UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Gustavo Vasconcelos Duarte

As Recorrências como ferramentas didáticas para o desenvolvimento do raciocínio recursivo

RECIFE
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Gustavo Vasconcelos Duarte

As Recorrências como ferramentas didáticas para o desenvolvimento do raciocínio recursivo

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática - do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof.Dr.Gabriel Araújo Guedes.

RECIFE
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

D812r Duarte, Gustavo Vasconcelos
As recorrências como ferramentas didáticas para o desenvolvimento do raciocínio recursivo / Gustavo Vasconcelos Duarte. – 2018.
78 f. : il.

Orientador: Gabriel Araujo Guedes.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de
Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Recife, BR-PE, 2018.
Inclui referências, anexo(s) e apêndice(s).

1. Didática 2. Matemática – Estudo e ensino 3. Sequências (Matemática) 4. Aritmética – Estudo e ensino 5. Teoria da recursão I. Guedes, Gabriel Araujo, orient. II. Título

CDD 510

GUSTAVO VASCONCELOS DUARTE

As Recorrências como ferramentas didáticas para o desenvolvimento do raciocínio recursivo

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática - do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em _________.

BANCA EXAMINADORA

Prof.Dr.Gabriel Araújo Guedes(Orientador)-UFRPE

Prof^a.Dr^a.Maria Ângela Caldas Didier-UFRPE

Prof.Dr.Luis Guillermo Martinez Maza- UFAL

Dedicatória

Aos meus filhos Gabriel e Gustavo, simplesmente por eles existirem.
A minha esposa, pelo apoio e companheirismo incondicional.
Aos meus pais pelas primeiras lições recebidas.
Aos meus irmãos, por serem meus melhores amigos.

Agradecimentos

A Deus pelo dom da vida, por mais essa conquista, e por sempre estar ajudando nos meus sonhos e me confortando nas dificuldades.

Ao meu pai Ednaldo pois graças a ele aprendi a gostar desse maravilhoso mundo dos números. A minha mãe Marlúcia, que me ensinou com maestria a verdadeira essência da palavra família e aos meus irmãos Chris e Fabinho que sempre apoiaram meus projetos.

A minha esposa Gercina e aos meus filhos Gabriel e Gugu, que me proporcionaram as melhores condições de me dedicar ao mestrado. A eles peço minhas sinceras desculpas pela minha ausência em vários momentos familiares. Ao Gabriel, agradeço também as valiosas sugestões que foram agregadas a essa tese.

Ao meu orientador e professor Gabriel Guedes, que aceitou me orientar, sou grato pelos ótimos ensinamentos e pelas infinidades de horas dedicadas a realização do meu objetivo sempre com muita paciência e profissionalismo.

Aos professores e coordenadores do campus UFRPE, SBM e IMPA pela oportunidade de voltar a estudar com tanto aprendizado, em especial ao amigo e professor, Rodrigo Gondim, minha referência no trato com a matemática agradeço também à Adriano Regis, Anete Cavalcanti, Bárbara Costa, Maité Kuleza, Marcelo Pedro, Maria Ângela Didier, Thiago Dias.

A todos os colegas do , que foram fundamentais para mais essa etapa vencida, em especial aos amigos irmãos Roberto Costa e Rui Lima que, em todas as horas compartilharam conhecimento e sempre me incentivaram a continuar caminhando. Sem eles a conclusão teria sido mais árdua.

A minha diretora, Rosa Amélia Muniz (Colégio Santa Maria), ao meu diretor, Marcelo Melo (Colégio GGE), por sempre acreditarem no meu trabalho, nos meus projetos, e na minha capacidade. Obrigado por oferecerem sempre com tanta confiança, a grande oportunidade de viver fazendo aquilo que amo.

Por fim, mas não menos importante, gostaria de agradecer a alguns professores e amigos que, de alguma forma abraçaram esse meu projeto, são eles: Almir Serpa, Andreia Simone, Ivan Dutra, José Jorge, Luiz Antônio Lima, Luiz Cabral, Márcio Gomes, Marconi Sousa, Marcos Miguel, Marcos Sobral, Mírian Gonçalves, Moacyr Aquino, Renato Asfora, Ricardo Berardo, Rildo Vaz, Simone Rodrigues, Vital Lima e Wagner Ramos.

"A escada da sabedoria tem os degraus feitos de números."
Helena Blavatsky

"A matemática é a mais simples, a mais perfeita e a mais antiga de todas as ciências."
Jacques Hadarmard

DECLARAÇÃO

Eu, **Gustavo Vasconcelos Duarte** declaro, para devidos fins e efeitos, que a dissertação sob título **As Recorrências como ferramentas didáticas para o desenvolvimento do raciocínio recursivo**, entregue como Trabalho de Conclusão de curso para obtenção do título de mestre, com exceção das citações diretas e indiretas claramente indicadas e referenciadas, é um trabalho original. Eu estou consciente que a utilização de material de terceiros incluindo uso de paráfrase sem a devida indicação das fontes será considerado plágio, e estará sujeito à processo administrativos da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais. Declaro ainda que respeitei todos os requisitos dos direitos de autor e isento a Pós-graduação PROFMAT/UFRPE, bem como o professor orientador **Gabriel Araújo Guedes**, de qualquer ônus ou responsabilidade sobre a sua autoria.

Recife, 28 de setembro de 2018.

Assinatura:__________________________.

Resumo

Nesta dissertação será apresentado inicialmente um breve histórico sobre o desenvolvimento do estudo das recorrências e suas implicações dentro do estudo da matemática elementar. As recorrências e suas aplicações têm grande participação na resolução de problemas de diversas áreas da matemática. Algumas dessas aplicações serão demonstradas aqui com o intuito de proporcionar ao leitor uma maior diversidade de problemas capazes de serem apresentados aos alunos numa sala de aula do ensino médio de forma cativante e que instigue esses alunos a se sentirem desafiados e motivados a buscar a solução de tais problemas. Apresentarei aqui alguns problemas clássicos para que seja possível fazer algumas análises e procurar soluções alternativas que demonstrem mais simplicidade de raciocínio e menos uso de métodos de soluções sofisticados da matemática, métodos esses que fogem do escopo do ensino médio. Analisarei algumas sequências elementares, progressões aritmética e geométrica, métodos cognitivos de soluções de recorrência, além de algumas breves explicações e exemplificações a respeito das classificações das recorrências quanto à ordem. Finalizando este trabalho, e como principal objetivo deste, serão apresentados e desenvolvidos três problemas didáticos criados pelo autor que servirão de sugestão para que o leitor, como professor, apresente aos seus alunos como forma de motivá-los e mostrar a vastidão e beleza da matemática.

Palavras-chave: Recorrência, Sequências, Progressões, Recursão, Matemática Discreta, Contagem, Educação, Ensino e Aprendizagem.

Abstract

This dissertation will initially present a brief history about the development of the study of recurrences and their implications within the study of elementary mathematics. The recurrences and their applications have great participation in solving problems of several areas of mathematics. Some of these applications will be demonstrated here in order to provide the reader with a greater diversity of problems that can be presented to the students in a high school classroom in a captivating way and that instigates these students to feel challenged and motivated to seek the solution of such problems. I will present some classic problems here so that it is possible to do some analysis and seek alternative solutions that demonstrate more simplicity of reasoning and less use of methods of sophisticated mathematical solutions, methods that fall outside the scope of high school. I will analyze some elementary sequences, arithmetic and geometric progressions, cognitive methods of recurrence solutions, as well as some brief explanations and examples of order recurrence classifications. At the end of this work, and as the main objective of this work, three didactic problems created by the author will be presented and developed as a suggestion for the reader as a teacher to present his students as a way to motivate them and to show the vastness and beauty of mathematics.

Keywords: Recursion, Sequences, Progressions, Recursive, Discrete Mathematics, Counting, Education, Teaching and Learning

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

No que diz respeito à escolha do tema abordado nesta dissertação, a decisão por esta abordagem das recorrências dentro da sala de aula do ensino médio foi devido à percepção da grande ausência que existe no ensino básico de um ensino da matemática mais dedutivo e menos decorativo, sabemos que, dentro do ensino médio, excetuando as progressões aritmética e geométrica, pouco ou quase nada é falado a respeito das relações de recorrência e equações de recorrência e até mesmo essas progressões muitas vezes são tidas como conteúdos decorativos e cujos problemas relacionados se resolvem pela aplicação de meras fórmulas matemáticas. Acredito que seja de fundamental importância se trabalhar, com nossos alunos do ensino médio, os mais diversos tipos de sequências que possam ser compreendidas com esforço mental e o conhecimento da matemática elementar, devemos atribuir mais valor aos problemas abordados, dando a eles uma importância real e/ou uma beleza intrínseca que vai muito além de calcular apenas alguns termos de uma sequência ou a soma de alguns desses termos. O trabalho será subdividido em capítulos que servirão de bases para se conhecerem as recorrência dentro da profundidade que o autor julgar ser o ideal para o ensino médio. Os capítulos vão se desenvolver de forma gradual, para que, ao final desse trabalho, possam ser feitos alguns problemas de maior complexidade, mas de grande valia didática para o professor, que deve sempre incentivar o aluno a resolvê-los de forma pensante, analítica e qualitativa, e não mecânica e automática. As progressões e as séries clássicas terão também seu lugar nesta dissertação. Elas serão apresentadas e discutidas, mas não de forma enfática, tendo em vista a já existência de alguns materiais do ensino médio que fazem esse trabalho. Será dada aqui mais ênfase ao ineditismo dos problemas matemáticos recursivos que possuem grande criatividade na resolução e poder de atrair os alunos com a sua beleza intelectual. Esse trabalho servirá basicamente como um norte para aqueles que desejarem conhecer mais a respeito das recorrências e para professores que desejarem adicioná-las ao seu método de ensino. É necessário reforçar que os materiais que devem ser tratados no ensino médio precisam envolver emocionalmente e intelectualmente os alunos na matemática e é com este intuito que se faz este trabalho, mostrar, nesse duro trabalho, que as minuciosas nuances que existem na matemática discreta, mesmo sem o aprofundamento da matemática superior; podem ser belíssimas e só têm a contribuir para o ensino da matemática no Brasil.

1 Objetivos: Geral e Específicos

1.1 Objetivo Geral

Descrever e estudar problemas clássicos de recorrência e suas variações/generalizações, a fim de aplicar os resultados dessa abordagem didática no ensino médio, com foco nos temas de Sequências e Contagem. Os problemas "chave", a serem tratados no último capítulo deste trabalho, tendem a trazer para o leitor uma visão ampla da facilitação que o tema recorrência pode trazer para a resolução de diversos problemas do ensino médio.

O problema do número de formas distintas de se subir uma escada de m degraus dando saltos de até n degraus por vez será aqui distribuído e analisado de forma minuciosa para que o professor possa identificar a infinidade de problemas que podem ser extraídos desse problema base.

O problema das senhas alfanuméricas vem seguindo a mesma linha do anterior e pode ser comparado a qualquer outro problema que trate dos diferentes posicionamentos entre quaisquer coisas, não necessariamente entre números e letras, mas literalmente qualquer coisa, a variedade de subproblemas que podem se originar a partir deste está restrita apenas à criatividade do leitor.

Por último teremos a resolução de um problema que trata das permutações caóticas e o quanto esse tema é relevante e pouquíssimo abordado nas salas de aula do ensino médio. Ele será visto aqui de forma didática para que até aqueles que nunca tiveram contato com o tema possam ter o completo entendimento.

1.2 Objetivos Específicos

1. Identificar uma relação de recorrência em problemas gerais;

2. Montar e desenvolver a equação aberta de recorrência;

3. Quando possível, transformar a relação recursiva em uma fórmula fechada;

4. Estudar as soluções clássicas e as generalizações dos seguintes problemas: Fibonacci; Torre de Hanói; Senhas Alfanuméricas; Filas; Escadas;

5. Aplicar os resultados dos estudos anteriores em turmas do Ensino Médio, a fim de verificar a eficácia da estratégia de resolução destes problemas.

2 Um Pouco de História

2.1 Uma breve viagem pela história do nascimento das sequências

Por volta de 5.000 anos atrás, os egípcios depararam com o que seria um dos primeiros problemas envolvendo sequências que se têm registro. Em certos períodos, o Rio Nilo era acometido por grandes enchentes que ocorriam de forma, até então, impossível de serem previstas, o problema era que os egípcios tinham que plantar em períodos que não ocorressem enchentes para garantir seus alimentos. Sendo assim, eles perceberam que o rio subia logo depois que a estrela Sírius se levantava ao leste, um pouco antes do sol. Foi notado então que esse fato ocorria a cada 365 dias, os egípcios criaram então o que eles chamavam de calendário solar. Composto de 12 meses, 30 dias cada mês e mais 5 dias de festas dedicados aos seus deuses. Sendo assim, os egípcios foram capazes de dividir os doze meses entre os períodos de semear, crescer e por fim colher, em que cada período possuía 4 meses.

No período por volta de 1900 a 1600 a.C., na Mesopotâmia, surgiu um dos artefatos que mais chamam a atenção dos matemáticos, a Tableta Plimpton 322 onde havia a soma da sequência $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^9$, e era possível identificar a soma da série dos 10 primeiros quadrados naturais $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2$.

Figura 1 – Tableta de Plimpton 322 - *https://www.obaricentrodamente.com/2008/11/ternos-pitagricos_16.html*

Alguns problemas incrivelmente complexos para a época já se encontravam resolvidos pelos Babilônicos em muitos papiros, o Egito, apesar de também possuir uma matemática já apurada, nunca alcançou o nível dos Babilônicos. Um dos Papiros egípcios continha 85 problemas incrivelmente interessantes, que relatavam algumas aplicações das sequências para aqueles povos.

Esse papiro foi adquirido no Egito pelo egiptólogo escocês A. Henry Rhind, sendo mais tarde comprado pelo Museu Britânico, O papiro Rhind foi publicado em 1927. Tem cerca de dezoito pés de comprimento por cerca de treze polegadas de altura. Porém, quando o papiro chegou ao Museu Britânico ele era menor, formado de duas partes, e faltava-lhe a porção central.

Cerca de quatro anos depois de Rhind ter adquirido seu papiro, o egiptólogo americano Edwin Smith comprou no Egito o que pensou que fosse um papiro médico. A aquisição de Smith foi doada à Sociedade Histórica de Nova York em 1932, quando os especialistas descobriram, por sob uma camada fraudulenta, a parte que faltava do papiro de Ahmes. A Sociedade, então, doou o rolo de pergaminho ao Museu Britânico, completando-se assim todo o trabalho de Ahmes. O papiro Rhind é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga, deixando evidências de que sabiam fazer a soma dos termos de uma progressão aritmética.

O seguinte problema envolvendo o conceito de progressões se encontrava no Papiro Rhind.

- Divida 100 pães entre 5 homens $(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5)$

Mas faça isso de modo que o h_1 (homem 1) receba menos que todos os outros e, a partir da quantidade por ele recebida, adicione-se um determinado número "r" de pães para chegar à quantidade do segundo, após isso adicione a mesma quantia "r" à quantidade do segundo para se chegar à quantidade do terceiro e assim sucessivamente até aquele homem que receberá a maior quantia de pães (h_5). Além disso, pede-se que um sétimo da soma das três partes maiores (h_3, h_4, h_5) seja igual à soma das duas menores (h_1, h_2).

Sabemos se tratar de um problema de progressão aritmética e de solução relativamente simples até para um estudante do ensino médio, mas acontece que esse Papiro é datado de 1.650 A.C. em uma época em que a matemática estava longe de se parecer com o cenário que temos hoje. Problemas como esse eram resolvidos a custo de muito trabalho mental e braçal para se fazer qualquer cálculo necessário à sua solução.

Presume-se que se deve a Pitágoras (585 a.C. – 500 a.C.) e aos sábios gregos que viveram depois dele a criação da Aritmética teórica, pois os pitagóricos conheciam as progressões aritméticas, as geométricas, as harmônicas e musicais, as proporções, os quadrados de uma soma ou de uma diferença. O Grego Euclides de Alexandria também teve grande êxito na história da matemática, produzindo a obra Os Elementos. A primeira edição desse trabalho surgiu em 1482 e depois dessa data já surgiram mais de mil. Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico. Afinal, por mais de dois milênios esse trabalho dominou o ensino de geometria.

Em 1202, Leonardo de Pisa Fibonacci, matemático e comerciante da idade média, escreveu um livro denominado Liber Abacci, que chegou a nós, graças à sua segunda edição datada de 1228. Esse livro contém uma grande quantidade de assuntos relacionados com a Aritmética e Álgebra da época e realizou um papel importante no desenvolvimento matemático na Europa nos séculos seguintes, pois, por este livro os europeus vieram a conhecer os algarismos hindus, também denominados arábicos. A teoria contida no livro Liber Abacci é ilustrada com muitos problemas que representam uma grande parte do livro. Um dos problemas desse livro será ilustrado e solucionado aqui pela fama que ele conquistou e pelo papel importante que o seu resultado desempenha na matemática. O problema pode ser encontrado nas páginas 123-124 deste livro é o famoso problema dos pares de coelhos.

- O problema da reprodução de coelhos (Sequência de Fibonacci)

Em um ambiente fechado, coloca-se um casal de coelhos. Supondo que, em cada mês, a partir do segundo mês de vida, cada casal dá origem a um novo casal de coelhos e que os coelhos não morrem. Ao final de n meses, quantos casais de coelhos estarão no ambiente? Observando a figura abaixo, tentaremos montar uma fórmula para determinar o número de pares de coelhos restantes após n meses.

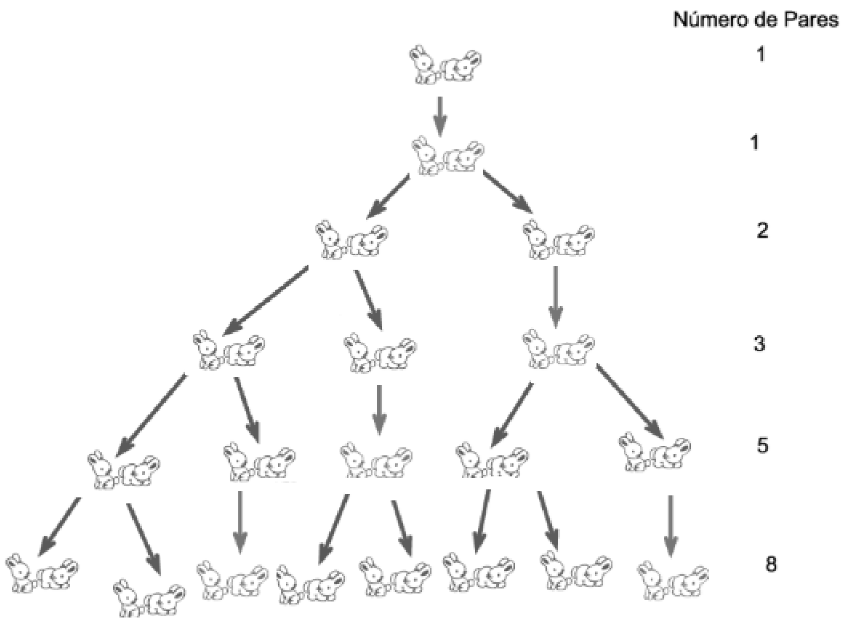

Figura 2 – Coelhos e Fibonacci

-Feita pelo autor.

Mês 0 - Existe apenas um par de coelhos.
Mês 1 - Os coelhos só acasalam ao segundo mês, logo continua a haver apenas um casal.
Mês 2 - Nesse mês a fêmea já deu à luz um par de coelhos, existindo agora dois pares de coelhos.
Mês 3 - O par original tem o segundo par de coelhos.

Mês 4 - O par original tem mais um par de coelhos. O par nascido no mês 2 também dá à luz e o par nascido no mês 3 acasala, mas ainda não dá à luz. Isso faz um total de 3 pares.
Mês 5 - Todos os pares que nasceram até há dois meses dão à luz, fazendo na totalidade 5 pares.

Então, quantos pares de coelhos nascem em cada mês? Como demora dois meses para cada novo par dar à luz, então cada par de coelhos que já existia há dois meses atrás vai dar à luz um novo par de coelhos. Por outras palavras, o número de novos pares de coelhos de cada mês é igual ao número de coelhos nascidos dois meses antes. Concluindo, o número de pares de coelhos, em determinado mês, é a soma dos pares de coelhos existentes nos dois meses anteriores a este. Matematicamente temos a famosa sequência de Fibonacci:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

A Relação mostrada acima, como veremos mais adiante, é uma relação de recorrência linear de segunda ordem homogênea, que nos permite calcular o número de pares de coelhos no enésimo mês.

2.2 Sequências Numéricas

Dentro da matemática discreta, quando falamos do conceito de sequência existe uma certa similaridade com o uso comum da palavra, mas na matemática esta recebe uma definição precisa para que seus casos possam ser tratados com mais exatidão.

2.2.1 - Definição de sequência: Formalmente falando, temos que uma sequência numérica de números reais é uma função $f(n)$ cujo domínio D é um subconjunto, $I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ de $\mathbb{N}^*$ ou o próprio $\mathbb{N}^*$; e o contradomínio é o conjunto dos números reais, ou seja, a cada número natural positivo $n \in D$ é associado um número real $f(n)$, isto é, $f : D \to \mathbb{R}$.

O tamanho de uma sequência é definido pelo número de termos que esta possui, podendo existir sequências finitas, quando esta possui um número limitado de termos. Caso contrário, a sequência é dita infinita.

É importante ressaltar que nem sempre uma dada sequência apresentará uma lei geral de formação definida ou conhecida. Para os casos em que a lei de formação é conhecida, podemos representar essa sequência principalmente das duas seguintes formas:

1. Através de uma expressão matemática que associa a cada n um valor x_n.

Exemplo 2.1.

$$x_n = n^2 + n + 1, \quad (x_n) = (3, 7, 13, 21, 31, 43, \dots)$$

$$x_n = 1/n, \qquad (x_n) = (1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots)$$

$$x_n = n/(n+1), \qquad (x_n) = (1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \dots)$$

Se quando n cresce, x_n torna-se cada vez mais próximo de um certo número real L, diz-se que a sequência infinita x_n converge para L ou tem limite L.
Uma sequência que não é convergente é dita divergente.

2. Através de uma relação de recorrência em que, a partir de um certo termo é possível determinar cada termo subsequente a partir de seus antecessores.

Exemplo 2.2. : Sequência dos números positivos que são múltiplos de 3, isto é, $(x_n) = (3, 6, 9, 12, 15, \dots)$ Na sequência mostrada acima podemos determinar qualquer termo da sequência utilizando apenas a equação de recorrência:

$$x_{n+1} = x_n + 3, (n \geq 1)$$

com $x_1 = 3$.

Exemplo 2.3. Sequência cujo primeiro termo é 2, onde cada termo seguinte é o quádruplo do seu antecessor, isto é, $(x_n) = (2, 8, 32, 128, ...)$

$$x_{n+1} = x_n q, (n \geq 1)$$

com $x_1 = 2$ e $q = 4$.

Exemplo 2.4. Sequência de Fibonacci; $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...)$. Na famosa sequência de Fibonacci temos a seguinte relação de recorrência:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, (n \geq 0),$$

com $x_0 = x_1 = 1$.

2.3 Recorrência

As relações de recorrência fazem parte de uma técnica (estratégia) matemática que permite, a partir de casos genéricos construir (deduzir) sequências (ou sentenças ou algoritmos) para os quais seja possível calcular cada um dos termos dependendo dos anteriores. Dentro de um problema de Recorrência devemos estar atentos a dois fatores importantes, são eles:

As condições iniciais do problema que permitem desenvolver nosso raciocínio para se chegar à solução do problema, além de fornecer informações necessárias para a resolução; E as próprias relações de recorrência que são o objetivo do nosso estudo e objeto de desejo dentro do problema, pois são elas que vão possibilitar calcular quaisquer termos da sequência, tendo o conhecimento prévio de alguns termos.

Devemos atentar sempre no fato de que uma sequência só está completamente definida por uma relação de recorrência quando são informados os primeiros termos a partir dos quais os demais serão obtidos.

As relações ou equações de Recorrência determinam cada termo da referida sequência a partir de certo termo, em função dos termos anteriores. Quando a equação depende exclusivamente dos termos anteriores, ela é dita homogênea. Se a equação depender, além dos termos anteriores, também de um termo independente da sequência, dizemos que ela é não homogênea.Uma relação de recorrência é dita linear quando a função que relaciona cada termo aos termos anteriores é linear.A Recorrência é dita de primeira ordem quando cada termo da sequência é obtido a partir do termo imediatamente anterior a ele. As Recorrências de segunda ordem são definidas quando cada termo é dependente dos dois termos imediatamente anteriores a ele, e assim sucessivamente, podemos intuir então que uma recorrência de ordem n é aquela cuja relação de recorrência associada dependerá dos n últimos termos anteriores ao termo de ordem n. Algebricamente temos:
Recorrências de primeira ordem, $x_n = f(x_{n-1})$
Recorrências de segunda ordem, $x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2})$
Recorrências de terceira ordem, $x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3})$

Verificando os exemplos 2.2, 2.3, 2.4 citados anteriormente, analisemos os conceitos mencionados. Nos exemplos 2.2 e 2.3, a relação de recorrência é definida de forma que o termo de ordem n depende apenas de um termo anterior, o que caracteriza a sequência como de primeira ordem. Além disso o 2.2 é uma sequência linear e não homogênea, já o 2.3 é uma sequência linear e homogênea. No exemplo (2.4) temos a sequência de Fibonacci que é dependente de dois termos anteriores, o que a caracteriza como de segunda ordem, linear e homogênea.

Exemplo 2.5. A sequência $f_n = \alpha^n$, define uma recorrência do tipo $f_{n+1} = \alpha^n(\alpha) = \alpha.f_n$

Exemplo 2.6. Se α e β são raízes distintas do polinômio $t^2 - t - c$, então $X_n = a\alpha^n + b\beta^n$ define uma recorrência linear de 2ª ordem. De fato,

$$\begin{aligned} f_{n+2} &= a\alpha^{n+2} + b\beta^{n+2} \\ &= a\alpha^{n+1}\alpha + b\beta^{n+1}\beta \\ &= a\alpha^{n+1} + b\beta^{n+1} + (\alpha - 1)a\alpha^n\alpha + (\beta - 1)b\beta^n\beta \end{aligned}$$

Como α e β são raízes de $t^2 - t - c$, temos

$$\alpha(\alpha - 1) = \alpha^2 - \alpha = c$$

$$\beta(\beta-1)=\beta^2-\beta=c.$$

Logo,

$$f_{n+2}=f_{n+1}+c[a\alpha^n+b\beta^n]=f_{n+1}+cf_n.$$

2.3.1 Recorrência linear homogênea de ordem k

A expressão generalizada para uma recorrência linear homogênea de ordem k com coeficientes constantes é:

$$f_n=c_{n-1}f_{n-1}+c_{n-2}f_{n-2}+\cdots+c_{n-k}f_{n-k} \tag{2.1}$$

com $c_1,c_2,\ldots,c_{n-k}$ constantes reais. Para a equação (2.1) ficar bem definida precisamos de k condições iniciais para k índices consecutivos. Um número menor de condições iniciais não é suficiente para calcularmos a sequência.

2.3.1.1 Resolução das relações de recorrência lineares homogêneas

Definição: Resolver uma recorrência X_n é determinar uma expressão para o n-ésimo termo que dependa apenas de n.

Observe que no exemplo 2.6, $X_n=a\alpha^n+b\beta^n$ é solução da recorrência $X_{n+2}=X_{n+1}+cX_n$, onde α,β são as raízes do polinômio $t^2-t-c=0$.

Foi observado que toda recorrência homogênea linear com coeficientes constantes possui alguma solução do tipo exponencial, isto é, $f_n=t^n$.Façamos então $f_n=t^n$, onde t é uma incógnita. Daí, substituindo em (2.1), temos:

$$t^n-c_{n-1}t^{n-1}-c_{n-2}t^{n-2}-\ldots-t^{n-k}c_{n-k}=0. \tag{2.2}$$

A equação (2.2) é chamada ”equação característica associada à recorrência (2.1)”.
Considerando $t\neq 0$ e dividindo (2.2) por t^{n-k}, temos:

$$t^k-c_{n-1}t^{k-1}-c_{n-2}t^{k-2}-\ldots-c_{n-k}=0. \tag{2.3}$$

É fácil perceber que agora em (2.3) temos um polinômio de grau k e pelo Teorema Fundamental da Álgebra teremos exatamente k raízes, não necessariamente distintas. Então existem números $t_1,t_2,\ldots,t_k$ tais que:

$$t^k-c_{n-1}t^{k-1}-c_{n-2}t^{k-2}-\ldots-c_{n-k}=(t-t_1)(t-t_2)\ldots(t-t_k). \tag{2.4}$$

No caso de raízes repetidas, por exemplo:

$$t^2-10t+25=(t-5)^2.$$

Ou raízes distintas, por exemplo:

$$t^2-5t+6=(t-2)(t-3)$$

pois cada raíz t_j estará associada a uma função $f_n = t_j^n$.

Observação: este procedimento permite resolver uma recorrência linear de qualquer ordem? Sim, desde que todas as raízes sejam simples.

2.3.1.2 Recorrência linear homogênea de 2ª ordem

Vamos agora demostrar e desenvolver uma metodologia para determinarmos fórmulas fechadas para a resolução de equações de recorrência lineares homogêneas de 2ª ordem.

Como já visto, uma recorrência linear homogênea de 2ª ordem é do tipo $ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$ com a,b e c constantes reais. Para sua resolução, vamos escrever que $x_n = t^n$ e com isso vamos associá-la a uma equação característica do tipo:

$$at^{n+2} + bt^{n+1} + ct^n = 0.$$

Dividindo a equação por t^n, temos:

$$at^2 + bt + c = 0.$$

Considerando que as raízes da equação característica são r e s, podemos dividir nosso estudo em dois casos: $r \neq s$ ou $r = s$. Pelos teoremas 1 e 2 da referência [1] (páginas 74 e 75), temos que:

$$\textbf{Se} \quad \mathbf{r \neq s}, \quad \textbf{então} \quad \mathbf{x_n = \boldsymbol{\alpha} r^n + \boldsymbol{\beta} s^n}.$$

E pelos teoremas 3 e 4 da referência [1] (páginas 77 e 78), temos que:

$$\textbf{Se} \quad \mathbf{r = s}, \quad \textbf{então} \quad \mathbf{x_n = (\boldsymbol{\alpha} n + \boldsymbol{\beta}) r^n}.$$

E nos dois casos α e β são constantes calculadas através de pelo menos dois termos previamente conhecidos. Não seria o nosso objetivo principal, mas para quem tiver interesse nas demonstrações, consultar a referência [1] nas páginas citadas acima.

Exemplo 2.7. Resolva a recorrência $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$ com $a_0 = 8$ e $a_1 = 10$.

Solução:
Perceber que se trata de uma recorrência homogênea de 2ª ordem de coeficientes constantes, então admitindo uma solução exponencial temos $a_n = t^n$. Escrevemos agora a equação característica associada à nossa recorrência:

$$t^n - 4t^{n-1} + 3t^{n-2} = 0.$$

Dividindo cada termo por t^{n-2} chegamos à equação do 2º grau $t^2 - 4t + 3 = 0$ cujas raízes são $t^{'} = 3$ e $t^{''} = 1$. Então:

$$a_n = \alpha 3^n + \beta 1^n,$$

com α e β constantes que serão calculadas resolvendo um sistema linear. Uma vez que $a_0 = 8$ e $a_1 = 10$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha 3^0 + \beta 1^0 = 8 \\ \alpha 3^1 + \beta 1^1 = 10 \end{cases}$$

Onde encontramos $\alpha = 1$ e $\beta = 7$.Assim, a fórmula fechada da nossa recorrência é:

$$a_n = 3^n + 7$$

.

Exemplo 2.8. Resolva a recorrência $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ com $a_1 = 0$ e $a_2 = 1$.

Solução:
Considerando mais uma vez que teremos uma solução exponencial, podemos admitir que $a_n = t^n$ e encontramos a equação característica associada à nossa recorrência:

$$t^n = 6t^{n-1} - 9t^{n-2}$$

. Dividindo todos os termos por t^{n-2} e organizando, temos a equação:

$$t^2 - 6t + 9 = 0.$$

Suas raízes são iguais, onde $t' = t'' = 3$. Logo, $a_n = (\alpha n + \beta)3^n$ com α e β variáveis que serão calculadas resolvendo um sistema linear.Uma vez que $a_1 = 0$ e $a_2 = 1$, temos:

$$\begin{cases} 3\alpha + 3\beta = 0 \\ 18\alpha + 9\beta = 1 \end{cases}$$

Daí, $\alpha = \frac{1}{9}$ e $\beta = \frac{-1}{9}$ e com isso $a_n = (\frac{1}{9}n - \frac{1}{9})3^n$ e então

$$a_n = (n-1)3^{n-2}.$$

Exemplo 2.9. Resolva a recorrência $a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = 0$ com $a_0 = 0$ e $a_1 = 2$.

Solução:
Considerando que teremos uma solução exponencial, podemos admitir que $a_n = t^n$ e chegaremos à equação característica associada à nossa recorrência:

$$t^{n+2} - t^{n+1} + t^n = 0.$$

Dividindo todos os termos por t^n, chegamos à seguinte equação característica:

$$t^2 - t + 1 = 0,$$

Suas raízes são $t^{'} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ e $t^{''} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Assim:

$$a_n = \alpha(t^{'})^n + \beta(t^{''})^n \Rightarrow a_n = \alpha\left[\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right]^n + \beta.\left[\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right]^n.$$

Sendo $a_0 = 0$ e $a_1 = 2$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ a_1 = \alpha[\frac{1+i\sqrt{3}}{2}]^1 + \beta[\frac{1-i\sqrt{3}}{2}]^1 = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos que $\alpha = \frac{-2.i\sqrt{3}}{3}$ e $\beta = \frac{2i\sqrt{3}}{3}$. Por fim, temos a fórmula fechada:

$$a_n = \frac{-2.i\sqrt{3}}{3}\cdot\left[\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right]^n + \frac{2i\sqrt{3}}{3}\cdot\left[\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right]^n.$$

Abaixo seguem três problemas que ficam como sugestão para a participação do leitor:

1. $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ com $a_1 = 0$ e $a_2 = 6$;
2. $a_n = -3.a_{n-1} + 10a_{n-2}$ com $a_1 = 2$ e $a_2 = 1$;
3. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ com $a_1 = 1$ e $a_2 = 3$;

2.4 Torre de Hanói

A Lenda do Templo de Benares

A torre de Hanói, também conhecida por torre de bramanismo ou quebra-cabeças do fim do mundo, foi inventada e vendida como brinquedo, no ano de 1883, pelo matemático francês Edouard Lucas. Segundo ele, o jogo que era popular na China, no Japão e veio do Vietnã. O matemático foi inspirado por uma lenda Hindu, a qual falava de um templo em Benares, cidade santa da Índia, onde existia uma torre sagrada do bramanismo, cuja função era melhorar a disciplina mental dos jovens monges. De acordo com a lenda, no grande templo de Benares, debaixo da cúpula que marca o centro do mundo, há uma placa de bronze sobre a qual estão fixadas três hastes de diamante. Em uma dessas hastes, o deus Brama, no momento da criação do mundo, colocou 64 discos de ouro puro, de forma que o disco maior ficasse sobre a placa de bronze e os outros decrescendo até chegar ao topo. A atribuição que os monges receberam foi a de transferir a torre formada pelos discos, de uma haste para outra, usando a terceira como auxiliar com as restrições de movimentar um disco por vez e de nunca colocar um disco maior sobre um menor. Os monges deveriam trabalhar com eficiência noite e dia e, quando terminassem o trabalho, o templo seria transformado em pó, e o mundo acabaria. O desaparecimento do mundo pode ser discutido, mas não há dúvida quanto ao desmoronamento do templo.

Problema da Torre de Hanói

Como visto acima, o problema da Torre de Hanói está em passar todos os discos de um pino para outro qualquer, usando um dos pinos como auxiliar, de forma que um disco de diâmetro maior nunca fique em cima de um menor. O número de discos varia dependendo do quanto você está disposto a pensar para realizar a tarefa, mas comumente se inicia com três discos, visto que a solução com um ou dois é trivial, três discos seria o mais divertido para se iniciar. Bom, aqui não demonstrarei como resolver esse quebra-cabeça, que, como veremos, pode se tornar extremamente complexo dependendo do número de discos usados, o que será feito é calcular o número mínimo possível de movimentos, em função do número de discos, que devemos realizar para solucionar a tarefa com perfeição, mesmo que não saibamos quais são esses movimentos ou menos ainda executá-los de maneira ordenada.
Solução

Figura 3 – O Jogo Torre de Hanói - *http://info.geekie.com.br/torre-de-hanoi/*

Como muitos problemas que vamos resolver nesta dissertação, reduziremos para casos mais simples com poucos discos para simplificarmos e irmos construindo a relação de recorrência até um número de n de discos.

Caso $n = 1$
Se houver apenas um disco, é óbvio que um movimento é suficiente; sendo assim: $x_1 = 1$

Caso $n = 2$:
Com dois discos também é fácil ver que três movimentos podem resolver o problema facilmente, daí: $x_2 = 3$

Caso $n = 3$
Com três discos teremos que fazer sete movimentos, a figura 5 ilustra essa situação

Observe que, nos três primeiros movimentos e nos últimos movimentos para 3 discos, repetimos os movimentos feitos para 2 discos, portanto: $x_3 = 2x_2 + 1$; pode-se notar

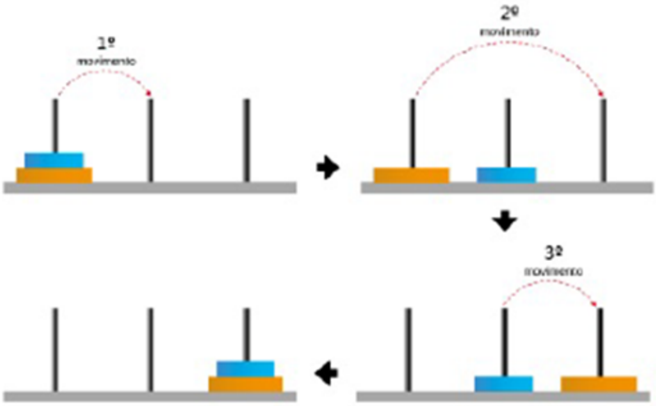

Figura 4 – Torre de Hanói com dois discos - *http://jogadamais.blogspot.com.br/2013.html*

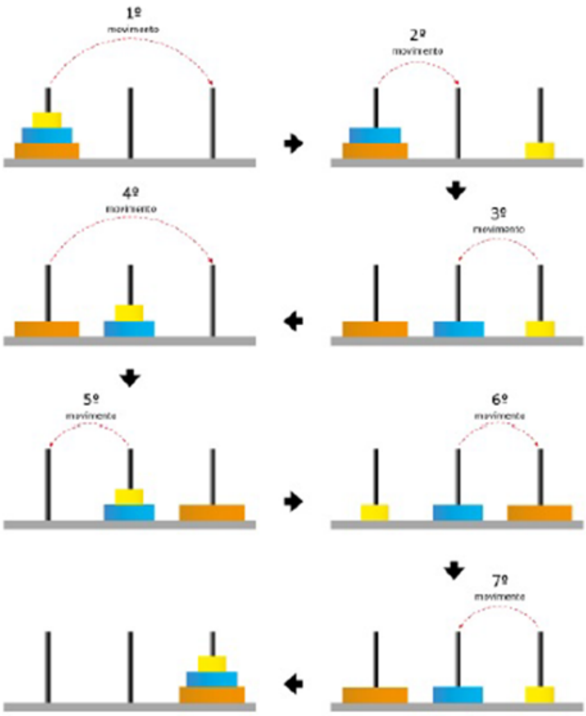

Figura 5 – Torre de Hanói com três discos - *http://jogadamais.blogspot.com.br/2013.html*

que com x_2 o mesmo acontece $x_2 = 2x_1 + 1$. Através da Tabela 1; podemos observar que isso ocorre sempre, já que o que foi dito anteriormente para 2 e 3 discos é verdade para quaisquer dois discos consecutivos.

Nº de discos	Quantidade mínima de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63

Tabela 1 – Feita pelo autor.

Sendo assim, vemos que é possível determinar o número de movimentos da torre com n discos, se soubermos o número de movimentos da torre com $n-1$ discos. Chegamos então à relação $x_n = 2x_{n-1} + 1$. Podemos notar, então, que o número somado é sempre o dobro do anterior, que já havia sido somado. Analisando mais atentamente a tabela 1, temos que o resultado da quantidade mínima de movimentos é sempre um a menos do número que foi somado, ou resumidamente: veja que o número somado é um número do tipo 2^n, e assim a sequência de números somados forma a PG:$(2, 4, 8, 16, 32, \dots)$ de razão $q = 2$. Logo, a quantidade mínima de movimentos é igual ao número somado menos um, ou seja, igual a $2^n - 1$. Então descobrimos que $x_n = 2^n - 1$.

Nº de discos	Quantidade mínima de movimentos	Nº somado
1	1	-1 $\leftarrow$ +2
2	3	-1 $\leftarrow$ +4
3	7	-1 $\leftarrow$ +8
4	15	-1 $\leftarrow$ +16
5	31	-1 $\leftarrow$ +32
6	63	-1 $\leftarrow$ +64

Tabela 2 – Feita pelo autor.

Já adianto que a fórmula obtida acima é verdadeira, mas esse não é um método muito confiável para obtê-la e nenhuma outra desse gênero, já que foi a partir de dados numéricos que chegamos a esse resultado. É necessário saber se ela é válida para qualquer n, podemos fazer isso utilizando o Princípio da Indução Finita(PIF), que será abordado mais adiante neste trabalho. Mas, como disse, a fórmula é verdadeira e podemos agora ver que para 64 discos o número mínimo de movimentos que devem ser feitos é

$$x_{64} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$$

O que só por curiosidade, se cada movimento fosse realizado em um nano-segundo 10^{-9}s, mais ou menos o tempo que um computador pessoal leva para executar uma operação, seriam necessários 585 anos seguidos para realizar essa tarefa, e então, quem se habilita?

3 A Recorrência e seu envolvimento com os conteúdos da educação básica

No ensino básico são vistos alguns conteúdos que poderiam ser trabalhados utilizando a ideia e os conceitos do raciocínio recursivo.

Neste capítulo serão abordados diversos destes conteúdos vistos no Ensino Médio. Vamos iniciar com algumas sequências específicas. São elas: as Progressões Aritmética e Geométrica. Posteriormente falaremos da análise combinatória, que será de suma importância para o desenvolvimento intuitivo primário dos alunos que vão deparar com as recorrências posteriormente.

3.1 Progressões Aritméticas

Trata-se de sequências definidas recursivamente que são muito comuns de aparecerem no cotidiano, elas aparecem sempre que grandezas sofrem variações iguais no mesmo intervalo de tempo.
Uma Progressão Aritmética (P.A.) pode ser definida como uma sequência de números a_n tal que, com exceção do primeiro termo, por razões que ficarão óbvias posteriormente, cada termo a_n pode ser obtido de maneira recursiva, somando-se o termo anterior a_{n-1} a uma constante real r a qual damos o nome de razão da P.A. Portanto, é dado o primeiro termo a_1 e define-se $a_n = a_{n-1} + r$; para $n \geq 2$, o que caracteriza uma recorrência linear de primeira ordem.

- **Termo Geral da P.A.**: Segundo a definição de uma P.A, por meio da fórmula de recorrência e admitindo o primeiro termo como a_1 e a razão como r e o índice n para um termo qualquer, temos:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + r \\
a_3 &= a_2 + r \\
a_4 &= a_3 + r \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} + r
\end{aligned}
$$

Somando essas $(n-1)$ relações e cancelando os termos, obtemos:

$$a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + (n-1)r.$$

Então,

$$a_n = a_1 + (n-1)r, n \geq 2. \tag{3.1}$$

Para verificarmos se o termo geral é válido para todo $n \in \mathbb{N}$, usaremos aqui o Princípio da Indução Finita (PIF), vejamos:

- Caso Base
  Vejamos a veracidade para $n = 1$:
  $a_1 = a_1 + (1-1).r \Rightarrow a_1 = a_1 \Rightarrow$ Sentença Verdadeira

- Hipótese de Indução
  Suponhamos que para algum $k \in \mathbb{N}$, a sentença $a_k = a_1 + (k-1).r$ seja verdadeira.

- Tese
  Vamos mostrar que (3.1) vale para $k+1$, utilizando a hipótese de indução. Vejamos:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + r \\ &= a_1 + (k-1)r + r \\ &= a_1 + [kr - r + r] \\ &= a_1 + kr \\ &= a_1 + [(k+1) - 1]r \end{aligned}$$

Portanto, pelo PIF temos que:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, c.q.d.

- **Soma dos n primeiros termos de uma P.A.**: Uma outra abordagem possível e também muito comum em diversos problemas é a utilização da soma dos n primeiros termos de uma P.A. Vamos denotar a soma $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ pela letra grega maiúscula Σ (lê-se sigma)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

e denota a soma dos a_k termos, com k variando de 1 até n.
Se $(a_k)_{k \geq 1}$ é uma P.A. de razão r, então, temos a seguinte expressão para calcular a soma de todos os termos dessa P.A.:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}; \ \forall\ n \geq 1$$

Será feita aqui a prova dessa fórmula mostrada acima, devido à contribuição que o raciocínio usado tende a trazer para os alunos que a conhecem.

Se $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, temos $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$.Por outro lado, escrevendo os mesmos termos na ordem inversa, temos:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$$

Somando membro a membro as duas igualdades acima, chegamos a:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Percebe-se que, em cada uma das somas, a primeira parcela aumenta de r e a segunda diminui de r, o que não altera a soma. Por isso, todos os parênteses são iguais ao primeiro $(a_1 + a_n)$.Daí,

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n),$$

onde o termo $(a_1 + a_n)$ se repete n vezes. Sendo assim $2S_n = n \cdot (a_1 + a_n)$ e então,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \tag{3.2}$$

Com isso, vamos verificar, utilizando o Princípio da Indução Finita (PIF), se o S_n é válido para todo $n \in \mathbb{N}$. Vejamos:

- Caso Base

  Vejamos a veracidade para $n = 1$:

  $$S_1 = \frac{(a_1 + a_1) \cdot 1}{2} \Rightarrow S_1 = \frac{2 \cdot a_1}{2} \Rightarrow S_1 = a_1.$$

  Portanto, a sentença é verdadeira.

- Hipótese de Indução

  Suponhamos que para algum $k \in \mathbb{N}$, a sentença $S_k = \dfrac{(a_1 + a_k).k}{2}$, seja verdadeira.

- Tese

  Vamos mostrar que (3.2) vale para $k + 1$, utilizando a hipótese de indução. Vejamos:

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= S_k + a_{k+1} \\
&= (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k) + a_{k+1} \\
&= \frac{(a_1 + a_k)k}{2} + a_{k+1} \\
&= \frac{a_1k + a_kk + 2a_{k+1}}{2} \\
&= \frac{a_1k + a_kk + 2a_{k+1}}{2} \\
&= \frac{(k+1)a_1 - a_1 + (k+1)a_k - a_k + 2a_{k+1}}{2} \\
&= \frac{(k+1)a_1 + (k+1)(a_{k+1} - r) - a_1 - a_k + 2a_{k+1}}{2} \\
&= \frac{(k+1)a_1 + (k+1)a_{k+1} - r(k+1) - a_1 - a_k + 2a_{k+1}}{2} \\
&= \frac{(k+1)(a_1 + a_{k+1}) - a_1 - kr - r - a_k + 2a_{k+1}}{2}.
\end{aligned}$$

Já que $a_{k+1} = a_1 + kr$ e também $a_{k+1} = a_k + r$, temos:

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(a_1 + a_{k+1}) - a_{k+1} - a_{k+1}2a_{k+1}}{2} = \frac{(a_1 + a_{k+1})(k+1)}{2}$$

Portanto, pelo PIF temos que:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, c.q.d.

- **P.A. de Segunda Ordem**: Dizemos que uma sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA de segunda ordem se a sequência $(b_k)_{k\geq 1}$, dada para $k \geq 1$ por $b_k = a_{k+1} - a_k$, for uma PA não constante. Para construir uma PA de segunda ordem $(a_k)_{k\geq 1}$, vamos começar com a seguinte PA, não constante, ou seja, de razão diferente de zero.

$$(3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, \ldots)$$

Em seguida, estipulamos o termo inicial da PA de segunda ordem, digamos $a_1 = 2$, e, a partir daí, calculamos $a_2, a_3, \ldots$ utilizando as relações:

$$a_2 - a_1 = 3; a_3 - a_2 = 7; a_4 - a_3 = 11, \ldots$$

Assim fazendo, obtemos a P.A. de segunda ordem.

$$(2, 5, 12, 23, 38, 57, 80, \ldots)$$

A exemplificação acima deixa claro que uma P.A. de segunda ordem só estará totalmente definida se conhecemos quaisquer três de seus termos e suas respectivas posições. Pode-se observar que só se forem conhecidos os três primeiros termos da

P.A. de segunda ordem é que teremos os dois primeiros termos da P.A. não constante formada pelas diferenças entre o terceiro e o segundo termo e o segundo e o primeiro termo.

Podemos dizer, para o entendimento do aluno, de um modo mais simplificado que: *uma P.A. de segunda ordem é uma sequência na qual as diferenças entre cada par de termos consecutivos formam, entre si, uma P.A. com razão diferente de zero.*

- **Termo Geral da P.A. de Segunda Ordem**:

Será feita aqui uma breve demonstração da expressão que nos permite calcular quaisquer termos de uma P.A. de segunda ordem, expressão que por muitos ainda é desconhecida e acredita-se nesse ponto ser conveniente fazê-la.

Se a seguinte sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ é uma P.A. de segunda ordem, então as diferenças $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_i = a_{i+1} - a_i, \ldots, b_{n-1})$ entre os termos consecutivos de (a_i) formam uma P.A. de razão $r \neq 0$. Façamos então:

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= b_1 \\ a_3 - a_2 &= b_2 \\ a_4 - a_3 &= b_3 \\ &\vdots \\ a_n - a_{n-1} &= b_{n-1} \end{aligned}$$

Somando membro a membro as $n-1$ igualdades acima, vem que:

$$a_n - a_1 = \frac{(b_1 + b_{n-1})(n-1)}{2}.$$

Mas pela fórmula do termo geral da P.A. já discutida nesse trabalho, tem-se que $b_{n-1} = b_1 + (n-2)r$. Logo,

$$a_n = a_1 + \frac{[2b_1 + (n-2)r](n-1)}{2}, \quad \text{e} \quad a_i = a_1 + \frac{[2b_1 + (i-2)r](i-1)}{2}.$$

Desenvolvendo mais um pouco, chegamos então a um polinômio do 2º grau onde a_i que representa a fórmula para o termo geral da P.A. de segunda ordem:

$$a_i = \frac{r \cdot i^2 + (2b_1 - 3r) \cdot i}{2} + a_1 - b_1 + r.$$

P.A. de ordem n

Já sabendo o que é uma P.A. de segunda ordem, será feito um breve comentário a respeito do que seria uma P.A. de ordem n. Foi visto que em uma P.A. de segunda ordem, a diferença entre cada par de termos consecutivos, configura uma P.A. de primeira ordem. Para facilitar o entendimento do que é uma P.A. de ordem n, observemos a seguinte sequência finita:

$$(3, 7, 13, 23, 39, 63, 97.)$$

Observando termo a termo, temos:

$$a_2 - a_1 = 4; a_3 - a_2 = 6; a_4 - a_3 = 10; a_5 - a_4 = 16; a_6 - a_5 = 24; a_7 - a_6 = 34.$$

Logo, a sequência formada por essas diferenças é:

$$(4, 6, 10, 16, 24, 34).$$

Observando termo a termo, temos:

$$a_2 - a_1 = 2; a_3 - a_2 = 4; a_4 - a_3 = 6; a_5 - a_4 = 8; a_6 - a_5 = 10.$$

A nova sequência encontrada é, portanto:

$$(2, 4, 6, 8, 10),$$

que é uma PA de primeira ordem, de razão $r = 2$ como estamos habituados.Sendo assim, podemos definir:

Uma P.A. de ordem n é aquela cuja diferença entre cada par de termos consecutivos, configura uma P.A. de ordem $n - 1$.

Exemplo 3.1 (P.A's de ordem superior)**.** Ordem $2 : (4, 6, 10, 16, 24, 34, \ldots)$
Ordem $3 : (0, 1, 4, 10, 20, 35, 56, \ldots)$
Ordem $4 : (2, 5, 12, 25, 48, 87, \ldots)$
Ordem $5 : (1, 3, 8, 20, 45, 93, 180, \ldots)$
Ordem $7 : (0, 1, 3, 7, 15, 33, 76, 175, \ldots)$.

Para ilustrar a utilidade e a forma como o conteúdo apresentado aqui se relaciona com o tema central deste trabalho, será mostrado agora uma sequência com 3 exercícios resolvidos, fortemente baseados em problemas do e da OBMEP.

Exemplo 3.2. Qual a soma de todos os múltiplos de 7 compreendidos entre 1 e 100?

Solução:
Sabe-se que $a_1 = 7$ e $r = 7$ na divisão de 100 por 7 o quociente é 14 e o resto é 2, sendo assim a sequência tem 14 termos e o último termo desta é, $a_{14} = 98$, assim:

$$S_{14} = \frac{(a_1 + a_{14}) \cdot 14}{2} = (7 + 98) \cdot 7 = 735$$

Exemplo 3.3. Tem-se uma progressão aritmética onde a soma dos 3 primeiros termos é igual a zero, e a soma dos 10 primeiros é igual a 70. Determine a razão dessa Progressão e seus 10 primeiros termos.

Solução:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ S_{10} = 70 \end{cases}$$

Pode-se escrever então:

$$(a_2 - r) + a_2 + (a_2 + r) = 0 \Rightarrow 3a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \Rightarrow a_1 + r = 0.$$

Assim,

$$S_{10} = 70 \Rightarrow \frac{((a_1 + a_{10}) \cdot 10)}{2} = 70 \Rightarrow \frac{(a_1 + (a_1 + 9 \cdot r)) \cdot 10}{2} = 70 \Rightarrow 2a_1 + 9r = 14.$$

Resolvendo o sistema abaixo:

$$\begin{cases} a_1 + r = 0 \\ 2a_1 + 9r = 14 \end{cases}$$

Temos que, $a_1 = -2$ e $r = 2$. Portanto, os 10 primeiros termos da PA são: $(-2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16)$.

Exemplo 3.4. Montou-se com palitos de fósforos uma sequência de triângulos que seguem o padrão mostrado na figura 8. Determine então o número de palitos presentes no triângulo cujo lado possui 11 palitos.

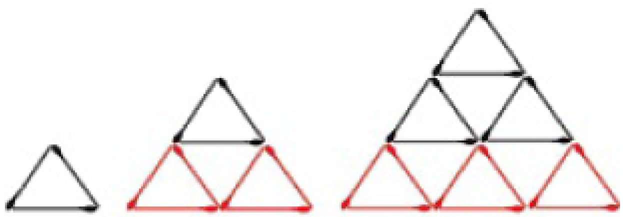

Figura 6 – Sequência de Triângulos - *https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/site/index?a=1*

Solução:

De imediato podemos ver que o primeiro triângulo possui 1 palito de lado e 3 palitos no total, o segundo triângulo possui 2 palitos de lado e 9 triângulos no total, o terceiro possui 3 palitos de lado e 18 no total. Ao analisar-se a forma como essa sequência é montada na figura, pode-se observar que a sequência de número de palitos em cada triângulo é $(3, 9, 18, 30, \ldots)$ o que se configura uma P.A. de segunda ordem cujos termos configuram a seguinte P.A. de primeira ordem de razão $r = 3$ $(6, 9, 12, \ldots)$. É fácil ver que podemos obter o termo de ordem n da P.A. de segunda ordem pegando o primeiro termo dessa P.A. e somando com os termos da P.A. de primeira ordem, ou seja:

$$\begin{aligned} a_n &= 3 + (6 + 9 + 12 + \ldots + 3n) \\ &= 3 + 3 \cdot (2 + 3 + 4 + \ldots + n) \\ &= 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n) \end{aligned}$$

Mas a soma da P.A. entre parênteses sabe-se calcular, pois é a soma de uma P.A. de razão 1, que possui n termos e cujo último termo é n. Portanto, sendo

$$1+2+3+4+\ldots+n=\frac{(1+n)\cdot n}{2}$$

Temos,

$$a_n=\frac{3n(1+n)}{2}.$$

Assim, temos uma relação que nos permite calcular o número de palitos a_n em qualquer triângulo dessa sequência n. O problema pede no triângulo de número 11 quantos palitos há, aplicando a relação encontrada:

$$a_{11}=\frac{3.11.(1+11)}{2}=198.$$

3.2 Progressões Geométricas

Uma Progressão Geométrica ($P.G.$) pode ser definida como uma sequência de números a_n tal que, com exceção do primeiro termo por razões que ficarão óbvias posteriormente, cada termo a_n pode ser obtido de maneira recursiva multiplicando o termo anterior a_{n-1} por uma constante q chamada de razão da $P.G.$ Sendo assim define-se o primeiro termo a_1 e podemos então dizer que $a_n = a_{n-1}\cdot q$ para $n \geq 2$, recorrência de primeira ordem.

- **Termo Geral da** $P.G.$**:** Podemos determinar recursivamente uma fórmula geral para o termo de ordem n da $P.G.$ Observe:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1q \\ a_3 &= a_2q \\ a_4 &= a_3q \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1}q. \end{aligned}$$

  Multiplicando membro a membro as igualdades acima, obtemos então a fórmula do termo geral de uma $P.G.$ para $n \geq 2$:

$$a_n = a_1q^{n-1} \tag{3.3}$$

  Para verificar se o termo geral é válido para todo $n \in \mathbb{N}$, usaremos, como anteriormente, o P.I.F.
  Vejamos:

  - Caso Base
    Vejamos a veracidade para $n = 1$:
    $a_1 = a_1q^{1-1} \Rightarrow a_1 = a_1 \Rightarrow$ Sentença Verdadeira

– Hipótese de Indução
Suponhamos que para algum $k \in \mathbb{N}$, a sentença $a_k = a_1 q^{k-1}$ seja verdadeira.

– Tese
Vamos mostrar que (3.3) vale para $k+1$, utilizando a hipótese de indução. Vejamos:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k q \\ &= [a_1 q^{k-1}]q \\ &= a_1 q^k \\ &= a_1 q^{(k+1)-1} \end{aligned}$$

Portanto, pelo PIF temos que:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$,c.q.d.

- **A soma dos termos de uma PG finita** Vamos deduzir aqui uma fórmula para a soma S_n dos n primeiros termos de uma $P.G.$.Temos:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} [\blacklozenge]$$

Multiplicando ambos os lados por q, teremos:

$$S_n.q = a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 \ldots + a_1.q^n [\bigstar]$$

Subtraindo as equações acima encontrada, temos:

$$[\bigstar] - [\blacklozenge] = q.S_n - S_n = a_1.q^n - a_1 \Rightarrow S_n(q-1) = a_1.(q^n - 1).$$

Assim,

$$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{(q-1)}.$$

Apresentamos acima a fórmula conhecida como fórmula da soma dos termos de uma PG finita. Seja a_k com $k \geq 1$ uma $P.G.$ de razão $q \neq 1$. Então:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1};\ \forall\ n \geq 1. \tag{3.4}$$

Com isso, usaremos novamente o P.I.F. para determinar se o S_n é válido para todo $n \in \mathbb{N}$. façamos:

– Caso Base
Vejamos a veracidade para $n = 1$:
$S_1 = \frac{a_1.(q^1-1)}{q-1} \Rightarrow S_1 = a_1 \Rightarrow$ Sentença Verdadeira

– Hipótese de Indução
Suponhamos que para algum $k \in \mathbb{N}$, a sentença $S_k = \frac{a_1.(q^k-1)}{q-1}$ seja verdadeira.

– Tese
Vamos mostrar que (3.4) vale para $k+1$, utilizando a hipótese de indução. Vejamos:

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= S_k + a_{k+1} \\
&= (a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + \ldots + a_1.q^{k-1}) + a_1.q^k \\
&= S_k + a_{k+1} \\
&= \frac{a_1(q^k-1)}{q-1} + a_{k+1} \\
&= \frac{a_1q^k - a_1 + a_{k+1}q - a_{k+1}}{q-1} \\
&= \frac{a_1q^k - a_1 + a_1q^kq - a_1q^k}{q-1} \\
&= \frac{a_1q^{k+1} - a_1}{q-1} \\
&= \frac{a_1(q^{(k+1)}-1)}{q-1}.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo PIF temos que:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n-1)}{q-1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, c.q.d.

- **A soma dos termos de uma P.G. infinita** Já foi visto no tópico anterior a soma dos termos de uma $P.G.$ finita não constante. Aqui concentraremos nossa atenção na fórmula que nos permite calcular a soma dos termos de uma $P.G.$ infinita, desde que tal soma faça sentido. Para demonstrar o quanto essa soma de infinitos termos pode fazer sentido, apliquemos a fórmula vista no tópico anterior, para usarmos de extrapolação dos resultados, no caso da seguinte progressão:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$$

Calculando a soma dos n primeiros termos daquela sequência e denotando essa soma por S_n temos:

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{((\frac{1}{2})^n - 1)}{\frac{1}{2} - 1} \\
&= 1 - \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Examinando a tabela abaixo, vemos que; quanto maior o valor de n, menor é o valor de $\frac{1}{s^n}$ e à medida que n aumenta, os valores de $\frac{1}{2^n}$ se aproximam cada vez mais de zero; e os valores de S_n se aproximam cada vez mais de 1.

n	$\frac{1}{2^n}$	S_n
2	0,25	0,75
3	0,125	0,875
4	0,0625	0,9375
5	0,03125	0,96875
6	0,015625	0,984375
7	0,0078125	0,9921875
8	0,00390625	0,99609375

Tabela 3 – Feita pelo autor.

Um método bastante intuitivo de verificar que a soma S_n dada acima vale 1 é o seguinte: e: suponha que um quadrado de lado 1 cm é dividido em dois retângulos de lados 1 cm e 1/2 cm cada, e que descartamos um desses retângulos, cuja área vale $1/2cm^2$. Em seguida, o outro retângulo é dividido em dois quadrados de lado 1/2 cm, e também descartamos um desses quadrados, cuja área vale 1/4 cm^2. A essa altura, a soma das áreas das figuras descartadas é $1/2 + 1/4$.

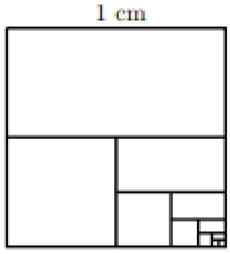

Figura 7 – Interpretação Geométrica - *https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/site/index?a=1*

Repetindo o procedimento n vezes, vê-se que a soma das áreas das figuras descartadas é:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

Pode-se perceber que a área da figura que sobra depois de efetuarmos n descartes fica cada vez mais próxima de zero e que a soma das áreas das figura que foram descartadas fica cada vez mais próxima da área do quadrado, que vale 1 cm^2.
Isso sugere que a seguinte igualdade é verdadeira:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1$$

Generalizando, será demonstrada e apresentada a seguir a fórmula que nos permite calcular a soma dos infinitos termos de uma $P.G.$. Vejamos:

Dada uma P.G. infinita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ dizemos que $a_1 + a_2 + \ldots = S$ se, formada a sequência $(S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots)$ em que:

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1\\
S_2 &= a_1 + a_2\\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3\\
&\vdots\\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n
\end{aligned}$$

Essa sequência converge para S, isto é:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

- Teorema
  Se $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ é uma P.G. com razão q tal que $-1 < q < 1$, então: $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \dfrac{a_1}{1-q}$.

- Demonstração
  Vamos provar que o limite da sequência $(S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n)$ das somas parciais dos termos da *P.G.* é $\dfrac{a_1}{1-q}$. Temos:

$$S_n - \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1 - a_1.q^n}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} = \frac{-a_1.q^n}{1-q}$$

  Lembrando que a_1 e q são constantes, notamos que $\dfrac{-a_1}{1-q}$ é constante, lembrando também que, para $-1 < q < 1$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-a_1}{1-q}.q^n = \frac{-a_1}{1-q}.\lim_{n\to\infty} q^n = \frac{-a_1}{1-q}.0 = 0$$

Assim, se $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é uma PG de razão q tal que $|q| < 1$, então:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Observação: Quando a razão q de uma PG infinita satisfaz $|q| \geq 1$ e seu primeiro termo a_1 é não nulo, não é possível dar um sentido à soma infinita, ou seja, se $a_1 > 0$ e $q > 1$, então as somas finitas $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ ficam tão grandes quanto quisermos, bastando tomar n suficientemente grande.

Também para ilustrar a utilidade e a forma como o conteúdo apresentado aqui se relaciona com o tema central deste trabalho, será mostrada agora uma sequência com 3 exercícios resolvidos, fortemente baseados em problemas da OBMEP.

Exemplo 3.5. Se os números 3, x e y, nessa ordem, estão em progressão aritmética números 3,$x-6$ e y, nessa ordem, estão em progressão geométrica, então quais os possíveis valores de x?

Solução:
Se temos a P.A. $(3, x, y)$, é valida a relação: $2x = 3 + y \Rightarrow y = 2x - 3$
Sendo a PG $(3, x-6, y)$, pode-se escrever: $(x-6)^2 = 3y$, resolvendo o sistema
$y = 2x - 3$
$(x-6)^2 = 3y$ temos:

$$x^2 - 12x + 36 = 3(2x - 3) \Rightarrow x^2 - 18x + 45 = 0 \Rightarrow x_1 = 15;\ x_2 = 3$$

Se $x = 15 \Rightarrow y = 27$ e a PA será $(3, 15, 27)$ de razão $r = 12$
e a PG será $(3, 9, 27)$ de razão $q = 3$

Se $x = 3 \Rightarrow y = 3$ e a PA será $(3, 3, 3)$ de razão $r = 0$
e a PG será $(3, -3, 3)$ de razão $q = -1$

Exemplo 3.6. A soma de três números que formam uma progressão geométrica crescente é 19. Sabendo que, se subtrair "1" (uma unidade) ao primeiro número, sem alterar os outros dois, eles passam a constituir uma progressão aritmética, então qual o primeiro número dessa progressão geométrica crescente?

Solução:
Os termos da PG crescente são (a_1, a_2, a_3) e podemos escrever: $\begin{cases} a_2^2 = a_1 \cdot a_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 19 \end{cases}$
subtraindo "1"do primeiro termo temos a PA: $(a_1 - 1, a_2, a_3)$ e pode-se escrever:
$2a_2 = (a_1 - 1) + a_3 \Rightarrow 2a_2 + 1 = a_1 + a_3$
temos então

$$\begin{cases} 2a_2 + 1 = a_1 + a_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 19 \end{cases}$$

$2a_2 + 1 + a_2 = 19 \Rightarrow a_2 = 6$
$a_1 + a_3 = 13 \Rightarrow a_3 = 13 - a_1$
$a_2^2 = a_1 \cdot a_3 \Rightarrow 36 = a_1 \cdot (13 - a_1)$
$a_1^2 - 13a_1 + 36 = 0 \Rightarrow (a_1)_1 = 4$ e $(a_1)_2 = 9$
$(a_1)_2 = 9$ não serve pois a $P.G.$ é crescente e sendo assim $a_1 = 4$, $a_2 = 6$, e $a_3 = 9$ e temos a $P.G.$ $(4, 6, 9)$ de razão $q = \frac{3}{2}$.

Exemplo 3.7. Uma sequência infinita de quadrados é construída da seguinte forma: dado um quadrado Q_i, constrói-se outro quadrado Q_{i+1}, cujos vértices estão sobre os lados de Q_i e de tal forma que a distância de qualquer vértice de Q_{i+1} ao vértice de Q_i mais próximo dele é igual a 1/3 do lado de Q_i. Além disso, o lado de Q_1 é 3. Determine a lei de formação L_n. dessa sequência.

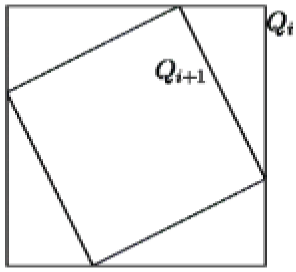

Figura 8 – Sequência de Quadrados - *https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/site/index?a=1*

Solução:
Pode-se observar que L_2 é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos 1 e 2, sendo assim:

$$L_2^2 = 1^2 + 2^2 \Rightarrow L_2 = \sqrt{5}$$

L_3 é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos $\frac{\sqrt{5}}{3}$ e $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

$$L_3^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{5}{3}$$

L_4 é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos $\frac{5}{9}$ e $\frac{10}{9}$

$$L_4^2 = \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2 = \frac{5\sqrt{5}}{9}$$

Pode-se dizer então que, de um modo geral, se o lado de um quadrado é L o lado do próximo quadrado será sempre $\sqrt{\left(\frac{L}{3}\right)^2 + \left(\frac{2L}{3}\right)^2} = \frac{l\sqrt{5}}{3}$, ou seja, temos aqui uma *P.G.* de razão $q = \frac{\sqrt{5}}{3}$ para uma *P.G.* $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, sendo assim:

$$L_n = L_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow L_n = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{n-1}$$

4 Problemas Chave

O presente capítulo tem o intuito de desenvolver, enunciar e posteriormente solucionar 3 problemas que tratam de recorrências de uma forma elucidativa, didática, intuitiva e extremamente abrangente. Esses problemas podem ser tidos como uma das principais fontes de motivação para o desenvolvimento deste trabalho, pois é de extrema dificuldade encontrar na literatura problemas que tratem de forma indutiva as recorrências, juntamente de uma didática capaz de ser compreendida por alunos do ensino médio.

Também é de intenção do autor tornar este capítulo uma ferramenta para que professores possam ter um norte de como introduzir o conteúdo das recorrências no ensino médio. Iniciando com aquilo que os alunos já conhecem e demonstrando a facilidade e a unicidade da "ferramenta"recorrência.

O capítulo será desenvolvido de forma que cada um dos 3 problemas será inicialmente destrinchado em vários outros problemas, de menor complexidade, para que seja possível a construção do raciocínio a ser desenvolvido na resolução. A resolução será feita com o máximo de esmero possível para que, mesmo os alunos com mais dificuldades no entendimento, olhando com interesse e atenção, tenham boas possibilidades de entender do que se trata. Teremos então, por fim, um capítulo com uma fonte de exercícios resolvidos, proporcionando uma riqueza de informações.

4.1 O Problema da escada

Nesta seção, discutiremos o problema que trata do número de maneiras distintas que temos de subir uma escada, analisando diversas configurações possíveis para essa escada e para essa subida.

O supergrilo e a escada de m degraus: Um grilo deseja subir uma escada que possui m degraus, sabe-se que esse grilo pode saltar de forma que consiga subir até n degraus por vez com $m \geq n$. Sendo assim, vejamos quantas são as formas desse grilo subir essa escada.

Para resolver um problema com esse nível de complexidade com as ferramentas que são ofertadas ao aluno do ensino médio é necessário um certo nível de atenção, cuidado e familiaridade com o tipo de raciocínio a ser desenvolvido. Para que possamos resolvê-lo de forma concisa e aproveitando ao máximo o aprendizado que o problema pode nos oferecer, faremos a divisão do mesmo em casos de complexidade inferior para que possamos chegar ao caso geral enunciado acima. O problema inicial que usaremos para a construção do raciocínio desejado está enunciado abaixo.

O grilo filhote e a escada de 8 degraus: Suponha que um grilo tivesse que subir uma escada de exatamente oito degraus. De quantas maneiras distintas poderá subir essa tal escada se a cada 1 pulo ele pode subir 1 ou 2 degraus.

Solução(1): Diagrama de árvore:

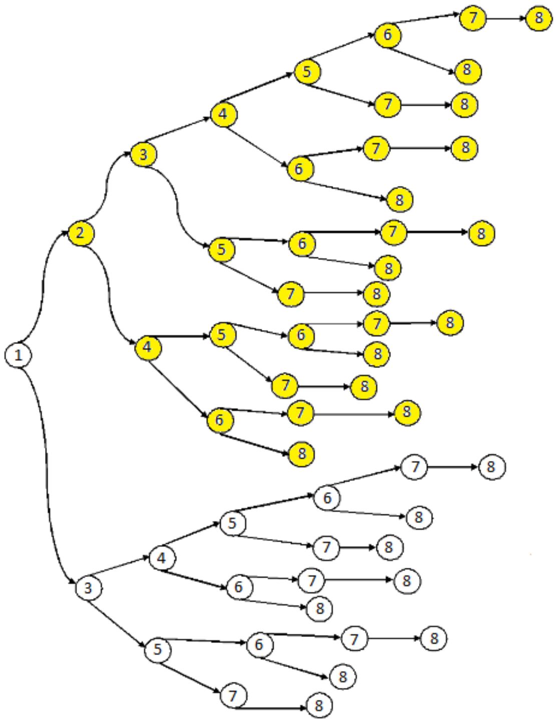

Figura 9 – Diagrama de árvore para 8 degraus - *Feita pelo autor*

O diagrama de árvore na figura 9 mostra quais caminhos o grilo pode percorrer se ele começar dando um pulo no primeiro degrau. Dessa maneira existem 21 formas de ele conduzir a sua ida até o topo. Se o grilo começar pulando para o segundo degrau, podemos observar que o diagrama que demonstra todos os possíveis caminhos a serem percorridos está pintado de amarelo na figura 9, e são elas, 13 formas possíveis. Sendo assim, temos então um total de $21 + 13 = 34$ formas diferentes de o grilo conduzir sua viagem até o topo da escada.

Solução(2): Agrupamentos especiais de contagem:

Outra forma de resolver o problema é analisar quantas são as possíveis combinações existentes para cada escolha de tipos de pulos, ou seja, o grilo pode chegar ao topo dando, por exemplo, 1 pulo duplo e 6 pulos simples. Porém, ele pode dar esses pulos em diferentes ordens e se nos quisermos saber quantas formas o grilo tem de chegar ao topo dando 1 pulo duplo e 6 pulos simples, basta observarmos que ele está dando 7 pulos e precisamos saber quantas formas temos de agrupar uma sequência de 7 pulos contendo 1 pulo diferenciado, temos as seguintes sequencias possíveis:

$$\#\{DSSSSSS, SDSSSSS, SSDSSSS, SSSDSSS, \\ SSSSDSS, SSSSSDS, SSSSSSD\} = 7$$

onde D, representa pulo duplo e S, representa pulo simples.
Sendo assim, podemos montar uma tabela com as possíveis formas do grilo pulando 1 ou 2 degraus subir essa escada e a partir daí então determinar todas as formas de agrupar esses pulos.

Pulo Duplo	Pulo Simples	Degraus Alcançados	Agrupamentos
0	8	2.0+1.8=8	$C_{8,0} = 1$
1	6	2.1+1.6=8	$C_{7,1} = C_{7,6} = 7$
2	4	2.2+1.4=8	$C_{6,2} = C_{6,4} = 15$
3	2	2.3+1.2=8	$C_{5,3} = C_{5,2} = 10$
4	0	2.4+1.0=8	$C_{4,4} = 1$

Tabela 4 – Feita pelo autor.

Com a tabela montada e os agrupamentos feitos, podemos agora simplesmente somar $1 + 7 + 15 + 10 + 1 = 34$ e assim teremos o número de formas de o grilo subir os 8 degraus dando um ou dois pulos por vez.

Resolvemos o nosso problema inicial de duas formas distintas, e podemos até dizer que não foi tão difícil assim, façamos o seguinte então: antes de introduzir a ideia de recorrência nesse problema, sugerimos ao leitor resolver as seguintes variações do mesmo.

- De quantas formas o grilo poderia subir uma escada com 16 degraus?
- Nosso grilo já está crescido e agora pode dar saltos de 1, 2 ou até 3 degraus por pulo; De quantas formas ele poderia subir essa escada?
- E para uma escada com 16 degraus com o grilo já adulto (podendo saltar 1, 2 ou 3 degraus por pulo), Quantas são suas opções de subida?

Ao tentar resolver essas variações do problema simplificado original, o leitor pôde perceber as dificuldades que podem aparecer quando fazemos alterações a princípio simples, como, por exemplo, colocar vários degraus na escada ou permitir o grilo possa dar pulos saltando vários degraus por vez, que dirá fazer as duas alterações em conjunto, que é o nosso objetivo final.
Será que com o diagrama da solução para uma escada de 8 degraus fica fácil obter a solução para uma escada de 9 degraus? A resposta é sim, perceba que como o grilo só pode dar saltos de 1 ou 2 degraus por pulo ele tem como chegar ao 9º degrau apenas de duas formas com relação aos degraus anteriores. São elas: ou ela está no 8º degrau e dá

um pulo simples ou está no 7º degrau e dá um pulo duplo ou dois simples, daí temos, $x_9 = x_8 + x_7$, ou seja, nestes exercícios podemos parar o problema antes de, de fato, ele chegar ao fim, como, por exemplo, no exercício para 8 degraus, poderíamos ter parado no 7º já que $x_8 = x_7 + x_6$, avaliando isso podemos generalizar que, seja x_n o número de maneiras de alcançar o degrau n temos então para $n \geq 3$, temos:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

Uma boa analise que podemos fazer para exemplificar o uso e o estudo de recorrência é olhar para a solução 1 do problema do grilo filhote e da escada de oito degraus estudando apenas a parte da solução que permite ao grilo chegar ao topo da escada iniciando com um pulo duplo.

Vejamos, temos 13 maneiras de chegarmos ao 8º degrau iniciando com um pulo duplo (parte amarela do diagrama de árvore), são elas:

$$\{(21111111; 2111112; 211121; 211211; 212111;$$
$$221111; 21122; 21212; 22112; 21221; 22121; 22211; 2222)\}$$

Como podemos, a partir daí, saber quantas maneiras temos de chegar ao topo com um pulo simples? Vamos substituir cada início que começa com pulo duplo e começar com um pulo simples e acrescentar mais um pulo simples ao final de cada sequência, o que seria mais 13 sequências. Porém, cada uma das 8 sequências que acabava com um pulo simples agora termina com dois pulos simples, que como opção, que teríamos como opção trocar por um pulo duplo, logo seriam mais 8 sequências, então $x_8 = 13 + (13 + 8) = 13 + 21 = 34$ perceba que $x_7 = 21$ e $x_6 = 13$ logo, como já esperávamos, $x_8 = x_7 + x_6 = 21 + 13$.

Agora, com a nossa ideia de recorrência introduzida ao problema, podemos ver que resolver a questão do grilo filhote com uma escada de 16 degraus, sugerido ao leitor, reduz-se a fazer simples somas de termos, façamos:

O grilo filhote e a escada de 16 **degraus**: Suponha que um grilo tivesse que subir uma escada de exatamente dezesseis degraus. De quantas maneiras distintas poderá subir essa tal escada se a cada pulo ele pode subir 1 ou 2 degraus.

Solução:

Recorrência

$$x_1 = 1;$$
$$x_2 = 2;$$
$$x_3 = x_2 + x_1 = 3;$$
$$x_4 = x_3 + x_2 = 5;$$
$$x_5 = x_4 + x_3 = 8;$$
$$x_6 = x_5 + x_4 = 13;$$
$$x_7 = x_6 + x_5 = 21;$$

Assim, nossa sequência do número de maneiras que o grilo filhote (que só salta no máximo dois degraus por pulo) tem de chegar ao topo para uma escada com n degraus é.

$$(1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, \ldots, x_n = x_{n-1} + x_{n-2}).$$

Logo, para este problema a solução seria $x_{16} = 1597$.

Veja que, por meio dessa ideia de recorrência, independente do número de degraus que contenha a escada, nossa resolução se reduz a fazer simples somas, o que torna a solução extremamente mecânica e programável. Isso faz com que encontrar o número de maneiras de o grilo filhote subir, por exemplo, uma escada com 100, 1.000 ou até 10.000 degraus, o que antes era impraticável, agora com ferramentas como o excel, por exemplo, isso se torna extremamente simples.
Só para registrar: para uma escada com 40 degraus o número de maneiras de o grilo filhote chegar ao topo já é extremamente improvável de ser feito por outros métodos que não por recorrência, devido a esse número de possibilidades já ser extremamente grande.
Só para ilustrar, alguns termos encontrados no excel são:

$$x_{30} = 1346269$$
$$x_{40} = 165580141$$
$$x_{50} = 20365011074$$
$$x_{100} = 573147844013817000000$$

Ao chegar aqui, acredita-se que o problema do grilo filhote (que pode dar saltos de 1 ou 2 degraus) já tenha sido abordado suficientemente e sabe-se que o trabalho já tem a bagagem necessária para fazermos agora o desenvolvimento de uma fórmula fechada para esse tipo de problema, o problema de Fibonacci, essa fórmula nos permite encontrar qualquer termo da sequência de Fibonacci, apenas com a resolução de uma equação simples que será encontrada aqui.

Desenvolvendo a fórmula fechada

$$X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$$

Sendo $X_1 = 1$ e $X_2 = 2$, onde $X_2 = X_1 + X_0$, temos que $X_0 = 1$. Substituindo X_n por t^n e em seguida dividindo por t^n, temos que

$$X_{n+2} = X_{n+1} + X_n \Rightarrow t^{n+2} - t^{n+1} - t^n = 0 \Rightarrow t^2 - t - 1 = 0.$$

Resolvendo, obtemos $\Delta = 5$, onde $t_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $t_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

$$x_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$x_0 = 1 \Rightarrow \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 1$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1$$

Com as equações acima, podemos determinar α e β, são eles:

$$\alpha = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$$

$$\beta = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

Sendo assim:

$$X_n = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Para podermos solucionar o problema do supergrilo e da escada de m degraus, façamos agora a variação do grilo adulto, que já consegue subir nossa escada inicial (com 8 degraus) dando saltos de 1,2 ou 3 degraus.

O grilo adulto e a escada de 8 degraus: De quantas formas um grilo adulto (que consegue dar saltos de até três degraus por pulo) é capaz de chegar ao topo de uma escada com 8 degraus?

Solução: Recorrência

Vamos inicialmente calcular as soluções para uma escada de 1, 2 ou 3 degraus, são elas, respectivamente: X_1, X_2, X_3; a partir do 4º degrau em diante ja sabemos ser possível resolver por recorrência com um raciocínio análogo ao anterior.

Para uma escada de 1 degrau só temos uma opção, que seria um pulo simples $X_1 = 1$;

Para dois degraus, temos duas opções, dois pulos simples ou um pulo duplo $X_2 = 2$;

Para uma escada com três degraus, as opções são três pulos simples, um pulo duplo e um pulo simples, um simples e um duplo ou um pulo triplo $X_3 = 4$; para uma escada com 4 degraus, sabemos pelos mesmos argumentos dados anteriormente, que podemos usar nossa estratégia recursiva e fazer: $X_4 = X_3 + X_2 + X_1 = 4 + 2 + 1 = 7$.

Para corroborar a utilização dessa estratégia, basta pensarmos que só existe um único

modo de o grilo ir do 3º degrau para o 4º degrau (dando um pulo simples) um único modo também de ir do 2º degrau direto para o 4º degrau (dando um pulo duplo) e um único modo de ir do 1º degrau direto para o 4º degrau (dando um pulo triplo).
Sendo assim, para $n \geq 4$, temos que $X_n = X_{n-1} + X_{n-2} + X_{n-3}$. Assim, $X_1 = 1; X_2 = 2; X_3 = 4; X_4 = 7; X_5 = 13; X_6 = 24;X_7 = 44;X_8 = 81$ Nesse ponto vamos mostrar que existe um método para se chegar a uma fórmula fechada também para esse tipo de problema, fórmula essa, derivada daquela que já encontramos anteriormente e cuja solução será omitida por fugir ao escopo do trabalho, mas trata-se de um método semelhante ao já utilizado. A essa fórmula dá-se o nome de fórmula de Tribonacci.

Considere a $X_{n+3} = X_{n+2} + X_{n+1} + X_n$ a nossa recorrência para o grilo que pode dar saltos de até três degraus. A fórmula fechada para essa recorrência segundo [15], seria da forma

$$X_n = a\alpha^n + b\beta^n + c\gamma^n,$$

onde α, β, γ são as três raízes da equação $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$. Assim, temos uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas, que nos garante três raízes distintas entre si.
Com os métodos utilizados na página 24 e pela referência [10], podemos encontrar, com as condições iniciais $(X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 2)$, as seguintes constantes:

$$a = \frac{2 + \beta\gamma - \gamma - \beta}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)}, \quad b = \frac{-2 - \alpha\gamma + \alpha + \gamma}{(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)}, \quad c = \frac{2 + \alpha\beta - \alpha - \beta}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}.$$

Com isso o grilo pode dar pulos do 1º ao 3º degrau e encontramos a sequência de Tribonacci.
O grilo adulto fujão: Nosso grilo agora está fugindo de um sapo e não é conveniente saltar apenas um degrau. Então ele só dá pulos duplos ou triplos, vejamos então quantas são as maneiras de ele chegar ao topo de uma escada com 12 degraus.
Solução:Recorrência
Vejamos como ele poderia subir escadas com menos degraus:
Para 2 degraus, ele só tem uma opção $x_2 = 1$;
Para 3 degraus, ele também só tem uma opção $x_3 = 1$;
Para 4 degraus, apenas uma opção $x_4 = 1$;
Para 5 degraus podemos fazer de forma recursiva, pois existe apenas uma maneira, partindo do 3º degrau para chegar no 5º degrau, e também apenas uma maneira pra chegarmos no 5º degrau a partir do 2º degrau e, além disso, não se consegue chegar ao 5º degrau a partir do 4º degrau.

Sendo assim, temos os seguintes termos:

$$\begin{aligned} x_5 &= x_3 + x_2 = 1 + 1 = 2 \\ x_6 &= x_4 + x_3 = 1 + 1 = 2 \\ x_7 &= x_5 + x_4 = 2 + 1 = 3 \\ x_8 &= 2 + 2 = 4 \\ x_9 &= 5 \\ x_{10} &= 7 \\ x_{11} &= 9 \\ x_{12} &= 12 \end{aligned}$$

Com os problemas já desenvolvidos aqui e com as ferramentas dedutivas já apresentadas, partiremos agora para a resolução do nosso problema em si, que agora, graças a todos os exemplos citados aqui, é de fácil análise:

O supergrilo e a escada de m degraus:

Solução:

Para chegarmos ao degrau m, a partir do degrau $m - 1$, com apenas um pulo, só temos uma opção (um pulo simples).

Para chegarmos ao degrau m, a partir do degrau $m - 2$, com apenas um pulo, só temos uma opção (um pulo duplo).

Para chegarmos ao degrau m, a partir do degrau $m - 3$, com apenas um pulo, só temos uma opção (um pulo triplo).

Por esse raciocínio, para chegarmos ao degrau m a partir do degrau $m - n$, com apenas um pulo, só temos uma opção, que seria com um pulo de n degraus.

Logo, as possibilidades de subida de uma escada com m degraus dando pulos de até n degraus por vez é:

$$X_m = X_{m-1} + X_{m-2} + \ldots + X_{m-n}$$

Para ilustrar a praticidade dessa solução geral, façamos o seguinte problema:

De quantas formas um grilo pode subir uma escada de 16 degraus se esse grilo pode saltar até 5 degraus por pulo.

Solução:

Utilizando a fórmula de recorrência geral encontrada, façamos:

$$X_{16} = X_{15} + X_{14} + X_{13} + X_{12} + X_{11}$$

Para ser possível usar a fórmula de recorrência é necessário ter os termos iniciais, considerados aqui

$$\begin{aligned}
X_0 = 1, X_1 = 1 \\
X_2 = X_1 + X_0 = 2 \\
X_3 = X_2 + X_1 + X_0 = 4 \\
X_4 = X_3 + X_2 + X_1 + X_0 = 8 \\
X_5 = X_4 + X_3 + X_2 + X_1 + X_0 = 16 \\
X_6 = X_5 + X_4 + X_3 + X_2 + X_1 = 31 \\
X_7 = X_6 + X_5 + X_4 + X_3 + X_2 = 61 \\
X_8 = X_7 + X_6 + X_5 + X_4 + X_3 = 120
\end{aligned}$$

Seguindo o raciocínio e fazendo as somas necessárias, têm-se:

$$\begin{aligned}
X_9 = 236 \\
X_{10} = 464 \\
X_{11} = 912 \\
X_{12} = 1793 \\
X_{13} = 3525 \\
X_{14} = 6930 \\
X_{15} = 13624 \\
X_{16} = 26784
\end{aligned}$$

Com um pouco mais de esforço, verifica-se que quando no problema é permitido ao grilo pulos de 1 até k degraus encontramos os números da sequência generalizada de Fibonacci, ou seja, os "números de Fibonacci de k-passos (*Fibonacci n-Step Number*)"[13].
Na tabela abaixo temos alguns números de Fibonacci até $k = 6$.

k	Nome	Sequência
2	Números de Fibonacci	1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...
3	Números de Tribonacci	1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, ...
4	Números de Tetrabonacci	1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, ...
5	Números de Pentabonacci	1, 1, 2, 4, 8, 16, 31, 61, 120, ...
6	Números de Hexabonacci	1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 63, 125, ...

Tabela 5 – Feita pelo autor.

4.1.1 Encontrando os termos das sequências generalizadas de Fibonacci através do Excel

Mesmo de posse da fórmula fechada, não seria uma tarefa fácil calcular o valor de um termo com índice muito grande.Por exemplo, se queremos calcular o termo de índice

100, seriam necessáras 98 operações de soma. Porém, através do algoritmo que vamos descrever abaixo, podemos calcular (ou até mesmo conferir) um certo termo de qualquer sequência generalizada de Fibonacci, com o uso do Excel.

Passo 1) Com o Excel aberto, clique na célula $A1$ e dê um nome a sua sequência.

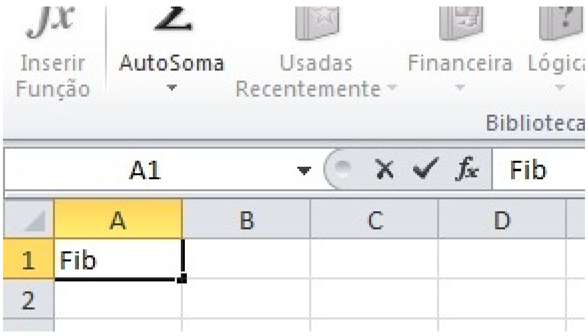

Figura 10 – Passo 1 - *Feita pelo autor*

Passo 2) Nas células $A2$ e $A3$ insira os dois primeiros termos da sequência de Fibonacci.

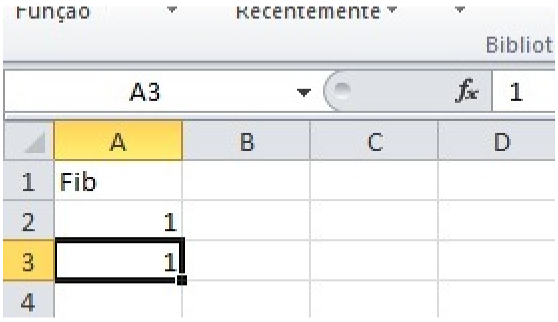

Figura 11 – Passo 2 - *Feita pelo autor*

Passo 3) Clique na célula $A4$, digite "$= A2 + A3$"e tecle enter.

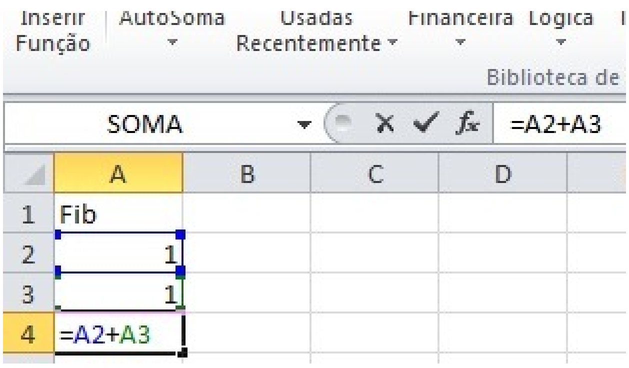

Figura 12 – Passo 3 - *Feita pelo autor*

Passo 4) Após clicar na célula $A4$ posicione o cursor no quadradinho preto, situado no vértice da direita inferior.

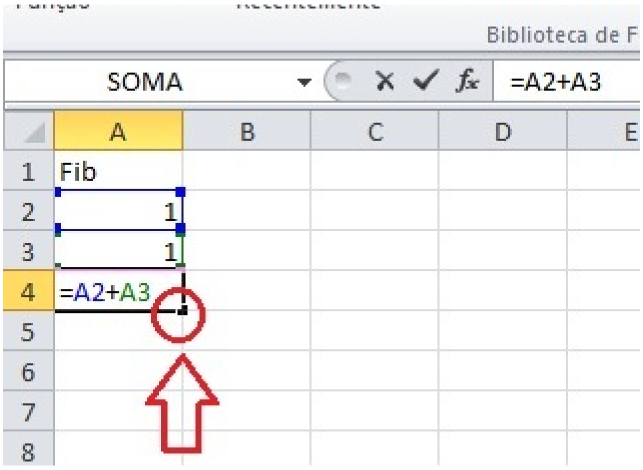

Figura 13 – Passo 4 - *Feita pelo autor*

Passo 5) Com o cursor na posição anterior, clique e arraste verticalmente até a quantidade de termos desejado na sua sequência.

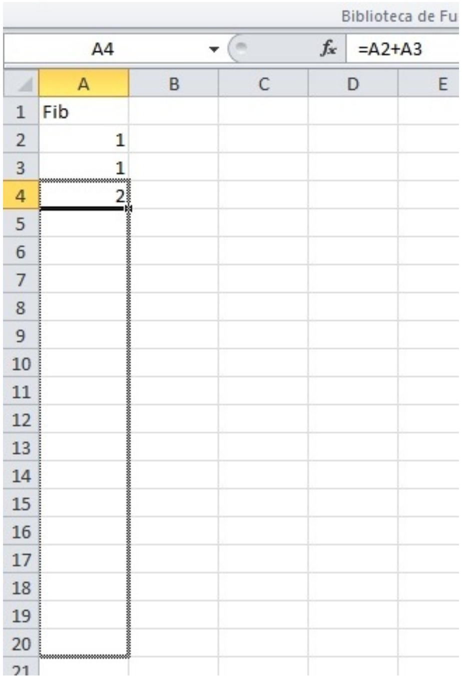

Figura 14 – Passo 5.1 - *Feita pelo autor*

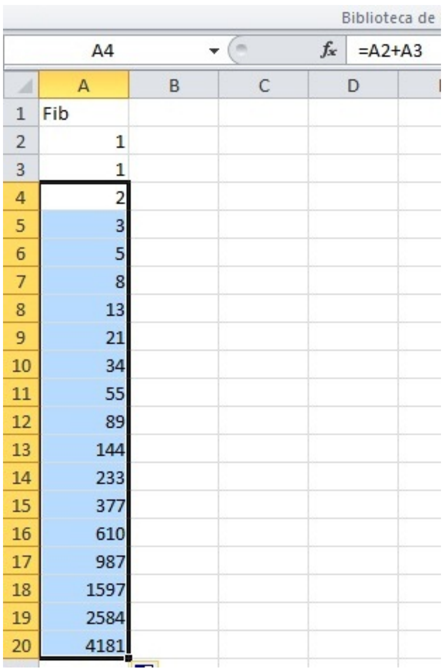

Figura 15 – Passo 5.2 - *Feita pelo autor*

Para o algoritmo da sequência de Tribonacci basta fazer algumas mudanças no algoritmo anterior:
O passo 1 é feito da mesma forma. No passo 2, insira os três primeiros termos da sequência de Tribonacci, onde o terceiro termo será incluído na célula $A4$. No passo 3, clique na

célula $A5$ e acrescente $A4$ à soma $A2 + A3$. Nos passos 4 e 5, clique no quadrado da célula $A5$ e arraste o cursor verticalmente até o termo desejado na sua sequência.
Fazendo as devidas adaptações no uso das colunas, podemos representar em uma única planilha várias sequências generalizadas de Fibonacci, como, por exemplo, na tabela abaixo:

	A	B	C	D	E
1	Fib	Tri	Tetra	Penta	Hexa
2	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1
4	2	2	2	2	2
5	3	4	4	4	4
6	5	7	8	8	8
7	8	13	15	16	16
8	13	24	29	31	32
9	21	44	56	61	63
10	34	81	108	120	125
11	55	149	208	236	248
12	89	274	401	464	492
13	144	504	773	912	976
14	233	927	1490	1793	1936
15	377	1705	2872	3525	3840
16	610	3136	5536	6930	7617
17	987	5768	10671	13624	15109
18	1597	10609	20569	26784	29970
19	2584	19513	39648	52656	59448
20	4181	35890	76424	103519	117920
21	6765	66012	147312	203513	233904

Figura 16 – Sequências generalizadas - *Feita pelo autor*

4.2 Senhas alfanuméricas

Vamos agora desenvolver um problema que trata dos diferentes posicionamentos possíveis entre letras e números para formarmos uma senha, com a única restrição de não haver dois algarismos adjacentes. Façamos:

O enigma das senhas: Quantas são as senhas de N termos, em que seus caracteres pertencem a um conjunto definido por L letras e K algarismos que não possua dois algarismos adjacentes?

Para a resolução desse problema, faremos como na seção anterior e resolveremos inicialmente casos mais particulares, assim o desenvolvimentos do raciocínio recursivo se dará de forma natural e conseguiremos compreender melhor a utilização dessa ferramenta nesses tipos de problemas. Vamos então dividir o problema anterior em casos.

1. **Caso 1**: Vamos considerar aqui que o conjunto L seja de 1 letra e o conjunto K de

2 algarismos, por exemplo, o conjunto de caracteres $\{a, 1, 2\}$.

a) Para senhas com apenas 1 termo ($N = 1$), temos: $(a; 1; 2)$. $X_1 = 3$ apenas 3 senhas possíveis;

b) Para senhas de 2 termos ($N = 2$), tem-se: cada senha de 1 termo que termina em letra dá origem a mais três senhas $(aa; a1; a2)$. No entanto, quando termina em algarismo, só dá origem a mais uma senha $(1a; 2a)$.
Temos então 5 senhas possíveis $(X_2 = 3 + 2 \cdot 1) = 5$ $(aa; a1; a2; 1a; 2a)$

c) Senhas de 3 termos ($N = 3$). Aqui, pode-se acrescentar 1 ou 2 depois de todas as senhas de X_2 que terminam em "a", também acrescentar a em todas as senhas de X_2.
$X_3 = 5 + 3 + 3$
$X_3 = 5 + 2 \cdot 3$ Percebe-se que $5 = X_2$ e $2 \cdot 3 = 2 \cdot X_1$ daí: $X_3 = X_2 + 2 \cdot X_1 = 11$

d) Senhas de 4 termos ($N = 4$).

   i. Aqui, de modo análogo, pode-se acrescentar 1 ou 2 depois de todas as senhas de X_3 que terminam com a letra "a" que corresponde ao número de senhas de X_2, logo são $2 \cdot X_2 = 2 \cdot 5 = 10$;

   ii. Podemos também acrescentar "a" no final de todas as senhas de X_3, logo são mais $X_3 = 11$ senhas.

   Então $X_4 = X_3 + 2X_2 = 11 + 2.5 = 21$

e) Senhas de 5 termos. Analisando como foi feito anteriormente, pode-se fazer recursivamente:
$X_5 = X_4 + 2 \cdot X_3$
$X_5 = 21 + 2.11 = 43$

Então somos levados a perceber, por argumentos de recursividade, que temos como solução geral para esse problema:

$$X_{n+2} = X_{n+1} + 2X_n$$

Desenvolvendo a fórmula fechada

Façamos agora o desenvolvimento de uma fórmula fechada para a solução apresentada anteriormente, onde a partir dela é possível encontrarmos qualquer termo do caso em questão.
Sendo $X_{n+2} = X_{n+1} + 2X_n$ onde $X_1 = 3$ e $X_2 = 5$, temos:

$$X_2 = X_1 + 2X_0 \Rightarrow 5 = 3 + 2.X_0 \Rightarrow X_0 = 1.$$

De $X_{n+2} = X_{n+1} + 2X_n$ fazendo $X_n = t^n$, temos:

$$t^{n+2} - t^{n+1} - 2t^n = 0.$$

Dividindo cada termo por t^n, temos:

$$t^2 - t - 2 = 0.$$

Resolvendo, obtemos $\Delta = 9$, $t_1 = 2$, $t_2 = -1$.Assim,

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha.(2)^n + \beta.(-1)^n \\ a_0 &= 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 1 \\ a_1 &= 3 \Rightarrow 2 \cdot \alpha - \beta = 3. \end{aligned}$$

Com as equações acima, podemos determinar α e β, são eles:

$$\beta = \frac{-1}{3}$$

$$\alpha = \frac{4}{3}$$

Sendo assim:

$$X_n = \left(\frac{4}{3}\right)(2)^n - \left(\frac{1}{3}\right)(-1)^n$$

2. **Caso 2**: Vamos considerar aqui que o conjunto L seja de 2 letras e o conjunto K de 1 algarismo, por exemplo, o conjunto de caracteres $\{a, b, 1\}$.

    a) Para senhas com apenas 1 termo ($N = 1$), temos: $(a; b; 1)X_1 = 3$ apenas 3 senhas possíveis;

    b) Para senhas de 2 termos ($N = 2$), tem-se: cada senha de 1 termo que termina em letra dá origem a mais três senhas $(aa; ab; a1; ba; bb; b1)$. No entanto, quando termina em algarismo, só dá origem a mais duas senhas $(1a; 1b)$.
    Temos então 8 senhas possíveis $(X_2 = 2 + 3 \cdot 2)$ $(aa; ab; a1; ba; bb; b1; 1a; 1b)$

    c) Senhas de 3 termos ($N = 3$). Aqui, pode-se acrescentar 1 depois de todas as senhas de X_2 que não terminam em 1, também pode-se acrescentar a ou b em todas as senhas de X_2. Não podemos deixar de perceber que $2X_1 = 2.3 = 6$ e $2X_2 = 2.8 = 16$. Assim,

    $$X_3 = 2X_1 + 2X_2 = 2.3 + 2.8 = 22.$$

    d) Senhas de 4 termos ($N = 4$). Aqui, de modo análogo, pode-se acrescentar 1 depois de todas as senhas de X_3 que não terminam em 1, o que corresponde

ao dobro das senhas de X_2, logo são: $2.X_2 = 2.8 = 16$
Podemos também acrescentar a ou b em todas as senhas de X_3, logo são $2X_3 = 2.22 = 44$, sendo assim:
$X_4 = 2X_2 + 2X_3 = 2.8 + 2.22 = 60$

e) Senhas de 5 termos. Analisando como foi feito anteriormente, pode-se fazer recursivamente:
$X_5 = 2X_3 + 2X_4$
$X_5 = 2.22 + 2.60 = 164$

Então somos levados a perceber, por argumentos de recursividade, que temos como solução geral para esse problema:

$$X_{n+2} = 2X_{n+1} + 2X_n$$

Desenvolvendo a fórmula fechada

Façamos agora o desenvolvimento de uma fórmula fechada para a solução apresentada anteriormente, onde a partir dela é possível encontrarmos qualquer termo do caso em questão. Sendo $X_{n+2} = 2X_{n+1} + 2X_n$ com $X_1 = 3$ e $X_2 = 8$, temos:

$$X_2 = 2X_1 + 2X_0 \Rightarrow 8 = 2.3 + 2X_0 \Rightarrow X_0 = 1.$$

De $X_{n+2} = 2X_{n+1} + 2X_n$ fazendo $X_n = t^n$, temos a equação $t^{n+2} - 2.t^{n+1} - 2t^n = 0$. Dividindo cada termo por t^n, temos:

$$t^2 - 2t - 2 = 0.$$

Resolvendo, obtemos $\Delta = 12$, $t_1 = 1 + \sqrt{3}$, $t_2 = 1 - \sqrt{3}$.Assim,

$$a_n = \alpha(1 + \sqrt{3})^n + \beta(1 - \sqrt{3})^n.$$

Portanto, fazendo $n = 0$ e $n = 1$, temos:

$$a_0 = 1 \Rightarrow \alpha(1 + \sqrt{3})^0 + \beta(1 - \sqrt{3})^0 = 1 \Rightarrow \alpha = 1 - \beta$$

$$a_1 = 3 \Rightarrow \alpha(1 + \sqrt{3})^1 + \beta(1 - \sqrt{3})^1 = 3.$$

Com as equações acima, podemos determinar α e β, são eles:

$$\beta = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{6}$$

$$\alpha = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6}$$

Sendo assim:

$$X_n = \left(\frac{3 + 2\sqrt{3}}{6}\right)(1 + \sqrt{3})^n + \left(\frac{3 - 2\sqrt{3}}{6}\right)(1 - \sqrt{3})^n$$

3. **Caso 3**: Vamos considerar o conjunto K de 2 letras e o conjunto L de 2 algarismos, por exemplo: $\{a, b, 1, 2\}$.

    a) Para senhas de 1 termo ($N = 1$), são 4 senhas possíveis: $(a; b; 1; 2)$ $X_1 = 4$

    b) Para senhas de 2 termos têm-se 12 senhas: $(aa; ab; a1; a2; ba; bb; b1; b2; 1a; 1b; 2a; 2b)$, ou seja, cada senha de X_1 que termina em letra dá origem a mais quatro senhas $(aa; ab; a1; a2; ba; bb; b1; b2)$. No entanto, quando termina em algarismo, só da origem a mais duas senhas $(1a; 1b; 2a; 2b)$. Logo: $X_2 = 4.2 + 2.2 = 12$

    c) Senhas de 3 termos, temos aqui 40 senhas distribuídas da seguinte forma:

        i. Senhas terminadas por a ou b:
        Podemos acrescentar a ou b bem em todas as senhas de X_2 logo teremos $2X_2$.

        ii. Senhas terminadas em 1 ou 2:
        Serão todas as senhas de X_2 que terminam em letras no caso a ou b. Que é igual ao dobro das senhas de X_1 pois em toda senha de X_1 podemos acrescentar letras.
        $2.(2X_1) = 4X_1$
        Logo: $X_3 = 2X_2 + 4X_1 = X_3 = 2.12 + 4.4 = 40$

    d) Senhas de 4 termos:
    Agora podemos utilizar o raciocínio recursivo desenvolvidos no caso anterior. Teremos em X_4 o dobro da quantidade de senhas de X_3 terminadas com a ou b, pois em todas as senhas de X_3 podemos acrescentar a letra a ou a letra b mas também podemos acrescentar 1 ou 2 no final de todas as senhas de X_3 que terminam em letras, que por sua vez, seria o dobro das senhas de X_2, ou seja: $2(2X_2) = 4X_2$.
    Logo: $X_4 = 2X_3 + 4X_2 = 2.40 + 4.12 = 128$

    e) Senhas de 5 termos:
    Agora que já se entende como a recorrência é capaz de auxiliar na resolução desse tipo de problema, podemos simplesmente escrever que:
    $X_5 = 2X_4 + 4X_3 = 2.128 + 4.40 = 256 + 160 = 416$

    f) Senhas de 6 termos:
    De modo análogo $X_6 = 2X_5 + 4X_6 = 2.416 + 4.128 = 1344$.

Aqui, faz-se um convite ao leitor para refletir o quão trabalhoso seria a resolução desse problema, até mesmo para senhas de 4 ou 5 termos, sem o uso do raciocínio recursivo.

Por fim, podemos generalizar o caso 3 para uma senha de n termos:

$$X_{n+2} = 2X_{n+1} + 4X_n$$

com $n \geq 1$; $X_1 = 4$ e $X_2 = 12$.

Desenvolvendo a fórmula fechada

De modo análogo, façamos agora para o caso 3 o desenvolvimentos da fórmula fechada. Sendo $X_{n+2} = 2X_{n+1} + 4X_n$ com $X_1 = 4$ e $X_2 = 12$, temos:

$$X_2 = 2X_1 + 4X_0 \Rightarrow 12 = 2.4 + 4.X_0 \Rightarrow X_0 = 1.$$

Assim, de $X_{n+2} = 2X_{n+1} + 4X_n$ fazendo $X_n = t^n$, temos

$$t^{n+2} - 2.t^{n+1} - 4t^n = 0.$$

Dividindo cada termo por t^n, temos:

$$t^2 - 2t - 4 = 0.$$

Resolvendo, obtemos $\Delta = 20$, $t_1 = 1 + \sqrt{5}$, $t_2 = 1 - \sqrt{5}$.Assim,

$$a_n = \alpha.(1 + \sqrt{5})^n + \beta.(1 - \sqrt{5})^n.$$

Fazendo $n = 0$ e $n = 1$, temos então:

$$a_0 = 1 \Rightarrow \alpha(1 + \sqrt{5})^0 + \beta(1 - \sqrt{5})^0 = 1 \Rightarrow \alpha = 1 - \beta$$

$$a_1 = 3 \Rightarrow \alpha(1 + \sqrt{5})^1 + \beta(1 - \sqrt{5})^1 = 4.$$

Com as equações acima, podemos determinar α e β, são eles:

$$\beta = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}$$

$$\alpha = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}$$

Sendo assim:

$$X_n = \left(\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}\right).(1 + \sqrt{5})^n + \left(\frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}\right).(1 - \sqrt{5})^n$$

4. **Caso 4**: Vamos considerar o conjunto L de 3 letras e o conjunto K de 4 algarismos, por exemplo: $[a, b, c, 1, 2, 3, 4]$

    a) Senhas de 1 termo:
    Serão 7 senhas possíveis: $(a; b; c; 1; 2; 3; 4)$ $X_1 = 7$

b) Senhas de 2 termos:
Aqui serão 33 senhas, em todas as 7 senhas de X_1 podemos acrescentar no final, qualquer uma das 3 letras. Logo já são $7.3 = 21$ mais os números 1, 2, 3 e 4, acrescentados apenas nas senhas de final a, b e c de X_1 o que dá $4.3 = 12$. Logo teremos $X_2 = 21 + 12 = 33$

c) Senhas de 3 termos:
Analisando a recorrência, pode-se dizer que:

   i. As senhas que terminam em letras serão todas as senhas de X_2 multiplicado por 3, ou seja, $3X_2$.

   ii. As senhas que terminam em números serão o quádruplo das senhas de X_2 que terminam em letras que por sua vez são o triplo das senhas de X_1 logo será $4(3X_1)$, ou seja, $12X_1$. Daí: $X_3 = 3X_2 + 12X_1 = 3.33 + 12.7 = 99 + 84 = 183$

d) Senhas de 4 termos: a partir daqui, pode-se analisar o que foi feito em casos anteriores e assim desenvolvermos a seguinte relação de recorrência:
$X_4 = 3X_3 + 12X_2 = 3.183 + 12.33 = 549 + 389 = 945$

e) Senhas de 5 termos:
Por recorrência: $X_5 = 3X_4 + 12X_3 = 3.945 + 12.183 = 5031$

f) Senhas de 6 termos:
Analogamente: $X_6 = 3X_5 + 12X_4 = 3.5031 + 12.945 = 26433$

Aqui, pode-se analisar o quão difícil seria a resolução desse caso, sem o uso do raciocínio recursivo, mesmo para um bom aluno do ensino médio, seria de fato uma "missão quase impossível"mesmo para uma senha com 5 ou 6 termos.
Generalizando o caso 4 desenvolvido acima, temos a seguinte relação para uma senha com n termos.

$$X_{n+2} = 3X_{n+1} + 12X_n$$

com $n \geq 1$; $X_1 = 7$ e $X_2 = 33$.

Desenvolvendo a fórmula fechada

De modo análogo, façamos agora para o caso 4 o desenvolvimento da fórmula fechada.Sendo $X_{n+2} = 3X_{n+1} + 12X_n$ com $X_1 = 7$ e $X_2 = 33$, temos:

$$X_2 = 3X_1 + 12X_0 \Rightarrow 33 = 3.7 + 12.X_0 \Rightarrow X_0 = 1$$

.De $X_{n+2} = 3X_{n+1} + 12X_n$, fazendo $X_n = t^n$ temos $t^{n+2} - 3.t^{n+1} - 12t^n = 0$. Dividindo cada termo por t^n, temos:

$$t^2 - 3t - 12 = 0.$$

Resolvendo, obtemos $\Delta = 57$, $t_1 = \frac{3+\sqrt{57}}{2}$, $t_2 = \frac{3-\sqrt{57}}{2}$

$$a_n = \alpha\left(\frac{3+\sqrt{57}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{3-\sqrt{57}}{2}\right)^n$$

$$a_0 = 1 \Rightarrow \alpha\left(\frac{3+\sqrt{57}}{2}\right)^0 + \beta\left(\frac{3-\sqrt{57}}{2}\right)^0 = 1 \Rightarrow \alpha = 1-\beta$$

$$a_1 = 7 \Rightarrow \alpha\left(\frac{3+\sqrt{57}}{2}\right)^1 + \beta\left(\frac{3-\sqrt{57}}{2}\right)^1 = 7$$

Com as equações acima, podemos determinar α e β, são eles:

$$\beta = \frac{57-11\sqrt{57}}{114}$$

$$\alpha = \frac{57+11\sqrt{57}}{114}$$

Sendo assim:

$$X_n = \left(\frac{57+11\sqrt{57}}{114}\right)\left(\frac{3+\sqrt{57}}{2}\right)^n + \left(\frac{57-11\sqrt{57}}{114}\right)\left(\frac{3-\sqrt{57}}{2}\right)^n$$

5. **Caso Geral**: Após a resolução dos casos particulares mostrados aqui, estamos em melhor condição de resolvermos o problema proposto originalmente.

   O enigma das senhas: Quantas são as senhas de N termos, em que seus caracteres pertencem a um conjunto definido por L letras e K algarismos que não possua dois algarismos consecutivos.

   Solução:

   a) Senhas de 1 termo:
   São $L+K$ senhas; $X_1 = L+K$

   b) Senhas de 2 termos:
   Aqui serão $L.(L+2K)$ senhas, pois em todas as senhas de X_1 podemos acrescentar qualquer uma das L letras, ou seja, $L.(L+K)$ e mais, em todas as senhas de X_1 formadas por letras, que são L senhas, podemos acrescentar qualquer um dos K algarismos, logo teremos $L.K$ senhas, então:
   $X_2 = L(L+K) + LK \Rightarrow X_2 = L(L+2K)$

   c) Senhas de 3 termos:
   Assim como foi feito nos casos anteriores, vamos dividir em 2 casos.

      i. Senhas terminadas em letras:
      As senhas de X_3 que terminam em letra serão todas as senhas de X_2 acrescentadas por qualquer uma das letras de L, logo serão $L.X_2$.

ii. Senhas terminadas em número:
As senhas de X_3 terminadas em letras serão formadas acrescentando qualquer um dos K algarismos no final de todas as senhas de X_2 que terminam em letras, que por sua vez, são as senhas de X_1 acrescentadas por qualquer uma das L letras, logo são $K(LX_1)$, logo:
$X_3 = LX_2 + KLX_1$ com $X_1 = K + L$ e $X_2 = L(L + 2K)$ como mostrado anteriormente.

d) Senhas de 4 termos:
A partir daqui faremos uso do raciocínio recursivo, onde se determina:
$X_4 = LX_3 + KLX_2$

e) Senhas de 5 termos:
$X_5 = LX_4 + KLX_3$. Com isso, pode-se finalmente determinar a expressão de recorrência geral para o nosso problema das senhas de n termos:

$$X_{n+2} = LX_{n+1} + KLX_n,$$

com $n \geq 1$; $X_1 = K + L$ e $X_2 = L(L + 2K)$.

Desenvolvendo a fórmula fechada

De modo análogo, façamos agora para o caso o geral o desenvolvimento da fórmula fechada $X_{n+2} = LX_{n+1} + KLX_n$, onde $n \geq 1$; $X_1 = K + L$ e $X_2 = L(L + 2K)$.Sendo $X_2 = LX_1 + KLX_0$, temos

$$L(L + 2K) = L(L + K) + KLX_0 \Rightarrow X_0 = 1.$$

De $X_2 = LX_1 + KLX_0$ e fazendo $X_n = t^n$, temos $t^{n+2} - Lt^{n+1} - KLt^n = 0$, dividindo cada termo por t^n, temos:

$$t^2 - Lt - KL = 0.$$

Resolvendo, obtemos $\Delta = L^2 + 4KL$, cujas raízes são

$$t_1 = \frac{L + \sqrt{L^2 + 4KL}}{2}, \quad t_2 = \frac{L - \sqrt{L^2 + 4KL}}{2}.$$

Daí,

$$a_n = \alpha \left(\frac{L + \sqrt{L^2 + 4KL}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{L - \sqrt{L^2 + 4KL}}{2} \right)^n.$$

Fazendo $n = 0$ e $n = 1$, temos:

$$a_0 = 1 \Rightarrow \alpha \left(\frac{L + \sqrt{L^2 + 4KL}}{2} \right)^0 + \beta \left(\frac{L - \sqrt{L^2 + 4KL}}{2} \right)^0 = 1 \Rightarrow \alpha = 1 - \beta.$$

$$a_1 = L + K \Rightarrow \alpha \left(\frac{L + \sqrt{L^2 + 4KL}}{2} \right)^1 + \beta \left(\frac{L - \sqrt{L^2 + 4KL}}{2} \right)^1 = L + K.$$

Com as equações acima, podemos determinar α e β, são eles:

$$\alpha = \frac{2K + L + \sqrt{L^2 + 4KL}}{2\sqrt{L^2 + 4KL}} \quad \beta = \frac{-(2K + L) + \sqrt{L^2 + 4KL}}{2\sqrt{L^2 + 4KL}}.$$

Sendo assim,

$a_n =$

$$\left(\frac{2K + L + \sqrt{L^2 + 4KL}}{2\sqrt{L^2 + 4KL}}\right)\left(\frac{L + \sqrt{L^2 + 4KL}}{2}\right)^n + \left(\frac{-(2K + L) + \sqrt{L^2 + 4KL}}{2\sqrt{L^2 + 4KL}}\right)\left(\frac{L - \sqrt{L^2 + 4KL}}{2}\right)^n.$$

4.3 Permutação Caótica em Sequências Finitas

Uma permutação é chamada de caótica quando nenhum elemento permanece na posição original. Esse tipo de permutação também é chamada de desarranjo.

Mostraremos agora algumas situações problema associadas a esse tipo de permutação e que podem ter a solução facilidade com o uso do raciocínio recursivo.

Problema-Base: De quantas maneiras podemos formar uma sequência com as α primeiras letras do nosso alfabeto, de modo que nenhuma letra esteja na sua posição original? Com $1 \leq \alpha \leq 26$ e natural

Considerando X_α o número de permutações caóticas das $\alpha's$ primeiras letras do nosso alfabeto, façamos:

1. Para $\alpha = 1$ não conseguimos fazer nenhuma sequência caótica, logo $X_1 = 0$.
2. Para $\alpha = 2$ temos a sequência (ab) e é fácil perceber que $X_2 = 1$ que seria (ba)
3. Para $\alpha = 3$ temos a sequência (abc) e também é fácil perceber que $X_3 = 2$, que seria $(bca; cab)$
4. Para $\alpha = 4$ temos a sequência $(abcd)$ e para calcular o número de permutações caóticas X_4 dividiremos em dois casos disjuntos:

    a) Caso X_4': quando a letra "a" ocupa o lugar da letra que ficou em seu lugar.
    Então, temos 3 elementos possíveis para permutar com a letra "a" (a com b, a com c, a com d) e em seguida fazemos a permutação caótica das outras 2 letras restantes que seria X_2, logo $X_4' = 3X_2$ que equivale a $X_\alpha' = (\alpha - 1)X_{\alpha-2}$

    b) Caso X_4'': quando a letra "a" ocupa o lugar de uma das letras que não ocupou o seu lugar.
    Então, temos 3 elementos possíveis para ocupar o primeiro lugar da sequência e em seguida fazemos a permutação caótica das outras 3 letras (a letra "a" e as outras duas letras) o que seria X_3. Logo $X_4'' = 3.X_3$ que equivale a $X_\alpha'' = (\alpha - 1).X_{\alpha-1}$

Então,

$$\begin{aligned} X_4 &= X_4^{'} + X_4^{''} \\ &= 3.X_2 + 3.X_3 \\ &= 3.(X_2 + X_3) \end{aligned}$$

Como $X_2 = 1$ e $X_2 = 2$ temos,

$$X_4 = 3.(1+2) \Rightarrow X_4 = 9$$

Logo, temos 9 permutações, são elas:
1º caso: $(badc, cdab, dcba)$
2º caso: $(bdac, cadb, dabc, bcda, cdba, dcab)$

5. Para $\alpha = 5$ temos a sequência $(abcde)$ e para calcular o número de permutações caóticas X_5 é conveniente dividirmos em dois casos disjuntos:

   a) Primeiro caso: Quando a letra "a" ocupa o lugar da letra que ficou em seu lugar X_5', como já vimos, nesse caso $X_\alpha^{'} = (\alpha - 1).X_{\alpha-2}$

   b) Segundo caso: Quando a letra "a" ocupa o lugar de uma das letras que não ocupou o seu lugar X_5', como já vimos, nesse caso $X_\alpha^{''} = (\alpha - 1)X_{\alpha-1}$

Como
$X_\alpha = X_{\alpha'} + X_{\alpha''}$
$X_\alpha = (\alpha - 1)X_{\alpha-2} + (\alpha - 1)X_{\alpha-1}$
então, para $\alpha \geq 3$ e $X_1 = 0$ e $X_2 = 1$:

$$X_\alpha = (\alpha - 1)[X_{\alpha-1} + X_{\alpha-2}]$$

Seria a nossa relação de recorrência;
Como $X_3 = 2$ e $X_4 = 9$ temos que
$X_5 = 4(X_4 + X_3) \Rightarrow X_5 = 4.(2+9) = 44$
De forma análoga, temos:

6. Para $\alpha = 6$ então $X_6 = 5(X_5 + X_4) = 5.(44+9) = 265$

7. Para $\alpha = 7$ então $X_7 = 6(X_6 + X_5) = 6.(265+44) = 1854$

8. Para $\alpha = 8$ então $X_8 = 7(X_7 + X_6) = 7.(1854+265) = 14.833$

4.3.1 Resolvendo a recorrência das permutações caóticas

Sendo $X_\alpha = (\alpha - 1)(X_{\alpha-1} + X_{\alpha-2})$ com $X_1 = 0$ e $X_2 = 1$, temos:

$$X_\alpha = \alpha X_{\alpha-1} - X_{\alpha-1} + (\alpha-1)X_{\alpha-2} \Rightarrow X_\alpha - \alpha X_{\alpha-1} = (-1)[X_{\alpha-1} + (-1)(\alpha-1)X_{\alpha-2}].$$

Fazendo,

$$d_\alpha := X_\alpha - \alpha X_{\alpha-1} \tag{4.1}$$

Temos, $d_{\alpha-1} = X_{\alpha-1} - (\alpha-1)X_{\alpha-2}$. Então,

$$d_\alpha = (-1)d_{\alpha-1}.$$

Note que d_α nos dá uma progressão geométrica de razão -1, cujo segundo termo é 1, pois:

$$d_2 = X_2 - 2X_1 = 1 - 2(0) = 1.$$

Assim, tal PG. tem termo geral dado por:

$$\begin{align} d_\alpha &= d_1 q^{\alpha-1} \tag{4.2}\\ &= (-1)(-1)^{\alpha-1} \tag{4.3}\\ &= (-1)^\alpha. \tag{4.4} \end{align}$$

Substituindo (4.4) em (4.1), temos:

$$X_\alpha - \alpha X_{\alpha-1} = (-1)^\alpha,$$

para todo $\alpha \geq 2$ onde $X_1 = 0$.
Dividindo todos os termos da recorrência acima por $\alpha!$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{X_\alpha}{\alpha!} &= \frac{\alpha X_{\alpha-1}}{\alpha!} + \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!} \\ &= \frac{X_{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} + \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!}. \end{aligned}$$

Sendo $K_\alpha := \dfrac{X_\alpha}{\alpha!}$, então $K_{\alpha-1} = \dfrac{X_{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}$.Portanto, $K_\alpha = K_{\alpha-1} + \dfrac{(-1)^\alpha}{\alpha!}$. Observe que,

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0 - \frac{1}{1!} \\ K_2 &= K_1 + \frac{1}{2!} \\ K_3 &= K_2 - \frac{1}{3!} \\ &\vdots \\ K_\alpha &= K_{\alpha-1} + \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!}. \end{aligned}$$

Fazendo a soma telescópica das igualdades acima, temos:

$$K_\alpha = K_0 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!}. \tag{4.5}$$

Substituindo $K_\alpha := \frac{X_\alpha}{\alpha!}$, em (4.5), temos:

$$\frac{X_\alpha}{\alpha!} = 1 + \left(-\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!}\right) \Rightarrow X_\alpha = \alpha!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!}\right].$$

Portanto,

$$X_\alpha = \alpha! \sum_{i=0}^{\alpha} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Observamos que para $i \to \infty$, a série $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \to \frac{1}{e}$ [14]. Assim,

$$X_\alpha \approx \frac{\alpha!}{e},$$

onde $e \approx 2,7182818$ que é a base dos logaritmos naturais.

Exercícios:

1. Com relação aos anagramas da palavra , calcule:

   a) O total
   Solução:
   Permutação de 7 elementos distintos, $P_7 = 7! = 5040$

   b) Em quantos, nenhuma letra aparece em sua posição original
   Solução:
   Permutação caótica de 7 elementos distintos, como $X_2 = 1$; $X_3 = 2$, com $X_\alpha = (\alpha - 1).[X_{\alpha-1} + X_{\alpha-2}]$ temos $X_4 = 9$, $X_5 = 44$, $X_6 = 265$, $X_7 = 6.(X_5 + X_6) = 1854$

   c) Em quantos, apenas a primeira e a última letra, estão na posição original.
   Solução:
   Para a primeira e a última letra temos apenas uma opção e para as outras 5 letras temos uma permutação caótica, logo, como $X_\alpha = (\alpha - 1).[X_{\alpha-1} + X_{\alpha-2}]$ e $X_2 = 1$ e $X_3 = 2$ temos que $x_4 = 9$ e $X_5 = 4.(X_4 + X_3) = 4.(9 + 2) = 44$

2. Tia Jaqueline recebeu de cada um de seus 7 alunos um livro que será lido durante o semestre. Na aula seguinte, redistribuiu os livros entre os alunos de forma aleatória. De quantas formas pode ter ocorrido a distribuição dos livros sabendo que exatamente dois alunos receberam seu próprio livro
   Solução:

Primeiro é necessário perceber que existem $7.6/2 = 21$ maneiras de escolher os 2 alunos que receberão seu próprio livro. Em seguida fazemos uma permutação caótica de 5 elementos, que, como já vimos, $X_5 = 4.(X_4 + X_3)$ com $X_4 = 9$ e $X_3 = 2$ então $X_5 = 44$, logo existem $21 \cdot 44 = 924$ maneiras distintas de os livros serem distribuídos, seguindo as exigências da questão.

3. Quantas permutações caóticas podemos formar de uma fila composta de 10 pessoas em que as cinco primeiras pessoas são mulheres e as cinco últimas pessoas são homens. De modo que:

   a) As cinco primeiras pessoas sejam homens
   Solução:
   Como na fila original as cinco primeiras pessoas são mulheres e na fila que vamos formar as cinco primeiras pessoas são homens, então para qualquer uma das 5! maneiras de organizar a nossa fila será uma permutação caótica em relação à fila original e de forma inversa acontecerá para formação das 5 últimas pessoas da fila. Logo a solução será $5!.5! = 14400$

   b) As cinco primeiras pessoas sejam mulheres
   Solução:
   Como na nossa fila, os cinco primeiros elementos serão os mesmos da fila original, seria uma permutação caótica de cinco elementos $X_5 = 44$ e o mesmo acontece com os 5 últimos elementos, logo a solução é $X_5 \cdot X_5 = 44.44 = 1936$

Baseado nos problemas anteriores, serão mostrados aqui alguns exercícios-exemplos que seguem a mesma linha de resolução, porém em um contexto diferente daquele abordado nos problemas resolvidos aqui.

4.4 Problemas-Exemplos

- As máquinas de um cassino em Las Vegas trabalham com a própria moeda particular desse cassino, o kibiu. Nesse cassino tem-se uma máquina de vídeo-poker que funciona a partir da entrada de exatamente 8 kibius, mas sabe-se que a máquina aceita apenas moedas de 1 ou 2 kibius. Sendo assim, determine de quantas formas um jogador pode inserir as moedas nessa máquina para que consiga jogar.

- Gabriel, um bom atleta de Judô, possui várias medalhas de ouro, prata e bronze, todas de mesmo formato e diferentes apenas pelo material que as compõe. De quantas maneiras poderá Gabriel enfileirar em um quadro, 5 de suas medalhas, de modo que não fiquem duas medalhas de ouro consecutivas.
  Observação: Considere que Gabriel possui 5 medalhas de cada tipo.

- Um engenheiro deverá construir 6 casas em um condomínio, uma ao lado da outra, e em cada casa deverá utilizar como base da estrutura apenas um dos materiais: concreto, cimento, ferro, madeira ou gesso. Como os dois últimos materiais são bastante inflamáveis, por questões de segurança, não é permitida a construção de duas casas com materiais inflamáveis uma ao lado da outra. De quantas sequências distintas poderá o engenheiro construir essas casas com relação ao material utilizado?

5 Considerações Finais

No trabalho aqui apresentado, buscou-se enfatizar e demonstrar a importância existente no estudo das recorrências para o desenvolvimento intuitivo dos nossos alunos do Ensino Médio.

A utilização do raciocínio recursivo para resolução dos problemas envolvendo sequências é de grande valia tanto para os alunos quanto para os professores, tendo em vista o leque de áreas e problemas da matemática que envolvem sequências e que podem ser tratados de forma mais elegante, simplificada e interessante para os alunos quando usamos a abordagem das recorrências.

Ao utilizarmos as recorrências e o raciocínio recursivo como ferramenta na resolução de alguns problemas, essas resoluções se tornam mais claras, práticas, inteligentes e completas. Essa grande vantagem aliada à capacidade de fornecer para o aluno um raciocínio lógico característico já é mais que o suficiente para que dediquemos nossas forças e concentremos nossas energias em estudar esse tema tão intrigante e instigante da matemática.

Procuramos, ao máximo, simplificar e, ao mesmo tempo, abranger as resoluções dos Problemas-Chave para que fosse possível a compreensão de um aluno que estará tendo o primeiro contato com a área. Cada mínimo detalhe do trabalho foi pensando com o intuito de facilitar o acesso dos alunos a esse tema e auxiliar o professor a introduzir aos poucos, mas com convicção, a ideia do raciocínio recursivo em suas turmas do ensino médio.

Por fim, é importante lembrar que o trabalho foi elaborado com o intuito de motivar alunos e professores a adentrarem nesse tema com maior profundidade, e pedimos, então, para que os que se sentirem atraídos pela área continuem seus estudos e permaneçam firmes na atividade, pois só trabalhando juntos poderemos abranger nosso conhecimento e favorecer as futuras gerações.

Referências

1. LIMA, E. L. et al. A matemática do ensino médio, vol. 2. Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2006.

2. FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. Círculos matemáticos: A experiência russa. Trad. Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

3. ANDREESCU, TITU; FENG, ZUMING. A path to combinatorics for undergraduates: counting strategies. Springer Science & Business Media, 2013.

4. MAZUR, David R. Combinatorics: a guided tour. MAA, 2010.

5. MUNIZ NETO, A. C., Tópicos de matemática elementar, combinatória, 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. v.4; 237p. (Coleção do Professor de Matemática).

6. MORGADO, A. C., PINTO CARVALHO, P.C., Matemática Discreta, -2.ed. Rio de Janeiro: SBM,2015. 294p. (Coleção).

7. MORGADO, A. C., WAGNER, E., ZANI, S. C., Progressões e Matemática Financeira, -6.ed. Rio de Janeiro:SBM,2015. 161p. (Coleção do Professor de Matemática).

8. HEFEZ A., Indução Matemática, Niteroi: Programa de Iniciação Científica da OBMEP,2007. v.4 77p. (IC-OBMEP).

9. SANTOS, J. PLÍNIO O., MELLO, M. P. E MURARI, IDANI T.C. Introdução à Análise Combinatória, -4.ed. revista. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda.,2007. 389p.

10. CERECEDA, J. L.. *Binet's formula for generalized tribonacci numbers.* **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 46, n. 8, p. 1235-1243, 2015.

11. <https://pt.wikipedia.org/wiki/LeonardoFibonacci>.

12. <http://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/labmat/torre_de_hanoi.pdf>.

13. <http://mathworld.wolfram.com/Fibonaccin-StepNumber.html>.

14. MUNIZ N., Fundamentos de Cálculo, -1.ed. Rio de Janeiro: SBM,2015. 577p. (Coleção , 15).

15. POLLMAN, H.S., Equações de Recorrência, Revista Eureka, número 9, páginas 33-40.