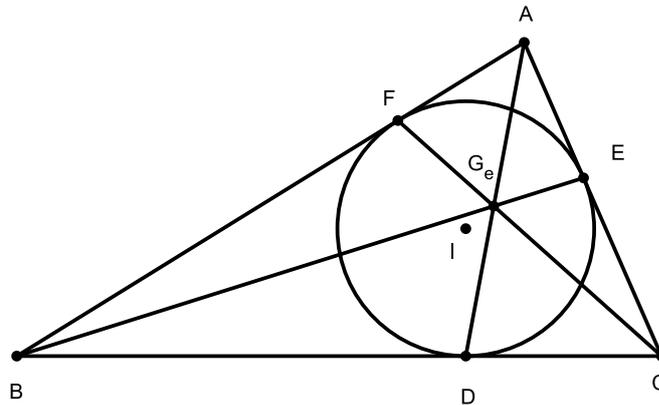


Figura 26 – Ponto de Gergonne

$$\overline{AE} = \overline{AF}, \quad \overline{BF} = \overline{BD} \quad \text{e} \quad \overline{CE} = \overline{CD}.$$

Substituindo  $\overline{AF}$  por  $\overline{AE}$ ,  $\overline{BD}$  por  $\overline{BF}$  e  $\overline{CD}$  por  $\overline{CE}$ , logo verificamos que

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{AF}} = 1, \quad (1.4)$$

então

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{AE}} = 1. \quad (1.5)$$

<sup>1</sup> Joseph Diaz Gergonne foi um matemático francês, nasceu em 19 de junho de 1771 na cidade de Nancy e faleceu em 04 de maio de 1859 em Montpellier, França

Consequentemente, as três cevianas que ligam os vértices ao ponto de tangência da circunferência se intersectam em um ponto chamado de ponto de Gergonne.

□

### 1.5.6 Ponto de Nagel

Dado um triângulo  $ABC$  qualquer, os segmentos que ligam cada vértice ao ponto de tangência dos círculos ex-inscritos ao lado oposto são chamados de **Cevianas de Nagel**<sup>1</sup>.

**Proposição 1.5.10.** *As três cevianas de Nagel se intersectam num único ponto  $N$ , chamado de **Ponto de Nagel**.*

*Demonstração.* Considere um triângulo  $ABC$  qualquer, representado pela figura 27. Sendo  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{AC} = b$  e  $\overline{BC} = a$ , então pela proposição 1.2.1, item (c), temos que  $\overline{BX} = p - c$ ,  $\overline{CX} = p - b$ ,  $\overline{AY} = p - c$ ,  $\overline{CY} = p - a$ ,  $\overline{AZ} = p - b$  e  $\overline{BZ} = p - a$ .

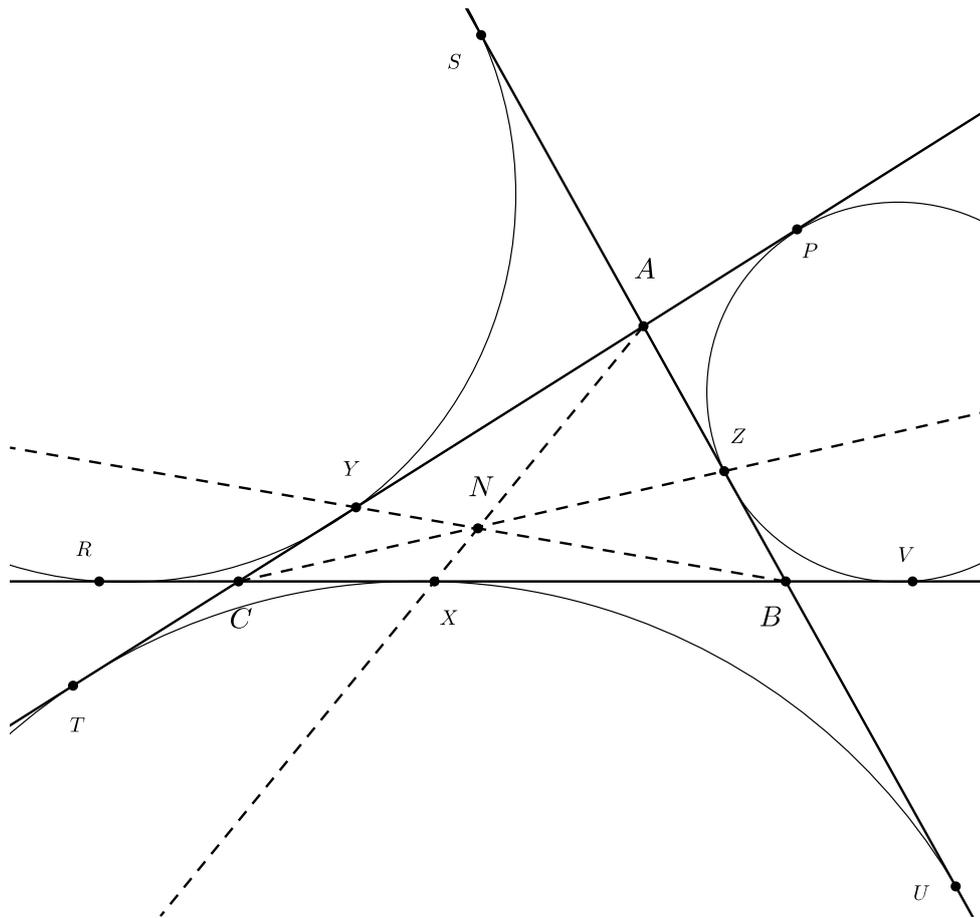


Figura 27 – Ponto de Nagel

<sup>1</sup> Christian Heinrich von Nagel (1803 - 1882) Professor de matemática e geômetra alemão. Seus trabalhos mais conhecidos são da geometria do triângulo. Nasceu em Stuttgart, Alemanha e faleceu em Ulm, Alemanha.

Sendo assim,

$$\frac{\overline{AY}}{\overline{CY}} \cdot \frac{\overline{CX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BZ}}{\overline{ZA}} = \frac{p-c}{p-a} \cdot \frac{p-b}{p-c} \cdot \frac{p-a}{p-b} = 1.$$

Portanto, pelo teorema 1.1.4, as cevianas são concorrentes.

□

**Corolário 1.5.11.** *Dado um triângulo  $ABC$  qualquer, o segmento que liga o vértice a um ponto do lado oposto é uma ceviana de Nagel se, e somente se, esse ponto dividir o perímetro do triângulo ao meio.*

*Demonstração.* De acordo com a figura 27 a circunferência ex-inscrita oposta ao vértice  $A$ , intersecta o lado  $BC$  do triângulo em  $X$ .

Então, conforme a proposição 1.2.1, item (f), temos que  $\overline{AC} + \overline{CX} = \overline{AB} + \overline{BX} = p$ , onde  $\overline{AX}$  é uma ceviana de Nagel do triângulo  $ABC$ .

Suponha agora que exista outro ponto  $X'$  em  $\overline{BC}$ , conforme figura 28, que satisfaça  $\overline{AB} + \overline{BX'} = p$

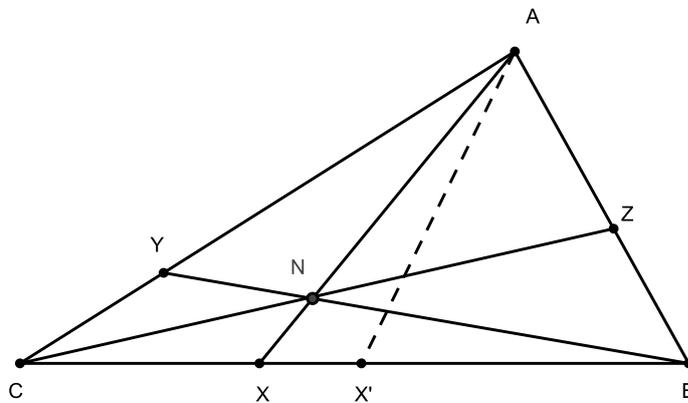


Figura 28 – Unicidade da Reta de Nagel

Logo,

$$\overline{AB} + \overline{BX'} = \overline{AB} + \overline{BX}$$

O que é equivalente a

$$\overline{BX'} = \overline{BX}$$

Como  $X$  e  $X'$  pertencem à uma mesma semirreta de origem  $B$ , segue-se

$$\overline{BX'} = \overline{BX} \iff X = X'$$

Por raciocínio análogo, se considerarmos as cevianas de Nagel que cortam os lados  $AC$  e  $AB$ , obteremos o mesmo resultado.

□

### 1.5.7 Ponto de Spieker

**Definição 1.5.2.** O ponto de encontro das bissetrizes internas do triângulo medial de um triângulo  $ABC$  é chamado de **Ponto de Spieker**<sup>1</sup> do triângulo  $ABC$ . O Ponto de Spieker é o incentro do triângulo medial.

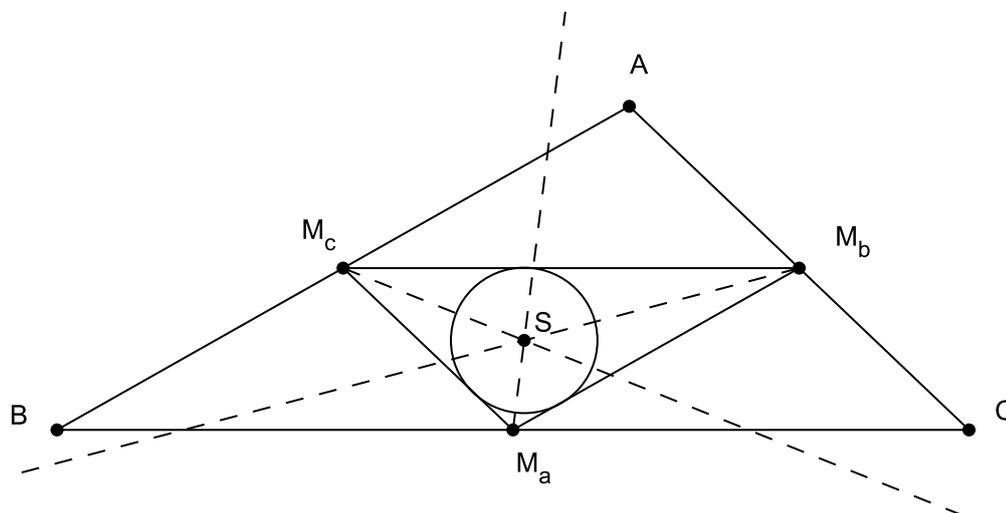


Figura 29 – Ponto de Spieker

A existência do ponto de Spieker é óbvia, uma vez que já sabemos que as três bissetrizes se encontram em um único ponto.

<sup>1</sup> Theodor Spieker (1823 - 1913) Professor de matemática alemão que escreveu um livro escolar amplamente utilizado de geometria plana. Uma cópia deste livro foi dada a Albert Einstein por seu tutor quando Einstein tinha doze anos, e rapidamente o levou a se interessar pela matemática superior.



## 2 A Reta de Nagel e o Círculo de Spieker

Neste capítulo mostraremos que, em um triângulo qualquer, o incentro  $I$ , o baricentro  $G$ , o ponto de Spieker  $S$  e o Ponto de Nagel  $N$  são colineares. A reta que contém esses pontos é conhecida como Reta de Nagel.

Muitos professores de Matemática não estão cientes de que existe esse alinhamento especial e, normalmente não é mencionado nos livros de geometria.

A abordagem nesse capítulo utilizará puramente os elementos geométricos apresentados anteriormente, que serão de grande importância na construção da reta de Nagel.

### 2.1 Demonstração da Reta de Nagel

**Proposição 2.1.1.** *Em qualquer triângulo, o incentro  $I$ , o baricentro  $G$  e o Ponto de Nagel  $N$  são colineares, e a distância do baricentro ao ponto de Nagel é sempre o dobro da distância do incentro ao baricentro. A reta que contém estes pontos é chamada de **reta de Nagel**.*

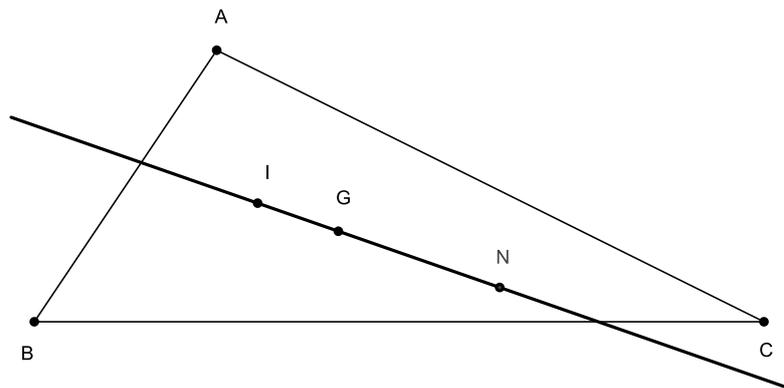


Figura 30 – Reta de Nagel

*Demonstração.* No caso do triângulo ser equilátero a Reta de Nagel não está definida, pois o incentro, o baricentro, o ponto de Spieker e o ponto de Nagel coincidem.

Em triângulos isósceles, temos que a bissetriz, a mediana, a ceviana de Nagel relativas a base do triângulo e uma bissetriz do triângulo medial são coincidentes, logo, o incentro, o baricentro, o ponto de Nagel e o ponto de Spieker estão alinhados, conforme ilustra a figura 31.

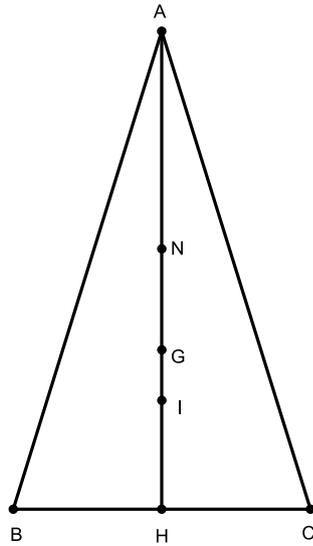


Figura 31 – Reta de Nagel - Triângulo Isósceles

Tracemos a mediana  $\overline{AM_a}$ , relativa ao lado  $\overline{BC}$ , bem como a reta que passa por  $I$  e  $G$ . Em seguida, prolongamos  $\overline{IG}$  até o ponto  $L$  tal que  $\overline{GL} = 2 \cdot \overline{IG}$  (ver figura 32). Os ângulos  $M_a\widehat{GI}$  e  $A\widehat{GL}$  são congruentes, por serem opostos pelo vértice. Pela propriedade do baricentro  $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM_a}$ , logo os segmentos  $\overline{AG}$  e  $\overline{GL}$  são proporcionais, respectivamente, aos segmentos  $\overline{GM_a}$  e  $\overline{GI}$  e os triângulos  $AGL$  e  $M_aGI$  são semelhantes, pelo critério  $LAL$  de semelhança. Logo, o ângulo  $A\widehat{LG} = M_a\widehat{IG}$  e portanto, as retas contendo  $\overline{AL}$  e  $\overline{IM_a}$  são paralelas pelo Teorema 1.1.1 (**Ângulo Alternado**).

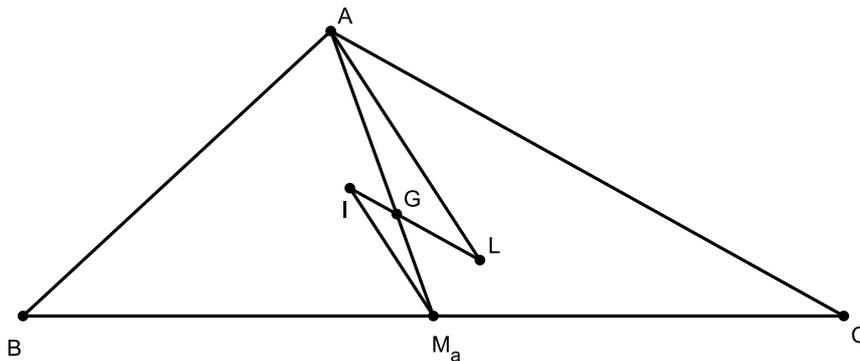


Figura 32 – Reta de Nagel - Demonstração

Vamos agora mostrar que  $L$  é o ponto de Nagel. Para isso, é necessário demonstrar que  $L$  pertence a ceviana de Nagel do triângulo  $ABC$ .

Prolongaremos então, o segmento  $\overline{AL}$  até o lado  $\overline{BC}$  em  $E$ . pelo Corolário 1.5.11, o ponto  $E$  deve dividir o perímetro ao meio a partir do vértice  $A$ , ou seja,  $\overline{AB} + \overline{BE} = p$ , onde  $p$  é o semiperímetro do triângulo  $ABC$ .

Como  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{AC} = b$  e  $\overline{BC} = a$ , temos que

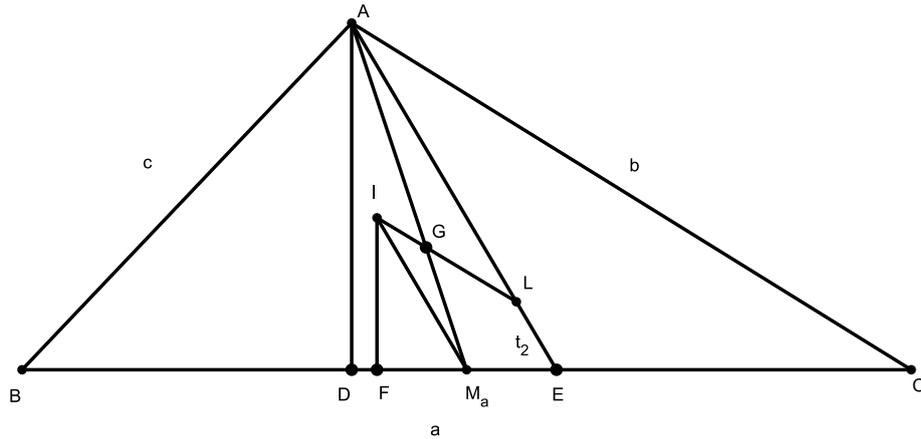


Figura 33 – Reta de Nagel - Construção para Demonstração

$$\begin{aligned}\overline{AB} + \overline{BE} &= p \Rightarrow \\ \overline{BE} &= p - \overline{AB} \Rightarrow \overline{BE} = p - c.\end{aligned}$$

Pela figura 33, observamos que

$$\overline{BE} = \overline{BD} + \overline{DE}.$$

Vamos então determinar os comprimentos de  $\overline{BD}$  e  $\overline{DE}$ .

Primeiramente, vamos determinar o comprimento de  $\overline{DE}$ . Traçamos os segmentos perpendiculares  $\overline{AD}$  e  $\overline{IF}$  e, podemos então observar que os triângulos  $ADE$  e  $IFM_a$  são semelhantes, visto que ambos são triângulos retângulos em  $D$  e  $F$ , respectivamente e, tal como já foi mostrado anteriormente,  $\overline{AE}$  e  $\overline{IM_a}$  são paralelas. Logo, os ângulos  $\widehat{DAE} = \widehat{FIM_a}$ . Usando o critério  $AA$  de semelhança de triângulos podemos concluir que os triângulos são efetivamente semelhantes.

Assim, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{FM_a}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{IF}}.$$

Sendo  $I$  o incentro do triângulo, temos que  $IF = r$ , onde  $r$  é o raio da circunferência inscrita (segmento perpendicular a cada um dos lados a partir do incentro) no triângulo  $ABC$  e  $\overline{AD}$  é a altura relativa ao lado  $\overline{BC}$ .

Podemos afirmar que:

$$[ABC] = r \cdot p \quad \text{e} \quad [ABC] = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \overline{AD}.$$

Igualando as equações acima, teremos então a seguinte relação

$$\frac{\overline{AD}}{\bar{r}} = \frac{2 \cdot p}{\bar{a}}.$$

O que resulta,

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{FM}_a} = \frac{2 \cdot p}{a} \text{ e, conseqüentemente que } \overline{DE} = \left(\frac{2 \cdot p}{a}\right) \cdot \overline{FM}_a.$$

De acordo com o teorema 1.2.1 item (a), o comprimento da tangente  $\overline{BF}$  é simplesmente  $p - b$ .

Assim, é possível afirmar que

$$\overline{FM}_a = \overline{BM}_a - \overline{BF} = \frac{1}{2}a - (p - b) = \frac{1}{2}a - p + b$$

$$\overline{FM}_a = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}(a + b + c) + b = \frac{b - c}{2}.$$

Por conseqüência,

$$\overline{DE} = \left(\frac{2p}{a}\right) \cdot \overline{FM}_a = \left(\frac{2p}{a}\right) \cdot \left(\frac{b - c}{2}\right) = \frac{p(b - c)}{a}.$$

Agora, vamos determinar o comprimento do segmento  $\overline{BD}$ . No triângulo  $ABD$ , temos que  $\overline{BD} = c \cdot \cos(\widehat{ABD})$ .

E utilizando a lei dos cossenos, teremos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a(c \cdot \cos(\widehat{ABD})).$$

Conseqüentemente,

$$\overline{BD} = c \cdot \cos(\widehat{ABD}) = c \cdot \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) = \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right).$$

Finalmente estamos em condições de provar que:

$$\overline{BE} = \overline{BD} + \overline{DE} = p - c.$$

De fato,

$$\overline{BE} = \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) + \frac{p(b - c)}{a} = \frac{a^2 + c^2 - b^2 + 2p(b - c)}{2a}$$

$$\overline{BE} = \frac{a^2 + c^2 - b^2 + (a + b + c)(b - c)}{2a} = \frac{(a^2 + ab - ac)}{2a}$$

$$\overline{BE} = a \cdot \left(\frac{a+b-c}{2a}\right) = \left(\frac{a+b-c}{2}\right)$$

$$\overline{BE} = \frac{1}{2}(a+b+c) - c$$

$$\overline{BE} = p - c.$$

Assim concluímos que o ponto  $L$  pertence a ceviana de Nagel e que, de maneira análoga, podemos fazer o mesmo para  $\overline{BL}$  e  $\overline{CL}$  e encontraremos o ponto de Nagel  $N$ , concluindo assim que  $L = N$  e que  $\overline{IG} = \frac{1}{3} \cdot \overline{IN}$ .  $\square$

## 2.2 O Círculo de Spieker

**Definição 2.2.1.** O círculo de Spieker de um triângulo  $ABC$  é o círculo inscrito no seu triângulo medial.

De acordo com a definição 1.5.2, o Ponto de Spieker é o centro do círculo de Spieker, ou seja, é o encontro das bissetrizes internas do triângulo medial.

**Proposição 2.2.1.** O ponto de Spieker é o ponto médio do segmento  $\overline{IN}$  da Reta de Nagel do triângulo  $ABC$ .

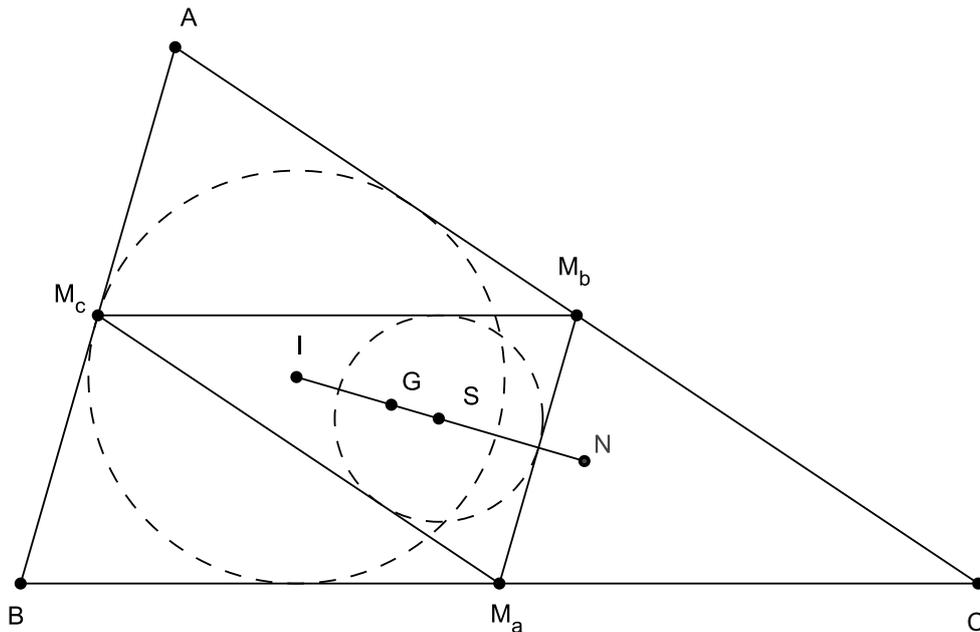


Figura 34 – Demonstração:  $S$  é o Ponto Médio de  $\overline{IN}$

*Demonstração.* Como já sabemos, o baricentro  $G$  divide a mediana na razão  $2 : 1$ , por esse motivo uma homotetia de centro  $G$  e  $k = -\frac{1}{2}$  transforma o triângulo  $ABC$  no seu triângulo medial  $M_aM_bM_c$ , conforme ilustra a figura 34.

O incentro do triângulo  $ABC$  é transformado no incentro do triângulo  $M_aM_bM_c$  que é o centro da circunferência de Spieker do triângulo  $ABC$ . De acordo com a proposição 1.4.1, isto acontece porque a imagem de uma circunferência sob uma homotetia é também uma circunferência, bem como o centro da circunferência é transformado no centro de sua imagem. A homotetia transporta o ponto  $I$  para o ponto  $S$ . Logo, para isso acontecer é necessário que  $I, G$  e  $S$  sejam colineares com  $\overline{IG} = 2 \cdot \overline{GS}$ .

Como

$$\overline{IG} = \frac{1}{3} \cdot \overline{IN} \quad e \quad \overline{IG} = 2 \cdot \overline{GS}.$$

Então,

$$\overline{GS} = \frac{1}{6} \cdot \overline{IN}.$$

Somando os termos, temos

$$\overline{IG} + \overline{GS} = \frac{1}{3} \cdot \overline{IN} + \frac{1}{6} \cdot \overline{IN}.$$

Portanto,

$$\overline{IS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{IN}.$$

□

Como já nos utilizamos dos instrumentos matemáticos anteriores para o estudo da Reta de Nagel e do Círculo de Spieker, podemos então concluir que:

- $I, G$  e  $N$  são sempre colineares;
- $G$  divide  $\overline{IN}$  de modo que  $\overline{GN} = 2 \cdot \overline{IG}$ .
- $G$  divide  $\overline{IN}$  de modo que  $\overline{IG} = \frac{1}{3} \cdot \overline{IN}$ .
- $S$  é o ponto médio de  $\overline{IN}$ .

**Proposição 2.2.2.** *O incentro de um triângulo é o ponto de Nagel do seu triângulo medial.*

*Demonstração.* De fato, pelas propriedades da Reta de Nagel, a homotetia de centro  $G$  e razão  $k = -2$  transporta o incentro de um triângulo para o seu ponto de Nagel. Com a notação estabelecida pela proposição 2.2.1 (ver figura 34), a homotetia de centro  $G$  e  $k = -2$  transporta o incentro do triângulo medial (ponto  $S$  de Spieker) para o seu ponto de Nagel. Logo o incentro do triângulo  $ABC$  é o ponto de Nagel do seu triângulo medial.  $\square$

**Proposição 2.2.3.** *Dado o triângulo  $ABC$  e sejam  $Q_1, Q_2$  e  $Q_3$  os pontos médios dos segmentos que unem o ponto de Nagel  $N$  do triângulo aos vértices  $A, B$  e  $C$ , então o triângulo  $Q_1Q_2Q_3$  é congruente ao triângulo medial de  $ABC$  e os seus lados são tangentes à circunferência de Spieker.*

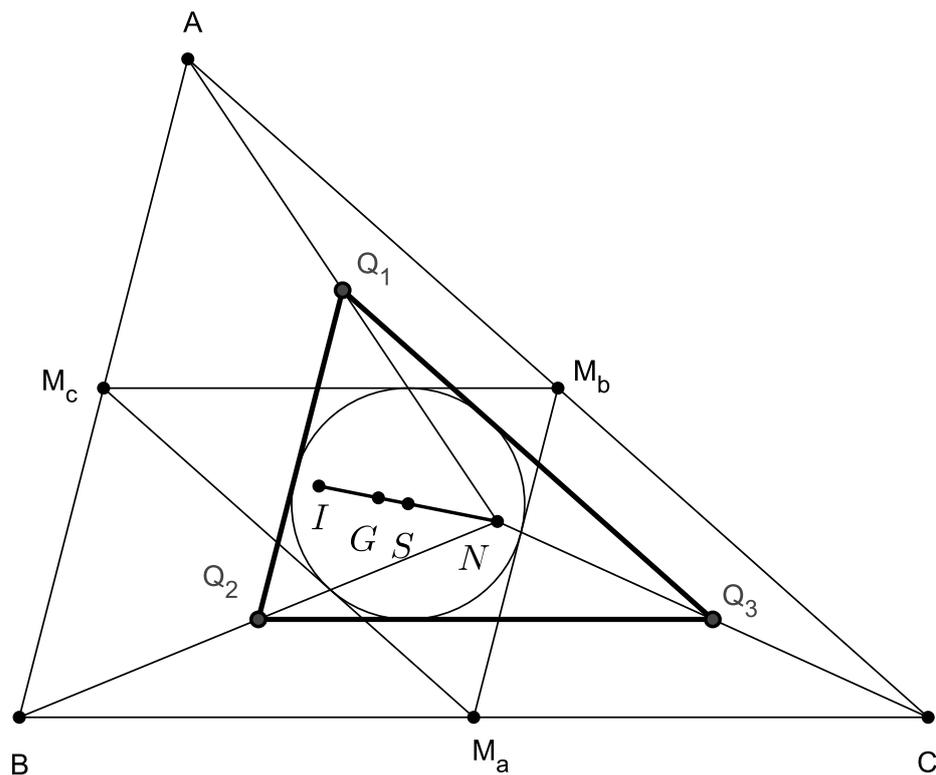


Figura 35 – Triângulos  $Q_1Q_2Q_3$  e  $M_aM_bM_c$  Congruentes

*Demonstração.* Seja a transformação composta pela homotetia de centro  $N$  e  $k = 2$  seguida da homotetia de centro  $G$  e  $k = -\frac{1}{2}$ . A primeira homotetia transporta o triângulo  $Q_1Q_2Q_3$ , para o triângulo  $ABC$  e a segunda transporta o triângulo  $ABC$  para o triângulo  $M_aM_bM_c$ . Isto porque a primeira homotetia duplica o comprimento dos lados do triângulo  $Q_1Q_2Q_3$ ,

enquanto que a segunda os divide em duas partes iguais. Desta forma, o comprimento dos lados do triângulo  $M_aM_bM_c$  é igual ao comprimento dos lados do  $Q_1Q_2Q_3$ , logo, pelo critério *LLL* de congruência, os triângulos são congruentes.

Da mesma forma, a transformação transporta a circunferência inscrita do triângulo  $Q_1Q_2Q_3$  na circunferência inscrita do triângulo  $M_aM_bM_c$ , ou seja, transporta o incentro do triângulo  $Q_1Q_2Q_3$  para o incentro do triângulo  $M_aM_bM_c$ .

De fato, já sabemos que o ponto  $S$  divide  $\overline{IN}$ , logo a homotetia de centro  $N$  e  $k = 2$  transporta o ponto  $S$  para o ponto  $I$ . Como  $\overline{IG} = 2 \cdot \overline{GS}$ , a homotetia de centro  $G$  e  $k = -\frac{1}{2}$  transporta novamente o ponto  $I$  para o ponto  $S$ . Assim, o ponto  $S$  é a sua própria imagem sob a transformação.

Portanto, as duas circunferências inscritas têm o mesmo centro e também o mesmo raio, visto que os triângulo  $M_aM_bM_c$  e  $Q_1Q_2Q_3$  são congruentes, logo as suas circunferências inscritas são coincidentes. □

**Proposição 2.2.4.** *As cevianas de Nagel de um triângulo  $ABC$  passam pelos pontos de tangência do círculo de Spieker no triângulo medial.*

*Demonstração.* Seja  $T$  o ponto de tangência do círculo inscrito com  $M_aM_b$  e  $P$  a interseção da reta  $CT$  com o lado  $AB$ . Como consequência, temos que  $M_bT$  é paralelo a  $AP$ ,  $\overline{AM_b} = \overline{M_bC}$  e  $\overline{M_bM_a} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$ . Observe que os triângulos  $CTM_b$  e  $CPA$  são semelhantes, com razão de semelhança 2.

Pela proposição 1.2.1, temos a medida do segmento  $\overline{M_bT} = \frac{p-b}{2}$ , conforme ilustrado na figura 36.

Usando argumentos de semelhança, temos

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CM_b}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{M_bT}}$$

como  $\frac{\overline{CA}}{\overline{CM_b}} = 2$  e  $\overline{M_bT} = \frac{p-b}{2}$ , temos então que

$$\overline{AP} = p - b$$

Podemos constatar que o ponto  $P$  divide o perímetro do triângulo  $ABC$  ao meio, logo pelo corolário 1.5.11,  $CP$  é uma ceviana de Nagel.

Se usarmos raciocínio análogo, podemos fazer o mesmo para  $AR$  e  $BS$ , e chegaremos à conclusão que  $R$  e  $S$  pertencem as cevianas de Nagel relativas aos vértices  $A$  e  $B$ , respectivamente, como ilustra a figura 36.

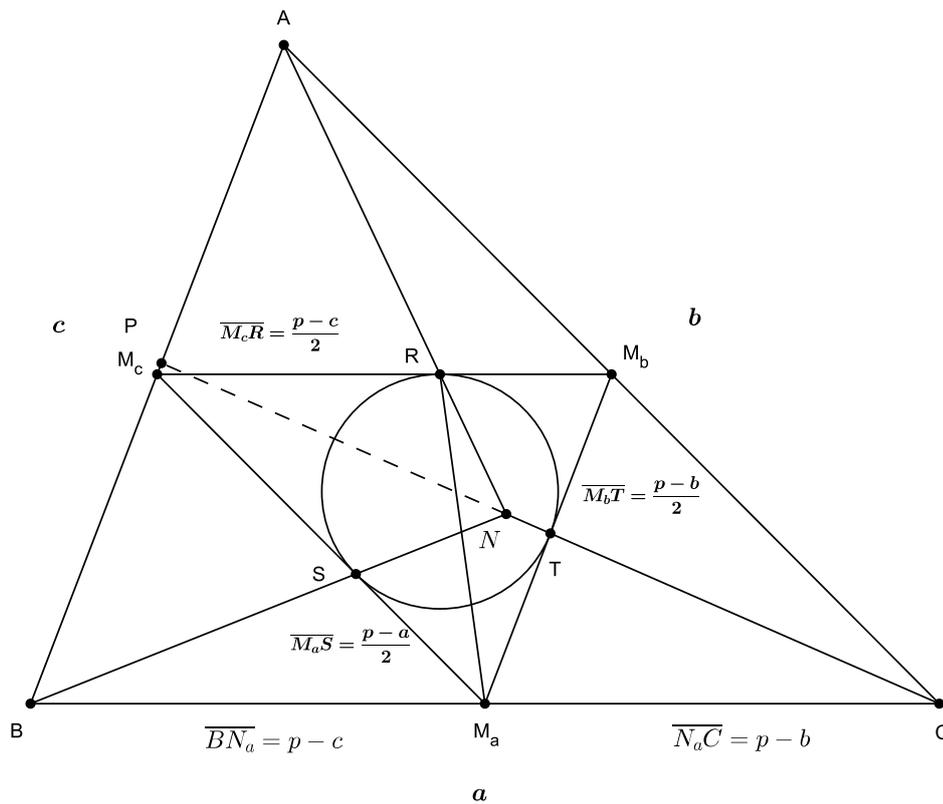


Figura 36 – Ponto de Contato - Cevianas de Nagel

□

## 2.3 A Reta de Euler

**Teorema 2.3.1.** *Em um triângulo qualquer, o Ortocentro  $H$ , o Baricentro  $G$  e o Circuncentro  $O$  estão sobre uma mesma linha reta e a distância do Ortocentro ao Baricentro é o dobro da distância do baricentro ao Circuncentro. A reta que contém estes três pontos é chamada de Reta de Euler.*

*Demonstração.* Faremos uma análise semelhante a demonstração da reta de Nagel vista na proposição 2.1.1.

Em um triângulo equilátero a reta de Euler não está definida, pois neste triângulo a mediatriz, a bissetriz e a altura coincidem e os três pontos também coincidem.

Em triângulos isósceles, a mediana, a mediatriz e a altura relativa à base são coincidentes, logo, o baricentro, o ortocentro e o circuncentro pertencem a um mesmo segmento. Assim, a reta que contém esse segmento é a reta de Euler do triângulo.

Suponha que os ângulos do triângulo  $ABC$  são agudos, para garantirmos que os três pontos são internos ao triângulo. Para um triângulo com um ângulo obtuso ou retângulo,

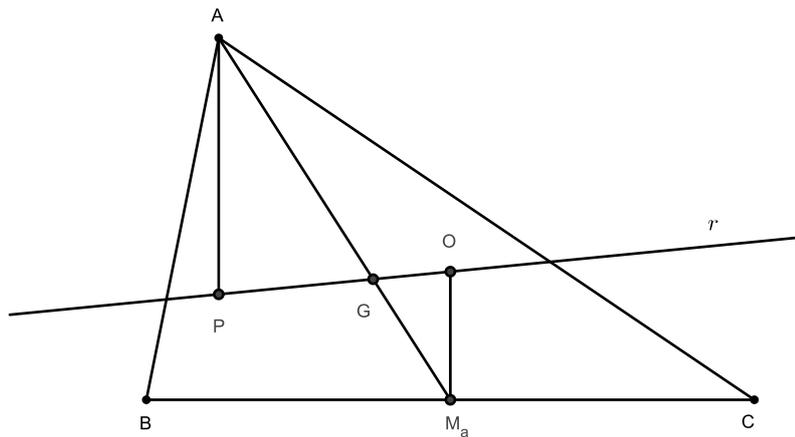


Figura 37 – Reta de Euler

a prova é análoga. Portanto, podemos supor que  $ABC$  não é isósceles.

Neste caso, a mediana é distinta da mediatriz, o que implica que o baricentro  $G$  e o circuncentro  $O$  são pontos distintos. Tome a reta  $r$  determinada por  $G$  e  $O$ .

Na semirreta com origem em  $O$  e contendo  $G$  tome um ponto  $P$  tal que  $\overline{GP} = 2 \cdot \overline{GO}$ . Seja  $M_a$  o ponto médio do lado  $\overline{BC}$ . Considere a mediana e a mediatriz relativas ao lado  $\overline{BC}$ . Os triângulos  $GPA$  e  $GOM_a$  são semelhantes pelo caso  $LAL$  de semelhança, pois,  $\overline{GP} = 2 \cdot \overline{GO}$  (por construção) os ângulos  $\widehat{AGP} = \widehat{M_aGO}$  (opostos pelo vértice) e  $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM_a}$  (propriedade do baricentro). Logo, os ângulos  $\widehat{APG} = \widehat{M_aOG}$ . Portanto, as retas contendo  $\overline{AP}$  e  $\overline{OM_a}$  são paralelas pelo Teorema 1.1.1. Mas como  $\overline{OM_a}$  é perpendicular a  $\overline{BC}$  e paralela a  $\overline{AP}$ , segue que  $P$  pertence a altura de  $ABC$  relativa ao lado  $\overline{BC}$ . Da mesma forma, relativamente à mediana e à mediatriz do lado  $\overline{AC}$ , mostramos que  $P$  pertence a altura de  $ABC$ .

Como  $P$  é a intersecção de duas alturas, concluímos que  $P = H$  em que  $H$  é o ortocentro do triângulo  $ABC$ .

□

## 2.4 A Circunferência de Nove Pontos

A demonstração do Teorema a seguir, encontra-se em [16], página 18.

**Teorema 2.4.1.** *Em um triângulo  $ABC$ , os pontos médios dos seus lados, os pés das alturas e os pontos médios dos segmentos que unem os vértices do triângulo ao ortocentro, pertencem a uma mesma circunferência.*

*Demonstração.* Considere o triângulo  $ABC$ , e os pontos médios  $M_a$ ,  $M_b$  e  $M_c$ , dos lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$ , respectivamente. Sejam  $H_a$ ,  $H_b$  e  $H_c$  os pés das alturas referentes aos

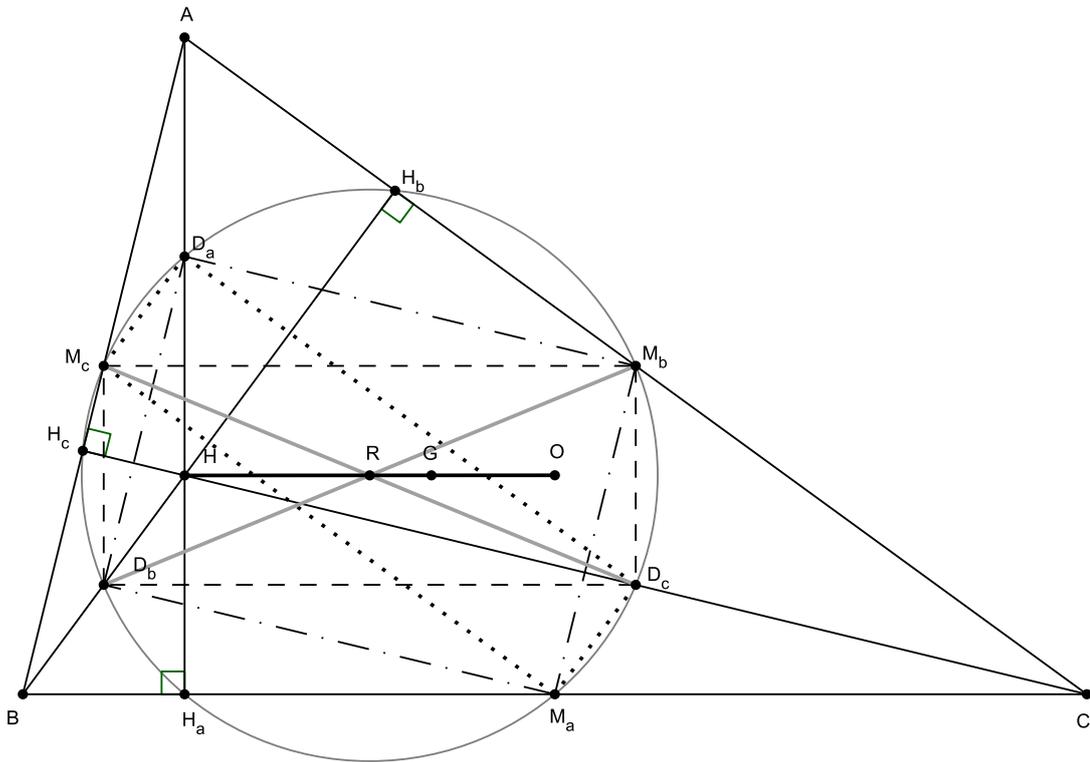


Figura 38 – Circunferência de Nove Pontos

vértices  $A, B$  e  $C$ , respectivamente. Sejam  $D_a, D_b$  e  $D_c$  os pontos médios dos segmentos  $\overline{HA}, \overline{HB}$  e  $\overline{HC}$ , onde  $H$  é o ortocentro do triângulo.

Pelo Teorema 1.1.3, temos que  $\overline{M_bM_c} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{D_bD_c}$  e  $\overline{D_bM_c} \parallel \overline{AH} \parallel \overline{M_bD_c}$ . Como  $\overline{AH}$  é perpendicular a  $\overline{BC}$ , segue-se que  $M_bM_cD_bD_c$  é um retângulo e, portanto, está inscrito em uma circunferência cujo diâmetro é dado por suas diagonais, a saber,  $\overline{M_bD_b}$  e  $\overline{M_cD_c}$ .

De modo análogo verifica-se que  $M_aM_bD_aD_b$  e  $M_aM_cD_aD_c$  também são retângulos que possuem as diagonais  $\overline{M_bD_b}$  e  $\overline{M_cD_c}$ , respectivamente, comuns ao retângulo  $M_bM_cD_bD_c$ . Portanto estão inscritos na mesma circunferência, cujo centro  $R$  é dado pela interseção de suas diagonais. Deste modo mostramos que os pontos médios dos lados e os pontos médios dos segmentos que ligam o ortocentro aos vértices pertencem a uma circunferência, falta mostrar que os pés das alturas também pertencem a esta circunferência.

O segmento  $\overline{AH_a}$  é perpendicular ao lado  $\overline{BC}$ , já que  $\overline{AH_a}$  é a altura relativa a base  $\overline{BC}$ . O segmento  $\overline{M_aD_a}$  é um diâmetro da circunferência que contém os seis pontos, logo, sendo o triângulo  $M_aD_aH_a$  retângulo em  $H_a$  e  $\overline{M_aD_a}$  um diâmetro da circunferência (pois são vértices opostos de um dos retângulos inscritos citados acima), então  $H_a$  também pertence a circunferência. De forma análoga mostra-se que as alturas  $H_b$  e  $H_c$  também pertencem a circunferência e temos então os nove pontos, como queríamos demonstrar.  $\square$

**Corolário 2.4.2.** *O raio da circunferência de nove pontos de um triângulo é a metade do raio da circunferência circunscrita neste triângulo.*

*Demonstração.* De fato, considere o triângulo  $ABC$  e uma homotetia de centro  $G$  e  $k = -\frac{1}{2}$ . Essa homotetia transporta o triângulo  $ABC$  no seu triângulo medial. Consequentemente, pela proposição 1.4.1 a circunferência circunscrita no triângulo  $ABC$  é transformada na circunferência inscrita no triângulo medial que é a Circunferência de Nove Pontos.  $\square$

**Corolário 2.4.3.** *O centro da circunferência de nove pontos está localizado na reta de Euler, ele é o ponto médio do segmento que liga o ortocentro ao circuncentro. Além disso, a distância do centro do círculo de nove pontos ao baricentro é a metade da distância do baricentro ao circuncentro e um terço da sua distância ao ortocentro.*

*Demonstração.* Pela demonstração do teorema 2.3.1, temos que  $\overline{AH} = 2 \cdot \overline{OM_a}$ . Como  $D_a$  é o ponto médio do segmento  $\overline{AH}$ , então  $\overline{D_aH} = \overline{OM_a}$ . Pela demonstração do teorema 2.4.1,  $\overline{D_aR} = \overline{M_aR}$  que é o raio da Circunferência de Nove Pontos. Os ângulos  $\widehat{HD_aR}$  e  $\widehat{OM_aR}$  são congruentes, pois  $\overline{AH} // \overline{OM_a}$  e os triângulos  $HD_aR$  e  $OM_aR$  são congruentes, pelo critério  $LAL$  de congruência. Logo,  $\overline{HR} = \overline{OR}$  e  $\widehat{HRD_a} = \widehat{ORM_a}$ . Sendo  $M_a\widehat{RH}$  o suplemento de  $\widehat{HRD_a}$ , concluímos que  $\widehat{HRO}$  forma um ângulo raso, donde  $\overline{HR}$  e  $\overline{RO}$  são colineares.

Da Reta de Euler, vimos que

$$2 \cdot \overline{OG} = \overline{GH} = \overline{GR} + \overline{RH} = \overline{GR} + \overline{OR} = \overline{GR} + \overline{GR} + \overline{OG},$$

donde obtemos

$$\overline{OG} = 2 \cdot \overline{GR}.$$

Por outra parte,

$$\overline{RH} = \overline{OR} = \overline{OG} + \overline{GR} = 2 \cdot \overline{GR} + \overline{GR} = 3 \cdot \overline{GR}$$

logo,

$$\overline{RH} = 3 \cdot \overline{GR}.$$

Podemos assim concluir que

$$\overline{GR} = \frac{1}{2} \cdot \overline{OG} = \frac{1}{3} \cdot \overline{RH}$$

□

## 2.5 Analogia entre as Retas de Nagel e de Euler de um triângulo

A analogia notável entre o círculo de nove pontos e a Reta de Euler e o círculo de Spieker e a reta de Nagel, é contrastada na tabela abaixo e ilustrada nas Figuras 39 e 40, onde podemos comparar semelhanças nos dois resultados.

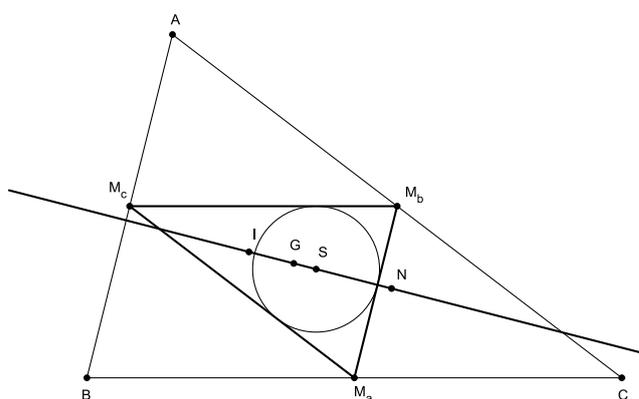


Figura 39 – Reta de Nagel do Triângulo ABC

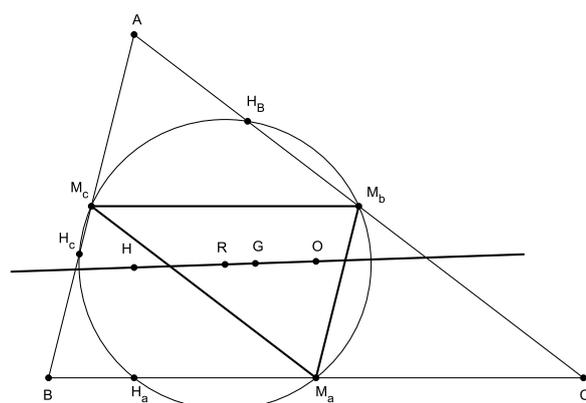


Figura 40 – Reta de Euler do Triângulo ABC

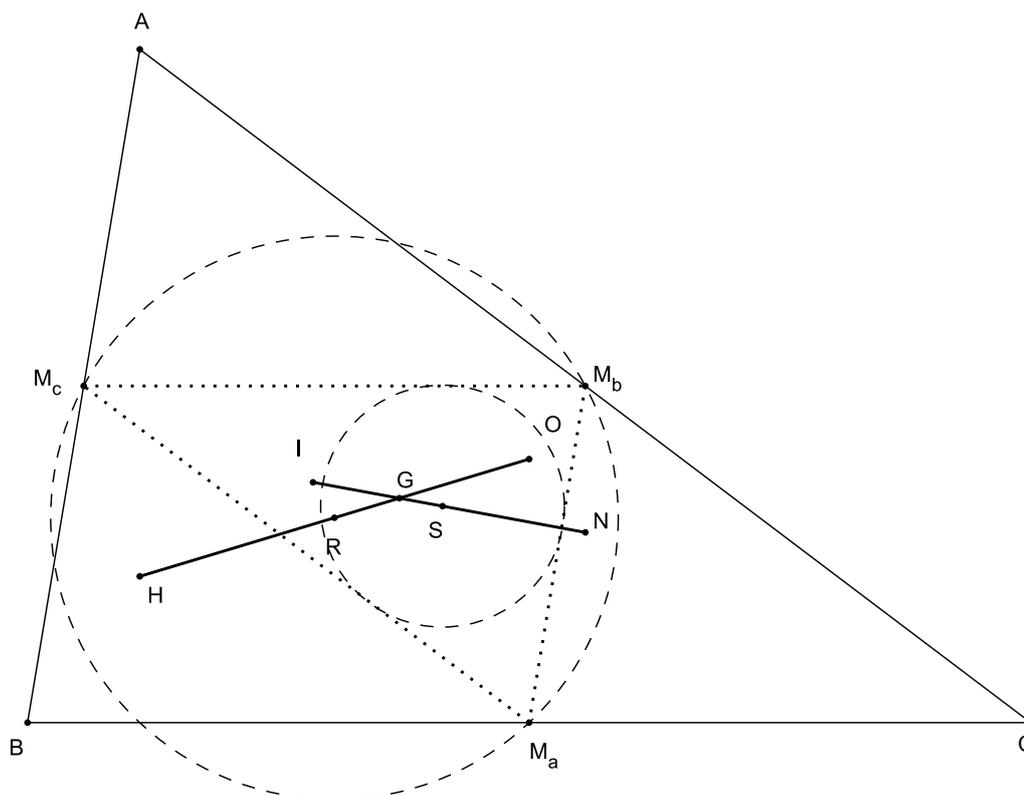


Figura 41 – Segmentos  $OGRH$  e  $IGSN$

Tabela 1 – Comparação entre as Retas de Nagel e Euler de um Triângulo

<b>Reta de Nagel</b>	<b>Reta de Euler</b>
O círculo de Spieker é a círculo inscrito no triângulo medial do triângulo $ABC$ e seu raio mede a metade do raio da círculo inscrito no triângulo $ABC$ .	O círculo de nove pontos é o círculo circunscrito ao triângulo medial e seu raio mede metade do raio da círculo circunscrito no triângulo $ABC$ .
O Incentro $I$ , o baricentro $G$ e o ponto de Nagel $N$ de qualquer triângulo são colineares, onde $\overline{GN} = 2 \cdot \overline{GI}$ e o ponto médio de $\overline{IN}$ é o centro do círculo de Spieker $S$ e $\overline{NS} = 3 \cdot \overline{SG}$	O circuncentro $O$ , o baricentro $G$ e o ortocentro $H$ de qualquer triângulo $ABC$ são colineares, onde $\overline{GH} = 2 \cdot \overline{GO}$ e o ponto médio de $\overline{OH}$ é o centro da círculo de nove pontos $R$ , tal que $\overline{HR} = 3 \cdot \overline{RG}$
O círculo de Spieker é tangente aos lados do triângulo medial, nos mesmos pontos onde os lados são cortados pelas linhas que ligam os vértices do triângulo $ABC$ com o seu ponto Nagel.	O círculo de nove pontos corta os lados do triângulo $ABC$ nos pés das alturas baixadas dos vértices.
A círculo de Spieker toca os lados do triângulo cujos vértices são os pontos médios dos segmentos do ponto de Nagel aos vértices do triângulo $ABC$	O círculo de nove pontos passa pelos pontos médios dos segmentos que ligam o ortocentro aos vértices do triângulo $ABC$ .

Os dois segmentos  $OGRH$  e  $IGSN$  se entrecruzam, cada um deles cortando o outro de forma equilibrada, se encontrado no baricentro  $G$ .

Ao todo, esse conjunto sistemático de correspondências entre as propriedades das Retas de Euler e Nagel (incluindo as correspondências entre as propriedades dos círculos de nove pontos e de Spieker) constituiu uma analogia matemática notável e complexa.

Outra situação interessante é que qualquer dois segmentos de reta que se cortem em proporções de comprimento idênticas terão sempre retas paralelas definidas por suas pontas (ver Teorema de Thales em [21], páginas 148 à 154).

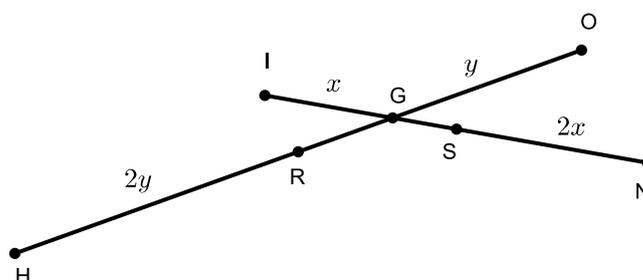


Figura 42 – Proporcionalidade dos Segmentos

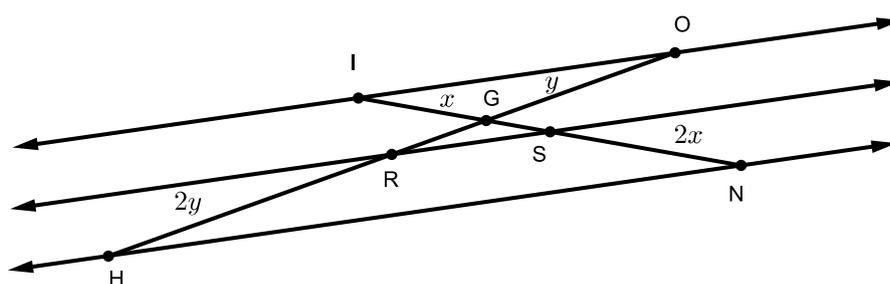


Figura 43 – Linhas Paralelas e Segmentos Proporcionais



# 3 Os Fundamentos da Geometria Afim

Alguns tópicos ensinados em um curso introdutório de álgebra linear são muitas vezes motivados por referência ao ensino fundamental da geometria. A geometria é tratada como algo conhecido pelo aluno e a sua referência dá uma melhor compreensão dos conceitos algébricos que, em princípio, podem ser considerados bastante abstrato.

O interessante e importante é que podemos inverter esse processo. De posse do conhecimento da álgebra linear, os conceitos geométricos podem ser definidos e desenvolvidos. O uso de métodos vetoriais em geometria, geralmente fornece novas maneiras de ver problemas antigos e também ajuda a demonstrar conexões profundas e bonitas entre álgebra e geometria, facilitando ao estudante a compreensão e o domínio dessa teoria.

Nesse capítulo apresentaremos a geometria afim. Um espaço afim é definido em termos de uma ação de um espaço vetorial  $V$  em um conjunto  $E$ , de modo que um vetor atua em um ponto  $A$  de  $E$  enviando-o para  $B$  de  $E$ , definindo um único vetor  $\overrightarrow{AB}$ . Podemos pensar em  $\overrightarrow{AB}$  como uma flecha que começa no ponto  $A$  e termina no ponto  $B$  e que possui direção, sentido e comprimento.

Ao introduzirmos um produto interno em um espaço afim, a geometria Euclidiana pode ser definida e uma teoria matemática muito interessante pode ser desenvolvida.

A Geometria Afim estuda as relações entre pontos e retas definidos num conjunto. Ponto e reta são os objetos básicos onde introduziremos um sistema baseado no conceito de vetor, e por esse motivo se faz necessário distinguirmos o espaço de pontos que é o Espaço Afim do Espaço Vetorial que é o espaço que contém todos os vetores.

No presente capítulo apresentaremos algumas definições algébricas que ajudarão na construção dos pontos notáveis do triângulo, da reta de Nagel e do círculo de Spieker, segundo o Artigo de Rojas & Mendonza, ver [25], bem como alguns resultados, demonstrações e definições apresentadas em [27].

### 3.1 Espaços Vetoriais e Subespaços

**Definição 3.1.1 (Espaços Vetoriais).** *Seja  $\mathbb{V}$  um conjunto não-vazio qualquer de objetos no qual estão definidas duas operações, a adição e a multiplicação por escalares (números reais). Por adição entendemos uma regra que associa a cada par de objetos  $u$  e  $v$  um objeto  $u + v$ , chamado a soma de  $u$  com  $v$ ; por multiplicação por escalar entendemos uma regra que associa a cada escalar  $k$  e cada objeto  $v$  em  $\mathbb{V}$  um objeto  $kv$ , chamado o múltiplo de  $v$  por  $k$ . Se os seguintes axiomas são satisfeitos por todos objetos  $u, v$  e  $w$  em  $\mathbb{V}$  e quaisquer escalares  $k$  e  $l$ , então dizemos que  $\mathbb{V}$  é um espaço vetorial e os objetos de  $\mathbb{V}$  serão chamados de vetores.*

- (a) *Se  $u$  e  $v$  são objetos em  $\mathbb{V}$  então  $u + v$  é um objeto em  $\mathbb{V}$ ;*
- (b)  *$u + v = v + u$ ;*
- (c)  *$u + (v + w) = (u + v) + w$ ;*
- (d) *Existe um objeto  $\vec{0}$  em  $\mathbb{V}$ , chamado vetor nulo ou vetor zero de  $\mathbb{V}$ , tal que  $\vec{0} + u = u + \vec{0} = u$  para cada  $u$  em  $\mathbb{V}$ ;*
- (e) *Para cada  $u$  em  $\mathbb{V}$ , existe um objeto  $-u$ , chamado um negativo de  $u$ , ou simétrico de  $u$ , tal que  $u + (-u) = (-u) + u = \vec{0}$ ;*
- (f) *Se  $k$  é qualquer escalar e  $v$  é um objeto em  $\mathbb{V}$ , então  $kv$  é um objeto em  $\mathbb{V}$ ;*
- (g)  *$l \cdot (u + v) = l \cdot u + l \cdot v$ ;*
- (h)  *$(k + l) \cdot v = k \cdot v + l \cdot v$ ;*
- (i)  *$k \cdot (lv) = (kl) \cdot v$ ;*
- (j)  *$1 \cdot v = v$ .*

Dentro de um espaço vetorial  $\mathbb{V}$ , existem subconjuntos  $\mathbb{S}$  tais que eles são um espaço vetorial. Esses conjuntos são chamados subespaço de  $\mathbb{V}$ .

**Definição 3.1.2 (Subespaços Vetoriais).** *Seja  $\mathbb{V}$  um espaço vetorial e  $\mathbb{S}$  um subconjunto não vazio de  $\mathbb{V}$ . O subconjunto  $\mathbb{S}$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{V}$  se  $\mathbb{S}$  é um espaço vetorial em relação à adição e a multiplicação por escalar definidas em  $\mathbb{V}$ , ou seja, se estiverem satisfeitas as seguintes condições:*

I)  $0 \in \mathbb{S}$ ;

II) *Para quaisquer  $u, v \in \mathbb{S}$ , tem-se:  $u + v \in \mathbb{S}$ ;*

III) Para quaisquer  $k \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{S}$ , tem-se:  $ku \in \mathbb{S}$ .

Da definição de subespaço, podemos observar o seguinte:

- Todo espaço vetorial admite no mínimo dois subespaços: o conjunto  $0$ , chamado subespaço zero ou subespaço nulo, e o próprio espaço vetorial  $\mathbb{V}$ . Esses dois são os subespaços triviais de  $\mathbb{V}$ . Os demais subespaços são denominados subespaços próprios de  $\mathbb{V}$ .
- Todo subespaço  $\mathbb{S}$  de  $\mathbb{V}$  contém o vetor nulo.

## 3.2 Combinação Linear

**Definição 3.2.1.** *Seja  $\mathbb{V}$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Dados  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{V}$  e  $a_1, \dots, a_n$  números reais. Então, o vetor*

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n$$

*é um elemento de  $\mathbb{V}$  ao que chamamos combinação linear de  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ .*

### 3.2.1 Dependência Linear

**Definição 3.2.2.** *Seja  $\mathbb{V}$  um espaço vetorial e  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{V}$ . Dizemos que o conjunto  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  é Linearmente Independente (LI), ou que os vetores  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  são (LI), se a equação*

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n = 0$$

*implicar que  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ .*

*Caso contrário, dizemos que  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  é Linearmente Dependente (LD), ou que os vetores  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  são (LD).*

**Teorema 3.2.1.** *Os vetores  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  são Linearmente Dependentes (LD) se, e somente se, um destes vetores for uma combinação linear dos outros.*

A demonstração deste Teorema, encontra-se em [2], página 112.

Das definições acima podemos fazer algumas observações importantes:

**Observação 1.** *O vetor nulo, em todos os espaços vetoriais, é sempre dependente em relação aos demais, pois:*

$$0 = 0 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{v}_n.$$

*Como conclusão, temos que qualquer conjunto que possuir o vetor nulo é LD.*

**Definição 3.2.3.** *Seja  $\mathbb{S}$  um subconjunto de vetores de um espaço vetorial  $\mathbb{V}$ . Dizemos que  $\mathbb{S}$  gera  $\mathbb{V}$  se todo elemento de  $\mathbb{V}$  é combinação linear de elementos de  $\mathbb{S}$ , ou seja, dado  $\vec{v} \in \mathbb{V}$  existem  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{S}$  e  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , tais que  $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + \dots + a_n\vec{v}_n$ .*

### 3.2.2 Base de Espaços Vetoriais

**Definição 3.2.4.** *Um conjunto finito  $\mathbb{S}$  de vetores de um espaço vetorial  $\mathbb{V}$  é uma base de  $\mathbb{V}$  se*

- (a) *Os vetores de  $\mathbb{S}$  são Linearmente Independentes, e*
- (b) *Os vetores de  $\mathbb{S}$  geram  $\mathbb{V}$ .*

Ou seja, uma base de um espaço vetorial  $\mathbb{V}$  é um conjunto gerador linearmente independente de vetores de  $\mathbb{V}$ . Assim, se  $\mathbb{S} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  é uma base, se qualquer vetor  $\vec{w}$  de  $\mathbb{V}$  pode ser expresso como uma combinação linear

$$\vec{w} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n$$

de vetores de  $\mathbb{S}$ .

**Exemplo 1.** *A base canônica do  $\mathbb{R}^n$  é formada pelos vetores unitários*

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

*Se  $\vec{x}$  é um vetor de  $\mathbb{R}^n$ , então*

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n.$$

*Logo, os vetores  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m$  geram  $\mathbb{R}^n$ .*

### 3.2.3 Dimensão de Espaços Vetoriais

**Definição 3.2.5.** *Seja  $\mathbb{V}$  um espaço vetorial, se  $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  é uma base de  $\mathbb{V}$ , dizemos que a dimensão de  $\mathbb{V}$  é  $n$  e indicamos por  $\dim \mathbb{V} = n$ . Se  $\mathbb{B}$  é infinito, dizemos que a dimensão de  $\mathbb{V}$  é infinita e se  $B = \emptyset$ , a dimensão é zero.*

### 3.3 Espaço Afim

É uma representação de  $\mathbb{R}^n$ , sem dar à origem uma posição privilegiada, separando os conceitos de ponto e vetor.

**Definição 3.3.1.** *Seja  $\mathbb{V}$  um espaço vetorial de dimensão finita  $n$  sobre o corpo dos números reais  $\mathbb{R}$ . Um conjunto não vazio  $\mathbb{E}$  diz-se um espaço afim associado a  $\mathbb{V}$  se existir uma aplicação de  $\oplus : \mathbb{E} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{E}$  que a cada par  $(A, \vec{u}) \in \mathbb{E} \times \mathbb{V}$  faz corresponder um elemento de  $\mathbb{E}$ , denotado por  $A \oplus \vec{u}$ , satisfazendo as seguintes condições:*

- i)  $(A \oplus \vec{v}) \oplus \vec{u} = A \oplus (\vec{v} + \vec{u})$  para todo  $A \in \mathbb{E}$  e quaisquer que sejam  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$  de  $\mathbb{V}$ ;*
- ii) Para cada ponto  $A \in \mathbb{E}$ , a função de  $\mathbb{V}$  em  $\mathbb{E}$  dada por  $\vec{u} \rightarrow A \oplus \vec{u}$  é uma bijeção.*

Os elementos de  $\mathbb{E}$  chamam-se **pontos** do espaço afim e os elementos de  $\mathbb{V}$  **vetores**.

Sempre que um conjunto não vazio  $\mathbb{E}$  e um espaço vetorial  $\mathbb{V}$  forem tais que todo elemento  $A$  de  $\mathbb{E}$  e todo elemento  $\vec{u}$  de  $\mathbb{V}$  determinarem univocamente um ponto  $A \oplus \vec{u}$  de  $\mathbb{E}$ , obedecendo as propriedades acima, diremos que  $\mathbb{E}$  é um espaço afim associado a um espaço vetorial  $\mathbb{V}$  e os elementos de  $\mathbb{V}$  chama-se vetores livres de  $\mathbb{E}$ .

Seja  $\mathbb{E}$  um espaço afim associado a um espaço vetorial  $\mathbb{V}$  sobre um corpo  $\mathbb{R}$ . Dois pontos  $(P, Q) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$ , determinam um único vetor chamado de vetor de translação de  $P$  a  $Q$  e denotado por  $\overrightarrow{PQ}$ , tal que

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{u} \iff Q = P \oplus \vec{u},$$

que decorre imediatamente da definição 3.3.1, item (ii).

Logo, vale sempre a seguinte relação

$$P \oplus \overrightarrow{PQ} = Q. \tag{3.1}$$

**Proposição 3.3.1.** *Sendo  $\mathbb{E}$  um espaço afim associado ao espaço vetorial  $\mathbb{V}$  e  $P, Q$  pontos de  $\mathbb{E}$ , então, de acordo com as definições, são verdadeiras as seguintes proposições:*

- (a)** *O espaço vetorial  $\mathbb{V}$  tem um elemento especial que é o seu vetor nulo,  $\vec{0}$ , o qual tem a propriedade  $P \oplus \vec{0} = P$  para todo  $P \in \mathbb{E}$ .*
- (b)** *Sejam  $P, P' \in \mathbb{E}$  dados, verifica-se que  $\overrightarrow{PP'} = \vec{0} \iff P = P'$ .*
- (c)** *Dados  $P, Q$  e  $R$  em  $\mathbb{E}$ , é satisfeita a seguinte relação:  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ .*

$$(d) \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}.$$

*Demonstração.*

(a) A bijeção exigida no item (ii) da definição 3.3.1, também garante que há um só vetor  $\vec{u} \in \mathbb{V}$  tal que  $P \oplus \vec{u} = P$ . Da definição 3.1.1, item (e), temos que  $\vec{0} = \vec{u} + (-\vec{u})$  e da definição 3.3.1, item (i), temos que  $(P \oplus (\vec{u} + (-\vec{u}))) = (P \oplus \vec{u}) \oplus (-\vec{u})$ , mas  $P \oplus (\vec{u} + (-\vec{u})) = P \oplus \vec{0}$ , logo

$$P \oplus \vec{0} = (P \oplus (\vec{u} + (-\vec{u}))) = (P \oplus \vec{u}) \oplus (-\vec{u}) = P \oplus (-\vec{u}) \Leftrightarrow \vec{0} = -\vec{u}$$

ainda do item (e),  $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} + \vec{0} = \vec{0}$ , que segundo o item (d) é  $\vec{u} = \vec{0}$ .

(b) De fato, pelo item (a) da proposição 3.3.1, como  $\overrightarrow{PP'} = \vec{0} \Leftrightarrow P \oplus \vec{0} = P' \Leftrightarrow P = P'$ .

(c) Pela definição 3.3.1, item (i), e da identidade 3.1, segue-se que

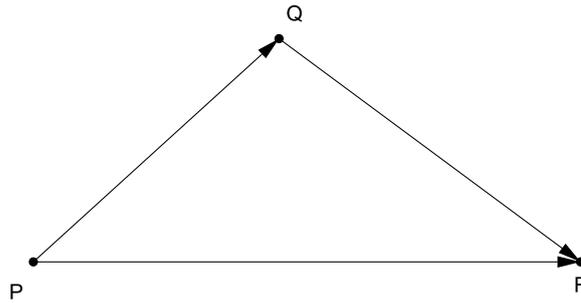


Figura 44 – Representação Geométrica da Soma de Vetores

$$P \oplus (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = (P \oplus \overrightarrow{PQ}) \oplus \overrightarrow{QR}$$

Como

$$P \oplus \overrightarrow{PQ} = Q,$$

logo

$$(P \oplus \overrightarrow{PQ}) \oplus \overrightarrow{QR} = Q \oplus \overrightarrow{QR} = R.$$

Vê-se que

$$P \oplus (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = R = P \oplus \overrightarrow{PR},$$

consequentemente

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}. \quad (3.2)$$

(d) Já sabemos que

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

e fazendo  $R = P$ , temos

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}, \quad (3.3)$$

Pelo item (e) da definição 3.1.1, temos

$$\overrightarrow{QP} + (-\overrightarrow{QP}) = \vec{0}, \quad (3.4)$$

assim, igualando as expressões (3.3) e (3.4), acarreta

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QP} + (-\overrightarrow{QP}),$$

somando  $-\overrightarrow{QP}$  em ambos os membros, resulta

$$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}.$$

□

### 3.3.1 Subespaço Afim

Seja  $\mathbb{E}$  um espaço afim associado a um espaço vetorial  $\mathbb{V}$  e  $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$  um subconjunto não vazio de  $\mathbb{E}$ . Dizemos que  $\mathbb{F}$  é um subespaço afim ou uma variedade linear de  $\mathbb{E}$  se existe um subespaço vetorial  $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ , tal que:

- i) Para qualquer  $A, B \in \mathbb{F} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \in \mathbb{W}$ ;
- ii)  $A \in \mathbb{F}$  e  $\vec{u} \in \mathbb{W} \Rightarrow A \oplus \vec{u} \in \mathbb{F}$ .

**Exemplo 2.** Se  $\mathbb{E}$  é um espaço afim associado a um espaço vetorial  $\mathbb{V}$ , qualquer subconjunto  $\mathbb{F} = \{A\}$  de  $\mathbb{E}$ , onde  $A$  é um ponto, é um subespaço afim associado ao subespaço vetorial  $\mathbb{W} = \{\vec{0}\}$ , visto que  $\overrightarrow{AA} = \vec{0} \in \mathbb{W}$  e que  $A \oplus \vec{0} = A$ .

### 3.3.2 Dimensão do Espaço Afim

Seja  $\mathbb{E}$  um espaço afim associado a um espaço vetorial  $\mathbb{V}$ , a dimensão de  $\mathbb{E}$  é a dimensão de  $\mathbb{V}$  como espaço vetorial. Em particular, retas e planos são espaços ou subespaços afins de dimensão 1 e 2, respectivamente. Um espaço afim de dimensão  $n$ , é um  $n$ -Plano.

## 3.4 Os Fundamentos Da Geometria Euclidiana

Nesta seção, acrescentaremos ao espaço vetorial  $\mathbb{V}$  uma nova estrutura: a do espaço vetorial Euclidiano. Começamos por definir a noção de módulo ou comprimento de um vetor  $\vec{u}$  de  $\mathbb{V}$ . Essa noção depende da fixação de uma unidade de comprimento em  $\mathbb{V}$ , isto é, a cada segmento de reta de  $\mathbb{E}$  podemos associar um número real não negativo, seu comprimento, que é a sua medida em relação àquela unidade.

Para isso, precisaremos da noção de produto interno e a partir dela definiremos módulo ou comprimento de um vetor.

### 3.4.1 Produto Interno

**Definição 3.4.1.** Seja  $\mathbb{V}$  um espaço vetorial real e  $\vec{u}, \vec{v}$  e  $\vec{w} \in \mathbb{V}$ . Dizemos que o produto interno é uma função  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada par de vetores  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$  um número real, denotado por  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ , de tal modo que sejam válidas as seguintes propriedades:

- i)  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ ;
- ii)  $\langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ , para todo  $k \in \mathbb{R}$ ;
- iii)  $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$ ;
- iv)  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$  e  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$  se, e somente se  $\vec{u} = \vec{0}$ .

Decorrem da definição 3.4.1 as seguintes propriedades:

- I)  $\langle \vec{u}, \vec{0} \rangle = \langle \vec{0}, \vec{u} \rangle = 0$  para todo  $\vec{u} \in \mathbb{V}$ ;
- II)  $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ ;

$$\text{III) } \langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle;$$

*Demonstração.*

I) Segue facilmente das propriedades acima que

$$\langle \vec{u}, \vec{0} \rangle = \langle \vec{0}, \vec{u} \rangle = \langle 0 \cdot \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0 \cdot \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0.$$

II) Utilizando as propriedades (i) e (iii), teremos,

$$\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle.$$

III) Utilizando as propriedades (i) e (ii), chega-se a

$$\langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle = \langle \lambda \vec{v}, \vec{u} \rangle = \lambda \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle.$$

□

### 3.4.2 Norma de um Vetor

**Definição 3.4.2.** *Seja  $\mathbb{V}$  um espaço vetorial real munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Para cada vetor  $\vec{u} \in \mathbb{V}$ , chamamos de norma ou comprimento de  $\vec{u}$  ao número real dado por  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$  ou  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2$ .*

*Seja  $\mathbb{V}$  um espaço vetorial com produto interno e  $\vec{u} \in \mathbb{V}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . segue diretamente da definição 3.4.2 as seguintes propriedades:*

$$i) \|\alpha \cdot \vec{u}\| = \sqrt{\langle \alpha \cdot \vec{u}, \alpha \cdot \vec{u} \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \cdot \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \alpha \cdot \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \alpha \cdot \|\vec{u}\|.$$

*Como o produto interno é sempre positivo para  $\vec{u} \neq 0$  e nulo para  $\vec{u} = 0$ , teremos sempre,*

$$ii) \|\vec{0}\| = 0 \iff \vec{u} = 0.$$

$$iii) \|\vec{u}\| > 0 \text{ para } \vec{u} \neq \vec{0}.$$

### 3.4.3 Espaço Vetorial Euclidiano

**Definição 3.4.3.** *Seja  $\mathbb{V}$  um espaço vetorial. Se a cada par  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  de vetores pudermos associar univocamente um número real  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$  satisfazendo as propriedades (i), (ii), (iii) e (iv) da definição 3.4.1, dizemos que  $\mathbb{V}$  possui uma estrutura de **espaço vetorial Euclidiano**.*

### 3.4.4 Vetor Unitário

Num espaço vetorial com produto interno e norma definida por  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$ , dizemos que o vetor  $\vec{u}$  é unitário se  $\|\vec{u}\| = 1$  ou  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 1$ .

#### Normalização de um Vetor

Dado um vetor  $\vec{u} \in \mathbb{V}$  não nulo, de um espaço vetorial com produto interno  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$  que não seja unitário.

Podemos sempre associar ao mesmo um vetor unitário fazendo:

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}. \quad \text{O vetor } \vec{v} \text{ é unitário, pois:}$$

$$\|\vec{v}\|^2 = \left\langle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\rangle = \frac{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} = 1.$$

### 3.4.5 Vetores Ortogonais

**Definição 3.4.4.** *Dizemos que dois vetores,  $\vec{u}$  e  $\vec{v} \in \mathbb{V}$ , são ortogonais se  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$  e indicamos por  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .*

A relação é claramente simétrica, isto é, se  $\vec{u}$  é ortogonal a  $\vec{v}$ , então  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$ , logo  $\vec{v}$  é ortogonal a  $\vec{u}$ .

Notamos que  $\vec{0} \in \mathbb{V}$  é ortogonal a todo  $\vec{u} \in \mathbb{V}$ , pois

$$\langle \vec{0}, \vec{u} \rangle = \langle 0 \cdot \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \cdot \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0.$$

Reciprocamente, se  $\vec{u}$  é ortogonal a todo  $\vec{v} \in \mathbb{V}$ , então  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$  e, portanto,  $\vec{u} = \vec{0}$  pela definição 3.4.1, item (iv).

## 3.5 Espaços Euclidianos

Apresentaremos agora um espaço afim  $\mathbb{E}$ , cujo espaço  $\mathbb{V}$  dos vetores livres é um espaço euclidiano, isto é, assumiremos que em  $\mathbb{V}$ , está definido um produto interno.

Ao definirmos norma para elementos de  $\mathbb{V}$ , este passa a ser um espaço vetorial Euclidiano, conseqüentemente,  $\mathbb{E}$  é um espaço afim Euclidiano.

O produto interno de  $\mathbb{V}$  permite definir distância entre dois pontos em  $\mathbb{E}$  e desse modo obter, em  $\mathbb{E}$ , quando a dimensão é 3, o quadro completo da geometria euclidiana.

### 3.5.1 Espaço Afim Euclidiano

Definimos Espaços Vetorial Euclidiano, como sendo espaços vetoriais munidos de um produto escalar. Agora temos

**Definição 3.5.1.** *Um espaço afim associado a um espaço vetorial euclidiano denomina-se Espaço Euclidiano.*

**Definição 3.5.2.** *Seja  $\mathbb{E}$  um espaço euclidiano e  $P$  e  $Q$  pontos de  $\mathbb{E}$ . A distância entre  $P$  e  $Q$ , que denotaremos de  $d(P, Q)$  é o número real não negativo cujo quadrado equivale ao produto interno entre o vetor por eles definidos e ele mesmo, ou seja*

$$(d(P, Q))^2 = \langle \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ} \rangle.$$

conseqüentemente

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ} \rangle}.$$

Temos, portanto, para quaisquer ponto  $P, Q, R$  e  $S \in \mathbb{E}$  e  $\vec{u}$  um vetor qualquer do espaço vetorial  $\mathbb{V}$ , que  $d(P, Q)$  goza das seguintes propriedades

- i)  $d(P, Q) = d(Q, P)$ .
- ii)  $d(P, Q) \geq 0$ .
- iii)  $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \vec{0}$ .

Com efeito temos  $d(P, Q) = \sqrt{\langle \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ} \rangle} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = 0$ .

$$\text{iv) } d(P, Q) = d(P \oplus \vec{u}, Q \oplus \vec{v}).$$

$$\text{iv) } \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \Rightarrow d(P, Q) = d(R, S).$$

Com efeito temos  $d(P, Q) = \sqrt{\langle \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ} \rangle} = \sqrt{\langle \overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{RS} \rangle} = d(R, S)$ .

Estas propriedades são consequência imediata das definições e propriedades de espaço afim e de norma de um vetor.

## 3.6 Retas, Planos e Triângulos

Para que possamos trabalhar com triângulos em um espaço afim  $\mathbb{E}$ , é importante definirmos retas e planos nesse espaço, generalizando os conceitos da geometria elementar.

Vamos observar durante a nossa exposição, que alguns conceitos e definições são parecidos com os estudos de retas e planos que aprendemos na geometria analítica.

Para o estudo de pontos, retas e planos, podemos considerar a dimensão do espaço vetorial  $\dim \mathbb{V} \geq 2$ .

### 3.6.1 Retas

Seendo  $\mathbb{E}$  um espaço afim associado a um espaço vetorial  $\mathbb{V}$ , dados um ponto fixo  $P \in \mathbb{E}$  e um vetor  $\vec{v} \in \mathbb{V}$  e  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , chamaremos de reta o subespaço afim de  $\mathbb{E}$  definido por:

$$\mathcal{R}(P, \vec{v}) = \{P \oplus t\vec{v} : t \in \mathbb{R}\}. \quad (3.5)$$

Vemos que, como  $P \oplus 0 \cdot \vec{v} = P$ , então  $P \in \mathcal{R}(P, \vec{v})$ . Se  $Q \in \mathcal{R}(P, \vec{v})$ , então  $\overrightarrow{PQ} = t\vec{v}$ , para algum  $t \in \mathbb{R}$ . De fato,

$$Q = P \oplus t\vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = t\vec{v}.$$

Obviamente, se  $A, B \in \mathbb{E}$ ,  $A \neq B$ , esses dois pontos pertencem à reta  $\mathcal{R}(A, \overrightarrow{AB})$ , que passa por  $A$  e  $B$ , já que

- $B = A \oplus 1 \cdot \overrightarrow{AB}$ ;
- $A = A \oplus 0 \cdot \overrightarrow{AB}$ .

**Proposição 3.6.1.** *Dados dois pontos  $P, Q \in \mathbb{E}$  e dois vetores  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$ , as retas  $\mathcal{R}(P, \vec{u})$  e  $\mathcal{R}(P, \vec{v})$  serão iguais se, e somente se,  $\overrightarrow{PQ}$  e  $\vec{u}$  forem múltiplos de  $\vec{v}$ , ou seja,*

$$\mathcal{R}(P, \vec{u}) = \mathcal{R}(P, \vec{v}) \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \lambda \vec{v}, \vec{u} = \beta \vec{v}$$

para algum  $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ .

A demonstração dessa proposição encontra-se em [25].

**Definição 3.6.1.** *Dados dois pontos distintos  $P, Q \in \mathbb{E}$ . O segmento de reta com extremidades  $P$  e  $Q$  (ou definido por  $P$  e  $Q$ ) é o conjunto*

$$\overline{PQ} = \{X \in \mathbb{E} : X = P \oplus t \cdot \overrightarrow{PQ}, 0 \leq t \leq 1\}.$$

Dizemos que três pontos  $A, B$  e  $C$  são colineares se pertencem a uma mesma reta, isto é, existe um número real  $\lambda$  tal que  $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ .

### 3.6.2 Planos

Sendo  $\mathbb{E}$  um espaço afim associado a um espaço vetorial  $\mathbb{V}$ , dados um ponto fixo  $P \in \mathbb{E}$  e  $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}$ , linearmente independentes, o plano que passa por  $P$  e contém os vetores diretores  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$ , é definido por

$$\mathcal{P}(P, \vec{u}, \vec{v}) = \{P \oplus (s\vec{u} + t\vec{v}) \in \mathbb{E} : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

**Proposição 3.6.2.** *Sejam  $\vec{u}_1$  e  $\vec{v}_1$  vetores linearmente independentes em  $\mathbb{V}$ , os planos  $\mathcal{P}(P, \vec{u}, \vec{v})$  e  $\mathcal{P}(P, \vec{u}_1, \vec{v}_1)$  são iguais se, e somente se os vetores  $\overrightarrow{PQ}$ ,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são combinação linear de  $\vec{u}_1$  e  $\vec{v}_1$ , ou seja*

$$\mathcal{P}(P, \vec{u}, \vec{v}) = \mathcal{P}(P, \vec{u}_1, \vec{v}_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v} \in [\vec{u}_1, \vec{v}_1].$$

A demonstração dessa proposição encontra-se em [25].

### 3.6.3 Triângulos

**Definição 3.6.2.** *Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos distintos e não colineares. Chamamos de triângulo  $ABC$  ao conjunto constituído dos segmentos  $AB$ ,  $BC$  e  $AC$ .*

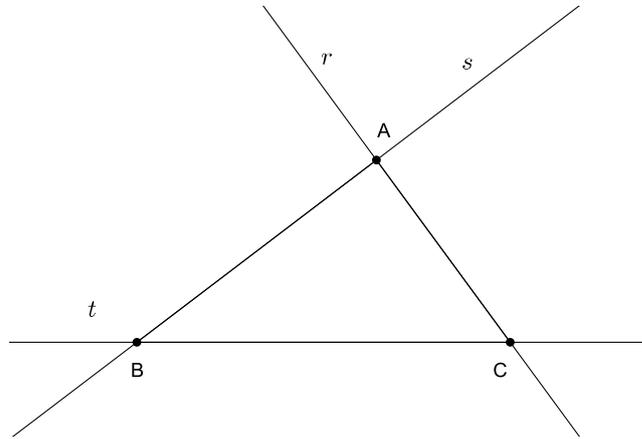


Figura 45 – Conjunto de Três Pontos não Colineares

**Proposição 3.6.3.** *Um triplo de pontos  $A, B, C \in \mathbb{E}$ , determinam um triângulo  $ABC$  no espaço afim  $\mathbb{E}$  se, e somente se, os vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  forem linearmente independentes em  $\mathbb{V}$ .*

*Demonstração.* Suponha que,  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  são *L.D.*, então existe  $\alpha \neq 0$  e  $\beta \neq 0$  tais que

$$\alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \implies \overrightarrow{AB} = \left( -\frac{\beta}{\alpha} \right) \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Como  $A \oplus \overrightarrow{AB} = B$ , temos então

$$A \oplus \left( -\frac{\beta}{\alpha} \right) \cdot \overrightarrow{AC} = B.$$

Assim,

$$B \in \mathcal{R}(A, \overrightarrow{AC}).$$

Consequentemente, os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são colineares.

Por outra parte, a expressão (3.2) nos diz que

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}.$$

E se  $\overrightarrow{BA}$  e  $\overrightarrow{AC}$  são *L.I.*, então  $A \neq B$  e  $A \neq C$ .

Mas, como  $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ , então  $\overrightarrow{BC} \neq \vec{0}$ , caso contrário, teríamos  $\vec{0} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ , o que é um absurdo, pois  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  são *L.I.*, logo  $B \neq C$ .

Agora vamos mostrar que os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não são colineares:

Com efeito, suponha  $A$ ,  $B$  e  $C$  colineares. Logo o ponto  $C \in \mathcal{R}(A, \overrightarrow{AB})$  que resulta

$$C = A \oplus \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} - \lambda \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0},$$

logo  $\overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{AB}$  são *L.D.*, o que contraria a nossa hipótese inicial.

□

**Proposição 3.6.4.** *Se os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  determinam um triângulo em  $\mathbb{E}$ , então existe um único plano passando por  $A$ ,  $B$  e  $C$  que denotaremos por*

$$\mathcal{P}_{A,B,C} = \mathcal{P}(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

A demonstração da existência e de unicidade desse plano encontra-se em [25], página 79.

### 3.6.4 Circunferência

Definiremos circunferência, de acordo com os autores [25], página 83.

**Definição 3.6.3.** *Dados  $P_0 \in \mathbb{E}$  e  $r$  um número real positivo, denotaremos por  $C(P_0, r)$  a circunferência em  $\mathbb{E}$  de centro  $P_0$  e raio  $r$ , definida por*

$$C(P_0, r) = \{Q \in \mathbb{E} : d(Q, P_0) = r\}.$$

### 3.7 Propriedade Universal de Pontos num Plano $\mathcal{P}$

Esta propriedade é fundamental e importante para que possamos compreender a caracterização dos pontos notáveis do triângulo, que serão necessários para definirmos a Reta de Nagel e o círculo de Spieker. Utilizaremos a demonstração [25], página 79.

Dado três pontos não colineares  $A$ ,  $B$ , e  $C$  em um espaço afim  $\mathbb{E}$ , o plano determinado por  $A$ ,  $B$ , e  $C$  é dado por

$$\mathcal{P}_{A,B,C} = \mathcal{P}(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$\mathcal{P}_{A,B,C} = \{A \oplus (\beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC}) : \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Se  $P$  pertence ao plano  $\mathcal{P}_{A,B,C}$ , então podemos colocar de maneira única na forma

$$P = A \oplus (\beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC}),$$

logo,

$$\overrightarrow{AP} = (\beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC}). \quad (3.6)$$

Vamos então considerar um ponto arbitrário  $O \in \mathbb{E}$ , e utilizar a expressão (3.2) para decompor  $\overrightarrow{AP}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} \end{cases}$$

substituindo em (3.6) e considerando  $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}$ , temos

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} = \beta(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) + \gamma(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}).$$

$$\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{AO} + \beta \overrightarrow{AO} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{AO} + \gamma \overrightarrow{OC}.$$

$$\overrightarrow{OP} = (-1 + \beta + \gamma) \overrightarrow{AO} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC},$$

$$\overrightarrow{OP} = (1 - \beta - \gamma) \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC},$$

e considerando  $\alpha = 1 - \beta - \gamma$ , chegamos portanto a equação

$$\overrightarrow{OP} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC} \quad (3.7)$$

que independe da escolha do ponto  $O \in \mathbb{E}$ .

**Proposição 3.7.1.** *Sejam  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  tais que  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ , então existe um único ponto  $P \in \mathcal{P}_{A,B,C}$  tal que  $\alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB} + \gamma \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP}$ , para todo  $O \in \mathbb{E}$ .*

*Demonstração.* Para mostrar a unicidade, considere  $P_1 \in \mathcal{P}_{A,B,C}$  um ponto qualquer, tal que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP_1} &= \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB} + \gamma \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP}, \end{aligned}$$

que implica

$$\vec{0} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{P_1O} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PP_1}.$$

Portanto  $P_1 = P$ .

Agora, para mostrarmos a existência, definimos o vetor

$$\vec{v} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB} + \gamma \cdot \overrightarrow{OC}.$$

Se  $P = O \oplus \vec{v}$ , então

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \vec{v} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB} + \gamma \cdot \overrightarrow{OC} \Rightarrow \\ \overrightarrow{OP} &= (1 - \beta - \gamma) \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB} + \gamma \cdot \overrightarrow{OC} \Rightarrow \\ \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \beta \cdot (-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \gamma \cdot (-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \Rightarrow \\ \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{AB} + \gamma \cdot \overrightarrow{AC}, \end{aligned}$$

logo

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} = \beta \cdot \overrightarrow{AB} + \gamma \cdot \overrightarrow{AC},$$

mostrando assim que  $P \in \mathcal{P}_{A,B,C}$ .

□

## 4 Caracterização dos Pontos Notáveis do Triângulo

No presente capítulo utilizaremos os métodos e conceitos básicos do capítulo anterior para verificarmos a existência e a construção do incentro  $I$ , do baricentro  $G$ , do Ponto de Nagel  $N$  e da reta de Nagel de um triângulo, aplicando o conhecimento algébrico em problemas geométricos.

### 4.1 Ponto que divide um segmento em uma razão dada

**Proposição 4.1.1.** *Seja  $\mathbb{E}$  em espaço afim sobre o espaço vetorial  $\mathbb{V}$ . Dados  $A, B \in \mathbb{E}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , existe um único ponto  $P \in \overline{AB}$ , tal que  $\overrightarrow{AP} = \alpha \cdot \overrightarrow{PB}$ .*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{P}$  um plano contendo os pontos  $A$  e  $B$ . A fim de usar a propriedade universal dos pontos num plano, vamos supor a existência de  $P$ , para encontrar os candidatos a coeficientes.

Seja  $O \in \mathbb{E}$  um ponto qualquer de  $\mathcal{P}$ , então, podemos escrever

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} \\ \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB} \end{cases}$$

logo,

$$\overrightarrow{AP} = \alpha \cdot \overrightarrow{PB} \Rightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} = \alpha \cdot (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB})$$

que resulta

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \alpha \cdot \overrightarrow{OB}}{1 + \alpha} \tag{4.1}$$

expandindo a expressão, temos

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{1 + \alpha} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{\alpha}{1 + \alpha} \cdot \overrightarrow{OB}$$

e a soma dos coeficientes

$$\frac{1}{1 + \alpha} + \frac{\alpha}{1 + \alpha} = \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha} = 1.$$

Portanto, definindo o ponto  $P$  satisfazendo (4.1), pela propriedade universal dos pontos no plano ele existe e é único. Em particular fazendo  $O = A$ , temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \frac{\overrightarrow{AA} + \alpha \cdot \overrightarrow{AB}}{1 + \alpha} = \frac{\alpha \cdot (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB})}{1 + \alpha} \\ \overrightarrow{AP} \cdot (1 + \alpha) &= \alpha \cdot (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}) \\ \overrightarrow{AP} &= \frac{\alpha}{(1 + \alpha)} \cdot \overrightarrow{AB}\end{aligned}\tag{4.2}$$

garantindo assim, que o ponto  $P$  pertence a  $\overrightarrow{AB}$ .

Voltando a equação

$$\overrightarrow{AP} \cdot (1 + \alpha) = \alpha \cdot (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB})$$

chegamos então a expressão

$$\overrightarrow{AP} = \alpha \cdot \overrightarrow{PB}.$$

□

## 4.2 Ponto Médio entre Dois Pontos

A fim de se determinar o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ , buscamos definir o ponto  $P \in \overline{AB}$ , com  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$ . De acordo com a proposição 4.1.1, esse ponto está definido para  $\alpha = 1$ .

Observe que pela expressão (4.1), quando  $\alpha = 1$ , temos

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})\tag{4.3}$$

ou equivalentemente

$$P = O \oplus \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).\tag{4.4}$$

Em particular, se fizermos  $O = A$ , teremos

$$P = A \oplus \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB}) \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB}).\tag{4.5}$$

Que é a expressão do ponto médio entre  $A$  e  $B$ , onde  $P$  pertence ao segmento que liga os dois pontos.

### 4.3 Cevianas determinadas pelos pontos que dividem os lados numa dada razão

Seja  $X \in \mathbb{E}$  um ponto sobre o lado  $\overline{BC}$  do triângulo  $ABC$ , tal que  $\overrightarrow{BX} = \alpha \cdot \overrightarrow{XC}$ , com  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Vamos, então determinar o vetor que representa a ceviana  $\overrightarrow{AX}$ .

De acordo com a proposição 4.1.1, temos que

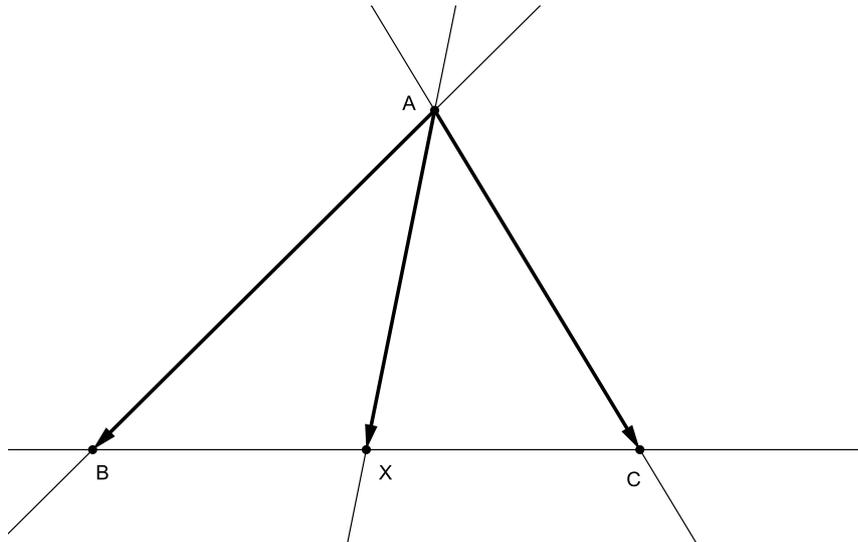


Figura 46 – Ângulo Interno Alternado

$$\overrightarrow{BX} = \alpha \cdot \overrightarrow{XC} \Rightarrow \overrightarrow{OX} = \frac{\overrightarrow{OB} + \alpha \cdot \overrightarrow{OC}}{1 + \alpha}.$$

Agora, fazendo  $O = A$ , obtemos

$$\overrightarrow{AX} = \frac{\overrightarrow{AB} + \alpha \cdot \overrightarrow{AC}}{1 + \alpha}. \quad (4.6)$$

Que é a expressão que caracteriza a ceviana  $\overrightarrow{AX}$ .

## 4.4 Teorema de Ceva

Nesta seção, encontraremos um critério em termos das razões em que três cevianas concorrentes, através dos vértices de um triângulo  $A$ ,  $B$  e  $C$ , dividem os respectivos lados opostos.

**Teorema 4.4.1.** *Seja o triângulo  $ABC$  formado pelos pontos  $A, B$  e  $C \in \mathbb{E}$  e os pontos de cada lado do triângulo, opostos aos vértices  $A, B$  e  $C$ , respectivamente,  $X, Y$  e  $Z \in \mathbb{E}$ . Suponha que*

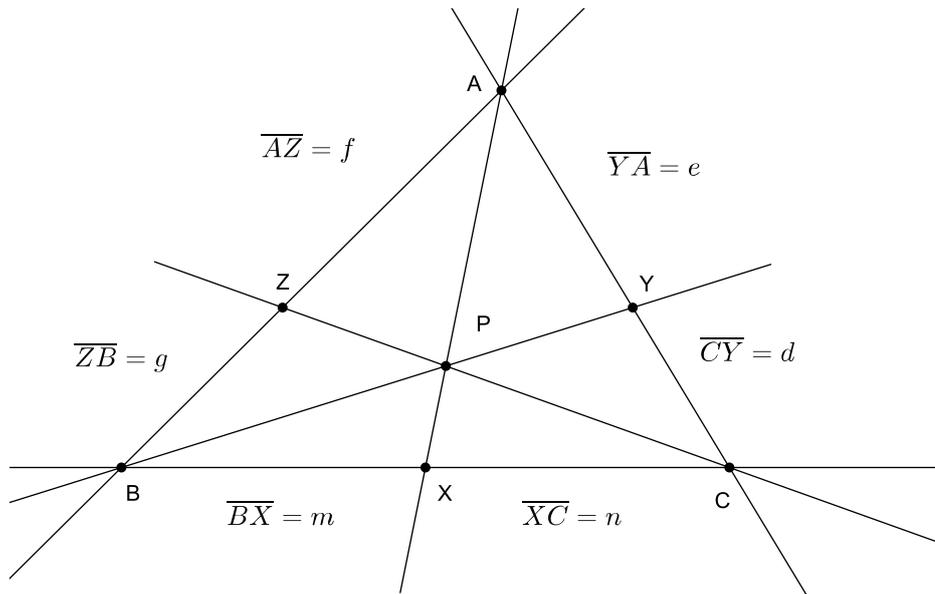


Figura 47 – Cevianas Concorrentes - Teorema de Ceva

$$\frac{\|\overrightarrow{BX}\|}{\|\overrightarrow{XC}\|} = \frac{m}{n} = \alpha \quad , \quad \frac{\|\overrightarrow{CY}\|}{\|\overrightarrow{YA}\|} = \frac{d}{e} = \beta \quad e \quad \frac{\|\overrightarrow{AZ}\|}{\|\overrightarrow{ZB}\|} = \frac{f}{g} = \gamma.$$

Então  $\overrightarrow{AX}$ ,  $\overrightarrow{BY}$  e  $\overrightarrow{CZ}$  são concorrentes, se, e somente se,

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1. \tag{4.7}$$

*Demonstração.* Usando a expressão (4.6), podemos escrever as equações que caracterizam as cevianas. Assim,

$$\frac{\|\overrightarrow{BX}\|}{\|\overrightarrow{XC}\|} = \alpha \Rightarrow \overrightarrow{BX} = \alpha \cdot \overrightarrow{XC} \Rightarrow \overrightarrow{AX} = \left( \frac{\overrightarrow{AB} + \alpha \cdot \overrightarrow{AC}}{1 + \alpha} \right)$$

$$\frac{\|\overrightarrow{CY}\|}{\|\overrightarrow{YA}\|} = \beta \Rightarrow \overrightarrow{CY} = \beta \cdot \overrightarrow{YA} \Rightarrow \overrightarrow{BY} = \left( \frac{\overrightarrow{BC} + \beta \cdot \overrightarrow{BA}}{1 + \beta} \right)$$

$$\frac{\|\vec{AZ}\|}{\|\vec{ZB}\|} = \gamma \Rightarrow \vec{AZ} = \gamma \cdot \vec{ZB} \Rightarrow \vec{CZ} = \left( \frac{\vec{CA} + \gamma \cdot \vec{CB}}{1 + \gamma} \right)$$

A seguir vamos determinar o ponto  $P$ , encontrando a interseção das retas  $\overline{AX}$  e  $\overline{BY}$ .

Pela figura 47, podemos concluir que  $\vec{AP} = h_1 \cdot \vec{AX}$  e  $\vec{BP} = h_2 \cdot \vec{BY}$  para  $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ . Seja  $P \in \overline{AX} \cap \overline{BY}$ , então

$$\vec{AB} = \vec{AP} + \vec{PB}$$

Considerando  $\vec{PB} = -\vec{BP}$  e substituindo, obtemos

$$\vec{AB} = \vec{AP} - \vec{BP}$$

$$\vec{AB} = h_1 \cdot \vec{AX} - h_2 \cdot \vec{BY}$$

que substituindo  $\vec{AX}$  e  $\vec{BY}$ , temos

$$\vec{AB} = h_1 \cdot \left( \frac{\vec{AB} + \alpha \cdot \vec{AC}}{1 + \alpha} \right) - h_2 \cdot \left( \frac{\vec{BC} + \beta \cdot \vec{BA}}{1 + \beta} \right)$$

fazendo  $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$ , resulta

$$\vec{AB} = \frac{h_1}{(1 + \alpha)} \cdot \vec{AB} + \frac{h_1 \cdot \alpha}{(1 + \alpha)} \cdot \vec{AC} - \frac{h_2}{(1 + \beta)} \cdot (\vec{BA} + \vec{AC}) - \frac{h_2 \cdot \beta}{(1 + \beta)} \cdot \vec{BA}$$

Considerando  $\vec{BA} = -\vec{AB}$ , substituindo, e agrupando os termos semelhantes, temos

$$\left[ \frac{h_1}{(1 + \alpha)} + \frac{h_2}{(1 + \beta)} + \frac{h_2 \cdot \beta}{(1 + \beta)} - 1 \right] \cdot \vec{AB} + \left[ \frac{h_1 \cdot \alpha}{(1 + \alpha)} - \frac{h_2}{(1 + \beta)} \right] \cdot \vec{AC} = 0$$

Sabendo que os vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{AC}$  são linearmente independentes, concluímos que

$$\begin{cases} \frac{h_1}{(1 + \alpha)} + \frac{h_2}{(1 + \beta)} + \frac{h_2 \cdot \beta}{(1 + \beta)} - 1 = 0 \\ \frac{h_1 \cdot \alpha}{(1 + \alpha)} - \frac{h_2}{(1 + \beta)} = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos  $h_1 = \frac{(1 + \alpha)}{\alpha\beta + \alpha + 1}$  e  $h_2 = \frac{\alpha(1 + \beta)}{\alpha\beta + \alpha + 1}$ .

Assim

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \frac{(1 + \alpha)}{\alpha\beta + \alpha + 1} \cdot \left( \frac{\overrightarrow{AB} + \alpha \cdot \overrightarrow{AC}}{1 + \alpha} \right) \\ \overrightarrow{AP} &= \frac{1}{\alpha\beta + \alpha + 1} \cdot (\overrightarrow{AB} + \alpha \cdot \overrightarrow{AC})\end{aligned}\tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP} &= \frac{\alpha(1 + \beta)}{\alpha\beta + \alpha + 1} \cdot \left( \frac{\overrightarrow{BC} + \beta \cdot \overrightarrow{BA}}{1 + \beta} \right) \\ \overrightarrow{BP} &= \frac{\alpha}{\alpha\beta + \alpha + 1} \cdot (\overrightarrow{BC} + \beta \cdot \overrightarrow{BA})\end{aligned}\tag{4.9}$$

Observe que o vetor  $\overrightarrow{CP}$  é também um múltiplo de  $\overrightarrow{CZ}$ , portanto  $\overrightarrow{CP} = h_3 \cdot \overrightarrow{CZ}$  para  $h_3 \in \mathbb{R}$ .

Podemos escrever

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP} &= h_3 \cdot \left( \frac{\overrightarrow{CA} + \gamma \cdot \overrightarrow{CB}}{1 + \gamma} \right) \\ \overrightarrow{CP} &= \frac{h_3}{1 + \gamma} \cdot (\overrightarrow{CA} + \gamma \cdot \overrightarrow{CB})\end{aligned}\tag{4.10}$$

Para obtermos outra expressão para  $\overrightarrow{CP}$ , podemos utilizar (4.8) ou (4.9), que chegaremos a mesma conclusão.

Usando, então, a expressão (4.8) podemos fazer

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP} = \frac{1}{\alpha\beta + \alpha + 1} \cdot (\overrightarrow{AB} + \alpha \cdot \overrightarrow{AC}) \\ \overrightarrow{CP} &= \frac{1}{\alpha\beta + \alpha + 1} \cdot (\overrightarrow{AB} + \alpha \cdot \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{CP} &= \frac{1}{\alpha\beta + \alpha + 1} \cdot [\overrightarrow{AB} + \alpha \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot (\alpha\beta + \alpha + 1)]\end{aligned}$$

Para que possamos comparar a expressão acima com a expressão (4.10), necessitaremos fazer  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ . Assim podemos escrever

$$\overrightarrow{CP} = \frac{1}{\alpha\beta + \alpha + 1} \cdot [\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \alpha \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot (\alpha\beta + \alpha + 1)]$$

$$\overrightarrow{CP} = \frac{1}{\alpha\beta + \alpha + 1} \cdot (\alpha\beta \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \quad (4.11)$$

Desse modo, temos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} &= \frac{h_3}{1 + \gamma} \cdot (\overrightarrow{CA} + \gamma \cdot \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{\alpha\beta + \alpha + 1} \cdot (\alpha\beta \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \\ \left( \frac{h_3}{1 + \gamma} - \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta + \alpha + 1} \right) \cdot \overrightarrow{CA} + \left( \frac{h_3 \cdot \gamma}{1 + \gamma} - \frac{1}{\alpha\beta + \alpha + 1} \right) \cdot \overrightarrow{CB} &= 0 \end{aligned}$$

Tendo em consideração que os vetores  $\overrightarrow{CA}$  e  $\overrightarrow{CB}$  são linearmente independentes, concluímos que

$$\begin{cases} \frac{h_3}{1 + \gamma} - \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta + \alpha + 1} = 0 \\ \frac{h_3 \cdot \gamma}{1 + \gamma} - \frac{1}{\alpha\beta + \alpha + 1} = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação, obtemos

$$h_3 = \frac{\alpha\beta \cdot (1 + \gamma)}{\alpha\beta + \alpha + 1}$$

que substituindo na segunda, teremos

$$\frac{\alpha\beta \cdot \gamma \cdot (1 + \gamma)}{(1 + \gamma) \cdot (\alpha\beta + \alpha + 1)} = \frac{1}{\alpha\beta + \alpha + 1}$$

Dessa forma concluímos que

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1.$$

Para mostrar a recíproca, suponha que  $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1$  e seja  $P$  o ponto de interseção de  $\overrightarrow{AX}$  e  $\overrightarrow{BY}$ . Vamos mostrar que se  $\gamma = \frac{1}{\alpha\beta}$ , então  $\overrightarrow{CZ}$  também passa por  $P$ .

Considere

$$\overrightarrow{CZ} = \left( \frac{\overrightarrow{CA} + \gamma \cdot \overrightarrow{CB}}{1 + \gamma} \right) = \left( \frac{\overrightarrow{CA} + \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \overrightarrow{CB}}{1 + \frac{1}{\alpha\beta}} \right)$$

$$\overrightarrow{CZ} = \left( \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{1 + \alpha\beta} \right)$$

Agora, utilizaremos a expressão (4.11) que foi obtida a partir da interseção de  $\overrightarrow{AX}$  e  $\overrightarrow{BY}$ . Logo

$$\overrightarrow{CP} = \frac{1}{\alpha\beta + \alpha + 1} \cdot (\alpha \cdot \beta \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}).$$

Queremos mostrar que existe  $h \in \mathbb{R}$ , tal que  $\overrightarrow{CP} = h \cdot \overrightarrow{CZ}$ .

Portanto,

$$\frac{1}{\alpha\beta + \alpha + 1} \cdot (\alpha \cdot \beta \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = h \cdot \left( \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{1 + \alpha\beta} \right)$$

$$\left( \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha\beta + \alpha + 1} - \frac{h \cdot \alpha \cdot \beta}{1 + \alpha\beta} \right) \cdot \overrightarrow{CA} + \left( \frac{1}{\alpha\beta + \alpha + 1} - \frac{h}{1 + \alpha\beta} \right) \cdot \overrightarrow{CB} = 0$$

Como os vetores  $\overrightarrow{CA}$  e  $\overrightarrow{CB}$  são linearmente independentes, chegamos a um sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha\beta + \alpha + 1} - \frac{h \cdot \alpha \cdot \beta}{1 + \alpha\beta} = 0 \\ \frac{1}{\alpha\beta + \alpha + 1} - \frac{h}{1 + \alpha\beta} = 0 \end{cases}$$

Cuja a solução é

$$h = \frac{1 + \alpha \cdot \beta}{\alpha\beta + \alpha + 1}.$$

Logo,

$$\overrightarrow{CP} = \frac{1 + \alpha \cdot \beta}{\alpha\beta + \alpha + 1} \cdot \overrightarrow{CZ}.$$

Concluimos então que  $\overrightarrow{CZ}$  contém o ponto  $P$ . Portanto,  $\overrightarrow{AX}$ ,  $\overrightarrow{BY}$  e  $\overrightarrow{CZ}$  são concorrentes.

□

## 4.5 Cevianas Concorrentes de um Triângulo

Nesta seção, vamos encontrar a caracterização do ponto de interseção das cevianas de um triângulo qualquer em função da razão em que os seus lados são divididos.

**Proposição 4.5.1.** *Seja o triângulo  $ABC$  formado pelos pontos  $A, B$  e  $C \in \mathbb{E}$  e  $X, Y$  e  $Z \in \mathbb{E}$  os pontos dos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  e  $\overline{AB}$ , que os dividem nas razões  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , respectivamente. Se  $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1$ , então as três cevianas  $\overline{AX}$ ,  $\overline{BY}$  e  $\overline{CZ}$  são concorrentes em um ponto  $P$  caracterizado por  $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{\alpha\beta + \alpha + 1} \cdot (\alpha \cdot \beta \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \alpha \cdot \overrightarrow{OC})$ , onde  $O \in \mathbb{E}$  é um ponto arbitrário qualquer.*

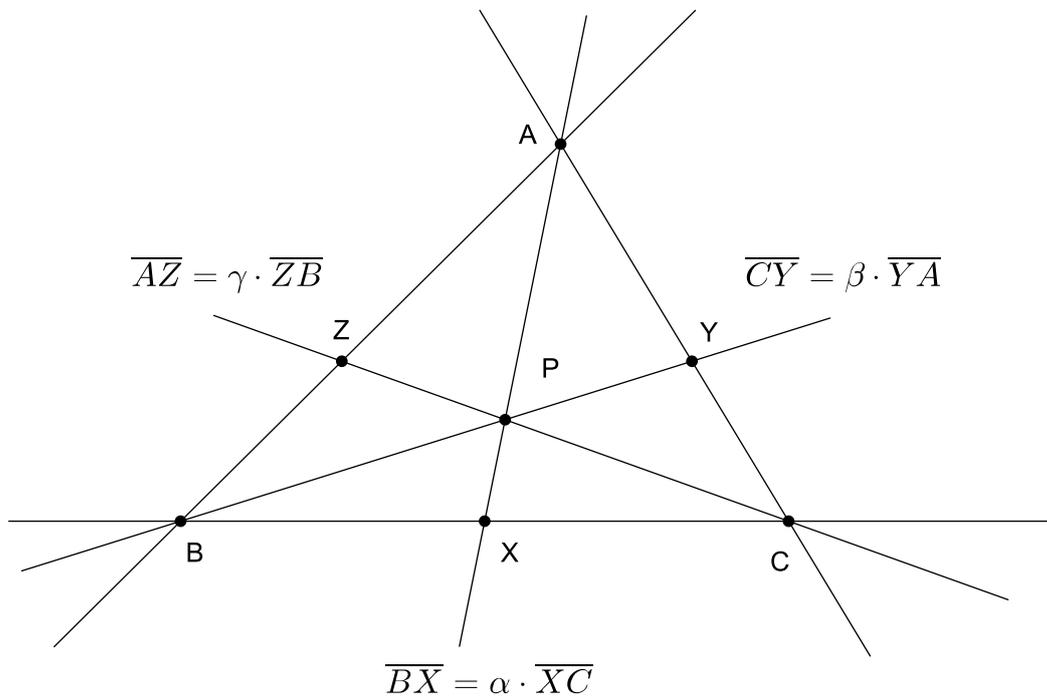


Figura 48 – Cevianas Concorrentes

*Demonstração.* Representaremos as cevianas pelas retas  $\mathcal{R}_{A,X}$ ,  $\mathcal{R}_{B,Y}$  e  $\mathcal{R}_{C,Z}$  que passam pelos pontos  $A$  e  $X$ ,  $B$  e  $Y$ ,  $C$  e  $Z$ , respectivamente, conforme ilustra a figura 48.

Vamos agora determinar o ponto de interseção das retas  $\mathcal{R}_{A,X}$  e  $\mathcal{R}_{B,Y}$ . Seja  $P \in \mathcal{R}_{A,X} \cap \mathcal{R}_{B,Y}$ , o ponto  $P$  pode ser obtido através da soma dos pontos referentes aos vértices  $A$  e  $B$ , respectivamente

Usando a expressão (4.6), podemos escrever

$$\overrightarrow{BX} = \alpha \cdot \overrightarrow{XC} \Rightarrow \overrightarrow{AX} = \left( \frac{\overrightarrow{AB} + \alpha \cdot \overrightarrow{AC}}{1 + \alpha} \right)$$

$$\overrightarrow{CY} = \beta \cdot \overrightarrow{YA} \Rightarrow \overrightarrow{BY} = \left( \frac{\overrightarrow{BC} + \beta \cdot \overrightarrow{BA}}{1 + \beta} \right)$$

$$\overrightarrow{AZ} = \gamma \cdot \overrightarrow{ZB} \Rightarrow \overrightarrow{CZ} = \left( \frac{\overrightarrow{CA} + \gamma \cdot \overrightarrow{CB}}{1 + \gamma} \right)$$

$$P = A \oplus k_1 \cdot \overrightarrow{AX} \iff \overrightarrow{AP} = k_1 \cdot \overrightarrow{AX}.$$

$$P = B \oplus k_2 \cdot \overrightarrow{BY} \iff \overrightarrow{BP} = k_2 \cdot \overrightarrow{BY}.$$

$$P = C \oplus k_3 \cdot \overrightarrow{CZ} \iff \overrightarrow{CP} = k_3 \cdot \overrightarrow{CZ}.$$

No triângulo da figura 48, temos a seguinte relação

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{BP}$$

$$\overrightarrow{AB} = k_1 \cdot \left[ \frac{\overrightarrow{AB} + \alpha \cdot \overrightarrow{AC}}{(\alpha + 1)} \right] - k_2 \cdot \left[ \frac{\overrightarrow{BC} + \beta \cdot \overrightarrow{BA}}{(\beta + 1)} \right]$$

$$\overrightarrow{AB} = \frac{k_1}{(\alpha + 1)} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{k_1 \alpha}{(\alpha + 1)} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{k_2}{(\beta + 1)} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{k_2 \beta}{(\beta + 1)} \cdot \overrightarrow{BA}$$

fazendo  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ , temos

$$\frac{k_1}{(\alpha + 1)} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{k_1 \alpha}{(\alpha + 1)} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{k_2}{(\beta + 1)} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) - \frac{k_2 \beta}{(\beta + 1)} \cdot \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AB} = 0$$

Considerando  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$  e substituindo, obtemos

$$\left[ \frac{k_1}{(\alpha + 1)} + \frac{k_2}{(\beta + 1)} + \frac{k_2 \beta}{(\beta + 1)} - 1 \right] \cdot \overrightarrow{AB} + \left[ \frac{k_1 \alpha}{(\alpha + 1)} - \frac{k_2}{(\beta + 1)} \right] \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

Sabendo que os vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  são linearmente independentes, concluímos que

$$\begin{cases} \frac{k_1}{(\alpha + 1)} + \frac{k_2}{(\beta + 1)} + \frac{k_2 \beta}{(\beta + 1)} - 1 = 0 \\ \frac{k_1 \alpha}{(\alpha + 1)} - \frac{k_2}{(\beta + 1)} = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos  $k_1 = \frac{(\alpha + 1)}{\alpha\beta + \alpha + 1}$  e  $k_2 = \frac{\alpha \cdot (\beta + 1)}{\alpha\beta + \alpha + 1}$ .

Assim

$$P = A \oplus \left[ \frac{(\alpha + 1)}{\alpha\beta + \alpha + 1} \right] \cdot \overrightarrow{AX} \iff \overrightarrow{AP} = \left[ \frac{(\alpha + 1)}{\alpha\beta + \alpha + 1} \right] \cdot \overrightarrow{AX}.$$

$$P = B \oplus \left[ \frac{\alpha \cdot (\beta + 1)}{\alpha\beta + \alpha + 1} \right] \cdot \overrightarrow{BY} \iff \overrightarrow{BP} = \left[ \frac{\alpha \cdot (\beta + 1)}{\alpha\beta + \alpha + 1} \right] \cdot \overrightarrow{BY}.$$

Temos então que  $P \in \mathcal{R}_{A,R}$ , bem como  $P \in \mathcal{R}_{B,S}$ .

Vamos agora determinar a caracterização do ponto notável  $P$ , das ceviana que possuem as mesmas propriedades. Para isso, vamos utilizar a seguinte expressão

$$\overrightarrow{AP} = \left[ \frac{(\alpha + 1)}{\alpha\beta + \alpha + 1} \right] \cdot \overrightarrow{AX}.$$

Substituindo (4.6) na expressão, temos

$$\overrightarrow{AP} = \left[ \frac{(\alpha + 1)}{\alpha\beta + \alpha + 1} \right] \cdot \frac{\overrightarrow{AB} + \alpha \cdot \overrightarrow{AC}}{(\alpha + 1)} = \frac{\overrightarrow{AB} + \alpha \cdot \overrightarrow{AC}}{\alpha\beta + \alpha + 1}.$$

Para encontrarmos a caracterização, basta apenas utilizarmos um outro ponto qualquer  $O \in \mathbb{E}$ . Temos então que

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} \end{cases}$$

logo,

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} = \frac{1}{\alpha\beta + \alpha + 1} \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \alpha \cdot \overrightarrow{AO} + \alpha \cdot \overrightarrow{OC})$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{\alpha\beta + \alpha + 1} \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \alpha \overrightarrow{AO} + \alpha \overrightarrow{OC} - \alpha\beta \overrightarrow{AO} - \alpha \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AO})$$

Considerando  $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}$ , resulta

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{\alpha\beta + \alpha + 1} \cdot (\alpha \cdot \beta \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \alpha \cdot \overrightarrow{OC}) \quad (4.12)$$

□

Podemos observar que a expressão (4.12) acima obedece a exigência da propriedade universal dos pontos em  $\mathcal{P}$ , de que a soma dos coeficientes de  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  e  $\vec{OC}$  seja igual a 1.

De fato, expandindo temos

$$\vec{OP} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha \beta + \alpha + 1} \cdot \vec{OA} + \frac{1}{\alpha \beta + \alpha + 1} \cdot \vec{OB} + \frac{\alpha}{\alpha \cdot \beta + \alpha + 1} \vec{OC}$$

e a soma dos coeficientes

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha \beta + \alpha + 1} + \frac{1}{\alpha \beta + \alpha + 1} + \frac{\alpha}{\alpha \beta + \alpha + 1} = \frac{\alpha \beta + 1 + \alpha}{\alpha \beta + \alpha + 1} = 1.$$

A expressão (4.12) nos fornece a caracterização de qualquer interseção de cevianas de um triângulo, garantindo a sua existência e unicidade no plano.

## 4.6 Caracterização dos Pontos Notáveis de um Triângulo

Vamos agora encontrar a caracterização dos principais pontos notáveis do triângulo que serão usados em nosso estudo. Para tal, utilizaremos os instrumentos matemáticos visto nas seções anteriores e que nos darão o suporte necessário para entender o desenvolvimento do nosso trabalho.

### 4.6.1 Caracterização do Baricentro

Seja o triângulo  $ABC$  formado pelos pontos  $A, B$  e  $C \in \mathbb{E}$  e os pontos médios de cada lado do triângulo, opostos aos vértices  $A, B$  e  $C$ , respectivamente  $M_a, M_b$  e  $M_c \in \mathbb{E}$ . As medianas de  $ABC$  serão representadas pelas retas  $\mathcal{R}_{A,M_a}$ ,  $\mathcal{R}_{B,M_b}$  e  $\mathcal{R}_{C,M_c}$  que passam pelos pontos  $A$  e  $M_a$ ,  $B$  e  $M_b$ ,  $C$  e  $M_c$ , são concorrentes em um ponto  $G$  chamado de Baricentro, conforme ilustra a figura 49.

De fato, considerando as razões em que os lados são divididos, temos

$$\frac{\|\vec{BM_a}\|}{\|\vec{M_aC}\|} = \alpha = 1 \quad , \quad \frac{\|\vec{CM_b}\|}{\|\vec{M_bA}\|} = \beta = 1 \quad e \quad \frac{\|\vec{AM_c}\|}{\|\vec{M_cB}\|} = \gamma = 1.$$

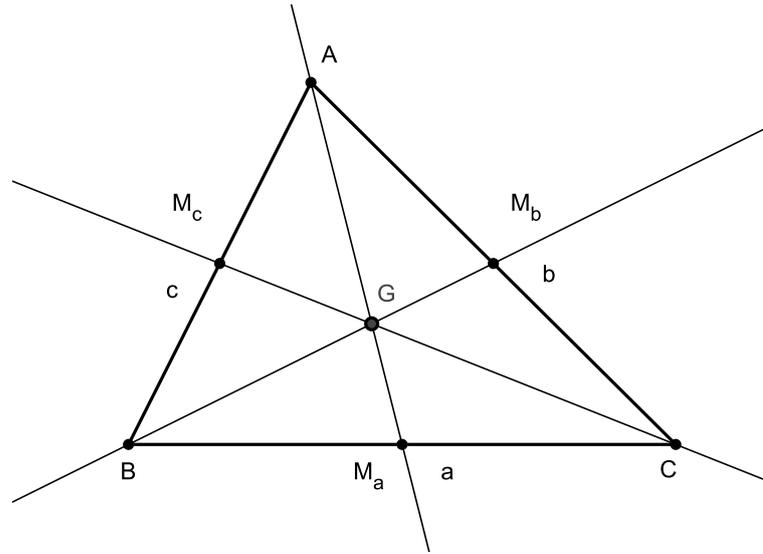


Figura 49 – Caracterização do Baricentro

Pelo teorema 4.4.1, temos que

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

o que nos garante que as três cevianas são concorrentes e o ponto  $G$  de concorrência, segundo a expressão (4.12) da proposição 4.5.1, é dado por

$$\vec{OG} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) \quad (4.13)$$

$$G = O \oplus \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) \quad (4.14)$$

que é a caracterização do baricentro do triângulo  $ABC$ .

### 4.6.2 Caracterização do Incentro

Seja o triângulo  $ABC$  formado pelos pontos  $A, B$  e  $C \in \mathbb{E}$ . Considere os pontos  $I_a, I_b$  e  $I_c \in \mathbb{E}$  pertencentes aos lados  $\overline{BC}, \overline{CA}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente, definidos pelas razões  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , conforme a proposição 4.1.1. As cevianas serão representadas pelas retas  $\mathcal{R}_{A,I_a}, \mathcal{R}_{B,I_b}$  e  $\mathcal{R}_{C,I_c}$  que passam pelos pontos  $A$  e  $I_a, B$  e  $I_b, C$  e  $I_c$ , respectivamente, conforme ilustra a figura 50.

Denotemos por  $a, b$  e  $c$  o comprimento do lado  $\overline{BC}, \overline{CA}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente, e Considere  $2p = a + b + c$  o perímetro do triângulo  $ABC$ .

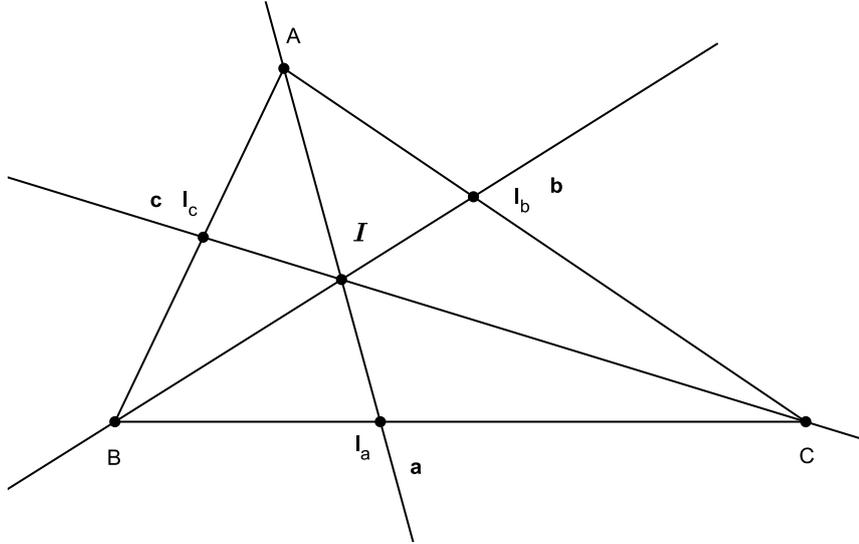


Figura 50 – Caracterização do Incentro

Pensando em termos da razão em que os lados são divididos, temos

$$\frac{\|\overrightarrow{BI_a}\|}{\|\overrightarrow{I_aC}\|} = \frac{c}{b} = \alpha \quad , \quad \frac{\|\overrightarrow{CI_b}\|}{\|\overrightarrow{I_bA}\|} = \frac{a}{c} = \beta \quad e \quad \frac{\|\overrightarrow{AI_c}\|}{\|\overrightarrow{I_cB}\|} = \frac{b}{a} = \gamma.$$

Podemos notar que, pelo teorema da bissetriz interna da geometria Euclidiana clássica, as retas  $\mathcal{R}_{A,I_a}$ ,  $\mathcal{R}_{B,I_b}$  e  $\mathcal{R}_{C,I_c}$  são as bissetrizes internas do triângulo.

Logo, pelo teorema 4.4.1, temos que

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Logo, as três bissetrizes são concorrentes e o ponto  $I$  de interseção, segundo a expressão (4.12) da proposição 4.5.1, é dado por

$$\overrightarrow{OI} = \left( \frac{1}{\frac{a}{b} + \frac{c}{b} + 1} \right) \cdot \left( \frac{a}{b} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \frac{c}{b} \cdot \overrightarrow{OC} \right)$$

$$\overrightarrow{OI} = \left( \frac{1}{\frac{a+b+c}{b}} \right) \cdot \left( \frac{a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC}}{b} \right)$$

$$\vec{OI} = \frac{b}{a+b+c} \cdot \left( \frac{a \cdot \vec{OA} + b \cdot \vec{OB} + c \cdot \vec{OC}}{b} \right) = \frac{b}{2p} \cdot \left( \frac{a \cdot \vec{OA} + b \cdot \vec{OB} + c \cdot \vec{OC}}{b} \right)$$

Sabemos que o ponto caracterizado é único, portanto  $I$  é o incentro do triângulo  $ABC$ .

$$\vec{OI} = \frac{a}{2p} \cdot \vec{OA} + \frac{b}{2p} \cdot \vec{OB} + \frac{c}{2p} \cdot \vec{OC}. \quad (4.15)$$

$$I = O \oplus \left( \frac{a}{2p} \cdot \vec{AO} + \frac{b}{2p} \cdot \vec{OB} + \frac{c}{2p} \cdot \vec{OC} \right). \quad (4.16)$$

que é a caracterização do incentro do triângulo  $ABC$ .

### 4.6.3 Caracterização do Ponto de Nagel

Seja o triângulo  $ABC$  formado pelos pontos  $A, B$  e  $C \in \mathbb{E}$ . Considere os pontos  $N_a, N_b$  e  $N_c \in \mathbb{E}$  pertencentes aos lados  $\overline{BC}, \overline{CA}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente, definidos pelas razões  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , conforme a proposição 4.1.1. As cevianas serão representadas pelas retas  $\mathcal{R}_{A,N_a}, \mathcal{R}_{B,N_b}$  e  $\mathcal{R}_{C,N_c}$  que passam pelos pontos  $A$  e  $N_a, B$  e  $N_b, C$  e  $N_c$ , respectivamente, conforme ilustra a figura 51.

Denotemos por  $a, b$  e  $c$  o comprimento do lado  $\overline{BC}, \overline{CA}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente e Considere  $2p = a + b + c$  o perímetro do triângulo  $ABC$ .

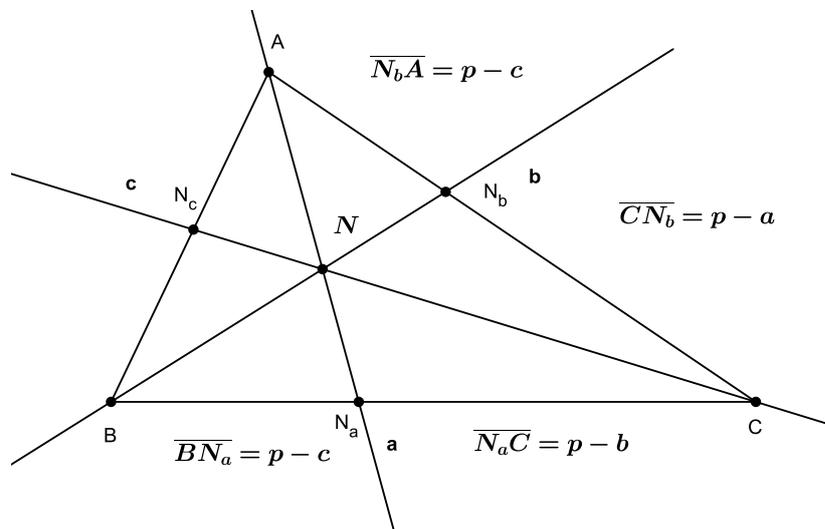


Figura 51 – Caracterização do Ponto de Nagel

Pensando em termos da razão em que os lados são divididos, temos

$$\frac{\|\overrightarrow{BN_a}\|}{\|\overrightarrow{N_aC}\|} = \frac{p-c}{p-b} = \alpha \quad , \quad \frac{\|\overrightarrow{CN_b}\|}{\|\overrightarrow{N_bA}\|} = \frac{p-a}{p-c} = \beta \quad e \quad \frac{\|\overrightarrow{AN_c}\|}{\|\overrightarrow{N_cB}\|} = \frac{p-b}{p-a} = \gamma.$$

Observe que as retas  $\mathcal{R}_{A,N_a}$ ,  $\mathcal{R}_{B,N_b}$  e  $\mathcal{R}_{C,N_c}$  são as cevianas de Nagel do triângulo  $ABC$ .

Portanto, pelo teorema 4.4.1, temos

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = \frac{p-c}{p-b} \cdot \frac{p-a}{p-c} \cdot \frac{p-b}{p-a} = 1.$$

Logo, as três cevianas de Nagel são concorrentes e o ponto  $N$  de concorrência, segundo a expressão (4.12) da proposição 4.5.1, é dado por

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ON} &= \left( \frac{1}{\frac{p-a}{p-b} + \frac{p-c}{p-b} + 1} \right) \cdot \left( \frac{p-a}{p-b} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \frac{p-c}{p-b} \cdot \overrightarrow{OC} \right) \\ \overrightarrow{ON} &= \left( \frac{1}{\frac{p-a+p-b+p-c}{p-b}} \right) \cdot \left( \frac{(p-a) \cdot \overrightarrow{OA} + (p-b) \cdot \overrightarrow{OB} + (p-c) \cdot \overrightarrow{OC}}{p-b} \right) \\ \overrightarrow{ON} &= \frac{p-b}{p} \cdot \left( \frac{(p-a) \cdot \overrightarrow{OA} + (p-b) \cdot \overrightarrow{OB} + (p-c) \cdot \overrightarrow{OC}}{p-b} \right) \\ \overrightarrow{ON} &= \left( \frac{p-a}{p} \right) \cdot \overrightarrow{OA} + \left( \frac{p-b}{p} \right) \cdot \overrightarrow{OB} + \left( \frac{p-c}{p} \right) \cdot \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{ON} &= \left( 1 - \frac{a}{p} \right) \cdot \overrightarrow{OA} + \left( 1 - \frac{b}{p} \right) \cdot \overrightarrow{OB} + \left( 1 - \frac{c}{p} \right) \cdot \overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

Sabemos que o ponto caracterizado é único, portanto  $N$  é o ponto de Nagel do triângulo  $ABC$

$$\vec{ON} = \left(1 - \frac{a}{p}\right) \cdot \vec{OA} + \left(1 - \frac{b}{p}\right) \cdot \vec{OB} + \left(1 - \frac{c}{p}\right) \cdot \vec{OC}. \quad (4.17)$$

Ou, equivalentemente

$$N = O \oplus \left[ \left(1 - \frac{a}{p}\right) \cdot \vec{OA} + \left(1 - \frac{b}{p}\right) \cdot \vec{OB} + \left(1 - \frac{c}{p}\right) \cdot \vec{OC} \right]. \quad (4.18)$$

#### 4.6.4 Caracterização do Ponto de Spieker

Seja o triângulo  $ABC$  formado pelos pontos  $A, B$  e  $C \in \mathbb{E}$  e os pontos médios de cada lado do triângulo, opostos aos vértices  $A, B$  e  $C$ , respectivamente  $A', B'$  e  $C' \in \mathbb{E}$ . O triângulo  $A'B'C'$  é o triângulo medial de  $ABC$ . As bissetrizes de  $A'B'C'$  serão representadas pelas retas  $\mathcal{R}_{A',S_{A'}}$ ,  $\mathcal{R}_{B',S_{B'}}$  e  $\mathcal{R}_{C',S_{C'}}$  que passam pelos pontos  $A'$  e  $S_{A'}$ ,  $B'$  e  $S_{B'}$ ,  $C'$  e  $S_{C'}$ . Seja  $2p = a + b + c$  o perímetro do triângulo  $ABC$  e seja  $p$  o perímetro do triângulo  $A'B'C'$ .

No triângulo da figura 52, temos que  $\vec{C'B'} = \frac{\vec{BC}}{2}$ ,  $\vec{C'A'} = \frac{\vec{AC}}{2}$  e  $\vec{B'A'} = \frac{\vec{AB}}{2}$ .

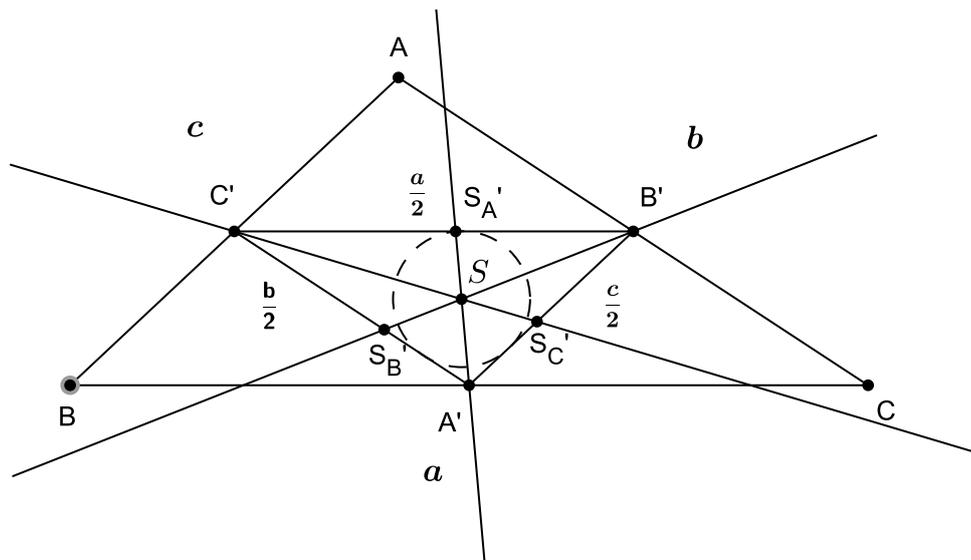


Figura 52 – Caracterização do Ponto de Spieker

O ponto de Spieker  $S$  é o incentro do triângulo medial. Da seção 4.6.2, já sabemos que as três bissetrizes de um triângulo são concorrentes e sua caracterização pode ser obtida pela expressão (4.16), portanto

$$I = O \oplus \left( \frac{a}{2p} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{b}{2p} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{c}{2p} \cdot \overrightarrow{OC} \right).$$

Ou, equivalentemente,

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a}{2p} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{b}{2p} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{c}{2p} \cdot \overrightarrow{OC}.$$

De modo que façamos as substituições relativas ao referencial do triângulo  $A'B'C'$ , ou seja,

$$\overrightarrow{OS} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{p} \cdot \overrightarrow{OA'} + \frac{\left(\frac{b}{2}\right)}{p} \cdot \overrightarrow{OB'} + \frac{\left(\frac{c}{2}\right)}{p} \cdot \overrightarrow{OC'} = \frac{a}{2p} \cdot \overrightarrow{OA'} + \frac{b}{2p} \cdot \overrightarrow{OB'} + \frac{c}{2p} \cdot \overrightarrow{OC'}.$$

$$\overrightarrow{OS} = \frac{a}{2p} \cdot \overrightarrow{OA'} + \frac{b}{2p} \cdot \overrightarrow{OB'} + \frac{c}{2p} \cdot \overrightarrow{OC'}. \quad (4.19)$$

Vamos agora desenvolver uma expressão para  $\overrightarrow{OS}$ , no referencial do triângulo  $ABC$ . Como o ponto  $O$  é arbitrário, podemos fazer  $O = A$  em (4.19), e teremos então

$$\overrightarrow{AS} = \frac{a}{2p} \cdot \overrightarrow{AA'} + \frac{b}{2p} \cdot \overrightarrow{AB'} + \frac{c}{2p} \cdot \overrightarrow{AC'}. \quad (4.20)$$

De acordo com a figura 52, temos que

$$\overrightarrow{AB'} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AC'} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$$

Como  $A'$  é o ponto médio de  $\overrightarrow{BC}$ , podemos então utilizar a expressão (4.4)

$$M_a = O \oplus \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Fazendo  $M_a = A'$  e  $O = A$ , teremos então

$$A' = A \oplus \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),$$

ou a expressão equivalente

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

Substituindo em (4.20), segue-se que

$$\overrightarrow{AS} = \frac{a}{2p} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{b}{2p} \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{2} + \frac{c}{2p} \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{2}.$$

Agrupando os termos semelhantes

$$\overrightarrow{AS} = \left( \frac{a}{4p} + \frac{c}{4p} \right) \cdot \overrightarrow{AB} + \left( \frac{a}{4p} + \frac{b}{4p} \right) \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Para encontrarmos a caracterização, basta apenas utilizarmos um outro ponto qualquer  $O \in \mathbb{E}$ . Temos então que

$$\begin{cases} \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OS} \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} \end{cases}$$

logo,

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OS} = \left( \frac{a}{4p} + \frac{c}{4p} \right) \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) + \left( \frac{a}{4p} + \frac{b}{4p} \right) \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}).$$

Considerando  $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}$  e substituindo, obtemos

$$\overrightarrow{OS} = \left( 1 - \frac{a}{4p} - \frac{c}{4p} - \frac{a}{4p} - \frac{b}{4p} \right) \cdot \overrightarrow{OA} + \left( \frac{a}{4p} + \frac{c}{4p} \right) \cdot \overrightarrow{OB} + \left( \frac{a}{4p} + \frac{b}{4p} \right) \cdot \overrightarrow{OC}.$$

Simplificando

$$\begin{cases} \left( 1 - \frac{a}{4p} - \frac{c}{4p} - \frac{a}{4p} - \frac{b}{4p} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a}{2p} \right) \\ \left( \frac{a}{4p} + \frac{c}{4p} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{b}{2p} \right) \\ \left( \frac{a}{4p} + \frac{b}{4p} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{c}{2p} \right) \end{cases}$$

e substituindo, temos

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a}{2p} \right) \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{b}{2p} \right) \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{c}{2p} \right) \cdot \overrightarrow{OC}. \quad (4.21)$$

Ou equivalentemente,

$$S = O \oplus \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a}{2p} \right) \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{b}{2p} \right) \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{c}{2p} \right) \cdot \overrightarrow{OC} \right], \quad (4.22)$$

que é a caracterização do ponto de Spieker em relação ao Triângulo  $ABC$ .

#### 4.6.5 Caracterização do Ponto de Nagel do Triângulo Medial

Para chegarmos a caracterização do ponto de Nagel do triângulo medial, utilizaremos a expressão (4.18), logo

$$N = O \oplus \left[ \left( 1 - \frac{a}{p} \right) \cdot \overrightarrow{OA} + \left( 1 - \frac{b}{p} \right) \cdot \overrightarrow{OB} + \left( 1 - \frac{c}{p} \right) \cdot \overrightarrow{OC} \right]$$

Ou, equivalentemente,

$$\overrightarrow{ON} = \left( 1 - \frac{a}{p} \right) \cdot \overrightarrow{OA} + \left( 1 - \frac{b}{p} \right) \cdot \overrightarrow{OB} + \left( 1 - \frac{c}{p} \right) \cdot \overrightarrow{OC}.$$

Faremos agora as substituições relativas ao referencial do triângulo  $A'B'C'$ , considerando  $N'$  o ponto de Nagel do triângulo medial. Temos então que,

$$\overrightarrow{ON'} = \left[ 1 - \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{\left(\frac{p}{2}\right)} \right] \cdot \overrightarrow{OA'} + \left[ 1 - \frac{\left(\frac{b}{2}\right)}{\left(\frac{p}{2}\right)} \right] \cdot \overrightarrow{OB'} + \left[ 1 - \frac{\left(\frac{c}{2}\right)}{\left(\frac{p}{2}\right)} \right] \cdot \overrightarrow{OC'}$$

$$\overrightarrow{ON'} = \left( 1 - \frac{a}{p} \right) \cdot \overrightarrow{OA'} + \left( 1 - \frac{b}{p} \right) \cdot \overrightarrow{OB'} + \left( 1 - \frac{c}{p} \right) \cdot \overrightarrow{OC'}.$$

Vamos desenvolver uma expressão para  $\overrightarrow{ON'}$ , no referencial do triângulo  $ABC$ . Como o ponto  $O$  é arbitrário, podemos então fazer  $O = A$  na expressão anterior, e teremos então

$$\overrightarrow{AN'} = \left( 1 - \frac{a}{p} \right) \cdot \overrightarrow{AA'} + \left( 1 - \frac{b}{p} \right) \cdot \overrightarrow{AB'} + \left( 1 - \frac{c}{p} \right) \cdot \overrightarrow{AC'}. \quad (4.23)$$

De acordo com a figura 52, temos que

$$\overrightarrow{AB'} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AC'} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}.$$

Já sabemos que  $A'$  é o ponto médio de  $\overrightarrow{BC}$ , podemos então utilizar a expressão (4.3), logo

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

que substituindo em (4.23), segue-se que

$$\overrightarrow{AN'} = \left(1 - \frac{a}{p}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \left(1 - \frac{b}{p}\right) \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{2} + \left(1 - \frac{c}{p}\right) \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{2}.$$

Agrupando os termos semelhantes

$$\overrightarrow{AN'} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{a}{p} + 1 - \frac{c}{p}\right) \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{a}{p} + 1 - \frac{b}{p}\right) \cdot \overrightarrow{AC}.$$

$$\overrightarrow{AN'} = \frac{b}{2p} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{c}{2p} \overrightarrow{AC}.$$

Para encontrarmos a caracterização, basta apenas utilizarmos um outro ponto qualquer  $O \in \mathbb{E}$ . Temos então que

$$\begin{cases} \overrightarrow{AN'} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{ON'} \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} \end{cases}$$

logo,

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{ON'} = \frac{b}{2p} \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) + \frac{c}{2p} \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}).$$

Considerando  $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}$  e substituindo, obtemos

$$\overrightarrow{ON'} = \overrightarrow{OA} - \frac{b}{2p} \cdot \overrightarrow{AO} + \frac{b}{2p} \cdot \overrightarrow{OB} - \frac{c}{2p} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{c}{2p} \cdot \overrightarrow{OC}.$$

Simplificando, temos

$$\overrightarrow{ON'} = \frac{a}{2p} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{b}{2p} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{c}{2p} \cdot \overrightarrow{OC}. \quad (4.24)$$

Ou, equivalentemente

$$N' = O \oplus \left( \frac{a}{2p} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{b}{2p} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{c}{2p} \cdot \overrightarrow{OC} \right), \quad (4.25)$$

que é a caracterização do ponto de Nagel do triângulo medial em relação ao Triângulo  $ABC$ .

## 4.7 A Reta de Nagel

**Teorema 4.7.1.** *O incentro  $I$ , o baricentro  $G$  e o ponto de Nagel  $N$  de um triângulo são colineares.*

*Demonstração.* Desconsiderando os casos onde os pontos são coincidentes, vamos admitir que  $G \neq I$ , e que  $\overrightarrow{IG}$  é um vetor não nulo em  $\mathbb{V}$ .

Partindo das expressões que caracterizam o baricentro, o incentro e ponto de Nagel num plano, temos

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}),$$

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a}{2p} \cdot \overrightarrow{AO} + \frac{b}{2p} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{c}{2p} \cdot \overrightarrow{OC},$$

$$\overrightarrow{ON} = \left(1 - \frac{a}{p}\right)\overrightarrow{OA} + \left(1 - \frac{b}{p}\right)\overrightarrow{OB} + \left(1 - \frac{c}{p}\right)\overrightarrow{OC}.$$

Utilizando a expressão

$$\overrightarrow{ON} = \left(1 - \frac{a}{p}\right)\overrightarrow{OA} + \left(1 - \frac{b}{p}\right)\overrightarrow{OB} + \left(1 - \frac{c}{p}\right)\overrightarrow{OC}$$

podemos reescrevê-la da seguinte maneira

$$\overrightarrow{ON} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - \left(\frac{a}{p} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{b}{p} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{c}{p} \cdot \overrightarrow{OC}\right).$$

Tendo em consideração que

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 3\overrightarrow{OG}$$

e que também

$$\frac{a}{p} \cdot \overrightarrow{AO} + \frac{b}{p} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{c}{p} \cdot \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI}.$$

Logo, podemos escrever  $\overrightarrow{ON}$  da seguinte maneira

$$\overrightarrow{ON} = 3\overrightarrow{OG} - 2\overrightarrow{OI}.$$

Como  $O$  é um ponto arbitrário qualquer, podemos então fazer  $O = I$ , obtendo então a seguinte relação  $\overrightarrow{IN} = 3\overrightarrow{IG} - 2\overrightarrow{II}$ .

Como  $\overrightarrow{II} = \vec{0}$ , deduzimos então que

$$\overrightarrow{IN} = 3\overrightarrow{IG}$$

Isto mostra que os pontos  $I$ ,  $G$  e  $N$  são colineares e podemos escrever:

- $I = I \oplus 0 \cdot \overrightarrow{IG}$
- $G = I \oplus \overrightarrow{IG}$
- $N = I \oplus \overrightarrow{IN} = I \oplus 3\overrightarrow{IG}$

Esse raciocínio nos leva a concluir que o vetor  $\overrightarrow{IG}$  transporta o ponto  $I$  para os pontos  $G$  e  $N$  e que esses pontos pertencem à reta  $\mathcal{R}_{I, \overrightarrow{IG}}$ , conforme figura abaixo

□

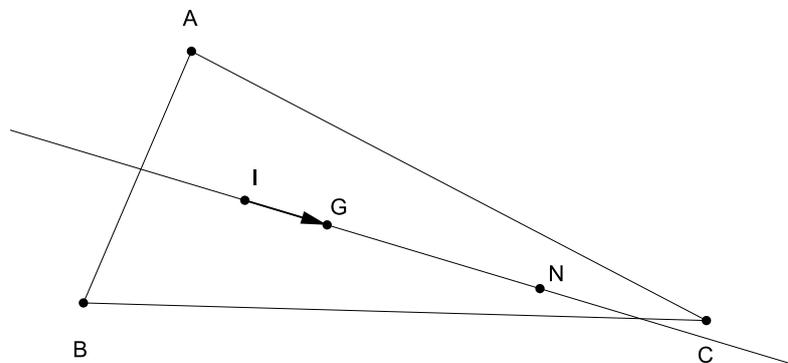


Figura 53 – Colinearidade dos Pontos  $I$ ,  $G$  e  $N$

## 4.8 Consequências da Caracterização dos Pontos Notáveis

Neste seção, apresentaremos algumas consequências do estudo realizado no capítulo anterior.

**Proposição 4.8.1.** *As cevianas de Nagel de um triângulo  $ABC$  passam pelos pontos de tangência do círculo de Spieker no triângulo medial.*

*Demonstração.* Denotaremos por  $R, U$  e  $T$  os pontos de tangência de cada lado do triângulo medial, opostos aos vértices  $A', B'$  e  $C'$ , respectivamente, conforme a figura 54.

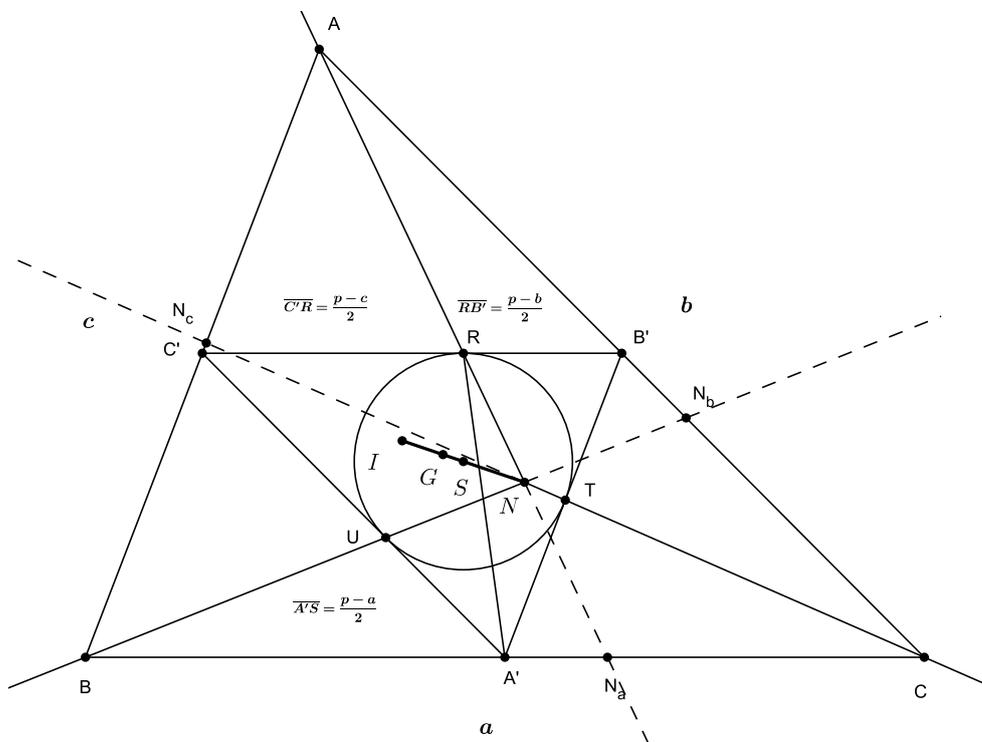


Figura 54 – Pontos de Tangência do Círculo de Spieker

Utilizando a expressão (4.6), podemos escrever as equações que caracterizam as cevianas. Assim, comparativamente, segue que

$$\overrightarrow{A'R} = \frac{\overrightarrow{A'B'} + \alpha \overrightarrow{A'C'}}{(\alpha + 1)}.$$

Como vamos aplicar a expressão ao triângulo medial, temos que

$$\frac{\|\overrightarrow{B'R}\|}{\|\overrightarrow{RC'}\|} = \frac{\left(\frac{p-b}{2}\right)}{\left(\frac{p-c}{2}\right)} = \frac{p-b}{p-c} = \alpha.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'R} &= \frac{\overrightarrow{A'B'} + \left(\frac{p-b}{p-c}\right) \cdot \overrightarrow{A'C'}}{\left(\frac{p-b}{p-c} + 1\right)} = \frac{(p-c) \cdot \overrightarrow{A'B'} + (p-b) \cdot \overrightarrow{A'C'}}{(p-b+p-c)} = \frac{(p-c) \cdot \overrightarrow{A'B'} + (p-b) \cdot \overrightarrow{A'C'}}{a} \\ \overrightarrow{A'R} &= \frac{(p-c)}{a} \cdot \overrightarrow{A'B'} + \frac{(p-b)}{a} \cdot \overrightarrow{A'C'}.\end{aligned}\quad (4.26)$$

Agora, vamos desenvolver a expressão para  $\overrightarrow{A'R}$ , no referencial do triângulo  $ABC$ . Podemos, então, escrever

$$\overrightarrow{A'R} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AR}$$

e de acordo com a figura 54, temos que

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'A} = \frac{\overrightarrow{BA}}{2} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{B'A} = \frac{\overrightarrow{CA}}{2}.$$

Já sabemos que  $A'$  é o ponto médio de  $\overrightarrow{BC}$ , podemos, então, utilizar a expressão (4.3), logo,

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

que substituindo em (4.26), segue que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AR} &= \frac{(p-c)}{a} \cdot \frac{\overrightarrow{BA}}{2} + \frac{(p-b)}{a} \cdot \frac{\overrightarrow{CA}}{2} \\ -\frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AR} &= \frac{(p-c)}{a} \cdot \frac{\overrightarrow{BA}}{2} + \frac{(p-b)}{a} \cdot \frac{\overrightarrow{CA}}{2}.\end{aligned}$$

Agrupando os termos semelhantes

$$\overrightarrow{AR} = \left[ \frac{1}{2} - \frac{(p-c)}{2a} \right] \cdot \overrightarrow{AB} + \left[ \frac{1}{2} - \frac{(p-b)}{2a} \right] \cdot \overrightarrow{AC}.$$

o que resulta

$$\overrightarrow{AR} = \frac{(p-b)}{2a} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{(p-c)}{2a} \cdot \overrightarrow{AC}.\quad (4.27)$$

A seguir vamos comparar a equação acima com a expressão que caracteriza o ponto de Nagel

$$N = O \oplus \left[ \left(1 - \frac{a}{p}\right) \cdot \overrightarrow{OA} + \left(1 - \frac{b}{p}\right) \cdot \overrightarrow{OB} + \left(1 - \frac{c}{p}\right) \cdot \overrightarrow{OC} \right].$$

Fazendo  $O = A$ , teremos

$$N = A \oplus \left[ \left(1 - \frac{a}{p}\right) \cdot \overrightarrow{AA} + \left(1 - \frac{b}{p}\right) \cdot \overrightarrow{OB} + \left(1 - \frac{c}{p}\right) \cdot \overrightarrow{OC} \right]$$

$$N = A \oplus \left[ \left(1 - \frac{b}{p}\right) \cdot \overrightarrow{OB} + \left(1 - \frac{c}{p}\right) \cdot \overrightarrow{OC} \right]$$

que podemos escrever

$$N = A \oplus \frac{2a}{p} \cdot \left[ \left(\frac{p-b}{2a}\right) \cdot \overrightarrow{OB} + \left(\frac{p-c}{2a}\right) \cdot \overrightarrow{OC} \right].$$

Substituindo a expressão (4.27) na equação acima, teremos então que

$$N = A \oplus \frac{2a}{p} \cdot \overrightarrow{AR}$$

ou, equivalentemente

$$\overrightarrow{AN} = \frac{2a}{p} \cdot \overrightarrow{AR}.$$

Mostrando então que o ponto  $R$  pertence a ceviana de Nagel.

Se usarmos raciocínio análogo, para os pontos  $U$  e  $T$ , chegaremos a mesma conclusão de que esses pontos pertencem também as cevianas de Nagel como ilustra a figura 54.

□

**Proposição 4.8.2.** *O Incentro de um triângulo é o ponto de Nagel do seu medial.*

*Demonstração.* De fato, se compararmos as expressões (4.24) e (4.15), veremos que elas são iguais quando o referencial é o triângulo  $ABC$ . Ou seja,

$$\overrightarrow{ON'} = \frac{a}{2p} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{b}{2p} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{c}{2p} \cdot \overrightarrow{OC}$$

$$\vec{OI} = \frac{a}{2p} \cdot \vec{OA} + \frac{b}{2p} \cdot \vec{OB} + \frac{c}{2p} \cdot \vec{OC}$$

Como a caracterização dos pontos é única, chegamos a conclusão que

$$\vec{ON'} = \vec{OI} \Leftrightarrow \vec{ON'} - \vec{OI} = 0$$

$$\vec{ON'} + \vec{IO} = 0$$

$$\vec{IN'} = 0$$

Portanto  $I = N'$ .

□

**Proposição 4.8.3.** *O ponto de Spieker é o ponto médio entre o Incentro e o ponto de Nagel.*

*Demonstração.* De acordo com a expressão

$$S = O \oplus \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a}{2p} \right) \cdot \vec{OA} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{b}{2p} \right) \cdot \vec{OB} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{c}{2p} \right) \cdot \vec{OC} \right]$$

equivalentemente, temos a seguinte equação

$$S = O \oplus \left[ \left( 1 - \frac{a}{p} + \frac{a}{2p} \right) \cdot \vec{OA} + \left( 1 - \frac{b}{p} + \frac{b}{2p} \right) \cdot \vec{OB} + \left( 1 - \frac{c}{p} + \frac{c}{2p} \right) \cdot \vec{OC} \right]$$

Podemos escrever então

$$S = O \oplus \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{a}{2p} \cdot \vec{AO} + \frac{b}{2p} \cdot \vec{BO} + \frac{c}{2p} \cdot \vec{CO} \right] + \left[ \left( 1 - \frac{a}{p} \right) \cdot \vec{OA} + \left( 1 - \frac{b}{p} \right) \cdot \vec{OB} + \left( 1 - \frac{c}{p} \right) \cdot \vec{OC} \right] \right\}.$$

Das expressões que caracterizam o Incentro e o ponto de Nagel, vem que

$$S = O \oplus \frac{1}{2} (\vec{OI} + \vec{ON}),$$

que é a equação do ponto médio

Esse raciocínio nos leva a concluir que  $S$  é o ponto médio entre os pontos  $I$  e  $N$ .

□

**Proposição 4.8.4.** *A distância de um vértice do triângulo ao incentro é igual ao dobro da distância do vértice oposto do seu triângulo medial ao ponto de Spieker.*

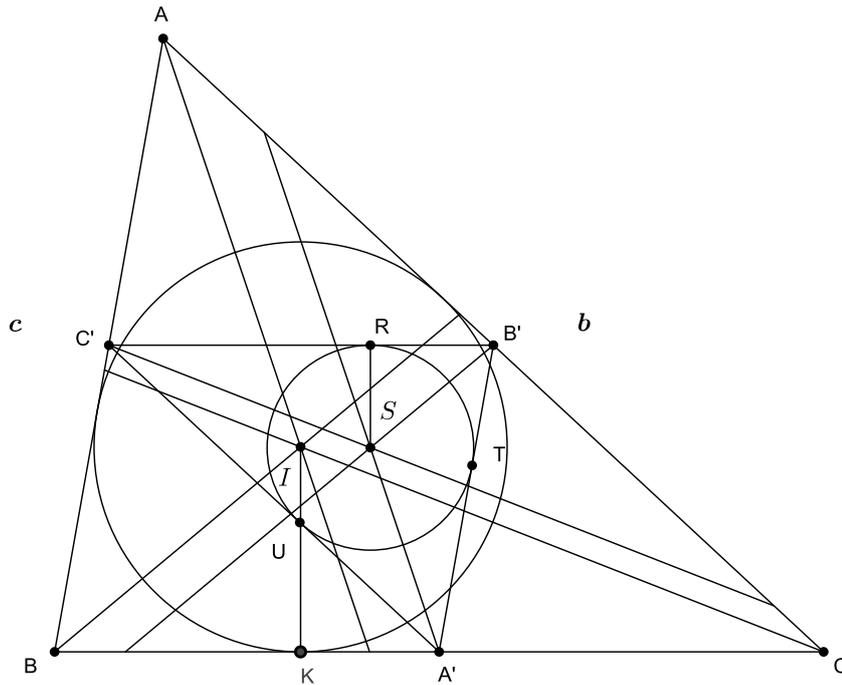


Figura 55 – Círculos Inscritos nos Triângulos Medial e Principal

*Demonstração.* Partindo da equação

$$\vec{ON} = 3\vec{OG} - 2\vec{OI}$$

e utilizando a expressão do ponto médio, pois  $S$  bissecta o segmento  $IN$ , temos

$$\vec{OS} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{ON} + \vec{OI}) \Leftrightarrow \vec{ON} = 2\vec{OS} - \vec{OI}$$

que substituindo na equação anterior, chegamos a expressão

$$2\vec{OS} = 3\vec{OG} - \vec{OI}.$$

Como o ponto  $O$  é arbitrário em  $\mathbb{E}$ , podemos então fazer  $O = I$ , e teremos então a seguinte relação

$$2\vec{IS} = 3\vec{IG} - \vec{II}$$

Como  $\vec{II} = 0$ , temos

$$2\vec{IS} = 3\vec{IG}$$

$$\vec{IS} = \frac{3}{2} \cdot \vec{IG}$$

$$S = I \oplus \frac{3}{2} \cdot \vec{IG}.$$

Da caracterização do baricentro, temos

$$\vec{IG} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC})$$

que substituindo

$$S = I \oplus \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot (\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC})$$

$$S = I \oplus \frac{1}{2} \cdot (\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC}).$$

Da equação do ponto médio, temos que

$$C' = I \oplus \frac{1}{2} \cdot (\vec{IA} + \vec{IB})$$

logo,

$$S = I \oplus \frac{1}{2} \cdot [(\vec{IA} + \vec{IB}) + \vec{IC}]$$

$$S = \left[ I \oplus \frac{1}{2} \cdot (\vec{IA} + \vec{IB}) \right] \oplus \frac{1}{2} \cdot \vec{IC}$$

$$S = C' \oplus \frac{1}{2} \cdot \vec{IC}.$$

Ou equivalentemente

$$\vec{C'S} = \frac{1}{2} \cdot \vec{IC} \tag{4.28}$$

que implica

$$d(I, C) = 2 \cdot d(C', S).$$

Se usarmos o mesmo raciocínio, permutando os pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ , chegaremos à conclusão semelhante

$$\overrightarrow{B'S} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{IB} \implies d(I, B) = 2 \cdot d(B', S). \quad (4.29)$$

$$\overrightarrow{A'S} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{IA} \implies d(I, A) = 2 \cdot d(A', S). \quad (4.30)$$

□

**Proposição 4.8.5.** *O raio do círculo de Spieker é metade do raio do círculo inscrito no triângulo principal.*

*Demonstração.* Para encontrarmos a relação entre os raios dos círculos, usaremos a expressão (4.6), que caracteriza a ceviana em função da razão em que os lados de um triângulo são divididos. Pela figura 55, vemos que  $\overrightarrow{IK}$  e  $\overrightarrow{SR}$  são cevianas dos triângulos  $IBC$  e  $SB'C'$ , respectivamente.

Como  $K$  e  $R$  são os pontos de tangência dos círculos inscritos nos lados dos triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , respectivamente, podemos escrever

- No triângulo  $IBC$

$$\frac{\|\overrightarrow{BK}\|}{\|\overrightarrow{KC}\|} = \frac{p-b}{p-c} = \alpha$$

logo

$$\overrightarrow{IK} = \frac{\overrightarrow{IB} + \alpha \overrightarrow{IC}}{(\alpha + 1)}. \quad (4.31)$$

- No triângulo  $SB'C'$

$$\frac{\|\overrightarrow{B'R}\|}{\|\overrightarrow{RC'}\|} = \frac{\left(\frac{p-b}{2}\right)}{\left(\frac{p-c}{2}\right)} = \frac{p-b}{p-c} = \alpha$$

logo

$$\overrightarrow{SR} = \frac{\overrightarrow{SB'} + \alpha \overrightarrow{SC'}}{(\alpha + 1)}. \quad (4.32)$$

As relações (4.28) e (4.29), fornecem

$$\overrightarrow{C'S} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{C'S}$$

$$\overrightarrow{B'S} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{B'S}.$$

que substituindo na expressão (4.31), obtemos

$$\overrightarrow{IK} = \frac{2\overrightarrow{B'S} + 2\alpha\overrightarrow{C'S}}{(\alpha + 1)} = 2 \left[ \frac{\overrightarrow{B'S} + \alpha\overrightarrow{C'S}}{(\alpha + 1)} \right] = -2 \left[ \frac{\overrightarrow{SB'} + \alpha\overrightarrow{SC'}}{(\alpha + 1)} \right]$$

onde comparando com a expressão (4.32), implica em

$$\overrightarrow{IK} = -2 \cdot \overrightarrow{SR}$$

$$\overrightarrow{IK} = 2 \cdot \overrightarrow{RS}$$

como consequência temos

$$d(I, K) = 2 \cdot d(R, S)$$

□

**Proposição 4.8.6.** *Os pontos médios entre o ponto de Nagel  $N$  e cada vértice do triângulo  $ABC$  formam um triângulo congruente ao triângulo medial.*

*Demonstração.* Designaremos por  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$  os pontos médios entre o ponto de Nagel e os vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente, conforme ilustra a figura 56.

Recorrendo a expressão (4.5), podemos definir as equações dos ponto  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$ . Assim,

$$Q_1 = A \oplus \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AN} \tag{4.33}$$

$$Q_2 = B \oplus \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BN} \tag{4.34}$$

$$Q_3 = C \oplus \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CN} \tag{4.35}$$

Sendo então  $Q_1 \in \mathbb{E}$  ponto médio entre o vértice  $A$  e ponto de Nagel, podemos fazer

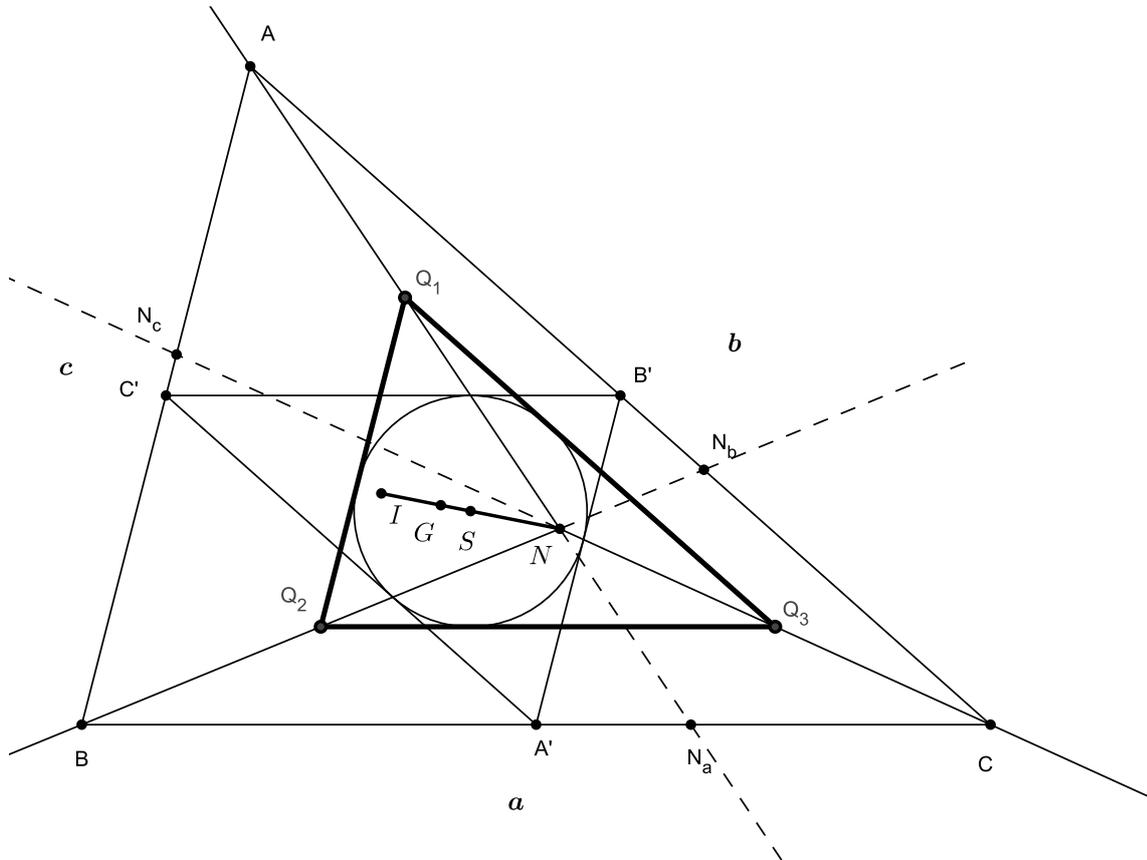


Figura 56 – Triângulo Congruente ao Triângulo Medial

$$Q_1 = B \oplus \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BN})$$

$$Q_1 = \left( B \oplus \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BN} \right) \oplus \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA}$$

$$Q_1 = Q_2 \oplus \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{Q_2Q_1} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA}$$

que implica

$$\overrightarrow{Q_2Q_1} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} \implies d(Q_2, Q_1) = \frac{1}{2} \cdot d(B, A) = \frac{c}{2}.$$

Por um raciocínio análogo, permutando os pontos  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$ , veremos que a demonstração acima serve para mostrar também que

$$\overrightarrow{Q_3Q_2} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CB} \implies d(Q_3, Q_2) = \frac{1}{2} \cdot d(C, B) = \frac{a}{2}.$$

$$\overrightarrow{Q_1Q_3} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} \implies d(Q_1, Q_3) = \frac{1}{2} \cdot d(A, C) = \frac{b}{2}.$$

esse raciocínio nos leva a concluir que o triângulo  $Q_1Q_2Q_3$  é congruente ao triângulo medial  $A'B'C'$ .

Vamos agora mostrar que o círculo de Spieker está inscrito no triângulo  $Q_1Q_2Q_3$ . Para isso, basta mostrar que a caracterização do incentro do triângulo  $Q_1Q_2Q_3$  é a mesma caracterização do círculo de Spieker.

□

**Proposição 4.8.7.** *O triângulo formado pelos pontos médios entre o ponto de Nagel  $N$  e cada vértice do triângulo  $ABC$  possui o mesmo incentro do triângulo medial.*

*Demonstração.* De fato, utilizando a expressão que caracteriza o incentro no triângulo  $Q_1Q_2Q_3$ , temos

$$\overrightarrow{OI'} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{p} \cdot \overrightarrow{OQ_1} + \frac{\left(\frac{b}{2}\right)}{p} \cdot \overrightarrow{OQ_2} + \frac{\left(\frac{c}{2}\right)}{p} \cdot \overrightarrow{OQ_3} = \frac{a}{2p} \cdot \overrightarrow{OQ_1} + \frac{b}{2p} \cdot \overrightarrow{OQ_2} + \frac{c}{2p} \cdot \overrightarrow{OQ_3}.$$

onde  $I'$  é o incentro do triângulo  $Q_1Q_2Q_3$ .

Vamos encontrar a expressão para  $\overrightarrow{OI'}$ , no referencial do triângulo  $ABC$ . Fazendo  $O = A$ , temos

$$\overrightarrow{AI'} = \frac{a}{2p} \cdot \overrightarrow{AQ_1} + \frac{b}{2p} \cdot \overrightarrow{AQ_2} + \frac{c}{2p} \cdot \overrightarrow{AQ_3}.$$

Como os pontos  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$  são os pontos médios entre os vértices do triângulo  $ABC$  e o ponto de Nagel  $N$ , podemos então utilizar a expressão (4.33). Logo

$$Q_1 = A \oplus \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \overrightarrow{AQ_1} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AN}$$

$$\overrightarrow{AQ_2} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN})$$

$$\overrightarrow{AQ_3} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AN}).$$

Substituindo, segue-se que

$$\overrightarrow{AI'} = \frac{a}{2p} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AN} + \frac{b}{2p} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN}) + \frac{c}{2p} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AN}).$$

Agrupando os termos semelhantes

$$\overrightarrow{AI'} = \frac{\overrightarrow{AN}}{2} \cdot \left( \frac{a}{2p} + \frac{b}{2p} + \frac{c}{2p} \right) + \frac{b}{4p} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{c}{4p} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\overrightarrow{AN}}{2} + \frac{b}{4p} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{c}{4p} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Utilizando a caracterização do ponto de Nagel e fazendo  $O = A$ , podemos escrever

$$\overrightarrow{AI'} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \left( 1 - \frac{b}{p} \right) \cdot \overrightarrow{AB} + \left( 1 - \frac{c}{p} \right) \cdot \overrightarrow{AC} \right] + \frac{b}{4p} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{c}{4p} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AI'} = \left( \frac{1}{2} - \frac{b}{2p} + \frac{b}{4p} \right) \cdot \overrightarrow{AB} + \left( \frac{1}{2} - \frac{c}{2p} + \frac{c}{4p} \right) \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AI'} = \left( \frac{1}{2} - \frac{b}{4p} \right) \cdot \overrightarrow{AB} + \left( \frac{1}{2} - \frac{c}{4p} \right) \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Para chegarmos a caracterização, basta apenas utilizarmos um outro ponto arbitrário  $O \in \mathbb{E}$ . Temos então que

$$\begin{cases} \overrightarrow{AI'} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OI'} \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} \end{cases}$$

Considerando  $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}$  e substituindo, obtemos

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OI'} = \left( \frac{1}{2} - \frac{b}{4p} \right) \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) + \left( \frac{1}{2} - \frac{c}{4p} \right) \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}).$$

$$\overrightarrow{OI'} = \left( \frac{1}{2} - \frac{b}{4p} \right) \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) + \left( \frac{1}{2} - \frac{c}{4p} \right) \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}).$$

$$\overrightarrow{OI'} = \left( -\frac{1}{2} + \frac{b}{4p} - \frac{1}{2} + \frac{c}{4p} + 1 \right) \cdot \overrightarrow{OA} + \left( \frac{1}{2} - \frac{b}{4p} \right) \cdot \overrightarrow{OB} + \left( \frac{1}{2} - \frac{c}{4p} \right) \cdot \overrightarrow{OC}.$$

Simplificando

$$\left( -\frac{1}{2} + \frac{b}{4p} - \frac{1}{2} + \frac{c}{4p} + 1 \right) = \frac{b+c}{4p} = \frac{2p-a}{4p} = \frac{1}{2} - \frac{a}{4p}$$

e substituindo, temos

$$\overrightarrow{OI'} = \left( \frac{1}{2} - \frac{a}{4p} \right) \cdot \overrightarrow{OA} + \left( \frac{1}{2} - \frac{b}{4p} \right) \cdot \overrightarrow{OB} + \left( \frac{1}{2} - \frac{c}{4p} \right) \cdot \overrightarrow{OC}.$$

$$\vec{OI'} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{a}{2p}\right) \cdot \vec{OA} + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{b}{2p}\right) \cdot \vec{OB} + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{c}{2p}\right) \cdot \vec{OC}.$$

Ou equivalentemente,

$$I' = O \oplus \left[ \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{a}{2p}\right) \cdot \vec{OA} + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{b}{2p}\right) \cdot \vec{OB} + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{c}{2p}\right) \cdot \vec{OC} \right]$$

que é a mesma expressão que caracteriza o ponto de Spieker em relação ao Triângulo  $ABC$ .

Como a caracterização de um ponto é única, temos então que

$$\vec{OI'} = \vec{OS} \Leftrightarrow \vec{OI'} - \vec{OS} = 0$$

$$\vec{OI'} + \vec{OS} = 0$$

$$\vec{I'S} = 0$$

Portanto  $I' = S$ .

Assim, os dois triângulos possuem o mesmo incentro, e como consequência o círculo de Spieker também está inscrito no triângulo  $Q_1Q_2Q_3$

□



# Conclusão

Esse trabalho foi desenvolvido tomando-se como base um resultado clássico obtido a partir da Geometria Euclidiana no intuito de torná-lo mais conhecido. O tema foi abordado de modo que pudesse atingir alunos do ensino fundamental, alunos do ensino médio e alunos da Graduação. Focamos o nosso objetivo no tema principal que é o alinhamento especial do incentro, baricentro e ponto de Nagel, dando destaque a alguns teoremas e demonstrações que muitas vezes são considerados difíceis ou extensos. Apesar desses teoremas e demonstrações não estarem incorporados às práticas escolares e, até mesmo na formação de professores, sua forma aqui utilizada e suas generalizações são frequentemente utilizadas em demonstrações de problemas geométricos. Dentro do tema fizemos um estudo a partir da Geometria Afim, utilizando Álgebra Linear, no intuito de apresentar novas formas de abordar problemas interessantes em Geometria Euclidiana. Esperamos que os objetivos propostos tenham sido atingidos com a realização deste trabalho e que venham a contribuir como fonte de pesquisa, tornando mais conhecidos alguns teoremas da Geometria Euclidiana Plana e suas aplicações.



# Referências Bibliográficas

- [1] BERNARDINO, L. M. F. **Temas Escolhidos de Geometria do triângulo**. Dissertação de Mestrado, Universidade do Algarve, Faro, Pt, (2008).
- [2] BOLDRINI, J. L. **Álgebra Linear**. 3 ed. São Paulo. Harper & Row do Brasil pp 112-115(1980).
- [3] COXETER, H. S. M. Greitzer, S. L. **Geometry Revisited**. Volume 19, Fifth Printing, Washington, D.C. The Mathematical Association of America, 1967.
- [4] De VILLIERS, M. **A Generalization of the Nine-Point Circle and Euler Line**, Pythagoras, 62, pp. 31-35, (2005).
- [5] De VILLIERS, M. **A Generalization of the Spieker Circle and Nagel Line**, Pythagoras, 63, pp. 30-37, (2006).
- [6] De VILLIERS, M. **Generalizing the Nagel Line to Circumscribed Polygons by Analogy and Constructive Defining**, Pythagoras, 68, pp. 32-40, (2008)
- [7] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar: geometria plana**. 7ª ed. São Paulo: Atual, 1993.
- [8] DALCÍN, M., HELLMEISTER, A. C. e **A Vingança do Incentro**. Revista do Professor de Matemática. São Paulo. SBM, 46, pp 6-12.(2001).
- [9] FEITOSA, M. O. **Cálculo vetorial e geometria analítica: exercícios propostos e resolvidos**. 4 ed.(revisada e ampliada). São Paulo: Atlas (1976).
- [10] GARBI, Gilberto Geraldo. **C.Q.D.: explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.
- [11] HONSBERGER, R. **Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry**. The Mathematical Association of America, 1995.
- [12] KIMBERLING, Clark. **Encyclopedia of Triangle Centers - ETC**. Disponível em: <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>. Acesso em: 07/08/2017.
- [13] LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear**. 9 ed. Rio de Janeiro. IMPA (2016). 357 p.
- [14] LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no Plano Com as Soluções dos Exercícios**. 5 ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro. SBM (2005). 330 p.

- [15] LOPES, Margarida M. **Espaço Afim Associado a um Espaço Vetorial**. Disponível em: <https://www.math.técnico.Lisboa.pt/mmlopes/GEOM08/apont/Apontgeometria2008.pdf>. Acesso em: 10/07/2017.
- [16] MAGALHÃES, Elton Jones da Silva. **Pontos notáveis do triângulo. Quantos você conhece?**. 2013. 32f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat. Universidade Federal de Sergipe.
- [17] MARTIN, Paulo A., SINGER, Maria L. **Tópicos de Álgebra Linear: Espaços Afins**. Disponível em: [https://www.ime.usp.br/iu-senko/ensino\\_2014\\_2/espacosafins.pdf](https://www.ime.usp.br/iu-senko/ensino_2014_2/espacosafins.pdf). Acesso em: 14/08/2017.
- [18] MARTINS, Ronald Alexandre. **Colinearidade e Concorrência em Olimpíadas Internacionais de Matemática: uma reflexão voltada para o ensino da Geometria Plana no Brasil**. Brasília, 2015. 121 p. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat. Universidade de Brasília.
- [19] MESQUITA, Gilder da Silva. **O círculo dos nove pontos e algumas de suas potencialidades didáticas**. 2013. 84f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat. Universidade Federal Rural de Pernambuco.
- [20] MORGADO, A. C. **Coordenadas para os centros do Triângulo**. Revista do Professor de Matemática. São Paulo. SBM, 43, pp 26-30.(2000).
- [21] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar - Volume 2 - Geometria Euclidiana plana**. 2ed. 464f. Rio de Janeiro: Editora: SBM, 2013.
- [22] OLIVA, Waldyr Muniz. **Vetores e Geometria**. 145f. São Paulo: Edgard Blucher, Brasília, 1973.
- [23] OLIVA, Waldyr Muniz. **Vetores e Geometria - Complementos**. 69f. Universidade de São Paulo - Instituto de Matemática e Estatística. São Paulo, (1975).
- [24] RIBEIRO, Carlos M. **Álgebra Linear e Geometria Analítica**. Volume 3. Instituto Superior de Engenharia de Lisboa. Disponível em: <http://files.isel-adeetc.webnode.pt/200000252-9f91ca007e/AlgebraLinearEGeometriaAnaliticaCarlosRibeiros3.pdf>. Acesso em 14.08.2017.
- [25] ROJAS, J., MENDOZA, R. **A Reta de Euler e a Circunferência de Nove Pontos**, Matemática Universitária, 48 e 49, pp 76-85, (2010).
- [26] RODRIGUES, Alexandre Augusto. M. **Álgebra Linear e Geometria Euclidiana**. 3 ed. 204f. Livraria Nobel S.A. São Paulo. (1970).

- [27] SOUTO, Antônio Marcos da Silva. **A Reta de Euler e a Circunferência de Nove Pontos: Um Olhar Algébrico**. João Pessoa, 2013. 72f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat. Universidade Federal da Paraíba.
- [28] WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas**. 6 ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro. SBM (2007). 110 p.
- [29] WU, Shin - Ting. **Geometria Afim - Notas de Aulas**. Disponível em: <<http://www.dca.fee.unicamp.br/courses/IA841/2s2005/notas/cap3.pdf>>. Acesso em: 01/07/2017.