Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA ANÁLISE DOS SABERES MOBILIZADOS

Wagner Ramos da Costa

Orientador

Ross Alves do Nascimento

Recife-PE

Maio de 2018

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA ANÁLISE DOS SABERES MOBILIZADOS

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Wagner Ramos da Costa

Recife-PE

Maio de 2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

C837r Costa, Wagner Ramos da
Resolução de problemas: uma análise dos saberes mobilizados / Wagner Ramos da Costa. – 2018.
103 f.: il.

Orientador: Ross Alves do Nascimento.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Recife, BR-PE, 2018.
Inclui referências.

1. Matemática – Estudo e ensino 2. Solução de problemas 3. Geometria 4. Frações I. Nascimento, Ross Alves do, orient. II. Título

CDD 510

WAGNER RAMOS DA COSTA

Resolução de Problemas: Uma Análise dos Saberes Mobilizados

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 23/05/2018

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ross Alves do Nascimento (Orientador)– UFRPE

Prof. Dr. Abraão Juvêncio de Araújo – CAP-UFPE

Prof. Dr. Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva– PROFMAT/UFRPE

Aos meus pais, Severino Blandino e Elisabeth Tomé;

À minha esposa, Andréa Valquíria;

Aos meus filhos Juliana Mazza; Wagner Filho e Maria Isabel. .

"Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre".

Paulo Freire, (19/09/1921 - 02/05/1997)

Agradecimentos

Ao Prof. Msc. Olavo Otávio Nunes pelos ensinamentos e incentivos transmitidos desde a graduação e o privilégio da amizade por quase trinta anos.

Ao Prof. Dr. Ross Alves do Nascimento pela orientação paciente, competente e encorajadora durante a realização desse trabalho.

Ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE, pela dedicação dispensada a nós do Corpo Discente.

Aos colegas mestrando do Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional -PROFMAT, da Universidade Federal Rural de Pernambuco -UFRPE, pelo coleguismo e muitas vezes a relação de fraternidade desses.

Aos colegas professores do Instituto Federal de Pernambuco - IFPE, *Campus* Recife, pelo apoio e incetivo, especialmente ao Corpo Docente de Matemática por ter assumido uma grande parte do meu esforço acadêmico para que pudesse me dedicar ao trabalho de escrever.

Resumo

Esse trabalho buscou analisar os procedimentos de estudantes do ensino técnico integrado e superior na Resolução de Problemas relativos à noção de frações, comparação de medidas e geometria. No ensino de Matemática ainda se observa que há um desconhecimento, por parte do professor, do emprego correto da metodologia de Resolução de Problemas, pois, em muitos casos, são intensificados exercícios de reforço por compreender, que é apenas esse processo que se constitui à metodologia. Muitos professores, também desconhecem, que existem os problemas chamados de "não rotineiros", que buscam requisitar habilidades e competências específicas para focar no conhecimento prévio dos alunos, e, portanto, são problemas que tem uma característica importante para o uso da metodologia de Resolução de Problemas. Foi com base nessa compreensão que foram selecionados dois problemas considerados não rotineiros para tentar identificar os saberes mobilizados pelos alunos quando envolvidos com a metodologia de Resolução de Problemas. Nesse sentido, o trabalho procura abrir um viés de discussão sobre essa prática. Trabalhou-se com 44 (quarenta e quatro) alunos de duas instituições, sendo 15 (quinze) alunos de uma turma do 1º período do curso técnico integrado em Eletrônica do IFPE - Instituto Federal de Pernambuco do Recife, e 29 (vinte e nove) alunos da UFRPE – Universidade Federal Rural de Pernambuco, desses últimos 15 (quinze) alunos cursam o 2º período e 14 (quatorze) alunos cursam o 3º período do curso de Licenciatura em Matemática. A escolha desses dois ambientes de coleta ocorreu no sentido de acompanhar a evolução da aprendizagem dos estudantes na fase que vai do técnico integrado até a graduação. Os estudantes que participaram da investigação apenas receberam os problemas e foram orientados a resolver sem necessidade de identificar-se. Os documentos originados desse processo foram analisados no campo dos saberes da matemática, logo, o foco foi direcionado à mobilização dos saberes revelados pelo aluno, nas estratégias que utilizam, nas dificuldades em tópicos da matemática, no nível de conhecimento prévio que possuem, na dificuldade de compreensão da questão, no modo de atuar ao iniciar a resolução, entre outros aspectos. Os resultados indicaram que: as questões foram ricas quanto ao resgate de informações que alguns estudantes têm dificuldade, como em tópicos básicos de compreensão de frações quando relacionados à medida de um segmento.

Palavras-chave: Resolução de Problemas; Operação com Frações; Número, Medida e Geometria.

Abstract

This work targeted analyzing the procedures of integrated high school and higher education in Problem Solving related to the notion of fraction, measure comparison and geometry. In teaching Mathematics it is observed that there is a lack of knowledge, coming from the professor, about the correct employment of Problem Solving methodology, because, in several cases, reinforcement exercises are intensified due to the understanding that this is the only process that constitutes the methodology. Several teachers also do not know that problems called "non-routine" exist, that search for request specific abilities and skills to focus on the previous knowledge of students and, therefore, these are problems that have an important characteristic for the use of Problem Solving methodology. Based on this comprehension, two problems were selected, considered non-routine, to try and identify the knowledge mobilized by students when involved with the Problem Solving methodology. Based on this matter this work searches to open a discussion bias about this practice. This work counted with 44 (forty four) students from two institutions, where 15 (fifteen) students were from a first semester class of the integrated technical course on Electronics from IFPE – Federal Institute of Pernambuco of Recife, and 29 (twenty nine) students from UFRPE – Federal Rural University of Pernambuco, where these last 15 (fifteen) students are on their 2nd semester and 14 (fourteen) students are on their 3rd semester of the bachelor's degree in Mathematics. The choice of these two environments occurred as a mean to track the learning evolution of students on the phase that goes from technical education until graduation. The students that are part of the investigation only received the problems and they were oriented to solve them without the need to identify themselves. The documents created from this process were analyzed in the field of Mathematics, therefore, the focus was towards mobilization of knowledge revealed by students, the strategies that they use, the difficulties in Mathematics topics, the previous level of knowledge they possess, the difficulty of comprehending the problem, the way of acting when starting solving the problem, among other aspects. The results indicate that: the problems were rich in rescuing information that students have difficulty, such as basic understanding of fractions when related to the measure of a segment.

Keywords: Problem Solving; Operations with Fractions; Number, Measurement and Geometry.

Sumário

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

O ensino de matemática sempre demonstrou que são muitas as dificuldades encontradas nesse processo, seja na escola particular ou pública. Problemas diversos são paralelos a esse processo, como: repetência, evasão escolar, sucateamento de escolas, formação do professor, estudantes sem uma base mínima de conhecimento prévio relacionado aos temas estudados, entre outros aspectos. Sem considerar que a matemática é, ainda, uma disciplina que causa receio em muitos estudantes, como destaca Imenes e Lelis:

> Todos conhecemos o medo da Matemática. Ele pode até ter diminuído, pois, com o mundo em mudanças, o ensino natural progride. Mas, mesmo hoje, a Matemática ensinada de maneira tradicional é a disciplina que apresenta o mais baixo desempenho dos alunos e é, ainda a que mais reprova. Isso acontece no Brasil e no mundo inteiro! (IMENES; LELIS, 1997, pg. 7).

Apesar das dificuldades do ensino de matemática no Brasil ser uma realidade difícil de modificar, pois os resultados apontam para um baixo índice de aprendizagem nas escolas, observados através dos programas de avaliação institucional já realizados, pode-se notar que existem várias iniciativas em programas de incentivo à pesquisa para minimizar esse problema.

Outro ponto para essa discussão nos coloca diante da necessidade de formação nessa área, como observado nos PCNs (Brasil, 1999) em que, a partir do papel formativo, a matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas.

Na busca para minimizar as dificuldades de aprendizagem os professores recorrem a diversas práticas, sendo uma das mais frequente a Resolução de Problemas, que é tratada, por eles, como um reforço importante.

Na Resolução de Problemas discute-se que o educador deve levar o aluno à pensar e, consequentemente, a colocar em prática os saberes que domina, ou seja, ser desafiado para colocar em prática a matemática aprendida na escola.

Defende-se, aqui, o ato de propor aos estudantes situações-problema e questões que os façam rebuscar os saberes que já dominam, sem uma ideia específica de qual ferramenta previamente se deva utilizar. Os professores nesse momento têm papel fundamental para propor os problemas que podem ser um desafio aos estudantes em qualquer nível de escolaridade.

O tipo de problema que se deve buscar é aquele em que o aluno perceba que pode solucionar, de acordo com os seus conhecimentos prévios. Nesse sentido, buscamos conhecer especificidades do conhecimento matemático dos estudantes quando envolvidos nesse processo.

Uma proposta que vem sendo bem aceita sobre Resolução de Problemas são as Olimpíadas, que busca o bom desempenho dos estudantes para a matemática e é desenvolvida pelo Governo Federal junto ao IMPA (Instituto de Matemática pura e Aplicada) e a SBM (Sociedade Brasileira de Matemática), a partir de experiências bem sucedidas, incluiu a participação de alunos em Olimpíadas de Matemática (resolução de questões matemáticas), o que tem trazido melhoras no interesse de alguns estudantes e, consequentemente, um aumento do rendimento escolar. Esse projeto, traz um viés voltado ao modelo de Resolução de Problemas que se pretende atingir no campo do ensino de matemática, isso, também, por ser um método que incentiva a Resolução de Problemas como os que são discutidos por vários pesquisadores (DANTE, 1988; KLINE, 1976; LOPES, 1994; PATERLINE, 1995).

Outra Iniciativa é a OPEMAT (Olimpíada Pernambucana de Matemática), que teve sua primeira edição em 2015, com o objetivo de contribuir para a melhoria da qualidade do ensino e aprendizagem de Matemática nas escolas Pernambucanas e estimular estudantes do Ensino Básico no interesse pela Matemática, incentivando-os à participação em competições nacionais.

Dessa forma, o objetivo do nosso trabalho vem em resposta a uma questão que está sendo levantada para o estudo de dissertação: Que elementos da Resolução de Problemas valorizam a discussão quanto aos saberes mobilizados pelos estudantes.

Capítulo 2

JUSTIFICATIVA DO ESTUDO

Partindo de uma longa perspectiva de observação como professor regente da área de matemática, na qual focamos para as dificuldades dos estudantes em matemática e que por não conseguirem superar em muitos casos tal dificuldade, nos levou a uma preocupação quanto a conhecer melhor o que pode estar por trás desse fato.

Buscando enriquecer os conhecimentos sobre o que realmente ocorre no ensino de matemática, propomos um estudo de dissertação do PROFMAT/UFRPE, especificamente no campo do ensino de matemática, no sentido de entender de forma mais científica as bases das dificuldades dos estudantes na Resolução de Problemas.

A proposta do estudo busca valorizar tais saberes e conhecer como se processa a Resolução de Problemas, que é tida como uma técnica que pode minimizar a dificuldade dos alunos e que favorece a prática do professor, como asseguram vários pesquisadores (DANTE, 1988; ADLER, 1970; DEMO, 1996; VIEIRA, 2001; KLINE, 1976).

Portanto, como objetivo do estudo propomos identificar quais são os saberes mobilizados pelos estudantes na Resolução de Problemas matemáticos, que podem ser explorados a partir do nível básico e que exploram os conceitos de número, medida e geometria.

Capítulo 3

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A proposta do estudo foi valorizada a partir de alguns tópicos que realçam a atividade de Resolução de Problemas. Portanto, selecionamos os tópicos para fundamentar a base do estudo. Dessa forma:

- Levantamos aspectos do lado histórico pelo fato de se identificar essa prática como antiga na matemática;
- Abordamos o Livro Didático por ser um recurso de ensino do professor e que é repleto de atividades de Resolução de Problemas;
- Buscamos conhecer as bases cientificas discutidas na Resolução de Problemas;
- Procuramos identificar que tipo de atividades de pesquisa envolve a Resolução de Problemas;
- Buscamos conhecer a característica dos tipos de problemas abordados na Resolução de Problemas.

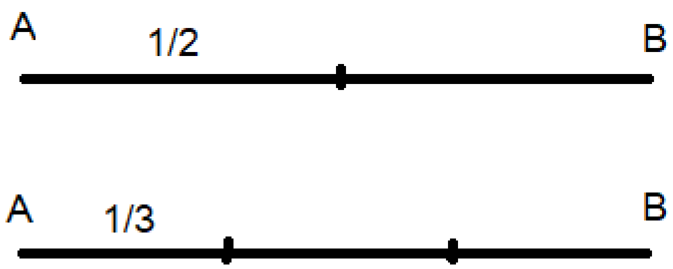
Os problemas selecionados, que consideramos como não rotineiros, foram selecionados no sentido de requisitar conhecimentos básicos de matemática e não apenas um algoritmo de solução, ou seja, como discutido no aspecto de problemas não rotineiros por defendidos por Brum e Santos Wagner (2015, p. 123), que os aponta como:

> [...] aqueles que não são apenas exercícios de aplicação de algum algoritmo para a fixação de conteúdos, mas são problemas que permitem aos alunos desenvolverem suas próprias soluções. O estudante pode utilizar mais de um algoritmo na resolução de um problema não rotineiro, e esses problemas possibilitam ao estudante estabelecer relação com outros conteúdos.

O primeiro problema conecta na mesma questão a noção de número, a relação deste com medida e a representação do valor por meio de geometria. Já o segundo problema, que foi dado como estudo em uma sala de aula do ensino médio, como exercício, no qual se observou que os estudantes de imediato aplicavam as relações trigonométricas em detrimento do uso da geometria para o cálculo da altura. Portanto, a partir dessa observação sugerimos a retirada da ferramenta trigonométrica para analisar os saberes mobilizados que os sujeitos da pesquisa poderiam apresentar. O problemas foram:

Problema 1.

Na figura abaixo, um mesmo segmento AB foi dividido de duas maneiras, na primeira em duas partes iguais e na segunda em três partes iguais (como representado na figura abaixo). Queremos saber quanto do tamanho de 1/3 cabe exatamente no tamanho 1/2 desse mesmo segmento? **Explique sua resposta, que saber matemático se está utilizando nessa questão? Apresente anotações e cálculos.**



Problema 2.

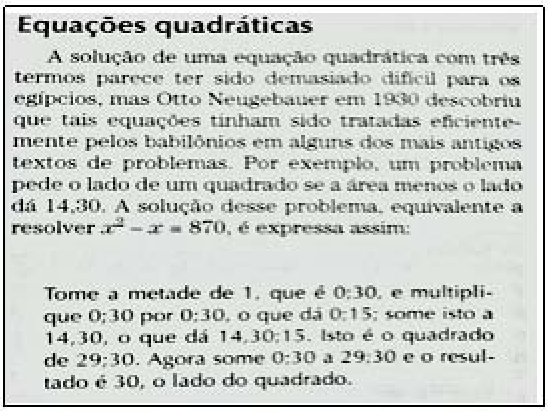
Dois lados de um paralelogramo medem 4 cm e 6 cm e formam um ângulo de 60°. Determine a área desse paralelogramo. **Obs. Você não pode usar trigonometria, ou seja, compreensão de seno e cosseno.**

3.1 Lado Histórico da Resolução de Problemas

Desde as civilizações antigas a humanidade está empenhada em resolver problemas nos diversos âmbitos da natureza, isso se vê especificamente tratado nos nos livros de história da matemática, que é um ponto de análise em nosso caso de estudo, pois o foco reside nos problemas matemáticos, Portanto, apresentamos uma breve discussão sobre 3 (três) problemas antigos, como forma de iniciar uma apropriação sobre a noção de problema que vai fundamentar a investigação, com destaque para:

Problema 1: Observado em Boyer (1996, p. 21), o problema busca determinar a medida do lado de um quadrado em que a área menos o lado tem resultado 14,30 (base sexagesimal).

Figura 1 – Equações Quádricas



Equações quadráticas

A solução de uma equação quadrática com três termos parece ter sido demasiado difícil para os egípcios, mas Otto Neugebauer em 1930 descobriu que tais equações tinham sido tratadas eficientemente pelos babilônios em alguns dos mais antigos textos de problemas. Por exemplo, um problema pede o lado de um quadrado se a área menos o lado dá 14,30. A solução desse problema, equivalente a resolver $x^2 - x = 870$, é expressa assim:

Tome a metade de 1, que é 0;30, e multiplique 0;30 por 0;30, o que dá 0;15; some isto a 14,30, o que dá 14,30;15. Isto é o quadrado de 29;30. Agora some 0;30 a 29;30 e o resultado é 30, o lado do quadrado.

Fonte: Boyer; 2012, p. 44

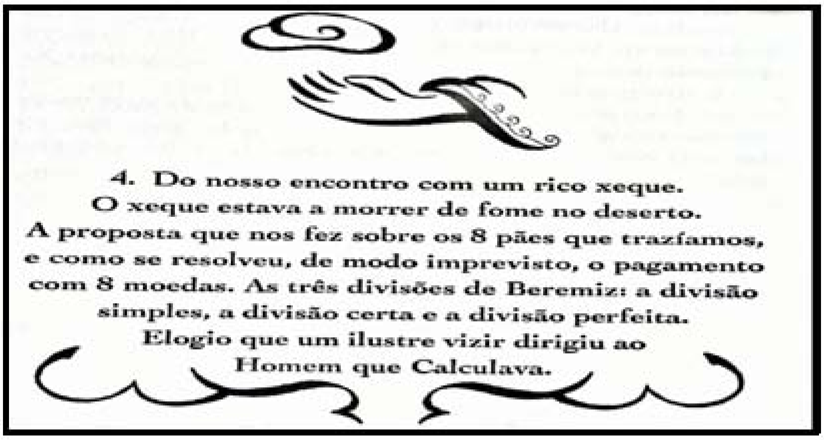
Discussão do problema

• O problema é bastante tradicional e refere-se às civilizações antigas diante da solução de equação quadrática, apresentado em Boyer (1996, p. 21), para discutir a dificuldade dos egípcios em resolver uma equação quadrática com três termos, conforme figura 3.1: $x^2 - x = 870$.

A solução com a álgebra dos dias atuais equivale a solução de uma equação $x^2 - px = q$, onde $x = \frac{p + \sqrt[2]{p^2+4q}}{2}$ ou ainda $x = \sqrt[2]{(\frac{p}{2})^2 + q} + \frac{p}{2}$. Como se está medindo o comprimento, não cabe solução negativa.

Problema 2: Observado em Malba Tahan (ano 2007, p. 24). Caracterizado por um diálogo sobre divisão.

Figura 2 – Do encontro com um Xeque



4. Do nosso encontro com um rico xeque.
O xeque estava a morrer de fome no deserto.
A proposta que nos fez sobre os 8 pães que trazíamos,
e como se resolveu, de modo imprevisto, o pagamento
com 8 moedas. As três divisões de Beremiz: a divisão
simples, a divisão certa e a divisão perfeita.
Elogio que um ilustre vizir dirigiu ao
Homem que Calculava.

Fonte: Malba Tahan, O homem que Calculava, 70ª Edição, 2007, p. 24

O problema consiste em dividir oito moedas de ouro entre Beremiz e o seu amigo (o narrador da história) de forma proporcional, pela divisão dos seus pães com um outro personagem, caracterizado por ser um Xeque, encontrado na estrada, ferido.

Discussão do problema:

O narrador conta que a caminho de Bagdá, próximo a uma pequena aldeia, ele e Beremiz (o homem que calculava) encontraram caído, na estrada, um pobre viajante roto e ferido, ao qual socorreram e do qual souberam ser Salem Nasair, um dos mais ricos mercadores de Bagdá, que fora atacado por uma chusma de nômades persas do deserto.

Conta o narrador que combinaram, então, juntar os cinco pães, três seus e cinco do Homem que Calculava e dividi-los entre os três, para sobreviverem até chegarem a Bagdá, prometendo o Xeque pagar com uma moeda de ouro cada parte do pão que comesse. Conta o narrador da história que quando lá chegaram, o rico Salem Nasair cumpriu sua palavra dada, entregando ao Homem que Calculava cinco moedas pelos cinco pães e ao narrador, pelos três pães, três moedas.

O desfecho da história mostra a habilidade de Beremiz, como é narrado por Malba Tahan (2007, p. 26)

> Com grande surpresa, o Calculista, objetou respeitoso: - Perdão, ó Xeque. A divisão, feita desse modo, pode ser muito simples, mas não é matematicamente certa! Se eu dei 5 pães devo receber 7 moedas; o meu companheiro bagdali, que deu 3 pães, deve receber apenas uma moeda. - Pelo nome de Maomé! – interveio o vizir Ibrahim, interessado vivamente pelo caso. – Como justificar, ó Estrangeiro, tão disparatada forma de pagar 8 pães com 8 moedas? Se contribuíste com 5 pães, por que exiges 7 moedas? Se o teu amigo contribuiu com 3 pães, por que afirmas que ele deve receber uma única moeda? O homem que calculava aproximou-se do prestigioso ministro e assim falou: - Vou provar-vos, ó Vizir, que a divisão das 8 moedas, pela forma por mim proposta, é matematicamente certa. Quando, durante a viagem, tínhamos fome, eu tirava um pão da caixa em que estavam guardados e repartia-o em três pedaços, comendo cada um de nós, um desses pedaços. Se eu dei cinco pães, dei, é claro, 15 pedaços; se o meu companheiro deu 3 pães, contribuiu com 9 pedaços. Houve, assim, um total de 24 pedaços, cabendo, portanto, oito pedaços para cada um. Dos 15 pedaços que dei, comi 8; dei, na realidade 7; o meu companheiro deu, como disse, 9 pedaços e comeu, também, 8; logo, deu apenas 1. Os 7 pedaços que eu dei e que o bagdali forneceu formaram os 8 que couberam ao xeque Salém Nasair. Logo, é justo que eu receba 7 moedas e o meu companheiro, apenas uma.

Continuando a narração, complementa o amigo de Beremiz:

> Era lógica, perfeita e irrespondível a demonstração apresentada pelo matemático. - Esta divisão - retorquiu o calculista - de sete moedas para mim e uma para meu amigo, conforme provei, é matematicamente certa, mas não é perfeita aos olhos de Deus! E tomando as moedas na mão dividiu-as em duas partes iguais. Deu-me uma dessas partes (4 moedas), guardando, para si, as quatro restantes.

Problema 3: Explorado por Roque e Pitombeira (2012, p. 194) – Verso 77: "De um enxame de abelhas, tome a metade, depois a raiz. Este grupo extrai o pólen de um campo de jasmins. Oito nonos do todo flutuam pelo céu. Uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de lótus. Atraído pela fragrância, ele tinha se deixado aprisionar na noite anterior. Quantas abelhas havia no enxame?"

Discussão do problema:

Segundo Roque e Pitombeira (2012, p. 194) o que pode ser chamado hoje de equação, no século XII eram enunciados usando somente palavras, de modo poético. Fazendo o número inicial de abelhas do enxame igual a $2x^2$, pelo enunciado que fala em metade e em raiz, nessa ordem. Oito nonos do número total de abelhas é $\frac{16x^2}{9}$, adicionando o casal de abelhas e a raiz x, pode-se ter $\frac{16}{9}x^2 + 2 + x = 2x^2$.
Escrevendo na forma reduzida:$2x^2 - 9x - 18 = 0$.
Resolvendo essa equação pelo método de completar quadrados chega-se ao valor de $x = 6$, logo o número de abelhas é igual ao dobro do quadrado de 6. Resposta 72 abelhas.

3.2 Os livros didáticos e a abordagem de Resolução de Problemas.

O atual estudo não irá deter-se em discutir sobre uma análise da linguagem matemática utilizada nos livros didáticos, como pesquisado por Candia Morgan (1995, p.3), ao colocar que "é preciso muito mais tempo para alcançar as competências em linguagem escolar necessárias para o sucesso em sala de aula". A pesquisadora aponta para dificuldades dos estudantes em não identificarem características de textos matemáticos, pelo fato dos mesmos estarem repleto de linguagem acadêmica, ou seja uma linguagem própria da matemática que muitos estudantes levam um tempo para dominar.

Morgan (2001) ainda destaca a importância dos professores na valorização da dificuldade e da facilitação para o aluno da compreensão da linguagem acadêmica que é própria dos livros didáticos, discutindo que:

> Enquanto todos os professores podem identificar o vocabulário matemático, notação, gráficos e diagramas e podem aconselhar seus alunos como usá-los com precisão, eles não o fazem, em geral, acham isso muito fácil, descrever a maneira pela qual esses vários componentes precisam ser combinados para construir uma convincente prova rigorosa, uma definição concisa, ou uma quantidade de processos de Resolução de Problemas orientados para a descoberta de um resultado geral. (MORGAN, 2001, p. 241).

A decisão aqui tomada se restringe de não utilizar a análise da linguagem é pelo fato de que os estudantes investigados cursarem os graus médio e pós-médio e também, por outro lado, os problemas selecionados terem uma escrita compreensível ao seu objetivo. Outro fator é que os problemas utilizados são sem contexto, apenas com finalidade de verificar nos estudantes como utilizam os conhecimentos matemáticos que dominam e que são costumeiramente apresentados em sala de aula buscando um domínio de saber matemático bastante geral.

Os livros didáticos no Brasil trazem questões que são propostas aos alunos para aplicarem o seu conhecimento prévio a partir das lições. Tais conhecimentos exigidos, muitas vezes estão repletos de fórmulas prontas, equações e algoritmos que possam ser utilizados para a resolução dessas questões. O processo em muitos casos, chega a instigar os alunos a desenvolverem métodos de resolução para essas questões, e que em várias situações os alunos são bem sucedidos.

Percebemos que apesar de serem interessantes os problemas oferecidos nos livros didáticos, ao nosso ver, são tidos como problemas rotineiros, pois, os estudantes em muitas situações, já encontram o caminho de solução, que aparece por pistas escondidas e baseados unicamente nos saberes estudados no tópico que foi oferecido para aquele conteúdo do livro. Como também não conectam saberes diversos na mesma questão, no intuito de resgatar do estudante outros conhecimentos que são básicos e que foram pouco trabalhados. Os estudantes apenas se habilitam a encontrar a solução dentro do conhecimento que dominam, atingindo o objetivo traçado. Aos estudantes que conseguem resolver, são dados os louros da vitória e aos outros que não respondem fica a triste sensação de fracasso, pois acabaram de estudar tal tópico exigido no problema.

> Granja e Gitirana (1997, apud, NASCIMENTO, 2017, p 18-19) discutem que as atividades presentes nos livros didáticos são apresentadas de tal forma que a escolha do conhecimento matemático a ser utilizado já é feita na abordagem adotada no texto. Cabe, portanto ao aluno somente utilizar fórmulas prontas, ou mesmo conceitos já pré-selecionados no livro. (Nascimento, 2007, p. 18-19)

Segundo (Dante, 1994, p. 13) não basta saber fazer mecanicamente as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. É preciso saber como e quando usá-las na resolução de uma situação problema. Essa fala de Dante nos remete ao problema 2 utilizado em nossa pesquisa, no qual o total de alunos investigados, que estavam apto a resolver o problema, não conseguem perceber o uso das propriedades do paralelogramo, pois, o fato de retirar a ferramenta trigonométrica do conhecimento que é exigido de forma clara no problema, que os estudantes dominam por ser um saber bastante exigido, não conseguem utilizar apenas o saber geométrico com suas especificidades para esse tipo de questão, por não ser muito cobrado no ensino básico, e dessa forma não obter sucesso.

Polya (2006) recomenda ensinar estratégias para Resolução de Problemas matemáticos, mas, será que só isso é suficiente? A boa proposta de Polya está em esquematizar o processo e não no requisito domínio do saber que o estudante deverá possuir. Remete-se, então, novamente às questões trabalhadas no presente estudo: na primeira questão o aluno recorre a diversas situações para solucionar o problema (comparação de medidas, divisão numérica, proporcionalidade, uso de porcentagem, entre outras), pois o problema promove essa abertura. Já no problema 2, esse mesmo aluno não encontra facilidades, pois seus fracos recursos aprendidos na escola (e que não estão sendo apresentados nos livros didáticos pela ausência da geometria) o faz sentir-se desesperado. A solução do problema dois pode ser obtida pela propriedade do paralelogramo quanto ao seus ângulos ou, ainda, por uma composição de novas formas geométrica associadas ao paralelogramo chegando, assim, ao valor da altura que é o requisito mínimo para solução. E isso, vale ressaltar, o aluno não encontra no livro didático.

O que fazer, então, se na escola os alunos estão atrelados à dependência dos livros adotados nas instituições de ensino? Pois, percebe-se que os estudantes não estão complementando raciocínios que acabam ficando desvinculados de uma interpretação mais apropriada dos problemas.

Outro fato é que pode-se exemplicar a dificuldade de solucionar o problema dois, como no estudo de Schoenfeld (1996), quando se propõe uma questão retirada do Third National (USA Assessment of Educational Progress - Avaliação do progresso educacional) (Carpenter et al., 1983), um exame nacional do desempenho em Matemática dos estudantes americanos.

- Um ônibus do exército leva 36 soldados. Se 1128 soldados estão sendo levados para seus lugares de treinamento, quantos ônibus são necessários?
(Não vamos questionar nesse exemplo em que direções estão esses campos de treinamento).
Então vamos as respostas dos estudantes:

- 29 % disseram que o número de ônibus necessários é "31, resto 12";
- 18 % disseram que o número de ônibus é "31";
- 23 % de um modo correto, disseram que o número de ônibus necessários é "32".
- 30 % fez o cálculo de forma incorreta.

Os dados mostram que 29 % dos estudantes chegaram ao quociente 31, mas falham em afirmar que teria resto, como se houvesse "restos" de ônibus. 18 % falharam ao indicar apenas os ônibus completos, desprezando os 12 soldados que sobraram (resto da divisão de 1128 por 36). 23 % responderam de modo correto 32, que é o número mínimo de ônibus para transportar os soldados. Observe que 70 % (que é a diferença entre o total de estudantes que fizeram o exame e os 30 % fizeram o cálculo de forma incorreta) dos estudantes que fizeram o exame, chegaram ao cálculo corretamente do quociente, encontrando que quando dividimos 1128 por 36 encontraram 31. Isso mostra que esses aprenderam as lições de aritmética, como referiu-se Wertheiner "cegamente e de cor". A observação de Schoenfeld (1996) aos erros dos estudantes se refere a análise de um caso real de transporte de pessoas em ônibus.

> Quando os estudantes referem que os ônibus têm "restos", é claro que eles não olharam para o problema como se este fosse real. Eles veem-nos como problema escolares de Matemática típicos – para exercícios e práticas – que os estudantes não esperam que façam sentido. Os alunos simplesmente fazem o cálculo e escrevem a resposta por baixo (só o quociente). (SCHOENFELD, 1996, p. 5)

Esses alunos registraram a resposta como se estivessem resolvendo os modelos de exercício comum dos livros didáticos, não tendo a preocupação de refletir sobre a pergunta em questão: "quantos ônibus serão usados?"

Tratar as discussões oferecidas sobre Resolução de Problemas a partir dos livros didáticos é perceber nas questões oferecidas o que ali se encontra sobre os mecanismos próprios que os professores podem apresentar aos estudantes sobre o que pensar para desenvolver uma boa estratégia.

Lester e Charles (1982) discutem que uma situação pode ser tratada como um problema desde que o aluno não disponha de um método, ou não conheça de imediato um caminho de resolução. Assim, para aprender a matemática contida no problema, o estudante poderá buscar uma variedade de situações que validará ou não a sua estratégia. Dessa forma, os pesquisadores apresentam seis situações especificas de estratégias para os problemas:

a)**exercícios de treino:** permitem aos alunos praticarem o uso de um algoritmo;

b)**problema de tradução simples:** a solução envolve transformar as palavras em uma expressão matemática, com os objetivos de reforçar a compreensão de conceitos matemáticos e ajudar a manter a eficiência dos alunos nas operações;

c)**problema de tradução complexa:** embora similar ao segundo, este problema é de um tipo mais complexo, pois envolve pelo menos dois passos e, geralmente, mais de uma equação;

d)**problema processo:** problema cuja solução necessita do uso de processos de pensamento como, por exemplo, planejamento, estimativa, conjecturas, buscas de padrões;

e)**problema de aplicação:** permite que o aluno utilize uma variedade de técnicas, situação realística e, assim, o torna consciente do valor e da utilidade da Matemática em situações do dia-a-dia;

f)**problema de quebra-cabeça:** permite que o aluno se envolva com a Matemática de recreação, potencialmente enriquecedora e mostra a importância da flexibilidade no enfrentamento de problemas e o valor de se olhar os problemas de diversas maneiras. (LESTER E CHARLES, 1982).

Tais discussões aqui levantadas nos mostra que os livros didáticos em suas variadas situações de ensino trabalham como uma ferramenta base: a Resolução de Problemas. Sendo essa ferramenta trabalhada em seus diversos aspectos, como discutidos pelos pesquisadores que fundamentam este estudo (POLYA, 1978; SCHOENFELD, 1996; DANTE, 2009; ONUCHIC, 1999; LESTER e CHARLES, 1982), entre outros. Portanto, é preciso discutir o por quê dos livros didáticos deixar de lado as questões não rotineiras, explorando apenas o que é essencial para conhecimento do tópico estudado.

3.3 As Bases Científicas Formuladas para Resolução de Problemas

A Resolução de Problemas no campo da educação matemática recebe um destaque importante no processo de ensino aprendizagem, valorizando a participação do estudante e o empenho do professor, no sentido de orientar o ensino por uma via matemática com técnica apropriada.

Dante (2005) destaca inúmeras vantagens que o professor pode encontrar a partir do emprego dessa prática:

- O aluno é levado a pensar de forma produtiva;
- Coloca o aluno diante de situações novas;
- Dá oportunidade ao aluno para entender a aplicação da Matemática;
- Valoriza as aulas deixando-as interessantes e desafiadoras;
- Enriquece os alunos com estratégias e ferramentas próprias para resolver problemas;

- Fornece uma rica base matemática aos estudantes.

Dante (1989, p.11) afirma que “Um dos principais objetivos do ensino da matemática é fazer o aluno pensar produtivamente e, para isso, nada melhor do que apresentar-lhe situações-problema que envolvam-no, que o desafiem e o motivem a querer resolvê-las”; já Wertheimer (1945, apud DANTE, 2009, p.19) reforça que “O pensamento produtivo produz novas e diferentes soluções, inventando, buscando e usando novos métodos”.

Segundo Dante (2010, p. 15) a Resolução de Problemas, e também a formulação, é tida por muitos educadores como o principal objetivo do ensino da matemática. Também é importante preparar os alunos para que possam enfrentar situações novas. Observa-se que, diante das situações novas, o aluno é desafiado a encontrar um caminho para seguir adiante na resolução do problema. Dante (1989, p. 11) destaca, ainda, que: ”É preciso desenvolver no aluno a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele posa propor boas soluções às questões que surgem em seu dia-a-dia, na escola ou fora dela.”

Para Dante (1989, p. 12), não é previsível quais habilidades, conceitos e algoritmos matemáticos seriam úteis hoje para prepará-los para desafios futuros. É certo, de maneira geral, que se deve preparar o aluno para lidar com situações novas. Na concepção do autor, é preciso desenvolver no aluno a iniciativa, o espírito explorador, a criatividade e a independência por meio da formulação e da Resolução de Problemas.

Discutindo sobre dar oportunidade ao aluno para entender a aplicação da Matemática, Lima (2001, apud DANTE 2009, p. 20), aponta: “As aplicações constituem a principal razão pela qual o ensino da matemática é tão difundido e necessário desde os primórdio da civilização até os dias de hoje”. Quando o aluno se vê diante da aplicação do conteúdo que está sendo vivenciado em sala de aula, o processo educativo torna-se mais participativo e produtivo. É sabido da importância da matemática na escola e também fora dela, mas apesar disso é possível encontrar alunos que afirmam não gostar de matemática, e que, muitas vezes, por não dominar os saberes básicos passam a não alimentar interesse por essa matéria.

Esse problema segundo Dante (1989, p.13) pode estar associado a forma de abordagem da disciplina na escola, ao destacar que:

> Apesar da grande e reconhecida importância da Matemática, quer pelo desenvolvimento do raciocínio que proporciona ao aluno, quer por suas aplicações nos problemas da vida diária, em geral os alunos, logo nos primeiros contatos com essa ciência, começam a detestá-la ou tornam-se indiferentes a ela. Isso pode ser atribuído ao exagero no treino de algoritmos e regras desvinculados de situações reais, além do pouco envolvimento do aluno com aplicações da Matemática que exijam o raciocínio e o modo de pensar matemático para resolvê-las. Dante (1989, p.13)

Portanto, é importante valorizar as aulas, deixando-as interessantes e desafiadoras. Dante (2009, p. 21) aponta que aulas expositivas em que os alunos são desafiados ou são levados a participar de modo ativo conseguem ser mais dinâmicas e motivadoras.

> Uma aula de matemática na qual os alunos, incentivados e orientados pelo professor, - individualmente ou em pequenos grupos – na aventura de buscar a solução de um problema que os desafia é mais dinâmica e motivadora do que a que segue o clássico esquema de explicar e repetir. [...] O professor deve provocar o aluno a participar com questões-problema que os desafiem individualmente ou em grupos pequenos. O real prazer de estudar matemática está na satisfação que surge quando o aluno, por si só, resolve um problema. Quanto mais difícil, maior a satisfação em resolvê-lo. (DANTE, 2009, p. 21).

Para Dante (2009, p. 22), ao "resolver problemas, é necessário desenvolver determinadas estratégias que, em geral se aplicam a grande número de situações". A Resolução de Problemas ainda fornece uma rica base matemática aos estudantes. No mundo atual, globalizado, é preciso oferecer uma boa base matemática para que o aluno saiba enfrentar situações novas. O dia a dia é recheado de informações sobre economia, tempo, administração de orçamentos, e assim por diante.

> Mais do que nunca precisamos de pessoas ativas e participantes, que deverão tomar decisões rápidas e, tanto quanto possível, precisas. O mundo globalizado de hoje exige mais de todos nós: raciocínio rápido, conhecimentos gerais e informações atualizadas. Assim, é necessário formar cidadãos matematicamente alfabetizados, que saibam como resolver, de modo inteligente, seus problemas domésticos, de economia, administração, engenharia, medicina, previsão do tempo e outros da vida diária. Dante (2009, p. 22).

Em seu livro, A Arte de Resolver Problemas, Polya (1978) apresenta um descritivo, que segundo ele, propõe um roteiro específico na sua concepção de como resolver Problemas Matemáticos. Esse roteiro consiste de quatro fases: a compreensão do problema (o que se tem como dados; o que é que se quer encontrar); a elaboração de um plano (como os dados estão relacionados; como estão relacionados com a incógnita; e a execução de um plano com os dados que estão disponíveis inicia um caminho para chegar ao objeto a ser encontrado) e o retrospecto da resolução (rever o caminho utilizado e discutir sobre a solução alcançada, se foi boa ou se pode ser melhorada).

Outros pesquisadores, professores e amantes dessa técnica abordam outros aspectos. (TAO, 2008; DANTE, 2002, MALBA TAHAN, 1998; BOLT, 1992, STEWART, 2012). Portanto a literatura será fundamental nesse campo de investigação para dar destaque a alguns aspectos que serão discutidos nesse estudo.

Como quase tudo na vida é relativo a solução de problemas, entre eles os matemáticos, observa-se que entre os trabalhos dessa formulação de saberes que foram construídos e estão presentes na literatura para a metodologia de Resolução de Problemas, destaca-se Polya (1978) que inicia em seu livro A Arte de Resolver Problemas, com o seguinte esquema apresentado no Quadro 1:

Quadro 1 – Classificação de G. Polya para as etapas de Resolução de Problemas.

COMO RESOLVER UM PROBLEMA	
	COMPREENSAO DO PROBLEMA
Primeiro -É preciso compreender o problema.	*Qual é a incónita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?* É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditoria? Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?
	ESTABELECIMENTO DE UM PLANO
Segundo.- Encontre a conecção entre os dados e a incógnita. É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares, se não puder encontrar uma conecção imediata. É preciso chegar afinal a um plano para resolução.	*Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente diferente?* Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil? Considere a incógnita e procure pensar num problma conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante. *Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo?* É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a utilização? É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições. Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado. Até que ponto fica assimdeterminada a incónita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fique mais próximos entre si? Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicacadas no problema?
	EXECUÇÃO DO PLANO
Terceiro - Execute o seu plano.	Ao executar o seu plano de resolução, *verifique cada passo*. É possível verificar claramente claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?
	RETROSPECTO
Quarto - Examine a solução obtida.	É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isso num relance? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Polya (1978) se apoia nas indagações e sugestões citadas no texto do quadro 1 para auxiliar na resolução. Essa forma de organização preza por uma maneira mais eficiente, no sentido de levar o aluno a ser mais sistemático ao resolver o problema. Essa sistemática é um dos primeiros caminhos discutidos na literatura de Resolução de Problemas no campo da Educação Matemática.

Dependendo do nível de dificuldade do problema o professor, ao trabalhar essa técnica com o aluno, deve ter uma participação maior ou menor. O problema deve estar bem claro para não gerar dificuldade ou duplicidade de interpretação, a clareza é fundamental para o tipo de estratégia a ser utilizada ou como se deve iniciar a resolução. O auxílio do professor deve ser comedido de forma a fazer com que o aluno participe ativamente na resolução do problema, não podendo o professor auxiliar em demasiado para não ser o aluno um mero coadjuvante. Caso o professor deixe o aluno sem um auxílio adequado este sentir-se-á sem condições de enfrentá-lo sozinho, poderá sentir-se desestimulado e poderá, inclusive, desistir de encontrar uma resolução para o problema, pois é possível que não experimente nenhum progresso no processo de resolução do mesmo.

O professor deve estar atento às limitações do aluno, mas, mesmo assim, deve tentar levá-lo a progredir em sua tarefa, indicando caminhos, dando sugestões, pois, muitas vezes, o problema exige conhecimentos dos quais o aluno deveria ter previamente, caso o aluno não tenha, não é constrangedor pedir que o aluno revise os assuntos ou temas básicos que não foram apreendidos em séries anteriores.

De acordo com Tao (2013, p. 2)

> Perceber o problema. Que tipo de problema é esse? Há três tipos principais de problemas:
>
> - Questões do tipo mostre que ... ou calcule..., em que se deve provar que uma afirmação é verdadeira, ou manipular uma expressão para obter um certo resultado;
> - Questões do tipo encontre... ou encontre todos ..., em que se pede para determinar algum objeto (ou todos os objetos) satisfazendo certas condições;
> - Questão do tipo existe ou não..., em que se tem de provar uma afirmação ou fornecer um contra exemplo (e portanto num dos tipos anteriores).

Saber identificar cada uma das características acima é de vital importância para uma abordagem inicial. Pois, comumente, os problemas classificados por ele como de primeiro tipo, fornecem dados iniciais e a partir deles se deve chegar ao resultado. Outro aspecto discutido pelo autor é o processo de tentativa e erro característico no segundo tipo, pois, partindo de um palpite que dê uma ideia da solução, pode-se ir adequando e até modificando os requisitos até encontrar um caminho mais adequado para atingir o objetivo. O terceiro tipo, ainda segundo o autor é mais difícil que os outro dois tipos, pois primeiro tem-se que decidir se o objeto existe ou não, caso isso se confirme errado, o estudo pode se deparar com um absurdo. É possível que não se possa enquadrar claramente um problema em um dos três tipos citados acima, mas mesmo assim o formato geral da pergunta indica a estratégia a ser usada para buscar a solução do problema.

3.4 Atividades que envolvem Resolução de Problemas

Neste tópico apresentamos um descritivo dos modelos de projetos oficiais no incentivo a Resolução de Problemas, que estão sendo vivenciados atualmente no âmbito estadual e nacional, sejam em projetos ou pesquisas de pós-graduação.

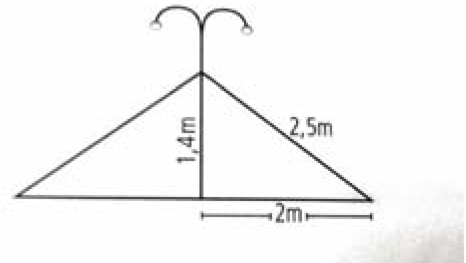
Como modelo preliminar de aplicação da Resolução de Problemas nos projetos nacionais, apresentamos primeiro lugar o projeto olimpíadas de matemática, proposto nas OBMEP. Posteriormente, em segundo lugar, a proposta de avaliação educacional apresentaremos o Provinha Brasil, como modelo de emprego de ações que valorizem a prática. Em terceiro lugar, apresentamos dois estudos de dissertação que tratam da Resolução de Problemas.

3.4.1 Estratégias no projeto OBMEP.

No modelo proposto pela OBMEP selecionamos duas questões trabalhadas e bastante discutidas nesse programa.

Problema 1. (Modelo de prova da 1ª OBMEP, 2005). Uma companhia de eletricidade instalou um poste em um terreno plano. Para fixar bem o poste, foram pregados cabos no poste a uma altura de 1,4 metros do solo e a 2 metros de distância do poste, sendo que um dos cabos mede 2,5 metros, conforme mostra a figura. Um professor de matemática após analisar estas medidas, afirmou que o poste não está perpendicular ao solo. Você acha que o professor está certo? Justifique sua resposta.

Figura 3



Solução: O fato de ser um professor de matemática a questionar se está ou não perpendicular ao solo nos sugere que houve algum cálculo para ele fazer tal afirmação.

Reportando as propostas de Polya (1978), qual seria a pergunta ou as perguntas que deveriam ser feitas? O que os dados sugerem? É de conhecimento prévio do aluno a existência de problemas correlatos? A figura sugere algo? Bem. Primeiro a figura sugere que para o poste ser perpendicular ao solo, este deve fazer com o terreno plano, como sugere a questão, um ângulo de 90^o. Como a figura mostra um triângulo, e dá às suas medidas, se supõe, então, um triângulo retângulo.

A pergunta agora é: este triângulo é de fato retângulo? O que comprovaria ou não esse fato? O teorema de Pitágoras é a ferramenta que vai dar essa resposta, pois o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos, isto é, os dados informados comprovariam que $(1,4)^2+(2,0)^2 = 5,96$ que deve ser equivalente a $(2,5)^2 = 6,25$, que é um absurdo, pois os valores da igualdade são diferentes. Caso o poste estivesse na vertical em relação ao solo o teorema de Pitágoras seria válido. Portanto, observa-se que os esquemas de Polya podem ser utilizados como forma de tratamento da questão. No entanto, quando se analisa o tipo de problema, evidencia-se que este se encontra na classificação de rotineiro, pois após identificar a lei de Pitágoras como o "caminho de solução", o estudante só terá que validar a questão, ou seja usar Pitágoras!

Problema 2. (OBM – 2004) A função f é da pela tabela a seguir.

x	1	2	3	4	5
f(x)	4	1	3	5	2

Por exemplo $f(2) = 1$. Quanto vale $f(f(f(...(f(4)...)))$? (O f da função se repete 2004 vezes).

Solução: usando a estratégia de "ataque" ao problema, como no livro de Tao, pode-se pensar: "este problema é do tipo: encontre, pois irá ser usada uma estratégia para encurtar caminho". O problema sugere que a resposta não deve estar tão longe, 2014 passos seria impraticável já que é um problema de olimpíada.

Não procurar-se-á determinar uma lei, não seria somente um o caminho possível ou provável para encontrar a resposta. Voltando a "lista" pode-se perguntar: "Quais são os dados?"; "Conhece um problema correlato?".

Observando, parece um problema de recorrência, pois partindo de um valor inicial pode-se chegar a um valor próximo, como a lei dos números naturais – a partir de um número eu tenho o seu sucessor, depois tenho o sucessor do sucessor, o sucessor do sucessor do sucessor, e assim por diante.

Observe $f(4) = 5$; $f(5) = f(f(4)) = 2$; $f(2) = f(f(f(4))) = 1$; $f(1) = f(f(f(f(4)))) = 4$; $f(4) = 5$: agora vai haver uma repetição de, 5, 2, 1, 4, 5, ... e assim por diante. Já, sim, se pôde observar problemas desse tipo no Fundamental e no Médio (livro de Giovanni, Giovanni Jr – 5ª série) e em questões do Ensino Médio, onde se estudam as sequências.

Bem, agora é só determinar uma lei para essa sequência e prever o valor numérico do 2004º termo da sequência. Seja a sequência (5, 2, 1, 4, 5, 2, 1, 4, ...). Observe que o 4º termo é igual ao 8º termo, poderá ser visto que o 12º termo também é igual a 4. Logo observa-se que todos os termos, cuja posição na sequência é múltiplo de quatro, são iguais a quatro.

Como 2004 é múltiplo de 4 a resposta a questão é 4 (quatro).

3.4.2 Tipos de problemas abordados na proposta de avaliação do Provinha Brasil

O projeto Provinha Brasil é uma avaliação diagnóstica que visa investigar as habilidades desenvolvidas pelas crianças matriculadas no 2º ano do ensino fundamental das escolas públicas brasileiras. Trata-se de um instrumento de avaliação aplicado no início e no término do ano letivo, com a finalidade de auxiliar professores e gestores a monitorarem os processos de desenvolvimento da alfabetização oferecida nas escolas públicas brasileiras.

Esta primeira edição, a ser efetuada no início do ano letivo, tem como principal objetivo realizar o diagnóstico dos níveis de alfabetização dos alunos após um ano de estudos no ensino fundamental, de maneira que as informações resultantes possam auxiliar o trabalho do professor e dos gestores ao longo do ano. A segunda edição, que é realizada no final do ano letivo, possibilita, por sua vez, uma comparação com os resultados obtidos neste primeiro momento da avaliação. Nesse contexto, os objetivos da primeira edição da Provinha são

Quadro 2 - Indicadores do provinha Brasil

i)	avaliar o nível de alfabetização dos alunos no início do segundo ano de escolarização;
ii)	aperfeiçoar os planejamentos e a execução das práticas pedagógicas a partir do diagnóstico do nível de alfabetização dos alunos; e
iii)	oferecer subsídios para a formulação de políticas de alfabetização. A Provinha Brasil deve ser aplicada a todos os alunos matriculados no segundo ano do ensino fundamental. Assim, a definição dos alunos que farão o teste independe da trajetória escolar individual. O foco da avaliação está na contribuição da educação formal para a alfabetização.

Fontes: portal.inep.gov.br/provinha-brasil e provinhabrasil.inep.gov.br/provinhabrasil/

Na prova modelo do 5º ano (Bloco 02) da proposta de avaliação do projeto Provinha Brasil são selecionados os problemas 3 e 4, os quais serão discutidos a seguir:

Problema 3. Pedro adubou 3/4 de sua horta. A parte da horta adubada por Pedro corresponde a:

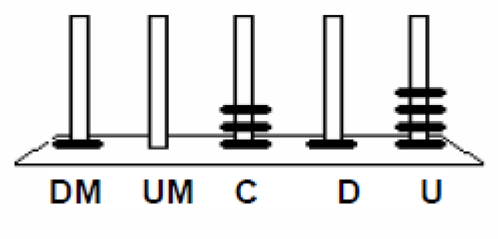
(A) 10%. (B) 30%. (C) 40%. (D) 75%

Resolução: A proposta é deixar livre a escolha do caminho a ser percorrido pelo aluno para chegar à solução. Inicialmente o aluno precisa compreender o problema, ter clareza do que é necessário para resolvê-lo. Algumas questões são relevantes e devem ser reflexionadas: Quais são os dados do problema? Qual a condicionante? Qual a incógnita? O aluno já viu ou resolveu anteriormente uma questão semelhante?

Ao procurar a solução, o aluno pode variar a forma de atacar o problema. Uma possibilidade é o mesmo dividir a fração e achar o número decimal $0,75$ e a este faria correr a vírgula duas casas para a direita e colocaria o símbolo de porcentagem (explicaria que multiplicou pelo número cem o número decimal), encontrando corretamente 75%. Outra possibilidade seria o aluno relacionar que cada quarto de um todo corresponde a 25%, logo três quartos seria multiplicar 25% por três e encontrar a resposta correta. Letra (D).

Problema 4. No ábaco apresentado na figura abaixo, Cristina representou um número:

Figura 4 – Ábaco (tipo aberto)



Fonte: http://provinhabrasil.inep.gov.br/provinhabrasil/#/

Qual foi o número representado por Cristina?

(A) 1.314 (B) 4.131 (C) 10.314 (D) 41.301

Resolução: O professor deve previamente explorar em sala de aula situações de ensino que envolva o ábaco mostrando como manuseá-lo. Nos primeiros anos do ensino fundamental essa abordagem deve ser sugerida na escola para valorizar o ensino do sistema de numeração decimal posicional, no qual existe uma compreensão a ser vivenciada sobre os valores absolutos e os valores relativos de cada algarismo em relação à posição que ocupa em um número decimal, que da direita para a esquerda estão representando as classes da unidade, da dezena, da centena, do milhar e da dezena de milhar. Nessas condições o estudante poderá entender e relacionar que cada peça do ábaco corresponde a uma unidade na classe em que a peça se encontra, ou seja, que o ábaco terá quatro peças no pino que representa a unidade, uma peça na "varinha" da dezena, três peças na da centena, nenhuma na da unidade de milhar e uma na dezena de milhar. Associando a um número uma dezena de milhar, zero milhar, três centenas, uma dezena e quatro unidades. Essa é a forma que deve-se ensinar os números, no sistema decimal, assim o estudados marcará corretamente a resposta \10.314" unidades. Letra (C).

3.4.3 Problemas abordados em pesquisas de pós-graduação no Brasil

Em estudos realizados no Brasil, foram selecionados dois trabalhos de dissertação para apresentar como estão sendo exploradas as proposta que buscam entender as atividades de Resolução de Problemas nos trabalhos de conclusão de pós-graduação.

Como primeira análise, foi elegida a Dissertação de Ivan Cruz Rodrigues, intitulada: **Resolução de Problemas em aulas de matemática para alunos de 1ª a 4ª séries do Ensino Fundamental e a Atuação do Professor**. Defendida no Mestrado Profissional em Ensino de Matemática na PUC/SP – São Paulo, 2006

Rodrigues (2006) explorou alguns problemas, entre os quais, foram selecionados dois para discutir:

Problema 1 - *Ontem, quando meu irmão chegou da escola, ele comeu a metade da barra de chocolate que minha mãe tinha comprado. Depois que eu almocei, dividi o pedaço que sobrou em quatro pedaços iguais e comi três deles. Qual fração representa a quantidade de chocolate que eu comi?*

a) *em relação ao pedaço que havia?*

b) *em relação à barra inteira?*

Comentários: Deve-se deixar que o aluno encontre o seu próprio caminho para resolver esse tipo de problema, não existe um algoritmo que determine o resultado de imediato. O aluno tem que passar por etapas, encontrar a metade e depois a quarta parte da metade. A comparação pedida no item (a) será praticamente imediata, basta entender que ele comeu três de um total de quatro, mas a pedida no item (b) o aluno terá que verificar que a metade gerou quatro pedaços iguais, logo a comparação é com o dobro das quatro partes que ele dividiu. Encontrará 3/4 (três para quatro) e 3/8 (três para oito) respectivamente.

Problema 2 - *Um homem entra numa tabacaria e compra um charuto por 2 reais. Ele dá uma nota de 5 reais para pagar a conta, mas o dono da loja não tem troco e vai ao vizinho, que lhe troca essa nota por outras cinco de 1 real. O freguês saiu levando o charuto e 3 reais de troco. Uma hora mais tarde, vem o vizinho correndo reclamar que a nota de 5 reais era falsa. O dono da tabacaria lhe dá imediatamente outra nota de 5 reais. Quanto o dono da tabacaria perdeu em dinheiro e em mercadoria?"*

Comentários: O aluno perceberá que as operações que são necessárias são a adição e a subtração. Caso seja necessário, isto é, somente em casos em que o aluno que tiver dificuldade para iniciar a resolução, o professor poderá auxiliar na leitura, pois o aluno é jogado para dois agentes que afetam negativamente o dono da tabacaria: o homem que comprou o charuto e o comerciante vizinho. O comprador que levou o charuto levou três reais do dono da tabacaria e o vizinho pegou os cinco reais de volta, pois alegou que a nota de cinco reais era falsa. O dono da tabacaria perdeu três reais mais cinco reais em dinheiro e um charuto de dois reais em mercadoria. Total dez reais.

Como segunda análise, foi escolhida a dissertação de Wilton N. Milani, intitulada: **A Resolução de Problemas Como Ferramenta Para a Aprendizagem de Progressões Aritméticas e Geométricas no ensino Médio**. Dissertação defendida na Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG – 2011.

Aqui, também, foram selecionados dois problemas trabalhados por Milani (2011) para discutir:

Problema 1: A corrida de São Silvestre é disputada tradicionalmente no dia 31 de dezembro na cidade de São Paulo. São 15 quilômetros de percurso, muitas vezes sob forte calor. E se você decidisse participar da São Silvestre? Para chegar a correr 15 quilômetros, seria prudente fazer um programa de treinamento: começar correndo uma distância pequena e depois ir aos poucos aumentando o percurso até completar os 15 km. Poderíamos pensar no seguinte programa: 1ª semana: correr 600 metros por dia. 2ª semana: correr 1000 metros por dia 3ª semana: correr 1400 metros por dia e assim por diante.

a) Quantos quilômetros você estaria correndo na 12ª semana?

b) Quantos quilômetros você estaria correndo na 30ª semana?

c) Em que semana você atingiria os 15 000 metros do percurso?

Comentários: O professor deve deixar o aluno livre para escolher seu próprio caminho. O aluno observa que o crescimento é constante e que a partir da segunda semana há um incremento de 400 metros, na terceira semana o mesmo incremento se repete. Isso vai se repetindo semana a semana. Utilizando a “lista” do **Quadro 1** das etapas da resolução proposta por Polya (1978), pode-se chegar às seguintes indagações: Qual é a condicionante? Já viu o mesmo problema apresentado de forma ligeiramente diferente? Observa-se, por fim, uma parte fixa e outra variável e que varia uniformemente como o problema da cobrança em uma corrida de táxi. O professor pode ajudar a reunir as informações já obtidas pelo aluno tabelando os valores nas primeiras semanas e ajudando a encontrar uma lei que relacione o espaço em metros ao tempo em semanas. A contagem termo a termo é impraticável para valores muito altos. Uma lei que relaciona semanas a distância percorrida semanalmente $D = (n–1)x400 + 600$, onde D é a distância percorrida semanalmente e n a respectiva semana. Pode-se trabalhar a fórmula para o item (c), mas, como o limite é 15.000 metros, pode acontecer de algum aluno usar a tentativa e depois fazer os ajustes necessários para chegar ao valor exato de semanas: divide-se 15000 por 400 e encontra-se, então, como quociente 37 e com resto 200 metros. São 36 semanas, o que equivale a correr diariamente 14.400 metros mais os 600 metros da primeira semana, se obtém, finalmente 15.000 metros. Encontrará para os itens (a), (b) e (c), respectivamente, 5.000 metros; 12.200 metros e 36 semanas.

Problema 2: Uma pessoa compra um carro, devendo pagá-lo, em prestações mensais, durante 6 anos. As prestações pagas em um mesmo ano são iguais, sendo de R$ 500,00 o valor da primeira prestação, paga em janeiro. A cada ano, a prestação sofre um aumento de 10%, em relação à do ano anterior. Sendo assim, calcule o valor da prestação mensal, no último ano.
Comentários: Caso o aluno tenha alguma dificuldade em iniciar a resolução do problema, cabe ao professor auxiliar o aluno, de modo que o segundo possa compreender o problema, consiga organizar os dados, determinando qual a relevância desses dados, consiga identificar a incógnita ou até relaciona essa questão a algum problema que ele já tenha visto ou resolvido previamente.

Uma forma de visualizar um problema desse tipo é elaborar uma tabela com os seus valores, descobrir de que forma as prestações vão aumentando anualmente. O aluno deve perceber que o crescimento neste problema é diferente do crescimento do problema anterior. Um problema correlato seria um problema de juros composto. Pode-se analisar se o aluno relaciona este caso a alguma lei que conhece. Neste caso, poderia encontrar uma lei, observando que $P_2 = P_1 + (0,1)\text{x}P_1$ ou $P_2 = P_1\text{x}(1,1)$, $P_3 = P_1\text{x}(1,1)^2$, $P_4 = P_1\text{x}(1,1)^3$, e assim até P6. Tabelando o crescimento das prestações pode-se obter:

Ano	1	2	3	4	5	6
Prestação	500	550	605	665,5	732,05	805,25
Acréscimo (10%)	50	55	60,5	66,55	73,20	

Obs.: Os valores batem entre si. $P_6 = 500\text{x}(1,1)^5 = 805,255$.

3.5 Características do desenvolvimento da Metodologia de Resolução de Problemas.

O nosso estudo, que busca identificar as habilidades dos estudantes na Resolução de Problemas não se aprofundará nas discussões de como vem se construindo tal metodologia, como fundamento, apenas levantaremos alguns pontos que nos favorece na pesquisa, com destaque para o trabalho de alguns pesquisadores e sobre o processo de abordagem do tipo de problema.

A concepção de Resolução de Problemas como metodologia de ensino-aprendizagem é bem recente na educação matemática. Essa prática trouxe a ênfase sobre o uso em problemas gerais e do cotidiano. De modo que, passou a ser discutida por vários pesquisadores (ONUCHIC, 1999; ALLEVATO, 2005; KLINE, 1976; SMOLE e CENTURION, 1992). A partir das discussões e pesquisas geradas sobre essa proposta, foi enfatizada como metodologia nos PCN (BRASIL, 1998), passando a ter status de destaque para o ensino, pois permitia tratar desde conceitos básicos da matemática a procedimentos específicos de diversos tópicos, além de abranger diversos processos didáticos. Dessa forma, hoje, é considerada como uma metodologia bastante agradável aos professores e estudantes.

O reconhecimento da proposta de Metodologia de Resolução de Problemas nos últimos anos, com sua importância para o ensino aprendizagem, também tem destaque nas recomendações do NCTM (1980) e aparece de modo característico em várias atividades apresentadas nos livros didáticos (PNLD). Ela também vem sendo valorizada nos vários modelos de olimpíadas de matemática. Portanto, é notável a notoriedade do emprego dessa técnica metodológica que ganhou uma frequência de uso no ensino de matemática, e, além disso, reforçou o status de metodologia de ensino.

Um fato a se destacar é que essa metodologia ganhou relevância a partir dos estudos e esquemas traçados por George Polya (ano), no livro How To Solve It – quando preocupado com uma boa estratégia para solucionar um problema de matemática –, apresentou um grupo de informações e instruções que se tornou referência a partir do ano de 1945. Posteriormente, outras literaturas foram surgindo para reforçar e validar tal estratégia que hoje é considerada uma metodologia de ensino de matemática. Um dos pontos a se destacar é apontado por Stanic e Kilpatric (1989, p.1), quando destacam o documento do NTCM (1980).

> Os problemas ocupam um lugar central nos currículos desde a antiguidade, mas a Resolução de Problemas não. Só recentemente apareceram educadores matemáticos aceitando a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de Resolução de Problemas merece especial atenção. Nesta focagem sobre a Resolução de Problemas tem havido confusão. O termo Resolução de Problemas transformou-se num slogan englobando diferentes visões da educação, da escolaridade, da Matemática e das razões porque devemos ensinar Matemática em geral e Resolução de Problemas em particular. Esta confusão é exemplificada na Agenda para a acção do National Council of Teachers of Mathematics (1980), que propõe que a "Resolução de Problemas deve ser o foco da Matemática escolar" (p. 1). Na Agenda, a Resolução de Problemas é caracterizada como uma das dez "áreas de capacidades básicas2". A Agenda assume que há uma relação direta entre a Resolução de Problemas, nas aulas de Matemática e a Resolução de Problemas noutras partes da nossa vida. Não há uma clarificação adequada do que é Resolução de Problemas, porque deveremos fazê-la ou que posição assume no contexto histórico.

Outro ponto importante relativo à metodologia de Resolução de Problemas é a discussão levantada por Conejo e Ortega (2013, p. 30), no qual destaca-se o início em que se deu importância a essa técnica, citando que:

> [...] desde o final da década de 1980, com a publicação dos Padrões Curriculares pelo Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM) em 1989, as competições PISA (OCDE, 1999) e o Projeto dinamarquês KOM (DKP) de 1999 (Niss, 2002), a RP voltou a aumentar o interesse neste tópico, especialmente com a publicação dos resultados do PISA 2003, onde os quadros teóricos do projeto são descritos e as competências matemáticas que devem ser publicadas com maior ênfase são republicadas. Adquirido por estudantes nesses níveis educacionais, um dos quais é criar e resolver problemas.

> Seguindo o modelo PISA, a RP foi incluído nos diferentes quadros curriculares, não apenas como metodologia de ensino para aprender matemática, mas como um conteúdo em si, inclusive no currículo espanhol de matemática.

O levantamento de tais questões é importante por se discutir não só o caminho que levou ao tratamento da Resolução de Problemas (como dado histórico da educação matemática, através do seu emprego), como também é importante por valorizar as competências que os estudantes adquirem quando estão envolvidos em situações de Resolução de Problemas e, nesse caso, é significante que o tipo de problema seja também estudado como recurso para valorizar essa nova metodologia de aprendizagem.

No atual estudo, busca-se enriquecer as discussões referentes à Resolução de Problemas apresentando as caracterizações estabelecidas para alguns tipos de problemas formulados por diversos pesquisadores ao longo dos anos. Essas caracterizações dos problemas são discutidas no campo da Educação Matemática.

Como primeiro destaque, cita-se que:

- Polya (1978) traz uma boa discussão, que já está descrita nesta dissertação, na pág. 11 do estudo, na qual o matemático procurou organizar as etapas necessárias para se chegar a um caminho lógico de solução de um problema matemático.
- Schoenfeld (1996), também trabalha nesse sentido abordado por Polya quando defende algumas etapas que devem ser trabalhadas para o bom desenvolvimento da técnica de solução de um problema, que, no corrente estudo, já está relatado, na página 17.
- Arsac et al (1991), Câmara (2002) exploram um tipo característico de problema que é chamado por eles de **problema aberto**. Nascimento (2007, p. 91) enfatiza que "nesse tipo de problema o aluno fica livre para decidir as estratégias de resolução e os conhecimentos matemáticos a utilizar" Como também Medeiros (2001, p. 34), abre uma discussão enfatizando que "Os problemas abertos têm uma característica importante que é a de evitar as regras de contrato didático estabelecidas"
- Nascimento (2007) elaborou um tipo de problema que definiu como **problema completamente aberto**, caracterizado por necessitar de elementos construtores que

serão gerados pelo sujeito que deve solucioná-lo. Sua descrição é observada por:

> Consideramos um problema completamente aberto como aquele que congrega os mesmos objetivos do problema aberto (ARSAC et. al., 1991), acrescentando a esses objetivos, a necessidade de decidir pelos elementos construtores (grandezas envolvidas, Intervalos e valores que podem ser definidos para as grandezas, a composição das variáveis e o tratamento que se faz das mesmas, a seleção do campo de conhecimento e a delimitação do alcance quanto à aplicação do conhecimento envolvido), de forma a dar um sentido de resolução matemática (torná-lo equacionável) ao mesmo. Geralmente esse tipo de problema não é comum no ensino, pois são trabalhados em situações de modelagem matemática, por exigirem as etapas características dessa metodologia de ensino. Ainda podemos destacar que eles propõem uma pré-quebra de contrato, ao deixarem livre o aluno quanto a decisões que serão tomadas para sua solução. (NASCIMENTO, 2007, p. 94).

- Medeiros (2001, p.32), caracteriza os **problemas fechados** como aqueles que são "resolvidos por meio de procedimentos padronizados, [...] conhecidos também como problema-padrão ou problema clássico de matemática". Medeiros também discute, com base em outros pesquisadores, que esse tipo de problema limita a criatividade do aluno pelo motivo de apresentar-se fechado, isto é, tem certas características que podem gerar verdadeiras regras de contrato didático. (ALMOULOUD, 1997; SMOLE, 1996; LOPES et al., 1994; FRANCHI, 1994; BULLY et al., 1995) Apud Medeiros (2001, p. 33).

- Dante (2009, p. 24-28) quando se refere aos vários tipos de problemas, os separa em seis tipos:

> <u>Exercícios de reconhecimento</u> - Neste o aluno é levado a reconhecer, identificar ou lembrar um fato específico, uma definição, uma propriedade, etc.

Exercícios de algoritmos - Nesses os alunos são levados a seguir passo a passo executando algoritmos conhecidos como: adição, subtração, multiplicação e divisão de inteiros.

Problemas padrão - Sua resolução envolve a aplicação direta de um ou mais algoritmos aprendidos anteriormente e não exige nenhuma estratégia. O objetivo desses problemas é recordar e fixar os fatos básicos por meio dos algoritmos. (Podendo ser simples: resolvidos com uma única operação, ou compostos, resolvidos com mais de uma operação). De um modo geral, eles não aguçam a curiosidade do aluno nem o desafiam.

Problemas-processo ou heurísticos - Esse tipo de problema exige do aluno tempo para que o aluno elabore uma estratégia, um plano de ação para chegar a solução. Tornando-se mais interessante que os problemas-padrão. Esses tipos de problemas aguçam a curiosidade do aluno e permitem que ele desenvolva a criatividade, a iniciativa e o espírito explorador. É preciso testar a estratégia para verificar se chegou a solução correta.

Problemas de aplicação - Também chamados de *situações-problemas contextualizadas* por retratar problemas do dia a dia e que exigem pesquisas e levantamentos de dados para a organização de tabelas, gráficos e uso da matemática para serem resolvidos. Podem ser apresentados em forma de projetos a serem desenvolvidos usando conhecimentos e princípios de outras áreas de conhecimento.

Problemas de quebra-cabeças - São problemas que envolvem e desafiam os alunos. Geralmente constituem a chamada matemática recreativa, e sua solução depende, quase sempre, de um golpe de sorte ou da facilidade de perceber algum truque, alguma regularidade, que é a chave da solução.

- Abrantes (1989), em seu artigo "Um (bom) problema (não) é (só)...", publicado na revista Educação e Matemática, 8, 7-10 e 35. Portugal, traz uma importante definição de Kantowski (1981): "Um problema é uma situação que difere de um exercício pelo fato de o aluno não dispor de um procedimento ou algoritmo que conduzirá com certeza a uma solução".

- Conejo e Ortega (2013, p. 149-150), apresentam um quadro, o qual contém uma ampliação e reformulação de outra tabela sobre tipos de problemas discutidos por Borasi (1986). Como apresentada na figura a seguir.

Figura 5 – Tabela de tipos de problemas reformulada por Conejo e Ortega

Cuadro 3 Ampliación y reformulación de la tabla de Borasi sobre los tipos de problemas

Tipos de problemas	Elementos estructurales			
	Contexto	**Formulación**	**Soluciones**	**Método**
Ejercicio	Inexistente	Única y explícita	Única y exacta	Aplicación inmediata de algoritmos conocidos. Están implícitos en el enunciado.
Ejercicio contextualizado	Contexto matemático. Implícito en el texto	Única y explícita	Única y exacta	Aplicación inmediata de contenidos no implícitos en el enunciado.
Problema contextualizado	Contexto matemático. Implícito en el texto	Única o con varias alternativas	Única o varias	Combinación de etapas calculando incógnitas intermedias, creación de problemas.
Ejercicio con texto	Contexto explícito, no necesariamente matemático	Única y explícita	Única y exacta	Aplicación inmediata de contenidos no implícitos en el enunciado.
Problema con texto	Contexto explícito, no necesariamente matemático	Única o con varias alternativas	Única o varias	Combinación de etapas calculando incógnitas intermedias, creación de problemas.
Puzzle	Explícito en el texto	Única y explícita	Única y exacta	Elaboración de un nuevo algoritmo. Acto de ingenio.
Prueba de una conjetura	Explícito en el texto sólo de forma parcial, teorías conocidas son asumidas	Única y explícita	Por lo general única, pero no necesariamente	Exploración del contexto, reformulación, elaboración de nuevos algoritmos.
Problemas de la vida real	Explícito en el texto sólo de forma parcial	Parcialmente dada. Algunas alternativas posibles	Muchas posibles, de forma aproximada	Exploración del contexto, reformulación, creación de un modelo.
Situación problemática	Sólo parcial en el texto, problemática	Implícita, se sugieren varias problemáticas	Varias. Puede darse una explícita	Exploración del contexto, reformulación, plantear el problema.
Situación	Sólo parcial en el texto, no problemática	Inexistente, ni siquiera implícitamente	Creación del problema	Formulación del problema.

Fonte: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262013000300006

Para o desenvolvimento desta pesquisa utilizam-se problemas do tipo "aberto", mas com algumas modificações. Procurou-se não fornecer pistas ao processo de solução, deixando o aluno livre para tomar decisões quanto aos conhecimentos envolvidos e que poderiam ser observados nos mesmos, como por exemplo, o problema 1, que tem características especiais por conter noções de Número, de Medida e de Geometria incorporados na mesma questão. Já o problema 2, tem a recusa de não se poder usar um saber essencial a sua solução que é a Trigonometria.

Capítulo 4

METODOLOGIA

O ambiente do estudo.

Foram dois os ambientes de aplicação do teste de coleta de dados. O IFPE - Instituto Federal de Pernambuco/Recife, e a UFRPE -Universidade Federal de Pernambuco). O Instituto Federal comporta três níveis de ensino: o Técnico Integrado, onde é vivenciado o ensino técnico conjuntamente com o Ensino Médio, o ensino técnico, para alunos que já concluíram o ensino médio, e o Ensino Superior.

A UFRPE é uma universidade situada em Recife que comporta vários cursos de graduação em várias áreas do conhecimento humano. Os problemas escolhidos foram aplicados para os alunos no Departamento de Matemática situado no prédio do CEGEN (Centro de Ensino de Graduação em Exatas e da Natureza).

Sujeitos

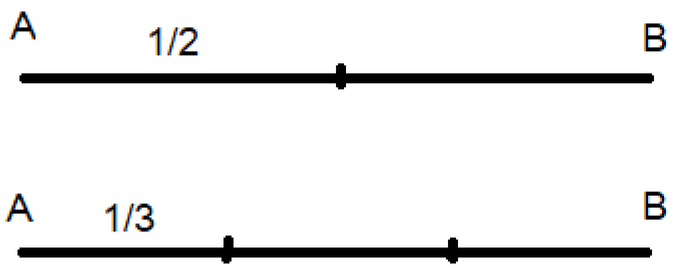
A pesquisa foi realizada com 44 (quarenta e quatro) alunos de duas instituições, sendo 15 (quinze) alunos de uma turma do curso técnico em Eletrônica do IFPE - Instituto Federal de Pernambuco do Recife, e mais 29 (vinte e nove) alunos da UFRPE – Universidade Federal Rural de Pernambuco, onde haviam 15 (quinze) alunos do 2º período e 14 (quatorze) alunos do 3º período do curso de Licenciatura em Matemática.

A escolha por dois ambientes de coleta foi no sentido de acompanhar a evolução no nível que vai do pós-médio até a graduação.

A coleta ocorreu no ambiente escolar do aluno, isto é, em suas próprias salas de aula e em seu horário regular por seus professores. Os resultados foram analisados e organizados em dois modelos: análise quantitativa e análise qualitativa.

4.1 As questões aplicadas.

Problema 1: Na figura abaixo, um mesmo segmento AB foi dividido de duas maneiras, na primeira em duas partes iguais e na segunda em três partes iguais (como representado na figura abaixo). Queremos saber quanto do tamanho de 1/3 cabe exatamente no tamanho 1/2 desse mesmo segmento? **Explique sua resposta, que saber matemático se está utilizando nessa questão? Apresente anotações e cálculos.**



Problema 2: Dois lados de um paralelogramo medem 4 cm e 6 cm e formam um ângulo de 60°. Determine a área desse paralelogramo. **Obs. Você não pode usar trigonometria, ou seja, compreensão de seno e cosseno.**

As questões utilizadas no teste tinham por objetivo verificar que problemas não rotineiros, baseados em tópicos da matemática básica, podem ser importantes para que o professor perceba a falta de alguns conceitos necessários, mas que habitualmente ficam de fora em muitas questões vivenciadas na sala de aula. As questões não comuns precisam ser reforçadas na escola por meio de situações-problema, que os estudantes de qualquer nível de ensino precisam validar. Esse tipo de proposta enriquece a técnica de Resolução de Problemas, pois coloca em evidência a necessidade do entendimento matemático.

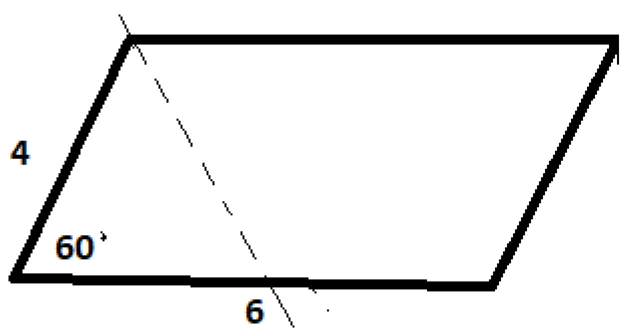
Como antecipação do grupo de respostas possíveis, apresentamos algumas possibilidades que levam a respostas para as questões trabalhadas.

Problema 1

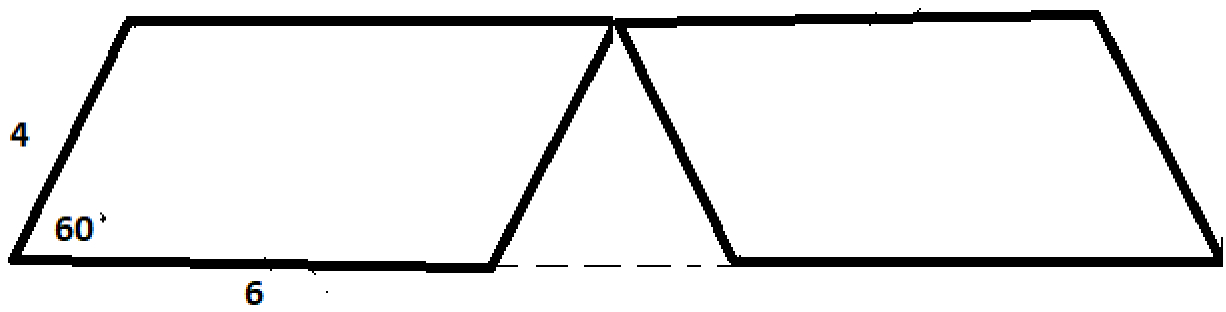
- Divisão numérica $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$
- Produto do complemento que falta $X.\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$, para atingir a medida final, resultando na expressão: $X = \frac{1}{2}/\frac{1}{3}$
- Compreensão do valor que falto por meio de comparação da extensão das medidas oferecidas, equivalência. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Longrightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
- Proporcionalidade $\frac{1}{2}.X = \frac{1}{3}.Y$
- Comparação por porcentagem $\frac{1}{2} \rightarrow 100\% \cdot \frac{1}{3} \rightarrow X$

Problema 2

- Pela propriedade do paralelogramo, o somatório dos ângulos internos é 360o. Dessa forma, temos que um dos os ângulos da base está definido, pois foi dado como 60° , logo o outro será 120°. Consequentemente os correspondentes também estarão definidos. Ao traçar a bissetriz do ângulo superior à esquerda, define-se um triângulo equilátero de lado igual a 4. Daí se encontra a altura desse triângulo usando o teorema de pitágoras.



- Por simetria, se invertemos verticalmente um mesmo paralelogramo congruente e ajustarmos de acordo com a forma abaixo, também chegamos a um triângulo equilátero de lado igual a 4. Consequentemente, usando pitágoras chegamos a altura do paralelogramo.



Capítulo 5

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste tópico apresenta-se as resoluções das questões problemas efetuadas pelos estudantes, em cada ambiente institucional selecionado IFPE e UFRPE.

Primeiramente foram trabalhadas as turmas com os estudantes do IFPE e, logo em seguida, as turmas com os estudantes da UFRPE.

O processo de análises será baseado em dois tipos: análise quantitativa e análise qualitativa, visto que o intuito é observar a proposta de Resolução de Problemas como um processo científico de ensino de matemática e também visualizar a importância desse método como instrumento de análise do professor para as aprendizagens dos alunos.

5.1 Análise Quantitativa

Na análise QUANTITATIVA o estudo deteve-se a observar as informações do quantitativo percentual de erro e acerto dos estudantes. Os comentários irão focar nos escores atingidos e no que isso representa em cada caso de Acerto, Acerto parcial e Erro.

Considera-se <u>Acerto</u> a resposta do aluno que atingiu o objetivo de 100% da questão como correta, com apresentação de dados da resolução da questão. Considera-se <u>Acerto parcial</u> quando o aluno chega a identificar todos os dados, apresenta rascunho de resolução e chega a entender a resposta, mas não a apresenta, ou seja, apresenta uma forma próxima da mesma. Considera-se como <u>Erro</u> a resposta do aluno que não se aproxima de um cálculo que possa dar alguma sustentação para se chegar a resposta, ou ainda, que a deixe em branco.

Quadro 1 - Dados quantitativos dos percentuais de resolução dos estudantes para questão 1.

GRUPO DO IFPE - PROBLEMA 1		
	FREQUÊNCIA	FREQ. PERCENTUAL %
Não responderam	0	0
Acertos	8	53
Acertos parciais *	2	13
Erros	5	33
Total de alunos	15	100

Fonte: elaborado pelo próprio autor

De acordo com o quadro 1 os resultados indicam que todos os 15 (quinze) estudantes do IFPE buscaram resolver a questão 1. Na qual se observa que:

- Oito alunos acertaram completamente a questão – correspondendo a 53,33%
- Dois alunos tiveram acerto parcial – correspondendo a 13,33%
- Cinco alunos erraram completamente a questão – correspondendo a 33,34%

Tais resultados indicam que a questão 1, apesar de ser bastante simples, para o nível de escolaridade dos estudantes, por envolver um tópico comparação da medida de dois segmentos, é ainda um conhecimento com grau de dificuldade para estudantes de cursos técnicos, pois, se somados acertos parciais e erros, obtém-se 7 (sete) alunos que não chegaram a resposta correta (correspondendo a 46% dos estudantes).

Quadro 2 - Dados quantitativos dos percentuais de resolução dos estudantes para questão 2.

GRUPO DO IFPE - PROBLEMA 2		
	FREQUÊNCIA	FREQ. PERCENTUAL %
Não responderam	1	6,67
Acertos	0	0
Acertos parciais *	0	0
Erros	14	93,33
Total de alunos	15	100

Fonte: elaborado pelo próprio autor

De acordo com o quadro 2, os resultados indicam que dos 15 estudantes do IFPE 14 buscaram resolver a questão 2. Na qual se observa que:

- Um aluno não respondeu – correspondendo a 6,67%
- Nenhum aluno acertou ou acertou parcialmente a questão – correspondendo a 0%
- Quatorze alunos erraram a questão – correspondendo a 93,33%

Tais resultados indicam que a questão 2, que pode ser considerada simples para o nível dos estudantes investigados, não encontrou nos saberes prévios, relativos a geometria, dos mesmos, um caminho adequado para solução. Pode-se reconhecer que o tema polígonos precisa ser melhor vivenciado pelos professores desde o ensino fundamental, pois se mostrou um conhecimento com um alto grau de dificuldade, considerando o fato de que nenhum dos alunos investigados conseguiu chegar a resposta correta.

Quadro 3 - Dados quantitativos dos percentuais de resolução dos estudantes para questão 1.

GRUPO DO 2º PERÍODO UFRPE - PROBLEMA 1		
	FREQUÊNCIA	FREQ. PERCENTUAL %
Não responderam	0	0
Acertos	7	46,67
Acertos parciais *	3	20
Erros	5	33,33
Total de alunos	15	100

Fonte: elaborado pelo próprio autor

De acordo com o quadro 3, os resultados indicam que todos os 14 (quatorze) estudantes do 2º período da UFRPE buscaram resolver a questão 1. Na qual se observa que:

- Sete alunos acertaram completamente a questão – correspondendo a 46,6%
- Três alunos tiveram acerto parcial – correspondendo a 20%
- Cinco alunos erraram completamente a questão – correspondendo a 33,3%

Os resultados mostram que também foi baixo índice de acerto dos estudantes da UFRPE. Nota-se que o fenômeno anteriormente constatado voltou a se repetir e parece ser comum nesse nível de escolaridade.

Percebe-se que entre os acertos parciais e os erros, cerca de 53% dos alunos que não chegaram à resposta correta.

Quadro 4: Dados quantitativos dos percentuais de resolução dos estudantes para questão 2.

GRUPO DO 2º PERÍODO UFRPE - PROBLEMA 2		
	FREQUÊNCIA	FREQ. PERCENTUAL %
Não responderam	1	6,67
Acertos	0	0
Acertos parciais *	0	0
Erros	14	93,33
Total de alunos	15	100

Fonte: elaborado pelo próprio autor

De acordo com o quadro 4, os resultados indicam que dos 15 estudantes da UFRPE, 14 buscaram resolver a questão 2. No qual se observa que:

- Um aluno não respondeu – correspondendo a 6,67%
- Nenhum aluno acertou ou acertou parcialmente a questão – correspondendo a 0%
- Quatorze alunos erraram a questão – correspondendo a 93,33%

Tais resultados indicam que a questão 2, mostrou não ser comum também para os estudantes do segundo período do curso de licenciatura em matemática da UFRPE, pois a dificuldade foi a mesma em relação aos estudantes do IFPE.

Quadro 5: Dados quantitativos dos percentuais de resolução dos estudantes para questão 1.

GRUPO DO 3º PERÍODO UFRPE - PROBLEMA 1		
	FREQUÊNCIA	FREQ. PERCENTUAL %
Não responderam	1	7,1
Acertos	10	71,5
Acertos parciais *	1	7,1
Erros	2	14,3
Total de alunos	14	100

Fonte: elaborado pelo próprio autor

De acordo com o quadro 5, os resultados indicam que todos os 14 (quatorze) estudantes do 3º período da UFRPE buscaram resolver a questão 1. Na qual se observa que:

- Dez alunos acertaram completamente a questão – correspondendo a 71,5%
- Um aluno acertou parcialmente a questão – correspondendo a 7,1%
- Dois alunos erraram completamente a questão – correspondendo a 14,3%

Os resultados observados na questão mostraram que o saber matemático utilizado foi simples, por envolver um tópico trabalhado em níveis anteriores, que é a comparação de medidas de dois segmentos, para o nível de escolaridade da maioria desses estudantes e, mesmo assim, o número de acertos do problema gerou um total de 10 (dez) alunos que chegaram à resposta correta.

Quadro 6: Dados quantitativos dos percentuais de resolução dos estudantes para questão 2.

GRUPO DO 3º PERÍODO UFRPE - PROBLEMA 2		
	FREQUÊNCIA	FREQ. PERCENTUAL %
Não responderam	1	7,14
Acertos	0	0
Acertos parciais *	0	0
Erros	13	92,86
Total de alunos	14	100

Fonte: elaborado pelo próprio autor

De acordo com o quadro 6, os resultados indicam que, dos 14 estudantes da UFRPE, 13 buscaram resolver a questão 2. Na qual se observa que:

- Um aluno não respondeu – correspondendo a 7,14%
- Nenhum aluno acertou ou acertou parcialmente a questão – correspondendo a 0%
- Quatorze alunos erraram a questão – correspondendo a 92,86%

A questão 2 voltou a informar que é necessário rever a forma de trabalho do tópico "Polígonos" nos níveis fundamental, médio e superior, pois nenhum aluno chegou a resolver a questão. É preciso que se faça uma análise do ensino quanto ao emprego de conceitos próprios dos objetos poligonais e que sejam discutidas quais abordagens no ensino da matemática podem favorecer esse entendimento.

5.2 Análise Qualitativa

Na análise QUALITATIVA o presente estudo deteve-se a fazer uma descrição correta do entendimento, habilidades e tipo de resolução utilizada pelos estudantes. Buscamos perceber os saberes mobilizados que eles colocam em cena a partir das habilidades e conhecimentos prévios que dominam na resolução dos problemas. Dessa forma, essa parte do nosso estudo será mais descritiva quanto ao fazer do estudante em cada uma das questões trabalhadas.

Será convencionado a seguinte nomenclatura para as séries de análises dos grupos de estudantes trabalhados (um grupo do IFPE e dois grupos da UFRPE), assim definido:

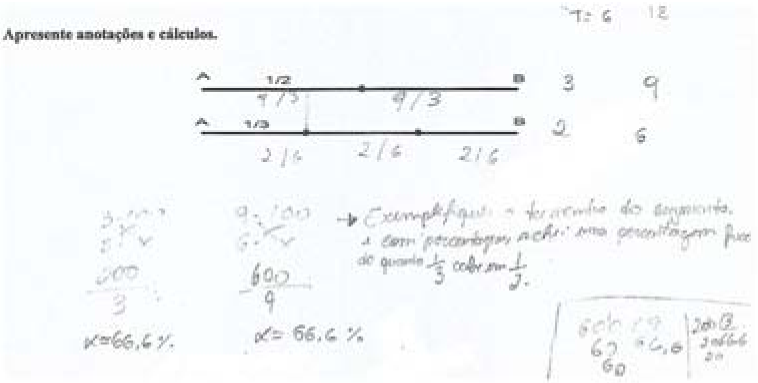
- Alunos do IFPE – A_1, A_2, A_3, A_4, ... A_n.
- Alunos da UFRPE (2º período) – B_1, B_2, B_3, B_4, ... B_n.
- Alunos da UFRPE (3º período) – C_1, C_2, C_3, C_4, ... C_n.

5.2.1 Análise de dados IFPE problema1 - Modos de resolução dos estudantes:

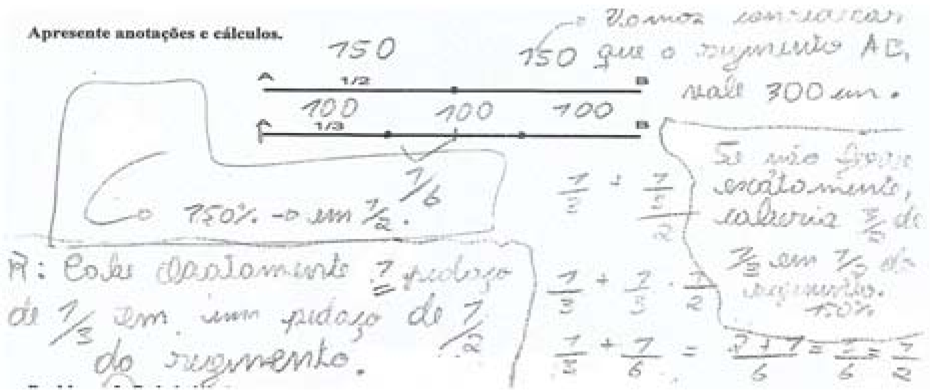
Questão 1

Aluno A1 – Nas suas anotações, o aluno caminhou por dois modos de tentativa de solução, trabalhou por um processo comparativo da medida de AB, no qual buscava a equivalência do valor das frações. Já a segunda tentativa foi buscar uma proporcionalidade por meio de uma expressão em regra de três, na qual encontra que a medida $\frac{1}{3}$ é equivalente a 66,6% da medida $\frac{1}{2}$. No entanto, não complementa o raciocínio que deveria continuar para chegar a solução, ou seja, validar o que ainda falta - que é metade de $\frac{1}{3}$, ou seja, 33,3% para chegar a medida $\frac{1}{2}$. Isso equivale a uma quantidade de $\frac{1}{3}$ somado a esses 33,3%

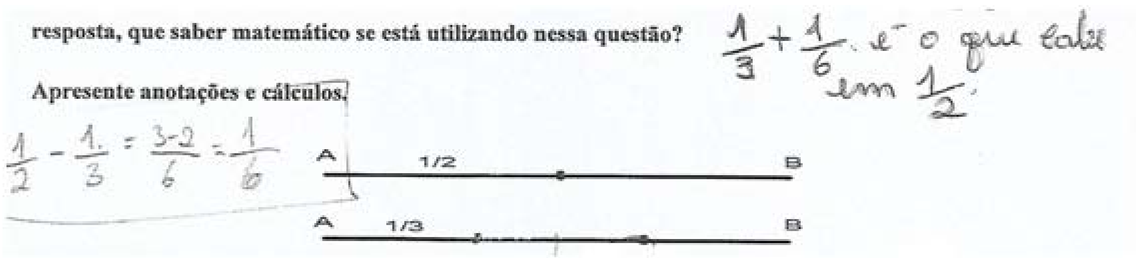
que é $\frac{1}{6}$ e que deveria ter sido somado por ele ao 66,6% que achou. Ou seja $\rightarrow$ ficaria com: $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{2}$.



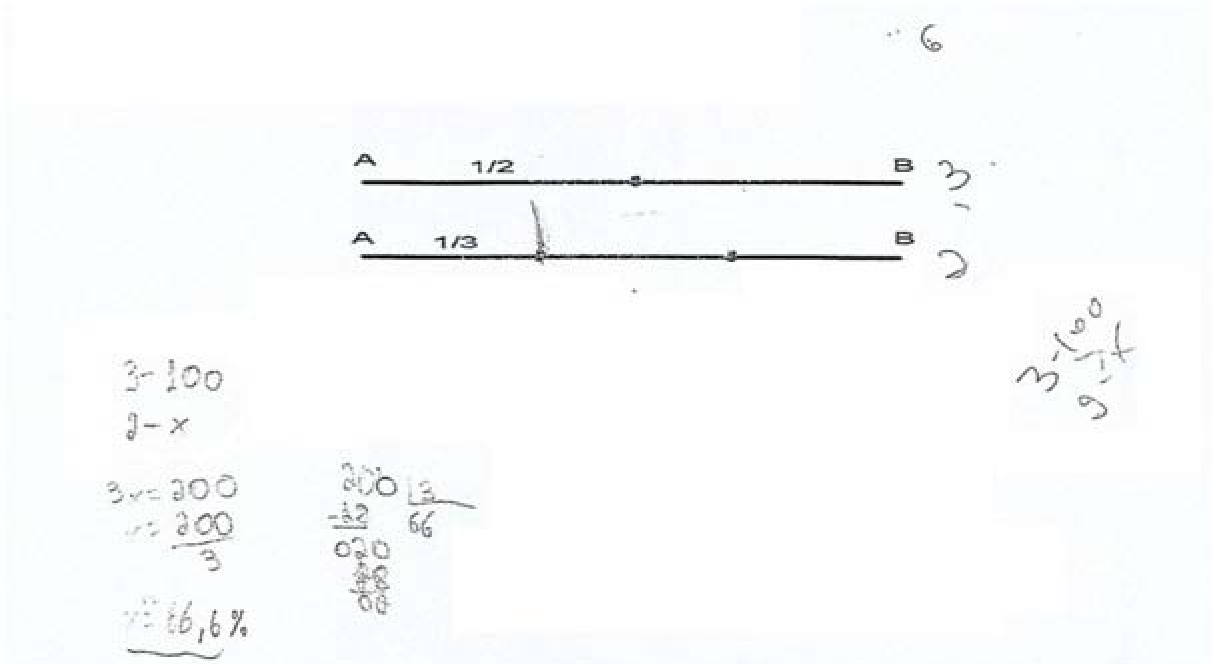
Aluno A2 – A análise das anotações do estudante mostra que este possui, inicialmente, dificuldade no uso da representação fracionária como medida de um segmento, pois transforma a medida de AB para um valor inteiro que possa conservar a equivalência, nesse caso 300. A partir daí, estabelece que o valor $\frac{1}{2}$ terá valor 150 e o valor de $\frac{1}{3}$ será 100. Assim consegue visualizar que a solução é $\frac{3}{2}$, ou seja, 150. Logo depois busca a prova e usa o cálculo com frações fazendo $\frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{2}$ confirmando por equivalência que seria o tamanho um terço mais um sexto, o que cabe exatamente.



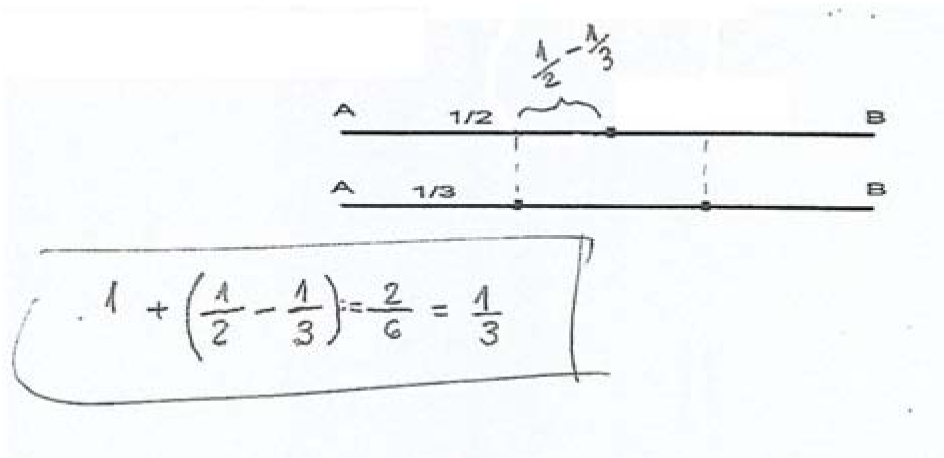
Aluno A3 – As anotações do aluno sugerem que ele tenta encontrar o resultado por meio de subtração de medida fracionária, diminuído os valores informados, percebe que chega ao valor que falta em um terço para completar um meio. Assim, o estudante percebe que se aproxima da resposta, complementando o raciocínio que leva a solução, efetuando a soma. Ficando com: $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$, que dará $\frac{1}{2}$ a equivalência.



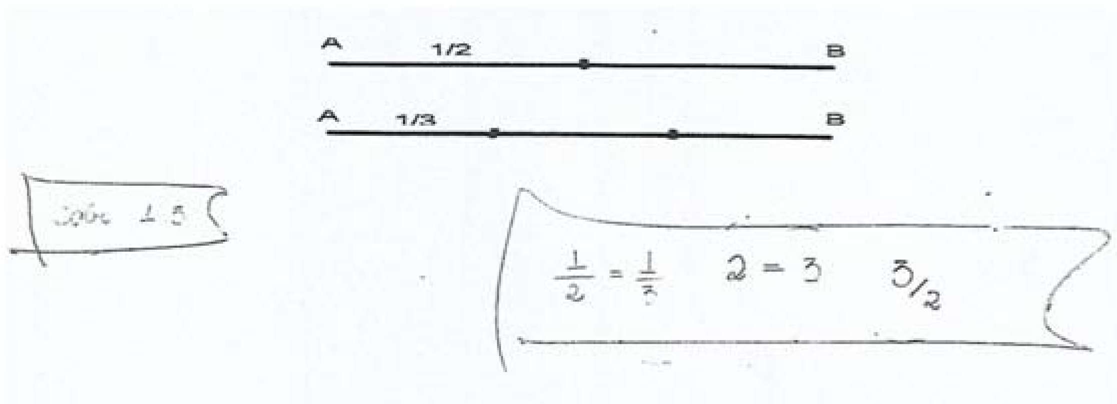
Aluno A4 – O aluno destacou um 6 acima dos segmentos, aparentemente para referir-se à quantidade de divisão que faria aos segmentos. Em seguida, põe os valores 3 e o 2 ao lado dos segmentos sugerindo, talvez uma relação proporcional, ou que no primeiro segmento se utilizará três partes de $\frac{1}{6}$ e que $\frac{1}{3}$ já contém duas dessa medida. Isso pode ter sido pensado em cálculo mental, com efeito para um entendimento do problema, pois ele visualizou tal relação na figura, e a utiliza nos cálculos que efetua. Os segmentos continuam a ser tratados em partes iguais. Dessa forma, usa a regra de três e conclui que as duas partes do segmento seriam aproximadamente 66,6% da metade do segmento. Continuando o mesmo raciocínio concluiu que a metade desse um terço seria 33,3% complementando sua resposta $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.



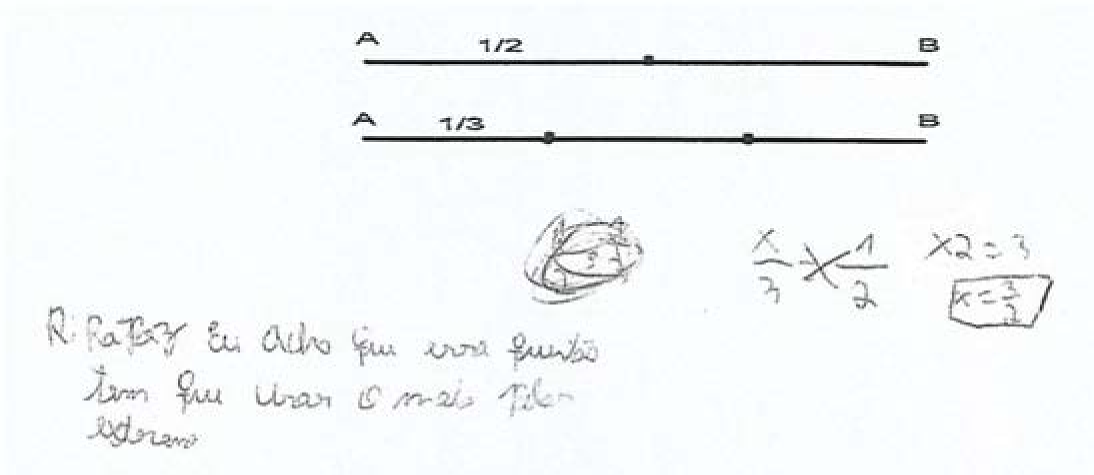
Aluno A5 – O caminho utilizado pelo aluno foi uma resolução por operações aritméticas de frações. Calculou a diferença entre a metade e um terço do segmento, o qual registra e utiliza na expressão posterior que trabalha. Só que se atrapalha na resolução dessa expressão não indicando a resposta correta, pois seus cálculos estão errados apesar da expressão estar correta. O resultado seria: $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$, que seria uma comprovação de que falta um sexto para validar a comparação. Dessa forma, E5 perdeu-se na conclusão.



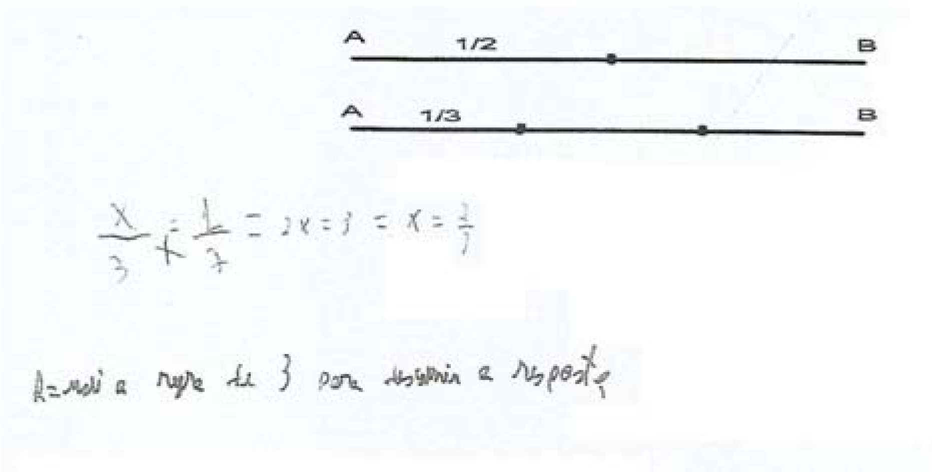
Aluno A6 – Pelos dados do aluno, apesar dele ter acertado a resposta, percebe-se que o mesmo tem dificuldade em fazer registros na linguagem matemática, pois afirma que $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$ e, logo em seguida, afirma que $2=3$, isso buscando entender a relação de 2 divisões para 3 divisões, pois é a partir dos denominadores que o resultado é $\frac{3}{2}$. Entende-se que o aluno E6 não soube utilizar-se de incógnitas. Poderia ter usado o raciocínio de $\frac{1}{2}X$ é igual $\frac{1}{3}Y \rightarrow 3X = 2Y \rightarrow \frac{Y}{X}=\frac{3}{2}$, isso explicaria a sequência exposta, onde X seria o número de meios e Y o número de terços.



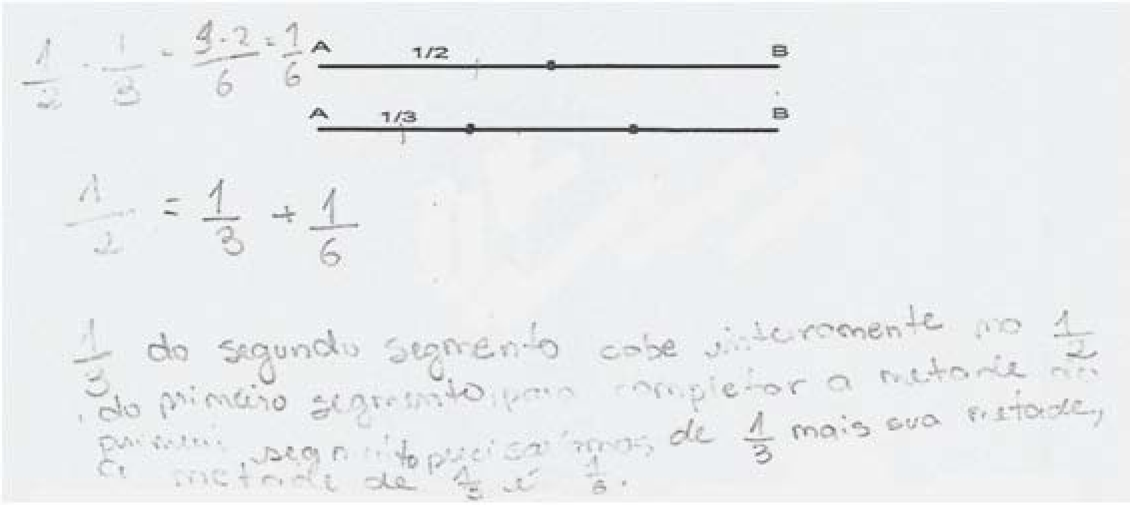
Aluno A7 – O aluno trabalha por relação proporcional. Define que um determinado valor **x** está para a divisão em três partes, assim como 1 está para a divisão em duas partes iguais (referente ao tamanho $\frac{1}{3}$). Concluindo que **x** é três meios.



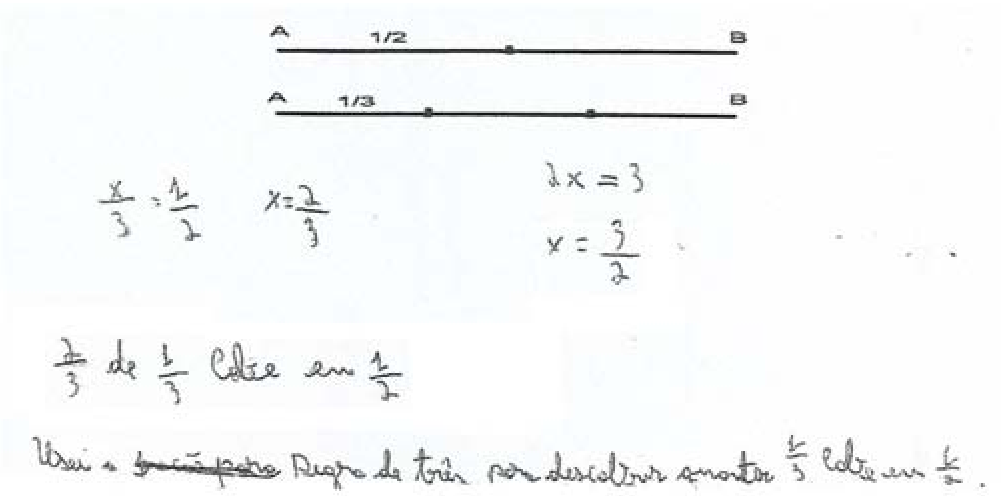
Aluno A8 – Analisando os dados do aluno, percebe-se que faz o uso da regra de três, como ele mesmo afirma. A variável **x** é a quantidade de vezes que um terço cabe em um meio. Percebe-se que o aluno arma corretamente o problema através de proporção, mas erra ao apresentar a resposta, ou seja, resolvendo a proporção não chegou ao resultado esperado, pois encontrou **x** como $\frac{2}{3}$.



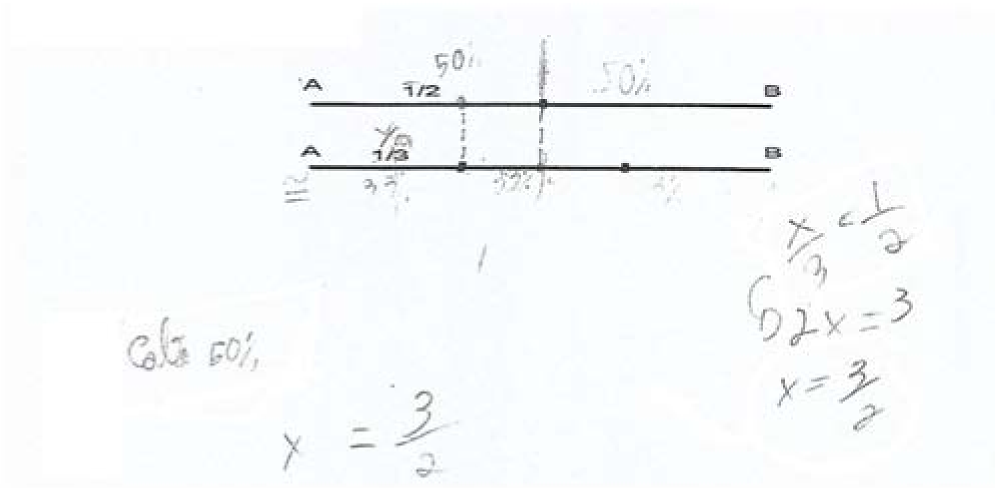
Aluno A9 – Na construção dos dados o aluno utilizou-se de comparação de frações para chegar à resolução do problema. Primeiro calculou a diferença entre as medidas $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$, achando $\frac{1}{6}$. Constatou que $\frac{1}{2}$ era a soma $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, que seriam as medidas do tamanho obtidos do $\frac{1}{3}$ para compor $\frac{1}{2}$. Assim, finalizou afirmando que um terço mais sua metade é igual a um meio.



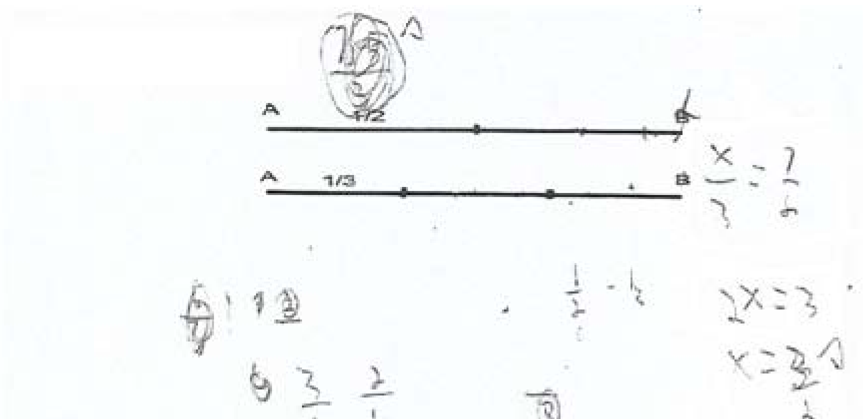
Aluno E10 – O aluno usou regra de três para calcular a quantidade de vezes que $\frac{1}{3}$ cabe em $\frac{1}{2}$. Após a resolução concluiu que cabe $\frac{3}{2}$. Mas, no momento de expor o resultado, confundiu-se ao expressar que $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{3}$ cabe em $\frac{1}{2}$. Ficou vaga a sua conclusão.



Aluno A11 – Analisando os dados, nota-se que a primeira estratégia do aluno foi dividir os segmentos e compará-los em percentuais. 50% para metade e 33% para um terço. Poderia ter concluído já nessa análise que 50% do segmento é igual a 33% mais o dobro desse valor. Mas abandonou esse caminho e, em uma segunda abordagem utiliza a regra de três, resolvendo a proporção $\frac{x}{3} = \frac{1}{2}$, verificando que $x = \frac{3}{2} de \frac{1}{3}$.

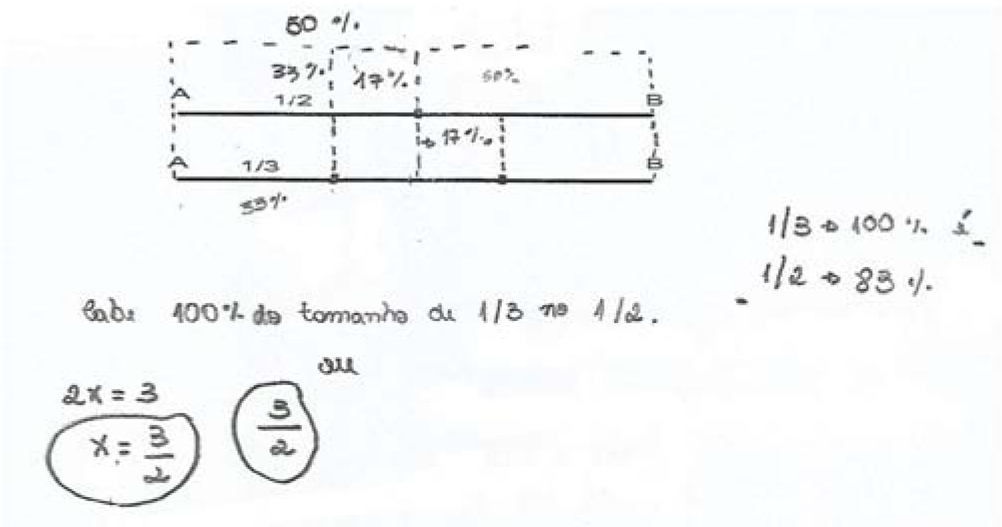


Aluno A12 – Pelo que está apresentado por este aluno, nota-se que faz uso de proporção, chega a resposta correta, no entanto, apresenta valores de frações soltas sem registrar a informação sobre as relações que opera sobre elas. Esboça uma diferença entre as medidas dos segmentos ($\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$), mesmo assim fica vago. Depois apresenta uma expressão por meio da regra de três que compreende, resolvendo a proporção gerada conclui que a solução é $\frac{3}{2}$.

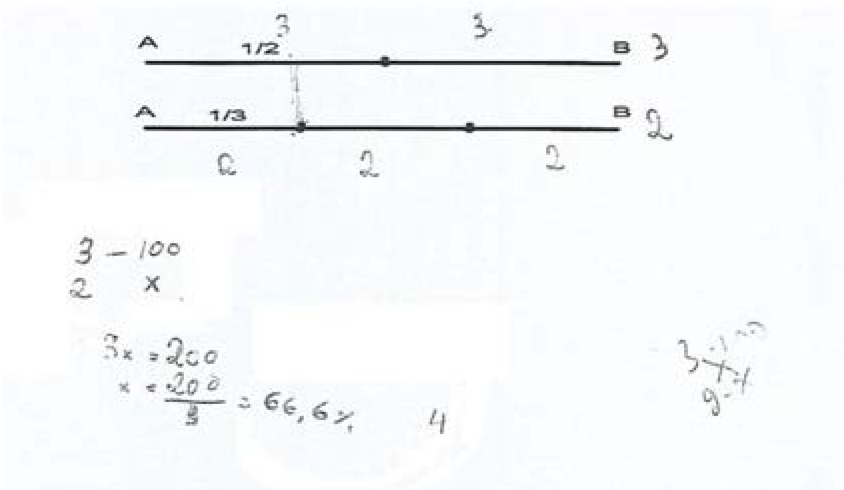


Aluno A13 – Analisando o caminho percorrido pelo aluno. Notas-se que ele trabalhou uma relação entre frações e percentuais. Pelo que é observado o aluno dividiu o segmento relacionado aos respectivos percentuais, dando valores aproximados. Depois, mostrou, através deste esquema, que 33% de **AB** mais 17% desse mesmo valor era igual a 50% do segmento AB. Até aqui já pode ser visualizado que ele chega de forma correta na comparação percentual. No entanto, nos seus dados há o registro de que atribuiu 100%

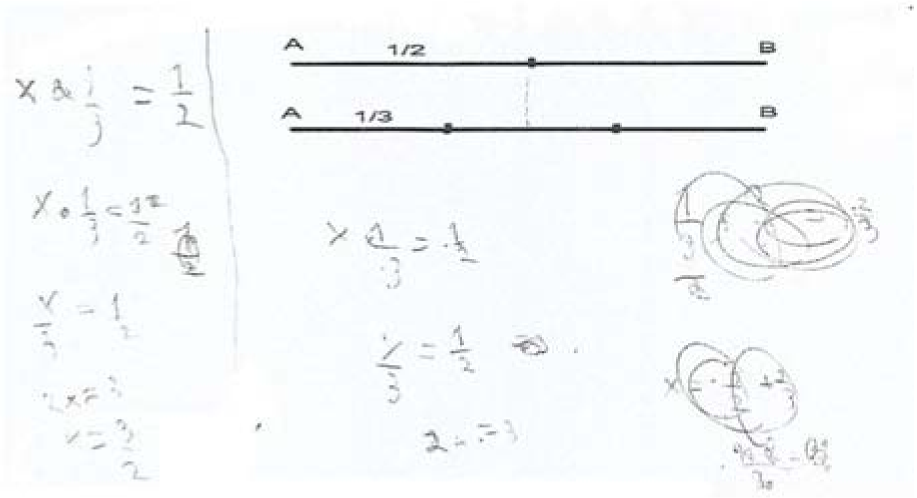
a $\frac{1}{3}$ e 83% a $\frac{1}{2}$ – não fica claro de onde o aluno compreende tal relação. Num segundo momento A13 trabalha uma equação $2x = 3$, não ficando claro, também, de onde vem o x e o porquê da equação a partir do raciocínio inicial.



Aluno A14 - Pelas anotações vê-se que ele não tem segurança para trabalhar com frações, então segue por meio de comparação de medida. Observa que AB está para três medidas de $\frac{1}{3}$, mas que numericamente corresponde ao valor 2 unidades e que $\frac{1}{2}$ de AB, no mesmo raciocínio, é equivalente a 3, ou seja, ele visualiza o tamanho $\frac{1}{6}$ de AB como valor de referência para a comparação, por isso registra que $\frac{1}{2}$ terá 3 medidas de $\frac{1}{6}$. Em um segundo momento usou uma regra de três, onde o valor 3 seria 100% achando o a relação 2 = 66,6%. Aqui, já valida a relação, mas abandona o problema por não encontrar argumento em como definir essa relação.



Aluno A15 – Pelas anotações do aluno, **x** é o número de vezes que $\frac{1}{3}$ cabe em $\frac{1}{2}$, portanto, montou uma equação do primeiro grau na variável **x**, onde o coeficiente de **x** era $\frac{1}{3}$, o termo independente era $\frac{1}{2}$ e resolveu a questão. Encontrando $\frac{3}{2}$ para o valor de x. Resolvendo, por fim, o problema.

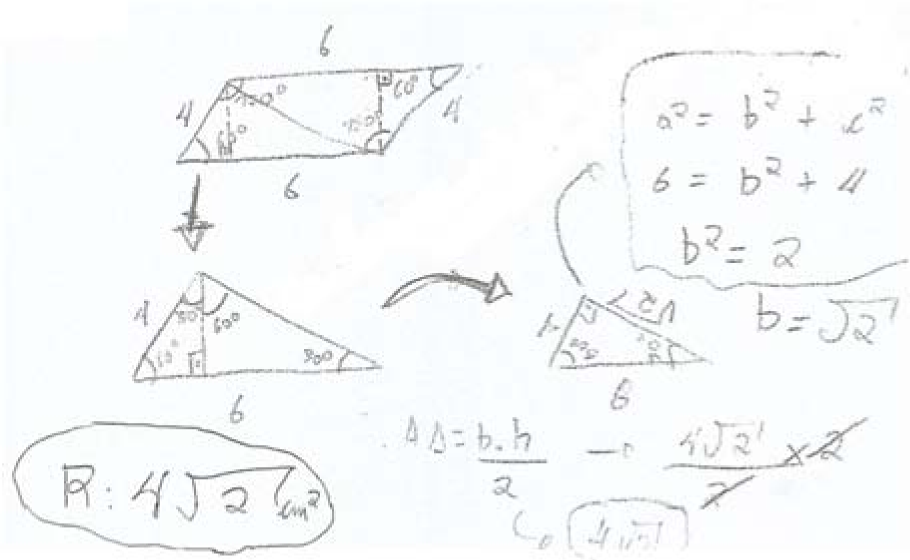


5.2.2 Análise de dados IFPE do problema 2 - Modos de resolução dos estudantes:

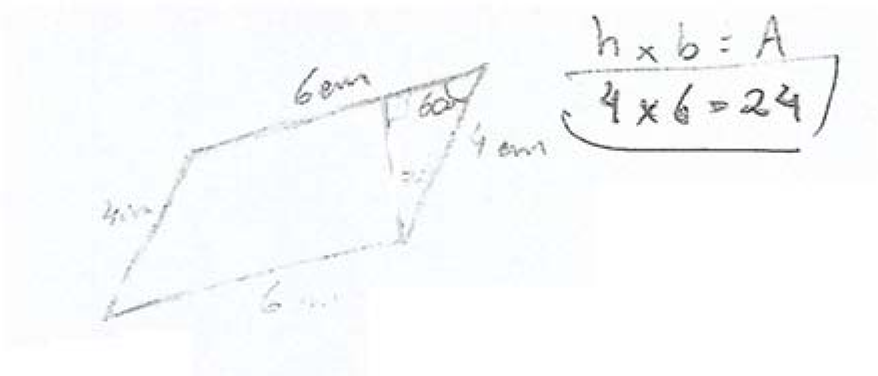
Questão 2

Aluno A1 – Pelas suas anotações, o aluno mostrou conhecimento das relações entre os ângulos internos de um paralelogramo (relação entre os ângulos adjacentes, ângulos opostos e soma dos ângulos internos), mas não consegue montar uma estratégia para determinar a área da figura. Concluiu usando a fórmula para determinar a área de um retângulo (base vezes altura) sem chegar ao raciocínio correto.

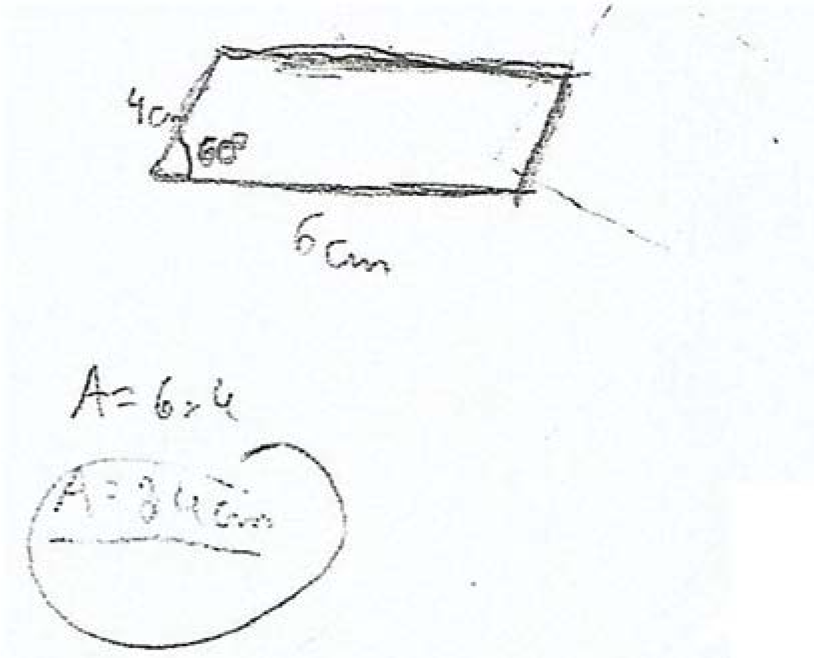
Aluno A2 – Pelas anotações feitas pelo aluno, apesar demonstrar conhecimento das somas dos ângulos internos de triângulos e quadriláteros, ao dividir o paralelogramo pela sua diagonal menor, errou ao supor que os triângulos eram retângulos. Tentou utilizar o teorema de Pitágoras, mas nota-se pelo que foi realizado que não domina esse teorema. Falhou na resolução do problema.



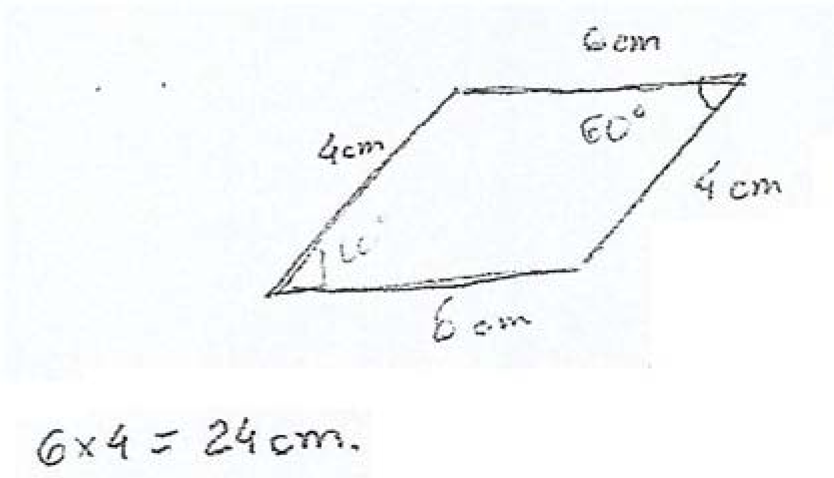
Aluno A3 – Pelo que é possível observar o aluno analisou o problema de forma que, ao dividir o paralelogramo com o intuito de obter um triângulo retângulo (para descobrir sua altura), se vê impossibilitado de desenvolver os saberes e não deu continuidade à estratégia. Concluiu multiplicando (base vezes altura) de forma errada, atribui a altura o valor 6 chegando a 24 como a área do paralelogramo.



Aluno A4 – Pelo que se pode observar, o aluno desconsiderou o fato do ângulo entre os lados não ser um ângulo reto. Concluiu multiplicando esses lados. Ele tem dificuldade no cálculo e segue pela facilidade em atribuir a altura ao lado $4cm$.

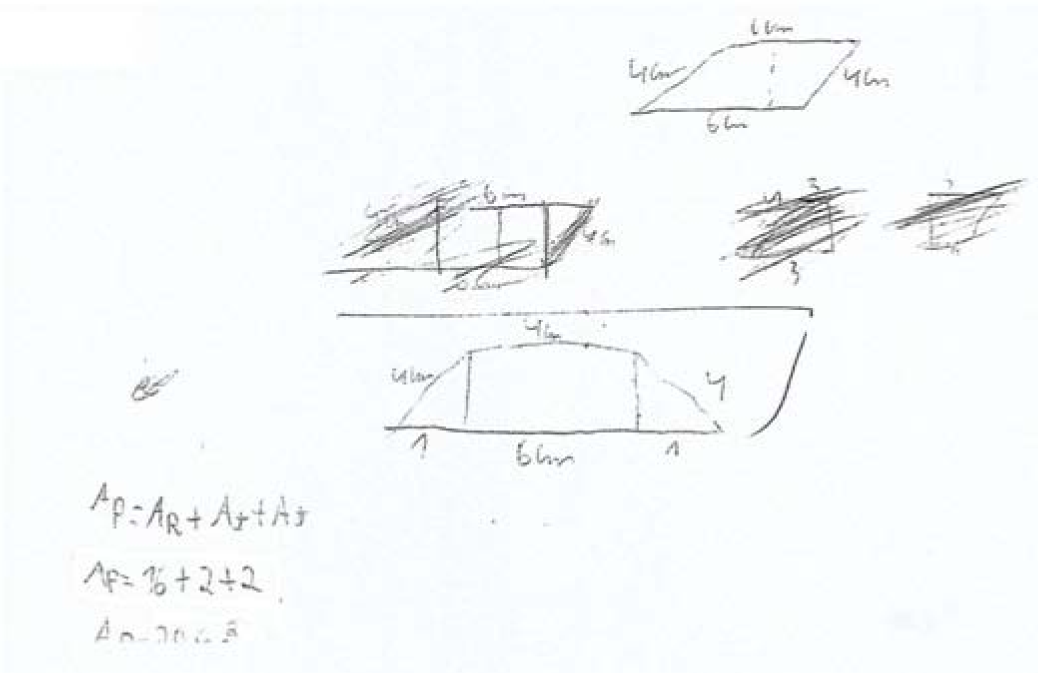


Aluno A5 – O aluno mostrou conhecimento de que, em um paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes, mas não esboçou nenhum método para continuar esse raciocínio e parou nesse esboço. Finalizou multiplicando lado vezes lado.

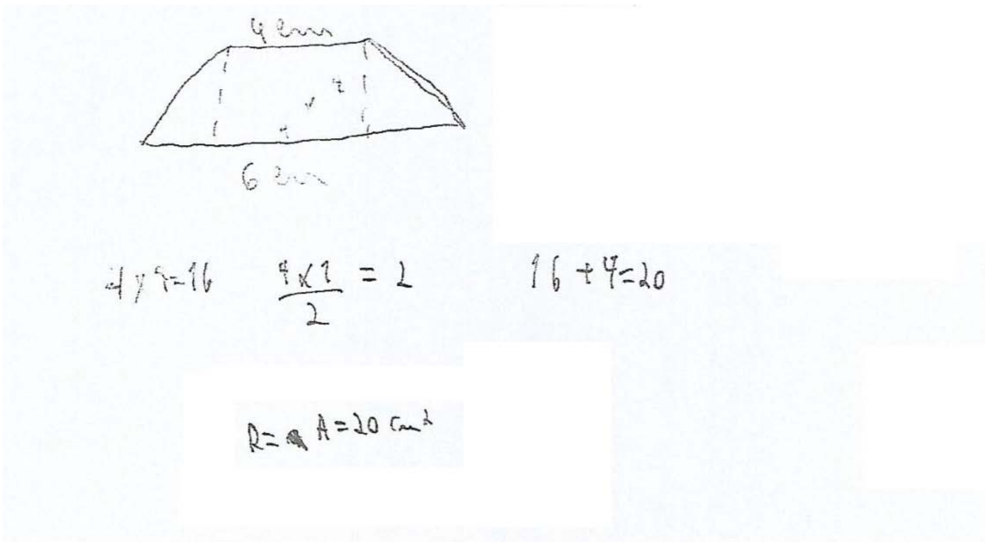


Aluno A6 – Não tentou resolver a questão, ou seja, não expôs no material nenhuma anotação do que lhe foi entregue.

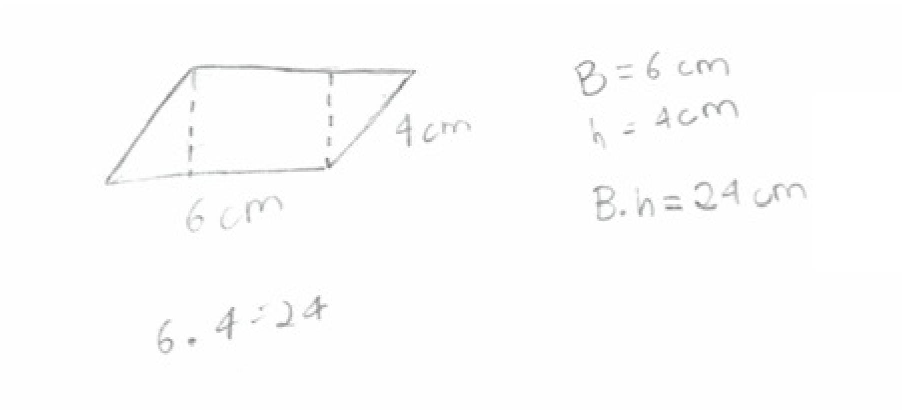
Aluno A7 – Pela anotação do aluno, verifica-se que ele partiu desenhando um paralelogramo com todas as medidas de seus lados, depois o dividiu formando dois triângulos e um quadrado (figura rabiscada), representando posteriormente que: $Ap = Ar + At + At$. Por esse caminho não consegue uma boa validação e desiste. Nota-se também que o aluno registra o desenho de uma figura com aparência de um trapézio, isso pode ter sido gerado na compreensão de descobrir a altura.



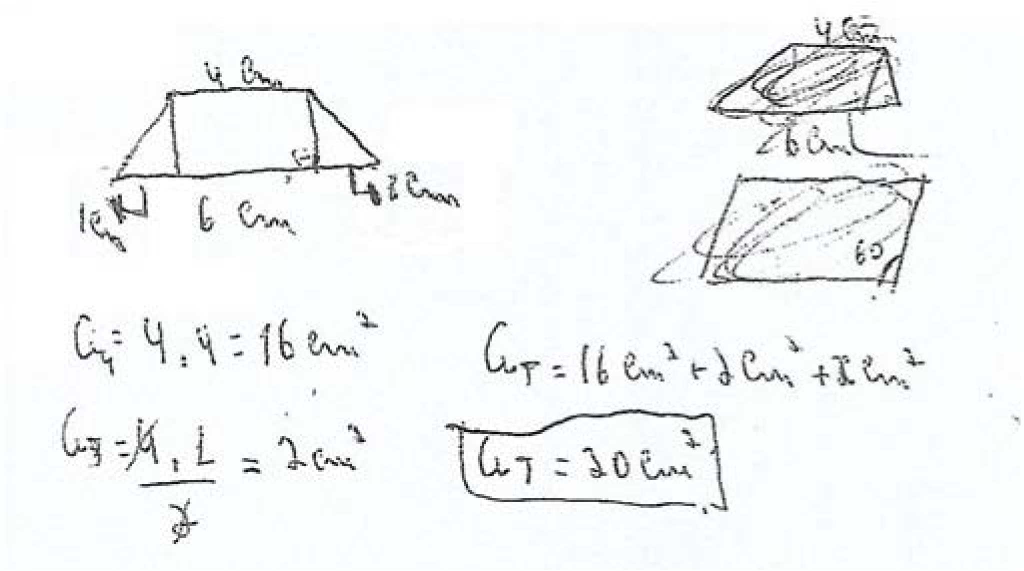
Aluno A8 – Pelo que pôde ser observado, o aluno modificou a figura dando à mesma uma aparência de um trapézio para valorizar o cálculo da altura. Só que entende que, ao retirar 1 centímetro de cada uma das extremidades da base, representa a superior com valor $4cm$ e base inferior $6cm$ a partir da figura do trapézio isósceles. Posteriormente, perdeu-se ao supor dois triângulos retângulos e um quadrado. Falhou na conclusão.



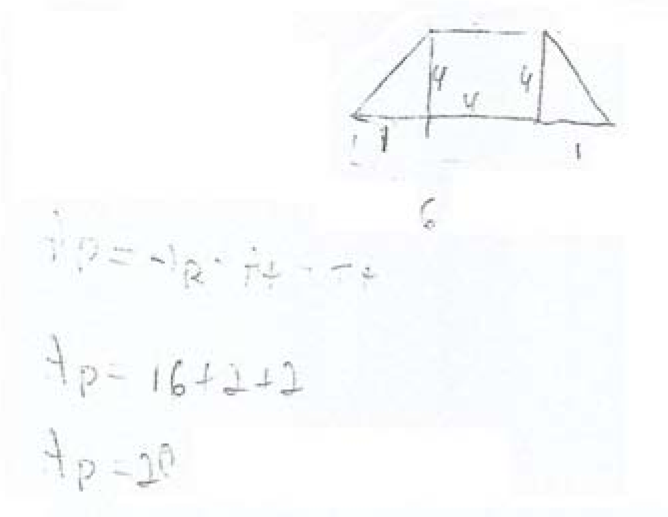
Aluno A9 – Pelo exposto, o aluno dividiu o paralelogramo para chegar a uma figura mais simples, com dois triângulos retângulos e um quadrado, buscando calcular a altura da figura. No entanto, não trabalha com o ângulo dado. Finalizou o processo e assumiu que a base era $6cm$ e a altura era $4cm$, fechando com $6 \cdot 4 = 24$, de forma errada.



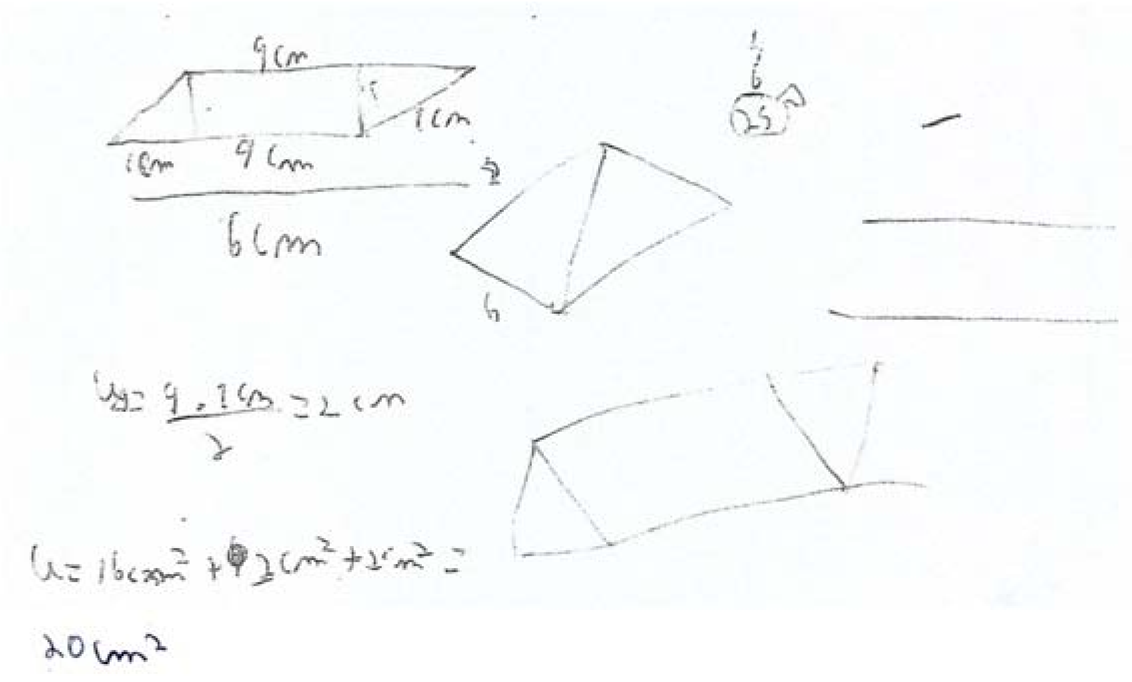
Aluno A10 – Analisando o desenho realizado pelo aluno na sua resolução nota-se que houve uma modificação no mesmo em uma tentativa de simplificar a figura e, consequentemente, a resolução (transforma-a em um trapézio). O aluno supôs ter encontrado dois triângulos retângulos e um quadrado de lados iguais a $4cm$. Por essa razão falhou na resolução ao considerar a solução como soma dessas áreas.



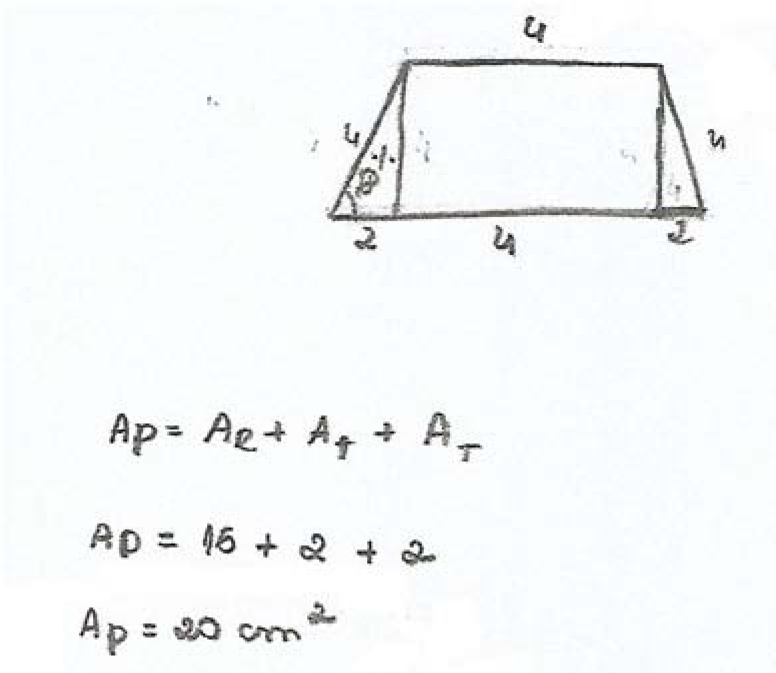
Aluno A11 – Pelo que o aluno apresentou, ele tem o mesmo raciocínio do estudante A9 e A10. Desenhou um trapézio isósceles, dividiu em dois triângulos e um quadrado, supôs que a altura seria de $4cm$ e afirmando que cada um dos dois triângulos teria lados 1, 4 e $4cm$ (que não forma triangulo). Assim, falhou na conclusão.



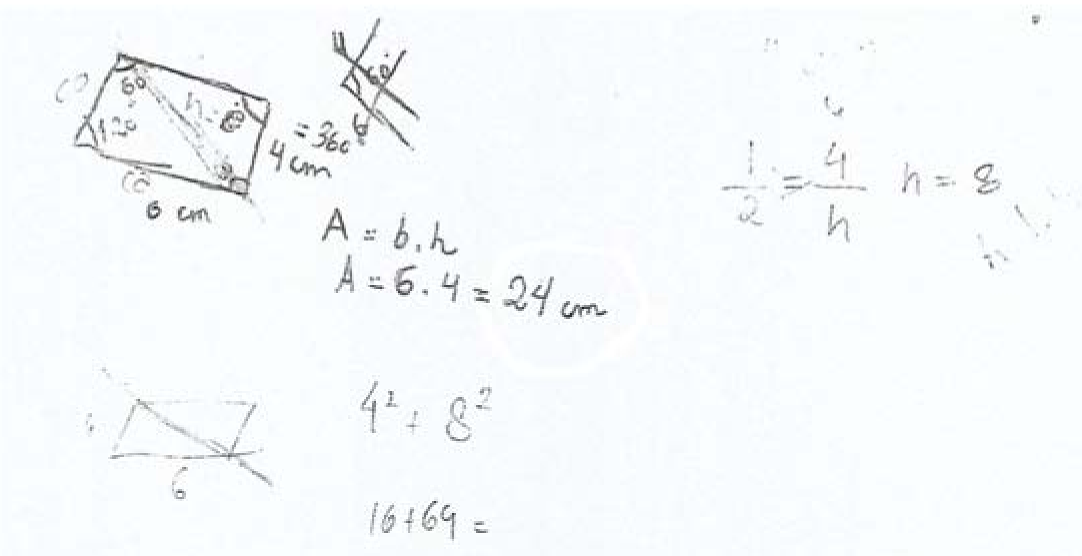
Aluno A12 – Pelo que se pode observar o aluno não observa os dados do problema, pois modificou a figura em três situações diferentes onde em uma delas ele se baseou para rabiscar uma solução. Após dividir um paralelogramo em dois triângulos retângulos e um quadrado de lado $4cm$ e com os dois triângulos, tendo base $1cm$ e altura $4cm$, somou as suas áreas e encontrou como resposta 20 centímetros quadrados.



Aluno A13 – A análise da figura proposta pelo aluno, mostra que ele partiu para visualizar uma figura "mais simples". A sua proposta modifica o paralelogramo para um trapézio. Culminando em dois triângulos e um retângulo, o erro foi já visualizado entre os sujeitos. Posteriormente erra também nos cálculos das áreas dos triângulos, pois supõe que a altura do triângulo é igual a altura do retângulo como propõe o desenho.

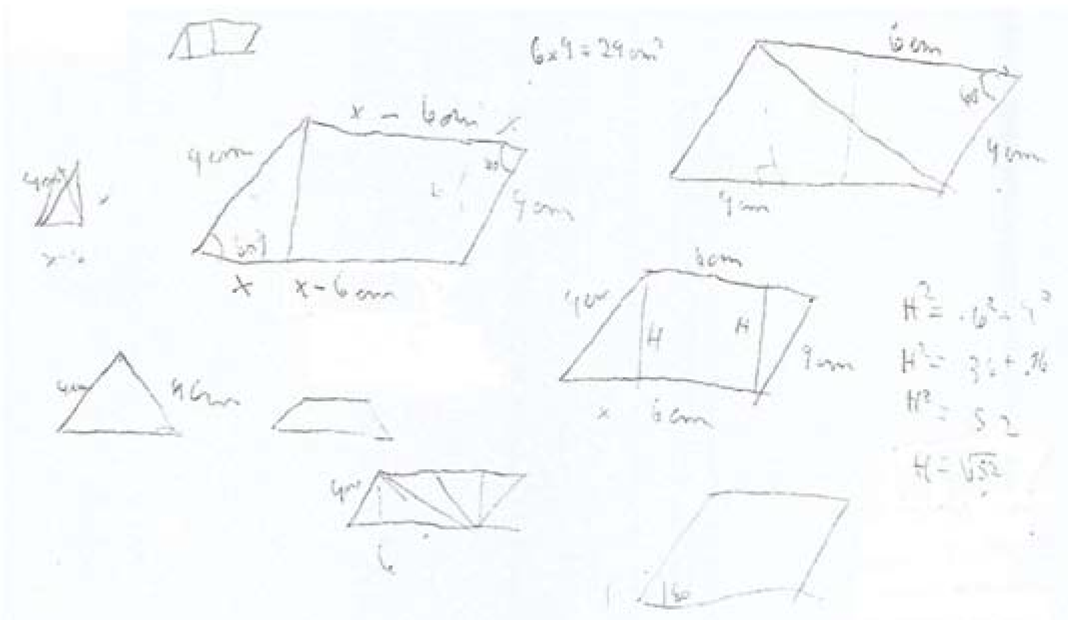


Aluno A14 – Observando as anotações do aluno, vê-se claramente o ângulo de 60°, desenhado com uma visualização, próximo do ângulo reto. Percebe-se dessa forma que este aluno não valoriza a representação por desenho, pelo menos nos conceitos de medidas de ângulos, mas, contrariamente a isso, ele usou os conceitos de somas dos ângulos internos de um quadrilátero e que a soma dos ângulos internos consecutivos de um paralelogramo é 180°. Mas, ao tomar a área do paralelogramo, como se fosse de um retângulo, comete erro encontrando $bxh = 24cm^2$.



Aluno A15 – Nas anotações do aluno, encontram-se diversos caminhos/tentativas.

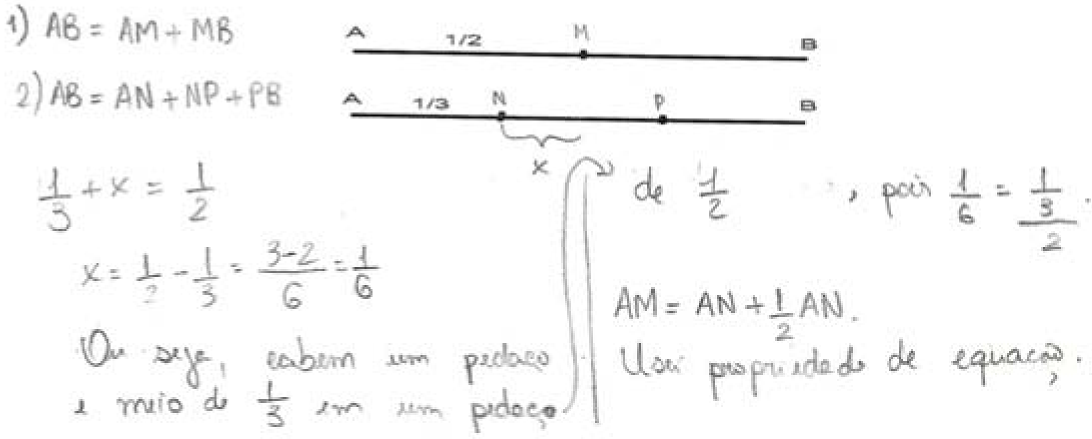
No primeiro deles, traça perpendiculares aos vértices da base, registrando valores x e $x - 6$, que deveria ser $6 - x$. Constrói dois triângulos retângulos e um retângulo (através desse caminho tenta a resolução por meio algébrico, mas não tem domínio nessa abordagem, logo ele a abandona). De outro modo, o aluno construiu um triângulo isósceles, visualizando a altura, mas também não deu continuidade. Vê-se ainda uma terceira abordagem em que divide o paralelogramo pela sua diagonal maior. Mas não vê êxito no futuro dessa tentativa de resolução. Finalmente, o aluno trabalha dois triângulos retângulos com base de medida x , aparentemente fica confuso no comprimento da base inferior, e posteriormente apresenta a expressão $H^2 = 6^2 + 4^2$ onde a H é a altura do paralelogramo.



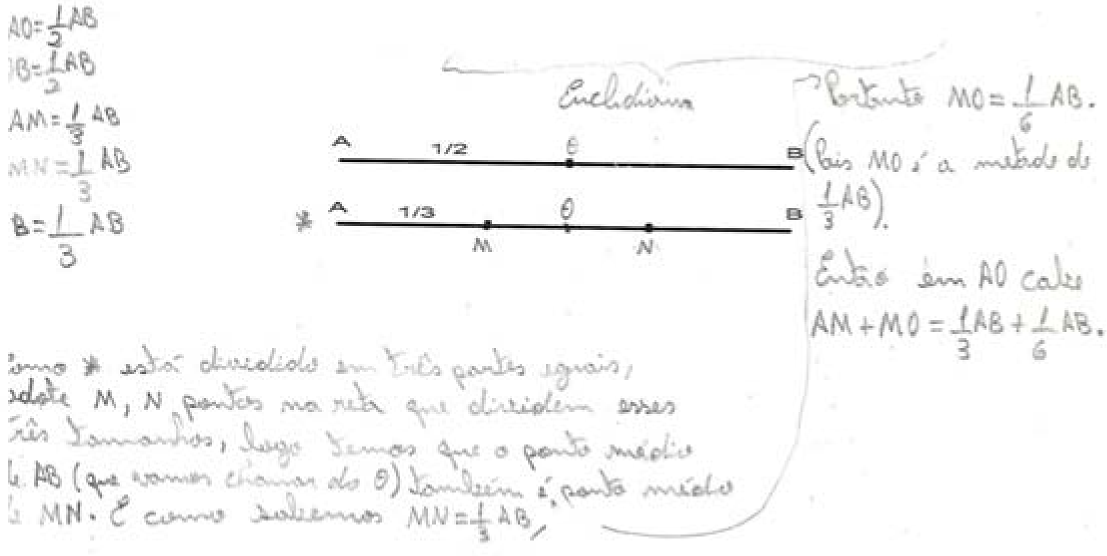
5.2.3 Análise de dados UFRPE problema 1 - Modos de resolução dos estudantes 2º período:

Questão 1

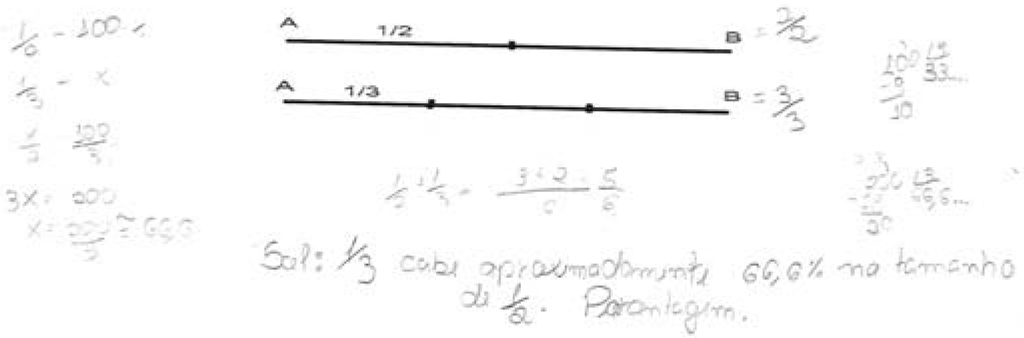
Aluno B1 – Pelas suas anotações, o aluno partiu para o método comparativo. Ao afirmar que $\frac{1}{3} + x\frac{1}{2}$, onde a incógnita é o valor que falta ao tamanho $\frac{1}{3}$ para completar o tamanho $\frac{1}{2}$. Dessa forma, encontra que $x = \frac{1}{6}$. Conclui afirmando que cabe um terço mais metade de um terço. Mostrando corretamente que um sexto é metade de um terço.



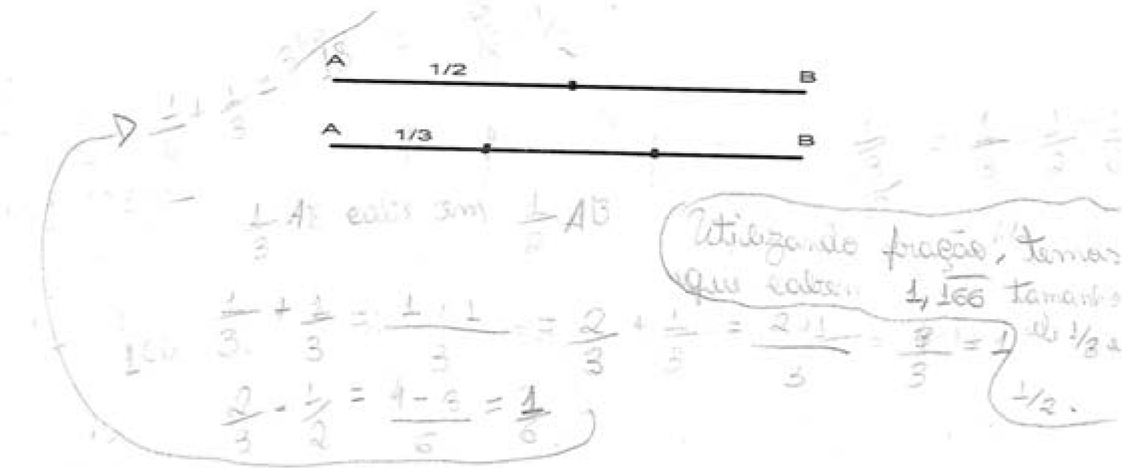
Aluno B2 – O aluno por comparações de divisões do segmento AB. Nomeou o ponto médio de AB de **O** e definiu como M e N as divisões de AB na segunda representação, onde aparece o valor $\frac{1}{3}$. Percebendo que o ponto médio de AB nessa representação é o ponto médio de MN, o segmento MN é $\frac{1}{3}$ de AB, encontra também que MO é $\frac{1}{6}$ de AB. Concluiu que cabe em AO um terço de AB mais um sexto de AB. Chegando a resposta correta.



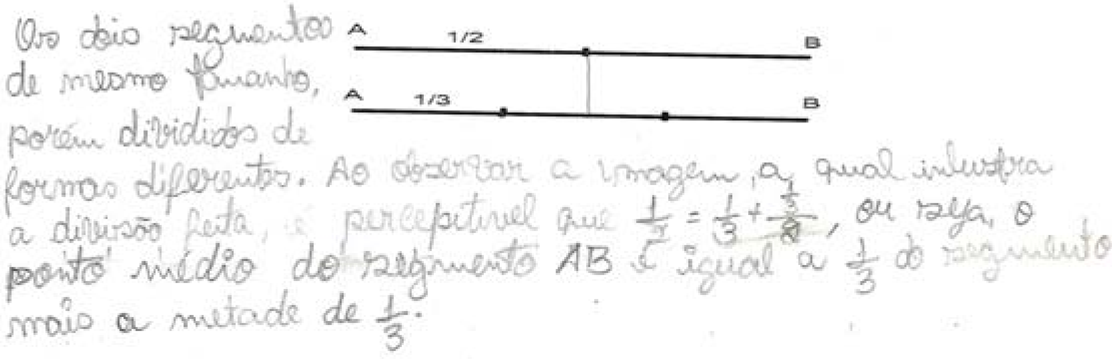
Aluno B3 – O aluno partiu diretamente para uma equivalência percentual, atribuindo 100% a $\frac{1}{2}$ (metade do segmento AB). Usando regra de três simples e direta conclui que 1/3 é 66,6% de $\frac{1}{2}$. No entanto, não dá prosseguimento a solução.



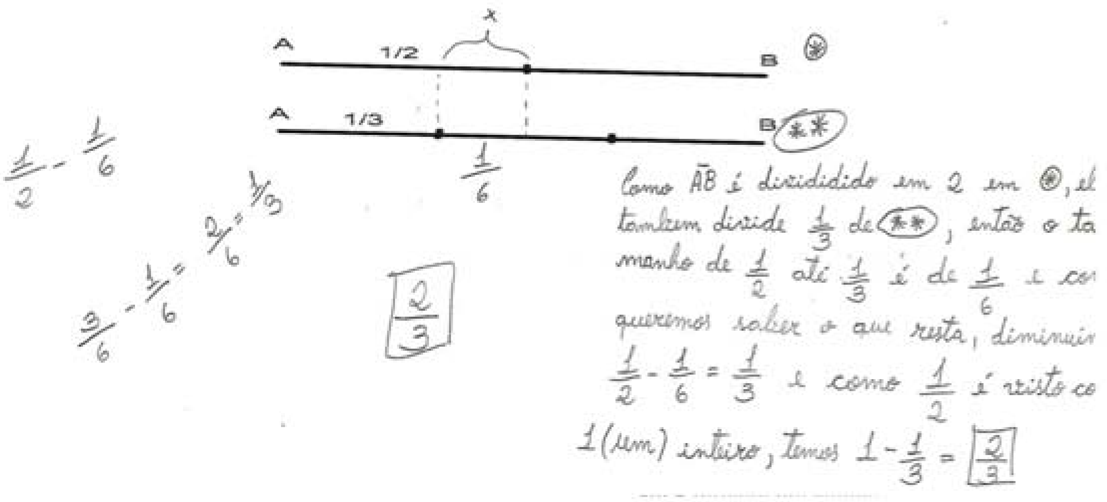
Aluno B4 – Pelas anotações o aluno, ele partiu para a resolução comparando as frações de AB, determinou a metade de $\frac{1}{3}$ que é $\frac{1}{6}$. Portanto, completando o raciocínio determinou que $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ e concluiu que cabem $1,1\overline{6}$ tamanhos de $\frac{1}{3}$ em $\frac{1}{2}$. (Nota-se que o aluno confunde medida do segmente com valor de porcentagem utilizada). A conclusão foi equivocada, apesar do raciocínio correto, pois o aluno não soube expressar corretamente o resultado.



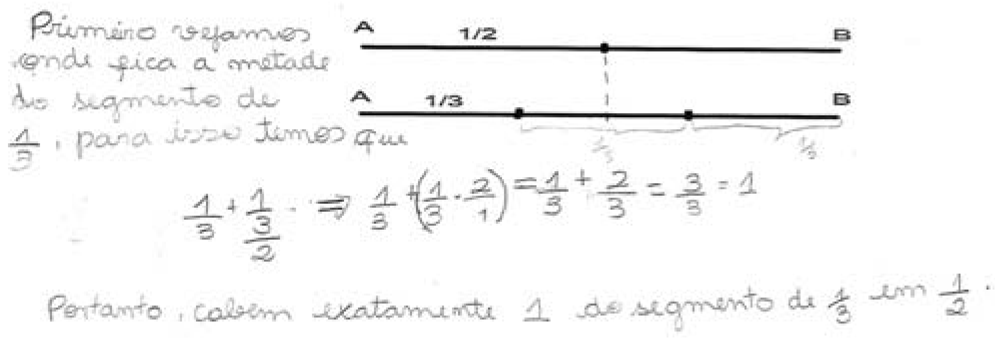
Aluno B5 – O aluno dividiu o segmento AB em duas partes iguais e relatou corretamente que "É perceptível que $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{3}}{2}$" O aluno não apresentou cálculos para embasar o seu argumento, mas concluiu seu raciocínio corretamente de que o ponto médio do segmento AB é igual a um terço mais a metade de um terço.



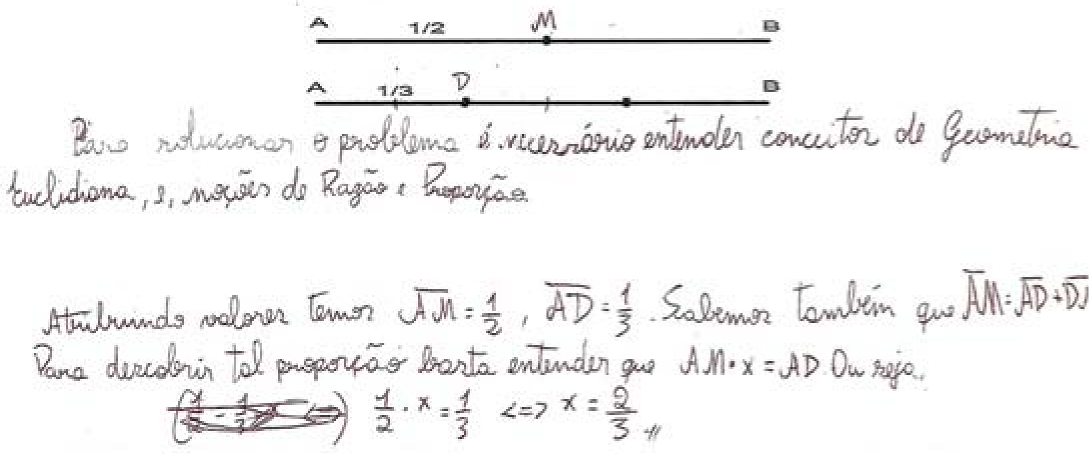
Aluno B6 – Analisando a resolução, o aluno partiu para trabalhar com fração. Comparou dois terços da segunda medida de AB com a metade da primeira e achou a diferença que é $\frac{1}{6}$, fez o cálculo em relação à metade para confirmar que $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Após comparar as figuras, concluiu que $\frac{1}{3}$ é $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$. No entanto, mesmo percebendo que a solução é $\frac{1}{3}$ somado com $\frac{1}{6}$, não apresenta o resultado solicitado, pois confunde as relações trabalhadas, escreve $1-\frac{1}{3}$ (o 1 aqui ele chama de inteiro, confundido com o tamanho AB), onde seria $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Que daria a compreensão adequada. Portanto, resolvendo parcialmente o problema.



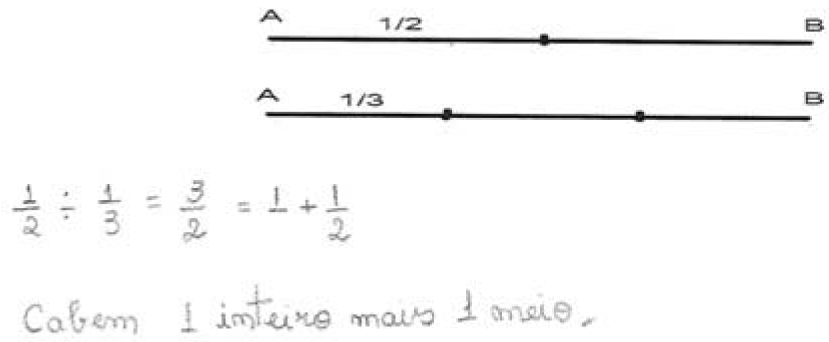
Aluno B7 – O aluno trabalha a resolução por frações. Dividiu a segunda figura ao meio fazendo coincidir com o ponto médio do segmento AB, do primeiro tamanho de AB. Percebendo que dividiu também o segundo ao meio, vê a coincidência do ponto médio em AB, trabalhou a ideia de somar um terço à sua metade para achar $\frac{1}{2}$, mas comete um erro na divisão das frações chegou a um resultado não correto. Confundiu $\frac{\frac{1}{3}}{2}$ apresentando a resposta dessa divisão como $\frac{2}{3}$ (que é relativo ao complemento do segmento AB em relação a $\frac{1}{3}$), concluindo a questão de forma errada.



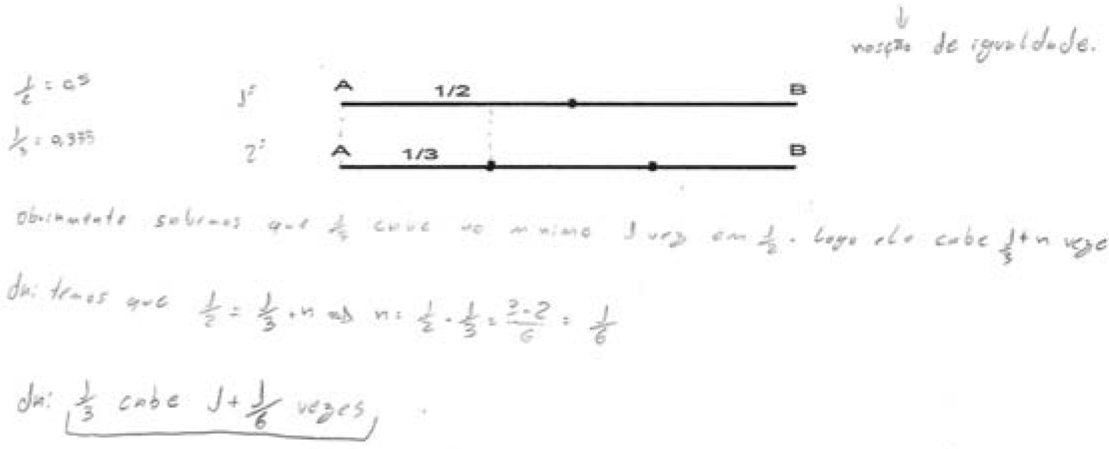
Aluno B8 – Na primeira tentativa, procura dar um tratamento geométrico usando proporções dos segmentos. Nomeou os pontos e observou que $AM = AD + DM$ (observe que DM ficou estranho, mas é compreensível que esse M estaria também na segunda figura). Na tentativa de responder à pergunta, armou uma expressão algébrica e achou que $\frac{1}{3}$ é $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$. Respondendo de forma parcial o problema.



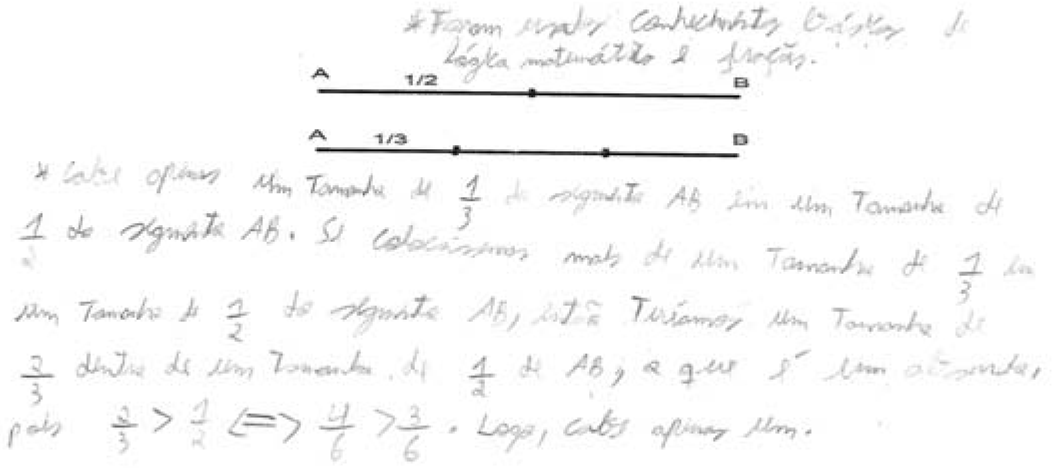
Aluno B9 – O aluno foi direto para o conceito do problema. Mostrou que tem conhecimento da relação operacional que está sendo trabalhada. Executa a divisão de $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{3}$, encontrando a resposta $\frac{3}{2}$. E conclui que “Cabe um inteiro mais um meio” com esse um meio, se referindo a metade de $\frac{1}{3}$.



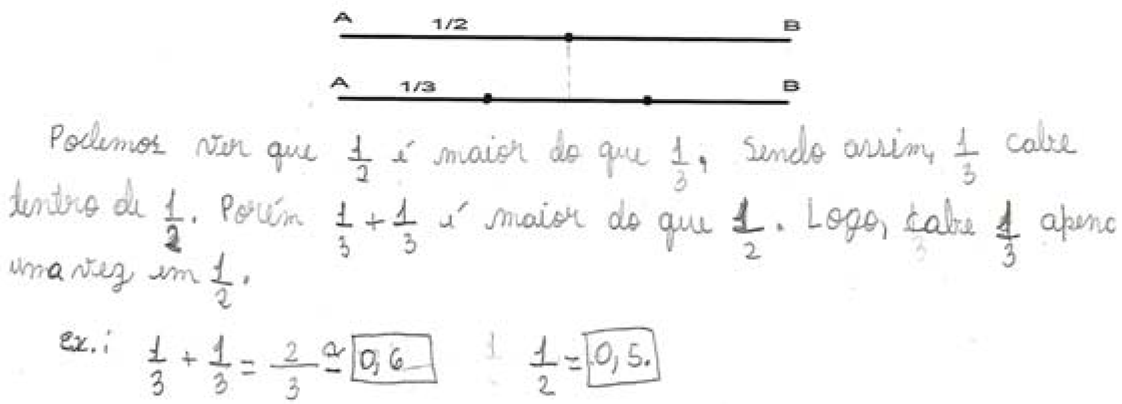
Aluno B10 – O aluno comparou as frações do segmento AB e observando que $\frac{1}{3}$ é menor que $\frac{1}{2}$, deduziu que $\frac{1}{3}$ somado com uma fração de AB (que chamou de n). Determinou o valor, $n = \frac{1}{6}$. Na conclusão do problema fez uma afirmação correta de que seria necessária uma medida de $\frac{1}{3}$ acrescida de sua metade,ou seja: 1 (uma medida) + $\frac{1}{6}$ (dessa medida), respondendo corretamente à questão.



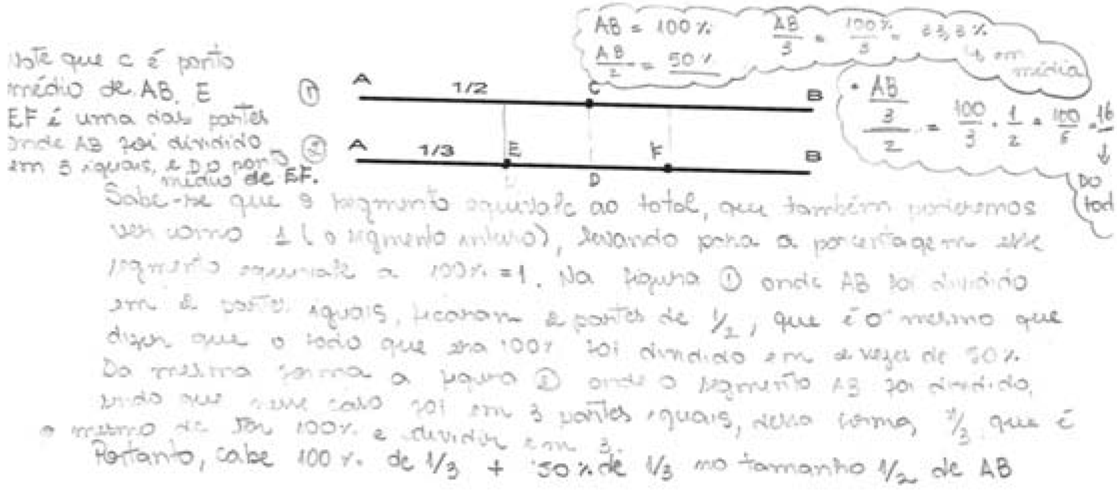
Aluno B11 – O aluno busca um sentido lógico, afirmando “foram usados conhecimentos básicos de lógica matemática e de frações”. Na realidade o que ele faz foi uma comparação entre os segmentos e, usando representação de frações parte para comparar os tamanhos, a sua conclusão foi errada de que $\frac{1}{3}$ cabe uma única vez em $\frac{1}{2}$. Mostrando que não entendeu bem a questão.



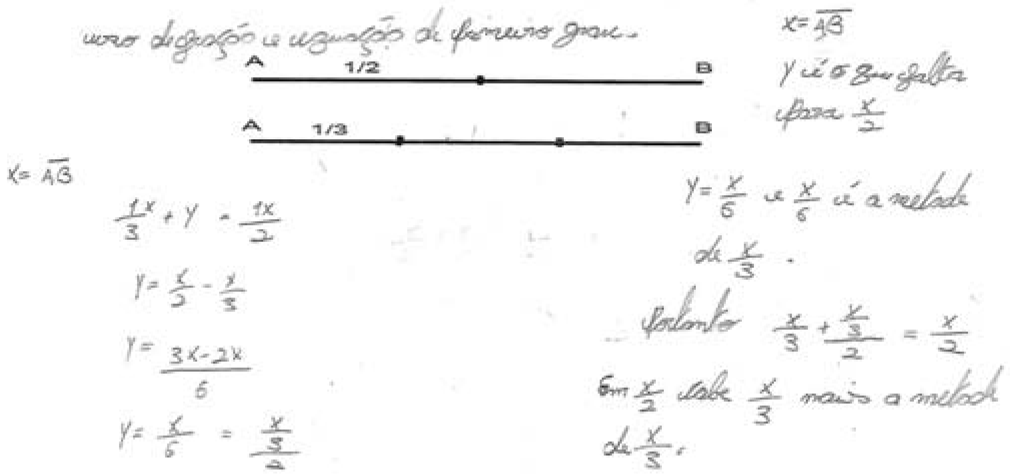
Aluno B12 – O aluno comparou as medidas dos segmentos utilizando frações. $\frac{1}{2}$ é maior que $\frac{1}{3}$, então $\frac{1}{3}$ cabe em $\frac{1}{2}$. Fez nova afirmação, comparando $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ como sendo maior que $\frac{1}{2}$. Então, concluiu que $\frac{1}{3}$ só cabe uma única vez em $\frac{1}{2}$. Não chegando a resposta correta, pois mostrou que entendeu parcialmente o problema.



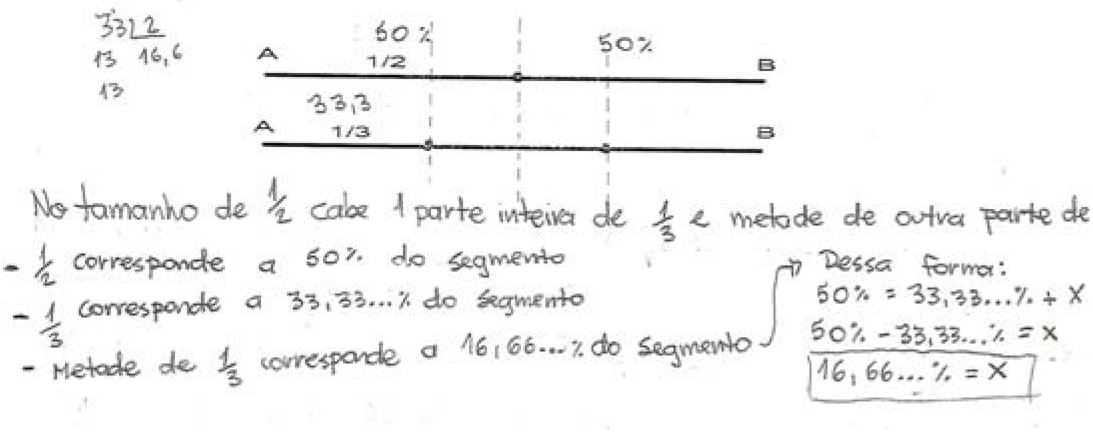
Aluno B13 – O aluno descreveu todo o processo de resolução após nomear os pontos sobre o segmento AB em ambas as figuras. Utilizou C como ponto médio de AB no primeiro segmento e D no segundo segmento, com E e F para nomear os pontos que o dividem em três partes iguais. Relacionou cada segmento a um percentual, tomando a medida de AB como 1 (a unidade) sendo 100%. Depois de comparações entre esses segmentos concluiu que “em $\frac{1}{2}$ cabem 100% mais 50% de $\frac{1}{3}$.” Essa é a resposta correta, mas o estudante não a expressa por meio das frações que utiliza.



Aluno B14 – O aluno faz uma leitura rica do problema e monta, assim, uma equação para obter a resposta. Estabelece que o segmento AB mede x e um terço desta medida somada a um segmento de medida y seria a medida exata de um meio do segmento AB, que é x. Calculando o valor de y na equação $\frac{1}{3}x + y = \frac{1}{2}x$, determinou que $y = \frac{x}{6}$. Concluindo que em $\frac{x}{2}$ cabem $\frac{1}{3}$ mais a metade de $\frac{1}{3}$. Respondendo corretamente à questão.



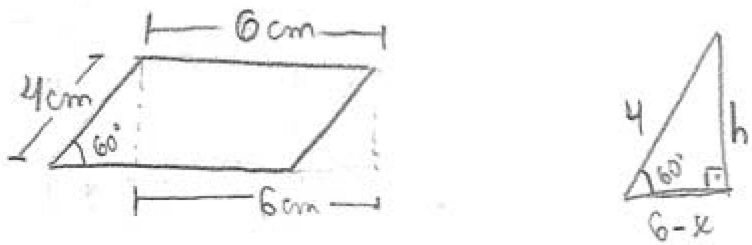
Aluno B15 – Analisando a resolução verifica-se que cada fração foi relacionada ao respectivo percentual. Atribuindo 100% para a medida do segmento AB, 50% para a sua metade, 33,33...% para um terço e, atribui à metade de um terço o valor 16,66...%. Dessa forma, concluiu que 50% era 33,33...% adicionado a um valor x, que foi calculado, confirmando que 16,66...% + 33,33...% = 50%. Logo, um terço mais sua metade é 50%. Concluindo corretamente o raciocínio.



5.2.4 Análise de dados UFRPE problema 2 - Modos de resolução dos estudantes – 2º período:

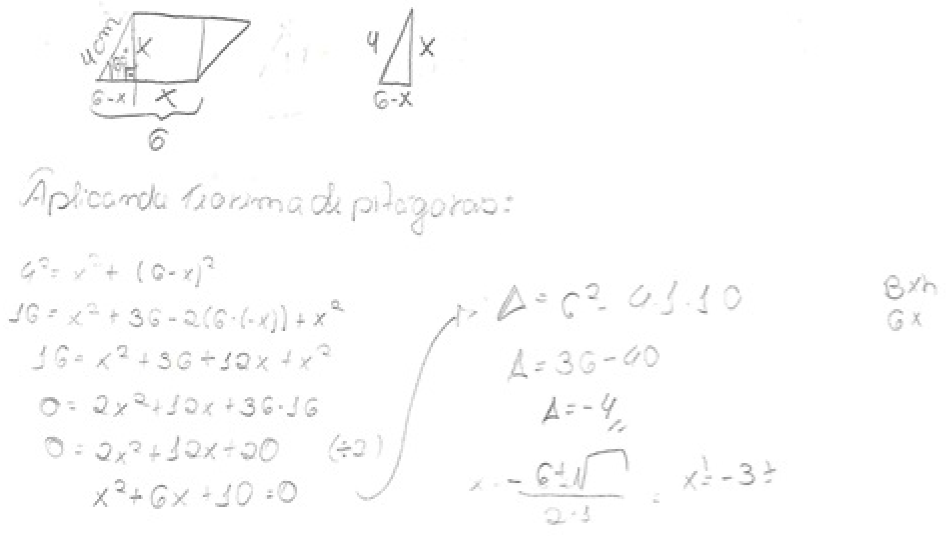
Questão 2

Aluno B1 – Pelo esboço da figura realizada pelo aluno, percebe-se que ele busca achar a altura do paralelogramo, utilizando o Teorema de Pitágoras, nota-se que apesar de ter isolado um triângulo retângulo, não deu prosseguimento ao raciocínio por constatar a ausência de dados para esse intento. Abandonando a resolução.

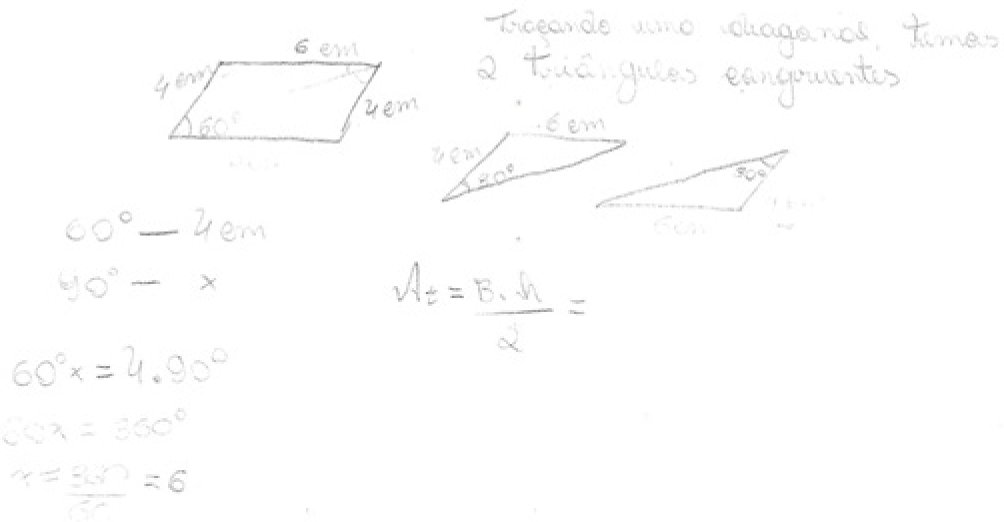


Aluno B2 – Não esboçou nenhuma tentativa de resolução.

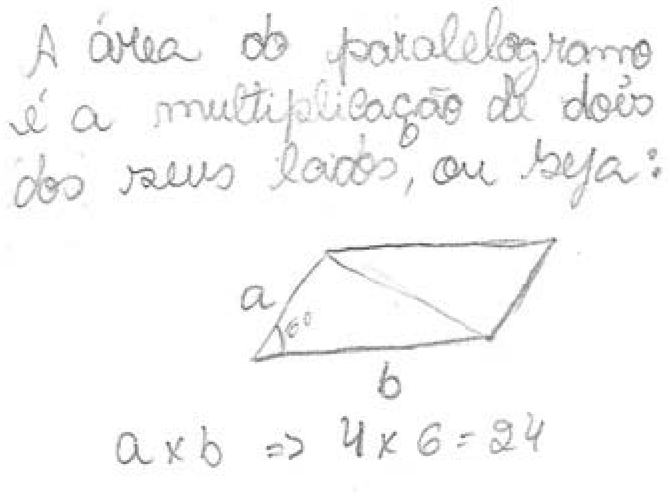
Aluno B3 – Após dividir o paralelogramo, traçando dois segmentos verticais, obteve, assim, dois triângulos retângulos. O aluno parte para a resolução utilizando o teorema de Pitágoras. Pela figura construída, o aluno identifica e nomeia a altura realçando um quadrado de lado **x**, obtendo o cateto 6 - x. Ao aplicar o teorema na figura do triangulo, que aparece isolado, estabeleceu uma solução algébrica, mas na segunda linha já ocorreu um erro. O aluno B3 usou inadequadamente o produto notável levando a valores imaginários. Ao perceber esse fato o aluno abandona o problema.



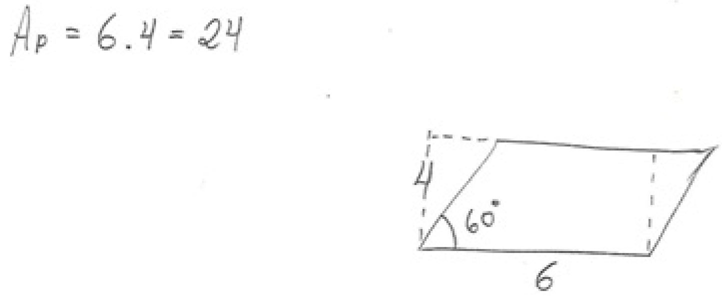
Aluno B4 – Observando a tentativa de solução do aluno, percebe-se que o mesmo não domina as propriedades, envolvendo retas paralelas cortadas por uma transversal. Pode-se observar que ao dividir o paralelogramo pela diagonal maior, colocou como 30° o ângulo agudo, formado pela secção, achando que a diagonal seria a bissetriz. A partir desse raciocínio partiu para uma proporção relacionando um ângulo ao seu lado oposto. Não chegou ao resultado, pois tal proporção não existe.



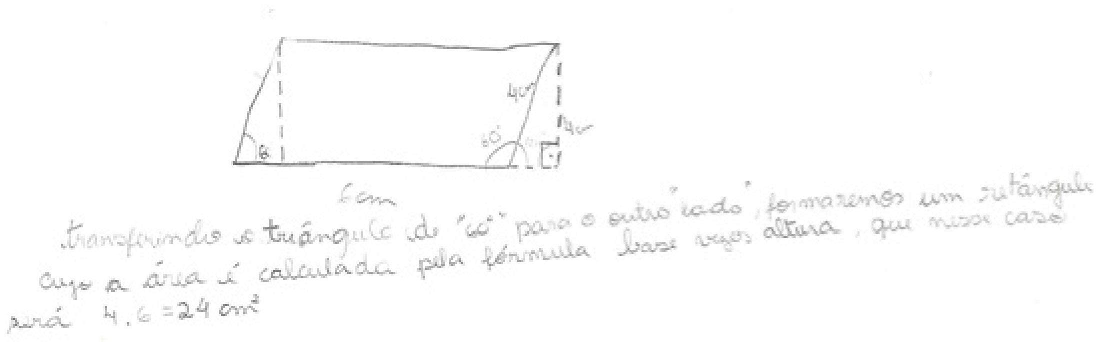
Aluno B5 – O aluno partiu do pressuposto, de que ao multiplicar os lados do paralelogramo encontraria a sua área. Errando a questão.



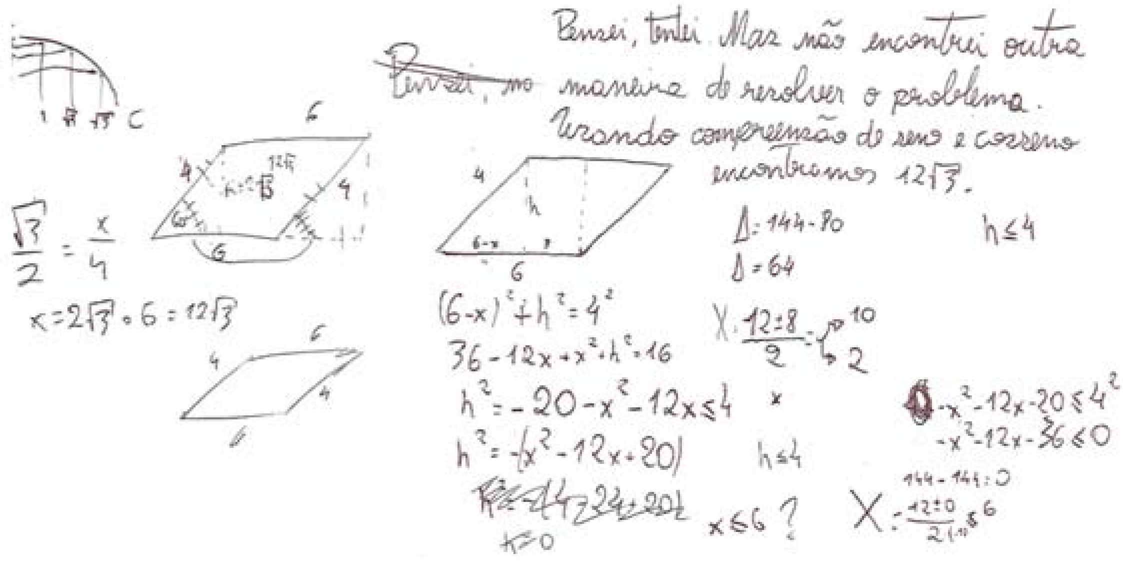
Aluno B6 – Pelo que se pode observar na resolução desse aluno, a área do paralelogramo, com lados $6cm$ e $4cm$, é o produto dessas medidas, utilizando o raciocínio do cálculo da área do retângulo. Realizando de forma errada.



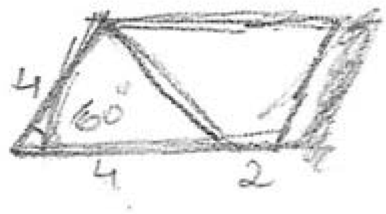
Aluno B7 – Analisando a resolução verifica-se a grande dificuldade existente em geometria. A ideia de transportar o triângulo do lado esquerdo da figura para a margem direita, formando um retângulo, foi correta, mas observa-se que o que ele criou foi um triângulo retângulo, onde um dos catetos tem a mesma medida da hipotenusa. Não concluiu corretamente. Calculou lado vezes lado achando como resposta $24cm^2$.



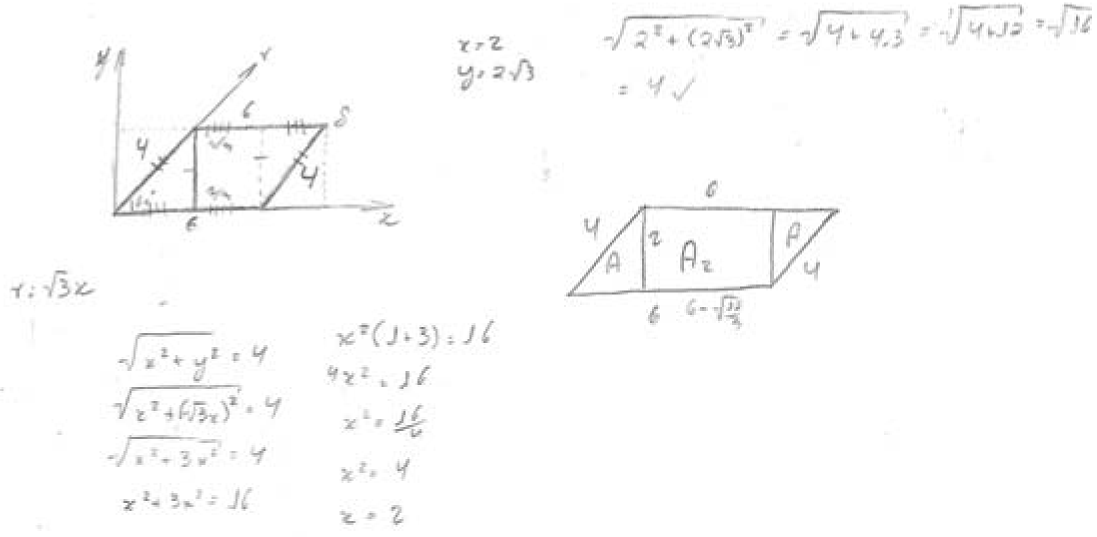
Aluno B8 – A tentativa do aluno não foi solicitada, pois ele usa o conceito de seno para achar que o valor da área do paralelogramo é $12\sqrt{3}cm^2$ (usa como teste tal procedimento). Na tentativa sem uso do seno, o aluno dividiu o paralelogramo em dois triângulos retângulos e um retângulo ao centro da figura e buscou uma solução algébrica. Montou uma equação do segundo grau na variável x, e uma constante h não determinada. Raciocinou como seria determinar o valor de h em função de x, mas não prosseguiu. Não respondeu o problema.



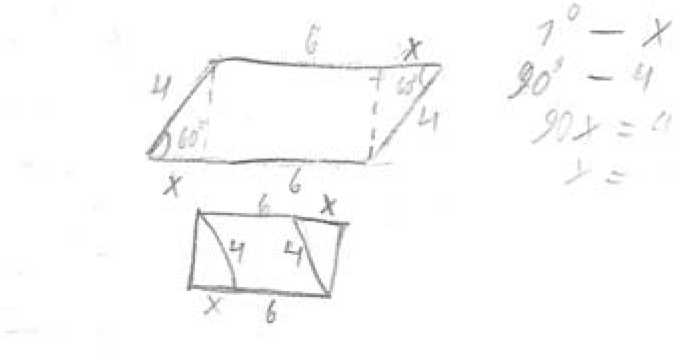
Aluno B9 – Analisando a tentativa de resolução, o aluno até iniciou esboçando, a partir do paralelogramo, um triângulo equilátero, que daria solução ao problema, mas o aluno não percebeu a perspectiva positiva que gerava a sua ideia (por não visualizar a divisão do maior ângulo do paralelogramo 120° ao meio que seria dado por essa bissetriz traçada e resultante em 60°), validando o triangulo equilátero, mas abandonou a questão.



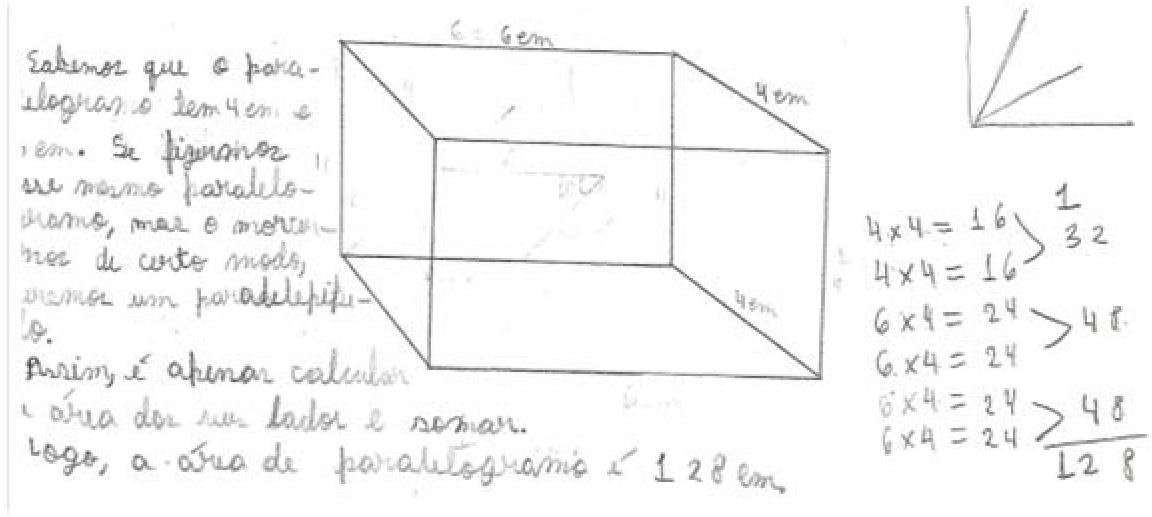
Aluno B10 – O aluno esboçou uma resolução analítica, pois ao tratar o problema no plano cartesiano e indicar retas suportes para os lados do paralelogramo, precisou de conhecimento de trigonometria, como tangente para determinar o coeficiente angular. A subdivisão do paralelogramo em áreas prescinde da medida da altura. Mesmo assim não foi possível concluir.



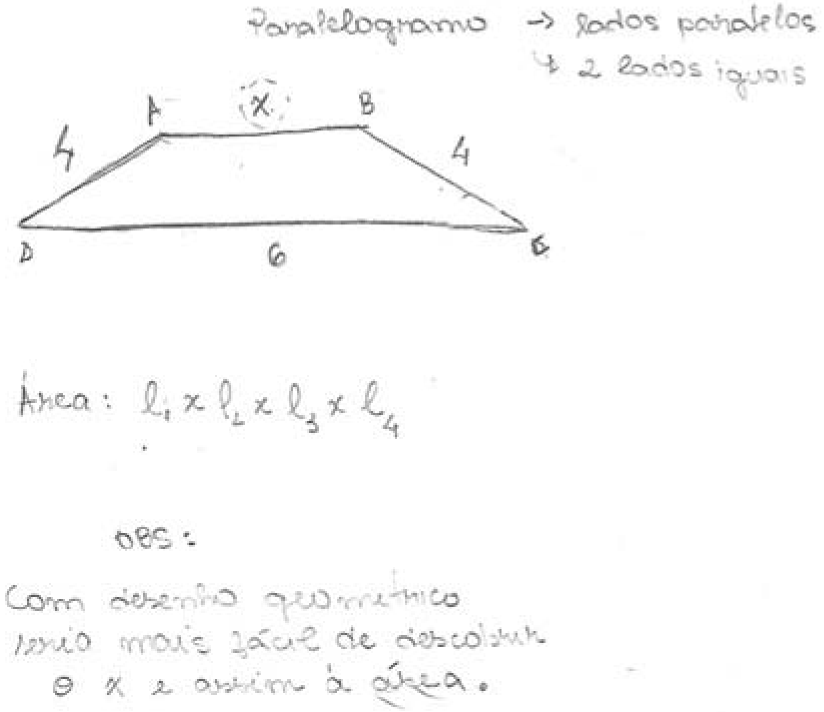
Aluno B11 – Pelo que está sendo ilustrado no desenho, o aluno usa dois caminhos para a resolução. No primeiro conservando o paralelogramo e subdividindo em triângulos retângulos e a figura de um retângulo. Ao trabalhar com os triângulos retângulos, usou a regra de três para calcular o cateto menor do triângulo, mas tal proporção não existe e ao fazer a crítica do resultado abandonou esse raciocínio. No segundo caminho, transformou o paralelogramo em um retângulo, mas não prosseguiu por esse caminho.



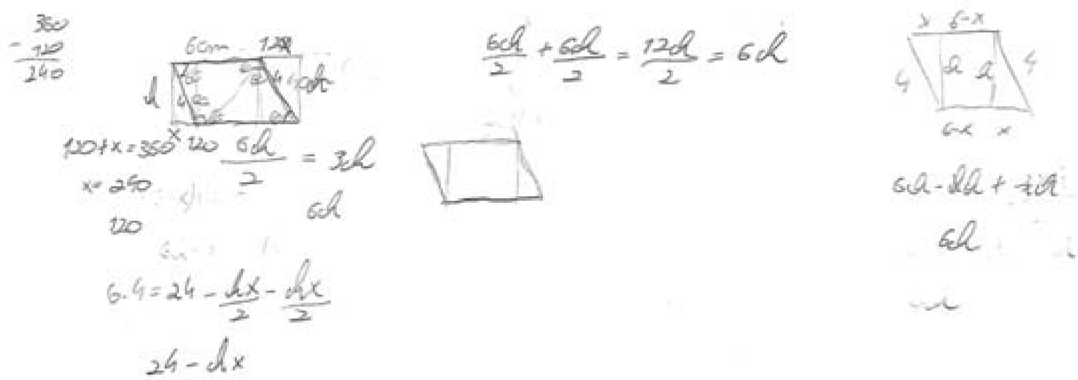
Aluno B12 – O aluno descreveu uma resolução diferente do contexto da questão no momento em que foge do plano 2d e é transforma a figura em um hexaedro. Observa-se, também, que cada face é um retângulo, logo, nenhuma das faces têm área igual a área do paralelogramo. Errando a questão.



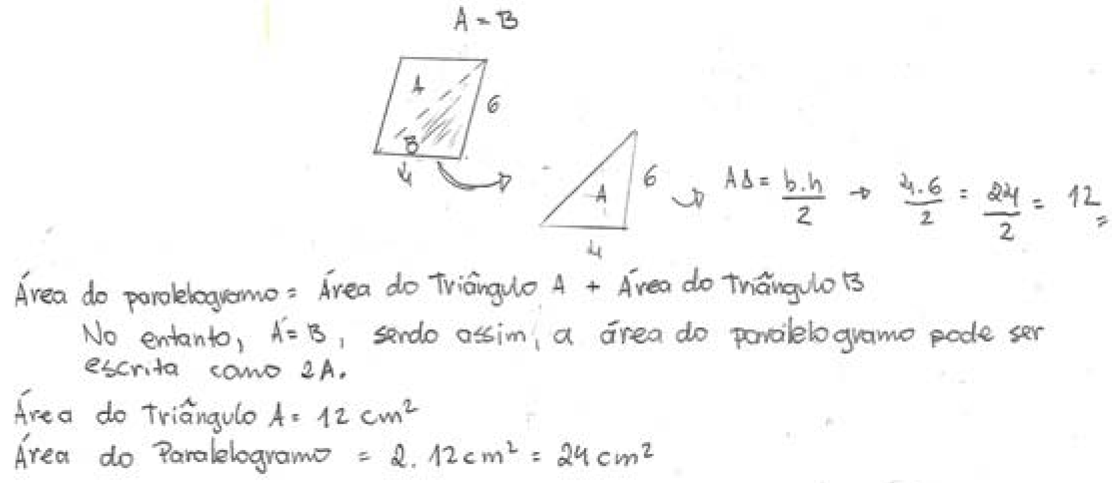
Aluno B13 – Analisando a resolução, é possível perceber que o aluno não tem conhecimento do conceito de paralelogramo, pois construiu um trapézio. Ele afirma, numa fórmula, que o produto das medidas dos lados determina a área deste. O aluno não concluiu.



Aluno B14 – Analisando a tentativa, o aluno caminhou para a resolução por dois caminhos. No primeiro construiu um paralelogramo e trabalhou os ângulos internos e a diagonal menor que, para ele, divide o ângulo de 120° ao meio. Tentou relacionar esses ângulos ao cateto menor de um triângulo retângulo para, a partir desse ponto, calcular a área. Não avançando, abandonou esse caminho. Em um segundo caminho tentou uma resolução algébrica, que também abandonou logo no início.



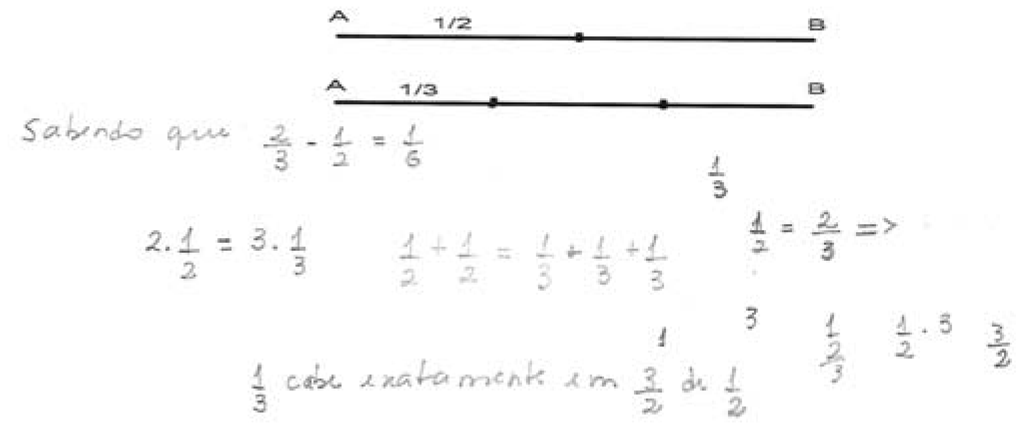
Aluno B15 – Pelo que foi mostrado na resolução o aluno descreve a área do paralelogramo como a soma das áreas A e B de dois triângulos congruentes. O aluno calculou a área como a metade do produto dos lados adjacentes do paralelogramo original. Por não dominar o conceito de altura como perpendicular à base, E15 calculou que cada triângulo tinha $A = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12$. Concluindo que a área é igual $24cm^2$. Chegando a uma resposta errada.



5.2.5 Análise de dados UFRPE problema 1- Modos de resolução dos estudantes - 3º período.

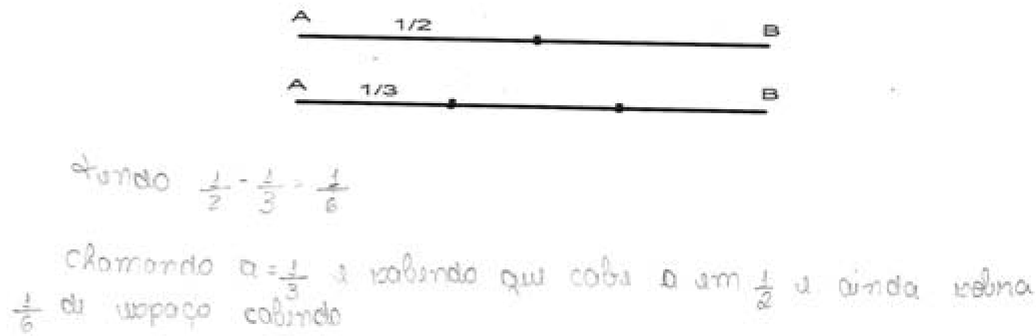
Questão 1

Aluno C1 – O aluno compreende que necessita do complemento de $\frac{1}{3}$ para a resposta. Portanto, faz $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. Chegando ao valor correto. Em um segundo momento tenta tirar a prova por meio de duas metades do segmento que é igual a três terços do segmento, usando a expressão $2 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{3}$, depois estabelece uma representação, por igualdades numéricas, dessas frações $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$. Por fim, escreve a afirmativa de que $\frac{1}{3}$ cabe exatamente em $\frac{3}{2}$, em $\frac{1}{2}$. Essa afirmação mostra que ele entendeu a pergunta, faz uma afirmação correta, mas trabalha só com a medida de um terço, sem somar o valor do $\frac{1}{6}$ que encontrou no início da resolução, respondendo de forma parcial.

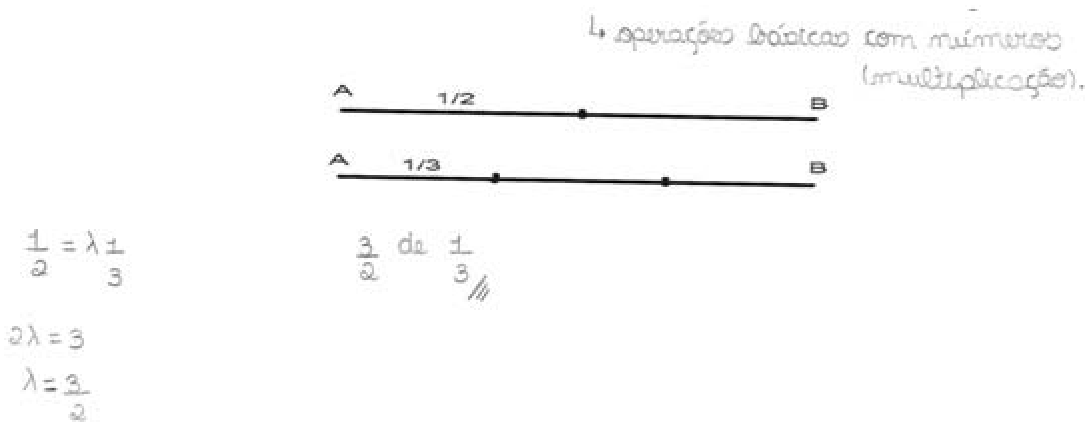


Aluno C2 – Não apresentou resolução, deixou em branco.

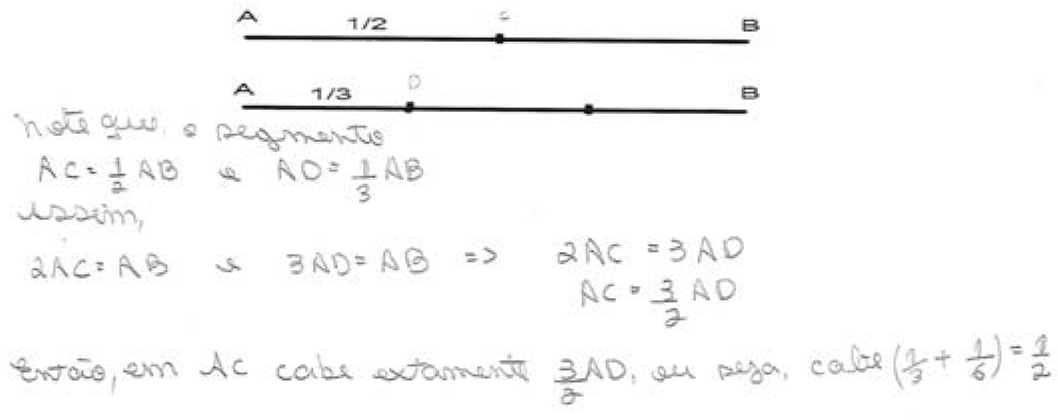
Aluno C3 – O aluno utilizou o conhecimento de frações. Calculou a diferença entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$, achando $\frac{1}{6}$. Partiu direto para a afirmação que $\frac{1}{3}$ cabe em $\frac{1}{2}$ e o espaço que sobra é $\frac{1}{6}$. A afirmação é correspondente a dizer que $\frac{1}{3}$ cabe uma vez e meia. Responde corretamente.



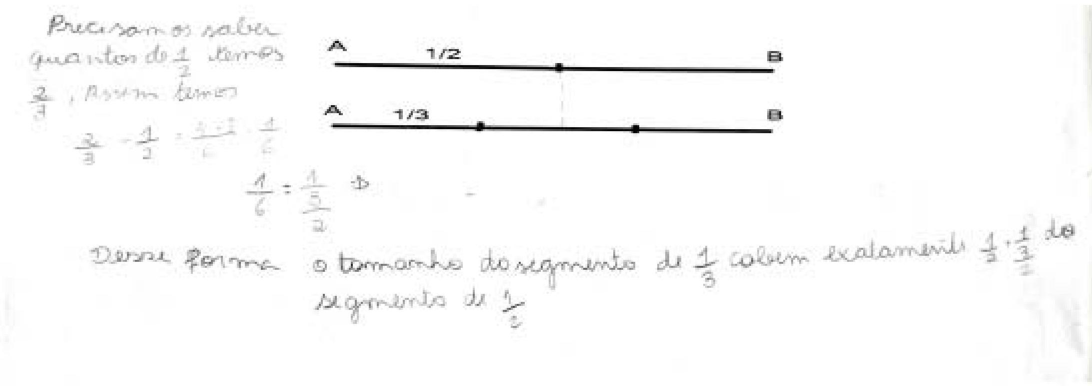
Aluno C4 – Pelo que se pode observar, o aluno trabalhou com frações e partiu para determinar quantas vezes $\frac{1}{3}$ cabe em $\frac{1}{2}$. Resolveu a equação $\frac{1}{2} = \lambda\frac{1}{3}$ obtendo a resposta esperada $\lambda = \frac{3}{2}$. Respondendo corretamente.



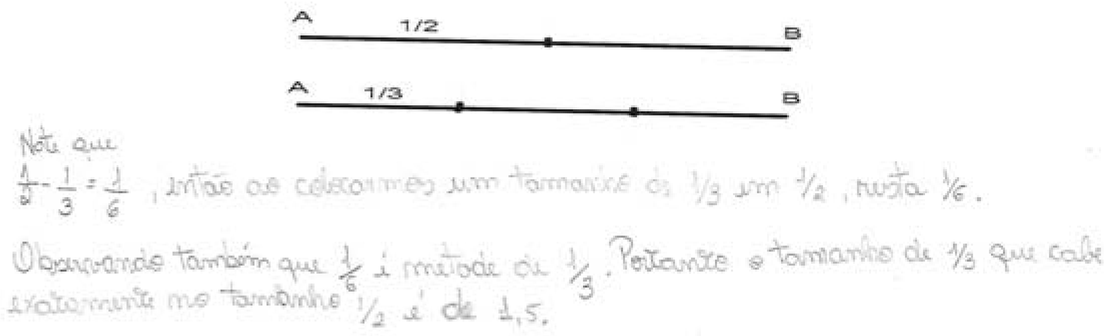
Aluno C5 – Pelas suas anotações o aluno busca a resolução geométrica. Nomeou por C o ponto médio do primeiro segmento e por D o ponto que separa o primeiro terço do segmento. Comparando AC e AD, demonstrando que chega ao conceito da questão, encontrando corretamente a relação $AC = \frac{3}{2}AD$. E ainda concluiu afirmando que $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$, respondendo corretamente.



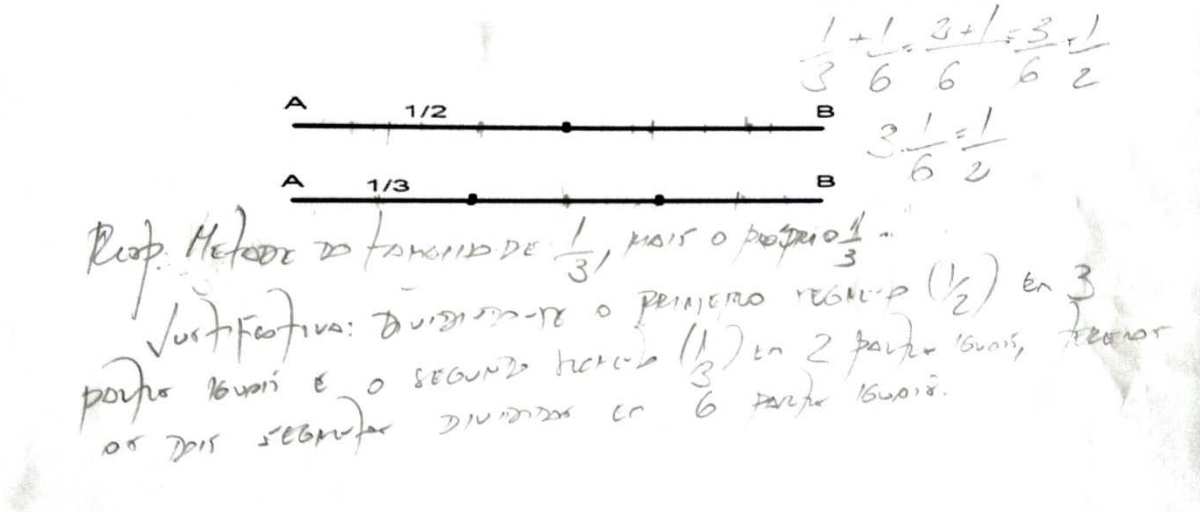
Aluno C6 – Analisando as anotações do estudante, sua tentativa é determinar a diferença entre dois terços do segmento e a metade dele, correlacionada ao tamanho $\frac{1}{2}$. Após seus cálculos apresenta uma expressão, como mostra os cálculos, em que $\frac{1}{6}$ é igual a $\frac{1}{3}$ dividido por 2. Mas, ($\frac{1}{6} \neq \frac{1}{\frac{3}{2}}$ e sim $\frac{1}{6} = \frac{\frac{1}{3}}{2}$). Assim fecha a resposta com $\frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{2}$.



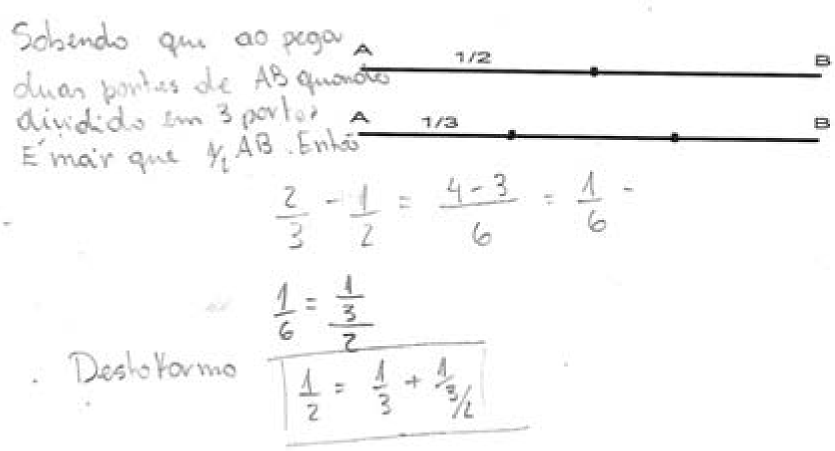
Aluno C7 – A análise das anotações mostra que o aluno faz a comparação entre as medidas achando a diferença $\frac{1}{6}$, ele conclui que a soma de $\frac{1}{3}$ com $\frac{1}{6}$. Concluiu afirmando que $\frac{1}{3}$ cabe 1,5 vezes em $\frac{1}{2}$. Corretamente.



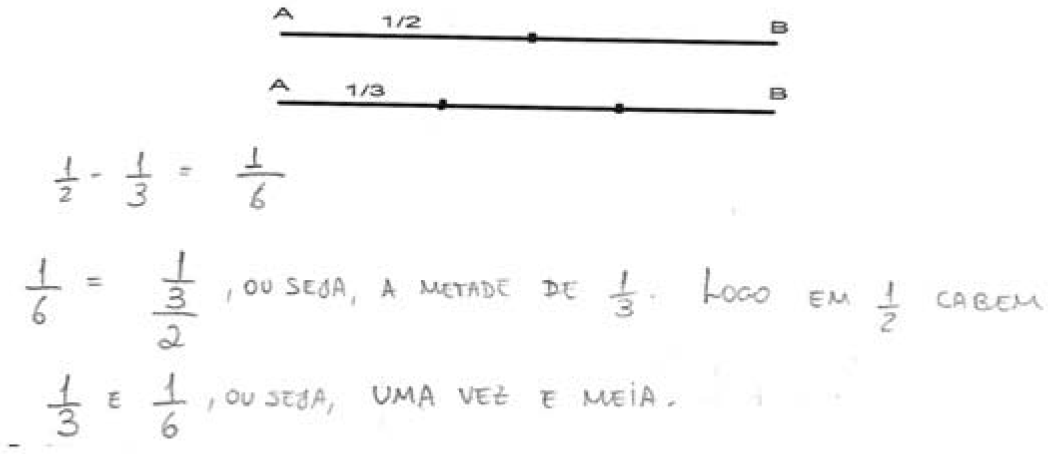
Aluno C8 – O aluno utilizou uma resolução geométrica com uso de frações. Pelas marcações nos segmentos ele o divide em seis partes iguais, fracionando o segmento, e, depois, soma eles para, somente nesse ponto, achar $\frac{1}{2}$. Conclui que três partes desse segmento são iguais a $\frac{1}{2}$. Utilizando a soma de frações ele mostra o resultado $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ou ainda $3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Respondendo corretamente.



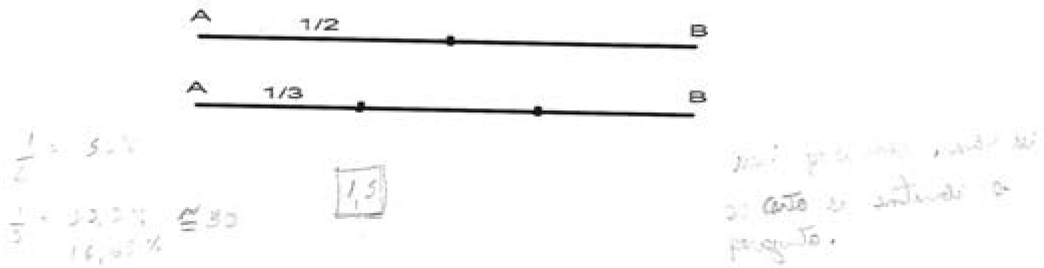
Aluno C9 – Pelas anotações, o aluno caminhou para uma resolução geométrica. Utilizando frações para comparar dois terços da segunda figura com metade da primeira, achando a diferença que é $\frac{1}{6}$, observou que isso é a metade de $\frac{1}{3}$. Constatou que $\frac{1}{3}$ mais sua metade $\frac{1}{6} = \frac{\frac{1}{3}}{2}$ é igual a $\frac{1}{2}$. Mostrando, por fim, a resposta correta.



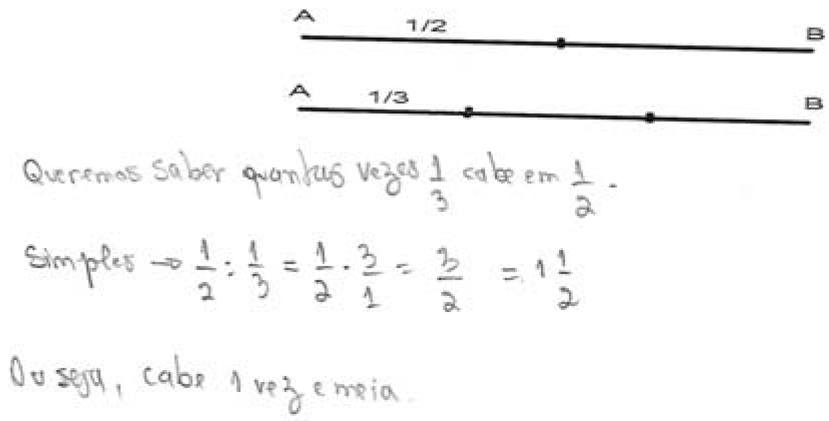
Aluno C10 – Pela análise dos dados o aluno utiliza frações para a resolução do problema, calculando a diferença entre a metade do segmento e sua terça parte encontrou $\frac{1}{6}$, pois $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, reconheceu que $\frac{1}{6} = \frac{\frac{1}{3}}{2}$, e conclui, corretamente, que $\frac{1}{3}$ cabe uma vez e meia em $\frac{1}{2}$.



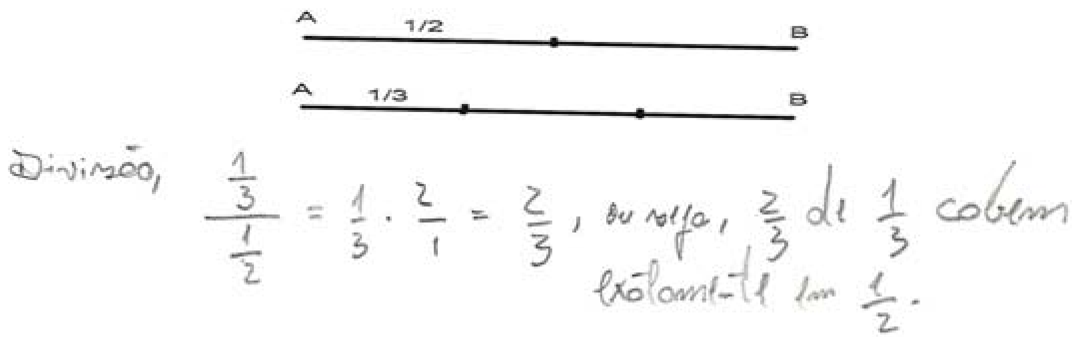
Aluno C11 – A análise da resolução mostra que o aluno resolveu por porcentagem. O caminho não está muito claro, pois a resolução foi simplificada, mas relacionou $\frac{1}{2}$ a 50% e $\frac{1}{3}$ a 33,3%. Quando faz referência à 16,6% entende-se que seja a metade de $\frac{1}{3}$. Concluiu colocando a resposta como 1,5, a quantidade de vezes que $\frac{1}{3}$ cabe em $\frac{1}{2}$, corretamente.



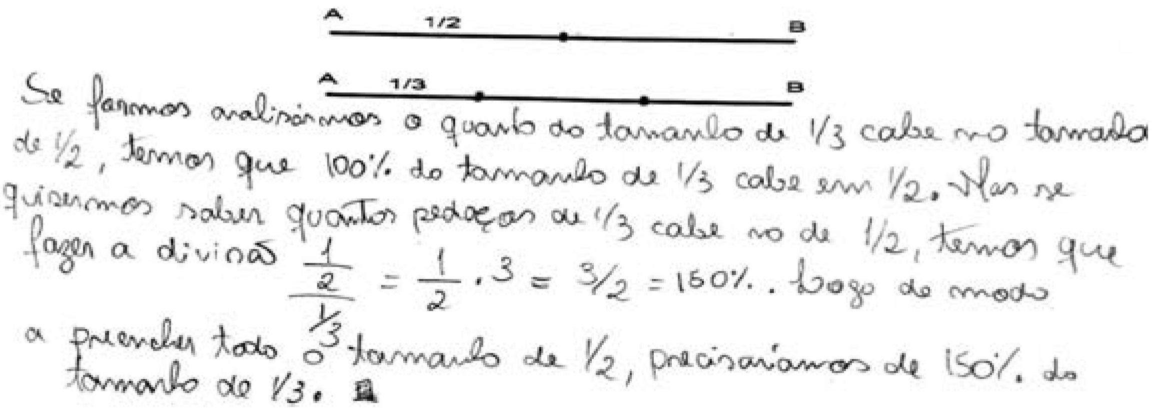
Aluno C12 – O aluno faz a comparação das frações do problema. De forma correta, ele vê a compreensão conceitual do problema, apresentando a divisão $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$ como a solução. Validando por $(\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2})$, uma vez e meia, corretamente.



Aluno C13 – O aluno compreende o conceito da questão corretamente busca a solução pelo quociente entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ onde deveria ser $\frac{1}{2}$ dividido por $\frac{1}{3}$. Arma de forma equivocada a divisão, encontrando 2/3, mesmo assim, chega a uma conclusão confusa, dizendo que $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{3}$ cabe exatamente em $\frac{1}{2}$, o que não é verdade.



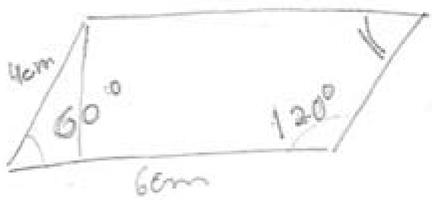
Aluno C14 – Pelo que foi mostrado, o aluno parte para equivalência entre as frações e os respectivos percentuais. Afirma que 100% de $\frac{1}{3}$ cabem em $\frac{1}{2}$. Parte para a comparação entre os segmentos usando frações encontrando que $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2} \rightarrow 150\%$. Concluiu afirmando que precisa de 150% de $\frac{1}{3}$ para ter $\frac{1}{2}$. Respondendo corretamente.



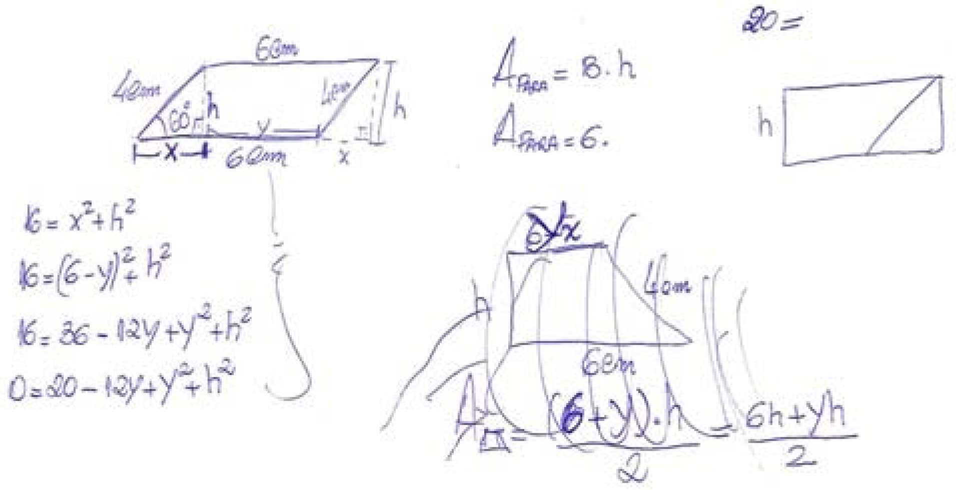
5.2.6 Análise de dados UFRPE problema 2 - Modos de resolução dos estudantes - 3º período.

Questão 1

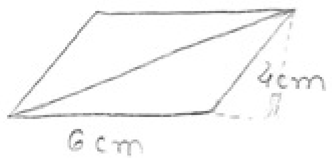
Aluno C1 – O aluno desenhou um paralelogramo, esboçou uma solução geométrica, mas não continuou. Abandonou o problema.



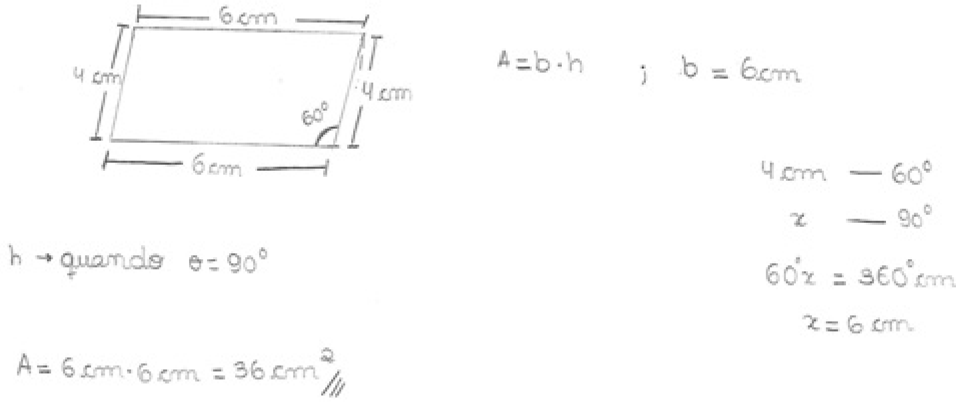
Aluno C2 – Analisando o esquema de resolução, ele tentou uma resolução algébrica. Dividiu o paralelogramo em triângulos retângulos e um retângulo, utilizou-se de duas incógnitas x e y, cuja soma era $6cm$. Utilizando o teorema de Pitágoras, montou uma equação que não o levou a uma solução. Abandonou esse caminho e o problema.



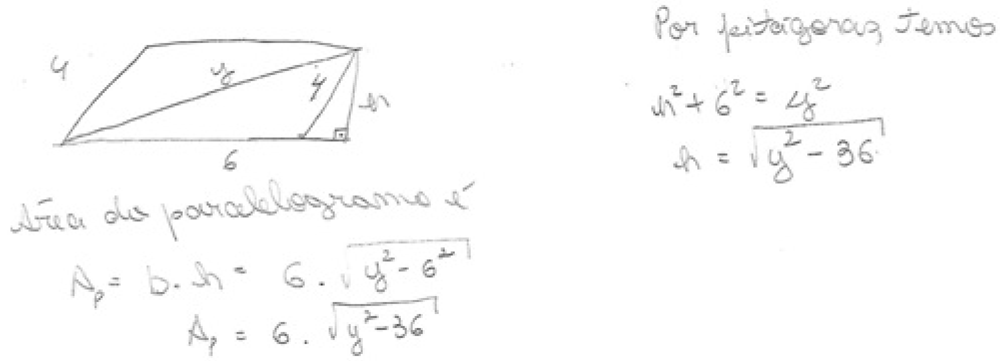
Aluno C3 – Aparentemente o aluno tentaria uma solução geométrica, mas não deu prosseguimento. Abandonou a resolução.



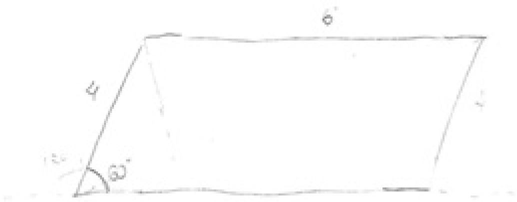
Aluno C4 – O aluno partiu para resolução geométrica. Observa-se que o aluno descreve o ângulo de 60° como obtuso, mostrando desatenção ou desconhecimento. Utilizou a regra de três para calcular a altura, mas tal proporção não existe, mesmo assim encontrou para a altura $6cm$. Concluiu equivocadamente que a área do paralelogramo era 6 x 6 = 36, $36cm^2$. Errado.



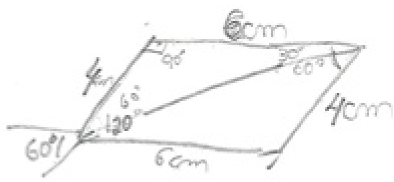
Aluno C5 – Pelo que pode ser observado, a tentativa do aluno enveredou por um caminho que dá para uma solução algébrica. À diagonal foi dada a media y e à altura h, que foram usadas para determinar a hipotenusa e um dos catetos do triângulo. Utilizou o teorema de Pitágoras para isolar o h em relação ao y. Não houve avanço. O fato da não observação do ângulo dado pode ter sido um fator para o não avanço da resolução. Nada concluiu. Abandonou o caminho.



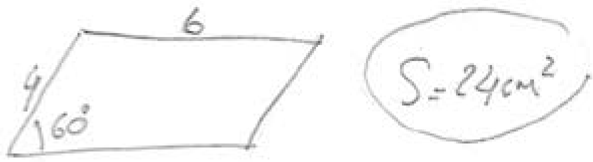
Aluno C6 – O aluno aparentemente tentaria uma solução geométrica, mas, após desenhar o paralelogramo, abandonou o problema.



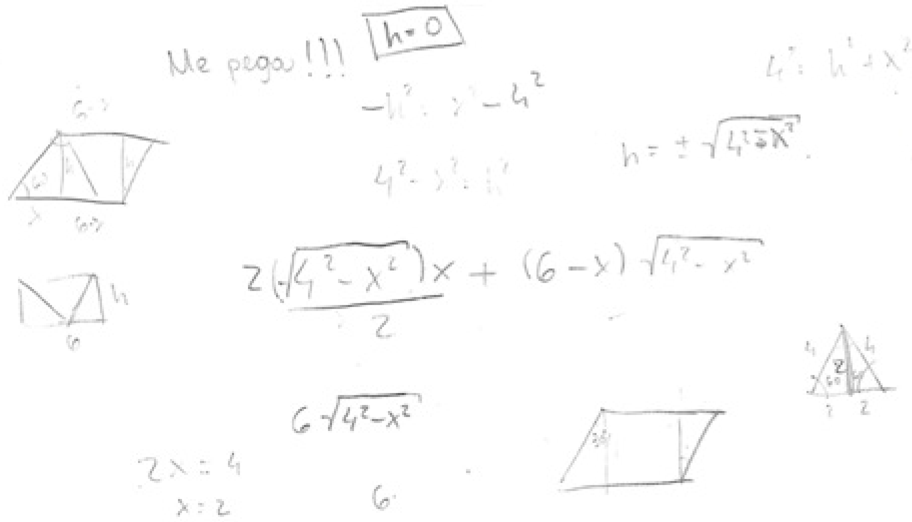
Aluno C7 – Analisando o procedimento e observando a figura feita pelo aluno, o mesmo caminhou para uma solução geométrica. Utilizou o seu conhecimento de retas paralelas cortadas por uma transversal, mas ao mesmo tempo representou o 120° como ângulo agudo e 90° em duas situações como agudo e como obtuso. Abandonou o problema e nada concluiu.



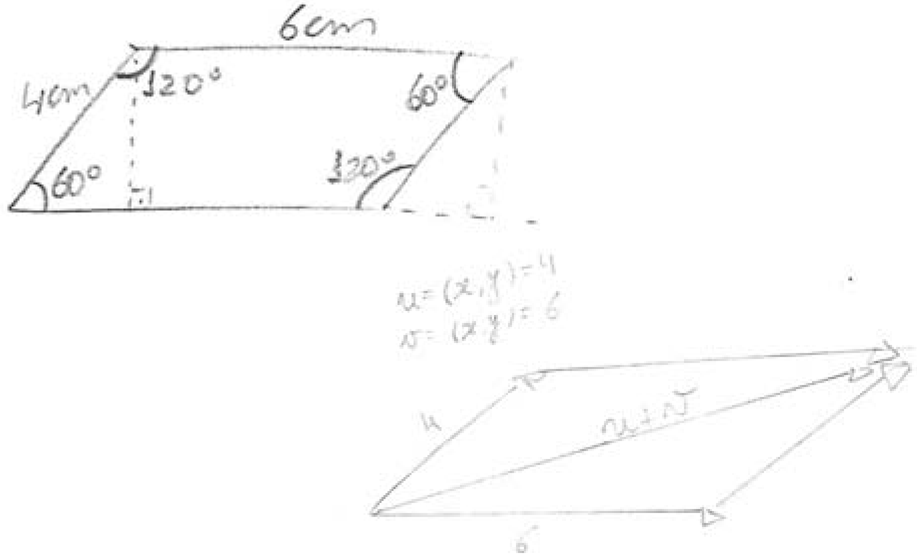
Aluno C8 – Pelo que se deduz, o aluno acredita que a área de um paralelogramo é igual ao produto dos lados. $S = 6 \cdot 4 = 24$. Errado.



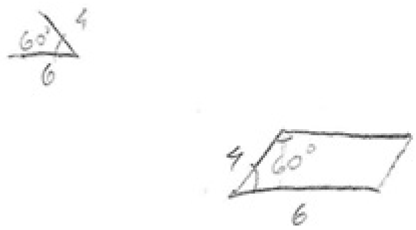
Aluno C9 – Analisando as anotações do aluno, percebe-se que ele caminha por dois processos para a resolução. Um deles é o da solução pelo método geométrico. Ele até consegue montar um triângulo equilátero como visto no canto inferior direito da área para resolução, mas não prossegue nesse mesmo raciocínio, abandonando essa tentativa. Numa segunda tentativa, parte para uma solução algébrica, onde $h = \sqrt{4^2 - x^2}$ é encontrado, utilizando o teorema de Pitágoras. A partir desse ponto não conseguiu desenvolver um método para achar a área e acabou por abandonar o problema.



Aluno C10 - Analisando as anotações percebe-se que o aluno segue dois métodos de resolução: um através da geometria euclidiana e outro através da geometria analítica, mas não desenvolve nenhum esboço de resolução em ambos os casos.

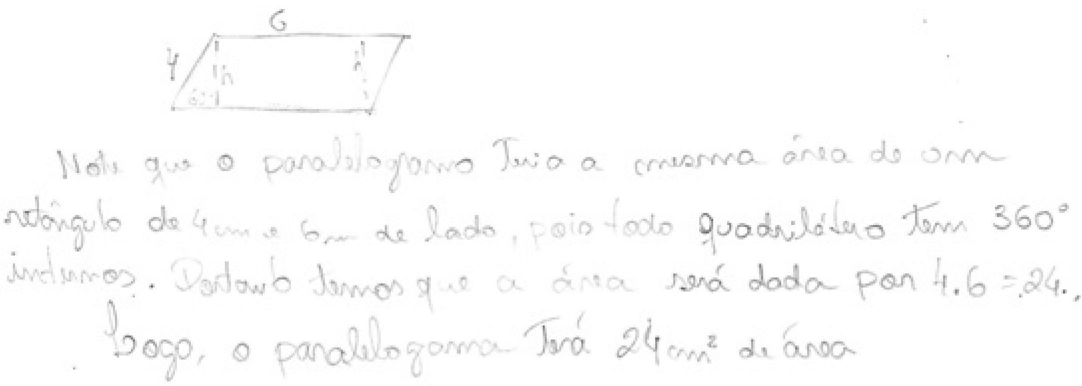


Aluno C11 – O aluno apesar de desenhar um paralelogramo não esboçou nenhuma tentativa de resolução.

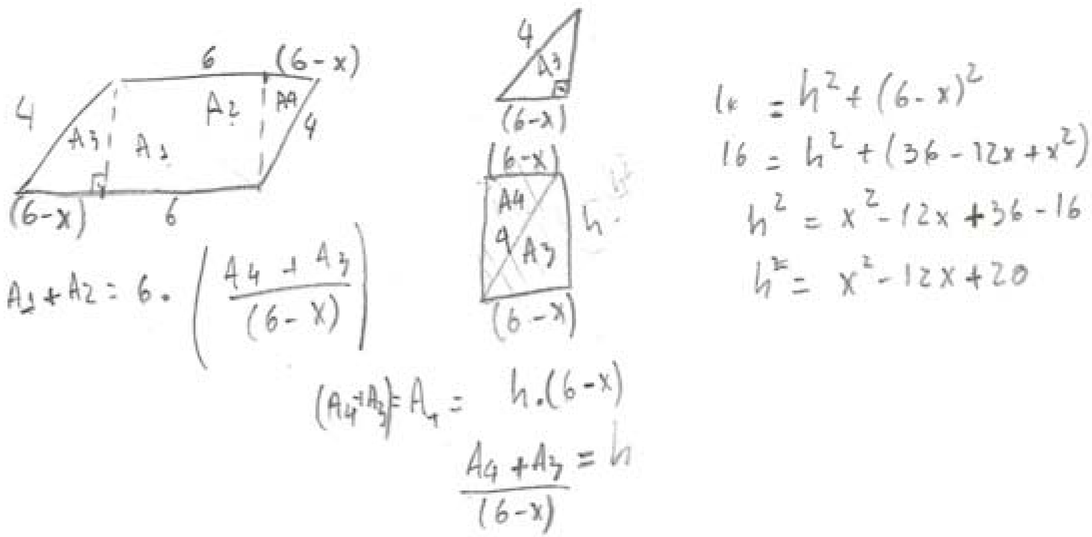


Aluno C12 – Em branco.

Aluno C13 – Analisando o que escreve o aluno, vê-se que este tem a convicção de, pelo fato de ser um paralelogramo e a soma dos ângulos internos ser igual a 360°, as figuras são equivalentes, independente do ângulo entre seus lados adjacentes. Isso não é verdade. Concluiu o raciocínio multiplicando lado vezes lado.



Aluno C14 – Pela análise dos dados nota-se uma combinação de geometria e álgebra. O paralelogramo foi dividido em quatro triângulos retângulos, foi criativo quando juntando A4 com A3 criou um retângulo de lados $(6-x)eh$. Mas as relações entre as áreas não ficaram claras na resolução. Na parte algébrica o aluno errou na aplicação do teorema de Pitágoras e errou também por não entender que o ângulo dado não foi vago.



Capítulo 6

RESULTADOS

A análise quantitativa revela que os alunos oriundos do ensino médio integrado estão com baixa aprendizagem em geometria, mesmo aqueles que já ingressaram em cursos de licenciatura em matemática, cursando o 2º ou o 3º período, carregam essa dificuldade.

A análise quantitativa da questão 1 indica que os problemas que relacionam o conhecimento de número, medida e geometria provocam certo transtorno em alguns estudantes, pois os mesmos não conseguem, em certos casos, diferenciar corretamente a relação que compreende valor numérico de uma medida ou expressão geométrica e, mesmo aqueles que conseguem avançar, ficam confusos quando estes três conceitos estão integrados numa mesma situação-problema, como a que foi trabalhada, parece, inclusive, que a dificuldade aumenta.

Verificamos que do grupo de estudantes analisados, temos um total de 12 (doze), que resolveram a questão 2 efetuando o produto da medida 4 pela medida 6 do paralelogramo, ou seja, 4 X 6, demonstrando que generalizam o cálculo da área de um retângulo (base X altura), para outras figuras, como no caso do paralelogramo.

Na dificuldade de encontrar a resposta correta do problema 2, alguns estudantes buscaram recurso na representação do trapézio, no sentido de perceber alguma relação deste com o paralelogramo.

A análise qualitativa revela que apesar de termos aplicado problemas bem específicos, que não nos permite tirar uma conclusão geral, revela, pelo quantitativo de alunos pesquisados, que o ensino de geometria vem se tornando um caso preocupante em questões relativas à formação de estudantes do ensino superior em matemática e que, em um futuro próximo, estarão lecionando matemática nas escolas.

Entre os estudantes que já ingressaram no ensino superior, a investigação revelou um dado que aponta para uma grande surpresa, a qual nenhum dos investigados conseguiu resolver a questão 2 do presente estudo, que restringia o uso de uma ferramenta comum usada no tipo de problema, que é o conhecimento trigonométrico.

Quanto ao tipo de questão abordada no estudo, observa-se que o mesmo pouco aparece nos livros ou pouco é utilizado na maioria dos estudos sobre Resolução de Problema. É preciso enriquecer o tipo de problema usado na metodologia de Resolução de Problema, ou o ensino estará apenas corroborando com a forma que vem sendo apresentada nos livros didáticos, no qual, apenas apresentam questões que indicam pistas ou requerem o emprego de equações próprias à solução dos problemas propostos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Observamos que há uma necessidade urgente de discussão sobre os tipos de problemas que são utilizados como incentivo ao processo de Resolução de Problema trabalhado pelos professores.

Percebemos pelo resultado alcançado que os Livros Didáticos não vem oferecendo situações que coloquem os estudantes diante de uma reflexão do uso dos saberes aprendidos sobre geometria.

Reconhecemos que novos estudos precisam ser realizados para buscar um detalhamento mais seguro do fenômeno observado no estudo sobre a dificuldade em geometria apresentada pelos estudantes.

Entendemos que uma continuidade do nosso estudo se faz necessária, pois trará avanços nos quesitos observados, como também levantar discussão para se ter mais clareza dos fatos que foram evidenciados nos resultados.

É necessário que se aprofunde uma discussão sobre os problemas não rotineiros nas escolas, no sentido de colocar em alerta alunos e professores para tornar essa prática mais frequente.

Referências Bibliográficas

[1] ABRANTES, P. "**Um (bom) problema (não) é (só)...**" publicado na revista Educação e Matemática, 8, 7-10 e 35. Portugal. 1989. Endereço: http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/COORDENADORES/Materiais%20Coordenad/Textos/Abrantes%201989.pdf visitado em 12.03.2018

[2] ARSAC, G., et. Al., **Probleme ouvert et situation-problème**. Presses Universitaires de Lyon: Franca, IREM, 1991.

[3] N. S. G. Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência. Tese de Doutorado (Programa de Pós- Graduação em Educação Matemática, UNESP/Rio Claro-SP), 2005.

[4] BOYER, CARL B.; MERZBACH, UTA C., **História da Matemática**. Blucher, São Paulo, (1996:2012).

[5] BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: MEC, 1999.

[6] J. M. e SANTOS WAGNER, V. M. P. Estratégias de Resolução de Problemas de Divisão não Rotineiros. Revista Teoria e Prática da Educação, v. 18, n.2, p. 121-132, Maio/Agosto, Departamento de Teoria e Prática da Educação da Universidade Estadual de Maringá-UEM 2015.

[7] CONEJO, L. y ORTEGA, T. **Clasificación de los problemas propuestos en aulas de Educación Secundaria Obligatoria**. Educación Matemática, vol. 25, núm. 3, diciembre de 2013.

[8] CÂMARA, M. **Um exemplo de situação problema: o problema do bilhar**. In: Revista do Professor de Matemática, n.50. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, p.38-45, 2002.

[9] DANTE, Luiz Roberto. **Criatividade e Resolução de Problemas na prática educativa matemática**. Rio Claro: Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Tese de Livre Docência, 1988.

[10] DANTE, Roberto Luiz. **Didática da Resolução de Problemas de matemática**: 1ª a 5ª série. 1ª Ed. São Paulo: Editora Ática, 1989

[11] DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo: Editora Ática, 2005.

[12] DELGADO, JORGE; FRENSEL, KÁTIA; CRISSAFF, LHAYLLA. **Geometria Analítica**. Coleção Profmat – Sociedade Brasileira de Matemática. Rio De Janeiro – RJ, 2016-2017.

[13] Eves, Howard. Introdução à História da Matemática; tradução: Hygino H. Domingues Campinas - São Paulo, Editora da Unicamp, 2004.

[14] KLINE, Morris. **O Fracasso da Matemática Moderna**. Tradução Leônidas Gontijo de Carvalho. São Paulo: IBRASA, 1976.

[15] LESTER, F, e CHARLES, R. **Teaching problem solving: what, whyand how**. New York: Dale Seymur Publications, 1982.

[16] MORGAN, C. **The place of pupil writing in learning, teaching and assessing mathematics**. In: Edited by Peter Gates- Issues in mathematics teaching, 2001, pp. 232-244.

[17] MORGAN, C. **Learning to write mathematically**. Proceedings of the British Society for Research in Mathematics Learning, Birmingham University, 1995, pp. 19-24.

[18] NCTM. **Curriculum and evaluation standards for school mathematics**. Reston, VA: NCTM. 1987.

[19] ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Novas Reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através de Resolução**

de Problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M de C. (Org). Educação matemática: pesquisa e movimento. São Paulo: Cortez, 2004, p. 213 - 231.

[20] ONUCHIC, L. R. **Pesquisas em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas**. Revista Bolema, Rio Claro (SP), v. 25, nº 41, p. 73-98, dez. 2011. Disponível em: Acesso em: 18 de dez. de 2014.

[21] Provinha Brasil, Site: http://provinhabrasil.inep.gov.br/provinhabrasil/#/

[22] POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. Rio de janeiro: Editora Interciência, 1978.

[23] RODRIGUES, IVAN CRUZ. Resolução de Problemas em Aulas de Matemática Para Alunos de 1º a 4º Séries do Ensino Fundamental e a Atuação do Professor. PUC/SP – São Paulo, 2006.

[24] SMOLE, Kátia C. S. e CENTURIÓN, Marilia. A matemática de jornais e revistas. RPM n.º 20, 1.º quadrimestre de 1992.

[25] STANIC, G. M. A., & KILPATRICK, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), **The teaching and assessing of mathematical problem solving** (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum. http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/stanic-kilpatrick%2089.pdf Visitado em 13.03.2018.

[26] STEWART, I. **Os maiores problemas matemáticos de todos os tempos**. Ed. Editora Zahar, 421 páginas, Out. 2014.

[27] TAHAN, M. **O homem que Calculava**. Rio de Janeiro: Editora Record, 2007.

[28] TAO, TERENCE. **Solving mathematical problems: a personal perspective**, Deakin University Press, 1992.