



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

JOSÉ LUIZ CAVALCANTE

**A DIMENSÃO COGNITIVA NA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO:
REFLEXÃO TEÓRICO-CRÍTICA NO ENSINO DE PROBABILIDADE NA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA.**

RECIFE – PE
2018

JOSÉ LUIZ CAVALCANTE

**A DIMENSÃO COGNITIVA NA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO:
REFLEXÃO TEÓRICO-CRÍTICA A PARTIR DO ENSINO DE PROBABILIDADE
NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA.**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências e Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor.

Orientadora: Prof^a. Dra. Anna Paula Avelar de Brito Lima

Co-orientador: Prof.^o Dr. Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade

**RECIFE – PE
2018**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

C376d Cavalcante, José Luiz

A dimensão cognitiva na Teoria Antropológica
do didático: reflexão teórico-crítica no ensino de
probabilidade na licenciatura em matemática / José
Luiz Cavalcante. – Recife, 2018.
482 f.: il.

Orientadora: Anna Paula Avelar Brito Lima.

Coorientador: Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade

Tese (Doutorado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco.
Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, Recife, BR-PE,
2018.

Inclui referências e apêndice(s).

1. Cognição 2. Matemática 3. Probabilidades - Estudo e ensino
3. Aprendizagem cognitiva 4. Psicologia da aprendizagem 5. TAD
I. Lima, Anna Paula Avelar Brito, orient. II. Andrade, Vladimir Lira
Veras Xavier de, coorient. III. Título

CDD 370

FOLHA DE APROVAÇÃO

José Luiz Cavalcante

**A DIMENSÃO COGNITIVA NA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO:
REFLEXÃO TEÓRICO-CRÍTICA A PARTIR DO ENSINO DE PROBABILIDADE
NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA.**

Orientadora: Prof^ª. Dra. Anna Paula Avelar de Brito Lima

Co-orientador: Prof.^º Dr. Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade

Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

Defendida em 14 de novembro de 2018.

Banca Examinadora

Anna Paula de Avelar **BRITO LIMA**
Presidente/ 1^a Examinadora/ Orientadora
Instituição: Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

Vladimir Lira Veras Xavier de **ANDRADE**
2^º Examinador interno/ Co-orientador
Instituição: Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

Mônica Maria Lins **SANTIAGO**
3^a Examinadora interna
Instituição: Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

Paula Moreira Baltar **BELLEMAIN**
4^a Examinadora externa
Instituição: Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

Jorge Tarcísio da **ROCHA FALCÃO**
5^a Examinadora externo
Instituição: Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN

DEDICATÓRIA

O trabalho de toda uma vida, dedico a quem nela foi e sempre será importante para mim.

Para minha filha Ana Luiza Ferreira Cavalcante, a mais bela canção que me ensina todos os dias o valor da vida.

Para minha filha Ana Laura Ferreira Cavalcante meu poema mais doce.

Para Ivanize Maria, quem sempre acreditou e nunca desistiu de mim, a fortaleza desse leão rebelde, mãe de minhas filhas, poema e canção, meu amor.

Para Dona Zita e Seu José Cavalcante, meus pais, gente simples, honesta, de bom coração, minha escola sobre a vida e o amor, cujo amor incondicional e a luta diária são fonte inesgotável de inspiração.

Para Cristiane a irmã sanguínea que representa nesta dedicatória o amor que tenho por todos os irmãos que a vida me deu.

AGRADECIMENTOS

No pôr-do-sol dessa jornada que começou bem antes daquele agosto de 2015 é chegada a hora de agradecer. Os que me acompanharam de perto sabem melhor que eu, nada disso seria possível sem a participação de cada um nessa jornada. Por isso ela não é só minha, é de todos vocês. Serei eternamente grato por cada oração, palavra amiga, orientação, incentivo, por cada risada ou lágrima partilhada, pela paciência, pelo menor dos gestos que seja, sem eles, eu não estaria aqui. Obrigado!

Agradeço...

A essa força universal em mim, a quem chamo de Deus, Pai, Filho e Espírito Santo.

A minha santíssima mãe pela proteção diária e por guardar minha família enquanto estive longe.

Aos amigos e amigas de jornada acadêmica e de vida, bem como a seus respectivos familiares: Dilson Cavalcanti, Fernando Emílio, Marcus Bessa, Maria José, Carlos Eduardo, Valdir Cavalcanti, Abraão Romão, Nahum Isaque.

Aos amigos e amigas da turma de doutorado 2015.2, Michele, Simone, Paulinha, Renata, Patrícia, Maurílio, Luiz e Bárbara.

Aos Professores do PPGEC-UFRPE, funcionários da UFRPE e a equipe do melhor Restaurante Universitário do Mundo.

Ao parceiro de todas as horas, do comando da madrugada na BR 232, meu irmão Poeta Guerreiro Valentim.

Ao meu irmão Aleilson Santana, que mesmo longe esteve e está sempre presente em minha vida.

Ao Professor Marcelo Medeiros (terceiro orientador), Amiel Nassar Rivera, com quem já dividi tantas histórias, que só posso lhe dedicar eterna gratidão e ternura.

Ao casal de antropólogos Adeilson e Melânia responsáveis pelo meu encontro com Marcel Mauss e Mary Douglas, bem antes de Chevallard.

Aos amigos de Candeeiro Robson Araújo e Redlhey Michael.

Aos amigos e amigas que souberam suportar minha ausência, Curió, Williams Rosa, Renata, Alexandre Miguel, Vanubia Martins.

A minha professora de francês Karelli e seu esposo Quentin que me acolherem em Grenoble, amigos para toda a vida.

A Professora Marilena Bittar, ao Professor Hamid Chaachoua e a Professora Danielle que do LaDiMa ao CITAD6 não mediram esforços para nos ajudar.

A Professora Mônica pela ternura e o respeito com que sempre me tratou, responsável,
como toda rosa, por nos inspirar na jornada.

A Professora Paula Baltar pelo zelo, carinho e ética na avaliação de nosso trabalho.

Ao Professor Jorge Falcão, presente que Anna Paula me deu. Pelas fundamentais
contribuições em nosso trabalho, pela atenção dedicada conosco, por acreditar em nós.

As minhas filhas que durante todos os dias souberam entender esse pai, tantas vezes
ausente, as vezes cansado, irritado, mas sempre amoroso.

A Ivanize Maria, que certa vez ainda na Faculdade de Formação de Professores de
Arcoverde – PE, olhou para mim e disse “Luiz, tu tais se perdendo aqui, tu tanto tem
potencial”. Se cheguei até aqui, foi por você acreditar que seria possível, por me dar
condições e dizer “vai” que estarei aqui esperando.

A minha família, meus pais, minha irmã, minha avó paterna a quem admiro e nunca
poderei atender seu conselho “zé luiz, já estudou tanto, já tá bom meu filho”.

A família que ganhei com o casamento. Dona Teté, Tia Cléo, Amélia, Chico, Toinha e
Risolene, Tia Didi, Sebastião e Tia Maura.

Ao Professor Vladimir Andrade, mais um presente que Anna me deu. Por tantos
ensinamentos, pela exemplo de simplicidade e compromisso ético com nossa profissão.

Aos sujeitos de nossa pesquisa. Professor e futuros professores.

Ao flecha negra, de faróis duvidosos, freios incertos, mais sempre disposto a desbravar
o mundo comigo.

Ao Spike, amigo irracional, que tanto me ensinou sobre companheirismo, fidelidade e
a simplicidade de viver.

A Rochelande, amigo racional, que a vida me deu. Que me ensina todos os dias
grandes lições. Amigo de tese, amigo de hospital, amigo da Vila do Chaves, Amigo do RU,
Amigo para se atravessar o atlântico e se sentir seguro. Amigo para a vida toda.

E por fim, meu agradecimento especial, voto de eterna gratidão e respeito, a quem me
deu mais que bons amigos. Ela que esteve comigo em cada poema de tese. Que depositou em
mim a confiança necessária para que eu pudesse trilhar essa jornada. Quem não tem medo de
dividir sua vida com aqueles que ama. Que não se rende as injustiças dessa vida. Exemplo de
bondade, de competência, de luta e de amor à vida. Professora Anna Paula Avelar Brito Lima,
Mãe, Mulher, Psicóloga, Amiga, Orientadora, obrigada!

O Amor é chuva fina, mas transborda o rio.

(Provérbio africano)

RESUMO

Na presente tese desenvolvemos um estudo cujo o objetivo geral foi caracterizar o lugar do sujeito cognitivo na Teoria Antropológica do Didático (TAD) a partir da perspectiva da cognição como um fenômeno situado no contexto institucional, quando se estabelece um sistema didático em torno do ensino de probabilidade na licenciatura em Matemática. De natureza teórico-empírica em nossa investigação nos debruçamos no estudo de textos da antropologia social, apontados por Chevallard (1996; 2006) como bases para compreensão de noções fundamentais da TAD, dentre elas, instituição e praxeologia. O contato com esses textos indicou teoricamente a possibilidade de analisar a cognição no que tange a dimensão psicológica, tendo como aporte a TAD. Esse movimento teórico nos levou a assumir a cognição como um fenômeno situado no contexto institucional. Posição que repousa teoricamente nos trabalhos de Jean Lave e seus colaboradores. A *situated learning* nos ajudou na construção de categorias de análises e a um quadro de aproximações das suas noções teóricas com as da TAD. Ao revisitar textos clássicos como Chevallard (1989; 1992; 1996; 1999; 2003; 2006) pudemos caracterizar as instituições como agentes na cognição dos sujeitos. Esse posicionamento teórico foi corroborado pela construção de um processo empírico de observação participante, onde analisamos o funcionamento do sistema didático em torno do ensino de probabilidade em curso de Licenciatura em Matemática em universidade pública do estado da Paraíba – Brasil. Delineando a ecologia em torno da probabilidade na formação de professores, localizamos esse saber na escala de codeterminação didática e propusemos o esboço de um modelo epistemológico de referência para atender as demandas formativas dos futuros professores de matemática em relação a probabilidade. Ao passo que a ecologia revelada é problemática, percebe-se que o contexto previsto no contrato institucional age diretamente na cognição dos futuros professores. A análise do contrato didático nos permitiu perceber no processo de participação e engajamento dos sujeitos dificuldades, obstáculos didáticos e vieses cognitivos em relação à probabilidade que contribuem para a construção de uma relação pessoal R(X,O) fragilizada e fragmentada, embora os sujeitos sejam considerados *conformes* pela avaliação institucional. Isso se caracteriza para nós como efeito de uma *dissonância* entre discursos institucionais internos a licenciatura, mas também externos. O estudo culmina com a proposição de um modelo em três níveis para análise da dimensão cognitiva a partir da TAD e aponta dentre outras questões futuras, a possibilidade de experimentação e ampliação desse modelo.

Palavras-chave: TAD; Cognição; Ensino de Probabilidade; Sujeito Psicológico; Contrato Didático; Aprendizagem Situada.

RÉSUMÉ

Sur la thèse présente on développe une étude qui l'objectif général a été de caractériser le lieu du sujet cognitif dans la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) à partir de la perspective de la cognition comme un phénomène situé dans le contexte institutionnel, quand s'établit un système didactique au tour de l'enseignement de la probabilité en licence en mathématiques. De nature théorique-empirique; en notre recherche nous avons travaillé sur l'étude de textes de l'anthropologie social, pointés par Chevallard (1996; 2006) comme les bases pour la compréhension des notions fondamentals de la TAD, parmi eux, l'institution et la praxéologie. Le contact avec ces textes ont indiqués théoriquement la possibilité d'analyser la cognition en ce que tangué la dimension psychologique, tenant comme base la TAD. Ce mouvement théorique nous a mené à assumer la cognition comme un phénomène situé dans le contexte institutionnel. Position que reste théoriquement sur les travaux de Jean Lave et ces collaborateur. La *Situated Learning* nous a aidé dans la construction de catégories d'analyse et d'un cadre d'approches de ces notions théorique avec celles de la TAD. Lors des retours aux textes classiques comme Chevallard (1989; 1992; 1996; 1999; 2003; 2006) nous avons pu caractériser les institutions comme des agents de la cognition des sujets. Ce positionnement théorique était d'accord grâce à la construction d'un processus empirique d'observation participante, où on a analysé le fonctionnement du système didactique au tour d'enseignement de la probabilité dans le cours de Licence en Mathématiques dans l'université publique de l'état de la Paraíba - Brésil. En désignant l'écologie au tour de la probabilité dans la formation des professeurs, on a localisé ce savoir sur une échelle de codétermination didactique et on a suggéré l'esquisse d'un modèle épistémologique de référence pour répondre à les demandes de formation des futures professeurs de mathématiques par rapport à la probabilité. En tant que l'écologie révélée est problématique, on s'est aperçu que le contexte prévu sur le contrat institutionnel agit directement dans la cognition des futures professeurs. L'analyse du contrat didactique nous a permis d'apercevoir dans le processus de participation et engagement des sujets des difficultés, des obstacles didactique et des biais cognitifs par rapport à la probabilité qui contribuent à la constructions d'une relation personnel R (X,O) fragilisée et fragmentée, malgré le fait que, les sujets soient considérés conformes par l'évaluation institutionnel. Cela se caractérise pour nous comme l'effet d'une dissonance entre les discours institutionnel internes à la licence, mais aussi externes. L'étude résulte dans la proposition d'un modèle en trois niveaux pour l'analyse de la dimension cognitive à partir de la TAD et appoint d'autres futures questions qui ont la possibilité d'expérimentation et ampliation de ce modèle.

Mots-clés: TAD; Cognition; Enseignement de la probabilité; Sujet psychologique; Contrat didactique; Apprendre situé.

ABSTRACT

In this thesis we developed a study for which general objective was to characterize the place of the cognitive subject in the Anthropological Theory of the Didactic (ATD) from the perspective of cognition as a phenomenon situated in the institutional context, when it is established a didactic system around the teaching of probability in the degree in Mathematics. Of a theoretical-empirical nature in our investigation, we focus on the study of texts of social anthropology, as pointed out by Chevallard (1996, 2006) as bases for understanding basic concepts of ATD, among them, institution and praxeology. The contact with these texts theoretically indicated the possibility of analyzing the cognition regarding the psychological dimension, having as input the ATD. This theoretical movement has led us to assume cognition as a phenomenon situated in the institutional context. This position rests theoretically on the work of Jean Lave and his collaborators. Situated learning helped us in the development of analysis categories and approximation framework of its theoretical notions with those from ATD. In revisiting classical texts, such as Chevallard (1989, 1992, 1996, 1999, 2003, 2006) we were able to characterize institutions as agents in the cognition of subjects. This theoretical positioning was corroborated by the development of an empirical process of participant observation, where we analyzed the functioning of the didactic system around the teaching of probability in the Degree in Mathematics at a public university in Paraíba state - Brazil. Outlining ecology around probability in teacher training, we located this knowledge in the scale of didactic codetermination and we proposed the outline of an epistemological model of reference to meet the formative demands of future math teachers related to probability. While revealed ecology is problematic, it is perceived that the context envisaged in the institutional contract acts directly on the cognition of future teachers. The analysis of the didactic contract allowed us to realize in the process of participation and engagement of the subjects, difficulties, didactic obstacles, and cognitive biases with regard to probability that contribute to the construction of a fragile and fragmented personal relation $R(X,O)$, although the subjects are considered compliant by the institutional evaluation. This is characterized for us as an effect of a dissonance between institutional discourses internal to the degree, but also external. The study peaks with the proposition of a three-level model for the analysis of the cognitive dimension from ATD and points out among other future questions, the possibility of experimentation and expansion of this model.

Keywords: ATD; Cognition; Teaching of Probability; Psychological Subject; Didactic Contract; Situated Learning.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Movimento das questões, hipóteses e objetivos.	41
Figura 2 – Modalidades de análise da problemática dialética da Prática	77
Figura 3 – Tripé constitutivo do objeto de estudo da didática da matemática.	95
Figura 4 – O processo de transposição didática.	102
Figura 5 – Evolução das noções teóricas da TAD.....	103
Figura 6 – Quadro de desenvolvimentos da TAD.....	123
Figura 7 – Antropologia cognitiva e a antropologia didática.	125
Figura 8 – Complexo praxeológico.	131
Figura 9 – Modelização das OD em níveis.	136
Figura 10 – Escala de codeterminação.	143
Figura 11 – Equivalência entre níveis específicos e as OM.....	145
Figura 12 – Localização da pesquisa nos Níveis de Codeterminação.....	146
Figura 13 – Uma das funções do Contrato Didático.	154
Figura 14 – Gabarito videografia sala de aula.....	170
Figura 15 – Resumo do quadro de análise.	179
Figura 16 – Constituição do espaço da atividade de estudo sobre probabilidades.....	201
Figura 17 – Modelo de Sáenz.....	202
Figura 18 – Noções elementares da Probabilidade em Rathie e Zörning (2012).	213
Figura 19 – Noções elementares da Probabilidade em Arbex (1967).	214
Figura 20 – Axiomática de Kolmogorov I – V.	215
Figura 21 – Apresentação dos Axiomas em obras didáticas mais recentes.....	215
Figura 22 – Conteúdo programático de Introdução à Probabilidade 2016.2.....	239
Figura 23 – Bibliografia Introdução à Probabilidade.	241
Figura 24 – Exemplo da organização didática da obra A.....	244
Figura 25 – Definição de probabilidade obra A.	245
Figura 26 – Extrato momentos didáticos da Obra A.	246
Figura 27 – Exemplo envolvendo espaço amostral contínuo.....	252
Figura 28 – Probabilidade como frequência teórica na obra B.	253
Figura 29 – Análise da abordagem metodológica na obra B.	254
Figura 30 – Representação gráfica do espaço amostral na obra B.	255
Figura 31 – Introdução da probabilidade condicional.....	256
Figura 32 – Vestígios de tecnologia na obra B.	256
Figura 33 – Problema 20 – modelo utilizado na teoria da confiabilidade.....	259
Figura 34 – Problemas 46 e 47.....	259
Figura 35 – τ_{LEC} – Listar os elementos do conjunto um a um.	263
Figura 36 – Tarefas relativas ao tipo T_2 na Obra B.....	264
Figura 37 – Técnica auxiliar e o papel da tecnologia.....	266
Figura 38 – Localização da probabilidade nas escala de codeterminação didática.....	269
Figura 39 – Esboço de um MER para o Ensino de Probabilidade na Licenciatura em Matemática. ...	271
Figura 40 – Caracterização do Sistema Didático Principal (SDP).....	277
Figura 41 – Localização dos sujeitos frente a probabilidade.	286
Figura 42 – Termos-chave da exposição.....	299
Figura 43 – Modelo de estabilização de frequência no lançamento de uma moeda honesta e $n=19$. .	316
Figura 44 – Resolução questão 01 - Caderno de probabilidades Milena.	348

Figura 45 – Questão 4 - Questionário 01 – Solução Milena.	367
Figura 46 – Questão 4 - Questionário 01 – Complemento Solução Milena.....	369
Figura 47 – Protocolo Milena – Questão 01 – Questões de probabilidade.	371
Figura 48 – Questão 2 – Solução Milena.	373
Figura 49 – Questão 3 – Resposta Milena.....	375
Figura 50 – Resposta Milena questão 4.	376
Figura 51 – Resposta – Milena – Questões de probabilidade.	377
Figura 52 – Resposta Kátia – Questão 4 – questionário 01.....	382
Figura 53 – Resposta Kátia – questão 1 – questões de probabilidade.....	385
Figura 54 – Descrição do Espaço Amostral - Kátia	387
Figura 55 – Resposta de Kátia – questão 3.	389
Figura 56 – Resposta Kátia para questão 4.	390
Figura 57 – Resposta Kátia – questão 5.	391
Figura 58 – Solução de Antonio – Questão 4 – questionário formal.	396
Figura 59 – Presença dos objetos ostensivos nas praxeologias dos sujeitos de IDIP.....	398
Figura 60 – Resolução item “a” questão 1 – questionário probabilidades.	399
Figura 61 – Aplicação da técnica nos itens c e d.....	401
Figura 62 – Resolução questão 2 – Planejamento familiar – Antonio.	402
Figura 63 – Níveis de Análise da Dimensão Cognitiva na TAD.	442

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Apontamentos das pesquisas sobre aprendizagem de probabilidade	35
Quadro 2 – Resumo evolução da Didática da Matemática.....	100
Quadro 3 – Exemplo aplicação de técnicas.....	129
Quadro 4 – Descrição dos momentos de estudo.....	134
Quadro 5 – Resumo efeitos do contrato didático.	158
Quadro 6 – Quadro resumo noções da TAD e AS.	162
Quadro 7 – Caminhar metodológico.	167
Quadro 8 – Etapas da Pesquisa.	169
Quadro 9 – Descrição dos instrumentos de coleta de dados.	171
Quadro 10 – Descrição das entrevistas abertas.	175
Quadro 11 – Principais axiomas da função probabilidade.	216
Quadro 12 – Teoremas elementares associados ao cálculo de Probabilidade.....	218
Quadro 13 – Teoremas associados ao cálculo de probabilidade condicional.....	219
Quadro 14 – Exemplo de aplicação do teorema total.....	220
Quadro 15 – Discussão do Problema de Monty Hall e o teorema de Bayes.	222
Quadro 16 – Probabilidade nos Parâmetros do Ensino Médio.....	227
Quadro 17 – Objetos de aprendizagem associados à Probabilidade na BNCC.....	230
Quadro 18 – Habilidades associadas aos objetos de aprendizagem da Probabilidade.	231
Quadro 19 – Frequência de empréstimos dos títulos da bibliografia básica.	242
Quadro 20 – Distribuição de temas por seção obra A.	243
Quadro 21 – Relações associadas às probabilidades de eventos.	247
Quadro 22 – Organização de tarefas e subtipos de tarefas na obra A.	250
Quadro 23 – Distribuição de temas por seção obra B.	252
Quadro 24 – Tipos de tarefas presentes na obra B.	260
Quadro 25 – Noções associadas e relações associadas a resolução de T_2	263
Quadro 26 – Noções e relações necessárias para resolução de T_3 e T_4	265

Quadro 27 – Sumário das tentativas do problema de Monty Hall.	288
Quadro 28 – Extrato do questionário 01 – 1ª questão.	290
Quadro 29 – Extrato do questionário 01 – questão 02.	291
Quadro 30 – Extrato questionário 01 – questão 3.	291
Quadro 31 – Características do contrato inicial em I_{DIP}	303
Quadro 32 – Temas trabalhados na 1ª unidade em I_{DIP}	308
Quadro 33 – Extrato dos slides aula 01.	311
Quadro 34 – Extrato dos slides aula 1.	313
Quadro 35 – Síntese dos fenômenos observados no 1º encontro.	319
Quadro 36 – Questão 4 – Independência de eventos.	338
Quadro 37 – Questão 5 – Probabilidade Total.	342
Quadro 38 – Questão 6 – Teorema de Bayes.	342
Quadro 39 – Questão 01 – 3º encontro em I_{DIP}	350
Quadro 40 – Questão 2 – 3º encontro em I_{DIP}	356
Quadro 41: Questão 3 – 3º Encontro em I_{DIP}	360
Quadro 42 – Brincadeira de Probabilidade.	361
Quadro 43 – Sugestão de espaço amostral questão 2 questões de probabilidade.	374
Quadro 44 – Técnica provisória de Antonio.	400
Quadro 45 – 1ª Parte da Síntese fenômenos observados em I_{DIP}	411
Quadro 46 – 2ª Parte da Síntese fenômenos observados em I_{DIP}	412
Quadro 47 – Níveis de análise da dimensão cognitiva.	439

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	PROBLEMATIZAÇÃO.....	26
1.2	ORGANIZAÇÃO DE NOSSA TESE.....	42
2	COGNIÇÃO COMO FENÔMENO SITUADO: DIALÓGOS ENTRE ANTROPOLOGIA E PSICOLOGIA.....	44
2.1	COGNIÇÃO: DIMENSÃO PSICOLÓGICA E ANTROPOLÓGICA	49
2.1.1	COGNIÇÃO: DIÁLOGOS ENTRE A PSICOLOGIA, ANTROPOLOGIA E A DIDÁTICA	54
2.1.2	COGNIÇÃO SITUADA: OUTRO OLHAR SOBRE O APRENDER	68
3	TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO	91
3.1	DIDÁTICA DA MATEMÁTICA: GÊNESES E EVOLUÇÕES	91
3.2	ANTROPOLOGIA COGNITIVA E A DIDÁTICA DOS SABERES	101
3.3	PRAXELOGIAS: MODELIZAÇÃO DAS PRÁTICAS HUMANAS	127
3.4	CONSIDERAÇÕES SOBRE O CONTRATO DIDÁTICO	150
3.5	SÍNTESE DO QUADRO TEÓRICO.....	159
4	ASPECTOS METODOLÓGICOS	164
4.1	SUJEITOS DA PESQUISA	166
4.2	ETAPAS DA PESQUISA	167
4.3	INSTRUMENTOS PARA CONSTRUÇÃO DOS DADOS.....	169
4.4	CATEGORIAS DE ANÁLISE	175
5	ENSINO DE PROBABILIDADE E A FORMAÇÃO DOCENTE.....	180
5.1	EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA E A FORMAÇÃO DOCENTE.....	180
5.2	PROBABILIDADE: EM BUSCA DE CATEGORIAS DE ANÁLISE	185
5.3	O CURRÍCULO E RELAÇÕES OFICIAIS PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA	204
5.3.1	PROBABILIDADE COMO UM SAVOIR SAVANTE.....	211
5.3.2	PROBABILIDADE COMO SABER A ENSINAR.....	223
5.3.3	O SABER PROBABILIDADE E SUA ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA	239
5.3.3.1	Obra A.....	242
5.3.3.2	Obra B	251
5.3.3.3	Análise geral da organização praxeológica	267
6	UM OLHAR SOBRE A PRÁTICA: O SISTEMA DIDÁTICO EM FUNCIONAMENTO.	274
6.1	CONSTRUÇÃO DO CONTEXTO.....	275
6.1.1	CONHECENDO OS SUJEITOS EM IDIP.....	278

6.2	ESTUDANDO PROBABILIDADE EM I _{DIP}	293
6.2.1	O PRIMEIRO ENCONTRO COM I _{DIP} E SEUS OBJETOS	296
6.2.2	ESTUDANDO PROBABILIDADE: 1º ENCONTRO	308
6.2.3	ESTUDANDO PROBABILIDADE: 2º ENCONTRO	326
6.2.4	ESTUDANDO PROBABILIDADE: 3º ENCONTRO	348
6.2.5	REVISITANDO A PROBABILIDADE: 4º ENCONTRO	364
6.3	SÍNTESE DO ESTUDO DA PROBABILIDADE EM I _{DIP}	410
7	A DIMENSÃO COGNITIVA NA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO: O LUGAR DO SUJEITO PSICOLÓGICO	417
7.1	COGNIÇÃO E CONTEXTO: SITUANDO NOSSAS BASES.....	418
7.2	DIMENSÃO COGNITIVA NA TAD: RESSIGNIFICANDO ALGUMAS NOÇÕES.	424
7.3	PARTICIPAÇÃO E ENGAJAMENTO: ESTUDO DA DIMENSÃO COGNITIVA COMO PRÁTICA SOCIAL NA TAD.	434
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	444
9	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	461
10	ANEXOS E APÊNDICES	475

1 INTRODUÇÃO

Aviso aos Navegantes

A jornada é incerta
as águas são turvas,
os ventos são fortes,
por vezes contrários.
Nesse ir e vir,
às vezes solitário,
não há certeza
além da aventura
do descobrir(-se).

O texto escolhido para o epígrafe desta introdução retrata o sentimento que vivemos desde o início da construção desta tese. Ele tenta exprimir os múltiplos momentos por que temos passado, na certeza de que, embora caminhemos sempre lado a lado a incertezas, a tentativa de avançar para águas mais profundas sempre foi motivada pelo desejo de aprender, de descobrir(-se), de compreender que nossa relação com o objeto de estudo muda conforme avançamos, ao passo que mudamos como pessoa e que muda também nossa relação com mundo, representado pelo universo de cada instituição pelas quais transitamos.

Em nossa pesquisa buscamos refletir sobre as indagações que emergem do diálogo teórico entre três grandes áreas: a Antropologia, no que tange ao fenômeno da cognição como uma construção social; a Psicologia, no que se refere à dimensão individual dos sujeitos e sua ação ao se relacionar com os objetos do saber no seio de uma Instituição, e, por fim, a Didática da Matemática, representada pela Teoria Antropológica do Didático. No sentido de ampliar e fomentar esse diálogo teórico, tomamos como espaço de discussão o ensino de probabilidade na licenciatura em Matemática, uma vez que não faz sentido discutirmos, sob o ponto de vista da Didática da Matemática, qualquer que seja a relação com fenômenos didáticos sem nos dirigirmos a um saber e às suas implicações no processo¹.

Assim o objetivo central de nossa pesquisa visa, em linhas gerais, a caracterização do lugar do sujeito cognitivo na Teoria Antropológica do Didático a partir de uma perspectiva que reconhece a cognição como um fenômeno que é situado no contexto institucional. Esse contexto é a licenciatura em Matemática e o sistema didático que se forma em torno do ensino de probabilidade para os futuros professores.

¹ Nesta seção de introdução, optamos por uma contextualização do objeto de pesquisa sem, necessariamente, aprofundarmos definições, escolhas e suas razões. Isso será feito mais adiante.

O ensino de Probabilidade tem sido um dos focos de atenção do movimento internacional denominado “Educação Estatística” e configura-se como um campo emergente que vem se consolidando nas últimas décadas. Essa consolidação tem como reflexo a sua inserção e/ou revisão no currículo educacional de muitos países, o que demanda um olhar atento sobre a formação dos professores responsáveis pela difusão dos saberes relativos ao ensino de Estatística e Probabilidade (BORBA; MONTEIRO; *et al.*, 2011).

Assim é pertinente que situemos, inicialmente, a Didática da Matemática e seus movimentos, bem como suas inter-relações com a Educação Estatística, com a finalidade de clarificarmos melhor o contexto do objeto de estudo sobre o qual nos debruçamos, tal como o papel da Probabilidade em nossa pesquisa. Essa escolha ocorre em virtude do entendimento de que a nossa pesquisa se debruça sobre a problematização da análise didática do fenômeno da cognição. Por isso, para fomentarmos essa problematização, temos que situar o lugar da Didática da Matemática, enquanto campo de investigação, ao passo que para tratar a cognição usamos ideias relativas à antropologia social. A dimensão psicológica surge como parte desse fenômeno.

A Educação Matemática como campo científico e profissional tem como finalidade primordial, além da produção científica na área, a formação docente, seja ela inicial ou continuada. Assim sendo, a pesquisa sobre a formação de professores e a reflexão constante sobre como esta é ofertada são uma das metas deste campo científico (KILPATRICK, 1996).

Embora tenhamos registros anteriores da preocupação com a formação matemática e com a maneira como esta formação é propiciada, é somente no final do século XIX e início do século XX que a Educação Matemática começa a tomar forma como campo científico. Em abril de 1908, Roma sediou o evento que se tornou o marco na constituição da Educação Matemática com a criação da Comissão Internacional de Instrução Matemática que foi presidida por Felix Klein. A partir desse evento, a preocupação com o ensino de Matemática passou a se difundir e ser reconhecida em todo o mundo de forma legítima (VALENTE, 2005).

Passados mais de 100 anos desde o Congresso de Roma, o movimento da Educação Matemática teve desdobramentos distintos em cada país, inclusive recebendo denominações específicas. No Brasil, por exemplo, as quatro últimas décadas foram fundamentais para o desenvolvimento da Educação Matemática, com a criação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática e a abertura de diversos programas de Pós-graduação na área. (FIORENTINI; LORENZATO, 2009)

Na França, a partir da criação dos Institutos de Pesquisas no Ensino de Matemática (IREM) em meados dos anos 60 e 70 do século XX, deu-se início à construção de um importante

campo teórico relacionado ao ensino e à aprendizagem em Matemática, que tem influenciado pesquisas e discussões em todo o mundo: a Didática da Matemática. Poderíamos, aqui, determo-nos no debate sobre se a Didática da Matemática é parte da Educação Matemática ou tem existência independente dessa última. Mas a questão que nos parece fundamental não é essa, mas, sim, entender como esse campo de constitui no Brasil.

A introdução da Didática da Matemática de influência francesa em nosso país se constitui como uma parte importante do movimento de constituição da área da Educação Matemática no Brasil.

São parte desse processo Grupos de Pesquisas como GEEMPA (Grupo de Estudos sobre o Ensino da Matemática de Porto Alegre) no Rio Grande do Sul e GEPEM (Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática) no Rio de Janeiro que iniciaram suas atividade em meados da década de 1970, Programas de Pós Graduação ligados às universidades do nordeste e sudeste brasileiro, dentre elas a Universidade Federal de Pernambuco e a Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Além de atividades de colaboração entre Brasil e França, cujos nomes de Paulo Figueiredo, Tania Maria Mendonça Campos, João Bosco Pitombeira, dentre outros, estão associados. Esses esforços contribuíram para formação de quase 20 novos doutores entre 1991 e 2001, todos com teses ligadas a Didática da Matemática. (CAMPOS; TRGALOVÁ, 2016)

Atualmente, além das já citadas instituições, existem diversas outras e vários pesquisadores discutindo e produzindo na área de Didática da Matemática aqui no Brasil, como exemplo, destacamos, dentre outras, a Universidade Federal Rural de Pernambuco, a Universidade Federal do Mato Grosso do Sul e a Universidade Federal do Pará, Universidade Federal da Bahia e seus respectivos Programas de Pós-graduação, que abrigam linhas de pesquisas que têm impulsionado mais expressivamente o movimento da Didática da Matemática no Brasil.

O reconhecimento desse fato é a recente fundação do GT14 – Didática da Matemática na Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Os membros desse grupo de trabalho são responsáveis diretos pela organização do I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática – LADiMa, evento que ocorreu, em sua primeira versão, na cidade de Bonito, no Estado do Mato Grosso do Sul, em 2016. O evento concentrou pesquisadores da América Latina e da França no formato bem próximo das famosas Escolas de Verão² que impulsionaram a consolidação da Didática da Matemática como campo de pesquisa.

² Ecolé D'eté

Analisando brevemente os desdobramentos da Didática da Matemática, podemos elencar alguns construtos teóricos que dão sustentação às pesquisas e investigações na área. Esses aportes teóricos geralmente são associados ao nome de seus principais representantes. Dentre os mais conhecidos, podemos citar a Teoria das Situações Didáticas³, de Guy Brousseau; A Teoria da Transposição Didática e sua ampliação para Teoria Antropológica do Didático, ambas fundadas por Yves Chevallard; a Teoria dos Campos Conceituais, de Gérard Vergnaud; a Engenharia Didática, de Michelle Artigue; a Teoria da Dialética Ferramenta-Objeto, de Régine Douady, conforme (D'AMORE, 2007; ALMOULOU, 2007).

Para nossa tese, a Teoria Antropológica do Didático (TAD) e suas noções assumem papel central como objeto de estudo, ou seja, ao passo que escolhemos a TAD para analisar os fenômenos acerca do Ensino de Probabilidade na formação docente, discutimos também o potencial das noções teóricas presentes na TAD para observar o fenômeno da cognição e sua dimensão psicológica, constituindo o nosso trabalho como uma análise teórica e crítica da própria TAD.

Gascón (1998) aponta que a TAD inaugurou um novo paradigma para as pesquisas em Didática da Matemática. Ao olhar para os fenômenos didáticos sob uma perspectiva antropológica, reconhecendo o papel do homem perante o saber matemático nas instituições por que ele transita, a TAD reclamou atenção especial à dimensão epistemológica dos saberes produzidos, utilizados e estudados nessas instituições. Em nossa investigação, intentamos refletir acerca da pertinência das suas noções teóricas para observarmos o fenômeno da cognição numa dimensão também psicológica.

A discussão da produção individual dos sujeitos nas instituições é uma questão viva dentro da TAD. Como exemplo, apontamos os recentes desdobramentos da TAD como o reconhecimento e identificação das praxeologias pessoais dos sujeitos no seio das instituições. (CHAACHOUA; BITTAR, 2016).

Numa leitura a partir da própria TAD, os sujeitos aos quais nos referimos são futuros professores de Matemática. Logo, fazem parte do corpo discente do curso de licenciatura em Matemática e devem estar matriculados no componente curricular que tem como escopo o ensino de Probabilidade. O funcionamento do sistema didático e as relações desses indivíduos com a probabilidade e seus conceitos, enquanto objetos do saber, terão nossa atenção principal. Nossa conjectura inicial é que as noções teóricas da TAD, ao privilegiarem a ecologia dos

³ Em textos mais recentes, Brousseau (2006) faz menção à Teoria das Situações Didáticas Matemáticas (TSDM), o que seria uma reafirmação do papel do saber matemático na construção teórica que inaugurou todo um paradigma de investigação em Didática da Matemática.

saberes no funcionamento do sistema didático, não negam a presença de uma dimensão psicológica, pelo contrário, fornecem-nos subsídios para entender a cognição como um fenômeno social que emerge das práticas institucionais desempenhadas por seus sujeitos.

A escolha da formação dos futuros professores, no que tange aos conceitos associados à Probabilidade, conduz-nos à necessidade de trazer para o cenário de discussão apontamentos sobre as inter-relações entre a Didática da Matemática e a Educação Estatística.

A Educação Estatística, enquanto campo de investigação, nasce de preocupações com os processos de ensino e aprendizagem relacionados à Combinatória, Estatística e à Probabilidade, tanto na Escola Básica como na formação ofertada para os mais diversos profissionais em nível de graduação. Essas preocupações ratificam, no nosso entendimento, as inter-relações entre a Educação Estatística e Didática da Matemática, tanto do ponto de vista dos raciocínios e procedimentos para abordar essas temáticas, como da presença desses temas no currículo escolar de Matemática (LOPES, 2010).

Outro aspecto a ser levado em consideração é que as demandas atuais de nossa sociedade referendam a importância do ensino de Estatística e Probabilidade. Essa importância está ratificada em muitos documentos oficiais que servem de diretrizes para os currículos nos mais diversos países. Aqui no Brasil, desde meados da década de 90 do século passado, temos como exemplo os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, que incluem a Estatística e Probabilidade associadas a blocos de conteúdos no Ensino Fundamental e Médio (LOPES, 2008).

No caso da Probabilidade e seus conceitos, alguns desses documentos, como os PCN, recomendam sua inserção desde os primeiros anos de escolaridade, ou seja, além do reconhecimento da importância dada a esse saber, percebe-se a necessidade de olhar para formação dos profissionais que ensinam ou irão ensinar os conceitos relacionados à Probabilidade. O mesmo com a Base Nacional Curricular Comum publicada com força de lei em 2017.

Batanero *et al* (2000) destacam a importância das contribuições que a Didática da Matemática pode trazer à compreensão dos fenômenos que ocorrem na Educação Estatística. Para os referidos autores, os avanços teóricos no campo da Didática da Matemática podem ajudar na consolidação da Educação Estatística.

A Probabilidade, como parte essencial da Educação Estatística, requer em primeiro lugar, o reconhecimento de que os paradigmas no processo de resolução de problemas sejam diferentes daqueles utilizados na Matemática. Componentes como o acaso, a aleatoriedade, dão aos conceitos relacionados com a Probabilidade características próprias que requerem um

conhecimento didático específico para sua abordagem em sala de aula (BATANERO; GODINO; ROA, 2004; BATANERO; MANFRED, 2016)

Dadas essas características sobre a Probabilidade, Cazorla (2009) aponta sérios entraves na formação do licenciando em Matemática em relação à Educação Estatística. Para a autora, muitos licenciandos adquirem conhecimentos sobre Estatística e Probabilidade, no entanto, esses são, por vezes, insuficientes para o exercício da docência, já que, além dos conhecimentos dos conteúdos, estes exigem também conhecimentos didáticos específicos. Ainda de acordo com Cazorla (2009), acerca da presença da Estatística e da Probabilidade na formação de futuros professores, é preciso termos em mente que o perfil dessa formação:

(...) não está voltado para que estes possam ensiná-los a crianças e adolescentes, nem contribui para a formação do professor pesquisador, daquele que é capaz de fazer de sua prática pedagógica um campo de pesquisa, fazendo da Estatística um instrumento privilegiado de análise dessa práxis. (CAZORLA, 2009, p. 1)

Para a pesquisadora, a formação inicial precisa trazer a Probabilidade e seus conceitos de modo a contribuir tanto para sua prática docente futura, como também para seu desenvolvimento enquanto usuário deste saber.

Régnier (2005) ao discutir as contribuições da Didática da Estatística para formação do espírito e do raciocínio estatísticos, destaca o papel das contribuições da Didática da Matemática, através do estudo de situações fundamentais da Estatística. Para o autor, a análise sobre essas situações pode ajudar no desenvolvimento de atividades de formação (RÉGNIER, 2005).

Estabelecido este cenário, onde destacamos brevemente a Didática da Matemática enquanto campo de investigação, bem como o nosso foco teórico dentro deste campo, expusemos de forma sucinta inter-relações da Didática da Matemática com a Educação Estatística, de modo que temos condições de aprofundar melhor a discussão sobre nosso objeto de pesquisa.

Ao refletir sobre o funcionamento do sistema didático que se estabelece em torno do ensino de Probabilidade na formação dos futuros professores de Matemática, assumimos como hipótese principal, corroborando com a conjectura inicial, que a análise dessas práticas, através da TAD, pode permitir compreender o processo de mudança relacional dos sujeitos com o objeto de estudo com que estão lidando, ou seja, para nós, a análise da prática institucional que ocorre nesse sistema pode revelar elementos para refletirmos sobre a cognição, numa dimensão psicológica dos sujeitos. Assumimos, por exemplo, que no emprego de uma técnica para resolver uma tarefa, há também um componente psicológico sendo mobilizado, de modo que

esse componente pode se revelar na prática coletiva dos sujeitos que participam do referido sistema didático. Assim, acreditamos que o olhar sobre o cotidiano da sala de aula de probabilidade materializado nesse sistema e suas atividades, isto é, suas práticas institucionais, revelam-nos elementos que nos possibilitam refletirmos sobre a cognição. Para compreender melhor a natureza dessa hipótese, é necessário fazermos uma rápida incursão sobre a TAD e suas noções.

Em cerca de 30 anos de desenvolvimento, a Teoria Antropológica do Didático tem-nos fornecido diversas noções para a compreensão de fenômenos didáticos que ocorrem no seio das instituições que se prestam ao ensino de Educação Matemática. De acordo com o próprio Chevallard (1999), a TAD “estuda o homem perante as práticas matemáticas”. Como já frisamos, de acordo com Gáscon (1998), a TAD inaugura o emprego do olhar antropológico na Didática da Matemática, onde os saberes matemáticos, como obras humanas, têm um papel central na análise e na compreensão dos fenômenos.

Em sua antropologia cognitiva, Yves Chevallard postula que pessoas, enquanto sujeitos de uma instituição, mantêm relações com determinados objetos institucionais. À medida que essas relações avançam para um status de conformidade institucional, tem-se o que Chevallard chama de aprendizagem, isto é, a mudança de relação entre os sujeitos e os objetos com que eles mantêm relação. Para revelar e entender essas práticas institucionais, Chevallard (1999) desenvolve a noção de análise praxeológica, que nos permite entender como se dão as organizações em torno do saber e da intenção didática, isto é, como se orquestram as organizações praxeológicas matemáticas e didáticas nas instituições.

Por outro lado, se considerarmos que a aprendizagem, como fenômeno complexo, pressupõe também uma dimensão psicológica, críticas⁴ à TAD dizem que a dimensão psicológica é negada nesta teoria. Dito de outra forma, a dimensão epistemológica suprime a dimensão psicológica nas noções teóricas da TAD. Godino e D’Amore (2007) declaram que a “TAD apresenta uma epistemologia antipsicológica” (GODINO; D’AMORE, 2007, p. 205).

Em duas pesquisas exploratórias⁵ que publicamos recentemente, observamos resultados que parecerem refutar essas críticas. No primeiro estudo, de cunho teórico, revisitamos os textos de Mauss (2003) e Douglas (1986), que trazem perspectivas que inspiraram, segundo o próprio

⁴ Sobre estas críticas faremos uma discussão aprofundada na seção seguinte.

⁵ O primeiro estudo de cunho teórico foi publicado e apresentado no LADiMa (I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática). O segundo estudo exploratório foi realizado no âmbito da disciplina Análise Estatística Implicativa que faz parte de um projeto Interinstitucional entre a UFRPE e a Universidade de Lyon. Como produto da disciplina, desenvolvemos uma artigo que foi publicado na revista Vydja. Parte desses resultados será apresentada na seção 3 deste projeto.

Chevallard (1996; 2007), algumas das noções teóricas de base da TAD, como a noção de instituição e de organização praxeológica. De modo geral, a dimensão psicológica é tratada de maneira peculiar, a ponto de Mauss (1935; 2003) declarar que o homem realizando uma atividade qualquer, por exemplo “nadar”, deve ser visto como um homem total, ou seja, um ser biológico-social-psicológico. Douglas (1986; 2007) destaca também o papel das instituições na constituição da cognição dos indivíduos.

No segundo estudo, investigamos a relação mantida pelos futuros professores com o conceito de Probabilidade. Os resultados indicam que na licenciatura, seja qual for o contrato didático estabelecido durante o funcionamento do sistema didático na formação dos estudantes em relação à Probabilidade, os sujeitos que dele participam como aprendizes, apresentam uma relação de conformidade mais adequada do que os estudantes que não se sujeitaram a essa formação. Pensamos que poderá ter havido, portanto, mudanças na relação dos futuros professores com o objeto de estudo em questão, porém não temos como dimensionar essas mudanças sem olhar para essa realidade, essa observação foi importante para ratificar a necessidade de nosso estudo.

O nosso estudo é composto de dois caminhos: o primeiro, que denominamos epistemológico-teórico, foi central, que consistiu em revisitar as raízes epistemológicas e teóricas que sustentam e inspiraram as noções presentes na TAD, dimensionando até que ponto a dimensão psicológica é pertinente nesta abordagem. Mais adiante, destacamos sob qual ponto de vista entendemos essa dimensão. Por essa razão na fundamentação teórica não só retoma as ferramentas e noções da TAD, mas também as problematiza, constituindo-se como o resultado teórico de nossa investigação.

Paralelo a este exercício teórico e crítico, temos o nosso segundo caminhar no qual nos propusemos a trazer como cenário para nossa reflexão, a análise empírica do contexto do ensino de Probabilidade na Licenciatura em Matemática, afim de ilustrar o funcionamento das ferramentas teóricas da TAD e embasar nossas reflexões teóricas. A razão para esse duplo caminhar está calcada no entendimento de Bloch (2007 *apud* ALMOULOU, 2007) sobre o papel da experimentação para confrontar o discurso teórico. Segundo a autora, é no diálogo entre pesquisadores e resultados experimentais que ocorre a síntese necessária para construção do conhecimento científico.

Ao escolher tomar esses dois caminhos em nosso estudo, observamos a necessidade de trazer além dos campos teóricos já citados, a antropologia social como base epistemológica para entender a cognição e sua dimensão psicológica na TAD,. Aqui nos apoiamos novamente em Bloch (2007 *apud* ALMOULOU, 2007) que destaca o papel e a necessidade de outros olhares

para compreendermos melhor os fenômenos que estamos estudando: somente a existência de teorias multiformes e complementares pode permitir a emergência de conceitos robustos, a fim de capturar o melhor possível a realidade estudada. (Ibid, p.15).

A razão de nossa imersão nesse paradigma antropológico para pensar a cognição está sedimentada, em nosso entendimento, no próprio movimento de constituição da Didática da Matemática e nos desenvolvimentos da TAD. Com esse espírito, faz-se necessário, mesmo que brevemente, retomar alguns elementos sobre a gênese da Didática da Matemática. Ao analisar mais a fundo as origens da Didática da Matemática como um movimento que buscava sua legitimação como disciplina científica, observaremos, segundo Gascón (1998), que num primeiro momento a Didática da Matemática viveu um período pré-científico: “antigamente se considerava que o ensino era uma arte e, como tal, estaria dificilmente susceptível de ser analisada, controlada e submetida a regras”⁶ (GASCÓN, 1998, p. 2).

A primeira ruptura para elevar a Didática da Matemática desse status pré-científico ao patamar científico foi a busca pelo aporte da psicologia cognitiva. Esse período, denominado por Gascón (1998) de “clássico”, foi marcado pela preponderância das teorias cognitivas para explicar os fenômenos ligados à aprendizagem em Matemática.

As primeiras construções teóricas de Guy Brousseau sobre a Teoria das Situações inaugurariam o que Gascón (1998) chama de Didática Fundamental, base para a compreensão do estado atual da Didática da Matemática como disciplina científica.

Essa breve descrição da formação da Didática da Matemática, enquanto campo de investigação, conduz-nos à reflexão sobre as necessidades de emancipação da Didática da Matemática, expressas por suas rupturas que, presentes na Teoria das Situações Didáticas, também são evidenciadas na noção de transposição didática e na TAD que inaugura o viés antropológico na Didática da Matemática, segundo Almouloud (2007).

Vale frisarmos que a noção de emancipação não é tomada no sentido de assumir a ideia de que a Didática da Matemática é autossuficiente, pelo contrário, corroboramos com o ponto de vista de Bloch (2007 apud ALMOULOU, 2007), que aponta a possibilidade de diálogos teóricos como pertinentes, tanto entre a teoria da Didática da Matemática com outros campos científicos. Porém, a emancipação está no que Chevallard e Bosch (1999) chamam de clarificação do objeto de estudo. Nesse sentido, de acordo com esses autores, na Didática da

⁶ Antigamente se consideraba que la enseñanza de las matemáticas era un arte y, como tal, difícilmente susceptible de ser analizada, controlada y sometida a reglas.

Matemática o foco está “não no sujeito que aprende ou que ensina, mas no saber matemático que eles são levados a estudar em conjunto” (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 77).

Assim, entendemos que é pertinente pensar o fenômeno cognitivo no sistema didático que estudaremos, sob um ponto de vista que leve em consideração não somente os indivíduos, mas o trabalho coletivo dos diversos atores que atuam nesse sistema, ou seja, cada ator tem o seu papel, porém todos estão engajados em uma finalidade comum: o estudo de um saber, em nosso caso, a Probabilidade. Nesse caso, acreditamos que a manutenção e o sucesso da instituição formada pelos estudantes da licenciatura e o professor, em torno da Probabilidade, dependem de todo um sistema complexo de ações coletivas que é composto por sujeições individuais.

Procuramos nos apropriar de arcabouços que podem nos fazer compreender essa dimensão da cognição como uma prática social e coletiva, já que a própria TAD desloca o foco do indivíduo para a prática coletiva na instituição. Para nós, seria interessante destacar abordagens que concebem a cognição como um fenômeno situado, onde a aprendizagem é vista como fenômeno que ocorre num dado contexto histórico, cultural e social. Dentre essas abordagens, utilizamos elementos da noção de “*Situated Learning*” que tem suas raízes na antropologia social, com destaque para a obra da norte-americana Jean Lave.

A noção de aprendizagem situada, que emergiu das pesquisas da antropóloga Jean Lave com a colaboração de Etienne Wenger, reconhece a cognição como um fenômeno social. Para esta teoria, a aprendizagem é entendida como participação e engajamento dos sujeitos e depende fortemente do contexto no qual está associada.

Notemos de imediato que novas premissas são assumidas em nosso trabalho. Primeiro, o sistema didático que passa a viver no seio institucional revela uma prática situada, e essa prática é materializada pelos sujeitos que nela se engajam. Para Lave e Wenger (1991), a aprendizagem é um fenômeno sempre relacional, portanto o emaranhado de relações que se manifestam nesse sistema didático pode revelar como se dá esse processo de construção cognitiva. A outra premissa coincide com nossa hipótese principal, ou seja, as noções presentes na TAD podem ser adequadas para analisar esses movimentos relacionais, do contrário, seriam necessárias ampliações.

Para esta última premissa, nos apoiamos em Bachelard (1935;1996) que, ao discutir o papel do questionamento para a ciência e a incompletude das teorias para explicar os fenômenos que se prestam, destaca que é na problematização que a ciência progride. A boa ciência toma para si boas metáforas e rejeita a ausência de problemas, isto é, para ele, a existência de problemas não resolvidos é fundamental para o avanço científico. Esse mesmo entendimento é

partilhado por Chevallard (1996) ao rejeitar para a TAD uma busca por fidedignidade naquilo que ela se presta explicar: “podemos sonhar com um conhecimento seguro; mas não há caminhos de acesso totalmente seguros ao conhecimento” (CHEVALLARD, 1996, p. 121).

Cabe, aqui, um primeiro esclarecimento: a Teoria Antropológica do Didático tem como base o que Chevallard (1992) chama de antropologia cognitiva ou antropologia do saber. É nessa antropologia que as noções primitivas como objeto, instituição, pessoa, relações dão sustentação a todas as noções que serão desenvolvidas posteriormente. Notemos que a TAD não é uma teoria da aprendizagem. Seu objeto de estudo é o didático e as relações que ele envolve no seio das instituições.

Além da TAD, em nossa pesquisa, usaremos a noção de contrato didático presente na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau. A escolha para seu uso repousa em duas razões: 1. Nos apontamentos teóricos de Chevallard reconhece a necessidade de estabelecimento de um contrato didático para o funcionamento dos sistemas didáticos; 2. Seguindo uma tendência de pesquisa na Didática da Matemática que busca explicar os fenômenos didáticos a partir da articulação de duas ou mais teorias da área⁷.

A partir desse contexto, reconhecemos ao menos duas possíveis contribuições de nossa pesquisa. A primeira delas, do ponto de vista teórico, é ao observar mais a fundo a pertinência da dimensão psicológica na TAD, trazer mais entendimentos sobre as noções teórica da TAD. A segunda é, ao tomar o ensino de probabilidade na formação dos futuros professores de Matemática, podermos trazer reflexões sobre esse processo de formação.

Partindo desse entendimento, em busca nos bancos de dados da CAPES e de programas de Mestrado e Doutorado no país, levantamos cerca de 20 trabalhos relacionados com Educação Estatística. Desses trabalhos, observamos que 07 são voltados para a formação de professores que ensinam matemática inicial ou continuada.

Dentre esses trabalhos, destacamos os de Silva (2002), Gonçalves (2004), Goulart (2007), que se voltaram diretamente para a compreensão de processos associados ao ensino de Probabilidade. Nesses três estudos, a TAD é utilizada como ferramenta teórica.

De modo geral, observamos nessas pesquisas que a TAD é utilizada como ferramenta para subsidiar algumas análises acerca dos discursos institucionais e para análise das organizações matemáticas relativas ao ensino de Probabilidade. Entretanto, não encontramos

⁷ Esse tipo de articulação teórica que emerge do diálogo entre as teorias tem sido uma tendência importante no desenvolvimento teórico da Didática da Matemática, conforme podemos ver em Brito de Menezes (2006). Recentemente Fernando Emílio Leite de Almeida defendeu sua tese de doutorado no PPGEC onde mostra claramente a importância desta articulação.

em nenhum dos trabalhos um uso sistemático das noções da antropologia cognitiva presente na TAD para analisar os fenômenos referentes à cognição.

No panorama internacional, observamos que o ensino de Probabilidade tem sido tema de destaque. A publicação de (BATANERO; GARFIELD, *et al.*, 2000) reúne muitos trabalhos sobre o tema, no entanto, não encontramos trabalhos que se propusessem a uma análise semelhante à nossa. Aqui no Brasil encontramos recomendações mais gerais como o trabalho de (DA ROCHA FALCÃO; MORENO; KLÖPSCH, 2008) que indicam a necessidade de aprofundar a pesquisa sobre o funcionamento do contrato didático na formação para a Educação Estatística.

A partir desse panorama de nosso estudo, apresentamos na seção seguinte a problematização de nossa pesquisa que fundamentou a questão de investigação, o levantamento de hipóteses e os objetivos de nossa Tese.

1.1 PROBLEMATIZAÇÃO

Na introdução acima, tentamos elencar de forma mais geral as razões que nos guiaram na construção e na condução de nossa pesquisa. Dentre os principais elementos que compõem essas razões, estão questões que têm centralidade em aspectos do ensino de Probabilidade, em nosso contexto para a formação inicial de professores de Matemática, e questões relativas à TAD como arcabouço teórico para analisar o sistema didático, no que tange à dimensão cognitiva.

Apresentamos alguns elementos teóricos sobre esses aspectos no exercício de fundamentar as questões que ora perseguimos. Esses elementos estão agrupados em quatro argumentos: condições e restrições que convergem para a sobrevivência de um sistema didático em torno da formação de professores para o ensino de Probabilidade; necessidades formativas dos professores; ensino de probabilidade e suas problemáticas; e, por fim, o da escolha do arcabouço teórico.

Esses argumentos seguem o entendimento do papel da Didática como ciência que estuda as condições e restrições do didático, como postula Chevallard (2011a). A análise sobre o sistema didático $S(X, Y, O)$ ⁸ que se estabelece no seio de uma instituição em torno do ensino de Probabilidade para formação dos futuros professores de Matemática implica a delimitação de um território que deve ser entendido nos seguintes termos:

⁸ No quadro teórico, veremos também o ostensivo $S(X, Y, \heartsuit)$ para representar o sistema didático.

Defino a noção de “território” de investigação como um conjunto de três entes – um âmbito de atividade, um público, e um campo praxeológico – reunidos pelo fato de que os membros do público exercem sua atividade no âmbito considerado e, por tanto, necessitam de conhecimentos procedentes do campo praxeológico indicado.⁹

(CHEVALLARD, 2011, p. 5)

Ao definir a noção de território, Chevallard (2011a) busca, de forma mais explícita, justificar sua visão de Didática e o papel dela no conjunto do ensino e da formação docente. A legitimação da Didática da Matemática como disciplina científica ocorre no momento em que a comunidade clarifica seus objetos de estudo, confirmado no conjunto de interesses da comunidade e na composição de suas próprias ferramentas teóricas, em nosso caso, a TAD. Ainda segundo Chevallard (2011a), o viés antropológico do didático adiciona, ao estudo das condições e das restrições para a vida dos sistemas didáticos nas Instituições, o fato de que essas condições e restrições estão associadas não só ao universo interno das instituições, mas também às correlações em níveis mais complexos externos à realidade institucional, que mais adiante chamaremos, conforme postula Chevallard (2011a), de níveis de codeterminação.

Esses níveis de codeterminação sinalizam, dentre outros aspectos, que os pesquisadores não devem estar encerrados em seus territórios: “o que afirmo é que nenhum pesquisador em didática, nenhuma comunidade didática deve encerrar-se em um território único: a vida de relações é também aqui uma necessidade da vida científica”¹⁰ (CHEVALLARD, 2011, p. 5).

Tomando como exemplo o objeto probabilidade e as condições ou restrições, assumimos que os níveis de codeterminação indicam uma escala inter-relacionada de instâncias que influenciam nas condições para que o objeto probabilidade viva em determinada instituição (CHEVALLARD, 2002). Restringindo-nos às instituições de formação, podemos dizer que uma tarefa que requer a probabilidade para sua resolução geralmente está ligada a uma organização matemática pontual e corresponde a um assunto na escala de codeterminação. Os níveis acima dessa escala (tema, setor, domínio, disciplina, pedagogia, escola, sociedade e civilização) indicam correlações e determinações sobre como essa organização matemática pontual sobrevive em determinado currículo.

⁹ Defino la noción de “território” de investigación como un conjunto de tres entes – un ámbito de actividad, un público, y campo praxeológico – reunidos por el hecho de que los miembros del público ejercen su actividad en el ámbito considerado y, por lo tanto, necesitan conocimientos procedentes del campo praxeológico indicado.

¹⁰ lo que afirmo es que ningún didacta, ninguna comunidad didáctica debe encerrarse em un territorio único: la vida de relaciones es también aquí una necesidad de la vida científica.

Em termos gerais, ao nos propormos a realização de estudo tendo a TAD como arcabouço teórico, temos que levar em consideração que o sistema didático que intentamos analisar sofre diversas influências que estão relacionadas com os níveis de codeterminação, isto é, a sociedade, o tipo de escola, a pedagogia, são instâncias que interferem diretamente no funcionamento do sistema didático. Essas influências são também de ordem de nossa presença como pesquisadores naquela realidade.

Para a nossa pesquisa, o público que investigamos é formado por futuros professores de Matemática e pelo professor formador, os quais exercem atividades no âmbito do componente curricular de Introdução à Probabilidade. As organizações matemáticas e didáticas que se estabelecem em torno da Probabilidade e seus conceitos compõem o equipamento praxeológico para o exercício desta atividade.

A escolha de estudar a formação dos futuros professores de Matemática está relacionada à nossa trajetória profissional. Como formadores de professores, parece-nos natural a necessidade de reflexão constante sobre essa atividade. Essas reflexões nos acompanham desde a época da graduação. Naquela época, já nos incomodava um modelo de formação que parecia não levar em conta as demandas formativas dos licenciandos.

Foi pensando em termos de demandas que nos debruçamos durante o mestrado a pesquisar as influências da Resolução de Problemas na formação de futuros professores no Curso de Pedagogia. Os resultados daquele estudo indicaram o potencial da metodologia para discutir a matemática não só do ponto de vista do conteúdo, mas também a partir de seu viés pedagógico:

Pelo menos duas reflexões são pertinentes e potencializadas na fala dos sujeitos: a percepção dos problemas como ferramentas de aprendizagem e a clareza da Resolução de Problemas como metodologia de ensino possível de ser aplicada em sala de aula, pois, segundo os próprios sujeitos, trabalhar em grupo foi um dos pontos fortes do processo de formação (CAVALCANTE, 2013, p. 139).

A conclusão do mestrado e o ingresso como docente na licenciatura em Matemática permitiram aprofundar as reflexões sobre a formação docente, tendo sempre como aporte discussões sobre os conhecimentos necessários à formação docente, na perspectiva de Lee Shulman.

De forma geral, esse autor destaca que na formação docente algumas categorias¹¹ de conhecimentos devem ser levadas em consideração: 1) conhecimento do conteúdo; 2)

¹¹ Mais tarde essas categorias foram revisadas pelo próprio Shulman e seus colaboradores. Outros estudos indicam subdivisões nessas categorias, conforme aponta Isabele Bloch.

conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK); 3) conhecimento do currículo, relativos aos materiais e programas; 4) conhecimento Pedagógico, relativos a princípios e estratégias gerais de condução e organização da aula, que transcendem o âmbito da disciplina; 5) conhecimento dos alunos e da aprendizagem; 6) conhecimento dos contextos educativos (funcionamento da classe, do estabelecimento, da aula, a gestão e financiamento); 7) conhecimento dos objetivos, as finalidades e os valores educativos, e de seus fundamentos filosóficos e históricos. (SHULMAN, 1986)

O nosso entendimento sobre estas categorias é que, ao futuro professor, que vai ensinar Probabilidade na Educação Básica, é necessário conhecer em profundidade esse conteúdo e seus conceitos.

Conforme frisamos na introdução, Cazorla (2009), ao escrever sobre o panorama do Ensino de Estatística no Brasil, pontua que os principais responsáveis pela formação em Estatística e Probabilidade na Educação Básica são os professores de Matemática, fato que corrobora com a necessidade de olhar mais atentamente para os processos de formação inicial e continuada desses profissionais em relação à Educação Estatística.

De acordo com Cazorla (2009), faz-se necessário envidar esforços na construção de processo de formação que permita aos professores da Educação Básica atenderem às demandas formativas em relação à Educação Estatística, utilizando inclusive as ferramentas da Estatística e da Probabilidade como instrumento de análise de suas práticas.

Essa mesma constatação é feita também por Bezerra e Gitirana (2012) que, ao fazerem um levantamento da formação para o Ensino de Estatística e Probabilidade em Instituições de Ensino Superior no Brasil que formam professores de Matemática, observaram que o discurso institucional previsto no ementário não tem levado em consideração as demandas formativas desses futuros professores em relação ao ensino de Estatística e Probabilidade:

(...) alguns aspectos interessantes mostram que a estatística ainda está longe de ser vista como conteúdo da matemática na Educação Básica nos cursos de formação. Na ementa das disciplinas de matemática para educação básica I e matemática para educação básica II de uma das oito IES, nos conteúdos deixa claro não conter nenhum conteúdo estatístico como matemática para educação básica (BEZERRA; GITIRANA, 2012, p. 11).

As observações feitas por Cazorla (2009) e Bezerra e Gitirana (2012) também são evidenciadas por outros pesquisadores que refletem sobre a formação em Educação Estatística de futuros professores, como é caso de Batanero (2001) na Espanha, e de Goulart (2007), Lopes (2008) e Santana (2011) aqui no Brasil, dentre outros. Esses pesquisadores indicam a

necessidade de olhar para a formação docente no que tange à priorização dos conhecimentos de Probabilidade e Estatística.

Outra evidência dessa discussão é o conagraçamento de pesquisadores em torno dessas temáticas. Por exemplo, em 2011, tivemos um importante evento sediado no Brasil como satélite da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. O Encontro Interamericano de Educação Estatística foi realizado com intuito de congrega os olhares dos pesquisadores latino-americanos, ampliando a discussão sobre a Educação Estatística (BORBA *et al.*, 2011).

Se, por um lado, a formação inicial dos futuros professores de Matemática, no que tange ao ensino de Estatística e Probabilidade, demonstra fragilidade; por outro lado, o exercício da profissão docente na Educação Básica para o ensino desses conceitos também carece de atenção, seja em aspectos de formação continuada, seja na construção de infraestrutura epistemológica para um ensino de Estatística e Probabilidade que dê conta das demandas dos estudantes como usuários desses saberes.

Essa constatação é feita em um estudo sobre a realidade francesa do ensino de Estatística e Probabilidade por Chevallard e Wozniak (2011). De acordo com os autores, as recomendações oficiais para o currículo francês, equivalente ao nosso Ensino Fundamental e ao Ensino Médio, apontam para a necessidade de um trabalho que integre Estatística e Probabilidade através da modelização, congregando aspectos da probabilidade teórica e frequentista. A conclusão dos autores, após a análise desses documentos e de manuais (livros didáticos) franceses, é que existe certa falta de infraestrutura epistemológica para dar suporte aos professores:

O estado atual do currículo de matemática da educação secundária francesa mostra, no que concerne a estatística e a probabilidade, uma profunda desorganização, então mesmo que os meios de uma reorganização não precisem mais ser inventados - eles só devem ser encontrados. Como no caso da álgebra, a evolução não regulamentada do ensino leva a ensinar aqui uma sintaxe desprovida de semântica: posso saber que, se os eventos A e B são incompatíveis, então a probabilidade do evento $A \cup B$ será a soma da probabilidade de A e de B; mas qual é a probabilidade de um evento? No estado de coisas atuais, a resposta não está em dúvida: é o que obtemos calculando de acordo com as regras de cálculo das probabilidades.¹²
(CHEVALLARD; WOZNIK, 2011, p. 851)

¹² L'état actuel du curriculum mathématique secondaire français montre, en ce qui concerne la statistique et les probabilités, une profonde désorganisation, alors même que les moyens d'une réorganisation n'ont plus à être inventés – ils doivent seulement être retrouvés. Comme en matière d'algèbre, l'évolution non régulée de l'enseignement conduit à enseigner ici une syntaxe dépourvue de sémantique: je peux savoir que, si les événements A et B sont incompatibles, alors la probabilité de l'événement $A \cup B$ sera la somme de la probabilité de A et de celle de B; mais qu'est-ce au juste que la probabilité d'un événement? Dans l'état de choses actuel, la réponse ne fait pas de doute : c'est ce qu'on obtient en calculant selon les règles du calcul des probabilités.

Notemos que o sentido da palavra infraestrutura na TAD é bem peculiar, refere-se ao conjunto de condições e restrições institucionais para que determinado objeto sobreviva e faça sentido dentro de uma instituição.

Nas últimas cinco décadas, o Programa para o Currículo Francês da Educação Secundária passou por reformas significativas. O quadro de mudanças mais claro se dá da passagem entre o final da década de 80 e começo da década de 90. Passa-se de um ensino que privilegiava a visão clássica da probabilidade e, portanto, de cunho mais teórico, tendo como um dos principais representantes Pierre Simon Laplace (1749-1827), para uma abordagem frequentista da probabilidade. Após o ano 2000, outra reforma indicaria mais claramente a necessidade da probabilidade ser trabalhada em termo de modelização, priorizando o estudo de problemas e de situações reais através da simulação computacional, com finalidade de dar significado às duas abordagens anteriores. (HENRY, 2001).

A percepção de Henry (2010, p. 36) sobre a última reforma de 2008 é que ela representa uma pequena revolução para os professores do Collège (anos finais do ensino fundamental na França), pois a formação para aleatoriedade é uma necessidade formativa da sociedade, correspondendo a uma evolução coerente dos programas de ensino, especialmente pelo fato de superar a dicotomia clássico-frequentista e recomendar uma dupla abordagem:

Isso representa uma pequena revolução para professores do *Collège*, muitos dos quais não se beneficiaram de treinamento sobre aleatoriedade. No entanto, faz parte de uma evolução coerente dos programas franceses de educação secundária nos últimos vinte anos. Porque, ao contrário dos ensinamentos elementares tradicionais do cálculo das probabilidades, essencialmente usando a contagem de casos, esse novo programa propõe a introdução da noção de probabilidade sob uma abordagem dual, clássica e frequentista.¹³ (HENRY, 2010, p. 36)

Entre o ponto de vista de Chevallard e Wozniak (2011) e Henry (2010), para nós emergem duas questões fundamentais no caso francês. Se, por um lado, as reformas ratificam indicações presentes em pesquisas sobre o ensino de probabilidade, Hacking (2006); Batanero et al (2001); por outro, a falta de infraestrutura destaca que há problemas em aberto quando se

¹³ Celle-ci représente une petite révolution pour les professeurs des collèges dont un grand nombre n'ont pas bénéficié de formation à l'aléatoire. Elle s'inscrit cependant dans une évolution cohérente des programmes de l'enseignement secondaire français depuis une vingtaine d'années. Car, à la différence des enseignements élémentaires traditionnels du calcul des probabilités, faisant essentiellement appel à des dénombrements de cas, ce nouveau programme propose d'introduire la notion de probabilité sous une double approche, classique et fréquentiste.

trata do viés epistemológico. Tanto as indicações de documentos oficiais, quanto os avanços ou necessidades de pesquisa na área geram demandas formativas para os professores responsáveis pelo ensino de probabilidade.

A outra questão que se apresenta é a necessidade de olhar para nossa realidade. Nesse sentido, apontamos que alguns trabalhos já destacam resultados sobre o estado do ensino de probabilidade, em relação à questão dos documentos oficiais e às demandas formativas, como é o caso da pesquisa de Gonçalves (2004) e Goulart (2007). No entanto, quanto às condições e restrições para ensino de probabilidade na formação inicial de professores, percebemos algumas lacunas, haja visto que as pesquisas até então realizadas têm dado conta de olhar aspectos relacionados ao discurso institucional, no entanto, a ecologia dos sistemas didáticos em torno do Ensino de Probabilidade ainda é uma questão em aberto. Esse fato que impulsiona a nossa investigação é observado também em outros países, como poderemos ver adiante.

Vu Nhu (2009) desenvolveu, em sua pesquisa de doutorado, orientada por Nicolas Balacheff, um estudo didático sobre a introdução das ligações entre Estatística e Probabilidade no ensino de Matemática vietnamita, utilizando a TAD, a TSD e a Engenharia Didática. Dentre os resultados de sua pesquisa, Vu Nhu (2009) destacou o papel da Lei dos Grandes Números de Jacques Bernoulli como elo para a ligação entre Estatística e Probabilidade. No seu estudo, ela destaca um conjunto de restrições e condições institucionais, além do papel do contrato institucional para compreender essas condições e restrições. Em termos de limitações de seu trabalho e estudos futuros, ela aponta a formação de futuros professores de Matemática como foco para entendermos a origem dessas restrições e condições:

Vamos repetir que a formação de professores separa o ensino fundamental e o ensino médio. Com o questionário distribuído aos professores na classe 10, conseguimos fazer a hipótese de uma submissão muito forte de professores aos livros didáticos reconhecidos em nossa opinião como representantes da instituição de ensino. Para além desta hipótese, que, sem pressa, posiciona os professores como garantidores das relações institucionais com os objetos da estatística, nos colocamos a questão das relações pessoais dos professores com a estatística e a probabilidade. Para estudá-los, seria aconselhável observar os institutos de formação desses professores, seu ensino disciplinar e seus métodos de estudo da metodologia de ensino. Os métodos de ensino estatístico propostos proporcionam lugar as ligações entre estatística e probabilidade? Este lugar é o mesmo para futuros professores do ensino fundamental e futuros professores do ensino médio?¹⁴ (VU NHU, 2009, p. 336).

¹⁴ Redisons que la formation des enseignants sépare collège et lycée. Avec le questionnaire distribué aux enseignants de la classe 10, nous avons pu faire l'hypothèse d'une soumission très forte des enseignants aux manuels reconnus selon nous comme les représentants de l'institution d'enseignement. Au-delà de cette hypothèse qui positionne sans surprise les enseignants comme les garants des rapports institutionnels aux objets de la statistique, nous nous posons la question des rapports personnels de ces enseignants à la statistique et aux

Embora se refira ao sistema de ensino vietnamita, Vu Nhu (2009) usou como base de comparação o sistema francês que, como vimos em Chevallard e Wozniak (2011), apresenta lacunas. De certo modo, amparados por pesquisas como Silva (2002), Gonçalves (2004), Bayer et al (2005), Lopes (2008), Cazorla (2009), dentre outros, podemos também inferir que, em relação à Probabilidade e seus conceitos, na prática institucional de formação dos futuros professores de Matemática necessita de um olhar mais atento. Em termos didáticos, podemos questionar:

Q₀ – Qual o conjunto de condições e restrições que permite a vida do sistema didático na formação dos futuros professores de Matemática para o ensino de Probabilidade?

Formulada essa primeira questão, remeter-nos-emos agora ao argumento das demandas formativas. Quando pensamos em demandas formativas, estamos nos referindo diretamente a dois aspectos: o primeiro diz respeito às recomendações oficiais para o ensino de probabilidade. O segundo é a consideração dos resultados de pesquisas sobre o ensino de probabilidade. Se, por um lado, observamos que o ensino de probabilidade é tema de debate em vários países, como Brasil, Espanha, França, Vietnã, entre outros; por outro lado, reconhecemos que os esforços de pesquisadores ao redor do mundo têm gerado resultados interessantes para se pensar o ensino de probabilidade, tanto do ponto de vista do enfrentamento de dificuldades de aprendizagem, como da construção de sequências e dispositivos de ensino que levam em consideração os resultados dessas pesquisas, bem como o pensamento da noosfera¹⁵ para a Educação Básica expressos em documentos e recomendações oficiais.

Pesquisas como a de Silva (2002) demonstram a possibilidade de trabalhar o conceito de probabilidade na Educação Básica, levando em consideração as diferentes concepções para o ensino de Probabilidade, percepção também observada por Coutinho (2003) que utilizou a modelização em ambientes computacionais, como estratégias para significar os conceitos trabalhados em relação à Probabilidade.

Ao analisar o discurso oficial para o ensino de Probabilidade, Goulart (2007) observou que a Probabilidade tem assumido um lugar de destaque nas recomendações oficiais, no

probabilités. Pour les étudier il serait judicieux de s'intéresser aux instituts de formation de ces enseignants, à leurs enseignements disciplinaires et à leurs dispositifs d'étude de la méthodologie d'enseignement. Les méthodes d'enseignement de la statistique proposées donnent-elles une place aux liens entre statistique et probabilités ? Cette place est-elle la même pour les futurs enseignants de collège et les futurs enseignants de lycée ?

¹⁵ Para Chevallard (1997) a noosfera corresponde ao conjunto de instituições e seus sujeitos que influenciam na seleção dos conteúdos a serem ensinados. Da noosfera e suas instituições podem participar pesquisadores, gestores, políticos, autores de livro, professores e outros atores do processo.

entanto, salienta que esses documentos são, na maior parte, muito gerais em relação às diretrizes para o ensino de probabilidade, não evidenciando claramente as praxeologias necessárias ao estudo na Educação Básica. Em seu estudo, Goulart (2007) destaca que o Exame Nacional do Ensino Médio se apresenta como um elemento mais claro em termo das praxeologias exigidas para o ensino de Probabilidade.

Na Licenciatura em Matemática, Bayes *et al.* (2005) destacam a insegurança vivida pelos futuros professores, em relação ao ensino de Probabilidade. Para os autores, o discurso sobre os futuros professores em relação à probabilidade é marcado por confusão. Os futuros professores não têm clareza de noções essenciais para o cálculo de probabilidades.

Santana (2011), ao investigar junto a professores que lecionam matemática no Ensino Fundamental as concepções deles acerca do ensino de probabilidade, percebeu diversas fragilidades no discurso docente. Por isso, reiterava a importância do olhar sobre a formação inicial de professores.

Apesar do reconhecimento sobre estes esforços, somos de acordo com Castro Filho, Câmara dos Santos e Bittar (2008, p.2) que destacam intervenientes na democratização e aplicação de muitos dos resultados da pesquisa:

Podemos apontar várias razões para a distância entre a pesquisa básica e a aplicação de seus resultados na escola, como a própria academia, que valoriza mais as publicações científicas, não tendo como objetivo principal as aplicações diretas em sala de aula, a falta de políticas sistemáticas de formação de professores (não só na matemática, mas também em outras áreas do conhecimento), etc.

Sobre a questão da formação de professores na licenciatura para o ensino de Estatística e Probabilidade, trabalhos como o de Silva (2014) mostram que ainda há questões em aberto. Em sua pesquisa Silva (2014) investigou o currículo prescrito para o Ensino de Estatística e Probabilidade e observou a presença desses conteúdos, porém o enfoque nas ementas é essencialmente do ponto de vista do conceitual:

Apesar da presença da Estatística e da Probabilidade como conteúdo, encontramos na estrutura curricular de alguns cursos, ainda incorporada, a visão da formação do professor para ensinar ser pautada exclusivamente no conhecimento conceitual (SILVA, 2014, p. 114)

Por ser uma pesquisa documental, o trabalho de Silva (2014) não é capaz de responder como ou se as demandas formativas dos futuros professores são levadas em consideração. Logo, faz-se necessário um olhar sobre a prática e, para nós, esse olhar pode ser traduzido na seguinte questão:

Q₁ – Como as demandas formativas dos futuros professores de Matemática para ensinar Probabilidade são tratadas no sistema didático que estudaremos?

Seguindo a discussão sobre os argumentos de nossa problematização, observamos que a pesquisa sobre o ensino de Probabilidade, como afirmamos em parágrafos anteriores, tem avançado. Assim é possível, em um resumo dessa literatura vigente, elencar constatações importantes que se apresentam como desafios para o ensino de Probabilidade e seus conceitos:

Quadro 1 – Apontamentos das pesquisas sobre aprendizagem de probabilidade

Apontamentos	Referência
Os estudantes, mesmo depois de terem passado por situações formais de ensino de probabilidade, tendem a apresentar erros na solução de problemas envolvendo raciocínio probabilístico.	Serrano <i>et al</i> (1998)
O ensino que enfoca procedimentos teóricos, sem a devida problematização das concepções probabilísticas, corroboram para uma aprendizagem deficitária dos conceitos.	Guisasola e Barragués (2002)
O conceito de aleatoriedade é central para o ensino de Probabilidade, porém não tem recebido a devida atenção.	Azcaraté Goded (1996)
As questões cotidianas têm um papel fundamental para o entendimento das concepções probabilísticas dos estudantes.	Sáenz (1999)
A passagem de um paradigma determinista para um paradigma de incerteza não é trivial, portanto há necessidade de observar o funcionamento dos contratos didáticos nesse processo.	Regnier (2005)
Futuros professores apresentam problemas na compreensão da independência de eventos e na noção de equiprobabilidade.	Ortiz de Haro <i>et al</i> (2013)

Fonte: próprio autor (2018).

A partir do quadro 01, temos condições de formular mais um importante questionamento:

Q₂ – Que condições e restrições oferecem o sistema didático estabelecido na licenciatura em Matemática para que os futuros professores possam manter uma relação de conformidade com a Probabilidade e seus conceitos, dentro de um modelo epistemológico de referência para formação desses professores?

Diante das questões Q₀, Q₁ e Q₂ passamos a problematizar as razões pelas quais optamos pela TAD como principal ferramenta teórica a fim de tecermos considerações sobre o sistema didático em torno do ensino de Probabilidade na Licenciatura.

Parece-nos claro até aqui o fato de que as questões levantadas reiteram que o Ensino de Probabilidade e de seus conceitos carrega consigo aspectos que revelam sua complexidade. A própria problematização da necessidade de considerar um modelo epistemológico de referência

específico para formação de professores de Matemática, está intimamente relacionado com os desenvolvimentos da TAD.

Do ponto de vista epistemológico, como veremos no Capítulo 5, a Probabilidade é um campo teórico que resguarda características da Matemática, mas também da Estatística, ou seja, um campo híbrido. No sentido tradicional, podemos dizer que, se, por um lado, o ensino de Matemática tem características deterministas, por outro lado, a Estatística, enquanto matemática aplicada, não tem essa pretensão. Nesse sentido, se no Ensino de Matemática a resposta a uma equação, em alguns casos, pode ser considerada o final do trabalho; na Estatística, pode ser só o começo. Assim, a Probabilidade transita entre esses dois universos e a forma como ela é difundida em sala de aula pode beneficiar ou não os alunos em uma compreensão mais profunda do potencial desse saber.

Esse argumento é sustentado por Guisasola e Barragués (2002), para quem o enfoque mais teórico nos procedimentos e regras, juntamente com a ausência de problematização, não colabora para um ensino cujo significado seja relevante para os estudantes.

Chevallard (2006) chama atenção para um fenômeno que ele nomeia como monumentalização do ensino. Nesse caso, as obras são estudadas como monumentos da sociedade. Por isso, os professores conduzem seus alunos para referenciar essas obras. De acordo com Chevallard (2006), ao ensino é necessária a imersão em um paradigma de questionamento do mundo, ou seja, um paradigma onde os estudantes e professores têm uma postura problematizadora diante dos saberes.

Outro aspecto importante sobre o ensino de Probabilidade são as influências sofridas por saberes em níveis externos à realidade institucional. O fenômeno da inserção da Probabilidade mais cedo no currículo escolar e as mudanças nos programas oficiais de ensino em diferentes países revelam, dentre outros aspectos, o reconhecimento por parte das sociedades da importância desse conteúdo. Para observar com mais clareza esta questão, Chevallard (2002) nos apresenta, conforme já mencionado anteriormente, a noção de níveis de codeterminação, uma escala de determinação na qual o saber está relacionado ou é influenciado, que ia, inicialmente, desde o conteúdo em sala de aula até o nível civilização, mas atualmente já considera o nível humanidade, em última instância. Como um exemplo da atuação desses níveis, podemos dizer que a visão determinista na qual muitas instituições de ensino estão imersas pode ser reflexo de como a sociedade enxerga o mundo e as relações com a produção científica.

Por último, um aspecto revelado na maior parte das pesquisas que temos observado, é que o ensino de probabilidade, seja na educação básica, seja no nível superior, apresenta uma

prática problemática. A antropologia cognitiva proposta por Chevallard e seus desdobramentos permitem a análise das práticas institucionais estabelecidos através de sistemas didáticos e materializadas pelas organizações praxeológicas matemáticas e didáticas que revelam essa prática. Vu Nhu (2009) sinaliza em seu trabalho a necessidade de olhar a formação dos futuros professores como meio para fortalecer o que se sabe e o que está sendo produzido em torno do ensino de Probabilidade.

Assim, os parágrafos anteriores reforçam nosso entendimento de que a TAD reúne diversos elementos que podem nos ajudar a compreender melhor as práticas que ocorrem na licenciatura em Matemática em torno do ensino de probabilidade. No entanto, embora acreditemos no potencial da TAD, somos conscientes de que, mesmo nos valendo de tal arcabouço teórico, existem questões em aberto, em virtude das próprias limitações da TAD, as quais são incentivadas pelo próprio Chevallard em parte considerável de seus textos, destacando sobretudo o desejo de aprimoramento da teoria.

A antropologia cognitiva reforça, segundo Chevallard (1991;1996), o que conhecemos em Didática como paradigma epistemológico, que tem suas raízes desde os primeiras rupturas trazidas por Guy Brousseau. Os desdobramentos em 30 anos de produção renderam a Chevallard e seus colaboradores a construção e o aprimoramento de noções que fizeram da TAD uma poderosa ferramenta para a análise dos fenômenos didáticos em torno da difusão dos saberes. A ênfase nos aspectos epistemológicos suscitou também críticas, como citamos na introdução, de que a TAD excluiu a possibilidade de olhar os fenômenos didáticos sob uma dimensão psicológica. Para nós, a leitura de críticas do gênero nos motivou a utilizar a TAD como arcabouço de um ponto de vista problematizador, donde, ao passo que TAD será ferramenta de análise do sistema didático em torno da Probabilidade, tentaremos, a partir do exercício teórico, refletir sobre o papel e as limitações da TAD nessa análise.

Em 2016 durante nossa participamos no 1º LaDiMa, apresentamos um trabalho que trazia uma reflexão sobre as possíveis influências epistemológicas e antropológicas na TAD, analisando textos clássicos como Bachelard (1935; 1996), Douglas (1986; 2007) e Mauss (1935; 2003). O processo de análise de algumas das principais indicações teóricas presentes ao longo de textos fundamentais de Chevallard (1996; 1999; 2007) nos levou a um processo de reflexão sobre o papel das noções que são bases na TAD. Pudemos encontrar elementos teóricos que possibilitam ampliar e dar sustentação ao caráter epistemológico e antropológico presentes na TAD. Dentre esses elementos destacamos a ressignificação do lugar dos indivíduos/sujeitos/pessoas na TAD frente às organizações praxeológicas. O conceito de homem total de Mauss (1935; 2003), em que os sujeitos são vistos como seres biológicos,

psicológicos e sociais, bem como o papel social das Instituições, referendado por Douglas (1986; 2007), contribuem para compreendermos melhor a análise das relações entre sujeito-objeto-instituição, inclusive para pensarmos numa dimensão psicológica dessas noções.

A ampliação do estudo nos conduziu aos trabalhos da antropóloga Jean Lave e Etienne Wenger, para quem a aprendizagem é fenômeno relacional e social, e se tece na prática e com a prática.

Em um segundo estudo também publicado em 2016, analisamos a relação mantida por licenciados do Curso de Matemática com a Probabilidade e seus conceitos. Para esta discussão, utilizamos a Análise Estatística Implicativa, que é entendida como uma ferramenta de análise de dados capaz de fornecer subsídios para refletir sobre a formação docente. Nossa questão de pesquisa no estudo estava relacionada com o seguinte questionamento: como os futuros professores de Matemática se relacionam com as ideias básicas que envolvem o conceito de Probabilidade? Para responder a essa questão, fundamentamo-nos em Azcárate Goded (1996) e Gonçalves (2004), que discutem o papel e a formação das concepções docentes sobre probabilidade. Utilizando o software CHIC (Classificação Hierárquica Implicativa e Coesitiva), pudemos observar que os futuros professores, no geral, demonstram fragilidade na sua relação com a probabilidade e sobre ela apresentam conhecimentos que se aproximam de uma concepção clássica.

O questionário também revelou que a visão determinista traduzida em uma adesão de quase 100% dos sujeitos à abordagem clássica demonstra que, se esses futuros professores não podem ser considerados no paradigma do não reconhecimento probabilístico da realidade, conforme Azcárate Goded (1996), eles estão longe ainda de um conhecimento profundo sobre a probabilidade, transitando possivelmente entre concepções intuitivas ou probabilísticas emergentes.

Outro resultado fundamental para nossa pesquisa é que este estudo revelou que os futuros professores que já passaram pela formação no componente curricular dedicado ao ensino de probabilidade parecem manter uma relação de conformidade mais adequada do que aqueles que não passaram pela formação.

Diante dos resultados desses dois estudos exploratórios e da problemática apresentada nas questões Q₀, Q₁ e Q₂, formulamos a seguinte questão que chamamos de norteadora:

Q_N - É possível identificar, através da análise do funcionamento do sistema didático estabelecido em torno do ensino de probabilidade para futuros professores de Matemática, elementos que caracterizem mudanças nas suas relações em uma dimensão cognitiva da aprendizagem?

A análise dessa questão suscita diversas questões secundárias que sintetizamos a seguir:

Q_{S1} – Como os futuros professores lidam com o acaso e a incerteza no sistema didático estabelecido na licenciatura em Matemática?

Q_{S2} – Que organizações praxeológicas são desenvolvidas no ensino de Probabilidade na Licenciatura em Matemática?

Q_{S3} – Essas organizações praxeológicas levam em consideração as necessidades formativas dos futuros professores?

Q_{S4} – Ocorrem mudanças na relação dos sujeitos com objeto probabilidade durante o funcionamento do sistema didático?

Q_{S5} – O contrato didático estabelecido para o funcionamento do sistema didático favorece mudanças desejadas nessas relações?

Q_{S6} – As posições ocupadas pelos sujeitos no seio da instituição de formação, quando participam do sistema didático para ensino de probabilidade, favorecem a aprendizagem?

Q_{S7} – Que efeitos, rupturas ou negociações emergem no funcionamento do contrato didático na formação desses futuros profissionais, seja como usuários da Probabilidade, seja como aqueles que deverão conduzir o processo de ensino e aprendizagem de Probabilidade na educação básica?

É pertinente lembrar que o contrato didático, conforme Brousseau (1986), teve um papel transversal na pesquisa, ou seja, o estabelecimento do sistema didático pressupõe a existência de um contrato didático, portanto, compreender seu papel no processo é fundamental para entender o funcionamento do sistema didático.

De modo geral, Q_N indica que a problemática que constitui o nosso objeto de pesquisa está vinculada a dois aspectos fundamentais de estudo. O primeiro deles diz respeito à natureza teórica da Teoria Antropológica do Didático (TAD) e sua capacidade de explicitar e explicar o funcionamento dos sistemas didáticos. Entendendo o ambiente de formação dos futuros professores como uma Instituição, a análise das organizações praxeológicas, desenvolvidas por seus atores (professor e futuros professores interagindo com o objeto do saber) nesse ambiente, pode nos ajudar a compreender melhor a natureza e a capacidade explicativa da TAD, ao passo que pode, também, contribuir para o aprimoramento do ensino de probabilidade na Licenciatura em Matemática.

Assim levantamos inicialmente 04 hipóteses fundamentais:

H₀ – O sistema didático se estrutura numa perspectiva tradicional do ensino, privilegiando a visão clássica do conceito, sem aportes para o ensino futuro de probabilidade.

H₁ – O contrato didático estabelecido durante a formação favorece mudanças na relação dos sujeitos frente à Probabilidade e seus conceitos.

H₂ – As organizações praxeológicas matemáticas e didáticas permitem a compreensão da aleatoriedade para situações elementares, mas não favorecem a construção de concepções diversas da probabilidade, não rompendo com a concepção clássica.

H₃ – É possível, a partir da TAD e do contrato didático como ferramentas para análise do sistema didático, reconhecer a mudança relacional *sujeito-objeto* que se configura como dimensão cognitiva da aprendizagem situada no contexto institucional. Ao reconhecer essa mudança, pode-se levantar aspectos para identificar o lugar do sujeito cognitivo na TAD.

A hipótese H₀ e H₁ e H₂ são fundamentadas nas análises dos dados obtidos durante o estudo exploratório 02: os futuros professores entrevistados demonstraram proximidade com a visão clássica da Probabilidade. Apesar da identificação de certa fragilidade na relação dos entrevistados com a probabilidade e seus conceitos, especialmente quanto à noção de aleatoriedade e equiprobabilidade, aqueles que já haviam cursado o componente curricular sobre probabilidade demonstravam relações de conformidade melhor. Por fim, não negamos a experiência que temos como formadores de professores, a qual nos faz perceber que uma parte significativa das aulas ainda tem um enfoque nos conteúdos e na exposição do professor.

A hipótese H₃ está diretamente relacionada com o estudo exploratório 01. A dimensão psicológica é reclamada nas referências que dão base ao viés antropológico na TAD. Mauss (1935), ao discorrer sobre as técnicas do corpo, ideias que inspiraram a noção de organização praxeológica, destaca que as pessoas que executam as tarefas ao utilizarem técnicas participam de toda uma dinâmica social e cultural, de modo que a pessoa é um ser social, biológico e psicológico. Na mesma direção, Douglas (1986; 2007), ao discutir o conceito de instituição, destaca o papel das instituições na constituição da cognição coletiva e individual. Ao incorporar os estudos de Jean Lave e Etienne Wenger para entender os processos de mudança nas relações dos sujeitos com a Probabilidade e seus conceitos, esperamos comprovar a H₃ no nosso estudo.

Partindo dessas reflexões preliminares, fixamos como objetivo geral de nossa pesquisa:

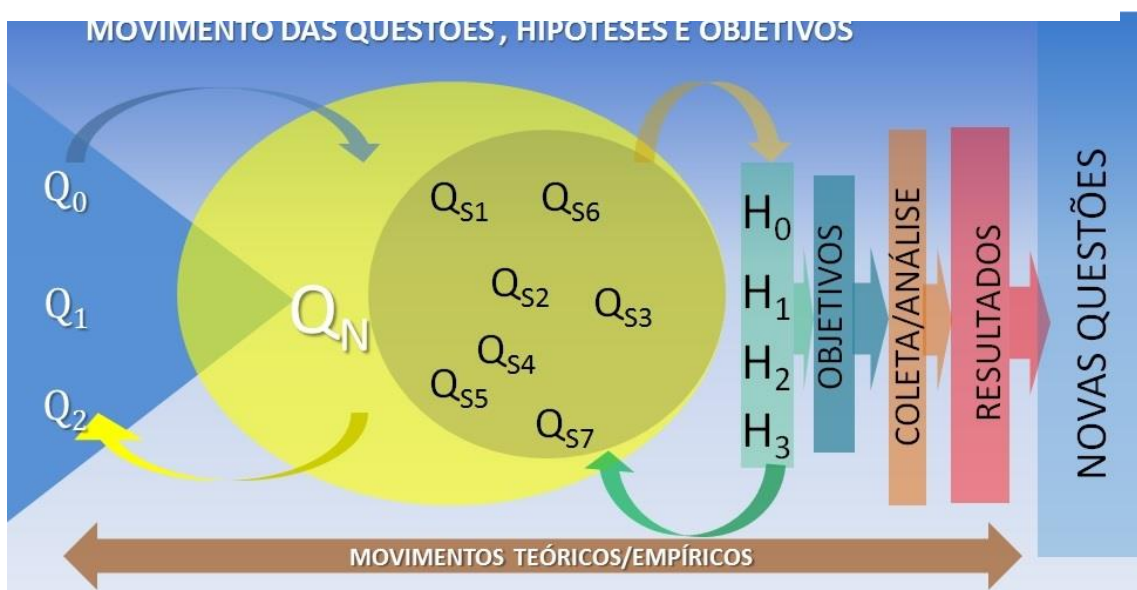
Caracterizar o lugar do sujeito cognitivo na Teoria Antropológica do Didático a partir da perspectiva da cognição como um fenômeno situado no contexto institucional, quando se estabelece um sistema didático em torno do ensino de probabilidade na licenciatura em Matemática.

Atrelados a esse objetivo, propomos como objetivos específicos:

- ✓ Analisar o conjunto de condições e restrições que se manifestam no funcionamento do sistema didático estabelecido em torno do ensino de Probabilidade na licenciatura em Matemática, e o seu papel na mudança relacional dos sujeitos envolvidos com o objeto de saber;
- ✓ Realizar análise da organização praxeológica, matemática e didática da formação docente quando estão em jogo os conceitos relacionados com a Probabilidade;
- ✓ Identificar, no funcionamento do contrato didático, negociações e expectativas, possíveis efeitos e rupturas que ocorrem quando os futuros professores resolvem problemas envolvendo probabilidade;
- ✓ Analisar o movimento das posições assumidas pelo professor formador e pelos futuros professores, na interação com o objeto do saber em jogo.

Os movimentos que nos levaram à elaboração das questões, hipóteses e objetivos estão sintetizados na figura 01:

Figura 1 – Movimento das questões, hipóteses e objetivos.



Fonte: próprio autor.

As questões Q_0 , Q_1 e Q_2 , consideradas globais do ponto de vista da problematização, passam pelo filtro teórico/empírico relacionado às pesquisas sobre o ensino de probabilidade, a TAD e os estudos exploratórios que empreendemos.

O resultado desse filtro é Q_N – nossa questão norteadora – que é desdobrada nas questões secundárias Q_{S1}, \dots, Q_{S7} . Essas questões culminaram em quatro hipóteses. Destacamos na figura a representação cíclica nos movimentos que vai das questões globais até as hipóteses, de modo que esse movimento é balizado pelo movimento teórico/empírico na pesquisa. O termo “teórico/empírico” está ancorado nas ideias de Lave (2011) que destaca que na pesquisa teoria e prática mantêm uma relação dialética.

Destacamos ainda na figura 01 que, estabelecidos as hipóteses e os objetivos, o desenho metodológico permitirá a construção e a análise dos dados de modo que os resultados obtidos desse processo com a comprovação ou refutação das hipóteses levará sempre a novas questões em estudos futuros.

Para finalizar este capítulo apresentamos na seção seguinte a organização e disposição dos capítulos de nossa Tese.

1.2 ORGANIZAÇÃO DE NOSSA TESE

Explicitadas as questões e os objetivos que norteiam nosso estudo, apresentamos nos próximos capítulos o desenvolvimento de nossa Tese. Iniciamos com uma discussão teórica sobre a cognição e suas dimensões psicológicas e antropológicas. Neste capítulo situamos nossa escolha por adotar a perspectiva da “*Situated Learning*” como baliza teórica para discutirmos a dimensão cognitiva na TAD.

Em seguida, no terceiro capítulo, apresentamos nossas reflexões teóricas sobre a TAD e discutimos suas noções teóricas e, a partir de argumentos teóricos e epistemológicos, trazemos nossa compreensão sobre a possibilidade teórica de tratar a dimensão cognitiva na TAD e o lugar do sujeito psicológico. Nesse capítulo, incluímos uma seção para apresentar as principais ideias relacionadas à noção de contrato didático que é utilizada na análise do funcionamento do sistema didático.

No Capítulo posterior, trazemos o desenho metodológico que utilizamos durante a construção dos dados, ocasião em que apresentamos e discutimos os instrumentos para construção desses dados e as categorias de análise pensadas a priori. A partir do desenho metodológico, dedicamos o capítulo seguinte à discussão do ensino de Probabilidade em seus aspectos históricos, epistemológicos e didáticos. Para tanto, utilizamos efetivamente as

ferramentas teóricas presentes na TAD, com a finalidade de delinear o contexto institucional da licenciatura em Matemática em que fizemos a nossa observação do sistema didático. Esse exercício nos ajudou na construção de um esboço de um modelo epistemológico de referência para o ensino de Probabilidade na Formação de Professores.

No penúltimo capítulo, apresentamos o cenário de observação do funcionamento do sistema didático do objeto de estudo. Balizados pela análise feita no capítulo anterior, buscamos explicitar elementos que ilustram a dinâmica vivida pelos sujeitos durante o funcionamento do sistema didático.

No último capítulo, retomamos as observações teóricas, agora tomando como base as observações empíricas que fizemos em capítulos anteriores, mais especificamente no quinto e no sexto, como tentativa de caracterização da dimensão cognitiva e do lugar do sujeito psicológico na TAD. Assim, discutimos os principais resultados e finalizamos nosso trabalho com as considerações finais e as perspectivas de estudos futuros.

2 COGNIÇÃO COMO FENÔMENO SITUADO: DIALÓGOS ENTRE ANTROPOLOGIA E PSICOLOGIA

Lentes

Raul recomendava escuras
 Galileu olhou para lua
 mas não era dele a ideia
 O nativo olhou para lua
 não viu crateras
 só a perfeição
 do desconhecido
 Jaci usava lentes
 lentes do imaginário
 Satélites usam lentes
 Soho viu Marte
 As lentes de Soho
 são diferentes
 Assim desde Creta
 se fez mistério
 Newton já dizia
 vítreo já foi consenso
 hoje já não é mais
 só se sabe da miopia
 as moléculas escondem
 não menos
 que o universo
 intangível
 as estrelas
 vagas lembranças
 de um passado
 Meu amor são lentes
 Teorias e teoremas
 Lentes são pontes
 Lentes são barreiras
 preciso de minhas lentes
 para ver o pequeno
 para ver o distante
 lentes para saber que não vejo
 além da ilusão das minhas lentes.

O pensamento de Bachelard (1935; 1996) nos é caro por diversas razões. Sua sensibilidade para refletir sobre o pensamento e a atividade científica demonstra uma capacidade de síntese que contrasta com a fecundidade de suas ideias. Ao questionar o papel da experiência comum como oposição ao avanço do pensamento científico, ele nos revela que um dos primeiros genes dos “obstáculos epistemológicos” está presente no próprio ato de conhecer,

“o conhecimento do real é luz que sempre projeta algumas sombras” (BACHELARD, 1996, p. 17).

Continuando sua tese, o referido pensador argumenta que mitos precisam ser questionados para a compreensão da ciência, enquanto atividade. A ingenuidade científica nasce da ilusão de que o conhecimento científico cresce por justaposição ou acumulação. Pelo contrário, é na ruptura, na problematização que o espírito científico avança: “se não há pergunta, não pode haver conhecimento científico. Nada é evidente. Nada é gratuito. Tudo é construído.” (BACHELARD, 1996, p. 18).

Essa premissa é assumida, especialmente quando o autor se debruça na explicação do pensamento e da atividade científica nas ciências naturais. Ele destaca que os modelos matemáticos não são a síntese do experimento ou do saber construído, mas ferramentas que permitem ao espírito científico variar, experimentar, completar o que falta. Para Bachelard (1935; 1996), a compreensão matemática dos fenômenos age no sentido de estabelecer uma equiparação entre a razão e a experiência. Isso indica, no pensamento do autor, que antes do fenômeno geral, é preciso entender a sua organicidade: “o que lhe chama atenção já não é o fenômeno geral, é o fenômeno orgânico, hierárquico, que traz a marca de essência e de forma, e, como tal, é permeável ao pensamento matemático” (BACHELARD, 1996, p. 82).

Particularmente, aqui encontramos um primeiro motivo para a nossa escolha pela TAD, enquanto lentes que usaremos em nossa pesquisa, mas não são lentes comuns, são lentes que se adaptam, são lentes para uma leitura e construção do fenômeno que observamos, lentes como pontes. Ao se debruçar sobre as práticas institucionais, Chevallard (1996) destaca o papel da ecologia dos saberes, as condições e restrições que atuam na sua difusão, influenciando nas relações pessoais e instituições com os objetos de saber, ou seja, o olhar da TAD sobre os fenômenos didáticos é essencialmente ecológico¹⁶.

Ainda com base em Bachelard (1935;1996), vale lembrarmos que a Matemática em sua obra se traduz como expressão da razão, ou seja, vai muito além de simples expressões de leis gerais sobre fenômenos. Em sua epistemologia, os saberes científicos são gerados a partir de um vetor cuja origem está na dialética entre razão e experiência. Matemática é, portanto, a expressão da intuição racional.

¹⁶ O termo “ecologia” é utilizado por Chevallard como uma referência ao caráter relacional entre os saberes, as instituições e os seus sujeitos. Tomado emprestado da Ecologia, é possível falar em outros termos derivados nicho, habitat e ecossistema. Na TAD um ecossistema corresponderia ao conjunto de condições e restrições institucionais que permite a “vida”. de um determinado saber.

A TAD olha para o saber matemático como uma construção humana. O olhar antropológico se propõe a observar como esse conhecimento relacional vive nas instituições em que ele é finalidade (instituições produtores), é meio (instituições utilizadoras) ou é objeto de estudo (instituições de ensino). Em qualquer que seja a instituição, a TAD pressupõe que há espaço para se fazer matemática a partir da noção de atividade matemática e do seu estudo (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001).

Assim na TAD, o saber matemático é visto como passível de problematização. Para Bachelard (1935;1996), é o exercício transitório entre intuição racional (manifestado pela matemática) e intuição empírica que irá gerar a possibilidade da criação e do avanço na atividade científica. Para ele, a ciência é algo inacabado, isto é, é um conjunto de aproximações sucessivas sem atributo da perenidade, essa impressão pode ser destacada também ao longo de sua obra:

É, portanto, na encruzilhada dos caminhos que o epistemólogo deve colocar-se: entre o empirismo e o racionalismo. É aí que ele pode apreender o novo dinamismo dessas filosofias contrárias, o duplo movimento pelo qual a ciência simplifica o real e complica a razão. Fica então mais curto o caminho que vai da realidade explicada ao pensamento aplicado. É nesse curto trajeto que se deve desenvolver toda a pedagogia da prova, pedagogia que é a única psicologia possível do espírito científico. (BACHELARD, 1978, p. 95).

Pelo argumento da insuficiência do espaço sensível é que Bachelard (1996) enfatiza que o processo de construção científica passa pela escolha de metáforas. Ao comparar o desenvolvimento científico de sua época, ele analisa o papel da Matemática no processo de abstração que para ele é fundamental para as ciências naturais:

O conhecimento científico é então levado para “construções” mais metafóricas que reais, para “espaços de configuração”, dos quais o espaço sensível não passa, no fundo, de um pobre exemplo. O papel da matemática na física contemporânea supera pois, de modo singular, a simples descrição geométrica. O matematismo já não é descritivo e sim formador. (p. 7)

Na introdução de sua *Antropologia Cognitiva*, Chevallard (1996) também chama a atenção para o papel das metáforas no processo de construção teórica:

Contrariamente àquilo que muitos pensam, afirmo aqui que toda atividade científica (incluindo em matemática) se constitui (na sua linguagem) e se descreve (na sua metalinguagem) através do uso de metáforas. O pensamento desenvolve-se apoiando-se em metáforas(...). (p.117).

É nesse contexto do pensamento metafórico que Chevallard (1996) aponta para entendimentos teóricos que podem ser enganosos, ou seja, em vez da busca pela correspondência ou fidedignidade entre teoria e realidade, ele prefere nos convidar a pensar as

teorias como máquinas onde são fabricados conhecimentos sobre aquilo que se deseja estudar ou modelar. Assim, a abordagem antropológica do didático se propõe, a partir do seu modelo teórico, a produzir conhecimentos sobre os fenômenos didáticos presentes nas práticas humanas, mas reconhece que essa máquina trabalha sempre com aproximações.

A opção de Chevallard (1996) em afastar o fantasma da fidedignidade, antes de introduzir sua antropologia cognitiva, é para nós um argumento encorajador, pois mostra que as lentes que utilizaremos, para melhor visualizar e construir os fenômenos que pretendemos estudar, são passíveis de problematização, carecem de processos de reflexão constante.

Dito isto, o problema que investigamos e sua complexidade reclamam minimamente a possibilidade do diálogo entre teorias, mas também a necessidade de entrelaçamento entre teoria e prática. Ao tratarmos o lugar da cognição e sua dimensão psicológica nas noções teóricas da TAD, entendemos que é preciso compreender epistemologicamente como essas “lentes” funcionam. Esse caminhar teórico, será explicitado no delineamento de nossa metodologia, contrastando com a necessidade de olhar a prática. Isto posto, a análise do funcionamento do sistema didático e de sua ecologia corresponde ao caminhar empírico cujos resultados, esperamos, iluminem nossa intuição racional dentro da TAD, no sentido proposto por Bachelard (1996).

Ainda tomando a metáfora das “lentes”, destacamos que a TAD, em sua gênese, assume que é no saber que reside a fonte primária para a compreensão da ecologia que permite a sobrevivência dos sistemas didáticos. Por isso, o foco dessas lentes não reside no indivíduo, mas na manifestação das práticas coletivas no seio das instituições (CHEVALLARD; BOSCH, 1999).

Logo, acreditamos que é preciso assumir a cognição numa perspectiva que não a encerre como um fenômeno que depende somente de processos mentais individuais. Isso corrobora com o olhar da TAD sobre as práticas institucionais, por isso a escolha por um segundo quadro teórico que reconhece a cognição como fenômeno social.

Precisamente sobre essa impressão, recorreremos à noção de coletivos de pensamento de Ludwik Fleck¹⁷, para quem “conhecer representa a atividade mais condicionada socialmente da pessoa e o conhecimento é a criação social por excelência” (FLECK, 2010, p. 89).

¹⁷ Sobre a fecundidade do pensamento de Fleck, Delizoicov *et al* (2002) advoga que o pensamento de Fleck inspira Khun nas construções de suas principais categorias (ciência normal, paradigma, revolução científica): “Poderíamos caracterizar a teoria de paradigmas de Kuhn como um caso particular da teoria de estilo de pensamento de Fleck,

O pensamento de Fleck (1935, 2010) sobre como a ciência evolui é bastante peculiar. Ao assumir que a ciência não progride de forma linear, ele destaca que as mudanças na ciência ou num dado campo desta ciência estão relacionadas intimamente à mudança no estilo de pensamento de uma comunidade, que é sempre coletivo e que estaria fortemente associado ao crescimento histórico, bem como, seria condicionado socialmente. O pensamento “fleckiano” nos parece útil para justificar nossa escolha por um referencial teórico sobre a cognição, que se distancia daquele pensamento mais usual, advindo da Psicologia Cognitiva de base mais estruturalista.

De acordo com Fleck (2010), um coletivo de pensamento refere-se:

(...) à comunidade de pessoas que trocam pensamentos ou se encontram numa situação de influência recíproca de pensamentos, temos, em cada uma dessas pessoas um portador do desenvolvimento histórico de uma área de pensamento, de um determinado estado do saber e da cultura, ou seja, de um estilo específico de pensamento. (FLECK, 2010, p. 82)

Essa definição é importante para nós sob dois aspectos. O primeiro deles refere-se a nossa compreensão do papel das instituições na cognição dos sujeitos, visto que a noção coletivo de pensamento institui, como já dissemos, que a produção científica é, de certo modo, uma empresa cognitiva coletiva, corroborando com os apontados de Douglas (1986;2007).

Douglas (2007) vê as instituições como agentes de nossa cognição, porém sem descartar o papel individual dos sujeitos, pois é a adesão do sujeito à instituição e seu desejo de colaborar que mantém viva a instituição, isto é, “não é qualquer ônibus lotado ou um ajuntamento aleatório de pessoas que merece o nome de sociedade” (DOUGLAS, 2007, p. 26).

O pensamento de Fleck também nos servirá (viu) como ferramenta teórica para localizar as concepções mais usuais sobre cognição, as quais têm lugar predominante na psicologia cognitiva.

Como veremos adiante, uma das principais características da Psicologia científica é a coexistência de modelos e comunidades que privilegiam certos aspectos na produção do conhecimento nessa área. Em alguns casos, é possível, por exemplo, identificar traços de comunidades ou coletivos de pensamento bem delimitados como é o caso da psicológica cognitiva e a psicologia comportamentalista.

aplicado ao conhecimento produzido por comunidades denominadas de maduras, como foi o estudo realizado por Kuhn.” (DELIZOICOV, CASTILHO, *et al.*, 2002, p. 64)

Numa leitura a partir de Fleck (2010) não é cabível atribuir que houve uma revolução científica com a emergência da psicologia cognitiva sobre o comportamentalismo, pelo contrário, essas duas comunidades sempre existiram, caracterizando como comunidades dentro da Psicologia.

Assim, veremos que o fato das pesquisas na psicologia cognitiva com enfoque mentalista terem se tornando mais populares no meio educacional não exclui a possibilidade de discutir e tratar a cognição a partir de uma perspectiva diferente. Pensamos ser pertinente o argumento de que, para nós, pensar a cognição a partir das noções teóricas da TAD pode requerer assumir a cognição de um ponto de vista científico diferente do mais usual, ou seja, de um estilo ou coletivo de pensamento diferente. Desse modo, nossa fundamentação teórica cumpre não só a missão de descrever e discutir os elementos teóricos que orientam nossa pesquisa, mas, sobretudo, problematizar essas noções e argumentar como, em nosso entendimento, a cognição, enquanto dimensão psicológica e antropológica, identifica-se e se permite ser refletida através da TAD.

2.1 COGNIÇÃO: DIMENSÃO PSICOLÓGICA E ANTROPOLÓGICA

A escolha da cognição e suas dimensões, como discussão inicial desta primeira parte de nossa fundamentação, procura esclarecer que postura teórica assumimos frente a esse fenômeno.

Desde os primórdios da filosofia grega, o conhecimento e sua natureza eram objeto de reflexão. Observa-se no conjunto da obra de Platão (427 a.C. - 347 a.C) a necessidade de uma definição do conhecimento para que se pudesse tomá-lo como base ética. Em relação a essa reflexão, o conhecimento na filosofia platonista assumia duas formas. Enquanto a *episteme* (conhecimento verdadeiro) representava o saber tido como verdade, ou ainda assumido como um conhecimento próximo do que se entende por “científico”, a *doxa* (opinião) era entendido como o conhecimento vulgar, comum, relativo ao indivíduo. Embora diametralmente opostos, nos escritos de Platão há um processo de evolução com uma sutil variação dos significados, como nos explica Franklin (2004, p.1 373):

Ao tratar dos conceitos de doxa e episteme na obra de Platão, tem-se de levar em conta uma evolução desses termos, no que se refere a sua precisão terminológica. Pode-se assinalar que nos primeiros diálogos esses termos apresentam certas nuances terminológicas que não correspondem, precisamente, ao compreendido no diálogo da República. Nesses primeiros diálogos, doxa e episteme estão sempre mesclados a outros conceitos e só podem ser definidos a partir da relação dialética entre eles. Isso faz com que tais conceitos se modifiquem durante o primeiro período da obra platônica. (FRANKLIN, 2004, p. 374).

Para nós, o valor dessa afirmação mostra que, desde as primeiras construções e reflexões sobre o conhecimento e sua natureza, há um processo de discussão sobre os significados que este assume, de modo que a forma como entendemos o que seja o conhecimento influencia na forma como enxergamos o fenômeno cognitivo. Para Platão, inicialmente, a episteme estava relacionada também ao conhecimento prático, isto é, a um “saber fazer” ou técnica. Mais tarde, a necessidade de alinhamento com o valor da Ideia conduz a um novo entendimento da episteme, agora como um conhecimento puro. Já a doxa, embora ainda opinião, comporta ações práticas que, mesmo sem o status de verdade, podem ser consideradas no seu valor prático (FRANKLIN; PAVIANI, 2004).

Lave (1996) argumenta que o pensamento de Platão, Descartes, dentre outros, colaboram fortemente para a forma como hegemonicamente a cognição, e em particular a mente, é tratada. O modelo racionalista está impregnado em muitas das práticas científicas, inclusive no seio também das ciências sociais:

Seria possível situar o início da construção desta argumentação nos mais variados momentos ou nas mais variadas regiões da cultura ocidental; com Platão, com Descartes, ou com figuras de intelectuais da história das ciências sociais contemporâneas. (LAVE, 1996, p. 121).

A autora cita, por exemplo, no início do século XX, o trabalho do filósofo e sociólogo francês Lucien Lévy-Bruhl “As funções mentais nas sociedades inferiores.”¹⁸. O discurso científico racional sobre a cognição tendia a taxar os povos primitivos, isto é, não civilizados, como não-rationais. Dentre outras implicações, esse discurso ajudava a criar o mito de que há uma forma correta de pensar e uma forma errada, ou seja, a cognição no modelo ocidental, calcada no discurso lógico-matemático, representava esse jeito correto de pensar (LAVE, 1996).

¹⁸ Les fonctions mentales dans les sociétés inférieures.

Lave (1996) destaca a presença e a influência desse modo de pensar nas mais variadas instâncias e atividades da sociedade. Na pesquisa científica, segundo a autora, a maneira como se concebe a cognição está impregnada desse modelo racionalista.

Em latim a palavra equivalente para a episteme é *cognitio*. O termo “cognição” está associado à ideia do ato de conhecer. No dicionário Michaelis de Língua Portuguesa, essa palavra apresenta quatro significados:

1. Ato de conhecer;
2. Processo de aquisição de um conhecimento;
3. Conhecimento ou aceção;
4. Conjuntos de processos mentais conscientes que se baseiam em experiências sensoriais, pensamentos, representações e recordações. (MICHELLIS, 2018).

Ao observar mais atentamente essas definições, observaremos que a palavra “cognição” pode ser entendida como ação de conhecer ou adquirir conhecimento, ao passo que pode ser sinônimo do termo conhecimento. Todavia, a quarta definição revela indícios de uma tendência particular da forma como se enxerga a cognição, ou seja, exclusivamente como processo mental, individual e subjetivo.

Essa tendência está relacionada com uma longa tradição, amparada pelo discurso da racionalidade sobre a mente e a cognição. Ao longo do século XX, as ciências cognitivas, como um conjunto interdisciplinar de esforços para explicar a cognição humana, estavam permeadas por uma tradição objetivista, cuja meta era delinear em termos racionais os processos mentais. Nesse entendimento, a informação está disponível como objeto a ser capturado, armazenado, representado e codificado. O conhecimento ou cognição corresponde às alterações na estrutura mental do indivíduo, gerando mudanças comportamentais. Como resultado desse processamento de informação, essas alterações cumprem a finalidade de resolver problemas. O modelo cerebral responsável pelo processamento dessas informações é fortemente associado à estrutura computacional.

Ao passo que essas características e metáforas assumidas sobre a cognição humana fundam um modelo que permeia as ciências cognitivas, elas encontrarão apoio e eco no seio de campos emergentes como as Ciências da Informação (CI), área que teve um desenvolvimento acentuado na segunda metade do século XX (BORGES, 2005).

As ciências cognitivas, como um conjunto interdisciplinar, são compostas de diversos campos científicos que se debruçam sobre a cognição humana. A Psicologia, as Neurociências, a Linguística, a Filosofia, a Antropologia, dentre outras, fazem parte desse conjunto. Ao tratar

a cognição como objeto de estudo, cada um desses campos científicos assume suas premissas sobre os processos cognitivos e sua aquisição.

Para Borges (2005), a abordagem cognitivista tradicional tem uma presença marcante nessas premissas, no entanto, essa hegemonia passa a ser alvo de críticas no final da segunda metade do século XX.

Dentre essas críticas, está o reconhecimento de que as dicotomias entre corpo e mente não dão conta de explicar o fenômeno cognitivo e suas complexidades. Por sua vez, a metáfora computacional associada à mente e ao processamento de informação, embora amplamente aceita, não é uma unanimidade. Outra crítica contundente está relacionada ao caráter individualista e subjetivista que interfere na compreensão do real lugar que tem a dimensão social na constituição da cognição (TOREN, 2012).

No cerne dessas críticas está também outra corrente que tenta fazer uma contraposição ao modelo cognitivista tradicional. Embora encarem a mente como um modelo de processamento de informações, as teorias ligadas ao conexionismo rompem com a visão de que a mente e corpo estejam disjuntas e as capacidades de processamento da mente sejam inatas. Para essas teorias tal capacidade é adquirida na interação com o meio (VENÂNCIO; BORGES, 2006).

Lave (1996), como já sinalizamos, crítica os modelos hegemônicos sobre a cognição, porque as práticas científicas deles se baseiam em uma concepção que tenta caracterizar o pensamento do outro, de modo que aquele que não faz parte do padrão de racionalidade tomado como padrão de referência é tido como inferior. Essa visão condiciona, portanto, os métodos desses modelos que corroboram sempre para uma análise do que é lógico-racional. Assim o laboratório, os experimentos e as explicações se alinham com essa concepção. O produto dessa ciência é percebido e absorvido em diversas instituições sociais, como por exemplo, a escola:

De fato, o estudo dos modos de funcionamento do pensamento levados a cabo no nosso século sempre se baseou, de uma maneira indelével e persistente, numa concepção imaginária do pensamento do “outro”. E mais do que isso, tal concepção toma o pensamento do “outro” como um pensamento “inferior”. Ela está profundamente incrustada no pensamento ocidental, seja nas práticas das psicologias mais tradicionais, seja na ciência cognitiva, seja nas experiências laboratoriais e nas simulações de computador, seja ainda na prática escolar (LAVE, 1996, p. 110, grifos da autora).

Levando em consideração que nosso interesse está em problematizar a TAD e como suas noções teóricas podem nos ajudar a refletir sobre a cognição, faz-se necessário delimitar o sentido que atribuímos à cognição. Assim, essas críticas indicam, dentre outros aspectos, o fato de que há outras possibilidades de olhar o fenômeno cognitivo, e que as correntes teóricas mais

tradicionais, aquelas ligadas às ciências cognitivas, em particular a Psicologia Cognitiva, não são a única via para falar de cognição.

Diante desse introito sobre a cognição e as problemáticas que a cercam, são pertinentes certas delimitações que implicam na construção de alguns questionamentos. A primeira delimitação é que trataremos da cognição no contexto das instituições de ensino, mais especificamente na licenciatura em Matemática, quando os futuros professores lidam com o objeto “probabilidade”. Assim, trataremos da cognição em contexto formal lidando com objetos formais. O nosso interesse na dimensão psicologia parte do princípio de que cada sujeito que participa de um sistema didático é uma pessoa total, no sentido de Mauss (1935; 2003), ou seja, aquele que executa uma tarefa ou aprende uma técnica é um sujeito biológico, social e psicológico.

Vale ressaltarmos, refletindo sobre as indicações de Lave (1996), que na TAD a noção de instituição é ampla, o que a torna uma noção dinâmica. Nesse sentido, as instituições podem se referir a contextos formais, mas também podem ser dispositivos sociais cuja estrutura é diferente de instituições como a escola ou a universidade, a exemplo da família que, para Chevallard (1996), é a primeira instituição à qual somos sujeitados.

Outro aspecto é o fato de que o olhar antropológico sobre o didático considera a Matemática como prática humana, de modo que um objeto pode assumir diferentes relações no seio de cada instituição. Além disso, do ponto de vista institucional, ela é também coletiva, no sentido de instituições conforme proposto por Douglas (1986; 2007). Por isso, acreditamos que não podemos nos limitar a olhar o fenômeno cognitivo do ponto de vista individualista, isto é, interessa-nos um quadro teórico que possibilite olhar a construção do processo cognitivo dos sujeitos imersos no sistema didático, numa dimensão psicológica, mas também antropológica. Essa delimitação é importante, visto que, como destacado anteriormente, a cognição recebe diversas interpretações e contribuições do conjunto que forma as ciências cognitivas, mais especificamente da Psicologia Cognitiva.

Reafirmamos que nosso estudo, ao olhar para a cognição, tenta estabelecer o diálogo entre o ponto de vista didático, antropológico e psicológico. A Didática, aqui representada pela TAD, a cognição explicada como fenômeno situado no seio da Antropologia e a sua dimensão psicológica como um componente que se manifesta na atividade dos sujeitos.

Assim alguns questionamentos se apresentam: é possível olhar para a cognição em espaços formais de ensino a partir de referenciais alternativos aos estilos de pensamento dominantes? Que categorias teóricas são ofertadas por referenciais alternativos para refletir sobre a cognição? É possível um diálogo entre a Didática da Matemática, a Antropologia e a

Psicologia para tratarmos o fenômeno cognitivo? Sobre a última questão, em qual dimensão da análise didática a partir da TAD podemos encontrar um ponto de encontro das dimensões psicológicas e antropológicas da cognição?

Frente a esses questionamentos destacamos que as seções seguintes são uma tentativa de clarificar essas questões no sentido teórico.

Iniciamos com a discussão da possibilidade de diálogo entre áreas a partir da caracterização da Psicologia como conjunto de sistemas explicativos. Nossa compreensão é que a Psicologia é denominação para uma ciência que abriga diferentes modelos de explicação sobre os fenômenos relacionados com a subjetividade humana. Observaremos que o processo de emergência e consolidação pelo qual a Psicologia passou ao longo do século XX culminou com evoluções nos seus quadros explicativos.

A psicologia cognitiva e suas problemáticas se mostram como uma dessas evoluções. Tentamos destacar o que para nós são as premissas que formam este coletivo de pensamento em torno do estudo da cognição humana e suas influências. Assim, destacamos também o papel social da Psicologia, mas, sobretudo da Psicologia Cognitiva na Psicologia da Educação. Esse exercício nos ajudará a escolher duas categorias a partir das quais o diálogo pretendido por nós é possível. A primeira dessas categorias é o cotidiano no sentido atribuído por Lave (1988) e Lave e Packer (2011). Para esses autores, as práticas sociais escolares podem se constituir como uma prática cotidiana da escola. Sendo assim, as práticas institucionais correspondem ao cotidiano dessas instituições. Assumindo um caráter principal, a segunda categoria é a atividade matemática ou seu estudo no sentido de Chevallard, Bosch e Gascón (1997), isto é, como materialização dessas práticas.

Finalizamos com discussão sobre a cognição na perspectiva da Antropologia Social, levando em consideração elementos da Cognição Situada, conforme Lave (1988), Lave e Wengel (1991), na tentativa de elaborar categorias teóricas para parametrizarmos o uso da TAD na análise do sistema didático, que faz parte do objeto de nossa pesquisa.

2.1.1 COGNIÇÃO: DIÁLOGOS ENTRE A PSICOLOGIA, ANTROPOLOGIA E A DIDÁTICA

Os quadros de evolução da Psicologia demonstram que, ao longo de sua constituição, ela foi se delineando como um conjunto de sistemas explicativos. Esses sistemas ou escolas orientam o modo como os fenômenos são interpretados, balizando a produção dessas explicações. Em alguns momentos, alguns desses sistemas receberam mais atenção da

comunidade científica, porém sem necessariamente anular outras escolas de pensamento (BOCK; FURTADO; TEIXEIRA, 2001; HEIDBREder, 1981; WOOLFOLK, 2000).

Embora o conhecimento ocidental sobre a Psicologia remeta ao pensamento grego antigo, a Psicologia só viria reclamar com mais ênfase um status científico a partir do final do século XIX, período em que se destacam os trabalhos pioneiros do alemão Wilhelm Wundt. O distanciamento da filosofia e a busca pela objetividade foram as principais estratégias para dar à Psicologia um caráter de cientificidade. Entretanto, é apenas no século XX que a Psicologia e seus sistemas irão consolidar-se como campo científico (BORGES, 2005; BOOK; FURTADO; TEIXEIRA, 2001).

Marcada pela coexistência de sistemas explicativos, a Psicologia tem nessa constatação um traço fundamental do seu processo de desenvolvimento, que é o seu estado emergente, sendo que o século passado é considerado como período de latência dessa emergência, alternando períodos de consolidação e, ao mesmo tempo, de questionamento de algumas dessas escolas, como exemplo, a escola comportamentalista que teve seu apogeu na primeira metade do século XX.

Esses períodos conduziram na segunda metade do século XX, cenário no qual Thomas Khun e sua teoria das revoluções científicas se apresentavam como uma alternativa plausível à explicação da construção das ciências, a um movimento de argumentação intensa através da ideia paradigmática de que a Psicologia Cognitiva e sua crescente aceitação na comunidade mundial constituíam-se em uma revolução científica que consolidaria a Psicologia como ciência:

A análise de vários textos, incluindo livros ou artigos, mostra que o uso da expressão revolução cognitiva foi inflacionada na psicologia. Na visão kuhniiana, o surgimento de um novo paradigma só poderia ocorrer após um período de crise de um paradigma anterior. Para os que advogam pela causa da revolução, a década de 50 viu a queda do behaviorismo e o nascimento da psicologia cognitiva. (LOPES; LOPES, 2009, p. 9).

Lopes e Lopes (2009) defendem que a natureza concomitante dos sistemas é um problema que merece um exame mais profundo e que a polissemia atribuída à noção de paradigma pode ser uma das razões para a reserva do uso do termo “revolução”. Diante disso, seria mais apropriado falar em um processo de evolução da Psicologia e seus sistemas, pois, embora a Psicologia Cognitiva tenha assumido um papel preponderante nas pesquisas, é fato que outras correntes e modos de conceber os fenômenos psicológicos perduram até hoje, conforme aponta Tourinho (2011):

Voltando ao próprio behaviorismo, ou à comunidade científica que se estruturou ao longo do século XX, sob a liderança, principalmente, do trabalho de Skinner, mudanças substanciais aconteceram especialmente no que diz respeito a uma maior diversificação das produções. A investigação básica do comportamento conhecida como análise experimental do comportamento por muitos anos foi, e continua sendo, o tipo de produção mais frequente e mais estruturada, no sentido de que representa o esforço de grupos numerosos de pesquisadores, organizados em torno de programas de pesquisas razoavelmente compartilhados e bem definidos. Outros tipos de produção, no entanto, floresceram e passaram a aglutinar analistas do comportamento, dando origem a novos programas de pesquisa e aplicação, a novas revistas científicas e a novas categorizações de atividades em eventos científicos. (TOURINHO, 2011, p. 191).

O que estamos tentando argumentar é que a Psicologia, como um conjunto de sistemas explicativos, evolui à medida que seus sistemas, correntes e tradições de pesquisas evoluem. Assim, de acordo com Lopes e Lopes (2009), é mais frutífero falar em tradições de pesquisa que contribuíram para o progresso desse campo do que falar em revoluções científicas. Para nós, é cabível olhar para esses sistemas em evolução como processo de consolidação de coletivos de pensamentos dentro da Psicologia. Em outros termos, embora estivesse comprometida com a retomada dos estudos sobre a cognição e o funcionamento da mente, em certa oposição à escola comportamentalista, é preciso frisarmos que a cognição humana já era tema de debate desde os primórdios da psicologia e não apenas a partir do advento da Psicologia Cognitiva: “A perspectiva cognitiva é, ao mesmo tempo, o membro mais antigo e o mais novo da comunidade psicológica” (WOOLFOLK, 2000, p. 219).

Fleck (2010) destaca que o conhecimento científico é construído socialmente. No caso da psicologia cognitiva e sua ascensão na segunda metade do século XX, veremos que a comunidade mundial se encontrava num cenário de pós-guerra, onde a sociedade, representada pelos países envolvidos no conflito, passava tanto por um período de recuperação, quanto por um processo de reafirmação. É nesse mesmo contexto que os estudos sobre a complexidade humana e sobre a linguagem, as descobertas informáticas, encontravam-se em ebulição, o que não foi diferente com a Psicologia. Pensamos que esse quadro tenha contribuído socialmente para a constituição e consolidação de um coletivo de pensamento em torno da psicologia cognitiva.

Assim, se os estudos comportamentalistas dominaram a primeira metade do século XX, é na segunda metade que os estudos cognitivistas retomam sua força, e a Psicologia e seus sistemas passam a ter um papel crucial no desenvolvimento das mais variadas áreas de pesquisa. Nosso argumento encontra eco na fala de Nikolas Rose, importante sociólogo das ciências:

A psicologia e as linguagens da psicologia construíram um senso comum na Europa e na América do Norte, na Austrália, na América Latina e em muitos outros lugares. O treinamento psicológico afetou profissionais de orientação de crianças, de trabalhos sociais, e mesmo de administração de recursos humanos. No processo, nossas muitas idéias do "self", da identidade, da autonomia, liberdade e da realização pessoal foram reformadas em termos psicológicos. Seres humanos, nessas regiões, vieram a se entender como se fossem habitados por um profundo e interno espaço psicológico, que estaria avaliando-os e agindo sobre eles nos termos dessa crença. As pessoas falam de si mesmas numa linguagem psicológica de descrição pessoal – a linguagem da inteligência, personalidade, ansiedade, neurose, depressão, trauma, extroversão, introversão – julgando-se em termos do que penso podermos determinar, quase com certeza, como uma "ética psicológica". (ROSE, 2008, p. 155).

Para Rose (2008), a Psicologia e sua influência estão diretamente relacionados com o fato de que as condições eram favoráveis para esse processo de florescimento. Isto sinaliza, por um lado, a importância da Psicologia e seus sistemas explicativos na compreensão dos fenômenos e na formação da sociedade contemporânea, mas também, por outro lado, aponta para sua influência naqueles campos em ela se prestou como explicação ou aplicação.

É preciso considerar o fato de que o modelo comportamentalista podia ser hegemônico na psicologia norte-americana, mas isso não significa que não existissem outras tradições de pesquisa em psicologia ao redor do mundo. Na Europa, os estudos de Barlett¹⁹ não só apontavam para a cognição, especialmente a questão da memória, mas também faziam uma crítica ao modelo comportamentalista porque, segundo esse estudioso, era preciso considerar também o contexto social como influência na memorização (GOODWIN, 2010).

De acordo Cazarotto (2015), até na Psicologia fundada por Wundt, houve espaço para pensar os fenômenos psicológicos de um ponto de vista mais flexível:

O próprio fundador da psicologia, Wilhelm Wundt, em parte lidou com modelos tidos então por experimentais, mas deixou espaço, e por sinal, muito espaço, na sua *Völkerpsychologie* para um campo mais humano da psicologia cuja metodologia não era clara, mas seria no mínimo flexível. Aliás, algo que nunca ficou muito claro, o que seria, nem mesmo para ele, segundo Von Belzen. Entretanto, deixa claro que a psicologia é uma ciência empírica, cujo objeto é a experiência imediata. Em resumo, podemos dizer que a psicologia, lidando com métodos e instrumentais mais próximos das ciências naturais ou sociais, tem em vista o estudo do psiquismo humano em suas manifestações diretas e indiretas. (CAZAROTTO, 2015, p. 45).

No que tange ao processo histórico de desenvolvimento da Psicologia, veremos que a natureza do conhecimento e os conteúdos da mente remetem, pelo menos, às preocupações

¹⁹ Ver por exemplo um das primeiras publicações de Bartlett, F. C. *Remembering: A study in experimental and social psychology*. Cambridge: Cambridge University Press. 1932.

filosóficas do pensamento grego antigo e, embora tenha havido um movimento que ao reclamar objetividade ao conhecimento científico produzido pela Psicologia, tentava deixar de lado o interesse explícito pela cognição, em detrimento de fenômenos observáveis, como o comportamento. Veremos que é exatamente o retorno da cognição e dos conteúdos da mente que vai impulsionar os estudos desse campo científico em emergência.

Aqui, convocamos mais uma vez o pensamento Fleck (2010) ao destacar que a ciência remete também a um processo histórico, além do condicionamento social. Ele exemplifica essa relação com os desenvolvimentos na área médica e no tratamento da sífilis. Para ele, *a epidemia fornecia o material; a necessidade, o estímulo à pesquisa* (FLECK, 2010, p. 41).

Assim, a formação de um coletivo de pensamento passa por um conjunto de tessituras complexas, no qual atuam diversas forças que incluem adesão individual do pesquisador ao coletivo, mas também as forças externas a ele, as quais se constituem em um *emaranhado, muito pouco imediato e muito condicionado pela cultura* (FLECK, 2010, p. 76, grifos do autor).

O resultado dessa evolução e da consolidação da Psicologia Cognitiva é destacado nas suas aplicações à Educação. É cabível lembrar, segundo Coll *et al* (2004), que, em relação à Psicologia da Educação, suas aplicações à educação e ao ensino remetem a períodos anteriores, de modo que a área da educação recebeu, mesmo antes da psicologia científica, uma crença exacerbada de sua aplicabilidade como solução para a melhoria do ensino:

A existência da psicologia da educação como uma área de conhecimento e de saberes teóricos e práticos claramente identificável, relacionado com outros ramos e outras especialidades da psicologia das ciências da educação, mas ao mesmo tempo distintos delas, tem sua origem na crença racional e na convicção profunda de que a educação e o ensino podem melhorar sensivelmente com a utilização adequada dos conhecimentos psicológicos. Tal convicção, que tem suas raízes nos grandes sistemas de pensamento e nas terias filosóficas anteriores ao surgimento da psicologia científica, foi objeto de múltiplas interpretações. De fato, por trás do acordo generalizado de que o ensino pode melhorar sensivelmente, se formem aplicados corretamente os princípios da psicologia, existem profundas discrepâncias (COLL; MARCHESI; PALACIOS, 2004, p. 19)

Essa reflexão, apresentada por Coll *et al*. (2004), aponta, por um lado, para um dos fatos fundamentais em relação à Psicologia da Educação e à orientação da Psicologia Cognitiva, como instrumental teórico para explicar os mais diversos fenômenos nas mais distintas áreas. Ou seja, a forte crença a respeito da aplicabilidade da Psicologia da Educação aos contextos educacionais é assumida também como modelo para a discussão de fenômenos em outros campos, o que não foi diferente com a Didática de modo geral e também com a Didática da

Matemática. Porém, por outro lado, sinaliza que a Psicologia da Educação não encerra sua história tão somente na Psicologia Cognitiva.

Em nossa tese, assumimos que a Psicologia Cognitiva e suas aplicações ao ensino e educação, enquanto coletivo de pensamento, correspondem a uma visão dominante em torno da cognição, mas não a única. Uma das principais características desse coletivo é assumir a cognição como um processo individual e mental. Porém, dada a complexidade do fenômeno cognitivo, e a natureza plural da Psicologia, compreendemos que esse pensamento dominante não é único, nem poderia ser pela natureza intrínseca da própria Psicologia.

Assim cabe questionarmos: de onde apresentaremos argumentos teóricos para justificar a possibilidade de analisar a dimensão psicológica a partir das noções da TAD? Que outras formas de conceber a cognição podemos ter, além da explicação fornecida pelo coletivo de pensamento predominante em torno da cognição?

A resposta a essas questões pode ser ampla, se considerarmos, por exemplo, que nas últimas décadas têm sido crescentes ramos dentro da própria Psicologia Cognitiva que se permitem olhar para a cognição de modos diferentes do que é usual.

Coll *et al.* (2004) relatam que na Psicologia da Educação pelo menos, duas abordagens distintas sobre o entendimento do desenvolvimento e da aprendizagem podem ser evidenciadas. A primeira é a abordagem que identifica a aprendizagem como fruto de processos internos às pessoas, portanto, individuais e subjetivos. A outra, ao contrário, reconhece que aprendizagem é resultado de processos externos às pessoas, como resultado interação com o outro, isto é, da intersubjetividade.

Novamente, reportamo-nos a Bachelard (1996) e as suas orientações sobre a necessidade de nos livrarmos das posições extremas. Embora em sua obra Bachelard (1996) se referisse aos extremos entre as posições racionais e empiristas, para nós, a lição é que, entre as posições mais radicais de cada abordagem, há sempre a possibilidade de olharmos para o que há entre esses extremos. O mesmo ocorre na Psicologia:

a separação entre esses processos de desenvolvimento e os processos de aprendizagem não está absolutamente nítida como essas duas posturas dão a entender. Certamente, os processos de desenvolvimento têm uma dinâmica interna e respondem a diretrizes até certo ponto universais (...) entretanto a forma e inclusive a orientação tomada por essa dinâmica interna é inseparável do contexto em que a pessoa em desenvolvimento está inserida e da aquisição de saberes culturais específicos. (COLL *et al.*, 2004, p.36)

Como exemplo, podemos citar que um ponto em comum que tem ampla presença nas principais teorias que se prestam a explicar a aprendizagem atualmente é o reconhecimento de

que ela demanda um processo de construção ativa. Sem nos prendermos a denominações, observaremos que, de modo progressivo, nas últimas décadas, há um entendimento de que a cognição e o desenvolvimento da pessoa é um processo ativo, sempre construído, seja de um ponto de vista interno e individual, seja pelo fruto das interações ativas desse sujeito no meio histórico e social em que vive.

Radford (2011) aponta que essa premissa está assentada na posição de Immanuel Kant, para quem o indivíduo não se resume ao pensador solitário, cujas verdades matemáticas são decorrentes da atividade mental, algo próximo do pensamento cartesiano, tampouco se resume a um agente passivo que depende das informações sensoriais externas, como sugerem as premissas do empirismo. Para Kant, o indivíduo seria uma espécie de artesão do seu próprio conhecimento. Esse pensamento corrobora de forma adequada com o contexto histórico e social em que se desenhava a aurora da era moderna a partir da emergência do capitalismo e dos ideais iluministas que contrastavam com a necessidade de oposição às epistemologias que concebiam o conhecimento como dado ou simplesmente recebido, mas iluminado culturalmente. (RADFORD, 2011).

Embora ponto de encontro entre diferentes abordagens contemporâneas, a premissa da construção ativa em relação à cognição tem na sua natureza a heterogeneidade como uma de suas principais características:

De fato, muitos “construtivismos” diferentes são possíveis. A ideia de construção está presente não apenas nas obras de Piaget e Vygotsky, mas também por exemplo, na de Carl Rogers (construção da pessoa humana e das relações interpessoais) e na Paulo Freire (construção do homem novo, livre, consciente de sua historicidade; construção do saber e da cultura como expressões dos anseios e expectativas das comadãs populares). Como bem se vê, são vertentes bastante diferenciadas, todas compartilhando da ideia de construção. (BASTOS, 1998, p. 9).

Assim como ocorre com a premissa da construção, ou seja, de que a aprendizagem se dá por meio de processos ativos, existem diversas outras categorias assumidas nessas abordagens que ora correspondem a pontos de aproximação, ora a pontos de distanciamentos.

Lave e Packer (2011), ao analisarem o “cotidiano” como categoria presente explicitamente ou implicitamente nas abordagens cognitivistas clássicas e também naquelas que advindas do conexionismo, apontam também esses fenômenos de aproximação ou distanciamento. A análise ontológica feita pelos autores destaca que o cotidiano está presente tanto em abordagens das ciências cognitivas, na própria Psicologia Cognitiva, assim como em abordagens clássicas do desenvolvimento da aprendizagem humana, como a Teoria de Piaget. Na visão dos autores, são exatamente os usos que se fazem desta categoria que definiram a sua

fecundidade, seja para explicar os fenômenos que as teorias se prestam a analisar, seja para justificar os posicionamentos teóricos.

Na análise das ciências cognitivas e da teoria de Piaget, Lave e Packer (2011) revelam que embora haja tentativas de distanciamento sobre como a cognição ocorre, ou seja, nas ciências cognitivas predomina o modelo computacional, e na abordagem piagetiana o desenvolvimento cognitivo assume o carácter epistémico-genético, é na natureza dualista das relações entre a concepção de mundo e sujeitos, assumidas por essas abordagens, que o cotidiano as aproxima, visto que o conhecimento a ser adquirido é sempre um conhecimento científico. Há, portanto, sempre uma necessidade de refinamento do conhecimento, de modo que as experiências cotidianas são consideradas em plano inferior. Assim, “os defensores de cada uma dessas teorias considerem a outra muito diferente, inclusive opostas. Podem ser estranhos companheiros de cama. No entanto, compará-las nos leva ao nível dos supostos subjacentes no qual resulta em similaridades fundamentais.”²⁰ (LAVE; PACKER, 2011, p. 13, tradução nossa).

Numa oposição diametral em relação ao papel do cotidiano na cognição humana, está outro conjunto de abordagens que concebem a cognição humana como um processo que emerge das práticas coletivas. Nesse caso, a aprendizagem é ubíqua às atividades sociais (LAVE; PACKER, 2011).

Radford (2011) também destaca que boa parte das teorias que tratam sobre o ensino e aprendizagem diferem entre si, a partir das concepções do que seja o conteúdo do aprendizado, o aprendiz e como ocorre a aprendizagem. Em relação à última categoria, ou seja, o problema de como ocorre a cognição, a premissa da construção é assumida, mas a dimensão do papel social muitas vezes é reduzida a uma dimensão externa na qual a atividade cognitiva dos indivíduos, nesse caso, os alunos, tem que se adaptar para aprender.

Por outro lado, perspectivas como cognição situada, cognição compartilhada, aprendizagem difusa, atividade situada, dentre outras, têm destacado o interesse pelo cotidiano e pelas práticas que por ele são tecidas. Essas abordagens, com forte influência da Psicologia Cultural e da Antropologia, reconhecem que a aprendizagem não se dá apenas em contextos formais, de modo que a transferência das aprendizagens adquiridas no ambiente escolar é uma ilusão (LAVE, 1988).

²⁰ los defensores de cada una de estas teorías consideran a la otra muy diferente, incluso opuesta, a la propia. Pueden ser extraños compañeros de cama. Sin embargo, compararlos nos lleva al nivel de los supuestos subyacentes en el cual resultan tener similitudes fundamentales.

Para Lave e Packer (2011), à medida que o cotidiano ganha destaque nessas abordagens, elas se aproximam dos estudos antropológicos, ou seja, do discurso social, assim “a vida cotidiana tem adquirido uma nova relevância e popularidade com estes esforços para desenvolver enfoques sobre a cognição, o pensamento e os discursos mais próximos do social e dos estudos antropológicos da prática social”²¹ (*Ibid*, p.12, tradução nossa).

Assim, retornamos ao ponto inicial desse capítulo onde assumimos a metáfora das lentes para nos guiar na compreensão e construção dos fenômenos que queremos estudar. Observamos, inicialmente, que o tema da cognição é carregado de discussões e sentidos que levam, inevitavelmente, a uma pluralidade de abordagens e entendimentos sobre o tema. No que tange à Psicologia Cognitiva, há características tácitas de um coletivo dominante que compreenda a cognição como processo individual e mental. Essa mesma premissa é assumida em muitas pesquisas e abordagens, com amplas reflexões na pesquisa e no meio educacional, como assevera Cool *et al* (2004).

À medida que avançamos na discussão, veremos que mesmo na psicologia cognitiva há discordância ou sentidos diferentes para as categorias que são assumidas como premissas nas diferentes abordagens. Vimos isso com a premissa de que a cognição é processo de construção e também com a categoria de cotidiano. Mas qual o nosso interesse nesta última categoria?

O estudo de Lave e Packer (2011) indica que a ontologia de certas categorias permite analisar pontos de aproximação ou distanciamento entre diferentes abordagens. Assim o diálogo que perseguimos não é torno das áreas, mas dos objetos comuns a essas áreas. Em nosso caso, a cognição é o elo que une esses campos distintos do saber e nos impulsiona a colocá-los em diálogo

Para Lave (1988), a dimensão psicológica não é negada em sua teoria, inclusive o indivíduo aparece como sujeito e é na sua ação no mundo e com o mundo que ele é construído. Assim, ao realizar uma atividade, há, como veremos mais à frente, investimentos por parte dos indivíduos. Esses investimentos envolvem significados, sentimentos, expectativas, dentre outros aspectos.

Cazarotto (2015) defende um posicionamento semelhante ao destacar que a Antropologia e a Psicologia tem o homem como uma dimensão comum de estudo e é na

²¹ “La vida cotidiana” ha adquirido una nueva relevancia y popularidad con estos esfuerzos para desarrollar enfoques de la cognición, el pensamiento y habla más cercanos a lo social, y en los estudios antropológicos de la práctica social.

complexidade dos fenômenos em torno do homem e suas práticas que o diálogo entre uma área e outra do saber pode acontecer.

Para nós, além do cotidiano, trataremos a “atividade” como outra categoria que permite, em nosso entendimento, um diálogo teórico entre as três áreas. Tanto na TAD quanto na aprendizagem situada de Lave e Wengel (1991) as práticas desenvolvidas pelos sujeitos têm um papel fundamental. Para Lave (1988) as práticas e a participação dos sujeitos traduzem o fenômeno da aprendizagem, para Chevallard, Bosch e Gascón (2001) fazer matemática, se constitui de engajar-se na atividade de estudo da matemática, de modo que o didático é denso nessa atividade.

Notemos que o cotidiano na forma referida por Lave e Packer (2011) é também uma prática social que envolve a relação dialética entre o conhecimento e o ser, ou seja, onde ontologia e epistemologia se inter-relacionam:

Considere o exemplo de uma sala de aula. As pessoas que conhecemos vivem todos os dias como professores e alunos em um ambiente local em que negociaram, com diferentes graus de status e poder, formas rotineiras de passar horas, um estilo usual e detalhes mundanos de suas tarefas e responsabilidades. Estes são os componentes de uma vida cotidiana "crua"; suas conotações negativas não devem nos enganar. Mas, ao mesmo tempo, podemos arranhar a superfície e encontrar uma vida "constitutiva" diária no trabalho: a identidade de "professor" e "aluno" continuamente testada e redefinida; a interpretação do "trabalho" e do "sucesso" e do "fracasso" prepara os alunos para a reprodução do mundo social mais amplo do trabalho e do consumo ao qual entrarão após a escola. Os ditames das práticas do espaço organizado e do tempo influenciam os corpos dessas crianças e as necessidades, desejos e apetites que experimentam. Considere as relações ontológicas: professor e aluno são identidades definidas de forma relacional; A "qualidade" do trabalho produzido na classe identifica a "capacidade" de um aluno; o mundo da sala de aula gira em torno do "bom" e "mau", "correto" e "incorreto" (LAVE; PACKER, 2011, p. 21, tradução nossa)²².

²² Consideremos el ejemplo de un salón de clases. Las personas que encontramos allí viven todos los días como profesor y estudiantes en un entorno local en el que han negociado, con diferentes grados de estatus y poder, las formas rutinarias de pasar las horas, un estilo habitual, y los detalles mundanos de sus tareas y responsabilidades. Éstos son los componentes de una “cruda” vida cotidiana; sus connotaciones negativas no nos deben inducir a error. Pero al mismo tiempo podemos rayar la superficie y encontrar una vida cotidiana “constitutiva” en el trabajo: la identidad de “maestro” y “estudiante” continuamente puesta a prueba y redefinida; la interpretación de “trabajo” y “éxito” y “fracaso” prepara a los estudiantes para la reproducción del mundo social más amplio de trabajo y consumo al que entrarán después de la escuela. Los dictámenes prácticos del espacio y tiempo organizados influyen los cuerpos de estos niños y las necesidades, deseos y apetitos que experimentan. Consideremos las relaciones ontológicas: profesor y alumno son identidades definidas relacionamente; la “calidad” del trabajo producido en la clase identifica la “capacidad” de un estudiante; el mundo del salón de clases gira en torno a los ejes ‘bueno’ y ‘malo’, ‘correcto’ e ‘incorrecto’.

No exemplo dado por Lave e Packer (2011) há, ao menos, duas características a serem destacadas: a primeira diz respeito ao grau de profundidade com o qual o cotidiano é tomado por esses autores. A segunda, em decorrente dessa profundidade, diz respeito às possibilidades de releituras do exemplo, tanto do ponto de vista da Didática da Matemática, da Antropologia quanto de um olhar psicológico que se permita enxergar no cotidiano da sala de aula um emaranhado de relações que sugerem relações individuais, mas também coletivas nesse universo rotineiro da sala de aula.

Ainda sobre o cotidiano como dimensão constitutiva, chamamos atenção para o fato de que, seja qual for o contexto, há sempre nessa tessitura de relações atividades que correspondem às práticas sociais naquele ambiente. A nosso ver, no universo da sala de aula, por exemplo, as atividades propostas compõem o cerne da vida escolar, é em torno dessas atividades e do seu cumprimento que são tecidas as relações institucionais entre sujeitos e objetos institucionais.

Para Lave (2015), toda atividade, como manifestação de uma prática social, é uma atividade situada. O mesmo ocorre com aprendizagem:

Teoricamente central na teoria da prática social é a ideia de que toda atividade (o que seguramente inclui a aprendizagem) é situada nas – feita de, é parte das – relações entre pessoas, contextos e práticas. Isso nos levou às noções de que a aprendizagem é situada em complexas comunidades de práticas (culturais e mutantes, como parte do processo histórico que constitui a vida social). As coisas são constituídas por, e constituídas como, as suas relações; e assim, produção cultural é aprendizagem que é produção cultural (LAVE, 2015, p. 40).

Esse reconhecimento da atividade como central no processo de aprendizagem é destacado também por Radford (2011). Partindo da noção de atividade de Leontiev, onde o objetivo da atividade é um componente essencial, ele alerta que, no caso da sala de aula, as atividades cumprem um papel que não se encerra na aquisição de novos conceitos ou na resolução de problemas, mas conduzem ao estabelecimento de uma dialética entre conhecer e ser. Nas palavras do próprio Radford (2011), cada atividade tem em si objetivos que influenciam o processo de ensino e de aprendizagem:

Mesmo que o objetivo da atividade em sala de aula seja claro para o professor, isso não necessariamente é o caso dos alunos. Se o objetivo ficasse claro para eles, então não haveria nada para eles aprenderem. Dentro do projeto didático na aula, o professor sugere uma série de tarefas matemáticas para os alunos de modo que um determinado objetivo possa ser alcançado. Resolver estes problemas torna-se um fim que direciona as ações dos alunos. (...) Por trás do objetivo da aula, encontra-se um objetivo maior e mais importante – ou seja, a elaboração, por parte do aluno, de uma reflexão definida como um relacionamento comunitário e ativo com sua realidade histórico e cultural. (RADFORD, 2011, p. 327).

Notemos que a descrição da atividade, em termos de objetivos a serem cumpridos, mobiliza outras noções, como a própria noção de ação que é direcionada pela motivação da atividade, isto é, seu fim. Além disso, a atividade e o seu cumprimento são feitas pelo esforço comunitário, pois cada estudante, dotado de uma realidade histórica e social, reflete sobre sua prática. O pensamento seria, portanto uma *praxis cogitans* (RADFORD, 2011).

Vale lembrarmos que Radford (2011) está se referindo a sua explicação teórica sobre o ensino e a aprendizagem em sua teoria da objetificação, que é cunhada em termos não mentalistas e com base em um viés antropológico, como explica o próprio autor:

(...) uma teoria de ensino e aprendizagem que tem sua inspiração em algumas escolas antropológicas e histórico-culturais do conhecimento – a teoria da objetificação do conhecimento. Nesta teoria, o problema da aprendizagem é formulado de modo a evitar visões racionalistas ou individualistas da cognição e interação social. A teoria da objetificação do conhecimento, na verdade, postula o problema da aprendizagem como um processo social por meio do qual os alunos se tornam progressivamente familiarizados com as formas culturais de reflexão. (RADFORD, 2011, p. 311).

Ainda sobre a noção de atividade, Kozulin (2002) nos explica que mesmo a teoria da atividade de Leontiev passa por evolução. A principal evolução é o movimento crescente, de acordo com autor, em reconhecer o papel da mediação semiótica nas atividades. Isso significa um reconhecimento de que a Teoria da Atividade retorna ao pensamento original de Vygotsky, para quem a atividade assumia dupla função de explanação, mas também de objeto de estudo concreto, ou seja, atividade é prática coletiva, mas também manifesta representações semióticas (KOZULIN, 2002).

Para nós, a noção de atividade destacada por Radford (2011) serve de base para a compreensão do papel da atividade conforme pensada também por Lave (1988) e Lave e Wenger (1991), para quem a atividade assume um papel central na dialética das práticas sociais. Essa dialética envolve a ação do homem e a mobilização de expectativas e de negociação de significados que constituem a própria prática social. Nessa prática, que é traduzida pelo cotidiano e constituída por atividades, não há como dissociar o entrelaçamento das dimensões psicológicas, biológicas e sociais, já que a ação humana na construção do mundo e com mundo é entendida como um ato integral.

Assim, atividade e cotidiano emergem, em nosso trabalho, como categorias que pensamos possibilitar uma leitura da cognição como uma prática social. Nesse entendimento, a prática social, traduzida em atividades, é passível de análise em suas dimensões psicológicas, antropológicas e didáticas. Aqui, apoiamo-nos em Lave (1998), Lave e Wenger (1991), Radford (2011), Mauss (1935; 2004) e Douglas (1986; 2007).

Em relação ao valor que a categoria “atividade” assume para a Didática da Matemática, Chevallard, Bosch e Gascón (2001) deixam claro que a atividade matemática, ou o fazer matemática, é caracterizado como um processo que envolve diversas dimensões da atividade matemática:

Caracterizamos o fazer matemática como um trabalho de modelagem. Esse trabalho transforma o estudo de um sistema não-matemático, ou um sistema previamente matematizado, no estudo de problemas matemáticos que são resolvidos utilizando de maneira adequada certos modelos. Podemos destacar três aspectos desse trabalho: a utilização rotineira de modelos matemáticos já conhecidos; a aprendizagem (e o eventual ensino) de modelos e da maneira de utilizá-los; e a criação de conhecimentos matemáticos, isto é, novas maneiras de modelar os sistemas estudados. (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p.56)

Salientamos que o “estudo” tem um sentido muito mais amplo nessa citação, do que estamos acostumados a ouvir e até interpretar. Para os autores, o estudo é um processo didático que não se limita ao ensino e à aprendizagem, mas os abarca. De maneira geral, o estudo não se encerra na sala de aula e conseqüentemente a aprendizagem também não (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001).

Antes de encerrarmos esta seção, vale salientarmos que os argumentos por nós elaborados em favor da possibilidade do diálogo multidisciplinar em torno da cognição seguem a orientação teórica daqueles que defendem que Psicologia e Antropologia, embora como finalidades distantes, podem estabelecer zonas de diálogos (TOREN, 2012; FONSECA, 2004; CAZAROTTO, 2015; SOUZA, 2007).

Assim, optamos por problematizar a cognição do ponto de vista da evolução da Psicologia enquanto conjunto de sistemas, destacando, sobretudo, a emergência da Psicologia Cognitiva como coletivo de pensamento em torno do fenômeno cognitivo e alguns de suas características mais gerais.

Cazarotto (2015) nos lembra que, assim como ocorre com a Psicologia, o processo evolutivo da Antropologia não foi menos conflitante. Longe de reclamar consensos entre as áreas, quem advoga pelo diálogo aponta para a complementariedade de pontos de vistas para explicar fenômenos complexos como a cognição. Em nossa pesquisa, seguimos apresentando o papel das noções ou categorias que escolhemos, como agentes que podem aproximar, distanciar ou, implicitamente, determinar semelhanças entre abordagens, muitas vezes, consideradas, até certo ponto, opostas.

Por essa razão, elegemos a noção de cotidiano como prática social onde se realizam atividades como nosso ponto de encontro para pensar a cognição a partir da ótica psicológica, antropológica e da Didática da Matemática.

O exercício segue, como já dissemos, a orientação de autores que advogam em favor desse diálogo multidisciplinar. Cazarotto (2015), por exemplo, elegeu as linguagens que emergem nos rituais como um terreno para esse diálogo:

Não é difícil, no caso da narrativa, perceber que através das palavras, das situações e mesmo dos movimentos tanto de dimensões às quais podemos chamar de psíquicas (ainda que devamos ter em mente enorme variedade dos instrumentais das abordagens psicológicas), como outras às quais podemos chamar de culturais. Com a simbólica ainda se pode entrever, com razoável facilidade, outras dimensões do mundo social: a economia, a religiosidade, a vida cotidiana etc. Elas também estão imersas nas dimensões que vimos acima, de tal modo que referência às redes de conceitos apresentada pode ser para elas também aclaradora. Com isso, passa a ser evidente que estamos lidando com um fenômeno complexo que comporta facilmente diversas abordagens, não só da psicologia e antropologia. (CAZAROTTO, 2015, p. 128).

Como vemos, é na escolha de dimensões complexas que se abrem necessidades e possibilidades para o diálogo multidisciplinar. Assim como Cazarotto (2015), Fonseca (2004) enxerga na complexidade dos fenômenos um terreno fértil para encontros, respeitando, é claro, os limites entre métodos e epistemologias próprias de cada área.

Para nós, a prática social que se desenvolve no estabelecimento de um sistema didático é um fenômeno didático complexo, de modo que é na ação dos estudantes na atividade de fazer matemática no seio institucional que procuramos compreender elementos sobre a cognição e sua dimensão psicológica.

A TAD como teoria didática volta seu foco para as condições e restrições que se manifestam na difusão dos saberes (CHEVALLARD, 2011). Ao situar a Matemática como uma prática humana, ela reconhece a atividade de estudo da matemática como uma prática social que assume diferentes configurações nas instituições, do ponto de vista do saber, como algo que é produto dessas práticas. As instituições como dispositivo social total abrigam sistemas didáticos, nos quais diversos atores, em diferentes posições, mantêm diferentes relações com os objetos de saber em jogo que vivem nessas instituições. (CHEVALLARD, 1996; 1999; 2007).

O cotidiano (prática) institucional implica em um processo de assujeitamento por parte dos indivíduos (engajamento/entrada na instituição) que podem ser sujeitos de inúmeras instituições (inclusive de forma simultânea). É nessas sujeições ao longo da vida que há

constituição do ser como uma pessoa no mundo (identidades do ser), de modo que o indivíduo é invariante e a pessoa é mutável (CHEVALLARD, 1996).

É na participação dos sujeitos na instituição que suas relações com determinados objetos do saber podem passar a existir ou ser modificadas. A aprendizagem é sempre um ato relacional que concebe componentes públicos (ações coletivas e práticas observáveis) e privados (relação pessoal do sujeito). O universo cognitivo do sujeito é formado pelo conjunto de relações que vão sendo tecidas nas sujeições institucionais ao longo da vida. Instituição e sujeito mantêm uma relação simbiótica de modo que as instituições influenciam na constituição do universo cognitivo, enquanto estes são a razão de ser da própria instituição (CHEVALLARD, 2009).

Entendemos que a atenção ao saber e a sua ecologia, embora centre a atenção da teoria na dimensão epistemológica, não exclui a ação dos sujeitos na atividade de estudo. A dinâmica dos sistemas didáticos e a organização das práticas institucionais (praxeológicas matemática e didáticas) podem ser entendidas como ação dos sujeitos sobre esses objetos, de modo que essa ação não é passiva, nem neutra, mesmo em sistemas onde o protagonismo dos sujeitos é deixado em segundo plano. Aplicar uma técnica, realizar uma tarefa são sempre um ato carregado de significados, de expectativas e de negociações. Um indício deste entendimento é o reconhecimento de que, embora falemos de praxeologias compartilhadas no universo institucional, é possível identificar praxeologias próprias que vão sendo construídas, ou seja, os sujeitos no seio das instituições constroem suas próprias histórias dentro do universo coletivo institucional. Eles se assujeitam em uma instituição, mas, ao mesmo tempo, são parte da construção dessa instituição. Além disso, destacamos que no universo ecológico os saberes sofrem influências múltiplas, como no caso da codeterminação²³ imposta pela sociedade em seus diversos níveis.

Cognição e prática nos parecem estar em uma dialética natural entre as instituições, seus sujeitos e a sua relação com os objetos institucionais. De fato, para Engeström (2016) para quem essas dialéticas levam a contradições, ao se referir às preocupações da Teoria da Atividade Histórico Cultural, cola que essa é uma questão viva e que merece atenção. Em virtude disso, é que, na subseção seguinte, apresentamos os aspectos teóricos da cognição situada, cujas as raízes epistemológicas se assentam também na perspectiva histórico-cultural de Vigotsky.

2.1.2 COGNIÇÃO SITUADA: OUTRO OLHAR SOBRE O APRENDER

²³ Ver Chevallard (2002)

Finalizamos a subseção anterior, destacando que a noção de cotidiano e de atividade como práticas sociais no seio das instituições, será, para nós, categoria de análise que servirá como o ponto de encontro para diálogo teórico em torno da cognição.

A ênfase dada na seção anterior em torno da Psicologia²⁴ e suas problemáticas no que se refere à cognição serviu-nos como cenário para justificar a nossa escolha teórica como parâmetro para discutir a cognição.

A teoria da aprendizagem situada de Lave se insere no seio da antropologia social. Ela assume como principal premissa o fato de que “a cognição é um fenômeno obíquo às práticas sociais e se constitui “no agir, “*in situ*”. Por isso, exige que partamos do princípio de que os modos de pensar e as formas de conhecimento são fenômenos histórico, social e culturalmente situados” (LAVE, 1996, p. 111).

A partir de seus estudos etnográficos de 1973 a 1978, em comunidades das etnias Vai e Gola na Libéria, no continente africano, Lave elabora suas primeiras reflexões sobre a cognição como uma prática social. É no universo do cotidiano daqueles povos que ela vai teorizar sobre o papel dos mestres e dos aprendizes nas comunidades. Nos anos seguintes, seu interesse por espaços considerados pela literatura científica como “não formais” a leva, juntamente com seus colaboradores, a analisar as pessoas em contextos distintos como donas de casa indo ao supermercado e pessoas participantes de programas rigorosos de dieta. O foco desses estudos era observar como os processos de cognição se desenhavam nessas diferentes práticas, tendo o uso da aritmética como pano de fundo. Esses trabalhos estavam agrupados no projeto sobre o uso de matemática por adultos (PMA).

Esses estudos culminaram com a consolidação dos elementos teóricos que constituem a sua teoria da cognição situada. Na síntese de suas reflexões, Lave (1988) crítica o modelo hegemônico sobre a cognição, algumas já apresentadas na seção anterior. Dentre as principais críticas, estão as dicotomias entre corpo-mente, o tratamento a-histórico e individualista na explicação do fenômeno cognitivo, bem como o contexto dos experimentos realizados. Sobre este último aspecto, a autora destaca que “nos experimentos cognitivos tradicionais os resultados obtidos pelos sujeitos no laboratório se comparam com um modelo normativo, um resultado meritocraticamente ideal”²⁵ (LAVE, 1988, p. 30, tradução nossa).

²⁴ Optamos, ao menos nessa fase da pesquisa, em não fazer uma revisão da literatura mais longa em torno da psicologia cognitiva, haja que nosso foco é na cognição situada, assim os elementos apresentado tinha o intento de situar a área, para que pudéssemos justificar as nossas escolhas em relação a cognição.

²⁵ En los experimentos cognitivos tradicionales los resultados obtenidos por los sujetos en el laboratorio se comparan con un modelo normativo, un resultado meritocraticamente ideal.

Essa crítica aos experimentos que se encerram numa tradição funcionalista da Psicologia reflete o que Lave (1988) chama de mito da transferência de aprendizagem. De modo geral, ela nos explica que esse mito se baseia na crença de que a aprendizagem é transferida entre situações diferentes, de modo que o treino adequado da mente, especialmente aqueles que partem de sistemas formais, poderia permitir sua transferência a outros contextos. Segundo a autora, essa crença reside na metáfora da mente e seus conteúdos como uma caixa de ferramentas. As origens dessa explicação remetem ao pensamento de Thorndike e estão na base da Psicologia Funcionalista²⁶.

De acordo com Lave (1988), os estudos desenvolvidos no PMA vão mostrar que a transferência de aprendizagem não se concretiza em espaços com diferentes contextos. Ao tomar a aritmética como conteúdo central dos seus estudos, ela observa que a matemática assume formas diferentes em situações distintas: “A especificidade da prática aritmética em uma situação e sua descontinuidade entre situações constituem uma base provisional para derivar explicações sobre a cognição como nexos da relação entre a mente e o mundo em que ela opera”²⁷(Lave, 1988, p.17, tradução nossa)

Em síntese, Lave (1988) concebe que a cognição é um fenômeno social complexo. É na prática cotidiana que se observa que a cognição se distribui de forma ampliada entre a mente, o corpo e as atividades dos entornos. Essas atividades se desenham culturalmente, e estão incluídas nos processos intersubjetivos, ou seja, leva-se em conta o papel das inter-relações entre sujeitos no processo.

Assim, a epistemologia na qual repousa a compreensão da aprendizagem situada desloca o foco do indivíduo para sua ação social, de modo que o conhecimento assume um caráter relacional. É nas práticas sociais que a aprendizagem se manifesta e constitui a si mesma como própria prática através de um processo permanente de negociação de significados pelos sujeitos engajados na aprendizagem de maneira que “agente, atividade e mundo são mutuamente constituintes” (LAVE; WENGEL, 1991, p. 33)²⁸.

Vale ressaltarmos que as bases epistemológicas da teoria da aprendizagem situada estão assentadas na corrente histórico-cultural de Vygotsky, especialmente com elementos da teoria da atividade de Leontiev, no materialismo histórico da práxis, tendo outras influências como

²⁶ Ver por exemplo Heidebrer (1981).

²⁷ la especificidad de la práctica aritmética en una situación y la discontinuidad entre situaciones constituyen una base provisional para derivar explicaciones de la cognición como nexos de relación entre la mente y el mundo em el que ésta opera.

²⁸ agent, activity and world mutuallly constitute each other.

Bourdieu, Sahlins, Giddens, reunindo dessas fontes elementos para compreensão do que seja a prática social. Em relação às influências de Vygotsky, é importante destacarmos a diferença sutil entre a cognição como processo de internalização nos estudos da psicologia russa e a cognição como participação crescente nas práticas sociais (LAVE, 1988; LAVE; PACKER, 2011; LAGE, 2013; BATISTA, 2014).

O fato de descolar o foco do indivíduo também suscita críticas. Walkerdine (1997) apontava que o deslocamento do indivíduo para a análise da prática como um produto social implicava no abandono da subjetividade como unidade importante para analisar o fenômeno da cognição. Segundo a autora, o caminho percorrido por Lave e Wenger (1991), que partem da crítica ao paradigma da transferência do conhecimento e seguem até a noção do conhecimento e de identidade situada em uma prática, parece caracterizar que essa prática se apresenta de forma igual para todos, o que seria ilusão (WALKERDINE, 1997).

Lave (1996), por outro lado, argumenta que tratar a aprendizagem como uma prática social é um exercício que pressupõe enxergar os sujeitos, sejam eles mestres, sejam eles aprendizes, como participantes localizados em uma prática, sem descartar suas subjetividades, traduzidas por interesses, expectativas e significados. Enfim, é um processo que se assemelha ao trabalho do terapeuta com seus pacientes:

Nem o terapeuta nem o seu cliente (leia-se professores e estudantes) participam em sua atividade conjunta como sujeitos claramente localizados. O terapeuta assume a responsabilidade, via interpretação, de caracterizar a subjetividade dos clientes, dirigindo suas próprias ações aos clientes em termos daquelas interpretações. Quando chega a sua própria participação, o terapeuta a reduz a visão que está agindo em nome dos clientes, como se eles não tivessem razões situadas, interesses, objetivos, ou preocupações próprias que entram e afetam o que acontece.²⁹ (LAVE, 1996a, p. 158)

Para Lave (1996), a aprendizagem assumida por esse prisma não suprime o papel do indivíduo nem sua subjetividade. Pelo contrário, a referida autora assume que no seio de prática social a cognição é um processo de construção de identidades de modo que cada sujeito é localizado em sua prática. As implicações dessa visão para analisar o ensino formal, nas escolas

²⁹ Neither therapist nor client (read teachers and students) participate in their joint activity as clearly located subjects. Therapists take charge, via interpretation, of characterizing the subjectivity of the clients, and direct their own actions towards clients in terms of those interpretations. When it comes to their own participation, therapists reduce it to the view that they are acting on behalf of the clients, as if they had no situated reasons, interests, goals, or concerns of their own that enter into and affect what transpires.

por exemplo, é que professores e alunos são vistos como sujeitos localizados cujas inter-relações, entre si e com o mundo do qual são construtores, afetam esse processo.

Matos (1999) destaca que conceber a aprendizagem em uma perspectiva sociocultural exige a compreensão de que a cognição é sempre partilhada e o conhecimento está no seio das comunidades em que as pessoas estão engajadas. Vale ressaltarmos que para Lave (1988) o cotidiano é uma realidade constituinte da prática social, logo o cotidiano assume uma dimensão mais ampla. Desse modo, o próprio ambiente da sala de aula pode se constituir como uma prática cotidiana daquela instituição que chamamos de escola, ou seja, pensamos que o olhar sobre a cognição como fenômeno social complexo pode ser pensado em ambientes institucionalizados como a escola ou, em nosso caso, a licenciatura em matemática.

Um exemplo é o programa de pesquisa desenvolvido por Matos (1999) e colaboradores na Universidade de Lisboa. O Projeto Cultura, Matemática e Cognição – Pensar a Aprendizagem em Portugal e Cabo Verde assenta-se em uma visão segundo a qual a aprendizagem é assumida:

[...] como um fenômeno situado e construído socialmente representa uma mudança fundamental na forma de analisar a aprendizagem e tem potencialidades importantes nos modos como é encarada a aprendizagem matemática escolar. (MATOS, 1999, p. 67).

As impressões de Matos (1999) sobre as possibilidades de contribuição da teoria da cognição situada para pensar a aprendizagem no ambiente escolar é corroborada por Lave e Wenger (1991), porém com ressalvas. A primeira ressalva apresentada é que a teoria da cognição situada não é uma teoria da aprendizagem, no sentido tradicional. Ela não aspira em sua gênese a finalidades como aplicações ao ambiente escolar, pelo contrário, constitui-se em uma teoria sobre a cognição como fenômeno social complexo. Essa é uma das razões pelas quais seus estudos se concentram em espaços não formais:

Não falamos aqui sobre escolas de um modo substancial. Nem exploramos o que o nosso trabalho tem a dizer sobre a escolaridade. Evitar por hora o problema da aprendizagem na escola foi uma decisão consciente, que nem sempre foi fácil manter quando a questão se colocava em nossas discussões. Mesmo, que ainda mencionemos a escolaridade em vários pontos, temos evitado qualquer tratamento sistemático do tema.³⁰ (LAVE; WENGER, 1991, p. 39, tradução nossa)

30 We do not talk here about schools in any substantial way, nor explore what our work has to say about schooling. Steering clear of the problem of school learning for the present was a conscious decision, which was not always easy to adhere to as the issue kept creeping into our discussions. But, although we mention schooling at various points, we have refrained from any systematic treatment of the subject.

A maturação da construção teórica da antropologia social de Lave e de seus colaboradores sobre a cognição parte de uma tentativa de distanciamento do paradigma racional e funcionalista que permeava as explicações das ciências cognitivas e da psicologia sobre o fenômeno da cognição. Assim, a escola como instituição social se materializa no seu cotidiano como um espaço onde o modo hegemônico de conceber a aprendizagem e a cognição se manifesta de forma latente. Embora houvesse essa necessidade de distanciamento da instituição escolar e as aprendizagens que ali ocorrem, os autores nunca descartaram explicitamente a possibilidade de olhar a cognição como um fenômeno social acontecendo nesses espaços.

O programa de pesquisa citado por Matos (1999) em Portugal e Cabo Verde é um bom exemplo de pesquisas que utilizam a teoria da cognição situada como arcabouço teórico para refletir sobre a cognição e seus processos no ambiente escolar. As teses de doutoramento de Santos (2004) e Fernandes (2004), desenvolvidas no âmbito do referido programa, utilizaram a teoria como suporte para pensar a aprendizagem e a negociação de significados no ambiente escolar. Essas pesquisas corroboram as indicações de Lave e Wenger (1991), que vislumbravam essas possibilidades, embora esse não fosse seu interesse durante os primeiros anos de construção da teoria:

desta maneira, a análise da aprendizagem na escola, enquanto situada, requer uma visão de múltiplos níveis acerca de como o conhecimento e a aprendizagem são parte da prática social, um projeto fundamental por direito próprio. (...) tudo isso feito em nossas discussões sobre escolaridade muitas vezes tiveram contrastes e até oposições. Mas não queríamos definir nosso pensamento e construir nossa teoria sobre contraste dos argumentos sobre diferentes formas de educação, incluindo a escolaridade. Queríamos desenvolver uma visão de aprendizagem auto-sustentável ou mesmo, reservando a análise da escolaridade e outras formas educacionais específicas para o futuro.³¹ (LAVE; WENGER, 1991, p. 40, tradução nossa).

Esses usos da teoria da cognição situada para pensar a aprendizagem nesses ambientes requerem, em primeira instância, a reflexão sobre os princípios que norteiam a pesquisa, ou seja, é importante frisar o que assumimos como cognição, o nosso papel enquanto pesquisadores na compreensão desse fenômeno, bem como o papel da própria pesquisa na comunidade onde se desenvolvem os estudos. Isso indica, dentre outras coisas, que não se pode esperar neutralidade do observador ou mesmo a busca pela generalização de resultados. Pelo

³¹ Thus analysis of school learning as situated requires a multilayered view of how knowing and learning are part of social practice – a major project in its own right. (...) All this has meant that our discussions of schooling were often contrastive, even oppositional. But we did not want to define our thinking and build our theory by contrast to the claims of any educational form, including schooling. We wanted to develop a view of learning that would stand on its own, reserving the analysis of schooling and other specific educational forms for the future.

contrário, olhar para a cognição como um fenômeno social e situado é admitir que a aprendizagem é sempre relacional e está imbricada na tessitura dessas relações, assim a cognição é um fenômeno complexo que ocorre em dados contextos cotidianos através das atividades que se configuram como uma prática social. Enquanto pesquisadores, nós também nos relacionamos com essa teia e nossas relações também evoluem durante o processo.

Esse entendimento é partilhado por pesquisas que foram desenvolvidas aqui no Brasil, onde trabalhos que utilizaram as reflexões teóricas de Lave e Wenger (1991) para discutir a cognição tanto no ambiente escolar, como também na formação de professores que ensinam matemática, apontam para essa necessidade de reflexão (VILELA, 2006; OLIVEIRA; SANTOS, 2011; PAMPLONA, 2012; BATISTA, 2014).

Batista (2014) destacou, em sua tese de doutoramento, que a pesquisa que tem como referencial a aprendizagem situada exige um processo de reflexão constante. Para ele, pesquisar sobre a cognição como fenômeno social é aprender conjuntamente com os sujeitos. Seu intento na pesquisa era analisar a possibilidade da construção de comunidade de prática no ensino de Matemática em turma de 6º ano do Ensino Fundamental de Escola Pública:

Assim como Wenger (2001), acredito que a aprendizagem é concebida como um fenômeno social carregado de ideologias e valores que emerge da participação direta em uma prática social. Neste sentido, a escola como lugar social, em que ocorre intensa interação entre os sujeitos, possui práticas sociais específicas, as quais chamei, nesta pesquisa, de práticas pedagógicas. Para compor a comunidade de aprendizes do 6ºB, percebi que deveria incluir outras práticas pedagógicas, além daquelas de que já tinha me apropriado. Isso só foi possível a partir do envolvimento dos alunos num processo participativo que inclui a pessoa como um todo, ou seja, corpo, mente, emoções e relações sociais (WENGER, 2001). Para compor aquele conjunto de práticas, precisei ouvir, observar, conversar, discutir e negociar com os alunos. Os meus alunos, de certo modo, me guiaram em minhas buscas, mesmo não sabendo, e possibilitaram que eu resignificasse e reificasse minha ideia do que é ser professora na escola pública.

Para nós, a reflexão apresentada por Batista (2014) indica, dentre outros aspectos, a necessidade de situarmo-nos como pesquisadores que se propõem a observar o outro aprendendo, na certeza de que já não seremos os mesmos após esse processo.

Desse modo, ao reconhecer a cognição como fenômeno social e situado, reconhecemos que os estudantes, o professor e o saber em jogo e as relações que acontecem no cenário observado produzem uma prática social em torno da probabilidade que está ligada a toda uma estrutura social presente na formação de professores de matemática, da qual também fazemos parte.

Ao elegermos as práticas cotidianas em torno da formação de professores de Matemática, quando esses futuros professores lidam com a Probabilidade e suas noções, levantamos como hipótese o fato de que as práticas ali desenhadas ocorrem em uma perspectiva tradicional do ensino com privilégio da visão clássica do conceito de Probabilidade. No entanto, a hipótese seguinte é que os possíveis processos de negociação de significados, expectativas em relação ao saber, traduzidos em termos didáticos pela noção de contrato didático, de alguma forma implica mudança na relação desses estudantes com a Probabilidade. Ou seja, para nós, ocorre alguma aprendizagem naquele ambiente, uma vez que existe uma prática sendo desenvolvida. Por isso é na análise do funcionamento do sistema didático que esperamos levantar elementos para compreendermos essas aprendizagens. Isso indicaria, dentre outros aspectos, a possibilidade de olharmos para a cognição a partir das noções da TAD, que é um de nossos objetos central de estudo.

Assim que elementos teóricos a teoria da cognição situada oferece para entendermos a cognição como uma prática social?

Antes da obra de 1991, onde, em parceria com Etienne Wenger, Lave cunhou o termo “aprendizagem situada”, a autora lançou o livro *Cognition and Practice* em 1988. Nesse livro, estão as bases para sua antropologia social da cognição. A análise da cognição como produto das práticas sociais está assentada em três categorias:

1. Os agentes (pessoas em ação);
2. Os contextos (terrenos e seus entornos onde emergem as inter-relações na atividade, entre tempo e espaço, pessoas e objetos);
3. As atividades (produtos construídos dialeticamente pelos seus atores e seus contextos).

Essas categorias são dinâmicas e estão sempre inter-relacionadas: “as pessoas em ação, os terrenos e os seus entornos parecem implicados conjuntamente na própria constituição da atividade. A tarefa consiste em delimitar seu significado em termos mutuamente consistentes”³² (LAVE, 1988, p.183, tradução nossa).

Em sua teoria da prática social, Lave (1988) compreende que, para o estudo da cognição como prática social, é necessário entender outra categoria de análise: o estudo da ordem constitutiva. Para a autora, o cerne da investigação sobre a prática é conceber as relações entre estrutura sociocultural e prática, de modo que a ordem constitutiva é tomada como um nível de

³² las personas en acción, los terrenos y los entornos parecen estar implicados conjuntamente en la propia constitución de la actividad. La tarea consiste en delimitar su significado en términos mutuamente consistentes.

análise diferente do mundo como é experimentado. A ordem constitutiva é implicação mútua entre a cultura e os princípios que regem a organização do universo material e social. A cultura e seus significados, bem como a estrutura que compõe o universo social, só têm sentido quando observadas em sua dialética (LAVE, 1988).

Em termos práticos, pelo prisma da teoria da prática social de Lave, ao nos debruçarmos sobre as práticas cotidianas dos estudantes da licenciatura durante sua formação com o caso particular da Probabilidade, temos que distinguir dois níveis de análise. O primeiro é a cultura em torno dessa formação que está em uma relação dialética com a própria estrutura social dessa mesma formação. A cultura e seus sistemas de significação fazem parte da ordem constitutiva desse espaço social. O segundo nível é o próprio mundo cotidiano vivenciado que é materializado pela ação dos estudantes sobre as práticas sociais que ali são produzidas, ou seja, as atividades que eles vivenciam na licenciatura.

Para Lave (1988), a cultura é manifestada como sistemas semióticos de representação das práticas sociais, os quais são, portanto, um processo de construção histórica da vida social, de modo que sua relação com a aprendizagem é intrínseca porque quem aprende produz cultura e quem produz cultura aprende:

cultura “e” aprendizagem são sempre ambas as coisas, tanto uma quanto outra, indivisivelmente. É necessário muito e cuidadoso trabalho empírico e teórico para dar uma resposta adequada à questão relacional. A resposta não poderá ser como indivíduos engajados em atividades mentais adquirem cultura, ou como a cultura é transmitida aos indivíduos. Ao contrário, as mudanças nas práticas são processos culturais, coletivos, pessoais, situados e historicamente constituídos. (LAVE, 2015, p. 39).

Logo a cognição, embora se manifeste no mundo cotidiano e seja vivenciada através das atividades, também está mutuamente implicada na ordem constitutiva através da cultura, o sujeito que aprende também faz cultura, ou seja, contribui para constituição da própria ordem constitutiva. Sua ação no mundo nunca é uma ação neutra:

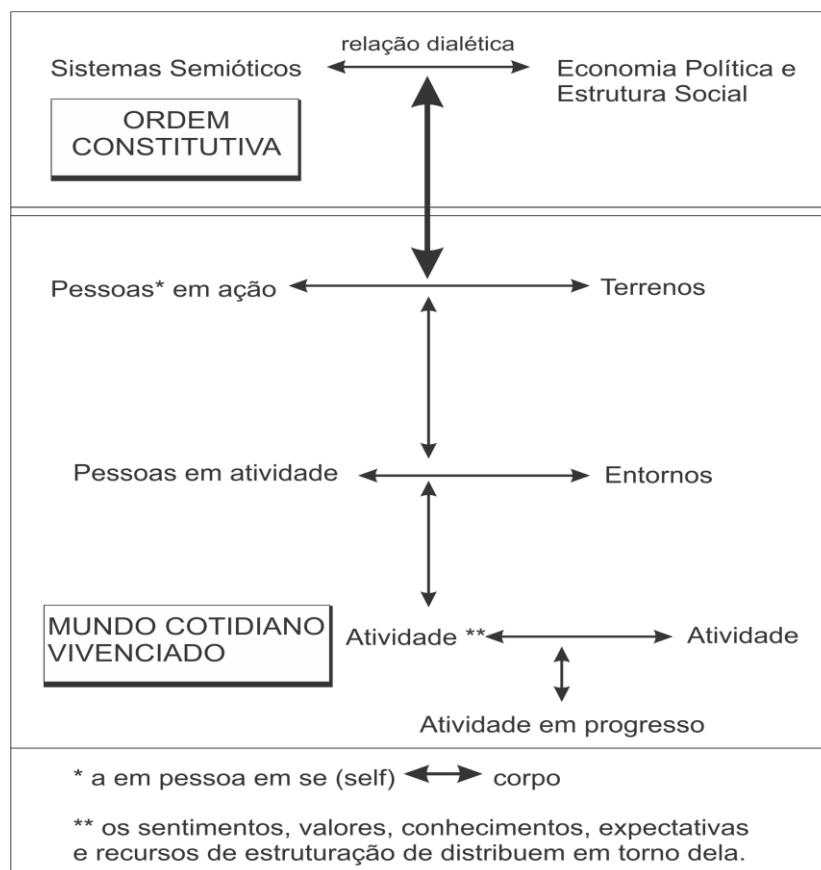
Se defina como se defina a cognição provavelmente estará localizada, segundo este esquema, na vivência do mundo e no mundo vivenciado mediante a atividade. A cultura, por outro lado, é um aspecto da ordem constitutiva. Deste ponto de vista, cultura e cognição pertencem a *diferentes níveis* de ordem sociocultural e se referem mutuamente (não diretamente nem de forma isolada) a ordem constitutiva e ao mundo cotidiano.³³ (LAVE, 1988, p. 190, tradução nossa, grifo do autor)

³³ Se defina como se defina la cognición probablemente estará localizada, según este esquema, en la vivencia del mundo y en el mundo vivenciado mediante la actividad. La cultura, por otra parte, es un aspecto del orden constitutivo. Desde este punto de vista, cultura y cognición pertenecen a diferentes niveles de orden sociocultural y se refieren mutuamente (no directamente ni de forma aislada) al orden constitutivo y al mundo cotidiano.

Queremos frisar que, a partir dessa descrição do enfoque teórico apresentado por Lave (1988), nos parece mais evidente o papel dos sujeitos como agentes em ação nos determinados contextos do mundo social. Nesse caso, a cognição emerge das atividades como um fenômeno situado e é na ação sobre as atividades que o sujeito manifesta sentimentos, valores, conhecimentos, expectativas e recursos de estruturação que pertencem ao domínio da cultura, isto é, da ordem constitutiva que é produzida por esses mesmos sujeitos no ato de aprender. Vale ressaltarmos que para Lave (1988) atividade manifesta a prática social, mas também é produto dela, ou seja, os sujeitos, ao mobilizarem seus sentimentos, expectativas também produzem essas atividades e é no processo de negociação de significados que as atividades passam a ter sentido como manifestação da prática social.

O quadro a seguir apresenta um resumo das modalidades de análises sugeridas por Lave (1988):

Figura 2 – Modalidades de análise da problemática dialética da Prática



Fonte: (LAVE, 1988, p.191, tradução nossa).

A noção de ordem constitutiva está diretamente relacionada às ideias de Bourdieu³⁴, para quem a dinâmica social admite uma estrutura que é forjada pelas ações dos indivíduos e seus grupos que interagem em um determinado espaço social, de modo a constituir a gênese dessa dinâmica social:

A dinâmica social se dá no interior de um /campo/, um segmento do social, cujos /agentes/, indivíduos e grupos têm /disposições/ específicas, a que ele denomina /habitus/. O campo é delimitado pelos valores ou formas de /capital/ que lhe dão sustentação. A dinâmica social no interior de cada campo é regida pelas lutas em que os agentes procuram manter ou alterar as relações de força e a distribuição das formas de capital específico. Nessas lutas são levadas a efeito /estratégias/ não conscientes, que se fundam no /habitus/ individual e dos grupos em conflito. Os determinantes das condutas individual e coletiva são as /posições/ particulares de todo /agente/ na estrutura de relações. De forma que, em cada campo, o /habitus/, socialmente constituído por embates entre indivíduos e grupos, determina as posições e o conjunto de posições determina o /habitus/. (THIRY-CHERQUES, 2006, p. 31), 2006, p.31).

Em Lave (1988), a compreensão da cognição como prática social situada denota, por um lado, o caráter relacional entre ação dos sujeitos nos terrenos e entornos do mundo cotidiano em que interagem e, por outro lado, as implicações dessa ação na própria composição da ordem constitutiva do espaço social onde essa prática cotidiana se desenha.

Bourdieu (1987), ao discutir as condições para o funcionamento de um campo, nos ajuda a entender o que está em jogo no cenário social onde esses agentes atuam:

A existência de um campo especializado e relativamente autônomo é correlativa à existência de alvos que estão em jogo e de interesses específicos: através dos investimentos indissolúvelmente econômicos e psicológicos que eles suscitam entre os agentes dotados de um determinado habitus, o campo e aquilo que está em jogo nele (eles próprios produzidos enquanto tal pelas relações de força e de luta para transformar as relações de forças constitutivas do campo) produzem investimentos de tempo, de dinheiro, de trabalho, etc. (BOURDIEU, 2004, p. 126-127).

Como vemos, em Bourdieu (1987), a própria tessitura social, denotada por ele pela existência dos vários campos, necessita do engajamento dos sujeitos. A mobilização de sua participação é uma condição necessária para a criação e a manutenção desses espaços sociais.

³⁴ Dois conceitos são centrais na obra de Bourdieu: o de *habitus* e o de *campo*. O *habitus* pode ser entendido, grosso modo, como os modos de ser e agir no mundo, composto de um ethos que seria os valores em estado prático, os quais regem a moral cotidiana; um hêxis, que remete a tudo que o corpo incorpora, isto é, posturas, expressões corporais; e, por um último, um *eidós*, que corresponde a um modo de pensar específico. Assim o *habitus* compreende a nossa forma de agir, corporal e materialmente, no mundo. O campo são os espaços que constituem o social. O *habitus* está sempre referido a um campo e está entre as relações implícitas que moldam as instituições e as ações visíveis desses atores (BOURDIEU, 2001).

Aqui, parece-nos emergirem com mais clareza as relações entre a cognição como uma prática social dos sujeitos e a ordem constitutiva na estrutura social, denotada por Lave (1988), ou seja, é no engajamento e participação social que as pessoas aprendem e, aprendendo, constituem a estrutura social.

Embora, desde seus estudos na Libéria, Lave já destacasse a cognição humana e, portanto, a aprendizagem como um processo social e historicamente situado, é somente a partir de 1991 que ela passa a teorizar com mais ênfase a aprendizagem como fenômeno situado. Juntamente com Wengel, Lave apresenta a aprendizagem como um processo de participação progressiva em comunidades de prática.

As palavras dos próprios autores nos ajudam a entender o sentido dado a participação periférica legítima (PPL) e comumente a sua imbricação com ideia de que essa participação, progressiva e engajada, se dá em uma comunidade de prática (CP):

A aprendizagem vista como atividade situada tem como característica central um processo que chamamos de participação legítima periférica. Por isso, queremos chamar a atenção para o ponto em que os aprendizes inevitavelmente participam de comunidades de praticantes e que o domínio do conhecimento e da habilidade exige que os novatos se movam para a plena participação nas práticas socioculturais de uma comunidade. A "participação periférica legítima" fornece uma maneira de falar sobre atividades, identidades, artefatos e comunidades de conhecimento e prática. Trata-se do processo pelo qual os novatos se tornam parte de uma comunidade de práticas. As intenções de uma pessoa de aprender são engajadas e o significado de aprendizagem é configurado através do processo de se tornar um participante completo em uma prática sociocultural. Este processo social inclui, de fato, admite de forma ampla o aprendizado de habilidades conhecedoras³⁵ (LAVE; WENGEL, 1991, p. 29, tradução nossa, grifo nosso).

A partir dessa observação, algumas questões podem ser mais bem escolhidas no sentido de esclarecer os significados da noção de PPL e CP. A primeira questão é que a noção de PPL é um conceito relacionado à trajetória individual dos sujeitos dentro de uma determinada prática, de modo que os aprendizes, ou novatos, vão assumindo diferentes posições que são progressivas a sua localização na CP, de forma que a PPL é sempre dinâmica e historicamente situada. Por isso, a dimensão da identidade é central na constituição da cognição enquanto as

³⁵ learning viewed as situated activity has as its central defining characteristic a process that we call legitimate peripheral participation. By this we mean to draw attention to the point that learners inevitably participate in communities of practitioners and that the mastery of knowledge and skill requires newcomers to move toward full participation in the sociocultural practices of a community. "Legitimate peripheral participation" provides a way to speak about activities, identities, artifacts, and communities of knowledge and practice. It concerns the process by which newcomers become part of a community of practice. A person's intentions to learn are engaged and the meaning of learning is configured through process of becoming a full participant in a sociocultural practice. This social process includes, indeed it subsumes, the learning of knowledgeable skills.

identidades construídas na participação vão permitindo aos sujeitos assumir essas diferentes posições no contexto da prática social. Como uma noção construída historicamente, a PPL também compreende que cada sujeito carrega em si motivações, sentimentos, expectativas e significados diferentes que estão relacionados com sua própria história de vida e com as PPL em outras práticas sociais do entorno em que vivem. (LAVE e WENGER, 1991).

Lave e Wenger (1991) destacam ainda que em sua teoria não faz sentido falar de equivalentes antagônicos à noção PPL, ou seja, não existe uma posição não legítima. Assim como também não faria sentido falar em posições centrais dentro de uma prática, de modo que é o engajamento e a participação do sujeito nas práticas que lhe conferem a mudança de posições dentro da prática.

É necessário compreender a dimensão desses sujeitos, seus lugares, suas narrativas bem como as posições que ocupam na prática social em uma dada instituição. “as pessoas passam a participar de práticas sociais a partir de um conjunto individual de experiências sócio-culturais.”³⁶ (LERMAN, 2000, p. 22).

Pensando na instituição de ensino como comunidade de prática, as identidades dos que vão sendo construídas se sobrepõem e se combinam a outras identidades. A aprendizagem não se restringe ao conteúdo, à matemática, por exemplo, mas à constituição do ser que participa daquela prática social (LAVE, 1996).

Tomando essa dimensão da aprendizagem, ou seja, da cognição como prática social para nossa pesquisa, defenderemos que os futuros professores, quando estão lidando com a probabilidade, são sujeitos que participam de um espaço de formação, onde a prática com probabilidade pertence e atende a expectativas maiores. Essas expectativas estão relacionadas a questões epistemológicas no sentido estrito, mas também a questões macros, já que fazem parte do que é proposto para a formação do professor que irá ensinar Matemática.

Um argumento parecido é levantando por Oliveira e Santos (2011) que apresentam reflexões do estágio supervisionado como espaços de aprendizagens situadas sobre a formação docente. Para os autores, a dialética que se estabelece durante o estágio que envolve observação-participação-regência se constitui em espaço onde os futuros professores aprendem sobre ser professor e vão constituindo sua própria identidade:

³⁶ People come to participate in social practices from an individual set of socio-cultural experiences.

Formação esta que compreende os diferentes domínios de conhecimento, indispensáveis à formação técnica do professor na Universidade, a inserção e interação em uma comunidade escolar onde possa confrontar, validar ou modificar crenças e conhecimentos relacionados ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática, além de conviver com professores experientes e trocar experiências, promovendo sua própria identificação com a profissão docente (OLIVEIRA; SANTOS, 2011, p. 48).

Aqui, encontramos razões para pensar que a dinâmica da participação em prática social, no caso a formação de professores, é um processo que se inter-relaciona com outras práticas ligadas diretamente ao processo de formação ou não, ou seja, sabemos que a construção da identidade docente não está encerrada na formação inicial e pode mesmo ter se iniciado antes dela (PAIVA, 2008).

É sábio também que muitos desses futuros professores descobrem a inclinação para o exercício docente nas experiências que vão tendo nas práticas a que são submetidos. Em virtude disso, o curso de formação de professores, antes de tudo, necessita dizer algo sobre o ofício de ser professor. Muitas dessas lições sobre a docência estão implícitas, portanto, na prática social que ali se desenvolve, como bem destaca Lerman (2000) sobre a Matemática praticada nas escolas. É, então, preciso olhar também os papéis presentes e ocultos na construção dessa prática:

a gama de objetivos dos participantes, tanto os presentes (professor e alunos) quanto aqueles que estão fisicamente ausentes (estado / comunidade / mídia / escola) devem ser elaborados. Pelo menos, devemos perguntar quem ou onde estão os mestres nestas práticas múltiplas?³⁷ (LERMAN, 2000, p.19, tradução nossa).

Aqui, reclamamos uma noção fundamental na Didática da Matemática que foi cunhada por Guy Brousseau que é o contrato didático. Em linhas gerais, Brousseau (1986) destaca que na relação didática entre professores e alunos com um saber em jogo entra em cena um contrato didático. Explicitado inicialmente como conjunto de regras explícitas, mas, sobretudo, implícitas, que regem o jogo didático entre professor e alunos na gestão do saber, o conceito de contrato didático vai sendo ampliado de modo a incluir termos como expectativas, negociações, rupturas, dentre outros (BRITO MENEZES, 2006).

³⁷ the range of goals of the participants, both those present (teacher and students) and those physically absent (state/community/media/school) must be elaborated. At the very least we must ask who or where are the masters in these multiple practices? This forms the third part of this section.

Ao trazer essa noção para discussão, queremos destacar que o reconhecimento de um contrato didático na gestão do saber por professor e alunos exprime, em certa medida, a compreensão que a Didática da Matemática assume da sala de aula, como sendo um espaço onde os sujeitos participam de prática. Chevallard (1996) destaca que o contrato didático é uma condição fundamental para que o sistema didático se estabeleça, ou seja, o professor formador e os futuros professores de matemática, na sua interação com a probabilidade, assumem papéis e responsabilidades distintas, carregadas de significados e expectativas em relação à Probabilidade. A gestão desse contrato e os papéis assumidos fazem parte do cotidiano. Logo, da prática social desse ambiente de formação.

Em um paralelo com a teoria da aprendizagem situada, podemos pensar que as PPL de cada sujeito no processo de formação que observamos dependem dos contratos estabelecidos, expectativas e negociações que ali ocorrem. O estudo em torno da probabilidade, as responsabilidades, o engajamento dos sujeitos assume tanto um caráter estrito ligado ao saber probabilidade, mas também macro, se pensarmos que os sujeitos envolvidos estão em processo de formação inicial para a docência. Acreditamos que os conflitos, as condições e as restrições que ali se manifestam em torno do saber podem resultar, minimamente, em conteúdo para refletirmos também sobre a cognição como uma prática social. O argumento para essa crença é que, embora a ênfase da TAD seja o polo epistemológico nessa relação, é que o próprio saber e o seu estudo emerge das ações de cada sujeito que compõe o sistema didático, “a turma”, que pretendemos observar.

Parece-nos clara a possibilidade de aproximação entre a ideia de PPL e os papéis e posições assumidas no SD pelos sujeitos. No entanto, em relação à noção de comunidade de prática (CP), conceito-chave para compreendermos a teoria da aprendizagem situada encontramos ressalvas. Antes, é preciso indagarmos se podemos caracterizar a turma de introdução à probabilidade de um Curso de Licenciatura em Matemática como uma comunidade de prática.

Refletindo sobre essa indagação, as nossas reflexões conduzem a dois argumentos. O primeiro são as pesquisas que têm sido desenvolvidas que, de certa forma, mostram que é possível utilizar a aprendizagem situada para compreensão da cognição em espaços formais de ensino, ou seja, buscamos encontrar nas práticas dessas pesquisas o respaldo para emprendermos nossa reflexão teórica utilizando a teoria da aprendizagem situada para observarmos os sujeitos lidando com a probabilidade na formação de professores. Matos (1999) e Batista (2014) mostraram que durante a realização de atividades comuns os estudantes assumem a condição de comunidades práticas específicas.

O segundo argumento repousa na nossa compreensão de que a noção de CP pode ser estendida à prática que se desenha na formação de professores, ali se desenvolve uma prática que depende da participação engajamento dos seus sujeitos como apontam Oliveira e Santos (2011).

Em relação às pesquisas ligadas ao ensino de Matemática e à formação de professores, já destacamos alguns desses trabalhos em parágrafos anteriores. Observamos nesses trabalhos o uso sistemático dos pressupostos teóricos de Lave e Wenger (1991) para interpretarmos os espaços de sala de aula, seja na escola, seja na formação de professores como ambientes onde a aprendizagem ocorre como uma prática situada. Outro aspecto observado, ao nos debruçarmos sobre a leitura desses trabalhos, é que a pesquisa que utiliza e discute a teoria da aprendizagem situada na Educação Matemática tem representantes em diversos países, a exemplo do Brasil, Portugal, Inglaterra, Espanha, Estados Unidos da América, dentre outros.

Em todos os trabalhos a que tivemos acesso, uma característica comum é que o entendimento da cognição situada como um ponto de vista importante para refletirmos sobre a sala de aula de Matemática seja na escola, seja nos cursos de formação de professores. Oliveira e Santos (2011), que desenvolveram estudos no âmbito do estágio supervisionado, destacam que teorias como a “cognição situada podem ser referências importantes para a positiva qualificação da formação inicial de professores de Matemática” (OLIVEIRA; SANTOS, 2011, p.48).

Blanco (2002) não só defende essa utilização teórica, como também propõe um modelo para a formação de professores de Matemática que tem elementos da teoria da aprendizagem situada:

Esses estudantes devem se tornar participantes plenos de uma comunidade de prática formada por professores (do nível que é considerado) com a tarefa de ensinar matemática a grupos de alunos. Esta atividade docente é o que caracteriza essa comunidade. Os conhecimentos e habilidades necessários devem ser desenvolvidos pelos recém-chegados à comunidade. Esse processo de tornar-se membro dessa comunidade é gerado através da atividade, participando de um processo gradual, diverso e progressivo em diferentes tarefas que caracterizam a prática do ensino de matemática. Futuros professores de matemática não pertencem a essa comunidade, mas os programas de formação de professores, portanto, da didática de matemática devem criar os meios para dar-lhes a oportunidade de se integrarem na comunidade de prática “ensinar matemática”³⁸ (BLANCO, 2005, p. 158).

³⁸ Estos estudiantes deben llegar a ser participantes plenos de una comunidad de práctica formada por los profesores (del nivel que se considere) con la tarea de enseñar matemáticas a grupos de alumnos. Esta actividad de enseñar es lo que caracteriza a esta comunidad. Los conocimientos y destrezas necesarios deben ser desarrollados por los recién llegados a la comunidad. Este proceso de llegar a ser miembro de dicha comunidad se genera a través de la actividad, participando de manera gradual, diversa y progresiva en distintas tareas que

Embora reconheçamos o papel desses trabalhos para o respaldo de nossa empreitada, devemos considerar que a nossa jornada precisa ser justificada também do ponto de vista teórico. Ou seja, qual o nosso entendimento dessa possibilidade de aproximação?

Teoricamente, a TAD assume as instituições como contexto onde a aprendizagem, interpretada como mudança relacional, ocorre. Essas mesmas instituições são apontadas por Douglas (2007) como agentes na cognição dos sujeitos. Na TAD as instituições tem um sentido amplo, como dispositivos sociais, podem representar relações em contextos formais e também informais. Pensarmos que ao delinear a ecologia que permite a vida dos saberes nessas instituições a abordagem antropológica do Didático nos fornece importantes pistas de como a cognição e essas dimensões se manifestam. Ao assumirmos a cognição como fenômeno social que emerge da participação e engajamento dos sujeitos valorizamos o princípio epistemológico presente na TAD.

Ernest (1998) provoca em sua discussão o entendimento semelhante de que há aspectos da relação entre a teoria da aprendizagem situada e suas relações com a Educação Matemática que precisam ser explicitados, “as habilidades de aquisição de conhecimento são adquiridas socialmente e o conhecimento geralmente é aprendido em contextos sociais”.³⁹ (ERNEST, 1998, p. 16).

Ainda sobre o conceito de CP, vale destacar que ele aparece nas discussões de Lave e Wenger (1991) como um conceito que vai se constituindo ao longo de suas discussões. Tanto que Wenger (1998) dedica sua atenção à discussão da noção. Em trabalho mais recente, Wenger *et al.* (2002) aborda modelos específicos para análises das CP.

Para Lave e Wenger (1991, p. 98, tradução nossa), a CP “é um conjunto de relações entre pessoas, atividade e mundo, ao longo do tempo e em relação com outras comunidades de prática tangenciais e sobrepostas”⁴⁰.

Wenger (1998) caracteriza a aprendizagem como um produto da prática coletiva ocorrendo em uma CP cujos sujeitos partilham de objetivos e relações sociais continuamente:

caracterizan la práctica de enseñar matemáticas. Los estudiantes para profesor de matemáticas no pertenecen a esa comunidad, pero los programas de formación de profesores desde la didáctica de las matemáticas deben crear los medios para darles la oportunidad de integrarse en la comunidad de la “práctica de enseñar matemáticas”.

³⁹ Knowledge acquisition skills are socially acquired and knowledge is usually learned in social contexts.

⁴⁰ is set of relations among persons, activity, and world, over time and in relation with other tangential and overlapping communities of practice.

essa aprendizagem coletiva resulta em práticas que refletem tanto a busca de nossos empreendimentos como as relações sociais. Estas práticas são, portanto, a propriedade de um tipo de comunidade criada ao longo do tempo pela busca contínua de um projeto compartilhado. Faz sentido, então, chamar estes tipos de comunidades de prática⁴¹ (WENGER, 1998, p. 45).

Analisando as duas acepções, podemos observar alguns significados comuns: 1. aprendizagem como participação e engajamento; 2. A CP como uma arena onde são partilhados significados e relações; 3. as práticas sociais caracterizadas pela participação como razão de ser dessas comunidades.

É válido salientar que a base empírica a partir da qual Lave e Wenger (1991) teorizam a noção de CP é a prática cotidiana de comunidades diversas. Salientemos que nos parece que o afastamento da escola foi um movimento natural pelos pesquisadores, que buscavam teorizar a cognição em contextos não formais. Dessa forma, termos como “participação” e “engajamento” estão associados à participação voluntária dos sujeitos. A busca pela construção de uma identidade, isto é, tornar-se algo, é entendida pelos autores como um busca voluntária (MATOS, 1999).

Nesse sentido, instituições como a escola ou, de maneira mais estrita, o espaço da sala de aula, não poderiam se caracterizar como CP, uma vez que o voluntariado e a própria noção de “torna-se algo” não estariam contemplados. Para Lerman (1998), essa diferenciação precisa ser considerada, pois, diferentes de comunidades diversas, como, por exemplo, aprendizes de costureiro e seus mestres, na escola o objetivo dos alunos não é se tornarem professores.

No entanto, a própria Lave (1996) destaca que é possível pensar o espaço escolar como espaços situados de aprendizagem. Ao refletir sobre os modelos de aprendizagem adotados nas comunidades dos Vai e Gola na Libéria e nas escolas das mesquitas do Egito⁴² do século XIX, ela apresenta a seguinte tese:

⁴¹ collective learning results in practices that reflect both the pursuit of our enterprises and the attendant social relations. These practices are thus the property of a kind of community created over time by the sustained pursuit of a shared enterprise. It makes sense, then, to call these kinds of communities of practice

⁴² Lave (1996) analisa os relatos da obra do antropólogo inglês Timothy Mitchell em sua obra *Colonizando o Egito* de 1988, onde o mesmo trata das relações entre a representação como modo de conhecimento ocidental e a construção imperialista dos ingleses no Oriente Médio.

O ensino escolar é um tipo especial de aprendizagem que deve tornar-se parte da mudança-identidade das comunidades de práticas das crianças, se está relacionado à sua aprendizagem. Quanto às diferentes formas em que as circunstâncias sociais para a aprendizagem são organizadas: através desses exemplos, eu tratei para mostrar que pressupostos comuns sobre as alegadas diferenças entre modos de educação e seus resultados são mais evidentes do que reais. Através deste argumento é contraproducente separar o Ocidente do resto, a socialização da educação especializada, a chamada empresa educacional informal do aprendizado formal e em sala de aula de tudo o resto. Porque aprender, onde quer que ocorra, é um aspecto da mudança de participação na mudança práticas.⁴³ (LAVE, 1996a, p. 161).

Partindo dessa colocação a respeito da aprendizagem, destacamos também os argumentos de Matos (1999), que analisando dados empíricos da sala de aula no âmbito do Programa de Pesquisa desenvolvido em Portugal e Cabo Verde, observou que, quando os estudantes estão a trabalhar em grupos, surgem características que denotam a partilha de significados, de expectativas, de objetivos e de mudanças nas posições dos sujeitos daquela prática. Ainda que o referido estudioso faça a ressalva de que um grupo de alunos trabalhando em sala de aula não pode simplesmente ser chamado de CP, existem, em sala de aula, elementos que caracterizam a atividade em que os alunos estão engajados;

Não se pode assumir de forma simplista que cada grupo de trabalho é uma comunidade de prática no sentido que tem vindo a ser discutido. Mas existe alguma unidade em cada grupo e isso contribui obviamente para determinar a esfera da actividade em desenvolvimento em cada um dos grupos. (MATOS, 1999, p. 82)

Matos (1999) destaca também os papéis dos participantes daquela prática, isto é, dos professores e alunos, como um indício da aprendizagem que se desenvolve ali e está fortemente associada ao contexto da prática, sendo que o professor assume, consciente ou inconscientemente, um papel fundamental para que os alunos possam se engajar e participar ativamente da atividade proposta.

Ainda sobre o ensino de Matemática nas escolas, Lerman (1998) carrega certas características próprias, ligadas à natureza desse saber. Portanto, a transferência dos conceitos

⁴³ School teaching is a special kind of learning practice that must become part of the identity-changing communities of children's practices if it is to have a relationship with their learning. As for the different ways in which social circumstances for learning are arranged: through these examples I have tried to show that common assumptions about supposed differences among modes of education and their outcomes are more apparent than real. By this argument it is counterproductive to compartmentalize the West from the rest, socialization from specialized education, so-called informal from formal educational endeavors, and classroom learning from everything else. Because learning, wherever it occurs, is an aspect of changing participation in changing practices.

proposto por Lave (1996) não é trivial. Lerman reconhece que a prática que se desenvolve na sala de aula, quando orientada nesse sentido, pode contribuir para que os estudantes “se tornem uma pessoa matemática”⁴⁴ (LERMAN, 1998, p. 41).

Para Lerman (1998), a teoria da aprendizagem situada de Lave e Wenger (1991) lança luzes importantes sobre as pesquisas a respeito do ensino de Matemática à medida que passa por processos de reflexões e adaptação para leituras da aprendizagem como um fenômeno situado no ambiente escolar.

Um exemplo dessa constatação é o trabalho de Frade e Tatsis (2009), que apresentam um estudo sobre a aprendizagem na classe matemática, entendida como uma participação coletiva. Nesse estudo, os autores apresentam uma combinação teórica entre a perspectiva da aprendizagem situada e os trabalhos de Coob *et al.* (2001), que oferecem um quadro teórico para conectar a perspectiva social a abordagens psicológicas da aprendizagem. A conclusão dos autores sinaliza para aspectos já apontados por Matos (1999) em relação aos papéis assumidos pelos sujeitos, principalmente dos professores. O trabalho se apresenta como uma possibilidade de diálogo teórico e constata a importância da compreensão da aprendizagem como uma prática social:

Sugerimos que a principal implicação pedagógica deste estudo aponte para o papel dos professores em orientar uma discussão coletiva e apoiar o pensamento dos alunos. Além disso, os professores devem ser claros e transparentes com os alunos sobre quais formas de participação eles esperam e valorizam na prática da sala de aula para apoiar e avaliar sua aprendizagem. Isso não significa que a participação dos estudantes seja restrita; Isso significa que o professor deve poder enquadrar as ações dos alunos de acordo com as normas estabelecidas e, ao mesmo tempo, ser flexível no estabelecimento de novas normas e práticas. Além disso, se o professor é capaz de identificar as mudanças "pequenas" na participação de cada aluno, ele poderá não apenas monitorar melhor a evolução da atividade, mas também realizar suas intervenções da maneira mais eficaz⁴⁵ (FRADE; TATSIS, 2009, p. 109).

No trabalho de Frade e Tatsis (2009), eles utilizam a noção de Comunidade de Prática Local (CPL), noção que se apresenta como uma possibilidade de interpretação de práticas específicas funcionando localmente, por exemplo, no caso das práticas escolares. Winbourne e

⁴⁴ Becoming a mathematical person

⁴⁵ We suggest that the main pedagogical implication of this study points to the teachers' role in guiding a collective discussion and scaffold the students' thinking. Also, teachers should be clear and transparent with students about which ways of participation they expect and value in classroom practice in order to support and evaluate their learning. This does not mean that students' participation should be constrained; it means that the teacher should be able to frame the students' actions according to the established norms and at the same time be flexible in the establishment of new norms and practices. Moreover, if the teacher is able to identify the 'small' changes in each student's participation, s/he will be able not only to better monitor the evolution of the activity but also to perform his/her interventions in the most effective way.

Watson (1998) sugerem a necessidade de adaptações aos termos mais usuais da teoria de Lave e Wenger (1991). Assim, ao tratar de práticas específicas, como a sala de aula, é possível essa adaptação no sentido de operacionalizar o uso dos termos presentes na teoria. Assim uma CPI assume as seguintes características:

1. Os participantes, através da sua participação na prática, criam e encontram a sua identidade no seio dessa prática (e continuamente vão criando e encontrando a sua identidade mais pública);
2. deve existir alguma estrutura social que permite aos participantes serem posicionados numa escala mestre/aprendiz;
3. a comunidades tem um determinado propósito;
4. existem formas partilhadas de comportamento, linguagem, hábitos, valores e utilização de ferramentas;
5. A prática é constituída pelos participantes;
6. Todos os participantes se veem envolvidos essencialmente na mesma atividade.⁴⁶ (WINBOURNE; WATSON, 1998, p. 94)

As características apresentadas por Winbourne e Watson (1998), para classificarem uma comunidade de prática como local, nos serão úteis como indicadores para identificarmos e classificarmos a prática que se desenha no curso de Introdução à Probabilidade, cujos sujeitos são o professor formador e os estudantes matriculados no curso.

Refletindo sobre a noção de Comunidade de Prática, proposta por Lave e Wenger (1991), e tendo em vista a operacionalização da noção de CP, sugerida por Winbourne e Watson (1998), pensamos ser possível aproximar teoricamente essas ideias com a noção teórica de Instituição apresentada por Chevallard (1996, 1999, 2009). A tentativa desse exercício será aprofundada no capítulo seguinte, no entanto, adiantamos que, no âmbito da TAD, o sistema didático que se forma em torno do ensino de Probabilidade na licenciatura em Matemática depende de uma estrutura maior que Chevallard (1996, 1999, 2009) chama de sistema de ensino, que, por sua vez, está inserido no seio de uma instituição. Assim a própria universidade e a estrutura social que ela representa influencia outra instituição que é o “curso de licenciatura em matemática”.

⁴⁶ 1. participants, through their participation in the practice, create and find their identity within that practice (and so continue the process of creating and finding their more public identity);
 2. there has to be some social structure which allows participants to be positioned on an apprentice/ master2 scale;
 3. the community has a purpose;
 4. there are shared ways of behaving, language, habits, values, and tool-use;
 5. the practice is constituted by the participants;
 6. all participants see themselves as engaged essentially in the same activity.

Entendendo a instituição como um conceito mais amplo, no que tange à relação dos sujeitos com o objeto probabilidade, podemos pensar que a própria disciplina é equivalente a uma instituição específica dentro da formação de professores. Ao entrarem na disciplina Introdução à Probabilidade, os futuros professores passam a ser sujeitos dessa instituição cujos objetivos está a construção de uma relação com objetos relacionados ao saber Probabilidade.

O SD que se forma durante a vigência da disciplina depende da participação dos sujeitos. Nesse caso, a prática que é esperada depende do engajamento desses estudantes, das expectativas, das negociações de significados. De certa forma, arriscamos a dizer que esse SD é conflitante e sofre influências de outros espaços e sujeições pelas quais os sujeitos passaram ou passam, não só dentro do Curso de Licenciatura, como na própria universidade e em outras Instituições das quais esses sujeitos façam parte. Para ilustrar nossa percepção, imaginemos duas situações: na primeira, o futuro professor que, por determinada crença, acredita que tudo o que acontece está pré-determinado, ou seja, que aleatoriedade não existe. Ao lidarmos com a ideia de “acaso”, poderemos ter uma situação de conflito. Em caso semelhante, agora ligado às possíveis relações dos sujeitos com a probabilidade na própria licenciatura, este sujeito poderá estar cursando a disciplina e participando de atividades ligadas ao estágio supervisionado, quando poderá manter um outro tipo de relação com o objeto probabilidade, ou seja, este pode ser um objeto a ensinar. Dessa segunda situação, as relações que se estabelecem necessitam de um exame detalhado que não temos condições de fazê-lo no momento.

Vale ressaltarmos que na TAD as instituições podem remeter a espaços formais como a escola, o local de trabalho etc., mas, também, a espaços cuja materialidade é reclamada a partir de sua prática, como, por exemplo, a língua materna, a família etc.

Esperamos que as breves reflexões desses últimos parágrafos tenham servido para sublinhar esses possíveis pontos de aproximações entre as teorias. Enxergamos que na Teoria da Aprendizagem Situada a participação é condição fundamental para a existência de uma comunidade de prática, e que essa participação se converte em práticas sociais, a aprendizagem e a formação das identidades se dão por processos de participação legítimas e periféricas, ou seja, os sujeitos vão assumindo diferentes posições nessa prática. Esse processo é sempre carregado de partilhas, negociações, expectativas que estão relacionadas com a dimensão individual dos sujeitos, mas também a uma estrutura social maior.

Na antropologia cognitiva, Chevallard abre possibilidades de discussões parecidas. Na TAD, a aprendizagem é também um fenômeno relacional. A vida de uma instituição só faz sentido a partir da participação e engajamento dos sujeitos. A figura do professor, por exemplo, pode ser entendida como uma materialização da própria instituição. Os sujeitos que participam

de um SD assumem diferentes posições em relação aos objetos institucionais e estão submetidos a um contrato didático, quando restritos ao SD, mas também institucional, quando pensando em um sentido mais amplo da relação (CHEVALLARD, 1996).

Ainda sobre o âmbito da TAD, queremos fazer uma última observação em relação às possibilidades de aproximação. O foco da TAD é essencialmente epistemológico. Ao tratarmos das condições e restrições para a difusão dos saberes, a teoria centra sua atenção na ecologia desse saber. No entanto, uma premissa básica da TAD é reconhecer a Matemática como produto das práticas humanas. O saber não é imutável. Ele é passível de modificações e assume diferentes configurações nas instituições por que transita. Para Lave e Wenger (1991), a prática social que se desenvolve no âmbito das CP é produtora do conhecimento, ou seja, a participação dos sujeitos é condição para sua aprendizagem, mas também é o meio pelo qual o conhecimento se forma:

Uma comunidade de prática é uma condição intrínseca para a existência do conhecimento, sobretudo porque fornece o suporte interpretativo necessário para dar sentido ao seu patrimônio. Assim, a participação na prática cultural em que qualquer conhecimento existe é um princípio epistemológico de aprendizagem. A estrutura social desta prática, suas relações de poder e suas condições de legitimidade definem possibilidades de aprendizagem (isto é, para participação periférica legítima)⁴⁷ (LAVE; WENGER, 1991, p. 98, tradução nossa).

Embora o foco da TAD seja no polo epistemológico, ou seja, na relação ao saber que se estabelece entre os sujeitos e as condições ou restrições para que essa relação aconteça. Nosso entendimento é que não faz sentido falar de saberes sem levar em consideração ação dos sujeitos que o produzem/reproduzem no seio das instituições.

⁴⁷ A community of practice is an intrinsic condition for the existence of knowledge, not least because it provides the interpretive support necessary for making sense of its heritage. Thus, participation in the cultural practice in which any knowledge exists is an epistemological principle of learning. The social structure of this practice, its power relations, and its conditions for legitimacy define possibilities for learning (i.e., for legitimate peripheral participation).

3 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Um velho poema novo

De mãos dadas com o presente
Percebi que o futuro me espera
Senti como o poeta deveras sente
O alcançar de uma nova era

O passado de linhas tortas
Foi escrito com maestria
Pois ele me abriu as portas
Para viver nova poesia

Foi a dor da saudade
O desejo de escolher
Por companheiro: o amor

Foi a esperança que me invade
De novos versos (r)escrever
Por inspiração: a flor.

Neste capítulo nos propusemos à discutir a Teoria Antropológica do Didático e suas principais noções teóricas. À medida que apresentarmos essas noções, tentamos problematizá-las do ponto de vista das implicações, no plano teórico, dessas ferramentas como elementos que nos ajudam a entender a cognição e sua dimensão psicológica.

Dividimos o capítulo em 4 partes: 1. Gênese da Didática da Matemática; A TAD e seus elementos teóricos; 3. Considerações sobre a noção de contrato didático e 4. Síntese do quadro teórico, onde retomamos a questão da cognição como fenômeno situado em uma leitura a partir da TAD.

3.1 DIDÁTICA DA MATEMÁTICA: GÊNESES E EVOLUÇÕES

A compreensão do estado atual da Didática da Matemática e do movimento teórico que reivindica a autonomia dela, como disciplina científica, passa pela compreensão da sua gênese. Se estabelecermos como marco desse movimento a formação dos Institutos de Pesquisas no Ensino de Matemática (IREM), há pouco mais de 40 anos, podemos dizer que a palavra “ruptura” é o principal termo que delinea as iniciativas de pesquisa e as construções teóricas dos principais representantes desse movimento.

Artigue e Douday (1986) destacam a importância dos IREM como espaço institucional impulsionador para a construção do movimento da Didática da Matemática:

Na verdade, eles constituíram a base institucional a partir da qual emerge na França na década de 1970, uma pesquisa em didática da matemática e a originalidade de sua orientação deve, sem dúvida, muito, as suas condições de funcionamento. Na verdade, o IREM agrupa professores de vários níveis e, como resultado, forçaram a pesquisa que se originou dentro deles para não se isolar em um gueto da universidade, mas ao contrário permanecer em contato próximo com a instituição escolar, aulas, profissionais de ensino⁴⁸ (ARTIGUE; DOUADY, 1986, p. 70).

Notemos que o movimento francês que reivindica a constituição da Didática da Matemática como uma disciplina científica é acompanhado do estabelecimento de teorias acerca dos fenômenos didáticos. Parecia, pois, haver na essência daquele movimento uma necessidade de explicar os fenômenos didáticos de um ponto de vista original, assim as rupturas aparecem como elemento central naquele contexto.

De fato essa impressão é confirmada por Chevallard, Bosch e Gascón (2001). Os autores destacam que o ensino de matemática em seus primórdios era visto próximo a uma arte, de modo que dificilmente seria passível de análise e controle, “nesse paradigma a aprendizagem é considerada como um processo psicocognitivo, fortemente influenciado por fatores de motivação e de atitude do aluno aprendiz”. (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 73).

O que os autores chamam de período clássico da Didática da Matemática procura romper com essa visão de que o ensino de matemática era uma arte. À medida que os pesquisadores se interessavam pelos fatos didáticos, esse modo de conceber o ensino de matemática foi sendo superado.

As principais características desse movimento eram a tentativa de ampliação da problemática espontânea do professor, ou seja, a didática tomava para si e para sua análise os problemas com os quais os professores lidavam. Outra característica residia no fato de a Didática da Matemática ter como produto um saber técnico que tinha em essência a importação de saberes fundamentais de outras disciplinas, de modo que a Didática da Matemática tinha um caráter mais normativo que explicativo (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001).

Os autores ainda acrescentam que dois enfoques poderiam ser destacados. Aqueles que centravam a atenção no pensamento do aluno, tendo a psicologia como principal base

⁴⁸ En fait, ils vont constituer la base institutionnelle à partir de laquelle va émerger en France, dans les années 1970, une recherche en didactique des mathématiques et l’originalité de son orientation doit sans doute beaucoup à leurs conditions de fonctionnement. En effet, les IREM regroupent des enseignants de plusieurs niveaux et, de ce fait, ils ont obligé la recherche que a pris naissance en leur sein à ne pas s’isoler dans un ghetto universitaire, mas au contraire à rester étroitement en contact avec l’institution scolaire, les classes, les praticiens de l’enseignement.

explicativa. Já um segundo enfoque tinha como cerne o professor. A profissão docente abria espaço para uma base explicativa maior, advindo de outras áreas como a sociologia, a psicologia educativa, a história da matemática, a pedagogia dentre outras áreas do saber.

Apesar dessas caracterizações, Chevallard, Bosch e Gascón (2001) salientam que não é a ênfase dada em um ou outro polo da relação didática que caracteriza o período clássico da Didática da Matemática, mas a forma naturalizada como o saber matemático era percebido no processo didático, isto é, “o que a caracteriza é que assume acriticamente que, ou os saberes que utiliza não são problemáticos em si mesmos (como os saberes matemáticos), ou não fazem parte da problemática didática (como os psicológicos ou os sociológicos)” (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 74).

Esse processo de naturalização do papel do saber matemático é apontado como uma das principais limitações do período clássico da Didática da Matemática. No que tange à evolução da Ciência, Fleck (2010) também destaca que a naturalização de um fato científico corrobora para que a ciência não avance, porque a obviedade desobriga a necessidade de conhecer, o que pode ser exemplificado com um fato a que todos nós já estamos acostumados: “o fato do ser humano normal ter dois olhos. Esse fato tornou-se óbvio para nós, nem nos parece mais conhecimento” (FLECK, 2010, p. 37).

No caso da Didática da Matemática, o contexto era de naturalização de determinados fenômenos, especialmente no tocante à influência do conhecimento matemático na constituição dos fenômenos didáticos ligados a ele. Nesse sentido, Gascón (1998) destaca que a Didática da Matemática viveu, desde seu surgimento, momentos de importantes rupturas que inauguram um novo programa epistemológico capaz de dar vazão a importantes construtos teóricos:

A evolução da Didática da Matemática está determinada por sucessivas ampliações da problemática didática. Cada uma dessas ampliações comporta mudanças no seu objeto de investigação primário e, modifica a natureza da didática como disciplina científica.⁴⁹ (GASCÓN, 1998, p. 2).

Mesmo com suas limitações, o período Clássico da Didática da Matemática inicia-se a partir do momento em que acontece a primeira ruptura com a visão didática que percebia o processo de ensino de matemática como uma arte que dependia do professor. Para o autor, inaugura-se um período pré-científico, no qual os fenômenos didáticos relacionados à Matemática são encarados como susceptíveis de análise.

⁴⁹ La evolución de la didáctica de las matemáticas está determinada por sucesivas ampliaciones de la *problemática didáctica*. Cada una de estas ampliaciones comporta cambios de su *objeto primario de investigación* y, en consecuencia, modifica la naturaleza de la didáctica como disciplina científica.

Para Bachelard (1996), o estágio pré-científico se dá a partir do momento em que um campo utiliza de termos e explicações que não levam em conta aspectos centrais que são naturalizados. Para Gascón (1998), o movimento é semelhante, já que muitos termos relativos ao ensino e à aprendizagem de Matemática eram utilizados de forma naturalizada e não problemática.

Apesar do reconhecimento da importância do aporte teórico vindos das Teorias da Aprendizagem ligadas à Psicologia Cognitiva, Gascón (1998) apresenta ao menos três limitações que são fundamentais para direcionar a Didática da Matemática no caminho da sua autonomia como disciplina científica. Essas limitações estão relacionadas à natureza dos objetos e termos ligados ao ensino e à aprendizagem em Matemática, que eram abordados de forma superficial. Isso ocorria devido à segunda limitação, que era a centralidade no sujeito cognitivo e que relegava a um segundo plano fenômenos didáticos-matemáticos. Por fim, a terceira limitação diz respeito ao caráter técnico atribuído ao saber didático, portanto, a construção de uma disciplina científica não fazia parte da agenda do enfoque clássico. Nesse contexto, o rompimento com o enfoque Clássico da Didática da Matemática trouxe, segundo Almouloud (2007), ao menos três grandes rupturas:

1. O conhecimento matemático como elemento central na pesquisa sobre os fenômenos didáticos;
2. A reivindicação de um campo científico autônomo;
3. A noção de que o conhecimento matemático só pode ser aprendido através de atividades que esse conhecimento permite realizar. (ALMOULOU, 2007)

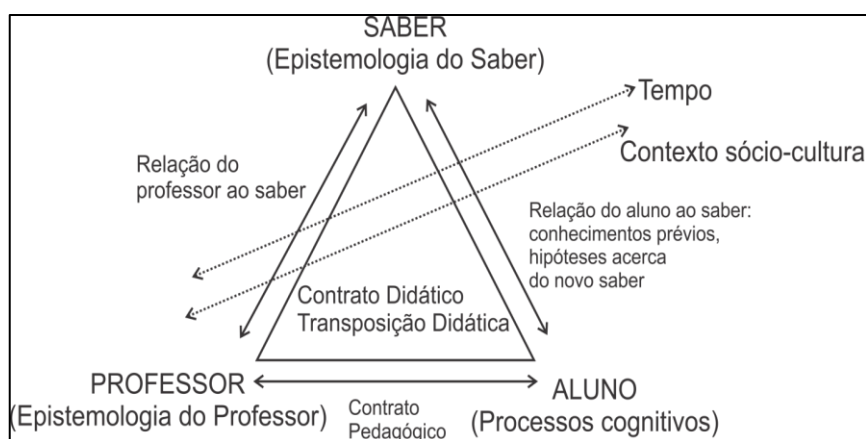
As três rupturas destacadas estão diretamente relacionada com a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau. A Matemática deixa de ser encarada apenas como um sistema de conceitos logicamente organizados que nos permitem a produção de demonstrações, e passa a ser vista como uma atividade que é realizada dentro de situações dadas através de um meio. Essa atividade estruturada se constitui por fases como ação, formulação, validação, devolução e institucionalização. Desse processo de interação nas situações didáticas, surge a noção de que a relação entre a tríade aluno-professor-saber era regida pelo contrato didático. Segundo Brousseau (1986) este será o verdadeiro motor do processo de aprendizagem.

Notemos que agora, além dos polos originais, o aluno e o professor, o saber passa a ser tomado como fundamental na relação didática. Para Jonnaert e Borghet (2002), a relação didática é um conjunto de relações sociais que se dão em torno do contrato didático:

A relação didática é constituída de uma série de relações sociais, organizadas pelo contrato didático em um quadro sócioespacial determinado, entre um professor, alunos e um objeto determinado de ensino e aprendizagem. A relação didática é constituída do conjunto de trocas entre os alunos, o saber e o professor. Trata-se de uma relação ternária (JONNAERT; BORGHT, 2002, p. 165).

Um esquema muito usado para apresentar essa relação é o triângulo das situações didáticas, metáfora assumida por Brousseau (1986) para caracterizar essa relação. A metáfora proposta assume a existência de uma relação dialética entre professor-alunos-saber. Essa tríade comporta relações duais que dependem do foco do estudo didático. Em uma alusão ao universo dessas relações, o triângulo didático é apresentado como tripé constitutivo do objeto de estudo da Didática da Matemática:

Figura 3 – Tripé constitutivo do objeto de estudo da didática da matemática.



Fonte: BRITO MENEZES (2006, p. 24)

Jonnaert e Borght (2002) destacam também o caráter solidário entre os polos, de modo que o contrato didático gere as interações entre esses elementos. O objeto de estudo da didática se configura para a eleição das variáveis ligadas a esses polos como objeto de investigação.

A Teoria das Situações Didáticas cria, segundo Gascón (1998), a noção de Didática Fundamental que ficou conhecida como epistemologia experimental. A constituição e o reconhecimento desta nova epistemologia redirecionam o olhar da investigação em Didática da Matemática para as atividades matemáticas que passam a ter um papel fundamental nos fenômenos didáticos. Ao mesmo tempo em que define o objeto de estudo da Didática da Matemática, amplia a possibilidade de novas investigações e análises. Para Gascón (1998), é nesse momento que a Didática da Matemática ultrapassa seu estágio pré-científico.

Cabe lembrarmos que a centralidade nas atividades matemática não põe de lado os processos de ensino e aprendizagem. Pelo contrário, estes passam a ser definidos a partir do

quadro epistemológico e teórico da própria Didática da Matemática: “a didática deve investigar situações em que se manifesta a produção e a difusão de conhecimento, neste caso o conhecimento matemático e seus efeitos sobre os protagonistas e as suas produções”⁵⁰ (BROUSSEAU, 1994, p. 2).

No caso específico da aprendizagem, um exemplo clássico dentro da Didática da Matemática é a Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud, teoria cognitivista que não se limita aos quadros explicativos da Matemática, mas tem nascedouro na problematização das estruturas aditivas, multiplicativas e das relações número-espço (VERGNAUD, 1996, p. 155).

Com a inauguração da Teoria das Situações Didáticas, a consolidação e a ampliação da Didática da Matemática como disciplina científica se apresentam como passo eminente. Destacamos novamente o papel das rupturas como sinais de avanço. Bachelard (1996) destaca que o progresso da ciência se dá por rupturas, isto é, a ciência avança a partir de novos questionamentos:

Precisar, retificar, diversificar são tipos de pensamento dinâmico que fogem da certeza e da unidade, e que encontram nos sistemas homogêneos mais obstáculos do que estímulo. Em resumo, o homem movido pelo espírito científico deseja saber, mas para, imediatamente, melhor questionar (BACHELARD, 1996, p. 21).

Tendo como base a necessidade de questionamento contínuo descrita por Bachelard (1996), observamos que a Didática da Matemática constitui-se como uma disciplina científica em evolução.

Essa impressão acerca das mudanças por que passou a Didática da Matemática é traço apontado também por Artigue e Douady (1986, p. 84): “A didática da matemática e mais recentemente da informática é um campo de estudos em plena extensão. Os conceitos ainda têm uma significação essencialmente em seu funcionamento, e, portanto, são suscetíveis de evoluir”⁵¹.

O processo de elaboração da noção de contrato didático exemplifica bem esse processo de expansão:

⁵⁰ La Didactique doit étudier les situations où se manifeste la production et la transmission des connaissances et des savoirs mathématiques et leurs effets sur les protagonistes et leurs productions.

⁵¹ La didactique des mathématiques et plus récemment de l’informatique est un champs d’études en pleine extension. Les concepts y ont encore de la signification essentiellement dans leur fonctionnement et par là-même sont susceptibles d’évoluer.”

Quando temos acesso a alguns escritos fundamentais de Brousseau sobre o contrato didático (Brousseau, 1986, 1990, 1998), não encontramos, de partida, uma definição explícita e única do que seja contrato didático. Tal construção vai sendo feita paulatinamente, a partir da reflexão desse autor sobre o saber (e seus aspectos de contextualização e descontextualização), o papel do professor e do aluno, a noção de ensino e de aprendizagem, dentre outras noções por ele abordadas (BRITO MENEZES, 2006, p. 45).

Os estudos que se seguiram a partir das rupturas trazidas pela Teoria das Situações Didáticas abriram espaço para outros olhares e abordagens. É nesse novo terreno que surgem outras noções teóricas importantes, dentre as quais a noção de transposição didática, que é considerada o cerne da Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1996; GASCÓN, 1998; CHEVALLARD, BOSCH e GASCÓN, 2001).

A noção de transposição didática repousa no fato de que não se pode falar da Matemática e das atividades que ocorrem na escola, sem levar em consideração a reconstrução das práticas matemáticas que estão ligadas com a própria produção do saber matemático. O saber como algo questionável e passível de transformações reclamaria uma pluralidade de facetas porque o saber matemático depende dos processos de manipulação e estes não podem ser analisados separadamente (GASCÓN, 1998).

Para Chevallard, Bosch e Gascón (2001), a Teoria das Situações Didáticas, ao introduzir a problematização do saber na análise dos fenômenos didáticos, abriu a possibilidade de se trilhar o caminho inverso, ou seja, “partir do homem fazendo matemática, para constatar que o didático é denso no matemático e que todo fenômeno matemático possui um componente didático essencial. Esse é o ponto de vista antropológico inaugurado por Yves Chevallard.” (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 77).

Notemos que a ênfase no saber é um traço fundamental da abordagem antropológica na Didática da Matemática, no entanto, é o estado de simbiose entre o saber e o “didático” que a define:

Ao se considerar o matemático e didático empiricamente inseparáveis, a própria noção de fenômeno didático se generaliza para fazer referência a uma dimensão essencial de toda atividade matemática. O didático deixa de ser exclusivo do processo de ensino-aprendizagem para se referir a qualquer um dos aspectos do processo de estudo. A didática da matemática se transforma, definitivamente, na ciência do estudo e da ajuda para o estudo da matemática. (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 77).

O estudo para Chevallard, como já frisamos anteriormente, assume uma conotação mais ampla do que estamos acostumados a pensar. A problemática do estudo compreende a atividade

da Matemática como um fenômeno complexo que pode estar relacionado a sua utilização, a sua aprendizagem, a seu ensino e a sua produção.

Gascón (1998) salienta ainda que a abordagem antropológica não se encerra no viés epistemológico:

Este enfoque propunha que a atividade matemática deve ser interpretada (isto é, modelizada) como uma atividade humana junto as demais, ao invés de considerá-la unicamente como a construção de um sistema de conceitos, como a utilização de uma linguagem ou como processo cognitivo. Desta maneira, o enfoque antropológico integra muitos enfoques parciais (epistemológicos, linguísticos, psicológicos, sociológicos, ...) ⁵²(GASCÓN, 1998, p. 11).

Os enfoques parciais aos quais Gascón (1998) se refere remontam à discussão sobre possibilidade de diálogos entre a Didática da Matemática e outras disciplinas científicas. Esse tipo de possibilidade não só é plausível como também é necessário, como reconhece o próprio Chevallard (2011a, p. 5, tradução nossa): “o que afirmo é que nenhum didático, nenhuma comunidade didática deve encerrar-se em um território único: a vida de relações é também aqui uma necessidade da vida científica”⁵³.

Essas relações, aludidas por Chevallard (2011a), nos parecem ser também necessárias como possibilidade de diálogo teórico entre as teorias presentes na própria didática. Trabalhos como os de Brito Menezes (2006), Almeida (2016) apontam para essa direção, de modo que a exploração teórica dessas relações abre novos campos de discussão tendo como consequência o alargamento do debate e o fortalecimento da Didática da Matemática, como disciplina científica.

Um dos desdobramentos desse alargamento e fortalecimento da Didática da Matemática foi a inserção de novas temáticas ao objeto de estudo dos fenômenos didáticos. A memória e a sua gestão didática é um exemplo dessa inclusão.

Brousseau e Centeno (1991) foram o pioneiros nessa discussão que se propôs a discutir as características dessa gestão. Eles observaram não só a existência dessa memória atuando dentro do sistema didático, como reconhecem o seu papel para os estudos envolvidos na situação didática, mas também para operacionalização dos meios que envolve essa situação por parte do professor. (BROUSSEAU; CENTENO, 1991).

⁵² Este enfoque propugna que la actividad matemática debe ser interpretada (esto es, modelizada) como una actividad humana junto a las demás, en lugar de considerarla unicamente como la construcción de un sistema de conceptos, como la utilización de un lenguaje o como un proceso cognitivo. De esta manera el enfoque antropológico integra muchos enfoques parciales (epistemológicos, lingüísticos, psicológicos, sociológicos, ...).

⁵³ Lo que afirmo es que ningún didacta, ninguna comunidade didáctica debe encerrarse en un territorio único: la vida de relaciones es también aquí una necesidad de la vida científica

Podemos dizer que, nas situações estudadas, o funcionamento da memória didática atua na compreensão das questões matemáticas, pois o efeito da memória didática do sistema sobre o aluno é dar a ele a possibilidade de mobilizar um conhecimento que ele não tinha completamente, um conhecimento que ele não poderia ter usado sozinho e que lhe permitiria dar sentido à questão com a qual ele está lidando.

O funcionamento da memória didática poderia ser melhorado, dando aos professores uma certa quantidade de conhecimento didático para que eles possam aplicar o que ainda não foi aprendido pelo aluno, mas que foi vivido com ele. O professor poderia recontextualizar o conhecimento que está sendo aprendido.⁵⁴ (BROUSSEAU; CENTENO, 1991, p. 205, tradução nossa).

Numa direção semelhante mostrando que o tema da memória e sua gestão em didática é uma questão viva Araya-chacón (2008) destaca que discutir a gestão da memória a partir da Didática da Matemática traz uma abordagem social que transita entre as dimensões sociológicas e antropológicas:

Na verdade, nós procuramos compreender a partir de dados empíricos, como os indivíduos podem compartilhar, de uma maneira menos coletiva, as práticas relativas a lembrança. Nós estudamos, portanto, uma dimensão cognitiva em matemática, do ponto de vista antropológico do didático.⁵⁵ (ARAYA-CHACON, 2008, p. 50).

Analisando os elementos que suscitamos como integrantes da gênese da Didática da Matemática, destacamos algumas características importantes:

⁵⁴ Nous pouvons affirmer que, dans les situations étudiées, le fonctionnement de la mémoire didactique agit sur la compréhension des questions mathématiques parce que l'effet de la mémoire didactique du système sur l'élève est de lui donner la possibilité de mobiliser un savoir qu'il ne possédait pas complètement, un savoir qu'il n'aurait pas pu utiliser tout seul et qui va lui permettre de donner du sens à la question dont il s'occupe.

Le fonctionnement de la mémoire didactique pourrait s'améliorer si l'on donnait aux maîtres un certain nombre de connaissances didactiques pour qu'ils puissent appliquer ce qui n'est pas encore appris par l'élève mais qui a été vécu avec lui. Le maître pourrait ainsi recontextualiser des connaissances en cours d'apprentissage.

⁵⁵ En effet, nous cherchons à comprendre à partir de données empiriques, comment les individus parviennent à partager, du moins de manière collective, des pratiques relatives à leur remémoration. Nous étudions donc une dimension du cognitif en mathématiques, du point de vue « anthropologique du didactique »

Quadro 2 – Resumo evolução da Didática da Matemática

1. A didática da matemática surge como movimento que procura superar uma visão inicial do ensino como uma arte, que depende do talento de quem pratica essa arte e que, como ofício, em muitos aspectos, não seria passível de análise (CHEVALLARD, BOSCH; GASCÓN, 2001);
2. Essa primeira tentativa de ruptura deu origem a um período denominado como clássico, no qual a Didática da Matemática ultrapassa seu período pré-científico (GASCÓN, 1998);
3. O ambiente institucional proporcionado pelos IREM foi favorável às transformações da Didática da Matemática (ARTIGUE; DOUADY, 1986);
4. No período clássico da Matemática, predominava o aporte teórico de outras áreas como o da Psicologia Cognitiva. O foco das pesquisas estava centrado ou na ação individual dos alunos, ou no professor. O saber matemático e suas características não era levado em consideração. (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001);
5. A ausência de problematização e a naturalização de fatos e dos objetos associados a esses fatos impediam a evolução da Didática da Matemática (BACHELARD, 1996; FLECK, 2010);
6. As rupturas promovidas pela Teoria das Situações Didáticas de Brousseau foram seminais para a inauguração de um novo período: o da Didática Fundamental (GASCÓN, 1998);
7. A noção de transposição didática permitiu a abertura do viés antropológico que se constituiu como uma expansão do quadro de análise da Didática da Matemática (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001);
8. A abordagem antropológica parte da Matemática como uma atividade humana, onde o didático é essencialmente denso. A abordagem comporta o diálogo teórico entre outras áreas externas e internas à Didática da Matemática (GASCÓN, 1998; BRITO MENEZES, 2006; ARAYA-CHACON, 2008; ALMEIDA, 2016).

Fonte: próprio autor (2018).

A partir desse quadro, temos condições de iniciar a discussão teórica sobre a Teoria Antropológica do Didático e suas bases.

Retomamos aqui a fala de Chevallard (2011a) que destaca a Didática da Matemática como a ciência das condições e restrições do didático. Ao se referir ao didático o mesmo o concebe como denso nas práticas matemáticas que se desenvolvem no seio das mais variadas instituições.

A implicação direta dessa concepção é o fato de assumir o didático como sendo uma dimensão das atividades humana, não restrito somente as instituições de ensino, mas toda instituição resguarda uma dimensão didática, mesmo aquela que não tem o objetivo explícito de ensinar. Isso faz com que possamos olhar para os fenômenos didáticos em plena abordagem antropológica no quadro da didática da matemática.

3.2 ANTROPOLOGIA COGNITIVA E A DIDÁTICA DOS SABERES

A Teoria Antropológica do Didático tem sua gênese em meados do final da década 70 e início dos anos 80 do século passado, quando as primeiras discussões em torno da noção de transposição didática são apresentadas no IREM – d’Aix-Marseille. A fecundidade da noção abriu espaço para um projeto maior que culminou com a TAD. Uma teoria em desenvolvimento cuja evolução pode ser acompanhada em textos clássicos de Yves Chevallard (cf. CHEVALLARD, 1992; 1994; 1997; 1999; 2002; 2006; 2011).

Os desenvolvimentos da teoria nos últimos anos têm encaminhado para discussão que aludem ao que Chevallard e seus colaboradores chama de paradigma do questionamento do mundo que tem como ferramenta principal. Além da crítica ao modelo escolar dominante, esse paradigma busca o aperfeiçoamento de dispositivos didáticos que buscam o rompimento com lógica vigente, onde as obras humanas são tomadas como inquestionáveis e o papel dos sujeitos diante delas é o de observador. O “*parcours des étude et recherche (PER)*”, aqui no Brasil traduzidas⁵⁶ como percurso de estudo e pesquisa (PEP), são uma demonstração os pesquisadores têm se preocupados com o avanço da TAD e dos seus quadros teóricos.

Em uma análise das mudanças, ampliações e reformulações acerca da noção de transposição didática, Bosch e Gascón (2006) afirmam que o conceito de TD não está somente como gênese da TAD, mas, sobretudo, perpassa todas as noções teóricas que permitiram os desenvolvimentos da TAD ao longo de sua existência. Dessa forma, a noção teórica transformou-se juntamente com a teoria, de modo que os autores defendem a tese de que o alargamento do objeto de estudo implicou na sua reformulação teórica (BOSCH; GASCÓN, 2006).

⁵⁶ Em oposição a estrutura escolar convencional, a qual Chevallard (2009, p.1) chama de “confortável e enganosa” o PEP corresponde a processos de investigação que envolvem o um grupo de estudantes (X) (alunos de uma escola, pesquisadores, jornalistas, e etc.) que se debruçam sobre uma questão (Q), em um grupo mais restrito, que pode ser inclusive vazio, que é o grupo das ajudas de estudo (Y), onde professor pode estar inserido. Para responder Q, serão mobilizados equipamentos praxeológicos de uma ou mais disciplinas (didática co-disciplinar), onde o trabalho desenvolvido por X é sempre contra um M, onde se buscará a resposta de Q, isto é R[▼], nesse percurso muitas outras respostas parciais e questões secundárias poderão ser encontradas. Esse esquema, também chamado de herbatiano pode ser representado simbolicamente como (S (X;Y;Q→M)↔ R[▼]), (Ibid, p. 2). Além da noção PEP outras noções foram desenvolvidas, como a noção de modelo epistemológico de referência (MER), atividades de estudo e pesquisa (AEP), dentre outras. Em nosso trabalho o foco é no que Chevallard (1992; 1996) chama de “antropologia cognitiva ou antropologia dos saberes”. Ela se constituiu na base para o desenvolvimento das noções posteriores.

Para exemplificar esse posicionamento, tomemos primeiramente as premissas básicas em torno da noção de TD. De acordo com Chevallard (1997), todo projeto social de ensino e de aprendizagem tem na sua essência a dialética entre conteúdos do saber e conteúdos do saber a ensinar. Essa dialética se materializa por meio de manuais e materiais de ensino. Até se tornar um “saber a ensinar”, os saberes passam por transformações e é nesse processo de transformação que reside a noção de transposição didática. Essa transposição pode se referir ao conteúdo específico, em um sentido *scripto senso*, ou ao estudo do processo de investigação mais amplo, isto é, uma transposição didática *lato senso*. (CHEVALLARD, 1997)

Esse processo mais amplo pode ser ilustrado a parte do seguinte esquema:

Figura 4 – O processo de transposição didática.



Fonte: Bosch e Gascón (2006, p.392)

Para Bosch e Gascón (2006), em um primeiro estágio da teorização, a TD cumpre o papel de apresentar a natureza plural dos saberes, além da sua relatividade institucional. O foco dos problemas didáticos se desloca das características individuais dos sujeitos em dada instituição para as práticas institucionais em torno dos saberes, ou seja, os aspectos cognitivos da aprendizagem já não são considerados suficientes para explicar as dificuldades de aprendizagem dos alunos sobre uma determinada noção. Os saberes e suas transformações são, portanto, tomados como unidade de análise que influencia as diferentes atividades (matemáticas ou não) em uma instituição. Além desse papel, a TD traz consigo outros termos não menos importantes para serem considerados na relação didática e nos fenômenos transpositivos. Termos como *noosfera*, *tempo didático*, *o uso do plural para determinar os saberes*, *vigilância epistemológica* são exemplo dessas contribuições (BOSCH; GASCÓN, 2006).

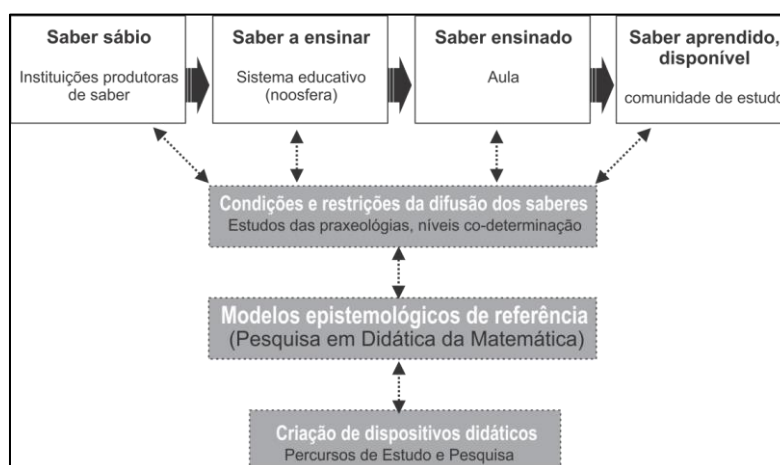
Para Bosch e Gascón (2006), a noção de TD perpassa os desenvolvimentos teóricos da TAD de modo que os componentes transpositivos fazem parte da maioria dos fenômenos associados ao ensino de Matemática: “os fenômenos de transposição didática estão no coração de qualquer problema didático”⁵⁷ (BOSCH; GASCÓN, 2006, p. 396).

⁵⁷ Los fenómenos de transposición didáctica están en el corazón de cualquier problema didáctico.

No caso específico da TAD, Bosch e Gascón (2006) apontam ao menos três grandes contribuições: 1. Ampliação da unidade empírica de análises; 2. A modelização das atividades matemáticas e didáticas; 3. O estudo das restrições em diferentes níveis de codeterminação.

Refletindo sobre as ponderações de Bosch e Gascón (2006), adaptamos o quadro de evolução da TAD e sua relação com a noção de TD para o seguinte:

Figura 5 – Evolução das noções teóricas da TAD



Fonte: próprio autor (2018).

Na figura acima, podemos observar que o processo de transposição didática abriu espaço para que a atividade de pesquisa em Didática da Matemática pudesse direcionar seu foco para as condições e restrições que se manifestam na difusão dos saberes. Esse processo suscitou a necessidade de ampliação do quadro, pois já não bastava considerar o saber como objeto institucional que sofria transformações. Era necessário teorizar sobre o papel dos agentes que se relacionava com esses objetos, o que foi fundamental para a construção da Antropologia Cognitiva, pois, ao se referir à Transposição Didática como uma noção que dá suporte para a compreensão dos percursos pelos quais os saberes passam até se tornarem objeto de ensino, Chevallard (1996) chama atenção para as etapas e os agentes envolvidos nessa transformação, desde pesquisadores, gestores do sistema educacional até autores de livro didático, professor e outros agentes etc.:

O alargamento do quadro, levado a cabo por necessidades de análise conduziu-me a propor uma teorização em que todo objeto possa aparecer: a função logarítmica é, evidentemente, um objeto (matemático), mas há também o objeto “escola”, o objeto “professor”, o objeto “aprender, o objeto “saber”, o objeto “dor de dente”, o objeto “fazer pipi”, etc. Assim, passa-se de uma máquina a pensar um universo didático restrito a um conjunto de máquinas de alcance mais amplo, apto, em princípio, a nos permitir situar a didática no seio da antropologia (CHEVALLARD, 1996, p. 127).

A TAD, como ampliação da Transposição Didática, permite analisar o papel dos atores que compõem os sistemas didáticos e as relações estabelecidas com o saber de forma mais

sistemática e dinâmica. Ao situar a didática no seio da Antropologia e, conseqüentemente, colocar a atividade matemática como uma prática humana, abriu-se a necessidade de explicar como essas práticas eram efetivadas: “admite-se, de fato, que *toda* atividade humana concluída regularmente pode ser incluída em um modelo *único* que se resume aqui à palavra *praxeologia*”⁵⁸ (CHEVALLARD, 1999, p. 1, tradução nossa, grifos do autor). Nesse mesmo texto, Chevallard (1999), ao discorrer sobre as práticas de ensino nas instituições escolares, defende claramente que a noção de praxeologia surgia como desafio teórico, porque era uma ideia em evolução.

Nos anos seguintes a introdução da noção de praxeologia outras noções foram sendo incorporadas como “*níveis de codeterminação*” (CHEVALLARD, 2002), “*modelo epistemológico de referência*” (BOSCH; GASCÓN, 2005) e *PER* (CHEVALLARD, 2006), todas elas importantes nos desenvolvimentos atuais da teoria. Bosch e Gascón (2006) acrescentam que a construção de modelos epistemológicos de referência é parte da natureza das investigações em Didática da Matemática.

O desenho desse cenário que situa a noção de transposição de didática e a teoria em torno dela, como gene da Teoria Antropológica do Didático, nos convida a uma primeira reflexão: como a cognição e sua dimensão psicológica podem ser inseridas como unidade de reflexão no quadro antropológico?

Pensamos que um argumento plausível para a construção de uma resposta a essa indagação pode estar no fato de que o paradigma antropológico, iniciado com a noção de transposição didática, situa a Matemática como uma prática humana. Na relação didática, os sujeitos que efetivam essa prática, ao se relacionarem com o saber, propõem-se a um jogo cuja intenção de ensinar materializa as posições desses sujeitos. Esse jogo, como toda ação humana, é complexo e diversos componentes atuam simultaneamente sobre ele. Aqui nos valem do pensamento de Mauss (2003) que, ao refletir sobre as técnicas da utilização do corpo, conclui:

Concluí que se podia ter uma visão clara de todos esses fatos, da corrida, do nado etc., senão fazendo intervir uma tríplice consideração em vez de uma única, fosse ela mecânica e física, como uma teoria anatômica e fisiológica da marcha, ou, ao contrário psicológica ou sociológica. (MAUSS, 2003, p. 405).

⁵⁸ on y admet en effet que toute activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle unique, que résume ici le mot de *praxéologie*.

Outro argumento fundamental está situado nos próprios desenvolvimentos da TAD. Os percursos que relatamos aqui, sobretudo, guiados pelos colaboradores espanhóis Marianna Bosch e Josep Gáscon, nós apresentamos um quadro desenvolvimentos da teoria que procura sustentar o argumento da noção de Transposição Didática, como elemento que perpassa os desenvolvimento do quadro analítico desde sua gênese. Porém, há outras desdobramentos que não foram citados.

Chaachoua e Bittar (2016) em conferência realizada no LaDiMa, nos apresentaram um panorama da TAD que além dos desenvolvimentos citados por Bosch e Gascón (2006), trazem um novo elemento para o cenário de ampliação da TAD: as praxeologias pessoais.

Ao analisar trabalhos de tese que utilizaram os quadro teóricos da TAD ao longo dos últimos 30 anos, Chaachoua e Bittar (2016) agruparam através dessas pesquisas três períodos e os seus diferentes modos de olhar para a dimensão cognitiva em relação aos sujeitos. O período antes de 1999, o período de 1999-2006 e o período pós 2006. Para os autores nos seus desenvolvimentos a TAD sempre considerou o lugar desse sujeito especialmente com noção de relação pessoal, porém os olhares foram distintos nesses períodos:

Este primeiro período foi marcado pelo uso da TAD para questões de assujeitamentos dos sujeitos à uma ou várias instituições. (...) O segundo período se situa após a introdução da praxeologia como um modelo para descrever a relação institucional, relação que condiciona a relação pessoal de um sujeito a um objeto do saber. O aluno é então estudado para entender melhor as instituições às quais ele é assujeitado e desenvolver ou testar novas praxeologias escolares. A relação pessoal também é descrita pela praxeologia quando ela está em conformidade com a relação institucional. (...) O terceiro período é caracterizado pelo uso de modelo praxeológico para a descrição da relação pessoal, inclusive quando, às vezes ela não está em conformidade com a relação institucional. A aprendizagem é, então, reivindicada por aqueles que usam a TAD e o aluno é estudado por si mesmo, com, em particular, seus conhecimentos errôneos. (CHAACHOUA; BITTAR, 2016, p. 12-14)

Ao analisar a fala de Chaachoua e Bittar (2016) vamos encontrar eco para nossa discussão, exatamente quando a partir do terceiro período de desenvolvimento se desenha uma tendência a olhar o sujeito e sua relação pessoal no sentido da aprendizagem. Ao *reivindicar* a aprendizagem como dimensão de estudo na TAD, inevitavelmente as pessoas e o seu assujeitamentos nas instituições ganham holofotes no cenário de pesquisa. O desenvolvimento trazido por essa postura é o que Croset e Chaachoua (2016) vão chamar de praxeologias pessoais:

Propomos estender o uso do modelo praxeológico para descrever a relação pessoal de um aprendiz com um conhecimento, introduzindo a noção de praxeologia pessoal. Ter o mesmo modelo para descrever tanto a relação pessoal de um aprendiz com um conhecimento quanto a relação institucional permite estudar a transposição didática interna das praxeologias institucionais. Para justificar a existência e a necessidade desse modelo, procuramos questionar a consideração do sujeito cognitivo na Teoria da Didática Antropológica (TAD). Para tanto, analisamos diversos trabalhos de pesquisa envolvendo a noção de relação pessoal que, em nossa opinião, é potencialmente portadora da dimensão cognitiva do sujeito⁵⁹ (CROSET; CHAACHOUA, 2016, p. 161, tradução nossa).

O destaque feito por Chaachoua e Croset (2016) para o potencial do modelo de praxeologias pessoais para explorar a dimensão cognitiva do sujeito na TAD. Como retomaremos mais adiante, o modelo oferecido pelos autores busca a modelização das praxeologias mobilizadas pelos sujeitos no seio das instituições. Ao reclamar essa dimensão individual os autores abrem novos flancos de discussão, que só revelam à nós a importância da discussão que estamos empreendendo. De fato, desde 2006, com a realização do II Congresso Internacional sobre a TAD essas discussões vem tomando fôlego.

Para Ricco e Menotti (2007), a TAD e suas ferramentas podem contribuir no sentido de complementar o entendimento do desenvolvimento cognitivo dos sujeitos. A complementariedade entre a TAD e teorias que tratam da dimensão cognitiva pode ajudar na explicação dos fenômenos que se apresentem frente à aprendizagem. No entanto, como lembra as autoras, essa ainda é um via quase inexplorada: “há uma ausência exploração da relação pessoal, nada é dito sobre os mecanismos e processos cognitivos no trabalho pelo sujeito na evolução da relação pessoal”⁶⁰ (RICCO; MENOTTI, 2006, p. 570).

Em sentido semelhante, Araya e Matheron (2006) destacam que a porta de entrada para a dimensão cognitiva da atividade matemática é a perspectiva relacional da TAD, ou seja, a relação aos objetos. Nesse caso, *objetos do saber* se constitui na noção que permite tratar a aprendizagem como um fenômeno ligado à relação pessoal de um sujeito com o saber. Assim,

⁵⁹ nous proposons d'étendre l'utilisation du modèle praxéologique pour décrire le rapport personnel d'un apprenant à un savoir en introduisant la notion de praxéologie personnelle. Le fait de disposer d'un même modèle pour décrire à la fois le rapport personnel d'un apprenant à un savoir et le rapport institutionnel permet d'étudier la transposition didactique interne des praxéologies institutionnelles. Pour justifier l'existence et le besoin de ce modèle, nous avons cherché à questionner la prise en compte du sujet cognitif au sein de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD). Pour cela, nous avons analysé différents travaux de recherche où intervient la notion de rapport personnel qui, selon nous, est potentiellement porteuse de la dimension cognitive du sujet.

⁶⁰ Faute d'exploration de ce rapport personnel rien n'est dit sur les mécanismes et les processus cognitifs à l'œuvre par le sujet dans l'évolution du rapport personnel.

noções como *organizações praxeológicas*, *níveis de codeterminação* podem contribuir para o entendimento de diversos fenômenos cognitivos, dentre eles, a memória. (ARAYA; MATHERON, 2006).

Ao retomar a figura proposta por Bosch e Gascón (2007) veremos que a noção de comunidade de estudo, um desdobramento dos desenvolvimentos da TAD na Espanha, se apresenta como um cenário, onde os sujeitos assumem o papel de fazer matemática.

A noção de relação pessoal ao saber está no coração dos desenvolvimentos da TAD. Como uma teoria relacional, a TAD nos permite analisar os processos de transposição de maneira detalhada. O cerne da teoria está em considerar o estudo das relações mantidas entre objetos, pessoas e instituições a partir da problemática ecológica, isto é, o questionamento do que existe e por quê (ARAÚJO, 2009).

A problemática ecológica permite a ampliação do quadro de análise e abordagem dos problemas relacionados ao saber a ensinar. As inter-relações entre objetos pressupõem uma estrutura ecológica no seio das instituições que dependem dessas relações. Na teoria, termos como *habitat*, *nicho*, *ecossistema*, dentre outros, assumem significados na ecologia dos saberes. Perguntas como “o que permite a vida de determinados objetos em uma instituição” são vistas sempre de um ponto de vista da interação ecológica, ou seja, relacional. A TAD insere a didática em uma antropologia do conhecimento, isto é, em uma antropologia cognitiva (ALMOULOU, 2007).

A antropologia cognitiva parte de noções primitivas, assim chamadas por Chevallard (1992; 1996), de objeto (O), pessoas (X), Instituições (I) e as relações entre pessoas e objetos $R(X,O)$, bem como relações entre instituições e objetos $R_I(O)$. Esses entes compõem os termos centrais da axiomática proposta pelo autor.

Em termos gerais, os objetos são entidades materiais, ou não, que existem para, pelo menos, um indivíduo. Para Chevallard (1996, p. 127), tudo pode ser considerado um objeto:

Os objetos ocupam, contudo, uma posição privilegiada: são o “material de base” da construção teórica considerada. Da mesma maneira que, no universo matemático contemporâneo, fundado na teoria dos conjuntos, tudo é um conjunto (os próprios números inteiros são conjuntos), assim também, no universo que estou a considerar, todas as coisas são objetos.

Assim, a própria noção de pessoas (X), instituições (I), bem como as relações estabelecidas por esses entes são consideradas objetos. Notemos que a existência do objeto é sempre relacional, ou seja, é a relação de ao menos um indivíduo que o torna existente:

Um objeto existe a partir do momento em que uma pessoa X ou uma instituição I o reconhece como *existente* (para ela). Mais precisamente, podemos dizer que o objeto O *existe* para X (respectivamente, para I) se existir um objeto, que denotarei por $R(X, O)$ (resp. $R_I(O)$), a que chamarei de *relação pessoal de X com O* (resp. *relação institucional de I com O*). (CHEVALLARD, 1996, p. 127, grifos do autor).

Então o objeto $R(X,O)$ diz respeito às relações que uma pessoa (X) mantém com um objeto O. O mesmo vale para as instituições, isto é, $R_I(O)$ denota a relação institucional com o objeto O. Esse conjunto de interações representadas por $R(X,O)$ e $R_I(O)$ denota o que seria a relação de conhecimento na TAD.

Um aspecto que vale ressaltarmos é a abrangência alcançada pela Antropologia Cognitiva. No caso particular da Didática da Matemática, quando nos referimos às relações didáticas em uma sala de aula, por exemplo, podemos estar falando de objetos relativos a conceitos matemáticos bem como às relação mantidas com esses objetos e os sujeitos que participam dessa relação. De outro modo, é possível também vislumbrarmos outros espaços institucionais, no sentido da TAD, onde objetos distintos do exemplo citado, bem como as relações mantidas com esses objetos podem ser modelados.

Para Araya-Chacón (2008), a Antropologia Cognitiva e suas organização permitem a modelização do cognitivo. Em tese, partindo da noção de gestão didática da memória, já discutida por Brousseau e Centeno (1991), ela propõe uma modelização da memória didática e identifica “nove gestos memoriais” desencadeados pelo professor e pelos alunos. A TAD ajudou no sentido não só de modelar as práticas institucionais, mas também para ajudar a identificar a influência desses agentes na gestão didática da memória.

Podemos, então, pensar na natureza cognoscível dos objetos (O). Afinal, é a relação de conhecimento que dá sentido a tais entes. Dizer que mantenho uma relação pessoal com determinado objetivo significa que um dado momento de minha trajetória de vida eu conheci, ou fui apresentado a O. Mas, afinal, que somos nós? Indivíduos? Pessoas? Sujeitos?

Na antropologia cognitiva de Chevallard, acerca da noção de pessoa (X), a primeira distinção que fazemos é entre os termos “indivíduo”, “pessoa” e “sujeito”. Do ponto de vista da Antropologia Cognitiva, cada um de nós é um indivíduo. Já a noção de pessoa (X) corresponde ao par formado pelo indivíduo X e o sistema de relações pessoais $R(X,O)$, em dado momento histórico da vida desse indivíduo. Assim, a noção de pessoa é uma noção dinâmica. Ela evolui com o tempo e depende das experiências de cada indivíduo.

Um dos fatores dessa mudança é o que Chevallard (1996) chama de sujeição institucional. Uma pessoa X torna-se “sujeito” de uma instituição (I) quando se sujeita a ela,

isto é, “metaforicamente, podemos dizer que X se torna um sujeito de I *entrando em I*” (Ibid. p. 130). É a entrada, ou melhor, os processos de assujeitamento, nas diversas instituições, que permitirá a mudança na relação R(X,O) seja pelo conhecimento de novos objetos, seja pela mudança na relação com objetos já conhecidos. É aí que reside a dinamicidade da noção de pessoa X. Por isso, a pessoa muda, conforme vai passando por processos de assujeitamento. Chevallard (2009) destaca que nessa dinâmica o indivíduo é o invariante, isto é, nós mudamos como pessoa, porém o nosso qualificativo de “indivíduo” não varia.

Dizer que a pessoa X muda também pode significar que seu o “universo cognitivo”⁶¹ mudou. De fato, ao apresentar a noção de relação pessoal R (X, O), Chevallard (2009) nos diz que o universo cognitivo de uma pessoa X pode ser representado pelo conjunto:

$$UC (X) = \{(O, R(X;O)) / R(X;O) \neq \emptyset\}$$

Para Chevallard (2009), o termo “cognitivo” não deve ser tomado no sentido intelectualista corrente, o que denota mais uma vez a abrangência da Antropologia Cognitiva:

Deve notar que o termo cognitivo não é tomado aqui em sua acepção intelectualista corrente: eu tenho uma relação pessoal com a minha escola de dente, com a máquina de café da cafeteria, com o pedal do freio de meu carro, etc., todos os objetos que fazem parte do meu universo cognitivo, da mesma forma que inclui, por exemplo, a noção de equação quadrática ou de derivada.⁶² (CHEVALLARD, 2009, p. 2).

Notemos que não faz mais sentido expor outras noções teóricas presentes na Antropologia Cognitiva sem falarmos de um objeto particular – a noção de Instituição:

Uma instituição I é um dispositivo social "total", o que certamente pode ser apenas uma parte muito pequena do espaço social (há "micro-instituições), mas que permite - e impõe - para seus sujeitos, isto é, para pessoas x que vivem e ocupam diferentes posições oferecidas em I, colocando em jogo as maneiras de fazer e de pensar próprios – isto é, as praxeologias⁶³ (CHEVALLARD, 2003, p. 82).

Ao tratar o objeto instituição como dispositivo social total, este precisa ser tomado em um sentido amplo do termo, isto é, menos burocrático, como assevera Chevallard (1996, p.129):

⁶¹ Ênfase nossa.

⁶² Il convient de souligner que l'adjectif *cognitif* n'est pas pris ici dans son acception intellectualiste courante : j'ai un rapport personnel à ma brosse à dents, à la machine à café de la cafétéria, à la pédale de frein de ma voiture, etc., tous objets qui font partie de mon univers *cognitif*, de la même manière qu'en font partie, par exemple, la notion d'équation du second degré ou celle de dérivée.

⁶³ Une institution I est un dispositif social "total" qui peut certes n'avoir qu'une extension très réduite dans l'espace social (il existe des « micro-institutions »), mais qui permet – et impose – à ses sujets, c'est-à-dire aux personnes x qui viennent y occuper les différentes positions p offertes dans offertes I, la mise en jeu de manières de faire et de penser propres – c'est-à-dire las praxéologies.

Na prática por causa do sentido corrente da palavra, alguns leitores poderiam sentir-se surpreendidos ao ver a que objetos eu poderia ser levado a colar esta etiqueta. Uma escola é uma instituição, tal como o é a sala de aula; mas existe igualmente a instituição “família”. A vida cotidiana é uma instituição (num dado meio social), o mesmo acontecendo ao estado amoroso (numa dada cultura), etc.

A dimensão e a abrangência do significado atribuído à noção de instituição promovem algumas reflexões em relação ao seu papel dentro da Antropologia Cognitiva. A primeira diz respeito, como Chevallard (2009) bem coloca, ao seu papel na construção do universo cognitivo dos seus sujeitos: “desde o nascimento, cada indivíduo é assujeitado – quer dizer, uma vez apresentado e sustentado por várias instituições”⁶⁴ (Ibid. p. 2, tradução nossa).

A consequência dessa observação é que a pessoa X se constitui de uma multiplicidade de assujeitamentos, “na medida em que é sujeito de uma multitude de instituições, que o indivíduo x se constitui em uma pessoa”⁶⁵ (CHEVALLARD, 2009, p. 2).

Outro aspecto, não menos relevante, reside no fato de que as instituições como dispositivos sociais, ao modelarem e interferirem na construção do universo cognitivo das pessoas, através do conjunto de suas relações pessoais que são produzidas, têm na participação efetivas dos seus sujeitos sua razão de ser: “reciprocamente, uma instituição não pode existir sem indivíduos. Estes são os atores da instituição que a fazem viver, às vezes, alterando seu estilo de vida”⁶⁶ (CHEVALLARD, 2009, p. 3).

Essa dialética entre indivíduos e instituições implica no estado de simbiose de modo que, para Chevallard (2009), as pessoas não somente fundam as instituições, como também garantem seu funcionamento, à medida que a privação da pessoa da participação nas instituições corresponde à definição de exclusão ou, em um sentido mais agudo, a sua “morte social”.

Ao tomarmos a pessoa X como resultado das múltiplas sujeições que mantém com diversas instituições, inclusive simultaneamente, podemos observar que as instituições não só interferem na construção do UC(X), como são responsáveis pelas formas de ver e agir e se relacionar com o mundo. Essa inferência tem um aporte nas palavras do próprio Chevallard (1989):

⁶⁴ Dès sa naissance, tout individu est ainsi *assujetti* à – c’est-à-dire à la fois *soumis* à et *soutenu par* – de multiples institutions.

⁶⁵ Par le fait qu’il est le sujet d’une multitude d’institutions, que l’individu x se constitue en une *personne*.

⁶⁶ Réciproquement, une institution *I* ne saurait exister sans sujets. Ceux-ci sont les acteurs de l’institution *I* et font que celle-ci continue de vivre – parfois en changeant son mode de vie.

Dessa relação pessoal resulta, notavelmente, tudo aquilo que acreditamos poder ser dito – em termos de “saber”, “saber-fazer”, “concepções”, “competências”, “domínio”, “imagens mentais”, “representações”, “atitudes”, “fantasias”, etc. – de *X* a respeito de *O*^S. Tudo aquilo que pode ser enunciado – corretamente ou não, pertinentemente ou não – deve, na melhor das hipóteses, ser compreendido como um *aspecto* da relação pessoal de *X* com *O*^S.⁶⁷(CHEVALLARD, 1989, p. 218, tradução nossa).

Outro argumento teórico que nos leva a sustentar essa inferência a respeito da natureza de *I* repousa na indicação de Chevallard (1996) da obra da antropóloga social Mary Douglas, cuja noção de instituição seria próxima do sentido que o termo assume na antropologia cognitiva.

Douglas (1986; 2007) defende a tese de que as instituições sociais influenciam o pensamento dos seus membros. Ela destaca que essa influência se manifesta, especialmente, quando é exigida a tomada de decisões importantes pelos sujeitos que recorrem ao seu repertório mental balizado pelas Instituições. Essas, por sua vez, influenciam cognitivamente, moralmente e socialmente a vida dos sujeitos em sociedade. A sujeição às instituições é, portanto, balizadora da construção social dos sujeitos. Para Chevallard (1996, 2003, 2009), as pessoas são também resultados das sujeições.

Douglas (1986) apoia sua tese nas ideias de Emile Durkheim e Ludwick Fleck, que, desde as primeiras décadas do século XX, concordavam com a noção de que a solidariedade autêntica só ocorre quando os indivíduos compartilham categorias de pensamentos. Esta tese vai de encontro à teoria da escolha racional, apoiada na axiomática da filosofia racional, que vê cada indivíduo pensante como soberano, não tendo influências externas nas suas categorias de pensamento. Em sua defesa, Douglas (1986) apresenta diversos elementos que denunciam as limitações da teoria da escolha racional. Para a autora, a necessidade de compreensão sobre a influência social na cognição humana é emergente. Por isso, “[tornava-se] necessária uma teoria das instituições que [modificasse] a atual visão não-sociológica da cognição humana, bem como uma teoria cognitiva que [oferecesse] um suplemento às debilidades da análise institucional.” (DOUGLAS, 2007, p. 11).

Aqui já temos um prólogo da complexidade com a qual Douglas (1986; 2007), ao tratar do papel das instituições na sociedade, está tratando dos sujeitos que compõem essas instituições e, ao mesmo tempo, a própria sociedade. Ao passo que reconhece essa influência,

⁶⁷ De ce rapport personnel relève notamment tout ce qu'on croit ordinairement pouvoir dire - en termes de «savoir», de «savoir-faire», de «conceptions», de «compétences», de «maîtrise», d'«images mentales», de «représentations», d'«attitudes», de «fantasmes», etc. de *X* à propos de *O*^S. Tout ce qui peut être énoncé - à tort ou à raison, pertinentement ou non - doit être tenu (au mieux) pour un aspect du rapport personnel de *X* à *O*^S.

a autora destaca que é preciso entender a cognição também por essa ótica, ou seja, a formação da cognição está fortemente atrelada à atuação desses sujeitos nas diversas instituições.

A descrição do papel institucional na cognição dos sujeitos, dada por Douglas (1986; 2007), bem como o papel na formação do universo cognitivo dos sujeitos, apontada na Antropologia Cognitiva de Chevallard (1996), nos fornecem pistas para a compreensão de possibilidades de diálogos com a teoria da cognição situada de Lave e Wenger (1991). Nesta última, a participação e o engajamento dos sujeitos nas comunidades de prática são o meio pelo qual a aprendizagem ocorre, ou seja, a cognição é sempre um ato situado, coletivo e mobilizado pela participação nessas comunidades.

Em uma interpretação semelhante à TAD compreende que é nas instituições que os sujeitos formam o universo cognitivo CHEVALLARD (2009). É na sujeição, que também é um processo de participação e engajamento, que a relação pessoal dos sujeitos é modificada frente aos objetos que vivem naquela instituição. Dizemos isso sobre o processo de sujeição, pois para Chevallard (2009) o termo sujeição não deve ser tomado no sentido de submissão ou passividade. A participação dos sujeitos na instituição é fundamental.

De forma ilustrativa, podemos pensar que o aprendiz de corte e costura⁶⁸, ao se submeter ao aprendizado daquela profissão, se sujeita a um tipo de instituição específica que é representada pelo seu mestre. A relação pessoal do aprendiz $R(X,O)$, onde O representa os diversos objetos ligados à profissão, depende da participação desse aprendiz nessa instituição. Podemos naturalmente ter aprendizes cujas relações pessoais com os objetos de saber são mais próximas do que os seus mestres esperam, mas também aprendizagens que tem uma relação mais distante. Esse fenômeno está relacionado, segundo Chevallard (2009), com a relação institucional com o objeto $R_I(O)$ que é esperada, ou seja, uma relação oficial que pode atribuir à relação pessoal dos sujeitos um status de conformidade ou não conformidade com essa relação oficial. A título de ilustração, retomando o mesmo exemplo, podemos dizer que, em uma escola de aprendizes de corte e costura, nem todos os indivíduos ascenderão à posição de mestre em corte e costura. O mesmo ocorre em outras instituições que se prestam ao ensino de um ofício. Sobre esse aspecto, retomaremos essa discussão de forma detalhada mais à frente.

Antes de prosseguirmos com a descrição das noções teóricas da TAD, cabe uma observação importante que diz respeito à natureza não passiva dos sujeitos no seio das instituições, bem como à participação em uma comunidade de práticas. Para Chevallard (1989), não faz sentido restringir o sentido da palavra “sujeição”. A palavra sujeição não é tomada na

⁶⁸ Escolhemos esse exemplo numa alusão as observações de Jean Lave nas comunidades étnicas Vai e Gola.

teoria com sentido pejorativo. Embora a condição de assujeitamento, possa ser enquadrada numa dimensão da relação de poder, assujeitamento na TAD faz parte das nossas adesões voluntárias:

A sujeição é essa ligação que nos permite existir como ser social: o assujeitamento é o negativo do poder, e pelo qual nós temos acesso ao real e à ação. É nesse sentido, em particular, que é preciso compreender a afirmação, feita mais acima, segundo a qual “um indivíduo concreto só pode se relacionar com um saber ao entrar numa relação com uma ou mais instituições”. Longe de se opor à liberdade do indivíduo, sua sujeição apresenta-se como a renúncia que permitirá efetivar a sua liberdade, ao fornecer formas concretas, inclusas no real social⁶⁹ (CHEVALLARD, 1989, p. 35, tradução nossa).

Mais adiante na sua teorização, Chevallard (1992; 1996) retoma esse tema e destaca:

Uma pessoa X está sujeita a uma série de instituições. Introduzo aqui o axioma segundo o qual uma pessoa não é, na realidade, mais do que *a emergência de um complexo de sujeições institucionais*. Aquilo que se chama “liberdade” da pessoa surge então como o efeito obtido em consequência *de uma ou várias sujeições institucionais contra outras*. (Ibid. p. 132, grifos do autor).

Essa dinâmica de múltiplas, e até conflitantes, sujeições é, para nós, um traço fundamental que mostra que na Antropologia Cognitiva na qual a TAD se sustenta a dimensão do indivíduo é levada em consideração, embora as instituições sejam, em geral, espaços sociais de práticas coletivas. Douglas (1986) destaca esse traço ao analisar o pensamento de Durkheim, que assume que no conflito entre sociedade e indivíduo reside em um erro clássico que é negar que nosso pensamento tem origens sociais. Aquilo que relegamos ao pensamento individual como classificações, operações lógicas só faz sentido em contextos específicos, ou seja, são categorias dadas pela própria sociedade:

Emile Durkheim tinha outro modo de pensar a respeito do conflito entre o indivíduo e a sociedade. Ele o transferiu para os elementos conflitantes na pessoa. Para ele o erro está em negar as origens sociais do pensamento individual. As classificações, as operações lógicas e as metáforas que nos guiam são dadas ao indivíduo pela sociedade. (DOUGLAS, 2007, p.24)

De modo geral, ao reconhecer a importância das instituições para a nossa cognição, Douglas (1986; 2007) defende que as instituições não usurpam a identidade individual de cada

⁶⁹ L’assujettissement est ce lien qui nous permet d’exister comme être social: l’assujettissement est le négatif de la puissance, et ce par quoi nous accédons au réel et à l’action. C’est en ce sens, en particulier, qu’il faut entendre l’affirmation, posée plus haut, selon laquelle «un individu concret ne peut entrer en rapport avec un savoir qu’en entrant en relation avec une ou des institutions». Loin de s’opposer à la liberté de l’individu, son assujettissement apparaît comme le renoncement qui permettra de rendre sa liberté effective en lui donnant des formes concrètes, inscrites dans le réel social.

sujeito. O processo de sujeição não retira identidade dos sujeitos, mas, ao contrário, confere identidade. Nas palavras da autora, não é qualquer grupo que deve receber o nome Instituição:

Já se afirmou com muita propriedade que os indivíduos sofrem devido à limitação imposta por sua racionalidade e é verdade que, ao estruturarem as organizações, eles ampliam sua capacidade de lidar com as informações. Já se demonstrou como as instituições precisam ser estabelecidas por meio do aparato cognitivo (DOUGLAS, 1986, p. 63).

Os indivíduos se beneficiam, portanto, das instituições na resolução de problemas e na ampliação de sua capacidade para lidar com um volume de informações de que, sozinhos, não dariam conta. O discurso se torna possível a partir da concordância entre categorias básicas. As instituições têm esse papel de dar uniformidade as ações coletivas dos sujeitos. No caso da Ciência, por exemplo, parece difícil imaginarmos cientistas sozinhos e livres de pressões impostas pela sociedade. Somos diariamente convidados a nos filiar, associarmos-nos. Mesmo assim, não perdemos nossa identidade, tampouco a nossa capacidade individual de criação, porém essa criação é sempre remete a alguns modelos institucionais.

Feita essa observação sobre as instituições e sobre o papel dos indivíduos, agora podemos entrar no universo institucional descrito na TAD. Aqui, aparecem novas noções que seguem ampliando o leque de explicações presentes na teoria.

Até aqui a arquitetura proposta na antropologia nos permite identificar objetos como pessoas (X), instituições (I) e as relações que este mantém com outros objetos que forma o universo cognitivo da pessoa (X), mas também das instituições I , ou seja, para Chevallard (2009), os termos pensados para os indivíduos, por exemplo, $R(X,O)$, podem ser pensados também para instituições. De fato, $R_I(O)$ corresponderia a uma relação que uma dada instituição tem com determinado objeto O , logo pode-se também falar em um universo cognitivo institucional.

Uma implicação direta desta consideração é que a sujeição em I permite aos indivíduos a entrada nesse universo de relações existentes em uma dada instituição, porém a entrada em I não garante que $R(X,O)$ coincidirá com $R_I(O)$. Assim, outros objetos precisam ser introduzidos para a compreensão da dinâmica cognitiva que ocorre no seio das instituições.

Quando uma pessoa (X) entra em uma instituição, ela pode se deparar com objetos já conhecidos, mas também com novos objetos. Como Chevallard (1996) postula, se $R(X,O)$ é não vazia, ou seja, diz-se que X conhece O . Analogamente, se $R(X,O) = \emptyset$, então X não conhece O . De fato, para Chevallard (1996), a aprendizagem ocorre quando $R(X,O)$ é modificada: “há, pois, aprendizagem (para a pessoa X , relativamente ao objeto O) quando

$R(X,O)$ se altera. Bem entendido, é possível que $R(X,O)$ não se altere: dizemos então que *X nada aprendeu*” (CHEVALLARD, 1996, p.130).

Essa definição de aprendizagem nos indica que os sujeitos, ao entrarem em I, poderão traçar trajetórias diferentes. De fato, Chevallard (1996) chama atenção para a não homogeneidade no espaço institucional. A própria definição de dispositivo social não permitiria que assim o fosse porque, no seio das instituições, os sujeitos assumem diferentes posições (p) em relação a um objeto O , de modo que essas diferentes posições implicam em diferentes relações com esse mesmo objeto.

Novamente, retomando o exemplo do aprendiz de corte e costura, podemos imaginar as diferentes posições assumidas pelos recém-chegados e os veteranos em dado momento da relação com um objeto O dessa instituição, da mesma forma que mestre e aprendiz ocupam posições diferentes frente a determinado objeto. Poderemos vislumbrar o caso em que um determinado sujeito ascende à condição de mestre. Poderemos, então, dizer que X mantém uma $R(X,O)$ muito próximo do que a Instituição citada espera. Mas também é possível aludir a uma situação que determinado sujeito mantenha com O relações bem diferentes do que a relação institucional preconiza.

Na TAD, essas situações correspondem a objetos específicos. Uma delas é a noção de “sujeito adequado”. A entrada de um sujeito em I pode introduzir alterações cognitivas no $UC(X)$. Quando essas alterações estabelecem certa correspondência entre $R(X,O)$ e $R_I(O)$, dizemos que $R(X,O)$ é considerada em conformidade com a relação institucional que é esperada em dada posição p do sujeito X . Logo X é tido como um sujeito adequado. Consequentemente, quando $R(X,O)$ é considerada em não conformidade, X assume a condição de um sujeito cuja relação seria desadequada do ponto de vista institucional.

A relação de conformidade ou de não conformidade abre espaço para falarmos de uma avaliação institucional que corresponde ao conjunto de mecanismos desenvolvidos pela instituição para atribuir o julgamento de conformidade. Essa avaliação institucional é permitida através da existência de uma componente pública na relação pessoal $R(X,O)$, isto é, tudo aquilo que I pode ver da participação de X nas atividades institucionais. Do mesmo modo, $R(X,O)$ comporta uma componente privada que não é visível para I. É por meio dessa componente privada que é possível ao sujeito viver assujeitamentos simultâneos e as vezes conflitantes em relação a $R_I(O)$, ela também permite que a pessoa possa viver a sua adesão a I *como uma adesão voluntária, fruto do seu livre arbítrio e das suas convicções pessoais.*(CHEVALLARD, 1996, p.133, grifo do autor).

Outros termos comumente importantes são transpostos da Teoria da Transposição Didática, bem como da Teoria das Situações Didáticas. Assim como era possível falar de tempo didático nos fenômenos ligados à TD, Chevallard (1996) fala da existência também de um tempo institucional (t_i), ou seja, a dinâmica institucional depende de uma dinâmica temporal. Da mesma forma como nas relações didáticas a gestão do tempo didático influencia na dialética entre novos e antigos objetos, nesse caso objetos de saber. No âmbito das instituições, o tempo institucional é responsável pelo aparecimento ou desaparecimento de objetos, de fato, Chevallard (1996, p. 129) destaca que “todas as noções relativas I dependem do t_i ”.

Outras duas noções fundamentais, diretamente emprestadas dos desenvolvimentos teóricos de Brousseau (1996), são a de contrato institucional e a de meio institucional, em uma referência direta às noções de contrato didático e de *milieu*.

O Contrato institucional é o responsável pela dinâmica das relações $R_I(O)$ em uma dada instituição. Ele corresponde às expectativas institucionais em relação ao objeto O, ou seja, ele reside na relação oficial da instituição com O de maneira que ele é materializado a partir das praxeologias propostas para um saber a ensinar. Portanto, o modelo “epistemológico-didático” de referência⁷⁰ de uma instituição revela, em certa medida, aspectos desse contrato institucional, ou seja, as relações institucionais que se esperam dos sujeitos em uma dada posição p em relação à O.

De acordo com Vu Nhu (2009), o contrato institucional pode ser identificado em dois níveis: o do contrato institucional e o do contrato didático. Enquanto o primeiro representa uma característica mais global das relações institucionais, o segundo se apresenta como uma dimensão empírica do que efetivamente ocorrem nas relações didáticas que perpassam a instituição. Naturalmente, o contrato didático também sofre influências do contrato institucional:

⁷⁰ O que chamamos de modelo epistemológico-didático de referência está bem próximo das noções apresentadas por Bosch e Gascón (2010). Para os autores a pesquisa tem como ponto de partida a compreensão dos modelos didáticos de referências em dada instituição (MDR). Esses modelos dominantes relevam a dinâmica das relações institucionais. A pesquisa em didática requer, portanto, não só identificação desses modelos, mas também a construção de modelo epistemológico de referência (MER) que dão sustentação à investigação proposta. Cabe a observação que o termo “epistemológico” também se refere à dimensão didática desse modelo (BOSCH e GASCÓN, 2010).

Feito empiricamente a partir das praxeologias a ensinar e textos do saber sábio, como manuais ou tratados acadêmicos, este modelo permite contabilizar as relações institucionais aos objetos do saber implicados nas praxeologias a ensinar. Ele também permite compreender as restrições que pensam sobre a instituição de ensino e os contratos estabelecidos entre os sujeitos da instituição relativamente aos objetos de saber dos domínios⁷¹ (VU NHU , 2009, p. 22, tradução nossa).

Em nossa pesquisa, os objetos de saber de que tratamos estão no domínio da probabilidade. Portanto, o contrato institucional na instituição licenciatura em matemática está relacionado em um sentido global ao próprio curso, mas também ao componente curricular dedicado a discutir esses objetos. Durante a vigência desse componente curricular, estabelece-se um contrato didático que, de certa forma, carrega também as expectativas institucionais das relações que serão mantidas em relação aos objetos que fazem parte do domínio da probabilidade. O estudo do modelo epistemológico-didático dominante nesse recorte do universo institucional nos guiará na compreensão das mudanças relacionais que sujeitos observados experimentam.

Nossa reflexão teórica sobre o contrato institucional está balizada pelas indicações de Birebent (2007), para quem o contrato institucional cumpriu o seguinte papel em relação ao domínio do cálculo numérico, objeto do estudo em sua pesquisa:

- Indica como se comportar em relação a O, em I, para os alunos e para o professor (as expectativas de O para I);
- Produz uma clivagem topogênica entre o aluno e o professor em relação a O em I;
- Assegura, por meio de pausas / transições ou repetições / omissões, o avanço do tempo didático para O (cronogênese e mudanças nos estados contratuais);
- Determina um campo de restrições e condições para as praxeologias ensinadas;
- Constitui uma matriz de contratos didáticos para objetos o_i institucionalmente associados ao cálculo numérico⁷² (BIREBENT, 2007, p. 316).

⁷¹ Fabriqué empiriquement à partir des praxéologies à enseigner et des textes « savants » comme des manuels ou des traités universitaires¹⁶, ce modèle doit permettre de rendre compte des rapports institutionnels aux objets de savoir impliqués dans les praxéologies à enseigner. Il doit aussi permettre de comprendre les contraintes qui pèsent sur l'institution d'enseignement et le processus de contractualisation entre les sujets-acteurs de l'institution relativement aux objets de savoir des domaines.

⁷² - Énonce la manière de se comporter par rapport à O, dans I, pour les élèves et pour l'enseignant (les attentes de I relativement à O);
 - fabrique un clivage topogénique entre l'élève et l'enseignant relativement à O dans I;
 - assure, au moyen de ruptures / transitions ou de reprises / oublis, l'avancée du temps didactique pour O (chronogénese et changements d'états du contrat);

Chevallard (1989, p. 4, tradução nossa) destaca também as relações entre o contrato institucional e o contrato didático, prevendo inclusive rupturas como fenômenos que influenciam a dinâmica das relações institucionais:

Para cada objeto institucional O , a ecologia institucional traz certos objetos institucionais o como *pertinentes* em relação a O no que concerne à posição p , isto é, ela traz os objetos, tais que a relação $RI_p(O)$ pressupõe certas propriedades das relações $RI_p(o)$. No caso em que estes requisitos estão satisfeitos, diremos que a relação $RI_p(o)$ é *apropriada* a $RI_p(O)$; caso contrário, falaremos de *ruptura* do contrato institucional. Veremos que, no caso de instituições de *ensino*, tais rupturas são *sistematicamente* provocadas por meio de perturbações “externas”, cujo efeito é a evolução do sistema de objetos e de relações institucionais. O *problema fundamental do ensino* é, então, a criação e o controle dessas perturbações, a fim de se desenvolver o contrato didático⁷³.

Até aqui, a exposição que ora fazemos da Antropologia Cognitiva mostra, dentre outros aspectos, que a característica relacional contrasta com a perspectiva ecológica. Para nós, isso quer dizer que os fenômenos transpositivos ligados aos objetos do saber, às relações pessoais e institucionais preconizadas, bem como aos papéis e posições assumidos por sujeitos nas instituições, são matéria-prima de uma tessitura complexa do universo cognitivo social em torno das pessoas e das instituições que se pretendem analisar. As instituições cumprem um importante papel na formação do UC(X), à medida que o assujeitamento de X nas instituições é que permite a estas sua existência. Logo, nossa pesquisa, ao propor olhar para a dimensão psicológica dos sujeitos na perspectiva da Antropologia do Didático, assume também que a dinâmica das relações institucionais não só provoca nos sujeitos mudanças no seu universo cognitivo, mas também permite enxergar esse sujeito cognitivo. O reflexo dessa percepção são as posições que X assume frente a O no contexto institucional, de modo que, se X muda, muda também a instituição.

- détermine un champ de contraintes et de conditions pour les praxéologies enseignées;
- constitue une matrice des contrats didactiques pour les objets o_i institutionnellement associés au calcul numérique.

⁷³ Pour chaque objet institutionnel O , l'écologie institutionnelle fait apparaître certains objets institutionnels o comme pertinente par rapport à O relativement à la position p , c'est-à-dire qu'elle fait apparaître des objets tels que le rapport $R_{i,p}(O)$ présuppose certaines propriétés des rapports $R_{i,p}(O)$. Dans le cas où ces exigences sont satisfaites, on dira que le rapport $R_{i,p}(O)$ est idoine à $R_{i,p}(O)$; dans le cas contraire, on parlera de rupture du contrat institutionnel. On verra que, dans le cas d'institutions d'enseignement, de telles ruptures sont systématiquement provoquées par le moyen de perturbations «extérieures», dont l'effet est de faire évoluer le système des objets et des rapports institutionnels. Le problème fondamental de l'enseignement est alors celui de la création et du contrôle de ces perturbations, en vue de faire évoluer le contrat didactique.

De modo geral, a entrada dos futuros professores na licenciatura em Matemática é que permite a existência dessa instituição. Cada futuro professor é uma pessoa que, além do seu histórico de sujeições, é sujeito simultâneo de outras instituições. Ao aceitar viver as relações previstas naquele contrato institucional, submete-se aos contratos didáticos que ali se desenvolvem. Cria, alimenta e vê frustradas algumas de suas expectativas. Participa de negociações de significados, experimenta rupturas, descobre e ressignifica relações com objetos. O assujeitamento pressupõe a decisão de participar, de se engajar na vida institucional e nas relações que ela manifesta. A vida institucional e o conjunto de relações para com os objetos que vivem naquele espaço são materializados nas atividades que lhe são propostas, isto é, na práxis da instituição.

O cenário do parágrafo anterior foi tomando para a licenciatura em Matemática como um todo, mas, de acordo com o próprio Chevallard (1996), uma instituição abriga também outras instituições. A licenciatura é parte de uma instituição maior que é a própria universidade, que responde ao nível de codeterminação didática que é a sociedade. Por sua vez a sala de aula de Introdução à Probabilidade como instituição dentro da Licenciatura, também estaria submetida as influências desses níveis superiores. Assim que que relações emergem nessa instituição? Que conflitos são enfrentados pelos sujeitos dessa instituição? O que é possível dizer sobre a cognição que se desenvolve nesse ambiente?

É importante reparar que tanto o exemplo do aprendiz de corte e costura como a descrição que fizemos da Antropologia Cognitiva, bem como a tentativa de contextualização dos parágrafos anteriores, nos conduzem a pensar nas instituições como espaços unicamente de ensino ou, mais comumente, em escolas. No entanto, na descrição feita por Chevallard (1996), essa modelização se aplica a outros tipos de instituições. Por essa razão, ele intitula o modelo teórico de Antropologia Cognitiva. Para Chevallard (1996), o didático se manifesta na intenção de ensinar, embora, como ele mesmo ressalta, seja difícil pensar em uma instituição em que o didático não esteja presente, ao menos implicitamente:

A este respeito, o ponto de que temos de partir é o seguinte: *qualquer instituição é, em certa medida, uma instituição didática*. Ou, para dizer de outra forma: qualquer *educação* institucional comporta uma parte maior ou menor de *instrução* institucional (naquilo que a que chamarei adiante, genericamente, escolas, a instrução é o aspecto essencial da educação). (CHEVALLARD, 1996, p.133).

Assim não soaria com estranheza pensar em termos como avaliação institucional, contrato institucional, dentre outros, em instituições que não tenham semelhança com o que acreditamos ser uma escola, como instituição que representa o ensino “formal”.

Chevallard (1996) ressalta esse aspecto ao nos conduzir à noção de Didática Cognitiva. Ao destacarmos o papel didático das instituições, sob a tese de que a intenção didática sempre está presente nas relações institucionais, passamos de uma Antropologia Cognitiva para uma Antropologia Didática do Conhecimento.

Com o argumento de que o didático é *denso* no cognitivo, Chevallard (1996) sustenta que a intenção didática é materializada nas Instituições através de outra instituição chamada de Sistema Didático (SD). Nele, estão presentes um ou mais sujeitos da Instituição I, que mantêm relação com um objeto O, através de investimentos didáticos. Aqui, cabe, segundo Chevallard, a noção de *mileu* e de contrato didático, cunhadas por Brousseau (1986), isto é, na problemática ecológica (conjunto de condições e de restrições) dos sistemas didáticos, é necessário que haja um *mileu* e um contrato didático estabelecidos.

O didático entra em cena na intenção de ensinar. Quando Lave (1988) decidiu olhar para a cognição em ambientes não formais, ela destacou uma característica peculiar de muitas instituições, por vezes, a relação entre novatos e veteranos, não se constitui numa intenção clara de “ensinar algo alguém”. Porém, ela reconhece que, mesmo assim, as pessoas aprendem. Para Chevallard (1996), parece-nos que não faz sentido falar em uma total ausência do “didático” em certas situações, porque o que muda é o tipo de sistema didático que se estabelece. Aqui recorremos à Antropologia de Mauss (1935; 2003), que destaca que a imitação, por exemplo, é uma forma legítima de aprendizado. Isso acontece com crianças mas também com adultos. Para ele, o ato imitador corresponde a componentes biológicos, sociais e também psicológicos:

Em todos esses elementos da arte de utilizar o corpo humano os fatos de educação predominavam. A noção educação podia sobrepor-se à de imitação. Pois há crianças, em particular, que têm faculdades de imitação muito grandes, outras muito pequenas, mas todas se submetem à mesma educação (...) o que se passa é uma imitação prestigiosa. A criança, como o adulto, imita atos bem-sucedidos que ela viu ser efetuados por pessoas nas quais confia e que têm autoridade sobre ela. É precisamente a noção de prestígio da pessoa que faz o ato ordenado, autorizado, provado, em relação ao indivíduo imitador, que se verifica todo o elemento social. No ato imitador que se segue, verificam-se o elemento psicológico e o elemento biológico. Mas o todo, o conjunto é condicionado pelos três elementos indissolivelmente misturados (MAUSS, 2003, p. 405).

Podemos pensar que, em uma dada instituição, como a participação em ritual religioso de uma comunidade, “o sistema didático” que conduz os mais novos a “aprenderem” os ensinamentos, ou mesmo o próprio ritual, pode ter a característica segundo a qual a imitação corresponde à estratégia pela qual os neófitos aprendem sobre essa prática. O didático estaria presente nessa situação sobre outros aspectos.

O exemplo acima nos faz pensar, na asserção de Chevallard (1996), que a Antropologia Cognitiva conduz a uma Antropologia Didática do Conhecimento. Os sistemas didáticos materializam as condições para que a intenção didática seja efetivada. Em certas instituições da vida cotidiana, esses sistemas podem assumir características peculiares como suscitamos. Ao exemplificar esse fato, Chevallard (1996) chama atenção para a questão do tempo de vida de determinados SD. Para ele, em diversas instituições, os SD e podem ter uma vida curta, para outras essa vida pode ser mais longa, como é o caso dos sistemas didáticos escolares.

Esses últimos, particularmente, nos interessam por suas características, dado o nosso objeto. O sistema didático que se forma na disciplina de Introdução à Probabilidade assume os principais traços de um sistema didático, conforme Chevallard (1996):

Um sistema didático (SD) comporta um ou vários sujeitos de I, que nele ocupam uma *posição de professor* P, um ou vários sujeitos de I que nele ocupam uma *posição de aluno* a, e finalmente um objeto O, pertencente a $P_I(a)$, que o conjunto de investimentos didáticos (CHEVALLARD, 1996, p. 133).

Seguindo os desenvolvimentos da TAD, encontraremos em textos mais recentes uma definição mais ampla da noção de sistema didático, como em Chevallard (2007) e Chevallard (2011b).

Para tanto, apresenta O como uma obra ♥, também chamada de desafio didático. Assim, os componentes do sistema didático podem ser X (que representa os sujeitos x que ocupam a posição de estudante), Y (que corresponde às ajudas de estudo; aqui, podemos identificar o sujeito y na posição de professor) e ♥ corresponde àquilo que se quer aprender, uma obra, um complexo praxeológico ou até mesmo uma questão de investigação (CHEVALLARD, 2011b).

Chevallard (2011b) destaca a necessidade, e a existência, de outros sistemas didáticos para que um determinado SD funcione. Assim, é possível falar de Sistemas Didáticos Principal (SDP), Sistemas Didáticos Auxiliares (SDA), mas também não se nega a possibilidade de existência de Sistemas Autodidáticos, ou seja, aqueles em que x coincide com y. Um sistema didático que corresponde à sala de aula de uma instituição escolar pode ser considerado um SDP. Os diversos momentos de estudo que são organizados para dar suporte ao aprendizado ou solução de ♥ podem ser considerados um SDA.

Além da existência de vários sistemas didáticos, Chevallard (1996) volta-se para o papel de um sistema de ensino, como parte da infraestrutura para que o SD funcione. Nessa mesma obra, ele ressalta, mais uma vez, a necessidade vital do estabelecimento do contrato didático e

do *milieu* para o funcionamento de um dado SD. Na identificação e na análise do funcionamento do SD, Chevallard (2011) destaca algumas questões que podem ser levantadas:

Uma questão típica estudada na didática é então: para um desafio didático ♥ dado, o que pode ser visto e feito para fazer x aprender ♥?

Quais são os gestos didáticos que podem ser observados nas situações didáticas existentes?

Como esses gestos didáticos são organizados?

Como os atores em uma situação didática gerenciam a didática? Em outras palavras, qual é a economia da didática?

Mas também devemos nos perguntar, não só o que vemos fazer, mas o que pode ser feito para ajudar a fazer x aprender ♥: então nos perguntamos sobre a ecologia da didática⁷⁴ (CHEVALLARD, 2011b, p.4, tradução nossa).

As questões levantadas por Chevallard (2011) indicam que o SD pode ser analisado de um ponto de vista tanto econômico (a discussão dos meios no sentido de efetivação do funcionamento do SD) quanto ecológico (do quadro de relações em termos de condições e de restrições para que o SD cumpra seu papel). Notemos que o funcionamento do SD está sempre atrelado ao aprendizado de algo, assim a noção de aprender, o papel da cognição, no SD é uma questão central que pode vir a ser analisada.

Levantadas as principais noções teóricas que modelam a Antropológica Cognitiva e conseqüentemente a Antropologia do Didático, surgem algumas reflexões. A primeira delas está relacionada com o posicionamento apontado por Bosch e Gascón (2006) a respeito das contribuições da TD para os desenvolvimentos da TAD. Ao situar a TD como responsável pelas contribuições que culminaram com os desenvolvimentos teóricos da TAD, em relação à análise praxeológica, níveis de codeterminação, desenvolvimentos de dispositivos didáticos, dentre outros, os autores destacam a centralidade e a fecundidade da noção. Nossa contribuição a este respeito é que, além da centralidade das noções associadas à TD, a Antropologia Cognitiva aparece dando sustentação aos desenvolvimentos teóricos que seguem. A razão para essa reflexão reside na compreensão de que a modelagem cognitiva, em sua abordagem relacional, foi necessária para que a TAD se colocasse como uma teoria capaz de analisar os fenômenos

⁷⁴ Une question typique étudiée en didactique est alors celle-ci : pour un enjeu didactique ♥ donné, que peut-on voir y faire pour faire que x apprenne ♥ ?

Quels sont les gestes didactiques que l'on peut observer dans les situations didactiques existantes ?

Comment ces gestes didactiques sont-ils organisés ?

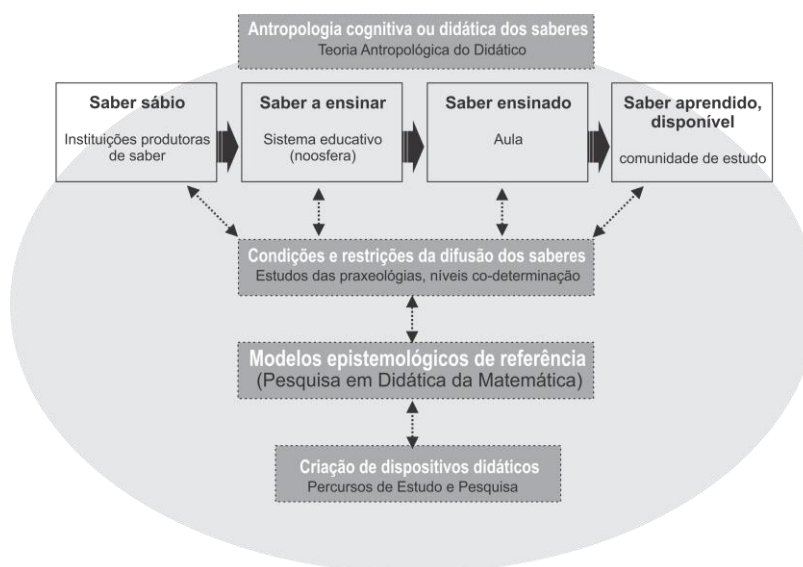
Comment les acteurs d'une situation didactique en gèrent-ils le didactique ? Autrement dit, quelle est l'économie du didactique ?

Mais on doit aussi se demander, non seulement ce que l'on voit y faire mais ce que y pourrait faire pour contribuer à faire que x apprenne ♥ : on s'interroge alors sur l'écologie du didactique.

didáticos não só ponto de vista epistemológico, mas também da ecologia que permite o universo de relações em torno da difusão dos saberes. De fato, a análise de uma organização praxeológica, como exemplo de uso da TAD, parece não ter sentido se for utilizada como finalidade em si mesma. Do mesmo modo, a construção de dispositivo didático pressupõe não só a possibilidade de uma explicação sobre a difusão de um determinado saber, mas também uma janela, uma nova possibilidade para essa difusão.

Logo, parece-nos pertinente acrescentar à figura 6 uma nova dimensão:

Figura 6 – Quadro de desenvolvimentos da TAD



Fonte: próprio autor (2018)

De acordo com esta nova leitura a partir da figura 6, a Antropologia Cognitiva permeia os desenvolvimentos teóricos da TAD. Essa impressão é sustentada por nós também para analisar o estilo com o qual Chevallard se propõe a discutir a TAD. Em seus textos de base, o referido autor sempre revisita as noções primitivas presentes na Antropologia Cognitiva.

A segunda reflexão diz respeito à busca pelo lugar do que chamaremos de espaços para compreensão da dimensão psicológica da cognição na TAD. A exposição que fizemos sobre a Antropologia Cognitiva nos mostra uma organização teórica que procura servir de base para se analisar um grande número de fenômenos didáticos de forma unificada. Esse aspecto, denotado por Chevallard (1996), está presente nas suas duas principais características: o caráter relacional e, conseqüentemente, o caráter ecológico entre seus termos.

O termo “antropológico” no qual se assenta o nome da teoria é, para Chevallard (1999, p. 1), nada mais que uma etiqueta ou efeito de linguagem⁷⁵. Com essa colocação, o autor está a delimitar o espaço no qual se insere a TAD, ou seja, nos quadros da didática. Não faria sentido, portanto, situá-la como sendo uma teoria dos pertencente a Antropologia (CHEVALLARD, 1999).

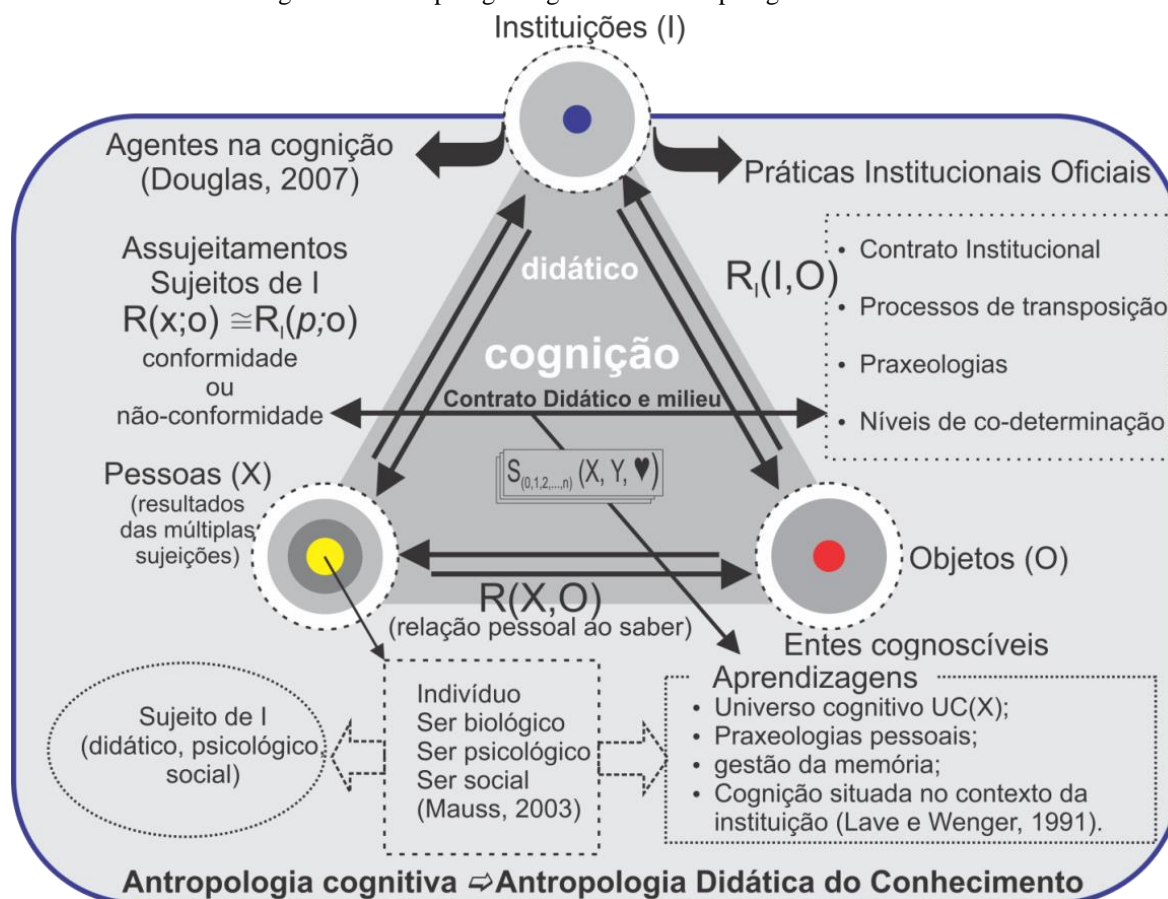
Mas por que insistir no termo antropológico? Exatamente porque o que qualifica a teoria como uma abordagem antropológica são as premissas assumidas em relação à atividade matemática e à presença do didático na sociedade. Esse argumento é destacado por Chevallard, Bosch e Gascón (2001). O olhar antropológico do didático reconhece as atividades matemáticas no seio das atividades humanas, mas também assume o didático como denso nessas atividades e nas relações humanas.

Se, por um lado, a noção de transposição didática destaca a natureza mutante dos saberes, como saberes institucionais e passíveis de problematização; por outro, a noção de relação ao saber sintetizada no símbolo $R(X,O)$ diz que as pessoas, como resultado de sujeições múltiplas, mantêm relações com esses objetos de saber. Essas relações pessoais são constituídas no trânsito entre as instituições, às quais o indivíduo se sujeita. Mas quem é esse indivíduo quando é sujeito de instituição? Que componentes ou dimensões resguarda essa relação pessoal? Como ela muda, conforme as posições dos sujeitos mudam em relação a um determinado objeto?

⁷⁵ L'étiquette d'approche – ou de théorie – *anthropologique* semble proclamer une exclusivité (les autres approches, existantes ou possibles, ne mériteraient pas ce qualificatif...) dont il faut dire tout de suite qu'elle n'est qu'un effet de langage.

Na figura seguinte, apresentamos a nossa síntese da Antropologia Cognitiva e da Antropologia Didática do Conhecimento. Tentaremos, a partir dela, indicar os caminhos para pensarmos essas questões:

Figura 7 – Antropologia cognitiva e a antropologia didática.



Fonte: próprio autor (2018).

O esquema acima denota, em primeiro lugar, o papel dos entes primitivos⁷⁶ (cores primárias) na teorização do didático. Ao nos propormos a leitura de Mary Douglas e Marcel Mauss, atendendo ao indicador 01 do caminhar teórico, percebemos nesses escritos que tanto a descrição de Douglas (2007) para o papel das instituições, como os escritos de Mauss (2003) sobre as técnicas do corpo pressupõem um olhar diferenciado para a noção de Instituição e de Pessoa.

Assim, no caso das instituições, escolhemos um papel de vértice central. Nesse caso, o didático e a cognição são constituintes do espaço institucional. As instituições são agentes na

⁷⁶ Em nosso trabalho não problematizamos a noção de objeto, por isso, fazemos a indicação dos mesmo como ente cognoscíveis. Lembramos que na antropologia cognitiva tudo é objeto, em nossa investigação tratamos o domínio da probabilidade e os objetos do saber ligados a ela.

cognição das pessoas. Os assujeitamentos são o meio pelo qual as pessoas passam a manter relações com novos objetos ou antigos objetos.

Ainda no vértice das instituições se manifestam as práticas institucionais oficiais que aparecem sob a forma de $R_1(I,O)$. As características dessas relações com O são abordadas através de noções já descritas aqui (ex. contrato institucional) e outras por descrever (praxeologias, níveis de codeterminação).

No vértice dedicado às pessoas X, partir dos escritos de Mauss (2003), vamos defender que cada indivíduo, realizando uma atividade em uma instituição, é uma pessoa total, isto é, se manifestam nele dimensões biológica, psicológica e social. Essa é a razão pela qual indicamos o vértice com círculos concêntricos. Essa pessoa, como sujeito, no processo de sujeição institucional, cria e modifica seu universo de relações pessoais $R(X,O)$ com os objetos que vivem em uma dada instituição. Logo, esse sujeito em I seria um sujeito didático, social, mas também psicológico.

Entram em cena agora as setas que indicam essas relações. Sempre com dois sentidos, imaginamos os vértices desse triângulo se comunicando em uma relação ecológica e, portanto, solidária. Essa compreensão está relacionada com as indicações já citadas de Chevallard (1996).

A mudança em $R(X,O)$, postulada como aprendizagem por Chevallard (1996), indica a possibilidade de analisarmos vários fenômenos. Dizer que, ao mudar $R(X,O)$, ocorre aprendizagem não parece suficiente. De fato, as condições e as restrições na difusão dos saberes são o “objeto de estudo da Didática” (CHEVALLARD, 2011a).

O didático se manifesta na intenção de ensinar. Para isso, a formação de sistemas didáticos no interior das instituições é agentes diretos na intenção de mudança em $R(X,O)$. O contrato didático e *milieu* surgem como condição necessária para o funcionamento desses sistemas. Sua centralidade aparece em uma relação direta que permite a ligação entre a dinâmica das posições assumidas pelos sujeitos da instituição e o quadro das relações oficiais que também influencia esse contrato didático e esse *milieu*. Notemos, portanto, que a relação de conformidade, denotada por $R(x;o) \cong RI(p;o)$, depende desses contratos e *milieu* que se estabelecem com a finalidade de provocar mudanças na relação pessoal de x com os objetos, essas mudanças são também materializadas em expectativas, isto é, no topos dos estudantes e professor.

As aprendizagens, provocadas pela participação nesses SD, são representadas pela formação do $UC(X)$. Elas podem ser representadas como objetos que correspondem às praxeologias pessoais no sentido de Croset e Chaachoua (2016), bem como gestos didáticos que informam sobre a gestão da memória, conforme Araya e Matheron (2006).

Por fim, destacamos o nosso entendimento da cognição como um fenômeno situado tendo em vista o contexto de cada instituição onde essa aprendizagem ocorre. É na entrada em I que através da participação e o engajamento dos sujeitos, transitando por diversas posições, que ocorre o processo de aprendizagem.

Nesse contexto situado é formado por uma tessitura complexa. Onde o didático e a cognição se encontram ocorrem negociações, interações sociais. São, portanto, criadas expectativas, acontecem rupturas, relações de poder são manifestadas. Ocorrem também processos de significação e ressignificação de relações diversas com objetos previstos na relação oficial da instituição, mas também com outros objetos que, por ventura, surjam dessas interações. Por essa razão, os contornos aparecem sempre pontilhados.

Nos capítulos 6 e 7 esperamos problematizar a dimensão psicológica na observação desse contexto social, onde os sujeitos, envolvidos na realização das atividades institucionais, dão vida a esse emaranhado de relações.

Na seção seguinte, discutiremos as ferramentas disponíveis na TAD para o reconhecimento dessas relações institucionais.

3.3 PRAXELOGIAS: MODELIZAÇÃO DAS PRÁTICAS HUMANAS

A modelização que expusemos até então é rica no detalhamento do fenômeno do conhecimento sob um ponto de vista antropológico, no entanto, para analisar as práticas que ocorrem a partir das relações entre sujeitos e objetos em um sistema didático em uma dada Instituição, foi preciso estabelecer ferramentas apropriadas.

A praxeologia na TAD pressupõe um método para analisar as práticas que ocorrem no interior das Instituições, tanto pela sua descrição, quanto pelas condições em que estas ocorrem. A organização praxeológica diz respeito, portanto, ao modo como as práticas instituições são propostas (discurso) e efetivadas (prática).

A natureza antropológica da análise assume a hipótese de que é necessário romper as inúmeras fronteiras institucionais pelas quais estamos acostumados a transitar, visto que uma análise praxeológica é sempre um recorte do mundo social. Nesse recorte, é preciso se distanciar do que é dado como certo ou natural: “o postulado básico da TAD violenta essa visão particularista do mundo social: admite-se, de fato, que *toda* atividade humana realizada

regularmente pode ser incluída em um modelo único que se resume aqui à palavra *praxeologia*⁷⁷ (CHEVALLARD, 1999, p.1, tradução nossa).

Segundo Bosch e Chevallard (1999), a noção de praxeologia está assentada em três postulados básicos:

1. Toda prática institucional pode ser analisada de diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras por meio de um sistema de tarefas relativamente bem circunscritas que são realizadas no fluxo das práticas sociais.
2. A realização de toda tarefa resulta da aplicação de uma técnica.
3. Supomos que, para existir em uma instituição, uma técnica deve aparecer *compreensível, legível e justificada*.⁷⁸ (BOSCH e CHEVALLARD, 1999, p. 84-86, tradução nossa).

A partir desses postulados, os primeiros objetos a serem definidos na noção de praxeologia são as tarefas (t) e os tipos de tarefas (T). Geralmente, a tarefa está associada à ação a ser cumprida em relação a um objeto relativamente preciso. Por exemplo, resolver a equação $x^2 - 6x = 0$ em R pode ser considerado uma tarefa, assim como são tarefas subir determinada escada, executar uma partitura de canção específica, escrever um texto que atenda às exigências de certo gênero, escovar os dentes. Observamos que as tarefas têm um sentido amplo, porém determinam precisamente o que se espera que seja cumprido (CHEVALLARD, 1999).

Quando temos um conjunto de tarefas semelhantes, podemos agrupá-las em um tipo de tarefa (T), de modo que pode se escrever que $t \in T$. Assim, resolver uma equação quadrática em R corresponde a um tipo de tarefa, pois a esse tipo podemos agrupar várias tarefas semelhantes. Geralmente, tanto as tarefas quanto os tipos de tarefas são designadas por um verbo, por exemplo, calcular, subir, escovar, medir, determinar. Esses verbos correspondem ao gênero da tarefa.

Outra observação em relação às tarefas, tipos de tarefas e seus gêneros é que as elas são criações, isto é, são artefatos, obras, produtos institucionais.

O postulado 2 garante que, para a realização de uma tarefa, podemos recorrer a uma ou mais técnicas (τ). Assim, uma praxeologia em relação a um tipo de tarefa T tem ao menos uma

⁷⁷ Le postulat de base de la TAD fait violence à cette vision particulariste du monde social : on y admet en effet que toute activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle *unique*, que résume ici le mot de *praxéologie*

⁷⁸ 1. Toute pratique institutionnelle se laisse analyser, de différents points de vue et de différentes façons, en un système de tâches relativement bien circonscrites, qui se découpent dans le flux de la pratique.

2. L'accomplissement de toute tâche résulte de la mise en œuvre d'une technique.

3. Pour pouvoir exister dans une institution, une technique doit apparaître comme un tant soit peu *compréhensible, lisible et justifiée*.

τ . O bloco formado pelos tipos de tarefa e a técnica são denominados de bloco prático-técnico [T/ τ], ou simplesmente, saber-fazer.

A natureza prática da técnica permite a coexistência de várias técnicas para uma mesma tarefa, por exemplo, no caso da realização de t: resolver a equação $x^2 - 6x = 0$ em \mathbb{R} , podemos empregar algumas dessas técnicas:

Quadro 3 – Exemplo aplicação de técnicas.

t: resolver a equação $x^2 - 6x = 0$ em \mathbb{R} .
Técnica 1 (τ_1)
<p><i>segundo o princípio aditivo das equações polinomiais de 1º grau</i> <i>fazemos $x^2 - 6x + 6x = 0 + 6x$</i> <i>obtemos então $x^2 = 6x$</i> <i>reduzindo a equação ao primeiro grau</i></p> $\frac{x^2}{x} = \frac{6x}{x} \text{ encontramos } x = 6, \text{ como solução da equação.}$ <p><i>* Notemos que 0 também é uma solução da equação</i></p>
Técnica 2 (τ_2)
<p><i>Utilizando o princípio da decomposição de polinômios</i> <i>podemos escrever $x^2 - 6x = 0$ como $x(x - 6) = 0$</i> <i>Analisando a expressão concluímos que:</i> <i>se $x(x - 6) = 0$ então $x = 0$ ou $x - 6 = 0$</i> <i>dessa conclusão temos que as raízes são 0 e 6.</i></p>
Técnica 3 (τ_3)
<p><i>Identificando os coeficientes da equação temos $a = 1, b = -6$ e $c = 0$s</i></p> <p><i>Aplicando a fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$</i></p> $\text{teremos } x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{-6^2 - 4.1.0}}{2.1} \therefore x = \frac{6 \pm 6}{2},$ <p><i>logo $x = 0$ ou $x = 6$.</i></p>

Fonte: próprio autor (2018).

A dinâmica entre as técnicas merece algumas considerações. A primeira delas é que a natureza das técnicas nem sempre é algorítmica, ou seja, é plausível pensarmos em técnicas que não seguem um tipo de sequência lógica convencional. Basta pensarmos que existem tarefas

em determinadas instituições cujo cumprimento pressupõe soluções criativas (CHEVALLARD, 1999).

Outra consideração diz respeito à abrangência das técnicas. Para determinados tipos de tarefas, muitas vezes, uma determinada técnica só consegue dar conta de algumas casos específicos. É o caso de τ_1 e τ_2 em comparação a τ_3 . No entanto, observamos que, se comparadas com τ_3 as técnicas τ_1 e τ_2 aparecem como bem mais econômicas, para o caso em que a equação é do $ax^2+bx=0$.

Chevallard (1999) destaca que, em uma instituição, é bem possível que existam técnicas dominantes ou até mesmo uma única técnica que seja considerada como válida, de modo que outras técnicas sejam secundárias ou mesmo inaceitáveis naquele contexto institucional. Nesse fato, residem questões ligadas aos processos de transposição institucional.

O terceiro postulado preconiza que toda técnica para existir no seio de uma instituição, e assim constituir-se como parte das práticas institucionais, necessita de uma justificativa que garanta sua validade. Essas ferramentas que justificam e explicam as técnicas são chamadas de tecnologia (θ).

As tecnologias cumprem, segundo Chevallard (1999), a tripla função de justificar o porquê do emprego da técnica, de explicar seu funcionamento, mas também a possibilidade de sua produção, através da ampliação, ou até mesmo a modificação das técnicas. De fato, as práticas institucionais dificilmente são tomadas como complexos não problemáticos, pelo contrário, são dinâmicos:

Pode-se imaginar um mundo institucional em que as atividades humanas estivessem regidas por praxeologias bem adaptadas que permitem realizar todas as tarefas desejadas de uma maneira de eficaz, segura e inteligível. Mas esse mundo não existe: como foi sugerido, as instituições são atravessadas por toda uma dinâmica praxeológica⁷⁹ (CHEVALLARD, 1999, p.6, tradução nossa).

Chevallard (1999) afirma que o aspecto problemático faz parte dos interesses de estudo nas praxeologias institucionais. O olhar problematizador sobre as praxeologias abre espaço para a análise de diversos fenômenos. Um deles é o envelhecimento, o desaparecimento ou a transformação de determinadas práticas institucionais.

Para tanto, é preciso inserir um novo elemento ao complexo praxeológico que é a Teoria (Θ). Enquanto as tecnologias cumprem a função de justificar/explicar/produzir as técnicas, as

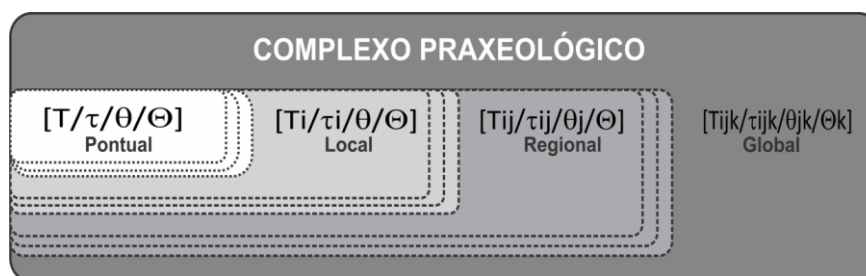
⁷⁹ On peut imaginer un monde institutionnel dans lequel les activités humaines seraient régies par des praxéologies bien adaptées permettant d'accomplir toutes les tâches voulues d'une manière à la fois efficace, sûre et intelligible. Mais un tel monde n'existe pas : comme on l'a suggéré, les institutions sont parcourues par toute une *dynamique* praxéologique

Teorias têm esse mesma funcionalidade frente às tecnologias. No caso de τ_3 no exemplo que apresentamos no quadro 03, seria natural perguntarmos: o que garante a existência dessa fórmula? O que explica seu funcionamento? Por que, inicialmente, identificamos os coeficientes? Qual o papel do discriminante Δ na obtenção das raízes? Essas perguntas são respondidas por uma determinada tecnologia que está associada a um quadro teórico que garante a todo complexo que se segue para conferir validade institucional.

A análise do sistema $[T, \tau, \theta, \Theta]$ compõe uma praxeologia. Esses quatro componentes articulam dois blocos. O bloco saber-fazer $[T, \tau]$ e o bloco tecnológico-teórico, “saber”, $[\theta, \Theta]$, de modo que o primeiro corresponde a *praxis* e o segundo ao *logos*. É importante destacarmos que uma praxeologia corresponde ao próprio saber, mas também partes dele de modo que não se deve classificar um ou outro bloco como mais importante, ou seja, a prática e a teoria que a explicam têm igual relevância para a investigação de uma dada realidade institucional (CHEVALLARD, 1999).

Chevallard (1999) ainda destaca que as praxeologias em torno de um saber podem ser organizadas por complexos praxeológicos, que ele chama de pontuais, locais, regionais e globais. As praxeologias pontuais são aquelas que se organizam em torno de um único tipo de tarefa $[T/\tau/\theta/\Theta]$. Quando agregamos várias praxeologias pontuais, isto é, vários tipos de tarefas e técnicas em torno de uma tecnologia, formamos uma organização local $[Ti/\tau_i/\theta/\Theta]$. Nessa organização, a centralidade está na θ . Quando são organizadas várias tecnologias em torno de uma teoria, teremos uma organização regional $[Tij/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$, onde Θ assume o papel principal. A reunião de várias organizações regionais correspondem a uma praxeologia global $[Tijk/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k]$.

Figura 8 – Complexo praxeológico.



Fonte: próprio autor.

Matheron (2000) destaca que as praxeologias e seu estudo, como uma abordagem ecológica, revelam as estruturas organizacionais que permitem a vida, ou não, de determinado objetos do saber em uma dada instituição, mas também em instituições distintas, para o caso de objetos comuns:

As organizações praxeológicas permitem estudar uma mesma noção matemática designada com mesmo nome, mas com organização matemática de naturezas diferentes, se desenvolvidas no seio de instituições diferentes. Esse ponto de vista ressalta o aspecto ecológico relativo a um objeto O, quer dizer, o aspecto do questionamento da existência real ou da inexistência desse objeto na instituição onde vive uma dada organização matemática. Essa dimensão ecológica nos permite questionar: como é ensinado um dado objeto identificado num livro didático? Que tipo de exercícios (tarefas) a realizar e com que tipo de técnicas disponíveis (ou não)? Qual é a organização matemática, e por consequência, que tipo de progressão considerar?⁸⁰ (MATHERON, 2000, p. 52).

O estudo desses complexos praxeológicos pode revelar as práticas institucionais e a ecologia que permite a vida dos saberes em certo contexto institucional. Estudos, como os de (FONSECA, 2004), Lucas, Fonseca, Gascón e Casas (2014), demonstraram que os estudos praxeológicos no ensino secundário (equivalente ao nosso ensino médio) podem revelar fenômenos didáticos que estão intimamente ligados às práticas desenvolvidas nas escolas.

Dentre esses fenômenos, Lucas *et al* (2014) destacaram a atomização, a rigidez e a incompletude das praxeologias matemáticas presentes nessa etapa da escolarização tanto em escolas portuguesas quanto espanholas. A atomização se refere à concentração das práticas escolares no bloco saber-fazer, isto é, nas práticas institucionais das escolas, a discussão de elementos do bloco saber é ausente. Em relação à rigidez, destaca-se o privilégio de determinadas técnicas como única via para o confronto de certos tipos de tarefas. Já a incompletude diz respeito à abordagem fragmentária dessas praxeologias matemáticas.

Ainda sobre o estudo de Lucas *et al* (2014), os autores apresentam esses fenômenos como institucionais, porque não dependem dos professores ou alunos, enquanto sujeitos institucionais. Para nós, essa asserção revela dois aspectos. O primeiro deles é a característica dos estudos desenvolvidos no âmbito da TAD, que focam nos fenômenos didáticos de um ponto de vista da ecologia dos saberes. Esses estudos têm um forte viés didático e epistemológico. Em nosso trabalho, ao levantarmos a hipótese de que essas análises à luz da TAD podem revelar algo mais no que tange à dimensão cognitiva dos sujeitos engajados nessas instituições, estamos

⁸⁰ Les organisations praxéologiques relatives aux activités mathématiques étant alors nommées des organisations mathématiques et, partant, montrer dans un deuxième temps en quoi il permet d'étudier une même notion mathématique désignée du même nom, mais prise à l'intérieur d'organisations mathématiques de natures différentes car, déployées au sein d'institutions différentes. Ce dernier point relève ainsi de la prise en compte de l'écologie relative à un objet, c'est-à-dire du questionnement du réel existant ou n'existant pas à propos de cet objet, dans une institution où vit une organisation mathématique donnée. Il veut montrer que cette dimension écologique permet de poser des questions telles que: pour un objet identifié dans les programmes comme étant à enseigner, quels types de tâches, accomplies avec quelles techniques, disponibles ou pas, enseigner et être en droit d'exiger des élèves? Quelle organisation mathématique et, par conséquent, quelle progression mettre en place?

defendendo que os resultados nos revelam aspectos da instituição como agentes na cognição dos sujeitos. Embora concordemos com os autores com o fato de os fenômenos da atomização, da rigidez e da incompletude das praxeologias matemáticas estarem ligados ao contexto institucional, acrescentamos que esses fenômenos afetam $R(X,O)$. Se em dadas instituições as tarefas são resolvidas sempre com um tipo de técnica majoritária, podemos pensar que as pessoas que vivenciam esse contexto podem acreditar nessa técnica como sendo a única forma de cumprir determinada tarefa matemática. Em outros termos, pode-se também perguntar; quais as influências desses fenômenos no comportamento de professores e alunos?

Essa é uma inquietação latente para nós, mas também para os autores do estudo que acabamos de discutir:

Temos a intenção de apenas mostrar em que medida os resultados do questionário reforçam e são coerentes com os dados obtidos a partir da análise dos manuais, em relação aos tipos de tarefas matemáticas que predominam na atividade matemática escolar e, até que ponto, o fenômeno de rigidez e de atomização que estamos a estudar é um fenômeno que tem uma origem institucional, na estrutura das praxeologias matemáticas escolares, refletindo-se posteriormente no comportamento dos alunos perante as tarefas matemáticas. (LUCAS; FONSECA, *et al.*, 2014, p. 21)

A problemática das organizações praxeológicas nas instituições de ensino nos leva a assumir outras noções no contexto da TAD.

No caso dessas instituições, podemos destacar duas organizações distintas, porém imbricadas, que são as organizações praxeológicas matemáticas (relativas à praxeologia dos objetos matemáticos que vivem em uma dada instituição) e as organizações praxeológicas didáticas (relativas às práticas desenvolvidas na instituição para que os objetos sejam ensinados). Assim, o professor de Matemática em uma escola, ao realizar uma atividade de planejamento, lida concomitantemente com organizações matemáticas e didáticas.

De modo geral, as organizações didáticas (OD) revelam as escolhas feitas pelo professor para que seus alunos possam construir ou reconstruir determinadas organizações matemáticas (OM) previstas no currículo. Para Araya-Chacón (2008), as OD correspondem “às formas possíveis de cumprir esta tarefa, ou seja, para organizar o processo de estudo em uma dada instituição⁸¹” (ibid. p. 63, tradução nossa).

O estudo das OD passa pela identificação dos momentos de estudo destacados no quadro 4:

⁸¹ Les formes possibles pour accomplir cette tâche, c’est-à-dire, pour organiser le processus de l’étude dans une institution donnée.

Quadro 4 – Descrição dos momentos de estudo.

Momentos de estudo	
1º Momento	Primeiro encontro Corresponde ao primeiro encontro com a organização matemática que se pretende estudar. Ele geralmente é organizado e pode ocorrer de diversas maneiras. Esse encontro pode ser inédito, mas também um reencontro com determinado tipo de tarefa.
2º Momento	Elaboração do tipo de tarefa e de um tipo de técnica É o momento em que, ao se defrontar com a situação problemática oferecida por certo tipo de tarefa, há a busca pela construção dos rudimentos de uma técnica que possa solucioná-la. Nesse momento, ocorre a dialética em que o estudo dos problemas é meio para criar técnicas.
3º Momento	Constituição do ambiente tecnológico-teórico Este é um momento que perpassa os demais, pois, mesmo no primeiro encontro com um tipo de tarefa, há sempre componentes do bloco $[\theta, \Theta]$ em jogo, conhecido ou ainda por criar.
4º Momento	Trabalho com a técnica Nesse momento do estudo, os estudantes trabalham com a técnica, o que culmina com seu aperfeiçoamento.
5º Momento	Institucionalização Tem a finalidade de apresentar com clareza a organização matemática que se está estudando. É um momento de refinamento dos elementos utilizados no processo de estudo.
6º Momento	Avaliação Articulado com o momento de institucionalização, parte-se do pressuposto da existência de relações institucionais que transcendem a pessoas. Logo, a relação institucional exige um exame do que foi ou está sendo de fato produzida.

Fonte: próprio autor, baseado em Chevallard (1999).

A respeito das OD e os momentos de estudo que elas suscitam, são necessárias algumas observações. A primeira delas remete ao fato de os momentos estarem mais próximos da ideia de dimensão, do que de temporalidade ou sequência, embora também faça uso dessa faceta (DELGADO, 2006). A noção de estudo, como já foi dito anteriormente, assume na TAD um caráter bastante amplo. Assim os momentos de estudo aqui descritos correspondem às dimensões desse processo, ou seja, seria plausível dizer que um sujeito que estuda uma determinada obra O , em uma dada instituição, vivencia alguns desses momentos de forma concomitante.

A segunda observação diz respeito à função das OD para o professor e para quem pretende analisá-la, o que implica em uma reflexão sobre a natureza das OD.

Em relação a sua função, Chevallard (1999) destaca que os momentos de estudo têm duas funcionalidades. A primeira é permitir um modelo de análise dos processos didáticos em uma instituição, perguntas do tipo: como organizar um primeiro encontro? são importantes para a reflexão docente, mas também para quem observa determinada prática. A segunda funcionalidade permite enxergar, tanto da posição do professor que organiza o estudo, quanto de quem analisa essa prática, o problema da realização dos momentos de estudo. Para Chevallard (1999), as perguntas que podem surgir ao professor na construção de um ambiente para a realização dos momentos de estudos podem ser sintetizadas em uma asserção geral: “criando situações didáticas adequadas”⁸² (Ibid, p. 23, tradução nossa).

A natureza das OD comporta três características: empírica, espontâneas e relativa ao professor. Essas características são suficientes para dizer, segundo aos autores, que existe uma praxeologia didática do professor. Essa praxeologia está condicionada aos meios que a instituição oferece para que essa prática seja efetivada. Então, para que possamos analisar essas OD como didáticas institucionais, é necessário olhar para a OD dominante em uma determinada instituição, estas entendidas como as condições e restrições para que a OD se desenvolva (BOSCH; GASCÓN, 2002).

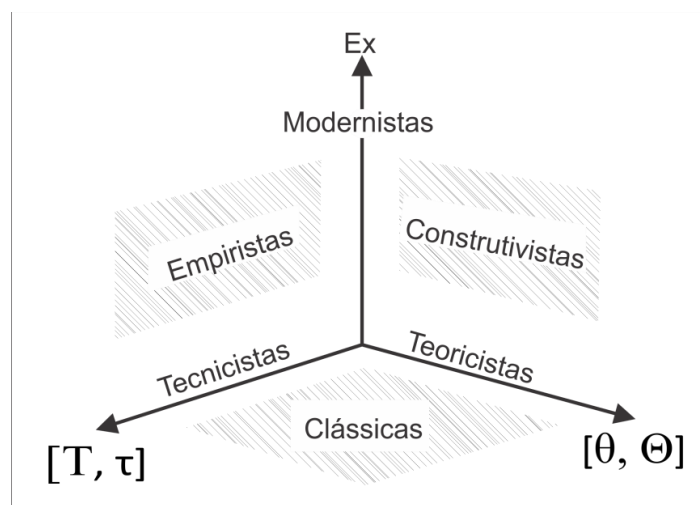
As OD são apresentadas em modelo dividido em dois níveis. No primeiro nível, unidimensional, destacam-se três eixos que correspondem às OD tecnicistas, teoricistas, modernistas. Esses eixos estão relação aos momentos de estudo: momento do tecnológico-teórico, centrado no bloco $[\theta, \Theta]$, o momento do trabalho com as técnicas, cuja ênfase é no bloco $[T, \tau]$, e o momento de exploratório (Ex) (GASCÓN, 2003).

Cada um desses momentos destaca um perfil de OD. Enquanto nas OD tecnicistas há um privilégio do ensino das técnicas para resolver os tipos de tarefas correspondentes; nas OD teoricistas, o ensino coincide com aprender sobre tecnologias e teorias. Já nas OD modernistas, as atividades matemática de resolução de problemas são centrais, e aprender é um processo de descoberta indutiva e autônoma (ARAYA-CHACÓN, 2008).

Em um segundo nível, estão as OD clássicas que combinam os eixos teoricistas-tecnicistas, OD empiristas combinando os eixos tecnicistas-modernistas e as OD construtivistas que combinam os eixos teoricistas-modernistas, conforme figura:

⁸² en créant des situations didactiques adéquates.

Figura 9 – Modelização das OD em níveis.



Fonte: Adaptado de ARAYA-CHACÓN, (2008, p.64)

Assim, as OD clássicas tendem a pormenorizar as atividades de resolução de problemas, já que o seu foco está nos blocos saber e saber-fazer. Já nas OD empiristas, o trabalho matemática está relacionado à prática da resolução de problemas. Nas OD construtivistas, ao considerarem a aprendizagem como um processo ativo de construção de conhecimentos, repousam suas ações entre o bloco saber e a resolução de determinados tipos de problemas.

Em relação às OD e aos momentos de estudo, fazemos uma última observação, no que diz respeito à participação dos sujeitos. Ao destacar a caracterização das OD, Gascón (2003) frisa o papel da instituição no seu condicionamento, no entanto, os sujeitos que participam dos momentos de estudo estão, durante a atividade de estudo, desenvolvendo uma prática. Diante de restrições impostas pela instituição, somos levados a pensar que os professores podem vir a buscar soluções criativas que farão parte da sua praxeologia didática espontânea, ou seja, se as sujeições institucionais acabam por influenciar na constituição da pessoa, quando esse pessoa é sujeito de uma instituição é que se manifestam características da prática coletiva, mas também da sua ação individual. Essa impressão vem das palavras de Chevallard (1999) que destaca o papel evolutivo das relações ao longo dos momentos de estudo:

Por fim, observa-se que, se, o primeiro encontro não determina totalmente a relação com o objeto – que é construído e reformulado durante todo o processo de estudo –, ele desempenha um papel importante na economia da aprendizagem. Pois, levando-se em conta o investimento institucional e pessoal imposto pelo primeiro encontro (tanto em nível cognitivo quanto libidinal), ele orienta, em geral fortemente, o desenvolvimento subsequente das relações institucionais e pessoais com o objeto encontrado.⁸³ (CHEVALLARD, 1999, p. 21, tradução nossa).

Destacadas as principais características das OD e dos momentos de estudos, introduziremos uma última classe de objetos que tem papel fundamental na compreensão das organizações praxeológicas, bem como das práticas institucionais: os objetos ostensivos e não-ostensivos.

A discussão sobre os objetos ostensivos e não-ostensivos se insere na problemática que a TAD coloca da descrição das práticas institucionais, o que implica, no caso de praxeologias matemáticas, na discussão sobre a própria natureza do que seja a atividade matemática. Assim, diante do que expusemos sobre as praxeologias é pertinente perguntar: de que elas são compostas? Que objetos fazem parte das tarefas, das técnicas, das tecnologias, de uma teoria? O mesmo vale também para atividade matemática: o que determina uma atividade matemática? A Matemática pode ser caracterizada como uma atividade, no sentido estrito que essa palavra tem no ocidente?

Para Bosch e Chevallard (1999), a tradição racionalista do ocidente tende a privilegiar as atividades da razão (do espírito, “*mind*”) em detrimento daquelas que são consideradas manuais. Assim, no caso da Matemática, que, no discurso racional, desde Platão, é encarada como a ciência da abstração, seus objetos constituintes, estariam no patamar do abstrato, isto é, da mente. Pelo contrário, os autores advogam que, na atividade matemática, existem objetos materiais, ou não, que cumprem um papel importante. Enquanto, tradicionalmente, esses objetos seriam importantes pela função de signo, ou seja, de dar sentido a determinadas ideias que representam; na TAD, esses objetos passam a ter outro valor, o de objetos constituintes da própria atividade matemática:

⁸³ On notera enfin que si, à l’évidence, la première rencontre ne détermine pas entièrement le rapport à l’objet – le quel se construit et se remanie tout au long du processus d’étude –, elle joue cependant un rôle important dans l’économie de l’apprentissage, parce que, étant donné l’investissement institutionnel et personnel qu’elle impose (au double plan cognitif et libidinal), elle oriente en général fortement le développement ultérieur des rapports institutionnel et personnel à l’objet rencontré.

Convém, pelo contrário, examinar a maneira como a atividade matemática é condicionada pelos instrumentos materiais, visuais, sonoros e táteis que são normalmente utilizados na sua realização. Sabemos que a ausência de um conceito pode bloquear a evolução do pensamento matemático, bem como pode acontecer no contexto histórico de uma comunidade ou em nível do trabalho individual do pesquisador ou do aluno. Ora, podemos interrogar-nos até que ponto a ausência seria somente a ausência de uma idealidade, de uma maneira de pensar ou de conceber o mundo, e não aquela de um complexo de ferramentas de trabalho, a maior parte de natureza material, cuja disponibilidade ou, pelo contrário, cuja ausência poderia modificar a maneira catastrófica o desenvolvimento a atividade.⁸⁴ (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 89, tradução nossa).

Bosch e Chevallard (1999) vão distinguir duas categorias de objetos: os “ostensivos” e os “não-ostensivos”. Na primeira categoria, do latim *ostendere*, estão todos os objetos cuja natureza tem uma realidade perceptível, como sons, gestos, grafismos etc. Esses objetos cumprem uma função ostensiva, isto é, de presença, de mostrar, de apresentar materialmente aquilo que não se pode ver. Do outro lado, estão os objetos não-ostensivos que, embora existam no âmbito de uma prática institucional, têm sua materialidade percebida por meio de certos objetos. Estariam nesse rol ideias, intuições, conceitos etc. (BOSCH; CHEVALLARD, 1999).

Quando evocamos o conceito de probabilidade associada como medida de chance, a representação clássica $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$, em que A corresponde a um evento ou subconjunto do espaço amostral S, estão em jogo objetos ostensivos (a representação simbólica, a própria palavra “probabilidade”), mas também objetos não-ostensivos, como a ideia de evento, espaço amostral, quociente e a própria noção de probabilidade.

Bosch e Chevallard (1999) destacam ainda que a dialética entre ostensivos e não-ostensivos não remete à dicotomia entre corpo e mente, que suscitamos na discussão sobre a cognição na parte A desta fundamentação. Pelo contrário, na TAD, esses objetos são sempre objetos institucionais. Nesse caso, os objetos não-ostensivos não são interpretados em termos mentais, pessoais ou individuais:

⁸⁴il convient au contraire d'examiner la manière dont l'activité mathématique est conditionnée par les instruments matériels, visuels, sonores et tactiles qu'elle met en jeu . On sait que l'absence d'un concept peut bloquer l'évolution de la « pensée » mathématique, aussi bien au niveau historique d'une communauté qu'au niveau individuel du chercheur ou de l'élève. Or on peut se demander jusqu'à quel point cette absence serait seulement l'absence d'une idéalité, d'une façon de « penser » ou de « concevoir » le monde, et non celle d'un complexe d'outils de travail, la plupart de nature matérielle, dont la disponibilité – ou, au contraire, l'absence – pourrait modifier de façon « catastrophique » le déroulement de l'activité.

Ostensivos e não-ostensivos são sempre objetos institucionais onde a existência depende muito raramente da atividade de uma única pessoa. Como veremos agora, os objetos ostensivos e os objetos não-ostensivos estão unidos por meio de uma dialética que considera os segundos emergentes da manipulação dos primeiros e, ao mesmo tempo, como meios de guiar e controlar esta manipulação⁸⁵ (ibid, p. 90, tradução nossa).

Como objetos institucionais, podemos dizer que os objetos ostensivos são aqueles que são sensíveis ao sentido, passíveis de manipulação, enquanto os não-ostensivos correspondem a objetos que dependem dos primeiros para serem reconhecidos na atividade matemática a partir dos primeiros. A relação com esses objetos é fruto das aprendizagens institucionais (BOSCH; CHEVALLARD, 1999).

Destaquemos que a dialética ostensivos/não-ostensivos cumpre o papel de signo/significação. Sobre esse aspecto, embora os ostensivos cumpram a missão de representar e dar significado aos não-ostensivos, é de fato o que eles comunicam o que realmente importa. Aqui, podemos chamar atenção para o que Bosch e Chevallard (1999) falam da dupla função dos objetos ostensivos, isto é, a valência instrumental e a valência semiótica.

No quadro institucional, os objetos ostensivos cumprem a função de dar visibilidade e possibilidade de manipulação dos objetos não-ostensivos (valência instrumental), mas também cumprem a função de representação, ou seja, uma função semiótica que dá significado aos ostensivos. É importante notarmos que, apesar de introduzirem a dimensão semiótica, os autores não o fazem a partir de uma perspectiva cognitivista. Embora reconheçam semelhança nas funções cumpridas pelos objetos ostensivos quanto à valência semiótica, é o tratamento que lhes é dado na abordagem antropológica que os diferencia das demais abordagens cognitivistas. Na TAD, a função cumprida pelos objetos ostensivos é parte da atividade matemática, portanto, ligada à natureza das organizações praxeológicas como objetos institucionais. Em abordagens cognitivistas, em geral, a função semiótica é explicada em termos de representação individual e está ligada ao funcionamento cognitivo.

Apesar dessa consideração, pensamos que a valência semiótica e os significados que ela permite atribuir aos objetos ostensivos têm um componente individual também, no momento que assumimos que os sujeitos mantêm uma relação com esses objetos, ou seja, atribuem significados a eles. A falta de compreensão de um determinado objeto ostensivo pode levar o

⁸⁵ Ostensifs et non-ostensifs sont toujours des objets *institutionnels* dont l'existence ne dépend que très rarement de l'activité d'une seule personne. Comme on le verra maintenant, les objets ostensifs et les objets non ostensifs sont unis par une dialectique qui considère les seconds comme des émergents de la manipulation des premiers et, en même temps, comme des moyens de guidage et de contrôle de cette manipulation.

sujeito não só a não compreender uma determinada tarefa ou técnica, como também a abandoná-la. Aqui, recorremos ao próprio sentido da atividade como sendo uma ação do sujeito sobre esses objetos. Embora eles revelem uma estrutura institucional e existam através da instituição, a relação pessoal construída com esse objeto influencia na sua cognição, entendida como um participação.

Vale destacarmos uma reflexão apresentada por Sarrazy (2006). Quando trata da TAD e de suas lacunas, ele destaca que a compreensão de como ocorrem as mudanças em R(X,O) ainda é um espaço por explorar:

Se a TAD, por sua dimensão ecológica, permite determinar as circunstâncias nas quais uma pessoa X se torna sujeito de uma instituição (Chevalallard, 1991, 1999), a teoria continua “muda” sobre as condições pelas quais ela pode o tornar - não é suficiente por Senhora Bovary a 1 euro e 50 para que as classes populares se ponham a ler Flaubert. Se uma organização praxeológica permite determinar e fixar alguns critérios para o estudo, não mascara a pergunta, nem menos essencialmente, das condições de origem e da transformação das relações dos sujeitos com o objeto?⁸⁶ (SARRAZY, 2006, p. 164)

Se a pergunta da compreensão ainda não foi respondida, como sugere Sarrazy (2006), trabalhos têm indicado sua possibilidade. Araya-Chacón (2008) faz uso da dimensão semiótica dos objetos ostensivos para explicar o funcionamento do que ela chama de gestão didática da memória. Esses gestos são executados pelo professor em determinada posição na instituição com a finalidade de operacionalizar e delimitar o *milieu* por ele organizado.

Uma última consideração que queremos tecer em relação às organizações praxeológicas diz respeito à compreensão antropológica de Mauss (2007) sobre as técnicas. Como já dissemos, esse estudioso trabalha com a perspectiva dos sujeitos como pessoa total. Com isso, ele abre a necessidade da dimensão psicológica ser entendida como um fenômeno presente na relação institucional. Quando o homem executa uma técnica (em seu caso técnicas do corpo para realizar certas atividades), ele manifesta gestos que revelam a idiosincrasia social presente na relação do sujeito com sua cultura:

⁸⁶ Si la TAD, par sa dimension écologique, permet de déterminer les circonstances dans lesquelles une personne X devient sujet d’une institution I (Chevallard, 1991, 1999), la théorie reste muette sur les conditions par lesquelles elle peut le devenir. – Il ne suffit pas mettre Madame Bovary à 1 Euro %0 pour que les classes populaires se mettent à lire Flaubert. Si une organisation praxéologique permet de déterminer et de fixer des critères pour l’étude, ne masque-t-elle pas la question, non moins essentielle, des conditions de la genèse et de la transformation des rapports des sujets aux objets ?.

Eu digo as técnicas do corpo, porque se pode fazer a teoria da técnica do corpo a partir de um estudo, de uma exposição, de uma descrição pura e simples das técnicas do corpo. Entendo por essa expressão as maneiras pelas quais os homens, de sociedade a sociedade, de uma forma tradicional, sabem servir-se de seu corpo. Em todo caso, convém proceder do concreto ao abstrato, não inversamente (MAUSS, 2007, p. 401).

Ainda de acordo com Mauss (2007), o ato de aprender está fortemente condicionado pela relação sujeito-instituição e até atos puramente biológicos estão imbricados pelo papel social e sua influência sobre nós. A imitação nas técnicas do corpo carrega fatores sociais, mas também biológicos e psicológicos. Isso pode nos conduzir a inferir que a pessoa, como um homem-total, ao trabalhar com as praxeologias, tem suas ações nas instituições influenciadas por diversos fatores sociais, culturais e psicológicos. Na TAD, o saber é sempre relacional. A mudança nas relações da pessoa com objeto no seio de instituição gera a aprendizagem, portanto, a relação $R(X,O)$ como relação ao saber está vinculada também a esses vários fatores.

Para Mauss (2007), as técnicas desempenham papel importante. Encaradas de um ponto de vista semelhante ao de Chevallard, elas se transformam, envelhecem e podem desaparecer:

Um exemplo nos fará compreender isso imediatamente, a nós, psicólogos, biólogos, sociólogos. Outrora nos ensinavam a mergulhar depois de ter aprendido a nadar. E, quando nos ensinavam a mergulhar, nos diziam para fechar os olhos e depois abri-los dentro d'água. Hoje a técnica é inversa. (...) Há portanto uma técnica do mergulho e uma da educação do mergulho que foram descobertas com o tempo (MAUSS, 2007, p.402).

Esse dinamismo nos faz pensar em um questionamento comum para um fenômeno didático presente nas escolas: por que diante de um tipo de tarefa o aluno que dispõe de várias técnicas insiste em escolher aquela que nem sempre é a mais conveniente em termos de economia para resolver T? Uma das respostas que a TAD propõe é a rigidez do currículo. Como apontando por Lucas *et al* (2014), a rigidez é um fenômeno institucional que independe dos sujeitos, porém os mesmos autores reconhecem que esse fenômeno certamente influencia no comportamento desses sujeitos, especialmente quando saem daquele contexto institucional (LUCAS; FONSECA, *et al.*, 2014).

Aquela educação, a relação $R(X,O)$, construída sob o constrangimento de I, perdura nas decisões, na memória, nos gestos do sujeito, na sua cognição. Em termos didáticos, isso é revelado na dificuldade dos alunos ao passarem de um nível educacional para outro, mas também em situações diversas. É o exemplo que segue sobre a educação do mergulho:

E vejam que se trata claramente de um ensino técnico, e que há, como para toda técnica, uma aprendizagem do nado. Por outro lado, nossa geração, aqui assistiu a uma mudança completa de técnica: vimos o nado a braçadas e com a cabeça fora d'água ser substituído pelas diferentes espécies de crawl. Além disso, perdeu-se o costume de engolir água e de cuspi-la. Pois os nadadores se consideravam, em meu tempo, como espécies de barcos a vapor. Era estúpido, mas, enfim, ainda faço esse gesto: *não consigo desembaraçar-me de minha técnica*. (MAUSS, 2007, p. 402, grifo nosso).

Notemos que, no trecho acima, Mauss (2007) destaca um outro aspecto das técnicas do corpo, também presente na noção de praxeologia na TAD: o fato de que a evolução das técnicas, em um dado contexto institucional, é um fenômeno que incide na vida dessa instituição. No caso de Mauss (2007), ao se referir ao nado em sua geração, ele trata de uma instituição bem mais ampla, a sociedade francesa e contemporânea ao seu tempo, que viu as técnicas do nado evoluírem e que, de certa forma, influenciou seus sujeitos – os que já conheciam técnicas anteriores e os que não conheciam técnica nenhuma.

Podemos então destacar dois aspectos sobre as praxeologias e seus usos nas instituições, do ponto de vista da sua difusão. O primeiro aspecto diz respeito à dimensão das influências sociais, nas mais variadas instâncias, que incidem sobre essa difusão. O segundo refere-se aos espaços, em termos de posições por que transitam o sujeitos que se debruçam no espaço institucional. O primeiro aspecto pode ser abordado na TAD através da noção de níveis de codeterminação e o segundo, de indicadores específicos na relação entre OM e OD nas instituições.

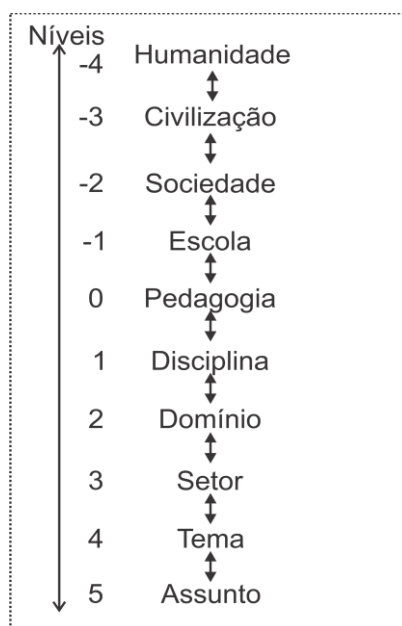
Da mesma forma que pensamos em uma instituição influenciando na vida dos sujeitos, podemos pensar também em termos de ações ou estruturas, isto é, condições e restrições que interferem na dinâmica entre as OM e OD, dentro da própria instituição, essas influências podem ser externas a elas, estando localizadas em outras instituições. Para modelizar essa dinâmica entre as organizações praxeológicas, Chevallard (2002) introduz a noção de níveis de codeterminação didática. Esses níveis remetem as instituições num sentido macro que interferem na organização dos saberes, por exemplo, a tomada de decisão de membros da noosfera representada pelo órgão regulador da educação estaria no nível de codeterminação que corresponde a uma dada sociedade. Essas decisões certamente influenciam o modo como as praxeologias são organizadas na escola que estariam num nível abaixo. Organizando em uma escala hierárquica a disposição desses níveis, inicialmente ele apresentava 8 níveis (*société* ⇔ *sujet*), nos desenvolvimentos seguintes ele apresenta um nível mais abrangente *civilisation* (CHEVALLARD, 2006).

Esses níveis indicam, dentre outros aspectos, as condições e as restrições manifestadas no estudo de um assunto específico. Imaginemos o momento de estudo relativo ao primeiro encontro com um determinado tipo de tarefa. Para realização do estudo, é preciso compreender que estão presentes condições e restrições que tem origem no próprio ambiente em que se dá o estudo, mas também em níveis superiores dessa escala. Assim, os níveis de codeterminação propostos se organizam hierarquicamente de modo que agem ora favorecendo, ora restringindo o estudo de T na instituição.

Ao partir do princípio ecológico dos saberes, Chevallard (2006) observou, durante a aplicação de trabalhos pessoais enquadrados (TPE), a manifestação de restrições para o estudo de determinadas questões. Ele nos conta que os TPE correspondem no ensino francês a um dispositivo didático da formação escolar, que tem um caráter de investigação multidisciplinar em torno de um assunto (*sujet*). Estas restrições diziam respeito à própria estrutura da organização matemática, mas também às escolhas e ao desenvolvimento das organizações didáticas. Foi a manifestação dessas restrições que conduziu à necessidade de reconhecer que a dinâmica entre OM e OD é passível de uma ecologia que influencia na difusão de determinado saber.

Inicialmente a escala tinha como nível superior a civilização, porém nos últimos anos um nível a mais é considerado que é o da humanidade:

Figura 10 – Escala de codeterminação.



Fonte: adaptado de (CHEVALLARD, 2014).

Tomando a Pedagogia como nível 0, podemos destacar, em um movimento descendente, os níveis mais amplos correspondentes à escola, à sociedade, à civilização e à humanidade (-1,

-2, -3, -4). Comumente, em movimento oposto, estariam os níveis ligados às organizações praxeológicas na instituição, ou seja, disciplina, domínio, tema, setor e assunto (1, 2, 3, 4 e 5). A escala precisa ser lida a partir de movimentos em sentido duplo. Esse caráter está ligado ao dimensão ecológica. Aqui, podemos pensar na influência de diversos fenômenos didáticos, dentre eles a própria transposição didática. É possível conceber nesse caso o papel da noosfera, como espaço ecótono, que faz fronteira e abriga diversos níveis:

A noosfera é uma zona composta, uma ecótono, para usar a palavra dos ecologistas, onde, certamente, um pouco de tudo pode "vir", mas muitas vezes, fugazmente, e muitas vezes tão pouco, ao contrário desses fatos maciços e tenazes de que é feita a vida do sistema escolar stricto sensu. Controlando os programas, os corpos noosferianos mais próximos dos professores, que também são menos dotados de legitimidade científica em relação à disciplina, estão dispostos a intervir nos *setores* que compõem os principais domínios⁸⁷ (CHEVALLARD, 2002, p. 9, tradução nossa).

De fato, essa percepção também é corroborada por Artaud, Bebbouchi e Menotti (2006). Em seu estudo sobre as influências dos níveis da sociedade e da civilização nos processos de transposição didática, os autores destacam:

É desse aspecto do processo de transposição didática, da autorização da sociedade e, além disso, da civilização de que faz parte, que a narrativa da experiência e da análise que fizemos é tratada solidariamente. Mais precisamente, o papel ecotônico da noosfera, destacado repetidamente em termos de objetos de conhecimento e, portanto, de organizações matemáticas, é destacado aqui em conexão com organizações didáticas⁸⁸ (ARTAUD; BEBBOUCHI; MENOTTI, 2006, p. 415).

As condições e as restrições que podem ser analisadas a partir da escala de níveis de codeterminação podem explicar também outros fenômenos didáticos presentes na escola, como, por exemplo, o que Chevallard (2006) chama de *monumentalização dos saberes*. Essa prática, frequente na escola, tem como cerne a adoção de uma postura de passividade diante dos objetos

⁸⁷ La noosphère est une zone composite, un écotone, pour employer le mot des écologues, où, certes, un peu de tout peut « venir », mais souvent fugitivement, et souvent aussi chétivement, à la différence de ces faits massifs et tenaces dont est faite la vie du système scolaire stricto sensu. Contrôlant les programmes, les instances noosphériennes les plus proches des professeurs, qui sont aussi les moins pourvues en légitimité scientifique vis-à-vis de la discipline, interviennent volontiers sur les secteurs composant les grands domaines

⁸⁸ C'est de cet aspect du processus de transposition didactique, son autorisation par la société et, au-delà, par la civilisation dont elle relève, que traitent solidairement la narration de l'expérience et l'analyse que nous en avons faite. Plus précisément, le rôle d'écotone de la noosphère, maintes fois mis en évidence à propos d'objets de savoir, et donc d'organisations mathématiques, est ici mis en évidence à propos d'organisations didactiques.

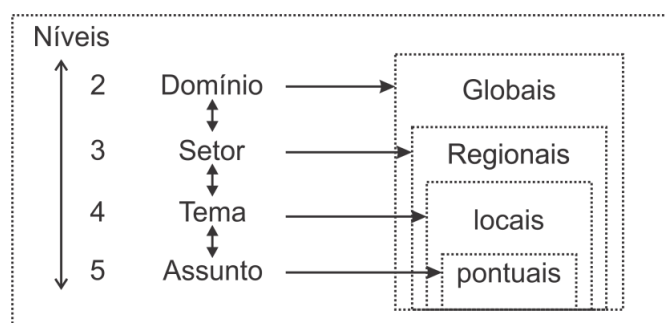
de saber, de modo que os estudantes, no lugar de assumirem a condição inquiridora diante dos saberes, passam a vê-los como monumentos, ou seja, assumem o papel de expectadores, admirados dos saberes.

Além dos exemplos, destacamos um fato que pode estar intimamente ligado à dimensão da cognição como fenômeno situado nas instituições: as relações de poder manifestadas pela influência dos níveis já citados.

Windfeldt (2018) utiliza a escala de codeterminação para analisar o processo de transposição do saber sábio relacionado ao uso de recursos genéticos vegetais no âmbito das políticas públicas da União Europeia. Em seu trabalho o nível humanidade na escala de codeterminação é utilizado para observar o conjunto de condições que permitem a organização de demonstrações públicas para conscientização da importância do uso de recursos genéticos vegetais. No sentido mais ampla esse nível se justifica exatamente pela compreensão que as questões de segurança alimentar e da agricultura perpassam o conjunto de civilizações ao redor da comunidade mundial. Esse fato, segundo, o autor é ratificado nas recomendações oficiais da Organização mundial das Nações unidas para Agricultura e Alimentação (FAO), “no caso do PGR nos encontramos condições descritas no tratado jurídico da FAO vinculado a este nível⁸⁹” (WINDFELDT, 2018, p. 377).

Retomando os níveis mais específicos da escala que tratam da ecologia dos saberes no interior das instituições, ou seja, aqueles situados a partir do nível da disciplina, Araya-Chacón (2008) sugere uma correspondência entre os níveis (2,3,4,5) e as organizações matemáticas, de modo que cada nível equivale a nível na escala de codeterminação. Então temos:

Figura 11 – Equivalência entre níveis específicos e as OM.

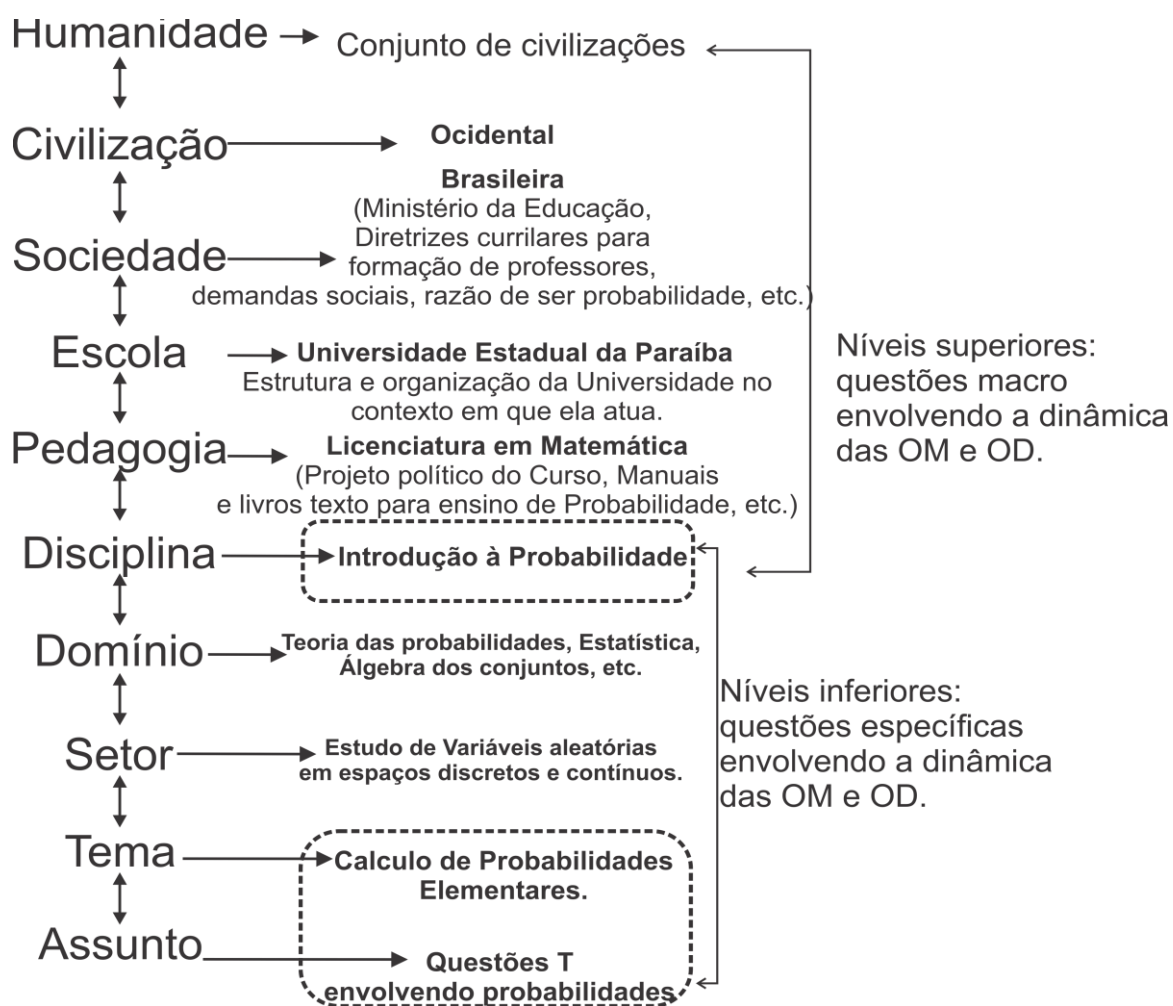


Fonte: adaptação de Araya-Chacón (2008, p. 73)

Feitas estas considerações sobre os níveis de codeterminação, elaboramos na figura seguinte uma ilustração que contextualiza o lugar de nossa investigação em relação à escala:

⁸⁹ In the case of PGR we find conditions described in the legally binding FAO-treaty on this level..

Figura 12 – Localização da pesquisa nos Níveis de Codeterminação.



Fonte: Adaptado de Almeida (2016, p. 104).

Observando a figura, a primeira consideração a ser feita é a natural divisão entre os níveis superiores da escala e os níveis inferiores. Nos níveis (-3, -2, -1, 0), temos o conjunto de condições ou restrições que atuam sobre o funcionamento do SD, objeto de estudo. O nível 0 corresponde à pedagogia comumente presente no Curso de Licenciatura em Matemática onde ocorre a formação dos futuros professores de Matemática. Notadamente poderemos identificar nesse nível os modelos didáticos dominantes que vivem na Licenciatura. Aqui, a classificação das OD nos ajuda a compreender como este nível atua sobre o funcionamento do SD. Seguindo a escala, identificamos a escola como a Universidade Estadual da Paraíba, a instituição que abriga o nível anterior onde o SD e a disciplina de Introdução à probabilidade funcionam. Esta, como instituição de formação, se localiza a noção de sistema de ensino, cujas características das relações oficiais poderão ser observados a partir de documentos oficiais internos e externos à própria instituição, já que essa instituição atende a outras instâncias superiores, como o

próprio Ministério da Educação, que se localizam no nível da sociedade brasileira. Em um sentido mais amplo, os níveis correspondentes à civilização e à humanidade podem indicar condições ou restrições relacionadas à própria compreensão do que seja a formação de professores, mas também ligadas à compreensão do papel da probabilidade, como saber legitimado pela sociedade.

Os níveis superiores correspondiam, para nós, As questões macros envolvendo a dinâmica entre OM e OD. Para Chevallard (2009), os níveis superiores correspondem a uma parte fundamental do processo de codeterminação didático, embora ele reconheça que boa parte das pesquisas tem se concentrado nos níveis mais específicos da escala.

No que se referia ao estudo empírico de nossa tese as questões específicas desse estudo estavam diretamente relacionadas à análise do SD em torno da Probabilidade e os saberes associados a ela. Notemos que, como uma disciplina introdutória, esperávamos que o currículo prescrito apresentasse em termos que dizem respeito às noções básicas da teoria da Probabilidade, mas que também contemplassem conteúdos a mais para que haja uma compreensão de temas considerados mais avançados.

Durante a qualificação da Tese fomos levados a refletir sobre a importância de traçar ao menos um esboço de um modelo epistemológico de referência para formação de professores de Matemática, no que tange à Probabilidade. Pois a possibilidade de delinear através da escala de codeterminação modelos dominantes, precisaríamos de parâmetro para compreender essa realidade. Esse esboço é feito no capítulo 5, onde explicamos o sentido adotado para essa ferramenta.

Em relação às praxeologias e sua correlação com os níveis de codeterminação, observamos que os níveis apresentam um modelo relacional entre os diferentes níveis de influência para a difusão dos saberes. De fato, a análise da escala de codeterminação foi importante para a compreensão do funcionamento do SD.

Porém nosso foco com esse estudo empírico era levantar elementos para alimentar nossa percepção teórico sobre a dimensão cognitiva na TAD. Para tanto, entendíamos que precisávamos observar a dinâmica das mudanças em $R(X,O)$ a partir da participação dos sujeitos dentro do funcionamento do SD.

Assim, tomamos como base a descrição de três instâncias nessa dinâmica: a cronogênese, topogênese e a mesogênese. Esses três descritores correspondem a uma forma de modelizar a ação didática dentro dos sistemas didáticos (MERCIER, 2008).

A cronogênese corresponde à compreensão do tempo didático no sentido atribuído por Chevallard (1997), ou seja, as formas como tempo é administrado no sistema didático para que

os saberes possam avançar na classe. A cronogênese refere-se diretamente à ação dos professores como gestores desse tempo, porém também resguarda o papel dos fatores externos, como agentes burocráticos, que impõem inicialmente restrições ao SD, uma vez que determinam o espaço temporal em que a disciplina ou a aula deve ocorrer.

A topogênese está relacionada à ação individual (papéis assumidos por professores e alunos) e conjunta (papéis partilhados por professores e alunos) em relação a suas responsabilidades em sala de aula. Analisando o sistema didático sobre a ótica de uma situação didática criada pelo professor cujo *milieu* é um aspecto fundamental para o desenvolvimento da situação, da aceitação e da consequente *devolução* do aluno, a topogênese localiza os sujeitos e seus papéis nesse processo. Esses papéis traduzidos em responsabilidades e expectativas dos professores e alunos são fundamentais para a compreensão do funcionamento do sistema didático.

A ação do professor de criar e de administrar os meios (*milieux*) para a efetivação do SD corresponde à mesogênese. De fato, para Mercier (2008), a dinâmica da mesogênese interfere na topogênese (nos papéis que alunos e professores vão assumindo) como também na administração do tempo didático (cronogênese), o que sugere para ele uma ação didática conjunta entre professores e alunos:

A criação de um tempo didático (cronogênese) restringe primeiramente a ação do professor, porque funcionalmente, é sua única responsabilidade. Para uma descrição dos movimentos através dos quais a topogênese e a cronogênese se desenvolvem (as outras dimensões da ação coletiva e conjunta em uma instituição didática), seguimos a organização comum e a conduzida, pelo professor e os alunos, no estudo de uma questão cujos alunos não conhecem a resposta (topogênese), que o professor auxilia na formação no contexto de um espaço de referência (mesogênese). Este conjunto de objetos e significados permite uma ação comum (material, simbólica, cognitiva) dos alunos e do professor. Em outras palavras, a referência comum permite a produção do professor e a devolução aos alunos, de uma série de jogos (topogênese) cuja participação é, para eles, uma aprendizagem porque esses jogos os colocam problemas (mesogênese).⁹⁰ (MERCIER, 2008, p. 4)

⁹⁰ a création d'un temps didactique (chronogénèse) contraint d'abord l'action professorale, parce que fonctionnellement, elle est de sa seule responsabilité. Pour une description des mouvements par lesquels se développent topogénèse et chronogénèse (les autres dimensions de l'action collective et conjointe dans une institution didactique) on suit l'organisation commune et la conduite, par le professeur et les élèves, d'une enquête sur une question dont les élèves ignorent la réponse (topogénèse), dont le professeur aide à la formation dans le cadre d'un espace de référence (mésogénèse). Cet ensemble d'objets et de significations permet une action (matérielle, symbolique, cognitive) commune des élèves et du professeur. En d'autres termes, la référence commune permet la production par le professeur et la dévolution aux élèves, d'une série de jeux (topogénèse) dont l'enjeu est, pour eux, un apprentissage parce que ces jeux leur posent problèmes (mésogénèse)

Ao destacar os elementos que compõem essa ação conjunta entre professores e alunos, Mercier (2008) põe relevo sobre a composição material, simbólica e cognitiva dos sujeitos envolvidos no SD. Outro aspecto suscitado pelo autor é a aprendizagem como uma participação no SD proposto.

Na teoria de Lave e Wenger (1991) o cognitivo e a participação estão imbricados, o que para nós corrobora a nossa hipótese principal de que é possível, a partir das ferramentas da TAD, constituir um quadro para a compreensão das mudanças em $R(X,O)$.

A noção de topogênese, em particular, pode representar também as expectativas oficiais em relação ao *topos* do aluno e também do professor dentro da relação didática. Os documentos oficiais, as práticas didáticas esperadas no currículo prescrito e sua efetivação são indicadores desses *topos* (CHEVALLARD; GRENIER, 1997).

Ainda pensando em termos da atividade dos sujeitos, nos desenvolvimentos recentes da teoria encontraremos referência ao processo de modelização das praxeologias pessoais dos sujeitos que atuam no seio das instituições. Conforme sinalizamos nos capítulos anteriores Croset e Chaachoua (2016) partem da premissa que é possível realizar a modelização das praxeologias próprias dos sujeitos.

Desde 2002 Hamid Chaachoua e demais colaboradores têm discutido necessidade de aprimoramento do quadro teórico-análítico envolvendo a TAD. Essa necessidade surgiu a partir de projetos que envolvem a modelagem didática em ambientes computacionais e os conhecimentos dos alunos em Álgebra no ensino secundário.

Croset (2009) apresentou a noção de praxeologias em ato. Com a intenção de modelar ações do sujeito na institucional. Nesse modelo é previsto três objetos: tipo de tarefa em ato, técnica em ato e tecnologia em ato. Em analogia a organização praxeológica presente na TAD, essas ferramentas estariam voltadas para ação do sujeito na instituição. Dessa forma, por exemplo, as técnicas em ato assumem um caráter pessoal “podem ser errôneas, corretas, legitimadas pela instituição de referência ou não”⁹¹ (CROSET, 2009, p. 177).

Chaachoua (2010) partindo do trabalho de Croset (2009) passou a chamar as praxeologias em ato de praxeologias pessoais, para fazer uma correlação direta com a noção de relação pessoal:

⁹¹ Peut être erronée, correcte, légitimée par l’institution de référence ou non.

Nos retomamos esta definição, mas nos preferimos utilizar o termo de praxeologia pessoal no lugar de praxeologia-em-ato por analogia com a noção de relação pessoal. Assim, a relação institucional $R_I(e,O)$ do sujeito em posição de aluno a um objeto O no seio de uma instituição I é descrito pelas praxeologias institucionais. E a relação pessoal $R_p(*e/I,O)$ de um aluno e^* , assujeitado a uma instituição I , ao objeto O é descrito pelas praxeologias pessoais⁹² (CHAACHOUA, 2010, 51-52, tradução nossa).

Notemos que Chaachoua (2010) nos indica uma direção importante do ponto de vista teórico, mas também metodológico para que possamos compreender as mudanças na relação pessoal dos futuros professores quando submetidos ao estudo em da Probabilidade.

O modelo praxeológico apresentado por Croset e Chaachoua (2016) assume que os tipos de tarefa pessoal correspondem as tarefas que os sujeitos percebem como semelhantes. A organização desses tipos de tarefa pode não corresponder a organização da instituição. Para resolução desses tipos de tarefas pessoais é requerido técnicas pessoais, que assim como colocava Croset (2009) podem ser erradas, verdadeiras ou legitimadas pela instituição de referência, por isso ela deve reclamar certa estabilidade na resolução das tarefas pessoais, ou seja, erros ou descuidos não são considerados. Por sua vez as tecnologias pessoais, explícitas ou não, explicariam essa prática pessoal. (CROSET; CHAACHOUA, 2016).

Apresentado os principais pontos acerca da TAD passaremos a tecer considerações sobre alguns dos principais aspectos do contrato didático, que foi tomado como unidade de análise em nossa pesquisa.

3.4 CONSIDERAÇÕES SOBRE O CONTRATO DIDÁTICO

Conforme destacamos na nossa introdução, a noção teórica de Contrato Didático terá em nossa pesquisa um papel fundamental, como instrumento teórico necessário para compreensão dos fenômenos observamos. Ao eleger o funcionamento do sistema didático em torno do ensino de probabilidade cremos que não seja possível desconsiderar o papel que o contrato didático, que ali se forma, tem na dinâmica das relações entre os sujeitos do sistema

⁹² Nous reprenons cette définition, mais nous préférons utiliser le terme de praxéologie personnelle à la place de praxéologie-en-acte par analogie à la notion du rapport personnel. Ainsi, le rapport institutionnel $RI(e,O)$ du sujet en position élève à l'objet O au sein d'une institution I est décrit par les praxéologies institutionnelles. Et le rapport personnel $R_p(e^*/I,O)$ d'un élève e^* , assujetti à une institution I , à l'objet O est décrit par des praxéologies personnelles.

didático e o objeto de estudo. Diferentemente da discussão teórica que fizemos sobre a TAD nas seções anteriores, fazemos nesta seção, apenas uma descrição em linhas gerais do contrato didático, que foi suficiente para analisar os dados que coletamos.

Para Joshua (1996), refletindo sobre asserção de René Amigues⁹³ de 1992, uma das condições fundamentais para a materialização do ensino é a existência de um espaço comum de diálogo entre professores e alunos em torno de um determinado saber. Apesar de comum, esse espaço resguarda características que indicam, antes de tudo, o seu caráter paradoxal:

Este espaço jamais poderá ser verdadeiramente “comum”. Pensando dessa forma, percebe-se o erro quando se é retirado do contexto estreito onde se acredita tê-lo construído. Esse paradoxo deve ser considerado o motor da relação didática. Ele designa uma tensão, não um estado (JOHSUA, 1996, p. 156).

O espaço no qual Joshua (1996) fala é o contrato didático (CD). A sua origem, como concebemos atualmente, remete à Teoria das Situações Didáticas. Para D’Amore (2007), a ideia cunhada por Guy Brousseau teve seu potencial reconhecido rapidamente. Os estudos que se seguiram contribuíram para a consolidação desta noção teórica, especialmente por lançar luzes sobre o funcionamento interno das situações didáticas⁹⁴ promovidas no meio escolar. Esse mesmo aspecto de construção gradativa da noção de CD foi destacada por Brito Menezes (2006).

Pais (2011) acrescenta que a natureza desta noção tem inspirações na ideia de Contrato Social proposta por Jean-Jacques Rousseau (1712-1778). Para Rousseau, conforme aponta Pais (2011), a sociedade estabelece um contrato que rege o seu funcionamento e dos indivíduos, mas as regras que regem tal contrato não estão totalmente explícitas.

Ao refletir sobre as ideias de Filloux, publicadas em meados de 1974 sobre o Contrato Pedagógico, no qual eram estabelecidos determinados papéis ou obrigações recíprocas entre aluno, sociedade e professor, Brousseau (2008) destaca que começou a indagar-se como ocorria o CD. Pensava ele que *a priori* o contrato dependesse da situação proposta, no entanto, percebeu as contradições desse modelo:

⁹³ Amigues (1992) destaca que não há ensino possível sem a construção de um espaço de interação de significados entre professor e alunos.

⁹⁴ Para Brousseau (2008, p.21), *situação didática é todo o contexto que cerca o aluno, nele incluídos o professor e o sistema educacional*. Nas situações didáticas, existem algumas etapas como situações de ação, formulação, validação, devolução e institucionalização. Essas duas etapas são permitidas a partir do contrato didático. Brousseau ainda destaca o papel das situações adidáticas (aquelas em que aluno interage com o saber em jogo sem intervenção do professor) e situações fundamentais (conjunto de situações que levam a construção do saber em jogo).

Dei-me conta de que semelhante construção de modelos levava a contradições, que expressavam na realidade por meio de paradoxos: o professor, por exemplo, não pode dizer explicitamente, e de antemão, o que o aluno terá de fazer diante de um problema, sem tirar-lhe, ao fazê-lo, a possibilidade de manifestar ou adquirir o conhecimento correspondente. (BROUSSEAU, 2008, p. 73).

O paradoxo, citado por Brousseau (2008), sobre o modelo de CD a partir da noção de Filloux sobre Contrato Pedagógico, levou-o a descrever algumas características que são fundamentais na noção de CD. Dentre elas, citamos :

- A relação didática não pode formalmente gerar um contrato;
- As cláusulas não podem ser escritas;
- As sanções em caso de quebra não podem ser previstas;
- Cada um – professor e o aluno – imagina o que o outro espera dele. (BROUSSEAU, 2008, p.74).

Essas características permitem, ainda segundo Brousseau (2008), a possibilidade de intervenção, devolução e institucionalização nas situações didáticas. O CD tem, como principal característica, a consideração do saber em jogo, ou seja, além do professor que organiza a situação didática e o aluno que é submetido a ela, há a necessidade de considerar o saber que se quer ensinar, “o contrato didático não é um contrato pedagógico geral. Ele depende estreitamente dos conhecimentos em jogo” (BROUSSEAU, 1996, p. 50).

De forma mais central, observamos que a compreensão do funcionamento do CD requer algumas premissas, dentre as quais: reconhecer os papéis do professor e do aluno e sua relação com o saber em jogo, compreender que a maior parte das regras do CD não está explícita, perceber que o contrato modifica-se conforme as situações didáticas vão se desenvolvendo e, por fim, o contrato didático é incerto. Nessa última premissa, segundo Brousseau (2008), é que reside o valor didático do CD, uma vez que:

o contrato didático é a regra do jogo e a estratégia da situação didática. É o meio que o professor tem de a colocar em cena. Mas a evolução da situação modifica o contrato, que permite então a obtenção de situações novas. Da mesma maneira, o conhecimento é aquilo que exprime através das regras da situação didática e através das estratégias. A evolução destas estratégias exige produções de conhecimentos que, por sua vez, permitem a concepção de novas situações a-didáticas (BROUSSEAU, 1996, p.50).

Observamos, nas palavras acima, o papel das premissas que colocamos como importantes de serem consideradas no trabalho com o contrato didático. No que tange à questão da evolução do CD, é importante ressaltar o conceito de ruptura do CD.

As rupturas no CD acontecem quando o professor ou o aluno age de forma inesperada frente ao saber em jogo. No momento em que é solicitada ao aluno a resolução de problemas e

este não consegue resolvê-lo, então há uma quebra no contrato estabelecido. Do mesmo modo, quando o professor propõe um problema ao aluno e a solução não está ao alcance do discente, há uma ruptura do contrato por parte do professor, pois implicitamente há a expectativa do aluno que os problemas propostos pelos professores são susceptíveis de solução.

Almeida (2009) destaca o papel fundamental das rupturas, pois é nesse momento que se abrem as possibilidades de negociação do CD. Esta, por sua vez, pode direcionar novos rumos para o jogo didático. O entendimento de como ocorrem essas rupturas é fundamental na compreensão e na organização de novas situações que possam ser mais eficazes no processo de ensino (ALMEIDA, 2009).

Nosso interesse pela análise do funcionamento do CD, quando os futuros professores se debruçam na resolução de problemas envolvendo probabilidade, reside na compreensão de que um estudo mais detalhado acerca do CD pode trazer elementos que ajudem a explicar a dinâmica cognitiva dos sujeitos frente ao saber probabilidade na formação de professores.

Chevallard (2009) destaca que a dinâmica cognitiva dos sujeitos pode ser percebida, dentre outras formas, através do reconhecimento do equipamento praxeológico dos sujeitos, isto é, as praxeologias que compõem o seu universo cognitivo. A formação do equipamento praxeológico dos sujeitos depende diretamente das experiências institucionais às quais eles se sujeitam. Para Chevallard (1996; 2009), o estabelecimento de um contrato didático é fundamental para que o sistema didático em torno de um saber funcione. Logo, a composição do universo cognitivo, bem como do equipamento praxeológico, depende do CD, pois é com a mudança de $R(X,O)$ que acontecem as aprendizagens.

Ainda sobre as rupturas, Pais (2011) ressalta que, assim como as regras do CD, muitos pontos de rupturas estão implícitos e, por vezes, não podem ser revelados. Ele chama atenção para que percebamos que o CD e suas regras têm influências diversas:

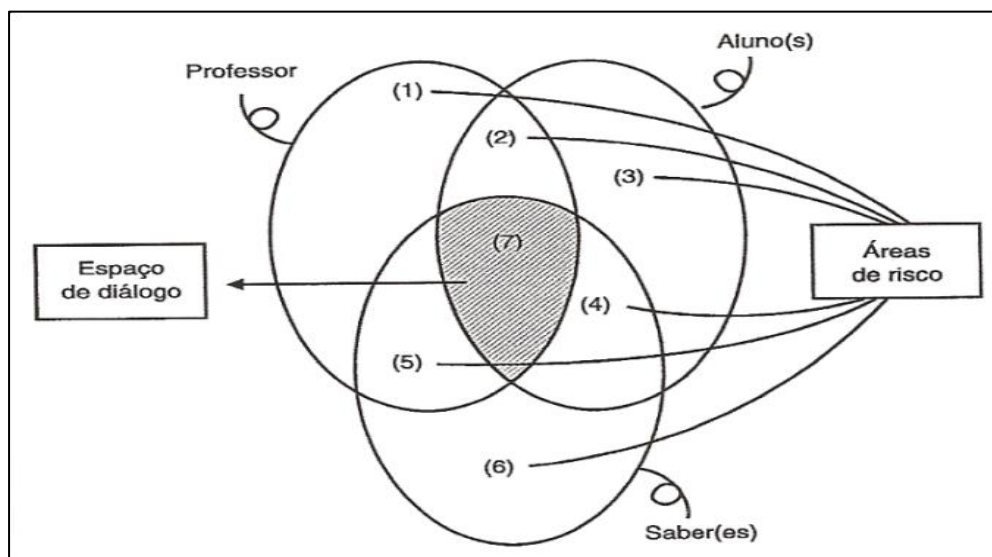
Finalmente, cumpre destacar que o conjunto das regras do contrato didático é o resultado de várias fontes de influência, que seja do cotidiano, do próprio espaço da sala de aula, da instituição escolar, de uma comunidade de especialistas em educação, quer seja de toda a sociedade (PAIS, 2011, p. 82).

Jonnaert e Borght (2002) destacam que o dinamismo da relação didática pode ser percebido a partir do funcionamento do CD. Na opinião dos autores, é o seu funcionamento que revela o diálogo entre o professor, o aluno e o saber em jogo. Enquanto vértices⁹⁵ da relação didática em sala de aula, o professor, o aluno e o saber devem resguardar interações entre si e

⁹⁵ Ver Brito Menezes (2006) referência ao triângulo das situações didáticas.

consigo mesmos. Os autores ilustram como função do contrato didático a ampliação da zona de diálogo entre os três entes, de modo que aqueles espaços em que os entes se encontram isolados são considerados zonas de risco.

Figura 13 – Uma das funções do Contrato Didático.



Fonte: Jonnaert e Borght (2002, p.178).

Na figura 13, o espaço de diálogo suscitado corresponde à zona (7). A ali onde professor, alunos e o saber se encontram. Nele reside a natureza operacional do contrato conforme asseveram:

A função do contrato é sua ampliação e conseqüente diminuição das áreas de risco. A função de um contrato didático não é transformar todo o implícito em explícito, mas estabelecer um equilíbrio entre ambos, a fim de criar uma zona de trocas entre os parceiros: um espaço de diálogo. Nesse sentido, o contrato didático não pode existir a não ser no interior de uma relação didática, no próprio interior da sala de aula. Nesse sentido também não pode haver dois contratos didáticos idênticos, pois não existe um padrão de contrato didático. Se o conceito de contrato didático permite compreender o dinamismo da relação didática, é, inversamente, o próprio funcionamento da aula que permite a decodificação do contrato didático (JONNAERT; BORGHT, 2002, p. 180).

Além dessa função primeira, os autores destacam outra função do contrato que é a de gerar um sistema de regras para a compreensão do costume da sala de aula. O contrato, ao estabelecer um espaço de diálogo e interação, passa a manifestar regras em sua maioria implícitas que acabam por relevar o costume da sala de aula, entendido também em nossa pesquisa como o cotidiano da sala de aula na acepção de Lave (1988).

Segundo Jonnaert e Borght (2002), é na dinâmica da interação e no gerenciamento dessas regras implícitas e explícitas que se dão os processos de negociação, isto é, gestão de regras e decisões que regem a relação didática. O bom CD é aquele que rege a dinâmica, promovendo equilíbrio entre as regras explícitas e implícitas que remetem à tomada de decisões, que podem ser negociadas, assim como podem ser unilaterais, determinadas por fatores internos e externos, espontâneas ou preexistentes na relação didática estabelecida.

Essas funções aliadas a suas características fazem do contrato didático uma noção dinâmica:

Permanentemente, alunos e professor decodificam essas regras, buscam compreender as expectativas uns dos outros, tentam agir no sentido de sua percepção da expectativa do outro. O contrato didático permitirá a cada um compreender melhor o que tem direito de esperar do outro em suas relações com o saber. O contrato didático vai esclarecer os direitos e os deveres de uns e outros. Mas essas regras mudam, evoluem, progredem e se adaptam à situação didática, a suas limitações, aos acasos. (JONNAERT; BORGHT, 2002, p. 188)

Aqui, trazemos novamente o sentido atribuído ao termo “ruptura”, considerando-o como uma força motriz da dinâmica do contrato didático. A natureza tensional e o seu caráter evolutivo despertam a necessidade de rupturas para que o contrato didático possa avançar, pois é exatamente no momento em que o aluno se vê confrontado que poderá se debruçar sobre os obstáculos e desafios que lhe são apresentados:

A aprendizagem não é mais considerada como o resultado da satisfação das exigências, mesmo implícitas, do contrato didático, mais procede, ao contrário, de sua ruptura: “aprender implica para ele (o aluno) recusar o contrato, mas aceitar a resolução do problema (a devolução)”⁹⁶ (SARRAZY, 1995, p. 91).

Sarrazy (1996) destaca ainda que o movimento da devolução como etapa das situações didáticas comporta um processo de contra devolução. A devolução é caracterizada pela aceitação dos alunos das responsabilidades contratuais de gerenciar as situações propostas. Quando o contrário ocorre, ou seja, os alunos rompem com o contrato e não assumem essa devolução, o professor se vê obrigado a tomar para si essa responsabilidade adaptando a situação. Assim, ocorreria um processo de contra devolução, que é motivado pelas rupturas (SARRAZY, 1995).

⁹⁶ L'apprentissage n'est plus considéré comme le résultat de la satisfaction des exigences, mêmes implicites, du contrat didactique, mais procède, au contraire, d'une *rupture* de celui-ci : « Apprendre implique pour lui [l'élève] refuser le contrat mais accepter la prise en charge du problème [la dévolution]

Outro aspecto importante das rupturas é o seu valor como manifestação empírica do contrato, isto é, como a maior parte das regras do CD são implícitas, as rupturas aparecem como uma forma de sinalizar para a existência dessas possíveis relações ocultas. De fato, como coloca Brito Menezes (2006), as rupturas são de grande valia, inclusive como variável metodológica para a compreensão do funcionamento dos contratos didáticos:

Os autores que se dedicam ao estudo desse fenômeno apontam que ele é mais facilmente identificável quando há uma ruptura do mesmo. A ruptura se dá quando ambos os pares da relação – ou um deles – defronta-se com uma situação conflituosa. Em geral, quando o contrato é rompido torna-se em parte explicitado e deve ser renegociado e isso aparece no nível do discurso didático (BRITO MENEZES, 2006, p. 66).

Ao se referir ao discurso didático, Brito Menezes (2006) destaca que a análise dos discursos do professor e dos alunos é uma das técnicas para a identificação dos elementos do CD. A análise do discurso sugerida é, em sentido mais amplo, com influência da psicologia, psicanálise, sociologia, linguística, que considera também a linguagem não verbal como componente desse discurso. Assim, o discurso carrega componentes não-verbais, isto é, uma linguagem implícita e subjetiva.

A respeito da subjetividade dos sujeitos e seu papel nas relações que compõe o CD, há indicações de que o CD tenha uma dimensão psicológica que precisa ser levada em consideração. Ao localizar o contrato didático no centro da relação didática, desenvolvem-se entre os seus agentes (professor, aluno e saber) relações assimétricas. O componente humano das relações didáticas são o professor e os alunos. Cada qual como sujeito no SD participa das relações contratuais de modo que alimenta expectativas, negocia, toma decisões, rompe com o contrato. De fato, para Jonnaert e Borghet (2002), uma das funções da relações didáticas e, portanto, do CD que dela emerge é mudar a relação que o aluno tem com o saber. Podemos inferir que estes sujeitos, ao participarem e vivenciarem um CD, estão em processo de (re)construção de significados.

Jonnaert e Borghet (2002) defendem que o CD tem uma dimensão temporal curta, já que ele se encerra quando a relação didática termina. Já o processo de construção de conhecimento continua indefinidamente. Embora o tempo do CD se limite ao tempo da relação didática, seus efeitos nesse processo de significação dos sujeitos em relação aos objetos do saber podem acompanhá-los. De acordo com Schubauer-Leoni (1988b)⁹⁷, os sujeitos de uma relação didática

⁹⁷ SCHUBAUER-LEONI, M.L. Le contract didactique dans une approche psycho-sociale des situations d'enseignement. *Interactions didactiques*. Univ. de Neuchâtel. 8, 1998. 63-75.

carregam componentes subjetivos, de modo que os hábitos ou costumes desses sujeitos são constituídos pela vivência de contratos anteriores.

Joshua (1996) defende claramente que a abordagem vigotiskiana, isto é, uma abordagem da cognição como um fenômeno de internalização que depende da interação sociocultural, pode perfeitamente explicar certas nuances do contrato didático. O autor é mais enfático ao destacar que o CD é em sua essência um fenômeno social, portanto, a compreensão de seu funcionamento por perspectivas psicológicas que não levam em consideração essa dimensão do contrato se mostrariam incompletas (JOHNSUA, 1996).

Jonnaert e Borght (2002) relatam, a partir de uma perspectiva sócioconstrutivista e interativa, que o CD age na zona de desenvolvimento proximal⁹⁸ dos alunos:

Essa dialética entre um professor e os alunos, a propósito de um saber e por meio da zona de desenvolvimento proximal, é gerida pelo contrato didático. E por uma série de regras do jogo estabelecidas pelo contrato didático que o aluno a faz trajetória da dependência em face do professor até sua autonomia em relação ao saber (JONNAERT; BORGHT, 2002, p. 171).

Essa observação sobre a dimensão psicológica e social do CD nos é importante porque Chevallard (1996), ao destacar a importância dessa noção para o funcionamento dos sistemas didáticos, abre a possibilidade para considerarmos que, através da análise do funcionamento do SD, confrontaremos as dimensões que o CD pressupõe. Dito de outro modo, as ferramentas da TAD cujo foco é a ecologia dos saberes podem de fato trazer elementos importantes para destacar não só a ecologia, mas também como esta interfere nas possíveis mudanças de R(X,O) que são esperadas com o funcionamento do CD.

Outro aspecto relevante a ser levado em consideração sobre o CD são os efeitos ligados a ele. Os estudos dos efeitos do CD remontam aos trabalhos desenvolvidos por Brousseau e Perez (1980) sobre o Caso Gael. A relutância do menino Gael em explicitar o conhecimento através da influência do professor chamou atenção. Paralelo a este estudo, Chevallard (1988)⁹⁹ interpretou os resultados obtidos no IREM em Grenoble¹⁰⁰ como contrato didático. Em síntese, os efeitos destacados por Brousseau (2008) são Efeito Topaze, Jourdain, Escorregamento

98 Na perspectiva vigotiskiana, a zona de desenvolvimento proximal (ZDP) corresponde à diferença entre o nível de resolução de problemas orientada (pelo professor ou adulto) e o nível de resolução de problemas autônoma. Corresponde ao potencial de desenvolvimento do sujeito. Ela ajuda a explicar como alguém passa de um nível de conhecimento para outro a partir do processo de interação social. (JONNAERT e BORGHT, 2002).

99 Chevallard Y. (1988a) Sur l'analyse didactique. Deux études sur les notions de contrat et de situation. IREM d'Aix-Marseille, 14.

100 O conhecido caso da idade do capitão.

Metacognitivo e o Uso Abusivo de Analogias. Cada um desses efeitos aponta para situações que podem ser materializadas na sala de aula.

Sobre os efeitos didáticos, Pais (2011) destaca que, embora eles sejam materializados em sala de aula, isso não significa que sejam determinantes do processo de aprendizagem que é dinâmico e não se reduz a uma única dimensão. Para o referido autor, diversos aspectos estão ligados ao surgimento desses efeitos, como a metodologia, a formação docente, o nível dos alunos, dentre outros.

Apresentamos a seguir o quadro 5 que sintetiza cada um dos efeitos e suas características:

Quadro 5 – Resumo efeitos do contrato didático.

Efeito	Síntese
Topaze	Quando o aluno encontra entraves para solucionar os problemas, o professor modifica as regras do contrato, facilitando a solução.
Jourdain	Quando o conhecimento é banalizado, ou seja, o aluno diz algo simples, considerando-o ser um grande conhecimento.
Escorregamento Metacognitivo	No momento em que os algoritmos ou técnicas passam a ser o principal objeto de estudo em detrimento do conceito.
Uso abusivo de analogias	Quando para facilitar a aquisição de um conhecimento, as analogias são usadas em excesso e passam a ser o próprio objeto de estudo.

Fonte: próprio autor (2018).

Conforme podemos observar, os efeitos listados acima têm influência direta da ação docente, mas não se devem somente à ação docente, pois o funcionamento do CD compreende, conforme apontam Jonnaert e Borght (2002), o diálogo e a interação entre o professor, o aluno e o saber.

Acerca do entrelaçamento entre a TSD e a TAD, no que tange à noção de CD como interseção, há pesquisas que corroboram esse entrelaçamento e que apontam para a necessidade desse enlace.

Brousseau (2006) destaca que nesse processo é preciso observar certas peculiaridades de cada uma das teorias, de como a aproximação de termos como tarefa fundamental da TSD e tarefa no TAD não é uma tarefa trivial. Por outro lado, o autor destaca a necessidade de olhar para a dimensão praxeológica e seus efeitos sobre as intenções da relação didática proposta em uma situação didática (BROUSSEAU, 2006)

Essa mesma preocupação foi levantada por Almeida (2016), para quem a possibilidade de diálogo teórico é primordial para a compreensão de determinados fenômenos. Em seu trabalho, ele utiliza-se dos quadros da TAD para descrever a relação institucional para com o

objeto “equação polinomial do segundo grau” em turmas do 9º do Ensino Fundamental. Em seguida, analisa o contrato didático que se desenvolve nas relações didáticas dessas turmas.

Um trabalho pioneiro foi desenvolvido por Brito de Menezes (2006), que realizou um estudo sobre as inter-relações entre o Contrato Didático e a Transposição Didática em torno do saber “álgebra escolar”. A autora percebeu que existe uma relação estreita entre as duas teorias, indicando, por exemplo, indícios de efeitos relacionados ao fenômeno da Transposição Didática.

O nosso trabalho aponta semelhanças com as pesquisas de Brito Menezes (2006) e Almeida (2016), no entanto, em ambos os trabalhos, o CD foi tratado como noção teórica principal. Em nosso estudo, o objeto muda no sentido que trabalhamos como a formação de professores, no entanto, entendemos o CD como noção importante para nossas análises.

3.5 SÍNTESE DO QUADRO TEÓRICO

O exercício teórico que nos propomos realizar assumiu, desde o segundo capítulo, a metáfora de que o quadro teórico nos serviria como lentes para observar e construir o fenômeno estudado. Partimos do princípio da problematização que, segundo Bachelard (1996), é fundamental para o avanço científico. Apoiamo-nos também nas ideias de Fleck (2010) para a comunidade científica constituída de coletivos de pensamentos. Foram esses dois referenciais que nos conduziram à compreensão de que seria necessária a combinação de lentes para dar conta de nossa investigação. Embora, metodologicamente, tenhamos dividido essa discussão em capítulos distintos, tentamos, sempre que possível, fazer conexões que, no plano teórico, remetem à reflexão que temos feito durante todo o processo de formação que vivemos até aqui.

No capítulo 2, tentamos exprimir nossa compreensão sobre a cognição e como trataríamos a sua dimensão psicológica. A cognição situada, teoria de abordagem antropológica, não foi escolhida sem razão. As constantes indicações textuais, de Chevallard e colaboradores, sobre o foco da abordagem antropológica e do estilo de pensamento da TAD, pareciam indicar a necessidade de afastamento das perspectivas cognitivistas mais tradicionais, aqui chamadas de “mentalistas”, conforme sugerem Lave (1988), Radford (2011), dentre outros.

Observando o capítulo 2 como um todo, seguimos uma linha que tratou de apresentar a cognição sob a ótica de sua compreensão desde as escolas de pensamento clássicas, passando para as compreensões mais atuais, como a aquelas ligada às ciências da informação. Em

seguida, discutimos a própria Psicologia como um campo plural. Esperamos ter preparado um cenário onde a cognição situada, do ponto de vista social e antropológico, poderia nos fornecer uma alternativa para pensar a cognição e suas dimensões. A ausência de um aprofundamento maior sobre a cognição situada justifica-se pelo fato de que as ferramentas da cognição situada cumpririam o papel de balizar nossas discussões sobre a cognição, quando da nossa leitura teórica da TAD.

O estudo de Lave e Wenger (1991) nos ajudou a compreender que, do ponto de vista da cognição situada, categorias de análise elencadas a priori: 1. participação dos sujeitos; 2. produção e negociação de significados na comunidade; 3. apropriação de saberes/práticas; e 4. constituição de identidades na comunidade, são compatíveis com o referencial da cognição situada, mas também com a análise pretendida do contrato didático como dimensão social, conforme aponta Joshua (1996).

Para nós, a dimensão psicológica nessas categorias se manifesta no discurso didático, nas atividades, nos comportamentos, nas decisões, nas expectativas e suas rupturas. Acreditamos que cada um desses possíveis indicadores resguarda um componente individual dos sujeitos, mas também traços da influência institucional nas mudanças de $R(X,O)$.

Foi imbuídos dessa percepção que adentramos que neste capítulo no universo da TAD. Concentramo-nos nos aspectos teóricos que julgamos serem fundamentos para a nossa análise. A breve descrição da gênese da Didática da Matemática e do lugar da abordagem antropológica nos ajudou a justificar a possibilidade desse olhar situado sobre a cognição, ao invés de um olhar centrado no indivíduo.

Na discussão sobre a Antropologia Cognitiva e o alargamento da compreensão das noções de instituição e de sujeitos utilizando técnicas para realizar tarefas, os textos de Mauss (2003) e Douglas (2007) foram fundamentais para compreendermos o papel das instituições como agentes na cognição dos sujeitos, e dimensão psicológica como componente das ações desses sujeitos, quando utilizam as técnicas.

Isso nos deu a segurança teórica para dizer que a Antropologia Cognitiva, ao perpassar as demais noções e desenvolvimentos da TAD, conforme figura 7, indica que a cognição e a dimensão psicológica são aspectos latentes passíveis de exploração e análise.

Embora, reconheçamos que o foco da ecologia dos saberes seja a discussão das condições e restrições na difusão dos saberes, acreditamos que a análise dessa ecologia levanta elementos importantes para compreendermos o que ocorre na mudança da relação pessoal $R(X,O)$.

Tanto que está tem sido um tendência dentro dos desenvolvimentos da teoria conforme explicaram Chaachoua e Bittar (2016). A noção de praxeologias pessoais indica que o sujeito cognitivo um objeto passível de análise dentro das ferramentas da TAD.

Ao dialogar com possibilidade de modelização das praxeologias desenvolvidas pelos sujeitos no seio das instituições. Croset e Chaachoua (2016) nos indicam a direção do que pode ser uma ferramenta poderosa para compreender as mudanças na relação $R(X,O)$ dos sujeitos no seio das instituições. Para nós, isso garante que a dimensão psicológica, parece não estar de fato negada, mas durante muito tempo ela não tem sido o foco, indicando o que não talvez não seja uma deficiência dentro do quadro teórico, mas uma escolha deliberada desse estilo de pensamento.

Como nossa intenção é retomar essa discussão mais adiante, munidos das reflexões sobre o funcionamento do sistema didático em torno do ensino de probabilidade na Licenciatura em Matemática, não queremos tonar esse debate conclusivo.

Porém que de fato, concordamos com Sarrazy (2006) e seu argumento sobre o foco da TAD. Percebemos ao longo desse exercício que esclarecer determinados fenômenos relativos a dinâmica cognitiva dos sujeitos envolvidos com o SD, é uma possibilidade, mas também uma lacuna da TAD, conforme colocou Sarrazy (2006).

Como seção final do capítulo 3 apresentamos o papel do contrato didático como noção fundamental para a análise do sistema didático. Esta noção, conforme discute Joshua (1996), apresenta potencial para a discussão da dimensão psicológica, a partir de elementos da teoria de vigotiskiana. Isso nos lembra que tanto a aprendizagem situada tem raízes teóricas a perspectivas histórico social. Como vimos Lerman (2002) apontou o conceito de zona de desenvolvimento proximal como ponte para explicar elementos que a aprendizagem situada parece não dar conta.

Para finalizar esse exercício de síntese, apresentamos um quadro onde tentamos mostrar possíveis pontos de encontro entre a TAD e a cognição situada:

Quadro 6 – Quadro resumo noções da TAD e AS.

Noção	TAD	Aprendizagem Situada
Prática	Central na teoria, o homem perante atividades matemáticas, manifesta-se na atividade de estudo.	Central na teoria, a prática como emaranhado complexo entre sujeito e sociedade, manifesta-se nas atividades partilhadas.
Descrição das práticas	Praxeologias institucionais e praxeologias pessoais.	Etnografia das práticas.
Cognição	Fenômeno que se revela na prática e que pressupõe componentes públicos e privados.	Ocorre com/na prática.
Ato de Aprender	Relacional, mudança na relação R(X,O)	Relacional, fenômeno social, em dialética com a ação dos sujeitos
Didático	Está em toda intenção de ensinar, maior interesse por instituições de ensino. Situações não-escolares são consideradas um problema aberto.	O interesse maior é em situações não formais de ensino, mas não se nega a utilidade da teoria para pensar questões escolares.
Instituição	Central como agente que age diretamente na formação das pessoas e na cognição. Tem um sentido amplo. Uma CP pode se configurar como uma instituição	Comunidades de práticas são comunidades onde há sujeitos engajados em um compromisso comum. Certas instituições não se caracterizam como CP
Pessoa	Fruto das sujeições institucionais	Ser histórico-social
Sujeitos em situação de ensino	Movimento das posições assumidas pelos sujeitos. Sujeito transita em diversas instituições	Sujeito ocupa posições periféricas e não depende só do momento do engajamento, mas das suas vivências em outras situações interferem no processo
Dialética Mundo-escola	Níveis de codeterminação	As situações de aprendizagem envolvem um emaranhado de relações de poder
Sala de aula	Instituição onde funcionam os sistemas didáticos.	Revela o cotidiano de um atividade social
Contrato didático	Necessário para funcionamento dos sistemas didáticos, onde ocorrem negociações e rupturas.	Nas comunidades de práticas e seus contextos se configuram arenas de disputas entre agentes.

Fonte: próprio autor.

Durante a fase de qualificação da pesquisa havíamos apresentado o quadro 06 como um exercício de síntese. Esse quadro é retomado no capítulo 7 onde retomamos a discussão final de nossa Tese.

Por fim, para nós, o estudo teórico indicou que a dimensão psicológica, seja ela de um ponto de vista antropológico, assumindo a cognição como ato social e não mentalista, mas respeitando a dimensão individual, seja assumindo algumas características do paradigma cognitivista, como abordagem vigotiskiana, é passível de análise a partir dos quadros da TAD.

Para isso é preciso que se aceite que o conjunto de explicações sobre a ecologia dos saberes nos fornecem um instrumental relacional importante sobre a vida desses saberes nas instituições, mas cujo foco não é na ação dos sujeitos, logo existe um terreno a ser explorado

As ferramentas da TAD tem centralidade na ecologia que permite a difusão dos saberes. O resultado disso é a aparente negação da dimensão psicológica. Temos pensado nessa negação como uma questão ligada à própria compreensão das finalidades da TAD. A teoria por si só não pode querer dar conta de todos os fenômenos ligados à difusão dos saberes. Assim, é preciso reconhecer que outras explicações são necessárias, inclusive com o aprimoramento de ferramentas, já que a essência da evolução da ciência é a problematização, como já dizia Gastón Bachelard.

4 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Caminhada

Caminhar é preciso
 o resultado
 ninguém conhece
 Caminhar é preciso
 um passo por vez
 nem sempre para frente
 Caminhar é preciso
 honestidade traça a rota
 incerta e torta é a reta
 Caminhar é preciso
 cada qual do seu jeito
 mas todos caminham
 Caminhar é preciso
 questionar(se) é da natureza
 e a natureza é incerta
 Caminhar é preciso
 rigorosamente
 Com desejo de chegar.

Neste capítulo nos propomos a debater os percursos e escolhas metodológicas que fizemos durante nossa Tese. Por se tratar de um estudo que majoritariamente teórico, mas que resguarda aspectos empíricos no que tange a utilização da TAD para observar o funcionamento do sistema didático em torno da probabilidade no âmbito institucional da Licenciatura em Matemática, buscamos apresentar aos leitores os detalhes de cada uma das etapas e instrumentos utilizamos, com o intento fornecer subsídios para reflexão sobre o rigor metodológico com que nos dispusemos na construção desse estudo.

Tendo em vista que nossa proposta de pesquisa se insere nos quadros teóricos da Didática da Matemática, e que seu principal objetivo é caracterizar o lugar do sujeito cognitivo na TAD a partir de uma perspectiva da cognição como um fenômeno situado no contexto institucional, quando se forma um sistema didático em torno do ensino de probabilidade na licenciatura em Matemática. Pensamos que para fazer esse processo de análise, necessitamos de um desenho metodológico que nos coloque em contato direto e aprofundado com o objeto de estudo.

Esse contato direto implica um mergulho teórico nas referências que já apresentamos nos capítulos anteriores, bem como, pressupõe a interpretação dos fenômenos que ocorrem no seio da instituição onde se estabelece o sistema didático analisado.

Partindo do pressuposto de que cada pessoa traz consigo experiências e vivências institucionais diferentes e diversas, escolhemos traçar um percurso partindo de uma abordagem qualitativa.

Essa escolha passou pelo entendimento de que em tais moldes a pesquisa pode proporcionar uma compreensão mais ampla e profunda da realidade investigada, isto é, a pesquisa qualitativa pode proporcionar um olhar mais acurado sobre as experiências vividas pelos sujeitos envolvidos, de modo que, nesse processo de formação, não sejam vistas como variáveis estanques, representadas de forma estática.

De acordo com Bogdan e Biklen (1994, p. 48), nesse tipo de pesquisas, “os dados recolhidos, podem ser advindos das mais variadas fontes, como análise de textos pessoais dos sujeitos da pesquisa, entrevistas, manuais e documentos oficiais, atividades produzidas na sala de aula entre outros”. Em nossa pesquisa, o foco está na compreensão da natureza teórica da dimensão cognitiva na TAD, com exercício de reflexões em torno do processo vivido pelos sujeitos do sistema didático estudado.

Tendo em vista a nossa questão norteadora e as hipóteses levantadas, compreendemos que nossa pesquisa tem uma natureza teórica, mas também etnográfica, aproximando-se da ideia de observação participante, nesse aspecto, que “é chamada de participante porque parte do princípio de que o pesquisador tem sempre um grau de interação com a situação estudada, afetando-a e sendo por ela afetado” (ANDRE, 2007, p. 25).

Ainda sobre a observação participante, Fiorentini e Lorenzato (2009, p. 108) destacam que:

A observação participante é uma estratégia que envolve não só a observação direta, mas todo um conjunto de técnicas metodológicas (incluindo entrevistas, consulta de materiais etc), pressupondo um grande envolvimento do pesquisador na situação estudada. Das anotações obtidas das observações, devem constar a descrição dos locais, dos sujeitos, dos acontecimentos mais importante e das atividades, além da reconstrução dos diálogos e do comportamento do observador.

Em nosso estudo, o funcionamento do sistema didático envolveu um trabalho análise teórica e de observação que foi complementado com entrevistas, questionários, análise documental, que tinham a finalidade de contextualizar as experiências vividas pelos sujeitos na realidade institucional. Sobre esse processo, apoiamo-nos novamente em André (2007, p. 25) que afirma:

As entrevistas têm a finalidade de aprofundar as questões e esclarecer os problemas observados. Os documentos são usados no sentido de contextualizar o fenômeno, explicitar suas vinculações mais profundas e completar as informações coletadas através de outras fontes.

Ainda sobre o processo etnográfico, retomamos as ideias de Lave (2011)¹⁰¹, que destaca que, nesse processo, o pesquisador e a realidade pesquisada estão sempre em uma interação dialética, de modo que a pesquisa sobre a aprendizagem é também uma aprendizagem como pesquisa, nas palavras da própria autora: “Assim, a pesquisa sobre aprendizagem (através do aprendizado) e a pesquisa como aprendizagem (através de práticas etnográficas críticas) são cada uma e em conjunto práticas empíricas-teóricas”¹⁰² (LAVE, 2011).

Esclarecidos esses posicionamentos, passaremos a descrever à caracterização dos sujeitos envolvidos em nossa pesquisa, as etapas do estudo, o desenho da observação do sistema didático e as categorias de análise estabelecidas a priori.

4.1 SUJEITOS DA PESQUISA

Como o objeto de nossa pesquisa é a caracterizado pela discussão que fazemos em torno da TAD, mas optamos por trazer uma observação empírica atrelada a essa análise elegemos como sujeitos de nossa pesquisa um professor formador responsável pelo ensino de Probabilidade no curso de licenciatura em Matemática e os futuros professores matriculados no componente curricular ofertado pelo referido professor formador quando da coleta de dados.

Para o estudo de observação, escolhemos o curso de licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba. Localizando na cidade de Monteiro no cariri paraibano, o curso atende à demanda de formação de professores no interior da Paraíba e de cidades circunvizinhas do Estado de Pernambuco.

A escolha desta licenciatura foi baseada em dois critérios: 1. Acessibilidade institucional; 2. Viabilidade Curricular.

O critério de acessibilidade foi amplamente cumprido, pois somos docentes nesta instituição no referido curso, além de mantermos residência fixa na cidade Monteiro – PB. O critério de viabilidade curricular, por sua vez, também foi cumprido, pois, no currículo dessa

101 Jean Lave, em seu “Apprenticeship in critical ethnographic practice”, publicado em 2011, revisita toda a sua obra e analisa os detalhes com a finalidade de apresentar o método que ela chama de Prática Etnográfica Crítica.

102 So research on learning (through apprenticeship) and research as learning (through critical ethnographic practice) are each and together empirical-theoretical practices

licenciatura, encontramos três componentes curriculares que fazem menção à Probabilidade, segundo o projeto pedagógico do curso; prática de ensino de matemática II, história da matemática e introdução à probabilidade. Desses três componentes, a escolha natural foi pelo que trabalha diretamente com o conceito, isto é, Introdução à Probabilidade.

Definidos os sujeitos e os critérios que nos levaram à escolha do local onde pretendemos fazer nossa coleta de dados, passamos a discutir as etapas da pesquisa e os instrumentos de coleta de dados em cada etapa.

4.2 ETAPAS DA PESQUISA

O delineamento de etapas ou passos que seguimos foi fundamental para que tivéssemos clareza de aonde queríamos chegar e, sobretudo, para que pudéssemos vislumbrar os instrumentos para a coleta de dados e seu aperfeiçoamento.

Em nosso entendimento, a construção de nossa pesquisa deveria seguir dois caminhos que estavam inter-relacionados em um processo dialético, portanto, traçamos etapas para o caminho empírico que se desenhou com a observação e o caminho teórico, conforme sugere a síntese no quadro 07:

Quadro 7 – Caminhar metodológico.

Caminhar empírico – CE	Caminhar Teórico – CT
Analisar o sistema didático na formação de futuros professores de Matemática em componente curricular dedicado ao ensino de probabilidade.	Ampliar o estudo epistemológico sobre as bases teóricas da TAD, investigando a pertinência da dimensão psicológica nesta construção teórica; Analisar o papel das noções elementares como metáforas adequadas para pensarmos a dimensão cognitiva da aprendizagem através das práticas institucionais.
Indicadores	Indicadores
<ul style="list-style-type: none"> ✓ 01 – Mudanças nas posições dos sujeitos no funcionamento do SD; ✓ 02 – Analisar OM e OD e o papel dos níveis de codeterminação em que está inserido o sistema didático; ✓ 02 - Observar a dinâmica $R(X,O)$ com o objeto probabilidade; ✓ 03 – Construção da identidade “aptos a ensinar sobre probabilidade” 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ 01 - Aprofundar os estudos sobre Marcel Mauss e Mary Douglas; ✓ 02 - Utilizar Teoria da Aprendizagem Situada, como ferramenta para analisar a dimensão cognitiva da aprendizagem nas noções da TAD, a partir do caso empírico.

Fonte: próprio autor (2018)

A partir dos indicadores, dividimos o estudo em três etapas: 1. Etapa de estudos teóricos; 2. Construção dos Dados e 3. Análise de dados. Apesar da escolha pela descrição em termos de etapas, destacamos que essas não seguiram rigorosamente um tempo cronológico, por exemplo, a primeira etapa foi retomada durante todo o processo de estudo, no entendimento de que o exercício teórico permeou toda a pesquisa.

Assim a **primeira etapa** foi dedicada à realização do estudo teórico e foi dividida em dois momentos. No primeiro, anterior à observação do funcionamento do sistema didático, realizamos um estudo sobre as bases epistemológicas da TAD, a fim de ampliar nossa compreensão sobre as noções elementares da teoria, conforme indicador 01 do caminhar teórico. O segundo momento, posterior à realização do estudo piloto, fez parte da etapa de construção de dados, e procurou ampliar o estudo teórico a partir da análise das possibilidades de interação entre a TAD e a Teoria da Cognição Situada. Este exercício correspondeu ao segundo indicador do caminhar teórico que visa(va) levantar elementos para analisar a dimensão cognitiva da aprendizagem na TAD.

A **segunda etapa** foi dividida em três momentos. O primeiro momento correspondeu à realização do estudo exploratório 02 e do estudo sobre as organizações praxeológicas matemáticas e didáticas e os níveis de codeterminação que agem em torno do sistema didático estudado. No segundo momento, preparamos os instrumentos para observação do sistema didático. Por fim, o terceiro momento foi a observação propriamente dita e o processo construção dos dados a partir das entrevistas e dos questionários.

A **terceira etapa**, análise de dados, foi dividida em dois momentos. O primeiro iniciou-se com a realização dos estudos teóricos previstos no 1º momento da etapa 01. A análise teórica nos ajudou a compor as categorias e escolher os instrumentos de coleta de dados para o estudo piloto. Esse momento culminou com a análise dos dados no capítulo 6. O segundo momento consistiu na retomada teórica do estudo afim de refletir sobre a dimensão da cognição na TAD a partir dos dados analisados no capítulo 6.

A síntese das etapas realizadas está descrita no quadro seguinte:

Quadro 8 – Etapas da Pesquisa.

ETAPAS	MOMENTOS DAS ETAPAS		
Etapa 01 Estudos teóricos	1º Momento		2º Momento
	Estudo exploratório 01 sobre as bases epistemológicas da TAD – Indicador 01 – CT		Estudo sobre cognição situada e a TAD – Indicador 02 – CT
Etapa 02 Estudo empírico	1º Momento	2º Momento	3º Momento
	Estudo Exploratório 02 sobre Probabilidade Análise Praxeológica – Indicador 01, 02 – CE.	Realização do Estudo Piloto – Indicador 01, 03 e 04 – CE.	Aprimoramento do Estudo Piloto após a qualificação – Indicador 01, 02, 03 e 04 – CE.
Etapa 03 Análise de dados	1º Momento		2º Momento
	Composição de categorias de análise, análise preliminar do Estudo Piloto – Indicador 01, 02 – CT.		Refinamento das categorias /instrumentos e composição da análise final. Resultado dos indicadores de CT e CT.

Fonte: próprio autor (2018)

A seguir, apresentamos os instrumentos utilizados para construção dos dados durante a observação do funcionamento do sistema didático.

4.3 INSTRUMENTOS PARA CONSTRUÇÃO DOS DADOS

A observação do sistema didático objeto de nosso estudo ocorreu entre fevereiro e agosto de 2017. Embora sua preparação tenha acontecido desde novembro de 2016, a etnografia ocorreu efetivamente no ano de 2017. Realizada no componente curricular Introdução à Probabilidade no curso de licenciatura em Matemática do *Campus VI* da Universidade Estadual da Paraíba.

Correspondendo ao segundo momento da etapa II, durante a fase de preparação do estudo, valemo-nos dos resultados dos estudos exploratório 1 e 2 que fundamentaram a problematização da pesquisa e das reflexões teóricas no primeiro momento das etapas 01 e 03.

A observação foi dividido em três fases. Na primeira, lançamos mão das ferramentas teóricas da TAD, relativas ao estudo das práticas institucionais em torno do ensino de Probabilidade na formação de professores. Esse passo foi fundamental para que pudéssemos, a partir do ponto de vista teórico, delinear a ecologia que possibilita o funcionamento de sistemas didáticos em torno do objeto Probabilidade. Essa análise praxeológica e o delineamento das organizações matemáticas para o ensino de Probabilidade nos conduziu à construção dos

instrumentos pensados na segunda fase do estudo, na qual fizemos o desenho metodológico da construção de dados e tomamos decisões acerca da escolha do cenário de investigação.

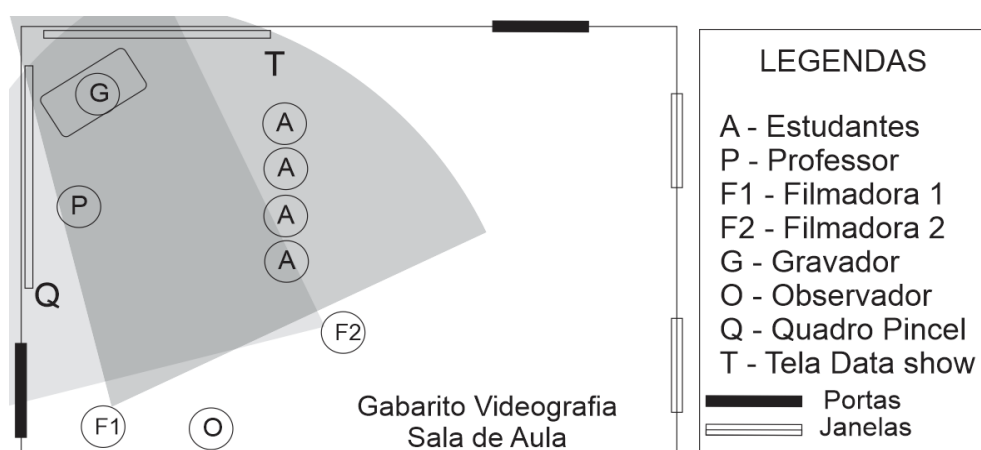
Na terceira e última fase do estudo piloto, fizemos o registro desses dados e o seu tratamento. A partir desse tratamento, compomos a análise empírica. A primeira fase correspondeu a elaboração do capítulo 5 e a segunda ao capítulo 6.

O primeiro instrumento de coleta de dados foi a videografia que teve o objetivo de registrar o funcionamento do sistema didático nos momentos de interação entre professor, estudantes e o saber em jogo, a partir das transcrições das falas desses sujeitos. A videografia da sala foi apoiada na observação com registro em diário de bordo e a captura do áudio com gravador auxiliar. Esses instrumentos nos ajudaram no registro etnográfico.

De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2009), a gravação de áudio e vídeo pode dar ao pesquisador um valioso instrumento de reconstrução dos fenômenos que ocorrem na sala de aula. Além do olhar sobre o funcionamento do sistema didático, nossa preocupação era com o contrato didático estabelecido neste sistema, logo nos interessavam gestos, ações e os discursos do professor e dos alunos.

Utilizamos dois equipamentos de filmagem. O primeiro focado nos estudantes e o segundo no professor. Utilizamos também um gravador de áudio digital para captar com mais fidelidade os diálogos entre professor-aluno e aluno-aluno, conforme gabarito preliminar:

Figura 14 – Gabarito videografia sala de aula.



Fonte: próprio autor.

Como método auxiliar, ainda tomamos notas de campo para a constituição de nosso diário de bordo. De acordo com Bogdan e Biklen (1994), o diário de bordo é um instrumento primordial para que o pesquisador possa fazer anotações de fenômenos que foram percebidos durante a observação.

Além da observação, realizamos entrevistas durante todo o processo e a composição de portfólio individual. Com o portfólio que chamamos de “Cadernos de Probabilidade dos alunos”, o objetivo era obter um registro escrito das praxeologias pessoais desenvolvidas pelos estudantes, a fim de identificar a dinâmica das posições assumidas pelos sujeitos e os indícios de mudanças na relação individual com a Probabilidade e seus conceitos básicos.

As entrevistas foram realizadas de forma coletiva e individual, usando um roteiro aberto com os sujeitos, e foram aplicadas em três momentos distintos conforme quadro 9:

Quadro 9 – Descrição dos instrumentos de coleta de dados.

Instrumento	Finalidade
Entrevista Preliminar	Conhecimento das relações que os sujeitos mantêm com a Probabilidade e seus conceitos; Investigação da identidade dos sujeitos quanto ao ensino de probabilidade, o seu lugar na instituição, as expectativas em relação ao componente curricular e ao curso, além de outras sujeições externas ao curso de licenciatura em Matemática.
Entrevista Complementares	Realização de videografia das aulas, como complemento das observações; Observação do movimento das posições dos sujeitos; Discussão sobre as praxeologias utilizadas durante as aulas;
Entrevista final	Realização de videografia a partir de dois momentos: o primeiro coletivo; o segundo individual, a fim de observar o movimento das relações e o processo de identificação dos sujeitos como futuros professores que deverão atuar no ensino de Probabilidade.

Fonte: próprio autor (2018)

Complementando a primeira fase sobre análise das condições ecológicas para a vida do ensino de Probabilidade na instituição investigada, acrescentamos às organizações praxeológicas matemáticas as organizações didáticas, completando o estudo praxeológico. Essas organizações foram investigadas junto ao docente responsável pela disciplina, seguindo a proposição dos momentos de estudo, conforme Chevallard (1999).

Ainda durante a observação, utilizamos mais dois instrumentos para a coleta de dados: questionário formal sobre a Probabilidade e seus conceitos (ver anexo) e resolução de questões sobre as concepções de Probabilidade.

O questionário formal que utilizamos foi adaptado do questionário piloto validado por Silva (2002) que, aplicado para alunos do ensino médio, tinha o objetivo de verificar como estudantes se relacionavam com os conceitos elementares de probabilidade. Dentre essas noções estavam: acaso, espaços amostrais, equiprobabilidade, concepção laplaciana e concepção frequentista de probabilidade. Aplicado individualmente, o questionário visava explicitar as relações que esses sujeitos mantinham com esses objetos. No questionário original havia 13 questões, mas, em nossa pesquisa, adaptamos 05 delas, que tratam das noções já citadas.

Apesar do questionário ter sido pensado para alunos do ensino médio, seguimos o argumento de Guisasola e Barragués (2002) que destacam que, embora a maior parte da produção da pesquisa para o ensino de probabilidade seja em pesquisas para o ensino secundário, reconhece-se essa produção como útil para pensar o ensino universitário, e destacam, ao mesmo tempo, uma necessidade de aproximação entre os resultados dessas pesquisas e a formação docente.

A opção por usar questionários ou questões já validadas em outras pesquisas repousou no argumento de que a literatura corrente sobre o ensino de Probabilidade dispõe de diversos trabalhos no âmbito nacional e internacional. Essas pesquisas, além de trazer recomendações práticas para o ensino de Probabilidade, nos fornecia parâmetros fundamentados para refletir sobre a dinâmica das relações dos sujeitos com a probabilidade.

O segundo instrumento foi a resolução de questões envolvendo probabilidade. Aplicado juntamente com a primeira entrevista, esse instrumento era composto de duas questões que levavam em considerações a percepção dos sujeitos quanto às concepções de probabilidade. Aqui, utilizamos as concepções de Azcárate Goded (1996) que podem ser agrupadas em quatro categorias¹⁰³: 1. Não Probabilística da Realidade (NPR); 2. Probabilística Intuitiva (PI); 3. Probabilística Emergente (PE); e 4. Probabilística Normativa (PN).

As questões foram divididas em duas partes. Na primeira, apresentamos, após a entrevista preliminar e antes do início das aulas de probabilidade, três questões que tratavam do cálculo de probabilidades simples variando apenas as amostras e a noção de equiprobabilidade em duas questões. Na primeira “Lançamento de dados”, simulamos a

¹⁰³ O detalhamento dessas categorias e o que entendemos por concepções está descrito na seção III.

situação de um lançamento de dois dados distinguíveis e não viciado, para garantir a equiprobabilidade nos lançamentos. Aos sujeitos foi solicitado responderem a quatro itens com probabilidades simples. As técnicas para sua solução envolviam a descrição do espaço amostral e a aplicação da definição formal de probabilidade. De maneira análoga, a questão seguinte tratou das probabilidades em relação ao “Planejamento Familiar”. Nesse caso, os estudantes foram convidados a estimar a probabilidade em relação a esse planejamento.

Essas duas primeiras questões não exigiam noções probabilísticas avançadas, porém requeriam ao menos que os sujeitos manifestassem traços de uma concepção probabilística emergente, ou ainda que estivessem na transição entre a intuição probabilística e níveis mais elevados. Essa escolha encontra respaldo nos estudos de Azcárate Goded (1996), que, além de modelar as características dessas concepções, alerta-nos para o fato de que as investigações sobre a Probabilidades revelam um conhecimento frágil tanto em crianças como adultos:

As investigações nos mostram que o raciocínio dos indivíduos em situações aleatórias, tanto crianças como adultos é muito frágil; sem alcançar, a maioria das vezes, um nível formal de conceitualização. Se detectam claramente o funcionamento de concepções intuitivas e o uso de esquemas heurísticos, ditas concepções, ainda que dão origem a numerosas direções e obstáculos em seus raciocínios, apresentam uma grande resistência ao ser modificadas¹⁰⁴ (AZCÁRATE GODED, 1996, p. 32).

Esse foi um dos fatores que nos levou à escolha de contextos mais superficiais para a aplicação da probabilidade, assumindo que o contexto do lançamento de dados e a questão do planejamento familiar podem trazer contextos conhecidos dos estudantes e, conseqüentemente, permitir que estes revelem traços das suas concepções, uma vez que as questões permitem serem modeladas tanto a partir raciocínio mais intuitivo ou mais complexo, quanto do ponto de vista da formalidade no emprego de técnicas.

Na terceira questão, apresentamos uma situação intitulada de “Brincando com ‘Caixas de Fósforos’”. Diferente das questões anteriores, essa lida com negação da equiprobabilidade, pois o jogo consiste no lançamento de caixas de fósforos e, a partir da observação da ocorrência de determinada face para cima, visa obter uma pontuação. Levando em consideração o formato espacial da caixa (paralelepípedo), ou seja, não existe uma simetria entre a ocorrência das faces,

¹⁰⁴ Las investigaciones nos muestran que el razonamiento de los individuos en situaciones aleatorias, tanto niños como adultos es muy frágil; sin alcanzar, la mayoría de las veces, un nivel formal de conceptualización. Se detectan claramente el funcionamiento de concepciones intuitivas y el suyo de esquemas heurísticos, dichas concepciones, aunque dan origen a numerosas direcciones y obstáculos en sus razonamientos, presentan una gran resistencia al ser modificadas.

a solução envolve, portanto, o abandono de concepções intuitivas, requerendo ao menos elementos da concepção emergente de Probabilidade.

Segundo Azcárate Goded (1996), os indivíduos a quem se apresenta esse tipo de concepção reconhecem as diversas formas de representação de probabilidade e inclusive a frequencial, que se adequa melhor à resolução do problema. A questão da caixa de fósforos foi também proposta por Silva (2002). Apresentada como uma atividade complementar, a questão tinha a intenção de que os sujeitos observassem o problema da simetria na descrição da amostra.

A segunda parte do questionário estava prevista para ser aplicada ao final das aulas de Probabilidade e antes da entrevista final. A primeira questão envolve a adaptação de um problema apresentado no estudo de Cavalho e Oliveira (2002)¹⁰⁵ que trata de uma situação cujas amostras são diferentes e cujo resultado da experimentação são similares. A solicitação era que os sujeitos julgassem a possibilidade desse resultado ser considerado provável. Um erro comum nesse caso é ignorar o papel das amostras quando a probabilidade é tomada no sentido frequencial (CARVALHO; OLIVEIRA, 2002).

Na segunda questão, os sujeitos tiveram de julgar um experimento simples com moedas, de modo que o conceito de independência entre os eventos era reclamado na resposta.

Na terceira e última questão, revisitamos os lançamentos de dados, repetimos os primeiros itens e acrescentamos mais dois que envolviam também o pensamento condicional sobre probabilidade. Nossa intenção, era obter um parâmetro de comparação entre as técnicas empregadas na primeira e na segunda aplicação, de modo a perceber se houve ou não aquisição ou evolução nas técnicas utilizadas.

Na etapa dois, fizemos também o estudo sobre as organizações praxeológicas matemáticas e didáticas que envolviam o ensino de Probabilidade na formação inicial de professores.

A ênfase recaiu em delinear aspectos do Modelo Epistemológico Dominante – MED que agia sobre o sistema didático. Esses elementos serviram de base para a discussão das observações sobre a sala de aula de Probabilidade, especialmente no que tange à definição da noção de conformidade na instituição investigada e na dinâmica das relações entre os sujeitos com a Probabilidade e suas noções, como veremos no capítulo seguinte.

¹⁰⁵ Nesse estudo Carvalho e Oliveira (2002) adaptam questões que foram discutidas por David Green e sua equipe na década em meados dos anos 80 do século passado. David Green se propôs ao estudo das concepções de jovens ingleses no período de 1978 a 1981 quando o pesquisador desenvolvia o projeto “The Chance and Probability Concepts Project”. O objetivo deste trabalho foi investigar os conceitos ou as intuições aleatórias de jovens ingleses com idade compreendida entre 11 e 16 anos (CAÑIZARES, 1997).

Delineados os principais instrumentos utilizados apresentamos no quadro 10 uma síntese de cada instrumento e a sua relação com os objetivos específicos.

Quadro 10 – Descrição das entrevistas abertas.

ESTUDOS/ INSTRUMENTOS/ ETAPAS	OBJETIVO ESPECÍFICO			
	1º	2º	3º	4º
Estudo das Organizações praxeológicas e Contrato Institucional	X	X		
Videografia			X	
Diário de bordo			X	
Cadernos de Probabilidade		X	X	X
Entrevistas		X	X	X
Questionário Formal Probabilidade			X	
Questões Probabilidade		X	X	X
Análise dos dados	X	X	X	X

Fonte: próprio autor (2018).

Na seção seguinte, discutiremos o processo de análise que idealizamos para o estudo.

4.4 CATEGORIAS DE ANÁLISE

Ao pensar no estabelecimento *a priori* de categorias de análise para o nosso estudo, entendemos que esse era um processo passível de mudanças. Assim, a previsão de categorias e procedimentos para analisar os dados do estudo foi, para nós, um exercício de construção permanente, ao longo do qual cada etapa ou procedimento constitui-se como guia no processo.

Aqui nos apoiamos novamente em Bogdan e Biklen (1994), que destacam que a sustentação teórica é fundamental para que o processo de análise ocorra em concomitância com a coleta de dados. Embora exija mais experiência do pesquisador, o processo concomitante de análise e construção de dados permite uma percepção maior dos fenômenos, além de possibilitar ajustes dos instrumentos e dados coletados. Pensando na coleta de dados como um afinamento da pesquisa, a análise se constitui no filtro para as informações coletadas:

Alguma análise tem de ser realizada durante a recolha de dados. Sem isto, a recolha de dados não tem orientação; se assim não o fizer, os dados que recolher podem não ser suficientemente completos para realizar posteriormente a análise. Se bem que habitualmente recolha mais dados do que aqueles que necessita ou que alguma vez possa vir a usar, uma certa orientação tornará a tarefa manipulável. Após realizar um ou dois estudos, já poderá começar a utilizar mais cedo os procedimentos analíticos concomitantes à recolha de dados. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 206).

Assim as categorias e procedimentos citados a priori têm para nós a função de guiar o processo de construção e análise dos dados.

Ao retomarmos novamente os dois estudos exploratórios que publicamos, destacamos que seus resultados e a reflexão sobre eles nos permitiram a compreensão de que nosso estudo carecia de uma dialética entre o estudo teórico (bases epistemológicas da TAD) e o estudo empírico (investigação sobre as relações dos futuros professores com a Probabilidade). Além disso, assumimos metodologicamente o posicionamento de que os fenômenos didáticos se apresentam num emaranhado complexo de relações, ou seja, para delinear nosso estudo, é preciso conhecer a realidade que nos propusemos a investigar. Nesse ponto, ancoramo-nos na aceção de que “aprender não é somente reconhecer o que, virtualmente, já era conhecido; não é apenas transformar o desconhecido em conhecimento. É a conjunção do reconhecimento e da descoberta, aprender comporta a união do conhecido e do desconhecido” (MORIN, 1999, p. 70). Os estudos exploratórios foram fundamentais para construção da nossa questão de pesquisa, pois nos ajudaram na compreensão da realidade teórica e empírica que era o nosso objeto de pesquisa.

Levando em consideração a natureza da nossa questão de pesquisa, entendemos que é preciso estabelecer um processo de análise que parta de categorias a priori ligadas ao referencial teórico adotado e, através da triangulação dos dados e a confrontação com referenciais sobre a cognição situada, esperamos observar como essas categorias se manifestam na leitura dos dados.

Assim nossas categorias partem das noções teóricas da TAD para olhar a cognição, porém necessitam de um parâmetro de análise para guiar as possíveis conclusões. Considerando que a TAD desloca, na análise da relação ao saber, o foco do indivíduo para as práticas institucionais (CHEVALLARD, 1996; BOSCH; CHEVALLARD, 1999), fomos buscar esses parâmetros em teorias que concebem a cognição como fenômeno coletivo que emergem nas práticas sociais, razão por que nos apoiamos em Lave e Wengel (1991).

Esclarecidas essas razões, conforme o desenho dos instrumentos propusemos, que se presta entender a ecologia e o funcionamento do sistema didático que se forma na disciplina de Introdução à Probabilidade, tínhamos ao menos três grandes fontes de dados:

1. Análise dos documentos e textos que compõem a ecologia que permite a vida do sistema didático na instituição;
2. Videografia da sala de aula de Probabilidade para o registro da dinâmica em torno dos momentos de interação dos sujeitos com o saber “probabilidade”;

3. Realização de entrevistas e questionários, com a finalidade de esclarecer os movimentos individuais dos sujeitos no sistema didático e as possíveis mudanças na sua relação com a Probabilidade.

A TAD nos permite, conforme já discutido, analisar as condições e restrições no processo de difusão do saber. Por sua vez, a realização da intenção didática, materializada no funcionamento do sistema didático, pode oportunizar aos sujeitos um processo de mudança na sua relação com os objetos de saber (CHEVALLARD, 1989).

Assim, a pesquisa documental nos permitiu a análise das organizações praxeológicas matemáticas e didáticas, dos níveis de codeterminação que agem sobre o sistema didático e processo de identificação/reconstrução de praxeologias pessoais. Tudo isso nos dará indícios dessa ecologia, isto é, dessas condições e restrições.

Na ocasião do funcionamento do sistema didático se estabelece um contrato didático (CHEVALLARD, 1996). O contrato é o motor dos processos de aprendizagem (BROUSSEAU, 1986). Os processos de negociação de significados, rupturas e efeitos que o contrato gera influenciam na forma como muda a relação dos sujeitos com os objetos de saber.

Era esperado que a etnografia da sala de aula através da videografia nos desse um registro do funcionamento desse sistema didático e dos contratos que ali podiam se estabelecer.

Os processos de negociação do contrato didático e suas cláusulas nem sempre se apresentam de forma explícita (BROUSSEAU, 1986; JONNAERT E BORGHT 2002; BRITO MENEZES, 2006). Assim as entrevistas e questionários aplicados ao longo do estudo nos ajudaram a entender partes desses significados implícitos. Por fim, destacamos a pesquisa de Almeida (2016), que mostra claramente que o contrato influencia e é influenciado pela ecologia do sistema didático, materializada nas organizações praxeológicas matemáticas e didáticas.

Partindo desses três argumentos, acreditamos que a triangulação dos dados advindos das três fontes citadas seja fundamental no processo de análise.

Para nós, a triangulação é um termo que assume tanto o papel de validação dos dados coletados, mas, sobretudo de busca de entrelaçamentos entre informações coletadas por métodos diferentes, porém com o objetivo de entender o mesmo fenômeno:

(...) A possibilidade da triangulação mesmo em se tratando da mesma perspectiva – qualitativa – parece ser uma abordagem que se sustenta e faz sentido à medida que oferece ao pesquisador olhares múltiplos e diferentes do mesmo lugar de fala. O todo e as partes são focos determinantes neste modelo de triangulação. (TUZZO; BRAGA, 2016, p. 156).

Estabelecido o contexto de nossa análise, faz-se necessário destacar as categorias que guiaram a construção e o processo de coleta de dados no estudo piloto.

O que nos interessa primordialmente com este estudo é analisar o funcionamento do sistema didático, e em torno da análise dele refletir sobre a dinâmica da relação dos sujeitos com a Probabilidade. Tendo a TAD como referência teórica principal, estabelecemos que as categorias para investigação deveriam partir de suas noções. Assim pensamos em 04 categorias a priori para análise:

1. Condições e restrições para o funcionamento do sistema didático;
2. Produção e negociação de significados no Contrato Didático;
3. Dinâmica das posições e evolução das praxeologias pessoais (CHAACHOUA, 2010);
4. Mudanças na Relação R(X,O) dos sujeitos.

Como já dissemos, a nossa hipótese principal é que as noções teóricas da TAD permitem um olhar sobre o fenômeno da cognição. Assim esperamos que as respostas em torno das condições e restrições para o funcionamento do sistema didático, a dinâmica do contrato didático estabelecido e dinâmica das posições assumidas no processo de sujeição institucional nos revelem indícios sobre o processo de aprendizagem dos sujeitos, expressos na evolução e mudança das suas relações com o saber em jogo.

Essas categorias serão confrontadas a partir da síntese teórica de arcabouços que tratam a cognição como um fenômeno social e situado, ou seja, assumimos que as práticas efetivadas pelos sujeitos no interior das instituições revelam esse processo de cognição. São elas:

1. Participação dos sujeitos;
2. Produção e negociação de significados na comunidade;
3. Apropriação de saberes/práticas;
4. Constituição de identidades na comunidade.

Categorias que estão vinculadas aos elementos teóricos de Lave e Wengel (1991). Na figura 15 resumimos o nosso quadro de análise:

Figura 15 – Resumo do quadro de análise.

Ecologia e funcionamento do Sistema Didático			
Análise do Modelo Epistemológico Dominante		Etnografia da Sala de Aula de Probabilidade	
Pesquisa Documental	Organizações Matemáticas e Didáticas	VIDEOGRAFIA	Análise do Contrato Didático estabelecido
	Níveis de co-determinação		Identificação das posições sujeitos
	Reconstrução de praxeologias pessoais		Análise da mudança R(X,O)
Quadro teórico da TAD		Teorias da Cognição Situada	
1. Condições e restrições para o funcionamento do sistema didático; 2. produção e negociação de significados (contrato didático); 3. Dinâmica das posições e evolução nas praxeologias pessoais; (Chaachoua, 2011) 4. Mudanças na relação R(X,O).		1. participação; 2. produção e negociação de significados; 3. apropriação de saberes/práticas 4. constituição de identidades	
Triângulação dos dados e confronto teórico			

Fonte: próprio autor (2018)

No capítulo seguinte, apresentamos os resultados da primeira etapa do estudo empírico onde utilizamos as ferramentas da TAD para compreensão do contexto institucional.

5 ENSINO DE PROBABILIDADE E A FORMAÇÃO DOCENTE

Labirinto

Aqui é lá,
 naturalmente
 lá não é aqui.
 Embora no mesmo
 labirinto e sob o mesmo céu,
 cada um segue sua trilha,
 escolhe as estrelas de guiar.
 Uns levam fios e espada,
 outros preferem a flor.
 Uns levarão razão, lógica,
 outros apenas a fé.
 Afinal se é o amor que salva,
 sigo crendo no amor.
 Algumas portas estarão fechadas,
 outras levarão a lugar nenhum,
 mas mesmo estas te ensinarão
 alguma coisa.
 Eu prefiro seguir na trilha,
 o som de coração batendo,
 do sangue pulsando nas veias,
 da lágrima silenciosa
 que rasga a alma
 nos dias de dor, não importa:
 eu sigo!
 Meus pés pisarão o desconhecido.
 Caminhando se fará a estrada.
 Pois é vivendo que se tece a vida.

5.1 EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA E A FORMAÇÃO DOCENTE

A Educação Estatística pode se referir a um campo de investigação como também à formação dos sujeitos, como cidadãos, para a utilização desses conhecimentos na atuação social em qualquer que seja a dimensão ou esfera da sociedade (LOPES, 2008).

O reconhecimento da importância dessa formação está posto nos principais documentos oficiais que norteiam os currículos da escola básica em todo o mundo. Ao compreendermos a Educação Estatística como uma necessidade formativa da sociedade atual e, ao mesmo tempo, como um conjunto de saberes presentes no currículo da Educação Básica, olhamos, agora, para outra dimensão: a Educação Estatística como um campo de pesquisa.

A década de 80 do século XX foi um marco importante para entendermos o desenvolvimento da Educação Matemática nos últimos 30 anos. A publicação do documento

“Agenda para ação” do National Council Teachers of Mathematics (NCTM)¹⁰⁶ foi um fator que impulsionou mudanças no currículo norte-americano. Esse documento também influenciou discussões curriculares em muitos outros países. Com as mudanças no currículo, veio a necessidade de pesquisas e de compreensão teórica do que se propunha para o ensino de Matemática. Com isso, a Educação Matemática passou a ganhar destaque e se consolidar como campo científico. De maneira semelhante, o referido documento influenciou estudos que se preocupavam com os processos de ensino e aprendizagem na Educação Estatística, pois, presente no documento, estava também a sugestão de ampliação de conteúdos relacionados à Estatística, Probabilidade e Combinatória (BORBA *et al.*, 2011).

Ao tratar da Educação Estatística como campo de pesquisa, Lopes (2010) destaca que ela se ocupa em investigar problemas relacionados com os processos de ensino e aprendizagem ligados a saberes referentes à área da Estatística, da Probabilidade e da Combinatória e os tipos de raciocínios ligados a essas áreas de estudo. Para a autora, a natureza desses saberes implica a interseção da Educação Estatística com a Educação Matemática, o que justifica a presença desses saberes no currículo de matemática na Educação Básica.

Esse aspecto de ligação entre a Educação Estatística e a Educação Matemática é reforçado por Régnier (2005), para quem a Educação Estatística mobiliza uma parte significativa de conceitos desenvolvidos no campo da Didática da Matemática. Assim, a formação de professores que ensinam Matemática, objeto da Educação Matemática, conforme profere Kilpatrick (1996), Fiorentini e Lorezanto (2009) e outros, e a Educação Estatística resguardam interfaces que se cruzam: a formação para o ensino dos saberes que compõem a Educação Estatística. Sobre essa formação, Lopes (2008, p.70) destaca que:

A formação dos professores, atualmente, não incorpora um trabalho sistemático sobre estocástica, dificultando a possibilidade desses profissionais desenvolverem um trabalho significativo com essa temática nas salas de aula da educação básica.

Para a autora, os futuros professores precisam experimentar de forma sistemática situações de formação que envolvam a estocástica¹⁰⁷ não só como conteúdo da formação, mas também como ferramenta para analisar situações ligadas a sua prática profissional.

O fato é que desde então a situação ainda merece destaque. A formação de professores que irão lecionar os temas ligados a Estatística e Probabilidade, mas também nos cursos de graduação de modo geral continuam a apresentar deficiências:

¹⁰⁶ Conselho Nacional de Professores de Matemática (CNPM)

¹⁰⁷ Termo utilizado para a Probabilidade quando integrada com a Estatística.

Não apenas os alunos da licenciatura em matemática se sentem despreparados para abordar a estatística nas aulas de matemática da educação básica, mas a ausência de material didático que subsidie o trabalho docente é ampla. O mesmo ocorre com livros -textos de ensino superior, que, em sua maioria, são traduzidos de outros países, pois a produção nacional ainda não tem se dedicado a publicações específicas para o curso de licenciatura em matemática. (LOPES, 2013, p. 903)

Lacunas como a produção de livros-texto específicos para licenciatura em Matemática pode ser um dos fatores que contribuem para os entraves destacados por Lopes (2013).

A natureza da Estatística e da Probabilidade é muito diferente da natureza determinista da Matemática. A evidência dessa diferença está, do ponto visto filosófico, em discussões sobre o uso de noções como probabilidade e aleatoriedade, o que não ocorre frequentemente com a álgebra e a geometria. (BATANERO, 2001).

De modo semelhante, Régnier (2005) assevera que, para o desenvolvimento do espírito estatístico, é necessária uma renúncia sistemática do conceito de verdade, como comumente o utilizamos.

Como apontamos na seção 1.2, o ensino de probabilidade na formação docente demanda esforços e reflexões. Da mesma maneira que o reflexo dessa formação é sentido também na Educação Básica, pensamos que a pesquisa em Educação Estatística cumpre um papel importante no sentido de apontar caminhos para melhoria do ensino de probabilidade na formação docente.

Os pesquisadores a que temos recorrido para discutir a Educação Estatística e o ensino de Probabilidade fazem parte de uma comunidade que tem trazido importantes resultados na área. Todos os anos eventos ao redor do mundo apontam caminhos e discussões sobre o ensino e a aprendizagem envolvendo conceitos de estatística e probabilidade. No entanto, como em muitas áreas da pesquisa em Educação, os resultados e os desdobramentos dessa produção são inseridos no cotidiano das instituições de ensino paulatinamente.

É com esse argumento que pensamos que nossa pesquisa poderá contribuir também para a construção desse corpo de conhecimentos. Trabalhos como o de Wozniak (2005), Chevallard e Wozniak (2011), Vhu nu (2009) mostram que, mesmo em países onde o ensino de Estatística e de Probabilidade passou por reformas mais expressivas, ainda há problemas como a falta de infraestrutura epistemológica para que as devidas ligações entre Estatística e Probabilidade possam ser efetivas. No caso brasileiro, Coutinho (1994), Cazorla (2009), Lopes (2010), dentre outros, têm mostrado o quão significativa tem sido a produção na área, embora, como aponta Lopes, Coutinho e Almouloud (2010), ainda haja dificuldades a serem superadas. Dentre essas

dificuldades, podemos citar, como exemplo, a questão do livro didático para a Educação Básica que traz características que remete à década de 50 do século XX:

No Brasil os conceitos estatísticos entraram no currículo da escola básica pela primeira vez no livro publicado por Osvaldo Sangiorgi, pela Companhia Editora Nacional, destinado aos alunos do então Curso Magistério, na década de 50 do século XX. Esse livro limitava-se a uma apresentação absolutamente centrada nos cálculos e caracterizada pela ausência quase total de contextos que pudessem conduzir o aluno à análise e a interpretação de dados. *Vale destacar que esse tipo de abordagem prevalece ainda hoje em muitos de nossos livros didáticos* (LOPES; COUTINHO; ALMOULOU, 2010, p. 12).

A questão dos livros didáticos relativos ao ensino de Estatística e de Probabilidade é somente um dos muitos aspectos a serem considerados no âmbito da Educação Estatística. De fato, como veremos em Almeida e Farias (2016), as dificuldades apontadas por Lopes, Coutinho e Almouloud (2010), ainda persistem nos livros didáticos:

Podemos observar um consenso nos livros didáticos quanto à apresentação do conceito de Probabilidade e sob um enfoque epistemológico, verificamos uma incompletude praxeológica na diferença do que é proposto pelos PCN ao que é colocado pelos livros didáticos. O estudo do conceito de Probabilidade nos livros didáticos é o primeiro passo na criação de um modelo epistemológico de referência para a construção de sequências didáticas que visam auxiliar os alunos no processo de aprendizagem de Probabilidade no ensino médio (ALMEIDA; FARIAS, 2016, p. 11).

Como vimos na problematização, existem ainda questões relativas a formação docente, a construção de dispositivos didáticos para o ensino de conceitos ligados à Estatística e a Probabilidade, dentre outras temáticas.

Para formação de professores, Bezerra (2015) destaca que a presença obrigatória dos conteúdos relativos à Estatística e Probabilidade, no entanto, ainda são poucas as ementas e projetos políticos das licenciaturas em Matemática que trazem, explicitamente no discurso institucional, um tratamento desses conteúdos que leve em consideração as recomendações das pesquisas na área de Educação Estatística (BEZERRA, 2015).

Fato este é que as pesquisas em Educação Estatística têm destacado que, no que tange à formação docente, o que se observa é que a maioria deles ou dos futuros professores tem algum conhecimento sobre Estatística e Probabilidade, no entanto, as questões didáticas e seu uso, especialmente na Educação Básica, são um desafio ainda maior (BATANERO; GARFIELD, *et al.*, 2000; BATANERO; GODINO; ROA, 2004; LOPES; COUTINHO; ALMOULOU, 2010).

Outro ponto fundamental que está relacionado com a nossa pesquisa diz respeito às peculiaridades do conhecimento probabilístico. Os conhecimentos ligados à Probabilidade vão de encontro à lógica determinista presente no modelo mais usual do ensino de Matemática. A compreensão da incerteza e da aleatoriedade é base dos estudos em Probabilidade. Em nosso cotidiano, frequentemente somos confrontados com situações que envolvem a tomada de decisões onde a incerteza está presente, portanto, se faz necessário um trabalho sistemático que ajude os cidadãos, desde os primeiros anos da Educação Básica, a lidar com esse tipo de atividade (BATANERO, 2001).

A problemática que estamos levantando diz respeito à importância da Educação Estatística como campo de pesquisa emergente e suas contribuições para a formação docente, mas também às dificuldades em consolidar seu ensino na Educação Básica e na formação de professores. Esse é, de fato, um desafio que atinge não só o ensino no Brasil, mas também em outros países, mesmo aqueles que iniciaram as reformas há mais tempo que nós, como o caso dos Estados Unidos da América:

A implementação curricular da Estatística e da Probabilidade, tanto no Brasil quanto nos Estados Unidos, ainda depende de um investimento significativo dos educadores matemáticos estatísticos no que se refere à formação inicial e contínua de professores, à elaboração de livros didáticos e outras publicações que subsidiem o trabalho docente do professor da educação básica. Além disso, é importante incentivar e orientar projetos de pesquisa, na iniciação científica, no mestrado e no doutorado, que tenham como foco a Educação Estatística na Educação Básica. (LOPES, 2010b, p. 61).

O argumento apresentado por Lopes (2010b) abrange de certa forma o papel e as demandas da Educação Estatística, bem como suas relações diretas com a formação de professores. A autora, ao tratar dos desafios da formação como uma problemática internacional, destaca a necessidade de congruência entre os diversos setores que atuam com a temática da Educação Estatística. Assim, agentes da noosfera, pesquisadores, autores, gestores públicos precisam se envolver e colaborar nessa empreitada.

A partir dessa reflexão, situamos a discussão que segue em cinco eixos: 1. Discussão sobre probabilidade e suas concepções; 2. Análise do currículo prescrito da instituição onde desenvolvemos o estudo empírico; 3. Análise praxeológica e análise das expectativas institucionais; 4. Localização da Probabilidade em relação aos níveis de codeterminação didática presentes em livros textos indicados oficialmente pela instituição; 5. Proposição de um modelo epistemológico de referência para formação de professores em relação à Probabilidade.

5.2 PROBABILIDADE: EM BUSCA DE CATEGORIAS DE ANÁLISE

Até aqui nos detivemos a discutir de forma mais geral as relações entre a Educação Estatística e a Formação de Professores que ensinam Matemática. O argumento por nós destacado reside no fato de que as demandas sociais reverberam na construção do currículo da Educação Básica, que, por sua vez, tem também influências na construção e na pesquisa sobre a formação docente.

Será que, como cidadãos, já nos perguntamos por que um agente da seguradora de veículos nos faz tantas perguntas antes de fechar uma proposta? Quais as implicações de determinadas respostas na modelagem da proposta feita pela seguradora?

Em um sentido mais amplo, por que projeções numéricas, envolvendo a economia global, são tão importantes ao ponto de causar desconforto e até mudanças drásticas no comportamento do mercado financeiro?

Em muitas das possíveis respostas para essas perguntas, é possível que encontremos referência às aplicações da Probabilidade, entendida como um campo teórico cujas raízes epistemológicas emergem da necessidade de lidarmos com aquilo que é incerto.

Essa necessidade de lidar com a incerteza levou à construção deste campo teórico que atualmente é fundamental para a compreensão da pesquisa científica com aplicações e implicações diretas na nossa vida cotidiana. Apesar dessa importância, alerta-nos o autor, a compreensão da natureza da Probabilidade não é considerada uma tarefa simples e necessita de exame cuidadoso do conceito (HACKING, 2006).

Pensando a Probabilidade como uma “medida de chance”, observamos, em nosso dia-a-dia, desde muito cedo, situações que nos levam a pensar sobre essa medida. Mesmo que de maneira inconsciente, tomamos algumas decisões baseados em argumentos que estão ligados a nossa observação de determinados fenômenos. Esse conjunto de vivências nos leva à construção de concepções de Probabilidade, as quais, de acordo com Sáenz (1999), são construídas a partir da dialética entre a reflexão e as experiências reais. As experiências cotidianas são muito importantes nessa formação, no entanto, nem sempre essas experiências conduzem a um raciocínio probabilístico plausível, pois tanto as reflexões como as experiências podem ser diferentes diante dos fenômenos e, portanto, conduzir-nos a paradoxos e pensamentos equivocados.

Se do ponto de vista da formação do sujeito as reflexões e as experiências cotidianas são importantes na construção das concepções de probabilidade, a educação formal tem também a sua parcela de relevância. Esse reconhecimento é feito por diversos pesquisadores que

recomendam a inserção da Probabilidade desde os primeiros anos de escolarização, o que é também preconizado em documentos oficiais do ensino, como já dissemos anteriormente (LOPES, 2008; BORBA *et al.*, 2011).

Azcárate Goded (1996), ao investigar as concepções de futuros professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental na Espanha sobre o conhecimento probabilístico, apresenta quatro concepções acerca da probabilidade: 1. Não Probabilística da Realidade (NPR); 2. Probabilística Intuitiva (PI); 3. Probabilística Emergente (PE); e 4. Probabilística Normativa (PN).

A concepção NPR é caracterizada pela ausência de compreensão sobre fenômenos probabilísticos. As respostas dos sujeitos frente a esses fenômenos são baseadas em crenças e em modelos deterministas. Na concepção PI, há presença de alguma compreensão dos fenômenos probabilísticos, como o reconhecimento da aleatoriedade, porém em caráter parcial. A concepção PE corresponde à aceitação de múltiplas representações da aleatoriedade. Há a representação de modelos probabilísticos e ela supõe alguma instrução em probabilidade e estatística. A concepção PN é caracterizada por uma compreensão profunda dos modelos probabilísticos e de suas aplicações.

A partir de sua investigação, Azcárate Goded (1996) observou, por exemplo, em relação à noção de aleatoriedade, que os futuros professores apresentam certa fragilidade e seu conhecimento é baseado no que a autora chama de “senso comum”:

o grupo de futuros professores observados reflete um conhecimento de características intuitivas e não formalizado, próximo ao que reconhecemos como conhecimento cotidiano. É um conhecimento baseado na experiência, elaborado do senso comum, não desenvolvido formalmente. Isto implica necessariamente, que os processos de formação têm de recorrer à possibilidade de por em jogo referido conhecimento e analisar seu grau de adequação (AZCÁRATE GODED, 1998, p.95, tradução nossa).

Aqui no Brasil, essas categorias foram utilizadas também por Gonçalves (2004), que analisou as relações entre as concepções sobre Probabilidade de professores do Ensino Fundamental e a sua formação quando foram alunos da Educação Básica. A pesquisa mostrou que as concepções desses docentes não são estanques, isto é, a prática de ensino dos professores tem implicação na sua concepção probabilística. (GONÇALVES, 2004).

Ainda sobre a Probabilidade, destacamos que quanto a sua abordagem no ensino podem ser apresentadas algumas concepções, como: 1. Clássica ou laplaciana; 2. Frequentista; 3. Subjetivista; 4. Geométrica; e 5. Formal ou Axiomática.

A abordagem clássica ou laplaciana privilegia a definição clássica de probabilidade entendida como a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos possíveis,

assumindo implicitamente a equiprobabilidade, ou seja todos os acontecimentos do espaço amostral são igualmente prováveis. Em geral, a probabilidade é calculada a priori sem necessidade de experimentação. A definição clássica de probabilidade teve grande influência na formação da Teoria das Probabilidades, porém a falta de clareza epistemológica impedia seu avanço. Atualmente, na Teoria das Probabilidades, a probabilidade é entendida como uma função a partir da axiomática de Kolmogorov.

Na abordagem frequentista ou empírica, a probabilidade é entendida como um acontecimento que emerge do processo de experimentação. O valor da probabilidade agora é compreendido como a frequência relativa de sucessos obtidos durante a realização de um experimento. Dependente fortemente da amostra ou do tamanho do experimento, a probabilidade frequentista é interpretada como uma aproximação e está amparada em um importante teorema conhecido como Lei dos Grandes Números, fortemente associado ao nome do matemático Jacques Bernoulli.

A abordagem subjetiva é devida às ideias que associam a probabilidade como um grau de confiança, ou de crença, em alguém, o que para lógica convencional não é menos problemática que a abordagem clássica (POPPER, 2007). Se na abordagem frequentista há uma forte dependência em relação ao experimento, nesta abordagem a probabilidade e seu cálculo dependem do observador e de quem realiza o experimento.

A abordagem axiomática, como frisamos anteriormente, assume a probabilidade como função e tem sua construção matemática feita a partir de axiomas. Nomes como o do russo Kolmogorov estão associados àqueles que se esforçaram para dar à Teoria das Probabilidades um tratamento matemático mais rigoroso. Vale ressaltarmos que o contexto em que essa abordagem da Teoria das Probabilidades nasce é o contemporâneo ao da Análise Matemática, período em que havia uma forte busca da comunidade matemática pela axiomatização dos conteúdos matemáticos.

De acordo com Chevallard e Wozniac (2011), a passagem de uma visão clássica para uma visão frequentista da probabilidade não é algo trivial. Quando essa passagem é requerida na Educação Básica, para os autores, falta uma infraestrutura epistemológica adequada para que os professores a façam. Nesse sentido, reconhecemos e concordamos que os futuros professores necessitam refletir sobre essas abordagens, pois, assim como no caso francês, aqui os documentos oficiais recomendam trabalhar com as várias abordagens, como veremos mais adiante.

Nossa defesa é que os futuros professores durante sua formação inicial tenham contato com as diversas abordagens e reflitam sobre os possíveis obstáculos que estão associados a cada

uma delas. No entanto, como já apontava Cazorla (2009), a realidade tem se mostrado bem diferente, demandando um esforço coletivo na melhoria da formação inicial dos professores que ensinam Matemática.

Outro aspecto importante para a compreensão dessas diferentes concepções a respeito da probabilidade é a análise dos desenvolvimentos históricos do conceito. Um exame de sua evolução nos mostrará que, apesar das suas aplicações práticas ligadas a diversas áreas, até o início do século XX não havia um consenso sobre o tratamento dessas concepções. De fato, o trabalho de axiomatização de Kolmogorov é fundamental para o processo de aceitação matemática da Teoria das Probabilidades, no entanto, os debates não se encerraram.

Um olhar para a história da Teoria das Probabilidades mostrará que o interesse por jogos de azar e situações que envolvem o acaso remete aos primórdios da humanidade. Há registros de jogos de azar entre os povos sumérios, egípcios e outras civilizações antigas. No entanto, é somente a partir do final do século XV e início do XVI que os primeiros registros sobre a discussão das probabilidades vão surgir com viés mais sistemático. Porém, em “A divina comédia”, do italiano Dante Alighieri (1265-1321), já havia uma referência à enumeração de se obter valores a partir do lançamento de dados. Não é sem razão, portanto, que os primeiros estudos sistemáticos dos jogos de azar aparecem entre italianos, dentre eles: Lucas Pacioli (1445-1517), Jerome Cardan (1501-1576), Galileu Galilei (1564-1642) (HACKING, 2006).

A obra de Cardan Jerome Cardan “*De Ludo Aleae*”, publicada somente 1693, muito tempo depois de sua morte, continha as primeiras explicações sobre a adição e a multiplicação de probabilidades, além do tratamento das possibilidades através de métodos combinatórios. No entanto, é só a partir da célebre carta entre Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1607-1665) que podemos entender a probabilidade como um quociente entre o total de casos favoráveis e o total de casos possíveis (COUTINHO, 1994).

Em 1657, na obra “*De rariociniis in ludo aleae*”, Huygens introduziu um importante conceito para a Teoria das Probabilidades: esperança matemática. Esse conceito nos permite calcular valores esperados a partir de um conjunto de informações probabilísticas. É possível, por exemplo, determinar se o valor investido em prêmio de loteria é justo ou não. O cálculo da esperança matemática pode ser feito a partir do somatório dos produtos dos valores esperadas e as probabilidades dadas:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n X_i P(X_i)$$

Em 1713, Jacques Bernoulli (1654-1705) apresentou o que ficaria conhecido como visão frequentista de probabilidade. A essência dessa concepção está assentada na convergência

da probabilidade quando o experimento cresce indefinidamente, isto é, a probabilidade é tomada como aproximação da frequência relativa. O teorema de Bernoulli diz que a média aritmética dos resultados obtidos com a relação de um experimento que foi repetido n tende a se aproximar do valor esperado conforme n aumenta.

O outro resultado fundamental na Teoria das Probabilidades é o teorema de Thomas Bayes (1702-1761) que, introduzido postumamente, inaugura, segundo Coutinho (1994), a concepção subjetiva das probabilidades:

Matematicamente idêntica à probabilidade da geometria do acaso, que depende da análise do observador e da hipótese de equiprobabilidade por simetria. Os métodos bayesianos têm sua origem na ideia de atribuir uma probabilidade às causas de um evento observado a partir de um valor tomado a priori e recalculado em função dessa observação, de onde a classificação de ‘subjetiva’ (COUTINHO, 1994, p. 18).

O teorema de Bayes é largamente utilizado como caso particular da inferência estatística. Esse teorema interpreta que a probabilidade de um evento (ou o grau de crença na ocorrência de um evento) deve ser alterada quando são consideradas evidências sobre o evento. O caráter subjetivo se opõe, por exemplo, à visão de Bernoulli, que é considerada objetiva.

Seguindo os desenvolvimentos da Teoria das Probabilidades, poderíamos destacar o nome de muitos outros colaboradores como: D’Alembert (1717-1783), que introduziu importantes questionamentos sobre a natureza da independência de eventos; Pierre Montmort (1678-1719), que abordou diversos problemas a partir do Binômio de Newton; De Moivre (1667-1754), que discutiu, em “The Doctrine of Chances”, problemas ligados à combinatória e à probabilidades; Leonard Euler (1707-1783), que utilizou probabilidade para a interpretação de seguros; Lagrange (1736-1813), que discutiu as probabilidades para o caso de variáveis aleatórias; Buffon (1707-1788), que estudou as ligações entre as probabilidades e a geometria (DALANG e CONU, 2008, p. 128).

Dentre esses nomes, destacamos o de Pierre-Simon Laplace (1749-1827) em dois célebres trabalhos: “*Théorie analytique des probabilités*” e “*Essai philosophique sur les probabilités*”¹⁰⁸. Laplace contribuiu para o que hoje se entende como teoria clássica da probabilidade ou laplaciana. Dentre os vários temas de interesse sobre os quais se debruçou, Laplace fez da Teoria das Probabilidades um de seus maiores legados. Embora não seja o criador da teoria, ele fez, segundo Joseph Fourier em seu elogio histórico contido na introdução

¹⁰⁸ Obra com versão traduzida para o Português. Nesse trabalho, Laplace apresenta a sua teoria dispensando o rigor matemático habitual, com a finalidade de levar a teoria das probabilidades e suas aplicações ao público não especializado.

do “Ensaio Filosófico sobre as Probabilidades”, um trabalho semelhante ao do matemático grego Euclides, isto é, o de compilar os saberes até então produzidos aprimorando alguns deles, como fez com o teorema de Bayes, e corrigindo alguns raciocínios, em particular o que ficou conhecido como o erro de D’Alembert.

O problema conhecido como erro de D’Alembert ilustra muito bem o tipo de paradoxo a que os raciocínios que requerem probabilidade podem nos conduzir, fazendo com que nossa intuição primeira tome decisões equivocadas ou chegue a resultados errôneos frente a situações de incerteza.

Em 1760, D’Alembert questionou filosoficamente a natureza do cálculo probabilístico e suas relação com a realidade. Para isso, ele deu uma explicação para o cálculo da probabilidade de se obter ao menos uma cara ao lançar uma moeda duas vezes. Como conclusão, ele apontou que a probabilidade era $2/3$, baseado no espaço amostral {(Cara) (Coroa, Cara), (Coroa, Coroa)}. Seu raciocínio hoje, facilmente, explicado como equivocado, já que é necessário considerar a totalidade do espaço amostral, sob a hipótese de equiprobabilidade {(Cara, Cara), (Cara, Coroa), (Coroa, Cara), (Coroa, Coroa)}, na época provocou desconforto. Tanto que foi preciso quase 100 anos até que Laplace mostrasse o erro de D’Alembert.

De certa forma, o episódio traz duas importantes lições. A primeira é que matemáticos que estudam probabilidade, alguns considerados como as mentes mais fecundas de seu tempo, bem como pessoas comuns, estão sujeitos a compreensões equivocadas diante de raciocínios onde rezam a incerteza e aleatoriedade:

Os mecanismos pelos quais as pessoas analisam situações que envolvem o acaso são um produto complexo de fatores evolutivos, das estruturas cerebrais, das experiências pessoais, do conhecimento e das emoções. De fato, a resposta humana à incerteza é tão complexa que, por vezes, distintas estruturas cerebrais chegam a conclusões diferentes e aparentemente lutam entre si para determinar qual delas dominará as demais (MLODINOW, 2009, p. 13).

Poderíamos acrescentar, na colocação de Mlodinow (2009), um destaque sobre a atualidade do seu discurso ao reconhecer a complexidade dos fenômenos ligados ao acaso e à aleatoriedade. Para analisar o comportamento das pessoas ao se depararem com situações de incertezas, precisamos entender as explicações interdisciplinares. Mlodinow (2009) destaca também o papel que joga preponderante a nossa intuição nas decisões frente a situações de incerteza, isto é, há uma tendência à tomada de decisões que contrariam o que a probabilidade indica.

Não bastasse essa tendência, a segunda lição, que tiramos do episódio citado, diz respeito às recorrentes dificuldades de a Teoria das Probabilidades legitimar um modelo matemático que satisfaça seu caráter teórico e empírico (POPPER, 2007).

Para Popper (2007), a dicotomia entre as probabilidades objetivas e as probabilidades subjetivas sempre foi tema de debate frequente nos círculos preocupados com a epistemologia da Teoria das Probabilidades. Popper (2007) também destaca o papel alcançado pela Teoria das Probabilidades no último século, quando a Física Moderna passou a utilizar largamente suas aplicações na explicação dos mais variados fenômenos.

De fato, o caráter problemático da Teoria das Probabilidades em termos epistemológicos sempre foi um problema recorrente. Laplace em sua obra tratou o problema, como já dissemos, integrando e aperfeiçoando os resultados já existentes. Joseph Fourier em 1829 teceu um elogio histórico na Academia Real de Ciência. Nele ela apresenta o papel dos muitos colaboradores para o desenvolvimento da Teoria das Probabilidades, desde Pascal até quando, para Fourier, Laplace tornou o cálculo de probabilidade uma ciência nova e fecunda, com aplicabilidade futura nos mais variados campos do conhecimento humano:

Encontra-se essa mesma característica em seus estudos sobre a análise de probabilidades. Ciência inteiramente moderna e vasta, cujo objeto, frequentemente desconhecido, deu lugar às interpretações mais falsas, mas cujas aplicações englobarão um dia todo o campo dos conhecimentos humanos, servindo de feliz suplemento à imperfeição de nossa natureza. Essa arte nasceu de um traço único do gênio claro e fecundo de Pascal; foi cultivada, desde a origem, por Fermat e Huygens. Um geometra filósofo, Jaques Bernoulli, foi o seu principal fundador. Uma descoberta singularmente feliz de Stirling, os estudos de Euler e, sobretudo, uma aplicação engenhosa e importante devida a Lagrange aperfeiçoaram essa doutrina. Ela foi esclarecida pelas próprias objeções de D'Alembert e pelas concepções filosóficas de Condorcet. Coube a Laplace reunir e seus princípios. Então, ela tornou-se uma ciência nova, submetida a um só método analítico e com uma extensão prodigiosa (FOURRIER, 1829 *apud* (LAPLACE, 2010, p. 31).

Laplace, de forma sistemática, na Teoria Analítica das Probabilidades, introduz os fundamentos matemáticos que garantiam ao cálculo de probabilidades um caráter científico. Na segunda obra, voltada para o grande público, Laplace retoma os 10 (dez) princípios que fundamentam o cálculo de probabilidades, tratando temas como a definição clássica (1º Princípio), a necessidade da equiprobabilidade (2º princípio), além de temas como a esperança matemática, a independência, o cálculos com probabilidades nos demais princípios.

O carácter filosófico aponta para duas direções: uma delas é a visão determinista¹⁰⁹ particular de Laplace; a outra direção é o eloquente discurso em torno da importância do cálculo de probabilidades como aplicação para os diversos campos da atuação humana. No encerramento da obra, faz uma importante indicação da necessidade de levar a probabilidade para o público geral, através da instrução básica, ou seja, uma indicação para a necessidade de transformar o cálculo de probabilidades em um saber a ensinar:

Se considerarmos os métodos analíticos originados dessa teoria, a verdade dos princípios que lhe servem de princípios, a lógica minuciosa e delicada exigida pelo seu emprego na solução dos problemas, os empreendimentos de utilidade pública que nela se apoiam e a extensão que ela recebeu e que pode ainda receber pela sua aplicação às questões mais importantes da filosofia natural e das ciências morais, se observarmos em seguida, que mesmo nas coisas que não podem ser submetidas ao cálculo ela fornece as impressões mais seguras que podem nos guiar em nossos julgamentos em que ela nos ensina a precaução contra as ilusões que tão frequentemente nos desviam da verdade, então veremos que não há ciência mais digna de nossas meditações e *cujo ensino no sistema de instrução pública seja mais útil*. (LAPLACE, 2010, p. 222).

Apesar do reconhecimento do papel de Laplace para a Teoria das Probabilidades, a problemática em torno da natureza dos cálculos probabilísticos continuaria em voga, especialmente no que tangia à definição de Laplace para a probabilidade, como “a relação entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis” (LAPLACE, 2010, p. 44), e para o requisito da equiprobabilidade.

A circularidade lógica na definição de probabilidade foi matéria de discussões nos séculos seguintes. A necessidade de formalizar em termos matemáticos e a noção de probabilidade trabalho do final do século XIX e início do século XX culminaram com a apresentação da abordagem axiomática das probabilidades, que passou a ser entendida como uma função medida. Baseado na álgebra (σ -algébra) de Émile Borel (1871-1856), que fundou as bases da Teoria da Medida¹¹⁰, Andrei Kolmogorov apresentou a probabilidade como uma função medida, isto é, uma função positiva que atende a três axiomas:

¹⁰⁹ Devemos considerar o estado presente do Universo como o efeito de seu estado anterior e como a causa do que vai se seguir. Uma inteligência que, em um dado instante, conhecesse todas as forças que animam a natureza e a situação respectiva dos seres que a compõe, e, além disso, for suficientemente ampla para submeter esses dados à análise, compreenderia na mesma fórmula os movimentos dos maiores corpos do Universo e aqueles do leve átomo; nada lhe seria incerto, e o futuro bem como o passado estariam presentes em seus olhos. (postulado do determinismo universal) (LAPLACE, 2010, p. 42-43).

¹¹⁰ Uma medida em um conjunto X é uma função que atribui um número real não-negativo para sub-conjuntos de X. Pode ser interpretada como contagem, área, tamanho, massa, volume, capacidade térmica ou qualquer

Seja $S^* = \{A | A \subset S\}$, temos:

Axioma 1: $P(S) = 1$

Axioma 2: $P(A) \geq 0$, para todo $A \in S^*$

Axioma: $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, para todo $A_1, A_2 \dots \in S^*$

com $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$

(RATHIE e ZÖRNIG, 2012, p. 52)

A partir desses axiomas, Kolmogorov apresenta todas as demais propriedades envolvendo o cálculo de probabilidades. Para Rathie e Zörnig (2012), o tratamento dado por Kolmogorov foi fundamental para os desenvolvimentos e as aplicações da Teoria das Probabilidades que se seguiram ao longo do século XX. Apesar de reconhecer a importância do legado da Teoria Axiomática, os autores destacam que “quaisquer que sejam os métodos de cálculo de probabilidades, devemos ter um procedimento pelo qual o número seja obtido, independentemente de quem esteja calculando a probabilidade e um evento” (RATHIE e ZÖRNIG, 2012, p. 58).

O fato é que, para Popper (2007), mesmo a Teoria Axiomática, proposta por Kolmogorov, suscita problemas de implicações lógicas. Para nós, essa colocação aponta para algumas considerações sobre a probabilidade enquanto saber a ensinar.

A primeira observação é que no início da seção apresentamos uma discussão para as concepções relacionadas à probabilidade tanto do ponto da relação pessoal, conforme Azcárate Goded (1996), quanto do ponto de vista do seu ensino. Sobre as concepções ligadas ao ensino de Probabilidade, veremos uma clara ligação com a apresentação dos desenvolvimentos históricos da probabilidade. As noções clássica, frequentista, subjetiva, geométrica e axiomática surgem como momentos ora de rupturas (passagem da probabilidade objetiva para subjetiva), ora como complementações (a teoria clássica e associação à interpretação geométrica). O fato é que todas elas fazem parte de um conjunto de explicações e de construções que compõe a ontologia da Teoria das Probabilidades.

Essa ontologia tem implicações didáticas (concepções de ensino), epistemológicas (quadros de desenvolvimentos da probabilidade), mas também cognitivas, isto é, o espaço onde se constitui a atividade de estudo de questões envolvendo probabilidade é marcado por questões

propriedade aditiva, isto é, uma propriedade tal que a medida da união de dois conjuntos disjuntos é igual à soma de suas medidas. Um exemplo importante é a medida de Lebesgue no espaço euclidiano, que atribui comprimento, área e volume, respectivamente, a subconjuntos de \mathbb{R}^n com $n=1, 2, 3$ (CABRAL, 2016, p. 1).

didáticas, questões epistemológicas e questões cognitivas, que decorrem da natureza da própria teoria das probabilidades.

O argumento para essa última categoria de implicações é baseado no fato de que, ao longo da história, vemos inúmeros casos semelhantes ao de D'Alembert¹¹¹. Isto é, casos que revelam os obstáculos epistemológicos que podem interferir na aprendizagem dos conceitos relacionados à probabilidade. Além disso destacamos o papel da intuição imediata conforme discute Mlodinow (2009). Para Mlodinow (2009) a nossa intuição primeira diante dos problemas envolvendo a probabilidade tende a levar-nos a julgamentos incoerentes do ponto de vista da Teoria das Probabilidade:

O fato de que a intuição humana é mal adaptada a situações que envolvem incerteza já era conhecido nos anos 1930, quando alguns pesquisadores notaram que as pessoas não conseguiam nem imaginar uma sequência de números que passasse em testes matemáticos de aleatoriedade nem reconhecer com segurança se uma série dada havia sido gerada aleatoriamente. (MLODINOW, 2009).

Não é sem razão que própria Psicologia Cognitiva se viu confrontada diante de questões envolvendo a aprendizagem de questões sobre probabilidade. No trabalho de Piaget e Inhelder (1951), vamos encontrar uma referência aos estágios operatórios de desenvolvimento cognitivo e à aprendizagem de questões envolvendo a probabilidade. Para estes autores, somente no estágio formal, último estágio previsto, é que seria possível mobilizar estruturas cognitivas capazes de assimilar questões envolvendo probabilidade. (PIAGET; INHELDER, 1951).

O trabalho de Piaget e Inhelder (1951) é considerado pioneiro ao tentar entender como a ideia de acaso se formava nas crianças. Inicialmente, os autores, balizados pela teoria do desenvolvimento cognitivo e usando o método clínico submeteram crianças a testes que envolviam a tomada de decisão sobre as chances. Inicialmente esses testes envolviam o lançamento de bolas em um plano inclinado, percebendo a inadequação do modelo, eles construíram um experimento que consistia em retirar uma carta contendo um símbolo de cruz, de dois montes formados por cartas com cruz e sem cruz. As decisões deveriam indicar se as chances eram iguais para os dois montes, maior ou menor. As probabilidades eram representadas através de uma fração, onde o numerador (cartas com cruz) eram os casos favoráveis e o denominador eram o total de cartas de cada monte, isto é, os casos possíveis.

Para Piaget e Inhelder (1951) a probabilidade era entendida no seu sentido clássico, ou seja, conforme a definição de Laplace. Além disso, a relação entre casos favoráveis e casos

¹¹¹ Ver por exemplo a discussão sobre o Problema de MontyHall mais adiante.

possíveis era baseada numa relação parte-todo, isto é, as crianças teriam que relacionar os casos favoráveis com os casos possíveis para tomar as decisões diante das questões propostas.

De acordo com Spinillo (1995) foi a incapacidade das crianças de demonstrarem conhecer ou construir essas relações que levou à conclusão de Piaget e Inhelder (1951) de que as crianças em fase pré-operatória não teriam as condições necessárias para lidar com as situações de incerteza:

Diversos estágios foram observados na aquisição deste conceito, sendo a probabilidade considerada uma aquisição própria das operações formais. Segundo os autores, as dificuldades com este conceito decorrem do fato de a criança basear suas escolhas no número absoluto de casos favoráveis, escolhendo o monte com o maior número de cartas com cruz e, sobretudo, por não estabelecer relações entre os dois montes a partir do número de cartas com cruz (casos favoráveis) e o número total de cartas em cada monte (casos possíveis). (SPINILLO, 1995, p. 48).

A autora destaca que embora o estudo de Piaget e Inhelder (1951) tenha trazido conclusões importantes, existem vários estudos posteriores que indicam outras direções sobre a questão da aprendizagem de probabilidade. Mudanças de ordem metodológica, conceitual e teórica, por exemplo, geraram resultados diferentes, indicando que aprendizagem não estava apenas relacionada com o estágio de desenvolvimento cognitivo. (SPINILLO, 1995).

Ela mesma conduziu um estudo com crianças com idades entre 5 e 8 anos de idade envolvendo o conceito de Probabilidade. Ela tomou por base em seu estudo mudanças no sentido metodológico e conceitual. Durante seu experimento as crianças foram convidadas a manusear e formar arranjos que atendessem a determinados julgamentos probabilísticos, diferente dos trabalhos mais clássicos, as crianças eram convidadas a construir situações que indicassem maior chance, menor chance, mesma chance, certeza ou impossibilidade. Além disso, ao invés de utilizar a relação parte-todo (fração) ela usou relações parte-parte, ou seja, as probabilidades foram tomadas como razões. Outra mudança fundamental foi o fato que a quantificação das respostas das crianças foi substituída por estimativas. Para Spinillo (1995) ao trabalhar com a noção de razão e proporção as crianças usam principalmente aspectos que envolvem a percepção, ou seja, não usam somente cálculos matemáticos precisos:

É possível pensar que as crianças apresentam uma lógica mais elaborada do que supúnhamos, fato este que tem implicações teóricas importantes. Determinadas capacidades cognitivas, geralmente concebidas como um privilégio do pensamento do adulto e do adolescente, estão presentes em crianças. (SPINILLO, 1995, p. 53).

Em seu estudo as crianças mais jovens não só demonstraram habilidades para lidar com as noções envolvendo probabilidade, como indicaram dificuldades semelhantes entre o grupo

mais velho e o grupo mais jovem, como por exemplo, na construção de eventos que envolvem a certeza, isto é, a suposta diferença de estágio não seria predominante na capacidade de julgamento das crianças. Para Spinillo (1995) o ponto principal de suas conclusões é o papel da situação e do contexto com o qual as crianças são submetidas:

O principal ponto a ser ressaltado é que é importante compreender o desenvolvimento e a aquisição de conceitos em situações, e não como um fenômeno isolado de contextos situacionais. Podemos ter um quadro mais realístico das habilidades e limites do pensamento infantil quando a situação é considerada como elemento importante na constituição do próprio conceito. (SPINILLO, 1995, p.66).

A partir dessa consideração de Spinillo (1995) podemos fazer uma releitura dos dados apresentados por Piaget e Inhelder (1951), no sentido de levar em consideração que a ausência de determinados comportamentos pelos seus sujeitos pode ser devido também ao tipo de situação experimental que foram submetidos. De fato, como já dissemos, para Piaget e Inhelder (1951) a probabilidade é tomada como no sentido laplaciano. O acaso e a noção de probabilidade assumem nesse contexto um busca pela determinação do que não foi quantificado “a ideia do imprevisto e a intuição da probabilidade também constituem, de modo bastante verossímil, realidades derivadas e secundárias em proporção à própria pesquisa da ordem e das causas” (PIAGET; INHELDER, 1978, p. 12).

Para os pesquisadores a aquisição da noção de probabilidade estaria associada a capacidade de relacionar situações físicas que envolvem causa e efeito, ou seja, para compreender o aleatório é necessário compreender as relações deterministas que estão em seu meio:

Depois de havermos estudado a maneira pela qual as “operações” lógicas, matemáticas e físicas se estabelecem no decorrer da evolução da inteligência infantil e adaptam-se aos dados da experiência, passíveis de estruturação dedutiva, julgamos conveniente pesquisar como o pensamento em formação se atém a isso para assimilar o que, na realidade, resiste a determinado tratamento, ou seja, especificamente: o acaso ou mistura. (PIAGET; INHELDER, 1978, p. 7).

Além de Jean Piaget e Bâbel Inhelder, muitos outros estudos se seguiram sobre aquisição da noção de probabilidade no seio da Psicologia. Um outro quadro de referência pioneira são os estudos de Efraim Fischbein. Em certa oposição as conclusões dos dois primeiros pesquisadores sobre a capacidade de compreensão da noção de probabilidade estar atrelada ao desenvolvimento cognitivo e seus estágios, Fischbein conduziu um programa de pesquisa que buscava evidenciar o papel do ensino formal na aprendizagem dessa noção.

Fischbein (1975) não só reconhecia o papel da instrução para ajudar as crianças no processo de construção da noção probabilidade, como acreditava que as crianças tinham ideias concretas sobre o conceito. Situações como jogos infantis, por exemplo, poderiam ajudar a criança na manifestação de ideias relacionadas ao acaso, natureza de independência de eventos, dentro outros. Ao invés do desenvolvimento de um sistema de auto – regulação como previa Piaget e Inhelder (1951), para Fischbein (1975) eles necessitavam de experimentar situações escolares adequadas que pudessem potencializar a aprendizagem da probabilidade.

De acordo Carvalho e Fernandes (2005) um componente fundamental apontado pelas pesquisas de Fischbein é a intuição, onde para ele:

as intuições são aquisições cognitivas que resultam directamente das acções físicas ou mentais dos sujeitos, podendo ser divididas em primárias e secundárias. As primeiras derivam directamente da experiência do dia-a-dia dos sujeitos com acontecimentos aleatórios, não necessitando por isso de nenhuma instrução. Como o autor refere, os sujeitos tanto têm intuições matemáticas como noutros domínios científicos como, por exemplo, acerca da noção de gravidade ou de aceleração. O segundo tipo de intuições são reestruturações das primeiras, fruto de um processo de instrução, na maior parte das vezes formal, ou o resultado da interacção do sujeito com uma determinada comunidade cultural (CARVALHO; FERNANDES, 2005, p. 77).

Notemos que na explicação dos autores para a compreensão de Fischbein sobre a intuição, divididas em primárias e secundárias, há um reconhecimento que os processos de aquisição da intuição são tanto mentais quanto do processo de interacção dos sujeitos com o mundo ao seu redor. As acções físicas, a participação em determinadas comunidades culturais e num sentido mais amplos as atividades dos sujeitos, sejam elas crianças ou adultos, contribuem para formação dessas intuições. O papel da instrução é preponderante na formação das intuições secundárias, razão pela qual Fischbein acreditava na importância da escola e da iniciação precoce do estudo de probabilidade com as crianças.

Fischbein, Pampu e Mînzat (1967), ao tentar determinar o surgimento da noção de acaso realizaram um estudo com crianças entre 6 e 14 anos. Utilizando tanto o conceito clássico de probabilidade, quanto frequentista. Em trabalhos mais recente, como em Coutinho (1994; 2001) vamos encontrar argumentos que reforçam a ideia de os obstáculos demonstrando por estudantes quanto a aprendizagem de probabilidade não resistem a instrução em situações envolvendo o conceito frequentista.

Em Fischbein, Pampou e Mînzat (1967) os resultados não só indicaram que essa intuição probabilística pode ser verificada nos mais jovens, quanto eles se saíram melhor que as crianças

de maior idade em situações que envolviam probabilidades iguais. A explicação, segundo os pesquisadores estaria no sistema de ensino:

Mas por que essa surpreendente degradação das respostas nos alunos mais velhos? A explicação, em nossa opinião, é a seguinte. O processo de ensino - especialmente através da escola - direciona a criança para uma interpretação determinista dos fenômenos, no sentido da pesquisa e da explicação de relações claras, certas e unívocas. A criança é instruída a procurar as causas dos fenômenos na forma de fatores que atuam de maneira unívoca¹¹² (FISCHBEIN; PAMPOU; MÎNZAT, 1967, p. 203).

Para Carvalho e Fernandes (2005) apesar dos estudos de Fischbein e seus colaboradores fazerem um contraponto importante aos estudos de Piaget e Inhelder (1951), as duas abordagens sobre a aprendizagem da noção de probabilidade resguardam concordâncias e trazem contribuições relevantes para a compreensão desse fenômeno. Um ponto de concordância segundo os autores está no fato de que a criança vai aprendendo gradativamente sobre a probabilidade, seja numa interpretação piagetiana do desenvolvimento cognitivo ou no processo de imersão no meio escolar ou outras comunidades conforme o pensamento de Fischbein:

A síntese do aleatório e do necessário, do indeterminado e do determinado, assumidos pela compreensão dos fenômenos probabilísticos, é, na realidade, prejudicada por um desequilíbrio estrutural na evolução mental desses dois componentes. Sob a influência do processo didático, a aleatoriedade é rejeitada como equivalente ao controle humano inexplicável e fugitivo, enquanto relações univocamente determinadas são admitidas, procuradas, até mesmo impostas, na forma de várias tentativas de "racionalizar" fenômenos¹¹³ (FISCHBEIN; PAMPOU; MÎNZAT, 1967, p. 208, tradução nossa).

De modo semelhante, encontraremos em Piaget e Inhelder (1951) apontamentos de que o desenvolvimento cognitivo nas crianças estaria sujeito as influências do contexto social:

Certamente a mentalidade de uma criança é sempre relativa ao meio social ambiente. Consequentemente cada indivíduo, dentro de seu desenvolvimento, mergulha num conjunto de representações coletivas que a família ou a escola lhe impõem após elaboração muitas vezes multiseccular. (PIAGET; INHELDER, 1978, p.11).

¹¹² Mais pourquoi cette dégradation surprenante des réponses chez les grands élèves ? L'explication est selon nous, la suivante. Le processus d'enseignement – surtout par l'intermédiaire de l'école – oriente l'enfant vers une interprétation déterministe des phénomènes, dans le sens de la recherche et de l'explicitation de relations claires, certaines, univoques. L'enfant est instruit à chercher les causes des phénomènes sous la forme de facteurs agissant d'une manière univoque.

¹¹³ La synthèse de l'aléatoire et du nécessaire, de l'indéterminé et du déterminé, supposée par la compréhension des phénomènes probabilistes est en réalité handicapée par un déséquilibre structurel dans l'évolution mentale de ces deux composantes. Sous l'influence du processus didactique, l'aléatoire est rejeté comme équivalent à l'inexplicable et échappant au contrôle humain, tandis que des relations univoquement déterminées sont admises, recherchées, imposées même, sous la forme de différentes tentatives de « rationalisation » des phénomènes.

Assim como argumentam Carvalho e Fernandes (2005) é salutar pensar que as contribuições dadas pela interpretação dos estudos citados são marcos importantes para pensarmos a questão da aprendizagem da noção de probabilidade, com reflexos sobre as questões de ensino, pois “quando pensamos na complexidade do pensamento probabilístico facilmente aceitamos, ou deveríamos aceitar, que não pode ser trabalhado segundo práticas tradicionais de sala de aula nem tão pouco ensinado de modo convencional” (CARVALHO; FERNANDES, 2005, p. 84).

Se seguirmos a linha do tempo sobre os estudos psicológicos acerca da noção de probabilidade, obteremos mais indícios sobre essa complexidade. Pois tanto, crianças, jovens e até especialistas como, como matemáticos de renome, estatísticos, se veem enganados diante de situações envolvendo o acaso e o aleatório (KAHNEMAN; SLOVIC; TVERSKY, 1982).

A análise do problema de Monty Hall é um exemplo de como a noção de intuição primeira pode interferir no nosso julgamento diante de situações que englobam probabilidades. De forma resumida, o problema se baseia na análise de um programa de auditório exibido nos Estados Unidos nos anos 70 do século passado. Monty Hall, o apresentador, exibia ao participante 03 (três) portas: uma continha um prêmio (um carro), as outras duas (bodes). Quando o participante fazia sua primeira escolha, o apresentador abria uma das portas. Obviamente a que não tinha o prêmio. O apresentador dava ao participante a opção de mudar de porta ou permanecer na porta escolhida. Nossa intuição nos diz que é melhor permanecer naquela porta e que as chances subiram de 33% para 50%, já que tínhamos 3 opções no início e agora somente duas. No entanto, o Teorema de Bayes¹¹⁴ garante que é melhor trocar portas, com uma probabilidade de acerto de 66%, contradizendo a intuição de várias pessoas (especialistas) que abordaram o paradoxo (SANTOS, 2015).

O fato é que desde os anos 1950 o interesse pela compreensão sobre os processos de aprendizagem envolvendo a probabilidade e suas noções tem sido um tema vivo de debate. Atualmente, por exemplo, além das bibliografias já visitadas ao longo de nossa Tese, vamos encontrar um trabalho de revisão importante sobre a aprendizagem da noção de probabilidade. Bryant e Nunes (2012) nos mostram o vigor das discussões e a necessidade de continuidade desses estudos.

Para Bryant e Nunes (2012) a síntese das pesquisas mostra que elas têm contribuído para a compreensão de como a criança aprende sobre a noção de probabilidade. Para os autores,

¹¹⁴ Traremos mais esclarecimentos sobre o teorema na seção seguinte.

a pesquisa sobre a aprendizagem da probabilidade tem apontado para 04 (quatro) demandas cognitivas: 1. Aleatoriedade e suas consequências; 2. Entender e analisar o espaço amostral; 3. Quantificação de Probabilidades; 4. Correlação (relação entre eventos).

Esse conjunto de demandas cognitivas tem se apresentado como passos para compreensão da probabilidade. A compreensão da aleatoriedade e suas consequências diz respeito ao entendimento de que os fenômenos aleatórios fazem parte de nossas vidas. Isso leva a reconhecer que a solução de um problema que envolve a noção de probabilidade começa pela análise das possibilidades, ou seja, do espaço amostral. Reconhecendo o universo de possibilidades é possível quantificar e estimar os valores dessas probabilidades, do mesmo que a correlação, isto é, a percepção da relação entre os eventos depende dessa análise (BRYANT; NUNES, 2012).

De fato os apontamentos de Bryant e Nunes (2012) e a reflexão sobre a pesquisa na área corroboram para com nossa compreensão da complexidade da noção de probabilidade e do seu aprendizado:

Apesar da importância central da aleatoriedade e da probabilidade em nossas vidas, é claro que as crianças, e muitos adultos também, muitas vezes têm grande dificuldade em pensar racionalmente e quantificar a probabilidade¹¹⁵ (BRYANT; NUNES, 2012, p. 3).

Essa complexidade tem reflexos também na pesquisa sobre a noção de probabilidade. Os autores, por exemplo, reconhecem o valor das produções destacadas nos relatórios, mas apontam para dificuldades e lacunas ainda nessas pesquisas, especialmente com relação a necessidade de estudos longitudinais:

alguns aspectos do raciocínio infantil sobre a probabilidade têm sido relativamente negligenciada, como a base cognitiva para construir o espaço do problema e a eficácia relativa de apresentar e calcular proporções como razões ou como frações. Outra grande lacuna na pesquisa sobre as ideias das crianças sobre a probabilidade está na pesquisa longitudinal, que é necessária para estabelecer como a compreensão e as percepções precoces das crianças preveem sua aprendizagem geral mais tarde e também quão completa é sua compreensão de probabilidade quando abandonam a escola¹¹⁶ (BRYANT; NUNES, 2012, p. 8).

¹¹⁵ Despite the central importance of randomness and probability in our lives, it is clear that children, and many adults as well, often have great difficulty in thinking rationally about, and quantifying, probability.

¹¹⁶ some aspects of children's reasoning about probability have been relatively neglected, such as the cognitive basis for constructing the problem space and the relative effectiveness of presenting and calculating proportions as ratios or as fractions. Another serious gap in research on children's ideas about probability is in longitudinal research, which is needed to establish how well children's early understanding and insights predict their overall learning later on, and also how complete their understanding of probability is by the time they leave school.

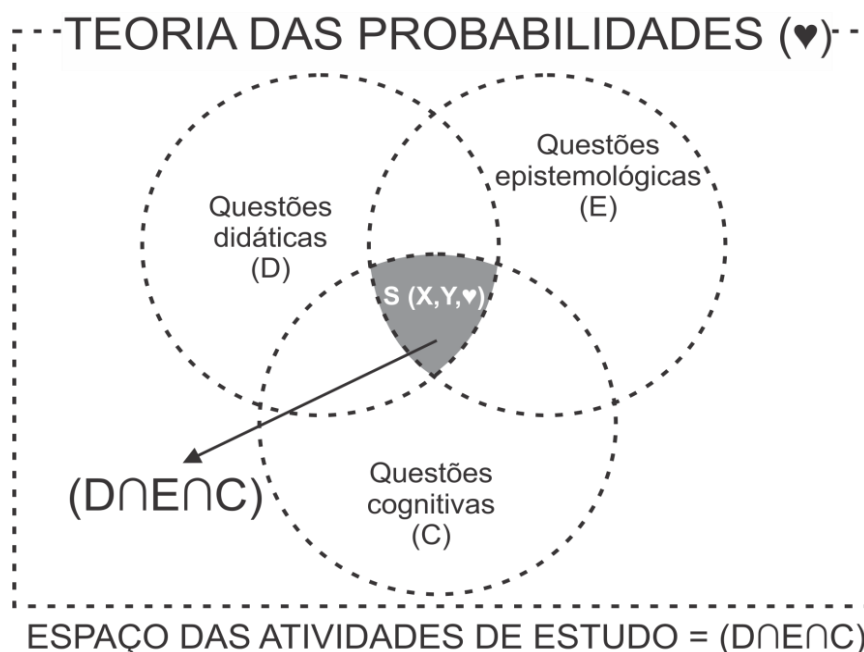
Se por um lado as dificuldades mencionadas se revelam como entraves estudados pela Psicologia, pensamos que por outro lado, podem estar associados também a natureza epistemológica do conceito, que faz parte dessa complexidade.

Coutinho (1994) destacou algumas dificuldades que podem ser interpretadas como obstáculos epistemológicos ligados à construção da Teoria das Probabilidades:

- A dificuldade na escolha adequada de um modelo matemático para expressar sua ligação estreita com o mundo real, o mundo sensível, tal como a geometria.
- A dificuldade provocada pela falta de um suporte matemático adequado, evidenciada nos estudos anteriores ao trabalho de Kolmogorov.
- A dificuldade na resolução de questões envolvendo o caráter subjetivo ou objetivo da Probabilidade;
- A dificuldade pela complexidade de certos problemas da lógica combinatória (COUTINHO, 1994, p.26).

Diante do que apresentamos sobre as dificuldades para o ensino de probabilidade, bem como a reflexão sobre os desenvolvimentos e os entraves por aqueles que colaboraram com a Teoria das Probabilidades apresentamos como proposição a noção de que o espaço onde a atividade de estudo das probabilidades é um espaço que se vê influenciado por essas questões, que tem relação intrínseca com a natureza do próprio saber:

Figura 16 – Constituição do espaço da atividade de estudo sobre probabilidades.



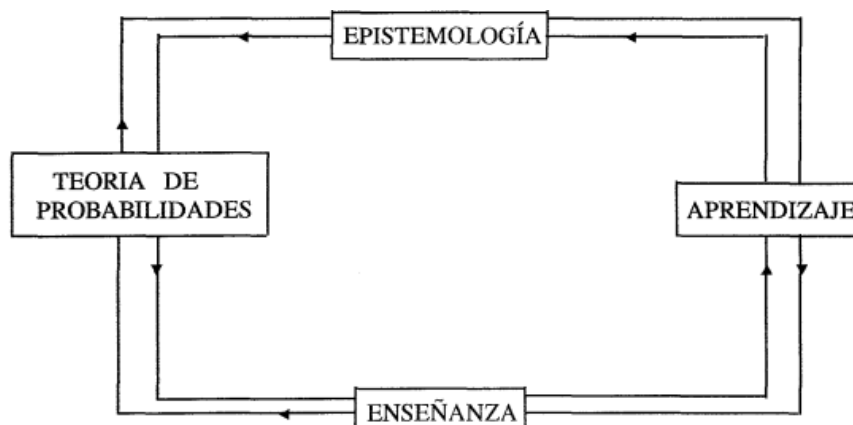
Fonte: próprio autor (2018).

Como temos discutido desde a problematização de nossa Tese, vimos que as pesquisas têm mostrado esses possíveis entraves ligados à natureza da probabilidade e também às escolhas didáticas. Quanto às escolhas didáticas, vemos que, de uma forma ou de outra, estão

influenciadas pelos desenvolvimentos históricos da Teoria das Probabilidades, pois não é à toa que os jogos de azar sejam o principal tema para a introdução de discussões envolvendo probabilidade, seja na escola básica, seja na educação superior. Os jogos de azar aparecem de forma transversal, às vezes central, na história das probabilidades, no entanto, muitas das situações com jogos de azar estão longe de ser adequadas, do ponto de vista da compreensão, para o contexto de ensino (SÁENZ, 1999).

Em Sáenz (1995), encontramos um modelo de compreensão semelhante ao nosso. Sáenz (1995; 1999) propõe um modelo didático que leve em consideração a problemática do conceito de probabilidade que abrange quatro dimensões que estão interconectadas: a dimensão da teoria das probabilidades, a do ensino, a da epistemologia e a de sua aprendizagem:

Figura 17 – Modelo de Sáenz.



Fonte: (SÁENZ CASTRO, 1995, p. 282)

Apesar da semelhança de nosso esquema com o de Sáenz (1995), é preciso esclarecer que as motivações que levaram o autor à construção do modelo são diferentes das nossas. O modelo de Sáenz (1995) cumpre um papel bem mais abrangente, pois apresenta um modelo didático para o ensino e a aprendizagem de probabilidade. Seu modelo tem sido referência para o ensino de probabilidade e está assentado em bases psicopedagógicas e epistemológicas. Para Sáenz (1995), cada dimensão é dividida em aspectos da própria Teoria das Probabilidades e aspectos da dimensão pessoal dos sujeitos.

Ao apresentar seu modelo, Sáenz (1995) aponta três grandes linhas de investigação sobre a problemática do ensino e da aprendizagem das probabilidades: 1. Histórico-epistemológicas; 2. Didáticas; 3. Psicológicas.

Sua principal crítica a esses modelos era uma tendência ao isolamento na abordagem da problemática. Para Sáenz, a natureza complexa da Teoria das Probabilidades requer um abordagem integrada, o que, de certa forma, corrobora a nossa reflexão na figura 16 para o

estudo da Teoria das Probabilidades envolvendo questões das dimensões que citamos ($D \cap E \cap C$). Logo, a investigação sobre essa atividade de estudo comporta o olhar sobre essas dimensões.

As dificuldades relacionadas ao aprendizado têm mostrado que, dependendo do modelo de ensino adotado, as concepções dos estudantes, mesmo depois de terem passado por situações formais de ensino de probabilidade, tendem a apresentar erros na solução de problemas envolvendo raciocínio probabilístico (SERRANO; BATANERO, *et al.*, 1998).

O fato é que essas dificuldades também estão ligadas à própria natureza do conceito:

Os resultados obtidos nos levam a afirmar que os fenômenos aleatórios não apresentam explicações "naturais" ou simples de dar e que não constituem fenômenos elementares que podem ser transmitidos rapidamente sem parar de analisá-los de acordo com uma teoria que ocupou os matemáticos durante três Séculos¹¹⁷ (GUISASOLA; BARRAGUÉS, 2002, p. 297).

O enfoque puramente teórico das probabilidades, sem a devida problematização das concepções probabilísticas, corrobora para uma aprendizagem deficitária dos conceitos. Apesar das indicações sobre as dificuldades no ensino de probabilidades, Barragués e Guisola (2002) dirão, alguns anos depois, que os obstáculos presentes no ensino podem ser contornados, no entanto, existem restrições em jogo nesse processo:

Foram fornecidas provas de uma melhor compreensão da probabilidade em sua interpretação de frequencial, no raciocínio probabilístico e na aplicação para a resolução de problemas. A melhoria na competência matemática observada também resulta em um retrocesso no uso de concepções alternativas de chance e probabilidade.

Nossa experiência indica que, na universidade espanhola, não há muitos materiais curriculares que, com seus guias correspondentes, explicam a metodologia de ensino, os objetivos didáticos de cada atividade e as previsões para sua implementação na sala de aula. Não há exemplos documentados de boas práticas de ensino que forneçam dados para fazer mudanças no programa e na metodologia de ensino¹¹⁸ (BARRAGUÉS; GUISASOLA, 2009, p. 154).

¹¹⁷ Los resultados obtenidos nos llevan a afirmar que los fenómenos aleatorios no presentan explicaciones «naturales» ni sencillas de dar y que no constituyen fenómenos elementales que se pueden impartir de forma rápida sin detenerse a analizarlos de acuerdo con una teoría que ocupó a los matemáticos durante tres siglos.

¹¹⁸ Se han proporcionado pruebas de una mejor comprensión de la probabilidade en su interpretación frecuencial, en el razonamiento probabilístico y en la aplicación de todo ello para la resolución de problemas. La mejora en la competencia matemática observada también se concreta en un retroceso en el uso de las concepciones alternativas acerca del azar y la probabilidade.

Nuestra experiencia nos indica que, en la universidad española, no existen muchos materiales curriculares que, con sus correspondientes guías, expliquen la metodología de enseñanza, los objetivos didáticos de cada actividad y las previsiones para su implementación en el aula. No se dispone de ejemplos documentados de buena práctica docente que proporcionen datos para realizar cambios en el temario y en la metodología de enseñanza.

Do ponto de vista didático, duas questões podem ser levantadas a partir da fala dos autores. A primeira em relação à necessidade de combinar no ensino de probabilidades as diferentes abordagens. A segunda diz respeito a certa carência de materiais adequados para o desenvolvimento de um trabalho sistemático nessa direção, especialmente no nível universitário (BARRAGUÉS; GUIASOLA, 2009).

Diante dessas reflexões, agora temos condições de enunciar alguns questionamentos sobre o sistema didático que se forma em torno do ensino de probabilidades na formação de professores de Matemática.

Que aspectos transpositivos são levados em consideração para que a Teoria das Probabilidades seja introduzida na formação de professores de Matemática? Que concepções são abordadas? Quais são as expectativas e as relações oficiais para o saber probabilidade na licenciatura em Matemática? Que praxeologias são propostas? Como níveis de codeterminação didática externos à disciplina atuam para que se estabeleça o ensino de probabilidades na formação docentes? Que concepções de probabilidades manifestam os estudantes da licenciatura em Matemática? Como as escolhas no processo de transposição colaboram para as mudanças em $R(X,O)$?

Em nosso entendimento, a maior parte do conjunto dessas questões remete a reflexões que podem ser feitas a partir das ferramentas da TAD.

5.3 O CURRÍCULO E RELAÇÕES OFICIAIS PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Na seção anterior, expusemos um breve panorama em torno da problemática da probabilidade e da atividade de estudo em torno dela. Nesse panorama, preocupamo-nos em discutir algumas das concepções que estão ligadas ao ensino, à dimensão pessoal e à dimensão epistemológica da Teoria das Probabilidades. Essa reflexão nos conduziu à ideia de que o espaço onde a atividade de estudo sobre a probabilidade se desenvolve é complexo e compreende questões didáticas, epistemológicas e cognitivas.

As questões que fizemos para encerrar a seção anterior remetem a nossa tentativa de compreensão desse espaço, que, em nosso objeto de pesquisa, é configurado pela formação do SD em torno do componente curricular Introdução à Probabilidade. Assim, tentaremos descrever esse universo institucional de expectativas e relações oficiais mantidas com o saber probabilidade e compreender como ele permite sua vida, portanto, seu estudo nessa instituição.

Ao longo desta subseção, apresentaremos esses aspectos, seguindo a lógica da escala de codeterminação didática, proposta por Chevallard (2007), como sistema que interfere nas questões a serem estudadas e capazes de relevar essas relações institucionais. Compreendemos que este exercício nos revela aspectos do contrato institucional previsto por Chevallard (1996) e assumido como um conjunto de relação institucionais implícitas e explícitas no seio das instituições.

Partindo dessa lógica, a primeira correlação que tentamos fazer é entre a noção de probabilidade e um quadro mais geral de nossa existência, isto é, o nível da humanidade. Remetemos ao argumento da história e da epistemologia da noção probabilidade para defender que ela assume no seio da humanidade um traço essencialmente antropológico, uma vez que encontramos, em muitos relatos de civilizações antigas, a presença do acaso e da aleatoriedade como componentes das atividades humanas.

Conforme sugere Coutinho (2001), o acaso é tratado nas mais remotas civilizações, porém com sentidos diversos:

Podemos constatar que as pessoas que viviam na Mesopotâmia ou no Egito Antigo associavam a ideia de acaso às *intervenções divinas ou sobrenaturais*. Referimo-nos às práticas de consultar os auspícios ou as previsões das pitonisas, a fim de prever o futuro e interpretar a vontade dos deuses. Esse tipo de relação com o acaso, a *da crença em intervenções divinas*, permaneceu por muito tempo uma constante no comportamento humano. Ainda podemos identificá-lo em certas culturas, certos ritos (práticas de clarividência, etc.). Podemos também nos perguntar se os jogos de azar, como jogos de astrágalo, jogos de dados em cerâmica, entre outros, foram usados para fins recreativos, ao mesmo tempo em que incorporam uma dimensão mística ou psicológica do acaso¹¹⁹ (COUTINHO, 2001, p. 22)

A observação feita por Coutinho (2001) aponta para um traço comum em diferentes povos como modo de encarar situações em que interveem o acaso. Como essa herança antropológica se preservou em nós e interfere na nossa percepção do acaso? Não sabemos e também não é nosso objetivo dimensionar, no entanto, temos que reconhecer, que as sujeições

¹¹⁹ Nous pouvons constater que les peuples qui vivaient en Mésopotamie ou en Ancienne Égypte liaient l'idée de hasard à des interventions divines ou surnaturelles. Nous nous référons aux pratiques de consultation des auspices ou aux prédictions des pythonisses, afin de prédire l'avenir et d'interpréter la volonté des dieux. Ce type de rapport au hasard, celui de la croyance en des interventions divines, restera longtemps une constante dans le comportement humain. Nous pouvons, encore actuellement, l'identifier dans certaines cultures, certains rites (pratiques de voyance, etc.). Nous pouvons aussi nous demander si les jeux de hasard, comme les jeux d'astragales, les jeux de dés fabriqués en terre, entre autres, étaient utilisés à des fins de loisir tout en intégrant une dimension mystique ou psychologique du hasard.

institucionais, as vivências nos diferentes ambientes culturais, de fato são parte das pessoas que nos tornamos, como vemos na TAD e em outros referenciais.

Assim, assumimos que acaso, a aleatoriedade, dentre outras noções ligadas a probabilidade, ou mesmo o fascínio e por jogos, fazem parte dos mais diversos conjuntos de civilizações, sejam elas antigas ou contemporâneas. Atualmente, o acaso assume do ponto de vista científico, isto é, do *savoir savante*, conotações diferentes da crença em intervenções divinas, mas em situações corriqueiras nos vemos em conflito em situações em que o acaso está presente. Vale destacar como frisou Silva (2002) que mesmo a noção de acaso, ou a definição de probabilidade, não admitem consenso nos debates mais eruditos sobre o tema, dada a sua complexidade.

Isso indica, dentre outros aspectos, a necessidade de situarmos a razão da ser da probabilidade, bem como sua natureza diante como saber acadêmico, algo que faremos mais adiante.

Após destacar brevemente o lugar da Probabilidade no nível humanidade passamos a afunilar nosso escopo e chegamos ao nível civilização. Do ponto de vista da civilização ocidental, vamos encontrar argumentos peculiares que apontam para uma necessidade da consideração da teoria das probabilidades, porém, ao mesmo tempo, observaremos argumentos que podem surgir como restrições do ponto de vista do seu estudo.

Ao longo dos desenvolvimentos históricos da probabilidade, o nome de Laplace é colocado como central para a teoria clássica porque, além das contribuições matemáticas trazidas para a teoria, ele destacou a necessidade de inserir a probabilidade como tema a ser ensinado na formação das pessoas, sob o argumento da sua importância e aplicabilidade aos mais variados segmentos da sociedade (LAPLACE, 2010).

No entanto, a visão de probabilidade de Laplace era uma visão determinista, pois, é nas palavras do mesmo Laplace que a expressão de um determinismo radical se manifesta. De fato, é sua crença na capacidade de quantificar a incerteza que reza sua crença na teoria das probabilidades. (HACKING, 2006).

O que queremos problematizar com essa observação é o papel do pensamento determinista em nossa civilização. A tradição determinista, segundo Mlodinow (2009), especialmente, no que tange à causalidade acompanha o pensamento ocidental desde seus primórdios. Ao mesmo tempo em que é um traço fundamental de nossa sociedade, é exatamente o caráter aleatório e incerto que impregna nosso cotidiano (MLODINOW, 2009).

A dicotomia objetivo-subjetivo que envolve as discussões filosóficas em torno do conceito de probabilidade, para além do discurso filosófico, envolve também a natureza

metodológica e a escolha dos modelos matemáticos pertinentes para autorizar o uso de uma ou outra abordagem diante dos problemas (POPPER, 2007).

De fato, veremos o pensamento laplaciano refere-se a um discurso objetivo. As raízes dessa abordagem objetiva faz alusão ao pensamento newtoniano, que estavam em voga na época, um discurso onde o determinismo e as causalidades do universo podia ser desvendado. O pensamento de Laplace, e de outros contemporâneos, é fundamental na consolidação de um determinismo científico.

Tendo em vista que o pensamento determinista é um traço na nossa sociedade, observamos suas influências não só na Filosofia como expressão do pensamento racional e na ciência em geral, como expressão da busca racional da humanidade pelo conhecimento, mas também nos sistemas escolares, como expressão de nossa sociedade da necessidade de perpetuar os saberes.

Com base nesse mesmo argumento racionalista, vamos encontrar estudos antropológicos e filosóficos importantes que tratam do papel da noção de acaso, ou sua ausência, em civilizações consideradas primitivas. Nos trabalhos de Lucien Lévy-Bruhl (1857-1939), encontramos alusão à mentalidade primitiva. Para esse importante sociólogo e filósofo que se debruçou sobre o estudo da mentalidade de sociedades tribais, a mentalidade primitiva atende principalmente ao princípio místico. Ele atribuiu a essa mentalidade um outro princípio chamado de Pré-lógica, para indicar que a lógica da mentalidade primitiva era diferente dos povos ditos “civilizados”. O primeiro princípio faz com que se atribua à dinâmica do mundo e da participação do homem nele o papel das forças ocultas para explicar os mais variados fenômenos. Para os povos primitivos, o acaso é, portanto, visto de forma diferente da que as nossas sociedades o veem. (LÉVY-BRUHL, 2008)¹²⁰

Esse foi um dos aspectos que motivou o trabalho de Piaget e Inhelder (1951) sobre a formação da noção acaso nas crianças:

Os brilhantes trabalhos de Lévy-Bruhl trouxeram, sob o aspecto ideológico, consequentemente mítico, representações coletivas “primitivas”. Porém, de um lado toda a parte técnica e, de outro, toda utilização individual quotidiana e diferenciada dos conceitos “primitivos” ainda nos escapam. Portanto, no que diz respeito à ideia de acaso, esses aspectos do pensamento podem ter importância. (PIAGET; INHELDER, 1978, p.11).

Como já havíamos frisado na seção anterior, Piaget e Inhelder (1951:1978) reconheciam que as crianças estavam sujeitas à influência dos ambientes sociais em que transitam, porém,

¹²⁰ Obra original de 1922.

do ponto de vista da psicogenética, podiam trazer um traço individual da mente humana que poderia ser comparado com a mentalidade primitiva no que diz respeito à formação da noção de acaso. Vale frisarmos que para Lévy-Bruhl (2008) as sociedades primitivas se enquadravam na mesma categoria que as demais sociedades, isto é, na categoria humana, sendo que as diferenças estavam na coletividade social em que viviam.

Com a observação dos parágrafos anteriores, reforçamos o argumento de que, para a nossa civilização, o acaso, a noção de probabilidade assumem, portanto, um papel importante. Se do ponto de vista da psicologia piagetiana o acaso não é um objeto dado, inato, mas construído a partir das relações sociais que estabelecemos em nossa vida, podemos considerar que a escola, dentre outras instituições, com as quais podemos construir/moldar nossa relação pessoal com a probabilidade, tem um papel fundamental.

Esse papel, por exemplo, é destacado do ponto de vista psicológico quando estudos que utilizaram concepções de probabilidade que não as utilizadas por Piaget e Inhelder (1951) revelam resultados diferentes indicando que a intuição probabilística é mais precoce do que pensavam aqueles que olharam para a probabilidade no sentido clássico/formal (SPINILLO, 2005). Vale lembrar que a perspectiva piagetiana da probabilidade é pautada pelo paradigma determinista, cujo o nome de Laplace está associado, ou seja, a probabilidade é interpretada no sentido clássico, como uma ferramenta para modelar o acaso.

O paradigma determinista defendido por Laplace, aliado ao racionalismo de René Descartes e de outros nomes, se torna a base da ciência de moderna, com influência na sociedade e comumente na educação:

O paradigma tradicional ou newtoniano-cartesiano levou a fragmentação do conhecimento e a supervalorização da visão racional. Nesse sentido, propôs a primazia da razão sobre a emoção, especialmente, para atender a coerência lógica nas teorias e a eliminação da imprecisão, da ambiguidade e da contradição dos discursos científicos. A fragmentação atingiu as Ciências e, por consequência, a Educação, dividindo o conhecimento em áreas, cursos e disciplinas. As instituições, em especial as educacionais, passaram a ser organizadas em departamentos estanques, no qual emergem os especialistas, considerados pela sociedade como os detentores do saber. Neste processo reducionista, criam-se as especialidades em uma única área do conhecimento. (BEHRENS; OLIARI, 2007, p. 59-60)

Os efeitos dessa visão de mundo, visão de ciência e consequente visão de escolarização amplamente criticados na atualidade (LAVE, 1988).

O próprio Chevallard (2009), ao introduzir a noção de PER, crítica a visão de escola monumentalista, cujos saberes são obras a serem visitadas pelos alunos, que, por sua vez, têm uma postura passiva diante do conhecimento.

Para Behrens e Oliari (2007, p.60), uma visão curricular baseada em pressupostos deterministas e racionais é em essência uma visão reducionista com implicações nos comportamentos de professores e alunos:

Nos currículos lineares e reducionistas, divididos em diversas matérias, o professor assume a função de transmitir o conhecimento e considera-se como “dono do saber”. O ensino focaliza mais o resultado ou o produto e com esta visão o aluno é recompensado por seguir com fidedignidade o modelo. O aluno acaba sendo premiado por seguir as regras impostas pelo professor e pela “boa conduta”. Ao mesmo tempo, ao desobedecer às regras, é reprimido e punido pelos “erros” e, em alguns casos, com esta visão austera, o docente chega a torturar o aluno de maneira física ou psicológica.

Porém, efetivamente como essa visão de linearidade do currículo e a ênfase nos resultados podem refletir no estudo da probabilidade na licenciatura em Matemática?

Do ponto de vista das restrições, pensamos que uma visão fragmentada do currículo, na qual os alunos têm uma postura passiva diante dos saberes, pode influenciar nesse processo de estudo, haja vista que colabora para uma visão limitada do conceito de probabilidade, conforme aponta Silva (2002).

Do ponto de vista conceitual, há uma diferença evidente em relação à probabilidade e suas aplicações. Para Laplace e sua visão determinista, a teoria das probabilidades cumpre a meta de quantificar a incerteza, partindo do pressuposto da equiprobabilidade. No início do século XX, o paradigma científico de bases racionalistas e deterministas se vê confrontado pelas descobertas científicas que culminaram com o questionamento da física newtoniana. Porém, nesse contexto de ruptura científica, as ciências se servirão das aplicações da probabilidade, e as “ideias concernentes à Teoria da Probabilidade desempenham papel decisivo na física moderna” (POPPER, 2007, p. 160).

De acordo com Vasconcellos (2012), do ponto de vista da evolução da ciência, ocorreram profundas mudanças paradigmáticas no modo de conceber a ciência e a conhecimento. Em essência, se o paradigma científico tradicional partiu dos pressupostos da simplicidade, da estabilidade e da objetividade, o paradigma emergente parte dos pressupostos da complexidade, da instabilidade e da subjetividade.

Vivemos em uma civilização que reconhece o papel das probabilidades e suas aplicações nos mais variados campos da produção científica atual. Ao contrário do paradigma determinista, a probabilidade abre possibilidades de pensar a incerteza.

Uma civilização que passa por transformações que exigem o reconhecimento da necessidade de pensamento sistêmico, porém essa mesma civilização ainda abriga sistemas

educacionais que privilegiam visões limitadas da ciência e da produção de conhecimentos (VASCONCELLOS, 2012).

Assim, o ensino de probabilidade, apesar de reconhecida a sua importância, pode ser pautado de forma simplória, apresentado de forma a-problemática, partindo de contextos que não revelem seu potencial como saber fundamental para a formação dos futuros professores e dos cidadãos que aqueles poderão vir a ensinar.

Se do ponto de vista do nível civilização ocidental, temos indícios de que o ensino de probabilidade, embora reconhecido como importante, pode carregar traços de uma visão limitada de sua aplicabilidade, somente no nível da sociedade é que poderemos encontrar um contexto mais claro das expectativas sociais para a difusão desse saber.

Uma conjunto de perguntas pertinentes em um estudo sobre a ecologia que permite a vida desse saber numa dada instituição de uma sociedade seria: qual a razão de ser da probabilidade? Por quais processos transpositivos esse saber passa para que se torne um objeto desta instituição? No caso da escola, como esse objeto se torna um saber a ser ensinado?

Trazendo essas questões para a nossa pesquisa, podemos dizer que a sociedade brasileira, como parte da civilização ocidental, carrega aspectos alguns dos quais já mencionamos em relação à probabilidade e ao seu ensino. Em sentido mais amplo, podemos pensar que a probabilidade enquanto objeto de saber vive em diversas instituições comuns dentro de uma sociedade contemporânea. Nessas instituições, a probabilidade assume um caráter cada vez mais global em relação aos processos de produção.

Como evidência disso, podemos dizer que a probabilidade hoje pode ser encontrada como objeto em diversos ramos produtivos da sociedade. Na atividade científica, ela tem cumprido papel fundamental, especialmente com o advento da física moderna que admitiu que o mundo quântico não se comporta em um universo previsível como supunha a física newtoniana. A imensidão do mundo subatômico levou os pesquisadores das mais diversas ciências reconhecerem que muitas de suas verdades são aproximações daquilo que se espera que aconteça:

quando os cientistas de todas as áreas começaram a aceitar a legitimidade da abordagem estatística, reconheceram as marcas registradas desse andar caótico em praticamente todas as áreas de estudo – na busca de insetos por comida em meio à selva africana, na química do nylon, na formação dos plásticos, no movimento de partículas quânticas livres, nas variações dos preços das ações e até mesmo na evolução da inteligência ao longo das eras. (MLODINOW, 2009, p. 217).

Dentre os outros ramos da atividade humana que comportam uma relação institucional com a probabilidade, podemos citar a Biologia e seus diversos campos, as Ciências Sociais, a Medicina, a Engenharia, a Psicologia, o Direito, a Economia, a Ciência Atuarial.

Não temos, nem podemos criar, a expectativa de apresentar em qualquer dessas áreas aplicações ou praxeologias em torno desse objeto, isso fugiria completamente aos objetivos de nosso trabalho. Por isso, nos delimitamos a examinar a razão de ser desse saber no universo das instituições de ensino que fazem parte do nosso objeto de estudo. Para tanto, iremos inicialmente revisitar brevemente aspectos da probabilidade, enquanto *savoir savante*, e, em seguida, apresentar do ponto de vista da sociedade brasileira, a partir de documentos e diretrizes oficiais para o ensino de probabilidade, as expectativas em torno desse saber, como objeto de ensino.

5.3.1 PROBABILIDADE COMO UM SAVOIR SAVANTE

No início deste capítulo, abordamos em linhas gerais aspectos ligados à construção histórica e epistemológica da noção de Probabilidade. Veremos que, apesar de a noção assumir genes que remontam aos primórdios da humanidade, é somente a partir de meados do século XVI que a Probabilidade começa a se desenhar como um problema de interesse, principalmente para matemáticos. Ao longo desses últimos séculos, contribuições diversas foram dadas para a que a Probabilidade se tornasse um saber indispensável à sociedade, tanto como solução para diversos problemas envolvendo os ramos da atividade humana, como uma importante teoria associada a outro ramo matemático fundamental na contemporaneidade que é a Teoria da Medida, como já mencionamos em seções anteriores.

A Teoria das Probabilidades comporta desde as noções elementares ligadas ao cálculo de probabilidades como espaço amostral, a função probabilidade (medida de probabilidade), probabilidade condicional, independência de eventos, teorema de Bayes, até noções mais complexas como variáveis aleatórias, modelos univariados, multidimensionais e multivariados de probabilidade. Perpassam essas noções as concepções probabilísticas ligadas ao modelo clássico, frequentista, subjetivo e axiomático, sendo que este último é o principal modelo usado para apresentar o saber probabilidade nos cursos de introdução à probabilidade na universidade. (RATHIE; ZÖRNIG, 2012).

A razão para que o modelo axiomático seja preponderante na apresentação do saber está ligada aos desenvolvimentos científicos da própria teoria, pois é axiomática de Kolmogorov

que irá possibilitar a integração do ponto de vista matemático da probabilidade como uma função medida. Essa impressão já era destacada por autores de manuais didáticos para o ensino de probabilidade desde a década de 1960, “historicamente, a formação da Teoria da Probabilidade remonta a 1930, aqueles que defendiam a definição pela conceituação formal, tiveram, sem dúvida alguma, influência marcante” (ARBEX, 1967, p. 8).

Outra consideração importante a respeito da Teoria das Probabilidades está relacionada à distinção entre as expressões “cálculo de probabilidades” e “Teoria das Probabilidades”. O cálculo se refere às técnicas empregadas para cálculos de probabilidades em diversas situações. Já a teoria se refere às explicações e às justificativas para esses cálculos. Assim, podemos dizer que o cálculo de probabilidade compreende todos os desenvolvimentos desde o século XVI que culminaram e contribuíram para o que se entende atualmente por Teoria das Probabilidades. De forma mais clara, podemos dizer que a correspondência entre Pascal e Fermat sobre os problemas não constituíam ainda uma teoria da probabilidade, ao menos do ponto de vista matemático. Para sermos precisos, recorremos ao trabalho original Kolmogorov publicado em 1933 “*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*” onde ele introduz a necessidade de axiomas para estender a amplitude do cálculo das probabilidades elementares para eventos infinitos:

Nós chamamos de cálculo de probabilidade elementar aquela parte cujo cálculo de probabilidades se refere apenas quando ocorrem um número finito de eventos aleatórios. Naturalmente, as sentenças que são obtidas aqui também são aplicadas a questões relacionadas com um número infinito de eventos aleatórios, mas no tratamento dessas últimas questões também é preciso essencialmente princípios novos.¹²¹ (KOLMOGOROV, 1933, p. 1, tradução nossa).

Para Kolmogorov (1933), o cálculo de probabilidades é visto como uma teoria elementar ligada à resolução de problemas que envolvem um número finito de eventos aleatórios. A expansão da teoria elementar para um número infinito de eventos aleatórios por meio da axiomatização constitui a sua contribuição primordial.

Conforme vimos em Lopes, Coutinho e Almouloud (2010), o surgimento dos primeiros livros dedicados à difusão da probabilidade como um saber escolar remonta à década de 1950. Isso porque a própria teoria passava por um momento de consolidação. Outro fato importante

¹²¹ Wir nennen elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung denjenigen Teil der Wahrscheinlichkeitsrechnung, in welchem Wahrscheinlichkeiten von nur endlich vielen zufälligen Ereignissen vorkommen. Die Sätze, die hier gewonnen werden, werden natürlich angewandt auch auf Fragen, die mit unendlich vielen zufälligen Ereignissen verbunden sind, allerdings braucht man bei der Behandlung dieser letzteren Fragen auch wesentlich neue Prinzipien.

é que o modelo de apresentação do saber não sofreu mudanças acentuadas. Para constatar essa afirmação, comparamos as edições de dois cursos introdutórios destinados ao público universitário em relação às noções elementares do cálculo de probabilidades: “Curso de Introdução ao Cálculo de Probabilidade”, de Marcos Arbex, publicado em 1967, e “Teoria da Probabilidade”, de Rathie e Zörnig, publicado em 2012.

Apesar de a obra de Rathie e Zörnig ser mais completa, trazendo inclusive os desenvolvimentos mais recentes ligados à teoria, observamos pequenas diferenças em relação à apresentação do tópico relacionado às noções elementares. Essas diferenças estariam ligadas ao uso dos objetos ostensivos e ao próprio *layout* das obras, no entanto, com relação à disposição e à organização didática das obras, existe certa semelhança entre ambas as obras, como sugerem Lopes, Coutinho e Almouloud (2010).

Uma abordagem semelhante, por exemplo, do ponto de vista didático, é necessidade de trazer elementos ligados aos conteúdos que assumem o caráter de pré-requisitos para o tratamento da probabilidade. Em Arbex (1967), vamos encontrar elementos da Teoria dos Conjuntos, cálculos envolvendo somatórios e produtórios. De modo semelhante, a Teoria dos Conjuntos abre a exposição de Rathie e Zörnig (2012), com acréscimo do cálculo combinatório.

No que tange à disposição dos conteúdos, a abordagem também apresenta semelhanças, como vemos nas figuras 19 e 20.

Figura 18 – Noções elementares da Probabilidade em Rathie e Zörnig (2012).

2. Probabilidade	39
2.0. Introdução	39
2.1. Espaço amostral	40
2.2. Função conjunto	49
2.2.1. Lançamentos de uma moeda	50
2.3. Medida de probabilidade	52
2.3.1. Alguns teoremas elementares	53
2.4. Como associar probabilidades a eventos	58
2.4.1. Método da simetria	59
2.4.2. Probabilidade pessoal	62
2.4.3. Método das frequências relativas	63
2.5. Probabilidade condicional e independência	68
2.5.1. Probabilidade condicional	68
2.5.2. Independência de eventos	72
2.5.3. Teorema de Bayes	76

Fonte: (RATHIE; ZÖRNING, 2012)

Figura 19 – Noções elementares da Probabilidade em Arbex (1967).

II PARTE: CÁLCULO DE PROBABILIDADE	
CAPÍTULO I - CONCEITOS E NOÇÕES FUNDAMENTAIS	
1. NOÇÕES FUNDAMENTAIS	
1- Prova e Fenômenos Aleatórios	49
2- Conjunto de Hipóteses	50
3- Conjunto Fundamental	50
4- Eventos	52
5- Aplicação e Exercícios	57
2. CONCEITOS DE PROBABILIDADE	
1- Introdução	60
2- Conceitos de Probabilidade	61
3- Considerações Gerais	67
CAPÍTULO II- TEOREMAS, GENERALIDADES E APLICAÇÕES	
1- Teorema do Evento Impossível	73
2- Teorema do Evento Complementar	74
3- Teorema das Probabilidades Totais	75
4- Probabilidade Condicional	87
5- Teorema do Produto	90
6- Teorema de Bayes	93
7- Experimentos Bernouillianos - Cadeias de Markov (*)	96
8- Exercícios e Problemas.	101

Fonte: Arbex (1967).

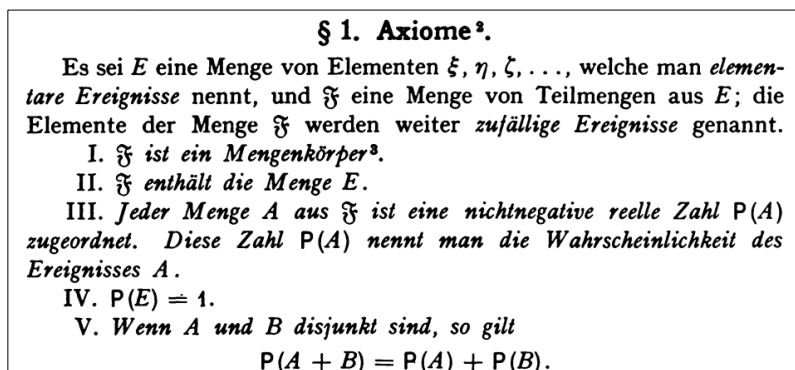
Observamos também que estas obras guardam a mesma estrutura do capítulo 1 da obra de Kolmogorov que, em certo modo, sintetiza as principais contribuições ligadas ao cálculo de probabilidade de um ponto de vista elementar, sendo que o objetivo de Kolmogorov é mostrar a validade dos seus axiomas como justificativa para esses resultados.

Tanto na obra de Kolmogorov (1933), quanto na obra de Rathie e Zörning (2012), os axiomas da probabilidade assumem o papel principal no processo de construção dos resultados. A diferença é que, em Kolmogorov, a intenção é comunicar o saber em construção, enquanto na obra de Rathie e Zörning (2012) é servir como material de apoio ao estudo desse saber. Por essa razão, os resultados são sempre acompanhados de comentários, exemplos e explicações adicionais na obra de 2012.

Do ponto de vista da transposição didática externa, observamos que os manuais didáticos se preocupam mais com a objetividade do texto formal para poder explorar as tarefas que são resolvidas a partir dos resultados obtidos, é nesse aspecto que percebemos uma ênfase na parte técnica, isto é, no saber fazer. Assim, por exemplo, abre-se mão de um rigor matemático para privilegiar a discussão dos casos em que se aplicam aquelas técnicas, ou seja, o discurso teórico-tecnológico é suprimindo em razão do discurso técnico-prático.

Para exemplificarmos essa impressão observamos que na publicação de Kolmogorov (1933) são apresentados inicialmente 05 (cinco) axiomas. Na maior parte dos textos e manuais didáticos atuais, esses axiomas são sintetizados em apenas 03 (três):

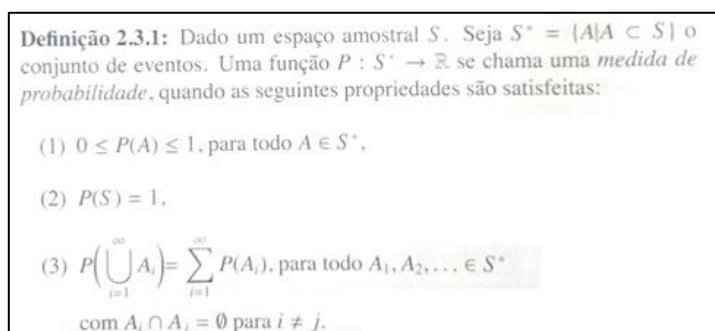
Figura 20 – Axiomática de Kolmogorov I – V.



Fonte: (KOLMOGOROV, 1933).

Nos textos mais recentes, apenas o itens III – V são apresentados como os axiomas de Kolmogorov, como vimos já vimos em Rathie e Zörning (2012):

Figura 21 – Apresentação dos Axiomas em obras didáticas mais recentes.



Fonte: (RATHIE; ZÖRNIG, 2012)

Partindo dessas considerações apresentaremos um resumo dos principais resultados a partir da axiomática de Kolmogorov, assumindo uma abordagem mais didática na apresentação e comentários.

A primeira consideração é que, do ponto de vista da axiomática de Kolmogorov, a Probabilidade é uma função cujo domínio é um subconjunto (S^*) de um dado espaço amostral (S) que contém todos os eventos possíveis desses espaço amostral, e de imagem igual ao conjunto dos números reais. Essa função satisfaz os três axiomas:

Quadro 11 – Principais axiomas da função probabilidade.

III – $P(A) \geq 0, \forall A \in S^*$, *A probabilidade $P(A)$ é um número real não – negativo.*

IV – $P(S) = 1$, *A probabilidade de um evento certo é 1.*

V – $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, se $A \cap B = \emptyset$,
a união das probabilidades é igual a soma das probabilidade individuais.

Fonte: Adaptado de (RATHIE; ZÖRNIG, 2012)

A partir desses axiomas, é possível demonstrar diversos resultados ligados à probabilidade. É exatamente nesse aspecto que reside a importância tecnológica-teórica da abordagem axiomática, pois a partir desses e de outros axiomas fundamentais a teoria vai sendo construída. É importante destacar as definições clássica, frequentista e subjetiva podem ser abordados por essa axiomática.

Tomando a definição laplaciana de probabilidade como exemplo, podemos verificar a validade dos axiomas. De acordo com a definição laplaciana $P(A)$ é o número associado ao quociente entre números de casos favoráveis e o número de casos possíveis de um determinado evento em um espaço amostral (Ω) equiprovável:

$$P(A) = \frac{n^{\circ} \text{ casos favoráveis } (\#A)}{n^{\circ} \text{ casos possíveis } (\#\Omega)}$$

Em qualquer Ω , o número de casos favoráveis será sempre maior ou igual a 0, pois a ocorrência de um único caso favorável ou inexistência de tal caso garante essa condição. De modo análogo, podemos assegurar que a existência de um Ω implica a consideração de algum caso possível, assim temos que este quociente será sempre maior ou igual a zero verificando o Axioma III:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#A \geq 0}{\#\Omega > 0} \geq 0$$

Para o axioma IV de kolmogorov, isto é, a probabilidade do espaço amostral é 1, usaremos uma argumento semelhante. De acordo com a definição laplaciana, teremos que $P(\Omega)$ será igual ao número de casos favoráveis à ocorrência de Ω que é o próprio Ω , logo:

$$P(\Omega) = \frac{\#\Omega}{\#\Omega} = 1$$

Verificado os axiomas III e IV, temos, para o axioma V, uma solução que usa a propriedade da união de conjuntos: sejam dois conjuntos A e B disjuntos, ou seja, que não têm elementos em comum, a união desses conjuntos é igual à reunião de todos elementos de A e B, pois a interseção entre A e B é zero, então:

$$P(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#\Omega} = \frac{\#A + \#B - \#A \cap B}{\#\Omega} = \frac{\#A}{\#\Omega} + \frac{\#B}{\#\Omega} = P(A) + P(B).$$

Assim, observamos que a definição clássica de probabilidade verifica os três axiomas fundamentais de Kolmogorov. É importante salientarmos que o requisito da equiprobabilidade limita a análise de certos eventos na abordagem clássica, por essa razão a definição clássica também é chamada de probabilidade teórica ou *a priori*. Em problemas em que a equiprobabilidade não está garantida a definição clássica não pode ser aplicada, o que tornaria a abordagem axiomática mais abrangente.

Ao apresentar um abordagem axiomática, a intenção de Kolmogorov é ampliar o domínio da teoria para espaços amostrais infinitos. No entanto, Rathie e Zörning (2012) alertam claramente que os axiomas e a própria definição de $P(A)$ como uma função não garantem o seu cálculo imediato. Segundo os autores, $P(A)$ é um número real e não necessariamente um valor específico da probabilidade de um evento: Esta definição não nos ajuda na determinação, isto é, no cálculo da probabilidade de um evento particular considerado como, por exemplo, a probabilidade de que ocorrerão duas caras no lançamento de uma moeda. Desde que a probabilidade de um evento A esteja relacionada com uma medida numérica, considerando os vários fatores que afetam a ocorrência de um evento, não existe uma única medida a ser chamada como $P(A)$. Então não faz muito sentido dizer “a probabilidade do evento A ”. Mas, examinando as condições experimentais, podemos construir alguns métodos que nos permitam associar probabilidades a eventos particulares. (RATHIE; ZÖRNING, 2012 p. 53).

Os métodos aos quais os autores se referem compõem exatamente o cálculo de probabilidades. Eles estão agrupados em cálculo por métodos de simetria, que usam a probabilidade laplaciana e geométrica. Cálculo por métodos de probabilidade subjetiva ou pessoal, que associam a probabilidade a grau de crença de quem vive ou analisa o experimento e os métodos frequentistas que trabalham com a estimativa de probabilidade a partir da análise empírica das frequências relativas. Notadamente, cada um desses métodos está associado às concepções de probabilidade que já mencionamos em seções anteriores. (RATHIE; ZÖRNING, 2012).

Do ponto de vista do *savoir savante*, esses métodos comportam teoremas que atendem aos axiomas de Kolmogorov. Dentre os principais, citamos:

Quadro 12 – Teoremas elementares associados ao cálculo de Probabilidade.

Teorema 01 – A probabilidade $P(\emptyset) = 0$

Teorema 02 – A probabilidade de evento complementar é dada por $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Teorema 03 – A probabilidade de n eventos mutuamente exclusivos é o somatório de suas probabilidades individuais: $P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

Teorema 04 – Sejam A e B dois eventos quaisquer temos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Fonte: Adaptado de Rathie e Zörnig (2012).

Cada um dos teoremas citados é provado utilizando elementos da Teoria dos Conjuntos e os axiomas de Kolmogorov. Uma das principais consequências desses teoremas é o fato de que a função medida de Probabilidade assume que $P(A_i)$ será sempre um valor entre 0 e 1, ou seja, $0 \leq P(A_i) \leq 1$. (RATHIE; ZÖRNING, 2012).

Todos esses resultados respondem a tarefas envolvendo probabilidades relacionadas a eventos arbitrários, porém isolados, ou seja, associados a um único evento aleatório. A extensão do cálculo de probabilidades consiste na análise de casos em que a ocorrência ou não de um evento está associada a um outro evento. Para esses casos, o cálculo de probabilidade se vale das probabilidades condicionais que analisa em “que sentido a ocorrência de um evento influencia a probabilidade de ocorrência de um outro evento”, (RATHIE; ZÖRNING, 2012, p. 68).

De acordo com Rathie e Zörnig (2012), toda afirmação de probabilidade é na verdade uma afirmação condicional, pois a probabilidade de um evento A ocorrer está sempre associada a um outro conjunto que é o espaço amostral. Então, podemos dizer que $P(A) = P(A|S)$, ou seja, a probabilidade de $P(A)$ dado um S . Quando nos referimos a dois eventos A e B , que fazem parte de um mesmo espaço amostral, e a ocorrência ou não de um afeta a ocorrência ou não do outro, estamos falando de um cálculo de probabilidade condicional. Vale salientarmos que, para determinar a probabilidade de um evento A ocorrer tendo ocorrido B , é necessário conhecer as probabilidades desses eventos em dado espaço amostral. Então, para que ocorra A tendo ocorrido B implica saber as probabilidades individuais de A e B e também a sua intersecção. Assim, a probabilidade de ocorrer um evento A dado um evento B é definida como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ se } P(B) \neq 0$$

ou

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B), \text{ se } P(A) \neq 0 \text{ e } P(B) \neq 0.$$

Em decorrência dessa definição, o cálculo de probabilidade condicional passa a se interessar pela natureza $P(A \cap B)$. Anteriormente, vimos que dados A e B como para eventos mutuamente exclusivos, $A \cap B = \emptyset$, temos que a união de $P(A \cup B)$ é dada pela soma das probabilidades individuais, conforme teorema 03. Se eventos não são mutuamente exclusivos, a intersecção tem que ser subtraída, de acordo com o teorema 04. Para o caso de probabilidades condicionais, $P(A \cap B)$ é dado pelo produto da probabilidade de A quando B ocorre, dividido pela probabilidade B. Como consequência se esses eventos são independentes então a ocorrência de um não afeta o outro. Para este último caso, $P(A \cap B)$ equivale ao produto das probabilidade individuais, isto é, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ que é a definição de eventos independentes.

Partindo dessas duas definição, probabilidade condicional e eventos independentes, novos resultados podem ser acrescentados ao cálculo de probabilidades:

Quadro 13 – Teoremas associados ao cálculo de probabilidade condicional.

Teorema 05 – Se A e B são eventos independentes e se $P(B)$ é diferente de zero, então $P(A|B) = P(A)$.

Teorema 06 – Se A e B são eventos independentes, então:

(1) A e \bar{B} são independentes;

(2) \bar{A} e B são independentes;

(3) \bar{A} e \bar{B} são independentes;

Fonte: Adaptado de Rathie e Zörnig (2012).

Um outro resultado interessante ligado à probabilidade condicional é o Teorema de Bayes, conhecido também como lei ou regra de Bayes. O Pastor Thomas Bayes (1701-1761) era inglês e desenvolveu estudos ligados à Teologia e também à Matemática. Especialmente em relação ao cálculo de probabilidades, é-lhe atribuído o resultado que permite calcular as alterações sofridas na probabilidade de um evento *a priori* quando novas informações sobre esse evento ocorrem *a posteriori*, ou seja, a regra permite atualizar as probabilidades de eventos. Esse resultado não só foi reconhecido mais tarde por Laplace, como é considerado fundamental para o cálculo de probabilidades.

De acordo com Coutinho (1994), o teorema de Bayes remete à concepção subjetiva de probabilidade. Ao tomar decisões partindo da atualização das probabilidades, entra em cena a subjetividade de quem observa o evento. Esse teorema é fundamental para um ramo da

estatística chamado inferência bayesiana. A análise de dados na inferência bayesiana pode ser aplicada a diversos ramos como economia, medicina, esporte, engenharia, etc.

O teorema de Bayes se utiliza de outro resultado importante que é conhecido como teorema da Probabilidade Total. Esse teorema garante que sejam $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ partições de um espaço amostral S , ou seja, subconjuntos de S que são sempre disjuntos 2 a 2, então a probabilidade de um evento B desse espaço amostral pode ser dada pela soma do produto das probabilidades das partições pela probabilidade de acontecer B dado a ocorrência dos eventos dessas partições, em linguagem matemática temos:

$$P(B) = \sum_{j=1}^n P(A_j)P(B|A_j).$$

Para entender a função do resultado da probabilidade total, vamos analisar o seguinte problema:

Quadro 14 – Exemplo de aplicação do teorema total.

Três candidatos, João, Maria e Pedro, disputam a presidência do diretório dos estudantes em uma universidade. Uma prévia eleitoral mostra que suas chances de vencer são respectivamente 0,5; 0,3 e 0,2. As probabilidades de que eles venham a promover mudanças culturais se eles forem eleitos são 0,7; 0,6 e 0,9, respectivamente. Qual é a probabilidade de que as mudanças culturais sejam promovidas depois da eleição?

Tarefa: determinar a probabilidade de um ocorrer um evento B dados eventos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ de um determinado espaço amostral S .

Técnica: Encontrar as probabilidades dos eventos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$.

Encontrar as probabilidades condicionais $P(B|A_1), P(B|A_2), \dots, P(B|A_n)$.

Aplicar o teorema da probabilidade total (teorema 06).

Como as probabilidades já foram todas dadas, basta substituir no teorema:

$P(A_1) = 0,5, P(A_2) = 0,3, P(A_3) = 0,2 \rightarrow$ Probabilidade da Eleição dos candidatos.

$P(B|A_1) = 0,7, P(B|A_2) = 0,6, P(B|A_3) = 0,9 \rightarrow$ Probabilidade da promoção das mudanças culturais dado a eleição de cada um dos candidatos.

Aplicando T-06:

$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) = 0,7 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,2 = 0,71$.

Assim, a probabilidade de que B ocorra (mudanças culturais) depende das eleições dos candidatos e corresponde a 0,71, obtida pelo resultado da probabilidade total.

Fonte: Adaptado de Rathie e Zörnig (2012).

Partindo desse resultado, o teorema de Bayes pode ser definido a partir da seguinte expressão:

Sejam $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ uma partição do espaço amostral S e seja B um evento qualquer.

Onde $P(A_j) \neq 0, j=1, \dots, n$ e $P(B) \neq 0$, então:

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)}, \text{ para } j = 1, 2, \dots, n.$$

A expressão acima garante que a probabilidade de um evento (ou partições) ocorrer, tendo ocorrido outro evento qualquer desse espaço amostral (evento B), é dado pelo quociente entre o produto da probabilidade desse evento (ou partições) pela probabilidade do evento qualquer (evento B) dado o evento das partições que equivale a definição de Probabilidade condicional, pelo resultado da probabilidade total.

Assumindo apenas dois eventos A e B independentes, referentes ao mesmo espaço amostral, se quisermos saber qual a probabilidade de ocorrer um deles, tendo o outro de forma independente, basta aplicar o teorema de Bayes, que ficaria como:

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}, \text{ pois } A \text{ e } B \text{ são independentes.}$$

Notemos que, para sabermos a probabilidade A dado B, temos que saber o que ocorre quando A ocorre e B e ocorre, de modo que o valor de probabilidade procurado pode ser atualizado em função das ocorrências de A e B.

Para finalizar os comentários sobre o teorema de Bayes, vamos retornar ao Problema de Monty Hall. O problema, como já explicamos, consiste na tomada de decisão em relação a um prêmio que está oculto em uma de três portas que devem ser escolhidas por um participante. Na primeira etapa, o apresentador que já sabe previamente onde está o prêmio pede ao participante que escolha uma das portas. Feita a escolha, o apresentador abre uma das outras portas restantes, obviamente a que não tem o prêmio, e dá a opção ao participante de permanecer com a porta escolhida ou mudar de porta.

De acordo com Batanero, Fernandes, Contreras (2009), a resposta para esse problema é contra-intuitiva, pois, inicialmente, as chances do participante é de 33,3 %, isto é, ele pode escolher igualmente entre 01 (uma) das 03 (três) portas. O apresentador, por sua vez, já sabe onde está o prêmio e, portanto, abre as portas em função da escolha do participante, ou seja, suas ações não são aleatórias. Nossa intuição diz que, ao abrir uma das portas, o apresentador faz com nessas chances aumentem para 50,0% pois tudo se resume às duas portas restantes, permanecer ou trocar de porta seria indiferente, pois as chances agora são iguais. O teorema de Bayes nos garante que a resposta intuitiva está equivocada, isto é, na segunda etapa do problema, a melhor estratégia é mudar de porta, pois as chances do participante conseguir o prêmio sobem para 66,6% mudando de porta (BATANERO; FERNANDES; CONTRERAS, 2009).

Podemos encontrar esse resultado a partir de dois caminhos. O primeiro é adotando como eventos as duas estratégias do participante que são “permanecer” ou “mudar de portas”. O outro caminho é assumir o problema a partir de uma sequência de eventos relacionados ao problema. Vamos adotar a segunda estratégia.

Quadro 15 – Discussão do Problema de Monty Hall e o teorema de Bayes.

Consideremos os seguintes eventos:

A_1 = “carro está na primeira porta”.

A_2 = “carro está na segunda porta”.

A_3 = “carro está na terceira porta”.

C = “o apresentador abre a terceira porta”.

As probabilidades desses eventos podem ser determinadas a partir da análise do problema:

Suponhamos que o participante tenha escolhido a primeira porta. Para que o apresentador abra a terceira porta, se o prêmio estiver na primeira porta, tem-se uma probabilidade de 50% ou $\frac{1}{2}$, isto é, $P(C|A_1)$, pois restam duas portas ao apresentador.

De modo análogo, $P(C|A_2) = 1$, já que o apresentador não vai abrir a segunda porta. Se o prêmio estiver na terceira porta, teremos $P(C|A_3) = 0$.

Pelo teorema da probabilidade total:

$$P(C) = P(C|A_1)P(A_1) + P(C|A_2)P(A_2) + P(C|A_3)P(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = 0,5.$$

Pelo teorema de Bayes, teremos:

$$P(A_1|C) = \frac{P(C|A_1)P(A_1)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(A_2|C) = \frac{P(C|A_2)P(A_2)}{P(C)} = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} e$$

$$P(A_3|C) = \frac{P(C|A_3)P(A_3)}{P(C)} = \frac{0 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = 0.$$

Portanto, se o participante escolheu a primeira porta, três cenários são previstos. No primeiro cenário, a probabilidade é de $\frac{1}{3}$ de ganhar o prêmio, estratégia de permanecer com a porta escolhida. No segundo, se o prêmio estiver na segunda porta, ao abrir a terceira porta, a probabilidade de acertar o prêmio passa a ser de $\frac{2}{3}$ que corresponde à estratégia de o participante mudar de porta. No terceiro, obviamente, a probabilidade de abrir a porta 3, se o prêmio estiver nela, é nula.

Fonte: próprio autor (2018).

O teorema de Bayes encerra a apresentação dos principais objetos de saber relacionados ao cálculo de probabilidades ou teoria elementar das probabilidades. O conjunto dessas ferramentas permite a solução de diversas tarefas associadas ao cálculo de probabilidades. Elas

constituem a base necessária para determinar probabilidades de eventos específicos, especialmente, em situações *a priori*. Como vimos nas observações de Kolmogorov, os axiomas que permitem a construção desses resultados tratam de situações com um número finito de eventos. Para o tratamento de casos infinitos, novos axiomas têm que ser acrescentados.

A partir desse ponto, o axioma da continuidade amplia o campo das probabilidades para espaços infinitos, e passam a ser introduzidos a noção de variáveis aleatórias contínuas e discretas, os modelos univariados e multidimensionais de probabilidade, dentre outras noções e modelos.

Além desses objetos, outro importante resultado relacionado à probabilidade é a Lei dos Grandes Números, que trata da convergência de frequências relativas. De acordo com Chevallard e Wozniac (2006) e Vun nhu (2009), a lei dos grandes números cumpre o papel de fazer o elo entre abordagem matemática da Probabilidade e da Estatística.

Como veremos mais adiante, do ponto de vista do currículo escolar na educação básica, os principais objetos relacionados à probabilidade correspondem à teoria elementar ou cálculo de probabilidades. Apesar de a abordagem axiomática ser um importante instrumento na construção da teoria, a recomendação de diversos pesquisadores em todo o mundo é abordar os problemas que envolvem probabilidade utilizando o cálculo de probabilidade sob as diferentes abordagens e com uso de novas tecnologias, especialmente para o tratamento e a simulação de experimentos (COUTINHO, 2001; BATANERO, 2001; HENRY, 2001).

Isso não exclui, segundo Coutinho (2001), um tratamento axiomático, mas esta não pode ser a única abordagem para tratar o cálculo de probabilidades em situações de ensino. A partir da próxima subseção, apresentaremos de forma mais clara as expectativas do currículo oficial para o ensino de Probabilidade tanto na Escola Básica quanto na Licenciatura em Matemática.

5.3.2 PROBABILIDADE COMO SABER A ENSINAR

Considerando que vivemos na sociedade brasileira, buscamos, nos documentos oficiais da educação nacional, parâmetros para balizar nossas impressões sobre essas expectativas em relação ao ensino de probabilidade.

A partir de 1990, a sociedade assistiu a mudanças significativas do ponto de vista educacional. A promulgação da lei nº 9.394/1996, também conhecida como Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira, trazia em sua nova formulação os marcos legais para a educação

brasileira, abrangendo aspectos estruturais da educação, do currículo, da formação profissional, das obrigatoriedades orçamentárias e dos balizamentos das políticas públicas educacionais.

Para Saviani (2010), as implicações dessa lei foram fundamentais para os desenvolvimentos que se seguiram, embora o mesmo autor reconheça que, como texto oficial se traduz numa expressão da correlação de forças entre segmentos da sociedade, era natural a existência de contradições e tensões, no entanto, “não há como ignorar a constatação de que a exigência de se fixar as diretrizes e bases da educação nacional implica diretamente o sistema nacional de educação” (SAVIANI, 2010, p. 770).

Atendo-nos à questão curricular, vemos que a Lei 9394/1996 apontava como necessidade a criação de um modelo nacional para o currículo da educação básica. A primeira ação que resultou dessa indicação legal foram os Parâmetros Curriculares Nacionais publicados em duas versões: a primeira, entre 1995 e 1998, era voltada para o ensino fundamental e a segunda para o ensino médio foi publicada em meados do ano 2000.

Em ambos os documentos, o ensino de Estatística e Probabilidade passou a ter um lugar de destaque no currículo em um documento que no Brasil é considerado um marco para a inserção da Estatística e da Probabilidade no currículo oficial da Educação Básica. O bloco “Tratamento da informação para o Ensino Fundamental e Análise de Dados para Ensino Médio” evidenciou uma tendência latente da sociedade de trazer para a base da formação das pessoas conhecimentos ligados à Educação Estatística:

Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). (BRASIL, 1998, p. 52)

Essa observação sobre a introdução de blocos de conteúdos, e, no caso, o reconhecimento da estatística e da probabilidade como bloco específico do currículo, é importante, pois de alguma forma explícita quais os domínios de cada disciplina escolar são recomendados para serem trabalhados. No caso da citação acima, observamos recomendações explícitas em torno de um trabalho para probabilidade, por exemplo, vemos indicação para um trabalho intuitivo em relação às noções de acaso e incerteza, à natureza aleatória desses acontecimentos, mas também ao papel da probabilidade clássica, já que o documento remete à noção de equiprobabilidade. Vale lembrarmos que o documento se referia ao trabalho para o ensino fundamental, isto é, o trabalho com a probabilidade aparece como recomendação desde

os primeiros anos de escolarização, o que indica uma demanda formativa importante para os futuros professores de Matemática, bem como para os professores que atuam nos primeiros anos do Ensino Fundamental.

O documento seguinte, relacionado ao ensino médio, também destaca a importância da estatística e da probabilidade nesta etapa da Educação Básica. A justificativa para a presença desses conteúdos assenta-se na referência às Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino, emitidas pelo Conselho Nacional de Educação em 1998. Em seu artigo 10º, inciso II, alínea d, o documento explicita como competência e habilidade para os estudantes “compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculo de probabilidades”. (BRASIL, 2000, p. 104).

Na terceira parte, as diretrizes tratam especificamente das Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. A probabilidade é destacada como uma parte da Matemática que corresponde a suas aplicações aos contextos da realidade. Assim, preconiza-se no documento a necessidade de uma abordagem metodológica que privilegie a construção de significados de forma interdisciplinar, dando enfoque às aplicações da probabilidade, dentre outros conteúdos, ligados à Matemática, nas outras áreas do saber:

As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas (BRASIL, 2002, p. 44-45).

Embora o documento cumpra a função de parâmetro curricular, observa-se, em sua estrutura, um caráter mais amplo, no sentido de indicações curriculares, do que prescritivo. Talvez por isso assim é que não se encontram no documento de forma expressiva elementos que possam ajudar a definir que conteúdos serão abordados ou como serão abordados, embora ressaltemos o destaque ao caráter investigativo e interdisciplinar indicado no documento.

Em uma tentativa de suprir essa lacuna, em 2002, foi lançado um documento complementar que ficou conhecido como Parâmetros Curriculares Nacionais Mais (PCN+) para o Ensino Médio. A discussão sobre a relevância e a necessidade da probabilidade no currículo do Ensino Médio é retomada nesse novo documento:

A Estatística e a Probabilidade devem ser vistas, então, como um conjunto de ideias e procedimentos que permitem aplicar a Matemática em questões do mundo real, mais especialmente aquelas provenientes de outras áreas. (...) A Probabilidade acena com resultados possíveis, mas não exatos. Ao afirmar que o resultado 1 tem $1/6$ de probabilidade no lançamento de um dado, não há certeza de que em seis lançamentos do dado o número 1 sairá exatamente uma vez. Assim como ao afirmarmos que determinado tratamento médico tem 90% de probabilidade de cura para uma doença, não garante que em um grupo de 10 pessoas submetidas a este tratamento exatamente uma pessoa continuará doente. Estatística e Probabilidade lidam com dados e informações em conjuntos finitos e utilizam procedimentos que permitem controlar com certa segurança a incerteza e mobilidade desses dados. Por isso, a Contagem ou análise combinatória é apenas parte instrumental desse tema (BRASIL, 2002, p. 126).

A novidade introduzida é a ênfase maior na organização curricular para o ensino médio. Para tanto, as disciplinas precisam ser organizadas em eixos temáticos, cada um dos quais é composto de unidades temáticas distribuídas ao longo das três séries (anos) do Ensino Médio. Esses eixos deveriam atender a três competências: 1. Representação e comunicação; 2. Compreensão e investigação; e 3. Contextualização sociocultural.

Inseridas nessas competências, são destacadas habilidades, às quais a probabilidade está associada. Dentro dessas habilidades, são sugeridos exemplos de utilização dos conhecimentos ligados à probabilidade e à estatística. Um aspecto importante a ser destacado é que não observamos menção explícita às diferentes abordagens da probabilidade.

No mesmo documento, a unidade temática de probabilidade é organizada em torno da expressão “Cálculo de probabilidades”. Apesar das menções ao trabalho interdisciplinar, a tomada de decisões, o trabalho parece ser centralizado no cálculo de probabilidades apenas:

- Probabilidade: possibilidades; cálculo de probabilidades.
- Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científicos tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados.
- Quantificar e fazer previsões em situações aplicadas a diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolvam o pensamento probabilístico (BRASIL, 2002, p. 127-128).

Essa observação é importante, pois, apesar de o documento reconhecer e ressaltar o papel da probabilidade como saber necessário para a leitura dos fenômenos que rodeiam os estudantes em seu cotidiano, esse potencial só pode ser alcançado quando a probabilidade é vista de diferentes abordagens, visto que certos problemas pressupõem restrições a determinadas abordagens, por exemplo, fenômenos que não admitem o princípio da equiprobabilidade, limitando o potencial da abordagem clássica.

Em resumo, a probabilidade como unidade temática para o Ensino Médio é organizada da seguinte forma:

Quadro 16 – Probabilidade nos Parâmetros do Ensino Médio.

Probabilidade como unidade temática nos PCN +					
Eixo temático	Análise de Dados	Unidade temática	Probabilidade	Série/ano	3º
Competência	Habilidade		Exemplo		
Representação e comunicação	Analisar, argumentar e posicionar-se criticamente em relação a temas de ciência e tecnologia		Ser capaz de analisar e julgar cálculos efetuados sobre dados econômicos ou sociais, propagandas de vendas a prazo, probabilidades de receber determinado prêmio em sorteios ou loterias, ou ainda apresentadas em um dado problema ou diferentes sínteses e conclusões extraídas a partir de um mesmo texto ou conjunto de informações.		
Compreensão e investigação	Reconhecer, utilizar, interpretar e propor modelos para situações-problema, fenômenos ou sistemas naturais ou tecnológicos		Utilizar ferramentas da estatística e probabilidade para compreender e avaliar as intenções de votos em uma campanha eleitoral		
Contextos sócio cultural	Reconhecer e avaliar o caráter ético do conhecimento científico e tecnológico e utilizar esse conhecimento no exercício da cidadania.		Utilizar as ferramentas matemáticas para analisar situações de seu entorno real e propor soluções, por exemplo, analisando as dificuldades de transporte coletivo em seu bairro por meio de levantamento estatístico.		

Fonte: BRASIL (2002, p. 114-120)

Em 2006, outro documento foi lançado atendendo às demandas surgidas em virtude das lacunas dos documentos anteriores, bem como das tentativas de adequações às políticas públicas vigentes. As Orientações Curriculares Nacionais seriam, de acordo, com o próprio documento, ele seria fruto de um intenso debate na tentativa de atender às demandas sociais para a educação básica, em particular no ensino médio.

Analisando o documento comparativamente com os que lhe antecederam, observamos que ele segue uma linha semelhante aos documentos anteriores. As justificativas para presença da probabilidade são praticamente as mesmas, com acréscimo do papel da integração entre raciocínio estatístico, probabilístico e combinatório:

O estudo da combinatória e da probabilidade é essencial nesse bloco de conteúdo, pois os alunos precisam adquirir conhecimentos sobre o levantamento de possibilidades e a medida da chance de cada uma delas. A combinatória não tem apenas a função de auxiliar o cálculo das probabilidades, mas tem inter-relação estreita entre as ideias de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e as operações combinatórias. Por exemplo, ao extrair aleatoriamente três bolas de uma urna com quatro possibilidades, esse experimento aleatório tem três fases, que podem ser interpretadas significativamente no espaço amostral das variações. A utilização do diagrama de árvores é importante para clarear a conexão entre os experimentos compostos e a combinatória, pois permite que visualizemos a estrutura dos múltiplos passos do experimento (BRASIL, 2006, p. 79).

Para Goulart (2007), a principal diferença ocorreu na cisão do eixo temático relativo à álgebra, que passou a integrar dois eixos: números e operações; e o eixo relativo a funções. Em relação à probabilidade, a principal mudança diz respeito à existência de um discurso mais explícito sobre a probabilidade frequentista:

Nas situações e nas experiências aleatórias, os estudantes precisam aprender a descrevê-las em termos de eventualidades, associá-las a um conjunto de eventos elementares e representá-las de forma esquemática. Os alunos necessitam também dominar a linguagem de eventos, levantar hipóteses de equiprobabilidade, associar a estatística dos resultados observados e as frequências dos eventos correspondentes, e utilizar a estatística de tais frequências para estimar a probabilidade de um evento dado (BRASIL, 2006, p. 79-80).

No documento, encontramos alguns vestígios relacionados à compreensão do conceito de probabilidade e dos termos associados a ela, bem como ao papel que jogam a nossas intuições frente a questões envolvendo probabilidades: “algumas vezes nossas intuições são incorretas e podem nos levar a uma conclusão equivocada no que se refere à probabilidade e à chance” (BRASIL, 2006, p.80).

Outra indicação importante no documento é o destaque, mesmo que superficial, do papel das tecnologias informáticas no trabalho com as probabilidades:

As planilhas eletrônicas também são muito apropriadas para introduzir a noção de simulação probabilística, importante em diversos campos de aplicação. Ao se usar a função “ALEATÓRIO()”, podem-se simular experimentos aleatórios de variados níveis de complexidade, contribuindo, assim, para que o aluno atribua um significado intuitivo à noção de probabilidade como frequência relativa observada em uma infinidade de repetições (BRASIL, 2006, p. 89).

Apesar da relevância e da característica participativa do documento, observamos que as orientações do texto em relação à probabilidade ainda são muito gerais. As escolhas e decisões

curriculares estão implicitamente transferidas para as escolas ou para o professor e as escolas (GOULART, 2007).

Em 2013, uma nova versão das diretrizes foi lançando, no entanto, sem mudanças ou observações que mereçam destaque. No entanto, nesse mesmo período, outro importante documento estava em fase de ampla discussão nacional. A Base Curricular Comum (BNCC¹²²), com o amparo da Constituição Federal de 1988 e prevista na lei 9.394/1996, estava sendo produzida. O formato de construção com ampla participação de diversos segmentos da sociedade abriu um debate em torno desse documento que cumpria o papel de delimitar um currículo mínimo no âmbito nacional para ser cumprido sob a força de lei.

Com um formato diferente, tal documento tenta trazer elementos mais consistentes em relação à organização curricular. Minimamente, ele contempla o papel dos significados subjacentes à probabilidade, tanto nos anos iniciais do Ensino Fundamental, quanto nos anos finais. Há também um destaque, já nessa etapa da educação básica, ao trabalho com a abordagem frequentista da probabilidade, além da centralidade na noção de aleatoriedade:

No que concerne ao estudo de noções de probabilidade, a finalidade, no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, é promover a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos. Para isso, o início da proposta de trabalho com probabilidade está centrado no desenvolvimento da noção de aleatoriedade, de modo que os alunos compreendam que há eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis. É muito comum que pessoas julguem impossíveis eventos que nunca viram acontecer. Nessa fase, é importante que os alunos verbalizem, em eventos que envolvem o acaso, os resultados que poderiam ter acontecido em oposição ao que realmente aconteceu, iniciando a construção do espaço amostral. No Ensino Fundamental – Anos Finais, o estudo deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica – probabilidade frequentista. A progressão dos conhecimentos se faz pelo aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral, que está associada, também, aos problemas de contagem (BRASIL, 2016, p. 230).

O documento, além de conter orientações teóricas e metodológicas baseadas nas diretrizes curriculares já existentes, aponta um delineamento dos objetos de aprendizagem

¹²²Sujeito ao amplo debate durante a sua fase de construção, pôde-se observar a manifestação de diversos setores da sociedade, agentes da noosfera que opinarão sobre o formato e conteúdo do documento. Em 2015, com agravamento do momento político pelo qual nosso País atravessa, a derrubada do governo da Presidente Dilma Roussef, e o estabelecimento de um novo governo, a reestruturação do Ministério da Educação levou a substituição da equipe de especialistas, pesquisadores e técnicos, que conduziam a construção do documento, indicando uma descontinuidade no processo. Em 2016 o documento foi oficializado a partir da chancela da nova equipe, porém o atual documento só contempla até os anos finais do Ensino Fundamental. (Nota do autor).

(conteúdos) a serem trabalhados por unidade temática ao longo de cada etapa da educação básica. No caso da Matemática, para o Ensino Fundamental, a probabilidade se encontra na unidade temática “Probabilidade e Estatística”:

Quadro 17 – Objetos de aprendizagem associados à Probabilidade na BNCC.

Ano	Objeto de aprendizagem
1º	Noção de acaso
2º	Análise da ideia de aleatório em situações do cotidiano
3º	Análise da ideia de aleatório em situações do cotidiano: Espaço amostral
4º	Análise de chance de eventos aleatórios
5º	Espaço amostral: análise de chances de eventos aleatórios; Cálculo de probabilidade de eventos equiprováveis
6º	Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista)
7º	Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências
8º	Princípio multiplicativo da contagem Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral
9º	Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes

Fonte: Brasil (2016)

Para cada objeto de aprendizagem, está associado um ou mais indicadores de habilidade, que são codificadas de acordo com a etapa da educação básica, o ano, a disciplina e o número da habilidade:

Quadro 18 – Habilidades associadas aos objetos de aprendizagem da Probabilidade.

Código	Habilidade
(EF01MA20)	Classificar eventos envolvendo o acaso, tais como “acontecerá com certeza”, “talvez aconteça” e “é impossível acontecer”, em situações do cotidiano.
(EF02MA21)	Classificar resultados de eventos cotidianos aleatórios como “pouco prováveis”, “muito prováveis”, “improváveis” e “impossíveis”
(EF03MA25)	Identificar, em eventos familiares aleatórios, todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chances de ocorrência
(EF04MA26)	Identificar, entre eventos aleatórios cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência, reconhecendo características de resultados mais prováveis, sem utilizar frações.
(EF05MA22)	Apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não.
(EF05MA23)	Determinar a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios, quando todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer (equiprováveis).
(EF06MA28)	Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.
(EF07MA28)	Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.
(EF08MA19)	Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.
(EF09MA19)	Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

Fonte: Brasil (2016)

Na análise do documento, podemos verificar que ele apresenta avanços em relação aos documentos anteriores, especialmente por destacar os conteúdos de forma mais explícita que devem compor um currículo mínimo envolvendo a noção de probabilidade. Enquanto os Parâmetros Curriculares, as Diretrizes e as Orientações Curriculares cumprem um papel de orientar de forma mais geral a organização curricular sugerida como referência nacional, mas com a ausência de conteúdos prescritos, a BNCC tem seu foco na organização deles, como

observamos nos quadros 17 e 18, vemos que a Teoria Elementar das Probabilidades ou Cálculo de Probabilidades tem a centralidade como objeto de saber à ensinar.

Se por um lado a análise desses documentos indica o papel e as expectativas em torno da probabilidade no currículo da Educação Básica, compreendemos que, de alguma forma, todos esses documentos apresentam as expectativas oficiais da sociedade em relação a esse saber, ao menos ao nível das instituições de ensino. Para um perfil mais completo que desse conta de outros setores da sociedade, teremos que empreender uma investigação maior, que não é o nosso foco.

No entanto, temos elementos suficientes para delimitar o que se espera do profissional docente em relação à probabilidade e suas noções enquanto objetos de estudo na educação básica. Minimamente, é possível inferir que ao professor da Educação Básica é delegada a tarefa de ensinar probabilidade na educação básica de modo que os estudantes tenham clareza do papel social da probabilidade e de suas noções tanto do ponto de vista do exercício da cidadania, como das suas relações enquanto tecnologia aplicada a outras áreas das ciências. Para tanto, é necessário ao professor conhecer em profundidade a dimensão conceitual da probabilidade, bem como seus aspectos pedagógicos. Notamos na análise dos documentos que há uma lacuna em relação aos aspectos metodológicos, embora as OCN destaquem o papel da história dos conceitos, da resolução de problemas e das novas tecnologias da informação e comunicação como elementos que podem integrar as estratégias para a criação de situações didáticas que deem conta dessa demanda.

Do ponto de vista dos saberes necessários à formação docente, é possível fazer uma leitura dessas demandas, conforme Shulman (1986), ao destacarmos os conhecimentos ligados ao conteúdo pedagógico e curricular. Do ponto de vista da Didática da Matemática, acrescentamos que, como a ecologia que permite a vida da probabilidade ainda é conflitante no sentido epistemológico, as indicações oficiais não são suficientes para dar conta da missão de ensinar probabilidade na educação básica. Não fica claro, por exemplo, nesse documento a natureza das diferentes concepções de probabilidade, o papel das novas tecnologias na simulação de experimentos, dentre outros aspectos, essa talvez seja uma restrição primeira à difusão desse saber.

Se por um lado os documentos oficiais para a Educação Básica, como manifestação da sociedade brasileira, destacam o papel importante da probabilidade e a necessidade da sua presença no currículo, por outro lado, contraditoriamente, documentos da mesma natureza para a formação de professores apresentam problemas ainda maiores, como coloca Bezerra (2015).

Segundo a autora, as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para os Cursos de Ensino Superior destacam a obrigatoriedade do tratamento de estatística e probabilidade para Cursos de bacharelado, deixando uma lacuna quanto ao papel desses conhecimentos na formação de professores nas licenciaturas (BEZERRA, 2015).

Ao analisarmos o documento que trata da licenciatura em Matemática, veremos que não há sequer menção à probabilidade como um saber que deve integrar o currículo da formação de professores, ficando a cargo da instituição de ensino superior (IES) estabelecer o lugar desse saber na formação dos professores. Esse fato pode naturalmente se configurar como uma restrição, uma vez que a ausência de uma discussão sobre o tema nesse nível pode significar uma forma de dizer que essa formação, se ocorrer, poderá ser de qualquer forma. Talvez esse seja um motivo para a multiplicidade de leituras do lugar da probabilidade na formação do futuro professor, como analisou Bezerra (2014).

Em sua investigação, ela destaca que praticamente todas as instituições analisadas em sua amostra, que compreendeu cursos de todas as regiões do país, a probabilidade figura como saber a ser trabalhado, no entanto, em sua maioria, a discussão é do ponto de vista do conteúdo, o que já discutimos anteriormente não ser suficiente.

A análise feita até aqui foi uma tentativa de localizar o lugar do saber “probabilidade” ao nível da civilização ocidental e na sociedade brasileira. No nível escolar, percebemos a importância de olhar para a realidade das instituições que abrigam os cursos de licenciatura em Matemática. Para tanto, limitar-nos-emos à Universidade Estadual da Paraíba – UEPB. Assim, situamos no nível *escola* a instituição que é responsável por abrigar os cursos de formação inicial de professores que atuarão na educação básica. O olhar macro sobre a instituição foi necessário ao percebermos que o funcionamento da licenciatura em Matemática depende dessa infraestrutura institucional. A contratação de professores, a entrada e a permanência dos estudantes, a regulamentação institucional e o conjunto de políticas de fomento à licenciatura compõem aspectos que influenciam diretamente na vida da licenciatura, portanto, esses aspectos podem revelar condições e restrições que podem interferir nos níveis inferiores da escala de codeterminação.

A UEPB teve como marco de sua criação a lei municipal nº 23 de março de 1966 que criou na cidade de Campina Grande a Fundação Universidade Regional do Nordeste – FURNE, mantenedora da Universidade Regional do Nordeste que abrigava cursos como Filosofia e Direito. Marcada historicamente por lutas no sentido de consolidar sua infraestrutura, ela veio se tornar uma instituição estadual somente em 1987, passando a ser designada como

Universidade Estadual da Paraíba. Em 1996, atendia a cerca de 11 mil alunos e tinha 26 cursos de graduação. Nesse mesmo ano, recebeu o reconhecimento do Ministério da Educação.

Em agosto de 2004, a lei estadual 7643 garantiu-lhe a autonomia financeira, um marco histórico para instituição, que permitiu o seu desenvolvimento e expansão. Atualmente, a instituição atende em média a 22 mil alunos distribuídos em mais de 100 (cem) cursos presenciais e a distância de graduação, pós graduação e educação técnica e tecnológica. Com 08 (oito) *campi* distribuídos em todas as regiões do Estado da Paraíba, a UEPB atende jovens, adultos, de todos os municípios paraibanos e também de outros estados brasileiros, especialmente aqueles que fazem fronteira geográfica com a Paraíba, como Ceará, Pernambuco e Rio Grande do Norte. (UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA, 2016).

Em trabalho recente, foi realizado um levantamento do perfil socioeconômico dos estudantes do curso de licenciatura em Química. O estudo revelou que a maior parte dos estudantes daquela licenciatura são oriundos de escolas públicas. São estudantes que precisam conciliar os estudos com o trabalho e dependem de transporte escolar para poderem chegar até a universidade. (NASCIMENTO JÚNIOR; SANTOS, *et al.*, 2012).

O recorte feito por Nascimento Júnior, Santos *et al* (2012) mostra uma realidade bem comum para os estudantes da UEPB. Atuando na docência da instituição desde 2009, observamos que o perfil dos estudantes da instituição, de modo geral, é muito próximo do que foi apresentado pelos autores. São estudantes que precisam trabalhar e conseqüentemente apresentam dificuldades em conciliar as atividades de estudo. Por residirem em cidades circunvizinhas, deslocam-se diariamente, fazendo o uso de transporte escolar que nem sempre é exclusivo para a condução de alunos do ensino superior, razão por que alguns dos estudantes precisam negociar com as autoridades locais o direito de usarem o transporte e, em alguns casos, eles estudantes pagam com dinheiro próprio transporte alternativo a fim de poderem estudar

Por abranger praticamente todas as regiões do estado da Paraíba, a UEPB recebe muitos estudantes cuja renda familiar está em torno de 2 a 3 salários mínimos. No cenário nacional, essa é também a faixa de renda de quase 40% dos estudantes de licenciatura no Brasil nas universidades públicas:

Entre os estudantes dos cursos de nível superior para a docência, 50,4% situam-se nas faixas de renda familiar média, cujo intervalo é de três a dez salários mínimos. Ligeiras variações favorecem os estudantes das demais licenciaturas, em relação aos alunos de Pedagogia nas diferentes faixas salariais superiores. Observa-se, entretanto, uma clara inflexão em direção à faixa de renda mais baixa. É muito expressivo o percentual de alunos com renda familiar de até três salários mínimos (39,2%) e escassa a frequência de sujeitos nas faixas de renda acima de dez salários mínimos. (GATTI, 2010, p. 1363)

Além de certa semelhança com relação aos aspectos socioeconômicos dos estudantes de licenciatura no cenário brasileiro, a UEPB convive com os habituais desafios que permeiam a formação de professores. A garantia da permanência dos estudantes que entram na licenciatura é um deles. Não é raro observar que as licenciaturas ligadas às ciências como Matemática, Física, Química registram índices de evasão que chegam a mais de 60% nos períodos finais. Na UEPB, essa realidade não é diferente do cenário nacional:

todas universidades federais disponibilizaram os dados em um total de 2.252.138 matriculados e 1.358.921 de evadidos no período de 2007 a 2014, com um acréscimo de 60% do número de alunos matriculados e 56% dos evadidos entre 2007 e 2014. Sem uma tendência nítida para o período, visto a relação entre o número de evadidos e matriculados, pôde-se afirmar que houve uma redução da taxa de evasão em 4% entre 2007 e 2014, em que em alguns anos como 2008 e 2011, a evasão representou abaixo dos 55% dos alunos matriculados. (SANTANA, 2016, p. 314)

O programa de apoio a planos de reestruturação das universidades federais (REUNI), que tem entre suas metas a redução da evasão nessas universidades, indicava em 2015 que a evasão nos cursos de licenciatura estava em torno de 50%. É importante destacarmos que historicamente, no contexto educacional de nosso País, as licenciaturas sempre enfrentaram dificuldades ligadas a fatores internos e externos às instituições:

Hoje, em função dos graves problemas que enfrentamos no que respeita às aprendizagens escolares em nossa sociedade, a qual se complexifica a cada dia, avoluma-se a preocupação com as licenciaturas, seja quanto às estruturas institucionais que as abrigam, seja quanto aos seus currículos e conteúdos formativos. Deve ser claro para todos que essa preocupação não quer dizer reputar apenas ao professor e à sua formação a responsabilidade sobre o desempenho atual das redes de ensino. (GATTI, 2010, p. 1359).

Para Gatti (2010), esses fatores são múltiplos. A cultura institucional, o financiamento destinado à educação básica e à formação de professores, o conjunto de políticas educacionais em vigor, diferenças regionais, condições sociais dos estudantes, a visão da sociedade da educação como um bem para todos, a carreira profissional, dentre outros aspectos, compõem toda essa trama, onde a universidade é uma instituição fundamental:

No que concerne à formação de professores, é necessária uma verdadeira revolução nas estruturas institucionais formativas e nos currículos da formação. As emendas já são muitas. A fragmentação formativa é clara. É preciso integrar essa formação em currículos articulados e voltados a esse objetivo precípuo. A formação de professores não pode ser pensada a partir das ciências e seus diversos campos disciplinares, como adendo destas áreas, mas a partir da função social própria à escolarização – ensinar às novas gerações o conhecimento acumulado e consolidar valores e práticas coerentes com nossa vida civil. (GATTI, 2010, p. 1375).

A UEPB preconiza como diretriz no seu plano de desenvolvimento institucional (2014-2022) o reconhecimento da função social da escolarização:

A política de ensino da UEPB está pautada na reafirmação das intenções e compromisso com a efetivação de um projeto educacional pautado na conquista de uma formação científica de qualidade e na formação humana que, numa ambiência de participação e responsabilidade dos sujeitos acadêmicos, buscam a excelência do trabalho desenvolvido, incentivando a produção do conhecimento com qualidade, relacionado com o contexto regional e sem perder de vista a formação ética e humanizada. (UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA, 2014, p. 37)

A instituição prevê que o seu ensino contemple a integração de inovações metodológicas, avaliação continuada, exploração da relação teórico-prática e ensino-serviço, flexibilidade no currículo e interdisciplinaridade. (UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA, 2014).

Para o cumprimento de suas atividades, a UEPB prevê diversas políticas ligadas ao ensino, à pesquisa e à extensão. Dentre essas políticas, destaca-se a assistência estudantil que em 2016 atendeu cerca de 10.000 estudantes. Na graduação, foram ofertadas no mesmo ano 1863 bolsas ligadas à monitoria, iniciação científica, iniciação à docência e extensão universitária. (UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA, 2016).

Na instituição existem 03 (três) cursos de licenciatura em Matemática que estão distribuídos entre os *campi* I (Campina Grande), IV (Patos) e VI (Monteiro). Nesses cursos, a estrutura curricular é semelhante e está previsto o trabalho com a Probabilidade. Na UEPB, há também um Curso de Graduação em Estatística.

Observando os dados institucionais e demais documentos oficiais da UEPB, podemos dizer que no nível *escola* existem condições para o funcionamento da licenciatura, no entanto, operam possíveis restrições, tendo em vista os índices de evasão e a própria conjuntura do País para a formação de professores, conforme destaca Gatti (2010).

No nível imediatamente abaixo na escala de codeterminação, nível Pedagogia, trazemos o curso de licenciatura, cenário de nossa investigação. Nesse nível, vamos encontrar de forma mais específica o lugar da probabilidade como objeto de ensino da formação de professores. A primeira consideração que fazemos a esse respeito é que, dada a omissão em documentos oficiais sobre o lugar da probabilidade na formação docente, abre-se a possibilidade de que cada instituição construa seu próprio entendimento sobre esse saber. Se por um lado a instituição estudada pode se tratar de uma realidade única, por outro, estudos como o de Silva (2014), Cazorla (2009), Lopes (2008) indicam que a situação do ensino de probabilidade é semelhante em diferentes regiões do país.

Iniciamos a investigação do lugar da probabilidade nessa instituição específica a partir da análise documental do Projeto Político do Curso (PPC) e da análise praxeológica matemática dos livros-texto indicados no primeiro documento.

Na análise do PPC do Curso de Licenciatura em Matemática, encontramos menção à probabilidade em três componentes curriculares. No componente curricular Prática Pedagógica no Ensino de Matemática II, disciplina de 30h voltada para discussões no âmbito do ensino de Matemática, há menção ao bloco “Tratamento de Informação para os Anos Finais do Ensino Fundamental”. A probabilidade é sugerida como tema de discussão nesta ementa: “a temática das aulas simuladas abrangerá os campos da Geometria, Medidas e Grandezas e Tratamento de Informação, princípios de combinatória e probabilidade” (UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA, 2015, p. 43).

Além disso, nos objetivos do componente curricular História da Matemática é sinalizada a necessidade de discutir o conceito de probabilidade como item problemático no ensino de Matemática:

Iluminar o nível de contribuição da História da Matemática para a Educação Matemática. Serão feitos, estudados e fundamentados na evolução de conceitos, como os números irracionais, números negativos e outros que causaram impactos entre as eminências da história, bem como de trigonometria, logaritmo e probabilidade, que são temas que têm, sem sombra de dúvida, causado sérios problemas na aprendizagem de seus conceitos (UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA, 2015, p. 36).

Essa menção é particularmente importante, pois, durante o estudo realizado por Silva (2014), a autora colocou a dificuldade de encontrar citações acerca da Estatística e Probabilidade em disciplinas que não fossem próprias do conteúdo, indicando que Estatística e Probabilidade são tomadas em parte considerável dos Cursos de Licenciatura do ponto de vista dos conteúdos básicos para formação do licenciando e não como um tema de ensino na Educação Básica, já que disciplinas pedagógicas não apresentam indicações dessa discussão.

O outro componente curricular que destacamos é a Introdução à Probabilidade, componente de 60 h que será o espaço de coleta de dados de nosso Estudo Piloto. A disciplina apresenta a seguinte ementa:

Coleta de dados. Síntese tabular, gráfica e numérica de dados. Medidas de posição e de dispersão. Assimetria e curtose. Ramos e folhas. Box plot. Correlação e Regressão. Identificação e medidas de associação entre duas variáveis. Probabilidade. Variáveis aleatórias discretas. Valor esperado e variância de variáveis aleatórias discretas. Variáveis aleatórias contínuas. (UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA, 2015, p. 59)

Fazemos uma primeira observação em relação ao nome dado à disciplina e ao real lugar em que a probabilidade aparece no texto da ementa, isto é, a disciplina tem inicialmente todo um tratamento estatístico, para só então trabalhar com a Probabilidade. Observamos também que não há na ementa um detalhamento dos tópicos a serem trabalhados. No último dos quatro objetivos propostos na ementa, a probabilidade é citada “- Resolver problemas que envolvam conceitos elementares de probabilidade” (UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA, 2015, p. 59)”. Observamos indicações no discurso institucional que a Probabilidade e seus conceitos serão tratados de forma elementar, com enfoque maior nas suas aplicações à Estatística, pois claramente a disciplina tem uma ênfase na estatística. Não foram encontradas, ao longo dos textos, menções à probabilidade como objeto a ser ensinado na Educação Básica, nem tampouco como linha de pesquisa.

Disso podemos concluir que o saber probabilidade tem um lugar garantido no currículo da formação de professores de Matemática que suscita sua abordagem conceitual, mas também discussões em nível pedagógico, porém não temos como dimensionar a extensão ou real natureza do seu ensino sem analisar a prática que ali se desenha.

Por outro lado, Cavalcante, Andrade e Regnier (2016) mostram que a relação dos futuros professores com a probabilidade nessa licenciatura é frágil e confusa, sendo que esse estado se agrava em estudantes que nunca cursaram a disciplina de Introdução à Probabilidade. Alguns dos estudantes afirmam neste estudo que nunca viram probabilidade formalmente nem na escola básica, nem na própria universidade, o que pode ser um indício de que talvez as disciplinas de Prática de Ensino II e História da Matemática apenas façam menção ao saber probabilidade, mas efetivamente não seja trabalhado nessas disciplinas. (CAVALCANTE; ANDRADE; RÉGNIER, 2016).

Diante dessa impressão sobre as disciplinas de Prática de Ensino II e História da Matemática, solicitamos à coordenação do curso o acesso aos planos de curso das referidas disciplinas no intervalo de 06 (seis) semestres seguidos, e não encontramos menção à probabilidade nos conteúdos previstos nas unidades programáticas nem nas referências bibliográficas básicas ou complementares dos planos de curso, embora a probabilidade estivesse presente na ementa.

Em uma busca semelhante à que fizemos nas disciplinas de Prática de Ensino II e História da Matemática, verificamos a organização dos planos de curso da disciplina Introdução à Probabilidade. Na análise de 06 (seis) semestres, constatamos que a Probabilidade, de fato, é apresentada em termos elementares na 2ª unidade temática. Geralmente, o conteúdo é introduzido para discutir o papel de suas aplicações a problemas estatísticos envolvendo

variáveis aleatórias e problemas de distribuição. Na análise dos planos, observamos que a bibliografia básica e complementar se manteve inalterada contendo livros-texto da área da Estatística Básica, ou seja, o saber probabilidade aparece como um saber a ser aplicado a questões que envolvem a estatística:

Figura 22 – Conteúdo programático de Introdução à Probabilidade 2016.2.

UNIDADE TEMÁTICA 2
8. Correlação e Regressão 9. Probabilidade 9.1 Conceitos Fundamentais 9.2 Experimentos Aleatórios 9.3 Espaço Amostral e Eventos 9.4 Propriedades da Probabilidade 9.5 Probabilidade Condicional e Independência de eventos 10. Distribuições de Probabilidade 11. Variáveis aleatórias discretas 11.1 Valor esperado e variância de variáveis aleatórias discretas 12. Variáveis aleatórias contínuas

Fonte: (UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA, 2016, p. 2)

A análise documental nos leva a concluir que a probabilidade nessa instituição é vista como um saber cujo lugar central é a disciplina de Introdução à Probabilidade. Esse saber, como visto na sua ementa, aparece com enfoque das suas aplicações à Estatística. A análise dos planos de curso mostra que o tratamento dado a tal saber é a partir de um enfoque conceitual e restringe-se a discussões introdutórias do conceito.

Passada essa etapa da análise, iniciamos a análise praxeológica matemática do saber probabilidade a partir dos livros-texto indicados na bibliografia obrigatória da ementa da disciplina de Introdução à Probabilidade, conforme veremos na subseção seguinte.

5.3.3 O SABER PROBABILIDADE E SUA ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA

A noção de organização praxeológica é entendida na TAD como instrumento capaz de revelar as práticas institucionais em torno de um saber. Para Chevallard (1999) essas organizações, ao se referirem à prática institucional, são organizadas em termos de tarefas a serem cumpridas, das técnicas para o seu cumprimento, das tecnologias e das teorias que justificam, explicam e dão sentido à existência de um determinado saber na instituição.

Ao observarmos a estrutura de um documento como projeto político do curso, perceberemos que o discurso praxeológico não está presente, nem mesmo em documentos mais específicos como os planos de curso. De fato, o papel desses documentos parece ser o de prescrever intenções ou expectativas institucionais tanto no sentido macro (projeto político do curso) quanto no sentido micro (plano de curso do professor) em relação a um determinado saber que, no caso de nossa investigação, se refere à probabilidade e seus conceitos no curso de formação de professores de Matemática.

Podemos dizer que, na formação de docentes de Matemática, a presença da probabilidade como conteúdo indica que este saber deve fazer parte da formação dos futuros professores. De alguma forma, entendemos que esta instituição tenta atender às demandas externas provenientes dos níveis superiores de codeterminação didática, já que, como vimos na seção anterior, tanto no nível civilização, quanto no nível sociedade brasileira, existem indicações da importância e da necessidade de se aprender sobre probabilidade. A presença da probabilidade em alguns documentos oficiais do ministério da educação brasileira, como tema a ser tratado no currículo da Educação Básica, aponta para uma demanda formativa em relação aos professores que ensinam ou ensinarão Matemática nas escolas.

Se há demanda formativa, é preciso se perguntar como o saber probabilidade vive dentro dessa instituição? Que relações orgânicas permitem sua existência, que tarefas são requeridas em torno desse saber, quais as técnicas, tecnologias e teorias que são tratadas nessa instituição para que o futuro professor de Matemática construa uma relação com a probabilidade? Se esses documentos que consultamos não revelam essas praxeologias, é preciso buscar os instrumentos institucionais que o fazem, logo, o papel assumido pelos livros-texto, nas instituições de ensino, como referência às praxeologias em torno de um saber é fundamental.

Esses materiais assumem a condição de explicitar o que se espera em termos praxeológicos do trabalho em sala de aula de modo que, quando o professor indica, ou usa um livro para a organização de seu trabalho, de certa forma, ele toma por base esse material, embora não necessariamente o siga à risca, uma vez que o docente pode utilizar outros materiais e fazer suas próprias adaptações no processo de transposição didática interna (KASPARY; OLIVEIRA; BITTAR, 2016).

Kaspary, Oliveira e Bittar (2016) destacam que nas publicações sobre a TAD não há explicitamente um roteiro de como se deve proceder na análise desse tipo de material, no entanto, a experiência tem mostrado que alguns passos podem ser seguidos:

- A escolha do material a ser analisado;
- A separação entre Curso e Atividades Propostas dos livros didáticos;
- A elaboração do quarteto praxeológico matemático;
- A elaboração do quarteto praxeológico didático ou a identificação dos momentos de estudos;
- Análise das organizações modeladas. (KASPARY; OLIVEIRA; BITTAR, 2016, p. 3)

Para a realização de nossa análise, adaptamos o roteiro sugerido por Kaspary, Oliveira e Bittar (2016), conforme nossas necessidades, já que os livros didáticos atendem a um público específico, isto é, os estudantes da educação básica. Pensamos que, embora os livros

universitários resguardem semelhanças com os livros didáticos da educação básica, no que tange a fornecer apoio aos estudantes, no ensino universitário o processo de transposição dos saberes é diferente. Por exemplo, a ausência de um discurso tecnológico nos livros didáticos da educação básica é fenômeno muito comum, isto é, nesse ambiente há um privilégio do bloco saber-fazer.

A primeira etapa para a constituição de nossa análise foi a escolha das obras para análise. Seguimos basicamente dois critérios. O primeiro foi a presença do material nas referências obrigatórias na ementa da disciplina. Tomando o Projeto Político do Curso como documento que revela as expectativas institucionais em relação aos saberes que farão parte da formação dos futuros professores, entendemos que a presença desses materiais na ementa revela o tipo de relação a ser estabelecida no sentido praxeológico.

Na ementa da disciplina, dividida em bibliografia básica e complementar, encontramos referência a 08 (oito) obras, todas tomadas como livro de referência em Estatística, o que reforça nossa percepção de que a probabilidade é tratada como um saber aplicado à Estatística.

Figura 23 – Bibliografia Introdução à Probabilidade.

<p>BIBLIOGRAFIA BÁSICA</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. BUSSAB, W. de O.; MORETTIN, P. A. Estatística Básica. 5ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2003. 2. CRESPO, A. A. Estatística Fácil. 19ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2009. 3. FONSECA, J. S.; MARTINS, G. A. Curso de Estatística. 6ed. São Paulo: Atlas, 2010. 4. MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. Noções de Probabilidade e Estatística. São Paulo: EDUSP, 2006. 5. TRIOLA, M. F. Introdução à estatística. 5ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2012. <p>BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR</p> <p>MEYER, P. L. Probabilidade: Aplicações à Estatística. 2ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000.</p> <p>MORETTIN, L. Gonzaga, Estatística Básica – Volume I e II – S. Paulo, Makron Books, 1999.</p> <p>SPIEGEL, M. R. Estatística. 3ed. São Paulo: Pearson, 2005. VIEIRA, S. Princípios de Estatística. São Paulo: Pioneira, 2003.</p>
--

Fonte: (UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA, 2015, p. 59)

No universo dessas 08 (oito) obras, restringimo-nos à análise apenas dos títulos presentes na bibliografia básica. O critério para essa escolha diz respeito ao fato de os títulos indicados nessa seção serem considerados essenciais para o desenvolvimento da disciplina, enquanto a bibliografia complementar pode ser modificada conforme o entendimento do docente.

A fim de observarmos qual a frequência de empréstimos desses títulos pelos estudantes matriculados na disciplina de Introdução à Probabilidade, obtivemos os seguintes dados:

Quadro 19 – Frequência de empréstimos dos títulos da bibliografia básica.

Obra	Frequência (%)
BUSSAB, W. de O.; MORETTIN, P. A. Estatística Básica. 5ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2003.	23%
CRESPO, A. A. Estatística Fácil. 19ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2009.	57%
FONSECA, J. S.; MARTINS, G. A. Curso de Estatística. 6ed. São Paulo: Atlas, 2010.	6%
MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. Noções de Probabilidade e Estatística. São Paulo: EDUSP, 2006.	3%
TRIOLA, M. F. Introdução à estatística. 5ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2012.	11%

Fonte: Relatório de empréstimos da biblioteca do Campus VI da UEPB.

Como podemos ver no quadro acima, o livro-texto mais usado pelos estudantes é o “Estatística Fácil”, de Antônio Crespo, seguido de “Estatística Básica”, de Wilton Bussab e Pedro Morettin, e, por fim, de “Introdução à Estatística”, de Mário Triola.

Para estabelecermos um parâmetro de comparação, selecionamos as duas obras mais consultadas pelos alunos, conforme aponta o quadro 19, as duas obras mais consultadas são “Estatística Fácil”, de Antônio Crespo e “Estatística Básica”, de Wilton Bussab e Pedro Morettin.

A segunda etapa de nossa análise foi a construção de um perfil global de cada obra. Para compor essa análise estabelecemos 03 (três) categorias: 1. Organização Didática da Obra; 2. Concepções de Ensino de Probabilidade; 3. Atividades e contextualização.

Como frisamos anteriormente, as obras são voltadas para cursos de estatística básica. Nossa hipótese é que não encontraremos aporte que possibilite aos futuros professores refletir sobre as demandas do ensino de probabilidades através dessas obras, embora compreendamos que a abordagem do livro-texto pode influenciar na prática desses futuros professores.

5.3.3.1 Obra A

A primeira obra que chamaremos obra A foi escrita pelo professor Antonio Crespo, que é licenciado em Matemática e Pedagogia, além de ser Bacharel em Ciências Econômicas. A edição analisada é a 18ª de 2008. De acordo com autor, a obra é fruto da experiência como docente em cursos de Estatística cujo público alvo são estudantes de cursos técnicos e disciplinas de Introdução à Estatística:

Preocupou-nos apresentar os tópicos exigidos pelo programa estabelecido para cursos profissionalizantes da rede de ensino particular e oficial, de uma forma acessível ao aluno, dentro de um esquema de ensino objetivo e prático. Por essa razão, as características deste livro são eminentemente didáticas. Foram evitadas demonstrações, sendo apresentados comentários e análises objetivas do assunto (CRESPO, 2008, p. 3).

O destaque feito pelo autor nos é importante pelo fato de que, ao declarar a ausência de demonstrações, implicitamente podemos inferir que o discurso tecnológico, se apresentado, não será feito de forma convencional.

A obra que conta com 224 páginas, distribuídas entre 12 capítulos e um apêndice intitulado “Instrumental Matemático”, no qual o autor faz uma revisão de conceitos matemáticos elementares, como operações com números racionais, proporção, análise combinatória, função, dentre outros.

O capítulo 9 dedicado ao estudo da probabilidade tem dez páginas, ou seja, pouco mais de 4% da obra é dedicada a estudar as noções elementares da probabilidade. No entanto, o autor faz ressalva em relação ao papel da probabilidade como noção fundamental para a discussão dos modelos teóricos de distribuição de probabilidade que são vistos no capítulo seguinte.

O capítulo relativo à probabilidades é organizado em oito seções que corresponde aos seguintes temas a serem tratados no estudo da probabilidade, além de duas seções não numeradas e dedicadas a exercícios, alguns dos quais resolvidos:

Quadro 20 – Distribuição de temas por seção obra A.

Seção	Tema	Seção	
1	Introdução	6	Eventos complementares
2	Experimento aleatório	7	Eventos Independentes
3	Espaço amostral	8	Eventos mutuamente exclusivos
4	Eventos		Exercícios Resolvidos
5	Probabilidade		Exercícios

Fonte: próprio autor baseado em Crespo (2008).

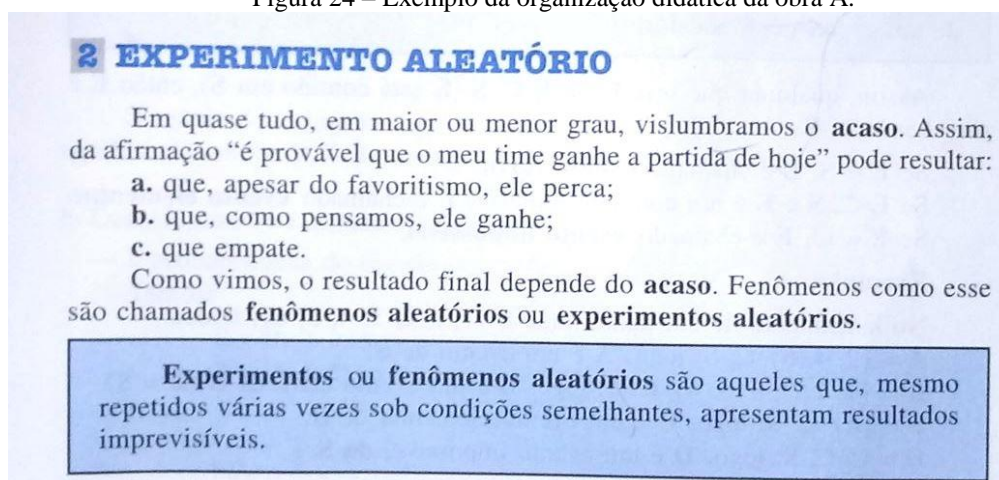
O primeiro encontro (1º Momento didático) com o tema probabilidade é marcado por uma justificativa do autor em relação ao lugar da probabilidade na obra. O autor destaca o cálculo de probabilidades como campo da Matemática com aplicações à Estatística:

Embora o cálculo das probabilidades pertença ao campo da matemática, sua inclusão nesse livro se justifica pelo fato de a maioria dos fenômenos de que trata a Estatística ser de natureza aleatória ou probabilística. Consequentemente, o conhecimento dos aspectos fundamentais do cálculo de probabilidades é uma necessidade essencial para o estudo da Estatística indutiva ou Inferencial (CRESPO, 2008, p.127).

A organização didática adotada pelo autor é tipicamente clássica, com aproximação tecnicista, isto é, a ênfase principal é no bloco saber-fazer. Isto talvez esteja explicado através da finalidade da obra que é servir de curso introdutório de Estatística com foco na educação profissionalizante.

O autor segue o roteiro definição → exemplo → exercício. As definições em alguns casos são precedidas de rápidas explicações, como tentativa de contextualização, ou definição de um termo auxiliar para o entendimento da definição, como podemos ver no exemplo da seção 2 do livro:

Figura 24 – Exemplo da organização didática da obra A.



Fonte: (CRESPO, 2008, p. 127)

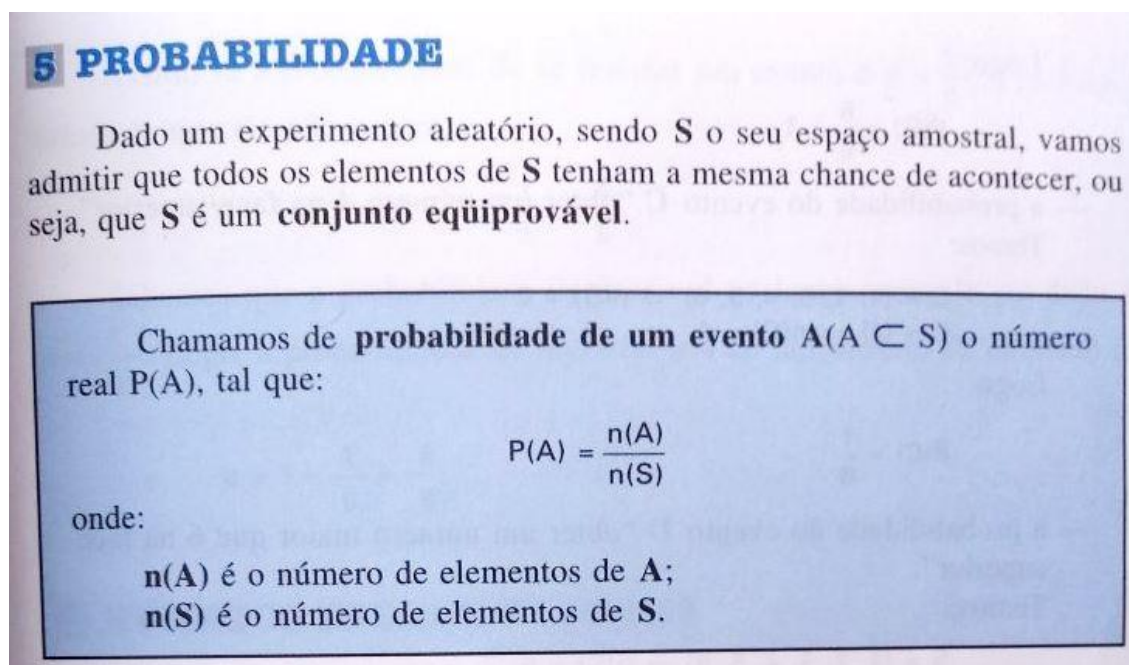
Podemos ver que o texto introdutório cumpre com o propósito de tentar contextualizar uma situação particular que pode ser considerada como um fenômeno ou experimento aleatório. O destaque nesse excerto é que o foco é a definição do que seja experimento aleatório. Duas considerações podem ser feitas: primeiro, a noção de “acaso” é tomada de forma naturalizada, o que pode se constituir em um obstáculo para a compreensão do que seja a aleatoriedade como um tipo de fenômeno (SILVA, 2002).

Do mesmo modo, a própria noção de aleatoriedade é explorada superficialmente. Isso pode se constituir como um problema já que a noção de aleatoriedade é central para a compreensão da probabilidade. (AZCÁRATE GODED; CARDEÑOSO; PORLÁN, 1998).

Seguindo essa organização, o autor define experimento aleatório, espaço amostral, evento, probabilidade, eventos complementares, independentes e mutuamente exclusivos. Para cada uma delas, o autor traz um exemplo geralmente associado ao lançamento de moedas ou dados, reforçando a tese que o livro traz uma visão clássica da probabilidade.

Em relação à definição de probabilidade e à concepção de seu ensino, percebemos, ao longo da obra, uma forte tendência a uma abordagem clássica, que assume a probabilidade no seu sentido teórico:

Figura 25 – Definição de probabilidade obra A.



Fonte: (CRESPO, 2008, p. 129)

Para exemplificar a utilização da probabilidade, o autor apresenta o caso do lançamento de uma moeda, cuja probabilidade teórica de se obter o evento “cara” ou coroa no lançamento é $\frac{1}{2}$ ou 50%.

Na apresentação o autor sugere a técnica para a solução da questão, que consiste em descrever o espaço amostral $n(s)$ e determinar o evento $n(a)$. Em seguida, aplicar a definição de probabilidade, isto é, o quociente $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$.

O autor ratifica a técnica apresentando o lançamento de um dado, conforme segue:

- b. Considerando o lançamento de um dados, vamos calcular:
 - a probabilidade do evento A “obter um número par na face superior”

Temos:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 6$$

$$A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow n(A) = 3$$

Logo:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(CRESPO, 2008, p.129)

Uma observação sobre o exemplo é o fato de que o autor não menciona a condição da equiprobabilidade para o cálculo da probabilidade teórica no exemplo dado. Isso pode induzir

aos estudantes a um conflito cognitivo chamado de ilusão da equiprobabilidade e aleatoriedade (MOURA; SAMÁ, 2016). Nesse conflito os estudantes, ao se depararem com questões que envolvem probabilidade e requerem um raciocínio mais complexo, tendem a assumir a probabilidade e o aleatório como condições naturais.

O autor apresenta mais quatro exemplos para introduzir as propriedades da probabilidade: evento certo, evento impossível, valor de $P(E)$ como intervalo entre 0 e 1, isto é, $0 \leq P(E) \leq 1$:

Figura 26 – Extrato momentos didáticos da Obra A.

— a probabilidade do evento **B** “obter um número menor ou igual a 6 na face superior”.

Temos:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 6$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(B) = 6$$

Logo:

$$P(B) = \frac{6}{6} = 1$$

— a probabilidade do evento **C** “obter um número 4 na face superior”.

Temos:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 6$$

$$C = \{4\} \Rightarrow n(C) = 1$$

Logo:

$$P(C) = \frac{1}{6}$$

— a probabilidade do evento **D** “obter um número maior que 6 na face superior”.

Temos:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 6$$

$$D = \emptyset \Rightarrow n(D) = 0$$

Logo:

$$P(D) = \frac{0}{6} = 0$$

Pelos exemplos que acabamos de ver, podemos concluir que, sendo $n(S) = n$:

- a probabilidade do **evento certo** é igual a 1:

$$P(S) = 1$$
- a probabilidade do **evento impossível** é igual a zero:

$$P(\emptyset) = 0$$
- a probabilidade de um **evento E qualquer** ($E \subset S$) é um número real $P(E)$, tal que:

$$0 \leq P(E) \leq 1$$
- a probabilidade de um **evento elementar E qualquer** é, lembrando que $n(E) = 1$:

$$P(E) = \frac{1}{n}$$

Fonte: (CRESPO, 2008, p. 130).

No quadro da organização didática vemos claramente que o primeiro, o segundo e o quinto momento de estudo se fundem em viés tecnicista. O primeiro encontro com os objetos de saber é feito a através do tipo de tarefa, que trazem implicitamente uma técnica que resolve

aquela tarefa (segundo momento) e as definições institucionalização aquele saber (quinto momento), como mostra a figura 27. Não há explicitamente na obra A um trabalho que caracterize o terceiro e quartos momentos didáticos, ou seja, não existem apontamentos na direção de enriquecimento das técnicas ou mesmo justificativa ou explicação, a tecnologia é suprimida. O que reforça a impressão de que a obra tem um enfoque tecnicista.

Em seguida, o autor apresenta as noções de eventos complementares, independentes e mutuamente exclusivos a partir das relações:

Quadro 21 – Relações associadas às probabilidades de eventos.

Noção	Objetos ostensivos
Eventos complementares	$p + q = 1 \Rightarrow q = 1 - p$
Eventos independentes	$p = p_1 \times p_2$
Eventos mutuamente exclusivos	$p = p_1 + p_2$

Fonte: (CRESPO, 2008)

Vale destacarmos que a simplificação sugerida pelo autor induz a possíveis erros conceituais, pois as regras que definem eventos complementares, independentes ou mutuamente exclusivos são dadas em termos de conjuntos. O número real p , quando $0 \leq p \leq 1$, refere ao valor de probabilidade obtido através do quociente entre a cardinalidade de subconjuntos de um espaço amostral. No caso, por exemplo, da definição de eventos independentes, o recomendável seria: $P(A \cap B) = P(A) P(B)$.

Apresentadas as relações, o autor passa a discutir exercícios resolvidos. Cada um dos exemplos estão associados ao cálculo da probabilidade teórica e às relações que apresentamos no quadro 21. Todas as questões dos exercícios resolvidos e dos exercícios propostos remete ao contexto de lançamento de moedas ou dados, de retirada de bolas de uma urna ou variações, de como escolher uma ou mais peças de lote que tem determinadas características.

As questões propostas podem ser consideradas como exercício de aplicação direta das relações apresentadas, bastando aos estudantes interpretarem a situação, descreverem o espaço amostral, representarem o evento pedido e calcularem a propriedade.

A análise global permite-nos concluir que o saber probabilidade é tomado nesta obra a partir de uma perspectiva clássica e superficial. O texto não orienta o estudante a refletir sobre qualquer tipo de discussão acerca da construção conceitual em torno do cálculo de probabilidades. Não há elementos históricos ou indicações sobre o papel das probabilidades e suas aplicações na própria Estatística ou qualquer outra área de conhecimento.

O enfoque da obra é praticamente no cálculo de probabilidades a partir das questões padrão. O saber probabilidade é tomado de forma a-problemática.

Refletindo sobre essa última consideração, tomamos como base as colocações de Wozniak (2005), que destacou que há uma tendência no trabalho com Estatística que ela chama de redução aritmética da Estatística. Essa tendência é caracterizada pela ênfase no tratamento aritmético e sem problematização das questões envolvendo Estatística. Isso provoca nos estudantes uma compreensão de que a Estatística corresponde a um domínio matemático mais fácil (WOZNIAK, 2005).

Pensamos que esse fenômeno está presente na obra A, de modo que se estende ao capítulo 9 quando trata do cálculo de probabilidades, pois as questões remetem a resoluções aritméticas a partir cálculos imediatos ou aplicação das relações apresentadas pelo autor. Essa característica é evidenciada quando nos aprofundamos na análise da organização matemática do capítulo.

Seguido o estudo da obra A, fizemos a análise da OM presente no capítulo 9. A opção do autor de apresentar o cálculo de probabilidade a partir de uma perspectiva objetiva, segundo o próprio o autor, levou à ausência, como prevíamos, de um discurso tecnológico. Todas as noções em torno da probabilidade são apresentadas como definições. Algumas são expressas por relações que servirão como ferramentas no cumprimento das tarefas propostas.

Assim a terceira etapa consistiu na análise praxeológica da OM. A primeira observação foi na identificação dos tipos de tarefas presentes no capítulo. Observamos que o principal tipo de tarefa apresentado pela obra é:

T_1 : Calcular a probabilidade a priori de n eventos que ocorrerem dado um espaço amostral discreto e finito.

Notemos que esse tipo de tarefa pode ser precedido de outros tipos de tarefas como, por exemplo, T_0 : descrever o espaço amostral de um experimento equiprovável. No entanto, a abordagem feita pelo autor não considera T_0 como tarefa, isto é, ela é tomada como um passo dentro da técnica necessária para resolver T_1 . A naturalização de T_0 é uma questão que precisa ser analisada com cuidado, pois o sucesso do cumprimento de T_1 está diretamente relacionado à boa descrição do espaço amostral do experimento.

T_1 comporta como técnica principal (τ_p) que corresponde aos seguintes passos:

- 1) Descreva o espaço amostral S ;
- 2) Verifique se o experimento é equiprovável;
- 3) Identifique os subconjuntos de S que correspondem aos n eventos que se quer calcular a probabilidade;
- 4) Calcule a probabilidade pedida a partir da relação $P = \frac{n(A)}{n(S)}$.

As questões apresentadas na seção “exercícios resolvidos” podem ser agrupadas em torno de T_1 , de modo que podemos admitir subtipos de tarefas relacionadas ao cálculo de probabilidades complementares, casos em que há independência de eventos ou são mutuamente exclusivos. Cada um desses casos admite uma solução que consiste em uma técnica similar a τ_p para a resolução de T_1 .

O fato de o autor apresentar somente tarefas que envolvem espaços amostrais discretos e finitos limita consideravelmente o entendimento sobre a probabilidade, que pode ser entendida somente como um quociente entre dois números que correspondem à cardinalidade de dois conjuntos denominados espaço amostral e seus subconjuntos.

Observando, por exemplo, a questão 8 da página 134 da obra, perceberemos claramente essa característica:

Questão 8 – Qual a probabilidade de sair uma figura quando retiramos uma carta de um baralho de 52 cartas?

A solução proposta pelo autor passa pela relação de eventos mutuamente exclusivos, ou seja, $p = p_1 + p_2$, o que configura essa questão como pertencente ao subtipo de tarefa T_{13} . A técnica consiste na descrição do espaço amostral e os cálculos de p_1 , p_2 e p_3 , já que as figuras no baralho correspondem a damas, valetes e reis. Como são mutuamente exclusivos, esses eventos p correspondem ao somatório das probabilidades individuais.

Resolver a questão 8 se resume a:

Determinar o espaço amostral que corresponde ao número de cartas do baralho, isto é, 52 cartas.

A probabilidade de sair uma carta que contenha cada uma das figuras é o quociente $4/52$, ou $1/13$, já que existem 04 damas, 04 valetes e 04 reis.

$$\text{Assim } p = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{3}{13}.$$

A técnica utilizada, que chamaremos de técnica auxiliar para eventos mutuamente exclusivos (τ_{AEM}) de T_{13} , pode ser substituída pela τ_p , partindo do seguinte raciocínio:

Se temos 4 cartas para cada um tipo das três figuras, temos 12 possibilidades em 52, isto é, o espaço amostral é 52 e o subconjunto que corresponde à probabilidade procurada tem cardinalidade 12, então $P = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$.

Assim o conjunto de tarefas apresentadas em torno da probabilidade na obra A pode ser descrito da seguinte forma:

Quadro 22 – Organização de tarefas e subtipos de tarefas na obra A.

Tipo de tarefa		Quantidade
	T ₁ : Calcular a probabilidade priori de n eventos ocorrerem dado um espaço amostral discreto e finito.	53
Subtipos	T ₁₁ : Calcular a probabilidade complementar a priori de n eventos ocorrerem dado um espaço amostral discreto e finito.	6
	T ₁₂ : Calcular a probabilidade priori de n eventos independentes ocorrerem dado um espaço amostral discreto e finito quando esses eventos são independentes.	25
	T ₁₃ : Calcular a probabilidade priori de n eventos ocorrerem dado um espaço amostral discreto e finito, para o caso de eventos mutuamente exclusivos.	22

Fonte: próprio autor.

Tendo em vista que a OM está organizada em torno de T₁, que compreende os subtipos mencionados no quadro 22, e de τ_p , consideramos que a OM na obra A é uma organização pontual, cuja centralidade é no bloco saber-fazer, o que caracteriza a OD proposta pelo autor como clássica – tecnicista. A avaliação é sugerida como parte das 53 tarefas ligadas ao T₁ e seus subtipos.

A contextualização das tarefas está sempre relacionada ao lançamento de dados, moedas, retirada de cartas de baralho, de bolas de urnas ou itens com ou sem defeitos de determinados lotes.

Não observamos vestígios tecnológicos para justificar τ_p , embora em uma abordagem clássica a relação $P = \frac{n(A)}{n(S)}$ seja a própria definição de probabilidade.

Outra consideração é que a ausência de justificativas e de explicações pode contribuir para uma compreensão limitada das noções, por exemplo, em relação aos eventos mutuamente exclusivos definidos pela relação $p = p_1 + p_2$, observamos que o estudante poderá encontrar

limitações para compreender essa definição como um caso particular da regra de adição de probabilidades $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - (A \cap B)$.

Concluimos desse modo que, além de pontual, a OM na obra é incompleta no sentido de Lucas *et al* (2014).

5.3.3.2 Obra B

Feitas essas considerações sobre a obra A, passaremos à análise da segunda obra a partir das mesmas etapas empregadas para analisarmos a obra anterior. A obra B, escrita por Wilton Bussab e Pedro Morettin, se propõe a oferecer um curso de Estatística básica para cursos de graduação. Ela consta de 522 páginas divididas em 16 capítulos. Os autores consideram a organização da obra em três partes. Na primeira, é feito o tratamento de dados unidimensionais e bidimensionais, com ênfase em métodos gráficos aplicados à Estatística Descritiva. Na segunda parte, a probabilidade abre o espaço para a discussão das variáveis aleatórias que pretendem dar suporte à terceira parte que é dedicada à introdução de noções da estatística inferencial.

Em uma perspectiva diferente da obra A, a obra B mantém a ênfase no tratamento estatístico dos dados de modo que os modelos probabilísticos apresentados na segunda parte são construídos a partir dos dados explorados na 1ª parte, ou seja, a probabilidade é explorada como o resultado de experimentos e corresponde à frequência relativa desses dados:

Na segunda parte introduzimos os conceitos básicos sobre probabilidades e variáveis aleatórias. A ideia é que a primeira parte sirva de motivação para construir os modelos probabilísticos da segunda parte. No capítulo 5 tratamos da noção de probabilidade, suas propriedades, probabilidade condicional e independência. Também consideramos o teorema de Bayes e destacamos sua importância em problemas de inferência (BUSSAB; MORETTIN, 2010, p. 5).

Podemos perceber a intenção no discurso dos autores em tratar a probabilidade de um ponto de vista frequencial. A presença do teorema de Bayes reforça esse viés, pois segundo os autores a inferência bayesiana é um tema importante da estatística. Outra questão importante é que as variáveis aleatórias são tratadas em espaços amostrais discretos e contínuos, diferente da obra A que traz, em seus exemplos, apenas espaços amostrais finitos e discretos.

Figura 27 – Exemplo envolvendo espaço amostral contínuo.

Exemplo 5.5. Considere o experimento que consiste em retirar uma lâmpada de um lote e medir seu “tempo de vida” antes de se queimar. Um espaço amostral conveniente é

$$\Omega = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\},$$

isto é, o conjunto de todos os números reais não negativos. Se A indicar o evento “o tempo de vida da lâmpada é inferior a 20 horas”, então $A = \{t : 0 \leq t < 20\}$. Esse é um exemplo de um espaço amostral *contínuo*, contrastado com os anteriores, que são *discretos*.

Fonte: (BUSSAB; MORETTIN, 2010, p. 105).

A introdução à probabilidade é feita como mencionado pelos autores no capítulo 5, onde são dedicadas 24 páginas. Proporcionalmente, a quantidade de páginas da obra ainda é pouco mais de 4% do total, como na obra A.

A edição que analisamos é a 3ª reimpressão da 6ª edição de 2010. O capítulo 5 é dividido em 6 seções, que tratam dos seguintes temas:

Quadro 23 – Distribuição de temas por seção obra B.

Seção	Tema
5.1	Introdução
5.2	Propriedades
5.3	Probabilidade condicional e independência
5.4	O teorema de Bayes
5.5	Probabilidades subjetivas
5.6	Problemas e complementos

Fonte: próprio autor baseado em Bussab e Morettin (2010).

Um detalhe a acrescentar é que todos os outros capítulos são acompanhados de uma seção especial intitulada de “Exemplos Computacionais” que pretende estimular a reflexão sobre aplicações dos conteúdos a partir de modelos computacionais. Essa seção foi suprimida no capítulo 5, o que pode parecer contraditório, pois as ferramentas computacionais são fundamentais para os processos de simulação de experimentos em uma abordagem frequentista.

Como veremos mais diante, os autores se propõem a discutir a abordagem subjetiva como complemento da discussão sobre probabilidade. Nessa seção (5.5), conforme quadro 23, os autores declaram explicitamente que o modelo de probabilidade apresentado no capítulo foi o frequentista: “utilizamos um enfoque chamado frequentista, pois se baseia na estabilidade das frequências relativas e no fato de que podemos, hipoteticamente, repetir um experimento várias vezes” (BUSSAB; MORETTIN, 2010, p. 121).

Apesar dessa declaração, observaremos, durante o texto, menções à probabilidade como um resultado teórico. Na explicação do experimento de lançamento do dado e do cálculo de suas frequências para o caso de se obter uma determinada face, os autores apresentam o caso em que esse modelo pode ser calculado teoricamente, ou seja, como um modelo probabilístico a priori ou frequência teórica:

Figura 28 – Probabilidade como frequência teórica na obra B.

Tabela 5.1: Modelo para lançamento de um dado:

Face	1	2	3	4	5	6	Total
Frequência teórica	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

Exemplo 5.2. De um grupo de duas mulheres (M) e três homens (H), uma pessoa será sorteada para presidir uma reunião. Queremos saber as probabilidades de o presidente ser do sexo masculino ou feminino. Observamos que: (i) só existem duas possibilidades: ou a pessoa sorteada é do sexo masculino (H) ou é do sexo feminino (M); (ii) supondo que o sorteio seja honesto e que cada pessoa tenha igual chance de ser sorteada, teremos o modelo probabilístico da Tabela 5.2 para o experimento.

Tabela 5.2: Modelo teórico para o Exemplo 5.2.

Sexo	M	H	Total
Frequência teórica	2/5	3/5	1

Dos exemplos acima, verificamos que todo experimento ou fenômeno que envolva um elemento casual terá seu modelo probabilístico especificado quando estabelecermos:

(a) um *espaço amostral*, Ω , que consiste, no caso discreto, da enumeração (finita ou infinita) de todos os resultados possíveis do experimento em questão:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$$

(os elementos de Ω são os *pontos amostrais* ou *eventos elementares*);

(b) uma *probabilidade*, $P(\omega)$, para cada ponto amostral, de tal sorte que seja possível encontrar a probabilidade $P(A)$ de qualquer subconjunto A de Ω , isto é, a probabilidade do que chamaremos de um *evento aleatório* ou simplesmente *evento*.

1º Momento:

tarefa para o

encontro com

saber.

2º e 5º Momentos: encontro com

a técnica e institucionalização.

Fonte: Bussab e Morettin (2010, p. 103)

Vemos tanto no quadro relativo ao experimento de lançamento de dados, quanto no quadro relativo ao sorteio de um indivíduo do sexo masculino ou feminino em um grupo onde dois deles são homens e três são mulheres que implicitamente o total das frequências é mostrado como somatório das n frequências relativas. Para o primeiro quadro, temos: $1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$. Para a segunda, temos: $1 = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}$.

É na utilização de exemplos como esses que os autores vão explicitando as definições e explicações de cada tema. A partir dos exemplos do lançamento do dado e do sorteio dos indivíduos, os autores discutem a relação frequencial com a probabilidade:

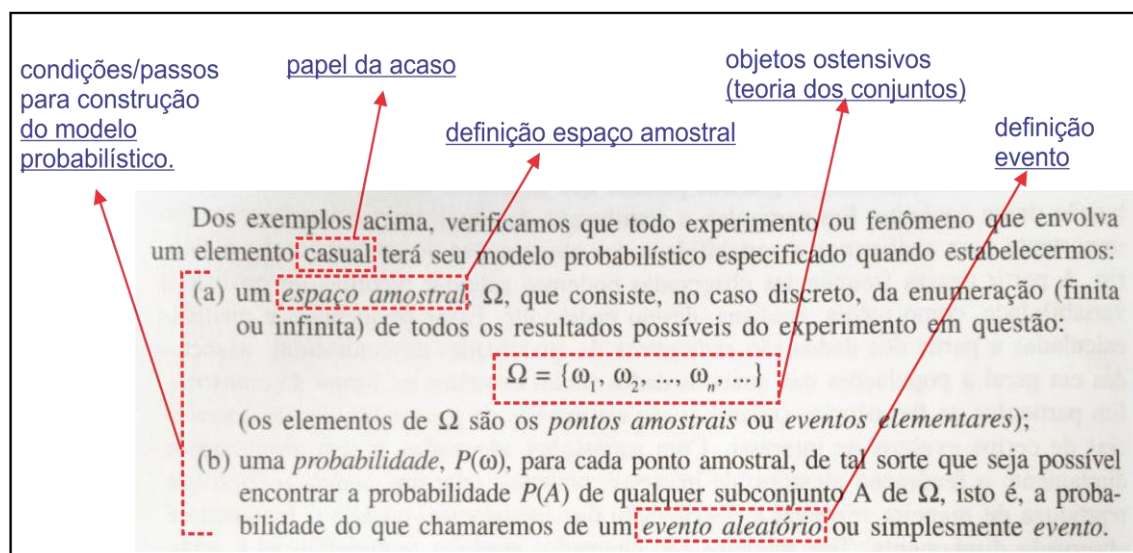
Queremos estudar as frequências de ocorrências das faces de um dado. Um procedimento a adotar seria lançar o dado certo número de vezes, n , e depois anotar o número n_i de vezes que ocorre a face i , $i = 1, 2, 3, \dots, 6$. As proporções n_i/n em um número n' ($n' \neq n$) de vezes, teríamos outra distribuição de frequências, mas com um padrão que esperamos ser muito próximo do anterior (BUSSAB; MORETTIN, 2010, p. 103).

Observemos que expressão “certo número de vezes” não explicita a real natureza da abordagem frequentista de probabilidade, pois para que tenhamos uma convergência que se aproxime da frequência teórica o experimento deve ser repetido um grande número de vezes. Isso se constitui em um problema importante, onde, por exemplo, a abordagem por simulações computacionais pode contribuir (COUTINHO, 2001).

Os referidos autores apresentam o modelo probabilístico (probabilidade teórica) como uma construção cujos passos seriam: “Primeiro observamos que só podem ocorrer seis faces; a segunda consideração que se faz é que o dado seja perfeitamente equilibrado, de modo a não favorecer alguma face em particular” (BUSSAB e MORETTIN, 2010, p.103).

Notamos na citação ideias associadas à equiprobabilidade do experimento e à necessidade de delimitação do espaço amostral. É partir do exemplo abaixo que os autores destacam essas noções:

Figura 29 – Análise da abordagem metodológica na obra B.



Fonte: próprio autor adaptado de Bussab e Morettin (2010).

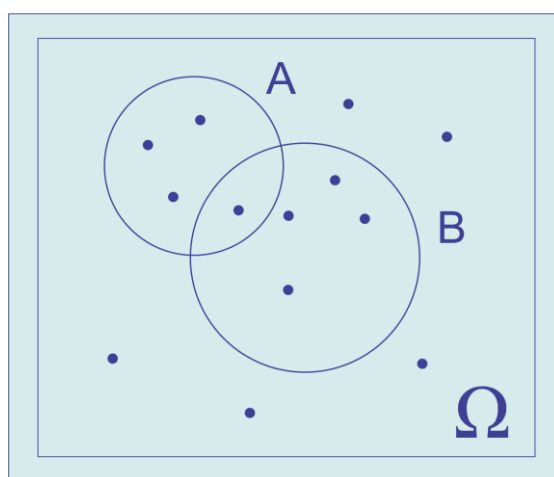
Como podemos ver na figura 23, é através dos exemplos dados que os autores vão apresentando elementos praxeológicos e conceituais. Observamos nesse discurso inicial que discussões sobre o papel do acaso e da aleatoriedade não são tomadas como uma necessidade, como foi visto também na obra A. Isso pode indicar a confirmação da nossa hipótese de que a probabilidade nessas obras é tomada no sentido de uma instrumentalização do conteúdo, seja numa perspectiva clássica ou frequentista.

Outro destaque que fazemos é a introdução dos ostensivos e sua representação em campos de atuação em que se apoia a teoria das probabilidades, como a teoria dos conjuntos e a análise combinatória. Os autores introduzem a noção de espaço amostral e suas representações

mencionando recursos a esses campos, como é o caso da descrição do conjunto Ω feita no excerto da figura 23. Os autores ainda apresentam o papel gráfico da teoria dos conjuntos nessa representação, bem como o papel de técnicas usualmente utilizadas na análise combinatória, como a descrição das combinações e diagramas de árvore.

Logo em seguida ao excerto que apresentamos, os autores trazem um desses elementos como exemplo de representação do espaço amostral. A figura intitulada “espaço amostral eventos aleatórios” traz uma representação gráfica, no entanto, não há nenhum elemento que possa contextualizá-la, ou seja, a figura está dissociada de qualquer contexto presente ao longo do texto:

Figura 30 – Representação gráfica do espaço amostral na obra B.



Fonte: (BUSSAB; MORETTIN, 2010, p. 104)

Nossa impressão é que os autores apresentam esses elementos ostensivos no entendimento de que os estudantes já conheçam todas essas noções.

Essas considerações indicam para nós que a OD da obra B se aproxima da organização empirista-tecnicista, visto que o enfoque dado nos exemplos para a discussão e apresentação das definições é a principal característica da OD presente na obra. O bloco saber-fazer, mais uma vez, é tomado com maior importância, pois não percebemos no capítulo um destaque a elementos tecnológicos ou teóricos envolvendo os temas tratados. Notamos também que essa classificação difere da OD na obra A, exatamente por romper com a dinâmica definição → exemplo → exercício. Na obra B, a OD sugere uma dinâmica problema → resolução → definição. Na figura a seguir temos como exemplo a introdução à probabilidade condicional e a regra do produto de probabilidades a partir de dados já discutidos em exemplos anteriores:

Figura 31 – Introdução da probabilidade condicional.

5.3 Probabilidade Condicional e Independência

Voltemos à Tabela 5.3 do Exemplo 5.6. Dado que um estudante, escolhido ao acaso, esteja matriculado no curso de Estatística, a probabilidade de que seja mulher é $20/30 = 2/3$. Isso porque, do total de 30 alunos que estudam Estatística, 20 são mulheres. Escrevemos

$$P(\text{mulher} | \text{Estatística}) = \frac{2}{3}.$$

Para dois eventos quaisquer A e B , sendo $P(B) > 0$, definimos a *probabilidade condicional de A dado B* , $P(A|B)$, como sendo

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (5.7)$$

Fonte: (BUSSAB; MORETTIN, 2010, p. 111).

Pelo exemplo da figura 32, vemos uma OD que se assemelha com a obra A, quando são utilizadas tarefas para caracterizar o primeiro encontro. Resolução dessas tarefas ou comentários sobre a solução para indicar um encontro coma técnica e institucionalização como meta da organização didática. Apesar da semelhança, observamos em dois momentos específicos vestígios tecnológicos sendo convocados, como por exemplo a teoria dos conjuntos:

Figura 32 – Vestígios de tecnologia na obra B.

As operações de reunião, intersecção e complementação entre eventos possuem propriedades análogas àquelas válidas para operações entre conjuntos. Ver Morettin *et al.* (2005). Por exemplo:

(a) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	(e) $A \cap A^c = \emptyset$
(b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	(f) $A \cup A^c = \Omega$
(c) $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap \Omega = A$	(g) $A \cup \emptyset = A, A \cup \Omega = \Omega$
(d) $\emptyset^c = \Omega, \Omega^c = \emptyset$	(h) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Fonte: (BUSSAB; MORETTIN, 2010, p. 108).

Apesar da menção não é solicitado nem feito nenhum trabalho para identificar a razão de ser desse aparato tecnológico. Não identificamos, portanto, um trabalho que caracterize por exemplo o enriquecimento de técnicas, nem a sua justificação, o que poderia se caracterizar como terceiro e quarto momentos de estudo.

No que tange às concepções de probabilidade, esperamos já ter levantados alguns elementos para destacarmos que, na obra B, aparecem discussões relativas à probabilidade frequentista, clássica e também subjetiva.

Ao abordarem as probabilidades como frequências relativas, os autores intentam, explicitamente, destacar que o trabalho feito da análise descritiva nos capítulos anteriores é fundamental para a construção dos modelos probabilísticos que permitirão a compreensão da modelização e do tratamento das variáveis aleatórias discretas e contínuas.

Embora essa seja a intenção dos autores, observamos que a perspectiva frequentista é tomada de forma superficial. Isso pode ser observado nos exemplos ao longo do capítulo, que podem ser abordados do ponto de vista clássico das probabilidades. Ao chamar atenção para o termo “frequência-teórica”, os autores introduzem o fato de que existe a possibilidade de superar o problema das amostras e da dependência da realização dos experimentos a partir de simulações a priori.

Na seção 5.2, o enunciado das propriedades e sua validação são feitos através de um exemplo que parte de uma tabela com dados sobre o sexo e a matrícula dos estudantes em determinados cursos. Esse exemplo pode ser utilizado como um modelo de aplicação das probabilidades clássicas, de fato, o último tema abordado pelos autores na seção 5.2 é uma menção ao caso clássico das probabilidades:

Consideraremos, agora, uma situação historicamente importante, a saber, aquela que temos um espaço amostral finito, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, em que todos os pontos têm a mesma probabilidade $1/n$. Se A for um evento contendo m pontos amostrais, então $P(A) = \frac{m}{n}$. Nesse caso, não é necessário explicitar completamente Ω e A , bastando calcular m e n chamados, respectivamente, **números de casos favoráveis e número de casos possíveis**. Para tanto, são usados métodos clássicos de contagem da análise combinatória (BUSSAB; MORETTIN, 2010, p. 108, grifo dos autores).

Assim, os autores tentam apresentar uma abordagem frequentista, porém, na exemplificação das noções e propriedades, o fazem a partir de situações em uma abordagem clássica. Vale lembrar, por exemplo, que $1/n$ está matematicamente relacionado a noção de equiprobabilidade, condição necessária para o cálculo a priori das probabilidades.

Com relação à probabilidade subjetiva, ela é levantada na seção 5.5 como uma forma de interpretar as probabilidades. Entendemos que os autores propuseram essa seção no sentido de dar ao estudante uma visão geral de outros modos de abordar a probabilidade. Os autores usam o exemplo de uma situação em que a informação é fundamental para que se possa decidir acerca do cálculo das probabilidades subjetivas:

Suponha que queiramos calcular a probabilidade de chover dia 12 de janeiro do próximo ano, na cidade de São Paulo. Evidentemente, se considerarmos o evento $A = \text{chover em São Paulo dia 12 de janeiro do próximo ano}$, ele não pode ser replicado. O que poderemos eventualmente considerar é em quantos dias 12 de janeiro anteriores choveu e calcular uma frequência relativa. Se tivermos essa informação, ela evidentemente poderá ser usada. Mas suponha que uma pessoa morando em Fortaleza tenha de calcular essa probabilidade. Se ela não tiver informação sobre o tempo em São Paulo, poderá simplesmente dizer que essa probabilidade é $\frac{1}{2}$. Por outro lado, uma pessoa vivendo em São Paulo terá informações adicionais. Por exemplo, saberá que normalmente janeiro, fevereiro e março são meses com muita chuva. Esse morador de São Paulo poderá arriscar uma probabilidade, digamos $\frac{2}{3}$ para o evento A . Vemos, portanto, que a associação de probabilidades a um evento depende de cada indivíduo, de sua informação a respeito desse evento. (BUSSAB; MORETTIN, 2008, p. 121).

Os autores destacam ainda que o teorema de Bayes desempenha papel importante na abordagem subjetiva das probabilidades. Em nossa opinião, a chamada para a noção de probabilidade subjetiva bem como afirmações sobre abordagem clássica e frequentista na obra B podem favorecer um espaço para a discussão dessas diferentes abordagens, embora os autores da obra não façam menção a esse aspecto.

Observamos que essa não é uma particularidade somente de livros de introdução à Estatística, mas também de livros que se prestam a introduzir a teoria das probabilidades. Em alguns desses livros, como Rathie e Zörnig (2012) que usamos para discutir a probabilidade como um *savoir savante*, há indicação dessas diferentes abordagens, porém a predileção é por uma abordagem axiomática, isto é, uma abordagem formal das probabilidades, já que a natureza dessas obras é tratar a Teoria das Probabilidades do ponto de vista formal.

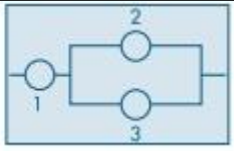
Nossa última observação sobre a análise da obra B é em relação às atividades propostas. Como dissemos anteriormente, muitas das questões podem ser interpretadas no sentido clássico das probabilidades, porém percebemos na obra que há uma diversidade maior que a obra A em relação aos contextos em que as questões são propostas.

O fato de trabalhar com outros espaços amostrais que não sejam apenas discretos é importante. No texto, vamos achar exemplos envolvendo espaços amostrais discretos e contínuos como vimos no exemplo 5.5, em que o espaço amostral se refere ao “tempo de vida” de uma lâmpada e pode ser caracterizado por $\Omega = \{t \in \mathbb{R}: t \geq 0\}$. Além do referido exemplo, encontramos questões envolvendo problemas de contagem e coeficientes binômiais, como no exemplo 5.8, em que a probabilidade do evento A é dada por $P(A) = \frac{\binom{5}{2}\binom{15}{2}}{\binom{20}{4}}$.

Existem também, na obra B, alguns exemplos envolvendo sistemas de representação utilizados na teoria da confiabilidade, teoria que utiliza a probabilidade para verificar a capacidade de sistemas de completarem seus objetivos. Esses esquemas são usados na obra B para contextualizar noções de independência de eventos, como vemos no problema 20:

Figura 33 – Problema 20 – modelo utilizado na teoria da confiabilidade.

20. Na figura ao lado temos um sistema com três componentes funcionando independentemente, com confiabilidades P_1 , P_2 e P_3 . Obtenha a confiabilidade do sistema.



Fonte: (BUSSAB; MORETTIN, 2010, p. 115).

Outras duas questões que merecem destaque são os problemas 46 e 47 da seção de problemas complementares. Nesses itens, encontramos duas tarefas que não estavam previstas ao longo do texto. As tarefas são do gênero provar e deduzir:

Figura 34 – Problemas 46 e 47.

46. Prove que, se A e B são independentes, também o serão A^c e B , A e B^c e A^c e B^c .

47. Obtenha uma fórmula para $P(A \cup B \cup C)$.

Fonte: (BUSSAB; MORETTIN, 2010, p. 125).

De modo geral, pensamos que a obra B apresenta uma variedade de atividades e contextos satisfatórios. Embora majoritariamente as questões tenham um enfoque clássico, são possíveis identificar algumas delas que precisam de enfoque frequencial, como o problema que sugere que os estudantes lancem um dado até que apareça a face 5, anotando os possíveis resultados. Problemas como esse, embora pareçam demasiadamente triviais, podem levantar questões interessantes, como, por exemplo, a dependência da abordagem frequentista do número de repetições do experimento para que se chegue a uma estabilização considerada plausível da frequência relativa. Notamos na obra que a pretensão declarada dos autores é trazer uma discussão frequentista, mas a obra não consegue criar esse cenário, seja do ponto de vista conceitual ou das atividades propostas.

Não foram encontradas questões que suscitasse processos de investigação por parte dos estudantes, configurando, assim como na obra A, questões de aplicação, com a diferença na variedade, já que, na obra A, a OM em torno da probabilidade foi classificada por nós como pontual.

Analisando agora a organização praxeológica matemática na obra B, identificamos os seguintes tipos de tarefas:

Quadro 24 – Tipos de tarefas presentes na obra B.

Tipos	Descrição	Quantidade
T ₁	Descrever o espaço amostral finito de um experimento aleatório equiprovável.	13
Subtipos		
T ₁₁	Representar como produto cartesiano o espaço amostral de um experimento aleatório equiprovável	2
T ₁₂	Descrever um evento correspondente a subconjunto do espaço amostral finito de um experimento aleatório equiprovável.	1
T ₁₃	Descrever o espaço amostral contínuo finito de um experimento aleatório equiprovável.	1
Tipos		
T ₂	Determinar a probabilidade a priori de n eventos dado um espaço amostral finito de um experimento aleatório equiprovável.	20
Subtipos		
T ₂₁	Determinar a probabilidade complementar a priori de n eventos dado um espaço amostral finito de um experimento aleatório equiprovável.	1
T ₂₂	Determinar a probabilidade a priori de n eventos independentes dado um espaço amostral finito de um experimento aleatório equiprovável.	2
T ₂₃	Determinar a probabilidade priori de n eventos ocorrerem dado um espaço amostral finito de um experimento aleatório equiprovável, para o caso de eventos mutuamente exclusivos.	4
Tipos		
T ₃	Descrever as condições para que um evento seja considerado equiprovável.	3
T ₄	Determinar a probabilidade de evento A ocorrer quando ocorre B dado um espaço amostral finito de um experimento aleatório equiprovável, para o caso de eventos mutuamente exclusivos.	13
T ₅ ¹²³	Determinar a probabilidade a posteriori de um evento a partir de probabilidades a priori dado um espaço amostral finito de um experimento aleatório equiprovável.	6

Fonte: próprio autor.

Diferente da obra A, encontramos, na obra B, um conjunto maior de tarefas em torno das seguintes técnicas:

Para T₁, temos:

τ_{LEC} – Listar os elementos do conjunto um a um.

Exemplo 1. O lançamento de um dado equilibrado gera o seguinte espaço amostral:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

¹²³ Tarefa associada ao Teorema de Bayes.

Comentários

A técnica consiste em identificar os elementos e listá-los usando a linguagem formal dos conjuntos.

τ_{REC} – Representação dos elementos por métodos de contagem

Exemplo 2. O espaço amostral dos resultados possíveis do sorteio de 6 dezenas em um universo de 60 dezenas gera um espaço amostral que pode ser representado:

$$\Omega = \binom{60}{6}, \text{ ou seja, } 50.063.860 \text{ possibilidades.}$$

Comentários

A técnica requer a identificação das combinações requeridas (combinação, permutação, arranjos etc.) e sua representação binomial.

τ_{RPEAC} – Representação pela propriedade dos elementos de espaços amostrais contínuos.

Exemplo 3. O sorteio de um ponto no círculo de raio 1 e centro na origem do plano cartesiano:

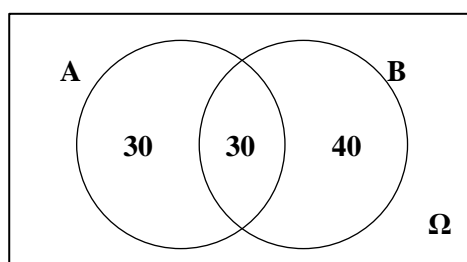
$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Comentários

Para realização dessa técnica, os estudantes devem saber identificar os intervalos numéricos que descrevem as propriedades do espaço amostral requerido no experimento.

τ_{RED} – Representação dos elementos por diagramas

Exemplo 4. O espaço amostral do sorteio de uma pessoa em um universo de 100 pessoas entrevistadas sobre sua preferência entre dois títulos A e B da literatura brasileira pode ser feito a partir de um diagrama de Venn:

*Comentários*

Esta técnica foi apenas sugerida pelos autores. Ela é muito útil para definir eventos em que os elementos estão distribuídos em classes diferentes. Por exemplo, a representação de Ω no exemplo 1 pode ser feita tanto por τ_{LEC} como por τ_{RED} . No entanto, τ_{LEC} parece ser mais eficiente para o caso, o mesmo ocorre com o exemplo 4, em que τ_{LEC} não é adequada.

O subtipo T_{11} requer um conhecimento de uma técnica auxiliar que é cálculo do produto cartesiano, isto é, além de listar os elementos, é preciso combiná-los no produto cartesiano.

Exemplo. Representar como produto cartesiano o experimento lançamento de uma moeda e dado.

Usando τ_{LEC} , para o lançamento da moeda $\Omega_1 = \{Ca, Co\}$ e para o lançamento do dado, temos: $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

O produto cartesiano entre eles é dado por:

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(Ca,1), (Ca,2), (Ca,3), (Ca,4), (Ca,5), (Ca,6), (Co,1), (Co,2), (Co,3), (Co,4), (Co,5), (Co,6)\}$$

De modo análogo, podemos pensar na combinação das técnicas apresentadas para compor o espaço amostral.

Consideramos T_{12} como subtipo pelo fato de que, para determinar um evento, necessariamente, temos que considerar o espaço amostral dado. Por exemplo, para determinar o número de possibilidades no lançamento de dois dados equilibrados obtermos soma 6, podemos procurar essas somas, porém, para casos em que Ω é maior, essa seria uma técnica inviável.

Observamos que as técnicas em torno de T_1 são essenciais para o cálculo a priori das probabilidades, ou seja, as demais tarefas e seus subtipos dependem da construção e da identificação do espaço amostral e dos eventos. Como vimos, na obra A, essa tarefa não é levada em conta. Já na obra B, encontramos uma atenção maior à necessidade de saber realizar essa tarefa e seus subtipos.

Outra observação pertinente é que em torno de T_1 temos várias técnicas disponíveis, cujas justificações e explicações estão condicionadas aos elementos introdutórios da linguagem matemática para a teoria dos conjuntos e da análise combinatória, que se constitui em conhecimentos prévios importantes.

Os autores apresentam a descrição como sendo um processo importante, pois é a definição do espaço amostral que permitirá o cálculo das probabilidade, notemos que esse tipo de apresentada mais quase 1/3 das tarefas propostas. A técnica da enumeração dos conjuntos é mais utilizada nos exemplos dados pelos autores:

Figura 35 – τ_{LEC} – Listar os elementos do conjunto um a um.

Exemplo 5.4. Uma fábrica produz determinado artigo. Da linha de produção são retirados três artigos, e cada um é classificado como bom (B) ou defeituoso (D). Um espaço amostral do experimento é

$$\Omega = \{BBB, BBD, BDB, DBB, DDB, DBD, BDD, DDD\}.$$

Se A designar o evento que consiste em obter dois artigos defeituosos, então $A = \{DDB, DBD, BDD\}$.

Fonte: (BUSSAB; MORETTIN, 2010, p. 105).

Para a execução de T_2 , temos, como vimos na obra, uma técnica principal (τ_P) que corresponde à combinação das técnicas relativas a T_1 e ao emprego do modelo probabilísticos cujo objeto ostensivo na obra B é $P(A) = \frac{m}{n}$, isto é, a probabilidade a priori.

Os subtipos de tarefas relativos a T_2 remetem, assim como também na obra A, às propriedades da probabilidade envolvendo o complementar, eventos independentes, mutuamente exclusivos, todas demonstradas através dos axiomas, como vimos na seção 5.3.2. Uma nota importa é que, apesar de os autores não apresentarem uma dedução formal dessas propriedades e suas justificativas, isto é, os elementos tecnológicos e teóricos, a apresentação conceitual é mais cuidadosa, usando ostensivos próprios à linguagem matemática da teoria dos conjuntos.

Assim, na obra B, a resolução de T_2 e seus subtipos é feita a partir do uso das propriedades em torno do conceito de probabilidade, conforme o quadro a seguir:

Quadro 25 – Noções associadas e relações associadas a resolução de T_2 .

Tipo/ Subtipo	Noção	Objetos ostensivos
T_2	Definição clássica de probabilidade	$P(A) = \frac{m}{n}$
T_{21}	Probabilidade complementar a priori	$P(A) + P(AC) = 1$
T_{22}	Probabilidade de eventos independentes	$P(A \cap B) = P(A) P(B)$
T_{23}	Adição de probabilidades	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ e $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ para o caso da mútua exclusão.

Fonte: próprio autor.

Um destaque importante é que a relação de independência só é apresentada na seção relativa a probabilidades condicionais. Essa escolha dos autores se justifica tecnologicamente em virtude de a noção de independência de eventos estar ligada à noção de probabilidade condicional, isto é, para os casos em que:

$$P(B|A) = P(B)$$

$$P(A|B) = P(A),$$

então,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Os autores estendem para o caso de três eventos:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

então,

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

Destacamos o tipo de tarefa T_3 que, embora só tenha três tarefas ao longo do capítulo, tem potencial para fazer com que o estudante reflita sobre o aspecto conceitual do que seja equiprobabilidade. Esse tipo de tarefa requer que pensemos o que significa atribuir a um experimento essa condição.

Mesmo os autores não fazendo uma discussão mais aprofundada sobre isso, o tipo de tarefa está presente e pode levar a discussões interessantes do que seja equiprobabilidade e se ela realmente ocorre em qualquer experimento.

Esse tipo de tarefa aparece na segunda seção de exercícios do capítulo 5 da Obra B e pede ao leitor descreva as condições para que cada um dos experimentos sejam considerados equiprováveis. O primeiro deles é o caso mais simples, pois se trata do lançamento de um dado. Nesse caso a condição é que o dado seja geometricamente “perfeito”, o que sabemos que no mundo real é impossível de acontecer, mesmo aqueles que passam pelos padrões mais rigorosos de produção. Mas teoricamente a suposição é de o dado não fosse viciado, assim no lançamento do dado as faces teriam chance igual de ocorrência $1/6$.

Figura 36 – Tarefas relativas ao tipo T_2 na Obra B.

14. Que suposições devem ser feitas para que os resultados dos experimentos abaixo possam ser considerados equiprováveis?

 - (a) Lançamento de um dado.
 - (b) Opinião de moradores de uma cidade sobre um projeto governamental.
 - (c) Preço de uma ação no fim da próxima semana.

Fonte: (BUSSAB; MORETTIN, 2010, p. 110)

Um raciocínio análogo deveria ser empregado aos demais experimentos. Por exemplo, a garantia de chances iguais na escolha de um morador para fazer parte dessa entrevista, porém

a aleatoriedade na escolha desses entrevistados pode interferir na própria amostras, o que cabe discussão sobre a equiprobabilidade nesse experimento.

Na tarefa do item c, a discussão se torna um pouco mais complexa. Para que o preço de uma ação no próximo fim de semana tenha as mesmas chances de variação isso demandaria considerar um série de fatores que interferem sobre ele, como valor da moeda estrangeira, as decisões econômicas de governos, indicadores econômicos diversos, disposição dos investidores. Todos esses fatores deveriam estar ligados a processos aleatórios. Além disso, fatores como catástrofes ou crises mundiais também são eventos que podem interferir nesse processo. Assim dificilmente poderemos falar em equiprobabilidade, o que não impede de tratamento probabilístico das ações e seu comportamento no mercado financeiro. O potencial da tarefa é muito mais de problematizar a abrangência de uma abordagem clássica das probabilidades.

Para resolução de T₄ e T₅, respectivamente, os autores apresentam a definição de probabilidade condicional e o Teorema de Bayes. Os problemas propostos são do tipo aplicação como para T₂ e seus subtipos. Assim, a partir da relação de probabilidade condicional, são suscitadas as técnicas para a resolução das atividades envolvendo T₄ e T₅, conforme quadro:

Quadro 26 – Noções e relações necessárias para resolução de T₃ e T₄.

Tipo/ Subtipo	Noção	Objetos ostensivos
T ₄	Definição de probabilidade condicional	$P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ Regra do produto $P(A \cap B) = P(B)P(A B)$
T ₅	Teorema de Bayes	Versão simplificada $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot (B A)}{P(B)}$ Versão completa (Probabilidade a posteriori) $P(C_i A) = \frac{P(C_i)P(A C_i)}{\sum_{j=1}^n P(C_j)P(A C_j)}$

Fonte: próprio autor.

Em relação a T₃, os autores parecem apresentar a noção como preparação para o teorema de Bayes, e são explorados os exemplos para apresentar as definições e alguns exemplos de aplicação direta. Logo em seguida, o teorema é apresentado como continuidade da discussão anterior sobre a probabilidade condicional. No entanto, os autores frisam que o teorema não é apenas uma aplicação da teoria das probabilidades e tentam justificar sua importância a partir

das noções de inferência bayesiana como base da probabilidade subjetiva. O teorema não é demonstrando embora os autores comentem o papel de alguns ostensivos:

Observe que esse denominador é uma média ponderada dos $P(A|C_j)$ e os pesos são as probabilidades $P(C_j)$ que têm soma unitária. Como o numerador é sempre uma das parcelas do denominador $P(A)$, torna-se indispensável o uso de um novo índice, j , na decomposição deste. (BUSSABI; MORETTIN, 2010, p. 118).

Não há menção à probabilidade total como resultado presente no denominador. São introduzidos alguns exemplos padrão e três problemas similares aos exemplos. Ainda nos problemas complementares, encontramos o problema de Mont Hall, que pode ser abordado por esse teorema, no entanto, os autores já sugerem uma solução informal do problema através da construção de uma árvore de possibilidades.

Também não foram encontrados aspectos sistemáticos sobre a teoria das probabilidades ou elementos tecnológicos que justifiquem os resultados presentes na seção, apenas menções:

Por exemplo na solução de uma tarefa do tipo T_2 os autores enfatizam o papel do princípio fundamental da contagem como técnica auxiliar e justificativa para solução dos problemas envolvendo a relação $P(A) = m/n$:

Para tanto são usados também métodos clássico de contagem da análise combinatória. Um princípio fundamental de contagem nos diz que, se uma tarefa pode ser executada em duas etapas, a primeira podendo ser realizada de p maneiras e a segunda de q maneiras, então as duas podem ser realizadas simultaneamente de pq maneiras. Esse é o chamado princípio multiplicativo. (BUSSAB; MORETTI, 2010, p. 109).

Para exemplificar o papel do princípio os autores apresentam a seguinte questão:

Figura 37 – Técnica auxiliar e o papel da tecnologia.

Exemplo 5.8. Suponha que num lote com 20 peças existam cinco defeituosas. Escolhemos quatro peças do lote ao acaso, ou seja, uma amostra de quatro elementos, de modo que a ordem dos elementos seja irrelevante.

Dessa maneira, o número de amostras com quatro elementos que podemos extrair do lote é $\binom{20}{4}$, ou seja, combinações de 20 elementos, tomados quatro a quatro. Suponha que queiramos calcular a probabilidade de se escolher duas defeituosas na amostra. Pelo visto acima, $\binom{20}{4}$ é o número de pontos do espaço amostral. Seja A o evento que consiste em escolher duas defeituosas na amostra. Segue-se que $m = \binom{5}{2}\binom{15}{2}$, pois podemos escolher na amostra de quatro elementos duas defeituosas e duas não-defeituosas simultaneamente de $\binom{5}{2}\binom{15}{2}$ maneiras, usando o princípio multiplicativo. Logo,

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2}\binom{15}{2}}{\binom{20}{4}} = 0,217.$$

Fonte: (BUSSAB; MORETTI, 2010, p. 109).

Nossa impressão é que os autores propõem a probabilidade como introdução para a discussão das variáveis aleatórias e tentam fazer essa introdução a partir de uma perspectiva frequentista, porém não encontramos tarefas que remetam à experimentação e simulação frequentista na obra B.

Concluimos que na obra B, diferente da obra A, a OM é local, ou seja, temos mais de um tipo de tarefas abrigadas por algumas tecnologias. No entanto, essa praxeologia também é incompleta, como na obra A. Na obra A, claramente a perspectiva é clássica; na obra B, há uma tentativa de trazer uma abordagem frequentista, porém essa função não é cumprida.

5.3.3.3 Análise geral da organização praxeológica

Até aqui a descrição das organizações praxeológicas matemáticas e didáticas presentes nas obras A e B, utilizadas como referência na disciplina de Introdução Probabilidade, nos mostrou que a probabilidade vive nessas obras em um ecossistema problemático.

Para corroborar essa afirmação, levantaremos três argumentos. O primeiro é que nessas obras não existem considerações consistentes que permitam a construção do conceito de probabilidade. Essa é vista como um saber prático a ser aplicado na solução de problemas. Na obra A, essa função é pormenorizada através da repetição exaustiva de tarefas iguais e simplificadas pelo sentido aritmético atribuído às questões propostas.

Na obra B, há uma exploração maior do ponto de vista das tarefas, porém a impressão que tivemos é que a obra não conduz à compreensão do papel dessas tarefas e noções e sua articulação.

O segundo argumento consiste em pontuar o fato de que as tarefas propostas, ao se limitarem à aplicação das relações, não permitem ao estudante raciocinar no sentido probabilístico, não exigem a simulação nem o julgamento para a solução das questões. A ausência de questões de investigação é um fenômeno que se assemelha à perspectiva monumentalista, conforme Chevallard (2007). Com organizações matemáticas incompletas e centradas no bloco saber-fazer, seja pontualmente ou localmente, essas obras não conseguem cumprir a função de apresentar um saber cujo ensino será requerido.

Mesmo que esse ensino seja feito em nível escolar elementar, as tendências em Educação Estatística mostram que o ensino da probabilidade, mesmo nesse nível, não é uma tarefa simplória. Isso está relacionado às dimensões que discutimos na seção 4.2, isto é, questões que envolvem aspectos didáticos, epistemológicos e cognitivos.

Aqui nos valem de Shulman (1986) que destaca o papel dos conhecimentos necessários à formação docente. Mesmo que a disciplina Introdução à Probabilidade não se proponha a fazer discussões sobre o seu ensino, enquanto disciplina de conteúdo, ela precisa criar um ambiente onde os futuros professores possam desenvolver uma relação com a probabilidade que lhes permita conhecer o conceito em profundidade e não somente a aplicação de fórmulas em questões padrão, desprovidas de contextos que requerem a reflexão de sua importância e de seu caráter complexo.

Por último, levantamos o argumento de que a unilateralidade com que as OD são sugeridas nas obras reforça uma visão de probabilidade como um saber limitado a aplicações. O enfoque tecnicista e a ausência de um discurso tecnológico criam um cenário ilusório sobre o papel desse saber.

As seções dedicadas à probabilidade nessas obras não permitem que a aleatoriedade e o acaso sejam tomados como aspectos fundamentais para a compreensão da probabilidade. Os estudantes não são convidados por esses autores a pensarem na probabilidade como uma medida de incerteza, já que o enfoque clássico é tomado como principal cenário para a discussão dos conceitos. Assim, outro aspecto que ratifica o desequilíbrio desse ecossistema em torno da probabilidade é o fato de que não há uma infraestrutura presente nessas obras que permita aos estudantes a compreensão desse saber, nem mesmo com a própria Estatística, pois, no caso de uma abordagem frequentista, o aporte da estatística descritiva é fundamental para um trabalho dessa natureza. A necessidade dessa infraestrutura é problema já evidenciado por Chevallard e Wozniak (2005).

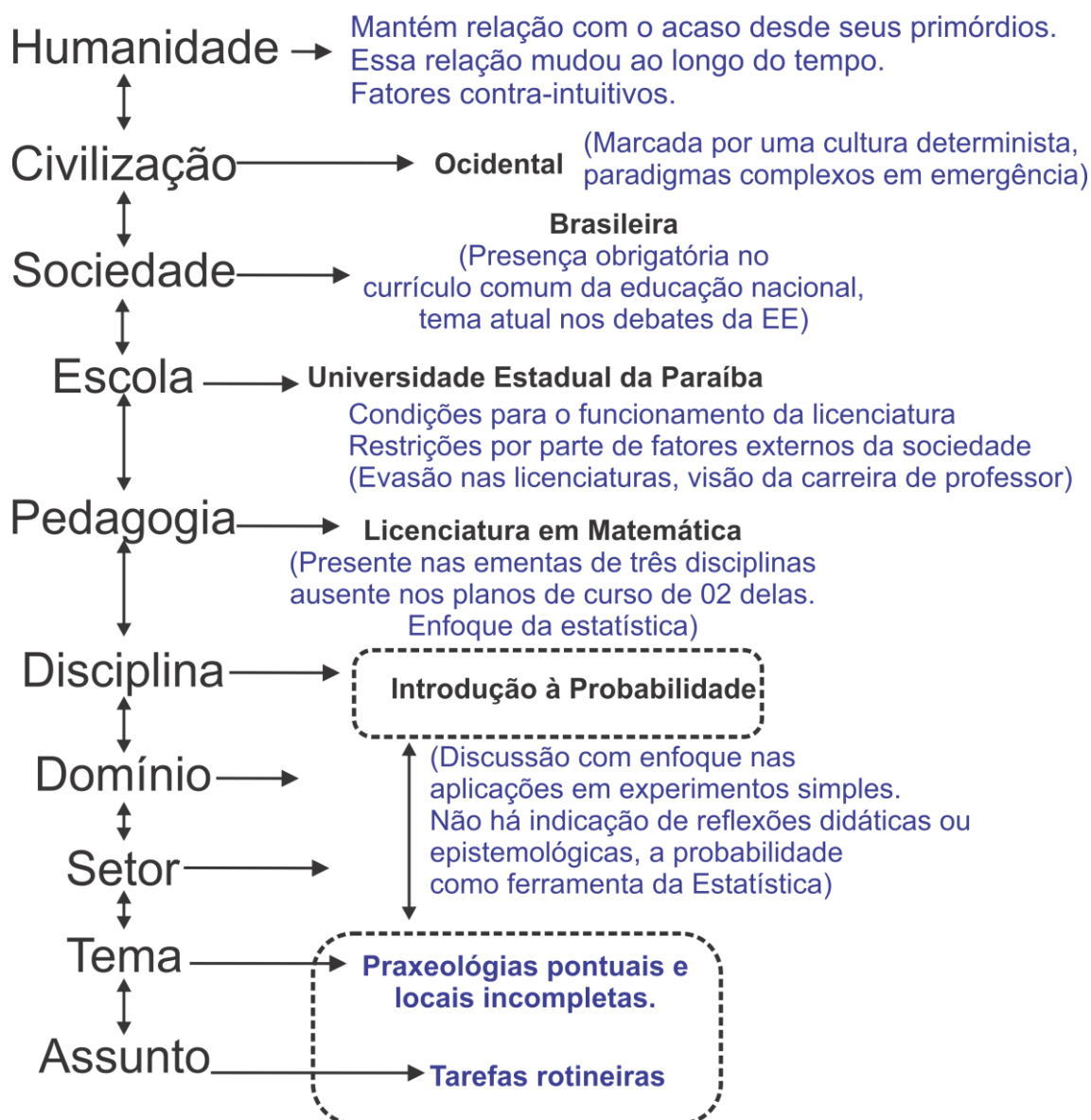
Em síntese, percebemos que, nos níveis de codeterminação didática superiores, existem indicações da importância do papel da probabilidade como campo de estudo cujas aplicações se estendem às mais diversas áreas. Vasconcellos (2012) destaca que os paradigmas emergentes em nossa sociedade têm exigido que nos desvencilhemos de visões puramente deterministas dos fenômenos ao nosso redor para pensarmos as nossas relações com o mundo como um tecido complexo. De modo análogo, Mlodinow (2009) advoga em favor de uma compreensão da aleatoriedade como fenômeno fundamental em nossas vidas.

Entendimento semelhante é tido pelos especialistas que se debruçam a investigar o ensino e a aprendizagem da probabilidade em todo mundo, isto é, que a probabilidade é um saber importante para a leitura do mundo e para o exercício de nossa cidadania. Por isso, seu ensino é recomendado desde os anos iniciais de escolarização (BATANERO, 2001; BATANERO; GODINO; ROA, 2004; BORBA; MONTEIRO, *et al.*, 2011; LOPES, 2008; LOPES; COUTINHO; ALMOULOU, 2010).

Os reflexos dessa indicação são observados na sociedade brasileira através das recomendações oficiais para o ensino de probabilidade na Educação Básica.

Por fim, apresentamos novamente os níveis de codeterminação didática situando agora a probabilidade como saber:

Figura 38 – Localização da probabilidade nas escala de codeterminação didática.



Fonte: próprio autor (2018).

O exercício reflexivo neste capítulo mostrou-nos que, por um lado, a probabilidade é tida como um saber importante, porém, por outro lado, seu ensino na formação de professores de matemática, no contexto institucional que estamos a analisar, parece não dar conta das demandas formativas.

Isso de certa forma coaduna com os resultados do Estudo Exploratório 2 que nos permitiu conjecturar que o universo em que a relação com saber probabilidade se constitui é

complexo. Se por um lado a instituição prevê o ensino de probabilidade na formação desses futuros professores; por outro lado, a análise da escala de codeterminação didática que fizemos e a análise praxeológica dos livros-texto mais usados pelos estudantes mostram que há uma falta de infraestrutura epistemológica para um trabalho mais profícuo para as demandas formativas desses futuros professores.

Partindo deste argumento, propusemos o que chamaremos de um primeiro esboço de um modelo epistemológico de referência para o ensino de probabilidade na licenciatura em Matemática. Esse modelo indica a nossa compreensão da leitura que fizemos em relação ao saber probabilidade ao longo desse capítulo e sua correlação com os níveis de codeterminação didática. Esse esboço nos ajudou a balizar nossa interpretação do ecossistema em torno da probabilidade e como ele age na relação dos futuros professores da licenciatura com o saber em jogo.

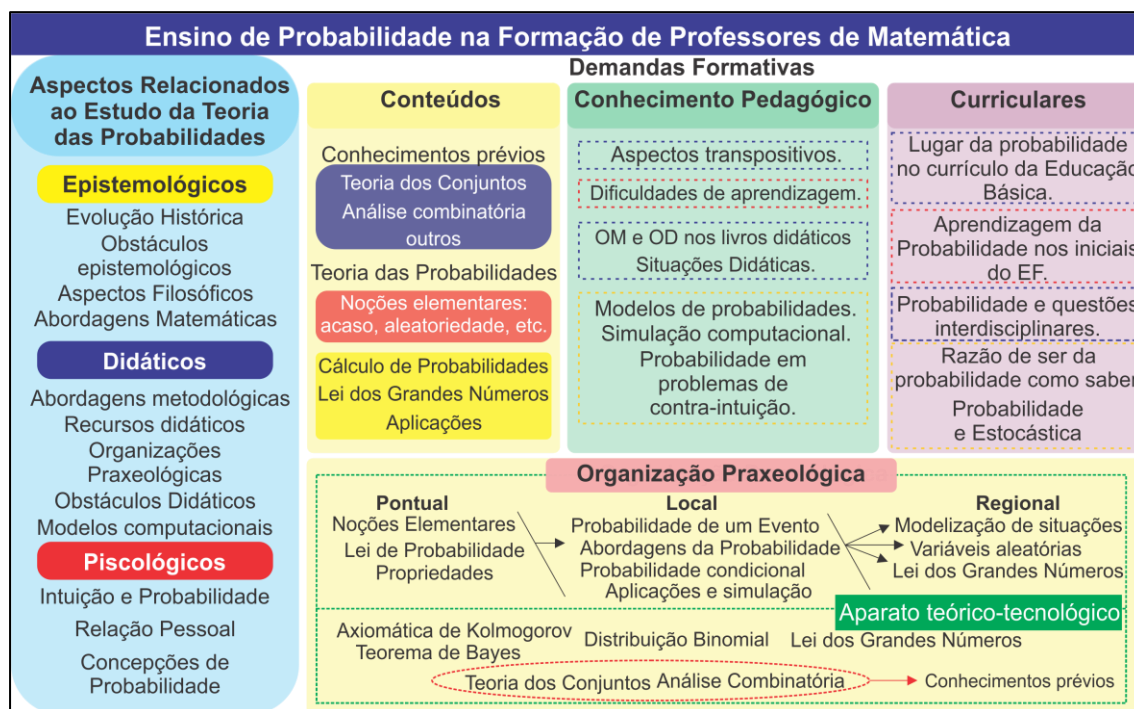
O estudo que fizemos ao longo do capítulo denota o tipo de cenário que encontramos para o ensino de probabilidade na formação de professores de Matemática. Esse cenário é interpretado na TAD como “epistemologia dominante”, que corresponde à materialização das práticas institucionais frente a um determinado saber (BARQUEIRO; BOSCH; GASCÓN, 2011).

A natureza epistemológica da probabilidade, sua apresentação como um *savoir savante* e os processos transpositivos por que passa, as demandas sociais, as condições e restrições nos níveis da Escola e da Pedagogia, tudo isso compõe elementos que indicam as demandas formativas para os professores de Matemática no que tange à tarefa de ensinar probabilidade.

Todos esses elementos são, segundo Gascón (2014), componentes de um modelo epistemológico de referência (MER). O MER cumpre primordialmente com o papel de fornecer subsídios teóricos-epistemológicos-didático para que a pesquisa em Didática da Matemática possa se guiar e apresentar alternativas frente aos modelos monumentalistas que já estão postos nas instituições de ensino (GASCÓN, 2014).

Considerando as reflexões apresentadas neste capítulo, pensamos que um MER para o ensino de Probabilidade na licenciatura em Matemática deve contemplar minimamente as seguintes dimensões:

Figura 39 – Esboço de um MER para o Ensino de Probabilidade na Licenciatura em Matemática.



Fonte: próprio autor (2018).

Na figura 39, apresentamos o que para nós se configura como esboço de um modelo epistemológico de referência para o ensino de probabilidade na formação de docentes. Nesse esboço, levamos em consideração todas as reflexões que já apontamos ao longo de todo o capítulo. Pensamos que outras considerações podem ser acrescentadas a um modelo como esse, no entanto, para o objetivo de nosso estudo, essa é uma proposta a contento, especialmente por entendermos que se configura como um primeiro exercício na direção da construção de um MER, ou seja, um esboço.

Sobre esse esboço, nossa primeira preocupação foi garantir que ele representasse uma alternativa aos modelos epistemológicos dominantes para o ensino de probabilidade na formação docente, ou, como sinaliza Gáscon (2014), uma crítica. Esse argumento se sustenta no termos expostos. Ao olharmos, por exemplo, a estrutura sugerida na escala de codeterminação da figura 39, encontramos diversos aspectos ligados a restrições no sentido de viabilizar uma formação que contemple as demandas formativas dos professores de matemática para o ensino de probabilidade, seja do ponto de vista do que preconiza os documentos oficiais no nível da sociedade, seja do ponto de vista dos níveis mais abaixo, que contemplam a disciplina de Introdução à Probabilidade e as praxeologias nas obras mais utilizadas pelos estudantes.

Assim, em nosso esboço, pensamos que um MER para o ensino de Probabilidade na Licenciatura deve considerar dois aspectos primordiais: 1. Aspectos relacionados ao estudo da

Probabilidade que envolvem as dimensões epistemológica, didática e psicológica; 2. Aspectos ligados às demandas formativas.

Utilizamos um esquema de cores no qual as dimensões do estudo de probabilidade assumem as cores primárias (amarelo, azul e vermelho), de modo que o bloco das demandas formativas (fundo branco como mistura de todas as cores) é composto por nuances que estão relacionadas a essas dimensões. A atividade de estudo é tomada como primordial nesse processo em alusão às reflexões Chevallard, Bosch e Gascón (2001).

Por sua vez, as demandas formativas consideram os saberes necessários à formação docente. Assim, temos demandas que atendem às questões de conteúdo, ao conhecimento pedagógico e ao conhecimento curricular (SHULMAN, 1986; SHULMAN, 2005).

Cada uma dos blocos de demandas formativas é descrito em termos gerais que estão vinculados às dimensões do estudo de probabilidade. Assim, no bloco conteúdo, por exemplo, a consideração dos conhecimentos prévios está relacionada com as questões didáticas, ao passo que as noções elementares carregam componentes psicológicos, como, por exemplo, a noção de acaso e sua formação, e os conteúdos ligados à Teoria das Probabilidades remetem à dimensão epistemológica. O mesmo raciocínio pode ser empregado aos outros blocos. Os pontilhados nas dimensões do conhecimento pedagógico e curricular também indicam essa consideração.

Um último destaque que fazemos diz respeito ao prolongamento horizontal do bloco *conteúdo* no qual sugerimos uma organização praxeológica que está ligada aos aspectos didáticos (pontilhado verde), mas também carrega elementos do bloco das demandas curriculares.

Nessa sugestão de organização, propomos uma progressão que vai de uma organização pontual até uma organização regional. Ao trazermos mais elementos de discussão para a formação do professor como as diferentes abordagens da probabilidade, simulação, construção de modelos probabilísticos e o papel da lei dos grandes números, podemos fornecer o enriquecimento do equipamento praxeológico dos futuros professores, especialmente no que tange à compreensão do que chamamos de aparato teórico-tecnológico, algo ausente nas obras que analisamos.

A lei dos grandes números é um resultado fundamental para que os futuros professores possam compreender a abordagem frequentista da probabilidade e, em especial, entender o seu papel como parte da estocástica, isto é, para compreensão da ligação entre a probabilidade e a estatística, a lei dos grandes dos números é elo principal (VU NHU, 2009).

A necessidade de incremento da organização praxeológica em MER se justifica a partir de três argumentos. Primeiro, pela de infraestrutura epistemológica para que possa ser feito um trabalho com ensino de Probabilidade e Estatística que contemple as demandas da sociedade (WOZNIAC, 2005). Segundo, pela necessidade de romper com o paradigma vigente que limita as atividades de estudo a praxeológicas incompletas (LUCAS *et al*, 2014). Por último, pela própria natureza da profissão docente, ou seja, o professor deve saber em profundidade aquilo que vai ensinar (SHULMAN, 1986).

6 UM OLHAR SOBRE A PRÁTICA: O SISTEMA DIDÁTICO EM FUNCIONAMENTO.

Sentidos

O poeta vê a cena
 acenando para poesia.
 O compositor vê a cena
 que corteja a melodia.
 O ator faz a cena
 e a cena se recria.
 O cientista pensa ver
 o que lhe diz a teoria.
 O olho cego vê a cena
 tateando sentimentos.
 Há olhos que enxergam,
 mas não veem a cena.
 Alguns verão a cena
 e olharão de lado.
 Outros com olhos de ternura
 se sentirão solidarizados.
 Todos veem a mesma cena,
 porém a cena não é mesma
 para todos.
 Por que quem se permite vê
 precisará sentir.
 Entender que a verdade
 não é nada mais
 que miscelânea de sentidos
 partilhados.

Neste capítulo, apresentaremos a análise do sistema didático que se instituiu em torno da disciplina Introdução à Probabilidade do Curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Estadual da Paraíba que é o cenário de nossa investigação.

Propomo-nos a apresentar nossas percepções e sentidos sobre o funcionamento desse sistema e a ecologia que se formou em torno do saber probabilidade. A nossa análise foi feita a partir das noções teóricas presentes na TAD, de modo que temos advogado em favor da tese de que as ferramentas teóricas têm potencial para colaborar com nossa compreensão sobre como se dá a aprendizagem no contexto institucional, isto é, como a relação dos futuros professores muda conforme sua participação e engajamento no sistema didático.

De forma mais específica, nosso objeto de pesquisa consiste em tentar investigar como essas noções permitem a compreensão dessa aprendizagem situada no contexto institucional, assumindo que os sujeitos, quando interagem nesse sistema, além de didáticos, são também sujeitos psicológicos.

A etnografia desse sistema didático consiste na descrição do cotidiano institucional desses estudantes e de sua relação com a probabilidade. Apresentaremos para essa descrição três seções: 1. Construção do contexto; 2. Estudando probabilidade em IDIP; 3. Síntese do Estudo da Probabilidade em IDIP.

6.1 CONSTRUÇÃO DO CONTEXTO

A turma de Introdução à Probabilidade 2016.2 era formada por cinco sujeitos sendo 04 (quatro) estudantes regularmente matriculados e o professor da disciplina. O curso foi ministrado em um período atípico, porque o semestre letivo só se iniciou em 28 de novembro de 2016. Consideramos que esse cenário atípico se configurou como uma primeira restrição ao funcionamento do sistema didático analisado.

Como houve um processo de contratação de novo professor para a disciplina, a primeira aula ocorreu em 22 de dezembro de 2016, ou seja, um dia antes do recesso natalino. Após o recesso natalino, as aulas foram retomadas no início de fevereiro de 2017 e seguiram o calendário até 11 de abril, quando oficialmente foi deflagrada a paralisação dos professores e técnicos administrativos da instituição que à época reivindicavam melhores condições de trabalho. Com a paralisação, a retomada da disciplina só ocorreu em 20 de julho de 2017 e foi finalizada em 11 de agosto do mesmo ano.

Em resumo, 2016.2 foi um semestre que se estendeu por quase 08 (oito) meses. Como nosso foco era no sistema didático em torno do estudo da probabilidade, das 15 (quinze) aulas registradas, restringimo-nos ao relato de 03 (três), ou seja, aquelas em que o tema central de estudo era a probabilidade. Cada uma das aulas tinha duração equivalente ao registro de 4 horas/aula, durando efetivamente em média 03 (três) horas cada encontro.

Apesar de o foco de análise ser somente nas aulas voltadas à probabilidade, acompanhamos os sujeitos durante toda a disciplina a fim de compreendermos a sua dinâmica integral. Isso foi importante para que pudéssemos entender a constituição do sistema didático principal da disciplina e o contrato didático inicial entre os sujeitos participantes do sistema.

A primeira observação que fazemos desse cenário institucional é que o SD principal (SDp)¹²⁴ da disciplina de Introdução à Probabilidade é formado em torno de uma ementa que

¹²⁴ Chevallard (1996) discute que na formação de um sistema didático, diversos outros sistemas didáticos podem se formar, por exemplo, para que o sistema didático em uma aula funcione é preciso um sistema didático maior, chamado sistema de ensino, que lhe dê suporte. Assim para diferenciar o momento em que analisamos o conjunto

prevê objetos de saber voltados à Estatística e ao tratamento de dados. Ao analisarmos a ementa, levantamos a hipótese de que a introdução à probabilidade é prescrita como um saber necessário para a compreensão de algumas distribuições que são comumente utilizadas em cursos de Estatística Básica, isto é, a probabilidade e suas noções não são tomadas como objeto central de estudo da disciplina. A distribuição das aulas ao longo do semestre reforçou essa hipótese, tendo em vista que mais de 70% do curso é dedicado a temas da Estatística Básica, ou seja, das 60 (sessenta horas) da disciplina, pouco mais de 10 h são efetivamente dedicadas para o trabalho com a probabilidade.

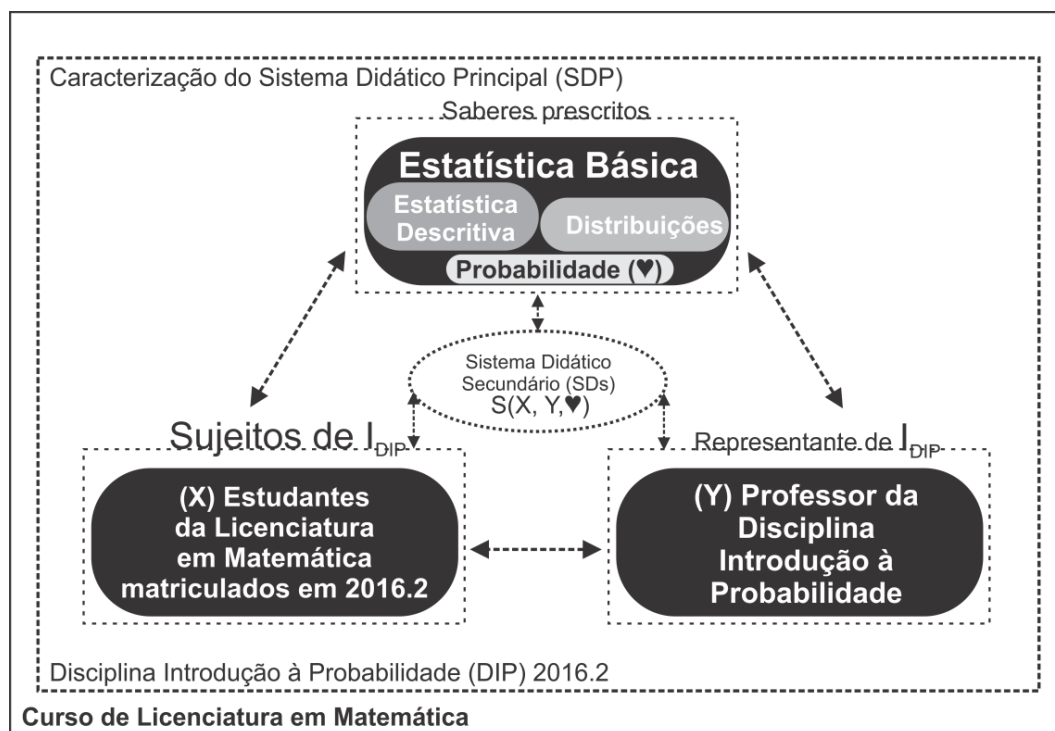
O SDp que se forma a partir da instituição Disciplina de Introdução à Probabilidade (IDIP) faz parte de duas outras instituições: o Curso de Licenciatura em Matemática e a Universidade Estadual da Paraíba. Os estudantes da licenciatura que se matricularam em 2016.2 integram os sujeitos de IDIP juntamente com seu principal representante que é o professor da disciplina. É importante destacarmos que o assujeitamento em IDIP não é necessariamente voluntário¹²⁵, uma vez que IDIP faz parte do currículo obrigatório da formação desses futuros professores. A entrada desses estudantes na licenciatura em Matemática implica a necessidade de passar por múltiplas instituições que correspondem ao universo da formação inicial de professores. O professor responsável por IDIP tem a incumbência de mediar a relação institucional dos estudantes com os objetos que correspondem aos saberes prescritos para IDIP que, como vimos, giram em torno dos conhecimentos da Estatística Básica. Nesse SDp, formase o sistema didático secundário (SDs), que é nosso foco de interesse e no qual as questões de estudo (♥) estão relacionadas com a probabilidade, os futuros professores (X) e o professor (Y) bem como todas as ajudas didáticas trazidas para o *milieu* que compõe o SDs correspondem ao nosso objeto de investigação. Na figura, ilustramos um esboço do SDp da disciplina e seus componentes:

das aulas em IDIP utilizaremos o termo SDp (sistema didático principal) e quando nos referimos as aulas específicas de probabilidade, utilizaremos o SDs (sistema didático secundário).

¹²⁵Essa observação é necessária por dois motivos. O primeiro está ligado à noção de aprendizagem situada. Para Lave a condição de adesão voluntária à comunidade é uma condição para compreensão da participação periférica das pessoas, mesmo assim entendemos que a voluntariedade se configura no momento em que os sujeitos decidiram entrar na licenciatura em Matemática, participar de um curso de formação de professores. O segundo motivo, complementar ao primeiro, é o significado do assujeitamento na TAD. Para Chevallard (2009) é a multiplicidade de nossas sujeições que nos dá o senso de liberdade. A nossa adesão a uma instituição é também uma forma de libertação. “constantemente, para testar ou exercer nossa liberdade, nós jogamos uma sujeição contra as outras, desse jeito sacudimos a dominação, por outro lado sem compensação – somos privados, pelo menos momentaneamente, do poder que nos deram, e que recuperamos ao encontrá-los. (p.3, tradução nossa)”.

« constamment, pour éprouver ou exercer notre liberté, nous jouons un assujettissement contre d’autres assujettissements, dont ainsi nous secouons le joug, non d’ailleurs sans contrepartie – en nous privant, au moins momentanément, de la puissance qu’ils nous donnaient, et que nous recouvrerons en les retrouvant. »

Figura 40 – Caracterização do Sistema Didático Principal (SDP).



Fonte: próprio autor (2018).

Como vimos nos parágrafos anteriores, a duração do SDs foi em torno de $\frac{1}{4}$ da disciplina. Comparado esse tempo didático com a análise da organização praxeológica matemática presente nas obras de referência utilizadas, podemos dizer que a probabilidade recebeu uma atenção considerável para um conjunto de noções que só ocupa uma média de 4% das obras analisadas.

Uma primeira indagação diante dessa reflexão é que a nossa presença naquele cotidiano pode de alguma forma ter influenciado no gerenciamento do tempo didático dedicado ao estudo de probabilidade. Em sua discussão sobre o processo de pesquisa etnográfica, Lave (2011) destaca essa característica desse tipo de pesquisa. Pesquisadores e sujeitos participam conjuntamente do processo de cognição.

Além disso, pensamos que a interrupção das aulas pode ter levado à necessidade de uma retomada dos conteúdos. Na ocasião da deflagração do movimento o saber probabilidade estava sendo finalizado, como veremos mais adiante na descrição das aulas.

Na caracterização que fizemos do SDp, três elementos são destacados: os saberes, os estudantes e o professor. No capítulo 5, ocupamo-nos da discussão acerca das características do saber Probabilidade e observamos que a ecologia em torno da Probabilidade em I_{DIP} é considerada problemática, tanto do ponto de vista da organização matemática presente nas obras, quanto pela própria natureza da probabilidade. Vimos que nessa instituição a

Probabilidade tem a previsão de uma vida curta, além do fato de parecer ser solicitada como ferramenta para compreensão de distribuição de probabilidades sem um aporte para discussão do seu ensino na educação básica.

Partindo dessa constatação, questionamo-nos sobre que tipo de influência essa organização praxeológica matemática e didática pode ter na relação construída/modificada pelos sujeitos.

Para responder a esse questionamento, precisamos caracterizar quem são esses sujeitos, as suas expectativas, sua relação com a probabilidade e os significados que esse saber assume nessa relação. Feitas essas considerações gerais sobre o contexto institucional, passaremos a detalhar o cotidiano de IDIP, a partir da caracterização dos sujeitos e das observações feitas durante a observação das aulas.

6.1.1 CONHECENDO OS SUJEITOS EM IDIP

Como dissemos, foram considerados sujeitos do SDp inicialmente quatro estudantes que estavam regularmente matriculados em 2016.2, que passaremos a identificar por Milena, Antonio, Kátia e Pedro. O professor da disciplina será identificado apenas como Professor.

Durante o funcionamento do SDp, Milena e Antonio tiveram uma participação mais efetiva do ponto de vista da frequência e da assiduidade. Kátia, por razões ligadas ao seu trabalho, se ausentou algumas vezes durante o semestre, mas cumpriu com a maior parte das atividades propostas. Já Pedro dava indícios de pouco engajamento, com uma frequência irregular, chegou atrasado na maior parte das aulas em que esteve presente e, durante o processo, acabou parando de frequentar as aulas e foi reprovado no componente por faltas. Para nossa pesquisa, Pedro será citado em alguns momentos da descrição das aulas, porém ele não se constitui efetivamente como um sujeito, nos moldes do que nesse estudo tratamos como sendo o sujeito didático, pois ele esteve presente em poucos momentos, talvez esse seja um dos motivos pelo qual ele abandonou IDIP. No entanto, reforçamos que a descrição do funcionamento do SDp e do SDs não estaria completa sem o papel que ele desempenha mais adiante.

O Professor responsável por IDIP é bacharel em Estatística, com Mestrado e Doutorado em Biometria e Estatística Aplicada pela Universidade Federal Rural de Pernambuco. Sua área de concentração durante a pesquisa de pós-graduação foi em torno do aprimoramento de coeficientes e métodos para o tratamento, armazenamento e qualidade da água. Sua experiência

e interesse profissional são voltadas para Probabilidade, Estatística Básica, Inferência Estatística, Estatística Experimental, Séries Temporais e Estatística Multivariada.

O Professor começou a dar aulas na licenciatura em Matemática e no bacharelado em Ciências Contábeis em 2017. Apesar de manter um vínculo temporário com curso de licenciatura em Matemática, o Professor de IDIP assumiu uma posição p fundamental dentro da instituição, como representante dos saberes ligados à Estatística e Probabilidade. Do ponto de vista do seu engajamento com a instituição, podemos observar que o Professor alia a sua formação e experiência profissional a uma presença constante nas atividades do curso de licenciatura.

Essas mesmas características são transferidas para IDIP, o que contribuiu, em nossa percepção, para fazer dessa instituição e do SDp que ali se estabeleceu um ambiente amistoso e agradável para os estudantes, mas também para nós, enquanto pesquisadores.

Aqui fazemos um destaque sobre a posição assumida pelo Professor diante do saberes ligados à Estatística e a Probabilidade na Licenciatura em Matemática. Para Chevallard (1996), a existência de um objeto está condicionada à existência de ao menos uma pessoa da instituição que mantém uma relação $R(X,O)$ não vazia, isto é, X conhece O .

O reconhecimento dos pares em relação ao Professor de IDIP faz com que ele participe da instituição. Tê-lo como um referência é colocá-lo em uma posição de destaque no seio daquela instituição. Se todo saber é saber de uma instituição e esse objeto de saber existe porque os sujeitos dessa instituição mantém uma relação com ele, talvez possamos pensar a mesma condição para a existência e o pertencimento do sujeitos na instituição. O reconhecimento dos pares é uma forma de legitimar a participação e as posições que esses sujeitos assumem na instituição.

Feitas essas considerações, começaremos a apresentar o perfil dos estudantes que participaram de IDIP.

Milena, Antonio, Kátia e Pedro têm histórias de vida distintas dentro do curso de Licenciatura em Matemática. Essas histórias parecem, pela nossa experiência, se assemelhar um pouco com o perfil médio dos estudantes da licenciatura em Matemática do CCHE-UEPB, e também da UEPB. Como vimos no trabalho de Nascimento Júnior *et al* (2012) são estudantes que enfrentam dificuldades para conciliar trabalho e estudo bem como para se deslocarem de casa para a universidade.

Milena, Antonio e Kátia são de cidades circunvizinhas a Monteiro – PB. Por ser uma cidade que concentra diversos serviços públicos e privados na região do cariri ocidental da Paraíba e também ser uma cidade fronteira, a cidade e o *campus* recebem muitas pessoas do

entorno, inclusive do Estado vizinho, Pernambuco. Apenas Pedro residia em Monteiro. Isso reflete um pouco a realidade da licenciatura em Matemática, já que cerca de 70% dos estudantes são de outras cidades.

Estudantes do curso noturno, a maioria divide os estudos com o trabalho e outras obrigações familiares, o que, de certa forma, limita as horas de estudo fora da universidade. Nenhum deles atua como docente, embora todos já tenham tido algum tipo de experiência com a docência, seja durante o estágio supervisionado, seja em eventuais substituições de professores nas escolas da Educação Básica de suas cidades. Essa última é uma prática considerada comum em nossa região¹²⁶.

Outro aspecto interessante em relação aos quatro estudantes é que nenhum deles começou o curso no mesmo período. Cada um deles fez parte de turmas diferentes. Antonio é o estudante mais antigo e está no curso desde 2010.1. Para ele, o trabalho, dentre outros intervenientes, contribuíram para que seu curso tivesse um ritmo diferente. Antonio destaca que tinha dificuldades no início do curso:

Antonio – Entrei em 2010, tive muitas dificuldades. Tive que desistir 4 períodos, não tranquei, matriculava e desistia da cadeira por questões do trabalho, mudar de cidade e tempo para estudar.

Os quatro estudantes têm idades entre 22 e 30 anos de idade e fazem a sua primeira graduação. A motivação para a escolha da licenciatura em Matemática é deve-se à afinidade dos quatro alunos com a disciplina de Matemática na época da formação escolar. Nenhum deles pontuou o desejo de lecionar como principal razão para a escolha da licenciatura em Matemática. De acordo com os sujeitos, essa identidade com a docência vai sendo descoberta ao longo das jornadas individuais:

Milena – Eu gosto de fazer cálculo, eu vim por causa da matemática. Acho legal a ideia de ser professora, mas ainda não descobri essa vocação, faço o curso porque eu gosto de matemática. Algum dia talvez eu possa me interessar em ser professora.

Kátia – Escolhi matemática por que de todas as disciplinas do ensino fundamental II, Médio, matemática era que eu mais gostava. A docência só surgiu para mim a partir do estágio

¹²⁶ Nota do autor.

supervisionado. Nas observações não fiquei com medo mais no estágio II e III sempre dava um “friozinho na barriga”.

Antonio – *Gosto de estudar matemática por que, a aprendizagem da matemática torna as pessoas mais criativas e ao mesmo tempo dinâmicas. Acho muito bonito o desenvolvimento da matemática, conhecer novas situações do dia – a – dia. Quanto à docência ainda não tenho prática, já fiz estágio de observação, estou seguro, me sentindo um professor.*

As falas de Kátia, Milena e Antonio nos fornecem elementos para refletir sobre esse processo de construção da identidade docente. O papel do estágio supervisionado, as experiências ao longo do curso, a identidade com a Matemática. Trajetórias individuais que se inter cruzam ao longo da jornada comum de cada futuro professor, nos mostram o universo de sujeições aos quais eles são submetidos e como isso atua nesse processo de construção identitária. Para Chevallard (2009) essas múltiplas sujeições são inerentes à vida de muitos professores, seja no início da carreira, seja aqueles mais experientes.

Milena demonstra certa empatia pela profissão, mas nas suas palavras está claro que “a professora ainda não foi despertada”, a relação que ela estabelece com o curso é motivada pelo estudo da Matemática. O estágio supervisionado parece não ter sido suficiente como atividade para esse despertar, diferentemente de Antonio e Kátia que declaram que esse identificação com a docência aconteceu a partir da atividade de estágio. Paiva (2008) é categórica ao destacar que é a pluralidade de atividades durante a formação inicial que contribuirá para construção da identidade docente:

Ao dar voz aos alunos e professores, e refletir com eles, num processo de ação-reflexão-ação, acreditamos que, na formação inicial, estamos introduzindo a formação continuada, preparando-os para assumirem sua identidade como profissionais da educação e que se formam continuamente e na prática. (PAIVA, 2008, p. 109)

Do ponto de vista antropológico do didático, Chevallard (2009) discute outra faceta da questão da identidade docente. Dentre os desafios ao professor recém-formado, mas também aqueles que estão nesse processo de formação, está a compreensão do funcionamento das instituições que correspondem ao habitat da profissão docente.

Para Chevallard (2009), a forma como o futuro professor lida com a Matemática pode se constituir em um obstáculo para o exercício da profissão. A naturalização do saber matemático e assunção desse saber de forma a-problemática podem contribuir para um choque de realidades, pois durante a graduação muitos desses futuros professores não são levados a

refletir sobre a natureza desse conteúdo e sobre os processos de transposição para a educação básica. Para Chevallard (2009), a relação com a matemática é problemática:

Vou limitar meus comentários a enfatizar aqui o fato do silêncio que existe entre a matemática dos professores tutores e dos professores alunos: paradoxalmente, não falamos sobre o que será um dos problemas mais graves instalada no coração da profissão! A crença, aqui é que as matemáticas ensinadas não são um problema em si, o que é problemático é a *relação dos alunos* para com os objetos matemáticos, não do *professor*, muito menos da *profissão*.¹²⁷ (CHEVALLARD, 2009, p. 9)

Pensamos que a relação mantida por Milena, Kátia e Antonio com os objetos matemáticos na licenciatura e a forma como eles enxergam a sua profissão são um aspecto a ser considerado na construção de sua relação com a probabilidade. Para tanto, realizamos a entrevista inicial indagado os três sobre sua relação com a probabilidade, a docência e o ensino de probabilidade, além das expectativas em relação à disciplina.

É importante destacarmos o papel da instituição transitória que também interfere nessa relação de Milena, Kátia e Antonio com a probabilidade e com a docência. Estamos falando da instituição que se forma com a suas participações como sujeitos de nossa pesquisa, pensamos que nossa presença, não influenciou somente no tempo didático como colocamos na introdução desse capítulo, mas na relação dos próprios sujeitos com a probabilidade. O assujeitamento de cada um deles nessa instituição desempenha uma função de chamar atenção para a reflexão de objetos ligados à probabilidade e ao ensino. Ao citar a questão também do tempo didático dedicado à probabilidade na disciplina, reconhecemos que a instituição provisória pode ter influência na organização de SDp e SDs como um todo.

Embora os estudantes tivessem trajetórias distintas no curso de licenciatura em matemática, IDIP era um ponto comum para todos, pois todos estavam cursando a disciplina pela primeira vez. Outro ponto comum era a relação mantida por estes com a probabilidade.

Kátia foi a primeira entrevistada, um pouco aflita, mas disposta a colaborar. Ela declarou que nunca trabalhou formalmente com a probabilidade, nem na escola básica, nem na universidade:

¹²⁷ Je limiterai mon commentaire à souligner ici le fait du silence mathématique qui prévaut entre professeurs maîtres de stage et professeurs stagiaires : paradoxalement on ne parle pas de ce qui va se révéler l'un des problèmes les plus aigus installés au cœur du métier ! La croyance, ici, est que les mathématiques enseignées ne font pas problème en tant que telles ; que ce qui est problématique, c'est le *rapport des élèves* aux objets mathématiques, non celui du *professeur*, sans même parler de celui de la *profession*.

Kátia – *Não eu nunca trabalhei. Não que eu me lembre. Essa é a primeira vez. Na universidade também não falamos desse assunto.*

Milena apresentou uma resposta semelhante:

Milena – *no ensino médio eu não tive oportunidade. Aqui na universidade também não, não trabalhamos ainda com probabilidade.*

Antonio também declarou que essa seria sua primeira experiência formal com probabilidade, mas ao longo da sua fala ele trouxe elementos novos, inclusive de uma possível experiência na própria licenciatura com a probabilidade, apresentando uma definição do que seria probabilidade para ele:

Antonio – *na verdade essa é a primeira experiência. No ensino médio a gente nunca viu probabilidade nenhuma. Era sempre “funções”, funções... tinha muitas greves e paralisações, talvez por isso a gente nunca adiantou nem viu o conteúdo de probabilidade. Aqui no 4º período, creio que mais ou menos, tivemos uma disciplina de matemática básica e o professor falou alguma noção, que foi mais uma introdução a probabilidade, não ficou muita coisa, sou muito leigo no assunto... o que ficou foi que probabilidades tem a ver com possibilidades que a gente vai ter que estudar de alguma coisa.*

A disciplina à qual Antonio se refere é Matemática Básica IV, um componente curricular que oferece uma discussão voltada para tópicos que são vistos no ensino médio. Nessa disciplina não há previsão do conteúdo probabilidade, no entanto, ela discute análise combinatória, o que pode ter levado a questões envolvendo probabilidade. Notamos no discurso de Antonio que, mesmo declarando ser sua primeira experiência formal, ele consegue associar probabilidades à ideia do estudo de possibilidades. Complementa, ainda:

Antonio – *quando penso em probabilidade vêm a minha cabeça possíveis acertos, possíveis erros, provavelmente sim, provavelmente não... Possibilidades.*

Observamos que a ideia de possibilidades está muito presente nas fala de Milena e Kátia, sendo que Milena acrescenta os termos evento e aleatório:

Milena – *probabilidade é assim um evento que pode acontecer e que também pode não acontecer, uma estatística assim aleatório... Possibilidade.*

Kátia – *não sei... Tem a ver com as possibilidades.*

Observamos no discurso dos três a ideia de possibilidade como uma constante. Parece-nos que os sujeitos apresentam ideias intuitivas sobre o conceito de Probabilidade, trazendo a complementariedade de termos como “aleatório”, que apoiam esse discurso intuitivo, mas não cumprem outra tarefa senão apoiar essa noção de possibilidade presente nos discursos. Para nos certificarmos dessa impressão, questionamos ao longo da entrevista inicial sobre o significado para eles dos termos “acaso” e “aleatório”.

Kátia – *não sei... assim, é algum coisa que ocorre de surpresa, acaso... aleatório... vou escolher pessoas, isso é aleatório.*

Milena – *probabilidade é trabalhar com o aleatório, não são coisas certas, diferente de uma porcentagem que já tem um valor definido certo, probabilidades podem acontecer ou não. É como jogar na megasena, a probabilidade está lá, você pode ter a chance de ganhar ou não, é aleatoriamente. O acaso pode acontecer ou não, o aleatório tem os números lá... você quer o número 10 você coloca a mão lá e pode tirar ou não o 10.*

Antonio – *o acaso é coisa atípica, pode acontecer ou não. Aleatoriedade é o que roda, as informações estão mudando a cada momento, faz uma pesquisa ela dá um resultado, faz a mesma pesquisa ela dá um resultado aproximado... acho que seja isso.*

As falas dos três sujeitos demonstram, mais uma vez, que, mesmo que não tenham tido uma relação formal com a probabilidade, alguns elementos estão lá. Cremos que eles mantêm uma relação muito próxima das concepções não probabilística da realidade (NPR) e probabilística intuitiva (PI), conforme Azcárate Goded (1996).

A fala de Milena, que declarou nunca ter estudado probabilidade, está sempre atrelada à situação “ocorrer” ou “não ocorrer”. Assim, o termo “possibilidade” parece assumir um carácter binário, isto é, “sim ou não”, embora no seu discurso ela introduza, mesmo que de forma superficial, essa ideia de aleatoriedade. Ela traz para o discurso a “megasena”, o sorteio de um número, para falar em acaso e aleatoriedade, mas não demonstra no seu discurso a presença de elementos ostensivos sobre o que espera numa relação com saber probabilidade. Por exemplo, um sorteio não é necessariamente um experimento aleatório, se não forem garantidas certas condições, o mesmo ocorre com a noção de equiprobabilidade.

Quando Kátia declara o evento “escolher pessoas”, não está explícito que isso seja feito de forma aleatória, embora para ela essa pode ser uma analogia intuitiva. De certa forma, tanto na fala de Milena, quanto na de Antonio, há um componente comum sobre o aleatório que é a “imprevisibilidade”.

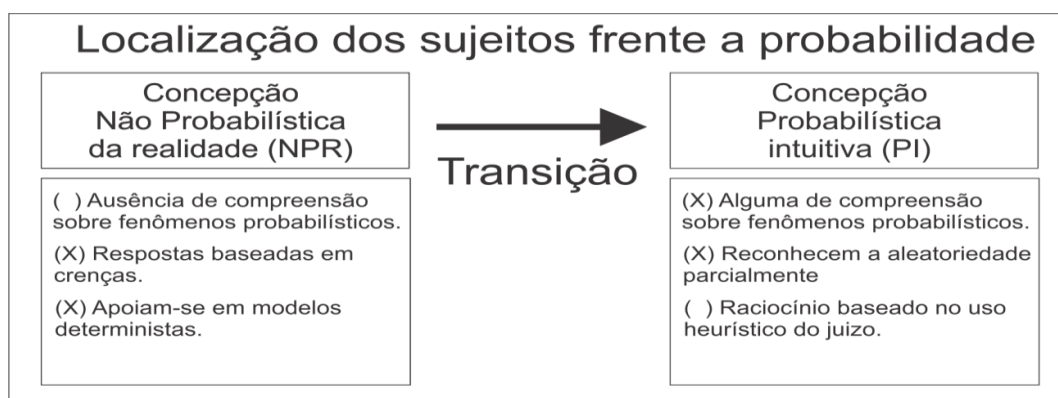
Eles resguardam no seu discurso uma negativa no que diz respeito a terem estudado formalmente probabilidade, reduzem o conceito a ideias de possibilidades de forma binária, ou seja, num sentido determinista, é aquilo que ocorre ou não. Mas ao mesmo tempo trazem a incerteza como um componente comum.

A ausência de um discurso mais elaborado em suas definições que remeta a aspectos mais formais sobre a probabilidade, como por exemplo, a presença de objetos ostensivos na resolução das atividades, parece indicar que o equipamento praxeológico desses sujeitos em relação à probabilidade ainda está em processo de formação, porém existem elementos intuitivos que indicam alguma concepção sobre o que seja o objeto probabilidade.

Nesse ponto, vamos nos valer dos argumentos de Chevallard, Bosch e Gascón (2001) e Lave (1988), que reconhecem de alguma forma que a cognição, ou a aprendizagem, não se encerra nem está limitada à instituição escolar. A “megasena” é provavelmente um elemento que faz parte do cotidiano de Milena e de tantos outros estudantes. Dessa forma, pensar na razão de ser da probabilidade para cada um dos estudantes é assumir que ela assume diferentes significados que não se encerram na instituição escolar. Do ponto de vista da abordagem antropológica, a probabilidade, enquanto um saber, pode assumir características e finalidades diferentes em cada instituição, os múltiplos assujeitamentos influenciam a relação pessoal $R(X,O)$ dos indivíduos.

Vimos em Azcárate Goded (1996) que, enquanto a concepção NPR (não probabilística da realidade) é caracterizada pela falta de compreensão sobre fenômenos probabilísticos, na concepção PI (Probabilística intuitiva), há a presença de alguns elementos como aleatoriedade, porém de forma parcial. Não nos sentimos à vontade em declarar essa “falta de compreensão”, porém não podemos dizer que eles compreendem e assumem a aleatoriedade sob múltiplas representações, como na concepção emergente de probabilidade, então, pensamos que nossos sujeitos estejam em momento de transição das duas concepções de probabilidades, como sugerimos na figura:

Figura 41 – Localização dos sujeitos frente a probabilidade.



Fonte: Próprio autor (2018)

Para compreendermos e apoiarmos essa localização, complementamos a entrevista inicial com questionamentos sobre o ensino de probabilidade. Quando questionados sobre a possibilidade de construir e executar um plano de aula sobre probabilidade em um curto espaço de tempo, todos disseram que não teriam como, porém se dizem capazes caso houvesse um tempo maior para o planejamento:

Antonio – *em uma semana, por exemplo, primeiro eu ia procurar um professor mais capacitado para me dar orientações, tem também muita EAD em relação a isso, vídeos no youtube, pegava as noções básicas, conceitos, sobre o assunto.*

Milena – *eu precisaria de tempo, estudar o conteúdo.*

Kátia – *com tempo, eu poderia sim, buscar em livros, internet, compreender o assunto e poder fazer a aula.*

Vemos, nas respostas, que eles parecem se sentir capazes de ensinar de probabilidade, desde que tenham tempo para estudar e compreender o assunto. Nas suas respostas, eles fazem menção, com exceção de Antonio, à busca de livros, de outros materiais, inclusive na internet, sobre o assunto. Para Antonio, conversar com um professor sobre probabilidade seria essencial; isso talvez reflita um pouco suas expectativas sobre a disciplina de Introdução à Probabilidade e o papel a ser desempenhado pelo Professor:

Antonio – *aah, se essa aula fosse depois da disciplina. Com certeza, teremos mais condições, primeiro pela capacidade dele (do professor) como o enriquecimento de informações que vamos ter.*

Notamos que as expectativas de Antonio são centradas na posição p assumida pelo professor na qual falamos anteriormente. Para Antonio, é esperado que o Professor desenvolva um trabalho que dê condições para que eles possam aprender Probabilidade, mas também ensinar. Para Kátia e Milena, as respostas são similares de modo que as mesmas destacam “as melhores expectativas em relação à disciplina e ao trabalho do Professor”.

Outra observação importante é quanto à crença de que, para ensinar determinado conteúdo, necessitamos apenas aprender as técnicas e conceitos relacionados ao conteúdo. Essa é uma crença muito forte nos cursos de licenciatura em Matemática conforme destacam Moreira e David (2005). Se consideramos o esboço do modelo epistemológico de referência para o ensino de Probabilidade que apresentamos, veremos que as questões relacionadas ao estudo desse saber, por parte dos futuros professores, envolve questões mais complexas. A articulação entre as diferentes dimensões dos saberes necessários à formação docente é tema de debate recorrente na licenciatura (MOREIRA; DAVID, 2005).

Na fala dos sujeitos de nossa tese, há ainda um traço comum que gostaríamos de explorar: o papel das aulas e o material disponibilizado na internet. Chevallard, Bosch e Gascón (2001) já destacam que, quando se forma um sistema didático, muitos outros sistemas didáticos subjacentes a ele podem ocorrer. Assim, não é estranho pensar que muitos dos futuros professores, na qualidade de estudantes, buscam outras fontes e mantêm uma relação didática com outros meios que cumprem, dentre outras funções, complementar o trabalho de estudo que é feito em sala de aula:

Milena – assim, não só na aula de probabilidade e estatística, que a gente recorre ao youtube, como também outras aulas, tipo análise. Essas aulas ajudam bastante, às vezes o aluno tá com dificuldade naquela disciplina, ele começa a ver os vídeos, os professores vão explicando, às vezes é até melhor que na sala de aula, porque já aconteceu comigo de eu não entender a aula, mas eu vou lá no youtube assisto à aula, não só pra faculdade, mas também em provas de concurso.

Perguntamos também aos futuros professores sobre os conhecimentos prévios ligados ao estudo da probabilidade. Eles não apresentaram uma resposta embora algumas palavras-chave tenham sido apresentadas, como “porcentagem” e “fração”.

Em Cavalcante, Andrade e Régnier (2016), encontraremos situação semelhante. Nesse estudo os estudantes da licenciatura que não haviam cursado a disciplina de Introdução à

Probabilidade manifestavam dificuldades em elencar ou citar conhecimentos prévios necessários para o seu estudo.

Sobre o papel e a importância da Probabilidade na educação básica, os futuros professores foram unânimes em declarar sua importância, especialmente, ligando tal saber à compreensão de fatos e situações do cotidiano:

Milena – É importante, eu acho que a probabilidade está em toda parte, o exames de paternidade, ali usa a probabilidade, a porcentagem.

Ao final da entrevista, discutimos com cada um dos sujeitos as ideias presentes no problema de Monty Hall. Explicamos como funcionava o programa de tv simulamos com eles algumas rodadas. Em seguida, solicitamos que nos explicassem as estratégias que adotaram na decisão de mudar ou não de porta. O número de simulações para cada sujeito foi o mínimo possível, apenas 5 para cada, de modo que eles apresentaram os seguintes resultados:

Quadro 27 – Sumário das tentativas do problema de Monty Hall.

Sujeitos	Antonio		Katia		Milena	
	Mudou?	Ganhou?	Mudou?	Ganhou?	Mudou?	Ganhou?
01	Não	Não	Não	Não	Não	Não
02	Não	Não	Não	Não	Não	Não
03	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
04	Sim	Não	Sim	Sim	Sim	Não
05	Não	Não	Sim	Não	Não	Sim

Fonte: próprio autor (2018).

Como vemos no quadro acima, há uma tendência dos três sujeitos em não mudar de porta. Em 60% das rodadas, preferiram permanecer com a primeira porta escolhida. Embora a amostra seja pequena, vemos que o índice de acerto dos três individualmente foi de 20%. Antonio foi o único que não ganhou nenhuma rodada. Cada um trocou de porta duas vezes, e ganharam um vez mudando (Kátia na 4ª rodada) e uma vez “não mudando de porta” (Milena na 5ª rodada).

As respostas para esse comportamento são baseadas na “crença de que permanecer é melhor”, pois se já tiver escolhido a porta certa já ganhou, se não já perdeu de qualquer forma. Vemos nas respostas dos sujeitos explicações que não informam uma compreensão da ideia de aumento ou diminuição das chances de ganhar, permanecendo ou mudando de porta:

Antonio – eu permaneceria, escolhi a 1, a 3 não tem o prêmio, permaneceria na 1, pois a probabilidade do prêmio em relação ela está na porta 2 é diferente... sabe é uma intuição, o 1 é sempre o início do jogo, então ninguém nunca imagina que vai estar nela, se não está na 3, então vai estar na 1 e não 2.

A resposta de Antonio é similar à de Kátia e Milena e está balizada pela crença de que a porta que ele escolheu deve ter ou não o prêmio. Isso parece ser a segurança que ele tem, ganhar ou não. Não há na sua fala elementos que caracterizam uma decisão apoiada em um raciocínio probabilístico mais elaborado. Para ele é a intuição. Lembramos que é essa mesma intuição que leva a decisões equivocadas como vimos em Mlodinow (2009) e também no trabalho de Moura e Samá (2016), para quem a ilusão da equiprobabilidade age como um fator negativo, pois muitos sujeitos não percebem que na segunda fase do jogo de Monty Hall as chances são alteradas.

Para confirmar nossas impressões acerca da relação dos sujeitos com a probabilidade, além da entrevista inicial, aplicamos o questionário 01, juntamente com a parte 01 das questões de probabilidades.

O questionário 01, como discutimos na metodologia, tinha como objetivo verificar como estudantes se relacionavam com os conceitos elementares de probabilidade, a partir de noções como acaso, espaços amostrais, equiprobabilidade, concepção laplaciana e concepção frequentista de probabilidade. O questionário foi aplicado após a entrevista inicial.

A primeira questão tratava sobre as concepções de acaso que os estudantes poderiam manifestar. De acordo com Silva (2002), pelos menos três concepções de acaso são utilizadas na literatura corrente: o acaso como desconhecimento de causas; o acaso como conjunto de causas desconexas; o acaso como ausência de causas. (SILVA, 2002).

A primeira definição, segundo Silva (2002) está ligada a uma concepção mais clássica da Probabilidade, que tem Laplace como seu principal representante. Vimos na entrevista que os sujeitos não conseguiram elaborar ou formular um discurso com clareza sobre a noção de acaso. No questionário validado por Silva (2002), ele apresenta algumas definições e pede para que os estudantes marquem as alternativas que parecem mais adequadas para explicar a noção:

Quadro 28 – Extrato do questionário 01 – 1ª questão.

- a) () O acaso é um conjunto de causas imprevisíveis e independentes entre si, que não se prendem a um encadeamento lógico ou racional.
- b) () Dizemos que um fenômeno intervém o acaso quando todas as causas do fenômeno são conhecidas.
- c) () Dizemos que num fenômeno intervém o acaso quando nem todas as causas do fenômeno são conhecidas.
- d) () Dizemos que num fenômeno intervém o acaso quando as causas do fenômeno são desconexas
- e) () Num evento intervém o acaso quando as causas do fenômeno apresentam um encadeamento lógico de modo que se pode determinar o resultado do fenômeno antes da ocorrência do mesmo.
- f) () Dizemos que num fenômeno intervém o acaso quando o fenômeno não possui causa(s).

Fonte: adaptado de Silva (2002)

Observamos que as alternativas *a*, *d*, *c*, *f* remetem às concepções que Silva (2002) apresentou. As alternativas *b* e “*e*” são consideradas incoerentes para definir acaso.

Antonio assinalou alternativa *c*, ou seja, para ele o acaso pode ser considerado quando não há o conhecimento de todas as causas. Durante a entrevista, ele admite o acaso como “uma coisa atípica, algo que pode acontecer ou não”. Kátia respondeu a alternativa *d*. Para ela, o acaso seria um conjunto de causas desconexas. Na sua fala, ela respondeu que não sabia explicar, apenas que “algo que aconteceu por acaso”. Milena respondeu a alternativa *a*. O acaso nesse alternativa é apresentado como causas imprevisíveis.

De certa forma, observamos que as respostas dos três sujeitos cobrem as principais concepções sobre o acaso. Notemos que isso não indica propriamente a concepção que esses sujeitos têm do acaso, mas as asserções com as quais eles se identificaram, tendo em vista a dificuldade de elaborar um discurso na entrevista inicial. No entanto, indica também que suas intuições sobre o acaso se alinham com as principais concepções sobre o assunto.

A noção de acaso raramente é trabalhada em livros didáticos ou em situações de ensino. Dessa forma, uma noção central para compreensão do conceito de probabilidade frequentemente não é levada em consideração no processo de ensino (SANTANA, 2011).

Em relação à noção de aleatoriedade e experimentos aleatórios, apresentamos as seguintes alternativas:

Quadro 29 – Extrato do questionário 01 – questão 02.

- a) os experimentos cujos resultados podem ser previstos, isto é, cujos resultados podem ser determinados antes de sua realização.
- b) os experimentos que se realizam por acaso.
- c) os experimentos que, ao serem realizados repetidas vezes, em condições semelhantes, apresentam resultados variados, não sendo possível portanto, a previsão lógica dos resultados.
- d) Os experimentos que, ao serem realizados repetidas vezes, em condições semelhantes, apresentam resultados constantes, sendo possível portanto, o estabelecimento prévio dos resultados.
- e) Nenhuma das alternativas anteriores.

Fonte: adaptado de Silva (2002)

Diferente da questão 1, essa questão apresenta a estrutura de múltipla escolha, com apenas uma alternativa correta. Os sujeitos responderam inicialmente a letra D. Nessa alternativa existe uma incoerência em relação à noção de experimento aleatório que é a previsão de resultados constantes. Kátia foi a única que se mostrou incomodada com a expressão “constante” e depois mudou sua escolha para alternativa *c*, que seria a alternativa correta.

Kátia – *eu vou mudar, porque se é aleatório o resultado não deve ser constante.*

Embora Kátia tenha mudado a resposta, o fato de todos os sujeitos terem respondido a alternativa *d* mostra que a relação com as noções que envolvem a probabilidade parece ser marcada por ideias intuitivas, com poucos traços de formalização em relação às organizações praxeológicas de referência que analisamos na seção 4.

Na questão 03, perguntamos aos sujeitos sobre a definição de espaço amostral. Todos responderam corretamente a opção *a*.

Quadro 30 – Extrato questionário 01 – questão 3.

- a) um conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento.
- b) qualquer conjunto de resultados de um experimento aleatório.
- c) um subconjunto de qualquer evento.
- d) um espaço formado pelos eventos: certo, impossível, elementar, união, intersecção e complementar.
- e) nenhuma das alternativas anteriores

Fonte: adaptado de Silva (2002)

As questões 4 e 5 traziam aos sujeitos a primeira solicitação da utilização do conceito de probabilidade. Dependendo da relação deles com a Probabilidade, esperávamos que

surgissem alguns elementos praxeológicos. Na ausência destes, entenderíamos que esses elementos não estariam formados, o que se confirmou na aplicação do questionário. Na questão 4, é apresentado um experimento onde são lançados um dado e uma moeda (não viciados) simultaneamente. Desse lançamento pedimos que eles calculassem a probabilidade de ocorrer um número menor que 5 e de se obter cara na face da moeda.

Em seguida os sujeitos foram convidados a discutirem a natureza do espaço amostral que é apontada na questão. O mesmo ocorreu com a questão 5 que, em vez de dados e moedas, trazia o lançamento de uma tacinha como experimento a ser discutido.

Os estudantes não apresentaram solução para nenhuma das questões. Nem mesmo rudimentos praxeológicos foram apresentados.

O reflexo dessa dificuldade dos sujeitos foi percebido no questionário 2, que tratava somente de questões de probabilidade. Novamente os sujeitos parecem ter sentido dificuldade e não conseguiram apresentar respostas para as questões, mesmo as mais simples, em que a probabilidade teórica poderia ser aplicada, como lançamento de dados, ou a previsão do nascimento de bebês do sexo masculino ou feminino em casal.

Nas duas questões, as técnicas para resolver as tarefas pedidas envolviam a descrição do espaço amostral. A partir dessa descrição, o próximo passo seria a identificação dos subconjuntos solicitados e, por fim, a aplicação da probabilidade teórica.

Para nós, a dificuldade em resolver tais questões indica mais fortemente nossa reflexão inicial sobre o equipamento praxeológico dos sujeitos. Do mesmo modo, responder corretamente o que seja um espaço amostral não necessariamente quer dizer que os sujeitos sabem empregar técnicas para sua descrição.

De modo geral, os questionários ajudaram na percepção de um panorama da relação dos sujeitos para com a Probabilidade e suas noções, quadro que se admitiu por hipótese baseada no estudo exploratório 2, e que começou a se desenhar na entrevista inicial com os sujeitos.

Ao longo da descrição das entrevistas e dos comentários sobre os questionários, vimos que os sujeitos mantêm uma relação intuitiva com a Probabilidade e suas noções que se distancia das organizações praxeológicas de referência. Ao entrarem em IDIP, os sujeitos se encontravam, em nosso entendimento, em um processo de transição entre a concepção não probabilística da realidade e a probabilística intuitiva.

Podemos dizer que os sujeitos apresentam uma relação que está distante de um juízo de conformidade em relação a R(I,O), previstas no contrato institucional de IDIP, conforme vimos na análise praxeológica na seção 4.3.1.

Apesar de apontarem a importância do conceito e a possibilidade de ensiná-lo, caso tenham tempo hábil para planejar esse ensino, os futuros professores revelaram certo desconforto quanto à possibilidade de responder questões envolvendo a probabilidade, expressões como “será que eu sei?”, “acho que não vai dar” foram comuns aos três sujeitos. Mesmo assim, pedimos que tentassem resolver ou que deixassem em branco as respostas, caso não conseguissem.

Os questionários entregues em branco, mesmo depois de alguma tentativa, indicavam para nós que essa relação intuitiva que as entrevistas evidenciaram estava em consonância com o não emprego de técnicas para a solução das tarefas propostas. De certa forma, usando os termos da TAD, podemos dizer que no início da formação do sistema didático os estudantes tinham uma relação de não-conformidade com o saber probabilidade, embora não considerássemos uma relação vazia, o equipamento praxeológico não estava formado.

Esse quadro nos leva a algumas indagações em relação ao processo de formação pelo qual os sujeitos estavam prestes a passar. O SDp e consequentemente o SDs formado em I_{DIP} dão conta de promover mudanças na relação pessoal desses sujeitos para que $R(X,O)$ evolua para um quadro de conformidade em I_{DIP} ? Ao entrar em I_{DIP} , os três sujeitos têm posições semelhantes em relação à Probabilidade; ao mudar de posição, $R(X,O)$ muda de forma igual para todos? Tendo em vista a infraestrutura problemática em relação à Probabilidade no currículo prescrito de I_{DIP} , como isso refletirá em $R(X,O)$? Que fatores intervêm na construção de $R(X,O)$? Como a participação e o engajamento dos sujeitos pode favorecer essa construção?

Para responder a essas questões, iniciaremos a descrição do funcionamento do SDp, com foco no contrato didático estabelecido, na dinâmica das posições dos sujeitos, na evolução das praxeologias e na consequente formação do equipamento praxeológico dos sujeitos.

6.2 ESTUDANDO PROBABILIDADE EM I_{DIP} .

Na descrição dos sujeitos de nossa pesquisa e da sua relação com a probabilidade, pudemos observar que, se considerarmos a Probabilidade e suas noções (O_p) como um dos objetos de estudo em I_{DIP} , é plausível afirmar que Antonio, Kátia e Milena conheciam O_p antes de entrarem no curso de Introdução à Probabilidade. Ao fazer essa afirmação, remetemo-nos ao que significa conhecer um objeto O para a antropologia cognitiva, isto é, os sujeitos de nossa pesquisa mantinham previamente uma relação $R(X,O_p)$ não vazia. Em outras palavras, poderíamos dizer que as entrevistas e os questionários revelaram que os futuros professores sabiam da existência de O_p , embora $R(X,O_p)$ fosse, naquele momento, diferente e distante da

$R(I_{DIP}, O_p)$, mas essa relação existia. O que corrobora a tese de Chevallard (1996) de que as pessoas, por vezes, constroem a relação com os objetos de saber mesmo antes de se assujeitarem a instituições de ensino.

Reconhecer que $R(X, O_p)$ dos nossos sujeitos era não-conforme do ponto de vista do contrato institucional esperado em I_{DIP} é, de alguma forma, dizer que $R(X, O_p)$ não só existia, como era esperado que os futuros professores pudessem passar para uma posição onde essa $R(X, O_p)$ estivesse em conformidade com a instituição. Assim, a expectativa era que essa relação pudesse ser modificada. Aprender no sentido da antropologia cognitiva é fazer com que $R(X, O_p)$ se altere de modo que $R(X, O_p) \approx R(I_{DIP}, O_p)$.

O Professor de I_{DIP} , que também mantém uma relação pessoal com O_p , era o responsável pela condução do processo que deveria desencadear essa mudança, ou seja, a responsabilidade de ensinar probabilidade estava atrelada às expectativas do contrato institucional. “Resolver problemas que envolvam conceitos elementares de probabilidade” era um dos objetivos literais de I_{DIP} . Era esperado que, ao final da participação dos futuros professores nesse processo de ensino, eles tivessem condições de resolver tais problemas, algo que os questionários que aplicamos revelaram que os mesmos não sabiam fazer antes da sujeição.

Para Lave (1988), aprender é participar, engajar-se, assumir para si a responsabilidade de cumprir determinadas atividades individuais e coletivas em determinado contexto. Um espaço cotidiano onde partilhar e negociar significados é sempre carregado de expectativas, portanto, é um espaço social, mas também subjetivo. Nesse processo se manifestam comportamentos que traduzem como se dá essa aprendizagem.

Não pensamos que I_{DIP} tenha se constituído como uma comunidade de prática no sentido estrito de Lave e Wenger (1991), porém reconhecemos que seu papel é propiciar aos futuros professores a vivência com O_p . Essa vivência, enquanto exigência curricular da formação de professores de Matemática, requer a participação desses sujeitos que tiveram que assumir objetivos comuns e cumprir determinadas atividades.

I_{DIP} passou por alguns meses a fazer parte do cotidiano da formação inicial daqueles futuros professores. A cada encontro, a cada noite de quinta-feira, havia um compromisso de estar presente, de ser parte de um projeto. Estudar Probabilidade era um dos focos daquele espaço coletivo. Esse estudo deveria ser capaz de conduzi-los a resolver problemas que requeriam esse saber.

No entanto, sabemos que ao futuro professor não basta resolver problemas envolvendo determinado saber. É preciso algo mais que garanta a possibilidade também de que este, quando for professor, possa construir e gerenciar espaços de estudo para os seus alunos. Os futuros

professores estavam ali não só para aprender Probabilidade como também aprender sobre como ensina-la.

Com relação a esta última asserção, sabemos que tais expectativas não estavam previstas no contrato institucional de I_{DIP} , porém era parte das aspirações dos futuros professores, pois eles acreditavam, como vimos na descrição da entrevista inicial, que após a participação em I_{DIP} estes teriam condições de ensinar Probabilidade.

Essas se traduzem como expectativas tácitas do processo de formação de professores de Matemática que, como veremos em vasta literatura, sempre carregou o mito de que “o bom professor de matemática é aquele que sabe matemática”. Não é sem razão que a ênfase dos currículos de formação de professores de Matemática esteve sempre centrada em uma abordagem que valoriza os saberes específicos (conteúdos) em detrimento dos saberes pedagógicos (CURY, 2012).

Como descrever o que ocorre no interior de I_{DIP} ? Como revelar os fenômenos relativos à cognição dos sujeitos em I_{DIP} ? Como caracterizar o funcionamento do sistema didático em I_{DIP} ?

Para Lave (1988), Lave e Wenger (1991), a resposta para essas questões passa, dentre outros aspectos, pelo reconhecimento de que a cognição é um processo que é situado nesse contexto e que deve ser entendido como uma prática social. De fato, a formação de professores Matemática é uma prática social com diversas dimensões, dentre elas o Curso de Licenciatura. Descrever esse cotidiano, as posições legítimas e periféricas que os sujeitos assumem é uma forma de aprender sobre a cognição desses sujeitos.

Para TAD essa prática institucional se revela também no estudo das condições e restrições para a difusão de O_p . Uma ensaio deste estudo foi realizado na seção 4 de nosso projeto. Lá discutimos O_p como um objeto institucional. Vimos na discussão de seu desenvolvimento histórico e epistemológico que em sua aprendizagem interferem diversos fatores de ordem didática, epistemológica e psicológica. Vimos também que a ecologia presente nos livros-texto tidos como referência para I_{DIP} era problemática. Esse estudo nos permitiu caracterizar o contrato institucional em I_{DIP} e localizar o estudo de O_p na escala dos níveis de codeterminação.

De fato, a ênfase do estudo praxeológico feita a partir da TAD centrou-se na ecologia de O_p dando à nossa análise um viés epistemológico. Porém, quando fazemos essa análise, surgem para nós possibilidades de discutir sobre como esse contexto institucional influencia na mudança de $R(X, O_p)$. As ferramentas que usamos apontam para importantes características do

funcionamento do sistema didático, mas sem o olhar sobre a prática, não temos condições de ir além.

É esse entendimento que nos levou a acompanhar cada um dos sujeitos na sua participação e engajamento nos sistemas didáticos em torno de I_{DIP} . A caracterização de $R(X, O_p)$ através das entrevistas e questionário nos revelou o estágio inicial dessa relação. Temos plena consciência de que, embora Antonio, Kátia e Milena tenham manifestado certa semelhança na sua relação pessoal com O_p , defendemos que $R(X, O_p)$ é única para cada um deles, da mesma forma reconhecemos que, apesar de juntos comporem a turma 2016.2 de Introdução à Probabilidade, cada um assumiu seu papel, construindo e modificando sua relação com O_p à medida que participava de I_{DIP} .

Para descrevermos esse processo, valemo-nos da observação participante e da análise do contrato didático que ali se estabeleceu. Ao passo que os sujeitos iam participando, tentamos localizar e identificar mudanças no equipamento praxeológico desses sujeitos, ou seja, tentamos perceber as mudanças em $R(X, O_p)$.

6.2.1 O PRIMEIRO ENCONTRO COM I_{DIP} E SEUS OBJETOS

A entrada em I_{DIP} pelos sujeitos foi inicialmente marcada por um período de incerteza institucional. Como mencionamos anteriormente, o semestre 2016.2 começou no final de novembro de 2016. Em virtude da burocracia para a contratação do novo professor para a disciplina, a primeira aula só ocorreu em 22 de dezembro daquele ano. A demora em iniciar a disciplina e a incerteza de quem seria o professor deixaram os futuros professores apreensivos.

Quando fizemos a entrevista inicial, eles já estavam matriculados na disciplina, mas não conheciam o professor pessoalmente. O primeiro contato entre a turma e o professor foi na aula do dia 22 dezembro.

A aula estava prevista para as 18h, mas, devido às dificuldades dos estudantes que se deslocam de outras cidades, ela só começa efetivamente a partir das 18h30min. Como já havia feito um contato prévio com os sujeitos e também com o Professor da disciplina, a presença de um pesquisador na sala de aula já era aguardada. Para esse primeiro encontro com a turma, não planejamos a realização de videografia. Estas ficaram restritas aos momentos de estudo com a Probabilidade. Utilizamos como principal instrumento de coleta de dados para esse encontro as anotações no diário de bordo de nossa observação. Nosso objetivo era observar o estabelecimento do SDp em I_{DIP} .

Chegamos às 18h e logo em seguida o Professor chegou. Ele trazia o equipamento de projeção. Conhecemo-nos pessoalmente, naquele momento, e falamos sobre os objetivos da pesquisa. O professor se mostrou solícito e demonstrou interesse em colaborar com o estudo. Fez um comentário sobre o papel da Probabilidade na sua pesquisa, e sobre sua predileção por trabalhar com aplicações que envolvem conhecimentos da Probabilidade.

Explicamos que o nosso papel na primeira parte da disciplina seria o de observador, sendo que a coleta seria mais efetiva a partir do momento em que eles estivessem trabalhando com a Probabilidade. Os estudantes começaram a chegar: primeiro Milena, seguida de Antonio e Kátia. O professor fez a instalação do projetor multimídia e consultou a turma sobre a possibilidade de esperar a chegada de Paulo. A turma foi unânime em dizer que não se importava de esperar. Paulo chegou por volta das 18h45min e logo em seguida o professor iniciou a aula.

Ele fez sua apresentação, falando da formação acadêmica e deixou claro que estava feliz com a possibilidade de lecionar no *Campus*, pois ele também era natural do cariri paraibano, embora estivesse fora há quase 10 anos. Após sua apresentação, ele perguntou os nomes de cada um dos sujeitos. Antonio, Milena e Karol sentaram-se juntos, lado a lado, e Paulo ficou afastado em uma fileira. Cada um deles disse seu nome e a cidade onde residiam. Dos presentes, apenas Paulo residia em Monteiro – PB.

O professor fez menção à nossa presença e disse que reservaria um tempo da aula para que pudéssemos explicar a dinâmica da coleta de dados. Os estudantes estavam aparentemente tranquilos com a nossa presença, já que, com exceção de Paulo, todos já tinham partilhado algum momento acadêmico conosco anteriormente.

Passado esse momento inicial, o Professor fez a apresentação da ementa da disciplina. A primeira ressalva que fez foi em relação ao nome que a disciplina recebe. Para ele, existe uma inadequação em relação aos conteúdos previstos e a denominação da disciplina. Para ele, a disciplina está mais voltada para um curso de formação em Estatística Básica. Ao fazer isso, o professor implicitamente delimitou o papel da Probabilidade na disciplina. Nós já havíamos feito essa observação na seção 4, quando discutimos a ementa de IDP e vimos também na análise praxeológica que esse papel era pormenorizado.

Antonio foi o primeiro a romper o silêncio dos alunos e perguntou se os livros da ementa tinham na Biblioteca. O professor confirmou e logo em seguida citou exatamente as obras cuja análise praxeológica fizemos.

Antonio – *Professor, esses livros da ementa tem na biblioteca?*

Professor – *tem, tem sim... inclusive esse do Bussab e do Crespo são livros muitos bons para um curso de estatística básica.*

Antonio – *qual o senhor recomenda?*

Professor – *esses dois são bons, tem outros aí... mas esse do Crespo... estatística fácil.*

Vemos no primeiro diálogo em torno do conteúdo da disciplina que o professor legitima as obras que analisamos como as mais indicadas. Ele não diz abertamente qual obra os alunos devem utilizar, mas deixa claro as que os alunos devem procurar. Antonio parece selar esse acordo tácito ao pedir que o professor recomende. Ele indica os dois, mas dá mais ênfase à obra A, inclusive citando seu título.

O professor falou sobre a preocupação em relação ao cumprimento do conteúdo programático, no entanto, garantiu à turma que o programa seria cumprido a contento. Ele se comprometeu a enviar os slides de sua apresentação e disse que não precisava anotar as informações. De alguma forma, o professor estava estabelecendo uma primeira cláusula contratual parcialmente implícita: “os futuros professores deveriam focar sua atenção na explicação”. Ele reiterou diversas vezes durante a aula que os estudantes deveriam ficar à vontade para fazer e trazer dúvidas:

Professor – *se vocês não estiverem entendendo, podem perguntar. Estamos aqui para aprender juntos. Se eu não souber, eu pesquiso: não somos obrigados a saber de tudo.*

Com esse discurso o professor demarcou sua posição dentro do sistema didático. A aula começou a se desenhar a partir de um modelo centrado na fala do professor. A posição dos futuros professores, que passaram uma parte significativa da aula em silêncio, confirmou o modelo emissor → receptor. Mesmo com esse desenho, o clima da aula era amistoso. Os alunos estavam sempre atentos e o Professor começou a exposição a partir das definições de Estatística e seus campos de estudo.

Quando explicou a diferença entre estatística descritiva e estatística inferencial, ele citou o papel da Probabilidade e a definição de processos estocásticos. Foi a primeira vez na aula que a Probabilidade entrou em cena. Ao discutir o que seria os processos estocásticos, o professor falou sobre o papel do saber como uma ferramenta matemática para apoiar as análises estatísticas, confirmando, assim, qual seria a tônica da disciplina, isto é, a razão de ser da Probabilidade em I.

Professor – na estatística inferencial, vocês vão ver a importância da probabilidade, pois vamos precisar trabalhar com variáveis aleatórias e todas elas usam probabilidade na análise estatísticas dos dados.

A partir desse ponto, o professor intensificou o ritmo da exposição. O tempo didático pareceu ser uma preocupação, apesar de reiteradas vezes ele perguntar se os alunos estavam entendendo a exposição. A partir desse ponto, uma série de termos-chave da estatística descritiva foram apresentados:

Figura 42 – Termos-chave da exposição.



Fonte: próprio autor (2018).

Durante a exposição desses termos e suas explicações, percebemos dois aspectos importantes sobre o contrato didático que parecia se estabelecer. O primeiro é que, como se tratava de um curso de estatística básica, não haveria aprofundamentos. As definições e exemplos iam sendo colocados na sequência de slides. O segundo aspecto é que o comportamento dos alunos diante do discurso do Professor, quase sempre em silêncio, parecia indicar que tudo estava sendo compreendido ou já tinha sido visto pelos estudantes. Parecia haver um entendimento por parte do Professor de que todos aqueles termos eram conhecidos ou tomados de forma naturalizada pelos alunos. Frases como “isso aqui vocês já devem ter visto” ou “isso é bem trivial” contrastavam com expressões “vocês entenderam? Podem perguntar!”.

Sobre essa nossa percepção, duas questões podem ser levantadas: qual o papel de fato da relação prévia que esses sujeitos mantêm com esses objetos diante do contrato que parece se estabelecer? Que tipo de significação estariam construindo os sujeitos diante de um curso que, pelo contrato estabelecido, não parece levá-los a refletir sobre o papel desses saberes na sua futura profissão ou mesmo como usuários da estatística?

Sobre a primeira questão, precisamos retomar dois pontos. O primeiro é a própria discussão da formação desses futuros professores desde a educação básica. Aqui nos apoiamos em Lopes (2008) e Cazorla (2009), que destacam os problemas enfrentados tanto por licenciandos, como pelos estudantes da educação básica quanto à formação em estatística e probabilística. A formação deficiente e ausente são casos muitos comuns. No entanto, lembramos que, como reconhece Chevallard (1996), a pessoa é um conjunto de múltiplas sujeições. A nossa relação pessoal com os objetos de saber não é advinda de uma única instituição. É plausível que existe alguma relação estabelecida com alguns daqueles objetos. Como, por exemplo, a média aritmética, gráficos, tabelas. Pode haver o caso dessa relação não ser conforme diante do contrato institucional, como constatamos em $R(X, O_p)$ para os nossos sujeitos, mas de alguma forma ela parece existir.

O segundo ponto está diretamente relacionado ao SDp e ao contrato didático que ali se estabelece, que diz respeito à própria natureza desse contrato. Brousseau (2008) nos ensina que, antes de compreendermos o funcionamento do contrato didático, temos que reconhecer a possibilidade e a existência de contratos que não são didáticos ou são considerados poucos didáticos.

De forma genérica, apontamos a relação didática que se estabelece I_{DIP} como a partir do modelo de emissão/recepção, porém não advogaremos que o contrato estabelecido na sala de aula é um contrato “não didático”, ou seja, aquele cujo emissor não tem uma intenção clara de ensinar algo a alguém, ou mesmo um contrato pouco didático, no qual o estudante assume a maior parte das informações passadas pelo emissor. Mas consideramos que é um contrato didático, que estabelece em uma relação didática na qual contratos pouco didáticos se manifestam.

Para explicar nossa afirmação, vamos inicialmente descrever o tipo de contrato didático que percebemos naquela aula de 22 de dezembro. Claramente o Professor, designado e legitimado pelo sistema de ensino que abriga I_{DIP} , tinha a intenção de construir um *milieu* para o estudo dos objetos em torno da Estatística Básica. Essa é uma das condições básicas para o surgimento do contrato didático de acordo com Brousseau (2008).

Para nós, as características desse *milieu* é que são pautadas de condutas que têm as características de contratos poucos didáticos, como, por exemplo, um contrato de informação onde “o emissor garante, ao mesmo tempo, a novidade e a validade de sua mensagem. Aceita prestar contas perante o receptor, que passa a ser informado e é quem ‘compra’ o enunciado, por ser novo e verdadeiro”. (BROUSSEAU, 2008, p. 63).

O Professor, na sua explanação acerca do assunto, a todo o momento se certificava de que a sua mensagem estava sendo compreendida. A concordância dos alunos com gestos positivos ou mesmo com frases curtas como “sim”, “pode continuar” parecia dar a ele essa certeza. Mas esse contrato de informação é provisório, ele evolui também para um contrato de utilização de conhecimentos que tem como características “a transferência ao informante da responsabilidade de mostrar ao informado o emprego e a utilidade dos conhecimentos que propõe”. (BROUSSEAU, 2008, p. 66).

Essa é uma característica que ainda não havíamos inserido na descrição, além das definições apresentadas, o professor ia ao longo do discurso, apresentando “aplicações” daquelas noções. Nesse ponto, vale destacarmos o papel dos sujeitos que, agora inseridos na relação didática, faziam observações como, por exemplo:

Kátia – *De onde veio (sic) esses dados, eles são reais?*

Professor – *Não, esses aqui são fictícios... mas de certa tem a ver com a realidade, por exemplo, hoje é muito difícil você ter casais com muitos filhos, muitos às vezes é um ou no máximo dois.*

Antonio – *filho demais é complicado nos tempos de hoje.*

Professor – *Realmente, eu não sei quantos filhos o professor (se referindo a mim) tem ou se tem filhos... mas a maior parte das famílias são pequenas, para tentar dar mais qualidade de vida.*

Do trecho acima, observamos que a pergunta de Kátia exige uma resposta do Professor que é acompanhada de algum tipo de justificativa. Nesse caso, ele opta por tentar contextualizar a escolha dos dados. Os dados aos quais Kátia se referia eram de uma tabela de distribuição de frequências sobre o número de filhos por casal de uma determinada amostra. A justificativa do professor encontra eco na fala de Antonio, o que autoriza o Professor a complementar seu argumento e de alguma forma os incluir na discussão. Notemos que nesse ponto há um distanciamento do saber em jogo que era a distribuição de frequências.

Essas características de evolução dos contratos pouco didáticos são previstas por Brousseau (2008):

Os contratos pouco didáticos levam em consideração o projeto de fazer com que um interlocutor, tido como sujeito epistêmico, mas não como sujeito efetivo, se aproprie de um saber. Nas relações didáticas concretas, não raro acontecem fases em que as responsabilidades do professor e do aluno distribuem-se provisoriamente, conforme diferentes variantes. (BROUSSEAU, 2008, p. 71, grifo do autor).

O autor indica que, em uma relação didática, ora o professor assume um contrato de comunicação, com a finalidade de definir a forma como a mensagem é passada, ora assume um contrato de habilidade, produção ou informação, que tenta esclarecer o sentido da mensagem, ora do contrato de utilização, iniciação ou de instrução, que se encarrega do uso daquele saber que se quer comunicar.

O Professor em IDIP assume essas responsabilidades que são aceitas pelos estudantes. Mas o que de fato transforma esse conjunto de ações e responsabilidades em contrato didático? Além da autorização do Professor como responsável pelo ensino em IDIP, característica que já havíamos assinalado, há também um fator que é a própria motivação dos sujeitos para o aprendizado desses saberes. Isso remete à ideia de devolução didática, tratada por Brousseau (2008), que implica dizer que o aluno deve aceitar em dado momento a sua responsabilidade diante das tarefas que lhe serão propostas, assim como será igualmente sua a responsabilidade de aprendizagem. Para este primeiro momento da relação didática, o acordo tácito parece ser o de que o Professor tem a obrigação de comunicar o saber, os alunos, por sua vez, se comprometem a acompanhar essa comunicação, de modo que nas atividades subsequentes eles devem demonstrar que conseguiram “aprender”.

Sujeitar-se a IDIP é, de alguma forma, aceitar que ao final do ensino certa relação com os objetos de saber é esperada. Quem determina e legitima a forma dessa relação é o Professor, mas quem constrói essa relação é o estudante. Isso torna cada futuro professor um sujeito, não somente epistêmico, mas, sim, um sujeito efetivo. Nas palavras de Brousseau (2008), esse sujeito é quem assume responsabilidades, aceita o contrato, mas também o modifica: “cada um – o professor e o aluno – imagina o que o outro espera dele e o que cada um pensa que o outro pensa... e essa ideia cria as possibilidades de intervenção, de devolução da parte didática das situações e de institucionalização”. (BROUSSEAU, 2008, p.74).

Advogar em favor de um mero sistema de transmissão de informação entre Professor e estudantes é desconsiderar que, mesmo em silêncio, cada um dos futuros professores tem expectativas, aceita jogar um jogo que acredita ser, naquele momento, o melhor caminho para o estudo daquelas noções ligadas à Estatística Básica.

As escolhas didáticas do professor como arquiteto do *milieu* definem *a priori* o que ele espera dos alunos. A gestão do tempo didático influencia na construção dos slides, na escolha dos exemplos, na forma como o conteúdo será apresentado. A epistemologia do Professor também é parte desse processo. Como bem coloca Chevallard (2009) esses fatores interferem em todo esse processo de estabelecimento do sistema didático, de fato, por vezes, se apresentam como restrições inerente à própria profissão docente.

As praxeologias matemáticas e didáticas escolhidas dizem respeito a um estudante teórico, hipotético que deveria pela sua formação ter tido contato com as noções introdutórias da Estatística Descritiva ou mesmo da Probabilidade. Porém, essas escolhas remetem também, em nosso entendimento, a uma dinâmica maior e externa à sala de aula que pode estar localizada no nível da pedagogia.

No ensino superior, em especial nos Cursos de Licenciatura em Matemática, existe uma tradição que se revela em uma prática social, na qual professores e alunos têm seu papel previamente definido. O professor assume a responsabilidade de comunicar o discurso e o aluno de recebe-lo. O contrato didático que parecia se estabelecer a partir daquele primeiro encontro era um modelo de contrato conhecido tanto pelo professor quanto pelo estudante. Isso pode ser evidenciado em alguns momentos bem comuns que podem ocorrer em muitas aulas semelhantes ao sistema de ensino que abriga IDIP.

Para caracterizar melhor o que estamos defendendo, apresentamos algumas das características desse contrato e os comportamentos esperados que foram observados durante a realização daquela aula em IDIP.

Quadro 31 – Características do contrato inicial em IDIP.

Característica	Professor	Estudantes
Aula centrada no discurso do professor	O professor conduz a aula, seu discurso introduz os conceitos, justifica sua importância, gerencia o tempo didático.	Os estudantes prestam atenção no discurso, fazem anotações se julgarem necessário. A intervenção é mínima no momento da explicação.
As técnicas são apresentadas nos exemplos. A síntese da aula é feita com uma lista de exercícios.	As definições são acompanhadas de exemplos de aplicação. O professor detalha os procedimentos mais importantes. O professor diz implicitamente o que vai estar na lista de exercício.	Quando a definição não vem acompanhada de exemplo, os alunos não fazem anotações. Quando o exemplo é detalhado, as anotações são feitas. Eles esperam uma lista de exercício.
O professor considera que os estudantes detêm os conhecimentos prévios necessários e procedimentos triviais não são detalhados.	Objetos ostensivos e não-ostensivos, considerados conhecidos, são apresentados sem uma discussão prévia.	Os estudantes não perguntam sobre procedimentos triviais, nem problematizam o papel de certos ostensivos, como, por exemplo, Σ .

Fonte: próprio autor (2018).

Diante das características apresentadas sobre o que pensamos ser o contrato didático que se estabelece em I_{DIP} , temos condições de inferir sobre a questão dos conhecimentos prévios na relação didática estabelecida. O professor parte do pressuposto de que os estudantes detêm esses conhecimentos; os futuros professores, por sua vez, parecem aceitar que perguntas que não sejam diretamente ligadas ao conteúdo que está sendo ministrado não são cabíveis. Assim levantamos algumas hipóteses a partir da observação da aula do dia 22:

1. A ausência de conhecimentos prévios ou uma relação $R(X,O)$ confusa pré-estabelecida pode atuar como um obstáculo epistemológico e didático diante do modelo contratual;

2. Os estudantes cientes dessas dificuldades tomam para si a responsabilidade de superar esses obstáculos.

Outro aspecto a ser considerado é que essas hipóteses não podiam ser comprovadas através somente da observação da sala de aula, ou seja, precisaríamos de outros instrumentos para compreendermos como essa dinâmica se desenvolve. Para tanto, recorremos às entrevistas pontuais, instrumento que utilizamos sistematicamente, para investigarmos os momentos de estudo relacionados com a Probabilidade. Por essa razão, referindo-nos à aula do dia 22, apresentamos essas percepções do contrato didático e das suas implicações como hipóteses.

Diante dessa observação, para refletirmos sobre a segunda questão que pusemos, sobre a significação dos sujeitos em relação ao momento de estudo que estavam vivenciando, temos consciência de que sem adentrar na compreensão do universo dos estudantes, seja por entrevistas, questionários etc., não temos como ir além do plano das suposições com base na nossa observação. No entanto, insistimos em frisar que é necessário fazer uma leitura a priori desse processo.

Essa leitura passa pela compreensão de que naquele contrato que se estabeleceu professor e estudantes desempenharam papéis para que o contrato didático e a relação didática avançassem. O contrato institucional a respeito do ensino de Probabilidade estava desenhado para nós através da seção 4, no entanto, esse quadro não tem como foco os saberes ligados à Estatística Básica, limitando nossa capacidade de análise, já que esse não é nosso objeto de estudo.

Para nós, isso indica, dentre outras reflexões, o papel que as ferramentas da TAD podem exercer ao nos fornecer elementos para compreensão do contexto institucional, através da ecologia que sustenta a vida daquele saber em dada instituição. I_{DIP} naquele momento não tinha

o seu foco na Probabilidade, mas estabelecia o contrato didático inicial que provavelmente regeria a relação didática que se estabeleceria em torno de O_p .

O encontro com O_p era certo e aguardado pelos sujeitos. Assim podemos pensar que conhecer o contrato didático que se estabelece inicialmente em I_{DIP} nos fornece pistas para pensar sobre como se desenha a participação dos sujeitos, as organizações praxeológicas matemáticas e didáticas desenvolvidas, e a dinâmica das posições assumidas pelos futuros professores. Para nós, essas categorias estão intimamente relacionadas com o fenômeno cognitivo, como vimos em Lave e Wenger (1991).

Na observação que fizemos da primeira aula, vimos que o Professor assume a responsabilidade de promover o primeiro encontro dos futuros professores com os objetos do saber. A evidência dessa observação é naturalmente o fato de a aula ser centrada no seu discurso. Para os futuros professores que assumem a posição de ouvintes atentos, participar significa ouvir, olhar atentamente para professor, fazer anotações quando necessário e intervir o mínimo na hora da explicação.

Antonio, Kátia e Milena assumiram essa posição e estiveram comprometidos durante toda a aula. Para eles, parecer haver uma disposição de estar ali. Nos momentos em que o professor abria espaço para o diálogo, estes participavam, como vimos no caso do questionamento sobre a origem dos dados na tabela sobre controle de natalidade.

Pedro, como citamos anteriormente, é um sujeito importante como um exemplo de participação e engajamento limitados. Durante a aula, ele permaneceu em silêncio, com um fone de ouvido na orelha esquerda e em alguns momentos se distraía ao celular. O professor algumas vezes dirigia seu olhar para Pedro, que permanecia de cabeça baixa, até que o professor quebrou o silêncio:

Professor – *você tá conseguindo acompanhar?*

Pedro fez sinal positivo com a cabeça e murmurou algo como “pode continuar”. Isso parece ter deixado o professor desconfortável e o impulsionou a reafirmar o discurso de que eles, agora se dirigindo diretamente para os demais, podiam perguntar e que estava ali para aprender conjuntamente. Pedro claramente parecia assumir uma posição diferente na relação didática. O comportamento descrito nos parágrafos anteriores parecia causar uma tensão entre o Professor e Pedro. Este de algum modo não correspondia às expectativas do Professor. Milena parece perceber esse contexto e intervêm dizendo:

Milena – *Pedro é assim tranquilo... professor... é o jeito dele.*

Professor – *Eu entendo, mas se tiver dúvidas Pedro pode perguntar.*

Em alguns momentos quando o professor ia ao quadro para dar alguns exemplos, os futuros professores faziam anotações. Pedro continuava com a mesma postura, o que leva ao Professor, mais uma vez, a dirigir sua atenção a Pedro, agora indiretamente:

Professor – *todos copiaram o exemplo? Eu já posso apagar. Pedro, posso apagar?*

Pedro parecia não se dispor ao engajamento. A aula continua e a interação entre Antonio, Kátia, Milena e o professor cresce, especialmente nos momentos em que o Professor estava no quadro, explicando algum procedimento.

Sobre esses momentos, percebemos que o segundo e terceiro momentos didáticos são concomitantes, ou seja, o professor explora o tipo de tarefa juntamente com a técnica; no entanto, não há uma explicitação de que aquilo seja uma técnica ou como aquela técnica é desenvolvida. Por exemplo, no comentário sobre as frequências relativas, o professor apresentou a tabela no quadro e em seguida mencionou os tipos de distribuição de frequência e para que são normalmente utilizadas.

Professor – *A frequência relativa nos informa o percentual das frequências individuais em relação ao todo. Por exemplo, a frequência relativa de um casal ter dez filhos é 0,05, ou seja, 5%.*

Não há, portanto, uma preocupação em detalhar a técnica, nem explicitar um discurso sobre sua razão de ser. Aqui vale lembrar Lave (1996), que destaca que, no processo de aprendizagem na prática, nem sempre o mestre tem a intenção clara de facilitar a aprendizagem do aprendiz. Vale lembrar que quando o professor mencionou sobre as frequências, falou sobre as Probabilidades.

Professor – *É importante dizer que as frequências relativas são probabilidades, elas informam a probabilidade com essas frequências aparecem.*

Antonio – *ah, então quer dizer que a probabilidade de um casal ter 10 filhos é muito menor.*

Notemos que o Professor promove para os futuros professores também um primeiro encontro entre a Probabilidade e a Estatística Básica. Antônio faz uma leitura da explicação, como uma probabilidade teórica. O professor concorda, mas faz uma ressalva em relação ao significado da probabilidade como uma frequência.

Professor – exatamente, na verdade esse é um tipo de probabilidade. Vamos ver mais à frente que existem outros tipos, ter 10 filhos em casal hoje é menos frequente.

Isso pode vir a indicar também que o Professor pretendia estabelecer uma discussão dos diferentes significados da Probabilidade. Como vimos também na seção 4, esse tipo de abordagem é feito na obra B, no entanto, a infraestrutura epistemológica não dá conta desta discussão, há uma carência de tipos de tarefas suficientemente claras para tratar as diferentes abordagens da Probabilidade, que acabam por apresentar um cenário ilusório desse tipo de abordagem.

A discussão em torno da Probabilidade e seu papel dentro da Estatística ficaram restritos a esse momento. Como não houve questionamentos dos estudantes, o professor retomou a sequência do discurso que preparou.

Outro aspecto que observamos é que não houve de forma clara uma discussão do entorno tecnológico, limitando a discussão de alguns tipos de tarefas associados à descrição de dados, à organização em tabela, à leitura de gráficos e à apresentação de algumas medidas de tendência central e de dispersão, bem como às técnicas associadas a essas medidas, caracterizando uma praxeologia matemática incompleta, do ponto de vista da organização em torno do bloco saber-fazer, e rígida, do ponto de vista da falta de exploração de técnicas alternativas.

Um momento singular foi na discussão da distribuição de classes, quando o professor apresentou uma tabela com exemplo de uma distribuição de intervalos de classes e explicou a formação desse intervalo trazendo para a discussão o papel de alguns ostensivos como Amplitude definida por $(X_{\max} - X_{\min})$, a regra do quadrado que define $i = \sqrt{n}$.

Concluimos que a aula do dia 22 esteve próxima ao modelo que Chevallard (2006) chama de monumentalista, isto é, as obras matemáticas são vistas como monumentos que devem ser visitados e apreciados pelos sujeitos dentro daquela instituição.

As aulas seguintes continuaram a tratar dos temas relacionados à Estatística Descritiva. Uma lista de exercício foi entregue aos estudantes, que deveriam tentar resolvê-la e trazer para sala com a finalidade de discutir essas questões.

As questões propostas versavam sobre tipos de tarefas que foram exploradas nos exemplos. O que já era esperado dentro do contrato didático que se estabeleceu. Ao observar a avaliação da 1ª unidade, percebemos que ela seguiu uma linha semelhante. Os temas principais da unidade previstos na ementa estavam presentes, com exceção de Correlação e Regressão.

Quadro 32 – Temas trabalhados na 1ª unidade em IDIP.

- ✓ Coleta de dados e síntese tabular, gráfica e numérica de dados.
- ✓ Medidas de posição e de dispersão.
- ✓ Assimetria e curtose.
- ✓ Box plot.

Fonte: próprio autor (2018).

No geral, as aulas seguintes tiveram a mesma estrutura contratual, mesmo nas aulas em que a proposição era discussão de questões. Essa discussão estava centrada na resolução dos exercícios no quadro pelo Professor.

No entanto, percebemos que, ao longo da unidade, Antonio, Kátia e Milena assumiram posições semelhantes, alternando através da sua participação o momento em que o professor lhe dirigia mais atenção. Pedro, por sua vez, passou a ir esporadicamente às aulas e a participar minimamente.

A avaliação marcou o final da unidade e o início da 2ª unidade. Com a preocupação de cumprir a programação da ementa, o professor reservou a primeira aula da unidade para discutir correlação e regressão. A partir desse ponto, os estudantes iriam começar a estudar Probabilidade em IDIP. Foram realizados efetivamente 04 encontros, seguidos de um momento de avaliação que finalizou a unidade e conseqüentemente a disciplina. Pedro não frequentou nenhum desses encontros, por isso, não é considerado como sujeito de nossa pesquisa.

6.2.2 ESTUDANDO PROBABILIDADE: 1º ENCONTRO

O primeiro encontro destinado ao estudo de Probabilidade aconteceu em 30 de março de 2018, duas semanas depois do término da 1ª unidade. Como dissemos na descrição da aula do dia 22, os sujeitos estavam habituados a um contrato didático centrado no discurso do professor, onde a intervenção dos estudantes é mínima no momento da explicação. Outra cláusula prevista nesse contrato é a de que o professor inicia o primeiro momento fazendo a explicação do conteúdo, seguido de exemplos, em que serão apresentados os tipos de tarefas e técnicas para resolução das atividades propostas .

Partindo desse entendimento, sabíamos que poderíamos ter nesse primeiro encontro um discurso que seria predominantemente do professor. Porém, ainda assim, não podíamos deixar de reconhecer que esse primeiro encontro era fundamental para compreensão do tipo de mudanças que se esperaria na relação $R(X, O_p)$, como, por exemplo, em relação ao equipamento praxeológico dos sujeitos.

Nesta aula, Kátia não pôde se fazer presente, o que colocava em risco a nossa coleta, pois não teríamos sua participação efetiva. Com os encontros seguintes, decidimos que Kátia trazia elementos importantes para o cenário. Kátia justificou sua ausência por questões de transporte, já que naquele dia o transporte dos estudantes de sua cidade estava com problemas mecânicos.

Aqui encontramos claramente uma restrição ao funcionamento do SDs que está relacionada com os fatores externos que interferem na dinâmica da instituição maior que lhe abriga, ou seja, a UEPB. O nível *escola* da escala de codeterminação incidiu de forma restritiva em I_{DIP} .

A sua falta foi também sentida pelo professor que como de costume consultou a turma se iria ou não esperar pela chegada da colega. Milena foi quem justificou a ausência de Kátia, mas o professor fez uma ressalva importante:

Professor – obrigado por avisar, é uma pena que não pode vir. Kátia é muito participativa, ela foi muito bem na primeira unidade.

A declaração do Professor foi importante para destacar o lugar que Kátia ocupava naquele momento, mesmo não estando presente na ocasião. A sua atuação dentro daquele contrato estabelecido parece ter legitimado o seu lugar dentro do SDp naquele momento. Em leitura teórica do contrato didático, podemos falar em uma expectativa do contrato didático.

Para essa aula, o Professor utilizou o projetor multimídia indicando que o procedimento seria análogo ao da aula do dia 22. Ele iniciou o discurso destacando os conteúdos que já tinham sido vistos fazendo uma espécie de balanço dos conteúdos trabalhados. Em seguinte, destacou qual seria o próximo passo da disciplina:

Professor – hoje, fazendo jus ao nome da disciplina, iremos trabalhar com introdução à Probabilidade. Para iniciar vamos começar contando um pouco da história da probabilidade.

O professor inicia o primeiro slide falando sobre as origens históricas da probabilidade. Ele localiza essas origens nas figuras de Blaise Pascal e Pierre Fermat, por volta do século XVII. Ele situa esses dois matemáticos como responsáveis pelas primeiras discussões do conceito e, em seguida, cita os nomes de Bernoulli e Laplace. O professor faz a leitura dos slides e vai acrescentando comentários. Após uma breve exposição histórica, ele passa a discutir os conceitos elementares.

Milena e Antonio estão atentos à leitura/explicação do professor. Antonio alterna seu campo de visão com certo padrão: quando o Professor lê, ele olha para o slide; quando o professor comenta, Antonio olha para o Professor. Milena fica a maior parte do tempo com o olhar fixo nos slides, ambos em silêncio nesse primeiro momento.

O professor inicia a exposição dos conceitos diferenciando experimentos determinísticos e experimentos aleatórios. Já nessa definição, percebemos que, apesar de considerarmos que o professor tem uma relação adequada com a probabilidade, por vezes, na tentativa de explicitar a natureza dos conceitos, alguns efeitos de contrato são manifestados, por exemplo, ao explicar o que eram experimentos determinísticos o professor faz a leitura do texto dos slides, mas sente a necessidade de explicar melhor o que é um evento determinístico, e aí destaca que são aqueles em que as probabilidades são conhecidas. Partindo da equação da posição em função da velocidade e do tempo, ele destaca que o fato de conhecer velocidade e tempo torna aquele experimento determinista. No entanto, Silva (2002) destaca que o experimento determinista é algo que precisa ser explicado com mais detalhes. Notemos que o deslize metacognitivo opera quando, na tentativa de explicar ou esclarecer o conteúdo para os alunos, o professor acaba por se afastar real do conceito, “quando uma atividade de ensino fracassa, o professor pode tentar se justificar e, para dar continuidade à sua ação, usar como objetos de estudo suas próprias explicações e seus meios heurísticos” BROSSEAU (2008, p. 82).

Não pensamos que esse efeito esteja vinculado à relação do Professor com a Probabilidade, mas, principalmente, a modelos do contrato didático que agora pode ser caracterizado como normativo. Nesse modelo, o conteúdo é central, de modo que o professor assume a responsabilidade de passar o conteúdo, reduzindo a participação do sujeito (CHARNAY, 1996).

Na definição de experimentos aleatórios, ele cita como exemplo o lançamentos de dados e moedas. Como vimos na análise praxeológica das obras A e B, especialmente na primeira, a maior parte dos exemplos de tarefas traz como contexto o lançamento de dados e moedas, o que parece marcar uma tendência dentro do ensino de Probabilidade.

Antonio complementa a fala do professor, que lhe autoriza a continuar com o exemplo:

Professor – *experimentos aleatórios são aqueles que mesmo conhecidas as condições não é possível prever seu resultado, certo? Por exemplo, o lançamento de um dado (pode ser aqui... faz o gesto de lançar o dado) não sabemos...*

Antonio – *o que vai dar...*

Professor – *isso, exatamente não sabemos o que vai ocorrer. Dado que o dado tem seis faces fica difícil prever. No caso de um dado não influenciado, essa probabilidade é de 1/6 para qualquer face do dado. Temos também o lançamento de uma moeda como exemplo. No lançamento de uma moeda pode dar cara ou coroa, esses são exemplos que exprimem o que são experimentos aleatórios. Se forem tendo dúvidas é só perguntar.*

Antonio – *hurum!*

Notemos que, quando Antonio complementa a fala, o professor começa a discorrer com mais detalhes o que dizer, inclusive cita o princípio da equiprobabilidade, embora não discuta o seu significado. Ele volta a consultar os alunos se estão compreendendo a mensagem. Mais a uma vez, cabe a Antonio autorizar o prosseguimento da aula.

Na apresentação do conceito seguinte, é explorada a ideia de espaço amostral, definido como todos os resultados possíveis de um experimento. São apresentados alguns exemplos de espaços amostrais como descrição de conjuntos:

Quadro 33 – Extrato dos slides aula 01.

$\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$ espaço amostral

$\Omega_2 = \{1,2,3, 4 \}$ espaço amostral finito

$\Omega_3 = \{1,2,3,4,5,6, \}$ espaço amostral infinito

Fonte: próprio autor (2018).

É importante destacar que Ω aparece como primeiro ostensivo para representar espaços amostrais. O fato de os exemplos trazidos pelo Professor não estarem associados a exemplos dificulta a compreensão. O Professor percebe esse problema e diz que Ω_1 poderia ser o lançamento de um dado. No caso de Ω_2 e Ω_3 , ele destaca que pode haver um erro de digitação, pois o infinito precisaria de (...). Ao fazer essa correção, ele consulta os estudantes que afirmam com a cabeça que sim.

Notemos que a descrição do espaço amostral não aparece como uma tarefa a ser cumprida. Portanto, não há discussão sobre técnicas para descrever um espaço amostral. Outra

observação é a hipótese que levantamos sobre a superficialidade com que a Probabilidade seria tratada. De fato, por exemplo, na discussão de espaço amostral pode-se mencionar o seu papel na construção dos espaços de probabilidade (Ω, F, P) , em que o Ω está incorporado a um conjunto de interesses F e definido pela probabilidade P , ligado à noção de σ -álgebra (sigma álgebra). Não há também uma discussão sobre o papel da cardinalidade ($\#$) de Ω .

A explicação prossegue, agora para definir os tipos de eventos. Pela primeira vez, se apresenta de forma mais clara o papel dos conhecimentos prévios, pois o professor ativa, para concluir a explicação, a “teoria dos conjuntos”, tanto no que se refere à definição dos eventos como às operações entre eles:

Professor – isso aqui com certeza vocês já devem ter visto em teoria dos conjuntos.

Tanto Milena quanto Antonio fazem sinal positivo. Vale lembrarmos que ambos não apresentaram elementos da teoria dos conjuntos como um possível conhecimento prévio.

O Professor faz a descrição das operações e em seguida apresenta os tipos de eventos especiais, como certo e impossível. Na definição de evento certo, ele apresenta resquícios tecnológicos do fato desse tipo de situação ser verdadeiro, ou seja, todo evento certo é considerado assim, por que todo conjunto é subconjunto de si mesmo, assim como \emptyset . Podemos encontrar uma justificativa para esse fato na teoria dos conjuntos através da σ -álgebra.

O Professor faz essa justificativa se dirigindo ao pesquisador:

Professor – isso aqui professor ocorre por causa de sigma álgebra. Com certeza você já deve ter visto aqui, todo conjunto é conjunto de si mesmo, assim como seu complementar é também o vazio.

O professor em seguida define eventos mutuamente exclusivos, a partir do exemplo do lançamento de uma moeda. Ao lançarmos uma moeda, podemos ter dois resultados – cara ou coroa –, de modo que na ocorrência de um deles o outro não ocorre.

Após a exposição dessas ideias, o professor anunciou que já havia condições de conhecer os principais conceitos de probabilidade. O primeiro delas era a probabilidade clássica. Isso indica que de alguma forma o professor irá discutir outros tipos de abordagem da probabilidade. Vimos que na obra B existe uma preocupação em discutir aspectos relacionados a essas diferentes abordagens, no entanto, a própria obra se propõe a trabalhar a partir de uma perspectiva frequentista, porém não dá conta.

De fato, ele anuncia que irão discutir outras abordagens. Aqui o contrato manifesta novamente um deslize metacognitivo:

Professor – vamos estudar agora o conceito clássico de probabilidade, posteriormente, vamos ver outras abordagens, dentre elas a probabilidade frequentista ou... (longa pausa)... o fracionário de probabilidade, é isso mesmo ok?

Para iniciar o trabalho com abordagem clássica de probabilidade, o Professor retomou aspectos históricos, dessa vez citando os jogos de azar como raiz da teoria das probabilidades e as contribuições de Laplace para área. Ele apresenta a probabilidade clássica de ocorrer um

evento (A) como $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\#A}{\#\Omega}$.

Notemos que até o presente momento não há qualquer discussão a respeito do conceito de probabilidade e a sua natureza, mas apenas a definição dos elementos, inclusive do que seria a probabilidade clássica. A definição da probabilidade clássica aparece como técnica, tecnologia para determinar probabilidades, isto é, $P(A)$ é um quociente e a divisão de m/n é que determina $P(A)$.

Em seguida, o professor explica os extensivos $\#$ como “rastag A”, como casos favoráveis, e “rastag Ω ” como espaço amostral ou todos os casos possíveis. Ele destaca também o que significa equiprovável. A equiprobabilidade é apresentada como um condição para a probabilidade clássica assim como Ω deve ser um espaço amostral infinito. Para exemplificar, o Professor cita o lançamento de uma moeda duas vezes e apresenta a probabilidade teórica e suas condições:

Quadro 34 – Extrato dos slides aula 1.

A: ocorrência de uma cara no lançamento de uma moeda

$$A = \{C K, KC\}$$

$$\Omega = (CC, KK, CK, KC)$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Fonte: próprio autor.

No mesmo exemplo, o Professor discute os requisitos de que Ω é finito e A é equiprovável. Na discussão, a equiprobabilidade é garantida apenas do ponto de vista teórico e não das condições reais para que isto se configure como uma situação equiprovável. Com esse tipo de abordagem, ele pode conduzir ao conflito cognitivo que Moura e Samá (2016) chamam

de ilusão da equiprobabilidade, que é quando o aluno acredita que em todo experimento probabilístico a equiprobabilidade estaria garantida.

Outra observação é que os primeiros elementos praxeológicos da organização matemática passam a surgir. Determinar a probabilidade de um determinado experimento ocorrer é o tipo de tarefa mais comum nas obras A e B. Como dissemos, não há uma discussão sobre a técnica, mas o emprego da definição. Aqui poderia ser explorada, por exemplo, a determinação do espaço amostral, porém, no contrato estabelecido, esse parece ser um procedimento óbvio dentro da técnica, portanto, desnecessário de ser comentado.

A partir desse exemplo, o professor encerra a discussão da abordagem clássica e passa a discutir a abordagem frequentista, novamente, o marcador que autoriza a passagem para o próximo tópico é a consulta aos futuros professores, se eles estão compreendendo o assunto:

Professor – vocês entenderam? Ficou alguma dúvida...entendeu, Antonio? Tá entendido, Milena? Vamos lá! Mais para frente... ou seja, depois da probabilidade clássica, veio a probabilidade frequentista.

Nesse caso, não entendemos o marcador como uma ruptura, mas uma negociação implícita, do tipo “se vocês entenderam eu continuo”. Essa expressão parece ser um marcador para a cronogênese dos saberes. Quando o professor pergunta e os alunos acenam positivamente, é hora de introduzir uma nova noção. O contrato didático envelhece e carece de avançar. Do mesmo modo, Chevallard (1999) chama a atenção para o que ele define como obsolescência interna das técnicas, isto é, a dialética antigo-novo. Ao longo do processo de ensino e aprendizagem, umas são abandonadas e outras geradas. Sobre essa possível regra até então vigente, podemos reconhecer que ela pode mudar ao longo do processo, “isso implica dizer que o contrato didático passa por um processo contínuo de negociação e renegociação”. (BRITO MENEZES, 2006, p. 50).

Após a introdução da definição clássica de probabilidade, o Professor usa marcadores para apresentar o próximo tópico da aula:

Professor – então, vocês estão entendendo?

Antonio – sim.

Professor – tá entendo, Milena?

Milena – estou sim, pode continuar.

Professor – então, dada a definição clássica de probabilidade, mais à frente vamos ver a probabilidade frequentista. O conceito de frequência como estimativa de probabilidade surgiu através de Richard Von Mises (...) por definição seja um experimento aleatório e a um evento. Se após n realizações do experimento E , forem observados m resultados favoráveis ao evento A , então uma estimativa da probabilidade de $p(A)$ é dada pela frequência relativa $p(A)=f=m/n$. É parecido com a ideia clássica também, mas aqui sugere uma frequência, é como aqueles casos que nós já estudamos nas tabelas.

Seguindo uma linha semelhante para a abordagem frequentista, o Professor iniciou falando sobre o papel de Richard Von Mises, apresentado como um dos principais nomes associados à probabilidade frequentista.

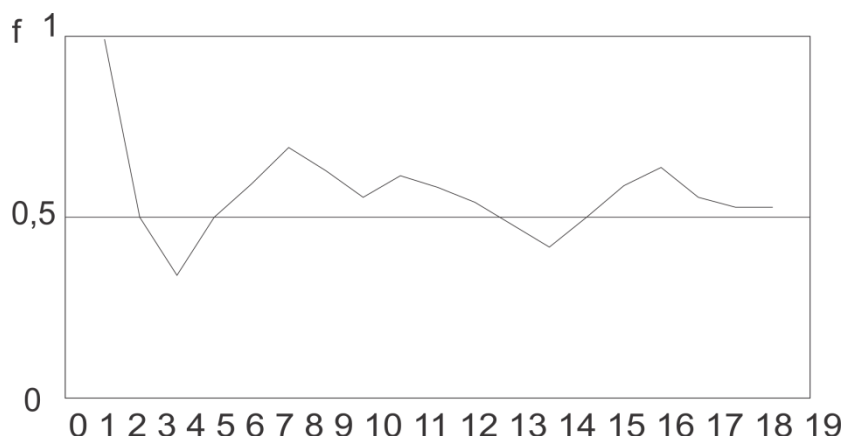
Outra consideração é que esses momentos alusivos à história dos conceitos são colados como curiosidades. Informações rápidas antes de passar às definições e aos exemplos. Observamos, em Coutinho (1994; 2001), que os desenvolvimentos históricos e epistemológicos da probabilidade percorreram um longo caminho, com contribuições de muitos colaboradores. Muitas dessas contribuições foram construídas a partir da refutação de contribuições anteriores. Por exemplo, o debate entre probabilidades objetivas e subjetivas apontado por Popper (2007).

Assim, pensamos que a citação de nomes específicos, sem um debate que explique o contexto de sua participação e a importância para a compreensão da Probabilidade, seja qual for a sua abordagem, pode colaborar para a instituição de obstáculos didáticos e epistemológicos, conforme apontou Coutinho (1994).

A probabilidade frequentista foi definida como uma estimativa de probabilidade onde, quando um experimento aleatório E é repetido inúmeras vezes, sob a mesma condições, a frequência relativa de ocorrência de um determinado evento A ligado a esse experimento tende a estabilizar-se, de modo que $P(A) = f = \frac{m}{n}$.

O teorema do limite central é citado como uma das garantias tecnológicas, porém não há nenhuma menção de como esse limite ocorre ou por que ele ocorre para explicar o funcionamento de f . A esse respeito, é novamente apresentado o exemplo das moedas. A partir de um gráfico, evidenciam-se a realização do experimento e a estabilização das frequência relativas.

Figura 43 – Modelo de estabilização de frequência no lançamento de uma moeda honesta e $n=19$.



Fonte: próprio autor (2018)

Como podemos notar, o gráfico usa $n = 19$, o que seria considerado insuficiente para fornecer um quadro de frequência relativa próximo a 0,5. Para nós, isso pode indicar que o fato de tomar a abordagem frequentista de forma a-problemática, como uma evolução do modelo clássico, indica que a abordagem frequentista não será de fato explorada, mas apenas vista como uma ideia. Vimos estrutura epistemológica semelhante na obra B, que propõe trabalhar a probabilidade a partir de uma perspectiva frequentista, mas apenas constrói supostos contextos que simulariam essa possibilidade.

O professor legitima essa posição ao apresentar o gráfico e fazer uma leitura dele de modo a indicar essa possível estabilização:

Professor – como vemos aqui o gráfico mostra claramente que conforme o n aumenta (luz do apontador laser induz a aproximação)...

Antonio – vai se aproximando

Professor – isso exatamente, provavelmente, para 30, 40 lançamentos vai ficar cada vez mais próximo de 0,5. Quem garante isso é o teorema do limite central, ela também vai se aproximar da distribuição normal.

Essa percepção é confirmada quando é apresentando um exemplo cuja intenção era trazer para o cenário uma contextualização do uso de frequência, agora não mais usando dados ou moedas, mas uma tabela que trazia uma série histórica¹²⁸ fictícia de que, em um período de

¹²⁸ Conjunto de dados que revelam a ocorrência de um fenômeno em dado período de tempo.

76 anos, registrou-se em Monteiro 10 anos de seca. Logo é pedido para determinar a probabilidade de que o ano seguinte seja um ano de seca.

A resolução da questão é feita apresentando-se um modelo clássico mudando somente os ostensivos usados: $f = \frac{m}{n} = \frac{10}{76} = \frac{m}{n} = 0,13$.

Professor – (...) ou seja, ao observar esses anos (10) nesse intervalo de tempo (76) teremos a probabilidade 0,13 ou 13%. Isso aqui (n) detonaria o espaço amostral, de forma que isso (aplicação) representaria a probabilidade frequentista, certo?

Antonio – Certíssimo

Professor – Então já vimos o conceito clássico de probabilidade, o conceito frequentista, a probabilidade também está associada aos axiomas. O conceito axiomático.

A introdução da abordagem é justificada pela necessidade de um tratamento mais formal da probabilidade, agora associada ao trabalho de Andrei Kolmogorov. Em comparação à discussão das abordagens anteriores, a discussão do viés axiomático se limitou à apresentação dos três axiomas fundamentais e suas implicações.

Logo em seguida, o Professor passa a apresentar o que seria uma abordagem geométrica de probabilidade. Novamente sem uma discussão mais detalhada, e agora sem os elementos históricos citados nas outras abordagens. Para a definição geométrica, foi apresentada a definição do que seria a Probabilidade de um ponto de vista geométrico, onde a probabilidade é tratada como o coeficiente de área:

$$P(A) = \frac{\text{Área}(A)}{\text{Área}(\Omega)}$$

Em seguida foi apresentado um exemplo cuja motivação era calcular a probabilidade de um evento associado à porção da área de um triângulo retângulo. Partindo de valores pré-concebidos para a resolução do problema, calcula-se a área dos respectivos triângulos que corresponde a A e Ω e aplica-se o quociente entre essas áreas. A forma como o problema é apresentado seria passível de uma resolução aritmética, já que resta aos estudantes calcular as áreas a partir de valores conhecidos, depois calcular a razão entre elas, isto é, o sentido e o significado geométrico da probabilidade não são explorados.

Até então os estudantes continuam atentos, ora respondendo positivamente que estão acompanhado o discurso, ora fazendo pequenas participações ao concordarem com professor. O contrato vigente parece que é esperar o término da explanação para que eles possam assumir um nível de participação diferente do que vem tendo até então.

Em seguida, o professor passou a apresentar alguns teoremas associados à probabilidade, como o valor de probabilidade $p(\emptyset)$, o complementar de A e sobre a soma das probabilidades. Nesse ponto, há uma leitura das demonstrações sugeridas, de modo que tanto Antonio quanto Milena parecem perder o interesse, já que ambos passam a disfarçadamente olhar seus celulares.

Após a discussão desses teoremas, foi introduzida a noção de probabilidade condicional e independência de eventos através do clássico problema das urnas com bolas de cores diferentes. Foi feita uma breve discussão, porém sem apresentação dos resultados.

Professor – *existem teoremas para provar tudo isso. Depois vocês podem ver.*

Notamos que a partir desse ponto, houve aceleração na exposição. Especialmente na discussão do seria o papel do Teorema de Bayes. A discussão foi feita no sentido de apresentar a formula geral do teorema, que logo em seguida marcou o final da apresentação dos slides.

O professor declarou o encerramento da aula e perguntou se os estudantes tinham alguma dúvida. Nesse momento, observamos que os sujeitos se sentiam mais à vontade, até que Milena fez sua primeira intervenção:

Professor – *acho que por hoje é só... na próxima aula vamos fazer exemplos e vocês vão entender melhor. Tem alguma dúvida?*

Milena – *assim eu notei que essa parte requer muito “os conjuntos”*

Professor – *é de fato, tem muito essa parte mesmo. Usa muito a teoria dos conjuntos, tem outros conceitos também, mas aqui nós vimos os conceitos mais fundamentais de probabilidade. Se fossemos ver outros conceitos iríamos ver a questão das distribuições, aliás nós vamos ver mais à frente, por isso que vocês tão estudando essas noções de probabilidade.*

Antonio – *para a gente aplicar a probabilidade.*

Professor – *isso, exatamente... bem por hoje é só. Alguma dúvida... então obrigado.*

A aula é então oficialmente finalizada. Os estudantes se organizam para sair e o professor reforça que no dia seguinte (“amanhã”) serão feitos os exercícios e exemplos.

Em síntese, percebemos que o primeiro encontro constituiu-se como um espaço para a apresentação das ideias fundamentais associadas à probabilidade. Preferimos o termo *apresentação* ao termo *discussão*, exatamente pelo fato de que o contrato didático que se estabelece não permitiu nesse encontro esse processo de diálogo.

O contrato didático normativo tem como foco central o conteúdo. A Pedagogia monumentalista percebe os saberes como obras a serem visitadas. Portanto, o encontro serviu para que os sujeitos visitassem O_p . Nesse visita o guia é o discurso do professor. Durante essa visita, pudemos observar algumas fenômenos que resumimos no quadro a seguir:

Quadro 35 – Síntese dos fenômenos observados no 1º encontro.

Fenômeno	Descrição
O Contrato segue a mesma linha das aulas da 1ª unidade.	Um contrato normativo, onde saberes são vistos de um ponto de vista mais superficial.
O discurso do professor se limita a definição e exemplos.	Os alunos assumem a condição de ouvintes e legitimam o avanço da aula.
A praxeologia é incompleta	Centrada no bloco <i>saber fazer</i> , não há discussão ou detalhamento das técnicas. As tecnologias aparecem apenas como resquícios.
Os conhecimentos prévios são tomados como existentes.	O Professor parte do pressuposto de que não terá que retorna a praxeologia remanescentes.
O principal efeito foi o deslize metacognitivo.	Em diversos momentos, o professor dá ideia científica dos conceitos.
Uma discussão mais detalhada do conceito não é reclamada.	O modelo explicativo e aceitação dos sujeitos colabora para que não seja discutida a natureza dos conceitos.

Fonte: próprio autor. (2018).

A partir do quadro acima, podemos agora discutir de forma preliminar nossas percepções frente ao fenômeno cognitivo e como as ferramentas da TAD nos ajudam nessa leitura. Para tanto, utilizaremos os dados referentes às entrevistas realizadas logo após a aula.

Como vimos na aula do dia 22, nossas observações sobre o contrato didático e a significação que os estudantes davam aquele contexto de ensino foram especulativas. Por essa razão, buscamos dar voz aos estudantes para que pudessem explicitar suas impressões sobre esse primeiro encontro.

Para a construção de um quadro de análise que nos permitisse enxergar as condições e restrições para o funcionamento de SDs em I_{DIP} , nós entendemos que as ferramentas da TAD foram de grande valia, especialmente no que tange à compreensão das organizações praxeológicas matemáticas em torno de O_p , e a previsão de influência nos níveis de codeterminação. Esse exercício permite uma percepção mais clara do contrato institucional, oferecendo-nos um panorama do que era esperado da relação $R(I_{DIP}, O_p)$. As praxeologias nas obras de referências indicavam uma discussão superficial de O_p sem um aporte aprofundado do ponto de vista da compreensão do conceito, mas também das praxeológicas matemáticas, tanto que as classificamos como pontuais e incompletas.

Ao mesmo tempo em que observamos que as expectativas do contrato institucional chegam a ser contraditórias, do ponto de vista do que se espera que o futuro professor trabalhe

na sua formação inicial com O_p . Isso nos fez compreender que nos níveis superiores da escala de codeterminação atuavam restrições que poderiam incidir em I_{DIP} e na relação $R(X, O_p)$ dos sujeitos.

Esse quadro analítico nos possibilitou conhecer melhor O_p e sua natureza epistemológica. Esse conhecimento nos ajudou a refletir sobre as dimensões que agem durante o estudo de O_p . No estudo da Probabilidade, devem ser consideradas as dimensões epistemológicas, didáticas e também psicológicas.

A partir desse cenário de condições e restrições, restava-nos entrar em I_{DIP} e tentar captar a essência dos fenômenos que ali ocorriam. Entrar em I_{DIP} significa perceber seu contrato didático, significa compreender como as praxeologias pessoais evoluem, assim como entender também como mudava o $R(X, O_p)$ dos sujeitos.

Somente assim, teríamos segurança para dizer de que maneira podemos ou não pensar a cognição a partir dessa entrada em I_{DIP} , através das ferramentas teóricas da TAD, e para destacar onde ela nos ajudaria na compreensão das dimensões da cognição, em particular, a dimensão psicológica.

Este primeiro encontro foi para nós uma prévia de como ocorre a dinâmica do funcionamento do SD em I_{DIP} , do que podemos ver ou não, ali naquele momento. O que aconteceria no segundo encontro, quando exercícios e exemplos seriam discutidos? Que postura seria assumida pelos sujeitos? Que posições assumiriam Antonio, Milena e Kátia? Onde Kátia se localizaria nessa dinâmica, já que não esteve no primeiro encontro com O_p ? Sua posição seria diferente das posições de Antonio e Milena? Que falta faria a exposição desse primeiro encontro para que Kátia pudesse se engajar e assumir a condição de aprendiz em I_{DIP} ?

Da relação institucional com O_p , parece-nos claro, na descrição do encontro, que as praxeologias em O_p seguem a linha sugerida pelas obras de referência. Praxeologias pontuais, incompletas, cuja rigidez em torno das técnicas conduz a uma compreensão limitada do que seja O_p e das tarefas das quais esse saber pode dar conta. A ausência de um discurso tecnológico sentida nos livros-texto também ocorre no funcionamento de I_{DIP} . Isso tudo corrobora a tese de Chevallard (1999), que destaca o papel da análise praxeológica para revelar as práticas sociais de uma instituição em torno de um determinado saber.

Do mesmo modo, o contrato didático estabelecido com carácter normativo limita, em um primeiro momento, a atuação dos sujeitos na discussão sobre o O_p . Pensamos que a escolha desse modelo de organização didática é negociado entre o professor e aluno. Essa negociação começa bem antes de I_{DIP} , pois o modelo de aulas centrados nos conteúdos ainda é predominante

em muitas instituições de ensino superior que se prestam à formação de professores de matemática, como aponta Cury (2012).

Parece existir um acordo tácito entre professores e alunos de que dentre tantos modelos de organização didática (OD), esse é o mais plausível para trabalhar os conteúdos matemáticos. Aqui operam os níveis superiores da escala de codeterminação, conforme Chevallard (2002), mas também a própria dinâmica, traduzida como a tradição da formação de professores de matemática, como assinala Chevallard (2009).

Seguindo a linha das obras de referência, onde OD tem um enfoque tecnicista, vimos que em IDIP parece haver a construção de concepção a-problemática sobre a Probabilidade, isto é, um saber limitado a aplicações que dependem de uma técnica que geralmente é um quociente e pode ser determinado a priori.

Diante desse quadro, passamos a duas outras categorias: a evolução das praxeologias pessoais e a mudança em $R(X, O_p)$. Sobre essas duas categorias, podemos dizer que o primeiro encontro só nos forneceu pistas do que poderia estar acontecendo. É por essa razão que vamos defender que, em meio a todo esse cenário, há um conjunto de fatores que estão ligados à própria atuação do sujeito dentro do sistema didático. Antonio e Milena parecem ter cumprido com o seu papel dentro do contrato didático estabelecido, mas para eles o que significou essa aula? Podemos entender o silêncio, a atenção dedicada como um indício de participação? Ficar sentado por mais de uma hora ouvindo o discurso do professor garante a modificação da relação $R(X, O_p)$? Não podemos ignorar que eles têm um papel. Carregam expectativas, assumem posições, se engajam quando a instituição solicita. Isso garante que tipo de aprendizagem?

Ao término, conversaremos com Antonio e Milena sobre essas questões. A primeira pergunta que fizemos foi sobre o que mudou para eles em relação à Probabilidade depois do primeiro encontro.

***Pesquisador** – Milena, as coisas mudaram ou continuam as mesmas em relação à probabilidade?*

***Milena** – não, mudaram.*

***Pesquisador** – em que sentido?*

***Milena** – assim ele passou a teoria hoje né, aí da teoria nós vamos pegar os slides, em casa nós vamos estudar os conceitos, aprofundá-lo e a partir daí eu acho que a gente vai começar a fazer exercícios e dos exercícios a gente vai...aprendendo.*

***Pesquisador** – você me disse que tinha expectativas em relação à probabilidade, como elas estão agora.*

Milena – a probabilidade é o que eu pensava mesmo.

Pesquisador – como assim?

Milena – já entrei sabendo que era um assunto difícil.

Pesquisador – e sobre ensinar probabilidade?

Milena – acho que tem de estudar mais... para aprender probabilidade o aluno tem que saber muito sobre teoria dos conjuntos. Como a gente viu... união, intersecção complementar. Acho que isso é o que mais tem que saber.

Na fala de Milena, podemos confirmar algumas hipóteses que temos defendido. Milena sabia o que esperar do contrato didático. Ela tinha clareza do seu papel dentro da relação didática. O próximo passo em suas expectativas era que o professor trouxesse exemplos e exercícios. A primeira aula foi uma aula teórica, mas não necessariamente uma aula para aprofundamentos ou uma compreensão. Isso, na sua percepção, pareceu ser parte da responsabilidade que ela tinha que assumir diante de O_p : estudar em casa, rever os slides, começar a fazer exercícios eram partes do jogo.

Para Milena, parecia que naquele momento sua relação com a probabilidade ainda era a mesma. O primeiro encontro serviu para lhe dar um primeiro direcionamento, confirmando a expectativa de que era um conhecimento difícil. Em relação aos conhecimentos prévios e à identidade como futura professora, ela reconheceu que era preciso estudar mais, e a agora a teoria dos conjuntos era tida como um conhecimento prévio para que seus alunos entendessem a probabilidade.

Notamos que o conceito de probabilidade não foi tratado em sua fala. A exposição que descrevemos, a ênfase do professor reforçam a teoria dos conjuntos como arquitetura epistemológica para justificar temas ligados à probabilidade, tirando o foco da compreensão do que significa o saber em si.

Na fala de Antonio, vemos elementos semelhantes ao discurso de Milena, no que tange ao contrato estabelecido. Todavia, ele é bem mais específico no que tange a como a dinâmica se instituiu:

Pesquisador – Antonio, agora depois da primeira aula sobre probabilidade conta como estão suas expectativas.

Antonio – o que chamou mais atenção nessa aula foi o exemplo apresentado no gráfico do exemplo da moeda, então quando a moeda não é viciada a probabilidade dela se aproximar de

0,5 vai aumentando. Achei interessante aquela aplicação. Eu achava que probabilidade era uma coisa mais fácil mas eu vi que não.

Pesquisador – *como assim? Organiza essas ideias.*

Antonio – *achava que ia ser bem mais fácil, tem muita coisa para fuçar, muita coisa para aprender, enfim ter muito mais conhecimento. É uma disciplina bem profunda o pensamento dela.*

Pesquisador – *você se refere aos teoremas?*

Antonio – *é os teoremas, mas assim como é uma aula mais visual, quando eu chegar em casa eu vou procurar mais, os teoremas, identificar. Assim os teoremas eu achei claro, tipo sobre o aleatório... assim eu não lembro bem, tem que estudar mais.*

Pesquisador – *e em relação à probabilidade?*

Antonio – *rapaz, a probabilidade, assim até como ele exemplificou ali, é uma forma de medir certos casos que a gente consegue ir direto, até que ele deu exemplo daquela situação em monteiro, no período de 76 teve 10 anos de seca, ali ele faz a probabilidade e já mostra a probabilidade do próximo ano, ou seja, no próximo ano seria tantos % ...*

Pesquisador – *deu probabilidade de 13% , você acha esse número confiável dada a nossa realidade?*

Antonio – *na verdade pelo que eu fiz, a estimativa é aquilo mesmo, creio que sim, é um número confiável, como um no caso da moeda não viciada.*

Pesquisador – *em relação aos conceitos básicos?*

Antonio – *clareou um pouco, vou rever os slides, pra na verdade, vê o conceito como um todo, ali ele misturou muita coisa.*

Antonio sabe também seu papel dentro do contrato didático que se estabeleceu, mas reconhece que, em alguns momentos da exposição, ficou um pouco confuso. Mas a sua responsabilidade é estudar e melhorar essa compreensão. Ele nos fornece uma pista interessante sobre como está se desenhando sua relação com O_p . Na entrevista inicial, ele apresentou a probabilidade como sinônimo de possibilidade. Agora ele definiu a probabilidade como uma “medida de certos casos” em que você dispõe as informações. Vemos claramente a influência de uma abordagem clássica da probabilidade.

Assim como Milena, Antonio revela ter achado difícil, mas, diferentemente dela, ateu-se aos exemplos para dar significado a O_p . Podemos dizer, de certa forma, que o contexto e os tipos de tarefas influenciam em $R(X, O_p)$. Milena também destaca o papel do gráfico de estabilização de frequências:

Milena – Assim teve aquele exemplo amostral das moedas.

Pesquisador – assim mas tem outro momento, o que lhe chama atenção, você consegue compreender o papel da probabilidade?

Milena – Jogar na megasena (risadas). Quem sabe né?

Vemos que a ausência de uma discussão do conceito corrobora para que os exemplos de aplicações fictícias se sobressaíam. O enfoque no conteúdo parece atrair uma maior atenção para os exemplos em que aquele conteúdo se presta. No entanto, quando convidamos os estudantes a olharem para seu próprio contexto, eles retomam questões e crenças pessoais, ou seja, aquilo que é mais forte na sua relação, mesmo que isso contradiga os princípios do saber em jogo.

Quando o contexto é o conteúdo em si as tarefas assumem um significado mais forte, talvez pelo fato da abordagem tecnicista ser predominante:

Pesquisador – e sobre as diferentes abordagens da probabilidade?

Milena – gostei da frequentista... achei interessante a fórmula m/n porque eu associei ao que já tinha estudado em estatística.

Pesquisador – e sobre o exemplo de Monteiro você achou a probabilidade confiável?

Milena – achei sim. (silêncio)

Pesquisador – por que você não perguntou nada?

Milena – eu acho que não era o momento. O momento que a gente vai realmente tirar as dúvidas é nos exercícios. Ali é hora de prestar atenção, perguntar é prática. Estudar em casa, rever a parte de conjunto.

Pesquisador – você acha que tem que estudar conjunto?

Milena – é pra poder entrar no assunto de probabilidade.

Pesquisador – E na hora dos teoremas... no teorema de Bayes, por exemplo?

Milena – fiquei confusa, mas é como eu estou dizendo, aquele momento ele vai explicar pra gente, mas a gente só vai saber se entendeu nos exercícios.

Antonio apresenta um discurso semelhante sobre as obrigações do contrato, a percepção da probabilidade e os conhecimentos prévios:

Antonio – não perguntei, não porque não tinha dúvida. A próxima aula vai ser a aula prática, então as dúvidas a gente vai tirar na próxima aula.

Pesquisador – você compreendeu aquelas diferentes abordagens de probabilidade, clássica, frequentista, axiomática, geométrica.

Antonio – é os axiomas (longa pausa).

Pesquisador – percebe a diferença entre elas?

Antonio – na verdade elas são diferentes, mas assim eu não entendi bem isso... então eu preciso ver na próxima aula. Não é dúvida do conteúdo e de classificar isso.

Pesquisador – e sobre ministrar aulas de probabilidade?

Antonio – olha não é uma disciplina fácil... tem de estudar bastante.

Pesquisador – e os conhecimentos prévios?

Antonio – rapaz pelo que vi, o que ele tocou mais foi a questão de conjuntos. Por hoje, eu vi que tem que ser pela teoria dos conjuntos.

Pesquisador – e o papel da probabilidade como um saber?

Antonio – ainda não consegui captar isso...!

Antonio, assim como Milena, tem dúvidas, mas entende que aquele não é o momento de perguntar, mas de prestar atenção, mesmo que isso colabore para uma compreensão parcial do que foi dito na aula. Mais uma vez, destacamos na sua fala o papel assumido pela teoria dos conjuntos.

Sobre ser professor de Probabilidade, assim como Milena, ele destaca que é preciso estudar mais, inclusive estudar os conhecimentos prévios, como vimos na fala de Milena.

Participar da aula naquele momento para Antonio e Milena se traduz em prestar atenção, interromper o discurso do professor minimamente e, a partir do que foi exposto, buscar meios para melhorar compreensão. O foco da aula é o conteúdo, as tarefas que ele responde naquele contexto. Não há uma preocupação com uma significação para além do entorno da aula, contextualizar a partir do fictício parece ser suficiente.

A prática traduzida em realizar exercícios, ou ainda aplicar o que é apresentado nas aulas, é uma forma de participação posterior. Tanto Milena quanto Antonio sabem que aquele momento de estudo não se encerra ali, eles não esperavam aprender sobre probabilidade naquela aula, mas de alguma forma, ela serve para iniciar esse processo, cuja próxima etapa é praticar. Antes dessa prática, parece não ser possível, na compreensão de ambos, falar com mais clareza ou assumir, na identidade de estudantes de probabilidade, que sabem ou que aprenderam alguma coisa, ou mesmo que precisam ensiná-la futuramente.

Nesse momento do estudo, eles parecem se resguardar na expectativa de que o professor os está conduzindo para a compreensão de O_p bem como aceitar que a prática é necessária para esse processo e que sua responsabilidade individual é estudar aquilo que a aula teórica parece não poder oferecer.

Por último, destacamos novamente o papel da instituição transitória que se forma em I_{DIP} , ou seja, a instituição configurada pela nossa presença como pesquisadores. O quanto nossa participação influenciou na construção desse encontro, na escolha dos conteúdos, no tratamento dado aos saberes, na sua organização didática, dentre outros fatores? Isso não é uma questão simples de dimensionar, porém precisa ser levada em consideração. Podemos afirmar que SDs verifica elementos do esboço do MER, como o contexto histórico da Probabilidade ou as diferentes abordagens, porém de forma incipiente. Qual terá sido realmente o papel dos axiomas de Kolmogorov, da discussão sobre a probabilidade geométrica? Aparecem como figurantes do discurso ou terão um papel tecnológico.

Para compreender essas questões, precisamos avançar na descrição do funcionamento de SDs em I_{DIP} .

6.2.3 ESTUDANDO PROBABILIDADE: 2º ENCONTRO

O segundo encontro ocorreu no dia 31 de março de 2017. Na aula anterior, o Professor fez a exposição do conteúdo. A partir desse ponto, a expectativa do contrato didático por parte de Antonio, Milena e Kátia era discutir aplicações do que foi apresentado pelo Professor. De fato, antes de iniciar a aula, Milena já se encontrava com o caderno aberto, lápis, caneta e borracha sobre a carteira, como se soubesse que para essa aula esses seriam artefatos necessários.

Antes de iniciar a aula, como de costume, o Professor aguardou a chegada dos demais, somente Milena tinha chegado no horário. Nesse momento, ele foi informado que algumas cidades estavam com problema de transporte. De fato, o transporte mais uma vez interferiu no funcionamento do SDs, já que Kátia e Antonio não conseguiram chegar até a universidade naquele dia. Pedro também não compareceu.

O professor se mostrou preocupado, mas destacou que os demais poderiam acompanhar nas próximas aulas. Em seguida, ele iniciou oficialmente a aula, escrevendo no quadro “exercício de probabilidade”:

Professor – infelizmente eles não vieram, mas eles podem pegar essas questões depois. Vamos começar. Como estava falando, nós vimos o conteúdo que é a teoria das probabilidades. Vimos a parte inicial que é mais conceitual, a parte axiomática, a parte frequentista, a parte clássica de probabilidade, posteriormente vimos a questão de independência de eventos mutuamente exclusivos. Vimos também o teorema das probabilidades totais e o teorema de Bayes, que é decorrente das probabilidades totais. Agora veremos um exercício que trata de um plano geral desses conteúdo. Certo?

Nessa fala do Professor, encontramos diversos elementos que enunciam a tônica do encontro, o *topos* dos estudantes, o cronogênese dos saberes e a finalidade da própria aula. Sobre o *topos*, claramente podemos ver que Antonio e Kátia, por restrições externas, assumiram um lugar diferente em relação a Milena, que esteve presente nos dois encontros. Antonio apenas em um deles. Com relação a Kátia, questionamo-nos internamente se ela deveria ser considerada como sujeito de pesquisa, no entanto, ponderamos, no primeiro encontro, a fala do Professor, que declarou que Kátia tinha plenas condições de acompanhar o desenvolvimento da aulas, pois ela havia se “saindo muito bem no durante a primeira unidade”.

Pensamos que se os três haviam iniciado a participação no SDp, em uma mesma posição periférica, agora cada um assumia uma posição diferente. Por exemplo, o nível de engajamento de Pedro, se comparado com a participação de Milena, era diferente, pois a sua participação também era diferente, o que lhe conferia uma posição diferente. Pensamos que o mesmo vale para os demais. No caso de Kátia, sua participação no SDp parece ter lhe conferido um status de “saldo positivo”, não participar de uma ou duas aulas, mesmo que fossem aulas de explanação e exercício de um novo objeto de saber, não comprometeria seu trabalho.

Em relação aos conteúdos, a chamada para os assuntos que foram apresentados na aula anterior anunciava que uma nova dinâmica seria introduzida. O momento era de praticar o que foi explicado. Na cronogênese dos saberes, parecia chegar a hora de conhecer explicitamente as tarefas e técnicas que compunham as praxeologias do SDs.

Em seguida, após a fala inicial, o Professor escreveu no quadro a primeira questão. A questão remetia a um experimento simples que consistia em retirar uma carta de um baralho contendo 52 e obter uma determinada carta. Essa questão corresponde a T_1 na Obra A (calcular a probabilidade priori de n eventos ocorrerem dado um espaço amostral discreto e finito). Na Obra A, a técnica sugerida pelos autores consiste na aplicação da definição clássica de probabilidade. Lembramos ainda que na obra A os procedimentos referentes à descrição do espaço amostral foram omitidos.

No caso do SDs, o Professor deu a entender que a apresentação da tarefa seria feita de forma semelhante que na Obra A, no entanto, uma intervenção de Milena parece ter provocado a necessidade de um detalhamento maior da questão:

Professor – a pergunta aqui é: Qual é a Probabilidade de sair um ás de ouro quando retiramos uma carta de uma baralho de 52 cartas? Não sei se vocês sabem, mas, no geral, no geral não, todo baralho tem 52 cartas, certo? Se conhecemos o baralho, nem todo mundo, mas acho que vocês conhecem... conhece, professor? (se dirigindo ao pesquisador) conhece (se dirigindo a Milena)?

Milena – eu conheço (...)

Professor – pronto.

Milena – eu joguei baralho, eu conheço, não é aquele que a pessoa dá três cartas a pessoa.

Professor – depende do jogo, tem vários, acho que você tá falando do relancinho¹²⁹, o popular relancinho ou pif, tem buraco...

Milena – tem três jogadores...

Professor – acho que talvez o que você tá falando seja buraco...

Milena – ai você joga, outra joga, se a outra tiver, aí joga de novo, quando completa três iguais...

Professor – é relancinho... são três trincas na verdade...

Milena – mas não é baralho né?

Professor – é

Professor – o baralho é composto por 52 cartas. Essa composição é feita de quatro naipes, ouro, copas, paus e espada. Aqui ele tá falando, particularmente, do ás de ouro. Essa carta é única no baralho, só tem uma. Certo? Existem cartas, por exemplo, o Rei. Se eu não especificasse o naipe, seriam quatro cartas e assim por diante, tem muitas questões de probabilidade envolvendo baralhos.

Milena – vai ser 1 sobre 52, não é...?

Professor – oi?

¹²⁹ Relacinho é o nome dado na região nordeste do Brasil à adaptação de um jogo de cartas popular na América do Norte “cucamplês” (Any cook can play – Qualquer cozinheiro (a) pode jogar), considerado um dos jogos mais simples. As cartas são embaralhadas e forma-se o monte. Desse monte, são distribuídas três cartas para cada participante. O jogo se inicia com o jogador colocando uma carta a sua escolha, os demais jogadores devem jogar uma carta com valor maior e com o mesmo naipe da carta jogada. Se não tiverem, devem buscar cartas auxiliares no monte. Vence quem conseguir “descartar” todas as cartas. Existem algumas estratégias que podem ser adotadas para levar o jogador à vitória, por essa razão, não é considerado, por alguns, como um” jogo de azar”.

Milena – 1 sobre 52?

Professor – 1 sobre 52 a resposta, isso mesmo. (sinal positivo com a cabeça e copia a solução no quadro):

Solução

Como só há um ás de ouro, o número de elementos do evento é 1, logo:

$$P(A) = nA/n\Omega = 1/52 = 0,019.$$

Então, como você falou antes, nessa situação a resposta seria 1/52 que dá 0,019, onde aqui (apontando para o numerador) são o número de casos favoráveis ao evento e aqui (apontando para o denominador) são o número de casos possíveis ou espaço amostral. Isso aqui poderia ser escrito na forma #A/#Ω. Já copiou? Tranquilo esse exemplo, vamos a outro.

No diálogo acima, vemos que a tarefa proposta demandava, do ponto de vista de uma solução matemática, o emprego da definição clássica de probabilidade. Porém, para isso, algumas questões tinham que ser levadas em consideração, especialmente no que tange ao contexto, à garantia da equiprobabilidade e às técnicas para descrever os eventos pedidos e o espaço amostral. Como a questão trazia um contexto relativamente simples, a retirada de uma carta igual dentre 52 possíveis, essas considerações pareciam ser imediatas.

Porém, como vimos, para Milena, a questão não estava totalmente esclarecida. Para ela, baralho era sinônimo de jogo. O Professor explicou isso, mas ela continuou a falar da sua experiência com o “jogo do baralho”. O Professor percebe essa confusão e tenta explicar que com as cartas vários jogos podem ser realizados. Ele aproveitou o momento para explicar que o baralho se referia ao conjunto de cartas e que a carta em questão era única. Isso parece ter sido suficiente para Milena concluir que a probabilidade pedida era 1/52. Isso parecia não ter causado surpresa para o Professor, já que para ele a questão também parecia óbvia, ao menos, do ponto de vista aritmético. Para nós, algo mais a ser mencionado. Existia um conflito entre as associações que ela faz com a palavra baralho e o papel do baralho na resolução da questão, ou seja, de espaço amostral onde estava-se sorteando um determinado elemento desse conjunto. Esse conflito, vinda de uma sujeição prévia, aparentemente não impede Milena de, ao menos do ponto de vista da definição, afirmar que a probabilidade era 1/52. Isso parecia ser suficiente para o Professor. O sujeito didático cumpriu a expectativa de responder, dentro do contrato didático estabelecido, à tarefa solicitada. Mas o sujeito composto por outras situações sinalizava, ao menos em nossa observação, que tinha algumas questões que não estavam esclarecidas.

De fato, para Milena, existe algo mais acontecendo. O Professor dá informações sobre baralho, enquanto espaço amostral, mas Milena queria dizer que sabia o que era baralho. O

Professor diz mais explicitamente o que precisa (uma carta única entre 52 possíveis). Ela responde o que o Professor quer ouvir. Era hora de passar a próxima tarefa. O contrato parece não permitir que um debate seja prolongado. O tempo didático sinaliza que o trabalho acabou. Milena acerta, parece ganhar confiança, mesmo a tarefa parecendo muito simples.

Pensamos que essa possível “obviedade” ou ausência de uma problematização faz com que muitos detalhes passem despercebidos, como a própria garantia da equiprobabilidade, o significado do quociente $1/52$ ou mesmo da sua resposta decimal aproximadamente 0,019. O que é uma escolha aleatória nesse contexto? Um problema elementar como esse pode também servir de cenário para discussões dessas noções ou indicações. De fato, Azacarate Goded (1996) e Silva (2002) destacam a importância de se levar em conta tais discussões para compreensão da conceito de probabilidade.

Podemos dizer que aqui parece operar um descompasso entre as expectativas do professor e a forma como Milena enxergar ou dá significado para aspectos importantes da tarefa. Esse descompasso parece ficar mais claro com o avanço da aula.

No problema seguinte, temos uma linha de abordagem semelhante. O contexto ainda é o baralho, mas agora o evento é a retirada de um Rei. De certa forma, na fala do Professor, a resposta sobre o evento em questão já havia sido antecipada quando ele explicou que o Rei pode aparecer no baralho com 01 (um) dos 04 (quatro) naipes diferentes. Milena parece não ter observado isso. Como dissemos, ela queria dizer ao Professor que sabia o que era baralho. Na sua fala seguinte, observarmos que de fato o contexto dos baralhos não estava claro para ela. Quando o Professor e Milena terminam de copiar a questão, ela quebra o silêncio:

Milena – o rei tem três né ou (se dirigindo ao pesquisador).

Professor – note que esse exemplo é diferenciado do anterior, pois aqui (questão anterior) ele não está especificando o naipe, agora não mais.

Milena – ali tá especificando. (se referindo a 1ª questão).

Professor – você sabe quantos reis tem?

Milena – tem uns três, né?

Professor – tem quatro

Milena – eita gota! (expressão de admiração)

Professor – Ele tem quatro naipe, cada carta tem quatro naipe, o ás também tem quatro, só que ele pediu ás de ouro.

Milena – ai vai ser 4 sobre 52

Professor – 52, exatamente!

Vemos no diálogo que, ao passo que Milena não compreende bem o contexto do baralho, é o detalhamento sobre o espaço amostral feito pelo Professor que parece guiar Milena para a resposta correta, pois se há 04 (quatro) reis entre 52 (cinquenta e duas) cartas possíveis, a probabilidade pedida é $4/52$. No entanto, é preciso observar mais atentamente essa cena. Notemos que, ao ser informada que eram 04 (quatro) e não 03 (três) reis, ela expressa espanto. Nesse momento, ela rabisca algo que escreveu e reescreve. Logo em seguida, dá a resposta. Antes da explicação do Professor, Milena já havia agido sobre a questão e já tinha formulado a sua resposta. Apesar de não estar segura quanto ao número de reis que havia no baralho, ela sabia que a relação *números de reis possíveis entre as cartas do baralho* lhe informava a probabilidade pedida.

A técnica é que não estava clara. O contexto também não. Isso parece influenciar na construção de uma praxeologia pessoal segura, embora obter as repostas das tarefas venha a lhe dar a segurança de que aquele é momento passageiro no funcionamento do sistema didático, ou seja, um entrave momentâneo.

O que queremos pôr em discussão é que Milena, como sujeito de I_{DIP} , compreende a prática daquela instituição. Ela sabe que o momento de explicação da aula passada tinha o objetivo de lhe fornecer os elementos para a compreensão das tarefas que seriam solicitadas neste momento. Na segunda aula, momento de exploração dessas tarefas, o Professor lhe forneceria as técnicas necessárias. As questões são similares. A técnica é a mesma. e então, ela toma a decisão e cumpre a tarefa, antes do Professor. Porém, isso não é o bastante. Milena precisa validar. Mas uma vez, a especulação de que nossa presença influencia o funcionamento do SDs em I_{DIP} é pertinente. Somos parte do sistema, já que Milena busca a validação conosco, seja pela familiaridade que temos (como ex-professores), seja pela fato de também termos uma relação com a Probabilidade.

O fato é que o SDs age sobre a relação de Milena com probabilidade. De alguma forma, ela está sendo modificada ou estabelecida. Possivelmente, a falta de detalhamento da técnica para a tarefa anterior e a estranheza com o contexto dos baralhos estavam limitando a ação de Milena sobre a tarefa, mas isso não a impede de agir, pois esse é o seu papel na posição que assume em SDs. Notemos que a ação pode ser interpretada duplamente, seja agir no sentido didático, conforme diz Brousseau (1986: 1996), seja no sentido que a palavra assume em uma perspectiva histórico-cultural. Toda atividade compreende objetivos e é a ação para o cumprimento desses objetivos que move a prática. A mesma prática que conduz a aprendizagem, conforme Lave (1996).

Se pensarmos na análise da organização praxeológica como ferramenta capaz de revelar as práticas institucionais, é plausível admitir que, em uma instituição onde as técnicas não são exploradas devidamente, encontraremos sujeitos que desenvolvem uma relação $R(X,O)$ confusa. Do ponto de vista do *savoir savante*, essa confusão se traduz em limitação. Sob a ótica da formação de professores e do esboço do MER que apresentamos, a palavra *incompletude* é mais conveniente, uma vez que $R(X, O)$ não consegue contemplar minimamente as demandas formativas.

Outra reflexão pertinente está no fato de o funcionamento de I_{DIP} atender a um modelo de formação que parece estar posto nas licenciaturas (BEZERRA, 2014; MOREIRA; DAVI, 2005; CAZORLA, 2009, LOPES, 2008). Então, do ponto de vista do contrato institucional previsto e praticado, Milena provavelmente terá um desempenho considerado conforme, ou seja, $R(X,O) \cong R(I, O)$, o que nos garante essa ponderação é toda a análise que constituímos ao longo do capítulo 5.

Especialmente no nível Pedagogia, quando observamos que, tanto do ponto de vista dos documentos que tratam da licenciatura, quanto da organização praxeológica matemática e didática das obras consideradas de referência para I_{DIP} , a relação $R(I,O)$ é problemática. Isso se alinha com as considerações de Wozniac (2005) e Wozniac e Chevallard (2006) sobre a falta de infraestrutura epistemológica para o ensino de Probabilidade. Essas lacunas não só dizem sobre a ecologia dos saberes, como também podem refletir sobre como a prática institucional, revelada pelo contrato institucional previsto, traz elementos que interferem sobre a cognição dos sujeitos.

As instituições e seu contrato institucional são agentes de nossa cognição. Nossa relação pessoal com os objetos de saber e a nossa constituição como pessoa são resultantes das sujeições institucionais. Logo, se em uma dada instituição de ensino há um modelo de formação e uma expectativa contratual em relação a um dado objeto de saber, é possível que seremos influenciados por esse modelo na construção de nossa relação pessoal com esse objeto de saber. Assim, do ponto de vista do contrato institucional, os estudantes da licenciatura podem estar constituindo uma relação com probabilidade considerada *conforme*, mas sabemos que essa formação não atende ao modelo que é esperado destes estudantes, em termos de demandas formativas para o professor.

Em outras palavras, o que queremos evidenciar é que existem *dissonâncias no discurso das instituições*¹³⁰, reveladas pelo seu contrato institucional. Enquanto no nível da sociedade se constroem expectativas para o ensino de probabilidade a partir do discursos dos diversos agentes da noosfera, nos outros níveis existem discursos próprios que se distanciam das demandas, gerando ruídos, tensões que pedem certa resolução. Essas dissonâncias de manifestam tanto no discurso entre instituições, como do ponto de vista pessoal de Milena para com institucional, ou seja, parece ser um fenômeno local, no sentido estrito da relação de Milena com O_p no funcionamento do sistema didático.

Em $IDIP$, essas dissonâncias são é naturalizadas, mas não resolvidas, pois o contrato didático normativo, as expectativas do contrato institucional apontam para um relação $R(I, O_p)$ que parece estar sendo cumprida por seus sujeitos.

Essa percepção fica mais clara no momento em que Milena responde à questão prontamente, quando o Professor esclarece a descrição do evento retirar uma carta do baralha e essa carta ser um Rei. Milena não só responde corretamente, como tem sua atitude legitimada pelo Professor que, durante a escrita da solução, declara:

Professor – *vamos à solução:*

Solução

Como há 4 reis, o número de elementos do evento é 4. Logo:

$$P(A) = nA/n\Omega = 4/52 = 0,077.$$

Professor – *você tá (...) nem precisa estudar mais*

Milena – *(risos) ora não, aí é que precisa.*

Professor – *é porque esses exemplos aqui eles são bem práticos, não vou dizer simples, porque probabilidade nunca é simples.*

Ao legitimar a atitude de Milena, o Professor parece indicar implicitamente a ela para mudar de posição em relação a SDs. Após esse momento, ele continua a discussão da questão e frisa que a probabilidade na questão 2 é maior que a probabilidade na questão 1 devido ao número de cartas que aumentou:

¹³⁰ Sobre esse termo específico retomaremos a discussão no próximo capítulo. A palavra dissonância assume diferentes conotações dependendo do contexto.

Professor – então... se vocês notarem nesse caso temos um número maior de casos favoráveis A, ou seja, o n é maior, a probabilidade aumenta. Ela maior do que essa daqui (se referindo a solução da questão 1). Como tínhamos apenas uma carta que era favorável ao evento...

Milena – a probabilidade é maior de pegar a carta...

Professor – é, aqui tem quatro possibilidades de pegar um rei, enquanto ali tem só um possibilidade, por isso que nessa situação a probabilidade é um pouco maior. Certo? Dúvida?

Milena – não. Tá tranquilo.

A observação sobre a mudança de posição de Milena em SDs vai ganhando força. Para as duas questões iniciais, a dinâmica foi basicamente a mesma: o Professor escreve a questão, comenta aspectos sobre a solução e apresenta a solução. O estudante vai participando conforme é solicitado. Na próxima questão, o Professor mudou a postura em relação a Milena. Ao terminar de escrever a terceira questão, ele se dirige diretamente a ela e pede que descreva o espaço amostral. Uma tarefa considerada diferente, pois essa tarefa estava apenas implícita na aplicação direta da definição clássica de probabilidade aplicada nas questões anteriores:

Professor – nessa situação aí, como você montaria o espaço amostral?

A terceira questão tratava do lançamento simultâneo de dois dados e a probabilidade de se obter soma igual a 5 (cinco). A resposta de Milena inicialmente parece ser confusa:

Milena – nessa daí tem que saber o dado, contando os pontinhos 6, 5, tem 6, 6... (faz gestos alusivos aos pontos nas faces)...

Professor – exatamente... como o lançamento é simultâneo

Milena – aí de novo, tem 12, tem o 2... (ela parece contar mentalmente e fazendo gestos com os dedos para organizar a contagem) tem contar, eu não sei...

Professor – na verdade...

Milena – dá quanto a soma esse aí é 36.

Professor – nesse caso sim o espaço amostral é 36, eu vou mostrar a você (começa a escrever o espaço amostral, depois eu faço a solução...

Milena – nesse caso aí tem que somar...

Professor – é... o espaço amostral pode ser feito da seguinte forma:

$$\Omega = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2) \dots (6,6) \}$$

Milena – dois com três... até o seis com seis.

Professor – *é... daria um total de 36 situações dessa daqui... esse espaço amostral tem 36 pares... então o que vai pra gente de fato?*

Milena – *o que tem a soma cinco, ali tem um par aponta para o (1,4).*

Professor – *isso... o que mais... (para e espera Milena responder).*

Milena – *dois com três.*

Professor – *exatamente!*

Milena – *três com dois.*

Professor – *três com dois (afirma positivamente com a cabeça). Qual mais?*

Milena – *vai contando aí professor, quatro com um...*

Professor – *acho que só, não tem mais que isso não.*

Milena – *tem que fazer isso ali... (aponta para o espaço descrito no quadro).*

Professor – *se quiser anotar o espaço todo, mais a solução...*

Milena – *não pede.*

Professor – *pede não, a ideia é essa daqui... depende da informação, a soma 5, soma 6. Vou apagar aqui.*

Enquanto o professor apaga o quadro para anotar a solução, Milena descreve o espaço completo em seu caderno. Ela reconta em voz baixa os pares que satisfazem a solução. A contagem de Milena coincide com a anotação do Professor. Em voz baixa, ela conta:

Milena – *dá três sobre trinta e seis. (o professor termina de anotar os pares e ela percebe que faltou um par na sua descrição e responde)*

Milena – *dá sabe quanto professor (este está de costas copiando a solução)? dá quatro sobre trinta e seis.*

Professor – *Isso... exatamente!*

Milena – *é por isso que tem que fazer isso aqui (se refere ao espaço amostral que anotou).*

Professor – *se fizer todo espaço é mais interessante (ainda anotando a solução)... você matou a charada em tempo hábil.*

Apesar da solução ser encontrada, percebemos um certo conflito pela necessidade de descrição do espaço amostral. Embora o Professor destaque inicialmente que não seria necessária, é a ação de Milena de descrever o espaço amostral que a conduz a construir uma resposta plausível.

A partir desse ponto, observamos que a participação de Milena implica em negociações implícitas que alteram o rumo da aula. A posição assumida por Milena, que agora atende às expectativas do Professor em responder às questões, parece sinalizar que o contrato atual (copiar o exercício → comentar e transcrever a solução) envelheceu. A participação de Milena autoriza o professor:

Milena – vai ser um sobre nove.

Professor – isso. Um sobre nove nonos que daria 0,11. Certo? Então a probabilidade de se obter uma soma igual no lançamento de dados, seria 0,11 ou 11%. Exemplos com dados, com cartas de baralho, com moedas são os mais populares na teoria das probabilidades.

Milena – com moedas também tem que fazer Cara, Cara, Coroa... (se referindo ao espaço amostral).

Milena sinaliza que está disposta a falar sobre o espaço amostral quando o Professor cita que o lançamento de moedas é um contexto usual nas questões. Esse é o gesto que autoriza o Professor a continuar a aprofundar a discussão:

Professor – na teoria (aula anterior) falamos um exemplo desses. Falamos sobre espaço amostral numérico e não-numérico. Quando o espaço amostral numérico por três elementos, com o 0 (zero) e 1 (um), o não numérico seriam 4. No espaço amostral não-numérico a probabilidade sair cara ou coroa é $\frac{1}{2}$. No espaço amostral numérico seria $\frac{1}{3}$, muda! Com a modificação do espaço amostral.

Milena – espaço amostral.

Professor – é, por isso que é importante, quando for resolver uma questão como essa, saber descrever o espaço amostral direito e também o evento que estamos querendo. Se você conseguir fazer isso, e você está conseguindo entender bem o que estamos fazendo, fica mais fácil.

Milena – certo.

O Professor não só ratifica a importância do espaço amostral como legitima a posição de Milena ao declarar que está fazendo o seu papel a contento. O exemplo dado pelo Professor tratava das probabilidades atribuídas ao lançamento simultâneo de duas moedas. Ele usou esse experimento para apresentar considerações sobre o espaço amostral numérico e espaço amostral não-numérico.

Nesse ponto da aula, o Professor apaga o quadro e parece se preparar para continuar o exercício. Ele olha suas anotações e decide continuar com o exemplo das moedas:

Professor – vou até voltar aquele exemplo que falamos. Você lembra de que naquele momento nosso Ω era... (espaço amostral, copia no quadro e Milena a acompanha)

$$\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}$$

Professor – note que aqui temos um espaço amostral...

Milena – cara e coroa

Professor – duas coroas

Milena - no lançamento simultâneo das moedas né?

Professor – note que esse espaço amostral é uma hipótese. Nesse caso, seria um espaço amostral equiprovável. Obter duas coroas ou duas caras. Note que, observando o espaço amostral, podemos ver (escreve):

$$P(C, C) = 1/4$$

$$P(C, K) = P(K, C) = 1/2$$

$$P(K, K) = 1/4$$

Professor – Isso aqui tem a ver com nosso interesse. Estou interessado em que em um experimento desses? Que saia duas coroas consecutivas? Saia uma cara primeiro e uma coroa em seguida ou o inverso? Tem que ver o intuito. Em variáveis aleatórias, mais na frente vamos ver isso aí. A partir de um experimento qualquer, você pode dividir em quantas variáveis aleatórias você quiser. Nesse caso também. Se eu quiser a probabilidade de sair duas coroas, minha variável aleatória será coroa, quando chegarmos aqui ($P(C, C)$) a probabilidade vai ser zero. Minha variável X vai assumir valor zero. Certo?

Milena – Certo.

Professor – Nesse caso aqui, se montar uma distribuição de probabilidade (começa a escrever a distribuição e avisa que não precisa copiar).

Professor – Isso aqui é só a título de ilustração. Só para vermos como se comporta essas coisas (...) isso eu fiz de propósito para vermos como as coisas se modificam dependendo da minha variável de interesse no espaço amostral. Tudo isso vamos ver mais na frente.

O professor reconhece a importância da discussão sobre o espaço amostral e abre uma discussão mais teórica sobre o papel do espaço amostral na construção de ideias mais complexas sobre as variáveis aleatórias e a distribuição de probabilidade, embora destaque que era apenas

uma “ilustração”. O marcador textual sobre “ter a ver com nosso interesse” remete ao foco da SDp que são as ferramentas da Estatística. Os próximos temas estão relacionados ao trabalho com variáveis aleatórias.

Pensamos que o andamento da aula foi impulsionado a essa discussão mais teórica pela participação de Milena. Mesmo que a aula pareça retornar ao modelo contratual do encontro anterior, onde o professor apresenta suas considerações sobre o tema e o estudante acompanha sem intervenções, parece ser o cumprimento, por parte de Milena, das expectativas do Professor que permite isso. O professor ainda cita o papel das distribuições de Bernoulli, a partir do exemplo:

Professor – *se formos observar a questão relacionada ao lançamentos de moedas, no caso das distribuições de probabilidades, elas têm a ver com as distribuições de Bernoulli. Ela lida com variáveis que têm características dicotômicas. Que seria isso? Acontecer ou não, sim ou não, certo ou errado. No lançamento de uma moeda, ela pode dar cara ou não. As distribuições binomiais tratam sobre isso também que podem ser explorados em variáveis aleatórias.*

Após esse momento, o Professor retoma o exercício e apresenta mais três questões tratando de eventos independentes, como o cálculo da probabilidade total e o teorema de Bayes. Dentro do tempo didático, percebemos que a aula entrou em nova etapa.

A primeira questão retoma o contextos dos baralhos, porém agora com dois eventos simultâneos e independentes. A solução sugerida pelo Professor (escrita no quadro) sugere um tratamento ostensivo bem próximo das praxeologias da obra A, que analisamos no capítulo 5:

Quadro 36 – Questão 4 – Independência de eventos.

4º) De dois baralhos de 52 cartas retiram-se, simultaneamente, uma carta do primeiro baralho e uma carta do segundo baralho. Qual a probabilidade de a carta do primeiro baralho ser um rei e a do segundo baralho ser um 5 de paus?

Solução

$$P_1 = \frac{nA}{n\Omega} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \text{ e } P_2 = \frac{1}{52}$$

Como esses dois eventos são independentes simultaneamente, vem:

$$P = P_1 \times P_2 = \frac{1}{13} \times \frac{1}{52} = \frac{1}{676} = 0,0015.$$

Fonte: anotações do Professor de IDIP (2017).

A resolução da questão revelou que Milena, de fato, ainda não tinha compreendido bem o contexto do baralho como espaço amostral. O Professor percebeu a dificuldade e explicou para ela a organização de um baralho:

Professor – *vemos no enunciado da questão que estamos trabalhando com dois eventos.*

Milena – *certo. Esse cinco de paus também tem?*

Professor – *tem, note que o baralho tem quatro naipes, os naipes são paus, ouro... deixa eu anotar (no quadro) para você não esquecer.*

O Professor anota a descrição das cartas separadas por naipes e faz uma explicação mais detalhada sobre as cartas do baralho. Logo em seguida começa anotar a solução conforme o quadro 15. Após anotar a solução e conseqüentemente a resposta ao problema, o professor inicia a discussão sobre natureza dessa tarefa que é diferente em relação às questões anteriores. É válido ressaltarmos que Milena não apresentou uma solução para a resposta. Ela copiou as anotações do quadro em silêncio e em seguida o Professor fez o questionamento:

Professor – *you conseguiu enxergar algumas coisas que nós falamos ontem. Vocês conseguiram perceber qual a diferença nesse exercício em relação aos anteriores?*

Milena fica em silêncio e percebe que o Professor espera algum tipo de resposta:

Milena – *qual exercício? esse daqui? (se referindo à questão).*

Professor – *sim esse aqui. Note que além de trabalharmos com dois baralhos, digamos que seriam dois eventos separadamente.*

Milena – *(silêncio).*

Professor – *tem uma diferença se você observar direitinho (com atenção).*

Milena – *(silêncio).*

Professor – *um dos conceitos que utilizamos ontem. Vou até grifar aqui. (vai ao quadro e grifa a palavra “independentes” na solução). Isso lembra alguma coisa a você ou não?*

Milena – *independência, não depende né.*

Professor – *é, esse termo aí. A pergunta é qual a probabilidade que ocorram esses dois eventos (...) nós calculamos, por sinal é uma probabilidade bem baixa, menos de 1%.*

Milena – *(silêncio)*

Professor – *por que você acha que são independentes? Vem alguma coisa a sua cabeça.*

Milena – por que tem o evento, a amostra.

Professor – tudo bem, além de tudo isso aí, estamos considerando o seguinte: lidamos com dois experimentos e a realização de um experimento não interfere...

Milena – no outro

Professor – um não impede a realização do outro, são duas coisas separadas, então um não interfere no outro. Diferente do exemplo de ontem (moedas). Quando eles são mutuamente exclusivas, a ocorrência de um interfere na ocorrência do outro, no exemplo da moeda ou ela vai dar cara ou vai dar coroa. certo?

Milena – certo.

Professor – ficou entendido? O conceito de independência?

Milena – ficou.

Observamos nesse excerto que a dinâmica do contrato didático parece mudar novamente. Se antes a participação de Milena lhe garantiu a mudança de posição no SDs e conseqüentemente parece ter impulsionado a mudança no contrato, no trecho acima, é novamente a participação de Milena que interfere no contrato causando uma espécie de regressão, a ruptura que ela causa leva o Professor a recorrer aos efeitos de contrato didático. Agora a dinâmica é caracterizada pela confusão em relação ao espaço amostral, utilizando o baralho, e os constantes momentos de silêncio que provocaram alguns efeitos típicos do contrato didático, conforme Brousseau (2008).

Apesar da dinâmica do contrato didático Milena mudou de posição, ao menos para o Professor esse parece ser um lugar conquistado. Tanto que no diálogo, mesmo o Professor tendo anotado as solução, dá a entender que Milena fez a atividade proposta.

Com a intenção de problematizar o conceito de independência a partir da introdução da nova tarefa, o Professor solicita que Milena teça algum comentário nessa direção. As respostas de Milena ou os seus “silêncios” sinalizam que algo tem que ser feito para que as expectativas do contrato sejam cumpridas. Na primeira parte da transcrição, vemos o Professor tentando induzir a percepção de Milena a respeito da noção de independência de eventos presente na tarefa. Como essa resposta não veio, ele assume a responsabilidade, aqui pudemos observar claramente o que Brousseau (2008) chama de efeito topázio. O professor grifa a palavra-chave no texto que permitiu a Milena inferir que a questão tratava do conceito de independência, ou seja, diante da dificuldade da estudante, o Professor facilita seu trabalho para receber as respostas de que precisa.

Prosseguindo com a explicação, o Professor percebe que Milena não tem as respostas que ele espera. O Professor, diante da resposta de Milena sobre o porquê da ideia de independência estar presente na tarefa, opera o que parece ser uma tentativa de aproveitar o que Milena diz sobre evento e espaço amostral, legitimando sua participação, mesmo sendo uma resposta evasiva, e complementa ele mesmo a explicação. Pensamos que essa conduta pode ser um exemplo muito próximo do efeito *Jourdain*. Nesse efeito, Brousseau (2008) destaca que o professor aceita uma resposta banal do estudante e trata como um conhecimento legítimo.

Após esse momento, o Professor sinaliza de fato a mudança no contrato ao fazer um apanhado dos assuntos tratados a partir das questões trabalhadas:

Professor – fizemos quatro exemplos, são exemplos simples, mas se observarmos são quatro exemplos que lidam diretamente com aquelas ideias que vimos ontem, a ideia de frequência (se referindo à questão com os dados), a ideia clássica, as ideias de axiomas estão implícitas.

É uma outra etapa dentro do tempo didático. Outro fator a ser observado é que já se aproximava das 21h, logo Milena teria que tomar o transporte de volta para sua cidade. A partir desse ponto, o professor apresentou em sequências as duas últimas questões. De modo que a questão 5 (teorema das probabilidades totais) fornecia os dados para a questão 6 que necessitava do teorema de Bayes.

O professor anotou as questões e logo em seguida as soluções. Milena, em silêncio e olhando o celular, provavelmente preocupada com horário do transporte, anotou as questões. Como as probabilidades foram todas dadas a priori no enunciado das questões, para o cumprimento da tarefa bastava a substituição dos valores nas respectivas regras como mostra a questão 5:

Quadro 37 – Questão 5 – Probabilidade Total.

5º) Durante a inspeção em três fabricas F_1 , F_2 e F_3 , a probabilidade de que um determinado produto escolhido ao acaso seja da fábrica 1 é 0,3, da fábrica 2 é 0,45 e da fábrica 3 é 0,25. Sabe-se que a probabilidade de encontrar nessa inspeção um produto defeituoso vindo da fábrica 1 é 0,1, da fábrica 2 é 0,02 e da fábrica 3 é 0,015. Nessas condições qual a probabilidade de escolher um produto e ele ser defeituoso?

Solução

Seja o evento $A = \{\text{Produto defeituoso}\}$, seja $F_i = \{\text{Produto da fábrica } i\}$ e sejam também: $P(F_1) = 0,3$, $P(F_2) = 0,45$ e $P(F_3) = 0,25$. Onde $P(A|F_1) = 0,01$, $P(A|F_2) = 0,02$ e $P(A|F_3) = 0,015$.

Então, pelo teorema da probabilidade total temos:

$$P(A) = P(F_1) P(A|F_1) + P(F_2) P(A|F_2) + P(F_3) P(A|F_3).$$

$$P(A) = 0,3 \times 0,01 + 0,45 \times 0,02 + 0,25 \times 0,015 = 0,01575.$$

Fonte: Protocolo de anotações do Professor (2018).

O mesmo ocorreu com a questão 6:

Quadro 38 – Questão 6 – Teorema de Bayes.

6º) Se durante a inspeção, encontramos um produto defeituoso, qual é a probabilidade que ele tenha sido da fábrica 2?

Solução

Aqui aplicaremos o teorema de Bayes usando a questão anterior para encontrar $P(A)$:

$$P(F_2|A) = \frac{P(F_2)P(A|F_2)}{P(A)} = \frac{0,02 \times 0,45}{0,01575} = 0,5714.$$

Fonte: Protocolo de anotações do Professor (2018).

Nossa inquietação naquele momento era como Milena estava percebendo essas questões e a técnica usada para respondê-las. Como observamos, o contexto em que as questões 5 e 6 se inserem segue uma linha parecida com abordagem da Obra A, embora nessa obra não tenha uma discussão sobre o Teorema de Bayes. A resolução destas questões pede apenas que sejam localizadas as informações relevantes e colocadas no modelo que sugerem os teoremas.

Com o final da resolução da questão 6 pelo Professor, a aula foi encerrada. Apesar da restrição imposta pela questão do acesso à universidade por parte de Antonio e Kátia, julgamos que esse encontro foi fundamental para o funcionamento do SDs, pois efetivamente os estudantes, nesse caso Milena, tiveram a oportunidade de conhecer as praxeologias requeridas ligadas à probabilidade.

Para complementar a construção de dados relativos a esse encontro, entrevistamos Milena, tentando captar algumas questões que poderiam ter escapado à nossa observação.

Iniciamos perguntando a Milena sobre suas percepções sobre o encontro e seu papel, sua possível mudança de posição:

Pesquisador – *Como foi o aula de hoje?*

Milena – *a aula de hoje foi boa, algumas dúvidas que ficaram foram esclarecidas, a gente foi para a prática, ontem estava na teoria. A prática ajudou a perceber como chegamos na resolução dos problemas.*

Pesquisador – *o que lhe chamou atenção nessa prática?*

Milena – *os teoremas, mas na prática dá para fazer os cálculos, entender mais.*

Pesquisador – *Pensando na aula, e nos colegas que faltaram hoje, sua posição mudou?*

Milena – *está mais confortável, eu vi a teoria, a prática...*

No discurso de Milena, vemos que ela percebeu o encontro como um momento positivo. Na sua fala, o termo “prática” adquire uma conotação de resolver as tarefas propostas, correlacionado a teoria com a prática. Essa mesma prática é o que parece, para ela, a garantia de conforto em relação ao processo de estudo em IDP. Ela julga ter tirado dúvidas, visto o saber em ação e para ela isso é confortável. Ela adquire essa crença de estar aprendendo.

Sobre o processo de estudo, perguntamos especificamente sobre o episódio onde ela define o espaço amostral do experimento acerca do lançamento dos dados. A intenção era tentar captar os caminhos que ela percorreu. Ela confirmou o raciocínio da aula, embora tenha demonstrado certa confusão entre “soma” e “contagem”:

Pesquisador – *como você chegou a 36 tão rápido.*

Milena – *porque eu pensei, tem os números do dado 6, 5,..., você ia colocar, como os dados são jogados simultaneamente, somando os dois dados e dá trinta e seis.*

Pesquisador – *você diz assim... contagem dos pares?*

Milena – *é a contagem 1,2, 1,3...*

Pesquisador – *podia ser 6 possibilidades vezes 6 possibilidades.*

Milena – *é, exatamente isso.*

Na fala de Milena, observamos que ela está confiante em sua estratégia para apresentar o espaço amostral do experimento dado, embora o discurso seja confuso do ponto de vista das

ações. Além disso, esse discurso pode denunciar fragilidades na relação $R(X,O)$, não só quando o objeto é a probabilidade, mas em relação a outros objetos que estão em jogo. Pensamos que, tanto do ponto de vista do contrato institucional, como da posição dela, enquanto futura professora, é necessária a aquisição de um discurso mais claro do ponto de vista daquele saber. Apesar dessas dificuldades, chegar às respostas pedidas, ter suas expectativas confirmadas pelo Professor lhe garantem a construção de um cenário, onde ela se percebe como alguém que está aprendendo probabilidade:

Pesquisador – como você vê a probabilidade depois dessa aula?

Milena – é algo incerto, que vem do acaso.

Pesquisador – mas você considera que sabe calcular probabilidades?

Milena – sei! Se for como as questões que ele trabalhou hoje na sala de aula, eu sei sim.

Pesquisador – e no caso das últimas questões?

Milena – assim... como ele falou... tem o teorema... como é o nome do cientista lá?

Pesquisador – Bayes?

Milena – sim. Esse mesmo. São questões que dependem da fórmula para resolver.

Pesquisador – e no caso da questão 5, que professor chamou “mais sofisticada”, você entendeu?

Milena – entendi sim. Como ele falou, a questão tinha os dados sobre os produtos defeituosos. Eram três fábricas e três amostras. É só colocar os dados na fórmula e pronto.

Pesquisador – em relação às probabilidades obtidas, no caso da última questão, a probabilidade de termos um produto defeituoso e ele ser da Fábrica 2 foi de 57%, você entendeu por que aquela probabilidade foi tão alta?

Milena – assim, foi porque ele concentrou em uma fábrica só, na questão anterior eram as 3 fábricas, agora não era somente uma, por isso aumentou.

Professor – você disse lá no início que queria aprender probabilidade para ganhar na loteria... sua concepção mudou?

Milena – não, ficou do mesmo jeito, acho que pode ajudar.

No trecho que acabamos de ler, vamos encontrar diversos indicadores no discurso de Milena que ora confirmam essa crença de Milena de que a participação em IDIP está contribuindo para a sua aprendizagem, ora denunciam as fragilidades das quais falamos nos parágrafos anteriores. Milena se torna confiante de dizer que sabe resolver as tarefas, mas desde que seja no contexto que ela acabou de vivenciar. Ela responde a nossa inquietação sobre como

percebeu as duas últimas questões – existe uma fórmula, as questões fornecem os dados, a tarefa é localizar esses dados e alimentar o modelo (teorema) para encontrar o que é procurado – então, parece não importar o que os dados dizem ou as respostas encontradas, já que a tarefa e sua técnica foram identificadas. Isso contrasta com o fato de Milena não se dar conta de que na questão 5 a probabilidade da fábrica 2 (F_2) fornecer um produto defeituoso era de quase 50% se comparada com as outras fábricas, logo as chances de obtermos um produto, verificarmos que ele é defeituoso e pertencer a F_2 eram bem maiores. O teorema atualiza a probabilidade que passou de 45% para quase 60%. Para Milena, isto não estava claro. Mais uma vez, vamos adquirir que o papel das dissonâncias no discurso institucional como agentes que influenciam na relação $R(X,O)$ de Milena, isto é, na sua aprendizagem. Enquanto Milena parece caminhar para uma relação *conforme* em I_{DIP} , vai deixando pelo trajeto elementos essenciais para $R(X,O)$ atenda ao contrato institucional de outras instituições externas onde $R(X,O)$ poderá ser requerida, esse para nós parece ser um efeito das dissonância institucionais, pois dentro de I_{DIP} o sistema parece atender as expectativas do Professor e dos próprios estudantes.

Outra consideração importante é que $R(X,O)$ não se refere só à dimensão epistemológica de O_p . Para Milena, $R(X,O)$ não se encerra em aplicar técnicas para resolver tarefas. Na relação $R(X,O)$, é preciso considerar que Milena é uma futura professora. Por essa razão, conversamos sobre a sua percepção em relação à probabilidade como um saber a ser ensinado:

Pesquisador – *o professor comentou sobre o uso das diferentes abordagens, clássica, frequentista, você conseguiu perceber isso?*

Milena – *não. Acho que a gente ficou mais na clássica... mas assim ainda insisto na questão dos jogos, dá pra ajudar sim.*

Pesquisador – *mas se você fosse dar aula, que abordagem você utilizaria?*

Milena – *ah! Eu pela abordagem clássica, porque tem questões mais simples, mais diretas.*

Pesquisador – *mudou alguma coisa em relação ao início das aulas?*

Milena – *sim! Eu vejo o conceito com mais clareza. Consigo resolver uma questão que envolva evento, espaço amostral. Hoje eu teria mais segurança para dar a aula, iria com os pés no chão. Trabalharia com resolução de problemas, como vemos nos estágios.*

Pesquisador – *já que você citou a resolução de problemas, se olharmos para a aula de hoje, se o professor adotasse um modelo como a resolução de problemas como seria essa aula?*

Milena – *seria mais interessante, pois ia despertar nossa curiosidade. Eu podia até errar, o aluno pode errar faz parte da aprendizagem.*

Vemos nas falas de Milena que ela reconhece que as observações sobre o uso das diferentes abordagens da probabilidade em IDIP por parte do Professor não ocorrem na prática. As praxeologias utilizadas, o saber disponível nas obras de referência e a própria organização didática do Professor corroboram para a construção de um ambiente onde a abordagem clássica pareça ser a mais conveniente. Isso se confirma quando Milena declara que ao ensinar iria trabalhar nessa perspectiva. Ela novamente reforça a sua crença de a probabilidade poder ajudá-la com a questão das loterias. Esse é um comportamento parecido com o episódio do baralho durante a aula. Ela parece sentir a necessidade de reforçar sua percepção.

Milena, novamente, aponta para sua crença de que está aprendendo em IDIP, mas faz uma ressalva importante sobre em que perspectiva trabalha com a Probabilidade em suas aulas. “A resolução de problemas” é um tema frequentemente debatido nas discussões sobre alternativas metodológicas para o ensino de Matemática, portanto, muito presente no discurso de professores e futuros professores. (CAVALCANTE, 2013).

Ao problematizarmos a essência da resolução de problemas e a organização didática em IDIP, percebemos que Milena reconhece que poderia ter uma experiência diferenciada, inclusive com a possibilidade de errar durante o estudo em IDIP.

Para encerrar a entrevista, perguntamos a Milena sobre a que ela atribua o fato de conseguido responder as três primeiras questões propostas. Milena nos trouxe um dado novo que ajudou a compreender melhor sua postura em sala de aula.

***Pesquisador** – ainda em relação à aula... nas primeiras questões, você acertou todas, por quê?*

***Milena** – assim, como eu já tinha dito, a aula de ontem foi a teoria, eu fui para casa, li a teoria em casa, tentei resolver alguns problemas...*

***Pesquisador** – você estudou em casa?*

***Milena** – estudei, por livros.*

***Pesquisador** – que livros?*

***Milena** – assim, livros do ensino médio, Dante. Assim eu já tinha uma noção. Não cheguei fazer questões, li a teoria, vi os exemplos, as questões resolvidas.*

***Pesquisador** – você achou mais fácil estudar pelo livro didático?*

***Milena** – não, a mesma coisa.*

***Pesquisador** – você hoje, então, se considera uma estudante de probabilidade?*

***Milena** – eu pretendo passar nessa cadeira... você lembra que o professor disse que eu já estou fera (risos)... mas, assim, sempre perguntando a ele né?*

Na fala de Milena, encontramos indícios de como a sua participação não se limita a IDIP. Chevallard, Bosch e Gascón (2001) colocam o estudo como atividade central no processo de aprendizagem. Eles defendem que a essência do didático é compreender o estudo como uma chave para a aprendizagem. De fato, para os autores, a noção de estudo é bem mais ampla, no entanto, tendo em vista o contrato didático em IDIP e a própria infraestrutura epistemológica disponível na instituição, veremos que a decisão de estudar em casa, assumir para si a responsabilidade de ampliar o que foi visto permitiu a Milena mudar de posição no SDs.

Na entrevista inicial, todos os estudantes declararam que buscavam outras fontes para complementar as aulas da universidade. Livros didáticos, videoaulas, sites especializados, dentre outros, são alguns dos recursos utilizados por esses estudantes. Aqui vale destacarmos o papel do livro didático, como referência do estudo em Matemática. Por vezes, são tecidas duras críticas ao papel que esse instrumento assume na sala de aula, no entanto, essa relação com o livro didático, como referência para os saberes Matemática e suas organizações, começa na Educação Básica, mas ainda está presente nas atividades de estudo dos estudantes como destacou Milena.

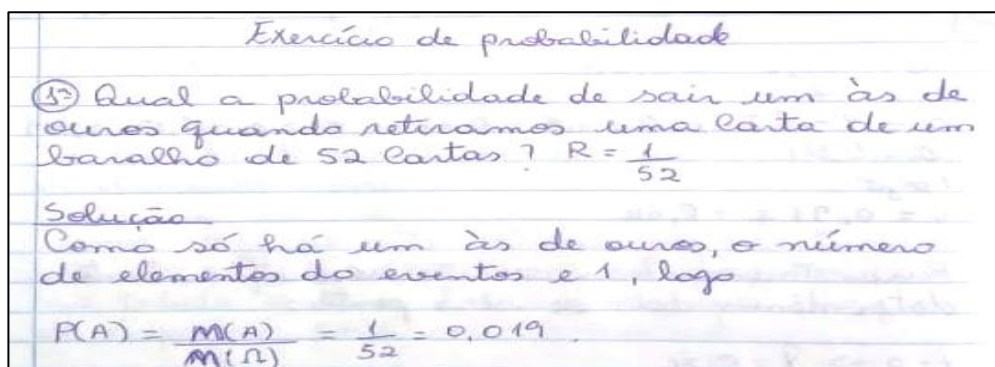
Isso mostra também outra faceta que diz respeito ao fato de que, embora o livro didático seja uma referência importante, ele não pode ser a única referência, pelo simples fato de não ter a finalidade de formar professores. Por outro lado, não se pode ignorar seu papel. Embora Milena estivesse segura em relação a sua estratégia com a descrição do espaço amostral no caso do lançamento dos dados, pensamos que não é estranho inferir que ela possa ter visto exemplos nesse livro que tratasse de espaço amostral semelhante. As tarefas de probabilidade nos livros da Educação Básica não diferem tanto das presentes nos manuais que se prestam a fazer uma introdução sobre probabilidade.

O fato é que a participação, tal qual defende Lave (1996), é o elemento fundamental no processo e ela vem sempre acompanhada de engajamento. O sujeito didático, epistemológico e psicológico precisa estar envolvido para tomar a decisão de estudar, de buscar em outras fontes, seja pela decisão de querer aprofundar sua atividade de estudo, seja por uma espécie de acordo tácito de que é após as aulas teóricas que se faz necessário estudar em casa, ou simplesmente pela motivação que Milena apresentou na última fala de sua entrevista: “eu preciso passar nessa cadeira”. Para ser aprovada, Milena compreende que tem um papel a cumprir, estudar é parte dessas responsabilidades.

Por último gostaríamos de fazer um destaque sobre o favorecimento da construção de praxeologias pessoais no funcionamento de IDIP. Durante todo encontro, relatamos a participação de Milena no sistema didático, no entanto, essa participação é caracterizada

fortemente pelo discurso oral. Perceberemos em algumas descrições que ela utiliza o caderno de probabilidades, instrumento que utilizamos para que os estudantes pudessem fazer o registro das suas praxeologias pessoais. Na entrevista após o encontro, ao consultar o caderno de Milena observamos que as praxeologias que ela desenvolve no caderno correspondem as anotações que o professor faz no quadro referente a solução das questões:

Figura 44 – Resolução questão 01 - Caderno de probabilidades Milena.



Fonte: protocolos de pesquisa Milena (2018).

Essa observação parece caracterizar fortemente um marca do contrato didático estabelecido. No funcionamento do sistema didático os estudantes visitam as obras por meio do discurso do professor. A resolução das tarefas, entendidas como exemplos, é dirigida pelo professor. Os estudantes acompanham as soluções, fazendo intervenções pontuais. Nesse sentido, o emprego das técnicas pelo professor assumem um carácter canônico dentro do sistema didático. Assim, faz parte da responsabilidade do estudante se apropriar das solução dessas tarefas reproduzindo aquilo que o professor comunica. Esse é um padrão que se repete nos próximos encontros por Milena e pelos demais estudantes.

Como já frisamos, a descrição deste encontro nos trouxe elementos importantes. Um dos principais foi perceber Milena, enquanto sujeito de IDIP, assumindo certo protagonismo na dinâmica do SDs, protagonismo esse que indicou conflitos, crenças e possíveis em R(X,O).

6.2.4 ESTUDANDO PROBABILIDADE: 3º ENCONTRO

O terceiro encontro ocorreu uma semana depois no dia 07 de abril de 2017. Esse encontro reuniu alguns aspectos interessantes. O primeiro é o fato de que todos estudantes estiveram presentes, Pedro esteve presente desde o início da aula e Antonio chegou no final do primeiro exemplo. O outro fato é que a aula foi dedicada à exploração de exercícios. Para Pedro e Kátia, seria o primeiro encontro deles com O_p em IDIP.

Naquela mesma semana, a categoria dos servidores da universidade, professores e técnicos haviam deliberado por um indicativo de paralisação das atividades, sem previsão de retorno¹³¹. Esse fato criou um clima de insegurança, quanto à continuidade das atividades. Possivelmente, este seria o último encontro dedicado ao estudo de O_p em I_{DIP} .

Na fala inicial do Professor ele destacou esse último aspecto, além de fazer um quadro geral dos conteúdos apresentados e das atividades desenvolvidas nas aulas anteriores:

***Professor** – semana passada, fizemos alguns exercícios referentes à probabilidade. A Milena estava presente e participou. Vocês não vieram (se referindo aos demais). Apesar de que não é coisa do outro mundo não, pelo menos essa é uma parte mais simples de probabilidade.*

***Pedro** – Antonio me passou os conteúdos por e-mail.*

***Professor** – certo. Hoje vamos mais uma vez fazer alguns exercícios contemplando o conteúdo de uma forma geral desde a parte mais simples até o teorema de Bayes e o teorema da probabilidade total. Acho que com isso finalizamos o conteúdo de probabilidade. Dando sequência, vamos trabalhar com variáveis aleatórias, mas probabilidade finalizamos hoje.*

***Professor** – vamos fazer mais uns exemplos, exercícios e deixar vocês mais robustos. (começa a escrever no quadro). Não vou mentir pra vocês. Se eu pudesse, semana que vem, estaria dando aula desse conteúdos, mas acredito, se entrar mesmo em greve, ninguém vai ter aula não. Seria bom porque terminaríamos a disciplina e todo mundo aprovado e feliz.*

Vemos nesse trecho inicial alguns elementos que denotam os aspectos que destacamos nos parágrafos anteriores. O Professor destaca a ausência dos demais, mas faz isso a partir do lugar de Milena, “ela, veio, participou, porém os demais não”. No entanto, ele faz uma ressalva, no sentido de minimizar o impacto da ausência. Essa observação do Professor pode caracterizar que a crença de objeto O_p em I_{DIP} é não problemática.

Pedro, por sua vez, parece justificar suas ausências, sinalizando que talvez ainda decida continuar com sujeito em I_{DIP} . O Professor foi receptivo, mas em seguida retomou o discurso sobre a proposta do encontro e plano de conteúdo que foi visto. De certa forma, pudemos perceber que a relação de Pedro com Professor parece estar fragilizada. As sucessivas faltas e a ausência na entrega de atividades podem ter contribuído para essa impressão de fragilidade.

¹³¹ O movimento de greve durou cerca de 02 meses.

Sobre a longevidade do SDs em torno do estudo de probabilidade, na fala do Professor, vemos que aquela seria provavelmente a última aula dedicada àquele objeto, ou seja, o tempo didático dedicado a O_p estava completo.

Sobre o contexto daquele momento da UEPB vemos no discurso do Professor que a instabilidade que a instituição passava atuava também como uma restrição em I_{DIP} . Notamos que a percepção dessa restrição, por parte dos sujeitos do SDs, parece se restringir ao andamento da disciplina. A situação da universidade, as reivindicações e os impactos disso para o próprio professor e alunos não são destacadas.

O Professor fez a anotação da primeira questão. O contexto foi o sorteio de bolas em uma urna. Esse é outro contexto muito comum em questões envolvendo a Probabilidade em uma perspectiva clássica.

Quadro 39 – Questão 01 – 3º encontro em I_{DIP} .

Exemplo 1 - Uma urna tem 6 vermelhas, 4 brancas, 5 azuis. Retira-se uma bola da caixa. Qual a probabilidade de a bola:

a) Ser vermelha b) Ser branca c) Ser azul d) Não ser vermelha e) Ser branca ou azul

Fonte: Protocolo de anotações do Professor (2018).

Após anotar a questão, o professor iniciou a discussão, fez a leitura da questão e nessa leitura ofereceu informações sobre o espaço amostral de forma aparentemente semelhante à aula anterior. Após a leitura, o Professor começou a escrever a solução:

Professor – então temos aí nesse enunciado, vimos questões dessa natureza na semana passada, exemplo com caixa ou urnas que contêm bolas. Nesse caso, aí um total de 15 bolas das quais 6 são vermelhas, 4 brancas e 5 são azuis. Retiramos uma bola e verificamos a probabilidade dela ser vermelha, branca, azul, não ser vermelha e ser branca ou azul. Vamos comentar a nossa solução. (anota informações sobre o a questão):

Sejam as bolas brancas, azuis e vermelhas, representada por A, V, B:

O Professor começou a escrever a solução. Em seguida, ficou em silêncio, quando fez uma observação em relação à qualidade dos pinceis, após esse comentário, ele anunciou que a aula seguiria uma dinâmica diferente:

Professor – tá dando para enxergar? Esse lápis estão muito ruins, inclusive peguei esses novos hoje na coordenação. Já tinha pego semana passada.

Kátia – ali é “representada”?

Professor – é sim, então! Hoje que quero fazer diferente. Semana passada, ficamos discutindo, resolvendo os exercícios, inclusive a Milena teve uma participação muito boa. Antes de responder às questões (sorriso), ela se antecipava e dava as respostas. Hoje quero fazer diferente. Colocar vocês como protagonistas para acharem a solução desses problemas e eu vou ficar aqui na retaguarda auxiliando vocês. Certo? Gostaria de sugestões, pitacos e etecetera nessas questões aí.

Após essa fala a turma permaneceu em silêncio, especialmente Kátia e Pedro, Milena ainda estava copiando. Já havíamos observado no encontro anterior que o “silêncio” dos estudantes atua como um marcador: não responder ao que o professor pergunta ou solicita em relação ao conteúdo indica que o professor precisa assumir a responsabilidade para que os estudantes se engajem no processo. O Professor, parece ter feito essa leitura do “silêncio”, recorre a Milena, já que ela, após a mudança de posição na aula anterior, parece assumir para o Professor uma posição de referência no SDs:

Professor – Milena, que surgiu como protagonista da nossa aula semana passada.

Milena – (silêncio)

Professor – nessa primeira questão (se referindo ao item a) como você faria Milena? Teria algum raciocínio?

Milena – eu colocaria o total de bolas vermelhas sobre o total de todas as bolas.

Professor – é isso mesmo. Essa é a solução. O número de casos favoráveis sobre o número de casos possíveis. Muito Bem! Você pensou dessa forma também Kátia?

Kátia – não!

Professor – E você Pedro? Chegou a raciocinar dessa forma?

Pedro – não.

Professor – tem uma explicação bem simples para isso: é que Milena vem participando de nossas aulas desde o início, e que vocês não participaram. Isso não significa dizer que vocês não vão aprender, vocês vão aprender sim, não é difícil, note que o conceito que vimos de probabilidade lá no início (faz gesto com o braço dando a ideia de muito tempo atrás), o exercícios anteriores ajudaram ela a ter essa bagagem, de maneira fácil achando essas soluções.

Em seguida, o professor anota no quadro a solução explicando o emprego da técnica e o significado dos ostensivos presentes. Chamou-nos atenção o fato de o detalhamento ser maior que na aula anterior. De alguma forma, parece que a presença de Kátia e Pedro indicava a necessidade de um detalhamento maior da técnica, embora alguns aspectos e significados não tenham sido aprofundados. Em geral, o detalhamento se resumia aos procedimentos ligados à definição clássica da probabilidade.

Professor – a probabilidade de bolas vermelhar $P(V)$ é igual ao número de casos favoráveis ($n(V)$) no espaço amostral dado (Ω) dividido pelo número de elementos desse mesmo espaço amostral. Então para a solução, temos 6 sobre 6 mais 4 mais 5. Teremos 6 sobre 15, isso já seria uma solução, mas pode simplificar: dividindo o numerador e o denominador por 3, teremos 2 sobre 5. Essa é a nossa solução. Entendeu Pedro por que essa é nossa solução? O porquê desse resultado?

$$a) P(V) = \frac{n(V)}{n(\Omega)} = \frac{6}{6 + 4 + 5} = \frac{6^{\cdot 3}}{15} = \frac{2}{5}$$

Pedro – sinaliza com a cabeça positivamente.

Professor – note que temos somente 6 bolas vermelhas. Na caixa é tirada uma bola vermelha. A probabilidade disso acontecer seria o número de casos favoráveis nesse caso 6, sobre o nosso espaço amostral. O nosso espaço amostral são as 15 observações, ou seja, as 15 bolas. Entendeu, Pedro? Entendeu, Kátia?

Pedro – hunrum (expressão equivalente ao sim).

Kátia – hunrum (expressão equivalente ao sim).

Pode-se observar que o Professor enfatiza no seu discurso a definição e o seu emprego como técnica principal. O detalhamento do espaço amostral ainda não tem tanta ênfase, embora agora pareça haver uma preocupação maior, já que a descrição do espaço amostral é um passo crucial para a aplicação correta da definição. Notemos também que nada é observado sobre a equiprobabilidade requerida no experimento.

Em seguida, o professor inicia a discussão do item b convidando Milena:

Professor – entenderam? Essa letra b Milena.

Milena – letra b. Também pega o total de bolas brancas, sobre o total das bolas.

Professor – quer ir lá fazer (quadro).

Pedro – vai, Milena.

(Milena vai ao quadro)

Milena – no caso, colocamos a fórmula (escreve remetendo a solução anterior $n(V)/n(\Omega)$).

Professor – aí no caso....

Kátia – é n ou v (em voz baixa)

Milena – ah! Sim! (apaga o n da fórmula).

Professor – não é nem isso aí. Estamos falando das bolas brancas.

Milena – sim (sim, o termo “brancas”), temos 4 bolas brancas.

Professor – no lugar de V coloca...

Milena – colocamos 4 sobre....

Professor – tá certo.

Kátia – no lugar do V coloca B (se referindo ao ostensivo usado por Milena)....

Professor – isso (concordando com Kátia).

Milena – (ignora e continua). Então, vamos fazer 4 sobre 6 mais 4 mais 5 que dá o total 4 sobre 15... e com as azuis é do mesmo jeito.

Professor – exatamente, está certo, muito obrigado.

Kátia – (se dirigindo em voz baixa para Milena). Ali tu colocou V no lugar de B .

Milena – (em resposta a Kátia) tem nada não, tá certo.

Essa participação de Milena foi interessante, especialmente porque ela confia no seu equipamento praxeológico, sabe que o resultado depende do quociente do número de bolas brancas pelo número de total de bolas. Apesar de o Professor e de Kátia chamarem atenção para o ostensivo usado fazer uma referência equivocada, ela continua. Vale frisarmos que o Professor não interrompe Milena e em certo momento legitima sua resposta. O erro em jogo não é considerado, pois Milena consegue aplicar a definição.

Logo em seguida o Professor convida Pedro que responde oralmente que o resultado seria $1/3$ para o item c. O Professor pede que ele vá ao quadro, ele vai, repetindo o mesmo equívoco de Milena, mas nesse caso o Professor aproveita para corrigir:

Professor – seriam as azuis agora.

Pedro – dá um terço.

Professor – quer vir responder no quadro? Vocês já estão pegando o macete.

Pedro – vamos lá! (anota no quadro)

$$c) P(V) = \frac{n(V)}{n(\Omega)} = \frac{5}{15} = \frac{5 \cdot 5}{15} = \frac{1}{3}$$

Kátia – ali é A? Azul representa com A. (chama a atenção do professor)

Professor – isso.

Pedro – a probabilidade é um terço.

Milena – e essa de não ser azul (item d).

Professor – isso, muito obrigado. Só um modificação eu vou fazer, vocês não erraram, só para constar que nossos eventos (apaga o V nas resolução) são bolas brancas (B) e azuis (A).

Antes de Pedro terminar a resposta ao item c, Milena já parecia ter elaborado uma solução para o item d (a bola não ser vermelha). Vimos na análise das obras A e B que item remete ao subtipo de tarefa que corresponde ao cálculo da probabilidade complementar. Essas questões admitem como solução a relação complementar $P^C = 1 - P$ (obra A) e $P(A) + P(A^C) = 1$. No entanto, Milena se utiliza da definição e da análise dos eventos (casos favoráveis) e do espaço amostral dado. Mesmo com essa resposta, o Professor sente necessidade de mostrar a solução com a relação correspondente:

Professor – na letra d, já é um pouco mais complicado.

Milena – na letra d, coloca só as bolas brancas e as azuis e tira as vermelhas dividido por todas?

Professor – seu raciocínio tem sentido, mas tem outra forma mais fácil de fazer. De não ser vermelha. A gente pode ver pelo complementar. No caso ficaria, seria 1 menos a probabilidade dela ser vermelha:

$$d) P(V^C) = 1 - P(V) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

Milena – a minha também deu 3 quintos.

Professor – três quintos (sorri e dirige o olhar para o pesquisador). Certo, mas gostou mais da sua forma ou dessa.

Milena – gostei mais da minha... (risos) não sei se dá certo em outros casos.

Professor – estão vendo que vocês já estão craques.

Pedro – professor, eu não entendi a letra d. A probabilidade de não ser vermelha.

Professor –isso, como você calcular o complementar, 1 menos a probabilidade de não ser vermelha, como está aqui... (se referindo à solução do quadro), entendeu?

Pedro – sim, entendi.

Vemos no diálogo a intenção do professor em registrar a técnica para o subtipo de tarefa em questão, ou seja, calcular a probabilidade de um evento complementar em um espaço amostral equiprovável e finito. O Professor deixa claro que nesse caso é recomendável o uso da relação complementar. Ainda que ele não descarte a solução de Milena, deixa clara sua intenção quanto ao equipamento praxeológico. Pedro, por sua vez, faz uma intervenção que pode indicar que ele está começando a entender ou aumentar sua participação em IDP, no entanto, a explicação do Professor é pontual para ele especialmente por ele confirmar que entendeu.

O Professor passa a discutir o item d quando Antonio chega:

Professor – para a probabilidade dela ser branca ou azul, vamos adentrar na teoria dos conjuntos, ou seja, a união de conjuntos. Vocês devem lembrar que, nos axiomas de probabilidade, temos uma relação assim, isso fica ficaria exatamente igual (escreve a relação):

$$P(B \cup A) = P(B) + P(A) - P(B \cap A)$$

Professor – porque temos que tirar a intersecção? Porque não faz sentido contar essas probabilidades duas vezes. Gráficamente, é só desenhar os dois conjuntos e vocês verão que é a intersecção se repete. Então, é só substituir, pois já temos as probabilidades. $P(B)$ é igual $4/15$ mais $P(A)$ que é igual $1/3$, menos zero, pois não tem como eles serem azuis e brancas ao mesmo tempo. O resultado é 9 sobre 15 ou $3/5$. Pode entrar, Antonio. É o primeiro exemplo ainda, se você quiser copiar dá tempo.

Milena – podia excluir as bolas vermelhas também.

Milena entendeu que, apesar do exemplo remeter à ideia de soma de probabilidade e a solução sugerida pelo Professor ser diferente, não fazia diferença em relação ao item anterior. Sair um bola branca ou azul é a mesma coisa dela não ser vermelha. Por isso, a mesma probabilidade. Porém, com a chegada de Alexandre, o Professor parece não ter observado esse detalhe.

Com todos os participantes do SDs em sala, o professor destaca mais uma vez o papel de Milena, agora com presença de Antonio:

Professor – você copiou, Antonio?

Antonio – estou terminando.

Professor – todos entenderam esses exemplos aí. Milena deu até outras formas de responder.

Milena – estou criando (risos em tom amistoso).

Em seguida, o professor começa a anotar o exemplo 2.

Quadro 40 – Questão 2 – 3º encontro em IDIP.

Exemplo 2. Dois dados são lançados. Calcule as seguintes probabilidades:

- a) Sair a face 3 em um só dado.
- b) Sair a face 4 em pelo menos um dado.
- c) A soma das faces ser um número par.

Fonte: Protocolo de anotações do Professor (2018).

Durante a escrita, mais uma vez, ele se sente incomodado com a qualidade dos pincéis. Esse fato parece se concretizar como efeito das restrições do nível *escola* no funcionamento SDs, pois o quadro e pincel, entendidas como tecnologias de comunicação do discurso escrito, assumem um papel fundamental nesse processo. Em meados de 2012, a universidade fez um grande aquisição de quadros de vidro, considerados mais modernos e eficientes. No entanto, em muitos *campi*, as reclamações são recorrentes acerca da qualidade da escrita.

Professor – esses pincéis estão muito ruins.

Antonio – o problema é a lousa.

Professor – verdade, Antonio. Esse quadro tá muito liso, o pincel não é apropriado para ele.

Após a leitura e um breve comentário sobre o padrão da questão ser parecido com as questões anteriores, o Professor pede aos estudantes uma sugestão para a resolução. Novamente, o silêncio dos estudantes é o marcador para o Professor:

Professor – como vimos na aula anterior, essas são questões bem comuns. Agora temos o lançamento de dados como contexto (...). Então como você pensariam nessa letra A? (silêncio dos estudantes). Vamos tentar resolver isso. Eu vou logo escrever o espaço amostral que será necessário para resolver as questões:

Solução

O espaço amostral (Ω) é composto pela permutação de 6, visto que são 2 dados diferentes, então $\Omega = \{(i, j)\}$, $i, j = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Portanto, $N = 6 \times 6 = 36$.

Professor – porque isso, por que temos o lançamento de dois dados. Inclusive Milena rapidamente chegou a isso na aula passada. Posso apagar o quadro? (apaga o quadro).

Professor – quem poderia fazer o espaço amostral (evento) para questão. Milena?

Milena – só em um dado é? Seria 3 sobre 6?

Professor – não, primeiramente vamos fazer o espaço amostral em relação ao evento. E depois dividir pelo espaço amostral completo que é 36.

Evento A = {(3,1), (3,2), (3,4), (3,5), (3,6), (1,3), (2,3), (4,3), (5,3), (6,3)}.

Diante dos “silêncios” e da resposta de Milena, o Professor começa a descrever o evento A (sair 3 na face de um só dado). Mesmo Milena não entregando as respostas esperadas, o Professor parece minimizar esse fato e continua a elogiar seu desempenho. Durante a descrição do evento, Antonio começa a ditar os pares. Para o Professor, isso é um avanço:

Professor – exatamente, Antonio já pegou o macete. Teremos que a probabilidade do evento A é número de elementos de A que é 10 sobre 36 que é o nosso espaço amostral. Simplificando, teremos 5 sobre 18.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

Antonio – dá para simplificar ainda?

Professor – não. Agora para por aí, pois 5 só é divisível por ele mesmo.

Observamos que, diferente da questão anterior, nesse exemplo, os silêncios dos estudantes provocaram a necessidade de uma mudança no contrato didático. A responsabilidade estava novamente com o Professor. Ele mesmo fala sobre a necessidade de escrever o espaço amostral. Esperávamos que a descrição fosse dos pares, no entanto, ele optou por uma descrição formal. Pensamos que a descrição do espaço amostral em termos mais formais, como permutação de 6 no par ordenado (i, j), não contribuiu para compreensão da questão, tanto que logo em seguida Kátia e Pedro disseram que estavam com dúvidas:

Kátia – eu não entendi não.

Professor – qual esse aqui de cima ou o de baixo (se referindo à descrição do evento e aplicação da definição formal).

Kátia – esse que tem o 36.

Professor – note que temos 10 pares dos eventos. No espaço amostral é 36, que seria 1 com 1, 1 com 2, 1 com e assim por diante. Entendeu?

Kátia – entendi.

Pedro – Ainda não entendi a questão do 10.

Professor – você não entendeu não? Você compreende que aqui tem 10 pares?

Pedro – sim.

Professor – então esses são os casos que só aparece um três.

Antonio – Ele só quer o 3 uma vez.

Professor – entendeu?

Pedro – acena positivamente com a cabeça.

Professor – na verdade, ficaria mais fácil se fizemos o espaço amostral todo.

O contrato didático tinha claramente mudado. A responsabilidade era do Professor de responder às questões. Diante dos questionamentos de Kátia e Pedro, o Professor repete o discurso, mas reconhece que a questão seria melhor compreendida com o espaço amostral completo. Tendo assumido essa responsabilidade, o Professor, logo em seguida, passa para o próximo item:

Professor – no evento B, nós temos agora a face 4 em pelo menos um dado. Então ele pode se repetir, pode ser 1 ou 2 (se referindo aos dados) e temos aí (anota o evento):

Evento B = {(4,1), (4,2), (4, 3) (4,4), (4,5), (4, 6), (1,4), (2,4), (3,4), (5,4), (6,4)}.

Professor – de forma similar, agora é só contar quantas vezes ele aparece. Onze vezes. Ficaríamos com n igual a 11. Então teremos 11...

Antonio – 11 sobre 36.

Professor – estou percebendo que vocês tão pegando o macete (aprendendo). Vocês podem ficar até que horas são 21:05 agora.

Milena – até 9 e meia.

Antonio – 9 e 40.

No trecho acima, percebemos que a participação de Antonio passa a ser notada. Durante a descrição do evento, ele acompanha e ajuda o Professor a organizar os pares. Ele compreendeu que a relação entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis depende dessa descrição do evento, logo completa a questão. Isso faz com que o Professor legitime, não só uma participação, mas a de todos. Pedro parece se distanciar e ficar em silêncio. Ele só copia e não faz intervenções.

Antes de passar para o próximo item, o Professor destaca a questão do tempo como uma restrição. Ele sabe que os estudantes precisam sair mais cedo por conta dos transportes. Milena e Antonio delimitam o tempo em cerca de 30 min.

Durante a resolução do item c, Antonio participa mais efetivamente, embora sua participação seja no sentido de auxiliar o discurso do professor. Esse tipo de participação foi legitimado pelo Professor:

Professor – vocês em entenderam.

Antonio – vamos para evento c agora.

Professor – o evento c é que soma seja um número par

Antonio – então separa somente os de soma par

Isso. Seria 1 com 1, por que a soma vai dar 2, 1 com 3, 1 com 5, 2 com 2...

Antonio – 3 com 3

Professor – muito bem, Antonio.

Antonio – serão 18 (conta os pares).

Professor – por que dá 18? porque é exatamente a metade, as outras somas são impares.

Professor – nesse caso, a probabilidade ficaria 18 sobre 36 que é $\frac{1}{2}$. Vocês entenderam né. Entendeu, Pedro? (Pedro, em silêncio, faz sinal positivo com a cabeça).

Pedro agora copiava as questões do quadro e, paralelo a isso, utilizava o celular. Kátia saiu da sala de aula para comprar água. Milena copiava as questões do quadro. Antonio acompanhava o discurso do Professor durante as resoluções.

A mesma dinâmica se seguiu na resolução do exemplo 3, que tratava da probabilidade condicional. O Professor copiou a questão no quadro e logo em seguida anotou a solução.

Quadro 41: Questão 3 – 3º Encontro em IDIP.

Uma equipadora eletrônica é formada por dois componentes A e B. Por procedimentos anteriores, sabe-se que $P(A \text{ falhar}) = 0,2$, $P(\text{apenas B falhar}) = 0,15$, $P(A \text{ e B falharem simultaneamente}) = 0,15$. Calcule:

A) a probabilidade de apenas A falhar

B) a probabilidade A falhar dado que B falhou.

Solução

Seja o evento $A = \text{“componente A falhou”}$ e o evento $B = \text{“componente B falhou”}$; temos então pelos dados do problema que $P(A) = 0,2$, $P(A/B) = 0,15$ e $P(A \cap B) = 0,15$.

a) A probabilidade de apenas A falhar será :

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0,2 - 0,15 = 0,05.$$

b) $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,15}{0,30}$ pois $P(B) = P(B \cap A^c) + P(A \cap B) = 0,15 + 0,15$.

Fonte: Protocolo de anotações do Professor (2018).

Enquanto o Professor anotava a questão, Milena, Kátia e Antonio conversavam sobre o horário.

(professor fazendo a leitura da resolução da questão)

Milena – que horas já são?

Kátia – 9 e 15...

Antonio – 9 e 10...

Professor – eu falei nas aulas passadas que a questão de definir o evento é extremamente interessante para resolver essas questões. Entenderam essa questão?

Kátia – Eu e Antonio não entendemos.

Antonio – é só como montar isso.

Professor – a gente volta. (Professor retoma a leitura da solução, explicando alguns detalhes).

Professor – vocês entenderam isso agora?

Antonio – sim.

Professor – gostaram dessas questões, já que vocês estão fera em Probabilidade?

Novamente observamos que o contrato didático vigente é um contrato em que o Professor assume para si a responsabilidade de comunicar o saber e ao mesmo tempo fazer com que ele avance. Esse trabalho parece ser motivado pela crença de que, ao responderem às perguntas do Professor, por vezes de forma confusa ou vaga, estudantes como Milena e Antonio sinalizam que a mensagem está sendo compreendida.

Kátia, embora em silêncio, em alguns episódios, parece ter um lugar garantido no processo, pois, como o Professor mesmo disse, “ela foi bem na primeira unidade”. Diferentemente de Pedro que compareceu de forma irregular.

O fato é que essa crença se reforça com o discurso de eles “aprenderam”, “pegaram o macete”, “estão fera”. Aliadas a esse discurso, há sempre ressalvas sobre “isso é fácil”, “dá para entender rápido”, “isso aqui é mais simples”.

De alguma forma, percebemos que isso parece ser a justificativa para avançar no SD_p , já que este parecia ser o último encontro dedicado ao estudo da Probabilidade. De algum modo, parece haver uma intenção implícita de dar o veredito de conformidade em relação a O_p no SD_s .

De fato, isso é reforçado na introdução do exemplo 4, que foi intitulado pelo Professor como um Brincadeira de Probabilidade. A brincadeira à qual o Professor se referia foi um exemplo de questões que exigem respostas contraintuitivas. Conversamos com o Professor previamente sobre esse tipo de questão e ele trouxe para aula um exemplo para debater com alunos, o que mostra mais uma vez o papel de nossa intervenção em $IDIP$. Essa influência é melhor explicitada na resolução do exemplo de cuja solução acabamos participando:

Quadro 42 – Brincadeira de Probabilidade.

Volantes de jogo:

Em um sorteio de um volante de dezenas com 6 algarismos (de 1 a 9), escolhidos ao acaso, com possibilidade de repetição, qual bilhete é mais provável de ser sorteado?

1 →	3	5	9	4	7	1
2 →	5	5	5	5	5	5

Fonte: Protocolo de anotações do Professor (2018).

Professor – *nos entendemos toda probabilidade, toda não, mas se eu for passar problemas que envolvem probabilidades, questões que tem aí, vocês conseguem pelo menos raciocinar como funciona e como deve ser utilizada. Principalmente quando se trata de eventos equiprováveis, onde os elementos de um espaço amostral têm a mesma chances de ocorrer. O que vamos fazer*

agora é basicamente a mesma coisa. Eu fiquei até conversando semana com o Pesquisador sobre isso. Qual seria a minha maior chance de acerto no bilhete 1 ou 2?

Antonio – vai, Milena.

Pedro – pra fazer o jogo?

Professor – a partir do que estudamos, qual tem mais chance?

Antonio – como faz, Kátia?

Professor – isso não é nada formal.

Antonio – eu escolheria o 1.

Kátia – eu escolheria o 1

Pedro – o 1 (um).

Milena – o 1(um).

Pesquisador – por quê?

Antonio – porque o que tem mais números diferentes é mais fácil de ocorrer.

Milena – não é mais difícil. Porque ali (se referindo ao 1) tem mais números diferentes.

Kátia – mas, tu lembra daquele exemplo sobre as bolas azuis... quando tem mais... tem mais chance.

Professor – imaginem os globos girando e os números sendo sorteados... todos optariam pelo bilhete 1. A primeira vista dá para pensar isso, mas se pararmos para pensar o número 5 tem a mesma chance do número 3 de ser sorteado. Isso vale para todos os casos.

Antonio – tem a mesma... só que no caso os números aleatórios parecem mais prováveis para gente.

Kátia – no caso ali, a probabilidade é a mesma para os dois. Seria bom fazer... faz aí, Antonio, os números para gente sortear. Recortar esses números e cada um pega... Pode fazer? (se referindo ao Pesquisador).

Pesquisador – nesse caso, seriam 6 saquinhos com os 9 algarismos.

Antonio – pra cada bilhete....

Kátia – ahh! Entendi...

Antonio – a probabilidade de pegar o 3 no primeiro saquinho é a mesma de pegar o 5, mas, como a gente tá vendo, os números todos diferentes pensar que é mais provável... mas a probabilidade é a mesma.

Professor – agora jamais, eu mesmo olhando pela primeira vez, diria que as chances eram iguais.

Professor – se vocês tiverem mais tempo, podemos fazer mais um exemplo.

Kátia – deixo como tarefa de casa, para depois da greve (risos).

Professor – vou anotar e vocês levam para casa.

Antonio – só tem eu da minha cidade.

Professor – que ir, Antonio?

Antonio – não dá tempo copiar.

Como podemos notar no diálogo acima, a solução da questão permitiu aos sujeitos do SDs, agora nos colocamos como sujeitos também, uma discussão sobre a natureza contraintuitiva do problema. Na fala inicial, em que se reforça o fato de que para o SDs os estudantes tinham “construído” uma relação dentro do esperado, o Professor fornece uma possível explicação para o problema ao tratar da equiprobabilidade. Mas a definição não é suficiente, tanto que os estudantes foram unânimes em escolher o bilhete 1.

O Professor assume a responsabilidade, mas parece que faltava algo para a compreensão. Sentimo-nos à vontade em instigar a resposta dos futuros professores. De alguma forma, pensamos que nossa participação mexeu também com o contrato didático vigente, tanto que Kátia propõe uma solução empírica.

Sobre o episódio, pensamos que poderia ter sido explorada a ideia de intuição, uma que o problema é contraintuitivo, mas também o significado da experiência que Kátia estava propondo. A julgar pela quantidade de repetições que poderiam ser feitas empiricamente, é provável que o bilhete 555555 não fosse premiado, nem tampouco o bilhete 1. Porém, julgamos que não era cabível essa intervenção.

O fato é que a proposição do Professor, influenciada por nossa participação, criou um espaço para o debate em um modelo onde o contrato didático normativo tinha sido o principal motor das discussões sobre Op.

O Professor anotou a última questão¹³² alusiva ao teorema de Bayes e deu por encerrado o encontro. A questão ficou como tarefa de casa, conforme Kátia sugeriu. Enquanto o Professor anotava a questão, apenas Milena, Kátia e Antonio copiavam. Pedro tirou uma fotografia com o celular. Milena retomou entre Kátia e Antonio o problema anterior:

Milena – a probabilidade vai ser a mesma?

¹³² Sejam três caixas, onde a caixa 1 possui 3 bolas branca e 5 vermelhas, a caixa 2 possui 5 bolas branca e 1 vermelha, e a caixa 3 possui 1 bola branca e 3 vermelhas. Escolhe-se uma bola de uma das três caixas de acordo com as seguintes probabilidades $P(\text{caixa 1}) = 2/6$, $P(\text{caixa 2}) = 3/6$ e $P(\text{caixa 3}) = 1/6$. Calcule a probabilidade de:

a) se sortear uma bola branca.
b) se a bola branca foi sorteada, a probabilidade de que ela tenha vindo da caixa 3.

Kátia – vai.

Antonio – *é porque a gente olha e pensa que por ser números diferentes é mais fácil acontecer, mas a probabilidade é a mesma.*

Pedro – *vim do hospital de novo.*

Antonio – *hospital? Novamente? Tem que arrumar a chave de lá.*

Kátia – *quando não é ele, é a avó, a tia.*

Ao final da aula, o clima de incerteza em torno da greve finalizou o encontro, que parecia ser o último em torno do SDs, no entanto, o Professor disse que retomaria a questão na próxima aula.

Professor – *foi muito boa a ideia de Kátia dessa questão ficar para casa.*

Antonio – *é bom que a gente tira mais dúvidas.*

Professor – *é, realmente. Vocês acham que essa greve vai demorar?*

Antonio – *acho que vai.*

Kátia – *vai ter assembleia ainda?*

Milena – *as vezes volta rápido.*

O movimento de greve durou cerca de 3 meses e, de fato, aquele não foi o último encontro do SDs, mas não por conta do teorema de Bayes, como veremos na descrição do próximo encontro.

6.2.5 REVISITANDO A PROBABILIDADE: 4º ENCONTRO.

Após cerca de três meses de movimento grevista, professores, estudantes e funcionários da UEPB retomaram suas atividades. Preparamos para os sujeitos de nossa pesquisa, O Professor de IDIP e os futuros professores Antonio, Milena e Kátia participantes do SDp uma entrevista que foi programada para acontecer ao final do funcionamento SDs. Devido à paralisação, optamos por aguardar o desfecho dos fatos, e a entrevista somente ocorreu após o retorno às aulas.

Fizemos a entrevista individualmente, já que ela era acompanhada da retomada de questões que requeriam a solução de tarefas envolvendo probabilidade. Fizemos um sorteio e estabelecemos uma ordem para as entrevistas. Milena foi entrevistada em 21/07/2017, Kátia em 25/07/2017, Antonio em 26/07/2017 e o Professor em 27/07/2017.

Iniciamos a entrevista com Milena, perguntando sobre a sua rotina durante a greve. Se tinha estudado, se estava ansiosa para o retorno das aulas. Ela contou que não estudou nem revisitou a probabilidade ou outro objeto referente a IDIP. Sobre as expectativas do retorno, declarou que o longo tempo a desmotivou:

Milena – logo no início eu estava, mas depois... já era para gente ter terminado isso, feito essas provas... resolveu alguma coisa? (se referindo ao desfecho da greve).

Pesquisador – infelizmente as negociações não avançaram.

Milena – não acredito. Vocês (se referido aos servidores da UEPB) têm que entender uma coisa: o Brasil tá em crise. As coisas estão mais difíceis.

Vemos na fala de Milena que ela, enquanto estudante da instituição e mais especificamente de IDIP, parece preocupada com as questões mais imediatas relativas ao movimento, ou seja, para ela, o semestre já deveria ter sido finalizado, ao mesmo tempo que declara que os professores e funcionários têm que entender que o cenário nacional é de crise e por isso as negociações não avançaram. Embora reconheçamos o contexto nacional, vale ressaltarmos que a pauta principal daquele movimento era para que o então governador do Estado da Paraíba garantisse o orçamento previsto para universidade naquele ano.

A partir desse ponto, decidimos retomar o questionário 01, tendo em vista que ele foi aplicado na entrevista inicial e que algumas questões não foram respondidas. Pedimos a Milena que relese as alternativas marcadas por ela e caso quisesse mudar as escolhas o fizesse e justificasse. Prontamente, após a leitura, ela decidiu que não mudaria as respostas das questões de 1 a 3. Para Milena, depois da participação em IDIP, o acaso continuava sendo um conjunto de causas imprevisíveis e independentes, um experimento aleatório era aquele cujo resultado não se podia prever, mesmo o experimento tendo sido repetido sob as mesmas condições, e o espaço amostral era conjunto de todos os resultados possíveis.

Diante da convicção de Milena, decidimos explorar a relação dela com os termos em questão (acaso, aleatoriedade e espaço amostral):

Pesquisador – em relação ao cálculo de probabilidade onde você localiza o espaço amostral?

Milena – A... (silêncio).

Pesquisador – eu tenho um dado honesto e lanço ele, qual a probabilidade de obter 4?

Milena – vai ser 4 sobre 6, que dá 2 sobre 3.

Pesquisador – e a probabilidade da face 1?

Milena – vai ser 1 sobre 6?

Pesquisador – e a probabilidade da face 6?

Milena – vai ser 6 sobre 6.

Pesquisador – e o que significa esse resultado? O seis tem mais chances que 1 e o 4 de ser sorteado?

Milena – (silêncio).

Pesquisador – ou eles tem chances iguais?

Milena – o seis tem mais probabilidade né?

Pesquisador – o seis é mais sorteado que os outros?

Milena – não.

Pesquisador – então tem alguma coisa faltando. No lançamento de um dado vamos pensar qual é o espaço amostral?

Milena – 1, 2, 3...

Pesquisador – então o número 4 pode ser observado quantas vezes nesse espaço amostral?

Milena – só tem um.

Pesquisador – então a probabilidade de lançar o dado e verificar o 4 é 1 sobre 6.

Milena – a mesma coisa, se fosse o 5 seria 1 sobre 6.

Pesquisador – o mesmo vale pra probabilidade do número 1, 6... será 1 sobre 6. Então o espaço amostral é o quê?

Milena – o conjunto dos resultados possíveis de um experimento. É. Mas eu respondi assim.

Vemos no diálogo algumas questões interessantes. A primeira delas é que, claramente, Milena, ao se sujeitar à entrevista, parece retomar a condição de sujeito do SDs, ou seja, ela tenta participar da entrevista, mas sabe que o contrato didático a que está habituada em relação a O_p é um contrato onde professor assume a responsabilidade de conduzi-la. Isso em parte pode revelar mais claramente o resultado da sujeição em I_{DIP} no que tange à relação com a probabilidade. Milena sabe que a relação matemática é um quociente, mas demonstra fragilidade nos aspectos conceituais dessa relação. Outra observação diz respeito ao comportamento de Milena. Mesmo depois do diálogo, ela retorna a resposta da questão 3 declarando ter respondido corretamente o que era um espaço amostral.

O exemplo que solicitamos remete às tarefas exploradas nos encontros anteriores, então essa confusão ou fragilidade seria efeito do tempo, isto é, dos 3 meses em que o funcionamento do SDs foi interrompido? Se a resposta for sim, significa que as relações construídas com a probabilidade através sujeição em I_{DIP} não resistem ao tempo, o que, por si só, já seria um

problema. O fato é que, como vimos nos encontros anteriores, essa fragilidade e confusão já era presente.

Se levarmos em consideração o que discutimos no capítulo 5 e a sugestão do modelo epistemológico que elaboramos, veremos que a relação que está sendo construída não é só distante de um modelo para formação de professores, mas frágil em relação ao que se espera da formação básica de qualquer cidadão usuário deste saber.

Ainda assim, pensamos que I_{DIP} é parte de um modelo de formação que atende a um modelo ainda vigente na formação de professores, como destacam Lopes (2008), Gatti (2010), dentre outros. No cumprimento desse modelo institucional, minimamente em relação a O_p são apresentadas técnicas para o cumprimento das tarefas propostas. De algum modo Milena, não detinha em seu equipamento praxeológico essas técnicas. Como evidência, temos a ausência de resposta das questões 4 e 5 do questionário 1. Por essa razão, pedimos a Milena que tentasse construir uma resposta para essas questões, tendo agora participado de I_{DIP} .

A questão 4 trata de experimento que consistia no lançamento simultâneo de um dado e um moeda honestos e calcular a probabilidade de se obter cara e um número menor que cinco. O contexto equiprovável se alinhava com as tarefas de I_{DIP} . Pela primeira vez, Milena expressiu praxeologias pessoais para o problema, já que, como vimos na descrição dos encontros, durante os momentos de aula, as praxeologias foram basicamente reproduzidas do Professor.

Para a solução da questão 4, Milena descreveu o espaço amostral de ambos os experimentos e, em seguida, analisou a observação dos eventos, aplicando corretamente a relação, no entanto, a conclusão da tarefa não foi plena:

Figura 45 – Questão 4 - Questionário 01 – Solução Milena.

4 - No lançamento simultâneo de um dado e uma moeda comuns (não viciados) e a verificação das faces voltadas para cima, qual a probabilidade de se obter cara e um número menor que cinco? Pedimos que se possível apresente a resolução, isto é, o processo utilizado para se obter o resultado.

Resolução

$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$M = \{C, K\}$

$P = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$

$P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$P = \frac{1}{2}$

$P = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4+3}{6} = \frac{7}{6}$

eventos independentes

$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Fonte: protocolos de pesquisa (2018).

No protocolo da figura 45, temos a solução apresentada por Milena. Durante a resolução, deixamos, inicialmente, ela à vontade. Quando ela dava por finalizada a tarefa nos problematizávamos onde fosse necessário.¹³³ Vemos que a parte da questão que sugere a tarefa de calcular a probabilidade a priori de um evento simples é cumprida por Milena com êxito. A sua técnica parece funcionar a contento. No entanto, a questão remete ao lançamento simultâneo de objetos que têm espaços amostrais distintos, a simultaneidade, e a natureza dos objetos garante que o resultado do dado não interferirá no resultado da moeda e vice-versa, ou seja, trata-se do cálculo de probabilidade de dois eventos independentes.

Após calcular os eventos separadamente, Milena teve dificuldade em concluir a tarefa:

Milena – pronto (se referindo às probabilidade individuais).

Pesquisador – Qual é a probabilidade final? A probabilidade de se obter cara e um número menor que cinco?

Milena – a probabilidade de obter cara é $\frac{1}{2}$.

Pesquisador – mas questão pede a probabilidade em relação ao lançamento dos dois.

Milena – ah! Então eu vou juntar os dois.

Pesquisador – por que você vai juntar?

Milena – ele está pedindo os dois juntos.

Pesquisador – o resultado dos dados interfere no resultados das moedas?

Milena – eles são independentes.

Pesquisador – existe alguma probabilidade para o caso de eventos independentes?

Milena – lembro mais não (risos). Eu acho que isso... (soma).

Pesquisador – seriam $\frac{7}{6}$? E se multiplicasse?

Milena – multiplicando daria $\frac{2}{6}$ que dá $\frac{1}{3}$.

Pesquisador – qual desses dois resultados é mais plausível? A probabilidade de $\frac{7}{6}$ ou de $\frac{1}{3}$. Se fosse fazer em porcentagem?

Milena – (faz o cálculo):

¹³³ Os pontilhados verdes indicam os momentos em que ele trabalhou sozinho sobre a tarefa. Nos pontilhados vermelhos destacamos o emprego de algum procedimento equivocado e nos pontilhados amarelos indicamos os conceitos ou procedimentos guiados por nós.

Figura 46 – Questão 4 - Questionário 01 – Complemento Solução Milena.

Fonte: protocolos de pesquisa (2018).

Pesquisador – por que você está subtraindo 100 no quociente?

Milena – por causa da porcentagem?

Pesquisador – mas o resultado já está em porcentagem.

Milena – esse era realmente maior 116% e o outro 33%.

Pesquisador – o que os resultados estão dizendo? O que uma probabilidade de 116%? O que o médico quer dizer quando ele diz que determinado diagnóstico tem 116% de chance de ocorrer?

Milena – (risos) o resultado correto é 33%. Não pode ser maior que 100%.

Pesquisador – duas propriedades aí... não pode ser maior que 100% e para eventos independentes multiplicam-se os resultados.

Aqui vemos o conflito em que Milena é conduzida pela tarefa proposta. Ela participou efetivamente do SDs, cumpriu determinadas tarefas, mas o seu equipamento praxeológico em relação à probabilidade parece estar incompleto. Existem conceitos que estão interpretados parcialmente, propriedades que foram esquecidas, dentre outros entraves. Do ponto de vista da relação $R(X,O)$ de Milena, podemos dizer que é uma relação fragilizada que se limita a responder tarefas com contextos mais elementares em que a probabilidade teórica é requerida. O uso da técnica ou ampliação dela, guiada por nós, não conduz à garantia da compreensão daquilo que se está fazendo, uma vez que foi preciso problematizar os resultados encontrados para que ela pudesse compreender que a soma das probabilidades não se aplicava àquele caso.

Porém, esse tipo de relação está relacionada ao contexto de I_{DIP} . Isso fica mais claro quando Milena responde aos itens A e B da questão 4. Ela não tem dificuldade de assinalar

corretamente que a questão remete a um espaço amostral equiprovável e a probabilidade desse experimento pode ser calculado a priori. Esse tipo de conhecimento expressado faz parte da relação institucional em IDIP.

Mas ele se mostra limitado tanto para demandas formativas dos futuros, como para a reflexão em outro tipo de contexto onde a probabilidade é abordada. Isso é revelado na questão 5 quando se pede que se analise a natureza do espaço amostral e do tipo de abordagem probabilística empregada.

A questão trata do lançamento de tacinhas. Nesse caso, o espaço não é considerado equiprovável, já que os eventos “cabeça e ponta tocando o solo” e “apenas a cabeça da tacinha no chão”. Uma das abordagens possíveis seria a verificação empírica do experimento.

Milena não hesita em empregar o mesmo raciocínio da questão anterior. A partir da abordagem clássica ela responde a questão como se o espaço amostral fosse equiprovável. Isso pode estar relacionado ao efeito que Moura e Samá (2016) chamam de ilusão da equiprobabilidade. O fato de os estudantes estudarem a probabilidade sempre de um ponto de vista clássica leva-lhes à ilusão de que todas as questões envolvendo probabilidade se dão em contextos equiprováveis.

Após esse momento, apresentamos a Milena a parte 2 do instrumento “Questões de Probabilidade” que revisitava as questões da parte 1. Lembramos que a parte 1 não foi respondida por nenhum dos sujeitos durante a entrevista inicial.

Milena fez a leitura da questão e já iniciou a resolução partindo da definição clássica de probabilidade. Essa abordagem fez parte de praticamente todas as tarefas que Milena resolveu. Como já identificamos, sua principal dificuldade é na construção e descrição do espaço amostral. Uma tarefa que não foi suficientemente explorada no SDs:

Milena – ele quer somar sete (se referindo ao item a). São dois dados (escreve os espaços amostrais separados e começa a fazer a relação entre os pares que fornecem a soma sete).

Milena – então são 4, quatro sobre 6. Não... quatro sobre 12 que vai dar 1 sobre 3.

Pesquisador – Certo. É isso mesmo?

Milena – acho que é. Pode ser assim né?

Pesquisador – pode.

Milena – (refaz a questão lendo os procedimentos que fez).

Figura 47 – Protocolo Milena – Questão 01 – Questões de probabilidade.

No lançamento de dois dados perfeitos e distinguíveis, um branco e outro vermelho, qual é a probabilidade de que:

a) A soma seja "sete"? = $\frac{1}{3}$

b) Ambos os números sejam pares? $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

c) Ambos os números sejam iguais? $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ por ele mesmo

d) A soma seja um número primo? $\frac{13}{12}$

RESOLUÇÃO

$P = \frac{n(A)}{n(S)}$

$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$\frac{13}{12}$

Fonte: protocolos de pesquisa (2018).

Milena mais uma vez apresentou dificuldade na compreensão e descrição do espaço amostral. Isso compromete a resolução de toda a questão (pontilhados verdes), já que o espaço descrito por ela está equivocado. O que mais nos chama a atenção nessa resolução é o dilema em que Milena se encontra. Para a técnica empregada, Milena está correta, pois enumerou o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, porém, ao não declararmos a resposta como certa ou errada, apenas dizendo que aceitamos suas respostas, ela questiona seus procedimentos, mas não questiona a técnica, nem o resultado que ela fornece. Os resultados que indicam as probabilidades não são questionados. Mas Milena precisa de uma resposta que legitime o que está fazendo. Na ausência dessa resposta, ela revisa a questão novamente, o que indica que a técnica, mesmo com problemas, passou a fazer parte do universo cognitivo.

Milena – é isso mesmo 4 sobre 12. Entendeu?

Pesquisador – entendi.

Milena – porque não é dois dados. Entendeu mesmo?

Pesquisador – entendi.

O mesmo ocorre com o item seguinte. Ela agora usa o espaço amostral descrito. E vai só indicando como está calculando:

Milena – agora essa aqui ela quer os números pares, né?

Pesquisador – isso. Quando você lançar os dois dados, ele quer saber a probabilidade de se obter números pares nas duas faces.

Milena – são três números pares, mas é lançando os dois simultâneos, né? (Verifica os números pares no espaço amostral de um dos dados).

Pesquisador – isso! Os dois simultâneos.

Milena – então vai ser 6 sobre 12 que dá um 1 sobre 2 (pontilhado amarelo).

Milena parece ter segurança no emprego na técnica que ela aprendeu. A probabilidade teórica correta desse item seria de 25%, pois existem 9 eventos favoráveis dentre 36 possíveis. Milena está convicta sobre o espaço amostral desenhado e isso parece impedi-la de questionar seus resultados:

Milena – nessa outra (item c), ele pede dois números iguais, então vai ser 1.

Pesquisador – 1? Me explica.

Milena – para ser os dois iguais, seriam esse aqui (se referindo ao par (1, 1)).

Pesquisador – e se for (2, 2).

Milena – então, é isso... A probabilidade aqui vai ser 12 sobre 12 que é igual a 1 (pontilhado azul).

Pesquisador – o que indica a probabilidade 1?

Milena – (silêncio).

Pesquisador – se o evento é impossível, a probabilidade é zero. A probabilidade 1 é 100%. Evento certo. Isso quer dizer se você jogar o dados vai ter 100% de chance de acontecer dois números iguais?

Milena – É.

Pesquisador – tá bom.

Milena – (revisa o cálculo empregado). É porque se eu tenho seis números iguais e seis números iguais, vai dar 12 sobre 12.

O diálogo confirma nossa impressão. Para Milena, se o emprego da técnica, tal como ela acredita que seja, está correto, então, não importa se o resultado sugerido pelo emprego da técnica parecer equivocado. O mesmo se verifica com o item d, para buscar a probabilidade de que o lançamento dos dados registre faces cuja soma das faces seja um número primo, ela faz as associações sem se preocupar com a repetição e chega ao resultado de que existem 13

possibilidades em um espaço amostral que ele descreve com cardinalidade 12, o que gerou como resposta a fração 13/12 (pontilhado vermelho). Ela não só se sente segura como sugere que a atividade de pesquisa seja usada como instrumento de avaliação:

Milena – então vai dar 13 sobre 12.

Pesquisador – 13 chances em 12.

Milena – é sim. Entendeu?

Pesquisador – entendi.

Milena – você deveria pedir para que essa atividade já fosse a prova. Esse semestre já está perdido, ninguém aguenta mais não.

A questão seguinte trazia um contexto diferente das tarefas trabalhadas em sala de aula. Inicialmente, tínhamos planejado essas questões por envolverem contextos comuns em se tratando de tarefas com probabilidade. A questão exigia um detalhamento do espaço amostral. Mais uma vez, Milena teve dificuldades com o espaço amostral, mas chegou a descrever o que seria para ela o espaço amostral dos experimentos dados:

Figura 48 – Questão 2 – Solução Milena.

PLANEJAMENTO FAMILIAR
Um casal planeja ter exatamente 3 crianças. Qual é a probabilidade de que:
A- Duas crianças sejam meninos e a outra, seja menina?
B- Pelo menos um menino?

RESOLUÇÃO

$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$ $S = \{M, F\}$
 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}$ p/ Duas crianças Meninos. $\{M, F\} = \{M, M, M, M, M, M\}$
 $\frac{1}{2}$ p/ um criança menina. $\{M, F\} = \{F, M, F, F\}$
 $\frac{1}{3}$ pelo menos um menino. $\{M, F\} = \{F, M, F, F\}$

Fonte: protocolos de pesquisa (2018).

Milena – o espaço amostral vai ser masculino e feminino. Para o primeiro filho, será $\frac{1}{2}$ e para o segundo $\frac{1}{2}$ e depois vezes, porque é separado (independente). Então dá $\frac{1}{4}$. No caso, pra ser uma menina, vai ser $\frac{1}{2}$ e na letra b é três barrigas e um menina, então $\frac{1}{3}$. Né?

Professor – entendi.

Milena – (revisa o raciocínio), escreve completo os espaços amostrais. É isso mesmo.

Vemos na resolução de Milena que a técnica empregada é semelhante. Quando ela começa a descrever o evento e a ocorrência de ser masculino ou feminino, ela não considera o evento nascer 3 filhos. Ela separa caso a caso, o que a leva equivocadamente à noção de independência entre os eventos. Diferente do lançamento de um dado ou de uma moeda, o caso do nascimento de um bebê e verificar se é masculino ou feminino é um evento mutuamente exclusivo, se for masculino não poderá ser feminino. Nessa tarefa, a melhor técnica seria a descrição do espaço amostral. Nesse caso, uma descrição possível seria:

Quadro 43 – Sugestão de espaço amostral questão 2 questões de probabilidade.

$\Omega = \{(M, M, M), (M, M, F), (M, F, M), (F, M, M), (F, F, M), (F, M, F), (M, F, F), (F, F, F)\}$

Fonte: próprio autor (2018).

Vemos que a descrição sugerida no quadro 22, cuja cardinalidade é 8, é bem diferente dos procedimentos empregados por Milena na sua praxeologia pessoal. A questão central aqui não são os equívocos cometidos por Milena, mas o fato de que ela é sujeito de um sistema didático cuja relação com a probabilidade não consegue provocar uma reflexão sobre o que se está fazendo. O raciocínio probabilístico se resume ao emprego da definição clássica de forma incompleta, já que a descrição do espaço amostral não foi devidamente explorada em momentos anteriores. Assim, a relação de Milena com O_p se constrói sobre uma incompletude, mesmo que ela acredite em sua técnica pessoal, mesmo que os resultados sejam duvidosos. Para Milena, o procedimento a leva a resultados corretos e isso parece ser suficiente. Se do ponto de vista da $R(X, O_p)$ isso é problemático, do ponto de vista da profissão e suas demandas formativas, é ainda mais preocupante.

Isso é observado nas demais questões que, assim como a questão do nascimento dos bebês, fogem dos contextos trabalhados no SDs. Na questão 3, na qual o experimento é claramente não equiprovável, pois trata do lançamento de uma caixa de fósforos e de verificar qual a probabilidade de ocorrência dessas faces. A geometria da caixa de fósforos que corresponde ao bloco retangular deveria sugerir que uma das faces teriam mais chances de ocorrer que as outras, mas a resposta de Milena vai em uma direção diferente:

Figura 49 – Questão 3 – Resposta Milena.

BRINCANDO COM CAIXAS DE FÓSFOROS
 Um jogo de crianças consiste em lançar uma caixa de fósforos sobre uma mesa e observar a face em que a caixa fica apoiada: face “pequena” F1, face “média (F2) ou face “grande” (F3).
 Como determinar a probabilidade de ocorrência das faces?

RESOLUÇÃO
 $S = \{F_1, F_2, F_3\}$
 $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$
 Solução: $\frac{1}{3}$

Fonte: protocolos de pesquisa (2018).

Milena parece assumir a tarefa como não problemática. Considera imediatamente a ocorrência das três faces como equiprováveis e admite a resposta como $1/3$. Vemos novamente operar uma ilusão de que toda a tarefa de probabilidade ocorre em espaço equiprováveis. Para Moura e Samá (2016), a ruptura com esse modelo requer mudança nos espaços de estudo:

Os resultados desta pesquisa evidenciam a necessidade de se promover atividades que fomentem a discussão, reflexão e ação dos estudantes na resolução de problemas de forma a potencializar o ensino e a aprendizagem dos conceitos probabilísticos. Ficou evidente também que compreender o processo cognitivo dos estudantes é de suma importância para orientar o planejamento e a organização do ambiente educacional a fim de auxiliar no desenvolvimento do raciocínio probabilístico, tão relevante para a tomada de decisões em diferentes situações de nossas vidas. (MOURA; SAMÁ, 2016, p. 537).

A ilusão da equiprobabilidade se estende também para contexto em que há envolvida uma discussão sobre o tamanho da amostra na realização de uma experimento. Vimos na descrição dos encontros que a abordagem utilizada foi a clássica. Outras abordagens como a frequentista ou axiomática foram apenas citadas. Na questão 4, na qual um experimento envolvendo o lançamentos de moedas se diferencia pelo tamanho da amostra, Milena explicita que a probabilidade para os dois experimentos é a mesma, ignorando o tamanho da amostra. Esse erro fora já previsto por Oliveira e Carvalho (2002):

Na resolução das atividades *Nascimentos em duas maternidades*, a concepção clássica de probabilidade se sobrepõe a análise da situação em estudo e dificulta a compreensão dos eventos sucessivos envolvidos na situação. Ou seja, os alunos equivocadamente concluem a equiprobabilidade dos fatos, a partir da representação fracionária e percentual da probabilidade, desconsiderando a relevância do tamanho da amostra (CARVALHO; OLIVEIRA, 2002, p. 7).

A resposta de Milena é similar à dos sujeitos da pesquisa de Carvalho e Oliveira. Para Milena, os eventos têm igual probabilidade de ocorrer.

Figura 50 – Resposta Milena questão 4.

BRINCANDO COM MOEDAS

Luiza e Laura são irmãs e estavam brincando com duas moedas idênticas o jogo da cara ou coroa. Elas perceberam que ao lançar a moeda os resultados possíveis eram sempre ou Cara ou Coroa. Luiza escolheu Cara e Laura escolheu Coroa, as duas se puseram a jogar suas moedas e ver a quantidade de pontos que conseguiriam, para cada face escolhida da moeda que fosse obtida com o lançamento elas somariam um ponto. No começo do jogo elas fizeram algumas jogadas mais sua mãe precisou da ajuda de uma das irmãs, uma delas foi ajudar a mãe, mas a outra continuou lançando a moeda. Considere as seguintes estimativas de pontos: Laura fez 500 lançamentos obtendo pouco mais de 250 pontos, ou seja, obteve pouco mais de 250 coroas. Luiza só fez 50 lançamentos e obteve pouco mais de 25 pontos. Das estimativas citadas alguma delas tem mais probabilidade do que o outro de ocorrer ou os dois são igualmente prováveis?

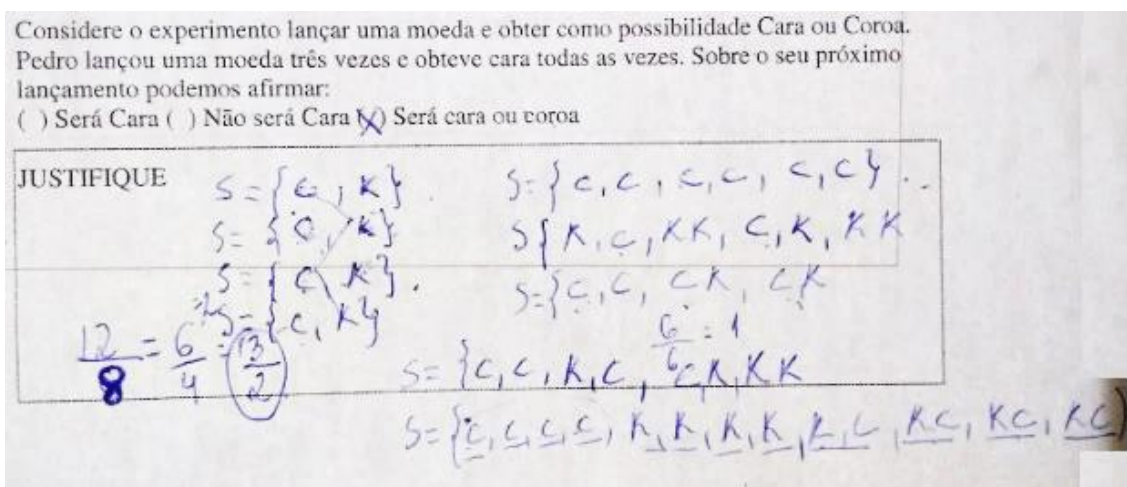
JUSTIFIQUE

O mesmo experimento tem a mesma probabilidade de acontecer.

Fonte: protocolos de pesquisa (2018).

Na resposta à questão 5, outro fenômeno interessante ocorre. A questão pedia que Milena analisasse o experimento do lançamento de uma moeda honesta em que, após três lançamentos, se verifica a ocorrência de três caras. Pedimos que os estudantes marcassem qual o resultado do próximo lançamento, baseado no experimento. Os lançamentos informados na questão são irrelevantes, pois não há garantia sobre o próximo lançamento, pois se tratava de um evento independente, ou seja, o resultado seria cara ou coroa. Milena marcou essa opção, porém, para sua justificativa, ela apresentou o que sugere a simulação de experimentos:

Figura 51 – Resposta – Milena – Questões de probabilidade.



Fonte: protocolos de pesquisa (2018).

O curioso nessa resposta é que Milena usa os procedimentos para justificar seu raciocínio. Isso pode reforçar nossa percepção de que as técnicas jogam um papel de legitimar as ações de Milena diante das tarefas. A crença dela nas praxeologias desenvolvidas durante a sua participação no SDs ficam evidentes no seu discurso:

Pesquisador – Milena, você deixou todas essas questões em branco na nossa primeira entrevista. Isso significa que sem sua participação na disciplina você realmente não teria condições de respondê-las?

Milena – é sim. Eu nunca estudei probabilidade na escola. Talvez quando eu estava me preparando para o vestibular, dei uma olhada por alto, mas para estudar de verdade não. Agora é diferente.

Pesquisador – você consegue resolver as questões sozinha?

Milena – é. Não posso dizer que sei todas.

Pesquisador – Mesmo com o intervalo da greve?

Milena – desenrolava (resolvia) alguns. Se fosse antes, eu não faria não.

Pesquisador – o que é probabilidade hoje?

Milena – algo que é imprevisto, aleatório, pode acontecer ou não.

Essa crença se estende também às contribuições para Milena quanto à possibilidade de ensinar probabilidade:

Pesquisador – como você vê o papel da disciplina na sua formação como futura professora?

Milena – Importante.

Pesquisador – em que aspectos?

Milena – importante, porque adquirir conhecimento para poder dar aula. Vou chegar com uma noção.

Pesquisador – você considera essas noções suficientes?

Milena – foi. A disciplina foi o que eu esperava.

Pesquisador – depois de 03 meses, as dúvidas que surgiram, as dificuldades que você possa ter sentido nessas questões, você atribui a quê?

Milena – assim, é pouco difícil, tem pouco tempo agora até a prova, mas dá para aprender. Devia ter feito a prova antes da greve.

Milena, enquanto sujeito em IDIP, tem uma preocupação latente com o resultado da disciplina. Ela parece não considerar dificuldades ou dúvida, embora a todo tempo tentasse justificar o que estava fazendo. Talvez a crença positiva no papel da disciplina para sua formação se confunda com a concepção de que para ensinar é necessário saber o conteúdo. Ao final da entrevista, ela declara, por exemplo, que acharia mais fácil ensinar equações do que probabilidades:

Milena – equação já tá lá... Só resolver. Probabilidades mistura muito as coisas.

Professor – mas você usou praticamente uma única fórmula.

Milena – é mais complicado. Probabilidade confunde muito. Acho probabilidade difícil, se não fosse, os professores ensinavam melhor nas escolas.

A entrevista durou cerca de uma hora e cinquenta minutos. Finalizamos agradecendo a Milena por sua participação em todo processo.

A próxima entrevista foi realizada com Kátia e se valeu de uma metodologia similar à entrevista anterior. Apresentamos os questionários da entrevista inicial e retomamos as questões de problema da primeira e segunda partes.

Iniciamos a entrevista com Kátia contextualizando o andamento da pesquisa e o papel singular de cada um deles no processos de construção dos dados. Kátia, assim como Milena, se mostrava preocupada com o retorno às aulas e o desfecho da disciplina. Especificamente sobre o objeto probabilidade, parecia que algo havia mudado na sua relação e acreditava que IDIP lhe proporcionou a aprendizagem de alguns conceitos.

Pesquisador – *Kátia, estamos retornando ao trabalho, queremos inicialmente agradecer a você e aos demais pelas contribuições. Nossa entrevista, que pretende ser a última, vai tentar entender como você está construindo sua relação com a probabilidade. Tudo que você me relatar terá grande importância, não há certo, nem errado. Nosso último encontro foi há três meses, já se passou um tempo desde a última aula, pode ser que algumas coisas você não lembre, outras sim, vamos com calma e não se preocupe.*

Kátia – *hurum! Realmente, foi muito tempo.*

Pesquisador – *você me disse inicialmente na primeira entrevista, sobre sua relação com probabilidade, que praticamente não tinha estudado o tema. E agora, depois de ter estudado formalmente nesta disciplina, o que mudou?*

Kátia – *assim mudou, porque a gente aprendeu alguns conceitos que não tinham vistos. Para mim, a probabilidade era tipo jogos, possibilidades, loteria, essas coisas.*

Professor – *era o que você pensava ou não?*

Kátia – *mais ou menos. Assim, começou de um de jeito fácil, depois ficou mais difícil, principalmente aqueles últimos problemas (os teoremas).*

Professor – *difícil em que sentido? De aplicar as técnicas para resolver as tarefas?*

Kátia – *de compreender.*

No discurso de Kátia, percebemos que existem elementos que caracterizam uma crença parecida com a de Milena em relação ao papel da disciplina. Embora Kátia pareça ter clareza de que sentiu dificuldades, ela se dá conta de que alguma coisa mudou na sua relação.

Lembramos que Kátia, para o Professor, sempre foi considerada como uma estudante participativa e que, mesmo faltando duas das três aulas dedicadas à probabilidade, teria condições de acompanhar. Interessou-nos saber se Kátia buscou estudar probabilidade para compensar essa ausência. Inicialmente, ela conta que não:

Professor – *você chegou a estudar?*

Kátia – *não. Eu aproveitei para fazer minhas leituras para o relatório de estágio. Não estudei probabilidade, eu foquei no relatório.*

Professor – *e em relação a esse retorno, qual a sua expectativa, assuntos novos? Retomar probabilidade?*

Kátia – *espero que ele foque mais na probabilidade.*

Professor – *para revisar?*

Kátia – *para reforçar.*

Quando Kátia remete à necessidade de voltar ao estudo de probabilidade, lembramos que, para Milena, também a disciplina deveria ser encerrada com atividade relacionada ao assunto. Questionamos Kátia sobre o tempo dedicado à probabilidade em IDIP:

Professor – *o tempo é curto em relação à probabilidade?*

Kátia – *é.*

Professor – *se o tempo foi pouco, por que nas aulas vocês não perguntavam?*

Kátia – *porque o professor era novo. Não conhecia bem.*

Professor – *mas teve vontade ou necessidade de perguntar?*

Kátia – *sim! Além disso os slides eram muito rápido.*

Professor – *Mas em casa você chegou a estudar?*

Kátia – *estudei sim. Tirei dúvidas com Antonio.*

Kátia declarou não ter estudado durante o período de paralisação, mas revela ter estudado, principalmente com Antonio. A percepção dela da aula parece ter sido diferente em relação ao contrato didático para Milena. Enquanto Milena não perguntava porque para ela não era o momento, para Kátia pareceu ser mais uma questão da relação professor e aluno. Ela não conhecia bem o professor. Então não se sentia à vontade para perguntar, porém Kátia tem consciência de sua responsabilidade e busca outros meios para compensar as dúvidas.

Em relação ao papel da disciplina para sua formação docente, ele traz elementos que se assemelham ao discurso de Milena, no que tange à contribuição do componente curricular, mas é mais incisiva em considerar que a formação ofertada não é suficiente:

Professor – *e a professora Kátia, como se sente em relação ao ensino de probabilidade?*

Kátia – *assim, acho que seria mais fácil para dar uma aula, trabalhar talvez com resolução de problemas, pegar um probleminha pra iniciar o conteúdo. Mas tenho que estudar mais.*

Professor – *e se a aula fosse amanhã?*

Kátia – *ah! Eu ia estudar, procurar levar alguma situação concreta, pesquisar na internet, levar alguns dados. Com os dados, é melhor dos alunos entender, pegando no concreto é mais fácil.*

Pesquisador – *mas você considera que para você como professora a disciplina foi suficiente em relação à probabilidade?*

Kátia – *não!*

Professor – *por quê?*

Kátia – *porque é muito corrido, assim o que ele deu acho que deu subsídios pra gente caminhar sozinho.*

Após essa conversa inicial, revisitamos os instrumentos usados na primeira entrevista. Tanto o questionário formal quanto as questões de probabilidade foram revisitados. Assim como Milena, na ocasião da primeira entrevista, Kátia não respondeu a nenhuma questão que requeresse a utilização de alguma praxeologia matemática, então ela se dispôs a tentar responder a todas as questões.

Assim como Milena, ela manteve as respostas sobre o acaso, aleatoriedade e espaço amostral. Para Kátia, antes e depois de ter participado do SDs, o acaso é um conjunto de causas desconexas, os experimentos aleatórios são aqueles que, realizados sob condições semelhantes, apresentam resultados variados e não admitem uma previsão lógica, e, por fim, o espaço amostral seria o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento.

Especialmente no que tange às respostas sobre a noção de acaso e aleatório, veremos em Silva (2002) que não necessariamente estão erradas. Pelo contrário, são concepções epistemológicas, formas de ver o acaso. Como vimos na descrição dos encontros, essas noções não foram exploradas durante o funcionamento do SDs, mas tomadas como noções naturalizadas. As respostas iguais na entrevista inicial e nesse momento podem indicar que, para Kátia e Milena, as respostas assinaladas foram as que mais fizeram sentido e que o equipamento praxeológico poderia ser igual.

No entanto, ao solicitarmos que revisitasse a questão 4, que tratava do lançamento simultâneo do dado e da moeda, conseguimos perceber melhor elementos do equipamento praxeológico de Kátia:

Kátia – *(após algum tempo em silêncio olhando para questão).*

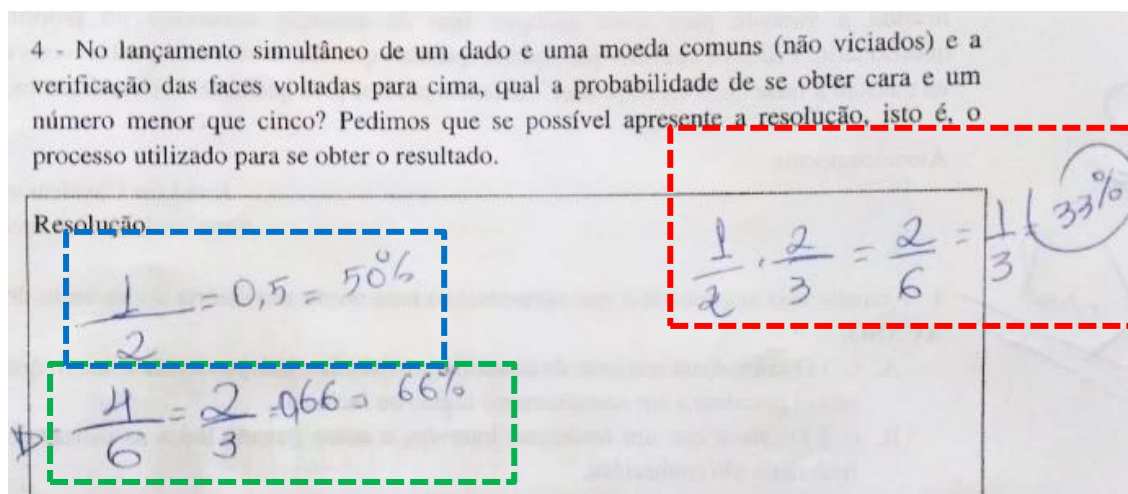
Pesquisador – *quando você tá em silêncio aí olhando para questão, em que você tá pensando?*

Kátia – *o dado tem seis faces, ele quer o número menor que cinco.*

Pesquisador – *quantos são os eventos?*

Kátia – *quatro. (Começa a escrever a relação 4 para 6, “pontilhado verde”):*

Figura 52 – Resposta Kátia – Questão 4 – questionário 01.



Fonte: protocolos de pesquisa (2018).

Kátia – que ai vai dar 66% de chance no dado.

Pesquisador – e a para moeda?

Kátia – nesse caso pode ser cara ou coroa?

Pesquisador – ele tá pendido a probabilidade de obter cara.

Kátia – (silêncio).

Pesquisador – que relação você estabeleceu entre o 6 e o 4?

Kátia – por que existiam seis faces e tinha 4 números menores que 5. Nesse caso, tem 50%.
(pontilhado azul).

Kátia – (sinaliza ter finalizado a questão).

Vemos no diálogo acima que o silêncio ainda é um marca presente no contrato didático em torno da probabilidade. Kátia indicava que precisava de ajuda ou mesmo que o pesquisador deveria assumir a responsabilidade para ajudá-la a superar as dificuldades de desenvolver o raciocínio. Isso não significa que não estivesse pensando sobre a questão. O silêncio parecia como uma forma de ação. Curiosamente, ela conseguia expressar a relação teórica para o dado, mas na moeda ela ficava em silêncio novamente, ou seja, ela não conseguia, imediatamente, empregar a técnica. Parecia haver necessidade guia-la para que usasse a relação anterior para intuir que a probabilidade teórica no caso das moedas seriam $\frac{1}{2}$.

Aqui, a reflexão pertinente é: deveríamos deixar Kátia parar a questão ou explorar como as noções estão se relacionando? A natureza do quadro empírico de nossa investigação nos direcionou a estimular Kátia. Nosso interesse não era nos seus erros, mas como estava se processando a relação com a probabilidade. Aqui nos valemos mais uma vez de Lave (2011), que defende que a etnografia crítica é um ato de compromisso.

Se ela demonstra dificuldade em lembrar ou utilizar a definição clássica da probabilidade, ao mesmo tempo, é diante desse entrave e do processo de diálogo entre pesquisador-sujeito que pudemos perceber que sua intuição lhe apontava alguns resultados. A partir de sua intuição e dos rudimentos praxeológicos que surgiram de forma fragmentada, ela lembrava de algumas propriedades. Isso talvez mostre que os obstáculos dos licenciandos ou mesmo de usuários do objeto probabilidade diante das tarefas podem remeter a questões mais enraizadas ligadas a própria aritmética:

Pesquisador – *você pararia por aí a questão?*

Kátia – *acho que sim, talvez organizar os dados? (Referindo-se à escrita dos ostensivos).*

Pesquisador – *não. Em termos de resolução, você pararia por aqui?*

Kátia – *sim! Pararia.*

Pesquisador – *agora vamos pensar sobre a questão. A tarefa pede que você informe a probabilidade de no lançamento simultâneo do dado e da moeda obter um número menor que 5 e uma cara. Qual é essa probabilidade? Como você informaria isso? Separadamente?*

Kátia – *é!*

Pesquisador – *mas ele se refere a um experimento só, embora composta de dois outros experimentos. É como se um médico fizesse uma cirurgia e nela aproveitasse para fazer procedimentos diferentes, dentro do mesmo processo cirúrgico. O que você sugere?*

Kátia – *somar não pode porque dá mais 100% e isso não é possível.*

Pesquisador – *a questão é: esses dois eventos são independentes? A ocorrência de um interfere no outro?*

Kátia – *não! Eles são independentes.*

Pesquisador – *o que o cálculo de probabilidades diz sobre isso?*

Kátia – *(silêncio).*

Pesquisador – *existe uma propriedade que diz que nesse caso a probabilidade é o produto dos eventos separados.*

Kátia – *multiplica?*

Pesquisador – *isso.*

Kátia – *(escreve o produto das frações, “pontilhado vermelho”, e fica em silêncio).*

Pesquisador – *você lembra como multiplica?*

Kátia – *não.*

Pesquisador – *o numerador vezes o numerador e o denominador vezes o denominador.*

Kátia – *dá 2 sobre 6, 33%.*

Pesquisador – *faz mais sentido esse resultado para você?*

Kátia – *faz... pois não é nem 50%, nem 66%.*

Vemos que no que diz respeito aos objetos ostensivos usados por Kátia que as praxeologias estão claramente fragmentadas. Ela não faz menção à definição clássica de forma mais rigorosa, mas entende que a probabilidade não pode ser maior que 100%. Ela parece saber que precisa relacionar os eventos observados com o total de eventos, mas isso não parece ser algo claro ainda para ela. A ausência da técnica para multiplicar frações se torna um obstáculo também.

Essa fragmentação parece ser um efeito combinado das ausências de Kátia, restrições que parecem ter incidido sobre sua relação, mas podem ter ligação com o próprio contexto em que o estudo de probabilidade se organizou. Nosso argumento está no fato de que as noções mais elementares não estão claras na relação de Kátia com a probabilidade. Aqui as dissonâncias do discurso institucional operam mais claramente na relação de Kátia com O_p , e ela parece se encontrar em pleno estado de conflito:

Pesquisador – *(sobre o próximo item da questão). Esse evento, qual é a natureza do seu espaço amostral, equiprovável?*

Kátia – *equiprovável?*

Pesquisador – *você lembra o que é equiprovável?*

Kátia – *não.*

Pesquisador – *em um espaço amostral equiprovável, os eventos têm chances iguais de ocorrer. No dado considerado não viciado, as faces teriam a mesma chance, o mesmo vale para moeda.*

Kátia – *então esse é equiprovável?*

Pesquisador – *é sim. Nessa próxima questão, é possível calcular isso teoricamente?*

Kátia – *sim.*

Pesquisador – *por quê?*

Kátia – *porque foi possível calcular agora.*

Apesar de Kátia, aparentemente, ter compreendido a mensagem sobre equiprobabilidade, o discurso ou seu assentimento, por si só, não é suficiente para a compreensão da noção, tanto que ela transfere a noção para a questão seguinte assumindo o

experimento do lançamento das tachinhas como um espaço equiprovável, o mesmo ocorreu com Milena.

Passamos à resolução das questões de probabilidade. O questionário continha 6 questões, das quais três foram apresentadas na primeira entrevista e não respondidas e as outras três pensadas para esse momento da entrevista final.

Kátia iniciou a solução da primeira questão que envolvia o lançamento simultâneo de dois dados. Percebemos que ela admite o espaço amostral como sendo 6 casos possíveis (pontilhado vermelho) e depois 12 (pontilhado laranja). Essa mesma cardinalidade foi atribuída por Milena, o que poderia indicar uma similaridade entre os procedimentos.

Figura 53 – Resposta Kátia – questão 1 – questões de probabilidade.

LANÇAMENTO DE DADOS
No lançamento de dois dados perfeitos e distinguíveis, um branco e outro vermelho, qual é a probabilidade de que:

- A soma seja "sete"?
- Ambos os números sejam pares?
- Ambos os números sejam iguais?
- A soma seja um número primo?

RESOLUÇÃO

a) $\frac{5}{36} = 0,13 = 13\%$

b) $\frac{9}{36} = 0,25 = 25\%$

c) $\frac{6}{36} = 0,16 = 16\%$

d) $\frac{15}{36} = 0,41 = 41\%$

(Handwritten notes in the image show calculations for question a) using 12 and 6 as denominators, and for question d) using 12 as a denominator.)

Fonte: protocolos de pesquisa (2018).

Essa semelhança pode estar ligada ao fato de as tarefas em torno da descrição e da exploração do espaço amostral não terem uma posição de destaque? De fato, essa parte da técnica foi em alguns momentos suprimida durante o funcionamento do SDs. A ausência de reflexão sobre a construção do espaço amostral e sobre a delimitação de sua natureza pode se constituir ao nosso ver como um obstáculo didático para a compreensão da abordagem clássica que é comum às duas participantes de IDIP.

Refletindo sobre os trabalhos de Brousseau, Almouloud (2007) destaca que os obstáculos didáticos têm raízes nos processos de transposição didática, que ora fazem parte do engessamento do currículo, ora das escolhas didáticas do professor em relação a essa transposição:

os obstáculos didáticos nascem da escolha das estratégias do ensino, deixando se formar, no momento da aprendizagem, conhecimentos errôneos ou incompletos que se revelarão mais tarde como obstáculos ao desenvolvimento da conceituação (ALMOULOU, 2007, p. 118).

Para a probabilidade, por exemplo, o raciocínio empregado por Pascal é combinatório, mas a definição clássica reduz o problema ao quociente entre o número de casos favoráveis e números possíveis. Isso conduz a um obstáculo didático, se o emprego do raciocínio combinatório, que é um passo anterior a aplicação da definição, for abordado superficialmente.

No entanto, queremos advogar em favor de uma diferença entre o erro de Kátia e o erro de Milena. Milena, que teve uma participação mais efetiva em IDIP, parecia convencida de suas técnicas. Kátia, por sua vez, não. A atitude delas em relação à tarefa é diferente. Milena se debruça sobre o problema e na certeza de suas técnicas conclui e defende seu raciocínio. Kátia emprega com dificuldade as técnicas e parece não aceitar seus próprios resultados, como se lhe faltasse segurança. Para além do obstáculo didático mencionado, haveria também um outro conflito operando que remete à crença individual do sujeito no seu equipamento praxeológico. Do ponto de vista psicológico, crer na técnica parece conduzir a uma atividade mais proativa por parte do sujeito:

Pesquisador – você tá calculado as somas que dão sete?

Kátia – é...

Pesquisador – no denominador você mudou de 6 para 12 por quê?

Kátia – porque eu somei os dois dados. (silêncio). É. Sei como fazer. Ele vai querer a soma dos dois dados?

Pesquisador – o lançamento é simultâneo. Você lança o dado e verifica as faces. Se for, por exemplo, 3 e 4, soma sete, te interessa. Se for 1 e 3, não te interessa, mas é um evento possível.

Kátia – mas aqui é doze? (Referindo-se ao espaço amostral). É isso que quero saber.

Pesquisador – o que é o espaço amostral? Quais são os resultados possíveis no lançamento de dois dados? Que possibilidades você tem?

Kátia – (silêncio)

Pesquisador – você lança o dado que resultado pode dar? Que possibilidades você tem?

Kátia – 3 e 4.

Pesquisador – tem outros?

Kátia – então são seis resultados.

Pesquisador – e as que não dão soma sete? Se você admitir que são 12, então, o denominador faz sentido?

Kátia – (silêncio).

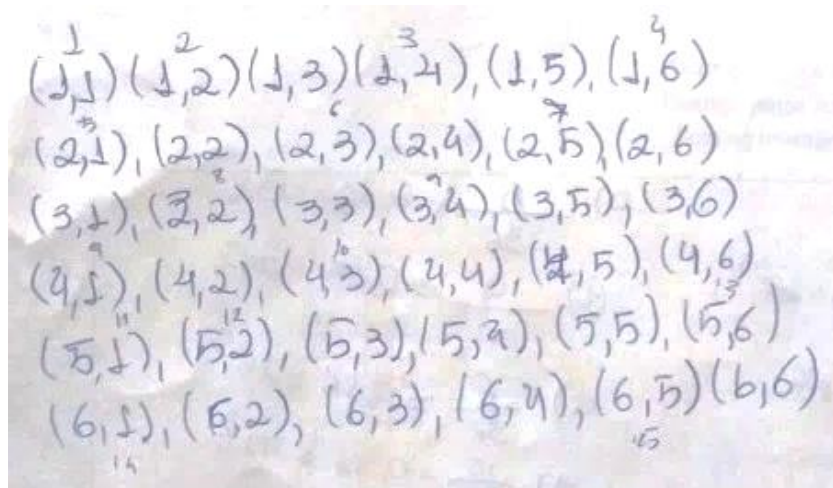
Pesquisador – e se a tarefa agora fosse: descreva o espaço amostral? Como você faria essa tarefa?

Kátia – escrevendo aqui?(na folha).

Pesquisador – então descreva.

Kátia – 1 com 1...

Figura 54 – Descrição do Espaço Amostral - Kátia



Fonte: protocolos de pesquisa (2018).

Pesquisador – quantos pares vocês já tem?

Kátia – 18...

Pesquisador – então 12 é pouco?

Kátia – muito. O total é 36?

Pesquisador – agora você pode buscar o que a questão pede.

Kátia – então nesse caso aqui (denominador) é 36?

Pesquisador – são as possibilidades?

Kátia – preciso apagar? (As respostas erradas)

Pesquisador – não! Pode deixar, por favor.

Imediatamente, após escrever o espaço amostral, a partir da nossa intervenção, Kátia começou a resolver as questões (pontilhado amarelo), aplicando a mesma relação clássica, porém com o espaço amostral correto. Ao final da resolução dos itens, ela buscou aplicar a

relação de que a soma das probabilidades de um mesmo evento devem ser 100% como tentativa de legitimar as novas respostas:

Kátia – acho que tá errado.

Pesquisador – por quê?

Kátia – porque não tá dando 100%.

Pesquisador – está somando todos os eventos?

Kátia – (revisa os cálculos).

O diálogo destacado mostra mais uma vez o papel da fragmentação na relação pessoal de Kátia com a probabilidade. Ela sabe que a soma das probabilidades de um mesmo evento não pode ser maior que 1, no entanto, não percebe que para cada item da questão essa relação se aplica ao complementar dos eventos em questão, ou seja, no lançamento simultâneos de dois dados honestos, a probabilidade de se obter uma soma sete é aproximadamente 13%. Logo, seu complementar seria 87%.

Kátia não conseguiu estabelecer uma solução para a questão do planejamento familiar. Para ela, a dificuldade estava na construção do espaço amostral. Novamente, a insegurança quanto à técnica parece impedir Kátia de tentar, o que fica mais evidente na questão seguinte.

No lançamento de uma caixa de fósforo, foi perguntado aos estudantes qual o procedimento para determinar a probabilidade de ocorrência das faces. Enquanto Milena, respondeu que seria $1/3$, pois se tratavam de três faces, Kátia pôs em jogo outros elementos:

Kátia – posso desenhar a caixa?

Pesquisador – pode.

Kátia – tá muito feio esboço, mas dá pra entender.

Pesquisador – não se preocupe.

Kátia – essa aqui é só pelo espaço amostral? Assim seria muito fácil?

Pesquisador – a qual espaço amostral você se refere? Seria muito fácil assim.

Kátia – as três faces.

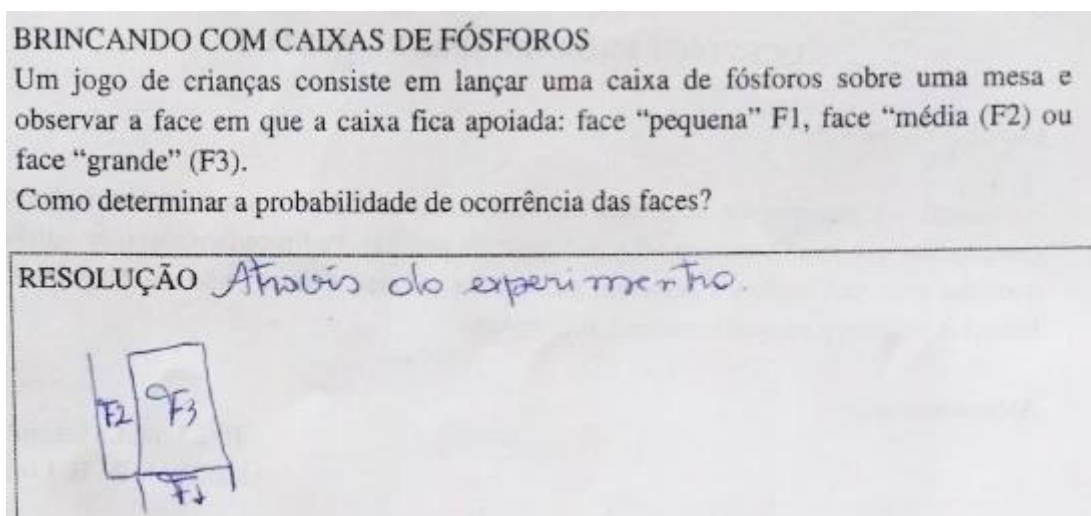
Pesquisador – então como você calcularia?

Kátia – acho que não dá... tem que ser experimentando. (jogando).

Pesquisador – por quê? Esse espaço é equiprovável? As faces tem a mesma probabilidade?

Kátia – não. Dificilmente, vai cair a F1. F3 tem mais chance... só dá experimentado.

Figura 55 – Resposta de Kátia – questão 3.



Fonte: protocolos de pesquisa (2018).

Parece-nos que, à medida que Kátia tem dificuldades em organizar suas praxeologias, sua intuição tem certa liberdade para inferir soluções que não estejam condicionadas à abordagem clássica. Seria esse um efeito gerado pela frequência irregular em IDIP durante o funcionamento do SDs?

De fato, veremos nas questões seguintes que Kátia estabelece um conflito entre a técnica e a sua intuição. Quando respondeu a questão 4, que tratava do lançamento de moedas e na qual o importante era o tamanho das amostras, Kátia, mais uma vez, demonstra essa oposição entre sua intuição e o que aponta a abordagem clássica:

Pesquisador – Ana Laura jogou 500 vezes e obteve aproximadamente 250 caras e a Ana Luiza jogou 50 vezes e obteve aproximadamente 25 caras. Quais dessas estimativas têm mais probabilidade de ocorrer?

Kátia – A primeira jogou 500 e obteve metade, a outra 50 vezes e também a metade, acho que são igualmente prováveis?

Pesquisador – por quê?

Kátia – (longa pausa). Acho que elas não são igualmente prováveis?

Pesquisador – não? por quê?

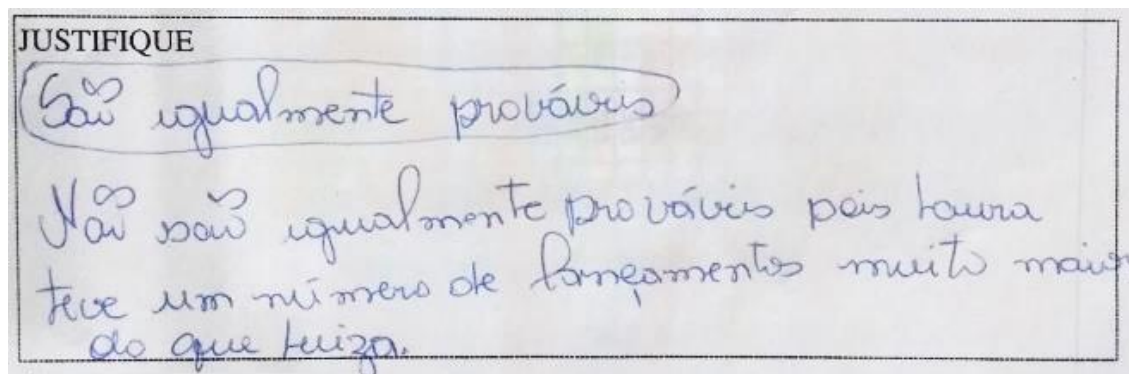
Kátia – pela quantidade de lançamentos que a outra fez que é bem maior.

Pesquisador – é essa sua resposta final?

Kátia – sim.

Inicialmente, vemos Kátia declarar que serem iguais as chances de os eventos acontecerem. Afinal, o lançamento da moeda sugere uma probabilidade teórica de $1/2$ ou 50% de se obter cara/coroa. Quando pedimos uma justificativa, ela fez uma longa pausa e voltou atrás, trazendo agora uma resposta que contradizia a opção inicial. Para Kátia, a quantidade de vezes que Laura lançou a moeda era importante:

Figura 56 – Resposta Kátia para questão 4.



Fonte: protocolos de pesquisa (2018).

Na questão seguinte, esperávamos que Kátia utilizasse o mesmo raciocínio para responder sobre a independência do evento do lançamento de moedas. A questão dizia que em determinado experimento houve uma sucessão de caras em três lançamentos. A pergunta era qual seria o resultado na próximo lançamento. A amostra pequena não garante que o próximo lançamento será cara, mas também que não será. Assim uma resposta plausível seria cara ou coroa. Essa resposta foi dada por Milena, mas, para isso, usou uma série de esboços de um espaço amostral, como se buscasse justificar a resposta nas praxeologias.

Kátia, por sua vez, declarou inicialmente que seria cara ou coroa, mas mudou novamente a resposta e assinalou que seria cara. A resposta para isso, segundo ela, estava na sua experiência com sorteio. A intuição de Kátia parece levá-la para uma abordagem subjetiva. Enfim, o seu conhecimento anterior, sua sujeição em sorteios passados, seu caso conhecimento particular de situações análogas a levaram à resposta que nos foi apresentada.

Figura 57 – Resposta Kátia – questão 5.

AINDA SOBRE MOEDAS³

Considere o experimento lançar uma moeda e obter como possibilidade Cara ou Coroa. Pedro lançou uma moeda três vezes e obteve cara todas as vezes. Sobre o seu próximo lançamento podemos afirmar:

Será Cara () Não será Cara () Será cara ou coroa

JUSTIFIQUE

Apontar de experiência própria através de um sorteio de uma rifa onde meu nome foi sorteado três vezes e na quarta vez saiu meu nome.

Fonte: protocolos de pesquisa (2018).

Kátia – acho que será cara ou coroa.

Pesquisador – certo. Então justifique.

Kátia – (silêncio). Não. Espera. Eu estou com dúvida.

Pesquisador – nessa questão sim?

Kátia – é! Porque já aconteceu comigo.

Pesquisador – como assim?

Kátia – eu participei de uma rifa. Antes de fazer o sorteio oficial, sortearam três vezes o meu nome. Na quarta vez, balançaram (o saco com os nomes), e aí foi meu nome “kátia”. Posso responder assim?

Pesquisador – pode. Nessa primeira resposta “cara ou coroa”, você pensou em quê?

Kátia – nas possibilidades cara ou coroa no lançamento da moeda. Mais aí eu lembrei desse caso. Foi a primeira vez que eu ganhei alguma coisa.

Vemos na resposta de Kátia que ela não usa um caso qualquer para sua resposta, mas um caso que lhe foi significativo, “a primeira vez que eu ganhei alguma coisa”. Não discutimos com ela a validade desse experiência, como, por exemplo, que causas poderiam estar ligadas a esse sorteio seguido do seu nome, ou as probabilidade de isso acontecer. O mais interessante é perceber que os fragmentos presentes na relação de Kátia com a probabilidade, construídos a partir de IDIP, sofrem influência das sujeições passadas de Kátia, nesse caso esses fragmentos parecem entrar em conflito com essas sujeições.

Para nós, foi também importante perceber que é nessa intuição que ela se apoia para responder às questões, quando lhe falta segurança nas praxeologias e conceitos estudados.

A próxima entrevista foi realizada com Antonio no dia 26 de julho de 2017. Iniciamos da mesma forma como as entrevistas anteriores, conversando com os estudantes sobre as expectativas em relação ao retorno das aulas.

Pesquisador – Antonio, depois de três meses, vamos retornar às aulas. Estudou probabilidade nesse período?

Antonio – não. Parei em relação isso, saí da rotina de estudos. Fui cuidar de outras coisas.

No discurso de Antonio, similar aos dos outros sujeitos, a sujeição em IDP e o seu consequente engajamento é algo que depende do funcionamento do sistema didático. É como se fosse um processo de participação que está fortemente atrelado às exigências da instituição. Enquanto o sistema didático funciona, os sujeitos participam, se engajam. Quando o sistema didático é finalizado, ou interrompido temporariamente, os estudantes buscam cuidar de outras sujeições. Para Antonio e os demais, a participação nesse sistema mudou sua relação com a probabilidade:

Pesquisador – o que mudou em relação à probabilidade?

Antonio – eu sei que muda, porque tudo que a gente estuda deixa um pouco de conhecimento. Você consegue olhar para certas situações e vai associando com o que você estudou.

Pesquisador – em que sentido?

Antonio – por exemplo, situações do dia-a-dia como o clima. Você começa a perceber que são probabilidades e não certezas.

Antonio declara ter havido essa mudança a partir da sua própria crença que a experiência, a participação sempre nos deixam algo de aprendizado. Segundo ele esse aprendizado, está nas associações que ele faz ao termo probabilidade com situações do seu dia-a-dia. Tentamos ser mais precisos sobre o papel da disciplina nessa mudança. Percebemos que existe certa tensão entre dizer o que realmente se aprendeu e como a disciplina é parte disso:

Pesquisador – então como você vê a contribuição da disciplina para Antonio usuário de probabilidade e Antonio professor?

Antonio – nem tudo dá para aprender. Probabilidade é um conteúdo muito extenso. Mas a disciplina cumpriu o possível.

Pesquisador – extenso, mas vocês tiveram três aulas?

Antonio – é porque a aula foi bem resumida. Você procura nos livros, na internet e vai ver que tem um mundo de coisas para aprender sobre probabilidade.

Pesquisador – então a disciplina é suficiente?

Antonio – não. Acho que deveríamos ter uma cadeira (disciplina) mais aprofundada, ver mais demonstrações, mais conceitos sobre o ensino.

Pesquisador – você considera a disciplina elementar?

Antonio – uma introdução apenas.

Quando avançamos no tema, percebemos no discurso de Antonio que IDIP cumpre com o papel de introduzir a noção de probabilidade, de chamar atenção para esse saber. Reconhecer que o tempo didático não é suficiente pode ser considerado um indício de que a probabilidade existe para Antonio, porém ele tem consciência de que precisaria de participar de mais situações de ensino para que pudesse manter uma relação melhor com aquele objeto. A disciplina lhe apresentou uma pequena parte de um objeto que ele sabe que é bem mais complexo. Essa outra visão da probabilidade, como um saber que carece de aprofundamento, vem do seu engajamento pessoal, das suas pesquisas.

Esse engajamento se traduz também em um comportamento apontado na fala de Antonio, de Kátia e Milena. Para suprir as necessidades em relação à probabilidade, todos buscam meios alternativos ao SDs. Seja buscando em livros, internet, ou mesmo consultando outros lado.

Por outro lado, temos observado nas falas dos futuros professores é que todos parecem estar de acordo quanto à importância do seu assujeitamento em IDIP. Fomos enfáticos nas orientações de que a avaliação não era sobre o professor, mas sobre o que estavam a aprendendo. Todos concordam que a disciplina cumpriu as expectativas, mas, ao mesmo tempo, reconhecem suas insuficiências. Para Kátia e Antonio, isso esteve mais presente que para Milena. Poderíamos nos questionar qual é, de fato, a expectativa de cada futuro professor, como estes estudantes se reconhecem como futuros profissionais de ensino e como isso influencia na sua percepção da sua formação.

Vimos que o discurso institucional em IDIP teve seu direcionamento à dimensão do conteúdo de probabilidade, especialmente no sentido tecnicista, tarefas e técnicas para ser cumpridas, em contextos limitados à abordagem clássica. Na relação de Kátia e Milena,

encontramos fragmentos das noções apresentadas, conflitos de ordem didática, epistemológica que influenciam suas crenças e sua ação diante das tarefas que envolvem a probabilidade.

Com Antonio, parece não ser diferente sobre a fragmentação. Ao revisar o questionário utilizado na entrevista inicial, ele se vê inclinado a mudar a resposta sobre o que era um experimento aleatório:

Antonio – acho que vou mudar essa aqui?

Pesquisador – você respondeu que um experimento aleatório é que aquele que, repetido sob as mesmas condições, não há como fazer uma previsão lógica dos resultados.

Antonio – é. Mas eu lembrei do gráfico de frequência que depois de certo tempo ia tendendo ao resultado. Então acho que o resultado é constante.

Pesquisador – constante significa? A linha diz do gráfico diz o quê?

Antonio – diz que o resultado tendem para aquele valor.

Pesquisador – isso garante a previsão?

Antonio – não, mas ele é constante.

Pesquisar – não varia? É sempre o mesmo.

Antonio – muda.

Pudemos observar que a confusão de Antonio nesse diálogo sobre a natureza de um experimento aleatório parece ser associado a sua participação em IDIP. Na entrevista inicial dos três estudantes, levantamos a hipótese de que eles teriam respondido às questões propostas nesse questionários mais por afinidade do que pensavam ser as respostas mais adequadas, do que pelo fato de compreenderem as noções. Isso indicava que tinham alguma percepção sobre o significado do acaso, da aleatoriedade, mas não necessariamente uma relação construída com a probabilidade, tanto que não resolveram as questões que requeriam a mobilização de algum equipamento praxeológico. Agora o contexto é outro: eles tiveram chance de rever suas respostas, responder ao que tinha ficado em branco, até porque se esperava que a sua relação com a probabilidade tivesse mudado.

Nas questões conceituais sobre acaso, aleatoriedade e espaço amostral, Antonio, Kátia e Milena tiveram respostas semelhantes. Kátia e Milena mantiveram suas respostas, já Antonio, ao ficar em dúvida sobre a natureza da aleatória dos experimentos, recorre exatamente ao gráfico que simulava o lançamento das moedas. Vale lembrarmos que nessa aula foi exatamente esse gráfico que chamou mais atenção de Antonio.

Pensamos que estamos diante do que poderia ser um outro obstáculo didático provocado pelo SDs. O gráfico utilizado tentava explicar a natureza aleatória do lançamento da moeda como uma frequência. Vimos na análise do encontro que o exemplo utilizado não levava em consideração a questão da amostra e do seu tamanho, e induzia o leitor associar o resultado $\frac{1}{2}$ para o lançamento da moeda, ou seja, o resultado teórico e o resultado empírico. Pensamos que os obstáculos que vão surgindo em IDIP e a ilusão de trabalhar uma perspectiva frequentista apenas no discurso, ou seja, na prática a abordagem é clássica, leva a esse tipo de equívoco. Esse tipo de cenário estava posto na obra B, na qual os autores diziam trabalhar a probabilidade em um perspectiva frequentista, mas em todo o capítulo fizeram uma abordagem clássica.

Ao olhar para os experimentos em um perspectiva clássica e com elementos determinísticos, Antonio parece ter compreendido os resultados de probabilidades como previsões do que vai acontecer, o que revela uma interpretação limitada do cálculo da probabilidade.

Pedimos a Antonio que retomasse as questões que havia sido deixadas em branco na entrevista inicial. Assim como Kátia e Milena, ele também demonstrou dificuldades na resolução. Iniciamos com a resolução da tarefa cujo contexto era o lançamento simultâneo do dado e da moeda:

Antonio – acho que não vou saber fazer, não lembro mais.

Pesquisador – ao menos tente. Vá relembando. O que a tarefa pede para você determinar?

Antonio – ele lança a moeda, e quer uma cara. Lança dado e obter 5.

Pesquisador – um número menor que cinco.

Antonio – então pode ser o 4.

Encontramos em Antonio dificuldades em agir sobre a tarefa. Ele consegue ler o contexto, mas sente dificuldade de estabelecer uma praxeologia que lhe conduza ao cumprimento da tarefa. Parece que novamente o obstáculo didático que apareceu na resolução de Kátia se desenhava com Antonio, porém um pouco mais acentuado. Além de não estabelecer um raciocínio combinatório, já que para um número menor que 5 poderia ser o 4 apenas, ele não consegue organizar essas informações na definição clássica. Diante disso, conduzimos a entrevista de modo a problematizar as dificuldades de Antonio com a probabilidade:

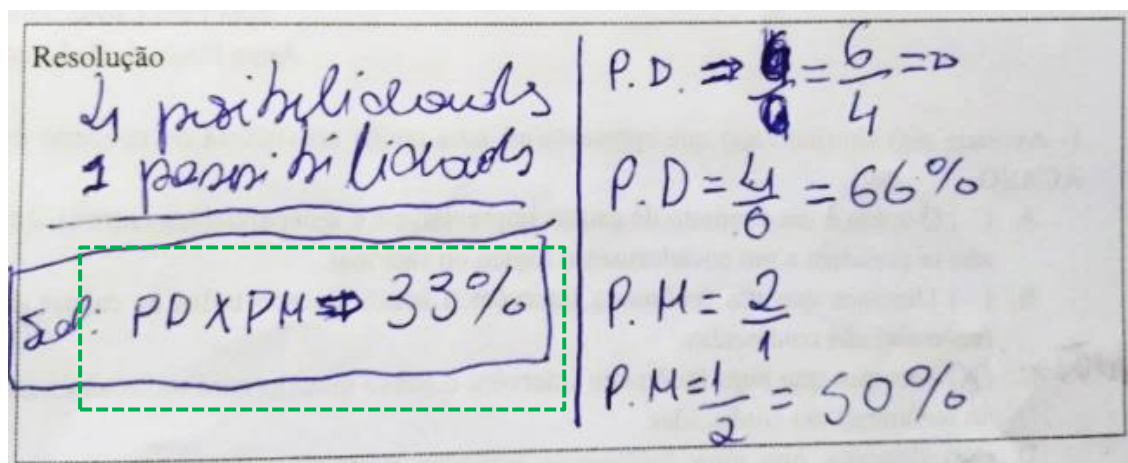
Pesquisador – só há um número menor que 5 nas faces do dado?

Antonio – são 4 possibilidades. Eu posso escrever isso aqui?

Pesquisador – pode, como quiser.

Antonio – na moeda vão ser duas possibilidade cara ou coroa, mas ele quer cara. Então é só um probabilidade. Então são 4 possibilidades e 1 possibilidade (pontilhado laranja).

Figura 58 – Solução de Antonio – Questão 4 – questionário formal.



Fonte: protocolos de pesquisa (2018).

Pesquisador – você disse as possibilidades, mas a tarefa pede a probabilidade disso ocorrer.

Antonio – não sei.

Pesquisador – não sabe ou não lembra?

Antonio – (silêncio)

Pesquisador – a que você atribui essa dificuldade?

Antonio – acho que o tempo parado, mas, assim, na disciplina você vê os assuntos, se não praticar você esquece, quando você pega o material vai lembrando.

Pesquisador – então sem material você pararia por aqui.

Antonio – pararia.

Antonio chega a intuir o espaço amostral no caso das moedas “duas possibilidades”, mas para o evento cara é somente “uma possibilidade”, embora não consiga estabelecer uma relação que lhe ajude a construir sua resposta. Vemos aqui que a ausência de um equipamento praxeológico impede a ação de Antonio no contexto da entrevista. Para Antonio, há uma crença de que falta prática. Para nós, há um entendimento que falta Antonio se colocar em uma atividade de estudo que considere suas dificuldades, as necessidades do próprio estudo da probabilidade e, conseqüentemente, as demandas formativas para o ensino de probabilidades.

Enquanto para Kátia a propriedade que diz que as probabilidades de um evento e seu complementar não podem ser maiores que 100% era uma regra constante em seu raciocínio, para Antonio isso também não estava claro. Tanto que, quando estimulamos a continuar a

resolução da questão, fornecendo a definição clássica de probabilidade, ele comete um erro e sente dificuldade de tomar consciência do seu erro. O erro é repetido na resolução da questão das moedas, como vemos no pontilhado azul da figura 57.

Antonio – 6 dividido por 4.

Pesquisador – é isso mesmo?

Antonio – não é?

Pesquisador – quanto é isso em porcentagem?

Antonio – 150 (usando a calculadora)

Pesquisador – por cento? Esse resultado é possível?

Antonio – não sei. Ahh! É 4 sobre 6. Que dá 66%.

Pesquisador – e para a moeda?

Antonio – mesma coisa! Será 2 sobre 1.

Pesquisador – isso dá quanto?

Antonio – não! 1 sobre 2.

Esclarecemos para Antonio que a tarefa pede a probabilidade do lançamento simultâneo e que até o momento ele havia calculado as probabilidades individuais. Ele fez uma série de tentativas para determinar essas probabilidades. Nessas tentativas, observamos que, assim como Kátia e Milena, Antonio não reconhecia a propriedade sobre a independência dos eventos. Ele inicialmente relacionou as possibilidades de obter um número menor que 5 no dado e a possibilidade de obter cara na moeda. O quociente 4 sobre 1 lhe retornou 400% por cento de chance. Direcionamos o olhar de Antonio para as probabilidades individuais calculadas por ele. Novamente, ele dividiu as probabilidade e obteve 132%. Foi então que explicamos o princípio da independência de eventos:

Antonio – somar também não pode dar 106%.

Pesquisador – vou lhe fazer um pergunta. Quando você joga o dado e confere o resultado, isso influência no resultado da moeda?

Antonio – não.

Pesquisador – isso significa que um não interfere no outro, ou seja, eles são independentes. Quando isso ocorre, tem uma propriedade que diz que a probabilidade corresponde ao produto das probabilidades desses eventos.

Antonio – ah! Então, multiplica. 33% (pontilhado verde).

Observamos que a estratégia de Antonio parece ser recorrer à tentativa de relacionar as probabilidades. O significado e os conceitos envolvidos parecem ficar em segundo plano em detrimento da resposta numérica da tarefa, o que pode ser uma marca dos contratos didáticos aos quais Antonio esteve sujeito. A ausência de equipamento praxeológico em torno da probabilidade é mais evidente pela ausência de objetos ostensivos que se aproximem das praxeologias de IDIP. De certa forma, pudemos perceber um declínio progressivo entre Milena, Kátia e Antonio:

Figura 59 – Presença dos objetos ostensivos nas praxeologias dos sujeitos de IDIP.

Milena	Kátia	Antonio
Resolução $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $P = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$ $P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	$\frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$ $\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0,66 = 66\%$	Resolução ↓ probabilidades ↓ possibilidades <hr/> Sol: $PDXPH = 33\%$

Fonte: protocolos de pesquisa (2018).

Esse declínio estaria associado à participação e engajamento individuais? Milena participou de todas as aulas, Kátia e Antonio tiveram uma frequência irregular. Essa seria uma explicação para o fenômeno? Em parte, o assujeitamento de Milena foi maior, tanto que, durante a entrevista, ela demonstra confiança nas suas praxeologias e as utiliza para justificar seus resultados. No caso de Kátia e Antonio, pareceu-nos que há uma falta desse equipamento praxeológico. No entanto, um outro viés a ser considerado é: por que Milena, Kátia e Antonio apresentam conflitos semelhantes relacionados ao objeto *probabilidade*? Por que a percepção da independência de eventos e a construção do espaço amostral são problemas comuns para os três?

É aqui onde vamos buscar amparo em Lave e Wenger (1991) em seu argumento em favor da cognição como um fenômeno situado. A ecologia que permite a vida da probabilidade na em IDIP é frágil. A discussão praxeologia é local, incompleta e naturaliza conceitos e noções importantes para a compreensão da probabilidade. A rigidez em torno da abordagem clássica, a ausência de problematização em contextos diferentes e um contrato didático normativo corroboram para uma conjunto de restrições que fragilizam essa ecologia.

O resultado desse contexto parece ser uma aprendizagem fragilizada ou, nos termos da TAD, uma relação com R(X,O) confusa. Mas, por que Milena, Kátia e Antonio serão aprovados

em IDIP, é aí onde para nós opera mais uma vez a dissonância no discurso da instituição, não só relativizando o veredicto de conformidade desses sujeitos, em eminência de serem aprovados, mas criando um ruído que, provavelmente, só será percebido a longo prazo.

O argumento de que a cognição é produto do contexto situado e se manifesta na coletividade dos sujeitos da instituição é, para nós, ratificado quando nas questões seguintes do questionário Antonio apresenta respostas semelhantes às de Milena e de Kátia.

Antonio considerou também que o lançamento das tachinhas correspondia a uma situação de equiprobabilidade e o seu cálculo teórico era possível, ou seja, assim como para Milena e Kátia, a ilusão da equiprobabilidade é absorvida por Antonio, mesmo tendo assistido menos aulas que Milena. Pensamos que a participação e o engajamento são muito mais que a frequência. O processo de permitir-se entrar na instituição e absorver na sua relação pessoal traços da relação institucional com o objeto de ensino em questão, na fala de Antonio, fica mais evidente:

Antonio – essa situação com certeza é equiprovável. Só temos duas opções, posição 1 ou posição 2. Então, é equiprovável.

Antonio, após responder ao questionário formal, revisitou as três questões que havia deixado em branco durante a primeira entrevista. Percebemos que ele passou a utilizar as relações que estabeleceu na resolução da questão anterior. Ao observar a solução do item “a”, podemos delinear os procedimentos que se constituíram em um técnica provisória para Antonio.

Figura 60 – Resolução item “a” questão 1 – questionário probabilidades.

RESOLUÇÃO $D_1 = \frac{1}{6} \Rightarrow 16.67\%$
 $D_2 = \frac{1}{6} \Rightarrow 16.67\%$
 $D_1 = \frac{1}{6} \Rightarrow 16.67\%$
 $D_2 = \frac{1}{6} \Rightarrow 16.67\%$
 $\Rightarrow D_1 \times D_2 = 2\%$

Fonte: protocolos de pesquisa (2018).

Para Antonio, a técnica a ser executada é:

Quadro 44 – Técnica provisória de Antonio.

1. Estabeleça o número do quociente entre o número de eventos favoráveis e o número total de eventos possíveis.
2. Determine as probabilidades individuais de cada evento;
3. Em seguida faça o produto das probabilidades.

Fonte: próprio autor (2018).

Vemos no esboço da técnica de Antonio que ele tenta sintetizar os passos feitos na resolução da questão anterior. Durante a solução do item “a”, observamos que o mesmo erro cometido por Milena de associar o número de evento favoráveis à face do dado e não ao número de possibilidades desses eventos foi verificado. O mesmo vale para a descrição do espaço amostral. Talvez porque na questão anterior os espaços amostrais eram de experimentos diferentes (o dado e a moeda), Antonio julgou que seria possível proceder da mesma forma. Assim, para ele, cada evento era um experimento particular.

Na sua solução, ele associou a soma sete a um único caso (6,1). Ele não considerou outros casos como (3,4), (5,2) nem a combinação desses, então, para ele, a probabilidade seria $6/6$ (face seis) sobre 6 (possibilidades), do mesmo modo para o segundo evento $1/6$ (face 1) sobre 6 (possibilidades). Novamente, ele se viu em conflito por conta de a probabilidade ter dado 100%, já no primeiro evento:

Antonio – *então esse aqui dá 100%, já não vai dar certo.*

Pesquisador – *quando você tem 6 possibilidades, você tá se referindo ao 6?*

Antonio – *verdade. Então é 1 sobre 6. No outro caso, também vai se 1 sobre 6.*

Pesquisador – *qual é o resultado final?*

Antonio – *2%, porque eu multipliquei.*

A nossa intervenção ajudou a Antonio a sair do conflito, percebendo que havia algo errado em relação ao numerador do quociente. O resultado encontrado lhe pareceu plausível. Para ele, a técnica estava funcionando. A sua atitude muda, pois, a partir de agora, ele consegue resolver as tarefas análogas. No entanto, o próprio Antonio percebe que há algo de incomum no funcionamento, pois os resultados passam a se repetir, por exemplo, no item b e no item d, ele atribui o mesmo número de eventos e o resultado é igual:

Figura 61 – Aplicação da técnica nos itens c e d.

Item b – faces pares	Item d – faces iguais
$D1 = \frac{3}{6} = 50\% \Rightarrow$ $D2 = \frac{3}{6} = 50\%$ $D1 \times D2 = 25\%$	$D1 = \frac{3}{6} = 50\%$ $D2 = \frac{3}{6} = 50\%$ $D1 \times D2 = 25\%$

Fonte: protocolos de pesquisa (2018).

Antonio – a probabilidade aqui é de 25% (item b). Nesse vai dar igual também. Acho que isso tá errado.

Pesquisador – Por quê?

Antonio – porque tá dando muita probabilidade certa.

Pesquisador – como assim?

Antonio – assim os resultados tudo dando certinho e igual.

Pesquisador – você confia nos seus cálculos?

Antonio – Não! Eu estou usando só a definição simples da probabilidade.

Pesquisador – mas você fez os cálculos corretamente.

Antonio – sim! Isso eu fiz, mas não sei se está errado.

Pesquisador – você diz isso porque é incomum os itens darem resultados semelhantes?

Antonio – é.

No momento em que a técnica empregada apresenta um funcionamento anormal, Antonio passa a questioná-la. A técnica, segundo ele mesmo, é a definição de probabilidade. Isso para nós indica duas questões. A primeira é o papel da rigidez nas praxeologias empregadas durante o funcionamento de I_{DIP} . A segunda é o fato de que, ao declarar estar usando a definição de probabilidade, temos claramente um quadro em que a relação é de fato confusa, já que ela não estaria sendo empregada corretamente.

Apesar de não confiar na técnica, ela é a única de que Antonio dispõe. Então, ele cumpre com as tarefas dos itens restantes. Para a questão seguinte, sobre o planejamento familiar, ele se utiliza da técnica, só que assume agora um único evento. Sem levar em consideração o espaço amostral, Antonio conclui rapidamente que a resposta para a questão seria $2/3$ e $1/3$:

Figura 62 – Resolução questão 2 – Planejamento familiar – Antonio.

PLANEJAMENTO FAMILIAR
Um casal planeja ter exatamente 3 crianças. Qual é a probabilidade de que:
A- Duas crianças sejam meninos e a outra, seja menina?
B- Pelo menos um menino?

RESOLUÇÃO
A) $\frac{2}{3} \Rightarrow 66\%$ | B) $\frac{1}{3} = 33\%$

Fonte: protocolos de pesquisa (2018).

Antonio – como são três filhos e ele quer dois meninos, então teremos 2 sobre 3. Na outra questão do mesmo jeito, 1 sobre 3.

O mesmo ocorre para a terceira questão do lançamento da caixa de fósforos. Assim como para Milena, a caixa de fósforos, para Antonio, representa um espaço amostral equiprovável, portanto, basta empregar o raciocínio das questões anteriores, que traria como resultado $1/3$, já que são três faces.

No entanto, Antonio questiona o seu próprio resultado, pois para ele tem algo mais acontecendo:

Antonio – rapaz, no meu cálculo mental (intuição), algo me diz que ele sempre vai cair na face grande. Agora o porquê...

Pesquisador – tenta explicar.

Antonio – pelo apoio, vai cair mais na face grande.

Pesquisador – então, as três faces não têm chances iguais de ocorrer?

Antonio – tem. Acho que ela é equiprovável, pois as três têm chances de cair.

Pesquisador – então como calcular?

Antonio – 1 sobre 3.

Para Antonio, o emprego da definição clássica de probabilidade da forma como ele propõe é contraintuitivo, porém ele aceita. O que está em jogo aqui é aquilo para o qual diversos pesquisadores têm chamado atenção e que diz respeito ao papel das noções elementares, como acaso, aleatoriedade, equiprobabilidade, dentre outros, para a compreensão e a modelação de situações probabilísticas. Essa questão admite uma solução algébrica que se aproximaria de um

uso em torno da definição clássica, no entanto, esse cálculo deveria ser feito por hipótese. Mesmo nessa hipótese, as faces não têm chances iguais de ocorrerem, ou seja, o espaço não seria equiprovável. Porém, como alertam Moura e Samá (2016), a ilusão da equiprobabilidade é uma consequência da abordagem de ensino que privilegia uma única concepção da probabilidade.

O mesmo ocorre com o fato de ignorar o tamanho da amostra. Do ponto de vista da abordagem clássica, na qual os espaços amostrais são finitos e equiprováveis, o tamanho da amostra não é importante para o cálculo da probabilidade teórica. Assim como Milena, Antonio declara que no experimento da questão 4 (parte 2) a quantidade de lançamentos não é importante, já que no caso do lançamento de uma moeda a possibilidade de cada jogada é $\frac{1}{2}$ para cara ou para coroa, então $\frac{25}{50}$ e $\frac{250}{500}$ seriam resultados igualmente possíveis em uma experimentação empírica, o que é um equívoco, pois $n=50$ lançamentos é um valor insignificante para construir uma frequência empírica próxima de $\frac{1}{2}$:

Antonio – não importa a quantidade de lançamentos, o número de possibilidades de cada jogada ou é cara ou coroa, então a probabilidade é $\frac{1}{2}$, elas são igualmente possíveis.

Na última questão da parte 2, Antonio reafirmou o discurso da questão anterior. Para ele, o próximo lançamento de uma moeda, independentemente do número de lançamentos ou resultados anteriores pode ser cara ou coroa. Apesar desse resultado estar correto, pensamos em que está baseado apresenta uma postura ligada mais ao raciocínio empregado na outra tarefa do que uma compreensão da independência dos lançamentos. Notemos que esse princípio garante que a ocorrência anterior não interfere no próximo lançamento. Logo, parece-nos que a resposta de Antonio foi no sentido de confirmar que não importa o que está acontecendo para uma moeda, pois a probabilidade de obter uma das faces é sempre $\frac{1}{2}$.

Ao final das questões de probabilidade, fizemos algumas considerações com Antonio acerca desse momento de entrevista e de sua participação em IDIP:

Pesquisador – Antonio, percebi que quando você declarou que não conseguiria avançar na primeira questão, e nós debatemos sobre a definição de probabilidade e a própria noção de independência, você resolveu a primeira questão e também outras, mesmo inseguro, você usou a técnica. Você confiou na técnica ou em nossa intervenção?

Antonio – na técnica, com certeza. Eu empreguei a técnica porque eu achei que me deu os resultados que eu precisava.

***Pesquisador** – sobre sua participação na disciplina, tanto você quanto suas colegas estudaram probabilidade quando as aulas estavam ocorrendo. Com a interrupção da disciplina, todos pararam de estudar. Por que isso acontece?*

***Antonio** – olha pra ser sincero, acontece porque é muita coisa para estudar, digo nas disciplinas todas, e você acaba estudando para passar. As avaliações servem só para dar uma nota. Estudamos para fazer a prova e depois esquecemos, como hoje eu não lembrava. As aulas podiam ser mais participativas.*

No discurso de Antonio, confirmamos nossa impressão sobre o papel da técnica que ele relembra/ou adquire durante a entrevista. Ele não opera sobre as tarefas sem confiar nos procedimentos.

Vemos na sua opinião sobre o que para ele parece ser uma restrição da instituição. O currículo, a organização das disciplinas, as formas de avaliação parecem conduzir ao tipo de participação que se limita a cumprir com o que é proposto e a aprendizagem acaba sendo uma consequência disso. Não aprender probabilidade, esquecer algumas noções, demonstrar confusão, tudo isso parece fazer parte do processo para Antonio.

Realizadas as três entrevistas, fizemos o nosso último momento de construção dos dados empíricos com o Professor de IDIP. O objetivo foi captar suas impressões sobre o funcionamento do SDs, a participação dos estudantes, as restrições e as condições da instituição e da organização didática por ele gerenciada.

A entrevista foi realizada no dia 27 de julho de 2017, antes da penúltima aula e, portanto, antes do encerramento da disciplina. Com o retorno das aulas, restavam três aulas para o semestre ser concluído, ou seja, três semana. O professor deveria tomar a decisão de continuar os temas pendentes ou organizar a avaliação da unidade com os conteúdos que haviam sido trabalhados.

Lembramos que na última aula, antes da paralisação, o Professor havia dado por encerrado o conteúdo de probabilidade. Em curso normal, ele teria introduzido a noção de variáveis aleatórias, distribuição de probabilidades e as aplicações desses conteúdos na estatística. Como vimos no discurso dos alunos, havia uma angústia em relação a essa decisão. Para os estudantes, a melhor solução seria realizar um atividade de avaliação com o que já havia sido trabalhado sem necessidade de novos conteúdos. Iniciamos a entrevista com o professor contando a mesma situação em outros cursos:

***Pesquisador** – o que se resolveu em relação a Ciências Contábeis?*

Professor – quando eu cheguei ontem, a turma estava desesperada. Eu não posso simplesmente chegar e aplicar uma prova. Está tudo desorganizado. Eu não posso descontar nos alunos. Vou fazer a mesma coisa aqui. Temos mais duas semanas, então vou passar um trabalho que valerá a nota da segunda unidade. O que tinha de ser feito já foi.

Pesquisador – como você avalia o tempo dedicado à disciplina

Professor – depende muito do objetivo do curso o que se espera atingir com a disciplina. Como se trata de uma licenciatura, em 60 horas dá para ver uma ementa razoável. Não penso que precisássemos de 90 h. Num bacharelado talvez, onde se enverada para a pesquisa, mas para a formação de professor está adequado.

Vemos que para o Professor a situação da universidade também é incômoda. As causas que levaram à paralisação construíram um cenário de insegurança que influenciou no funcionamento dos sistemas didáticos, na organização praxeológica matemática e também didática.

Com a decisão de passar um trabalho, entendemos que o Professor procurou uma solução que fosse viável para os estudantes, mas também para ele. Observamos que a questão do tempo didático e a dialética velho/novo que Chevallard (1997) discutia se coloca como um problema em IDIP. O Professor ainda tem três semanas para terminar um semestre que deveria ter sido finalizado há pelos menos dois meses. Os conteúdos vistos até então não deveriam ser retomados, mas, ao mesmo tempo, a introdução de novos conteúdos é problemática, especialmente porque, do lado dos estudantes, existia uma angústia que se configura como uma restrição à decisão de fazer o sistema didático avançar.

Tomando o objeto probabilidade especificamente, a crença do Professor é que o conteúdo que foi estudado em sala de aula foi aprendido, ou, ao menos, cumprido do ponto de vista da ementa. Isso seria o suficiente para autorizar a realização de uma atividade de avaliação, na modalidade pesquisa.

Para compreendermos a percepção do professor sobre o tempo didático, perguntamos ao professor como ele avaliava o tempo dedicado à disciplina. Sua resposta inicial caminhou para um defesa do modelo adotado, dado que o cenário era atípico:

Professor – sim, ele é muito importante no curso superior. Eu estou adquirindo experiência. Hoje eu costumo pensar de maneira diferente, por tudo que vivi nesse semestre. Tenho um professor que conheci no doutorado, que diz: “minha disciplina está aqui para fornecer uma base e vocês terem subsídios para saberem onde buscar mais informações”. Eu acredito que seja assim também aqui.

Pesquisador – *então se não fosse a greve, a ementa teria sido cumprida?*

Professor – *com certeza, vou ficar devendo as variáveis aleatórias, vou fazer uma introdução nessa e na próxima semana, embora não deva cobrar na avaliação. Eu penso que como uma disciplina de introdução à probabilidade ela careça pequenas modificações na ementa.*

Na fala do Professor, vemos elementos que corroboram para o entendimento que na dialética antigo-novo é o “novo” que deve sempre prevalecer em relação ao conteúdo. Mesmo não tendo pretensão de cobrar na avaliação, ele deverá trazer esses objetos. Se pensarmos na relação que poderá ser estabelecida com os alunos, podemos dizer que o nível *escola* e o cenário que a instituição viviam atuou como fonte de restrição. De fato, o objeto probabilidade havia sido estudado em IDIP, no entanto, as entrevistas finais que realizamos com Milena, Kátia e Antonio demonstram as fragilidades na relação estabelecida com a probabilidade.

O Professor coloca a questão do tempo como satisfatória mas ao mesmo tempo destaca que, como uma disciplina de introdução à probabilidade em um curso de formação de professores, a ementa precisa de ajustes, se não em relação ao tempo, mas em relação aos conteúdos ou à organização didática. Vemos isso mais claramente quando tratamos das impressões do Professor sobre a participação dos alunos:

Pesquisador – *em relação à participação dos alunos?*

Professor – *foi muito bom o desempenho deles. Eu vejo o lado humano. Uma coisa eu dar aula em João Pessoa, outra é eu estar aqui. Os públicos são diferenciados. Lá é uma turma diurna, os estudantes tem uma base boa. O poder aquisitivo. Mas eles não têm muito interesse em aprofundar, em conhecer, eles vão lá assistem minha aula e pronto. Eles gostam, mas não se aproximam.*

O Professor, ao citar o desempenho e a participação dos seus alunos em IDIP, fez uma comparação interessante que para nós destaca mais uma vez o papel do contexto situado da disciplina. Para ele, o perfil sócioeconômico dos alunos, a formação e os seus objetivos contrastam com organização do curso, que em João Pessoa é diurno, enquanto na turma observada era noturna:

Pesquisador – *então nessa perspectiva o tempo naquela instituição é condição?*

Professor – *o tempo é razoável para a ementa pedida.*

Parece que para o Professor o tempo didático está associado ao cumprimento da ementa. Então fomos mais diretos em relação à organização do sistema didático:

***Pesquisador** – se os alunos têm uma participação boa, aqui em nosso contexto você consegue enxergar possíveis restrições ao desenvolvimento da disciplina?*

***Professor** – os alunos que trabalham. Se não tivesse ocorrido a greve, talvez tinha trabalhado uma atividade para deixar eles mais à vontade, um projeto.*

***Pesquisador** – então, você com mais tempo organizaria uma disciplina diferente?*

***Professor** – sem dúvida, tem muitos exemplos. O banco da cidade, por que tem filas tão longas? Como investigar isso? suas causas, suas soluções.*

Para o Professor, o tempo não é uma restrição direta, do ponto de vista da ementa, mas é um delimitador, ao menos em sua opinião. Para que um trabalho diferenciado seja desenvolvido, o tempo e a organização, a ementa proposta parecem ser fatores que restringem o Professor de fazer um outro tipo de trabalho:

***Pesquisador** – então a proposta seria uma disciplina teórico-prática?*

***Professor** – sim, sem muitos recursos, uma prancheta ou um celular. Dava pra trabalhar o conteúdo todo. Distribuições de probabilidades, inferência.*

O Professor nos pareceu aberto a fazer um trabalho diferente do que foi apresentado. No entanto, temos que observar que seu discurso é do professor de estatística. Não necessariamente ele guarda as preocupações com o objeto probabilidade. Vemos ao longo de toda a investigação que IDIP não tem um contrato institucional voltado para o ensino de probabilidade como um saber a ser ensinado. O funcionamento do sistema didático tornou isso mais evidente. A partir dessa constatação, refletimos sobre que proposta teórico-prática poderia ser pensada para formação dos professores enquanto usuários da estatística e da probabilidade em primeiro momento, e em um segundo momento, tendo a probabilidade como um saber a ensinar.

Mesmo tendo compreensão dessa realidade, direcionamos nossa atenção para o objeto probabilidade:

***Pesquisador** – em relação à probabilidade, ao ensino de probabilidade aqui na disciplina, as noções mais elementares, qual a importância delas?*

Professor – *essa questão do espaço amostral, às vezes gera uma dúvida, uma coisa muito trivial, para mim indica que tem algo mais. É complexo. Cada questão é um mundo.*

Pesquisador – *as pesquisas apontam para isso. Os alunos estudam a probabilidade formalmente e, mesmo assim, têm dificuldades de empregar raciocínios probabilísticos.*

Vemos que o Professor destaca o espaço amostral e sua descrição como uma tarefa fundamental. No entanto, vimos durante a descrição dos encontros em torno de objeto probabilidade que essa tarefa tinha um papel secundário, especialmente do ponto de vista das tarefas propostas. A citação ao espaço amostral para nós não foi mero acaso, visto que fizemos questão de apresentar ao Professor as respostas de Milena, Kátia e a Antonio aos questionário. O Professor confirma essa impressão, destacando que as questões propostas tinham um potencial para a reflexão sobre a probabilidade:

Professor – *eu estava olhando as questões que você utilizou para entrevistas. Eu peguei a questão das moedas, (Experimento de Luiza e Laura), no nosso grupo de professores tem 05 (cinco) colegas, foram cinco pensamentos diferentes, teve gente que pensou até que o tamanho da amostra não importa. Eu fiz na prática e vi que tem uma diferença.*

Pesquisador – *nesse caso público é diferenciado?*

Professor – *sim. Professores com doutorado, mestrado...*

Pesquisador – *em relação às dificuldades dos alunos?*

Professor – *acho que a notação é o que mais traz dificuldades. Operações com frações.*

Pesquisador – *como você avalia o conhecimento dos alunos:*

O fato do professor se interessar pelas questões, diante das respostas dos alunos, propor a discussão dele com seus colegas de trabalho, isso mostra mais uma vez o papel que nossa participação durante o funcionamento de IDIP tem. De algum modo, a percepção dos professores sobre a questão, relatada pelo Professor, mostra que não são incomuns ou distantes as respostas de Milena e Kátia que também responderam que o tamanho da amostra no experimento não importava.

Perguntamos ao Professor sobre o desempenho dos alunos, já que para ele a participação foi adequada:

Professor – *as meninas se saíram super bem, mas Antonio foi diferente. Milena foi muito bem. Apesar de às vezes ficar insegura, ela participava muito. Kátia também. Ela era mais calada,*

mas foi bem na disciplina. Já Antonio participava muito em todas as aulas que veio. Ele não foi bem na prova, eu esperava mais dele nas avaliações, fiquei um pouco frustrado.

A frustração relatada pelo Professor diz respeito ao fato de que Antonio, na primeira avaliação, não atingiu a nota mínima. Para o Professor, isso não atendeu a sua expectativa, já que o Antonio, assim como Milena e Kátia, tinha uma boa participação na opinião do Professor.

Gostaríamos de frisar que a participação sugere mais que a presença em sala de aula. No caso de IDIP, mais especificamente no funcionamento do SDs, Milena teve sua participação considerada excelente pelo Professor, pois ela estava em sala, falava, acompanhava o que o Professor estava explicando. O mesmo ocorria com Antonio como vimos, principalmente no 3º encontro. A regra contratual aqui parece ser o aluno que participa, que se engaja, que aprende terá uma boa nota, o que não foi o caso de Antonio, mesmo assim, tirar uma nota ruim não significa para o Professor que ele não aprendeu:

Pesquisador – *então a avaliação foi um restrição?*

Professor – *sim, por ser uma turma pequena, eu consegui perceber isso. Ele foi participativo, mas não se saiu bem nas avaliações.*

Para o Professor, a prova, como mecanismo de avaliação, é questionável já que, para ele, Antonio era participativo. O engajamento dos estudantes, mais do que a nota, parece ser um comportamento que indica para o Professor que os alunos estão aprendendo. Apesar disso, a nota continua necessária ao final do semestre.

Diante dessa percepção, perguntamos ao Professor sobre o desempenho dos estudantes nas entrevistas. Para ele, esse seria um efeito do tempo que eles não trabalharam mais com a noção:

Professor – *o tempo parado influenciou bastante. Eles ainda estão confusos.*

O Professor também reconhece que existe confusão na relação dos alunos com a probabilidade e que o tipo de aprendizagem que se processa em IDIP não resiste ao tempo. Mas acredita que houve um bom desempenho pela participação dos sujeitos.

Pensamos que, de fato, houve engajamento por parte de Antonio, Kátia e Milena. Se para Lave (1996) esse é uma condição essencial para a aprendizagem, é natural questionar por

que os futuros professores tem ainda dificuldades. Por que não lembravam de algumas noções? Por que a sua relação $R(X, O_p)$ é fragmentada?

É em Lave (1988), Lave e Wenger (1991) e Lave (1996) que vamos encontrar respostas: o contexto de I_{DIP} e suas organizações matemática e didáticas limitadas, o contrato institucional presente, a ecologia em torno do objeto probabilidade conduzem à construção de um cenário onde a relação com a probabilidade é construída de forma fragmentada e fragilizada.

A formação que se propõe nesse contexto aponta para uma direção diferente do que se espera das demandas formativas para os futuros professores. A dissonância entre o discurso do contrato institucional e o que se espera desses sujeitos cria um cenário ilusório em que a aprendizagem de probabilidade é resolver tarefas elementares, é cumprir com as expectativas do professor. Quando isso não ocorre, em relação à avaliação, parece ser um problema externo ao funcionamento dos SDs, mas não um problema do próprio SDs.

Finalizamos a entrevista com o Professor e demos por encerrada nossa participação no processo de construção dos dados de nossa pesquisa. Nas três aulas seguintes, o Professor fez uma introdução aos conteúdos pendentes e pediu aos alunos que respondessem a uma lista de exercícios que seria aproveitada como nota da unidade.

Nessa lista, todas as questões envolviam a probabilidade através de tarefas semelhantes às que foram apresentadas nos encontros que observamos. Optamos por não analisar esse material, embora tenhamos tido acesso a ele.

Julgamos que as respostas apresentadas nessa lista (ver anexos) pelos estudantes correspondem muito mais ao esforço de buscar respostas semelhantes em tarefas similares e responder às questões propostas do que aprimorar uma relação com a probabilidade. A evidência disso está no fato de que as respostas dos questionários são idênticas para os três estudantes.

6.3 SÍNTESE DO ESTUDO DA PROBABILIDADE EM I_{DIP} .

A decisão de observar o funcionamento do sistema didático em torno do ensino de probabilidade na licenciatura em Matemática repousou sobre dois aspectos. O primeiro era tentar compreender os movimentos e as participações individuais dos sujeitos quando o sistema está em funcionamento. Pensamos que essa experiência poderia nos ajudar a construir um *corpus* de dados que pudesse ilustrar nossa compreensão teórica da TAD e da dimensão cognitiva nela, com enfoque para o lugar do sujeito psicológico.

O segundo aspecto está relacionado à provocação de Sarrazy (2006) sobre o fato de a TAD ter ferramentas teóricas que explicam muito bem a cena ecológica em torno de um saber, mas ainda é ausente em relação a como se dá o processo de mudança na relação dos sujeitos.

Assim, esta seção assume um papel capital para nós, a partir do momento que materializa, a partir de nossas observações, o que ocorre durante o funcionamento do sistema didático, cujo contrato institucional delineamos no capítulo 5. De fato, os capítulos cinco e seis de nossa tese mantêm entre si, para nós, uma relação simbiótica, pois eles são a essência do contexto prático que orienta nossa fala no capítulo final.

Dito isto, elencamos, no quadro a seguir, uma síntese dos principais fenômenos que observamos em IDIP:

Quadro 45 – 1ª Parte da Síntese fenômenos observados em IDIP.

Fenômenos	Evidências
O contrato institucional previsto atua ora como condição, ora como restrição no funcionamento do SDs em IDIP.	Se por um lado a existência de uma disciplina introdutória de probabilidade é uma condição necessária para o funcionamento do SDs, a organização dos conteúdos na ementa, as praxeologias pontuais e incompletas nas obras de referência são reproduzidas em IDIP, o que restringe e limita aprendizagem em torno da probabilidade.
As praxeologias pessoais em IDIP emergem de forma precária, reproduzindo erros e lacunas da instituição.	O contrato didático normativo limita a participação dos sujeitos para agir sobre o saber probabilidade. Os estudantes são condicionados a repetir as praxeologias que o professor lhes apresenta.
A participação no momento da aula em IDIP não é interpretada como ação dos sujeitos sobre a probabilidade, o meio propiciada limita essa ação	Participar é aceitar o contrato didático estabelecido e cumprir com os papéis esperados ou negociados. Para o Professor, a participação de Milena, Kátia e Antonio é entendida como atuação durante as aulas.
Os sujeitos assumem a responsabilidade de complementar sua relação com Op.	Para suprir as lacunas do momento da aula, os futuros professores procuram outros meios, como internet, livros, consulta aos colegas.
A participação e o engajamento dos sujeitos em IDIP permitem a mudança de posição no SDs.	Ao aceitar o contrato, a participação e o engajamento dos estudantes permitiram-lhe mudar de posição sob a ótica do Professor. Para este, os alunos que se engajam receberam o status de sujeitos conformes.

Quadro 46 – 2ª Parte da Síntese fenômenos observados em IDIP.

Fenômenos	Evidências
As dissonâncias no discurso institucional criam um cenário de conformidade ilusória.	Durante o funcionamento do SDs, os futuros professores, ao cumprirem seu papel, acreditam estar aprendendo, e o discurso do professor reforça isso. Aquilo que é explicado, cujas tarefas são exploradas, é para os estudantes de fato aprendido.
Alterações na relação R(X,O) dos sujeitos estiveram condicionadas ao cenário institucional.	A relação estabelecida pelos estudantes reproduz o contexto de IDIP. A mudança provocada na relação com a probabilidade é confusa. A relação dos sujeitos é fragmento.
Praxeologias pontuais, incompletas não resistem ao efeito do tempo.	Após 03 meses do estudo do IDIP, os futuros professores não conseguiam resolver plenamente as tarefas propostas.
A participação e o engajamento contribuem para a construção de um equipamento praxeológico.	Vimos que, apesar das dificuldades, Milena apresentava elementos praxeológicos mais consistentes que Kátia e Antonio.
As trajetórias individuais dos sujeitos são importantes no funcionamento de IDIP.	Apesar de condicionados ao mesmo contexto, Milena, Kátia e Antonio protagonizaram trajetórias distantes, indicando que, apesar de aprenderem coletivamente, cada um constrói sua própria relação com a probabilidade.
A dimensão psicológica no estudo da probabilidade é percebida em momentos de ação frente à probabilidade.	Decidir estudar por conta própria, acreditar na técnica, desconfiar da técnica, adquirir auto estima, confrontar as praxeologias diante de sua intuição, tudo isso é alguns dos indícios de que Milena, Kátia e Antonio são, além de sujeitos didáticos, sujeitos epistêmicos e também psicológicos.
Os efeitos de contrato surgem com mais ênfase quando existem rupturas.	Os silêncios de Milena como forma ativa de romper com o contrato de Milena potencializaram o surgimento dos efeitos de contrato.
Os obstáculos didáticos interferem na construção de R(X,O).	As dificuldades de Antonio, Kátia e Milena surgem a partir do momento em que sua relação com a probabilidade dentro de IDIP começa a ser construída.
O contrato normativo e a abordagem tecnicista contribuem para uma visão limitada do ensino de probabilidade.	Para os futuros professores, aprender a resolver tarefas envolvendo a probabilidade é suficiente para dizer que IDIP contribui para sua tarefa futura de ensinar probabilidade.
A rigidez em torno da definição clássica de probabilidade é um obstáculo didático.	Durante o funcionamento do SDs, a abordagem clássica foi tomada como meio principal para a abordagem dos problemas contribuindo para o surgimento de comportamentos como a ilusão da equiprobabilidade.
A TAD necessita de outras abordagens observar a sala de aula.	A observação da sala de aula, requer o diálogo com outras noções e abordagens teóricas, como por exemplo, o contrato didático.

Fonte: próprio autor (2018).

A partir dos quadros 45 e 46, temos condições de retomar a problematização de nosso estudo, no sentido de revisitar as hipóteses levantadas e as questões secundárias propostas.

A nossa problematização nos levou a formular quatro hipóteses das quais três estavam relacionadas à parte empírica de nossa pesquisa. A primeira delas é a de que o sistema didático em torno da probabilidade se organiza em uma perspectiva tradicional privilegiando a abordagem clássica da probabilidade. De fato, como vimos durante toda a descrição dos encontros, apesar de menções a outras abordagens da probabilidade, o sistema didático se organiza em torno da abordagem clássica. Em parte, vimos que o sistema não só assumia uma perspectiva tradicional, como também carrega os entraves que pesquisas, como a de Silva (2002), apontam sobre as limitações na compreensão do conceito.

Os futuros professores cuja relação pessoal com o saber probabilidade, inicialmente, sequer lhes permitia agir sobre problemas mais elementares de probabilidades foram apresentados à probabilidade em sentido estritamente clássico. O privilégio de uma única abordagem, como destaca Coutinho (1994; 2001), limita a compreensão de situação em que a probabilidade é entendida como frequência.

Quando nos referimos na hipótese à organização tradicional, estávamos nos referindo à perspectiva centrada no discurso do professor, no qual a organização didática é tecnicista, isto é, com ênfase nas tarefas e técnicas. De fato, esse foi o padrão observado em IDIP.

A segunda hipótese remetia ao contrato didático e às possibilidades de ele provocar mudanças em $R(X, O_p)$. Os contratos didáticos que se formaram em IDIP, como vimos, tinham características de um contrato normativo. O discurso do professor assumiu o papel principal enquanto o protagonismo dos estudantes foi menor. De fato, o professor, como representante de IDIP, toma para si a responsabilidade de comunicar o saber. A ênfase dada à abordagem clássica e as tarefas em torno dela acabam por provocar certas mudanças. Os estudantes, durante o funcionamento do sistema didático, especialmente Milena, que teve uma participação maior, apresentam alguns vestígios praxeológicos, como, por exemplo, a definição clássica de probabilidade. Milena, ao menos na entrevista inicial, não apresentou nenhum esboço de técnica para resolver as questões propostas pela entrevista. E mesmo tendo demonstrado incompreensões frente às questões, ela se sentia confiante para agir sobre os problemas e tentar resolver os problemas.

Do mesmo Kátia, mesmo tendo um equipamento praxeológico mais frágil, no sentido de que não lembrava da definição clássica, trazia fragmentos que pareciam não existir antes de participar de IDIP. Essas observações nos levam a crer que houve mudanças em $R(X, O)$.

A terceira hipótese está diretamente relacionada com a segunda, pois tratava de inferir que, apesar da mudança provocada pela participação em IDIP, essa mudança não favorecia a compreensão do conceito e suas diferentes abordagens. Pensamos que a hipótese não só é comprovada, como o quadro de mudanças, diante do esboço do MER que apresentamos, é distante do que se espera em termos de demandas formativas para o ensino de probabilidade.

Feitas essas considerações em relação H_0 , H_1 , H_2 , podemos centrar-nos nas secundárias que têm relação direta com essas hipóteses. A primeira questão trata da discussão em torno do trabalho realizado pelos futuros professores com as noções de acaso e incerteza.

Ao observar o funcionamento de IDIP, percebemos que o contrato didático estabelecido, a organização praxeológica em torno da abordagem clássica e a ausência de problematização do acaso levam a um processo de naturalização desses questões. De fato, o acaso não é tomado como uma noção problemática. Tanto que os futuros professores respondem às questões da entrevista inicial e final e praticamente não houve mudanças em relação a essa noção. Isso talvez indique que a resposta intuitiva sobre o acaso não mudou. Se pensarmos no acaso como um objeto particular, podemos inferir que $R(X, O_a)$ não mudou pela ausência problematização.

Do mesmo modo, pensamos para a questão da incerteza. O que verificamos, durante a observação, é que as tarefas são propostas e resolvidos em uma perspectiva determinista. Aqui operam os vestígios de contratos didáticos anteriores. Por exemplo, o fato de Milena procurar a resposta numérica para o problema sem se importar com o que aquele resultado quer dizer, pode se configurar como um efeitos desses contratos anteriores que ela foi submetida. Brousseau desde 1980 já sinalizava o culturalismo didático como um gerador de contratos didáticos. Os hábitos dos professores e estudantes frente ao saber possibilitam a criação de modelos de contrato que passam a fazer parte de nossa epistemologia. (ALMEIDA, 2016).

O acaso e a incerteza são tomados como noções não problemáticas em IDIP, o que não favorece um debate e conseqüentemente uma reflexão sobre a natureza de situações modeladas pela probabilidade.

Essa consideração, em parte, está relacionada com a pergunta Q_{S2} que versava sobre as praxeologias desenvolvidas em IDIP. Não discutir o acaso ou incerteza como pontos-chave do trabalho com probabilidade está relacionado também com a organização praxeológica de IDIP, que reproduz em grande parte as praxeologias das obras de referências. Isto é, praxeologias matemáticas pontuais, incompletas, cuja rigidez em torno da definição clássica, no sentido atribuído por Lucas *et al* (2014), acabam por limitar não só a compreensão de noções elementares da probabilidade, como também por favorecer a formação de um universo praxeológico incompleto.

Se levarmos em consideração o esboço do MER que apresentamos, veremos que o universo praxeológico apresentado não consegue trazer para o centro da discussão questões consideradas cruciais ao exercício docente no que tange à probabilidade. Em parte, não atribuímos esse cenário ao trabalho do Professor e suas decisões didáticas, mas à própria organização de IDIP que, desde sua ementa, não é pensada para ser um disciplina dessa natureza. O contrato institucional aponta para um direção divergente das demandas prevista para o ensino de probabilidade.

Nós temos uma noosfera que aponta para mudanças e necessidade de processos transpositivos para o ensino de probabilidade na educação básica, porém existe uma lacuna quanto à formação de professores de Matemática. Isso reflete na organização da universidade e, sobretudo, na construção e funcionamento de IDIP. De fato, IDIP é um componente curricular que não tem na sua gênese a intenção de discutir tais demandas, embora do ponto de vista da sociedade, cursar tal disciplina seja suficiente para os futuros professores. Essa crença é também partilhada, em parte, pelos estudantes e professor, ou seja, a dissonância institucional é refletida no processo de formação que ocorre em IDIP.

Essa crença de que ao professor basta “saber” o conteúdo orienta a construção de currículos na formação de professores. Vemos isso no recorte histórico dos currículos das licenciaturas que favorecem o modelo 3+1, onde grande parte dos componentes curriculares privilegiam os conteúdos específicos da disciplina (GATTI, 2010; PAIVA, 2008).

As questões Q_{S4} e Q_{S5} tratavam das mudanças favorecidas por esse contexto institucional e pelo papel do contrato didático. Reafirmamos nossa posição em relação ao contrato didático estabelecido, quando tratamos da nossa segunda hipótese. O contrato vivenciado favorece mudanças, porém a relação estabelecida com a probabilidade é fragmentada, seja com a probabilidade como saber, seja como um saber a ser ensinado. Isso reflete, em grande parte, as pesquisas nacionais e internacionais que tratam sobre a situação do ensino de probabilidade. Veremos que as dificuldades encontradas em IDIP refletem entraves presentes em outros contextos institucionais, ligados à questões epistemológicas, didáticas e também psicológicas. O papel da intuição, a natureza da probabilidade e os obstáculos didáticos em torno desse saber são temas recorrente nas discussões em torno da aprendizagem da probabilidade. No entanto, temos que corroborar a crítica a uma formação que leve em consideração somente a abordagem laplaciana, já que essa abordagem tem sido superada em muitos currículos ao redor do mundo desde 1980 (BATANERO; MANFRED, 2016).

O contrato didático normativo favoreceu o surgimento de efeitos de contrato didático e de obstáculos didáticos próprios à definição clássica de probabilidade, o que interferem na

construção de uma relação pessoal com a probabilidade. O reflexo disso são as fragilidades dos futuros professores, como vimos na entrevista final.

Feita essa síntese sobre o funcionamento de IDIP, podemos agora inferir sobre o papel da TAD como ferramenta para pensarmos a dimensão cognitiva na TAD, no sentido de caracterizar nela o lugar do sujeito psicológico, como exporemos no capítulo seguinte.

7 A DIMENSÃO COGNITIVA NA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO: O LUGAR DO SUJEITO PSICOLÓGICO

Incerteza

Buscar padrões
 Encontrar razões
 Se perder em ilusões
 Eis a nossa natureza
 O medo da incerteza
 De não ter explicação
 É traço indelével
 Tal qual nossa intuição
 É parte de nós
 Como o complementar
 Também o vazio
 Se formos conjunto
 Prefiro ser espaço
 De dualidades
 De desejo
 De liberdade
 De experimentar
 A ternura de amar
 De permitir-se
 Coincidências
 De ser sempre
 Poema inacabado
 Ante as incertezas
 Da vida

Durante a produção de nosso trabalho de tese, vivemos momentos singulares. Esses momentos estiveram ligados ora ao contexto do trabalho de pesquisa científica, ora à dimensão da nossa relação pessoal com o objeto principal de estudo, a TAD, mas também ao objeto secundário – “o ensino de probabilidade”.

A natureza simbiótica, intrínseca aos capítulos cinco e seis que intitulamos desde nossa introdução de “caminhar empírico” de nossa jornada, reflete uma parte desses movimentos de nossa relação pessoal com a TAD e com o ensino de probabilidade. A imersão no uso da TAD e no cotidiano da sala de aula de probabilidade mudou nossa relação com esses objetos. Isso indica que o qualitativo de ilustração de nosso estudo dado a esses capítulos é superado no sentido de que ele foi, sobretudo, formativo. A participação e o engajamento nesse processo de sujeição foram fundamentais para a construção de nosso discurso teórico-crítico.

Debruçamo-nos sobre o cenário da licenciatura em Matemática com a expectativa de perceber o papel da TAD e suas ferramentas para discutirmos a dimensão cognitiva durante o funcionamento do sistema didático em torno do saber probabilidade. Ao longo de nossa observação/sujeição, essa expectativa se transmutou em esperança de que, de fato ali, pudséssemos reunir elementos para a caracterização do lugar do sujeito psicológico.

Por essa razão, abrimos esse capítulo, cujo título alude diretamente a nossa reflexão, com tema das incertezas em sua epígrafe. Ao elegermos nossa jornada de pesquisa como possibilidade de contribuição para pensarmos a TAD e suas ferramentas, as incertezas soam para nós como certeza da falibilidade de nossa pretensão.

No sentido de otimizar nossa discussão, assumiremos as noções teóricas da Aprendizagem Situada (AS) e da TAD como suficientemente esclarecidas nos capítulos dois e três respectivamente. Do mesmo modo, Antonio, Kátia, Milena, Pedro e o Professor são para nós conhecidos, especialmente, no tocante às suas trajetórias individuais e coletivas no funcionamento do sistema didático observado, portanto, adotaremos uma escrita mais reflexiva acerca do problema estudado. Essa escrita, embora reflexiva, está pautada teoricamente em tudo o que discutimos até aqui.

As seções seguintes remetem a nossa hipótese principal (H₃) e tentam responder como a TAD, apoiada na noção do contrato didático, nos ajuda a reconhecer a mudança relacional *sujeito-objeto* que se configura como dimensão cognitiva da aprendizagem situada no contexto institucional. A caracterização do lugar do sujeito psicológico, para nós, parte desse reconhecimento.

7.1 COGNIÇÃO E CONTEXTO: SITUANDO NOSSAS BASES

A discussão em torno da presença do cognitivo na Didática da Matemática (DM) remete a sua própria trajetória. Apesar da necessidade de emancipação, enquanto disciplina científica, o que levou a rupturas frente a paradigmas estabelecidos dentro da Pedagogia e Psicologia, é exatamente a necessidade de diálogo com a Psicologia Cognitiva, dentre outras áreas, que ajuda a caracterizar o campo da Didática da Matemática (BRUN, 1996).

A relação entre o cognitivo e a Didática da Matemática é uma via de mão-dupla na qual os processos de transposição de saberes ocorrem com certa frequência:

Podemos dizer, em resumo, que, se a experiência psico-cognitivista procura retomar o conhecimento para além dos saberes postos em prática, é, pelo contrário, para a reprodução dos saberes para além dos conhecimentos que tende a experiência didática. Sobre o fio das transposições, que vai do epistemológico ao cognitivo que se prolonga na direção do neuro-biológico, a transposição para o didático inverte a orientação. (CONNE, 1996, p. 246)

O viés proposto por Conne (1996), em particular nos é caro, pois coloca a dialética entre saber e conhecimento no centro da reflexão que abre caminhos para discussão entre a Psicologia Cognitiva e a Didática da Matemática. Ao fazer uma leitura dessa dialética como processos de

transposição de saberes, Conne (1996) nos fornece argumentos para pensarmos que o cognitivo está presente desde os primeiros desenvolvimentos das teorias ligadas à DM. Os desdobramentos desse reconhecimento são comungados por diversos pesquisadores que desenvolvem investigação na área e advogam pelo tratamento do cognitivo na didática (LEMOYNE; CONNE, 1999; MAURY, 2001).

Apesar de usar o termo “transposição”, Conne (1996) nos alerta que tal termo não deve ser entendido como “transposição” no sentido estrito de Chevallard e da TAD. Isso coloca duas questões. A primeira é a de que, se há a pertinência e a necessidade de debater o cognitivo na DM, em quais noções e teorias isso é mais claro? A segunda é a de que dentro da TAD suas noções comportam essa abertura?

Para exemplificarmos o argumento que defenderemos, é preciso dizer que essa abertura parece ser consenso em algumas teorias da DM. A própria noção de situação que é um dos pilares da Teoria das Situações Didáticas (TSD) tem raízes na epistemologia genética. Ideias como conflito cognitivo, a própria necessidade de interação com o *milieu*, dão pistas de que em toda construção da TSD, traz elementos ligados aos trabalhos de Jean Piaget (BRITO MENEZES, 2006).

A existência de abordagens próprias ligadas à discussão sobre a dimensão cognitiva como teoria dos campos conceituais e os registros de representação semiótica, por exemplo, impulsionam esse argumento da possibilidade de tratar o cognitivo a partir da DM. De fato, “o estudo do funcionamento cognitivo dos estudantes de matemática é inevitável em pesquisas em Didática da Matemática¹³⁴, (SIERPINSKA, 1999, p. 174).

A contundência do argumento de Sierpinska (1999) coloca para nós outro ponto de discussão a respeito da plausibilidade de nosso trabalho. Apesar do reconhecimento da relação entre o cognitivo e a pesquisas em Didática da Matemática, a clareza dessa relação não é dada como certa para TAD. Como já vimos, o paradigma epistemológico inaugurado pela TAD é colocado como uma teoria anti-psicológica (GODINO; D’AMORE, 2007).

Apesar do respeito aos argumentadores em favor dessa tese, foi a procura de sua contestação que nos permitiu o contato aprofundado com os trabalhos de Mauss (1935:2003) e Douglas (1986:2007). Nesses trabalhos, pudemos perceber que as noções de organização praxeológica e Instituição, centrais para a TAD, comportavam uma dimensão psicológica.

¹³⁴ L'étude du fonctionnement cognitif des étudiants en mathématiques est incontournable dans les recherches en didactique des mathématiques.

Para Mauss (2003), na execução de uma técnica que foi construída e aceita coletivamente em dada cultura, as pessoas manifestam elementos sociais, biológicos e psicológicos. Para ele, “pessoa” é um homem total, isto é, um ser biológico, psicológico e social.

Na sua visão da antropologia social, Douglas (2007) defendeu o papel central das instituições como agentes de nossa cognição. Levando esse entendimento para o espaço escolar, podemos dizer que as instituições de ensino influenciam na forma como os seus sujeitos aprendem, como pensam e como se comportam dentro e fora da escola, e o que nos levariam a uma instância psicológica.

Ao se ocupar da atividade de ensino, a DM procura compreender os fenômenos didáticos que emergem das relações entre professor, alunos e o saber, no seio de uma instituição. Esse ambiente institucional e as situações que nele são estabelecidas agem diretamente sobre a cognição dos seus sujeitos. Esse pode ser um ponto de convergência entre o pensamento de Douglas (2007) e os fundamentos da pesquisa em Didática da Matemática.

Para Douglas (2007), além das contribuições de Emile Durkheim, para quem não se poderia negar a dimensão social do pensamento individual, lhe servem de inspiração o pensamento de Ludwick Fleck e seus coletivos de pensamento. Na percepção de Douglas (2007), Fleck, na década 1930, não só amplia o trabalho de Durkheim, como o ultrapassa em termos de fertilidade, fazendo de sua obra um trabalho importante para a contemporaneidade (DOUGLAS, 2007).

Partindo desses apontamentos, advindos da Antropologia Social, vislumbramos nas noções da TAD não só elementos para discutir a dimensão cognitiva, como a possibilidade de caracterizar o lugar de um sujeito psicológico.

A nossa argumentação é muito próxima da utilizada por Mercier (1999), para quem a teoria das situações didáticas dá a possibilidade de abordar a dimensão cognitiva do ponto de vista didático:

Quando afirmo que a teoria das situações permitia prever o conhecimento produzido, ‘se os alunos da classe aprendem efetivamente’, reforcei, eu pontuei assim a possível intervenção das teorias psicológicas da cognição nos campos da didática. Mas essa pergunta é por grande parte, do ponto de vista da didática da matemática, relativo à cognição dos alunos de uma classe considerados como coletivo do pensamento (no sentido de Fleck). Eu vou então tentar construir o problema didático correspondente: os alunos de uma classe nunca são uma coleção de sujeitos tendo acesso cada um por si para alguns conhecimentos pessoais. Esse é um ponto essencial da teoria das situações didáticas, que é a chave do problema didático da cognição¹³⁵ (MERCIER, 1999, p. 136). Tradução nossa.

Mercier (1999) se apoia também em Marcel Mauss e Mary Douglas para definir a sala de aula como uma micro-sociedade científica. Nesse contexto, a teoria das situações didáticas seria para ele uma teoria social para a formação intencional dos conhecimentos e saberes científicos, ou seja, um coletivo de pensamento em torno do ensino. O cognitivo nesse caso remete ao trabalho realizado pelo professor e pelos alunos em torno de um saber (MERCIER, 1999).

É nesse ponto que começamos, naturalmente, a caminhar para construirmos nosso próprio argumento em favor da tese de que as ferramentas da TAD constituem um importante arcabouço para discutir a cognição e que é possível delinear espaços para pensar o lugar onde os sujeitos se manifestam também na dimensão psicológica.

Para tanto, é preciso posicionarmos nosso entendimento sobre a cognição e como o psicológico se manifesta para nós. Os autores que citamos como referência no discurso em favor da necessidade do debate acerca do cognitivo na Didática da Matemática o fazem, em sua maioria, na perspectiva da Psicologia Cognitiva. Nós pensamos a questão de forma um tanto diferente.

Pensamos que outros aportes sobre a cognição e a sua dimensão psicológica podem também contribuir para esse debate. Foi nesse sentido que buscamos inspiração nos textos de Jean Lave. A premissa básica de sua obra é a de que a cognição e as práticas sociais estão imbricadas. Isso implica que a nossa cognição é sempre um fenômeno situado em um contexto histórico e social onde essa prática ocorre (LAVE, 1988; 1996; 2011; 2015).

¹³⁵ Lorsque j'ai affirmé que la théorie des situations permettait de prédire la connaissance produite, «si les élèves de la classe apprennent effectivement», ai-je précisé, j'ai pointé ainsi l'intervention possible des théories psychologiques de la cognition dans le champ du didactique. Mais cette question est pour une grande part, du point de vue de la didactique des mathématiques, relative à la cognition des élèves d'une classe considérés comme collectif de pensée (au sens de Fleck). Je vais donc tenter de construire le problème didactique correspondant : les élèves d'une classe ne sont jamais une collection de sujets accédant chacun pour soi à des connaissances personnelles. C'est là un point essentiel de la théorie des situations didactiques, qui est la clé du problème didactique de la cognition.

A teoria da Aprendizagem Situada (AS) elege a participação e o engajamento individual dos sujeitos em comunidades de práticas como unidades para a compreensão da cognição. Essa participação é traduzida em participações periféricas e legítimas dentro das comunidades. O aprendiz que entra em uma comunidade participa e, ao se engajar nas atividades daquela comunidade, assume posições diferentes, vive tensões, cria expectativas, negocia, constrói crenças, e tudo isso faz parte do fenômeno da cognição (LAVE; WENGER, 1991; WENGER, 1988; LAVE, 2011).

O modo de conceber a cognição na AS assume também que, nas comunidades de prática, a cognição é um ato partilhado coletivamente. As atividades e as ações para seu cumprimento são a manifestação desse esforço coletivo que constitui a própria razão de ser das comunidades de prática.

Estamos aqui claramente nos aproximando de um paradigma histórico-cultural quando nos referimos a atividades ou sistemas de atividades. De fato, a Teoria da Atividade tem um papel significativo na AS. Lave e seus colaboradores, ao elegerem a prática e o engajamento como unidades centrais de análise, colocam as atividades realizadas no cotidiano das comunidades de práticas em um patamar privilegiado.

A Teoria da Atividade, enraizada nos trabalhos de Vygotsky, Leontiev e mais recentemente Engeström, dialoga também com as bases da Aprendizagem Situada. Como vimos no argumento Lerman (2002) conceitos de base no trabalho de Vygotsky, como a noção de zona de desenvolvimento proximal, são importantes como chave para compreensão da cognição e do desenvolvimento humano nos contextos situados em que a AS é aplicada.

O mesmo ocorre para Teoria da Atividade Histórico-Cultural, que avança na compreensão do papel do desenvolvimento individual do sujeito nas práticas sociais situadas (STETSENKO; ARIEVITCH, 2010).

Para Engeström (2016), na Teoria da Atividade Histórico-Cultural, os estudos apresentam modelos próprios de sistemas de atividades que podem relevar o contexto dos processos educacionais que estão sendo investigados. O *contexto* para ele é “representado como uma formação sistêmica dentro da qual os componentes específicos e suas relações podem ser identificados e examinados em detalhes¹³⁶” (ENGESTRÖM, 2016, p. 7).

Além do contexto e seu detalhamento, como sugere Engeström (2016), outro argumento nos impulsiona a uma aproximação de um paradigma histórico-cultural ao tratarmos a cognição

¹³⁶ Context is represented as a systemic formation within which specific components and their relations can be identified and examined in detail.

sob o ponto de vista da AS na TAD. Esse argumento diz respeito ao interesse, nesse paradigma, pelas relações entre a pessoa, a instituição e a sociedade. Em uma perspectiva histórico-cultural esses entes interagem e essa interação revela elementos importantes do desenvolvimento humano:

devemos examinar não apenas um indivíduo, mas também as relações sociais e as condições materiais que as sociedades e instituições criam, as quais, por sua vez, proporcionam (ou não) oportunidades para o desenvolvimento de uma pessoa ou para o desenvolvimento do sistema¹³⁷ (FLEER, 2016, p. 8).

Os apontamentos da autora reforçaram nossa percepção de que, ao assumirmos a cognição como fenômeno situado no contexto social, encontramos na TAD ferramentas que podem ajudar no detalhamento desse contexto, como sugere Engeström (2016), de modo que essa descrição analítica do contexto no qual, coletivamente, os sujeitos no seio de uma instituição partilham objetivos e ações comuns em torno de uma atividade pode favorecer esclarecimentos das relações que ali são tecidas, do ponto de vista epistemológico e também cognitivo.

Em outras palavras, ao nos debruçarmos sobre uma instituição para compreendermos a ecologia que permite a vida de um saber matemático, as relações institucionais e pessoais em torno desse saber e, por fim, o conjunto de condições e restrições que permite sua difusão, estaremos revelando aspectos que dizem respeito à cognição como um produto daquela prática institucional na sua dimensão social, mas também individual, quando voltamos nosso olhar para a participação e engajamento dos sujeitos nessas instituições.

Ao assumirmos a cognição como fenômeno situado e nos valeremos de argumentos do paradigma histórico-cultural para defendermos a compreensão da dimensão cognitiva na TAD, deparamo-nos com uma questão fundamental que precisa ser esclarecida. A AS em nosso estudo cumpriu para nós a função de parâmetro para pensarmos a cognição, ou seja, pensamos que AS, assim como outros referências, podem dialogar nesse sentido com a TAD.

¹³⁷ we must examine not just an individual, but also the social relations and the material conditions that societies and institutions create, which in turn afford (or not) opportunities for a person's development or the development of the system.

7.2 DIMENSÃO COGNITIVA NA TAD: RESSIGNIFICANDO ALGUMAS NOÇÕES.

A tentativa de diálogo aproximativo entre a TAD e AS nos levou a propor um quadro na síntese de nossa fundamentação teórica onde apontamos pontos de convergência e divergência entre as noções das duas teorias. Retomar esse exercício, de posse da experiência empírica na observação que fizemos, é imperativo para que possamos ter condições de aprofundar a discussão trazendo algumas contribuições que chamaremos despretensiosamente de ressignificação de algumas noções fundamentais na TAD.

No quadro em questão, elencamos, como noções centrais desse diálogo, a prática e sua descrição no cotidiano em que ocorre, a cognição e o ato de aprender, o didático, a noção de instituição e pessoa, sujeitos em situações de ensino, dialética mundo-escola, a sala de aula e, por fim, o contrato didático.

A Aprendizagem Situada assume que a prática se configura como um tecido complexo, cuja tessitura advém das relações entre os sujeitos, a sociedade e, de modo mais geral, da interação no mundo. É essa prática no/com o mundo que permite aos sujeitos aprenderem. A prática assume a característica de noção central, pois a cognição emerge dessas práticas. Conhecer essas práticas, compreender os espaços em que ocorrem essas tessituras é assumir que a cognição é uma prática social, situada no contexto em que ocorre.

A TAD, ao eleger o estudo do homem perante as atividades matemáticas, coloca para si e para aqueles que a ela se assujeitam, como paradigma metodológico de investigação, o problema de que seu objeto de investigação é muito mais amplo do que somente o espaço escolar formal (BOSCH; CHEVALLARD, 1999).

Ao situar a TAD no seio de uma antropologia cognitiva, Chevallard (1996) estabelece as bases que irão reger essa compreensão das atividades matemáticas como objeto de interesse da TAD. Essas atividades são práticas sociais situadas nas instituições. O viés epistemológico assume que essa antropologia cognitiva parte em direção a uma antropologia dos saberes, em particular os saberes produzidos no âmbito da matemática.

O saber matemático é resultante das ações humanas e institucionais. Por essa razão, não faz sentido falar da existência de um saber sem que esteja associado a uma instituição em dado momento histórico de uma realidade. Do mesmo modo, ao indivíduo só seria possível conhecer essas obras, produtos da prática social matemática, pela entrada ou assujeitamento nas instituições onde esses objetos vivem. (CHEVALLARD, 1989).

O “cognitivo” estaria ligado aos sistemas de relações que se estabelecem entre instituições, seus sujeitos e os objetos culturalmente denominados como saber. O cognitivo não se restringe somente à dimensão individual, mas também é fruto das práticas sociais ligadas à atividade matemática, comportando todos os processos que envolvem e decorrem dessa prática.

Em uma leitura particular, para conhecermos um objeto específico, por exemplo, a probabilidade, é preciso participarmos de uma prática social em uma dada instituição onde esse objeto viva, como noção a ser ensinada e aprendida. A natureza dessa instituição, revelada pelas práticas que nela são construídas, indicaria como se formam as situações, os sistemas didáticos que permitiriam dado sujeito daquela instituição aprender, isto é, construir uma relação com a probabilidade. Esperamos que esteja claro que esta instituição não é necessariamente uma instituição de ensino.

A língua materna, enquanto dispositivo social, portanto, uma instituição para TAD, pode ser uma porta de acesso para a construção de uma primeira relação com este objeto. Na língua materna a probabilidade é dada como um termo. Em outras instituições particulares esse objeto pode assumir uma conotação bem diferente, como, por exemplo, a escola, o trabalho, ou no “jogo de dominó” do final da tarde na praça central do bairro onde moramos, esta última, também, um exemplo possível de instituição.

Um experimento simples pode corroborar nossa hipótese: ao perguntarmos a uma criança em idade escolar, ainda no Ensino Fundamental, sobre o que é probabilidade, a resposta “é algo que pode acontecer, mas não tenho certeza” é perfeitamente possível. Podemos então considerar vazia a relação pessoal dessa criança com o objeto probabilidade?

Que tipo de relações são esperadas para crianças em idade escolar no Ensino Fundamental com esse objeto? Na instituição escolar na qual essa criança é sujeito, qual a ecologia que permite a vida da probabilidade? Que condições e restrições são ofertadas para o ensino de probabilidade nessa instituição? Que praxeologias são difundidas nessa escola? Que tipos de tarefas em torno desse saber as crianças naquela escola são confrontadas?

Essas questões podem ser colocadas sob a ótica da TAD. Mas também é plausível pensar que a escola não tenha criado situações que permitissem à criança a construção dessa possível relação. Isso indica que ela, enquanto indivíduo, carrega, mesmo ainda criança, um histórico de sujeições em outros espaços institucionais que fazem dela uma pessoa, na linguagem da TAD, ou um ser histórico e social na AS, e talvez, seja nesse histórico que resida a origem de sua resposta.

Desse breve relato, o que queremos pontuar é que a atividade matemática, como prática social, indica também para nós o papel da prática como dimensão importante para a compreensão dos fenômenos que a TAD se propõe a estudar.

A prática na TAD é entendida como assujeitamento, participação nas instituições, mas também como corpo de conjuntos de condições e restrições socialmente construídos no espaço institucional. De fato, desde a década de 1980, já estava presente no discurso de Chevallard o reconhecimento de que as relações institucionais influenciam na relação pessoal dos sujeitos, de maneira que também é práxis desses sujeitos, como representantes de dada instituição, moldar, aprimorar e fazer com que as relações institucionais existam.

Douglas (2007) é enfática quando se trata do papel das instituições como agentes da cognição, mas também assegura que é o movimento, a prática e a adesão dos sujeitos a esse coletivo de pensamento institucional que constituem a razão de ser da própria instituição. Esse contrato institucional, no dizer de Chevallard (1989), corresponde a esse sistema de relações prescritas, enunciadas, sobre como a práxis dentro da instituição é regida.

Não seria forçoso, em nossa opinião, aproximar a compreensão do papel da prática na AS, como agente na cognição dos sujeitos, do papel que as práticas institucionais assumem para os sujeitos na TAD. É no assujeitamento institucional, portanto, na prática, que eles constroem suas relações, mas também reificam a própria razão de ser da instituição. Nas palavras de Lave (2015):

toda atividade (o que seguramente inclui a aprendizagem) é situada nas – feita de, é parte das – relações entre pessoas, contextos e práticas. Isso nos levou às noções de que a aprendizagem é situada em complexas comunidades de práticas (culturais e mutantes, como parte do processo histórico que constitui a vida social). As coisas são constituídas por, e constituídas como, as suas relações; e assim, produção cultural é aprendizagem que é produção cultural. (p.40).

Pensamos que esse argumento da aproximação em torno da prática e do seu papel na cognição dos sujeitos serve para ilustrar razoavelmente a possibilidade de diálogo entre AS e TAD.

Podemos agora falar na cognição como fenômeno situado nos contextos institucionais. A implicação dessa resignificação é que nos importa conhecer esses contextos, suas práticas, seus contratos institucionais, para podermos compreender como a dimensão cognitiva é influenciada por eles no âmbito das relações pessoais e institucionais em que são produzidas. O ato de conhecer, aprender sobre um determinado objeto de saber está sob a influência desse contexto institucional.

A relação pessoal a um objeto ou na linguagem da TAD, o objeto $R(X,O)$, representa a dimensão individual da cognição dos sujeitos com determinado objeto de saber. Se X , que é sujeito de I , conhece O , então, dizemos que $R(X,O) \neq \emptyset$. A aprendizagem ocorre quando $R(X,O)$ muda. À medida que ela tende para uma aproximação de $R_I(I, O)$, dizemos que $R(X,O)$ pode receber o julgamento de conforme (CHEVALLARD, 1996).

Na citação indireta que fazemos, não nos referimos a um tipo de instituição. Aqui se coloca em questão a amplitude proposta para a TAD por Chevallard. Ao descrever as noções de sua antropologia cognitiva, ou simplesmente a teoria antropológica do didático, reconhece que a noção de transposição didática, como porta de entrada para o estudo dos fenômenos didáticos, tem como premissa a natureza mutável dos saberes que, ao viverem em diferentes instituições, assumem formas e características que são próprias daquela instituição.

Tudo isso para dizer que o didático é algo presente nas relações humanas, nos contextos mais diversos, no sentido institucional. Mesmo onde há uma clara intenção de ensinar algo a alguém, o didático se manifesta ali. Isso reforça o significado da expressão que utilizamos ao longo de todo nosso texto, destacada também por Chevallard, Bosch e Gascón (2001). O didático é denso, no cognitivo, nas relação humanas e na atividade de estudo da matemática como um prática social.

Aqui reside, em nossa compreensão, o sentido mais estrito da abordagem antropológica do didático. Chevallard em toda sua obra resguarda preocupações quanto ao lugar da Didática da Matemática como disciplina científica. Isso o leva em dados momentos a definir e redefinir a DM, a partir da sua compreensão temporal e dentro dos quadros evolutivos de seu trabalho e dos seus colaboradores. Nessas definições, o didático é a pedra angular. A difusão de saberes, as condições e as restrições para essa atividade estão sempre presentes.

O que é posto como sentido estrito parece de fato anunciar a agenda proposta ao longo dos desenvolvimentos por que passou a TAD, desde suas primeiras teorizações. Ao problematizarmos a relação $R(X,O)$, como um construto que é situado ao contexto institucional, parece que em nada de novo estamos contribuindo para o debate, de fato, por esse ângulo, não estamos. No entanto, é o tratamento dado a dimensão cognitiva que cumpre um papel em nosso trabalho que parece ainda não ter sido suficientemente explorado na TAD como apontou Sarrazy (2006).

Inicialmente, nossa ambição era perceber como essa dimensão cognitiva na TAD se configurava e por que razões o epistemológico parecia suprimi-la, a ponto de ser considerada, como uma teoria que não resguardava lugar para a dimensão psicológica dos sujeitos. Agora fica mais claro o que chamamos de agenda de pesquisa na TAD.

A nós, parece que a essa dimensão cognitiva sempre esteve presente. As raízes antropológicas que consultamos, a própria teorização proposta, de certa forma, abrem espaço para esse debate. Quando Araya e Matheron (2006) destacam a abordagem relacional e, portanto, a noção de relação pessoal ao saber, como via principal de acesso ao cognitivo na TAD, somos favoráveis a esse entendimento, no entanto, a nossa investigação nos leva também a concordar com Ricco e Menotti (2006), Sarrazy (2006), que tratam da ausência de um olhar sobre o que acontece nessa relação.

Chevallard, ao destacar a dupla natureza de $R(X,O)$, com suas componentes pública e privada reforça, em parte, o sentido dessa agenda. Porém, os trabalhos recentes, como os de Croset e Chaachoua (2016), apontam as praxeologias pessoais dos alunos, por exemplo, como possibilidade de ampliar, fortalecer e clarificar o debate sobre os fenômenos didáticos.

Esses entendimentos em favor da dimensão cognitiva na TAD, da agenda de pesquisa, das lacunas bem como as possibilidades teóricas-metodológicas apontadas por Croset e Chaachoua (2016) impulsionaram nossa investigação.

A resignificação, a partir da AS, da cognição como fenômeno situado no contexto institucional, naturalmente, exige que resignifiquemos os sentidos que atribuímos a algumas das noções centrais da TAD, principalmente as que indicam o sentido relacional com os objetos de saber.

Na AS, a noção de comunidades práticas é fundamental. De fato, para Lave e Wenger (1991), é através da participação e do engajamento nas comunidades de prática que os sujeitos aprendem. No quadro de aproximações entre TAD e AS, apontamos como ponto de possível divergência a atribuição de “comunidade de prática” a certos espaços que na TAD poderiam ser chamados de instituições. Vimos no capítulo 2 dificuldades no sentido de compreender a sala de aula como uma comunidade de prática, por exemplo. Essas dificuldades poderiam limitar a possibilidade do uso da AS nos espaços educacionais. A solução é adaptar o sentido da noção, de modo a admitir, por exemplo, a existência de comunidades de prática local. Essa foi a alternativa apresentada por Frade e Tatsis (2009) para o estudo de práticas escolares.

Sobre esse ponto, nossa solução vem da própria TAD, haja vista a função da AS no nosso trabalho. Se nem toda instituição pode ser chamada de comunidade prática do ponto de vista da AS, toda comunidade prática pode ser compreendida como uma instituição no sentido da TAD.

Os estudos de Chevallard e colaboradores levaram à constituição de um espaço que Bosch e Gascón (2006) chamam de comunidades de estudo. Nessa instituição, ocorre a etapa da transposição didática em que o saber assume a condição de disponível, de aprendido. Essas

comunidades têm sido utilizadas como espaço onde o estudo da Matemática recupera seu sentido original de construir, refletir, investigar, problematizar os saberes matemáticos, conforme Chevallard, Bosch e Gascón (2001).

Essas comunidades de estudo partilham objetivos comuns na realização das atividades Matemáticas. É a participação dos sujeitos de forma comprometida que permite a existência da prática que se desenvolve naquela comunidade. Como contexto institucional, podemos dizer que nas comunidades de estudo se formam modelos de comunidades de práticas no sentido de Lave e Wenger (1991), Wenger (1998), Frade e Tatsis (2009). Assim, o cognitivo é denso nas comunidades de estudo.

Dito isto, necessariamente, precisamos dizer o que é para nós uma instituição. Em nosso caso específico, referimo-nos às instituições de ensino. A noção de instituição, definida como dispositivo social total por Chevallard (1996: 2009), se constitui para nós como um espaço onde o didático e a cognição são densos e estão imbricados. Ela é, portanto, um espaço didático e cognitivo no sentido de que as práticas sociais que ali ocorrem são reificadas na participação e no engajamento dos seus sujeitos. Os sujeitos, seres biológicos, sociais e psicológicos aprendem à medida que participam e se engajam nas atividades institucionais.

Na dimensão institucional da relação com o saber, essa prática é regida por um contrato institucional que apresenta características explícitas, mas também implícitas que influenciam na cognição dos sujeitos.

Na dimensão da relação pessoal dos sujeitos com os objetos de saber, nos sistemas didáticos que se formam, se estabelecem contratos didáticos que refletem aspectos do contrato institucional e, portanto, fazem da cognição dos sujeitos um ato situado no contexto institucional.

Como dispositivo social, as instituições estão sujeitas a interferências de outras instituições que estão inscritas nos níveis da escala de codeterminação didática. (CHEVALLARD, 2003: CHEVALLARD, 2014).

Para as instituições de ensino, esse processo de interferência corresponde à dialética que rege a interação da instituição de ensino com a sociedade à qual pertence, inscrita numa civilização, portanto, com o mundo. Esses fatores de interferência ora oferecem condições para o funcionamento dos sistemas didáticos das instituições, ora restrições.

No funcionamento do sistema didático nas instituições de ensino, essas interferências podem se traduzir, para nós, como *dissonâncias* no discurso institucional. A *dissonância institucional* ocorre quando a disparidade entre discursos e práticas institucionais agem como restrições explícitas ou não, no funcionamento dos sistemas didáticos. Dizemos que essas

dissonâncias, tendo origem no contrato institucional, interferem na formação dos contratos didáticos que se formam na instituição.

O nosso olhar sobre o funcionamento do sistema didático na licenciatura em Matemática nos fez perceber diversos momentos em que as dissonâncias institucionais aparecem como um fenômeno. A disparidade entre as recomendações oficiais para o ensino de probabilidade na educação básica e a formação do professor de matemática mostra que ali existe algo dissonante.

Essa dissonância é clara quando no contrato institucional há a ausência de qualquer referência às demandas formativas do professor de Matemática. Isso faz com que a prática da formação de professores destoe dos discursos e das demandas sociais para o ensino de probabilidade. Esse desencontro atua como um fator restritivo na composição do sistema didático analisado, o que acaba por naturalizar noções e conceitos fundamentais para compreensão dos futuros professores.

O contrato institucional, nesse caso omissivo, permite e valida essa incongruência na formação docente. O resultado disso é a participação e o engajamento nas atividades de uma instituição cujo sistema didático só permite a construção de uma relação fragilizada com a probabilidade. Essa fragilidade se traduz na distância de um modelo epistemológico que dê conta das demandas formativas dos futuros professores para o ensino de probabilidade.

Foi também a partir da nossa observação empírica que percebemos que à medida que o contrato institucional influencia a formação dos contratos didáticos que vivem no sistema observado, a participação e o engajamento dos sujeitos nesses contratos didáticos interferem também no funcionamento da instituição, no seu contrato institucional. Se pudermos chamar algumas dessas interferências de dissonâncias, diremos que elas têm uma natureza de ordem institucional enquanto espaço coletivo onde se forma o sistema didático, mas também de ordem individual quando assumimos que cada sujeito é uma pessoa, constituída pelo conjunto de suas sujeições institucionais ao longo da vida.

Diferente da dissonância institucional onde a dimensão cognitiva está presente, porém de forma transversal, na dissonância individual o cognitivo se manifesta na própria ação dos sujeitos sobre as atividades propostas. Para o fenômeno que chamaremos de *dissonância local*, corroboram fatores psicológicos, didáticos e sociais. Esses fatores se manifestam na participação dos sujeitos nas instituições. Isso inclui todos os aspectos que demandam essa participação.

A dissonância local corresponde aos conflitos, contradições a que são submetidos os sujeitos durante sua participação no sistema didático. O contrato didático que se forma é um

espaço de negociações, rupturas, onde interagem professor e alunos com suas expectativas, portanto, os conflitos e contradições são inerentes àqueles que interagem nesse espaço.

Indo mais adiante na nossa observação empírica em que o Professor, Antonio, Kátia e Milena assumem papel central no funcionamento do sistema didático, veremos que cada sujeito vive conflitos que ora têm origem didática, ora psicológica, mas também sociais. Esses conflitos podem ter origem na constituição de cada uma daquelas pessoas, ao longo do histórico de sujeições que viveram.

A confiança de Milena nas praxeologias que desenvolveu fez com que ela ignorasse certos resultados que do ponto de vista matemático estariam equivocados.

Outro exemplo de dissonância local, ocorre quando Kátia responde corretamente à tarefa sobre independência de eventos no próximo lançamento de uma moeda honesta, mas volta atrás por ter vivido uma experiência em que seu “nome foi sorteado 04 vezes seguidos”, isso pode gerar um ruído na sua relação pessoal com $R(X,O)$ do ponto de vista da conformidade com o Contrato Institucional posto. Esse conflito advém da memória, do significado que esse evento particular teve para Kátia, mas também da relação didática que ela estabeleceu com as praxeologias ensinadas naquela instituição.

A conduta de Kátia pode também ser explicada em termos de vieses cognitivos como ignorar o tamanho da amostra. O que mostra que sua origem tem componentes intrínseco à natureza humana, ao lidar intuitivamente com contextos probabilísticos. (KAHNEMAN, 2012).

Outro caso que pensamos operar uma dissonância local no sentido coletivo é o fato de os estudantes pouco perguntarem, ou praticamente nada dizerem, nos encontros em que o Professor fez a explicação dos conceitos. Para Milena, essa era uma regra cristalizada de outros contratos didáticos a que provavelmente se sujeitou. Pensamos então que esse comportamento tinha uma razão mais didática. Inicialmente, acreditamos que essa era a percepção dos demais, já que Antonio tinha explicação semelhante, portanto, seria uma regra implícita do contrato didático em voga: “quando o professor explica, prestamos atenção”. Mais tarde, na entrevista final, percebemos que, para Kátia, a quem as praxeologias aprendidas quase inexistiam três meses depois da última aula, não perguntar estava relacionado a sua relação pedagógica com o professor: “eu não tinha intimidade, não me senti à vontade”.

Mas onde está o sentido coletivo desses comportamentos aparentemente individuais e como eles se configuram em uma dissonância local? Na resultante dos comportamentos. Os silêncios, ou assentimento às perguntas do professor sobre estarem ou não entendendo o que estava sendo explicado é um resultante desses comportamento e se traduz como traço importante na cultura didática no contexto onde o contrato didático se estabeleceu.

Observar o Professor diante desses comportamentos, nos leva a plena análise do contrato didático, o silêncio dos alunos, ou mesmo o “sim”, “pode continuar”, lhe autorizava a avançar na cronogênese do saber. A expectativa que essa dissonância local cria no Professor é que os alunos estão entendendo ou mesmo aprendendo aquilo que está sendo explicado.

Antes de avançar, temos que precisar o sentido atribuído ao termo *dissonância* em nosso trabalho. Palavra originada do latim “*dissonantia*”(aquele que destoa), no dicionário Michellis recebe as seguintes definições:

1. Falta de harmonia entre sons, causando impressão desagradável ao ouvido.
2. desafinação.
3. Ausência de harmonia, de concordância (entre duas ou mais coisas); desproporção entre as partes de um todo.
4. Proximidade de notas que geram tensão.
5. Na música tonal, intervalo (ou acorde) sem resolução harmônica em consonância, principalmente os intervalos de segundas ou sétimas, bem como todos os acordes que contenham tais intervalos, exigindo resolução em outro acorde. (MICHELLIS, 2018).

Vemos que na sua acepção, a palavra *dissonância* remete àquilo que destoa, que é desagradável, que não combina. Na física acústica, vamos encontrar explicações que vão além da ideia de desafinação. Os sons dissonantes e seus opostos, os sons consonantes, correspondem a ondas sonoras cujo modelo matemático são as senoídes. A aplicação à música do conceito de dissonância serve para a construção de acordes dissonantes, não necessariamente desafinados. Acordes dissonantes estão em um parâmetro de frequência que têm a função de causar tensões na música que pedem uma resolução. Dependendo do estilo musical, as dissonâncias são usadas em maior ou menor grau. A estética da bossa nova como estilo musical é exemplo do uso de dissonâncias para criar uma identidade musical.¹³⁸.

Um outro sentido atribuído ao termo *dissonância* é aplicado pela Psicologia desde a década de 1950. A teoria da dissonância cognitiva, elaborada inicialmente pelo psicólogo norte-americano Leon Festinger, defende que os indivíduos estão sempre procurando equilibrar a coerência entre seus conhecimentos, crenças e opiniões. A dissonância cognitiva surge a partir do momento em que um desses aspectos da nossa cognição está em conflito. A teoria assume duas hipóteses básicas:

¹³⁸ Consultar, por exemplo, (BURNS, 1999).

1. A existência de dissonância, sendo psicologicamente desconfortável, motivará a pessoa a tentar reduzir a dissonância e alcançar a consonância.
2. Antes de continuar a desenvolver essa teoria da dissonância, além de tentar reduzi-la, a pessoa ativamente evitará situações e informações que provavelmente aumentariam a dissonância¹³⁹ (FESTINGER, 1957, p. 3).

Para Festinger (1957), a tentativa de resolver esse conflito pode levar o sujeito a mudar suas crenças ou mesmo mudar suas ações ante o conflito para preservar suas crenças. A natureza dessa dissonância seria inerente à natureza humana. Estamos sempre buscando minimizar dissonâncias cognitivas, que em alguns aspectos são necessárias para o que o sujeito possa evoluir no seu sistema de crenças.

A dissonância cognitiva é considerada no rol dos vieses cognitivos. O debate e a pesquisa em torno dos vieses cognitivos estão diretamente relacionados a áreas da Psicologia Social, mas também a outros ramos que envolvem a tomada de decisões nas atividades humanas (KAHNEMAN, 2012).

Feitas essas considerações sobre a literatura corrente e os sentidos atribuídos ao termo *dissonância*, gostaríamos de situar que, em nosso trabalho e em nossa compreensão, *as dissonâncias no discurso institucional* remetem a conflitos, discrepâncias entre os discursos institucionais prescritos. Quando essas dissonâncias têm origem nas práticas dos sujeitos durante o funcionamento do sistema didático, atribuímos a elas o qualificativo de locais.

A *dissonância institucional* é revelada na análise das expectativas e relações da instituição com o objeto de saber. Essas relações e expectativas estão, sobretudo, presentes no contrato institucional, comportando principalmente fatores epistemológicos e didáticos.

A *dissonância local* se manifesta na participação dos sujeitos no funcionamento dos sistemas didáticos. O contrato didático estabelecido e seus processos de negociação podem revelar elementos dessas dissonâncias que se revelam na dimensão coletiva dos envolvidos, mas também individual de cada sujeito, comportando fatores psicológicos, didáticos e sociais.¹⁴⁰

¹³⁹ 1. The existence of dissonance, being psychologically uncomfortable, will motivate the person to try to reduce the dissonance and achieve consonance.

2. Before proceeding to develop this theory of dissonance, in addition to trying to reduce it, the person will actively avoid situations and information which would likely increase the dissonance.

¹⁴⁰ Cabe uma observação sobre a natureza das dissonâncias locais, as quais tratamos como restrições. Não temos condições teóricas nem empíricas de apontar situações em que as dissonâncias locais se constituem como condições. Deixaremos, portanto, essa questão em aberto.

Essas dissonâncias, nas instituições, são em sua maioria implícitas. Portanto, seus efeitos ainda não são claramente percebidos sem a atividade sistemática de investigação. Ao assumir o contexto das instituições como espaço de tensões, negociações, expectativas, conflitos. Assumimos também que essas dissonâncias estão presentes e agem como restrições na vida das instituições e, portanto, na cognição dos sujeitos.

7.3 PARTICIPAÇÃO E ENGAJAMENTO: ESTUDO DA DIMENSÃO COGNITIVA COMO PRÁTICA SOCIAL NA TAD.

Na TAD, a noção de pessoa é entendida como um conjunto de todas as sujeições por que ela passa ao longo de sua existência. Nesse processo, que é também histórico e social, há o didático como presença nas sujeições, mas também há a cognição como prática social. O didático se manifesta na resultante dessas sujeições com a formação dos equipamentos praxeológicos da pessoa que constitui o seu universo cognitivo, UC(X), no dizer da TAD.

Pensamos que UC(X), embora carregue traços culturalmente partilhados e situados nas instituições de que a pessoa foi ou é sujeito, traz também os significados próprios que cada um atribui aos objetos com os quais mantém relações. Os equipamentos praxeológicos, mesmo sendo adquiridos em uma mesma instituição, carregam traços individuais nos seus significados, sobretudo, porque nenhuma pessoa é igual a outra.

Em outras palavras, queremos dizer que, ao assumirmos a cognição como fenômeno situado no contexto das instituições, estamos dizendo que a cognição humana está sujeita a uma resultante de forças institucionais¹⁴¹. Como produto dessa resultante se configura em uma prática social, a cognição é coletiva e partilhada, mas também é realizada de forma única por cada pessoa, abarcando as dimensões biológicas, sociais e psicológicas de cada ser. Essa dupla natureza da cognição configura para nós a possibilidade de delinear um lugar para o sujeito psicológico na TAD. Sinalizamos isso desde a figura 07 no capítulo 03. Nela situamos a pessoa como sujeito didático, epistêmico e psicológico. O psicológico se manifesta no sujeito por meio de suas práticas individuais e coletivas no mundo e com o mundo.

Nesse sentido, fazemos parte de coletivos de pensamentos, mas construímos também nossa identidade. Isso pode explicar por que não se pode conceber que em uma instituição todos

¹⁴¹ Em particular, partilhamos esse termo da Professora Paula Moreira Baltar Bellemain, por quem temos apreço e profundo respeito, pela trajetória de vida acadêmica e pessoal.

mantenha uma $R(X,O)$ uniforme e igual. Chevallard já dizia isto há 30 anos: os sujeitos não são iguais na sua sujeição institucional, por essa razão a $R(X,O)$ tem um componente que é privado.

Ao dizermos que a cognição é uma resultante de forças institucionais, reafirmamos que a dimensão cognitiva sempre esteve presente nas ferramentas da TAD. A relação pessoal $R(X,O)$ é uma importante componente dessa dimensão, especialmente por reconhecer o papel do sujeito, como sujeito didático, epistêmico, mas também cognitivo. Porém, ela $R(X,O)$ não é a única via de acesso para pensarmos a cognição, do contrário resumiríamos a cognição ao sujeito e à relação que eles têm com o objetos de saber.

De fato, o argumento de que a cognição é situada no contexto institucional assinala que as ferramentas da TAD revelam aspectos fundamentais da dimensão cognitiva e como ela pode ser influenciada pelo contexto institucional. Então podemos lançar mão de outros aspectos que envolvem o espaço institucional para a compreensão de projeto social que chamamos de cognição.

O cotidiano da instituição de ensino, revelado pelas ferramentas da TAD, esclareceu para nós a percepção das dissonâncias. Foi através da compreensão das praxeologias de referência que pudemos explicar as incompletudes nas praxeologias dos sujeitos. Pensamos que o contrato didático estabelecido influenciou também nesse aspecto. Do mesmo modo, as restrições do nível *escola* com a interrupção das aulas também fazem parte desse processo. Compreender que o contrato institucional apontava para construção de equipamentos praxeológicos deficientes nos permitiu a leitura de que a forma como os sujeitos aprendem ou pareciam estar aprendendo provavelmente reproduzia o contexto da instituição, ou seja, que $R(X,O)$ se aproxima de $R(I,O)$ carregando também suas inconsistências.

Esse olhar em particular só foi possível pela nossa entrada na instituição. A compreensão de que precisávamos entrar naquele contexto para entender o que acontece com $R(X,O)$ permitiu observar esses fenômenos. Uma vez imersos na observação do sistema didático, pudemos olhar para cada sujeito e dimensionar o que poderia estar acontecendo com suas relações pessoais aos objetos estudados.

Minimamente, isso sugere que analisar a dimensão cognitiva a partir da TAD pressupõe o aprofundamento do objeto de estudo em níveis diferentes. A complexidade desses níveis sugerem também que a TAD pode se beneficiar de diálogos com outras noções teóricas para compreendermos a complexidade dessa trama onde o didático e o cognitivo se confundem.

Nesse sentido, por exemplo, é preciso fazermos justiça ao papel do contrato didático como ferramenta analítica. A TAD foi fundamental na descrição do contexto institucional, mas foi o contrato didático que nos permitiu conectar o sentido cognitivo apontado nas análises

feitas com a TAD. Mais que isso, foi a análise do contrato didático que nos permitiu ver empiricamente os comportamentos que conduzem ao movimento entre o didático e o psicológico, entre o público e o privado em R(X,O).

A confiança de Milena, o incômodo de Kátia na relação pedagógica com o professor, a desconfiança de Antônio sobre sua capacidade de resolver as tarefas, ou mesmo, a crença do professor de que tudo ia bem, especialmente em relação ao tempo didático, tudo isso foi comportamentos que não podiam ser previstos somente analisando o contexto institucional. Daí a necessidade de aprofundar a análise, ou seja, de emergir para outros níveis.

Ao eleger o contrato didático como suporte teórico, fizemos uma escolha que não aponta para restrições à outros enfoques de análise, desde que se considere e justifique a possibilidade de diálogo. Da mesma forma, não achamos ser necessário criar uma nova teoria antropológica para compreender a cognição levando em consideração o olhar da TAD.

Dizer que pessoas na sua sujeição institucional são sujeitos didáticos, epistemológicos e psicológicos ou que o lugar do sujeito psicológico na TAD é o próprio espaço institucional onde o didático e o cognitivo estão interrelacionados leva à imediata pergunta de como esse sujeito se revela.

A resposta pode partir do contrato didático. Ao assinalá-lo como fundamental para conectar a análise do contexto, como o que observamos no funcionamento do sistema didático, é reconhecer que existem outros componentes envolvidos na compreensão da cognição como fenômeno situado.

Para nós, esses componentes foram a *participação* e o *engajamento* dos sujeitos, razão de ser da aprendizagem na teoria da aprendizagem situada, bem como da existência de um contrato didático que é o motor didático da aprendizagem.

É a participação dos sujeitos e o seu conseqüente engajamento na vida institucional que literalmente permitem que se estabeleçam os processos didáticos. É participando do projeto institucional que se mostram possibilidades de mudança em R(X,O). Quem reforça nossa tese é Pedro, sujeito que tinha uma participação irregular no funcionamento do sistema analisado. Não sabemos o que houve com a relação pessoal de Pedro com a probabilidade. Mas sabemos que nos contratos didáticos que se formaram naquela instituição, quando ele esteve presente, se manteve a uma distância que foi suficiente para incomodar o Professor. Tanto que depois de certo tempo o mesmo passou a naturalizar a ausência de Pedro dentro do processos. Na última aula em que Pedro esteve presente, percebemos que algumas vezes as tentativas de participação mais efetiva não surtiavam efeito, Pedro parece ter perdido visibilidade no processo didático.

Olhando para os demais sujeitos, vimos que cada um deles experimentou participações diferentes, cada um teve sua própria trajetória. Parece impossível traçarmos um perfil de Antonio, Kátia e Milena, sem falar de seus comportamentos no funcionamento do sistema didático, das posturas, das decisões, da forma como reagiram às atividades.

A participação tem também uma forte motivação psicológica. A decisão de estar sujeito envolve o jeito individual e peculiar de conceber seus papéis e assumir para si essas responsabilidades. Ao dizer de motivação psicológica, precisamos ser cautelosos, a ponto de reconhecermos que podemos estar entrando em uma seara que não nos pertence como objeto de análise.

Concordamos quando Engeström (2016) assinala que para a teoria da atividade histórico cultural dar conta da compreensão da complexidade humana, é preciso lançar mão de conceitos intermediários, como a emoção, a ação ou mesmo a própria cognição, dentre outros. Pensamos que essa analogia se aplica também ao nosso exemplo. Uma vez definido o objeto de estudo, precisamos não só de diálogo com outras teorias, como também da discussão de conceitos intermediários. Então, por que insistir na TAD como um caminho teórico para analisar a cognição? Porque o olhar da TAD é particular em relação ao tratamento do didático e da ecologia dos saberes, ou seja, ela releva questões importantes relacionadas ao contexto institucional.

Arelada à participação, está a noção de engajamento. A participação pressupõe uma manifestação do engajamento. Este corresponde à confirmação da adesão voluntária de participar, assumir um compromisso didático de participação no sistema didático. O termo *voluntário* parece estranho, dado o fato de que a disciplina era obrigatória, mas a regra institucional não faz que todos os alunos, a exemplo de Pedro, se engajem.

Se as participações de Antonio, Kátia e Milena lhe renderam trajetórias distintas na instituição, podemos dizer que eles tinham um nível de engajamento diferente? Não necessariamente. Pelo contrário, pensamos que eles tinham o mesmo nível de comprometimento. Se assim foi, o que explica uma presença mais efetiva de Milena e Antonio, se compararmos com a frequência de Kátia? A resposta está no fato de que esses sujeitos, assim como a instituição, estão vulneráveis às restrições internas e externas. O transporte escolar, a ameaça de paralisação das atividades foram algumas dessas restrições internas, porém houve também restrições externas que remetem a outras sujeições concomitantes de Kátia, Antonio e Milena.

No caso de Kátia, o seu trabalho, como assessora na câmara de vereadores do município onde reside, exige que, em certas ocasiões, ela esteja à disposição daquela instituição impedida que pudesse vir para aula.

Outra questão que queremos chamar atenção é o que Lave e Wenger (1991) chamam de participação periférica legítima. Os sujeitos no início do funcionamento do sistema didático assumiam posições semelhantes, dada sua relação $R(X,O)$. Chevallard (ano), ao prever mudanças de posição no sistema didático à medida que $R(X,O)$ muda, estava nos dizendo que, conforme os sujeitos avançam na sua aprendizagem, vão assumindo a característica de sujeitos legítimos da Instituição. Para Lave (2015), é a participação em posições periféricas e legítimas que permite novatos assumirem a condição de veteranos dentro de uma comunidade de prática.

Em nossa observação, pensamos que a participação dos sujeitos foi um fator determinante para que eles assumissem diferentes posições no sistema didático analisado. Quando nos referimos ao termo *participação* como fator para a mudança de posição, estamos olhando para os comportamentos de cada sujeito no funcionamento dos contratos didáticos que estavam se formando. Milena, por ter estado presente em todas aulas, assumiu uma posição diferente de Antonio e de Kátia.

Em grande parte do funcionamento do sistema didático, Antonio conquista sua posição quando estava presente em sala de aula e acompanhava as soluções do Professor. Milena, ao procurar alternativas para estudar probabilidade, acabou mostrando um desempenho além do esperado para o Professor, o que lhe garantiu mudar de posição. Kátia, mais tímida, entregava as atividades propostas e foi bem nas avaliações da unidade, o que para o Professor foi suficiente para que mudasse de posição.

Mas o que faz Antonio, Kátia, Milena manterem um nível de participação e engajamento satisfatório a ponto de serem considerados sujeitos com uma relação conforme na Disciplina de Introdução à Probabilidade? Não temos condições de responder prontamente essa pergunta. Porém entendemos que para sua resposta confluem aspectos que passam pela constituição de cada um deles, enquanto pessoa.

Todos no início da disciplina sabem que precisam da aprovação no componente para cumprir suas metas dentro da licenciatura em Matemática. É preciso sujeitar-se a esse componente curricular. Essa sujeição demanda comportamentos e esforço cognitivos que eles conhecem de experiências anteriores. Obter uma qualificação profissional pode ser um dos objetivos. A aquisição do diploma de curso superior para muitos dos jovens da nossa sociedade brasileira pode ser também um motivo razoável. A crença de uma afinidade com a matemática

também ou mesmo a expectativa de aprender o que mais tarde que vai precisar ensinar. Estes são exemplos de possíveis motivações presentes em maior ou menor grau para cada um deles.

Veza por outra Milena, repetia a frase “*eu tenho que passar nessa disciplina*”. Antonio estava no Curso desde 2010, entre idas e vindas, devido a externalidades. Kátia, apesar do trabalho como assessora, esperava um dia assumir integralmente a profissão de professora.

Já Pedro permanece uma incógnita para nós. O que é determinante para que Pedro não alcançasse um nível de engajamento semelhante ao dos colegas? Que conflitos ou mesmo convicções levaram Pedro à escolha de não participar? Para ele, essa é um decisão consciente? Essas são perguntas que podemos responder, sem adentrar no campo da mera especulação.

Apesar de terem motivações distintas ou até ocultas aos nossos instrumentos de compreensão do contexto institucional, todos, como futuros professores, acreditavam que participar daquela disciplina seria importante para sua formação. Tanto que acreditavam que a participação lhe deu condições de compreender melhor o objeto probabilidade e as noções adjacentes a ele.

Chegamos a um ponto que temos condições de delinear não um método, isso está longe de nossa pretensão, mas uma síntese do que pensamos ser uma possibilidade de percurso para analisar aspectos da dimensão cognitiva e os aspectos inerentes a ela tendo como arcabouço a TAD.

Baseados em nossa experiência, a entrada em uma instituição para analisar a dimensão cognitiva passa por três níveis progressivos em aprofundamento:

Quadro 47 – Níveis de análise da dimensão cognitiva.

<p>Nível 01 – Dimensão institucional que corresponde à análise do contexto situado;</p> <p>Nível 02 – Análise do funcionamento do sistema didático como uma prática social onde se encontram o didático e o cognitivo de forma densa;</p> <p>Nível 03 – Dimensão pessoal que se materializa através da análise da participação e do engajamento dos sujeitos no contexto das instituições.</p>
--

Fonte: próprio autor (2018).

Esses níveis estão permeados pelo didático e pelo cognitivo como tessitura da instituição. O nível 01 de onde parte a análise do contexto tem o didático como ponto de partida. As ferramentas da TAD constituem amplo instrumental para desvelar nuances desse contexto epistemológico e didático. Conhecer, por exemplo, o modelo epistemológico-didático dominante de uma instituição passa pela compreensão da ecologia em torno dos objetos de saber analisados.

Aqui a análise da ecologia dos saberes e de tudo o que ela compreende é fundamental para entendermos o contexto institucional. O contrato institucional pode ser revelado no estudo das etapas de transposição, comportando, portanto, a análise de organizações praxeológicas, matemáticas e didáticas, o estudo dos níveis de codeterminação didática. Tudo isso corrobora para o entendimento do modelo epistemológico-didático dominante e pode implicar na construção de um modelo alternativo ou mesmo na proposição de dispositivos didáticos como percursos de estudo e pesquisa, dependendo do objetivo do estudo.

Em nossa investigação, por exemplo, fizemos um estudo das questões epistemológicas, didáticas e psicológicas referente ao saber probabilidade. Isso nos levou a percorrer os percursos históricos do conceitos, o levantamentos das pesquisas em torno do objeto, uma análise das etapas transpositivas do saber, desde um *savoir savante* até um saber a ensinar.

Um ressalva precisa ser feita. Na nossa experiência empírica, analisamos primeiro a probabilidade como um saber a ensinar, desde os níveis mais gerais da escala de codeterminação didática até a análise praxeológica dos livros de referência. Esse exercício foi fundamental, no entanto, metodologicamente parecia faltar alguma peça para que pudéssemos ter segurança na nossa análise. Durante o exame de qualificação, fomos levados a completar a análise onde incluimos a seção 5.3.1. Isso nos mostrou uma dimensão mais ampla da probabilidade que permitiu a conclusão da incompletude das praxeologias na instituição.

De posse do quadro analítico, que para nós culminou com um esboço de um modelo epistemológico de referência para o ensino de probabilidade, a etapa seguinte foi a observação do funcionamento do sistema didático, ou seja, para compreender o papel do contexto revelado e analisado pelas ferramentas da TAD, precisávamos nos aprofundar e ir em direção à prática onde a cognição emerge como fenômeno situado. Para nós, essa prática se revelava no funcionamento do sistema didático.

O nível 2, também permeado pelo didático, é região central que concentra o encontro entre o didático e a cognição. Nosso olhar sobre essa prática foi guiado por toda a análise que fizemos no nível 1. Nesse nível de análise, os aspectos a serem observados estiveram intimamente relacionados aos objetivos de estudo. É preciso ter clareza de que fenômenos se quer observar.

Portanto, desde a etapa anterior, foi importante termos definido categorias de análise a priori. Disso depende o desenho das ferramentas para a construção dos dados empíricos.

O contrato didático é colocado como primeira dimensão, porque foi na sua análise que puderam se revelar outros componentes importantes para pensar a dimensão cognitiva como a participação e o engajamento. As praxeologias ensinadas, a análise dos momentos didáticos, as

decisões didáticas são exemplos de noções que podem ser combinadas com a interpretação do contrato didático.

Sobre o nível 02, vale acrescentarmos que é nele que podemos perceber com mais clareza o surgimento de dissonâncias institucionais (D_I) tanto em relação ao nível 01 (dissonâncias institucionais), quanto no próximo nível (dissonâncias locais). As dissonâncias são percebidas no nível 02, exatamente por se constituir como um nível de confluência entre o que geral a prática social da instituição (contrato institucional) e o que é particular as dimensões em que os sujeitos são protagonistas pela sua participação e engajamento (contrato didático).

O nível 03 é de onde parte a cognição e onde se manifesta a dimensão pessoal dos sujeitos através da participação e do engajamento no funcionamento do sistema didático como prática social de ensino no contexto da instituição. Nesse nível, o didático também está presente e é configurado pelos equipamentos praxeológicos dos sujeitos e pelo seu universo cognitivo. Pensamos que aportes como as praxeologias pessoais, no sentido de Croset e Chaachoua (2016), seguem um modelo metodológico e sistemático próprio que dá conta de demonstrar a presença do didático.

Ao elegermos o nível 03 como nível onde a dimensão pessoal é a principal fonte de compreensão da dimensão cognitiva, nossa predileção pelo aporte da aprendizagem situada para tratar a cognição leva a noção de participação e de engajamento como componentes principais. Porém, não nos fechamos à possibilidade de trazermos para a discussão nesse nível outros aportes sobre a cognição, desde que nesse diálogo fosse reconhecido o papel do didático e da cognição como manifestações da prática desses sujeitos, tendo, portanto, dimensões coletivas mas também individuais dos sujeitos.

Por exemplo, no nosso estudo, as categorias definidas a priori tinham a TAD como principal aporte, mas eram inspiradas na aprendizagem situada. Isso nos ajudou a construir categorias para a compreensão da presença da dimensão cognitiva e para a caracterização do lugar do sujeito cognitivo na TAD.

Esse movimento teórico levou em consideração as premissas da TAD, que descola o foco do individual para o coletivo (CHEVALLARD; BOSCH, 1999). Porém, entendemos que, sem adentrar na dimensão pessoal, não temos condições de desvelar fenômenos e explicações que ainda não foram dadas. A nossa percepção do que seja uma dissonância institucional pode muito bem conduzir a uma compreensão dos seus efeitos na prática institucional vivenciadas por seus atores.

Na figura a seguir, apresentamos um modelo gráfico do que representa a constituição desses três níveis de análise da dimensão cognitiva a partir da TAD:

Figura 63 – Níveis de Análise da Dimensão Cognitiva na TAD.



Fonte: próprio autor (2018).

Olhando criticamente para o modelo que apresentamos em síntese na figura acima, temos clareza da responsabilidade de propor um modelo mesmo que a nossa imersão empírica sobre ele tenha sido mínima. Dizemos isso pela convicção de que o modelo é fruto de nossas reflexões teóricas que foram iniciadas a partir de nossas preocupações teórica-crítica em relação a TAD, mas não se encerram nelas. É a imersão na experiência empírica que nos permitiu a construção desse modelo que é teórico em sua natureza, porém com um reflexo de uma primeira incursão prática.

Mais uma vez, valemo-nos de Bachelard (1996) para justificar nossas pretensões acadêmicas com este modelo. A incursão entre teoria e prática nos permite apresentar um modelo que, à medida que corrobora a nossa tese principal, surge como possibilidade de contribuição para trabalhos que desejem explorar a dimensão cognitiva com o aporte da TAD.

Ele serve como modelo para localizar a dimensão cognitiva na TAD, mas sobretudo para caracterizar um espaço, um lugar para que o psicológico possa ter voz dentro de estudos envolvendo a abordagem antropológica do didático.

O modelo para nós é incompleto, passível de problematizações e, conseqüentemente, de aprimoramentos. Mas sobre isso, falaremos melhor nas considerações finais de nosso trabalho.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sorte

Eu te desejo sorte
 não aquela dos apostadores
 incontroláveis
 Eu te desejo sorte
 não aquela do bilhete premiado
 Eu te desejo sorte
 de que as coisas boas
 soprem de ti
 à medida que as cultivas
 Eu te desejo sorte
 de escolhas saudáveis
 para o corpo e a alma
 Eu te desejo sorte
 para compreenderes
 que a sorte tem
 significados diferentes
 Eu te desejo o que há de bom
 nas coincidências do universo
 que alguns chamam de sorte
 Eu te desejo sorte
 se para ti sorte for bom.

Ao desejar sorte no que parece ser nosso último poema de tese, fazemos um contrato explícito, com o leitor, de que, ao chegarmos no final de nossa jornada, seguiremos por outros caminhos, navegaremos por outros mares, mas levaremos, em cada novo passo, muito do que vivemos ao longo dos 07 capítulos que não podem sequer tentar esboçar a riqueza de nossa aventura. Gostaríamos de contar com a sorte de que o leitor tenha percebido essa riqueza e leve um pouco para si. O que parece pretensão de nossa parte é só a confirmação da regra geral desse contrato, a regra da partilha.

Tudo aqui foi partilha. Ideias, leituras, escritas, descobertas e mesmo os momentos de solidão também foram partilhas de nós mesmos. Por essa razão, desejamos uma sorte diversa, desapegada, que se abre para o olhar do outro, respeitando-o, uma sorte cheia de esperança. Esperança que tenhamos sorte do reencontro, de dias melhores, de novos projetos, de novas partilhas.

Com esse espírito retomamos brevemente nossa jornada, para exercer o direito de se alongar olhando para frente, para as incertezas do futuro.

A tese que nos propomos construir é fruto de ao menos 04 (quatro) anos de trabalho. A semente foi lançada desde a ocasião em que tive o prazer de dividir com Anna Paula Avelar Brito Lima uma mesa redonda no Centro Acadêmico do Agreste da UFPE em Caruaru – PE em 2014. Daí a filiação ao contrato didático. Três meses depois, estava cursando como aluno ouvinte a disciplina de Fenômenos Didáticos no PPGEC-UFRPE, que, naquele semestre, foi organizada pelo Prof. Vladimir Andrade. A admiração pela sua tese me levou à filiação junto à Teoria Antropológica do Didático e à Estatística e à Probabilidade.

Com aprovação na turma de 2015 do PPGEC, submeti-me a esta instituição onde tive a oportunidade de viver com mais ênfase as sujeições pretendidas. Elegemos a TAD como nosso nicho e o saber probabilidade como objeto de saber para a discussão. Foi o nosso desejo de entender a TAD que nos motivou a problematizá-la. Constituíam-se ali o nosso objeto de estudo.

O exercício de problematização no capítulo que chamamos de introdução exprime essas indagações. Como sujeitos da TAD, encontramos uma primeira dissonância devida a críticas externas em relação à natureza anti-psicológica da TAD. Foi na tentativa de responder a esse ruído que nos aventuramos nos escritos da antropológica social. Mesmo Chevallard (1999) tendo nos avisado que a etiqueta de antropológica não filiava a TAD à Antropologia. Respeitamos essa indicação, mas insistimos na leitura de Mauss (2003) e Douglas (2007)¹⁴².

O resultado dessa aposta foi a percepção de que nesse universo da antropologia social dois termos eram repetidos com frequência: “cognição” e “psicológico” como dimensão individual. Nesse ponto, tínhamos clareza de que, para tratar a questão da cognição, teríamos que nos associar a um modelo teórico que pudesse nortear nossa compreensão sobre o fenômeno.

Tendo em vista nossa sujeição à antropologia social, buscamos um referencial que tivesse afinidade teórica com esse aporte. Em nossa primeira leitura sobre os escritos de Jean Lave, achamos diversas semelhanças com a antropologia cognitiva de Chevallard. Na aprendizagem situada, assim como na TAD, a cognição era entendida um ato relacional. Na TAD, a aprendizagem era mudança na relação dos sujeitos com objetos de saber. Essa mudança

¹⁴² Em correspondência com Joseph Gascón percebemos que nossas percepções se alinhavam com a percepção de pesquisadores mais experientes. “Apreciado José Luiz, El tema que planteas es complejo y muy difícil de tratar por correo electrónico. En síntesis, estoy bastante de acuerdo con lo que dices. De hecho, la forma como en la TAD se conceptualizan las instituciones y la cognición institucional es muy próxima a la que propone Mary Douglas. También es cierto que no hemos desarrollado (todavía) una teoría más o menos sistemática sobre las instituciones. Te animo a continuar estudiando en esta línea.

Saludos cordiales, Josep Gascón (28/11/2016).

se dá pela realização de atividades de estudo da Matemática em dada instituição. A cognição para Jean Lave é vista como produto das práticas sociais realizadas pelas pessoas no seio das comunidades de prática.

Tentamos traduzir essa percepção no capítulo 2, onde revisitamos a cognição enquanto termo, os coletivos de pensamento em torno desse fenômeno e as razões da nossa escolha. Além das semelhanças citadas, foi fundamental para nossa escolha o fato de que a aprendizagem situada deslocava o foco de análise do sujeito para as práticas sociais. Esse postulado, não mentalista, é fundamental na abordagem antropológica do didático. Nas palavras de Chevallard e Bosch (1999), o foco estava nas práticas e não nos sujeitos individualmente. Ao final de nossa tese, com uma compreensão mais ampla da dimensão cognitiva para a TAD, pensamos que esse critério poderia ser revisto, no entanto, é preciso situá-lo como escolha temporal em nosso trabalho.

Essa compreensão ampliada ocorre na problematização da ideia de comunidade de prática *versus* a noção de instituição na TAD. Vamos encontrar diversos argumentos, como Lerman (2002), Winbourne e Watson (1998), que indicam a possibilidade de diálogos com conceitos, como zona de desenvolvimento proximal, que remetem a um olhar sobre o sujeito individual e seus processos mentais.

De fato, ao destacarmos os níveis para a análise da dimensão cognitiva para a TAD, defenderemos que no nível 03 outros aportes teóricos podem ser trazidos em termos de complementaridade para analisar os processos relativos à relação pessoal dos sujeitos, dependendo do objeto de estudo.

Para nosso trabalho, pensamos que a sujeição e a escolha pela aprendizagem situada foi a mais acertada. Esse entendimento parte do fato de que, ao construirmos as categorias a priori usando a TAD e tendo como base a AS, tivemos liberdade para aproximarmos a análise da cognição a um ponto de vista da Didática da Matemática. O cotidiano da instituição se transformou no contexto institucional. A dimensão das negociações, tensões e rupturas foram interpretadas em termos de contratos didáticos. As práticas diante de atividades envolvendo probabilidade foram vistas como praxeologias.

Foi essa compreensão que nos motivou a construção de um capítulo, o terceiro, em que nos propusemos a problematizar as ferramentas da TAD. A interpretação da dimensão cognitiva na TAD e o lugar para o sujeito psicológico estão fundamentados naquele exercício teórico, especialmente na seção onde fazemos a nossa leitura da antropologia cognitiva. As bases para pensar um modelo de análise da dimensão cognitiva através da TAD têm centralidade na noção

de instituição como agente de nossa cognição, o que colocou a descrição do contexto, isto é, o desenho do contrato institucional, como centro da análise.

Sobre o terceiro capítulo, é preciso dizermos que o estilo de escrita que adotamos pode, em alguns momentos, ter cansado o leitor, as idas e vindas fizeram parte do zelo e do compromisso teórico assumido. As referências são parte dessa edificação e nos serviram ora como apoio, ora como argumento tácito de para o qual as nossas inferências sobre a leitura da TAD eram pertinentes.

Outra escolha importante que fizemos foi em relação ao objeto de saber. Nossa atenção para TAD sempre esteve dividida com a probabilidade e o contexto da formação dos professores. Não abrimos mão de debater a cognição no universo da formação de professores de Matemática e a probabilidade foi em grande parte um desafio para nós.

Nossa relação com a probabilidade mudou consideravelmente. Os textos de Lopes (2008); Wozniac (2005); Coutinho (1994; 2001) apontavam para necessidade de reflexão no ensino de probabilidade. Além dessas pesquisas, o que respaldou nossa escolha foi o estudo que fizemos em Cavalcante, Andrade e Régnier (2016), que, em parte, confirmava os escritos dos autores citados, mas, sobretudo, apontava que existiam aspectos que ainda não tinha sido revelados sobre aquele processo.

A partir desse cenário, assumimos a cognição como um fenômeno situado no contexto institucional. Para nós, as dificuldades manifestadas pelos estudantes em Cavalcante, Andrade e Régnier (2016) poderiam estar relacionados à instituição onde ocorria a formação.

A questão norteadora foi composta de problemáticas que remetiam ao ensino de probabilidade, às demandas formativas dos professores e à problematização da TAD, tendo vista que transitávamos nesses três universos, traduzimos essas preocupações na seguinte questão:

É possível identificar, através da análise do funcionamento do sistema didático estabelecido em torno do ensino de probabilidade para futuros professores de Matemática, elementos que caracterizem mudanças nas suas relações em uma dimensão cognitiva da aprendizagem?

Levantamos quatro hipóteses as três primeiras das quais (H_0 , H_1 , H_2), pensamos ter problematizado suficientemente no sexto capítulo. Do mesmo modo, a hipótese principal (H_3) foi retomada no sétimo capítulo.

Isso justifica um capítulo, o quarto, dedicado ao desenho metodológico de nossa pesquisa que esteve centrada tanto no caminhar teórico, como também na construção dos instrumentos que usamos para observar o funcionamento do sistema didático observado. Dizer

que três das nossas hipóteses são discutidas já no quinto e no sexto capítulos parece indicar ainda mais a importância do viés empírico do nosso trabalho. O quinto capítulo foi dedicado inteiramente à ecologia em torno do saber probabilidade e, particularmente, rende importantes contribuições para o ensino de probabilidade. Desde a nossa interpretação do espaço da atividade de estudo da probabilidade até o esboço de modelo epistemológico de referência, usamos a TAD como ferramenta, especialmente a leitura das organizações praxeológicas e a localização da probabilidade na escala de níveis de codeterminação didática. A construção do quinto capítulo foi toda orientada em torno da escala de codeterminação didática.

Sobre a descrição do espaço de estudo das probabilidades, vale ressaltarmos que a semelhança da nossa proposição com o que propõe Sáenz (1995) foi animadora. Embora se trate de um modelo anterior ao nosso, só tivemos conhecimento desse modelo após a conclusão daquela seção. Por justiça ao trabalho de Sáenz (1995) incluímos sua versão.

A maneira como abstraímos que a atividade de estudo da probabilidade é um espaço complexo onde se interseccionam elementos psicológicos, didáticos e epistemológicos foi fundamentada em todo nosso percurso, a existência de modelo semelhante feito de forma independente ao nosso, mostra certo alinhamento com o pensamentos de outros pesquisadores. Mas também é traço indelével de que a cognição é partilhada, mesmo quando existem um lapso temporal e físico significativos entre os pesquisadores.

Sobre o esboço do modelo epistemológico de referência, é preciso dizermos que até a qualificação de nossa tese ele inexistia em termos concretos. Foram as orientações da banca examinadora que indicaram a necessidade desse esboço. Nossa leitura de Barquero, Bosch e Gascón (2011) e Gascón (2014) nos conduziu à compreensão do que estávamos propondo no quinto capítulo. De fato, o esboço estava pronto, mas implicitamente. Como crítica ao modelo dominante para o ensino de probabilidade na formação de professores, o esboço do nosso MER é um resultado fundamental para analisar o funcionamento do sistema didático. Ele não é concebido como verdade, mas uma alternativa que pode ser explorada posteriormente.

Observar o funcionamento do sistema didático foi um exercício interessante, pois ele foi guiado pela percepção que tivemos no quinto capítulo. A descrição dos dados, concomitante com a análise no sexto capítulo, carrega um discurso orientado pelas percepções do contrato institucional. A nossa leitura em termos do contrato didático carrega essa percepção da ecologia em torno do saber probabilidade.

No sétimo capítulo, retomamos a discussão mais teórica, no entanto, em um sentido mais propositivo. Entendemos que os capítulos anteriores nos autorizaram a estabelecer um

nível de relação com a TAD que nos deu certa liberdade. Afinal, a nossa hipótese principal ainda carecia de resposta.

À guisa de conclusão, admitir que H_3 foi nossa hipótese principal parece natural, haja vista que chamamos nosso estudo de teórico-crítico em relação à TAD. No entanto, esse não foi um processo trivial. Até o início do nosso último ano de jornada, não havíamos incorporado essa dimensão teórica como principal em nosso trabalho. A dialética entre o teórico-empírico nos rendeu boas reflexões, sobretudo a partir de Bachelard (1996). Esse movimento entre teoria e prática foi fundamental para a construção de nossa tese. No entanto, só nos demos conta do exercício majoritariamente teórico neste último ano.

A redação de nosso objetivo geral traduz esse sentimento.

Caracterizar o lugar do sujeito cognitivo na Teoria Antropológica do Didático a partir da perspectiva da cognição como um fenômeno situado no contexto institucional, quando se estabelece um sistema didático em torno do ensino de probabilidade na licenciatura em Matemática.

A “caracterização” como objetivo geral pode, para leitores desavisados, soar estranha. Mas durante os sete capítulos dessa jornada, nosso exercício teórico e também empírico foi nesse sentido. Ao problematizar a dimensão cognitiva na TAD, queríamos encontrar e caracterizar esse lugar para o sujeito psicológico na teoria.

Esse objetivo não responde à crítica de Godino e D’Amore (2007), pelo contrário, é um movimento próprio. O texto dos autores foi somente um ponto de partida. Nunca intencionamos comparar ou defender teorias. Nosso exercício teórico se preocupava em problematizar a TAD e suas noções, encontrar um lugar para pensar a dimensão cognitiva e os aspectos psicológicos inerentes aos sujeitos.

Diante da intenção teórica, advogamos que a parte empírica do trabalho tinha um caráter ilustrativo. Ainda concordamos com esse argumento. Mas queremos pensar que é provável que, se não tivéssemos adentrado no universo da formação de professores para observar o funcionamento da instituição cujo contrato institucional foi revelado pelas ferramentas da TAD, dificilmente teríamos abstraído o modelo que propusemos no sétimo capítulo. Isso talvez seja uma consequência direta da escolha teórica pela aprendizagem situada. Nela a etnografia do cotidiano é fundamental para captarmos o fenômeno da cognição exatamente por ela ser um fenômeno situado no contexto.

A TAD traz importantes ferramentas para o desenho da instituição e da ecologia em torno dos saberes (nível 01). Mas, para captarmos e aprofundarmos o entendimento sobre a cognição (nível 02), precisamos desse olhar sobre a prática. Saímos da zona de conforto das

práticas idealizadas para a complexidade da prática efetiva. Foi lá que ocorreram dissonâncias e vimos as ferramentas da TAD, especialmente, a escala de codeterminação, refletindo a prática.

É lá, no funcionamento do sistema didático, onde se encontra o nicho que resguarda as relações pessoais dos sujeitos com os objetos de saber. É nessa dimensão da prática (nível 03) que, através da participação e do engajamento dos sujeitos, que pudemos nos deparar com a dimensão didática, epistemológica e psicológica desses sujeitos.

Para nós, as ferramentas da TAD refletem a cognição como dimensão psicológica a partir do momento em que fazemos uma leitura dos resultados que obtivemos de sua análise com a participação dos sujeitos no funcionamento do sistema. É na prática que os sujeitos revelam suas praxeologias pessoais, mudam de posição, entram em conflito com suas relações pessoais aos objetos de saber, com outras sujeições. É participando e se engajando nas atividades institucionais que se revelam como sujeitos que têm emoções, expectativas, frustrações.

Amparados por essas reflexões e diante de todo o cenário que expusemos, temos condições de dizer que a hipótese principal de nossa pesquisa é suficientemente respondida. Na análise do funcionamento do sistema didático em torno do ensino de probabilidades para futuros professores de Matemática, as ferramentas da TAD e o contrato didático nos permitiram enxergar mudanças na relação pessoal sujeito-objeto.

Nessa relação que reflete a dimensão da cognição como fenômeno situado no contexto institucional, manifestaram-se aspectos da dimensão institucional e coletiva das práticas, mas também aspectos individuais inerentes à dimensão psicológica dos sujeitos. A sua participação e o engajamento nas atividades da instituição foram os motores para essas mudanças e estiveram fortemente condicionadas pelo contexto institucional.

Durante a sua participação no funcionamento do sistema didático, cada sujeito seguiu uma trajetória comum ao contexto da instituição, porém única do ponto de vista da sua relação com o objeto de saber. Isso faz dessa relação um construto pessoal a partir de um ambiente coletivo. O engajamento, entendido como adesão voluntária à partilha de atividades em torno da probabilidade, determina não só o papel dessa participação como agente na mudança, como é fundamental para que ela ocorra ou não. Sem engajamento, não há participação. O engajamento parece dar ao sujeito uma identidade dentro do sistema didático. Isso o leva a mudar de posição em relação aos objetos de saberes, mas também aos demais colegas de classe.

É na dimensão da participação que os estudantes revelam suas práticas, suas crenças, seus conflitos. A relação de confiança na técnica é fundamental para a atitude dos estudantes frente às tarefas. Essa relação de confiança está condicionada ao contrato didático que,

implicitamente, diz que tudo o que o professor ensina é um saber válido, mas também novamente ligada à participação dos sujeitos. Quanto mais o sujeito participa, mais ele aprimora essa relação de confiança. Participar não se limita a estar em sala de aula, mas responder às atividades, ir em busca de materiais de apoio e demonstrar certo interesse pelo que está sendo proposto.

De fato, sobre essa última consideração, vimos que no contrato didático estabelecido os estudantes sabem da sua responsabilidade em buscar materiais alternativos. Estudar em grupo, visitar as obras, para além do meio criado no sistema didático estabelecido parece ser parte da prática dos futuros professores. Aqui vale uma consideração sobre a cognição no contexto das comunidades de prática. Para Lave e Wenger (1991) em comunidades de prática a intenção por parte dos veteranos de ensinar aos iniciantes, nem sempre clara. Por isso, a prática nessas comunidades é fundamental para os sujeitos aprenderem. Observando o contrato didático que se estabeleceu vemos que os estudantes, diante de suas dificuldades procuram seus próprios meios para estabelecer e construir sua relação com a probabilidade.

Vimos também que agem sobre a relação dos sujeitos com o saber aspectos ligados a outras experiências, outras sujeições. O significado dado a situações passadas, as sujeições concomitantes influenciam nesse processo de construção da relação pessoal do sujeito.

No caso da probabilidade, percebemos isso com mais ênfase, pois, como assinalamos no modelo proposto para o estudo da probabilidade, além dos aspectos didáticos e epistemológicos, interferem aspectos ligados à cognição, como a intuição dos sujeitos. Se a confiança na técnica não é suficiente, a intuição pode se sobrepor à técnica. A questão, como assevera Kahneman (2012), é que nem sempre nossa intuição está correta diante de raciocínio probabilísticos.

Ainda sobre o engajamento, é preciso dizer que ele pode estar também relacionado às motivações pessoais dos estudantes. Os significados que a participação e o assujeitamento na instituição têm para cada sujeito são fatores que influenciam na decisão de assumir uma postura engajada.

Em outras palavras, estamos tentando dizer que, embora o contexto institucional seja agente na cognição dos sujeitos, teremos que respeitar a existência de fatores externos à situação de ensino. Esses fatores têm origens em outras sujeições, mas também nas subjetividades da pessoa. É na definição de pessoa que se encontra, pois, a dimensão psicológica. O sujeito revela essa dimensão psicológica quando vive o cotidiano da instituição e participa das atividades inerentes a esse cotidiano.

O sujeito psicológico se manifesta quando sente suas expectativas e crenças em conflitos. Os conflitos, como coloca Engeström (2016), são parte das atividades e do desenvolvimento humano. Lave (2011) traduz essa dimensão conflituosa como natureza das relações humanas. Nas comunidades de prática, existem relações de poder, tensões, conflitos que exigem dos sujeitos mais do que uma simples postura didática ou epistemológica.

O lugar do sujeito psicológico se caracteriza na TAD, portanto, na dinâmica das práticas institucionais efetivadas pelos sujeitos. Por essa razão, ao olharmos a dimensão do contexto institucional em relação a um saber, temos a sensação de que o sujeito psicológico não está presente ou mesmo negado. Porém, ao partimos em direção ao funcionamento do sistema didático, veremos que, na prática da instituição, os sujeitos assumem inevitavelmente uma dimensão didática, epistemológica, mas também psicológica.

No funcionamento do sistema didático, os sujeitos, na sua relação pessoal, interagem com o saber. A leitura dessa interação, balizada pela análise da cognição como contexto institucional, permite perceber com mais clareza o que está acontecendo com os sujeitos e como de fato operam as ferramentas da TAD. A construção de praxeologias pessoais depende de um ambiente que estimule esse desenvolvimento. A amplitude dessas praxeologias está atrelada à organização prevista no contrato institucional.

É fato também que o contrato didático é fundamental nesse processo de análise. No nível 02, ele assume a condição de principal via de interlocução com o nível 01, onde as ferramentas da TAD são preponderantes, mas também é capaz de revelar nuances presentes no nível 03, pois, como noção teórica, ele se materializa na ação dos sujeitos no sistema didático.

O papel dos sujeitos no sistema didático e a análise de suas práticas revelaram para nós dissonâncias, no nível institucional e local. A relação dos sujeitos sofre influências do contrato institucional, mas também provoca ruídos que interferem nesse contrato. São os estudantes que, preocupados com a organização da disciplina no retorno às aulas, convencem o professor a adotar uma postura mais compreensiva: *“cheguei na sala e eles estavam desesperados”*.

Dissonâncias institucionais e locais estão presentes na prática das instituições, mas só se revelam explicitamente quando olhamos efetivamente para o funcionamento dos sistemas didáticos. Isso indicou para nós a necessidade não só de caracterizar o lugar do sujeito psicológico, mas reproduzir, a partir de nossa reflexão teórica e empírica, o que chamamos de modelo para analisar a cognição tendo em conta a TAD como referencial principal.

A análise mostrou também a cognição como um fenômeno situado no contexto institucional. Os obstáculos didáticos, as praxeologias incompletas, não só puderam ser previstas no nível 01, como materializada no nível 02, e de certa forma, são fatores que

corroboraram para que os nossos sujeitos mantivessem uma relação com a probabilidade que se afasta das suas necessidades como usuários e como futuros professores de probabilidade, pelos menos dentro do esboço do modelo epistemológico de referência que propusemos. Podemos inferir, que de algum modo essa relação reflete o contexto institucional na qual estavam submetidos os sujeitos de nossa pesquisa.

O modelo em três níveis é uma ideia. Não podemos dizer que a nossa experiência em um curso específico, com um objeto de saber também específico sendo analisado, nos autoriza a validá-lo como ferramenta de análise. Pensamos que isso é um trabalho posterior.

De certa forma, o modelo responde a duas perguntas fundamentais de nossa tese: é possível discutir a dimensão cognitiva a partir da TAD? Existe um lugar para a manifestação de um sujeito psicológico?

Nosso modelo para nós responde afirmativamente às duas questões. A cognição é situada no contexto da instituição. O tecido desse contexto comporta o didático, no sentido de Chevallard (1992; 1996), mas também a cognição no sentido de Lave (1996; 2015). De forma que o didático e a cognição estão imbricados. Se dispor a observar aspectos da dimensão cognitiva passa por três níveis de análise: o contexto institucional, o funcionamento do sistema didático e a dimensão da prática dos sujeitos nesse sistema, onde eles são seres (biológicos, sociais e psicológicos). No nível 2, manifestam-se dissonâncias de ordem do discurso institucional e de ordem das atividades dos sujeitos. O contrato didático é fundamental para a análise no nível 2 e, dependendo dos fenômenos a serem observados, outros aportes teóricos podem ser usados na análise, respeitando o entendimento de que a cognição dos sujeitos é um fenômeno situado no contexto institucional.

Foi a vivência intuitiva desse modelo que nos permitiu entrar na sala de aula da disciplina de Introdução à Probabilidade na Licenciatura em Matemática do *Campus VI* da Universidade Estadual da Paraíba. No contexto daquela instituição, conhecemos parte das trajetórias de 05 (cinco) sujeitos dos quais 03 (três) juntamente com o Professor fizeram parte da análise. O quinto sujeito, Pedro, teve um papel importante nas dissonâncias que causou enquanto esteve frequentando as aulas.

O sistema didático analisado assumiu a probabilidade como objeto principal. Fizemos a descrição de 03 (três) encontros formais, mas a entrevista final acabou se constituindo como um quarto encontro. O estudo da probabilidade vivenciado pelos sujeitos materializou, em grande parte, as discussões que apontamos sobre o ensino de probabilidade.

Percebemos ao longo dos 04 (quatro) encontros que o estudo da probabilidade envolve de fato questões epistemológicas, didáticas e psicológicas. No modelo proposto por Saénz

(1995), essas dimensões estão interconectadas. Em parte, isso explica os obstáculos de ordem epistemológica, didática e psicológica aos quais os sujeitos estiveram submetidos.

Coutinho (1994: 2001) destaca que os obstáculos referentes ao ensino de probabilidade envolvem, dentre outros aspectos, questões relacionadas à inaptidão do modelo clássico de conectar as situações teóricas a situações do mundo real e à natureza da abordagem combinatória na definição clássica. Esses obstáculos têm uma raiz epistemológica, mas também didática, conforme aponta Almouoloud (2007).

Nas discussões que empreendemos, parece haver um consenso internacional no sentido de que o estudo da probabilidade compreende noções que não podem simplesmente ser tomadas como naturais (BARRAGUÉS; GUIASOLA, 2009; LOPES, 2008; BATANERO; GODINO; ROA, 2004; CARVALHO; OLIVEIRA, 2002; AZCÁRATE GODED; CARDEÑOSO; PORLÁN, 1998).

A observação do sistema didático nos mostrou que noções como acaso, aleatoriedade, independência, equiprobabilidade, dentre outras, são tomadas como naturais. O foco na perspectiva clássica da probabilidade acaba por criar um ambiente frágil no sentido praxeológico que potencializa o surgimento de obstáculos didáticos e vieses cognitivos previstos pela literatura sobre o ensino de probabilidade (MOURA; SAMÁ, 2016).

O reflexo desse ambiente é a construção de um equipamento praxeológico fragmentado. A relação pessoal dos futuros professores passa por mudanças, o que se caracterizaria no sentido da TAD em uma aprendizagem, porém essas mudanças são acompanhadas de certa confusão praxeológica e conceitual. A entrevista final mostrou que, após três meses sem participar do sistema didáticos, os futuros professores só detêm vestígios das praxeologias ensinadas.

Pensamos que o contrato didático, com características fortemente normativas, contribui para esse cenário. Entendemos também que a própria natureza da probabilidade implica em dificuldades de aprendizagem. É muito comum, após o estudo formal da probabilidade, os estudantes demonstrarem incompreensão frente a certos problemas cuja probabilidade é requisitada (BARRAGUÉS; GUIASOLA, 2002).

Mas os mesmos autores assinalam que muitas das dificuldades e vieses cognitivos podem ser superados e não resistem à instrução. Quando no estudo da probabilidade são consideradas situações que permitem aos estudantes refletir sobre esses erros, a tendência é que os alunos desenvolvem estratégias para superá-los. (BARRAGUÉS; GUIASOLA, 2002).

Então, por que futuros professores e professores formadores continuam a aprender probabilidade somente do ponto de vista da abordagem clássica, sem considerar o papel das noções associadas à probabilidade? Certamente para essa pergunta, existem várias respostas

que fogem a nossa alçada, mas, como formadores de professores, não podemos ignorar o que o *corpus* de dados mostra.

A nossa análise indica que, para além de todos os fatores já conhecidos, o problema relatado e vivido pelos sujeitos de nossa observação empírica tem raízes no contexto das instituições no que tange à ecologia da probabilidade, mas também no modelo de formação de professores que tem sido perpetuado em nossa sociedade.

Sobre a raiz institucional, o que justifica nossa fala é o próprio estudo que fizemos. Olhando no sentido macro do problema, veremos que o contexto da instituição e o contrato que ele sugere oferecem uma ecologia problemática para o ensino de probabilidade. A começar do delineamento da instituição “disciplina de introdução à probabilidade” que é na prática uma disciplina de introdução a elementos de estatística básica. A mudança no nome da disciplina implicaria no retorno da sua identidade, mas também não resolve o problema do estudo da probabilidade.

O foco na estatística básica implica em um bibliografia que sugere como obras de referência aquelas que têm como missão introduzir as principais ferramentas em um curso dessa natureza. Nessas obras, como vimos, o saber probabilidade é feito como uma introdução à discussão de variáveis aleatórias. Nessas obras, as praxeologias são incompletas, pontuais e há um rigidez em torno da definição clássica da probabilidade.

Ao observarmos livros dedicados a cursos introdutórios à probabilidade, vamos encontrar, como Rathie e Zörnig (2012), uma discussão toda voltada para a comunicação da probabilidade como um função medida. O cálculo de probabilidade que seria dedicado à teoria elementar não tem uma abordagem com grandes diferenças das obras que analisamos, com exceção da presença de elementos tecnológicos.

Aqui somos consoantes com Wozniac (2005) e Wozniac e Chevallard (2006) sobre a falta de infra-estrutura epistemológica para o estudo de probabilidades. Essa falta se reflete em um ciclo que começa desde a escola básica e é repetido na educação superior (CAZORLA, 2009).

Notemos que a declaração de deficiência na infra-estrutura epistemológica reflete uma análise ecológica em torno do saber probabilidade. Sabemos que existe no mundo todo, aqui no Brasil não é diferente, esforço de pesquisadores e grupos de trabalho refletindo propositivamente sobre a construção de atividades que deem conta da complexidade do conceito de probabilidade (NAGAMINE, HENRIQUES, *et al.*, 2011).

Isso reforça o argumento de que o contexto da instituição e o conjunto de condições e restrições que nele atuam é fundamental no processo de difusão do saber. Uma ecologia

problemática reflete diretamente nas condições para a implementação de propostas que atendam às demandas formativas dos professores.

Essa ecologia, seja de modo explícito ou não, certamente influencia nas decisões didáticas do Professor. Ao Professor é entregue uma ementa que aponta para um curso de Estatística Básica. Mesmo que o seu discurso manifeste preocupações com o fato de ser um curso para futuros professores de Matemática, a perspectiva conteudista ainda é muito forte, o que não poderia ser diferente em virtude da própria formação do Professor.

De fato, como aponta Cazorla (2009) precisamos considerar que os profissionais que ministram as disciplinas de estatística básica ou mesmo probabilidade nas licenciaturas, não tem uma orientação específica para debater questões ligadas as demandas formativas dos futuros professores. Essa é um restrição importante. O Professor, sujeito de nossa pesquisa, por vezes declarou o papel formativo durante a sujeição em nossa investigação.

Nós mesmos não tínhamos a dimensão da riqueza do saber probabilidade. Nossa relação também mudou. Por vezes, durante a coleta de dados, pegamo-nos debatendo com o Professor questões dessa natureza. Nesses debates, era tácito o entendimento mútuo das dificuldades de estabelecer um espaço que desse conta das demandas do estudo da probabilidade e também da formação daqueles futuros professores.

O fato é que, ao observarmos as aulas do Professor, aprendemos e, ao mesmo tempo, partilhamos saberes também. Isso remete novamente à sujeição provisória do Professor e dos estudantes à nossa pesquisa. Temos clareza do nosso papel como elemento problematizador do sistema didático. Pensamos que nossa interferência é sentida também no tempo didático dedicado à probabilidade. Lave (2011) discute esse nosso papel como observadores participantes. Para ela, temos um compromisso social com a comunidade na qual estamos envolvidos.

É por essa razão que associamos também as causas da rigidez em torno da abordagem clássica da probabilidade também ao próprio modelo de formação de professores, aquele que se efetiva não só na Universidade Estadual da Paraíba, mas em todo o País. O contrato insitucional, ao destoar das demandas de ensino de probabilidade na Educação Básica, abre espaço para um ensino que se desconecta dessa discussão. Mas isso reflete também o que nós, enquanto sociedade brasileira, pensamos sobre a profissão docente e sua formação.

No discurso dos sujeitos, percebemos que as contribuições da disciplina para sua profissão como futuros professores são sempre acompanhadas da crença de que ao professor basta saber o conteúdo. Ao declararem que se sentem mais confortáveis para ensinar

Probabilidade por ter participado daqueles 03 encontros, implicitamente estão professando essa concepção.

É nesse cenário que percebemos a dissonância institucional na sua forma mais danosa à formação dos professores. Cria-se no espaço de formação a ilusão de que o que se aprende na licenciatura é suficiente para a docência na Educação Básica. Chevallard (2009), refletindo sobre os trabalhos de Gisele Cirade, destaca que essa ilusão é a razão para a frustração de muitos jovens docentes.

Os discursos dissonantes entre as demandas formativas presentes na noosfera em torno do ensino básico e a formação ofertada pela universidade perpetuam e refletem a crença de que a profissão docente se faz por improviso. Esse discurso está presente ainda fortemente na sociedade e é reproduzido na formação de professores. O desprestígio da docência como carreira profissional é um dos sintomas dessa concepção (GATTI, 2010).

No caso do ensino de probabilidade, há um outro agravante, pois, no funcionamento do sistema didático, ela é ensinada como um saber que depende de um conjunto de tarefas associadas a contextos bem definidos e não problemáticos. Aprender probabilidade se resume a aprender a definição clássica nesse contextos. Mas nossa pesquisa mostra que, mesmo os estudantes acreditando nessa ilusão, o equipamento praxeológico deles aponta para outra direção. Uma direção onde a relação estabelecida com a probabilidade é fragilizada e fragmentada.

Feitas essas considerações sobre o ensino de probabilidade e a formação de professores de Matemática, precisamos, pelo nosso compromisso ético, apontar de forma propositiva lacunas que deixamos deliberadamente em nosso estudo.

Temos plena consciência de que as praxeologias pessoais, no sentido de Croset e Chaachoua (2016), agregariam um potencial enorme a nossa capacidade de análise sobre a relação pessoal dos sujeitos. Atribuímos essa lacuna ao nosso desenho metodológico que não deu conta de sistematizar essas praxeologias. Mas também ao próprio contrato didático estabelecido que não favorecia a produção dos alunos. Por exemplo, Milena, que participou efetivamente de todos encontros, tinha no seu caderno de probabilidade as mesmas respostas que o professor anotava no quadro.

Pensamos que um estudo sistemático dessas praxeologias seria viável para esclarecer o que de fato é parte do equipamento praxeológico dos sujeitos durante o funcionamento do sistema didático. Tomando nosso estudo como base, podemos dizer que esse seria um passo no aprofundamento de nossas análises.

Outra lacuna que observamos diz respeito à formação como espaço de profissionalização docente. Temos uma quantidade considerável de dados que podem ser interpretados do ponto de vista da profissionalização docente. Não construímos um referencial apropriado e sentimos falta dessa discussão. Nosso foco na dimensão cognitiva e na probabilidade acabou se sobrepondo à discussão da formação docente.

A nossa pesquisa evidencia que a centralidade no bloco saber-fazer faz da formação um ambiente tecnicista. Não há na ecologia da instituição, conseqüentemente nas organizações praxeológicas matemáticas e didáticas, indicações da consideração da dimensão pedagógica e curricular do saber probabilidade, no sentido de Shulman (1986), e do conhecimento didático, no sentido de (BLOCH, 2007). Desta forma, pensamos que temos aberto para a reflexão o seguinte questionamento: que praxeologias matemáticas e didáticas podem ser organizadas em torno do ensino de probabilidade na licenciatura em Matemática?

O esboço do MER que propusemos nos aponta direções importantes para uma resposta a esse problema. No entanto, nossa reflexão é mais profunda no sentido de que as praxeologias matemáticas e didáticas para a formação dos professores no que concerne a ensinar probabilidades ainda são pouco esclarecidas. Estamos partindo do pressuposto de que, para o ensinar probabilidade, além do estudo do objeto de saber em si, ainda há a dimensão do ensino que precisa ser proposto como tarefas que demandam técnicas, tecnologias e teorias que sustentem essa organização praxeológica para a formação docente. Essa é uma reflexão incipiente, mas denota a quantidade de trabalho que ainda há por fazer. Essa é, pois, uma discussão viva no âmbito da TAD:

Como ajuda ao estudo, o professor permite que os alunos construam uma relação ao saber conforme a instituição escolar quer instaurar. Para fazer, uma vez as praxeologias à ensinar claramente identificadas, ele concebe organizações matemáticas para viver em sala de aula e escolhe organizações didáticas adaptadas ao seu projeto¹⁴³. (WOZNIAK, 2018, p. 750)

A discussão de Wozniak (2018) remete à natureza particular do trabalho docente. etem relação direta com a ecologia dos saberes. O conjunto de condições e retrições ao exercício da profissão docente é fundamental para a compreensão da profissão.

¹⁴³ Comme aide à l'étude, le professeur permet aux élèves de construire un rapport aux savoirs conforme à celui que veut instaurer l'institution scolaire. Pour ce faire, une fois les praxéologies à enseigner clairement identifiées, il conçoit les organisations mathématiques à faire vivre en classe et choisit les organisations didactiques adaptées à son projet.

Ainda sobre o esboço do MER, pontuemos que a sua utilidade como instrumento de reflexão sobre a profissão docente, é também uma questão de interesse atual na TAD. A discussão em torno dos modelos epistemológico tem apontando para seu uso na formação de professores (FLORENSA, BOSCH e GASCÓN, 2018).

No tocante ao modelo que propusemos, pensamos que ele precisa ser validado, testado conscientemente, já que para nós ele é parte do processo e não foi pensado a priori. Isso implica, por exemplo, uma discussão mais arrojada sobre as dissonância institucionais como fenômenos observados. Reconhecemos a rapidez com que concluímos nossas indicações e reflexões a respeito desse modelo e pensamos que podemos sempre melhorar.

Outra observação igualmente importante diz respeito ao papel da análise da dimensão cognitiva em comunidades de estudo. Essas comunidades, segundo Bosch e Gascón (2006) tem se configurado como um prática onde a atividade de estudo da matemática assume contornos diferentes dos contextos tradicionais. Questionar sobre como se dão os processos de participação e engajamento dos sujeitos pode revelar importantes reflexões sobre a cognição como fenômeno no contexto institucional, o que para nós pode se configurar como um problema interessante de investigação.

Por fim, é preciso tecer considerações sobre os desdobramos da TAD em relação à experimentação de dispositivos didáticos na formação docente. O paradigma do questionamento do mundo tem se firmado na última década como um dos principais temas de debate (CHEVALLARD, 2015).

O objetivo de nosso trabalho não nos permitiu trazer uma discussão sobre os percursos de estudo e de pesquisa. No entanto, os resultados que apresentamos indicam minimante a necessidade de pensar um outro modelo para a formação docente.

Essa uma questão é igualmente viva na TAD como apontam Barqueiro, Bosch e Romo (2018). A discussão sobre o uso e desenvolvimento de percursos de estudo e pesquisa na formação de professores – PEP-FP, tem se mostrado como frutífera. Cursos de formação de professores modelados a partir do paradigma do questionamento do mundo, enfrentam diversos desafios e restrições institucionais, mas é exatamente na prática desses cursos que os professores tem sido chamados a refletir sobre a superação desses desafios para construção de atividades de estudo da matemática que superem o modelo monumentalista ainda fortemente vigente (BARQUERO; BOSCH; ROMO, 2018).

Propositivamente, pensamos que planejar e experimentar dispositivos didáticos para ensino de probabilidade amplia consideravelmente as questões a serem analisadas do ponto de vista da dimensão cognitiva no contexto institucional. Resumimos essas questões em uma

pergunta provisória: que implicações cognitivas tem a implementação de dispositivos didáticos para o ensino de probabilidade na formação de professores baseados nos percursos de estudo e pesquisa?

A resposta a essa pergunta pode, em nossa percepção, conduzir a uma linha de pesquisa dentro da TAD que a nós parece inédita. Nesse sentido, nosso trabalho serve como ponto de partida se levarmos em consideração que temos um modelo que se propõe a dar conta da análise da cognitiva através da Teoria Antropológica do Didático.

O conjunto dessas lacunas pode gerar questões de pesquisa interessantes. Para nós, isso não se configura como deficiência em nosso estudo, mas a capacidade que ele tem de gerar novos saberes a partir do ponto onde páramos.

Como derradeira reflexão sobre a caracterização do sujeito psicológico na TAD é preciso dizer que nós, enquanto, pesquisadores que refletiram sobre a TAD, fomos em todos os momentos de nosso trabalho também sujeitos psicológicos, vivendo, descobrindo e redescobrando nossas relações com os objetos de estudo que nos propomos a investigar. Vivemos um processo de participação e engajamento próprios. A nossa sujeição à pesquisa e ao doutoramento nos permitiu aprender com a prática que se traduziu na partilha constante de aprendizagem. Portanto, o lugar do sujeito psicológico foi também um lugar nosso, que pela necessidade de narrar a construção de nossa tese, ocultamo-nos entre as cortinas para que a investigação ganhasse o merecido destaque.

Na certeza da incompletude, mas na tranquilidade de termos vivido uma jornada plena e autêntica, esperamos que nosso estudo contribua para o debate científico em torno dos temas que nos propomos a refletir. Que ele seja partilha de inspiração e esperança no compromisso científico engajado na construção de um mundo melhor.

9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMEIDA, C. M. C.; FARIAS, L. M. S. **Uma análise do conceito de probabilidade nos livros didáticos do ensino médio a luz da teoria antropológica do didático**. I Simpósio Latino-americano de Didática da Matemática. Bonito - MS: [s.n.]. 2016.
- ALMEIDA, F. E. L. D. **O contrato didático na passagem da linguagem natural para linguagem algébrica e na resolução da equação na 7ª série do ensino fundamental**. Dissertação de Mestrado PPGEC-UFRPE. Recife. 2009.
- ALMEIDA, F. E. L. D. **O Contrato Didático e as organizações matemáticas e didáticas: analisando suas relações no ensino da equação do segundo grau a uma incógnita**. Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática do PPGEC-UFRPE. Recife. 2016.
- ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Ed UFPR, 2007.
- ANDRE, M. E. D. A. D. **Etnografia da Prática Escolar**. Campinas: Papirus, 2007.
- ARAÚJO, A. J. **O ensino de álgebra no Brasil e na França: estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático**. Tese Doutorado em Educação Universidade Federal de Pernambuco. Recife. 2009.
- ARAYA, A.; MATHERON, Y. Una problemática de la memoria: proposiciones y ejemplos para su estudio antropológico en didáctica de las matemáticas. In: RUIZ-HIGUERAS, L.; ESTEPA, A.; GARCÍA, F. J. **Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo didático (TAD)**. Jaén: Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén, 2006. p. 261-278.
- ARAYA-CHACON, A.-M. **La gestion de la mémoire didactique par le professeur dans l'enseignement secondaire des mathématiques : Etude du micro-cadre institutionnel en France et au Costa Rica**. Thèse Doctoral en Didactique des Disciplines Scientifiques et Technologiques - Université Toulouse. Toulouse. 2008.
- ARBEX, M. T. **Introdução ao Cálculo de Probabilidade**. São Paulo: [s.n.], 1967.
- ARTAUD, M.; BEBBOUCHI, R.; MENOTTI, G. Niveaux de co-détermination didactique et Transposition Didactique: la confection d'un livre de 4º année primaire en Algérie. In: RUIZ-HIGUERAS, L.; ESTEPA, A.; GARCÍA, F. J. **Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo didático (TAD)**. Jaén: Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén, 2006. p. 407-415.
- ARTIGUE, M.; DOUADY, R. Note de synthèse [La didactique des mathématiques en France - Emergence d'un champ]. **Revue française de pédagogie**, v. 76, p. 69-88, 1986.
- AZCÁRATE GODED, P. **Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de Aleatoriedad y Probabilidad**. Granada: Comares, 1996.
- AZCÁRATE GODED, P.; CARDEÑOSO, J. M.; PORLÁN, R. Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. **Enseñanza de las ciencias**, v. 16, n. 1, p. 85-97, 1998.
- BACHELARD, G. **O novo espírito científico (coleção os pensadores)**. São Paulo: Abril Cultural, 1978.

- BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento Trad. – Rio de Janeiro: Contraponto, 1996. Tradução de Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996. (Obra original de 1935).
- BARQUEIRO, B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Ecología de la modelización matemática: los recorridos de estudio e investigación. In: BOSCH, M., et al. **Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico**: Un panorama de la TAD. Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica, 2011.
- BARQUERO, B.; BOSCH, M.; ROMO, A. Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. **ZDM: The international journal on mathematics education**, v. 50, n. 1-2, p. 31-43, 2018.
- BARRAGUÉS, J. I.; GUIASOLA, J. Una propuesta para la enseñanza de la probabilidad en la universidad basada en la investigación didáctica. **Educación Matemática**, 21, n. 3, 2009. 127-162.
- BASTOS, F. Construtivismo e ensino de ciências. In: NARDI, R. **Questões atuais no ensino de ciências**. São Paulo: Escrituras, 1998. p. 9-25.
- BATANERO, C. **Didáctica de la Estadística**. Granada: Universidad de Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística, 2001.
- BATANERO, C. B.; FERNANDES, J. A.; CONTRERAS, J. M. G. Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. **Suma**62, p. 11-18, nov 2009.
- BATANERO, C. et al. Investigación en Educación Estadística: Algunas Cuestiones Prioritarias. **Statistical Education Research Newsletter**, 1, 2000.
- BATANERO, C.; GODINO, J. D.; ROA, R. Training Teachers To Teach Probability. **Journal of Statistics Education**, 12, n. 1, 2004.
- BATANERO, C.; MANFRED, B. **Statistics and Probability in High School**. Rotterdam/Boston: Sense Publishers, 2016.
- BATISTA, A. C. D. A. **Aprendizagem situada em uma comunidade de aprendizes de matemática em uma escola pública**. Tese de Doutorado no PPG em Educação UNICAMP. Campinas. 2014.
- BEHRENS, M. A.; OLIARI, A. L. T. A evolução dos paradigmas na educação: do pensamento científico tradicional a complexidade. **Dialógos Educacional**, Curitiba, 7, n. 22, 2007.
- BEZERRA, L. **Formação para o ensino de probabilidade e estatística no Brasil**. IASE 2015 Satellite Conference. Rio de Janeiro: [s.n.]. 2015.
- BEZERRA, L.; GITIRANA, V. **Formação para o Ensino da Estatística nos Cursos de Licenciatura**. Anais do XVI Encontro de Estudantes de Pós graduação em Educação Matemática. Canoas - RS: [s.n.]. 2012.
- BIREBENT, A. Le calcul numérique dans l'enseignement mathématique secondaire: reprise des travaux de notre thèse. In: GUEUDET, G.; MATHERON, Y. **Actes du séminaire national de didactique des mathématiques**. Paris: Editions ARDM, 2007. p. 308-324.
- BLANCO, M. M. G. La formación de profesores de matemáticas. Un campo de estudio y preocupación. **Educación Matemáticas**, v. 17, n. 2, p. 153-166, agosto 2005.

BLOCH, I. Promote teachers' pedagogical content knowledge. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 9, n. 1, p. 13-49, 2007.

BOCK, A. M. B.; FURTADO, O.; TEIXEIRA, A. D. L. T. **Psicologias**: uma introdução ao estudo da psicologia. 13ª. ed. São Paulo: Saraiva, 2001.

BORBA, R. et al. Educação Estatística no ensino básico: Currículo, pesquisa e prática em sala de aula. **Revista em Teia**, v. 2, n. 2, p. 1-13, 2011.

BORDIER, J. **Un modèle didactique, utilisant la simulation sur ordinateur, pour l'enseignement de la probabilité**. Thèse de doctorat en Didactique des mathématiques. PARIS 7. 1991.

BORGES, M. E. N. A abordagem contemporânea sobre a cognição humana e as contribuições para os estudos de usuários da informação. **Cadernos BAD (Bibliotecários, arquivistas e documentaristas)**, 2005.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 19, n. 1, 1999. 77-124.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. Organiser l'étude. 2. Théories et empiries. In: DORIER, J. -L. E. A. **Actes de la 11e Ecole d'Été de didactiques des mathématiques**. Grenoble: La pensée sauvage, 2002. p. 23-40.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In: MERCIER, A.; MARGOLINAS, C. **Balises pour la didactique des mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 2005.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. 25 años de Transposición Didáctica. In: RUIZ-HIGUERAS, L.; ESTEPA, A.; GARCÍA, F. J. **Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la teoría Antropológica de lo Didáctico**. Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén., 2006. p. 385-406.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los "talleres de prácticas matemáticas" a los "recorridos de estudio e investigación. In: BRONNER, A., et al. **Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action**. Montpellier: IUFM de l'Académie de Montpellier, 2010. p. 49-85.

BOURDIEU, P. **Coisas ditas**. 1ª reimpressão. ed. São Paulo: Brasiliense, 2004.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental - MEC, 1998.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio): Parte I bases legais**. Brasília: Ministério da Educação, 2000.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio): Parte III ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação, 2002.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação, 2002.

BRASIL. **Orientações curriculares nacionais para o ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.** Brasília: Ministério da Educação, v. 2, 2006.

BRASIL. **Base nacional comum curricular.** Brasília: Ministério da Educação, 2016.

BRITO MENEZES, A. P. A. **Contrato Didático e Transposição Didática: Inter-Relações entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação à Álgebra na 6ª Série do Ensino Fundamental.** Tese de Doutorado - Programa de Pós Grad em Educação - UFPE. Recife. 2006.

BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherche en didactiques des mathématiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.

BROUSSEAU, G. **Problèmes et résultats de didactique des mathématiques.** ICMI Study 94. Washington: [s.n.]. 1994.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, J. **Conceitos Fundamentais da Didática: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica.** Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

BROUSSEAU, G. Entre la théorie anthropologique du didactique et la théorie des situations didactiques en mathématiques: questions et perspectives. In: RUIZ-HIGUEIRAS, L.; ESTEPA, A.; GÁRCIA, F. J. **Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo didáctico (TAD).** Jaén: Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén, 2006. p. 23-52.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino.** São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, G.; CENTENO, J. Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, Grenoble, v. 11, n. 2, p. 167-210, 1991.

BRUN, J. **Didáticas das matemáticas.** Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

BRYANT, P.; NUNES, T. **Children's understanding of probability: a literature review (full report).** Nuffield Foundation. London, p. 2-86. 2012.

BURNS, E. M. **Intervals, Scales, and Tuning, The Psychology of music.** San Diego: Academic Press, 1999.

BUSSAB, W. D. O.; MORETTIN, P. A. **Estatística Básica.** 6ª. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

CABRAL, M. A. P. Introdução à teoria da medida e integral de Lebesgue, 2016. Disponível em: <<http://www.labma.ufrj.br/~mcabral/textos/medida-a4.pdf>>. Acesso em: 2017 Outubro 20.

CAMPOS, T. M. M.; TRGALOVÁ, J. **Franco-brazilian collaboration in mathematics education.** Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques. [S.l.], p. 61-74. 2016.

CAÑIZARES, M. J. **Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias.** Tese (Doutorado) – Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Granada. 1997.

CARVALHO, C.; FERNANDES, J. A. Revisitando o conceito de probabilidade com um olhar da psicologia. **Quadrante**, Lisboa, v. XIV, n. 2, 2005.

CARVALHO, D. L.; OLIVEIRA, P. C. **Quatro concepções de Probabilidade manifestadas por alunos ingressantes na Licenciatura em Matemática:** clássica, frequentista, subjetiva e formal. XXV Reunião Anual da Associação Nacional de Pós graduação e pesquisa em educação matemática. Caxambu: [s.n.]. 2002.

CAVALCANTE, J. L. **Formação de Professores que ensinam Matemática:** saberes e vivências a partir da resolução de problemas. Jundiaí - SP: Paco Editorial, 2013.

CAVALCANTE, J. L.; ANDRADE, V. L. V. X. D.; RÉGNIER, J.-C. O conceito de probabilidade na formação docente: uma reflexão apoiada pela análise estatística implicativa. **VIDYA**, Santa Maria, v. 36, n. 2, p. 441-445, jul/dez 2016.

CAZAROTTO, J. L. **Psicologia e Antropologia:** a vida humana em construção. São Paulo: Ideias & Letras, 2015.

CAZORLA, I. M. O ensino de estatística no Brasil. **Sociedade Brasileira de Educação Matemática**, 2009. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/gt_12/arquivos/carzola.htm>. Acesso em: 19 maio 2015.

CHAACHOUA, H. **La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas: la modélisation des connaissances des élèves.** Université Joseph Fourier. GRENOBLE. 2010.

CHAACHOUA, H.; BITTAR, M. **A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO: PARADIGMAS, AVANÇOS E PERSPECTIVAS.** Anais do I Simpósio Latino-americano de Didática da Matemática - LaDiMa. Bonito - MS: [s.n.]. 2016.

CHARNAY, R. Aprendendo (com) a resolução de problemas. In: PARRA, C.; SAIZ, I. **Didática da Matemática - Reflexões Psicopedagógicas.** Porto Alegre: Artmed, 1996.

CHEVALLARD, Y. **Le concept de rapport au savoir. Rapport pesonnel, rapport institutionnel, rapport officiel.** IREM Aux Marseille. Marseille. 1989.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 12, n. 1, 1992.

CHEVALLARD, Y. Conceitos Fundamentais da Didática: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: BRUN, J. **Didáctica Das Matemáticas.** Tradução de Maria José Figueredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

CHEVALLARD, Y. **La Transposición Didáctica Del Saber Sabio Al Saber Enseñado.** Tradução de CLAUDIA GILMAN. 1ª. ed. Buenos Aires: Aique, 1997. Título original (La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. (Original de 1991).

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologie Didactique. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, Grenoble, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. **Organiser l'étude 3:** Ecologie et Regulation, 2002. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=53>. Acesso em: 13 Outubro 2017.

CHEVALLARD, Y. Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In: MAURY, S.; CAILLOT, M. **Rapport au savoir et didactiques**. Paris: Éditions Fabert, 2003. p. 81-104.

CHEVALLARD, Y. Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In: RUIZ-HIGUEIRAS, L.; ESTEPA, A.; GÁRCIA, F. J. **Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo didáctico (TAD)**. Jaén: Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén, 2006. p. 705-746.

CHEVALLARD, Y. La TAD face au professeur de mathématiques, Toulouse, 29 avril 2009. Disponivel em:

<http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_TAD_face_au_professeur_de_mathematiques.pdf>. Acesso em: 19 maio 2017. Communication au Séminaire DiDiST.

CHEVALLARD, Y. **Improvisaciones cruzadas sobre lo didáctico, lo antropológico y el oficio de investigador en TAD**, 2011. Disponivel em:

<http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php?id_article=201>. Acesso em: 19 Março 2017.

CHEVALLARD, Y. Didactique Fondamentale - Module 1 : Leçons de didactique. Curso dado a universidade de Provence, 2011b. Disponivel em:

<http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/DFM_2011-2012_Module_1_LD_.pdf>. Acesso em: 19 março 2017.

CHEVALLARD, Y. La TAD et son devenir : rappels, reprises, avancées. In: GISÈLE, C., et al. **Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société**. Toulouse: <https://citad4.sciencesconf.org>, 2014. p. 27-65.

CHEVALLARD, Y. eaching mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. In: CHO, J, S. **The proceedings of the 12th international congress on mathematical education**. [S.l.]: Springer, 2015. p. 173-187.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar matemática: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

CHEVALLARD, Y.; GRENIER, D. **Le topos de l'élève**. Actes de la IX école d'été de Didactique des Mathématiques. Houlgate: [s.n.]. 1997.

CHEVALLARD, Y.; WOZNIAK, F. Un cas d'infrastructure manquante: statistique et probabilités en classe de troisième. In: BOSCH, M., et al. **Un panorama de la TAD**. Barcelona: CRM, 2011. p. 831-853.

COLL, C.; MARCHESI, Á.; PALACIOS, J. **Desenvolvimento psicológico e educação: psicologia da educação escolar**. 2ª. ed. Porto Alegre: Artmed, v. 2, 2004.

CONNE, F. Saber e conhecimento na perspectiva da transposição didática. In: BRUN, J. **Didáticas da Matemática**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 219-266.

COUTINHO, C. D. Q. E. S. **Introdução do conceito de probabilidade por uma visão frequentista**. Dissertação (Mestrado em Matemática) PUC - SP. São Paulo. 1994.

COUTINHO, C. Q. S. **Introduction aux situations aléatoires dès le Collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II.** Thèse de Doctorat en la Université Joseph Fourier - Grenoble I. Grenoble, p. 338. 2001.

CRESPO, A. A. **Estatística Fácil.** 18^a. ed. São Paulo: Saraiva, 2008.

CROSET, M. **Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre. Etude des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte.** Université Joseph Fourier. Grenoble. 2009.

CROSET, M. C.; CHAACHOUA, H. Une réponse à la prise en compte de l'apprenant dans la TAD : la praxéologie personnelle. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 2, n. 36, 2016.

CURY, H. N. O conhecimento pedagógico do conteúdo dos erros. In: CURY, H. N.; VIANNA, C. R. **Formação do Professor de Matemática: reflexões e propostas.** Santa Cruz do Silva: Editora IPR, 2012. p. 19-48.

D'AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática.** São Paulo: Livraria da Física, 2007.

DA ROCHA FALCÃO, J. T.; MORENO, G. M.; KLÖPSCH, C. A. **A relevância do contrato didático na explicação de dificuldades de aprendizagem na disciplina de estatística em cursos de Psicologia.** Anais do 2º SIPEMAT. Recife: [s.n.]. 2008.

DALANG, R. C.; CONU, D. **Introduction à la theorie des probabilités.** Lausanne: Polytechniques et universitaires romandes, 2008.

DELIZOICOV, D. et al. Sociogênese do conhecimento e pesquisa em ensino: contribuições a partir do referencial Fleckiano. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 19, n. especial, junho 2002.

DOUGLAS, M. **Como as instituições pensam.** Tradução de Carlos Eugênio Marcondes de Moura. 1^a - 1^a reimpressão. ed. São Paulo: Editora USP, 2007. (Obra original de 1986).

ENGESTRÖM, Y. Making Use of Activity Theory in Educational Research (foreword). In: GEDERA, D. S. P.; WILLIAMS, J. P. **Activity Theory in Education: Research and Practice.** Rotterdam: Sense Publishers, 2016.

ERNEST, P. Mathematical knowledge and context. In: WATSON, A. **Situated cognition and the learning of mathematics.** Oxford: Centre for Mathematics Education Research, University of Oxford, 1998. p. 13-31.

FESTINGER, L. **Theory of Cognitive Dissonance.** Stanford: Stanford University Press, 1957.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.** 2^a. ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

FISCHBEIN, E.; PAMPOU, L.; MÎNZAT, I. L'intuition probabiliste chez l'enfant. **Enfant: etudes longitudinales du développement psychologique de l'enfant**, v. 20, n. 2, p. 193-208, 1967.

Disponível em: <https://www.persee.fr/doc/enfan_0013-7545_1967_num_20_2_2424>. Acesso em: 12 junho 2018.

- FLECK, L. **Gênese e desenvolvimento de um fato científico**. Belo Horizonte: Fabrefactum, 2010.
- FLEER, M. The Vygotsky project in education – The theoretical foundations for analysing the relations between the personal. In: GEDERA, D. S. P.; WILLIAMS, J. P. **Activity Theory in Education: Research and Practice**. Rotterdam: Sense Publishers, 2016.
- FLORENSA, I.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Reference epistemological model: what form and function in school institutions?** Actes du VI congrès international de la TAD. Autrans: [s.n.]. 2018.
- FONSECA, C. Antropologia e Psicologia: apontamentos para um diálogo aberto. In: KESSLER, C. H. **Trama da clínica psicanalítica em debate**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2004.
- FONSECA, C. **Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad**. Tesis doctoral. Universidade de Vigo. Vigo. 2004.
- FRADE, C.; TATSIS, K. Learning, participation and local school mathematics practice. **The Montana Mathematics Enthusiast**, v. 6, n. 1, p. 99-112, 2009.
- FRANKLIN, K. Os conceitos de Doxa e Episteme como determinação ética em Platão. **Educação em Revista**, Curitiba, v. 23, p. 374, Junho 2004.
- GASCÓN, J. Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 18, n. 1, 1998. 7-33.
- GASCÓN, J. **El espacio de las organizaciones didácticas posibles en las instituciones**. Communication présentée dans IX JAEM. Tenerife et Gran Canaria: [s.n.]. 2003.
- GASCÓN, J. Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. **Educación Matemática**, p. 99-123, marzo 2014.
- GATTI, B. Formação de Professores no Brasil: características e problemas. **Educação e Sociedade**, Campinas, v. 31, n. 113, p. 1335-1379, out-dez 2010.
- GODINO, J.; D'AMORE, B. El enfoque ontosemiótico como um desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. **RELIME**, v. 10, Julio 2007.
- GONÇALVES, M. C. **Concepções de Professores e o Ensino de Probabilidades na Escola Básica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). São Paulo. 2004.
- GOODWIN, C. J. **História da psicologia moderna**. Tradução de MARTA ROSAS. 4ª. ed. São Paulo: Cultrix, 2010.
- GOULART, A. **O discurso sobre os conceitos probabilísticos para a Escola Básica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) PUC - SP. São Paulo. 2007.
- GUISASOLA, J.; BARRAGUÉS, J. I. Heurísticas y sesgos de los estudiantes de primer ciclo de universidad en la resolución de problemas de probabilidad. **Enseñanza de las ciencias**, 20, n. 2, 2002. 285-302.
- HACKING, I. **The Emergence of Probability**. 2ª. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

HEIDBREder, E. **Psicologias do século XX**. Tradução de LAURO S BLANDY. 5ª. ed. São Paulo: Mestre Jou, 1981.

HENRY, M. **Notion d'expérience aléatoire, vocabulaire et modèle probabiliste, autor de la modélisation en probabilités**. Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités. Besançon, p. 161-172. 2001.

HENRY, M. Évolution de l'enseignement secondaire français en statistique et probabilités. **Statistique et Enseignement**, 1, n. 1, Abril 2010. 35-45.

JOHNSUA, S. Le concept de contrat didactique at l'approche vygotskienne. In: RAISKY, C.; CAILLOT, M. **Au-delà des didactiques, le didactique: débats autor de concepts fédérateurs**. Paris: De Boeck, 1996.

JONNAERT, P.; BORGHT, C. V. **Criar condições para aprender: o modelo socioconstrutivista na formação de professores**. Tradução de FÁTIMA MURAD. Porto Alegre: Artmed, 2002.

KAHNEMAN, D. **Rápido e devagar: duas formas de pensar**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2012.

KAHNEMAN, D.; SLOVIC, P.; TVERSKY, A. **Judgment under uncertainty: heuristics and biases**. Nova York: Cambridge University Press, 1982.

KASPARY, D.; OLIVEIRA, A. B. D.; BITTAR, M. **A Teoria Antropológica do Didático como metodologia de Análise de Livros Didáticos**. Anais do I Simpósio Latino-americano de Didática da Matemática - LADIMA. Bonito - MS: [s.n.]. 2016.

KILPATRICK, J. Fincando estacas: uma tentativa de demarcar a Educação Matemática como campo profissional e científico.. **Zetetiké**, v. 4, n. 5, 1996.

KOLMOGOROV, A. N. **Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete**. Berlin: Springer, 1933.

KOZULIN, A. O conceito de atividade na psicologia soviética: Vigotsky, seus discípulos, seus críticos. In: DANIELS, H. **Uma introdução a Vygotsky**. Tradução de MARCOS BAGNO. São Paulo: Edições Loyola, 2002.

LAGE, A. -L. Cognição social e aprendizagem situada, relacional e processual. In: VERA FARTES, T.; LOPES, A. **Saber e Formação e Trabalho Profissional Relacional**. Salvador: Editora da UFBA, 2013. p. 277-290.

LAPLACE, P.-S. M. D. **Ensaio filosófico sobre as probabilidades**. Tradução de Pedro Leite de Santana. 1ª. ed. Rio de Janeiro: Contraponto: Ed. PUC-Rio, 2010. (Obra original de 1825).

LAPPAN, G. E. A. **LAPPAN, G. et al. How likely is it? probability**. New Jersey: Praticce Hall, 2002. (Connected Mathematics Data Analysis and Probability).

LAVE, J. **Cognition in practice: mind, mathematics, and culture in everyday life**. Cambridge: CU Press., 1988.

LAVE, J. Selvajaria da mente domesticada. **Revista Crítica de Ciências Sociais**, Coimbra, v. 46, p. 109-134, Outubro 1996.

- LAVE, J. Teaching, as learning, as practice. **Mind, Culture and Activity**, v. 3, n. 3, p. 149-164, 1996a.
- LAVE, J. **Apprenticeship in critical ethnographic practice**. Chicago: The University of Chicago Press, 2011.
- LAVE, J. Aprendizagem como/na prática. **Horizontes Antropológicos**, Porto Alegre, v. 21, n. 44, p. 37-47, dez 2015.
- LAVE, J.; PACKER, M. Hacia una ontología social del aprendizaje. **Revista de Estudios Sociales**, Bogotá, v. 40, p. 12-22, Agosto 2011.
- LAVE, J.; WENGEL, E. **Situated learning: legitimate peripheral participation**. Cambridge: CU Press, 1991.
- LEMOYNE, G.; CONNE, F. **Le cognitif en didactique des mathématiques**. Montreal: Les Presses de l'Université de Montréal, 1999.
- LERMAN, S. Learning as social practice: an appreciative critique. In: WATSON, A. **Situated cognition and the learning of mathematics**. Oxford: Centre for Mathematics Education Research, University of Oxford, 1998. p. 32-42.
- LERMAN, S. The social turn in mathematics education research. In: BOALER, J. **Multiple perspectives on mathematics teaching and learning**. Westport: Ablex, 2000. p. 19-44.
- LÉVY-BRUHL, L. **A mentalidade primitiva**. Tradução de Ivo Storniolo. São Paulo: Paulus, 2008. Edição original de 1922.
- LOPES, C. E. O Ensino da Estatística e da Probabilidade na Educação Básica e na formação de professores. **Cadernos do CEDES**, Campinas, v. 28, n. 74, 2008.
- LOPES, C. E. Os desafios para educação estatística no currículo de matemática. In: LOPES, C. E.; COUTINHO, C. D. Q. E. S.; ALMOULOU, S. A. **Estudos e reflexões em Educação Estatística**. Campinas: Mercado de Letras, 2010b. p. 47-64.
- LOPES, C. E. Educação Estatística no Curso de Licenciatura em Matemática. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 901-915, 2013.
- LOPES, C. E.; COUTINHO, C. D. Q. E. S.; ALMOULOU, S. A. **Estudos e reflexões em Educação Estatística**. Campinas: Mercado de Letras, 2010.
- LOPES, C. S. **A educação estatística no currículo de matemática: um ensaio**. 33ª Reunião Anual da ANPED. Caxambu - MG: [s.n.]. 2010.
- LOPES, E. J.; LOPES, R. F. F. Uma análise crítica da revolução cognitiva: implicações epistemológicas. **PSYCHOLOGICA**, Coimbra, v. 50, p. 7-19, 2009.
- LUCAS, C. O. et al. Aspectos da rigidez e atomização da matemática escolar nos sistemas de ensino de Portugal e da Espanha: análise de um questionário. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, 16, n. 1, 2014. 1-24.
- MATHERON, Y. Analyser les praxéologies quelques exemples d'organisations mathématiques. **Petit X**, Grenoble, v. 54, p. 51-78, 2000.

- MATOS, J. F. L. Aprendizagem e prática social: contributos para construção de ferramentas de análise da aprendizagem matemática escolar, 1999. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jfmatos/mestrados/Matos_1999.pdf>. Acesso em: 13 outubro 2017.
- MAURY, S. Didactique des mathématiques et psychologie cognitive : un regard comparatif sur trois approches psychologiques. **Revue française de pédagogie**, v. 137, p. 85-93, 2001.
- MAUSS, M. **As técnicas do corpo**. Tradução de Paulo Neves. São Paulo: Cosacnaify, 2003. 399-422 p. (Obra original de 1935).
- MERCIER, A. Comment appréhender le cognitif depuis la didactique. In: LEMOYNE, G.; CONNE, F. **Le cognitif en Didactique des Mathématiques**. Montréal : Les Presses de l'Université de Montréal, 1999. p. 133-150.
- MERCIER, A. Por une lecture e anthropologique du programme didactique. **Éducation et didactique**, v. 2, n. 1, p. 1-51, 2008.
- MICHELLIS. Moderno Dicionário da Língua Portuguesa. **Dicionário Michellis On Line**, 2018. Disponível em: <>. Acesso em: 7 setembro 2018.
- MLODINOW, L. **O andar do bêbado**: como o acaso determina nossas vidas. Tradução de Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.
- MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. S. O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica. **Revista Brasileira de Educação**, v. 28, p. 50-61, Jan-Abr 2005.
- MORIN, E. **O método III**: o conhecimento do conhecimento. Porto Alegre: Sulinas, 1999.
- MOURA, G. M. M.; SAMÁ, S. Ilusão da equiprobabilidade, aleatoriedade e convergência nos processos cognitivos envolvidos no raciocínio probabilístico. **VIDYA**, Santa Maria, v. 36, n. 2, p. 523-538, 2016.
- NAGAMINE, C. M. L. et al. Análise praxeológica dos passeios aleatórios da Mônica. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 24, n. 39, p. 451-472, 2011.
- NASCIMENTO JÚNIOR, D. F. et al. **Perfil socioeconômico dos alunos do curso de licenciatura em química da UEPB**. Anais do I Encontro Nacional de Educação, Ciência e Tecnologia/UEPB. Campina Grande: [s.n.]. 2012.
- OLIVEIRA, R. G. D.; SANTOS, V. D. M. Inserção inicial do futuro professor na profissão docente: contribuições do estágio curricular supervisionado na condição de contexto de aprendizagem situada. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 13, n. 1, p. 35-49, 2011.
- PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 3ª. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.
- PAIVA, M. A. V. O professor de Matemática e sua formação: a busca da identidade profissional. In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. **A formação do professor que ensina matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

- PAMPLONA, A. S. A formação estatística e pedagógica do professor de Matemática. **Zetetiké - FE**, São Paulo, v. 20, n. 37, jan/jun 2012.
- PIAGET, J.; INHELDER, B. **La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant**. Paris: PUF, 1951.
- POPPER, K. R. **A lógica da pesquisa científica**. Tradução de Leonidas Hegenberg e Octanny Silveira Da Mota. 13ª reimpressão da 1ª Edição. ed. São Paulo: Cultrix, 2007.
- RADFORD, L. **Cognição matemática: história, antropologia e epistemologia**. Tradução de (Revisão Técnica) Bernadete Morey e Iran Abreu Mendes. São Paulo: Livraria da Física, 2011.
- RATHIE, P. N.; ZÖRNIG, P. **Teoria da probabilidade**. Brasília: Ed UnB, 2012.
- RATSIMBA-RAJOHN, H. Guide d'utilisation des principales fonctionnalités du logiciel. In: GRAS, R., et al. **L'Analyse Statistique Implicative. Méthode exploratoire et confirmatoire à la recherche de causalités**. Toulouse: Éditions Cépaduès, 2013. p. 327-348.
- RÉGNIER, J. C. **Formation de l'esprit statistique et raisonnement statistique. Que peut-on attendre de la didactique de la statistique?** Conférence séminaire de didactique des mathématiques. Paris: IREM Paris 7. 2005.
- RICCO, G.; MENOTTI, G. TAD et Psychologie du développement cognitif: compatibilité ou incompatibilité théorique? In: RUIZ-HIGUEIRAS, L.; ESTEPA, A.; GARCÍA, F. J. **Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de La teoría Antropológica de lo Didáctico**. Jaén: Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén, 2006. p. 551-572.
- ROSE, N. Psicologia como uma ciência social. **Psicologia & Sociedade**, Florianópolis, v. 20, n. 2, p. 155-164, 2008.
- SÁENZ CASTRO, C. **Intuición y matemática en el razonamiento y aprendizaje probabilístico**. Tesis Doctoral (Psicología da Universidad Autónoma de Madrid). Madrid. 1995.
- SÁENZ, C. **Materiales para la enseñanza de la teoría de probabilidades**. Madrid: Fondo Editorial de Acceso Libre: UAM Ediciones, 1999.
- SANTANA, M. R. M. **O acaso, o provável, o determinístico: concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnologias) EDUMATEC-UFPE. Recife. 2011.
- SANTANA, O. A. Evasão nas licenciaturas das universidades federais: entre a apetência e a competência. **Educação**, Santa Maria, v. 41, n. 2, p. 311-327, mai/ago 2016.
- SANTOS, L. G. D. **O problema de Monty Hall: uma abordagem introdutória para o estudo de probabilidade condicional**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) UFSC. Florianópolis. 2015.
- SARRAZY, B. Le contrat didactique. **Revue Française de Pédagogie**, v. 112, p. 85-118, 1995.
- SARRAZY, B. Questions à la théorie anthropologique du didactique du point de vue de la théorie des situations et de l'anthropologie wittgensteinienne. In: RUIZ-HIGUERAS, L.; ESTEPA, A.; GARCÍA, F. J. **Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico**. Jaén: Servicio de publicaciones de la universidad de Jaén, 2006. p. 159-175.

SAVIANI, D. **nova lei da educação: trajetória, limites e perspectivas**. 7ª. ed. Campinas: Autores Associados, 2010.

SERRANO, L. et al. Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. **Educación Matemática**, 22, 1998. 7-25.

SHULMAN, L. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Research**, 15, n. 2, 1986. 4-14.

SIERPINSKA, A. Interaction des perspectives épistémologique, cognitive et didactique. In: LEMOYNE, G.; CONNE, F. **Le cognitif en Didactique des Mathématiques**. Montreal: Les Presses de l'Université de Montréal, 1999. p. 151-176.

SILVA, I. A. **Probabilidades: a visão laplaciana e a visão frequentista na introdução do conceito**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) PUC - SP. São Paulo. 2002.

SILVA, L. B. **A Estatística e Probabilidade nos currículos dos cursos de licenciatura em Matemática no Brasil**. Dissertação de Mestrado EDUMATEC - UFPE. Recife. 2014.

SOUZA, M. R. D. **Experiência do outro, estranhamento de si: dimensões da alteridade em antropologia e psicanálise**. Tese doutorado Instituto de Psicologia da USP. São Paulo. 2007.

SPINILLO, A. G. Noções iniciais das crianças sobre probabilidade. **Temas em Psicologia**, Recife, v. 1, n. 1, p. 47-68, 1995.

STETSENKO, A.; ARIEVITCH, I. M. Cultural-historical Activity Theory: Foundational worldview major principles, and the relevance of Sociocultural context. In: KIRSCHNER, S. R.; MARTIN, J. **The sociocultural turn in psychology: The contextual emergence of mind and self**. New York: Columbia University Press, 2010. p. 231-252.

THIRY-CHERQUES, H. R. Pierre Bourdieu: a teoria na prática. **RAP Rio de Janeiro**, Rio de Janeiro, v. 40, n. 1, p. 27-55, Jan/Fev 2006.

TOREN, C. Psicologia e Antropologia. **Revista Brasileira de Ciências Sociais**, v. 27, n. 80, Outubro 2012.

TOURINHO, E. Z. Notas sobre o Behaviorismo de Ontem e de Hoje. **Psicologia: reflexão e crítica**, Porto Alegre, v. 24, n. 1, p. 186-194, 2011.

TUZZO, S. A.; BRAGA, C. F. O processo de triangulação da pesquisa qualitativa: o metafenômeno como gênese. **Revista Pesquisa Qualitativa**, v. 4, n. 5, 2016.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA. **PDI - Plano de Desenvolvimento Institucional 2014-2022**. Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande. 2014.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA. **Projeto Político do Curso de Licenciatura em Matemática**. Centro de Ciências Humanas e Exatas - Campus VI. Monteiro - PB. 2015.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA. **Balanco Social 2012-2016**. Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande. 2016.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA. **Dados Institucionais 2016**. Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande. 2016.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA. **Plano de curso introdução à probabilidade 2016.2**. Centro de Ciências Humanas e Exatas. Monteiro. 2016.

VALENTE, J. A.; ALMEIDA, M. E. B. **Uso do CHIC na formação de educadores: à guisa de apresentação dos fundamentos e as pesquisas em foco**. Rio de Janeiro: Letra Capital, 2015.

VALENTE, W. Euclides Roxo e a história da Educação Matemática no Brasil. **Revista Iberoamericana de Educação Matemática**, v. 1, 2005.

VASCONCELLOS, M. J. E. **Pensamento sistêmico: o novo paradigma da ciência**. 9ª. ed. Campinas: Papirus, 2012.

VENÂNCIO, L. S.; BORGES, M. E. N. Cognição situada: fundamentos e relações com a Ciência da. **Revista eletrônica de biblioteconomia e ciência da informação**, Florianópolis, v. 22, 2006.

VERGNAUD, G. A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 155-217.

VILELA, D. S. Notas sobre a matemática escolar no referencial sócio-histórico-cultural. **Horizontes**, Bragança Paulista, v. 24, n. 1, p. 43-50, Jan/jun 2006.

VU NHU, T. H. **Une étude didactique sur l'introduction dans l'enseignement mathématique vietnamien de notions statistiques dans leurs liens avec les probabilités**. Thèse en Co-tutelle Université Joseph Fourier e Université Hó Chi Minh. Grenoble. 2009.

WALKERDINE, V. Redefining the Subject in Situated Cognition Theory. In: KIRSHNER, D.; WHITSON, JAMES **Situated Cognition: social, semiotic and psychological perspectives**. Londres: Routledge, 1997. p. 57-70.

WENGER, E. **Communities of practice: learning, meaning, and identity**. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

WINBOURNE, P.; WATSON, A. Participating in Learning Mathematics through Shared Local Practices in Classrooms. In: WATSON, A. **Situated Cognition and the Learning of Mathematics**. Oxford: Centre for Mathematics Education Research, University of Oxford, 1998. p. 93-104.

WINDFELDT, L. The formulation of policies building on scholarly knowledge - a study of actors in the noosphere. In: CHAACHOUA, H.; CHEVALLARD, Y.; CIRADE, G. **Actes du 6 Congrès Internationale sur la Theorie Antropologique du Didactique**. Autrans - Grenoble: [s.n.], 2018. no prelo.

WOOLFOLK, A. **Psicologia da Educação**. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.

WOZNIAK, F. **Conditions et contraintes de l'enseignement de la statistique en classe de seconde générale. Un repérage didactique**. Thèse de doctorat, Université de Lyon 1. Lyon. 2005.

WOZNIAK, F. **Les besoins praxéologiques du professeur**. Actes du VI congrès international de la TAD. Autrans: [s.n.], 2018.

10 ANEXOS E APÊNDICES

QUESTIONÁRIO 01

Caro (a) Estudante

Agradecemos a sua disposição em participar de nosso estudo. No questionário a seguir, encontram-se algumas questões que versam sobre Probabilidade e sobre algumas noções associadas a ela. Pedimos, gentilmente, que responda às questões, ficando à vontade para fazer qualquer tipo de anotação necessária no próprio questionário. Pedimos também que para aquelas questões cuja resposta não souber, escreva a frase “não sei responder”. Estamos prontos para quaisquer esclarecimentos.

Atenciosamente

José Luiz Cavalcante
Anna Paula A. B. Lima

1- Assinale a(s) alternativa(s) que apresenta(m) uma noção satisfatória do conceito de **ACASO**.

- A. () O acaso é um conjunto de causas imprevisíveis e independentes entre si, que não se prendem a um encadeamento lógico ou racional.
- B. () Dizemos que um fenômeno intervém o acaso quando todas as causas do fenômeno são conhecidas.
- C. () Dizemos que num fenômeno intervém o acaso quando nem todas as causas do fenômeno são conhecidas.
- D. () Dizemos que num fenômenos intervém o acaso quando as causas do fenômeno são desconexas
- E. () Num evento intervém o acaso quando as causas do fenômeno apresentam um encadeamento lógico de modo que se pode determinar o resultado do fenômeno antes da ocorrência do mesmo.
- F. () Dizemos que num fenômeno intervém o acaso quando o fenômeno não possui causa(s).

2 – Qual a alternativa está correta em relação à definição de **EXPERIMENTOS ALEATÓRIOS**?

- f) () os experimentos cujos resultados podem ser previstos, isto é, cujos resultados podem ser determinados antes de sua realização.
- g) () os experimentos que se realizam por acaso.
- h) () os experimentos que, ao serem realizados repetidas vezes, em condições semelhantes, apresentam resultados variados, não sendo possível portanto, a previsão lógica dos resultados.
- i) () Os experimentos que, ao serem realizados repetidas vezes, em condições semelhantes, apresentam resultados constantes, sendo possível portanto, o estabelecimento prévio dos resultados.

j) Nenhuma das alternativas anteriores.

3 - Em probabilidade, **ESPAÇO AMOSTRAL** é:

- f) um conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento.
- g) qualquer conjunto de resultados de um experimento aleatório.
- h) um subconjunto de qualquer evento.
- i) um espaço formado pelos eventos: certo, impossível, elementar, união, intersecção e complementar.
- j) nenhuma das alternativas anteriores

4 - No lançamento simultâneo de um dado e uma moeda comuns (não viciados) e a verificação das faces voltadas para cima, qual a probabilidade de se obter cara e um número menor que cinco? Pedimos que se possível apresente a resolução, isto é, o processo utilizado para se obter o resultado.

Resolução

4A- Ainda sobre a questão anterior, estamos trabalhando com um espaço amostral:

- equiprovável
- não-equiprovável
- infinito
- Vazio
- Nenhuma das alternativas anteriores.

4B- Sobre o processo de resolução, mesmo que não tenha respondido:

- é possível prever o resultado antes da realização do experimento.
- é o tipo de experimento cuja previsão resposta pode ser calculada teoricamente.
- a resposta depende da quantidade de vezes que realizamos o experimento na empiricamente.
- O resultado depende do observador ou de quem joga o dado e a moeda.

5 - Considere o experimento “lançamento de uma tacinha (ou percevejo) para o alto e observação da posição de equilíbrio sobre o solo após a queda”. O espaço amostral deste experimento possui dois resultados possíveis:

Posição 1: cabeça e ponta da tacinha tocando o solo.

Posição 2: apenas cabeça da tachinha tocando o solo.
Sobre este experimento responda:

A- O espaço amostral do experimento aleatório proposto é:

- infinito
- não-equiprovável
- equiprovável
- vazio

Fonte: pixbay.com

- nenhuma das alternativas anteriores



B- Sobre o processo de resolução:

- é possível prever o resultado antes da realização do experimento.
- é o tipo de experimento cuja previsão resposta pode ser calculada pela teoricamente.
- a resposta depende da quantidade de vezes que realizamos o experimento na empiricamente.
- O resultado depende do observador ou de quem joga o dado e a moeda.

QUESTÕES PROBABILIDADE – PARTE 1

Caro (a) Estudante

As questões a seguir estão relacionadas com a Probabilidade e com suas noções. Pedimos gentilmente que responda a cada uma das questões pedidas. Pedimos também que para aquelas questões cuja resposta não souber, escreva , então, a frase “não sei responder”. Estamos prontos para quaisquer esclarecimentos.

Atenciosamente

José Luiz Cavalcante
Anna Paula A. B. Lima

LANÇAMENTO DE DADOS

No lançamento de dois dados perfeitos e distinguíveis, um branco e outro vermelho, qual é a probabilidade de que:

- a) A soma seja “sete”?
- b) Ambos os números sejam pares?
- c) Ambos os números sejam iguais?
- d) A soma seja um número primo?

RESOLUÇÃO

PLANEJAMENTO FAMILIAR

Um casal planeja ter exatamente 3 crianças. Qual é a probabilidade de que (admita que não há gêmeos e nem trigêmeos na gravidez):

- A- Duas crianças sejam meninos e a outra, seja menina?
- B- Pelo menos um menino?

RESOLUÇÃO

BRINCANDO COM CAIXAS DE FÓSFOROS

Um jogo de crianças consiste em lançar uma caixa de fósforos sobre uma mesa e observar a face em que a caixa fica apoiada: face “pequena” (F1), face “média” (F2) ou face “grande” (F3). Sobre os procedimentos para resolver esse problema, qual a resposta mais adequada:

- () Lançar a caixa de fósforos algumas vezes e anotar os resultados obtidos;
- () Descrever o espaço amostral e aplicar a fórmula de probabilidade;
- () A probabilidade é $\frac{1}{3}$ pois tem uma (1) possibilidade de cada face dentre três (3);
- () Realizar um suficientemente grande de lançamentos e anotar os resultados obtidos;

Você tem uma sugestão de resolução?

RESOLUÇÃO

QUESTÕES PROBABILIDADE – PARTE 2

Caro (a) Estudante

As questões a seguir estão relacionadas com a probabilidade e com suas noções. Pedimos gentilmente que responda a cada uma das questões pedidas. Pedimos também que para aquelas questões cuja resposta não souber, escreva, então, a frase “não sei responder”. Estamos prontos para quaisquer esclarecimentos.

Atenciosamente

José Luiz Cavalcante
Anna Paula A. B. Lima

BRINCANDO COM MOEDAS

Luiza e Laura são irmãs e estavam brincando com duas moedas idênticas o jogo da cara ou coroa. Elas perceberam que, ao lançar a moeda, os resultados possíveis eram sempre ou Cara ou Coroa. Luiza escolheu Cara e Laura escolheu Coroa. As duas se puseram a jogar suas moedas e ver a quantidade de pontos que conseguiriam. Para cada face escolhida da moeda que fosse obtida com o lançamento, elas somariam um ponto. No começo do jogo, elas fizeram algumas jogadas. Como a mãe precisou da ajuda de uma delas, uma foi ajudar a mãe, mas a outra continuou lançando a moeda. Considere as seguintes estimativas de pontos: Laura fez 500 lançamentos obtendo pouco mais de 250 pontos, ou seja, obteve pouco mais de 250 coroas. Luiza só fez 50 lançamentos e obteve pouco mais de 25 pontos. Das estimativas citadas, alguma delas tem mais probabilidade do que o outro de ocorrer ou os dois são igualmente prováveis?

JUSTIFIQUE

AINDA SOBRE MOEDAS

Considere o experimento lançar uma moeda honesta e obter como possibilidade Cara ou Coroa.

Pedro lançou uma moeda três vezes e obteve cara todas as vezes. Sobre o seu próximo lançamento, podemos afirmar:

() Será Cara () Não será Cara () Será cara ou coroa

JUSTIFIQUE

REVISITANDO LANÇAMENTO DE DADOS

No lançamento de dois dados perfeitos e distinguíveis, um branco e outro vermelho, qual é a probabilidade de que:

- a) A soma seja “sete”?
- b) Ambos os números sejam pares?
- c) Ambos os números sejam iguais?
- d) A soma seja um número primo?
- e) O primeiro seja ímpar e o segundo 6?
- f) Ambos apresentarem faces ímpares e a soma ser 8?

RESOLUÇÃO