UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

PRÓ – REITORIA DE PESQUISA E PÓS – GADUAÇÃO

DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS - GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

MESTRADO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

LUCIANA SILVA DOS SANTOS

ANÁLISE DOS EFEITOS DIDÁTICOS EMERGENTES DE UMA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES NA APRENDIZAGEM DO SIGNIFICADO PARTE/TODO DO NÚMERO RACIONAL

RECIFE

2010

LUCIANA SILVA DOS SANTOS

ANÁLISE DOS EFEITOS DIDÁTICOS EMERGENTES DE UMA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES NA APRENDIZAGEM DO SIGNIFICADO PARTE/TODO DO NÚMERO RACIONAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino das Ciências e da Matemática – PPGEC, da Universidade Federal Rural de Pernambuco como pré-requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Ensino das Ciências. Área de concentração: Educação Matemática.

ORIENTADOR
Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos

RECIFE
2010

FICHA CATALOGRÁFICA
Setor de Processos Técnicos da Biblioteca Central – UFRPE

S237a Santos, Luciana Silva dos
Análise dos efeitos didáticos emergentes de uma sequência didática na aprendizagem do significado parte-todo do número racional / Luciana Silva dos Santos. – 2010.
270 f. : il.

Orientador: Marcelo Câmara dos Santos.
Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Educação, Recife, 2010.
Inclui referências.

1. Teoria das situações didáticas 2. Seqüência didática 3. Efeitos didáticos 4. Número racional 5. Significado parte-todo 6. Variável didática I. Santos, Marcelo Câmara dos, orientador II. Título

CDD 370

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

PRÓ – REITORIA DE PESQUISA E PÓS – GADUAÇÃO

DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS - GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

MESTRADO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

ANÁLISE DOS EFEITOS DIDÁTICOS EMERGENTES DE UMA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES NA APRENDIZAGEM DO SIGNIFICADO PARTE/TODO DO NÚMERO RACIONAL

LUCIANA SILVA DOS SANTOS

Dissertação defendida e aprovada em 16 de junho de 2010 pela Banca Examinadora composta pelos seguintes professores:

____

Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos

Presidente da Banca Examinadora – Orientador – UFPE

____

Prof. Dr. Abraão Juvêncio dos Santos

Examinador Externo – Colégio de Aplicação - UFPE

____

Profª. Drª. Anna Paula de Avelar Brito Menezes

1ª Examinadora Interna – UFRPE

____

Profª. Drª. Maria Mônica Lins Lessa

2ª Examinadora Interna – UFRPE

As pessoas grandes adoram os números. Quando a gente lhes fala de um novo amigo, elas jamais se informam do essencial. Não perguntam nunca: "Qual é o som da sua voz? Será que ele coleciona borboletas?" Mas, perguntam: "Qual é a sua idade? Quantos irmãos ele tem? Quanto pesa? Quanto ganha seu pai? Somente então é que eles julgam conhecê-lo. Mas, nós que compreendemos a vida não ligamos aos números. É muito simples, eis o meu segredo: Só se vê bem com o coração. O essencial é invisível aos olhos.

Antoine de Saint - Exupéry

Dedico essa pesquisa a minha mãe, Lenita,

às minhas irmãs, Daniella & Patrícia, ao meu esposo Flávio
por suas presenças constantes, pelo incentivo e
por acreditarem na realização desse sonho.
E, ao meu sobrinho Gabriel, que ainda não nasceu.
Mas, representa um divisor de águas em nossas vidas.

AGRADECIMENTOS

A conclusão do curso de mestrado é um marco na minha vida pessoal e profissional. Na qualidade de aluna, do Ensino Fundamental à pós-graduação, inúmeras vezes foi preciso ultrapassar barreiras, à primeira vista, intransponíveis. Nessa trajetória, foi necessário provar para mim mesma, que é fundamental acreditar no próprio potencial para poder alçar grandes vôos. Entretanto, esta não é uma condição sine qua non para a concretização dos nossos objetivos, pois, não somos auto-suficientes.

A escola da vida ensina que é indispensável estabelecer parcerias e contar com a cooperação de outras pessoas para que possamos atingir nossas metas. Assim sendo, direciono os mais sinceros agradecimentos a todas as pessoas e instituições que contribuíram para com esta pesquisa. Em particular, gostaria de registrar que algumas dessas pessoas sempre estiveram presentes participando, colaborando ou acompanhando as etapas do processo que culminou nessa dissertação. Por este motivo, agradeço:

A *Deus*, por todas as conquistas alcançadas e pelos parceiros que colocou na minha trajetória de vida, pois, eles me auxiliam na superação dos obstáculos desse caminhar.

Às gestoras, à professora e aos alunos do 5º Ano do Ensino Fundamental, do ano letivo de 2009, de uma escola pública da Região Metropolitana do Recife, por terem aberto as portas da escola e da sala de aula, permitindo a minha inserção nesse universo ímpar onde ocorrem os fenômenos didáticos. Afinal, sem a colaboração e a disponibilidade de todos eles não seria possível a realização desse estudo.

Ao professor *Marcelo Câmara*, orientador dessa pesquisa, pela disponibilidade, paciência e altruísmo. Sem dúvida, foi responsável, competente e perspicaz ao indicar o melhor caminho a seguir, ao apontar os equívocos cometidos, ao respeitar o ritmo da produção, ao ceder espaço oportunizando a liberdade para reflexão e (re) adequação das minhas escolhas ao longo do processo de construção da pesquisa. Agradeço, portanto, a oportunidade de aprender que com empenho e determinação é possível produzir com qualidade.

À *UFRPE,* aos professores e à coordenação do Programa de Pós-graduação em Ensino das Ciências, representados pelas professoras Edênia Amaral e Helaine Sivini, que contribuíram para com a minha formação profissional.

Ao *CNPQ*, pelo suporte financeiro, que viabilizou a minha participação nos fóruns de discussão sobre a Educação Matemática e contribuiu para que o meu tempo fosse integralmente destinado as atividades acadêmicas.

As professoras do PGGEC, *Anna Paula de Avelar Brito Menezes* e *Maria Mônica Lins Lessa* pela atenção e carinho dispensados nas aulas das disciplinas ministradas no PPGEC. A elas e ao professor Abraão Juvêncio dos Santos, minha gratidão por aceitarem compor a banca e por examinarem com seriedade o presente estudo. Estes representantes da comunidade acadêmica, no âmbito da Educação Matemática contribuíram significativamente para com o aperfeiçoamento desta produção.

À minha mãe, *Lenita Maria*, mulher de fibra, que com amor e dedicação ensinou a suas filhas e alunos o valor e o poder transformador da Educação. A principal incentivadora dos meus projetos de vida, a amiga leal e companheira de todas as horas, sem a qual não seria possível dedicação exclusiva à pesquisa. E, as minhas irmãs e amigas: *Daniella Santos* e *Darlene Patrícia*, simplesmente por existirem, propiciarem muitas alegrias, dispensarem amor e palavras de encorajamento. Agradeço, pelos os momentos de lazer e reflexão sobre a vida.

Ao meu esposo *Flávio Venâncio* por suportar com amor e paciência as minhas ausências nos momentos de estudo. Agradeço o apoio incondicional e dedicação para comigo. Aos demais familiares, especialmente à tia *Maria*, que sempre apoiou, estimulou e orgulhou-se dos nossos progressos pessoais e profissionais. Ao meu primo/irmão *Aldenir Barbosa*, presença constante na minha vida, agradeço a amizade, a disponibilidade para ouvir e ajudar.

Às minhas amigas do curso de mestrado *Célia Fortes*, *Flávia Marques*, *Lívia Lima* e *Juliana Cristina* pela autêntica troca de experiências, os momentos de estudo, as valiosas contribuições relativas à pesquisa, bem como pelo privilégio da amizade. Aos amigos *José Sérgio*, *Marlem Leandro*, *Olavo Nojosa* e *Ana Eliza*, pelo incentivo, a valiosa colaboração e o suporte tecnológico. E, aos colegas das Escolas Monteiro Lobato e Dr. Rodolfo Aureliano, especialmente à *Josué Souza* pela amizade e cooperação.

Àqueles que compõem o Núcleo de Avaliação de Rede/Setor de Formação Continuada do Cabo de Santo Agostinho, representadas por *Nelma Nascimento* e *Rosane Almeida*, agradeço a oportunidade e o aprendizado ao integrar a equipe de formadores deste município.

RESUMO

A presente pesquisa se insere no âmbito da Educação Matemática e teve como objetivo investigar os efeitos didáticos que emergiram de uma sequência de atividades que explora a noção de fração mediante o significado parte/todo do número racional. A sequência didática, constituída por três grupos de atividades, foi extraída do livro didático de Matemática adotado pelos professores de uma rede municipal de ensino da Região Metropolitana do Recife. Em uma das escolas vinculadas a essa rede, propusemos a aplicação da sequência didática selecionada, para quarenta e dois alunos do 5º Ano do Ensino Fundamental da referida instituição; Estes foram estimulados a resolver as atividades em duas situações distintas: uma didática, ou de aprendizagem, e, outra de avaliação. Para viabilizar a análise dos dados buscamos aporte teórico em alguns fundamentos presentes na Teoria das Situações Didáticas (Guy Brousseau, 1986). Nessa perspectiva teórica, a referida sequência compreende um universo de situações didáticas que, por sua vez consistem num modelo de interação do aluno com o meio didático: as atividades propostas pelos autores do livro. Nesse sentido, o comportamento e as estratégias adotadas pelo aluno ao atuar numa situação revelam o funcionamento do dispositivo de ensino: a sequência. O feedback do aluno através das resoluções apresentadas nos protocolos evidencia o surgimento dos efeitos didáticos que dificultam a aprendizagem do conceito parte/todo do número racional. Esses efeitos decorrem de vários aspectos, por exemplo, dos entraves de cunho epistemológico ou provenientes de abordagens precárias, presentes inclusive no livro didático, que fragmentam e não favorecem a articulação entre os aspectos concernentes ao objeto matemático mencionado. A análise, apresentada nesse estudo, advém do cruzamento de informações obtidas através dos instrumentos metodológicos utilizados. Entre as conclusões apresentadas na pesquisa destacamos que o jogo de variáveis didáticas e dos respectivos valores, manipuladas pelos autores do livro didático na elaboração da sequência, influenciam as estratégias mobilizadas pelos alunos durante a resolução das atividades e/ou exercícios. De certo modo, a sequência didática investigada, parece não favorecer a progressão das aprendizagens dos alunos, porque restringe a noção de fração apenas à divisão do inteiro contínuo ou discreto em partes “iguais”. Constatamos, portanto que há necessidade de efetuar adequações na referida sequência didática objetivando a reformulação de alguns modelos propostos, a revisão das ilustrações, dos textos introdutórios ou dos enunciados das atividades. Mas, sobretudo alterações que propiciem o equilíbrio entre a quantidade de atividades que utilizam como registro de referência o inteiro contínuo e discreto; E, além disso, é importante destacar que as modificações a serem realizadas na sequência didática contemplem outras conexões, tais como: a relação parte/parte e todo/parte; bem como, alterações que favoreçam a abordagem e a articulação de outros significados do número racional (quociente, razão, medida).

Palavras-chave: Educação Matemática, Teorias das Situações Didáticas, Número Racional, Relação parte/todo, Meio Didático, Variável Didática.

ABSTRACT

This present research is inserted into the field of Mathematics Education and is aimed at investigating the didactical effects emerging from a sequence of activities that explore the notion of fractions related to the whole/part meaning of the rational numbers. The didactical sequence, consisting of three groups of activities, was extracted from a Mathematics textbook used by teachers from a municipal education network in the metropolitan area of Recife. At one of the schools run by the referred-to network, we proposed the application of the didactical sequence and we counted on the collaboration of forty-two elementary school fifth-graders who were motivated to solve the activities in two different situations: a didactical, or learning one, and an evaluating one. In order to make the analysis of data possible we went for some theoretical foundations present in the "Theory of Didactical Situations in Mathematics'', by Guy Brousseau (1986). From this theoretical perspective, the referred-to sequence comprises a range of didactical situations which consist themselves in a pattern of interaction with the didactical environment: the activities proposed by the authors of the textbook. And in this sense, the behavior and the strategies adopted by the student as he acts to a situation, reveal the function of the teaching mechanism: the sequence. Or rather, the feedback from the student through the solutions presented as he is confronted with evidences the rise of didactical effects that make the learning of concepts difficult. In the first years of elementary education, the teaching and learning of the aspects concerning rational numbers begin in the building up of the notion of fractions with an approach predominantly meant for whole/part meaning. However, prior researches points that the fraction concept is one of the most difficult to be assimilated by the student, because the effective understanding presupposes articulation of several meanings associated with the rational numbers. The analysis presented in this study comes from checking information obtained in the methodological instruments that were utilized. One of the conclusions of this analysis indicates that the game of didactical variables and the respective values, manipulated by the authors of the textbook in the elaboration of the sequence, influences the strategies mobilized by the students in the resolution of the activities and/or exercises. On the other hand, the investigated didactical sequence seems not to favor the progression of the learning of the students, because it restricts the notion of fractions just to the division of the continuous or discrete whole numbers into "equal" parts. We detected, therefore, that there is a need for an adequacy of the didactical sequence, aiming at the reformulation of the proposed patterns, the revision of the illustrations and texts contained in some activities, the equilibration between the quantity of activities that utilizes the continuous whole numbers and the discrete ones as reference record. And still it is important to point out that the suggested modifications contemplate other connections, such as: the whole/part relation; as well as, alterations that favor the approach and the articulations of other meanings of fractions (quotient, ratio or probability).

Key words: Mathematics Education, Theory of Didactical Situations, Rational Number, Whole/part relation, Didactical environment, Didactical variables

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Lista de Gráficos **Página**

Lista de Quadros **Página**

Lista de Tabelas **Página**

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática originou-se e evoluiu concomitantemente com a humanidade. O conhecimento matemático, desde os primórdios das civilizações, foi construído para atender as demandas emergentes das necessidades humanas. Portanto, de certa forma à busca incessante por soluções para os problemas cotidianos possivelmente é de onde ascende o patrimônio intelectual e imaterial dessa ciência. A observação da realidade, a utilização dos recursos disponíveis e a aplicação dos conhecimentos, acumulados ao longo de milênios, possibilitam ao homem usufruir do avanço científico e tecnológico da sociedade atual.

Neste contexto, a Matemática é uma ferramenta cultural e, portanto, apropriar-se dos conhecimentos nela implícitos constitui um fator preponderante e necessário às interações que se estabelecem numa sociedade cada vez mais complexa, industrializada e informacional. Dessa forma, é relevante considerar que inúmeros conhecimentos de natureza matemática podem ser desenvolvidos ou adquiridos nas interações sociais e com o meio, ou seja, antes mesmo do ingresso da criança na escola.

Ao integrar o ambiente escolar e vivenciar experiências que suscitem o desenvolvimento da capacidade de utilização da argumentação matemática apoiada nos mais diversos tipos de raciocínio: dedutivo, indutivo, probabilístico, por analogia, entre outros. Desse modo a criança estará, portanto, diante da oportunidade de ampliar o seu repertório de conhecimentos.

Assim sendo, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, a função social do ensino de Matemática, na Educação Básica, consiste em instrumentalizar o aluno com habilidades (formular, analisar, sintetizar, conjecturar, abstrair, generalizar, por exemplo), para que posteriormente, ele seja capaz de atuar em situações da vida em sociedade.

Entretanto, as avaliações de sistema, tais como a Prova Brasil e o Saepe, por exemplo, indicam que a aprendizagem dos objetos matemáticos elementares, analisada a partir da resolução de problemas, tem ficado aquém das expectativas. Ao que tudo indica, é provável que esteja havendo o distanciamento entre o conhecimento matemático e a realidade.

De fato, aprender Matemática, não tem sido uma das tarefas mais simples, as distorções com relação à finalidade desse componente curricular atreladas às dificuldades intrínsecas dos conteúdos nela engendrados não tem favorecido a aprendizagem escolar. Na escola, ainda persiste a visão equivocada, de que para aprender Matemática é suficiente dedicar tempo e esforço à resolução de extensas listas de exercícios, em geral, por repetição e desprovidos de qualquer significado para o aluno.

A adoção e o emprego deste modelo, pelo professor, são no mínimo questionáveis quanto à aprendizagem que proporciona, independentemente do objeto matemático, pois, este tornar-se limitado e o insucesso do aluno é frequentemente observado. A visão mencionada, acerca da aprendizagem ainda impregna as concepções, o discurso e a prática docente.

De acordo a nossa compreensão, o modo como o aluno aprende deve ser observado sob uma nova perspectiva, segundo a qual a aprendizagem ocorre de modo similar ao que acontece na sociedade humana. Nessa perspectiva, aprender é um processo de construção intencional que é próprio de cada indivíduo e a superação dos entraves, que permeiam esse processo, não ocorre apenas na formalização, no mecanicismo, no treinamento repetitivo das técnicas arraigadas no ensino da Matemática.

A aprendizagem se constrói na medida das necessidades e das situações que se apresentam, por meio do jogo combinado de tendências pré-existentes e de experiências progressivas e desafiadoras. Nesse sentido, concordamos com Brousseau (2008), quando afirma que o aluno aprende adaptando-se a um meio que é fator de contradições, dificuldades e desequilíbrios. E, o saber que é fruto dessa adaptação do aluno, manifesta-se por meio das respostas novas para o problema proposto, e, estas respostas sinalizam se houve de fato aprendizagem.

Embora haja avanços quanto à abordagem de alguns conceitos matemáticos, em sala de aula, em relação a outros as estratégias de ensino parecem não surtir o efeito desejado. De certa forma, tais iniciativas acabam configurando condições que não corroboram para que o aluno progrida em suas aprendizagens. Contraditoriamente, algumas estratégias de ensino acabam favorecendo o anacronismo das aprendizagens dos objetos matemáticos.

Para ilustrar as afirmações precedentes façamos um recorte na infinidade de conceitos matemáticos que são apresentados ao aluno nos primeiros anos do Ensino Fundamental.

Digamos, portanto que ainda é iminente o insucesso ao ensinar e aprender sobre os aspectos relativos ao número racional. Uma vez que, durante muito tempo, as expectativas dos professores, em geral, estavam voltadas para que o aluno apenas operasse e simplificasse frações sem a devida compreensão do seu significado e das diferentes representações para um mesmo número racional. Ou seja, o trabalho do professor e do aluno era árduo e desprovido de sentido, pois os conceitos eram "aprendidos" à custa da repetição e da memorização de um extenso conjunto de regras.

As pesquisas atuais, citadas nessa pesquisa, indicam que as estratégias de ensino mais eficazes caminham na direção da construção dos significados do número racional e a posteriori conduzir o trabalho com as múltiplas representações e, consequentemente efetuar operações neste campo numérico. No entanto, observamos que o ensino acerca dos racionais continua compartimentado, primeiro o aluno estuda as frações, em seguida os decimais, as operações entre frações e entre decimais, por fim porcentagem, razão ou probabilidade, como se não houvesse nenhuma conexão entre as diferentes representações e significados.

Muito embora, desde 1997 os Parâmetros Curriculares Nacionais[1] forneçam elementos de discussão que favoreçam a articulação entre os aspectos que repercutem na apropriação dos conceituais acerca dos números racionais. Bem como, dos aspectos procedimentais impregnados na prática docente possibilitando a reflexão quanto às alternativas e encaminhamentos possíveis para o trabalho introdutório, destinado à ampliação ou consolidação dos conhecimentos do aluno com relação aos números racionais.

Nos primeiros anos do Ensino Fundamental, no que tange ao ensino dos números racionais, os PCN sugerem que as noções básicas sejam abordadas desde o 1º Ciclo (2º e 3º anos do Ensino Fundamental). No entanto, enfatizam que apenas no 2º Ciclo (4º e 5º anos do Ensino Fundamental), o trabalho com esses números seja mais efetivo.

Mais adiante os PCN preconizam que a constante retomada dos conceitos associados aos números racionais favorece a ampliação e a consolidação dos conhecimentos adquiridos no ciclo anterior, entre os quais o de: *números naturais, adição, medida*, por exemplo, por meio do estabelecimento de relações com conceitos novos àqueles atribuídos aos *números*

---

[1] A partir de agora, sempre utilizaremos a sigla PCN, quando estivermos nos referindo a essas orientações curriculares.

racionais. Além disso, a aprendizagem acerca dos racionais possibilita o aperfeiçoamento de procedimentos (contagem, medições), e proporcionam a construção de novos conceitos como proporcionalidade, por exemplo.

Outro aspecto relevante que encontramos nos PCN, em relação à realização de um trabalho mais significativo no 2º ciclo, consiste na apresentação de problemas cujas soluções não se encontram no campo dos números naturais. Estes problemas possibilitam a aproximação da noção de número racional, através da compreensão as representações: fracionária e decimal, bem como dos múltiplos significados do número racional. Ainda segundo os PCN, o ensino dos racionais no 2º Ciclo, ou seja, no 4º e 5º Ano do Ensino Fundamental, deve-se ater aos significados referentes: à relação parte/todo, quociente da divisão entre dois números naturais, índice comparativo entre duas grandezas, representação percentual e probabilística.

A dar início ao trabalho de pesquisa verificamos que a apropriação da ideia de fração por parte do aluno, há décadas, tem sido alvo de inúmeras pesquisas. Acreditamos que o interesse dos pesquisadores parte do pressuposto que o conteúdo (números racionais) integra o currículo das crianças desde o início da escolarização e permanece sem ser compreendido ou ampliado pelos alunos de diferentes níveis de escolaridade. A pesquisa desenvolvida por Catto (2000), por exemplo, evidenciou que alunos do Ensino Médio ainda apresentam dificuldade quanto à diferenciação entre o representante (decimal ou fracionário) e o representado (número racional).

Examinando Nunes (2005), encontramos uma afirmação que reforça o nosso argumento sobre a aprendizagem das frações. Os estudos, realizados pela autora, mostram que os alunos que aprendem frações apenas como uma rotina que leva a encontrar um nome para um pedaço de algo e, estes não conseguem perceber os aspectos relevantes para a compreensão do conceito como a necessidade de termos de partes iguais e a equivalência.

De fato, a minha experiência em sala de aula, como professora de Matemática, no Ensino Fundamental e Médio em escolas públicas da Região Metropolitana do Recife, desde 1993, possibilitou a constatação das inúmeras dificuldades dos alunos para compreender a noção e estabelecer relações entre os diferentes significados do número racional.

A partir de 2002, atuando na formação continuada dos professores, das séries iniciais do Ensino Fundamental, da Rede Municipal de Ensino do Cabo de Santo Agostinho, percebemos que compartilhávamos as mesmas inquietações com este professores: a insatisfação quanto ao fracasso dos alunos em relação à aprendizagem dos aspectos relativos ao número racional. Nos debates sobre o ensino e a aprendizagem desse objeto matemático surgiam inúmeros questionamentos, entre os quais: *Por que a compreensão dos significados e a apropriação das representações do número racional é complexa? Quais os fatores que interferem na aprendizagem dos aspectos relativos ao número racional, no 5º Ano do Ensino Fundamental? Se o aluno resolver todos os exercícios do livro didático ele aprende sobre frações?*

Nesses episódios, sentíamos a necessidade de subsidiar o trabalho do professor fornecendo-lhe elementos que possibilitassem a elucidação dessas questões. Além disso, uma característica comum a nós professores consistia em buscar suporte para promover situações didáticas, envolvendo os aspectos relativos aos números racionais, nas sequências de atividades sugeridas nos livros didáticos adotados na rede. Em contrapartida, ao fazer uso desse instrumento, frequentemente, nos deparávamos com linearidade da abordagem das propostas pedagógicas desses manuais didáticos nas abordagens relativas aos números racionais.

Consequentemente torna-se nítida a insuficiência dos dispositivos de ensino no atendimento das particularidades e no enfrentamento dos obstáculos inerentes ao trabalho com os números racionais nos primeiros anos do Ensino Fundamental. Todavia, o livro didático ainda é um importante aliado do professor na sistematização e institucionalização dos saberes em sala de aula.

E, embora não haja garantias de que o uso sistemático das propostas nele contidas possa contribuir para com a minimização das dificuldades do processo de ensino e aprendizagem do número racional nós nos propomos a analisar o livro didático na perspectiva de investigar os possíveis efeitos didáticos oriundos de uma das propostas para o início do trabalho com os números racionais. Uma vez que as sequências didáticas utilizadas pelos professores, em geral, são aquelas encontradas no livro didático, na medida em que esse instrumento é, na maioria dos casos, o único referencial disponível para utilização tanto por professores quanto pelos alunos.

Nessa pesquisa, ao analisar a abordagem introdutória acerca do número racional, nos livros didáticos, de uma das coleções aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2007, foi possível identificar certa sutileza intencional dos autores para reduzir a incidência das respostas equivocadas nas atividades sugeridas na sequência didática.

Estes recorrem à utilização de estratégias que oferecem "pistas" ao aluno das respostas esperadas. Identificamos a presença destes mecanismos nos textos introdutórios, nas ilustrações e enunciados. Tais subterfúgios, que aparecem no livro didático analisado, praticamente fornecem/apontam as respostas, as técnicas e/procedimentos que devem ser usados pelo aluno para responder os exercícios e atividades sugeridas.

Dessa forma, os acertos são maximizados por meio da indução à resposta correta. Neste caso específico, essa uma das características mais comuns detectadas nas atividades que integram o dispositivo analisado na presente pesquisa. A principal consequência dessa variável consiste em conduzir professores e alunos à falsa sensação que, de fato, houve uma aprendizagem efetiva.

Na realidade, o trabalho com apenas uma sequência didática, poderá resultar em produções puramente mecânicas. As afirmações contidas nos parágrafos precedentes colocam as motivações que despertaram o nosso interesse em investigar se as variáveis didáticas (o tipo de contexto, a forma das figuras, o enunciado, por exemplo), manipuladas pelos autores do livro didático na elaboração da sequência didática selecionada, influenciam as estratégias mobilizadas pelos alunos no momento da resolução das atividades que a compõem e se estas produzem efeitos didáticos indesejáveis.

Para tanto, buscamos respaldo em estudos anteriores e na própria experiência em sala de aula, partimos da hipótese de que as variáveis didáticas trazem em seu bojo implicações tanto para o ensino quanto para a aprendizagem do significado parte-todo do número racional. Porém, acreditamos que os efeitos didáticos também são produzidos por outros fatores que permeiam as relações estabelecidas entre o professor, o aluno e o conhecimento em cena no jogo didático.

As reflexões introdutórias possibilitaram a definição da questão central da pesquisa: *Quais os efeitos didáticos que emergem no processo de ensino e aprendizagem do significado parte/todo do número racional, ao utilizar integralmente a seqüência de atividades sugerida no livro didático, com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental?*

Na tentativa de responder a questão central da pesquisa estabelecemos os objetivos que nortearam o desenvolvimento do trabalho. Diante dos argumentos apresentados anteriormente, formulamos o objetivo geral que consistiu em:

- *Analisar os efeitos didáticos emergentes de uma sequência de atividades, proposta no livro de Matemática que se destina ao ensino e a aprendizagem do significado parte/todo do número racional.*

Com o intuito de alcançar o objetivo geral da pesquisa foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- *Analisar as atividades que compõem a sequência didática, antecipando as estratégias a serem mobilizadas pelo aluno ao realizar conversões entre diferentes registros de representação (pictórica, simbólica e em linguagem natural), a partir do significado parte/todo, do número racional.*

- *Diagnosticar a influência das variáveis didáticas, manipuladas pelos autores do livro na elaboração da sequência didática, na incidência de erro(s) e acerto(s) relativos à resolução das atividades propostas.*

- *Identificar na análise a posteriori os efeitos didáticos que emergiram durante a aplicação da sequência didática, mediante a análise dos protocolos e das interações dialógicas travadas entre os parceiros da relação didática na interação com o dispositivo de ensino (sequência didática).*

Nesse sentido, a pesquisa intitulada: *Análise dos efeitos didáticos emergentes de uma sequência de atividades na aprendizagem do significado parte/todo do número racional* se insere no contexto da Educação Matemática, mais precisamente na vertente que investiga e analisa entre os fenômenos didáticos evidenciados na sala de aula.

Ressaltamos que nessa investigação ao invés de elaborar uma sequência didática optamos por extrair e aplicar uma das sequências de atividades sugerida no livro didático[2] de Matemática. O livro didático mencionado corresponde a um dos volumes da Coleção Matemática Paratodos. E, foi adotado pelos professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, das 87 escolas vinculadas à Rede Municipal de Ensino do Cabo de Santo Agostinho, em duas escolhas consecutivas do Programa Nacional do Livro Didático, em 2004 e 2007.

A identificação, descrição e a análise dos efeitos didáticos foram possíveis mediante a realização de registros videográficos das interações dialógicas dos alunos com o professor e com o dispositivo de ensino. Além disso, nos debruçamos na apreciação dos protocolos dos alunos obtidos após a realização das três sessões, nas quais foram vivenciadas as atividades sugeridas na seqüência didática.

Na tentativa de elucidar, as questões apresentadas, a pesquisa está organizada da seguinte maneira: na introdução trazemos o nosso ponto de vista acerca do ensino e da aprendizagem relativa aos números racionais. Assim como, apresentamos os aspectos que motivaram a realização do estudo acerca dos efeitos didáticos que tem origem na manipulação das variáveis didáticas presentes nas atividades propostas nas situações didáticas. E, na tentativa de elucidarmos tal problemática, lançamos mão de uma hipótese de partida, a questão central e expusemos os objetivos que nortearam o desenvolvimento do trabalho.

Na sequência, o primeiro capítulo contém alguns relatos e supostos episódios da História da Matemática que ilustram a possível origem, a funcionalidade, e a evolução das formas de representação do número racional nas práticas usuais das civilizações antigas. Em seguida, buscamos conceituar o objeto matemático: o número racional. Bem como, relacionamos e tecemos considerações acerca dos significados atribuídos ao número racional. No item subseqüente, arrematamos o capítulo aprofundamos os aspectos concernentes ao significado parte/todo do número racional.

No segundo capítulo, refletimos sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais no Ensino Fundamental. Nesse sentido, destacamos as contribuições das produções acadêmicas

---

[2] IMENES, Luiz Márcio.; LELLIS, Marcelo.; MILANI, Estela. COLEÇÃO MATEMÁTICA PARATODOS. Volumes da 3ª série do Ensino Fundamental. São Paulo: Editora Scipione, 2004.

que precedem a nossa pesquisa. Posteriormente, nos debruçamos sobre as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais acerca do processo de ensino e aprendizagem do número racional relacionando os conceitos e relações que podem ser abordadas nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Por outro lado, discorremos sobre os entraves à compreensão dos conceitos associados ao objeto matemático em questão.

Ainda no segundo capítulo, discutimos sobre o livro didático de Matemática e a concepção de ensino difundida por este instrumento acerca dos aspectos relativos ao número racional. Além disso, buscamos argumentar quanto à influência do livro didático na gestão do tempo de ensino e aprendizagem. E, em seguida, apresentamos a proposta pedagógica da Coleção Matemática Paratodos que foi utilizada como referência para o desenvolvimento da pesquisa em sala de aula com os alunos do 5º Ano do Ensino Fundamental.

O terceiro capítulo, por sua vez, tem por objetivo apresentar os fundamentos relativos à Teoria das Situações Didáticas que constituem a base teórica que possibilitaram a estruturação e a análise dos dados construídos ao longo do processo de elaboração da pesquisa. Nesse capítulo discorremos sobre o jogo didático, os parceiros da relação didática e a interação destes com o meio didático (sequência didática); a forma como o meio é estruturado; a tipologia das situações didáticas; a influência do contrato didático e das variáveis manipuláveis, intrínsecas às atividades, na constituição dos efeitos didáticos.

No quarto capítulo destacaremos as opções metodológicas que conduziram a pesquisa descrevendo o cenário, os sujeitos, o livro didático e a sequência didática dele extraída. Assim como, caracterizamos as situações didáticas vivenciadas em sala de aula. Avançamos com o delineamento das etapas percorridas na construção e análise dos dados referentes ao objeto de estudo e sobre a finalidade dos instrumentos utilizados na pesquisa que possibilitaram alcançar os objetivos previamente estabelecidos.

O quarto capítulo se encerra com a análise a priori das atividades que integram a sequência didática. Na análise antecipamos descrevemos a forma como o significado parte/todo do número racional é abordada em contextos distintos. Em cada atividade foram elencadas as variáveis didáticas e os respectivos valores que constituem as opções didáticas dos autores do livro didático. Nesse sentido, antecipamos as dificuldades e as estratégias mobilizadas pelos alunos no processo de resolução.

Enquanto no quinto e último capítulo, complementamos a pesquisa com a análise qualitativa dos dados obtidos em sala de aula. A análise a posteriori está pautada na discussão quanto à influência das variáveis didáticas na emergência dos efeitos didáticos em duas situações distintas: na situação de aprendizagem e na situação de avaliação. Finalizamos, o trabalho apresentando as considerações finais sobre os resultados obtidos com o estudo, as possíveis contribuições e as questões que poderão ser esclarecidas nos trabalhos a serem desenvolvidos posteriormente.

CAPÍTULO I – O NÚMERO RACIONAL

Este capítulo destina-se a conceber o modo como o número racional está vinculado nas tramas da História e na Educação Matemática. Ao realizar uma breve evocação dos aspectos e dos relatos históricos objetivamos situar a origem, a configuração, a funcionalidade e a aplicabilidade do número racional. Dessa forma, este fragmento do capítulo enfatiza que em todos os momentos da História as ideias matemáticas estão presentes nas formas de fazer e saber.

No item posterior conceituamos o objeto matemático destacando as contribuições de Kieren (1975), Bher, Lesh, Post e Silver (1983), entre outros pesquisadores na categorização dos significados atribuídos ao número racional. Em seguida, aprofundamos a descrição da relação parte/todo que consiste no ponto de apoio para a construção dos demais significados.

Na sequência, apresentamos algumas considerações sobre o ensino e a aprendizagem acerca dos números racionais no Ensino Fundamental. Bem como, discorremos sobre a relevância e a finalidade do livro didático no enfrentamento e na superação dessas dificuldades. O delineamento das etapas do capítulo é fundamental, pois a compreensão das dificuldades inerentes ao ensino e a aprendizagem dos conceitos que o envolvem está condicionada principalmente à epistemologia desse conhecimento.

1.1 Aspectos históricos associados ao número racional

Em todos os momentos da História da humanidade as ideias matemáticas foram sendo construídas e instituídas, a partir das necessidades emergentes na vida cotidiana. Na incessante busca de constituir sua identidade social, intelectual, política e ética, tornou-se fator preponderante raciocinar com a finalidade de solucionar os problemas que surgiam. Ou seja, a Matemática tem suas raízes fincadas nas práticas sociais das civilizações que nos precederam.

O desenvolvimento da linguagem (sinais $\rightarrow$ desenhos $\rightarrow$ símbolos $\rightarrow$ palavras) possibilitou expressar, registrar e disseminar o legado de saberes provenientes da sapiência humana, inclusive àquelas que dizem respeito ao pensamento matemático abstrato. Todos os povos, desde os tempos mais longínquos, desenvolveram suas linguagens e a simbologia própria para comunicar e transferir aos seus descendentes o conhecimento adquirido essencialmente através da vivência.

Nesse sentido, concordamos com Lévy (1993) quando afirma que o registro escrito em geral, os sistemas de representação e as notações inventadas pelo homem, ao longo dos séculos, têm a função de semiotizar, reduzir a uns poucos símbolos ou a alguns poucos traços os grandes novelos confusos da linguagem, as sensações e a memória que formam o nosso real.

E, embora alguns desses registros sejam remotos e questionáveis, já que não é possível precisar datas e contextos, estes servem como uma provável justificativa para a origem, a relevância, a construção dos significados atribuídos a alguns conceitos no âmbito da Matemática. Por outro lado, essa gama de elementos auxilia a compreensão de que o conhecimento disponível na atualidade percorreu uma longa trilha até ser construído, numa trajetória repleta de idas e vindas.

Ao resgatar evidências históricas conjecturamos que a evolução dos conceitos matemáticos é uma sequência de pelo menos dois estágios: o intuitivo e o instruído. E, na maioria dos casos, na passagem de um estágio a outro há uma distância secular ou milenar. Esse aspecto mencionado indica que a Matemática não é uma ciência estática nem definitiva. Mas, um campo do conhecimento em constante construção e, consequentemente, não está imune às transformações necessárias para o avanço do conhecimento.

Nesse sentido, ao direcionar o foco para o número racional, percebemos que assim como em relação a diversos objetos da Matemática não é possível traçar uma linha do tempo precisa. No entanto, a História da Matemática traz elementos substanciais que sugerem a origem, a funcionalidade e os primeiros sentidos atribuídos ao número racional, foram construídos e partilhados entre civilizações antigas por meio de uma Matemática utilitária.

Os historiadores ao analisar a linguagem, a simbologia e os resquícios das civilizações antigas (egípcia, grega, mesopotâmica, árabe, hindu, entre outras), principalmente aqueles provenientes das escavações realizadas por arqueólogos, sinalizam que o emprego dos números racionais sempre esteve associado aos episódios em que era necessário dividir ou medir. Ao que tudo indica, a utilização do número racional nas práticas cotidianas aparecia, predominantemente, sob a forma de frações. É provável que essa noção tenha surgido devido à dificuldade para resolver problemas recorrentes utilizando apenas números naturais.

Ainda no que diz respeito à funcionalidade dos números racionais, em especial a compreensão da noção de fração e os seus significados (quociente, medida, razão e operador) foram sendo construídos paulatinamente mediante a observação e a atuação das pessoas nas atividades sociais desde a pré-história até a Idade Média.

O legado deixado pelas antigas civilizações acerca desse objeto matemático ainda é premente hoje em dia. Como sabemos, a representação decimal do número racional prevalece nas práticas da atualidade em detrimento da representação fracionária. Entretanto, nem sempre foi assim, pois, em relação a outros conceitos matemáticos a representação decimal surgiu relativamente tarde. Ou seja, essa notação do número racional, ao que tudo indica, não estava associada aos sistemas de numeração criados pelas civilizações na Antiguidade.

Boyer (1996) afirma que o homem primitivo não tinha a necessidade de utilizar frações, pois para o autor o principio fundamental da contagem era suficiente para satisfazer as necessidades cotidianas. Todavia, os registros históricos posteriores a este período denotam que a noção de fração e a sua representação precedem os aspectos relativos ao número racional na representação decimal.

Ainda segundo o autor, com a evolução das sociedades, mais precisamente durante a Idade do Bronze, há aproximadamente 3.000 a. C., o homem percebe que os números inteiros não satisfazem às condições de representação das quantidades resultantes de algumas divisões. Assim, temos possivelmente, a origem da noção e da notação do número racional fracionário.

Os documentos manuscritos, registros, artefatos e vestígios arqueológicos, que comunicam as descobertas e as produções iniciais da humanidade no âmbito da Matemática são escassos e, os que existem, constituem o único elo de ligação entre o presente e o passado. Entre esses achados arqueológicos encontra-se o Papiro de Rhind adquirido no ano de 1858, em Luxor no Egito, pelo escocês A. Henry Rhind. O papiro foi encontrado sob as ruínas de antigas edificações nas proximidades da cidade de Tebas, que também está localizada no Egito. Este documento, também é conhecido como Papiro de Ahmes, uma homenagem ao escriba que o copiou, supostamente em 1650 a.C., a partir de outro manuscrito produzido provavelmente entre 1788 e 1580 a.C. O Papiro de Rhind é uma coletânea de 84 problemas de natureza aritmética, algébrica e geométrica com as respectivas resoluções.

Alguns fragmentos dos textos contidos no Papiro de Rhind, nos hieróglifos dos sarcófagos e nas representações pictográficas ou simbólicas esculpidas nas paredes de monumentos gregos e egípcios indicam que estas civilizações, na Antiguidade, utilizavam frações unitárias para representar as partes do inteiro há 3000 anos a.C..

No papiro de Rhind, por exemplo, há uma tabela com a decomposição de frações do tipo $\frac{2}{p}$ (onde p é ímpar) em frações unitárias (com numerador igual a 1), isto é, frações do tipo $\frac{1}{x}$. Nesta tabela encontram-se as frações $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$,..., $\frac{2}{101}$, etc. representadas como a soma de frações unitárias: $\frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$ ou ainda que $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$. Este fato denota que os egípcios resolviam os problemas na época operando apenas com frações unitárias.

Boyer (1996) nos relata que o salário dos diferentes membros do templo de Ilahum, no Egito, era pago em pão e cerveja. Por isso, vários problemas contidos no papiro de Rhind fazem alusão a estes elementos. Os primeiros seis problemas referem-se à distribuição de 1, 2, 6, 7, 8 ou 9 pães para cerca de 10 homens, e, cujas soluções ocorriam mediante a decomposição das frações do tipo $\frac{2}{p}$ em frações unitárias.

Além disso, é curioso perceber que os egípcios não só foram os primeiros a utilizar as frações unitárias, mas, também operavam com esses números bem como possuíam uma maneira peculiar para representar os termos: *numerador* e *denominador*. Essa notação consistia num sinal oval e alongado sobre os hieróglifos do seu sistema de numeração. Por exemplo, a fração $\frac{1}{20}$ (um vigésimo) correspondia ao símbolo: $\overline{\cap\cap}$.

Outra referência histórica às frações, concernente a concepção parte/todo, pode ser encontrada na mitologia grega. Especificamente, quanto à lenda acerca do Olho de Hórus, relatada em uma das obras de Platão intitulada Fedro. Diz o relato que na cidade egípcia de Náucratis o olho direito de Hórus, filho dos deuses Íris e Osíris, foi arrancado por seu tio Seth em uma batalha. O olho foi dividido em 64 partes. Posteriormente, Thot, deus da justiça e dos cálculos, reuniu todas as partes do olho de Hórus que passou a se chamar *Udja* que significa *todo*. Thot efetuou a soma das frações $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$ e, percebendo que o olho estava incompleto usou seus poderes acrescentando a parte que faltava, no caso a fração $\frac{1}{64}$. Em sua obra, Boyer (1996), também resgata o relato do historiador Heródoto ao descrever que no antigo Egito as inundações anuais das terras férteis, localizadas às margens do Rio Nilo, removiam as demarcações dos limites das propriedades destinadas à agricultura estabelecendo conflitos entre os colonos. Para resolver o problema, o faraó Sesóstris encarregava seus servos, denominados agrimensores ou esticadores de corda, a tarefa de partilhar igualmente porções de terra para cada egípcio que se dispusesse a pagar tributos anuais ao soberano.

Os agrimensores utilizavam uma corda com treze nós equidistantes. Ao esticar a corda verificavam quantas vezes a medida estava contida nos lados do terreno. No entanto, no exercício dessa atividade, talvez fosse comum observar que nem sempre a medida correspondia a uma quantidade inteira de vezes no lado do terreno. Por certo, os agrimensores conceberam assim a noção de fração. Ou seja, através da subdivisão da corda em partes menores, portanto estabelecendo a relação parte-todo.

Boyer (1996) atribui que os Pitagóricos, há quase 500 a. C., tenham desenvolvido a atual escala musical. Por meio da observação, praxi nas práticas e descobertas desse grupo, eles perceberam que o fracionamento de cordas vibrantes poderia ser expresso por uma razão entre dois números inteiros como dois para três (para a quinta) ou três para quatro (para a quarta). Este raciocínio permitiu verificar que os tons obtidos, das frações da corda, eram harmônicos.

Outro aspecto interessante relativo às frações é que por volta de 300 a.C. na Grécia, o matemático Erastóstenes já utilizava uma notação específica na apresentação dos resultados de problemas aritméticos cuja configuração não era inteira. Ao representar ½, por exemplo, utilizava α’’.

Com base num documento manuscrito do século II a.C., Boyer (1996), também afirma que os chineses também conheciam e operavam com números racionais na forma fracionária. Assim como, calculavam o mínimo denominador comum de frações ordinárias. Curiosamente, a população da China antiga, enfatizava a relação Yin e Yang e estendiam essa relação a qualquer situação, inclusive no contanto com a Matemática. Ainda de acordo com Boyer

(1996), nesse período os chineses costumavam fazer uma analogia entre os termos da fração e o gênero masculino e feminino.

O denominador era classificado como “mãe” e o numerador como “filho”, pois acreditavam que este artifício facilitava a utilização das regras de manipulação e cálculo com as frações. Embora, nesse período, já existisse uma tendência a decimalização das frações em decorrência das práticas usuais e do mercantilismo, que consistia na principal atividade econômica da população, na qual era necessário lidar cotidianamente com o sistema de pesos e medidas.

Os episódios descritos nos parágrafos anteriores nos levam a considerar que os egípcios da Idade Antiga dominavam os números naturais e as frações unitárias. E, por outro lado concebemos que os gregos, desse mesmo período, já atribuíam a palavra número apenas para quantidades inteiras, ao passo que a fração (número racional) era considerada por eles uma razão, ou a relação entre números inteiros. Além disso, os chineses nesse mesmo período já dispunham de conhecimento suficiente para operar com frações.

No entanto, esses aspectos não eram privilégio dos povos do continente europeu, africano ou asiático, mas também, do oriente médio. Na Mesopotâmia os babilônicos também dispunham de um sistema de numeração, de base sexagesimal, estabelecido devido à Metrologia[3] e cuja escrita posicional se dava por meio de símbolos cuneiformes.

Os historiadores acreditam que os mesopotâmicos criaram um sistema que se contrapõem ao decimal porque a quantidade (sessenta) possibilitava dez subdivisões (metades, terços, quartos, quintos, sextos, décimos, doze avos, quinze avos, vigésimos e trigésimos). E, portanto, apesar do prevalecimento do sistema de numeração decimal nos dias atuais, ainda há resquícios da base sexagesimal na representação das medidas de tempo e ângulo.

Contudo, durante a Idade Média, período histórico turbulento entre os séculos XII e XIV, também conhecido como Idade das Trevas, observou-se o declínio intelectual e cultural, inclusive na produção de conhecimento. No âmbito das ciências e da Matemática o conhecimento ficou enclausurado no que já havia sido produzido. Devido há inúmeros

[3] Segundo Aurélio (2001) a Metrologia é a ciência que se ocupa com o estudo comparativo dos sistemas de pesos, medidas ou outras grandezas.

episódios e guerras que ocorreram nesse período a retomada da produção de conhecimentos científicos ocorreu apenas ao final da Idade Média.

Em 1202, no final da Idade Média, que Leonardo de Pisa (1180 - 1250), conhecido como Fibonacci “filho de Bonaccio”, escreveu o livro Líber abaci (Livro do Ábaco), fruto dos estudos e viagens ao Egito, Síria e Grécia. A obra, incompatível com o título, consistia na proposição de problemas algébricos cujas soluções deveriam ser obtidas utilizando os numerais indo-arábicos. Com o intuito de popularizar suas ideias na Europa, nesse mesmo livro, Fibonacci sugere a utilização da barra horizontal de frações e de tabelas para conversão de frações comuns a unitárias.

A Fibonacci, portanto, confere-se o crédito apenas pela divulgação da atual configuração do número racional fracionário. Porque há indícios de que os matemáticos hindus foram responsáveis pela criação da notação $\frac{a}{b}$ (em que a é o numerador e b o denominador) enquanto a barra horizontal das frações corresponde a uma produção dos árabes.

Em seu livro Fibonacci também sugeria a utilização de frações comuns, sexagesimais e unitárias para solucionar problemas similares aos do Papiro de Rhind, ou para conversão câmbio de moedas ou ainda para resolver problemas relativos a transações comerciais. No entanto, em nenhum trecho da obra é cogitada a existência ou a utilização das frações decimais.

Apesar dos esforços de Fibonacci para que a configuração dos decimais fracionários fosse adotada na Europa a proposta enfrentou resistência dos matemáticos na época. Apenas no século XVI, os matemáticos François Viète (1540 - 1603) e Simon Stevin (1548 - 1620) intensificaram a utilização dos números racionais na forma decimal e fracionária no continente Europeu.

Em síntese, os episódios aos quais nos referimos anteriormente, sugerem que a possível origem, a funcionalidade e os significados do número racional foram instituídos e consolidados de forma gradativa no exercício das atividades sociais. Esses aspectos ocorreram de modo preponderante nas ocasiões em que se fazia necessário *dividir* ou *medir*.

Algumas destas circunstâncias denotam que os diferentes povos que nos precederam se depararam com a insuficiência dos números naturais para resolver algumas situações práticas do cotidiano. Por conseguinte, o intercâmbio entre as diferentes culturas e civilizações possibilitou o avanço do conhecimento matemático mesmo nos tempos mais remotos.

Assim sendo, concluímos que a Matemática deriva do aprendizado e, por outro lado apropriar-se dessa ferramenta possibilita compreender e atuar no mundo por meio dos processos de criação, elaboração e abstração. Portanto, não é admissível dissociar o conhecimento matemático das questões que emergem no campo da realidade. Afinal, o conhecimento gerado nessa ciência, é indiscutivelmente, produto do engenho humano e oriundo das constantes interações com o meio natural, social e cultural.

E, neste sentido, podemos afirmar que sem a herança cultural das civilizações passadas não seria possível o avanço tecnológico na atualidade. Ao nos desvincular do resgate dos aspectos históricos, alusivos ao número racional, propomos nos tópicos subsequentes, conceituar, caracterizar, atribuir significados e a apresentar algumas reflexões acerca deste objeto matemático.

1.2 O conceito e os significados do Número Racional

As quantidades ou grandezas, contínuas ou descontínuas, podem ser expressas por um número quem nem sempre é natural ou inteiro, mas, racional (decimal ou fracionário). Generalizando, o conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) compreende todos os inteiros e todas as frações na forma $\frac{l}{k}$, onde l (numerador) e k (denominador) são inteiros e k é diferente de zero. Assim sedo, representamos esse conjunto da seguinte forma: $\mathbb{Q} = \{ x : x = \frac{l}{k}, l, k \in Z \; e \; k \neq 0 \}$.

A ampliação do conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) para o conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) deve-se a uma propriedade estrutural esta garante que *para cada número inteiro n, em que n ≠ 0, existe um número* $\frac{1}{n}$*, inverso multiplicativo de n, tal que* $n \bullet \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$.
Portanto, os números naturais, os números inteiros e as frações positivas e negativas constituem o conjunto dos números racionais.

A relação entre as partes $\left(\frac{l}{k}\right)$ o e o inteiro (x) nem sempre é evidente, e constitui um dos desafios à compreensão da noção relativa ao número racional dos alunos das séries iniciais. Pois, durante um razoável período de escolarização, os alunos aprenderam sobre as características, as propriedades e as operações que envolvem os números naturais ($\mathbb{N}$) e, no 4º e 5º Ano do Ensino Fundamental, de forma abrupta se deparam com um novo conjunto numérico: $\mathbb{Q}$.

Ainda, em relação aos números racionais um dos fatores que constitui um entrave é a apropriação das diferentes interpretações que o número poderá assumir dependendo do contexto. Os significados do número racional foram relacionados inicialmente por Kieren (1975) nas pesquisas desenvolvidas entre 1975 e 1980.

Em sua análise o autor considera o domínio matemático dos números racionais é construído com base no estabelecimento de conexões entre as concepções: parte/todo, quociente de uma divisão, uma medida, uma razão ou um operador. Assim, o autor propõe diferentes formas de interpretação para um número racional. Deste modo os números racionais podem ser:

a. Frações, que por sua vez, podem ser comparadas e somadas, subtraídas, multiplicadas, divididas, simplificadas, racionalizadas, por exemplo.

b. Frações decimais que dentro do sistema de numeração decimal, constituem uma extensão dos números naturais.

c. Classes de equivalência de frações. E, neste caso, $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\frac{4}{12}=\ldots$ que embora estejam registradas de modo distinto representam o mesmo número racional.

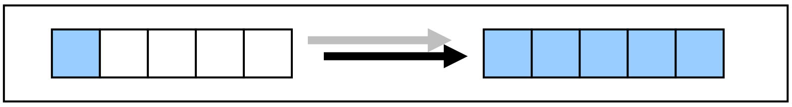
d. Números na forma $\boldsymbol{\frac{l}{k}}$, onde: l e k são inteiros e $k \neq 0$. Ou seja, os números racionais são relacionais.

e. Operadores multiplicativos, podendo de certa forma reduzir ou ampliar uma grandeza contínua ou discreta. Generalizando, temos que:

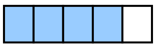
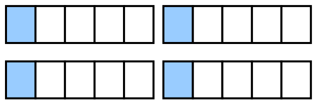
$\boxed{a \; x \; b = c \Leftrightarrow \left\{ a = \frac{c}{b}, b \neq 0 \quad ou \quad b = \frac{c}{a}, a \neq 0 \right.}$. Desse modo, poderemos tomar como referência os seguintes casos:

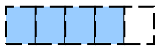
(i) Ao determinar $\frac{1}{6}\, de\ 24$, poderemos ter: 1 x (24 : 6) = (1 x 24) : 6 = 24 : 6 = 4. Neste caso, a quantidade de natureza discreta foi reduzida.

(ii) Cinco frações iguais, a porção azul, resultam na totalidade do inteiro. Ou seja, a fração da quantidade contínua foi aumentada de modo a reconstituir o inteiro.



(iii) No caso da multiplicação: $m \times n$, em que m é o multiplicador e n é o multiplicando é possível usar representações geométricas distintas para o mesmo número racional, por exemplo, a fração $\frac{5}{6}$:

$\frac{4}{5} = 4 \times \frac{1}{5}$ (4 vezes $\frac{1}{5}$)  (ou) $\frac{4}{5} = \frac{1}{5} \times 4$ ($\frac{1}{5}$ de 4) 

$\frac{4}{5} = 1 \times \frac{4}{5}$ (1 vez $\frac{4}{5}$)  (ou) $\frac{4}{5} = \frac{4}{5} \times 1$ ($\frac{4}{5}$ de 1) 

f. Elementos de um campo quociente ordenado e infinito. Pois, há “n” números da forma $x = \frac{l}{k}$, onde x satisfaz a equação $k \, . \, x = l$.

g. Medidas ou pontos sobre a reta numerada. Todo número racional ocupa um lugar bem definido na reta. E, todo ponto da reta corresponde a um número racional. Exemplificado a situação, observamos que ao localizar a fração $\frac{1}{3}$, na reta real, é trivial dividir o numerador pelo denominador obtendo, por exemplo, uma dízima periódica: 0,3333... ou, uma aproximação: 0,3 ou 0,33. No entanto, estas e outras representações para o mesmo número racional não ocupam a mesma posição na reta real.

Posteriormente, Bher, Lesh, Post e Silver (1983) redefiniram e subdividiram os construtos apresentados por Kieren (1975)[4], os quais estão esquematicamente representadas na Figura 1[5].

Figura 1: Significados da fração

A partir do esquema apresentado na Figura 1 podemos afirmar que os autores propõem duas interpretações estruturais para a fração: divisão e parte/todo. Dessas derivam quatro outras interpretações (medida, razão, operador e quociente), que por sua vez, dão origem às outras interpretações: taxa, coordenadas lineares e decimal. Todas as formas de decodificar uma fração foram denominadas de subconstrutos. E, estes subconstrutos fundamentais serão descritos em seguida:

a. Medida fracionária que indica quanto há de uma quantidade relativa a uma unidade especificada daquela quantidade. Ou seja, esse subconstruto é uma reformulação da relação parte/todo. Bher et. al. (1989), entendem que o subconstruto parte–todo, aplicado em quantidades contínuas e discretas, constitui a base fundamental para a construção do conceito de número racional, ou seja, todos os outros subconstrutos têm neste o seu ponto de apoio.

b. Razão consiste na comparação multiplicativa entre duas grandezas de uma mesma espécie, e pode ser expressa do seguinte modo: $\boxed{\frac{a}{b} = a : b}$, a expressão indica nesse caso, que *a está para b*. Na arquitetura, por exemplo, a planta baixa de uma casa é representada nas escalas 1:100 (um para cem), e 1:50 (um para 50). Neste caso, 1 cm no desenho corresponde a 100 cm (1 metro) e 50 cm respectivamente. Esse subconstruto

[4] Op. cit. in HIEBERT, J.; BHER, M. (1989).
[5] A ilustração foi adaptada de BHER et. al. (1983).

fundamenta o conceito de proporcionalidade que propicia articulações entre as ramificações da Matemática (Geometria, Álgebra, por exemplo), e, por outro lado favorece a construção e/ou exploração de outros conteúdos, tais como: porcentagem, taxa e probabilidade.

c. Taxa que define uma nova quantidade como uma relação entre duas outras grandezas. O que difere o subconstruto taxa do subconstruto razão é que o primeiro pode ser adicionado, subtraído, etc. enquanto as razões não o são.

d. Quociente – quando o número racional resulta de uma divisão, portanto este significado está associado à divisão de um número natural por outro que pode ser expressa por a : b = a/b onde a (dividendo) e b (divisor) são números inteiros onde $b \neq 0$.

e. Coordenadas lineares – neste caso, o racional é um ponto sobre a reta numerada. De acordo com esses autores esse subconstruto engloba duas ideias: a primeira diz respeito aos números racionais que constituem um subconjunto dos números reais. A segunda refere-se às propriedades associadas à topologia métrica da reta numerada racional estão entre densidade, distância e não completividade.

f. Decimal – os autores enfatizam as propriedades do sistema de numeração decimal. E, neste caso, toda fração poderá ser convertida em número decimal mediante a divisão do numerador pelo denominador.

g. Operador - uma fração funciona como instrumento de transformação expandindo ou encolhendo o inteiro. Essa noção impõe uma interpretação algébrica, função que quando aplicada às formas geométricas planas (poligonais), transforma-as em figuras semelhantes e, quando aplicada num contexto discreto a fração exerce a função multiplicador ou divisor.

Enquanto Nesher (1985, apud Romanatto, 1999), propõe outra análise para distinguir as faces dos números racionais, na qual basta considerar a relação parte/todo, divisão e razão. Estes significados para o autor correspondem à esquemas conceituais essenciais que permitem a caracterização do número racional. As afirmações transcritas satisfazem a condição necessária à descrição das características fundamentais intrínsecas ao número racional:

a. A fração como uma descrição da relação parte-todo. O todo é divido em “n” fatias cada fatia corresponde a $\frac{1}{n}$, e, quando se refere às diversas fatias (*k*), isso é codificado como $\frac{k}{n}$. Ou seja, a idéia do inteiro $\frac{n}{n} = 1$ é característica dessa representação.

b. O número racional corresponde ao resultado da divisão de dois números inteiros, ou à razão comparativa entre duas grandezas, um operador, ou ainda, à probabilidade de ocorrência de um evento.

Em Romanatto (1999) encontramos outras pesquisas quanto aos esquemas conceituais que envolvem os racionais tais como: Ohlsson (1987) e Gimenez (1988). No entanto, não as descreveremos porque seriam redundantes já que as interpretações desses autores não acrescentam as análises que expomos anteriormente.

Entretanto, ressaltamos que todos os trabalhos citados contribuíram para a categorização dos significados do número racional. Diante dos pressupostos, é possível afirmar que os autores mencionados convergem ao apontar como conceitos centrais os significados: parte-todo, quociente, medida, operador e razão do número racional, os quais estão apresentados na Figura 2.

O esquema apresentado na Figura 2 favorece a visualização das possíveis conexões entre os conceitos e possibilita perceber que o número racional aparece nos contextos em que o inteiro corresponde a grandezas de natureza contínua ou discreta. Além disso, a figura também contribui para relacionar os registros utilizados na representação do número racional. Os registros compreendem a linguagem natural, pictórica ou simbólica: numérica (fracionária, decimal ou potência de base 10), ou ainda, algébrica.

Embora cientes da existência do contingente de conceitos matemáticos, que se intercomunicam e contribuem para o reconhecimento e a construção dos diversos significados referentes aos números racionais, nessa pesquisa, nos deteremos apenas na idéia de fração como uma relação entre as partes e o todo. E, apesar de observar que no contexto atual predomina a representação decimal do número racional, pois a representação fracionária está restrita a poucas situações do dia-a-dia das pessoas.

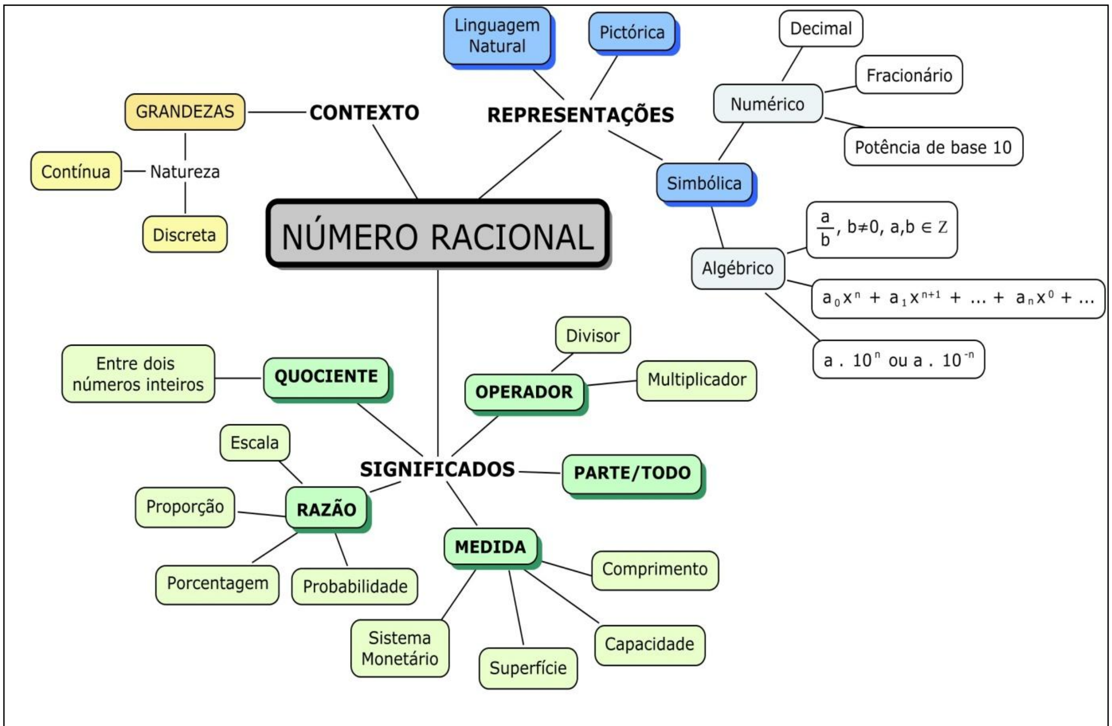


FIGURA 2: Contextos, representações e significados do número racional

Entretanto, este aspecto não reduz a importância da construção da noção e dos significados do número racional. Lopes (2008) reforça nosso argumento quando afirma que a notação decimal ganhou a guerra da comunicação e da usabilidade para representar números "quebrados", não inteiros. Mas, isto não quer dizer que as frações devam ser abolidas dos currículos, temos que reconhecer sua importância em contextos não utilitários, que atendem a outros significados e objetivos.

O fato do livro didático analisado nesse estudo explorar a noção inicial de número racional partindo da noção de fração na concepção parte-todo consistiu no fator preponderante que influenciou o interesse na pesquisa dos efeitos didáticos que essa escolha poderia acarretar em função das variáveis envolvidas em cada uma das atividades propostas pelos autores. Assim sendo, optamos por destrinchar o significado parte-todo do número racional nos próximos parágrafos.

1.2.1 O significado parte-todo do número racional

A relação parte-todo se caracteriza por um inteiro, contínuo ou discreto, do qual uma parte pode ser associada a um número fracionário. Convenciona-se então que o inteiro pode ser dividido em partes "iguais" ou equivalentes (em área/superfície ou em quantidade de elementos), para que a parte em questão possa ser quantificada. Portanto, cada parte pode ser expressa por uma fração.

A palavra fração tem a mesma origem da palavra fratura, portanto no sentido estrito, significa: ruptura. Porém, para atribuir sentido aos contextos utilizados e didatizar o objeto matemático, os autores dos livros didáticos optam por definir a fração como parte ou pedaço do inteiro. O inteiro, a unidade, o todo pode corresponder a uma grandeza contínua ou discreta.

As grandezas cujas partes não são naturalmente divisíveis são denominadas como contínuas e, portanto não resultam em elementos indivisíveis. O comprimento, a área de uma região, o volume de um sólido ou a capacidade de um recipiente são exemplos de grandezas de natureza contínua. Mas, há quantidades ou grandeza descontínuas ou de natureza discreta as quais são constituídas por um número finito de elementos e, portanto que constam de unidades separadas entre si.

Entretanto, as situações nas quais o contexto explorado é de natureza discreta demandam, necessariamente, a ampliação da compreensão da relação parte/todo por parte do aluno, pois nesse caso as partes correspondem a subconjuntos. Estes, por conseguinte não são delimitados por segmentos de reta como no caso das grandezas contínuas e, sim por vários elementos que compõem o inteiro.

De acordo com os PCN (1998) a interpretação da fração como uma relação parte/todo supõe que o aluno seja capaz de identificar a unidade que representa o inteiro, contínuo ou discreto, compreenda a inclusão de classes e seja capaz de realizar divisões operando com essa grandeza.

Em contrapartida, os PCN não mencionam outra condição necessária à apropriação do significado parte/todo, que exige que o aluno também seja capaz de conservar quantidades. A conservação de quantidade é considerada como a compreensão de que a quantidade (contínua ou discreta) permanece invariável, enquanto outros aspectos (forma, posição, por exemplo), se modificam. A apropriação do conjunto de princípios envolvidos na conservação de quantidades nos parece uma condição básica para a organização de um sistema de noções, que resultará mais tarde no conceito de fração.

Concordamos com Lima (1988), quando afirma que a criança poderá compreender que uma quantidade permanece invariante através de modificações (repartição de uma coleção, fragmentação do inteiro, transvazamento de um líquido, etc.), sobre a forma ou a disposição de um objeto, ou de uma coleção de elementos, ela deve ter compreendido que estas transformações resultam de variações mentalmente reversíveis, isto é a capacidade de entender a ida e a volta como aspectos da mesma ação.

Ao analisarmos os livros didáticos de Matemática, dos anos iniciais do Ensino Fundamental, das coleções aprovadas no PNLD (2007), observamos que nas propostas pedagógicas destinadas à introdução do significado parte/todo da fração o procedimento mais comum consiste na apresentação de algumas formas planas (retângulos, círculos, por exemplo) seccionadas por segmentos de reta objetivando a obtenção de porções congruentes.

Os autores dos referidos livros didáticos estimulam a contagem dessas partes, para que o número racional seja registrado simbolicamente por meio de uma fração. As partes do inteiro: tomada(s)/totalitária(s) correspondem aos termos da fração. Desse modo, a expectativa é que os alunos consigam estabelecer associações: a(s) parte(s) tomada(s) equivale(m) ao numerador e o total de partes do inteiro corresponde ao denominador. Com essa estratégia didática convenciona-se a notação fracionária do número racional mediante a relação parte/todo.

Outro aspecto a ser considerado é a quantidade significativa de situações, apresentadas no livro didático, que exploram enfaticamente o significado parte/todo do número racional com inteiros de natureza contínua. Os manuais do professor das coleções aprovadas no PNLD (2007), não trazem considerações que reforcem que o efetivo registro fracionário do número racional, ou seja, a notação de uma fração, independentemente do inteiro ser de natureza contínua ou discreta, conforme os exemplos que ilustram a Figura 3.

A análise das atividades, que integram a sequência didática utilizada nesta pesquisa, evidencia que a escolha didática dos autores do livro didático (estímulo da contagem das partes de um inteiro) favorece a apropriação por parte do aluno tanto da notação fracionária quanto da nomenclatura das frações. Em contrapartida, tal procedimento impacto direto na interpretação do número fracionário não como um número em si. Mas, como dois números distintos: o denominador (que corresponde ao total de partes ou unidades do inteiro), e, o numerador (que representa o total de partes ou unidades do inteiro que foram tomadas).

As observações acerca do significado parte/todo da fração nos alerta que devemos abordar outras relações possíveis entre o inteiro e as porções dele obtidas. Por exemplo, as relações todo/parte e parte/parte que de modo geral, vêm sendo negligenciada nos livros didáticos de Matemática avaliados no PNLD (2007), mas precisamente nos que se destinam ao Ensino Fundamental (1º ao 5º Ano).

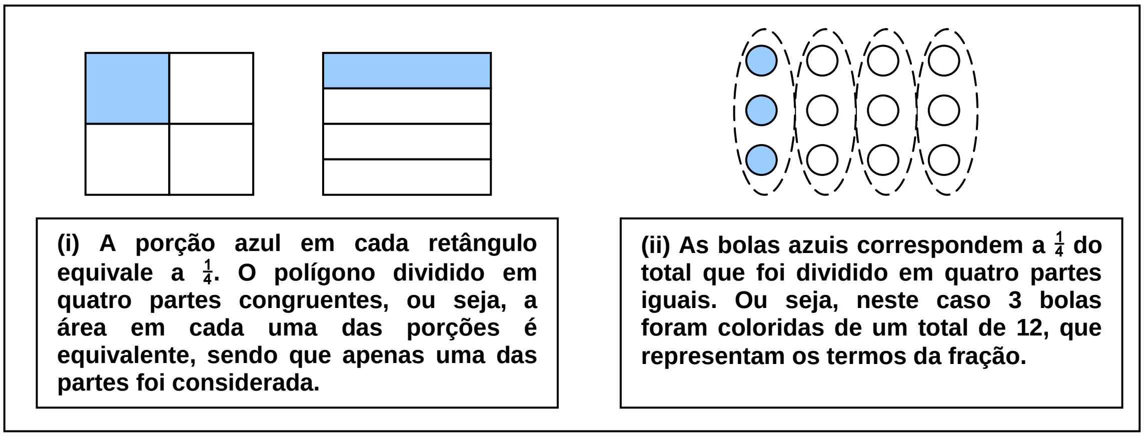


Figura 3: Representação pictórica da relação parte/todo no contexto contínuo ou discreto

A Coleção Matemática Paratodos, analisada nessa pesquisa, não foge à regra, em função da abordagem da concepção parte/todo, predominantemente no universo das grandezas de natureza contínua, não aparecem atividades que contemplem as relações parte/parte ou todo/parte.

Para ilustrar o argumento anterior tomemos como referência o retângulo da Figura 4, nele as partes A e C embora apresentem formatos distintos são equivalentes em área, pois cada uma delas corresponde à fração (um sexto), do inteiro. Ainda em relação às partes que compõem ao polígono, representado na Figura 4, poderíamos observar que a fração B é equivalente a duas porções idênticas as partes A ou C, ou seja, a $\frac{1}{3}$ (um terço), do retângulo maior que representa o inteiro contínuo. A relevância da situação, exemplificada anteriormente, reside na possibilidade favorecer a apropriação, ampliação ou consolidação da notação de frações por parte do aluno mediante o estabelecimento de critérios de equivalência e comparação das diferentes frações do inteiro.

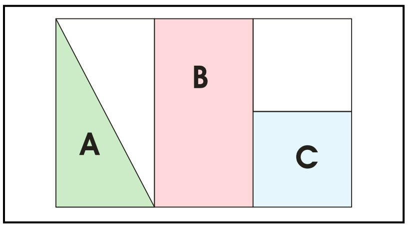


Figura 4: A relação parte/todo no contexto contínuo

No livro didático, que serviu de suporte para esta pesquisa, pouquíssimas situações didáticas exploram a equivalência, a comparação e a conservação de área do inteiro de natureza contínua. Nesse caso específico observa-se a predominância de situações que reforçam apenas um dos aspectos importantes para a compreensão do significado parte/todo: o esgotamento do inteiro de natureza contínua ou discreta.

Estudos apresentados por Ponce (2006) e Lopes (2008), por exemplo, indicam que criança deve ser estimulada a realizar comparações entre frações do inteiro, dividido em “n” partes, considerando denominadores iguais e numeradores diferentes, bem como denominadores diferentes e numeradores iguais. Atividades dessa natureza favorecem a percepção do aluno à relação quanto maior o número de partes “iguais” em que o inteiro foi dividido, menores serão essas partes. Ao que tudo indica é por meio da comparação de frações o aluno chega ao princípio fundamental da equivalência.

Todavia, esta não é a única constatação desta pesquisa acerca da proposta pedagógica apresentada na coleção analisada. Podemos afirmar que os volumes do 4º e 5º Ano da Coleção Matemática Paratodos os autores propõem um número significativo de atividades, exercícios e problemas que exploram o significado parte/todo do número racional.

Embora, haja argumentos que defendam a quantidade, em detrimento, da qualidade das situações didáticas propostas nos livros didáticos, acreditamos que a diversificação das situações didáticas viabilize o estabelecimento de relações entre as diferentes representações e significados do número racional, por parte do aluno, sem que haja mecanização de procedimentos e técnicas empregados nas transformações dos registros de representação. De certo modo, estaríamos restringindo o adestramento dos alunos em relação à definição, nomenclatura, notação, simbologia e às operações envolvendo os números racionais.

Nesse sentido, ratificamos também que a quantidade de exemplos, exercícios, atividades e propostas em sala de aula, não esgotarão todas as possibilidades de exploração dos contextos, representações e significados do número racional. Assim como, que o excesso de atividades, não garantirá a progressão das aprendizagens dos alunos. Mas, sim uma abordagem consistente, significativa e sistêmica que favoreça a percepção da necessidade dos números racionais diante da insuficiência dos números naturais para resolver determinadas situações-problema.

CAPÍTULO II – O ENSINO E A APRENDIZAGEM DO NÚMERO RACIONAL NO ENSINO FUNDAMENTAL

No segundo capítulo apresentamos algumas considerações sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais no Ensino Fundamental. A dissertação relativa às problemáticas apresentadas neste capítulo é fundamental, uma vez que a compreensão das dificuldades de ensinar e aprender sobre os diferentes significados e representações do número racional e dos conceitos que o envolvem está condicionada principalmente à epistemologia do conhecimento e do professor, da transposição didática e da estrutura das situações didáticas vivenciadas em sala de aula com os alunos.

Por este motivo, durante a realização do trabalho, torná-se indispensável refletir a respeito da produção acadêmica, da própria epistemologia do conhecimento, das dificuldades à compreensão, da forma como o conceito, os significados e as representações do número racional são apresentadas no livro didático de Matemática dos primeiros anos do Ensino Fundamental. Nesse sentido, trazemos à discussão, no primeiro momento um prospecto com a síntese das conclusões apresentadas nas pesquisas mais recentes que precedem este estudo e, que de certo modo, versam sobre o ensino e a aprendizagem do número racional.

No segundo momento, destacamos as orientações curriculares, contidas nos PCN, quanto à abordagem dos aspectos concernentes aos números racionais. E, finalmente, apresentamos alguns pontos de vista quanto à importância do livro didático de Matemática na inserção dos objetos do conhecimento em questão. Por outro lado, elencamos as características predominantes na proposta pedagógica sugerida pelo livro didático da Coleção Matemática Paratodos, que serviu com suporte ao trabalho de pesquisa, em relação à abordagem da noção do número racional nos volumes destinados aos alunos do 4º e 5º Ano do Ensino Fundamental.

2. Reflexões sobre o ensino e a aprendizagem do número racional

Não é novidade que as crianças desde cedo adquirem ideias relativas ao número racional. Principalmente, sobre frações, percebendo metades e utilizando a nomenclatura em algumas situações cotidianas. Certamente também constroem significados e se apropriam das formas de representar quantidades e números não inteiros, lendo ou vendo propagandas e anúncios na televisão, no supermercado, por exemplo. E, na escola cabe ao professor sistematizar adequadamente esses saberes pré-existentes.

O acesso, a difusão do conhecimento e a apropriação de conhecimento são aspectos inerentes a dinâmica escolar. Porém, as pesquisas comprovam que, na escola, o fracasso do aluno quanto à aprendizagem dos conceitos e relações que envolvem os números racionais. Uma vez que o mesmo não está imune aos inúmeros fatores que descendem da própria epistemologia do saber, da transposição didática interna[6], as incoerências metodológicas, ou ainda aos efeitos didáticos que emergem no "ecossistema"[7] da sala de aula.

Especificamente, no que tange aos números racionais, acrescentamos ainda, que os aspectos citados tendem a ocasionar sequelas que afetam consideravelmente tanto o ensino quanto a aprendizagem. No entanto, na maioria dos casos, as condições adversas à efetiva aprendizagem passam despercebidas. Ocasionando a atribuição de culpa pelo insucesso do aluno na apropriação do conhecimento quase que exclusivamente ao objeto matemático.

Diante da necessidade de que o aluno evolua em suas aprendizagens o professor organiza o arcabouço do trabalho pedagógico ancorado no livro didático e nos demais materiais pedagógicos que dispõe. Porém, o livro didático sobressai entre qualquer outro recurso ao qual o professor tem acesso. O livro didático, portanto assume uma posição de destaque com relação ao desenvolvimento dos conteúdos de ensino determinados pelas propostas curriculares.

De fato, o intuito de fazer com que o aluno aprenda o conteúdo programático os professores anseiam lançar mão de todos os recursos possíveis. No entanto, na maioria das escolas públicas do país, os recursos financeiros são destinados a melhoria da infra-estrutura das instalações em detrimento da aquisição de materiais pedagógicos que auxiliem o trabalho do

---

[6] Segundo Chevallard (1991, p.39. apud PAIS) um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino, é chamado de transposição didática. E, a transposição didática interna consiste no saber efetivamente ensinado. Esse saber a ser ensinado sofre uma série de transformações realizadas pelo professor na tentativa de facilitar o acesso do aluno a um conhecimento específico.

[7] Um ecossistema é constituído por elementos biótipos (seres vivos) e abióticos (inanimados). E, nesse sentido o ambiente da sala de aula se caracteriza pelo estabelecimento de relações entres seres humanos: o professor e o aluno com os objetos do conhecimento os quais são imateriais.

professor. E, com relação a esse aspecto, a distribuição de livros didáticos para todos os alunos matriculados nas escolas públicas, desponta no contexto das políticas educacionais, como uma solução igualitária que possibilita o acesso ao conhecimento.

Na realidade, o livro didático na maioria dos casos, aparece como o único referencial norteador das atividades do professor regente nas escolas públicas. De modo que, os conteúdos, as sequências didáticas, a proposta pedagógica e metodológica, o plano de curso e os materiais de suporte (folhas especiais, malhas, jogos, glossários, por exemplo), sugeridos pelos autores do livro didático que é adotado pelo professor, acabam assumindo a função de suprir a demanda de escassez de recursos e orientações com relação ao ensino e a aprendizagem da Matemática na Educação Básica. Nesse sentido, Machado (1997, apud Silva Júnior 2007, p.26) afirma que:

> [...] *A qualidade do livro didático tem sido examinada numa visão econômica e de utilização, no qual o papel do livro tem sido superestimado, passando apenas a ser um livro caderno. Nessa perspectiva, há uma abdicação por parte do professor, no que diz respeito à elaboração de seus programas, passando a concordar com o caminho proposto pelo autor, o que gera um certo caminho sem dificuldades a ser trilhado pelo professor.*

Contudo, se a aceitação integral da proposta contida no livro didático por um lado facilita o trabalho do professor por outro lado preocupa, pois ao adotar esta conduta o docente abre mão da sua autonomia e criatividade na promoção das adequações necessárias para o atendimento das especificidades dos seus alunos e do projeto político pedagógico da sua escola.

No livro didático, analisado nesse trabalho de pesquisa, por exemplo, além de textos introdutórios, atividades e exercícios, o professor dispõe de outros mecanismos, tais como: jogos, desafios, as folhas especiais que podem ser recortadas (contendo frações do círculo, por exemplo), que poderão servir como suporte para a construção do significado parte-todo do número racional. No entanto, convém salientar que o simples fato de fazer uso de toda a parafernália pedagógica não garante que o aluno vai conseguir se apropriar do conhecimento pretendido.

Para Lopes (2008), a aprendizagem das frações não se dá com definições prontas, nomenclatura obsoleta e pseudoproblemas sobre pizzas e barras de chocolates. Os professores deveriam ter atenção para as complexidades que envolvem um conceito tão delicado. Os obstáculos à aprendizagem são muitos e de várias naturezas. A começar pelo fato da palavra fração estar associada a muitas idéias e construtos.

Ainda segundo o autor, outro problema detectado no ensino das frações, é o fato de que seu ensino tem estado restrito até o final do 7º Ano do Ensino Fundamental. Portanto, está implícito nessa organização curricular um aspecto característico dos currículos anteriores aos PCN, a compartimentação dos conteúdos. Neste caso específico, as frações eram abordadas no 4º e 5º ano, as razões e proporções no 7º Ano, a Álgebra no 8º Ano e função no 9º Ano do Ensino Fundamental. Além disso, como pano de fundo esta visão evidencia a crença no caráter categórico, acumulativo e provisório dos conteúdos.

O ensino dentro desses parâmetros produz os entraves à aprendizagem que causam constrangimentos e frustrações diante do desempenho insatisfatório dos alunos, dos diferentes níveis de ensino, nas atividades que envolvem os números racionais. Ressaltamos, portanto, as dificuldades inerentes a aprendizagem podem ser provenientes do tratamento isolado das frações e das suas interpretações, pois alguns desses significados têm vínculos naturais que não devem ser ignorados.

Portanto, é oportuna a discussão acerca dos subsídios originários de algumas pesquisas desenvolvidas na última década. Assim como é interessante enfatizar as recomendações contidas nos PCN e os aspectos que dizem respeito às características e à abordagem no livro didático sobre o número racional a propósito de contribuir para a reflexão acerca do ensino e da aprendizagem do objeto matemático em questão nos parágrafos que se sucedem.

2.1 As contribuições da produção acadêmica com relação ao ensino e a aprendizagem do número racional

Considerando um novo olhar sobre o ensino e a aprendizagem em Matemática, inúmeras pesquisas vêm sendo desenvolvidas com o propósito de investigar, analisar e discutir alternativas para a superação dos percalços que ainda persistem no processo e interferem na transposição e apropriação dos conceitos e significados relativos aos números racionais. A maior parte desses estudos continua promovendo uma reflexão sobre as múltiplas interações que co-existem na tríade: professor-aluno-saber e que dinamizam o processo de ensino e a aprendizagem dos objetos matemáticos em sala de aula.

Entre as pesquisas recentes que tratam de aspectos inerentes ao ensino e a aprendizagem do número racional relacionamos algumas contribuições, entre elas: Romanatto (1997), em seu trabalho o pesquisador aponta que a plena compreensão dos significados do número racional pressupõe um trabalho significativo que leve em consideração todas as relações existentes entre os conceitos que o envolvem.

Por outro lado, o estudo desenvolvido por Woerle (1999) constatou através da aplicação de uma sequência didática que a complexidade na conceitualização do número racional se encontra na dificuldade do aluno em coordenar e realizar conversões entre os diferentes registros de representação (verbal, fracionário, decimal e geométrico).

Posteriormente, Catto (2000) analisou livros didáticos destinados ao 5º Ano do Ensino Fundamental, à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e averiguou que as atividades propostas nas coleções analisadas privilegiavam principalmente os tratamentos realizados no registro numérico e figural com números racionais, tanto na representação fracionária como decimal. Esse fenômeno identificado na pesquisa, segundo a pesquisadora, limita a compreensão dos diferentes registros de representação para o mesmo número racional.

Bianchini (2001) por sua vez, ao investigar a aquisição da noção número racional na representação decimal aplicou uma seqüência didática, no 4º Ano do Ensino Fundamental, explorando situações concretas utilizando grandezas e medidas, observou que a aprendizagem estava condicionada às rupturas no contrato didático estabelecido em sala de aula.

No mesmo período, Bezerra (2001), também investigou a apropriação do conceito de número racional, porém referente ao conceito de fração. Por meio de observações e do desempenho de um grupo experimental e outro de controle, constituído por alunos do 4º Ano do Ensino Fundamental, que resolveram situações-problema, o pesquisador concluiu que o processo de construção da noção de fração, a exemplo da evolução histórica do próprio conceito, ganha força quando as atividades desenvolvidas em sala de aula baseiam-se na resolução de problemas concretos e cujos contextos são de cunho realístico.

Em contrapartida, Rodrigues (2005), identificou aspectos do conceito de fração, relativos ao significado parte-todo e quociente que permanecem não apropriados por alunos em fase de escolarização e após o estudo formal do número racional na configuração fracionária. Paralelamente, Silva (2005), e Machado (2007), verificaram em seus estudos que as concepções epistemológicas dos professores, da 5ª série do Ensino Fundamental, quanto aos significados do número racional influenciam a transposição didática interna do conteúdo em sala de aula e podem comprometer a aprendizagem dos conceitos relacionados ao objeto em questão.

Podemos citar ainda a pesquisa realizada por Maciel (2007), cujo foco consistiu na análise do aproveitamento dos alunos das séries finais do Ensino Fundamental (5º e 9º Ano), e Médio (3º Ano), em escolas públicas de Pernambuco, constatando o fracasso dos mesmos na resolução de problemas referentes ao número racional e cujos enunciados utilizavam como contexto o significado parte-todo (discreto ou contínuo).

A partir das considerações apresentadas nas pesquisas citadas é possível conjecturar que a aprendizagem da noção do número racional, a coordenação dos diferentes registros de representação (em linguagem natural, pictórica, fracionária, decimal), e a compreensão dos diversos significados (parte/todo, quociente, medida, operador, razão, por exemplo), e pressupõe o reconhecimento dos mais variados contextos em que este número se apresenta. Portanto, o trabalho em sala de aula constitui uma tarefa demasiadamente complexa, a longo prazo, pois, requer tempo e demanda a superação de entraves à aprendizagem de natureza epistemológica e/ou didática.

2.2 As recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais com relação aos números racionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) sugerem que a abordagem dos números racionais em sala de aula, de modo efetivo, tenha início no 2º Ciclo (do 4º ao 5º ano do Ensino Fundamental), e seja consolidada no 3º e 4º Ciclo (6º ao 9º ano do Ensino Fundamental). Na perspectiva dos PCN, a finalidade de explorar os números racionais no 2º Ciclo consiste em conduzir a percepção do aluno de modo que verifiquem a insuficiência dos números naturais para resolver determinados problemas. Como discutimos anteriormente, há situações em que os números naturais não conseguem exprimir a medida de uma grandeza de natureza discreta ou contínua ou o quociente de uma divisão. Portanto, de acordo com os PCN a construção da idéia de número racional está diretamente relacionada à divisão entre dois números inteiros, com exceção do divisor igual a zero. E, como no 2º Ciclo a abordagem não inclui os números inteiros negativos, os números racionais deverão ser tratados como quociente de números naturais.

Com base na proposição dos PCN, para o trabalho com os alunos de 1º e 2º Ciclos, a Figura 5 ilustra uma possível teia de relações entre os conceitos que envolvem os números racionais. Para exemplificar, podemos citar o conceito de razão, que neste nível de ensino oferece a possibilidade de articulação com os conceitos de proporção, probabilidade, porcentagem e escala.

O enfoque sugerido pelos PCN quanto à abordagem dos números racionais, no 2º ciclo do Ensino Fundamental, consiste basicamente num trabalho que envolva os significados: parte-todo, quociente e razão, por meio da proposição de situações diversificadas que possibilitem os tratamentos e as conversões entre os registros de representação semiótica[8]: linguagem natural, pictórica e simbólica numérica (fracionária e decimal).

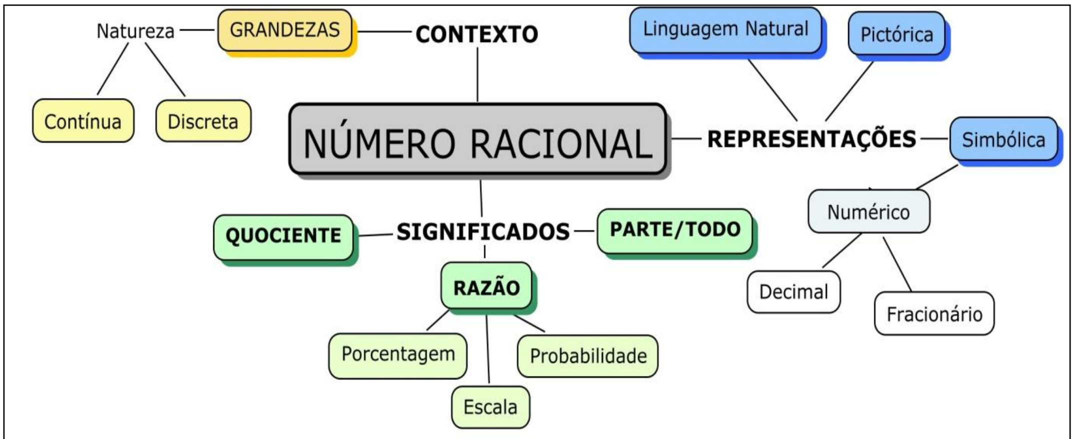


FIGURA 5: Aspectos do número racional passíveis de exploração no 2º Ciclo do Ensino Fundamental

Porém, de acordo com estas orientações dos PCN se ele optar por iniciar esse estudo pelo reconhecimento do número racional no contexto diário deverá estar atento, pois estes aparecem predominantemente na representação decimal. Nesse sentido, os PCN sugerem que

[8] Entendemos que os registros de representação semióticos compreendem um sistema de códigos e signos cuja finalidade consiste em cumprir as funções de comunicação, tratamento e objetivação. Estes registros (as formas geométricas, as escritas natural, algébrica e formal), possibilitam o acesso aos objetos matemáticos. E, além disso, possibilitam os tratamentos e conversões entre eles no fazer matemático.

o estudo dos números racionais, nos primeiros ciclos do Ensino Fundamental, deveria englobar situações em que sejam explorados três significados distintos da fração:

a. Enquanto uma relação parte/todo que está implícita nas situações, tradicionalmente apresentadas nos livros didáticos, em que o inteiro contínuo (chocolate, pizza, por exemplo), ou discreto (coleções de objetos, grupos de pessoas, por exemplo), é dividido em partes “iguais” ou equivalentes em área (inteiro contínuo) ou em quantidade (inteiro discreto).

b. Enquanto quociente resultante da divisão entre números naturais ($a : b = \frac{a}{b}$; $b \neq 0$). De acordo com os PCN, para o aluno este significado difere do anterior. Tomemos como exemplo duas situações distintas, numa o inteiro contínuo dividido em três partes equivalentes das quais duas dessas partes foram tomadas. E, uma segunda situação, na qual dois bolos devem ser divididos entre três pessoas. No entanto, em ambos os casos o registro de representação é o mesmo ($\frac{2}{3}$).

c. Enquanto razão, este significado é caracterizado quando se realiza a comparação entre duas quantidades de uma grandeza. Isso ocorre, por exemplo:

i) Ao determinar a probabilidade de ocorrência de um evento: a chance da professora sortear um menino em uma classe em que há 15 meninos e 15 meninas. Neste caso a razão é de 15 em 30 ou 1 para 2.

ii) No trabalho com escalas em mapas ou plantas arquitetônicas. Para representar uma casa através de uma planta baixa, um arquiteto utiliza as escalas 1 : 100 ou 1 : 50. A razão 1 para 100, por exemplo, indica que cada centímetro no papel corresponde a 1 metro em tamanho real.

iii) Ao explorar a idéia de porcentagem.

iv) Ao abordar a noção de proporcionalidade. Embora os PCN não mencionem, este conceito tem relação direta com a noção de razão, pois os alunos realizam diversas atividades de estrutura multiplicativa em qua esta noção está implícita.

Os parâmetros também sugerem que o significado operador deve ser tratado no 3º e 4º Ciclo. Esta interpretação pode ser identificada em situações do tipo “Qual o número que multiplicado por 5 resulta em 2?” Ou seja, esta ideia está presentes nos contextos em que o número racional fracionário desempenha a função de transformação na situação modificando-a. Já com relação aos significados da fração, medida ou ponto sobre a reta real, não identificamos qualquer referência ou orientações dos PCN.

A síntese das orientações contidas nos PCN com relação ao ensino dos números racionais, no 2º Ciclo do Ensino Fundamental, sinaliza que o trabalho a ser desenvolvido deverá estar alicerçado nos significados nucleares. No entanto, para que a aprendizagem das noções oriundas dos significados nucleares do número racional seja plausível os alunos precisam romper com alguns conhecimentos que já detêm em relação aos números naturais.

Essa ruptura, mencionada pelos PCN, é complexa e durante o processo que conduz a dissociação entre as propriedades dos naturais e racionais, revela uma série de dificuldades à assimilação do saber a ser ensinado.

Antecipamos que ao adotar como referência os PCN, as contribuições das pesquisas realizadas por Ponce (2006) e a análise dos protocolos dos alunos que participaram da pesquisa, podemos afirmar que as dificuldades detectadas no ensino e na aprendizagem dos conceitos relativos aos racionais podem ser identificadas em relação às propriedades, as operações, os significados e os diferentes registros de representação. Para ilustrar as afirmações anteriores relacionamos algumas dificuldades decorrentes das associações entre os números naturais e racionais.

a. O número racional não é reconhecido como um número em si mesmo. Mas como dois números naturais utilizados para a escrita de uma fração do inteiro. O numerador é o número posicionado acima do traço e o denominador é o número colocado em baixo desse mesmo traço. E, nesse sentido Lopes (2008), enfatiza que o estatuto epistemológico das frações não é o único obstáculo à sua aprendizagem, também a notação das frações constitui num obstáculo, não é tão trivial a associação de uma parte através de dois números inteiros separados por um tracinho.

b. Um número racional pode assumir diferentes e infinitas representações. Por exemplo, $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\ldots$ as frações constituem diferentes representações de um mesmo número racional (frações equivalentes que representam a metade).

c. Ao comparar dois números naturais os alunos estão aptos a concluir que 3 > 2. No entanto, deverá desconstruir essa idéia com os números racionais, construindo um raciocínio que na maioria das vezes parece contraditório: $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$.

d. Outro aspecto relevante refere-se à escrita numérica imposta pelo sistema de numeração decimal. Com os naturais temos que 2008 > 20, pois, a quantidade de ordens no algarismo indica a ordem de grandeza. Em contrapartida, ao comparar dois números racionais não poderemos utilizar o mesmo critério. Por exemplo, 3,2 > 3,182.

e. Um número natural possui um único sucessor e apenas um antecessor. Mas, entre dois racionais é possível obter inúmeros outros racionais. Assim, os alunos terão dificuldades em compreender a densidade do conjunto $\mathbb{Q}$. Por exemplo, no conjunto $\mathbb{N}$ entre 4 e 5, existe apenas o 3. Mas, em $\mathbb{Q}$ entre 0,5 e 0,6 estão intercalados infinitos algarismos, como por exemplo: 0,51; 0,519; 0,59; etc.

f. Quando multiplicamos um natural por outro diferente de zero ou 1, o produto é sempre maior que os fatores. Por exemplo, 5 x 2 = 10. Com os racionais nem sempre isto é possível $10\times\frac{1}{2}=5$.

g. Ao efetuar uma divisão entre números naturais os alunos podem verificar que o quociente, se for diferente de 1, é menor que o dividendo. Esta operação quando realizada entre números racionais possibilita que o quociente seja maior. Como por exemplo, $4\div\frac{1}{2}=16$.

De certa forma, os aspectos aos quais nos referimos poderão interferir na construção significados dos diferentes significados do número racional. No entanto, vale salientar a existência de outros fatores que repercutem nas ações docentes e discentes no que tange ao ensino e a aprendizagem dos números racionais. Como, por exemplo, a organização do ensino e da aprendizagem, a gestão do tempo didático e de aprendizagem. É por este motivo que nos propomos a discutir essas questões nos subtópicos seguintes.

2.3 O livro didático de Matemática e a concepção de ensino acerca do número racional

O livro didático pode ser definido como sendo um material intencionalmente elaborado para a utilização no processo de ensino e aprendizagem escolar com o intuito de atender diferentes finalidades. De acordo com Rojo (2007), o livro didático organiza-se, de forma variada e em suportes diversificados, em relação a um programa curricular, destinando-se a uma disciplina, área do saber ou conjunto de componentes curriculares, ou ainda a um ciclo, ou a um nível de ensino.

Segundo Silva Júnior (2005), esse material se destina a dois leitores: o professor e o aluno. Nesse sentido, o professor assume a função de transmissor e/ou mediador dos conteúdos nele contidos e o aluno assume o papel de receptor desses conteúdos.

De fato, no âmbito escolar, o livro didático ainda é um importante meio de acesso ao conhecimento. Mas, que não exime o professor da responsabilidade de fazer as adequações necessárias para que as situações nele contidas favoreçam essa acessibilidade e, por outro lado, possam contribuir para com o desenvolvimento de algumas competências (memorizar, deduzir, argumentar, conjecturar, entre outras), procedimentos (algoritimizar, calcular, registrar, modelizar, por exemplo) e atitudes (ter autonomia e iniciativa, por exemplo), por parte do aluno.

Além disso, ressaltamos que o modo como o livro didático é utilizado pode favorecer a flexibilização da comunicação didática, uma vez que este manual cumpre o papel de interlocutor junto aos parceiros da relação didática. Ambos têm vez na interação com os dispositivos de ensino nele contidos.

O professor ao organizar ou adaptar, comunicar e mediar às situações, os dispositivos de ensino e as sequências didáticas propostas e o aluno ao atuar nessas situações formulando hipóteses, elaborando estratégias de resolução e validando seus argumentos e respostas. A otimização do emprego do livro didático em sala de aula poderá viabilizar, oportunizar e estabelecer a interação e o diálogo entre o professor, o aluno e o conhecimento.

Portanto, o livro didático se caracteriza uma ferramenta didático-pedagógica que tem espaço garantido no processo de ensino e aprendizagem de qualquer componente curricular, e de modo particular da Matemática, pois, entre outros aspectos, auxilia na interpretação e na apropriação da diversidade das linguagens (natural, simbólica, pictórica, icônica), que são características deste campo do conhecimento e desempenha um papel fundamental na representação e formação dos conceitos, dos procedimentos e das relações. Como é o caso do número racional que poderia estar representado na linguagem natural (metade ou meio), simbólica (1/2, 0,5 ou 50%), pictórica (pela área de uma região plana ou um gráfico de setores).

Esse recurso do qual dispõem o professor e o aluno desempenha diferentes papéis de acordo com o propósito de quem o utiliza. Assim sendo, convém estabelecer as características fundamentais que determinam a sua importância e as principais funções do livro didático no processo de ensino e aprendizagem.

2.3.1 A relevância e a funcionalidade do livro didático

De acordo com o Guia do Programa Nacional do Livro Didático[9] (2008), um livro didático deve apresentar subsídios e esclarecimentos sobre o conhecimento que interfere e sobre interferências das práticas sociais do mundo contemporâneo e do passado. E, além disso, os livros devem conter uma proposta pedagógica que considere os conhecimentos que o aluno trás consigo e o nível de escolaridade do mesmo sem esquecer-se de oferecer atividades que o incentivem a participar ativamente das próprias aprendizagens e a interagir com seus pares.

Ainda segundo o Guia do PNLD (2008), o livro didático contribui para o processo de ensino-aprendizagem como mais um interlocutor que dialoga tanto com o professor quanto com o aluno. E, nesse processo o texto nele contido é portador de uma perspectiva sobre o saber a ser estudo e sobre o modo de se conseguir aprendê-lo de forma mais eficaz. Portanto, o livro didático assume a função de texto de referência tanto para o aluno, quanto para o professor.

[9]Utilizaremos a sigla PNLD quando nos referirmos a tal programa. O PNLD é promovido pelo Governo Federal através de ações desenvolvidas pelo Ministério da Educação com o intuito de avaliar a qualidade dos livros didáticos que são adotados pelos professores das escolas públicas do país. Em 1997, o MEC passou a publicar a síntese das resenhas das coleções aprovadas pelo programa. Tal publicação é denominada como Guia do PNLD.

Gérard & Roegiers (1998), afirmam que as funções mais relevantes do livro didático na relação com o aluno consistem em: propiciar a aquisição de conhecimentos; viabilizar o desenvolvimento de competências que favorecem a autonomia; consolidar, ampliar, aprofundar e integrar conhecimentos adquiridos; auxiliar na auto-avaliação da aprendizagem; contribuir para a formação e o exercício da cidadania.

Os autores mencionados reforçam que o livro didático preenche em relação ao professor funções de formação, pois contribuem como um instrumento que possibilita a melhoria do seu desempenho profissional no processo de ensino e aprendizagem. Neste caso a funcionalidade do livro didático reside no auxilio ao planejamento e na gestão das aulas, seja por meio da explanação dos conteúdos, das atividades, exercícios e trabalhos sugeridos; no favorecimento à aquisição de conhecimentos especificamente como texto de referência; na formação didático-pedagógica e no auxílio na avaliação da aprendizagem do aluno.

Quanto aos aspectos elencados por Gérard & Roegiers (1998), Batista (2001, p.29), apresenta as premissas do seu ponto de vista, que se opõe ao anterior, quanto a real finalidade do livro didático:

> [...] *Buscando assumir essa função estruturadora do trabalho pedagógico, os livros didáticos tendem a apresentar não uma síntese dos conteúdos curriculares, mas um desenvolvimento desses conteúdos; a se caracterizar não como um material de referência, mas como um caderno de atividades para expor, desenvolver, fixar e, em alguns casos, avaliar o aprendizado; desse modo, tendem a ser não um apoio ao ensino e ao aprendizado, mas um material que condiciona, orienta e organiza a ação docente, determinando uma seleção de conteúdos, um modo de abordagem desses conteúdos, uma forma de progressão, em sua uma metodologia de ensino, no sentido amplo da palavra.* Batista (2001, p.29)

Portanto, as afirmações de Batista nos conduzem à reflexão quanto à proposta didático-pedagógica sugeridas nos livros didáticos de Matemática. Particularmente, o trabalho que vem sendo desenvolvido nos últimos anos do 2º ciclo do Ensino Fundamental com os números racionais, assim como ocorre com outros conteúdos curriculares, parece ser regido por sequências didáticas que pouco tem contribuído para a produção de conhecimento nas aulas de Matemática.

As sequências didáticas utilizadas pelo professor em sala de aula, em geral, são aquelas encontradas no livro didático adotado por ele. Na maioria dos casos, o livro didático consiste no único referencial disponível à consulta e utilização tanto pelos professores quanto pelos alunos. Ao direcionar um olhar mais apurado às sequências de atividades e exercícios é possível constatar certa sutileza intencional dos autores em reduzir a incidência de erro por parte do aluno.

Nosso argumento advém da verificação de uma particularidade comum às atividades e exercícios que compõem os dispositivos analisados, nesse caso as sequências didáticas extraídas do livro didático: a utilização de subterfúgios (um número, uma palavra, um desenho, um esquema), que praticamente fornece a resposta para o problema proposto. Esses elementos aparecem nos exemplos, nos textos, ilustrações e nos enunciados que antecedem as atividades e exercícios por um lado auxiliam na compreensão dos conteúdos de ensino e por outro lado induzem o aluno a fornecer as respostas esperadas pelos autores.

Tal aspecto, diagnosticado no livro didático analisado neste trabalho de pesquisa, possivelmente maximiza os acertos e camufla a superação dos entraves à aprendizagem, principalmente as dificuldades relativas à apropriação das propriedades características do número racional que foram relacionadas anteriormente.

O bom desempenho dos alunos ao responder as atividades que constituem as sequências didáticas, de certo modo, pode levar tanto professores, quanto pais ou alunos a falsa sensação que de fato houve aprendizagem. No entanto, a análise dos dados apresentados nesse estudo sinaliza que estes artifícios resultam em produções mecânicas e ausentes de significado para o aluno.

A discussão anterior faz sobressair duas questões que poderão ser elucidadas em outra pesquisa posterior a esta: a primeira é até que ponto o livro didático cumpre as funções categorizadas por Gérard & Roegiers (1998)? E, a segunda questão a refletir seria: de que forma o livro didático de Matemática tem sido utilizado no Ensino Fundamental?

Embora, não haja elementos suficientes para responder as questões elencadas, ao que tudo indica, diante da escassez de outros recursos materiais, teóricos e metodológicos a proposta pedagógica do livro didático, em alguns casos, tem substituído o professor no gerenciamento do tempo didático e de aprendizagem e nas tarefas de planejamento e organização das situações didáticas. Os fatores mencionados supostamente parecem absorver a autonomia e contaminar a epistemologia do professor em relação aos conhecimentos matemáticos.

De certo modo, as repercussões destes fatores, nem sempre são desejáveis, são refletidas na sua prática. Um professor, que ano após ano adota o mesmo livro didático, possivelmente internaliza as concepções de ensino e aprendizagem difundidas pelos autores. Desse modo, acaba limitando a própria capacidade de criar ou adaptar a proposta pedagógica sugerida no livro didático. E, por conseguinte, passam despercebidas as nuances que permeiam as situações didáticas vivenciadas na sua sala de aula.

Ao adotar esta postura o professor se abstém de intervir no processo cognitivo mediante o poder de modelizar as situações didáticas transformando-as de acordo com as especificidades dos seus alunos. Muitas vezes, o professor fica refém do livro didático quando o trabalho realizado em sala de aula limita-se a seguir e manter o que os autores propõem. Se o livro didático é utilizado dessa forma pressupomos que o professor abre mão do controle e da manipulação das variáveis que influenciam o erro e o acerto do aluno na realização das atividades.

Encontramos nos PCN (1998, p.21 e 22), uma afirmação que sustenta os argumentos anteriores: [...] Não tendo oportunidade e condições para aprimorar a sua própria formação e não dispondo de outros recursos para desenvolver as práticas da sala de aula, os professores buscam suporte quase exclusivamente nos livros didáticos, que muitas vezes são de qualidade insatisfatória.

Apesar das propostas didático-pedagógicas, dos livros didáticos de Matemática analisados no PNLD, estarem supostamente concatenadas com as orientações dos PCN, os autores assumem para si a responsabilidade de definir quais serão os conteúdos curriculares que deverão ser abordados, realizam a compartimentação desses conteúdos, decidem o cronograma e a tipologia das atividades.

Além disso, aqueles que produzem estas obras, indiretamente determinam quanto tempo o professor deverá destinar a cada conteúdo ao propor determinada quantidade de atividades e exercícios de aplicação e fixação, por exemplo. Assim como, implicitamente estabelecem o tempo que o aluno tem para processar cada um desses conteúdos mediante a realização da bateria de atividades sugeridas. Portanto, acreditamos que neste momento torna-se essencial conduzir a discussão quanto à influência do livro didático na gestão do tempo pelo professor.

2.3.2 A influência do livro didático na gestão do tempo de ensino e aprendizagem

Exceto em alguns casos, o livro didático de Matemática, basicamente relaciona os conteúdos numa sequência linear que enquadra o ensino e a aprendizagem num instante de tempo: uma aula, um bimestre, um ano letivo. Nesse modelo, os objetos matemáticos são fragmentados e apresentados superficialmente, desconectados e a curto prazo, uma vez que o tempo para abordar determinado conteúdo é preestabelecido e se esgotada rapidamente para ceder espaço a novos conteúdos de ensino. Em relação à abordagem sugerida pelos livros didáticos de Matemática para o trabalho com os números racionais os PCN (1998, p.22 e 23), nos alertam que:

> [...] *Muitas vezes os objetos matemáticos são tratados de forma isolada, apresentados e exauridos em um único momento. E, quando ocorre de serem retomados, em geral no mesmo nível de aprofundamento e com os mesmos recursos, é apenas com o intuito de introduzir novas noções ou conceitos, sem considerar que a ampliação e a consolidação de um conceito por parte do aluno demanda que ele o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos.*

De fato, podemos perceber o fenômeno "*tempo*" é um fator preponderante que interfere diretamente nas relações estabelecidas entre o professor, o aluno e o saber num sistema de ensino. Câmara (1997), afirma que há quatro dimensões temporais com características distintas que atuam simultaneamente no cenário didático: o tempo ionosférico, didático, de aprendizagem e do professor.

Para Câmara (1997), o tempo noosférico e o tempo didático são reguladores do sistema didático e ambos são determinados em um nível macro pelos programas escolares e no nível micro pelos livros didáticos. O primeiro desempenha a função de imprimir ritmo necessário para o funcionamento do sistema didático. Enquanto o segundo, de acordo com Pais (2001), tem como finalidade cumprir exigências legais. E, além disso, prevê um caráter cumulativo e irreversível para a formalização dos saberes escolares. Contraditoriamente, o tempo didático pressupõe que sempre seja possível enquadrar a aprendizagem desses saberes em um determinado espaço de tempo.

Câmara (1997), ainda sugere que a junção do tempo noosférico e do tempo didático originaria o tempo de ensino que se caracteriza pela continuidade, linearidade e previsibilidade. No entanto, tais particularidades se contrapõem ao tempo de aprendizagem que é próprio de cada aluno.

Como Pais (2001, p. 25), observa o tempo de aprendizagem está mais vinculado com as rupturas e conflitos do conhecimento, exigindo uma permanente reorganização de informações e que caracteriza toda a complexidade do ato de aprender. Portanto, esse é o tempo necessário para que o aluno possa superar seus próprios bloqueios e ultrapassar os obstáculos à aprendizagem.

A aprendizagem pressupõe adaptações diante dos conflitos entre os conhecimentos “novos” e “antigos”. E, consequentemente requer rupturas frequentes as quais dependem de retroações. Ou seja, a aprendizagem esta subordinada ao acionamento de múltiplos processos cognitivos e, cujo desencadear não é sequencial ou linear. Assim sendo, podemos afirmar que o ritmo da aprendizagem é incompatível com o ritmo do tempo de ensino, já que ambos não seguem no mesmo compasso.

Além do tempo de ensino e de aprendizagem atuando no sistema didático existe uma terceira dimensão temporal: o tempo do professor. Ainda segundo Câmara (1997, p. 112), da mesma maneira que o tempo de aprendizagem apresenta-se como um tempo individual do aluno, o tempo do professor estaria intrinsecamente ligado ao professor como um “sujeito didático”.

O autor também afirma que a gestão desse tempo está profundamente ancorada na relação que o professor mantém com o conhecimento matemático. Nesse sentido, o professor tende a dilatar ou restringir o tempo que esses saberes permanecem em cena no jogo didático em função da sua relação com o conhecimento.

A tentativa de equacionar as disparidades entre o tempo de ensino, de aprendizagem e o gerenciamento do fenômeno “tempo” pelo professor, nas situações didáticas destinadas ao ensino da Matemática revelam alguns efeitos de ensino que na maioria das vezes induzem e, outras vezes, mascaram o fracasso e o erro do aluno na apropriação do conhecimento.

Portanto, a discussão nos fornece subsídios que ajudam tanto na identificação e quanto na compreensão das causas que desencadeiam os efeitos de ensino. Diante dos pressupostos anteriores, destacamos em seguida as principais características do livro didático que possibilitou o desenvolvimento desta pesquisa.

2.3.3 A proposta pedagógica da Coleção Matemática Paratodos em relação ao Número Racional

As sugestões metodológicas proposta nos livros didáticos com relação aos números racionais no 4º e 5º Ano do Ensino Fundamental, de modo geral, parecem seguir uma lógica linear em que cada noção ou o conceito é definido, a nomenclatura ou a classificação é introduzida, em seguida são exploradas situações de comparação e equivalência, para a inserção dos procedimentos algoritmos.

Essa linearidade presente nos livros didáticos empobrece o objeto matemático porque limita o estabelecimento de relações entre conceitos afins, dificulta a apropriação dos múltiplos registros de representação, dos diferentes significados do número racional e restringe o repertório de problemas passíveis de solução mediante a aplicação do número em si, das propriedades características e operações entre eles.

Diante da relevância e da funcionalidade do livro didático no processo de ensino e aprendizagem optamos por investigar os efeitos didáticos decorrentes da utilização desse recurso. Partindo do pressuposto que se este recurso interfere no estabelecimento das relações didáticas, entre o professor, o aluno e o saber. Então, isto implica no estimulo a interação do professor e, mais efetivamente a participação do aluno com os dispositivos de ensino (sequências didáticas, jogos didáticos, construções e modelizações, por exemplo).

Ao considerar os argumentos apresentados anteriormente, adotamos um dos livros didáticos aprovados no PNLD 2007 como referência para extrairmos a sequência didática, elaborada pelos autores, para introduzir a noção de fração no 2º Ciclo do Ensino Fundamental. Essa escolha permitiu a materialização dos objetivos da presente pesquisa.

Além disso, ressaltamos que o livro didático, por nós escolhido, havia sido adotado pelos professores de uma rede municipal de ensino da RMR em duas escolhas consecutivas do

PNLD. Portanto, fica subentendido que a proposta didático-pedagógica da coleção, na qual o livro didático se insere, estava sendo seguida há pelo menos seis anos, já que a pesquisa foi realizada durante no decorrer de 2008/2009.

O livro didático mencionado integra a Coleção Matemática Paratodos da Editora Scipione e a sequência didática utilizada se encontra no terceiro volume da mesma. No entanto, ressaltamos que no PNLD 2010, mais uma vez avaliou a coleção adquirida recentemente pela Editora Moderna incorporando-a ao Projeto Conviver. Porém, salientamos que a sequência didática, a qual nos referimos, não sofreu praticamente nenhuma alteração significativa no corpo das atividades. Consequentemente, a adoção da coleção repaginada no PNLD/2010, implica que tal sequência didática continuará sendo utilizada, por professores e alunos de inúmeras escolas públicas do país, por pelo menos mais três anos.

O manual do professor da Coleção Matemática Paratodos traz um capítulo denominado de “Novos métodos de ensino”. Nele os autores afirmam que a abordagem dos conteúdos segue uma organização em espiral[10] e em rede. Ou seja, os temas que eram apresentados de forma concentrada, quase que de uma só vez, passam a ser estudados em vários momentos do ano letivo e do Ensino Fundamental.

Dessa forma, o tema é abordado com um novo enfoque de modo que se entrelacem uns aos outros. De fato, isto ocorre nessa coleção com inúmeros conteúdos. Mas, contestamos esta alegação, pois com relação à noção de fração, as sequências didáticas se concentram num capítulo específico no volume do 4º Ano, outro capítulo traz sequências de atividades que exploram propriedades e operações envolvendo apenas os números decimais.

Ainda com relação ao estudo das frações, a linearidade negada pelos autores, se apresenta na sequência didática analisada na qual são propostas primeiro atividades que tratam da divisão do inteiro continuo em partes iguais, em seguida outras apresentam as diferentes representações (linguagem natural, pictórica e simbólica), outras tratam da comparação e da equivalência. E, dando prosseguimento à sequência alguns exercícios no qual o aluno deve efetuar uma operação (divisão), para determinar frações de quantidades.

[10] De acordo com Jerome Bruner (1974 apud TOLEDO, 1996, p.32) chama-se de currículo em espiral: “dominar ideias básicas, usá-las eficientemente, o que exige aprofundamento da compreensão que delas se tem, o que se pode conseguir aprendendo-se a utilizá-las em formas progressivamente mais complexas.

No capítulo 3 do manual do professor há um item que trata da sequência apresentada no livro, os autores recomendam que a sequência das aulas se aproxime bastante da sequência proposta na obra. Eles afirmam que a lógica sequencial da obra foi estudada e testada. Portanto, propicia melhor aprendizagem e internalização dos conceitos e resultados. Além disso, justificam esta decisão como um modo de evitar que os alunos tenham acesso a ideias fundamentais da Matemática.

Entretanto, os autores do livro didático avançam destacando que "nenhum material deve se transformar numa camisa de força", desde que haja razões suficientes o professor tem liberdade para modificar a sequência proposta. Concordamos com o argumento, porém nossa experiência como professora e formadora fornece indícios que o professor não faz alterações significativas nas proposições apresentadas no livro didático. Uma vez que a sua adoção pressupõe uma aprovação e, consequentemente uma recomendação pelo PNLD do MEC.

No que se refere à proposta pedagógica do livro didático analisado, salientamos que o ensino da noção, das representações e notações relativas ao número racional fracionário está ancorado no significado parte-todo. Os autores da Coleção Matemática Paratodos defendem a proposta de abordar o número racional na forma fracionária no 4º e 5º Ano do Ensino Fundamental[11] de forma menos enfática priorizando a realização de atividades com os números racionais na representação decimal, sob a alegação da funcionalidade deste último nas práticas sociais.

Os contextos utilizados pelos autores nos textos, ilustrações, exercícios e atividades contemplam basicamente os significados da fração correspondentes à relação parte/todo, quociente, razão (escala e proporção), e medida de um segmento de reta, que predominam nos volumes do 4º e 5º Ano do Ensino Fundamental. Uma vez que, os dois primeiros volumes da coleção, abordam apenas a relação parte/todo com frações elementares (um meio, um terço ou um quarto). Especificamente, o volume do 4º Ano, traz um capítulo introdutório sobre o número racional que segundo os autores, tem como objetivo construir ou consolidar a noção de fração.

[11]Optamos pela nomenclatura utilizada atualmente para indicar o nível do aluno no Ensino Fundamental de 9 anos. No entanto, na capa de cada volume costa 3ª série (correspondente ao 4º Ano), e 4ª série que corresponde ao 5º Ano do Ensino Fundamental.

Nesse sentido, destacamos que os autores da Coleção Matemática Paratodos optam pela construção da noção de fração propondo situações que exploram exaustivamente a relação estabelecida entre “as partes” e o “inteiro” seja no contexto contínuo ou discreto. Porém, as situações em que o contexto é contínuo prevalecem nos volumes do 4º e 5º Ano do Ensino Fundamental.

No livro didático analisado os exemplos e as atividades, que exploram o significado parte/todo do número racional, recorrem à subdivisão das formas geométricas planas, poligonais (retângulos, quadrados, triângulos) e não-poligonais (círculos), para representar a unidade, ou seja, quando o inteiro se apresenta num contexto contínuo. Em contrapartida, quando o inteiro corresponde uma quantidade ou grandeza de natureza discreta os autores sugerem a associação às coleções de objetos ou grupos de pessoas, por exemplo.

Outra característica comum em ambos os volumes da Coleção Matemática Paratodos, consiste em restringir o trabalho com as operações fundamentais, predominantemente por meio do cálculo mental ou com o auxílio de recursos didáticos (o material dourado, por exemplo), apenas entre números racionais na representação decimal. Concordamos com a postura dos autores ao adiar a exposição dos alunos às regras e os procedimentos de operacionalização com os números racionais na forma fracionária.

Reiteramos que o argumento dos autores se baseia na hipótese que os alunos terão mais tempo na segunda etapa do Ensino Fundamental (do 6º ao 9º ano), para se apropriar das técnicas operatórias, de toda teia de relações que envolvem os números racionais. Por outro lado, os mesmos reforçam que no dia-a-dia as pessoas não costumam realizar operações de adição, subtração, divisão ou multiplicação com os números fracionários.

Embora cientes da diversidade de ideias e conceitos associados ao número racional apenas algumas delas são abordadas no 4º e 5º Ano do Ensino Fundamental. Observamos, portanto que praticamente todos os significados da fração, sugeridos pelos PCN para o 2º Ciclo (parte/todo, quociente, razão, proporção, porcentagem, escala e probabilidade), estão contemplados nos volumes do 4º e 5º Ano da Coleção Matemática Paratodos.

No entanto, ao comparar os Gráficos 1 e 2, poderemos observar que na distribuição das atividades da Coleção Matemática Paratodos, que abordam os significados do número racional, o significado parte/todo prevalece em 28 das 36 atividades, cujo percentual corresponde a 77% no volume do 4º Ano. Enquanto, no volume do 5º Ano o significado aparece em 19 das 34 atividades representando 55% em relação aos demais significados representados no gráfico.

Gráfico 1

Distribuição das atividades no volume do 4º Ano da Coleção Matemática Paratodos

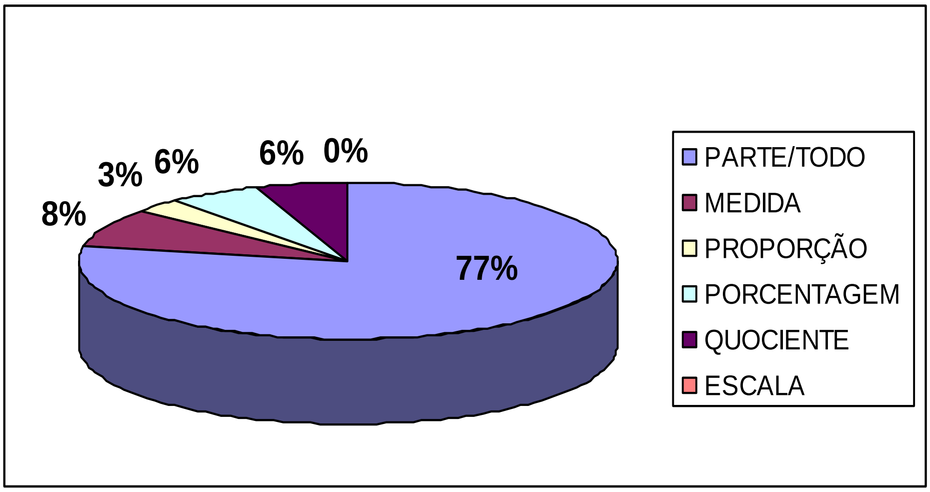
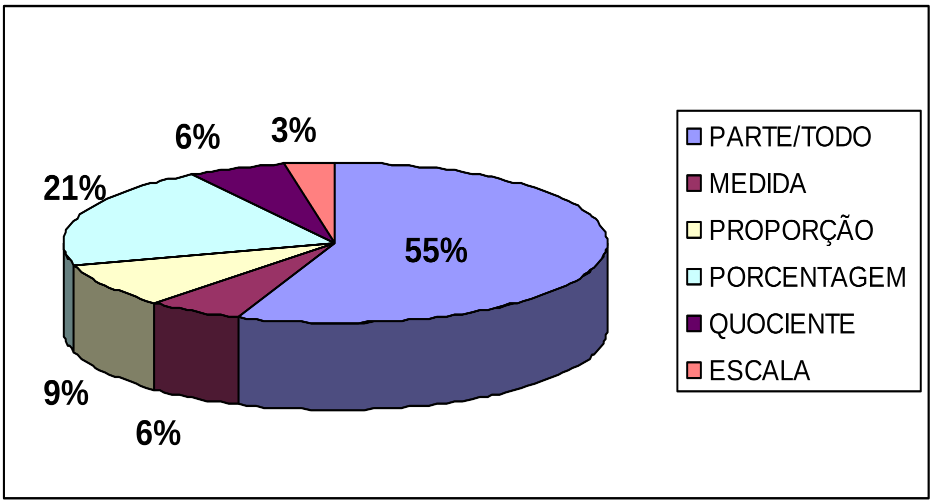


Gráfico 2

Distribuição das atividades no volume do 5º Ano da Coleção Matemática Paratodos



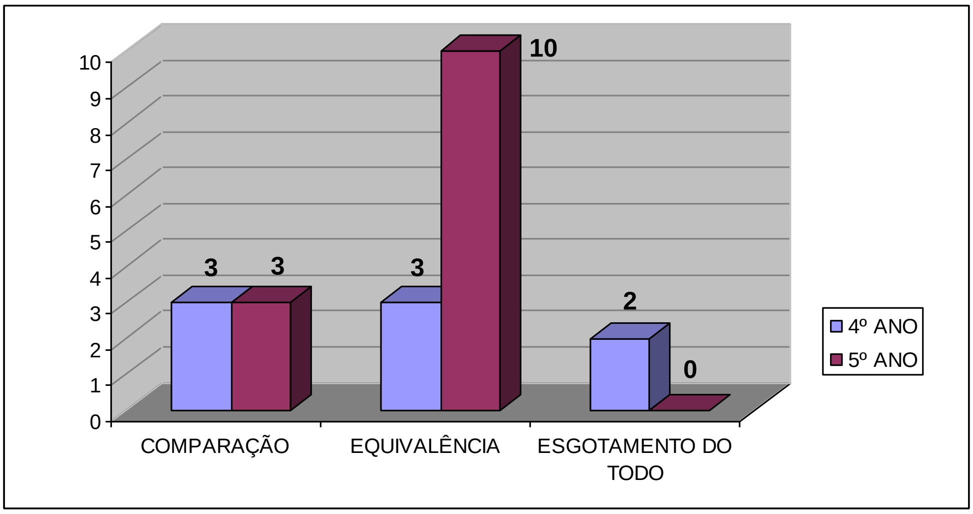
No que tange a abordagem dos significados da fração, em ambos os volumes da Coleção Matemática Paratodos, há uma disparidade considerável entre a quantidade de exercícios que abordam a relação parte/todo e a quantidade concernente aos demais significados. O Gráfico 1 indica que esta quantidade equivale a praticamente 80% e o Gráfico 2 o percentual corresponde a mais da metade do total de atividades. Ainda com relação às atividades destinadas à exploração das propriedades intrínsecas ao número racional fracionário verificamos que a quantidade de atividades que abordam o esgotamento do todo, comparação de frações e construção de classes de equivalência é discreta como podemos perceber no Gráfico 3. No volume no 4º Ano a atividade de comparação e equivalência de frações está restrita a duas atividades em uma única parte do capítulo do livro denominada: Ação “Explorando frações do círculo”.

A análise do quantitativo de atividades no volume do 4º Ano do livro didático revelou que apenas 8 das 36 atividades (22%) tratam do princípio da equivalência, da comparação de frações e do esgotamento do todo. No volumes do 5º Ano apenas 13 das 34 atividades (38%) exploram situações em que são exigidos os aspectos relacionados anteriormente. Os dados apresentados do Gráfico 3 possibilitam a visualização da disparidade quanto à distribuição e à tipologia das situações sugeridas no livro didático analisado. As demais atividades, em ambos os volumes da coleção, objetivam primordialmente a institucionalização das múltiplas representações do número racional.

Nesse sentido, as variáveis didáticas escolhidas pelos autores se alternam exigindo determinado tipo de ações do aluno. Estas solicitam que o mesmo interprete, nomeie, fracione, registre, realize conversões entre os registros de representação ou determine uma fração do inteiro contínuo ou discreto. Enquanto no volume do 5º Ano esse quantitativo corresponde a 21 das 34 atividades, ou seja, 62%. Todavia, constatamos o elo comum a todas as atividades é o reforço da ideia de que a fração descende da divisão feita em partes iguais.

Gráfico 3

Quantitativo e tipologia das atividades envolvendo frações



Ainda é pertinente considerar dois aspectos identificados na abordagem dos racionais. O primeiro refere-se ao significado da fração enquanto medida de uma grandeza (comprimento de um segmento de reta, a altura, volume depositado num recipiente, por exemplo), que é apresentando em articulação com o bloco de conteúdos das grandezas e medidas o que possibilita a atribuição de contextos significativos para a fração utilizada.

O segundo aspecto a ser considerado diz respeito ao significado razão. Os PCN sugerem que este significado pode ser construído a partir de conexões com as noções de porcentagem, probabilidade e escala. A interpretação da fração como porcentagem aparece no volume do 4º Ano em 2 das 36 atividades basicamente em contextos de superfície de uma figura retangular ou circular. No volume do 5º Ano a quantidade de atividades que abordam esse significado aumenta para 7 das 34 atividades e os contextos são mais diversificados, especialmente na articulação com o bloco de conteúdos tratamento da informação.

Vale salientar que apenas uma das 34 atividades, do volume do 5º Ano, explora a noção de escala utilizando como contexto realístico uma planta baixa na escala 1: 100. Outra noção que auxiliar na construção do significado razão é a ideia de proporcionalidade, porém aparece de modo sutil em uma atividade no volume do 4º Ano e em três atividades do volume do 5º Ano nesse livro didático. Ainda neste volume, os autores dedicam um capítulo específico para a noção de proporcionalidade, porém não identificamos nenhum link ou associações ao número racional.

A noção de probabilidade também é explorada no volume do 5º Ano. No entanto, é tratada pelos autores do livro didático apenas como a combinação de resultados ou possibilidades e não como expressão de um número fracionário. Ou seja, a representação fracionária ou percentual do número racional não é utilizada para indicar a probabilidade de ocorrência de um evento.

No volume da 4º Ano, são evidenciados alguns usos das frações com a intenção de reforçar a ideia de que uma fração resulta da divisão do inteiro (discreto ou contínuo) em partes iguais. E, nesse sentido, as atividades solicitam do aluno a representação pictórica, a notação e/ou a leitura das frações nos seguintes contextos:

a. No resultado não inteiro de uma divisão.

b. Uma ou mais partes de uma figura geométrica: polígonos e círculos (inteiro contínuo), dividida em partes congruentes.
c. Uma ou mais partes de uma quantidade (inteiro discreto) dividida em partes iguais.

Como já destacamos o significado parte-todo do número racional é o pilar das atividades propostas nos volumes do 4º e 5º Ano da Coleção Matemática Paratodos por meio de ilustrações e pequenos textos que apresentam grandezas contínuas (segmentos de reta, polígonos ou círculos, por exemplo) e discretas (coleções de selos, grupos de pessoas).

Para abordar essa concepção de fração os autores recorrem a diferentes contextos tanto no volume da 3ª série quanto no volume da 4ª série. Todas as atividades objetivam exemplificar situações em que o todo é dividido em partes iguais. E, a fração descreve a relação entre as partes que são consideradas e o número de partes em que havia sido dividido o inteiro.

Neste sentido, reiteramos que o tratamento da interpretação da fração como uma relação parte-todo, proposta pelo livro didático, pressupõe que o aluno seja capaz de identificar a unidade que representa o inteiro, seja discreto ou contínuo, compreenda a inclusão de classes de equivalência, saiba realizar divisões operando com grandezas discretas ou contínuas.

Mais, precisamente a relação parte-todo sobre um contexto contínuo apresentada na Coleção Matemática Paratodos caracteriza-se quando:

a. As partes do inteiro são equivalentes entre si.
b. A divisão do inteiro não deixa resto.
c. Ao reunir todas as partes o inteiro é reconstituído.
d. Ao dividir o inteiro numa quantidade maior de partes resulta numa extensão menor de área em cada uma delas.
e. A quantidade de partes não tem porque ser igual ao número de cortes.

No livro didático analisado, ao abordar a relação parte-todo num contexto contínuo, detém-se na questão de que as partes devem ser “iguais”. Mas, não discutem se as partes devem ter a mesma forma, a mesma superfície (área), por exemplo. No nosso ponto de vista, tais lacunas podem restringir a compreensão do significado parte/todo do número racional.

Ainda em relação ao significado parte-todo do número racional, porém, no contexto discreto, vale salientar uma das constatações desta pesquisa que evidenciou a necessidade do aluno ampliar a compreensão a noção de fração. Uma vez que, com grandezas discretas os subconjuntos estabelecidos não são delimitados por segmentos de reta, como no caso das grandezas contínuas, mas, por vários elementos que compõem uma coleção/quantidade.

A caracterização e a análise da proposta para o ensino e a aprendizagem dos números racionais nos primeiros anos do Ensino Fundamental, sugerida pelos autores da coleção analisada, auxiliam na compreensão e na justificativa, da questão norteadora e dos objetivos estabelecidos nessa pesquisa. Afinal, o objetivo dessa investigação consiste em analisar os efeitos decorrentes da escolha e da utilização das variáveis didáticas, bem como os seus respectivos valores, em uma das sequências didáticas da Coleção Matemática Paratodos na aprendizagem da noção de fração a partir da divisão do inteiro contínuo ou discreto em partes iguais.

Em contrapartida, a análise do livro didático não nos oferece elementos para verificar a eficácia do dispositivo de ensino (sequência didática) que utilizamos nessa pesquisa. Ou seja, sem adentrar a sala de aula não há condições de analisar a interação do professor e do aluno com o dispositivo, nem tão pouco, a emergência dos efeitos didáticos. Ou ainda, examinar a influência das variáveis didáticas na mobilização das estratégias utilizadas pelos alunos no processo de resolução das atividades sugeridas.

Portanto, no capítulo adjacente discorremos sobre os fundamentos da Teoria das Situações Didáticas que subsidiam as análises apresentadas nesse trabalho de pesquisa. Principalmente, com relação ao funcionamento do dispositivo de ensino (sequência didática), à influência das variáveis didáticas e dos seus valores, na mobilização das estratégias de resolução adotadas pelos alunos na resolução de cada uma das atividades sugeridas no livro didático mencionado.

CAPÍTULO III – FUNDAMENTOS DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

O presente capítulo tem por objetivo situar às bases teóricas que dão suporte as análises apresentadas nesse estudo. Buscando aprofundar a compreensão acerca dos fenômenos que emergem nas situações didáticas vivenciadas em sala de aula apresentamos alguns elementos da Teoria das Situações Didáticas.

A principal contribuição destes fundamentos teóricos para com a pesquisa em Educação Matemática consiste na proposição de um novo enfoque, em relação ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática, fornecendo subsídios que auxiliam na compreensão das interações estabelecidas entre os alunos, o professor e os conhecimentos matemáticos. A dinâmica dessas interações evidenciadas na sala de aula condiciona o modo como o professor ensina e a maneira como o aluno aprende.

3.1 O jogo didático

A maioria das pessoas já ouviu o refrão de uma música que diz: [...] "*Vivendo e aprendendo a jogar, vivendo e aprendendo a jogar. Nem sempre ganhando, nem sempre perdendo. Mas, aprendendo a jogar.*" Os versos nos conduzem à reflexão: no jogo da vida real, seja no âmbito social, pessoal, profissional ou escolar, somos todos jogadores imbuídos do desejo de vencer.

De certa forma, é necessário, refletir, organizar e direcionar nossas ações em prol dos interesses, das metas estabelecidas. E, nesse jogo, independentemente de ganhar ou perder, quem joga sempre aprende. O aprendizado também pressupõe manter o equilíbrio entre o prazer, propiciado pelas conquistas, e as frustrações ocasionadas pelas derrotas.

Ao adotar a Teoria das Situações Didáticas, como aporte teórico da pesquisa, percebemos que Brousseau (1986), ao modelizar as situações de ensino e de aprendizagem, sugere uma associação entre a noção de situação e a de jogo. Para ele, o jogo didático é um símbolo no sentido de que se assemelha "suficientemente" à vida, pois, solicita do jogador o mesmo gênero de possibilidade de atuação, emoções e motivações. Mas, em contrapartida distingue-se dela, pois, quem joga controla a maior parte das condições que, na realidade da vida, o oprimem e fogem ao controle.

De acordo com esse ponto de vista, é possível considerar uma situação genérica: ao assistir uma partida de futebol, os torcedores, de modo geral, anseiam pela vitória do seu time na partida, mesmo que as circunstâncias sejam desfavoráveis. Mantêm a confiança e expectativas positivas com relação às estratégias do técnico e ao desempenho dos jogadores. Todos apostam que ao final da disputa com a equipe oponente a vitória ocorrerá.

No entanto, com antecedência o técnico desse time coordena o trabalho com os jogadores, analisa as características dos adversários, planeja as táticas “de defesa” ou “de ataque”, seleciona os meios que possibilitarão as condições ideais, verifica o funcionamento do plano de jogo, (re) direciona as estratégias, veta ou escolhe aqueles que participarão da disputa, em função das suas expectativas, e, entre outras coisas, define a posição de cada jogador, objetivando o triunfo no jogo.

Para obter êxito na partida, oportuniza momentos nos quais os atletas pratiquem exercícios para obter o condicionamento físico e treina exaustivamente as jogadas esquematizadas. No dia do jogo o técnico motiva os jogadores, suscita estratégias individuais ou coletivas e, por outro lado, exige do time um bom desempenho por acreditar ter oferecido todas as condições necessárias à superação das dificuldades, dos bloqueios e imprevistos que poderão ocorrer.

A situação descrita anteriormente permite estabelecer uma analogia com o processo de ensino e aprendizagem perpetuado na escola. O ministério ou as secretarias de Educação, a escola (representada pelo professor), e os pais assemelham-se aos torcedores e, como é de praxi indubitavelmente, esperam o sucesso do aluno, o jogador, no jogo das aprendizagens.

Mas, antes de submeter o aluno ao jogo didático, o professor tem um papel similar ao de um “técnico”, porque também coordena e orienta o trabalho do aluno. E, isso pressupõe que as suas ações são constantemente avaliadas, pois, a priori, a função exercida exige que ele planeje, elabore, adéque e gerencie as situações propostas, controlando os meios (textos, atividades, exercícios, problemas e testes), que serão empregados visando o sucesso do aluno no jogo de aprendizagens.

Nesse processo, os sujeitos envolvidos no jogo didático, professor e aluno, trabalham, se comunicam com o saber, mobilizam seus repertórios de conhecimento, se articulam, convergem, divergem, negociam e renegociam, se empenham ou não; Enquanto um pressiona o(s) outro(s) resiste(m) às adaptações necessárias para a efetivação das aprendizagens. Além disso, nesse jogo, tanto o professor quanto o aluno estão sempre propensos às tensões diante da incerteza: será que a aprendizagem vai acontecer?

Por conseguinte, o jogo didático quando comparado ao jogo realidade apresenta similitudes e diferenças. É por intermédio da analogia entre *situação* e *jogo* que Brousseau introduz as noções fundamentais da TSD[12]. Nessa perspectiva teórica o aluno é comparado a um jogador que constrói as estratégias que conduzem ao sucesso ou ao fracasso, utilizando a gama de conhecimentos que dispõe e tentando acomodar outros conhecimentos que lhes são propostos.

O papel do professor, nesse processo de idas e vindas, consiste em nortear e sancionar as escolhas do "jogador", para que o mesmo acione dentro das suas possibilidades e dos conhecimentos que dispõe no seu repertório, o mais adequado para dispor de uma jogada precisa.

Do mesmo modo, é importante enfatizar que o "ambiente", o "campo" onde esse jogo é jogado, na verdade, corresponde ao que Brousseau (1986), nomeou como "meio didático". Diante do meio didático, composto por elementos materiais, virtuais e eventualmente humanos é que o aluno deve se posicionar e atuar. Nas escolas, um dos meios mais utilizados tanto por professores quantos por alunos para ensinar e aprender Matemática é o livro didático.

Na interação com o meio didático três subsistemas se apresentam: o conhecimento matemático, o professor que se encarrega de mediar o diálogo com esses conhecimentos e o aluno que visa apropriar-se desses objetos. Portanto, o professor, o aluno e o conhecimento são os componentes essenciais do sistema didático.

Câmara dos Santos (1997) define o sistema didático como uma formação que se origina no início do ano letivo obedecendo a um mecanismo próprio. Ou seja, nesse sistema, a partir de

[12] Deste ponto em diante utilizaremos a sigla TSD todas as vezes que nos referirmos a Teoria das Situações Didáticas.

um texto do conhecimento (normalmente delimitado pelos programas curriculares ou livros didáticos), um contrato é instituído e o conhecimento que é a máquina que movimenta o projeto de ensino e aprendizagem, congrega professores e aluno em um só lugar.

Portanto, para compreender o jogo didático é necessário analisar como se estruturam as relações entre os três componentes do sistema didático: o professor, o aluno e o saber, os quais dão forma ao "triângulo da aprendizagem" de Galligani (1980)[13], "triângulo pedagógico" de Houssaye (1982)[14], ou ainda "triângulo didático" de Develay (1985)[15].

Nesse sentido, Moigne (1977)[16] propõe que o saber corresponde ao pólo ontológico, pois corresponde aos objetos imateriais culturais concebidos pelos múltiplos campos do saber e que detêm uma natureza comum que é inerente a todos e a cada um. O professor corresponde ao pólo funcional, pois a ele cabe acionar esses saberes e conferir o status social devido. O aluno corresponde ao pólo genético, pois, diante dos confrontos entre o que ele já conhece e aqueles objetos do conhecimento a conhecer os saberes se originam ou evoluem.

Lerner (2003), por sua vez, afirma que quando ingressam na relação didática, os três termos que o constituem se modificam: a criança transforma-se em aluno, o saber cientificamente produzido transforma-se em "saber a ser ensinado" e depois em "saber ensinado" e o adulto transforma-se em professor.

Com relação à representação triangular proposta, Câmara dos Santos (1997) e Brito Menezes (2006) ressaltam que o triângulo cujos vértices são o professor, aluno e saber não é essencialmente equilátero. Pois, as relações estabelecidas entre esses elementos humanos e imateriais são na maioria das vezes conflituais e a dinâmica das mesmas instaura um equilíbrio instável no sistema didático.

As relações se configuram na medida em que os vértices são interligados. De acordo com Câmara dos Santos (1997) o triângulo didático depende de características próprias das

[13] Galligani, F. *Préparation et suivi d'une action de formation*. Paris : Éditions d'Organisation, 1980. In :MEIRIEU (1998, p.84)

[14] Houssaye, J. *Le triangle pédagogique*. Tese de doutorado, Paris X, 1982. In :MEIRIEU (1998, p.84)

[15] Develay, M. *Didactique et pédagogie.* In : Apprentissage et didactique, IREM de Lyon, n.º 51, maio de 1985, p. 29 a 42. In :MEIRIEU (1998, p.84)

[16] Le Moigne, J. L. *La théorie du système général.* PUF, Paris, 1977, p. 38-39. In :MEIRIEU (1998, p.84)

relações: epistemológica (professor em relação ao conhecimento), pedagógica (do professor em relação ao aluno) e do aluno com relação ao saber. Ainda, segundo este pesquisador, o triângulo didático equilátero representaria uma situação didática ideal. Deste modo, os pólos professor/aluno/saber não deveriam ser analisados isoladamente, e, sim de forma sistêmica, pois há interfaces nas relações entre eles.

Nesse contexto, Meirieu (1998) assegura que os parceiros da relação didática nunca estão sós, pois, a aprendizagem os põe frente a frente, em uma interação que nunca é simples circulação de informações, um sujeito e o mundo, um aprendiz que traz consigo aprendizados anteriores e um saber que só existe porque é reconstruído. Contudo, é pertinente considerar que a relação do aluno com o saber é mediada por aquele que delibera de modo inconsciente ou intencional, cria, oportuniza e propõe situações ou experiências. Estas situações podem despertar a curiosidade, o descobrir, o anseio de aprender.

As situações de ensino elaboradas, escolhidas e propostas pelo professor poderão ser aceitas e integradas pelo aluno. Mas, também podem ser recusadas e, o aluno, diante delas se apresentar impassível. No entanto, em ambos os casos é provável obter resultados indesejáveis com relação às aquisições do aluno, pois o projeto de ensino e aprendizagem está impregnado das concepções acerca desse processo e do reconhecimento e da aceitação das atribuições de cada um dos envolvidos.

Portanto, para fazer o sistema didático funcionar se faz necessário que cada um dos envolvidos aceite e assuma suas atribuições. O mau funcionamento dos subsistemas: professor, aluno e saber resulta em entraves que comprometem ou inviabilizam o ensino e a aprendizagem dos objetos matemáticos.

Por este motivo, desde 1960, inúmeras pesquisas são desenvolvidas sobre os problemas relativos ao ensino e a aprendizagem em Matemática. E, embora, sejam identificados, analisados e discutidos nos fóruns sobre Educação Matemática, permanecem enraizados no sistema educacional atual devido ao modo como ensino é concebido pelas instituições e profissionais de ensino, enfim pela sociedade.

De acordo com Brousseau (2008), a concepção mais frequente, acerca do ensino, é aquela que o vê apenas como um mix de relações entre o sistema educacional, representado pelo professor e o aluno, estritamente nas situações em que um está envolvido na transmissão e o outro na apreensão de um conhecimento específico. Na mesma direção, Galvéz (1996) afirma que o modo como os sistemas educacionais organizam os currículos revela a concepção sobre o processo de aquisição dos conhecimentos. Até agora, predomina a concepção na qual basta decompor um saber, em sua modalidade cultural em pequenos pedacinhos isolados e então organizar sua ingestão por parte dos alunos, em períodos breves e bem delimitados baseados em sequências que se fundam na análise do próprio saber.

Essa visão acerca do ensino desconsidera a importância do contexto em que os conhecimentos são adquiridos, subestima a atribuição de significados, a funcionalidade do saber durante a aquisição e equaciona o tempo didático e o tempo de aprendizagem. Além disso, essa concepção do ensino não revela qualquer tipo de inquietação com relação à aplicabilidade dos conhecimentos adquiridos fora do contexto das situações de caráter didático.

Na Figura 6, está representada a dinâmica das relações estabelecida no sistema didático na concepção que predomina atualmente nos sistemas educacionais acerca do ensino e da aprendizagem. A responsabilidade do sistema de ensino consiste na definição do currículo que pressupõe a fragmentação do conhecimento em conteúdos.

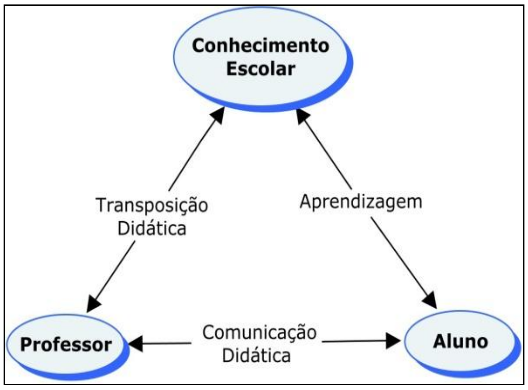


Figura 6: Sistema didático [17]

De acordo com a concepção de ensino e aprendizagem, tradicionalmente difundida, na tarefa de ensinar o professor está incumbido de realizar a transposição didática[18]. E, nesse processo, o conhecimento científico torná-se mutável, pois ao revestir-se de outra roupagem transforma-

[17] O esquema apresentado na figura 7 foi adaptado de Brousseau (2008 p.17).
[18] [...] um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática. CHEVALLARD (1991, apud in: PAIS, 2001 p. 19).

se em saber ensinável. Portanto, na tarefa de aprender ao aluno compete o armazenamento das informações perpetradas pelo professor mediante a comunicação didática. Deste modo, se o aluno reproduz integralmente as informações veiculadas pelo professor, acerca de um determinado conhecimento, isto significa que a aprendizagem foi efetivada. Neste caso, podemos afirmar que a concepção citada corresponde a uma visão equivocada e reducionista do processo de ensino e aprendizagem, pois, a relação didática é interpretada como uma simples comunicação de informações.

No entanto, há outras concepções acerca do processo relativo ao ensino e a aprendizagem. Câmara dos Santos (1998), por exemplo, define os limites da aprendizagem baseada na "concepção escadinha", entre elas: a fragmentação da aprendizagem em pequenas etapas na maioria das vezes impede que o aluno atribua significado às suas ações; pode impedir que o aluno transfira para outras situações a aprendizagem em questão; nesse caso é comum camuflar ou esconder os erros e obstáculos na relação didática.

Estes elementos, esquematizados na Figura 7, indiscutivelmente devem ser considerados na análise dos efeitos que se originam ou que são diagnosticados no processo de ensino e aprendizagem, pois auxiliam na compreensão as interações entre os elementos principais do sistema didático. Portanto, nesse momento destacamos a necessidade de esclarecer que as bases que fundamentam a nossa compreensão acerca da aprendizagem estão pautadas na tese de Brousseau (1986).

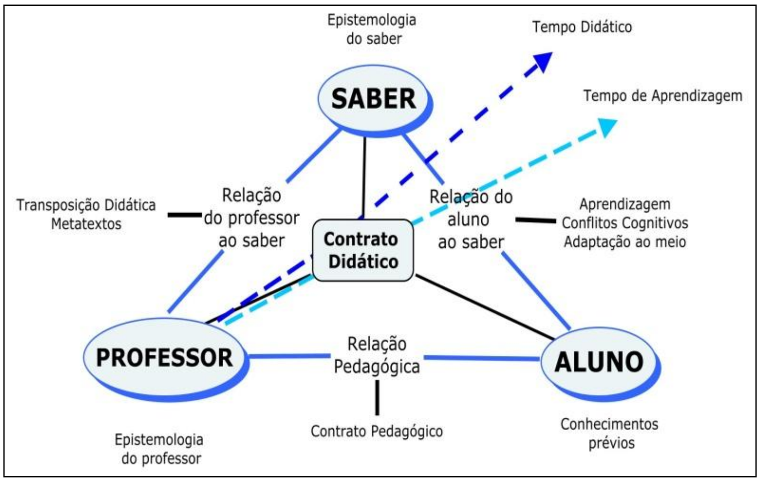


Figura 7: Fatores endógenos e exógenos que influenciam o sistema didático [19]

[19] Adaptação do esquema apresentado em Brito Menezes (2006 p. 27.)

Ao modelizar as situações de ensino, Brousseau (1986), recorre a alguns elementos da Teoria da Equilibração desenvolvida por Piaget, para explicar a atividade intelectual de aprender. De acordo com essa tese cognitivista, a adaptação intelectual representa o estabelecimento de um equilíbrio progressivo entre as assimilações do sujeito com relação aos objetos do conhecimento e o trabalho de acomodação às realidades externas.

Brousseau (1986) reconhece que a tese Piagetiana, da Equilibração, se opõe à visão empirista na qual a aprendizagem é inata ou se dá de modo natural. Ele também, se contrapõe a ideia de que a aprendizagem está associada exclusivamente aos estágios maturacionais do indivíduo, pois nesse caso o professor estaria destituído de toda e qualquer responsabilidade didática e os dispositivos de ensino (meios didáticos) seriam irrelevantes.

Na TSD o pesquisador considera que a aprendizagem no âmbito escolar também é o produto resultante da equação: assimilação + acomodação = adaptação ⇔ equilibração. Ou seja, a aprendizagem é uma construção decorrente dos conflitos entre os conhecimentos já adquiridos, que são frutos das experiências pessoais e escolares, com os “novos” conhecimentos provocados por intermédio das escolhas didáticas do professor. O aluno reconhece a insuficiência dos próprios conhecimentos assimilando as informações fornecidas pelo professor acomodando-as estabelecendo o equilíbrio entre “novo” e o “antigo”.

Ainda segundo Brousseau (1996), o trabalho do professor incide na proposição ao aluno de uma situação de aprendizagem para que ele elabore seus conhecimentos como uma reposta pessoal a uma pergunta, e os faça funcionar ou os modifique como resposta às exigências do meio e não a um desejo do professor.

Meirieu (1998), por sua vez, ressalta que o professor deve indiscutivelmente respeitar e colocar-se a serviço da solicitação expressa pelos alunos. Afinal, desconsiderar essa solicitação consiste em desprezar o aluno, afastar-se dele e, portanto, renunciar, mais cedo ou mais tarde, ao mínimo de eficácia das práticas empreendidas que objetivam o produto: aprendizagem.

Podemos sintetizar a discussão nos reportando ao argumento de Brousseau (1986, p.49) quanto à concepção moderna acerca do ensino, que em sua opinião seria a ideal. Tal concepção de ensino solicita, pois, ao professor que provoque no aluno as adaptações desejadas, através de uma escolha judiciosa dos "problemas" que lhe propõe. Esses problemas, escolhidos de forma que o aluno possa aceitá-los, devem levá-lo a agir, falar, a refletir, a evoluir por si próprio.

Meirieu (1998) reforça os pressupostos antecedentes quando afirma que toda aprendizagem verdadeira exige uma ruptura com as antigas representações ou pré-conceitos anteriores, ou seja, que requer uma intervenção externa ou uma situação específica que obrigue o sujeito a modificar o seu sistema de pensamento.

De certo modo, para que as adaptações aconteçam, entram em jogo as escolhas didáticas do professor, pois a consecução das metas definidas por ele está intimamente relacionada à maneira como o conhecimento é introduzido na sala de aula. No Ensino Fundamental, com frequência os professores optam pela introdução dos objetos matemáticos em sala de aula partindo da abordagem das sequências de atividades sugeridas no livro didático.

Deste modo, acreditamos ser pertinente caracterizar mais detalhadamente o meio didático e as situações nas quais está inserido, pois nos enveredamos pela análise do livro didático de Matemática, especificamente com relação à aprendizagem do significado parte/todo do número racional. E, como os pressupostos anteriores sinalizam que este é um dispositivo de ensino que interfere tanto no trabalho do professor quanto na tarefa do aluno nos debruçaremos sobre alguns dos aspectos concernentes a esse recurso didático.

3.2 O meio didático

Na TSD, Brousseau (1986, 1996, 2008), parte do princípio de que o aluno aprende adaptando-se a um meio que é um fator de contradições, de dificuldades, de desequilíbrios, um pouco como acontece em sociedade. E o saber, que é fruto da adaptação do aluno, manifesta-se através das novas respostas para os problemas que lhes são postos, e, que são a prova da aprendizagem.

Foi na tentativa de compreender como ocorre a aquisição dos conhecimentos matemáticos e por que os alunos fracassam nesse processo, mesmo quando apresentam um desempenho satisfatório com relação às outras áreas do conhecimento, que Brousseau se interessou pelas situações e pelos dispositivos de ensino que se encerram nesses momentos pedagógicos.

A busca de condições ideais para a efetivação da aprendizagem do conhecimento matemático possibilitou o desenvolvimento da noção de engenharia didática[20]. Mediante o processo de “engenharia” os pesquisadores desenvolviam as situações e produziam os dispositivos de ensino necessários à investigação dos fenômenos didáticos e dos efeitos de ensino.

Ao considerar que o aluno aprende adaptando-se (assimilando e acomodando) ao meio que é modelado a partir das intenções didáticas do professor, concordamos com Brousseau (1986) quando afirma que um meio sem intenções didáticas é insuficiente para induzir o aluno na aquisição dos conhecimentos culturais.

Diante dos argumentos, poderíamos definir o meio didático como instrumentos ou dispositivos utilizados pelo professor para que o aluno se aproprie de um objeto do conhecimento. Mais precisamente, o meio corresponde basicamente aos elementos materiais que o professor elabora, manipula, organiza (peças de um jogo, listas de exercícios, fichas de atividades, testes, por exemplo), ou dispõe (tais como: o livro didático e os softwares), de modo intencional para ensinar ou controlar a aquisição de um conhecimento.

Ainda, segundo Brousseau (2008 p.19), um problema ou exercício deve ser considerado como um dispositivo, um meio que responde ao aluno, de acordo com algumas regras. Que jogo o aluno deve jogar para precisar de um determinado conhecimento? Qual a sucessão de jogos que deve levá-lo a precisar desse conhecimento? Quais as informações ou sanções são relevantes e o aluno deve receber para orientar suas estratégias e selecionar o conhecimento apropriado na resolução dos desafios sugeridos pelo meio?

Os questionamentos nos conduzem a compreensão de que o meio pode e deve ser organizado, elaborado ou adequado pelo professor de modo que possibilite a interação e a mobilização dos conhecimentos pertencentes ao repertório do aluno. O processo de modelagem do meio, na perspectiva da TSD, pressupõe que o professor viabilize a progressão das aprendizagens não

[20] A noção de engenharia didática foi introduzida por Brousseau no início da década 1980 como proposta metodológica de pesquisa em Educação Matemática e teve continuidades em nos trabalhos de Michèle Artigue (1988).

apenas provocando mais desafiando o aluno para que seja possível a evolução dos conhecimentos que dispõe.

Portanto, de acordo com esses fundamentos, os comportamentos dos alunos revelam o funcionamento do meio que deve ser organizado, elaborado ou utilizado pelo professor. Brousseau (1996, 2008) afirma que o meio não é uma reformulação dos conhecimentos, mas sistema autônomo, antagônico ao sujeito e é dele que convém fazer um modelo.

Nesse sentido, é possível identificar os jogos do aluno com o meio didático em relação ao saber. E, os jogos do professor enquanto organizador dos jogos do aluno. Ainda de acordo com Brousseau (1986), o jogo do professor define e dá sentido ao jogo do aluno e ao conhecimento.

De certo modo, as escolhas didáticas e a comunicação, estabelecida entre o professor e o aluno com a finalidade de ensinar e aprender, acabam determinando ou direcionando a mobilização das estratégias ou procedimentos na atividade interação do discente com o dispositivo de ensino. No caso da presente pesquisa, o meio corresponde à sequência didática sugerida no livro didático.

Assim sendo, para que o jogo do aluno tenha sentido, Meirieu (1998) sugere que um dispositivo de ensino deverá programar o inesperado, organizar a contingência, impor o encontro de materiais heterogêneos e múltiplos que provêm de diversas fontes. Portanto, o professor deve oportunizar o acesso do aluno a esses materiais e levá-lo a encontrar uma forma de integrá-los em sua atividade usual, de forma autônoma e inventiva.

Por conseguinte, é preciso ponderar que ao considerarmos o meio como um subsistema independente e oposto ao aluno, nossos interesses devem recair sobre a investigação das circunstâncias e das regras que regem a disseminação e a aquisição dos objetos matemáticos em sala de aula.

Nesse sentido, o esforço empreendido nesta pesquisa consistiu em direcionar o olhar para as situações didáticas e o meio didático; bem como para os acordos que regulam a relações didáticas, pois, o funcionamento e o desenvolvimento do meio (as partidas jogadas), as regras de interação (o jogo propriamente dito), segundo Brousseau (2008), podem produzir os efeitos de ensino, também denominados na literatura como efeitos didáticos.

Os efeitos aos quais nos referimos caracterizam-se como momentos cruciais para a continuidade do processo de aprendizagem e podem ser desencadeados por múltiplos fatores, entre os quais as escolhas didáticas do professor, a epistemologia do objeto matemático, da estruturação do meio, das circunstâncias que regulam o meio, e do jogo de variáveis intrínsecas ao meio, por exemplo.

Considerar que a aprendizagem é efetivada mediante a adaptação do aluno que assimila o meio criado pelo professor ou pelos autores de um livro didático, independentemente de intervenções externas, pressupõe uma investigação sobre a influência dos efeitos didáticos, na mobilização pelos alunos dos próprios conhecimentos, ou no afloramento de "novos" conhecimentos que funcionam como instrumentos eficazes no controle das situações. Desse modo, percebemos que a identificação dos efeitos didáticos[21] estava condicionada ao estudo da evolução das situações que envolvem o meio.

A presente pesquisa analisa, portanto, os efeitos que emergiram durante a interação dos alunos com o meio (sequência didática)[22], elaborado pelos autores do livro didático de matemática. Assim sendo, justificamos a referida análise na TSD, o principal aporte teórico desse estudo. Por conseguinte, os parágrafos subsequentes, destinam-se à definição e caracterização da tipologia das situações que possibilitam a interação com o meio.

3.2.1 A estruturação do meio didático

Tomando como referência o esquema apresentado na Figura 8 podemos observar a modelização efetuada por Brousseau (1996, 2008) com o intuito de representar a forma como o meio didático é estruturado. Esse esquema ilustra diferentes situações e as funções que tanto o professor quanto o aluno ocupam na interação com o meio.

---

[21] A identificação e a análise dos efeitos didáticos que emergiram em decorrência da aplicação de uma sequência de atividades sugerida pelo livro didático de matemática serão retomadas e aprofundadas posteriormente nas discussões metodológicas e dos resultados.

[22] A sequência didática será minuciosamente detalhada no capítulo destinado a narrativa da metodologia adotada nessa pesquisa.

Observando o esquema do interior para o exterior identificamos o meio material, não necessariamente concreto (os textos, modelos, exercícios ou problemas do livro didático ou um ambiente computacional: um software, por exemplo), organizado ou elaborado pelo professor seguindo algumas regras que definem o sucesso ou o fracasso do aluno. Nesse sentido, o professor idealiza e considera um sujeito simbólico: o aluno, que corresponde ao sujeito objetivo. A interação desse sujeito simbólico (S5) com o meio constitui a situação objetiva que é proposta pelo professor ao aluno e com a qual este deve interagir. Na situação de referência, temos um sujeito que atua (S4), que ao se posicionar como aluno numa situação objetiva pode representar e se identificar com o sujeito idealizado (S5).

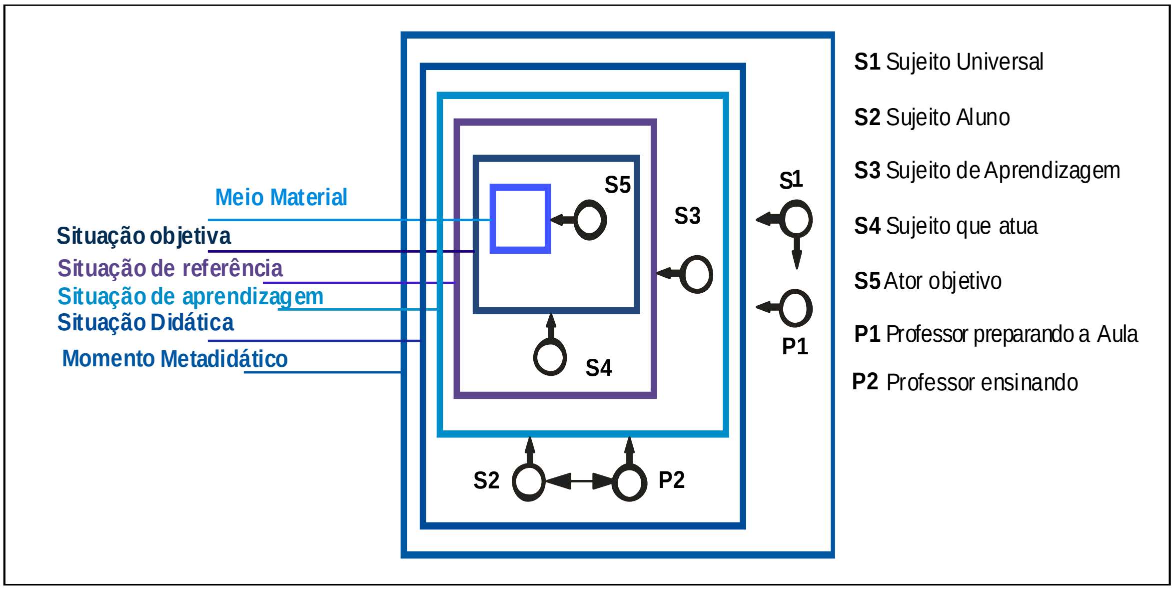


Figura 8: Múltiplos papéis do professor e do aluno na interação com o meio didático
Fonte: Brousseau (1996, p.71) & (2008, p.54)

Segundo Brousseau (2008, p. 58) para um observador externo não há diferença entre um sujeito S5 ou S4. Já que para o ator sim, pois ele mesmo se distingue dos demais. Este autor avança afirmando que o meio objetivo é mobilizado em situações de ação, podendo ser efetivo sobre o qual o aluno deve atuar ou fictício, cujo funcionamento ou transformações o aluno precisa imaginar para responder o problema. No entanto, em ambos os casos a interação está condicionada aos modelos implícitos de ação. Uma vez que as situações de formulação e validação são consideradas como situações de ação.

Ao retomar o esquema relativo à estruturação do meio didático, representado pela Figura 8, percebemos que há situações em que o meio de referência requer do aluno a capacidade de elaborar ou dispor de um conhecimento preciso. E, tal decisão ou ação do aluno se configuraria como o fenômeno da aprendizagem. Portanto, a situação de aprendizagem compreende uma situação de referência sobre a qual atua o sujeito da aprendizagem (S3).

Nesse meio, denominado situação de aprendizagem, o professor assume o papel de ator. Ou seja, posiciona-se como o sujeito que ensina. E, o aluno, metamorficamente transforma-se em sujeito genérico cuja função consiste em administrar, com o auxílio do professor, tais situações. Nesse sentido, Meirieu (1998, p.191) define uma situação de aprendizagem como:

> [...] *Um conjunto de dispositivos no qual um sujeito se apropria da informação a partir do projeto que ele concebe. Ele se apóia, para isso, em capacidades e competências já dominadas que lhe permitem adquirir outras novas. As situações de aprendizagem podem, assim, aparecer fora de qualquer programação didática.*

De acordo com a definição de Meirieu podemos afirmar que uma situação de aprendizagem se inscreve nos dispositivos de ensino, como por exemplo, em uma sequência didática na qual cada situação proposta corresponde a uma nova oportunidade para que o aluno progrida em suas aprendizagens. Portanto, a interação mútua dos parceiros da relação didática com meio (situação de aprendizagem), configura o estabelecimento de relações entre conhecimentos ou de transformá-los em saberes, que caracterizam, por sua vez, as situações didáticas.

Ao refletir sobre as situações didáticas o papel do professor é modificado, pois, este se posiciona com aquele que planeja a aula. Nesse sentido, as situações didáticas transformam-se em meios didáticos. Ou seja, destinam-se ao manejo do processo de ensino e aprendizagem. Assim sendo, a região mais periférica do esquema corresponde à situação metadidática.

Neste momento, o professor após uma reflexão acerca das situações didáticas revisa suas ações e decisões. Nesse processo, analisa a aula ponderando sobre a própria prática, as transposições didáticas realizadas e estuda os aspectos comportamentais dos alunos mediante as ações, conhecimentos e saberes específicos. Por isso, apresentamos em seguida as bases teóricas da TSD no que se refere a modelagem das situações de ensino e aprendizagem.

3.3 Modelagem das situações de ensino e aprendizagem na perspectiva da TSD

As atividades experimentais de pesquisa assim como as teorias desenvolvidas nos institutos de pesquisa da França, desde 1960, deram origem à Didática da Matemática. A finalidade desta didática específica é conhecer os fenômenos e processos relativos ao ensino da matemática com o intuito de controlá-los para que seja possível otimizar a aprendizagem em sala de aula.

Os estudos desenvolvidos no âmbito da Didática da Matemática têm propiciado amplas reflexões sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática em vários países, inclusive no Brasil. E, dentre as perspectivas teóricas que contribuições para com a análise do processo de ensino e aprendizagem da Matemática encontra-se a Teoria das Situações Didáticas formulada por Guy Brousseau.

Na TSD, Brousseau modeliza as situações evidenciadas no processo de ensino e aprendizagem. Instigado pelo desejo de conhecer os fenômenos e os processos relativos ao ensino da Matemática Brousseau propõe o estudo das condições nas quais os conhecimentos se constituem. Esse pesquisador sustenta a tese de que o controle de tais condições permite otimizar os processos de aquisição escolar do conhecimento matemático.

Ao se referir a "situação", Brousseau nos remete ao modelo de interação do aluno com um meio específico. O recurso de que o aluno dispõe para alcançar ou conservar, nesse meio, um estado favorável é o leque de decisões que dependem de um conhecimento preciso. Mas, vale salientar que na interação com o meio existem mais de uma situação as quais se distinguem pelo caráter didático ou a-didático.

Segundo Brousseau (2008) em 1970 as situações didáticas foram consideradas como aquelas que servem para ensinar um conhecimento desconsiderando o papel do professor. Para transmitir esse conhecimento utilizavam-se meios (textos, por exemplo) estudados e produzidos pela engenharia didática. Portanto, o contexto que cercava o aluno, ferramenta projetada ou manipulada pelo professor para ensinar correspondia a uma situação didática.

No entanto, esse conceito foi sendo reformulado e a situação didática passou a ser interpretada como um modelo que descreve tanto a atividade do professor quanto do aluno. Portanto, as situações didáticas correspondem a todo contexto que cerca o aluno, nele incluídos o professor e o sistema educacional. Brousseau (1988 apud Gàlvez 1996, p.28) define uma situação didática como sendo:

> [...] *O conjunto de relações estabelecidas explícita e/ou implicitamente entre o aluno ou um grupo de alunos, num determinado meio (que abrange eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (representado pelo professor) com a finalidade de conseguir que esses alunos apropriem-se de um saber constituído ou em vias de constituição.*

Nesse sentido, Meirieu (1998) afirma que uma situação didática é, portanto uma situação de aprendizagem elaborada ou organizada pelo professor que consiste numa via de mão dupla, pois fornece, por um lado, os materiais que permite recolher informações sobre o ensino e a aprendizagem. E, por outro lado caracteriza-se como uma "instrução-alvo"[23] que permite colocar o aluno em situação de projeto. O autor conclui que uma situação didatizada permite fazer com que a aprendizagem fuja aos encontros aleatórios e fortuitos.

Assim, é possível perceber que na essência de uma situação didática reside a intencionalidade do professor, ou seja, na finalidade das suas ações. Uma situação didática configura-se então como um contexto mais amplo que absorve outras situações propostas pelo professor para provocar a interação do aluno com o meio, de modo que a ação do aluno seja a mais independente e produtiva possível.

O professor por estar envolvido no jogo das interações do aluno com o meio poderá comunicar ou se abster de comunicar informações ou procedimentos de cálculo, por exemplo, para que o conhecimento venha insurgir na situação e o aluno evolua por si só. Assim ao elaborar, organizar ou propor situações, desafios ou problemas para o aluno, o professor provavelmente propicia outras situações que fogem ao controle pedagógico. De acordo com Brousseau (1986, p.49):

> [...] *O aluno sabe perfeitamente que o problema foi escolhido pelo professor para levá-lo a adquirir um conhecimento novo, mas tem que saber igualmente que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica da situação e que pode construí-lo sem fazer apelo as razões didáticas. Não somente pode, como deve fazê-lo, porque só terá verdadeiramente adquirido*

[23] De acordo com Meirieu (1998, p. 187) uma instrução-alvo pode ser a definição de um projeto a ser realizado em uma situação didática em termos de "produto final" e remete essencialmente ao registro das motivações do aluno.

> *esse conhecimento quando for capaz de aplicá-lo por si próprio em situações com quais se depara fora do contexto de ensino.*

Portanto, as situações em que o aluno interage com o meio, de forma autônoma, sem que haja qualquer influência ou controle restritivo intencional do professor com relação aos aspectos referentes à aprendizagem caracterizam, portanto, uma situação adidática. Dessa forma, a aprendizagem efetiva acerca de um determinado conhecimento se revela quando o aluno consegue transpor as “linhas” que delimitam o campo didático.

Brousseau (1986, 2008) propõe que um conhecimento pode ser caracterizado por uma ou várias situações adidáticas, desde que o sentido seja preservado. Esses aspectos o distinguem dos demais. De certa forma, a construção de situações adidáticas para fins didáticos determinam o conhecimento a ser ensinado e o sentido atribuído pelo professor a esse conhecimento torna-se, portanto objeto de restrições e deformações que Brousseau denominou de situação fundamental.

É pertinente ressaltar que as situações embutidas na situação fundamental são intencionalmente propostas pelo professor. E, embora o aluno tenha consciência de que o professor lhe propõe uma gama de situações repletas de exercícios e problemas, para que adquira um determinado conhecimento, ele não consegue distinguir a priori o caráter didático ou adidático dessas situações. Segundo Brousseau (1986), a situação final de referência, que caracteriza o saber, pode ser estudada de forma teórica, mas, na situação didática constitui, tanto para o professor quanto para o aluno, uma espécie de ideal para o qual devem convergir e cujo modelo pode ser representado como na Figura 9.

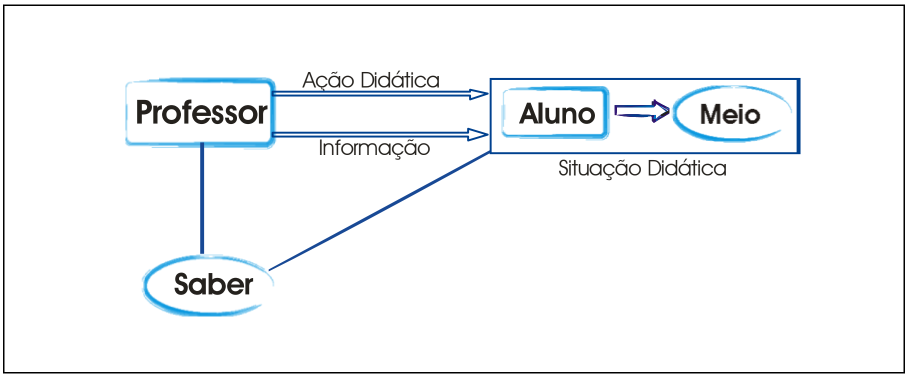


Figura 9: Organização esquemática da situação didática fundamental
Fonte: Brousseau (2008, p.54)

A Figura 9 corresponde a uma reprodução da proposta sugerida pelo pesquisador para a reformulação da Figura 6 (p.77), que segundo o próprio apesar de utilizada para ilustrar os componentes do sistema didático é inadequada, pois omite a interação do aluno com o meio. Ainda com relação à situação fundamental de referência, representada na Figura 9, Brousseau menciona que o professor deverá incessantemente auxiliar o aluno a se desvencilhar dos artifícios didáticos presentes numa situação para que seja possível ficar com o conhecimento pessoal e objetivo.

Todavia, Brousseau (2008) declara que uma situação fundamental, a priori não representa uma situação ideal de ensino nem tampouco se caracteriza como a mais eficaz, pois sua relevância se verifica em função de inúmeros fatores externos, como por exemplo, a possibilidade de efetivação da realização em um determinado ambiente psicossociocultural. Portanto, ao modelizar as situações didáticas, seus esforços foram empreendidos com o propósito de identificar os elementos que poderiam ser modificados para obter efeitos diferentes aos que foram alcançados na situação original. Dentre todas as contribuições trazidas pela TSD, nessa pesquisa três delas são referência para a análise dos efeitos didáticos.

Em primeiro, consideramos a relevância da estruturação do meio didático que possibilita ao aluno vivenciar diferentes situações que viabilizam a progressão das aprendizagens. Em segundo lugar, a pertinência da manipulação das variáveis contidas nos dispositivos de ensino que podem resultar em efeitos de ensino desejáveis ou não. E, finalmente o condicionamento da comunicação didática propriamente dita, e das relações na tríade: professor-aluno-saber a uma espécie de acordo: o contrato didático. Portanto, achamos relevante discorrer sobre cada um desses elementos nos itens subsequentes.

3.3.1 ***Tipologia das situações didáticas***

Ao investigar os processos didáticos, em seus estudos experimentais, que resultaram na TSD, Brousseau (2008), percebeu que ao controlar o entorno do aluno, nem todas as ações e decisões se manifestavam do mesmo modo os conhecimentos que já detém. As interações do aluno com o meio podem acontecer mediante a troca de informações codificadas (emissão de mensagens) ou não codificadas (ações e decisões). Ou ainda, por meio da troca de ponto de vista (teoria) em relação às situações propostas. Tais atitudes e comportamentos do aluno denunciam as características das situações didáticas e dos dispositivos de ensino nela inseridos.

Segundo Brousseau (2008) a aprendizagem é o processo em que os conhecimentos passam por uma série de transformações até serem modificados. E, para que esse processo seja concretizado a situação didática deve propiciar ao aluno transite entre quatro fases distintas, as quais foram denominadas como: *ação, formulação, validação e institucionalização*. Sintetizando poderíamos descrever as situações didáticas da seguinte forma:

- *Situação de Ação* – Em função das informações emanadas do dispositivo de ensino (o meio didático), ou das próprias motivações é que o aluno atua. Na interação com o meio o aluno inicialmente escolhe de maneira aleatória os procedimentos ou estratégias. No entanto, quando o meio reage com regularidade, o aluno pode relacionar às informações fornecidas às próprias decisões com a finalidade de resolver o(s) problema(s) proposto(s). Portanto, esse feedback, do meio para com as ações do aluno, propicia a antecipação das respostas e a consideração das mesmas nas decisões futuras. Numa situação de ação o aluno atua sobre o meio, formulando, prevendo e explicando a situação para organizar, a posteriori, as próprias estratégias e procedimentos a fim de construir um modelo da situação que o auxilie na tomada de decisões. Nesse processo, de idas e vindas, representado pelo esquema da Figura 10, o meio proporciona retroações que funcionam como uma espécie de sanção as ações do aluno, motivando a construção de modelos implícitos da situação proposta.

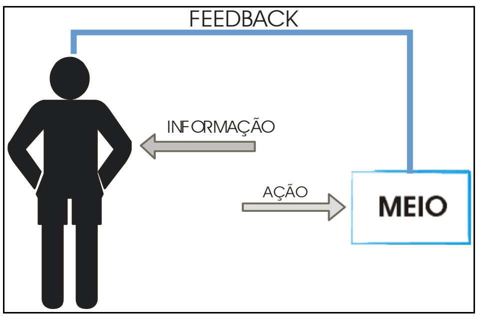


Figura 10: Esquema geral da situação de ação

- *Situação de Formulação* – O meio de aprendizagem envolve uma dupla polaridade: de um lado há sempre um emissor e de outro lado um receptor, num constante intercâmbio mediante a troca de mensagens codificadas ou não codificadas. Ao intervir na situação o aluno formula uma teoria acerca da situação, constrói modelos, argumenta ou comunica as suas estratégias e proposições, ou os põe à prova mediante o uso da linguagem usual ou matemática, no intercâmbio com seus pares ou com o dispositivo propriamente dito. E, nesse jogo, o aluno reconhece e toma para si as "partidas" (ações e decisões), úteis, bem sucedidas ou que satisfazem à situação proposta descartando as menos eficientes no exercício da atividade matemática. De acordo com Brousseau (2008, p. 29), a formulação de um conhecimento implícito muda, ao mesmo tempo, suas possibilidades de tratamento, aprendizagem e aquisição. Nesse sentido, a formulação de um conhecimento corresponderia à capacidade do aluno de retomá-lo (reconhecendo-o, identificando-o, decompondo-o e reconstruindo-o com base num sistema linguístico). O esquema apresentado na Figura 11 ilustra a fase de formulação em uma situação didática.

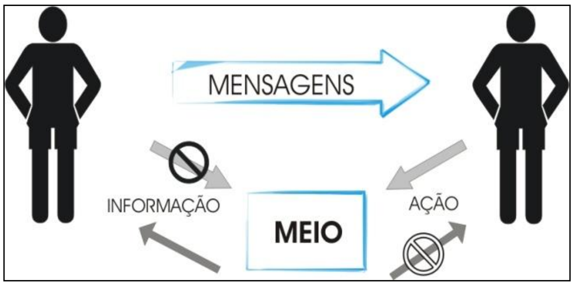


Figura 11: Esquema geral de uma situação de formulação

- *Situação de Validação* – O meio deve servir para comprovação da validade das respostas do aluno ao problema proposto. Neste caso, cabe o aluno validar a situação mediante a utilização de mecanismos de argumentação para garantir a pertinência, a adequação ou a conveniência dos procedimentos ou do conhecimento mobilizados por ele na resolução do problema. De acordo com Brousseau (2008), o esquema representado na Figura 12, ilustra a situação de validação. Nestes episódios, o emissor não é um simples informante, mas um proponente enquanto o receptor corresponde a um oponente, em que ambos detêm as mesmas condições para lidar com o problema. E, além disso, tanto o proponente quanto o oponente podem posicionar-se em relação à questão e havendo discordância têm o direito de requerer a prova, a demonstração ou uma aplicação das estratégias e afirmações para juntos reformularem suas ações e decisões ou julgarem a validade das mesmas. Pois, a própria situação informa se as partidas jogadas pelo aluno são eficazes ou não, propiciando que o mesmo venha requerer o auxílio do professor, por exemplo.

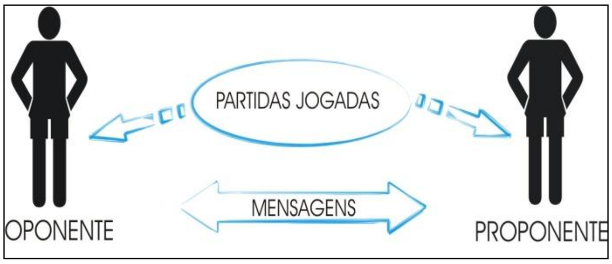


Figura 12: Esquema geral da situação de validação

- *Situação de Institucionalização* – Esta situação tem como finalidade a conferir o status social e cultural de saber ao conhecimento que está em cena no jogo didático[24]. A institucionalização do conhecimento é uma atribuição exclusiva do professor que deve considerar os aspectos históricos e culturais do objeto de estudo. Na gestão de uma situação didática a responsabilidade do professor consiste em esclarecer a intenção didática da atividade sugerida ao aluno. Portanto, o objetivo principal dessa etapa consiste em fazer com que os alunos assumam o significado socialmente de um conhecimento, que na maioria das vezes foi construído por eles mesmos, na interação com as situações propostas nos dispositivos de ensino. E, portanto na passagem pelas etapas precedentes (ação, formulação e validação). No entanto, a institucionalização não está restrita a sequenciação das etapas precedentes quando o professor sistematiza o conhecimento pretendido ao final da aula, pois de acordo com Brousseau (1988, p.56):

> [...] *a institucionalização se realiza tanto sobre uma situação de ação reconhece-se o valor de um procedimento que se converterá em recurso de referência como também numa situação de formulação. Há reformulações que serão conservadas ("isto se diz assim", "aquilo deve ser lembrado"). O mesmo acontece com as provas: é necessário identificar o que será retido das propriedades dos objetivos que encontramos.*

Assim sendo, as respostas encontradas pelo aluno para o problema proposto devem ser transformadas para que os conhecimentos possam ser convertidos em saberes. Ou seja, passar de um saber pessoal a um saber institucional.

---

[24] É pertinente ressaltar que estamos empregando os termos: saber e conhecimento no sentido atribuído por Brousseau & Centeno (1991, apud Brousseau, 2008, p. 31), quando afirmam que os conhecimentos são meios transmissíveis por imitação, iniciação ou comunicação, por exemplo, ainda que não necessariamente demonstráveis, de controlar uma situação e obter dela um resultado determinado, de acordo com uma experiência ou uma exigência social. O saber é o produto cultural de uma instituição que tem como objetivo identificar, analisar e organizar os conhecimentos, a fim de facilitar sua comunicação.

3.4 *As implicações das variáveis didáticas nas ações e decisões do aluno*

Como já nos referimos anteriormente, segundo a perspectiva teórica da TSD, ao professor não compete apenas à simples comunicação de um conhecimento, mas é sua a incumbência de enunciar e promover a transferência de responsabilidade. Isto se torna plausível quando promove intencionalmente ações para que os alunos possam se conscientizar de que agora o problema deve ser aceito como um desafio a ser resolvido. E, neste caso, cabe ao aluno assumir a responsabilidade de investigar as possíveis soluções. No momento em que o aluno acolhe o desafio intelectual e encontra as estratégias que permitem resolvê-lo inicia-se, portanto, o processo de aprendizagem.

Assim, o professor deve estar imbuído do desejo de fazer as devoluções necessárias, reformulando os questionamentos, os contextos, problematizando as situações, enfim, fazendo inferências que possibilitem a modificação das estratégicas adotadas pelos alunos, por exemplo. Porém, ressaltamos que entre a devolução do problema e a aprendizagem, existem várias etapas a serem percorridas, nesse sentido faz-se necessário analisar a multiplicidade de variáveis presentes numa situação didática.

A evolução do aluno em suas aprendizagens ocorre dentro de uma dinâmica própria, que sofre a influência de múltiplas variáveis, sobre as quais o professor não tem nenhum controle ou de outras que podem ser razoavelmente controladas. Ao nos referirmos à idéia de “variável”, estamos nos reportando à acepção da palavra que significa, por exemplo, algo que pode ser alterado, que é mutável, que é manipulável.

No processo de ensino e aprendizagem o conjunto de situações que caracterizam uma noção, um conceito é estruturado e pode ser adquirido de um pequeno número de situações fundamentais, pois como mencionamos anteriormente, uma situação consiste num objeto passível de regulações e modificações. Esse controle da situação bem como as transformações na sua estrutura só é possível mediante o jogo de variáveis e dos seus respectivos valores.

Na TSD, Brousseau conseguiu demonstrar por meios matemáticos ou experimentais, que a escolha adequada das variáveis e dos respectivos valores, determina as condições essenciais de transmissão de um conhecimento ou explica como este conhecimento surge como resposta (teoricamente) ideal às condições propostas ao aluno.

Assim sendo, a pesquisa em Didática, objetiva verificar e controlar o funcionamento das situações didáticas com o intuito de identificar as características que determinam a evolução do comportamento e do conhecimento do aluno. No entanto, em si tratando do processo de ensino e aprendizagem há interesse tanto na análise de situações didáticas bem sucedidas como nas situações em que os alunos fracassam. Pois, mediante a compreensão das causas ou efeitos das variáveis na incidência de respostas certas ou erradas as situações poderão ser reguladas ou adaptadas minimizando os entraves à aprendizagem.

A identificação, a análise da origem e do estatuto dos erros cometidos pelos alunos fornece subsídios essenciais ao mapeamento dos aspectos que desencadeiam o fracasso ou o sucesso diante de uma situação didática. E, consequentemente norteiam o controle e a reformulações parte do professor mediante a manipulação das variáveis embutidas na situação. Segundo Brousseau (1982, apud Balacheff 2000 p.12) as variáveis didáticas podem ser definidas da seguinte maneira:

> [...] *um campo de problemas podem ser produzidos a partir de uma situação, alterando os valores de certas variáveis são fonte de modificações nas características das estratégias de solução (custo, validade, complexidade, por exemplo). As únicas modificações que afetam a hierarquia das estratégias são consideradas variáveis pertinentes. E, entre as variáveis relevantes aquelas que podem ser manipuladas pelo professor, são particularmente interessantes. Essas variáveis ditam comportamentos distintos agindo sobre as estratégias mobilizadas pelo aluno podem causar adaptações e regulações: a aprendizagem. A estas variáveis atribui-se o nome de variáveis didáticas.* [Tradução livre]

Ainda de acordo com Brousseau (2008), para os valores atribuídos às variáveis, existe pelo menos uma estratégia adequada à resolução do problema (do ponto de vista da dificuldade para a sua projeção, confiabilidade, aprendizagem, por exemplo), o que pressupõe a utilização um ou vários conhecimentos associados ou correspondentes.

Ao nos reportamos à idéia de variável didática, difundida por Brousseau, é necessário frisar que há uma gama delas embutidas numa mesma situação didática. Dessa forma, distinguir os tipos de variáveis auxilia na compreensão dos efeitos emergentes no desenvolvimento de uma situação didática. Nesse sentido, cumpre ressaltar que Artigue (1996) propõe uma categorização das variáveis didáticas, as quais segundo a pesquisadora podem ser separadas em globais ou locais. Entendemos que as variáveis didáticas globais, necessariamente, correspondem à organização geral de uma situação didática enquanto as quais variáveis locais dizem respeito ao planejamento específico de uma sessão da seqüência didática, por exemplo.

Portanto, ao elaborar uma sequência didática, o professor ou o(s) autor (es) de um livro didático selecionam, por exemplo uma ou diversas variáveis didáticas, mediante a escolha de valores distintos, cuja intenção consiste em modificar ou substituir os conhecimento que o aluno já detém, por outros mais precisos e eficazes à resolução do problema proposto em uma determinada situação.

Entre as variáveis cognitivas estão as variáveis didáticas que podem ser determinadas e manipuladas pelo professor. E, dentre as variáveis didáticas que intervêm numa situação existem as variáveis de comando, que também são determinadas e comunicadas pelo professor ao longo da aula, com o intuito de nortear ou direcionar as ações ou decisões do aluno a fim de que este utilize um conhecimento preciso.

As variáveis didáticas supostamente podem interferir na gênese dos efeitos didáticos relativos à aprendizagem. Os exercícios e problemas, que compõem as atividades da sequência didática utilizada nesse estudo, as variáveis globais correspondem à organização, sequenciação e estruturação da sequência didática, sugerida pelos autores do volume do 4º Ano da Coleção Matemática Paratodos. As variáveis locais referem-se aos materiais disponibilizados em cada sessão das situações didáticas vivenciadas em sala de aula com os alunos.

Nesse sentido, as atividades que compõem a sequência didática utilizada na pesquisa, estão alicerçadas no significado parte/todo do número racional sobre o contexto contínuo ou discreto. De certo modo, esta é a ideia fundamental que permeia as variáveis didáticas globais. Entre as variáveis locais implícitas na referida sequência didática poderíamos exemplificar citando o tipo de figura geométrica utilizada para explorar o significado parte/todo nas situações em que o inteiro é de natureza contínua. Neste caso, foram utilizadas formas bidimensionais poligonais (quadrado, retângulo, pentágono e hexágono) ou formas não poligonais (círculo e semicírculo).

Diante dos pressupostos, as variáveis didáticas podem ser consideradas tanto como uma ferramenta teórica quanto metodológica. Este instrumento poderá contribuir significativamente no trabalho do professor ao planejar, elaborar ou adequar problemas sugeridos ao aluno em sala de aula, pois mediante a análise das variáveis poderá antecipar as estratégias mobilizadas pelos alunos.

Mediante a compreensão da origem dos efeitos didáticos indesejáveis o professor poderá efetuar o controle das variáveis na tentativa de direcionar as ações e decisões do aluno em prol da obtenção de resultados mais positivos. Uma vez que, a minimização do insucesso do aluno na atividade matemática pressupõe a construção do sentido, na evolução das situações didáticas propostas em sala de aula e na superação dos entraves.

Enfim, a progressão das aprendizagens, de acordo com Brousseau (2008) pressupõe saltos informacionais, por meio de alterações de uma variável didática na qual são propostas características informacionais diferentes o suficiente para promover a evolução ou a mudança de método ou a estratégia de resolução.

Em síntese, os estudos experimentais de Brousseau que originaram a TSD, comprovaram que a manipulação das variáveis de uma situação didática poderá desestabilizar a ação ou a decisão do aluno, provocar autênticos conflitos cognitivos, induzir a (re) organização das estratégias de resolução mobilizadas e viabilizar as adaptações desejáveis com relação aos conhecimentos visados.

No livro didático analisado as variáveis foram manipuladas objetivando a apropriação pelo aluno do repertório dos registros de representação semiótica (pictórica, em linguagem natural e simbólica). Bem como, do sucessivo treinamento do aluno visando o desenvolvimento da capacidade de realizar tratamentos e conversões entre as referidas formas de registro do número racional.

Neste caso, podemos perceber que as variáveis didáticas, identificadas nas atividades do dispositivo (sequência didática), incidem fundamentalmente na ampliação das formas de registro e do vocabulário relativo ao número racional. Desse modo, faz-se necessário abrir o subtópico subsequente para explicitar a natureza, as características e a função do sistema de representação semiótica na abordagem do número racional.

3.4.1 O papel dos registros de representações no ensino e na aprendizagem do número racional

A atividade matemática se apóia no emprego de diferentes formas e registros de representação semiótica. Os sistemas semióticos correspondem a um sistema de signos ou símbolos que possibilitam o cumprimento das funções das linguagens, seja em função da escrita ou da oralidade, mediante a comunicação, o tratamento, a objetivação, a sistematização e a formalização de ideias, relações ou demonstrações, que são ferramentas imprescindíveis no fazer matemático.

Para designar os múltiplos tipos de representações semióticas utilizados em Matemática Duval (2005) categoriza as diferentes formas de registro para um mesmo objeto matemático. Estes registros podem ser classificados como *multifuncionais* quando os tratamentos não são algoritmizáveis ou *monofuncionais* quando os tratamentos são principalmente algoritmos.

A tipologia dos registros multifuncionais compreende o uso da linguagem natural e as associações verbais no exercício da oralidade ou da escrita. Estas podem ser identificadas quando o aluno argumenta ou verbaliza um raciocínio dedutivo partindo da observação, de uma definição ou de um teorema. Entre os registros monofuncionais encontram-se os sistemas de escrita: numéricas (binária, decimal, fracionária, percentual,...), algébricas (expressões, equações,...) e simbólicas (pictórica, gráfica, por exemplo).

A atividade matemática é caracterizada pela dependência das representações semióticas, bem como pela variedade dos registros de representação mobilizados: a língua natural, os símbolos, os sistemas de escrita (numérica, algébrica ou simbólica), o registro figural (formas planas ou em perspectiva) e as representações gráficas.

Em outras palavras, as representações semióticas assumem um papel primordial no âmbito da Matemática, porque os objetos desse domínio nem sempre são acessíveis e perceptíveis, e só podem sê-lo mediante as suas diferentes representações. Os números racionais ilustram esta condição, uma vez que aparecem em diferentes contextos apresentando configurações diferentes, pois o mesmo número poderá ser registrado na representação figural ou pictórica, fracionária, decimal ou percentual.

No entanto, a maioria dos alunos, no decorrer de sua trajetória escolar, parece não se apropriar e utilizar adequadamente os diferentes registros de representação para um mesmo objeto matemático. Em relação aos números racionais, na melhor das hipóteses, sua compreensão deles se restringe a um único registro de representação, ou se encontra limitada aos tratamentos possíveis entre diferentes registros. Possivelmente, a falta de conhecimento do representado – *número racional* – e as suas diversas formas de representação – *representante* (pictórico, fração, decimal, percentual.) resultam em aprendizagens deficientes por parte do aluno.

De acordo com Duval (2005), durante a resolução de uma situação, um registro pode ser privilegiado (mais figural do que em língua natural, por exemplo). No entanto, sempre deve haver a possibilidade de passar de um registro para outro, pois a compreensão dos conceitos matemáticos pressupõe a coordenação ou a mobilização simultânea de pelo menos dois registros de representação.

Portanto, partindo do pressuposto de que a finalidade da presente pesquisa consistiu na investigação da emergência dos efeitos didáticos, mediante a análise das estratégias mobilizadas pelo aluno na realização das atividades. É preciso salientar que a análise da aprendizagem à luz das contribuições de Duval, requer identificação dois tipos de transformações nas representações semióticas. As transformações possíveis no sistema de representação semiótica consistem no tratamento e na conversão. Os tratamentos incidir nas transformações das representações dentro de um mesmo registro. Enquanto as conversões referem-se às transformações em que são modificados os registros mantendo o objeto denotado.

De acordo com Maranhão & Igliori (2005), as conversões são as mudanças de registros mais eficazes para a aquisição de um conceito. Para exemplificar, quando o registro de partida é numérico decimal e o aluno faz a transformação obtendo o registro terminal numérico, porém, fracionário essa ação caracteriza uma conversão. Entretanto, quando o aluno obtém frações equivalentes à metade, por exemplo, ele não estará realizando uma conversão, mas um tratamento.

Portanto, a abordagem de frações a partir do significado parte/todo no livro didático gira em torno dos tratamentos e das conversões entre os diferentes registros de representação semiótica. Todavia, o trabalho do aluno com os diferentes registros de representação semiótica não foi a única variável pertinente considerada nas análises dos efeitos didáticos emergentes na interação dele com a sequência de atividades utilizadas neste estudo.

As interações dialógicas da professora para com os alunos no desenvolvimento das atividades revelaram a influência marcante do contrato didático estabelecido entre os sujeitos da pesquisa. Por outro lado, diagnosticamos durante o processo que os efeitos desse acordo são indesejáveis e podem comprometer a compreensão do significado parte/todo do número racional. Deste modo, constatamos a necessidade de discorrer acerca dos aspectos relativos ao contrato didático.

3.5 *O contrato didático*

No jogo didático, muitos meios são elaborados, adequados, ou aplicados com o intuito de tornar os objetos do saber, do domínio da Matemática, por exemplo, acessíveis ao aluno. Embora, por "n" fatores, a maioria dos professores privilegia o uso dos dispositivos de ensino ofertados pelo livro didático de Matemática. No entanto, na inserção desses meios, não há garantias de que o aluno vai se sentir autoconfiante e capaz de interagir com os dispositivos de ensino. Pois, de certo modo, a interação do aluno com o meio está condicionada, de modo geral, às imposições do professor.

Portanto, quando um conhecimento entra em cena no jogo didático o professor cria um mecanismo que rege e impõe as condições, as obrigações e os compromissos recíprocos dos envolvidos nesse jogo. Esse mecanismo incide na negociação das interações entre os parceiros da relação didática e o saber, neste caso muitas regras ou cláusulas são instituídas e verbalizadas enquanto, outras ficam nas entrelinhas da comunicação entre professores e alunos. Na sala de aula, portanto, se concebe ao menos implicitamente, uma infinidade de acordos, sendo que ao menos dois deles são evidentes: há sempre um de caráter pedagógico e outro de cunho didático.

Com frequência, observamos que os professores no início do ano letivo costumam investir, discutir, negociar, ou elaborar, conjuntamente com os alunos, um estatuto que regulamenta a dinâmica das relações entre eles. Esse regimento, basicamente é constituído por regras relativas à convivência, à forma como o trabalho será desenvolvido com este ou aquele componente curricular, ou aos aspectos comportamentais e disciplinares do aluno e do professor em sala de aula.

Com relação ao regulamento descrito, ressaltamos que na maioria dos casos, normalmente se comete o equívoco de nomear esse tipo de acordo como “contrato didático”. Na realidade, essas negociações não dizem respeito aos aspectos didáticos, mas aos aspectos pedagógicos. O fato revela que há certa confusão em relação à compreensão dos fatores que diferenciam o contrato didático do pedagógico. O contrato pedagógico pode ser firmado entre o professor e os alunos de diferentes turmas/classes de uma instituição escolar enquanto o contrato didático nem sempre é o mesmo.

Uma diferenciação possível consiste na descrição das origens e finalidades de cada um desses acordos. Quando contrato pedagógico é validado o objetivo das regras acordadas consiste em regular os aspectos da relação didática sem que haja qualquer associação aos objetos do conhecimento que adentram a sala de aula. Enquanto, o contrato didático[25] se encontra no núcleo do sistema didático, pois nele se encerram as cláusulas que regem as interações, tanto do professor quanto do aluno, num o meio específico, com relação ao saber. Nesse sentido, Brousseau (1986, 9. 51) afirma que:

> [...] *Estabelece-se então uma relação que determina explicitamente em pequena parte, mas, sobretudo implicitamente aquilo que cada parceiro, o professor e o aluno, tem a responsabilidade de gerir e pelo qual será, de uma maneira ou de outra, responsável perante o outro. Este sistema de obrigações recíprocas assemelha-se a um contrato. Aquilo que nos interessa é o contrato didático, ou seja, a parte deste contrato é específica do conteúdo: o conhecimento matemático visado.*

Portanto, Brousseau na TSD não chega a definir efetivamente a noção de contrato didático. No entanto, propõe que o contrato didático é a regra do jogo didático e a estratégia de uma situação didática. Pois, ao que tudo indica os acordos firmados, as concessões, as sansões, as (re) negociações, e as rupturas para com essas regras, que estão no cerne do sistema didático dinamizam as relações na tríade: professor-aluno-saber.

---

[25] A idéia de contrato didático trazida por Brousseau (1986) advém dos conceitos de contrato social (Rousseau) e contrato pedagógico (Filloux). E, não convém discutir esses aspectos nessa pesquisa. No entanto, para um maior aprofundamento sugerimos consultar D’amoré (2007) e Pais (2001).

O contrato didático é o meio que o professor dispõe para colocar no cenário da sala de aula, uma ou várias, situações didáticas. Dessa forma, a relação autêntica com o saber é delibera pelo contrato didático, que intima, por exemplo, o aluno a se empenhar na atividade mesmo que este não compreenda a finalidade da mesma. A partir de Brousseau, percebemos que numa situação didática, elaborada ou utilizada pelo professor, a tarefa do aluno é resolver o problema proposto.

Todavia, o acesso a essa atividade só é possível mediante a interpretação das questões colocadas, das informações disponibilizadas, das obrigações conferidas aos envolvidos na ação de ensinar e aprender, esses entre outros aspectos impregnam a prática pedagógica do professor. Portanto, a praxiologia específica do professor, seus rituais e hábitos que são esperados pelo aluno e as condutas e procedimentos do aluno que são esperados pelo professor, de certo modo, configuram o contrato didático.

Outro aspecto peculiar do contrato didático é este traz em seu bojo mais elementos implícitos do que explícitos que definem as regras de funcionamento de uma situação didática. A definição das atribuições do aluno e do professor, a permissão ou proibição quanto ao uso de determinados recursos, exemplificam alguns dos aspectos mencionados.

Por este motivo, o contrato didático não está imune às rupturas, está sim, sujeito a alterações estruturais em função dos objetivos do professor, do interesse e da aceitação por parte do aluno. E, nesse caso, as rupturas nem sempre podem ser interpretadas como maléficas ao processo de ensino e aprendizagem. Pois, ao infringir ou renegociar as regras estabelecidas no contrato didático, tanto o professor quanto o aluno, podem estar favorecendo a progressão das aprendizagens.

Tendo em vista que os conhecimentos se manifestam mediante as decisões pessoais adequadas a determinadas situações. O professor não pode dizer ao aluno o que fazer ou como agir, porque abriria mão da possibilidade de deixar que o aluno crie ou produza suas ações e decisões. No entanto, a negociação dos papéis ou a articulação entre o professor, o aluno em relação ao conhecimento é tensa e muitas vezes culminam com a ruptura do contrato didático por um das partes.

Os impasses e as rupturas de contrato também evidenciam, na maioria das vezes, efeitos negativos que comprometem a eficácia do ensino, a significação atribuída pelo professor aos saberes e, por conseguinte, a concretização da aprendizagem. Na mesma direção, Brito Menezes (2006) afirma que o fato do contrato didático envolver elementos humanos que trazem consigo sua subjetividade, os reflexos de contratos e experiências anteriores, consequentemente produzem efeitos. E estes, por sua vez, esses efeitos culminam por criar situações que dificultam o processo de ensino e aprendizagem.

Brousseau (2008) por sua vez afirma que o contrato didático é essencialmente incerto. Pois, se o professor tivesse certeza de que todos os alunos resolveriam sem erros as situações que propõe, essa atividade perderia seu conteúdo didático e ele não a proporia mais. Assim sendo, nem os parceiros da relação não aceitariam tamanha “perda de tempo”. Ainda de acordo com o pesquisador, os erros e o fracasso do aluno não são uma variável livre do sistema, uma vez que é determinada e regulada pelo funcionamento do meio. Cabe ao professor, portanto, administrar a incerteza dos alunos com relação à aprendizagem. E, neste caso, a questão é saber se essa gestão produz conhecimentos de forma eficaz.

É pertinente frisar, o aprofundamento dos aspectos concernentes ao contrato didático não consiste no nosso objeto de pesquisa. No entanto, a análise das situações didáticas propostas, pressupõe o estudo da ação dos efeitos didático, inclusive daqueles decorrentes do contrato didático. Nesse sentido, nos propomos a discutir e detalhar em seguida, o funcionamento e o desencadeamento desses fenômenos que emergem no contexto da sala de aula.

3.6 *Caracterização dos efeitos didáticos*

Pais (2001) afirma que o cotidiano da sala de aula às vezes revela episódios indesejáveis, os quais são denominados de *efeitos didáticos*. Esses efeitos são revelados fundamentalmente na interação do aluno com o meio de aprendizagem, elaborado, organizado e proposto pelo professor ou pelos autores de livro didático. Portanto, a ocorrência desses eventos está associada, entre outros fatores, à epistemologia do saber a ser ensinado, dos obstáculos inerentes ao processo de ensino e aprendizagem, da inadequação dos dispositivos de ensino, da transposição didática interna ou do contrato didático.

A ocorrência dos efeitos didáticos interfere e dificulta o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos. Mas, o fato de emergirem numa situação didática, não necessariamente determina o insucesso ou o fracasso do aluno em suas aprendizagens. A identificação e a superação desses entraves são plausíveis e dependem do empenho tanto do professor quanto do aluno no gerenciamento e na superação do fracasso escolar.

A gestão dos fenômenos didáticos e das suas implicações pressupõe fundamentalmente a revisão da comunicação didática, a (re) organização das situações de aprendizagem, o controle e a manipulação das variáveis didáticas, o domínio de todos esses aspectos permite a evolução das situações propostas em sala de aula. E, consequentemente, viabiliza novas oportunidades para que o aluno aprenda.

A noção acerca dos efeitos didáticos tem sua origem atrelada ao controle da transposição didática, pois as atividades experimentais de pesquisa, realizadas por Brousseau (1986), não só permitiram a modelização das situações de ensino como evidenciaram a emergência desses efeitos, os quais foram descritos e categorizados. Segundo Brousseau (1996), identificar esses fenômenos significa construir um modelo dos protagonistas em presença, das relações e dos constrangimentos que os ligam uns aos outros, e mostrar que o jogo desses constrangimentos produz sem dúvida efeitos e o desenvolvimento observado.

Como dissemos anteriormente, Brousseau não atribui a ocorrência de todos os efeitos didáticos ao estabelecimento do contrato didático e, sim ao fenômeno da transposição didática. No entanto, outros pesquisadores[26] Henry (1991), Sarrasy (1995), Schubauer-Leoni (1996), Pais (2001), Brito Menezes (2006), D'amore (2007), entre outros tem optado por designar esses eventos como *"efeitos de contrato"*. Brito Menezes (2006), afirma os efeitos didáticos são tratados na literatura como efeitos de contrato possivelmente porque o contrato didático seja o principal elemento regulador da relação didática.

Porém, como estamos nos referendando na TSD utilizaremos a denominação efeitos didáticos na análise das situações didáticas propostas no livro didático analisado. Assim sendo, daremos sequência à discussão sobre os efeitos didáticos caracterizando àqueles encontrados na literatura:

---

[26] O acesso a esse referencial teórico citado Henry (1975), Sarrasy (1995) e Schubauer-Leoni (1996) ocorreu mediante a leitura em Brito Menezes (2006) e D'amore (2007).

a. *Efeito Pigmaleão* – Brito Menezes (1996, p. 62) afirma que este efeito não chega a ser perverso. Ainda segundo a pesquisadora, este fenômeno é inevitável uma vez que na instituição de um contrato didático sempre há a formulação de expectativas entre os parceiros da relação didática. E, esta corresponde a uma das questões centrais relativas à idéia de contrato didático. A denominação desse efeito advém da lendária história do Rei de Chipre, chamado Pigmaleão, que se apaixona por uma estátua entalhada por ele. Este monarca rogou à Deusa Afrodite para que concedesse vida à escultura com o intuito de casar-se com ela. Portanto, tal efeito se refere às expectativas do professor em relação ao aluno. Isto é plenamente identificável em situações nas quais o professor elege antecipadamente, entre os alunos de uma classe, aqueles que serão bem sucedidos na aprendizagem ou os que sucumbirão ao fracasso em função das suas próprias expectativas.

b. *Efeito a "idade do capitão"* – A nomenclatura que indica este efeito consiste na alusão ao livro de mesmo título (L'âge du capitaine), escrito pela psicóloga francesa Stella Baruk em 1985. Nesta obra a autora discute parte da investigação que consistiu na proposição de um problema (sem solução): "Em um barco existem 26 carneiros e 10 cabras. Qual a idade do capitão?" a um quantitativo de 97 alunos de classes equivalentes ao 2º e 3º Ano do Ensino Fundamental do nosso país. Em sua análise, a pesquisadora constatou que 76 alunos (78%) determinaram a idade do capitão efetuando operações matemáticas com os dados do enunciado. Portanto, esse efeito refere-se à conduta do aluno que determina a resposta para um problema proposto utilizando parte ou a totalidade dos dados fornecidos no enunciado (até para aqueles sem solução). Esse efeito didático procede da concepção dos alunos em relação aos problemas que o professor lhe propõe. Para eles fica subentendido que para todo problema há pelo menos uma solução compatível. Mas, há indícios da reprodução de uma idéia bastante difundida em sala de aula que consiste na identificação dos dados numéricos e da(s) palavra(s)-chave do enunciado que indicam a operação a ser realizada.

c. *Efeito Topázio* – Brousseau (1986, 1996, 2008) faz alusão ao romance de mesmo nome de Marcel Pagnol. Nessa obra, há um episódio em que um professor (Topaze), dita para o aluno uma frase, dando ênfase excessiva ao plural das palavras ao perceber que o mesmo havia grafado os vocábulos incorretamente. O aluno ao perceber a resposta dissimulada pelo professor retifica a escrita sem a verdadeira compreensão do seu significado. Segundo Brousseau (2008, p. 80) a resposta que o aluno deve dar é previamente determinada. O professor escolhe as perguntas que a podem provocar. É claro que essas perguntas mudam de significação. Fazendo perguntas mais fáceis, tenta obter o máximo de significação do máximo de alunos. Nesse sentido, se estamos diante desse efeito didático se o conhecimento em questão desaparece totalmente. Portanto, cabe ao professor a responsabilidade de manter o sentido nas mudanças de perguntas ao gerir as situações de aprendizagem.

d. *Efeito Jourdain* – Esse efeito também consiste numa referência de Brousseau a uma das cenas de O burguês fidalgo, de Molière, na qual um professor de filosofia revela a Jourdain o que são a prosa e as vogais. Portanto, não deixa de ser uma forma de efeito Topaze. A ação do professor é conduzida pela vontade de identificar a existência de um saber escolar ou científico em uma simples manifestação expressa pelo aluno. Nesse caso, após as explicações, acerca de objeto do conhecimento, a declaração do aluno é indevidamente supervalorizada pelo professor. Nesse sentido, Pais (2001, p. 93) afirmam que o efeito Jourdain é resultante da degeneração do efeito Topázio porque não se trata apenas de uma antecipação de resposta do professor ao aluno. É mais grave do que isso porque a falta de controle pedagógico da situação faz com que o professor reconheça uma resposta ingênua do aluno como a expressão de um conhecimento escolar válido. De certo modo, poderíamos dizer que nesses episódios, o professor desiste de aprofundar o diálogo com o aluno, evitando situações embaraçosas diante da possível falibilidade das próprias estratégias didáticas que resultaram no fracasso do aluno.

e. *O uso abusivo da Analogia* – De acordo com Brousseau (2008, p. 84), a analogia é uma excelente ferramenta heurística, quando utilizada sob a responsabilidade de que a aplica. Portanto, este pode ser um recurso eficiente. No entanto, o professor precisa acionar a vigilância epistemológica para não incorrer na redução do significado dos conceitos envolvidos. A sucessiva utilização de analogias no ensino conduz ao efeito topázio, que por sua vez, acaba resultando no efeito Jourdain. Segundo Brousseau (1986, p. 45) o aluno obtém a solução através da leitura das indicações didáticas e não de um investimento no problema. E, tem interesse nisso porque, depois de vários fracassos sobre problemas semelhantes, mas não identificados, não reconhecidos, o professor apóia-se nessas analogias subitamente renovadas para repreender o aluno pela sua resistência obstinada.

f. *Deslize Metacognitivo* – Esse efeito didático origina-se tanto da dificuldade do aluno em compreender um determinado problema quanto na dificuldade do professor que não consegue dar continuidade satisfatória ao processo de ensino. Então, o professor querendo dar continuidade ao processo de ensino e, também, percebendo que seus argumentos encontram-se quase esgotados, retoma as explicações baseando-se nas suas próprias concepções. Ou seja, o objeto de estudo deixa de estar vinculado a um discurso científico e as explicações passam a ter origem no saber cotidiano do professor. Neste caso, a epistemologia do professor passa a dominar os seus argumentos. De acordo com Pais (2001, p. 96), a passagem do discurso científico ao senso comum pedagógico não é percebida pelo aluno, o que favorece a confusão entre o saber escolar e o mundo imediato de vida cotidiana. Pais avança afirmando que a ocorrência isolada de um ou outro deslize metacognitivo não compromete a totalidade do aspecto científico dos conteúdos de ensino. Mas, o problema é agravado se tais eventos são uma constante na prática docente, caracterizando assim, a completa falta de domínio dos conteúdos de ensino, o que por sua vez ocasionaria a perda de sentido e controle do processo.

g. *Efeito Dienes* – Ao atribuir essa nomenclatura para o efeito didático Brousseau faz referência ao educador Zoltan Dienes que na década de 60 (século XX) influenciou a Educação com suas pesquisas conhecida como processo psicodinâmico. Sua proposta consistia na sistematização dos procedimentos de ensino, com a repetição de problemas objetivando a indução de respostas padronizadas por parte dos alunos, independentemente da efetiva compreensão. Portanto, este efeito está associado à epistemologia espontânea com a qual o professor concebe a natureza da disciplina com a qual trabalha. Esse conflito surge na passagem da dimensão subjetiva para a objetividade, que se constituem com características das situações de aprendizagem. As distorções entre a compreensão pessoal e os valores objetivos reduzem o significado das práticas educativas aproximando o currículo mais do senso comum do que da ciência.

CAPÍTULO IV – METODOLOGIA

As posições teóricas fornecidas no capítulo anterior colocaram uma questão central para o encaminhamento metodológico de investigação da presente pesquisa: a reflexão sobre os efeitos didáticos decorrentes das variáveis presentes nas atividades que compõem uma sequência didática proposta pelo livro didático de Matemática. A qual se destina ao ensino e a aprendizagem da noção relativa ao número racional mediante a abordagem do significado parte-todo.

Tendo em vista que tratamos da investigação de um fenômeno didático: os efeitos didáticos, ou seja, de um objeto de estudo inerente ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática percebemos a necessidade de realizarmos mediações preliminares, no âmbito da escola e da sala de aula, para que pudéssemos estabelecer condições favoráveis a identificação, descrição e análise qualitativa dos episódios. Entre as quais, visitas regulares aos ambientes, conversas periódicas com os gestores, a professora, os pais e os alunos com o intuito de estabelecer parcerias, sensibilizar e propiciar condições adequadas ao desenvolvimento dos trabalhos.

Além disso, afirmamos que o nosso interesse com esse estudo não reside na análise o sucesso ou o fracasso do aluno no momento da resolução das atividades que envolvem o significado parte/todo do número racional nas situações didáticas oportunizadas. Mas, a observação e a interpretação da dinâmica das interações do aluno com os dispositivos de ensino em dois momentos específicos: na situação de aprendizagem e na situação de avaliativa. Mais precisamente, para verificar se as variáveis didáticas desencadeiam os mesmos efeitos didáticos em situações didáticas distintas. O que não nos impede de relatar as dificuldades e os aspectos que induziram ao erro ou ao acerto em cada uma das atividades.

Portanto, expomos nesse capítulo os encaminhamentos que caracterizam o percurso metodológico adotado nesse estudo. Dentro desta perspectiva elencamos os fatores que influenciaram as nossas escolhas no que diz respeito ao cenário da pesquisa, aos sujeitos participantes, ao método e aos instrumentos adotados na obtenção dos dados durante o desenvolvimento do estudo.

4.1 O cenário e os sujeitos participantes da pesquisa

Por se tratar de uma pesquisa que investiga a emergência de fenômenos didáticos no processo de ensino e aprendizagem o cenário não poderia deixar o universo da sala de aula. Visto que é nesse ambiente onde na efervescência das relações, das interações e dos diálogos entre o professor, o aluno e o conhecimento, inclusive em articulação com o livro didático, que os efeitos didáticos têm origem ou se manifestam.

Nesse sentido, fica evidente que os sujeitos da pesquisa são a professora e seus alunos, pois participaram diretamente de algumas etapas estabelecidas nesse estudo. A professora regente coube apenas a aplicação do dispositivo proposto no livro didático. O papel do aluno nesse contexto consistiu na interação com os pares e as situações didáticas promovidas. A observação, a captura e a análise das interações, tanto da professora quanto dos alunos, com os dispositivos de ensino, possibilitaram a identificação de alguns efeitos didáticos.

4.1.1 O campo de pesquisa

A pesquisa foi realizada em uma escola pública vinculada a uma rede municipal de ensino da Região Metropolitana do Recife. Esta escola integra o conjunto de 87 unidades de ensino destinadas a prestação de serviços educacionais e culturais as comunidades pertencentes ao bairro onde está situada e a cinco bairros circunvizinhos.

A escola é de médio porte, pois atende aproximadamente 1010 alunos. Estes estão em oito salas de aula distribuídos em cada um dos três turnos. Os alunos estão matriculados em modalidades distintas e, como já dissemos compreendem a Educação Infantil, do 1º ao 9º ano do Ensino Fundamental e na Educação de Jovens e Adultos. Ressaltamos que o perfil da comunidade assistida caracteriza-se fundamentalmente por famílias de baixo poder aquisitivo e pouca escolaridade.

Esta escola está funcionando ininterruptamente há 30 anos nessa localidade. O prédio possui uma infra-estrutura preservada, dispondo de 8 salas de aula, sala dos professores, diretoria, secretaria, cozinha, pátio e áreas de convivência. Em contrapartida, constatamos a inexistência, de biblioteca, laboratórios e espaço reservado à prática de Educação Física. Os funcionários da unidade, dispõem de vários os recursos audiovisuais inclusive de projetor.

Registramos que uma das dependências da escola está sendo preparada para acomodar o laboratório de informática. Porém, não há previsão quanto ao recebimento dos equipamentos bem como quanto à devida implantação. Em relação aos recursos humanos, o quadro funcional da escola é composto por 40 professores efetivos e contratados, 1 coordenadora pedagógica, 2 gestoras e 12 funcionários que auxiliam na administração, conservação e limpeza da escola.

4.1.2 A professora e sua turma

Para consecução dos objetivos da pesquisa selecionamos os sujeitos participantes dentre o público assistido pela escola os alunos das turmas do 2º Ciclo do Ensino Fundamental. Ou seja, os alunos do 4º e 5º Ano, pois, conforme mencionamos no 1º capítulo dessa dissertação, de acordo com os PCN nesse ciclo tornam-se efetivo o ensino e a aprendizagem dos conteúdos relativos ao número racional. Assim como, também frisamos no 2º capítulo, que o livro didático da Coleção Matemática Paratodos[27] sugere a construção da noção de número racional a partir do significado parte/todo no terceiro volume, portanto com os alunos do 4º Ano.

Nesse sentido, tentamos realizar a investigação com alunos do 4º Ano do Ensino Fundamental. Porém, a proposta de trabalho foi recusada pela professora dessa turma, sob a alegação que o estudo das frações no segundo bimestre do ano letivo seria inviável já que este conteúdo é apresentado aos alunos no último bimestre. Diante da recusa, abordamos uma das professoras responsáveis pelos alunos do 5º Ano e verificamos o seu interesse e disposição em participar da pesquisa.

Em uma conversa informal, esta nos relatou que não havia tido tempo de abordar o conteúdo (fração), com os seus alunos, no ano letivo anterior. Vale salientar que esta professora acompanhou estes alunos do 2º ao 5º Ano do Ensino Fundamental. Portanto, participaram das atividades estabelecidas nessa pesquisa uma professora e seus respectivos alunos do 5º Ano do Ensino Fundamental. A referida turma é constituída por 42 alunos, sendo 25 meninas e 17 meninos, na faixa etária compreendida entre 9 e 12 anos de idade que assistem às aulas no

[27] Nesse mesmo capítulo também já registramos que este livro didático foi adotado por esta rede de ensino em duas escolas do PNLD 2005 e 2007. E, atualmente no PNLD 2010, segundo consta nos dados da secretaria de educação do município, a coleção reformulada (Projeto Conviver Matemática), foi eleita pelos professores da rede como terceira opção.

período da manhã. Outra particularidade dessa turma, é que a faixa etária dos alunos não configura o problema relativo à distorção idade/série. Assim como, 100% deles não apresentam histórico de reprovações ou evasão.

No que se refere à escolha da professora, efetivada na rede há 20 anos, consideramos dois aspectos presentes no seu perfil profissional: o primeiro diz respeito ao empenho e ao investimento pessoal na própria formação profissional. Enquanto o segundo refere-se à efetiva participação e desempenho nos encontros mensais da formação continuada, oferecida pela Secretaria de Educação do município por intermédio do Setor de Formação Continuada, do qual a pesquisadora faz parte.

Diante do exposto acreditamos que o campo de pesquisa oferecia as condições mínimas e necessárias ao desenvolvimento da pesquisa quanto à acessibilidade, a disponibilidade do professor, dos alunos e do apoio irrestrito das gestoras. Devido às circunstâncias descritas optamos por esta escola e por estes sujeitos.

4.2 Delineamento do método

O percurso metodológico pelo qual enveredamos nos muniu e subsidiou com dados suficientes e necessários à construção da análise sobre os efeitos didáticos emergentes na interação do aluno e do professor como o objeto matemático (o número racional, o significado parte/todo e os diferentes registros de representação), através da avaliação do funcionamento da sequência de atividades extraída do livro didático.

Durante todo o processo a pesquisadora esteve em contato direto com os sujeitos participantes e com as situações pesquisadas. Antes da proposição das situações didáticas foi necessário organizar e coordenar reuniões com as gestoras da escola, com a professora e os pais dos alunos para expor os objetivos da pesquisa, viabilizar a aplicação da sequência didática e solicitar autorização para realizar a intervenção e para o registro da imagem dos participantes. Além disso, fizemos alguns registros em vídeo de outras situações didáticas aleatórias vivenciadas em sala de aula pelos alunos e a professora a fim de familiarizá-los com este recurso.

Para legitimar os dados obtidos em cada uma das sessões de trabalho recorremos a algumas técnicas características da etnografia: a videografia, a observação participante e entrevistas explicativas com alguns alunos selecionados. No item subsequente justificamos a utilização desses instrumentos que possibilitam o levantamento e o registro dos dados brutos, expondo a finalidade de cada um deles.

Desse modo, afirmamos que este estudo foi desenvolvido em etapas e seguiu o cronograma que foi previamente estabelecido no projeto de pesquisa. Dando continuidade à descrição das etapas, ou seja, da trajetória seguida nesse estudo apresentamos a caracterização das situações didáticas propostas, a dissertamos sobre o processo de aplicação dos dispositivos de ensino, acerca dos instrumentos utilizados para obter dados pertinentes à análise dos efeitos didáticos. Assim como, expomos os critérios adotados na análise preliminar das atividades que compõem a seqüência didática.

4.2.1 Descrição do percurso metodológico

Antes de realizar a intervenção na sala de aula nos dispusemos a fazer algumas visitas prévias à escola. E, como já relatamos durante algumas dessas visitas realizamos duas reuniões, uma para prestar esclarecimentos e solicitar o consentimento de alguns segmentos da comunidade escolar: dirigentes, pais, alunos e a professora, para dar início ao trabalho.

Na pauta da primeira reunião abordamos temáticas relacionadas à natureza, os objetivos, a relevância e a contribuição dos sujeitos participantes da pesquisa para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Enquanto a segunda reunião serviu para discutir com a professora os detalhes da intervenção e disponibilizar com antecedência a sequência didática que utilizaríamos e solicitar a leitura de alguns trechos do manual do professor

Além das reuniões promovemos dois encontros com a professora regente. Num primeiro momento disponibilizamos cópias da sequência didática e dos capítulos do manual do professor, em que os autores dissertam sobre a concepção dos mesmos sobre o ensino e aprendizagem do número racional. E, no segundo encontro definimos os detalhes da intervenção, a forma de interação, as incumbências da professora ao mediar às situações didáticas sugeridas no livro didático.

4.2.1.1 A dinâmica da intervenção em sala de aula

A) ***Caracterização das situações didáticas***

Na fundamentação teórica destacamos que a modelização intencional das circunstâncias, das interações e das condições de ensino com a finalidade de propiciar, provocar ou favorecer as aprendizagens relativas ao objeto matemático, neste caso a noção acerca do número racional mediante a exploração do significado parte/todo, configuram as situações didáticas. Nesse sentido, denominamos como situações didáticas dois episódios distintos vivenciados em sala de aula pela professora e os alunos do 5º Ano do Ensino Fundamental.

(i) Episódio 1: Situação de Aprendizagem

O primeiro momento corresponde à aplicação da sequência didática propriamente dita, caracterizada de acordo com a TSD, como sendo uma situação de aprendizagem[28]. Como mencionamos anteriormente, esta sequência didática não foi construída, mas, extraída do livro didático de Matemática (APÊNDICE A), da Coleção Matemática Paratodos. Este dispositivo é composto por dezenove atividades, que exploram o significado parte/todo da fração. Essas atividades foram distribuídas em três sessões de acordo com o organograma apresentado no Quadro 1.

SESSÕES	COLEÇÃO MATEMÁTICA PARATODOS – VOLUME DO 4º ANO			
	CAPÍTULO	**ATIVIDADES**	**PÁGINA**	**CRONOGRAMA/DURAÇÃO**
①	Dividindo coisas inteiras	[1] , [2] e [3]	130	22/04/2009 – 2h30min
	Frações	[4]	131	
②	Ação Explorando frações de um círculo	[1] a [7]	132 - 133	23/04/2009 - 2h
③	Reconhecendo frações	[1] a [8]	134 - 135	23/04/2009 – 2 h

Quadro 1: Organograma das sessões e atividades da seqüência didática

[28] A situação de aprendizagem está representada no esquema da Figura 12 e correspondem ao momento em que o aluno atua na situação didática interagindo com o meio didático.

Propositalmente, não foram realizadas modificações em relação às variáveis didáticas, globais (organização, elaboração e quantidade de atividades, sequenciação, enfoque, por exemplo), e locais (contextos, comandos entre outras), pois o objetivo da pesquisa não consiste em intervir na escolha didática dos autores, mas, a análise dos efeitos didáticos que emergem com a utilização do dispositivo de ensino (sequência didática).

A sequência didática, extraída do livro didático que subsidia nossa pesquisa, ao que tudo indica favorece o trânsito do aluno praticamente por todas as fases da situação didática, propostas por Brousseau na TSD, ao sugerir a modelização das situações de ensino e aprendizagem. No entanto, a garantia da plena realização desse percurso didático está condicionada à sistematização das ações docentes professor durante aplicação da sequência didática. No caso da nossa pesquisa não foi possível acompanhar a última fase de uma situação didática que consiste na institucionalização do significado parte/todo do número racional pelo professor.

A primeira fase da situação didática, denominada como *ação*, os alunos atuam criando táticas e procedimentos de modo a interagir com o meio (no caso da sequência, pode ser um exercício, um pseudoproblema ou uma atividade manipulativa). Ou seja, durante a resolução relacionando as informações contidas nas atividades, sugeridas pelo livro didático, às próprias decisões.

A fase seguinte à situação de ação corresponde à *formulação* os alunos se encarregam de estabelecer interações dialógicas com seus pares ou com o professor propiciando o intercâmbio de informações entre os interlocutores em prol da resolução dos exercícios e atividades que lhe são propostas.

A terceira fase refere-se à *validação*, nesta etapa o aluno busca legitimar suas estratégias de resolução. Porém, se houver discrepância com outros mecanismos apresentados ou desacordo em relação às estratégias por ele apresentada, o aluno deve se posicionar, argumentando, demonstrando ou aplicando-as. No entanto, observamos ao realizar a presente pesquisa, que esta fase é pouco estimulada pelo professor em sala de aula. Os alunos não se sentem à vontade para expor seus argumentos, confrontar suas estratégias com aquelas que foram adotadas por outros colegas de classe, ou até, questionar a veracidade das táticas adotadas por outros alunos.

De acordo com a TSD compete ao professor possibilitar que o aluno passe pela fase de *institucionalização*. No que diz respeito ao significado parte-todo da fração, na sequência didática proposta no livro didático analisado, a institucionalização ocorre prematuramente desde a primeira atividade. Uma vez que a ideia de fração corresponde a divisão do inteiro, seja uma barra de chocolate ou um grupo de atletas, em partes "iguais" é repetida várias vezes ao longo da sequência didática.

Os autores optam por colocar nos enunciados das atividades informações típicas do ensino das frações (o inteiro é uma barra de chocolate que será dividida em partes "iguais"), como na atividade introdutória da sequência didática: *"Os três queriam chocolate, mas <u>só havia uma barra</u>. Qual a solução? <u>Dividir a barra em três partes iguais.</u>*

Neste caso, é possível perceber que os autores lançam a questão e logo em seguida, respondem esta pergunta. Os grifos, no enunciado do exemplo anterior, servem como suporte para indicar o argumento que os autores utilizam e reforçam em praticamente todas as atividades da sequência didática ao explorar a relação parte/todo.

Portanto, nossa tese de que esta fase da situação didática é precoce decorre da análise dos enunciados, textos, exemplos e ilustrações utilizadas nas atividades da sequência didática retirado do livro didático. Nesse dispositivo verificamos que exaustiva repetição dos aspectos exemplificados no parágrafo anterior faz com que ao final da resolução, de uma quantidade significativa de exercícios, os alunos reproduzam e verbalizem a definição clássica de fração: *A fração corresponde a uma parte, fatia ou pedaço do inteiro que foi dividido em partes iguais.*

No Quadro 2 podemos observar os aspectos, relativos ao número racional fracionário, focalizados em cada uma das atividades que compõem a sequência didática utilizada nesse trabalho de pesquisa. A partir do significado parte/todo da fração os autores exploram nessa sequência de atividades: o esgotamento do todo, além da relação entre o número de cortes e a quantidade de fatias, o tratamento e a conversão entre os diferentes registros de representação semiótica (a linguagem natural, a linguagem simbólica fracionária e pictórica). Assim como, há atividades cujo objetivo incide sobre a comparação das frações e a construção da noção de equivalência.

SESSÕES	COLEÇÃO MATEMÁTICA PARATODOS – VOLUME DO 4º ANO			
	CAPÍTULO	**ATIVIDADE**	**ITEM**	**FOCO**
①	Dividindo coisas inteiras	[1]	[A] e [B]	Esgotamento do inteiro contínuo através da divisão em partes iguais.
		[2]	[A], [B] e [C]	Registro em linguagem natural das divisões realizadas na atividade 1.
		[3]	-	Registro em linguagem simbólica fracionária das frações do inteiro da Atividade 1.
	Frações	[4]	[A]	Registro em linguagem simbólica fracionária da fração um quarto.
			[B]	Determinar uma fração de uma quantidade discreta.
			[C]	Registrar e efetuar a divisão que representa a uma fração da quantidade discreta.
			[D]	Registro em linguagem simbólica fracionária de frações de um mesmo retângulo.
②	Ação Explorando frações de um círculo	[1]	-	Compor círculos iguais com as frações: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$.
		[2]	-	Nomear as frações do círculo através do registro em linguagem natural e simbólica fracionária.
		[3]	-	Registro pictórico da composição de círculos do mesmo tamanho com as frações: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$.
		[4]	-	Compor três círculos iguais utilizando duas cores diferentes. Ou seja, utilizando frações distintas. Por exemplo, uma metade (vermelha) e dois quartos (laranja).
		[5]	[A], [B], [C] e [D]	Comparar frações do círculo, registrando o resultado dessa ação em linguagem natural.
		[6]	[A], [B], [C] e [D]	Por meio da comparação entre as frações: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$, descobrir frações equivalentes ao inteiro e a metade.
		[7]	[A] e [B]	Realizar o registro pictórico dos círculos correspondentes as igualdades: um terço é igual a dois sextos e um meio é igual a dois quartos.
③	Reconhecendo frações	[1]	[A], [B], [C] e [D]	Registrar em linguagem natural e simbólica fracionária as frações do círculo.
		[2]	[A] e [B]	Registrar em linguagem simbólica fracionária as frações do retângulo.
		[3]	[A], [B] e [C]	Registrar em linguagem pictórica frações do círculo, pentágono e hexágono.
		[4]	-	Formular uma justificativa para a divisão equivocada do retângulo.
		[5]	[A]	Estimar a fração pintada no retângulo.
			[B]	Estimar a fração do retângulo que não está pintada.
		[6]	[A]	Comparar frações de um semicírculo.
			[B]	Registrar a fração do semicírculo que representa o volume de combustível do tanque.
		[7]	[A] e [B]	Registrar quantidades de elementos do inteiro discreto e de seus subconjuntos.
			[C] e [D]	Registra em linguagem simbólica fracionária uma fração do inteiro discreto.
			[E]	Determinar uma fração do inteiro discreto.
		[8]	[A]	Registrar em linguagem simbólica fracionária uma fração do círculo.
			[B] e [C]	Registro de frações equivalentes à metade e a dois sextos do círculo.

Quadro 2: Enfoque das atividades que constituem a sequência didática

(ii) Episódio 2: Situação de Avaliação

O segundo momento refere-se à aplicação de outro dispositivo adaptado da sequência didática original (proposta pelo livro didático da Coleção Matemática Paratodos). A nova sequência de atividades foi denominada por nós como situação de avaliação. Nesse caso, foram seguidas as instruções e condições de aplicação sugeridas pelos autores do livro didático.

Decidimos que a situação didática caracteriza-se como uma situação de avaliação porque com relação à dinâmica de aplicação da sequência original, os autores (2007, p. 130) sugerem que:

1. A leitura das atividades seja realizada em voz alta.
2. As crianças devem trabalhar sozinhas.

Além disso, a professora regente que aplicou a sequência didática se absteve de esclarecer as dúvidas dos alunos e de discutir as diferentes estratégias de resolução para um mesmo problema apresentadas pelos alunos, por todas estas razões a situação anteriormente descrita se configura como um momento de diagnose, em outros termos, avaliativo.

Diante dos fatos, a elaboração e a aplicação de um novo dispositivo de ensino se justificam pelos motivos relacionados os quais foram observados e registrados em vídeo:

(i) Devido à mudança repentina quanto à forma de interação dos alunos com a sequência didática planejada antes da aplicação, a professora regente decidiu que a interação dos alunos com o dispositivo original seria em grupo, quando os autores do livro didático sugerem que ocorra individualmente. Em contrapartida, verificamos que os alunos embora estivessem dispostos em pequenos grupos, estes apresentavam atitudes individualistas durante a resolução das atividades, escondendo suas respostas dos colegas do grupo, por exemplo.

(ii) Por termos identificado que na maioria desses grupos, um dos alunos assumiu a posição de líder ou porta voz das estratégias e respostas consideradas por eles como mais adequadas ou corretas. Portanto, a(s) resposta(s) ou estratégia(s) divergente(s) àquela(s) defendida(s) pela liderança foi ignorada(s) ou descartada(s), cabendo aos outros alunos apagar suas respostas e registrar as respostas indicadas pelo líder do grupo. Percebemos que esse

comportamento dos alunos influenciou no sucesso e/ou na incidência do erro no processo de resolução das atividades.

(iii) O desejo de verificar se as variáveis didáticas, estabelecidas pelos autores do livro didático na sequência didática original, continuaria exercendo influência sobre as estratégias mobilizadas pelos alunos na resolução das atividades, porém na condição estabelecida inicialmente pelos autores.

O segundo instrumento não difere do primeiro em relação à quantidade de atividades que integram a sequência didática original. As dezenove atividades do instrumento avaliativo são similares àqueles sugeridos pelos autores do livro didático. Todavia, algumas delas sofreram modificações em relação ao contexto. Por exemplo, na atividade 4 da sequência didática original o inteiro discreto corresponde a uma coleção com doze selos na nova sequência foi substituído por uma dúzia de ovos. Porém, não houve qualquer adulteração das variáveis: formas geométricas planas no caso das atividades (círculo, retângulo, entre outras), ou nos comandos e solicitações contidas nas atividades da sequência didática original. E, cujas análises serão apresentadas no Capítulo V.

No entanto, a seleção das atividades que seriam (re) apresentadas aos alunos, num segundo momento, não foi aleatória. Ressaltamos que a escolha das atividades pela pesquisadora ocorreu após a análise dos protocolos dos alunos após a resolução das atividades propostas obedeceu aos seguintes critérios:

1. O índice médio de estratégias bem sucedidas é igual ou superior a 60%.
2. O índice médio de estratégias ou procedimentos equivocados ou mal sucedidos ultrapassa 50%.

Como podemos observar no Quadro 3, em alguns itens das atividades sugeridas na sequência didática original há 100% de êxito na resolução. Entretanto há situações em que verificamos 100% de insucesso. Esse dado é curioso e contraditório, uma vez que a totalidade dos alunos se sai bem ao solucionar uma situação específica e em outra com a mesma demanda todos erram. Considerando que para analisar a origem dos efeitos didáticos devemos considerar e testar todas as hipóteses. Deste modo, enquadram-se nos critérios pré-estabelecidos que definem a composição da situação de avaliação as atividades e os respectivos itens relacionados no Quadro 3:

SESSÃO	CAPÍTULO	ATIVIDADE	ITEM	PERCENTUAL	
				ACERTO	ERRO
①	Dividindo coisas inteiras	[1]	[A]	94%	
			[B]	97%	
		[2]	[A]	64%	
			[B]	72%	
			[C]	69%	
	Frações	[4]	[A]	100%	
			[B]		100%
			[C]		100%
			[D]		63%
②	Ação Explorando frações de um círculo	[5]	[A]	71%	
			[B]	80%	
			[C]	80%	
		[6]	[A]	83%	
			[B]	80%	
③	Reconhecendo frações	[1]	[A] e [B]		63%
			[C] e [D]		53%
		[3]	[A] e [B]	98%	
			[C]	78%	
		[4]			68%
		[7]	[A]	100%	
			[B]	90%	
			[C]		98%
			[D]		90%
			[E]		100%
		[8]	[A]		95%
			[B]		58%
			[C]	70%	

Quadro 3: Índice médio de acerto e erro nas atividades da sequência didática original

Ao analisar os protocolos dos alunos percebemos a adoção dessa estratégia metodológica (aplicação dessa outra sequência de atividades) nos forneceu informações complementares, as quais foram essenciais à interpretação das estratégias adotadas pelos alunos, dos erros recorrentes, da ausência de respostas em alguns itens, por exemplo. Bem como, possibilitou a compreensão do funcionamento da sequência didática inicial proposta no livro didático.

B) Aplicação da sequência didática

Após as etapas preliminares seguimos o plano estabelecido entre a pesquisadora e a professora regente de acordo com o cronograma delimitado e apresentado no Quadro 1. Uma vez que, a elaboração, organização sequencial das atividades e o enfoque já estavam definidos pelos autores do livro didático. Nesse sentido, detalhamos em seguida os procedimentos adotados durante a aplicação da sequência didática nas situações de aprendizagem e de avaliação.

(i) Situação de aprendizagem

Aplicamos a sequência didática, proposta no livro didático de Matemática, em abril do ano letivo de 2009, com os alunos do 5º Ano do Ensino Fundamental. Na primeira sessão da sequência didática contamos com a participação de 36 alunos, na segunda sessão com 41 e na terceira com 42 alunos, os quais foram distribuídos em grupos, de modo que cada equipe fosse constituída por no mínimo quatro componentes. Tentamos manter a organização e os mesmos integrantes dos grupos no desenvolvimento das atividades das sessões.

Optamos por considerar todos os dados fornecidos nos protocolos dos alunos (ficha de atividades) para não perder nenhum indício da emergência dos efeitos didáticos, isso justifica a nossa opção metodológica de manter a variação da quantidade de alunos. Descartando, portanto a padronização e o controle da quantidade de alunos participantes durante as sessões de aplicação da sequência didática.

Os alunos participaram da leitura dos enunciados das atividades e foram estimulados a dialogar com os demais colegas de grupo para formular hipóteses, buscar estratégias de resolução, testar os procedimentos ao solucionar as atividades propostas em cada uma das sessões. Além disso, foram incentivados a realizar o registro desses procedimentos e soluções nas fichas de atividades disponibilizadas em cada sessão.

A professora foi encarregada de "pilotar" a sequência didática. Atribuímos o termo "Pilotar" no sentido estrito da palavra que corresponde a "dirigir" ou "conduzir" todo o processo de aplicação da seqüência didática. Uma vez que, a docente é responsável por mediar o processo de ensino e aprendizagem em sala de aula, consideramos a pertinência do seu papel no desenvolvimento das atividades do trabalho de pesquisa.

(ii) ***Situação de avaliação***

Após a análise dos dados obtidos, com a aplicação da sequência didática original, voltamos à escola e discutimos os resultados dessa análise com a professora e propusemos a (re)apresentação das atividades que discriminamos no Quadro 3. No entanto, devido a um período de aproximadamente um mês e meio sem aulas, por causa do recesso do mês de julho e da greve dos professores, só foi possível vivenciar esta nova situação didática no mês de agosto.

Como já foi dito anteriormente, nesta situação didática foram reapresentadas nove atividades idênticas àquelas que constituem a sequência didática original do livro didático da Coleção Matemática Paratodos. A dinâmica das interações dos alunos com a professora e o dispositivo de ensino seguiu categoricamente as instruções fornecidas no manual do professor contido no livro didático mencionado.

Entre elas: a leitura em voz alta das atividades, a realização das atividades individualmente e sem intervenções da professora regente. 37 dos 42 alunos que participaram da aplicação da sequência didática original vivenciaram esta situação, assumindo as mesmas atribuições definidas na situação de aprendizagem. Porém, limitando-se apenas a registrar as soluções obtidas para os exercícios e atividades na ficha de atividades.

4.2.1.2 *Instrumentos utilizados na construção dos dados*

A identificação das variáveis macros e micro-didáticas, bem como dos seus respectivos valores, os quais constituem uma escolha didática dos autores da Coleção Matemática Paratodos, constituiu uma tarefa relativamente simples no desenvolvimento da presente pesquisa. O jogo de variáveis utilizado pelos autores do livro didático, na constituição da sequência didática, supostamente determina as condições necessárias à aprendizagem do significado parte/todo do número racional.

No entanto, a captura da influência e os efeitos didáticos decorrentes dessas variáveis e suas cotas na aprendizagem da noção do número racional constitui um trabalho demasiadamente complexo. Sem adentrar a sala de aula, observar e registrar as interações dos alunos e da professora com o dispositivo de ensino, neste caso, a sequência didática, isso não seria possível. De certo modo, os dados que ilustram o funcionamento da sequência didática não se encontram no campo de pesquisa para serem coletados. Para verificar o modo como labora tal mecanismo de ensino nos cercamos dos seguintes instrumentos de pesquisa:

a. *Registros escritos* – Disponibilizamos em cada uma das sessões uma ficha de atividades para todos os alunos dos dez grupos constituídos. Nessa ficha cada aluno registrou os procedimentos ou estratégias utilizadas e as soluções encontradas para os exercícios e/ou atividades propostas na sequência didática. A análise das fichas de atividades, ou seja, dos protocolos dos alunos, nos forneceu indícios dos efeitos didáticos emergentes durante o processo de resolução das atividades das situações didáticas vivenciadas na sala de aula.

b. *Registro do áudio* – A gravação com o aparelho de mp3 das discussões dos alunos de um dos grupos teve como objetivo a obtenção de elementos dos diálogos travados entre os membros desse grupo em relação às hipóteses formuladas, quanto ao questionamento ou validação das estratégias mobilizadas, ou ainda no que tange às dificuldades enfrentadas por eles durante a resolução das atividades. Consequentemente, o registro desses diálogos, somado aos demais instrumentos, contribuiu para a análise dos efeitos didáticos que emergiram durante a aplicação da seqüência didática. Além disso, a análise das interações dialógicas entre a professora e os alunos, e entre os próprios alunos na relação com o conhecimento matemático (o significado parte/todo do número racional). Nessa interação, foram evidenciadas as cláusulas do contrato didático firmado entre eles. Assim como, os registros corroboraram para a visualização dos efeitos resultantes desse fenômeno didático.

c. *Registro em vídeo* – Realizamos a gravação em vídeo do processo de aplicação da seqüência didática com o intuito de registrar os conhecimentos prévios dos alunos em relação à noção do número racional através do significado parte/todo. Por outro lado, a interação dos alunos com o dispositivo: a sequência didática. Nessa interação tornaram-se nítidos alguns os aspectos atitudinais e procedimentais dos alunos e da professora, que comprometem a aprendizagem do objeto de ensino em questão. Além disso, para efeito de análise dos dados os registros favoreceram a revisitação e a transcrição dos diálogos entre o professor, o aluno em relação ao objeto de estudo, nos episódios de ensino e aprendizagem**.**

d. *Registros Complementares* – Utilizamos estes registros complementares para dar suporte às análises dos episódios de ensino e aprendizagem do significado parte/todo do número racional. Uma vez que estes recursos nos auxiliariam no esclarecimento de alguns aspectos da resolução das atividades pelos alunos. Portanto, a finalidade e a relevância desses instrumentos para o nosso estudo são descritas em seguida:

(i) *Observação* – Por estar inserida no contexto da sala de aula a pesquisadora se encarregou de registrar por escrito suas impressões com relação ao desenvolvimento das atividades. E, de modo mais específico os aspectos relativos às estratégias de resolução mobilizadas pelos alunos para solucionar as atividades sugeridas pelos autores do livro didático nas situações didáticas vivenciadas.

(ii) *Entrevista Explicativa* – A utilização dessa ferramenta na construção dos dados da pesquisa se justifica por não termos encontrado nos outros instrumentos argumentos convincentes para explicar algumas respostas ou estratégias mobilizadas pelos alunos durante o processo de resolução as quais foram registradas por eles nas fichas de atividades. Porém, devido a escassez de tempo e disponibilidade dos alunos para serem retirados de sala de aula em momentos convenientes participaram dessa fase apenas três dos quarenta e dois alunos, os quais foram previamente selecionados em função dos registros em seus protocolos.

4.3 Metodologia utilizada na análise dos dados da pesquisa

Para analisar os efeitos didáticos resultantes das variáveis didáticas e suas cotas, presentes na sequência didática utilizada nesse estudo, sobre o significado parte/todo do número racional, utilizamos elementos da análise teórica proposta por Henry (2006).

De acordo com Henry (2006) a análise teórica, também denominada como análise a priori ou preliminar, corresponde a um conjunto de estudos de caráter epistemológico, didático e pedagógico. Estes estudos contribuem para o conhecimento do saber em cena numa situação didática (análise epistemológica); para descrever o seu funcionamento na evolução de uma situação didática específica (análise didática); E, além disso, auxilia no estudo dos possíveis comportamentos dos alunos na gestão de uma situação (análise pedagógica).

Portanto, são três as componentes da análise teórica: a primeira etapa consiste na *análise epistemológica* mais precisamente em relação à evolução da noção, das representações e significados do número racional fizemos no primeiro capítulo; a segunda etapa refere-se à *análise pedagógica* quando nos referimos no segundo capítulo ao ensino e a aprendizagem da noção, dos significados e dos registros representação abordados no 2º Ciclo do Ensino Fundamental. Porém, em função dos objetivos da pesquisa dedicamos mais tempo e esforço à *análise didática* da sequência de atividades extraída do livro didático de Matemática.

De acordo com Henry (2006), a análise didática consiste na investigação de três fatores que contribuem para a identificação e a interpretação fenômenos didáticos. Entre estes fatores o autor afirma a necessidade de analisar: os conhecimentos prévios dos alunos, a tarefa que o aluno vai realizar e as ações do professor. Entretanto, para alcançarmos o objetivo geral da pesquisa nos detivemos na análise das atividades propostas na sequência didática com a finalidade de:

(i) *Analisar as variáveis didáticas, os valores e os respectivos efeitos nas estratégias mobilizadas pelos alunos durante a resolução;*

(ii) *As modificações possíveis no quadro dos conhecimentos prévios dos alunos em função das variáveis depositadas nas atividades;*

(iii) *Identificar os possíveis conhecimentos prévios, as generalizações e os (re) investimentos, resgatados, adotados ou utilizados, durante a resolução das atividades propostas na sequência didática, por meio do exame das soluções apresentadas nos protocolos dos alunos;*

Deste modo, ressaltamos que a análise didática da sequência de atividades proposta no livro didático da Coleção Matemática Paratodos foi realizada em duas etapas. A primeira etapa corresponde à análise preliminar das atividades que compõem a sequência didática e foi realizada com o objetivo de:

(i) *Identificar as variáveis didáticas e os respectivos valores manipulados pelos autores do livro didático para introduzir a noção e os diferentes registros de representação relativos ao número racional.*

(ii) *Antecipar os efeitos didáticos decorrentes das variáveis e suas cotas, manipuladas pelos autores do livro didático na elaboração da sequência de atividades, em função das possíveis dificuldades, das estratégias e dos procedimentos de resolução*

utilizados pelos alunos na gestão das atividades e dos erros decorrentes dessas escolhas dos alunos em cada uma das atividades pertencentes à sequência didática.

Na segunda etapa realizamos a análise a posteriori, do dispositivo de ensino que mencionamos, a qual teve como objetivo:

(i) *Apontar a proporção e o percentual de alunos que apresentaram estratégias ou procedimentos de resolução bem ou mal sucedidos em cada uma das atividades.*
(ii) *Diagnosticar os fatores que influenciam a incidência de erro ou acerto nas atividades que compõem a sequência didática.*

Nesse momento, verificamos se hipóteses lançadas na análise a priori são confirmadas ou refutadas mediante o cruzamento das informações fornecidas pelos instrumentos utilizados (protocolos dos alunos e dos registros audiovisuais e complementares). O confronto dessas informações com as previsões da análise preliminar da sequência didática conduziram as conclusões apresentadas ao final do estudo sobre os efeitos didáticos relativos ao ensino e a aprendizagem do significado parte/todo do número racional.

Assim sendo, apresentamos o esquema geral adotado na categorização dos dados, apresentadas no Quadro 4, nele definimos as categorias (geral e empírica), e as unidades de análise que foram consideradas e nortearam as análises a priori e a posteriori provenientes da aplicação da sequência didática. As análises as quais nos referimos são apresentadas no Capítulo V da presente pesquisa.

CATEGORIA GERAL *As variáveis didáticas e suas cotas das atividades que compõem a sequência didática sobre a aprendizagem do significado parte/todo do número racional*	
CATEGORIA EMPÍRICA	**UNIDADES DE ANÁLISE**
EFEITOS DIDÁTICOS	a. *Identificação e descrição dos efeitos didáticos resultantes das variáveis didáticas e das suas cotas atribuídas pelos autores do livro didático na elaboração da sequência de atividades mediante a análise dos protocolos dos alunos.* b. *Análise da frequência de estratégias exitosas e mal sucedidas constatadas na interação do aluno com o dispositivo de ensino (a sequência didática).*

Quadro 4: Categorias consideradas na análise dos dados

4.3.1 Análise das situações didáticas

As situações didáticas de aprendizagem e avaliação caracterizam-se respectivamente aplicação das atividades da sequência didática sugerida pelos autores do livro didático de Matemática. Sendo que na situação de aprendizagem aplicamos a sequência didática de modo a abrangermos a sua composição integral. Enquanto na situação de avaliação aplicamos algumas das atividades que constituem esta sequência didática mencionada. Ou seja, utilizamos uma composição parcial da sequência didática original pelos motivos apresentados ao introduzir este capítulo. Assim sendo, apresentamos a análise a priori das situações didáticas de aprendizagem e avaliação.

4.3.1.1 Análise a priori das atividades que integram a sequência didática da situação de aprendizagem

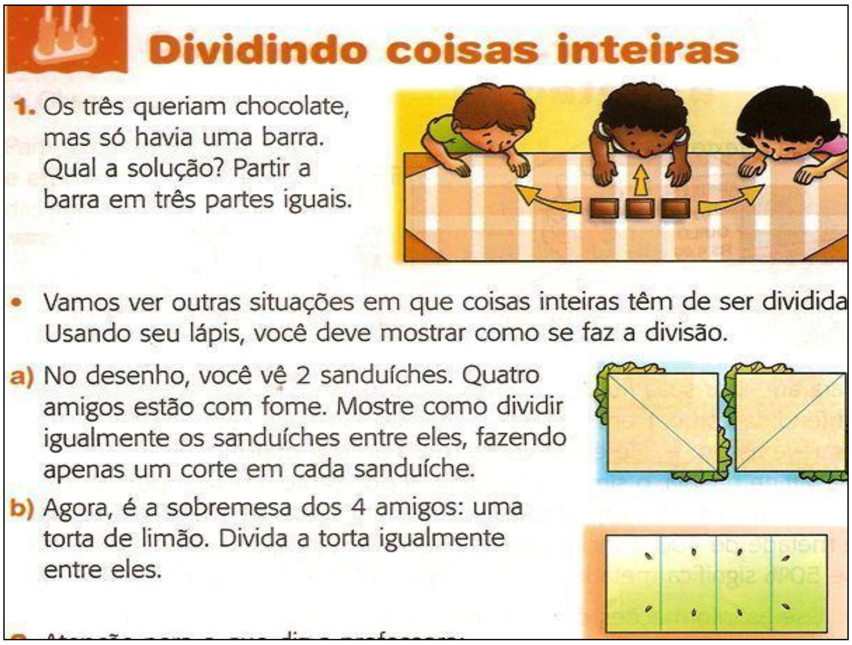
I) Análise a priori das atividades da 1ª sessão – "Dividindo coisas inteiras"

Atividade [1]

a. Descrição: Os autores utilizam na atividade 1 (ilustrada na Figura 13), um pequeno texto introdutório que associado a uma ilustração apresenta uma situação em que uma única barra de chocolate foi igualmente dividida entre três amigos. A atividade aborda o significado parte/todo do número racional a partir do esgotamento do todo. Por meio da divisão de um objeto contínuo (barra de chocolate, os sanduíches e a torta), o todo, a unidade ou o inteiro deverá ser dividido em partes iguais. Portanto, a atividade está esquematicamente organizada para que o aluno perceba a existência de uma totalidade divisível.

b. Objetivo

- ✓ Dividir o inteiro contínuo em partes iguais.


Dividindo coisas inteiras

1. Os três queriam chocolate, mas só havia uma barra. Qual a solução? Partir a barra em três partes iguais.

• Vamos ver outras situações em que coisas inteiras têm de ser dividida
Usando seu lápis, você deve mostrar como se faz a divisão.

a) No desenho, você vê 2 sanduíches. Quatro amigos estão com fome. Mostre como dividir igualmente os sanduíches entre eles, fazendo apenas um corte em cada sanduíche.

b) Agora, é a sobremesa dos 4 amigos: uma torta de limão. Divida a torta igualmente entre eles.

Figura 13 Atividade 1 da 1ª sessão da sequência didática
Fonte: Imenes et al (2007, p.130)

c. **Variável(is) didática(s) e os possíveis efeitos didáticos**

- Dimensionalidade das figuras – os autores optam pela utilização das formas planas poligonais para representar o sanduíche (quadrado), a barra de chocolate e torta (retângulo). Neste caso, a maioria dos alunos possivelmente não deverá apresentar qualquer dificuldade para demonstrar o modo como dividirão o inteiro em quatro partes iguais, mesmo que não tenham compreendido a noção de fração porque os autores exploram propriedades dos polígonos que os alunos conhecem, nesse caso o quadrado e o retângulo.

- Um dos valores da variável diz respeito à noção de fração atrelada à existência de uma totalidade divisível. O inteiro pode ser decomposto em partes iguais, de forma a esgotá-lo (sem que haja resíduos). É necessário que o aluno perceba que a ação de dividir não altera a totalidade do inteiro que poderá ser recomposto. E, neste caso, o aluno do 5º do Ensino Fundamental provavelmente consegue conservar uma quantidade ou uma grandeza, que no caso da atividade é de superfície.

- Outro valor da variável consiste no estabelecimento de relação entre a quantidade de cortes e a quantidade de partes. De acordo com este princípio a quantidade de partes que o inteiro deve ser dividido nem sempre é proporcional a quantidade de cortes. Por exemplo, para produzir metade do quadrado um corte é suficiente (A relação é 1 corte para cada duas partes). Enquanto para dividir um retângulo em quatro partes iguais serão necessários dois (dois para quatro), ou três cortes (três para quatro), conforme exibem as Figuras 14 e 15. Mas, alguns alunos poderão julgar que o número de partes obtidas é equivalente ao número de cortes efetuados na figura inteira.

- ✔ No item (a) desta atividade é solicitado ao aluno que ele mostre usando apenas lápis como dividir os sanduíches (quadrados) fazendo apenas um corte de modo que cada um dos quatro amigos receba uma “parte”. Destacamos que a variável de comando estabelecida pelos autores do livro didático praticamente elimina qualquer possibilidade de erro por parte do aluno. Neste caso, os autores apostam que a maioria dos alunos poderá seccionar o sanduíche pela diagonal. Não há instruções para o professor informando outras possibilidades, como a divisão a partir dos pontos médios dos lados paralelos dos quadrados (tanto na posição horizontal como vertical). As possíveis estratégias adotadas pelos alunos ao responderem a atividade podem ser observadas na Figura 14. Embora, a única solução esperada pelos autores é a divisão pelas diagonais do quadrado apresentada no item (A), provavelmente porque os vértices do polígono auxiliariam na percepção da equivalência entre as partes (metades), de cada sanduíche (quadrado).acreditamos que a demanda maior de respostas deverá ser as correspondentes aos itens (B) e (C) da Figura 14, pois os alunos tenderão a reproduzir as divisões que presenciam no seu cotidiano. Uma vez que, não é algo comum na população de baixa renda consumo de pães de forma. Além disso, é pouco frequente divisão pelos cantos (vértices), que não estão presentes em outros formatos desse alimento.

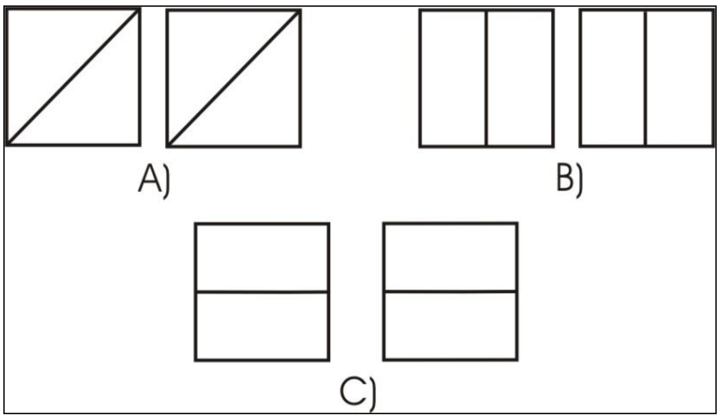


Figura 14: Possíveis estratégias mobilizadas na divisão do inteiro (sanduíches)

- Ainda com relação ao item (a) da atividade 1, ressaltamos que os autores optaram por representar o inteiro com dois sanduíches ao invés de utilizar apenas um. No nosso ponto de vista, essa escolha poderá ocasionar dúvida quanto à fração que cada um dos quatro amigos recebeu. Pois, a fração obtida por cada amigo corresponde à metade de cada sanduíche e, ao mesmo tempo a um quarto do total de sanduíches. Portanto, essa escolha dos autores rompeu com o objetivo da atividade ao invés de apresentar a fração resultante da divisão de um único inteiro contínuo em partes iguais ao propor a divisão dos inteiros contínuos, que neste caso específico, funcionam como uma quantidade discreta: 2 unidades de sanduíches.

- No item (b) os autores alteraram o contexto, mas, seguem sugerindo a mesma divisão em quatro partes “iguais” dos inteiros contínuos (quadrados que representam dois sanduíches), porém com apenas um inteiro também contínuo (retângulo que representa uma torta de limão). Nesta atividade, os autores não manipulam a variável: formas planas poligonais para representar o inteiro contínuo, nem tão pouco interferem no valor da variável: divisão do polígono em quatro partes iguais. Em compensação não definem a quantidade de cortes que devem ser feitos na figura para que a torta seja dividida entre os quatro amigos de modo equitativo. Conseqüentemente, é possível o surgimento de várias soluções. Porém, na Figura 15 estão representadas as repostas que acreditamos aparecerão nos protocolos dos alunos com mais frequência devido à reprodução de práticas usuais do cotidiano dos mesmos.

- No entanto, ao dividir o retângulo, que representa a torta de limão, por meio do traçado das suas diagonais, conforme ilustra o item (D) da Figura 15, produzirá as frações (regiões triangulares) 1 e 2 do polígono. Ambas as regiões mencionadas possuem a mesma área. No entanto, o fato dos triângulos não serem semelhantes poderá dificultar a comparação entre as partes e a conclusão de que as frações do retângulo são equivalentes/congruentes. Apesar disso, é possível que a solução (D) seja apresentada por alguns alunos embora que de forma intuitiva. Ou seja, acreditamos que ao seccionar o retângulo unindo suas diagonais o aluno percebe que as frações 1 e 2 são regiões triangulares distintas. Mas, em contrapartida é pouco provável que os alunos reconheçam essas frações como áreas equivalentes. Ainda em relação às considerações anteriores, independentemente do trabalho ser realizado individualmente ou em grupo, não acreditamos que os alunos questionem o fato das frações 1 e 2, do item (D) da Figura 15, serem equivalentes mesmo apresentando formatos ou superfícies distintas. Mesmo sabendo que as variáveis utilizadas pelos autores nessa atividade condicionam as estratégias na divisão do inteiro contínuo (polígonos), em frações "iguais" (equivalentes). Neste item, os autores esperam que a maioria dos alunos apresente a solução ilustrada no item (B) da Figura 15, possivelmente porque no dia a dia as pessoas costumam dividir um bolo ou uma torta em fatias. E, justamente por essa prática comum no cotidiano das pessoas acreditamos que os alunos poderão apresentar soluções que correspondem a frações equivalentes à fração ¼ por meio da subdivisão dos retângulos dos itens A, B e C da Figura 15.

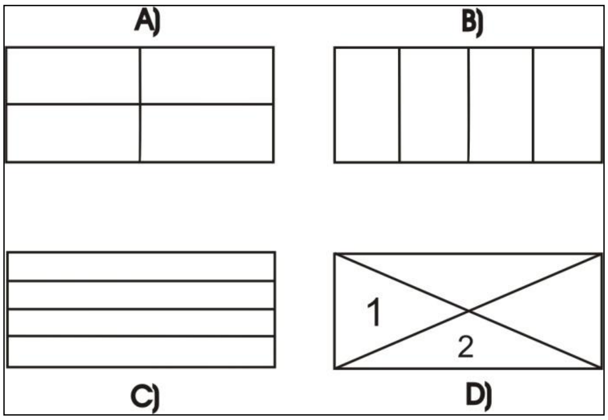


Figura 15: Possíveis estratégias mobilizadas na divisão do inteiro (torta)

d. Possíveis estratégias mobilizadas pelos alunos durante o processo de resolução

(i) ***No item (a)*** – Ao realizar a divisão dos sanduíches, que são representados por uma região poligonal quadrada, fazendo um único corte em cada polígono (variável de comando), os alunos poderão:

- Dividir os quadrados traçando as diagonais de modo que estabeleçam a união dos vértices opostos.
- Dividir os quadrados unindo os pontos médios dos lados paralelos traçando um segmento de reta na posição horizontal.
- Dividir os quadrados unindo os pontos médios dos lados paralelos traçando um segmento de reta na posição vertical.

(ii) ***No item (b)*** – Nesse caso, a variável de comando consiste em realizar a divisão do inteiro (uma torta representada por uma região poligonal retangular), para quatro pessoas sem

limitar o número de cortes são várias as possibilidades de realizar a divisão. Assim sendo que está os alunos poderão:

1. **Fazendo 2 cortes**

- Dividir o retângulo em quatro partes equivalentes entre si traçando segmentos de reta concorrentes, que unem os pontos médios dos lados opostos, na posição vertical e horizontal.

- Unindo os vértices opostos de modo a obter as diagonais do retângulo.

2. **Fazendo 3 cortes**

- Traçando três segmentos de reta equidistantes na posição vertical.

- Traçando três segmentos de reta equidistantes na posição horizontal.

3. **Fazendo mais de 3 cortes**

- Traçando três segmentos de reta equidistantes na posição horizontal sobre os quais é traçado outro segmento de reta que une os pontos médios na posição vertical obtendo assim oito frações equivalentes do retângulo. Portanto, as divisões com quatro, cinco ou mais cortes resultam das subdivisões dos retângulos que ilustram a Figura 15.

- Dividir o retângulo em quatro porções “iguais” ou equivalentes satisfaz a variável de comando. Mas, como ou autores do livro didático não definem quantos cortes poderão ser feitos é possível, mas pouco provável, que os alunos obtenham frações equivalentes a um quarto $\frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \ldots$ por exemplo. Tal estratégia poderá ser mobilizada por alguns alunos porque no dia a dia as pessoas costumam fazer um maior número de fatias de um bolo, por exemplo.

Atividades [2] e [3]

Figura 16: Atividade 2 da 1ª sessão da sequência didática
Fonte: Imenes et al (2007, p.130)

a. Descrição: Na atividade 2 da sequência didática (apresentada na Figura 16), os autores sugerem que o aluno fique atento à ilustração. A ilustração corresponde a uma história em quadrinhos em que a personagem, uma professora, faz alusão à idéia de meio ou metade como resultado da divisão em duas partes iguais. Analogamente, a personagem dos quadrinhos faz comentários sobre as frações um terço e um quarto, como frações do inteiro resultantes da divisão por 3 e 4 respectivamente. Ao mesmo tempo em que introduz a nomenclatura e a notação específica das frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ do inteiro solicita do aluno associações e conversões entre os diferentes registros de representação (pictórica, linguagem natural e simbólica), dessas frações nos exercícios 1, 2 e 3.

b. Objetivo(s)

- Promover a associações que possibilitem que o aluno realize conversões entre os vários registros de representação do número racional. Ou seja, a representação da fração na forma pictórica (figuras, desenhos, etc.), a nomenclatura e notação das frações que correspondem à metade, um terço e um quarto.

c. Variável (is) didática(s) e os possíveis efeitos didáticos

- Utilizar as divisões do inteiro em 2, 3 e 4 partes iguais para introduzir a nomenclatura e a notação dessas frações. A escolha didática dos autores quanto ao contexto da atividade nos fornece elementos plausíveis da preocupação em resgatar o conhecimento prévio do aluno em relação às frações correspondentes à metade, um terço e um quarto que já foram exploradas nos volumes do 2º e 3º Ano da coleção.

- No entanto, de forma abrupta as atividades 1 e 2 forçam as conversões entre os registros de representação pictórica para o registro em linguagem natural e, consequentemente deste último para o registro simbólico fracionário com as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, através da observação das divisões realizadas na atividade 1. Neste caso, os efeitos decorrentes dessa proposta é o aluno considerar que cada indivíduo receberá uma parte ou um pedaço do sanduíche, da torta ou do chocolate. Pois, ao dispor ou repartir alimentos no dia a dia as pessoas costumam utilizar expressões ao invés de nomear as frações do inteiro equivalentes à $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$. Por outro lado, o fato da ilustração da atividade 2 nitidamente a nomenclatura correspondente as frações mencionadas isto poderá induzir o aluno às respostas esperadas nos itens (a), (b) e (c) da atividade 2.

- Ainda em relação à atividade anterior, a condição essencial para que o aluno considere as porções retiradas de uma totalidade divisível, que na atividade 1 correspondem a uma barra de chocolate, os sanduíches ou uma torta de limão, sejam vistas como frações do inteiro, requer a compreensão de que é necessário realizar a divisão equitativa havendo assim o esgotamento desse inteiro. Portanto, a repartição do inteiro não poderá deixar resíduos, ou seja, porções com tamanhos diferentes daqueles inicialmente retirados do inteiro. No entanto, Lima (2005) afirma que é frequente, entre as crianças a permanência de resíduos depois de partir o inteiro em determinado número de partes.

- A ilustração que antecede os questionamentos propostos nas atividades 2 induz às respostas esperadas pelos autores para cada uma dos itens das atividades. O texto introdutório da atividade 1 diz que a barra de chocolate foi dividida em três partes iguais. E, no segundo quadrinho da atividade 2, afirma-se que dividindo em três partes iguais cada parte é um terço. Dessa forma, cabe ao aluno transferir a nomenclatura fornecida na história em quadrinhos para responder aos questionamentos sobre as divisões da barra de chocolate, dos sanduíches e da torta de limão, nos itens (a), (b) e (c) da atividade 2. Possivelmente a intenção é a minimização dos erros por parte dos alunos.

- Analogamente, o enunciado da atividade 3 também induz a notação correta, pois exibe a notação das frações correspondentes à metade e a um terço e solicita que o aluno mostre como é a representação da fração um quarto. Assim sendo, os alunos automaticamente expressarão a notação correta, pois perceberão que o registro da metade corresponde a um sobre o tracinho e dois sob o tracinho. Assim como, o registro da fração um terço equivale a um sobre o traço da fração e três sob esse mesmo traço. Consequentemente, a notação da fração um quarto só pode ser um sobre quatro.

d. Possíveis estratégias mobilizadas pelos alunos durante o processo de resolução

(i) Em relação à Atividade 2

- Como podemos perceber na semântica do enunciado da atividade 2, mais precisamente nas variáveis de comando dos itens: (a) *"*[...] *qual foi a parte de cada um?",* (b) *"Que parte*[...]*"* e (c) "[...] *Que parte cada amigo recebeu?"*, a palavra **parte** aparece diversas vezes. Assim sendo, acreditamos que o efeito resultante dessa variável é a repetição dessa palavra ou de sinônimos nas respostas que poderão ser apresentadas pelo aluno para os itens que compõem esta atividade*: "cada um dos amigos recebeu..."* ***uma parte****,* ***uma fatia****, ou* ***um pedaço.*** Vale salientar que esta resposta poderá aparecer em qualquer item da atividade 2.

- No item (a), a resposta esperada pelos autores, é que os alunos efetuem o registro da fração em linguagem natural: um terço. O texto apresenta uma situação em que três pessoas precisam dividir uma única barra de chocolate. Em seguida, fornece instantaneamente a solução para o problema: "a barra será dividida em três partes iguais". Com isso, espera-se que os alunos associem o contexto da situação à notação da fração correspondente. Ou seja, a expectativa é que cheguem à conclusão de que inteiro foi dividido em partes iguais e a parte que cada amigo recebeu corresponde a uma parte do total de três partes, e, portanto a um terço.

- No item (b), os autores consideram apenas que a maioria dos alunos vai registrar em linguagem natural a fração metade ou um meio de cada sanduíche. No entanto, é possível que alguns alunos apresentem como resposta a fração um quarto do total de sanduíches porque neste caso o inteiro corresponde a dois sanduíches que foram divididos ao meio.

- No item (c) a expectativa dos autores incide na apresentação da fração um quarto em linguagem natural como resposta para este item. Acreditamos que a maioria dos alunos apresentará esta resposta. Todavia, como a quantidade de cortes não foi determinada pelos autores, possivelmente podem surgir respostas diversas, principalmente correspondentes às frações equivalentes a fração um quarto.

(ii) Em relação à atividade 3

- A forma como o enunciado apresenta o registro simbólico fracionário relativo às frações um meio e um terço a possibilidade de erro por parte do aluno ao efetuar a representação da fração um quarto é praticamente reduzida à zero.

- A variável de comando *"mostre como é..."* poderá induzir o aluno a apresentar o registro pictórico da fração um quarto, pois o aluno é solicitado a efetuar a divisão do inteiro nos itens (a) e (b) da atividade 1.

Atividade [4]

a. Descrição: A atividade 4, apresentada na Figura 17, contém introdutoriamente um texto cujo objetivo consiste em traçar um paralelo entre o significado das frações no cotidiano das pessoas e como objeto de estudo no da Matemática. O texto está ancorado a uma ilustração que contempla a divisão do inteiro contínuo (hexágono) ou discreto (coleção de selos) que exemplificam as informações expressas no texto. Esse mesmo texto visa também reforçar a linguagem matemática correspondente a nomenclatura de algumas frações associando a notação.

b. Objetivos

- Indicar partes de objetos ou quantidades[29]. No entanto, a atividade solicita do aluno a conversão entre diferentes registros de representação, como podemos observar na Figura 17:

---

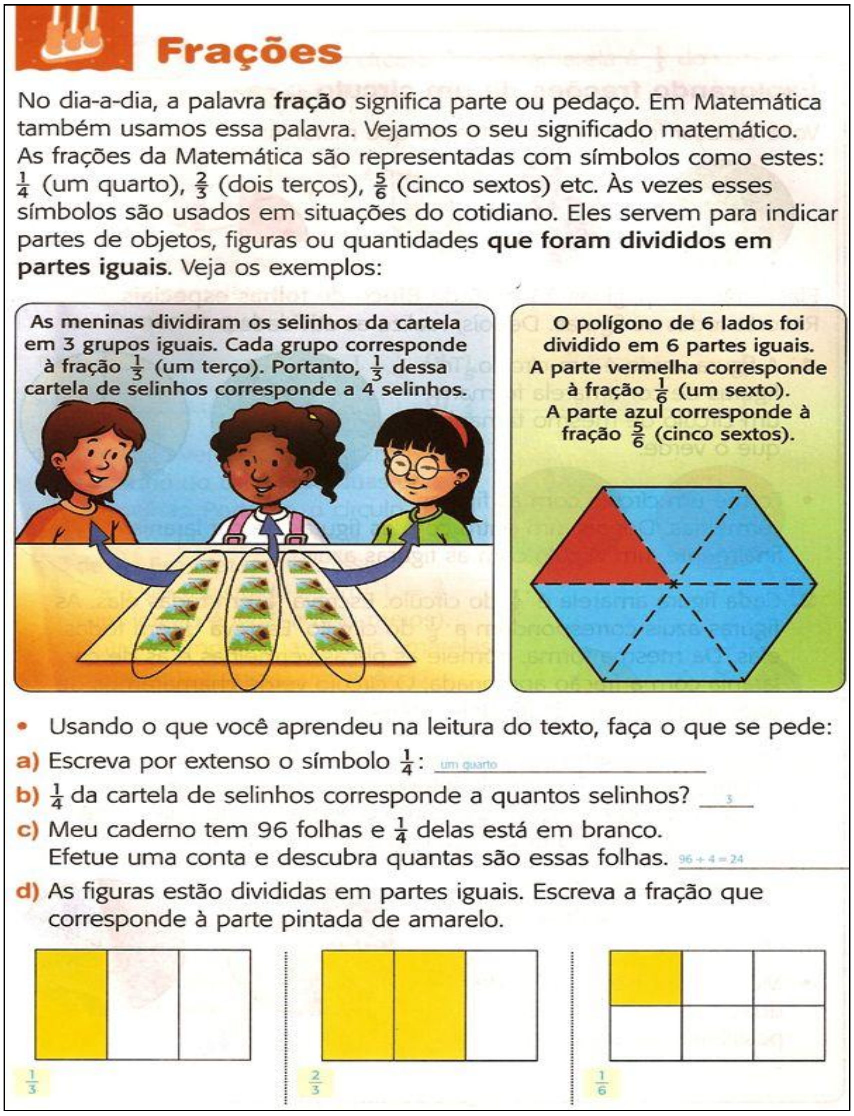
[29] Este objetivo foi definido pelos autores da Coleção Matemática Paratodos.

- O item (a) o registro de partida é fracionário e o de chegada em linguagem natural. Enquanto no item (d) o registro de partida é figural e o de chegada é fracionário.
- Nos itens (b) e (c) o aluno poderá descobrir frações do inteiro sugerido pelos autores mediante a relação entre a parte (fração unitária: $\frac{1}{4}$) e o todo (total de subconjuntos em que o inteiro foi dividido)

✔ Efetuar a divisão do inteiro discreto (coleção com 12 selos e 96 folhas de caderno), em quatro partes iguais.

c. Variável (is) didática(s) e os possíveis efeitos didáticos

✔ As alternativas (a), (b) e (c) referem-se à fração unitária um quarto. Mais uma vez a intenção didática dos autores consiste em resgatar as concepções dos alunos quanto às frações um meio, um terço e um quarto, independentemente do contexto. Além disso, evidenciamos que nos itens (b) e (c) para facilitar o trabalho do aluno, ao determinar um quarto de uma quantidade, os autores utilizam como valor da variável (um quarto), quantidades múltiplas de quatro. Dessa forma, as divisões a serem realizadas serão exatas.



Frações

No dia-a-dia, a palavra **fração** significa parte ou pedaço. Em Matemática também usamos essa palavra. Vejamos o seu significado matemático.
As frações da Matemática são representadas com símbolos como estes: $\frac{1}{4}$ (um quarto), $\frac{2}{3}$ (dois terços), $\frac{5}{6}$ (cinco sextos) etc. Às vezes esses símbolos são usados em situações do cotidiano. Eles servem para indicar partes de objetos, figuras ou quantidades **que foram divididos em partes iguais**. Veja os exemplos:

- Usando o que você aprendeu na leitura do texto, faça o que se pede:

a) Escreva por extenso o símbolo $\frac{1}{4}$: um quarto

b) $\frac{1}{4}$ da cartela de selinhos corresponde a quantos selinhos? 3

c) Meu caderno tem 96 folhas e $\frac{1}{4}$ delas está em branco.
Efetue uma conta e descubra quantas são essas folhas. $96 \div 4 = 24$

d) As figuras estão divididas em partes iguais. Escreva a fração que corresponde à parte pintada de amarelo.

Figura 17: Atividade 4 da sequência didática
Fonte: Imenes et al (2007, p.130)

- No item (a) o aluno deverá escrever a fração um quarto por extenso. E, provavelmente, ele o fará automaticamente, porque o texto que inicia a atividade trás o registro em linguagem natural e simbólico dessa fração. Nesse sentido, se o aluno ler o texto atentamente não deixará de realizar a atividade mesmo que não tenha sentido para ele. Além disso, os alunos estão familiarizados com este tipo de atividade porque tradicionalmente os livros didáticos exploram uma quantidade razoável de exercícios no qual a variável de comando consiste em escrever por extenso.

- O item (b) questiona sobre a quantidade de selos correspondente a fração um quarto. Outra divisão da coleção de selos aparece à esquerda da ilustração que serve como suporte do texto introdutório da atividade 2. O exemplo, contido nessa ilustração, reforça a relação parte/todo do número racional mediante a idéia de divisão. Para responder este item os alunos precisam realizar a divisão da dúzia em quatro partes iguais. E, o exemplo que mencionamos induz o aluno a utilizar como estratégia circular, quantidades iguais de selos, formando grupos que ao serem agrupados reconstituem a coleção.

- No item (c) a variável de comando é *"Efetue uma conta...".* Para tanto, o aluno deverá realizar o algoritmo da divisão para determinar um quarto da quantidade de folhas do caderno. Talvez a intenção dos autores, nesse item, consistem em possibilitar ao aluno o estabelecimento de associações entre o exemplo contido na ilustração e as solicitações dos itens (b) e (c). Como podemos perceber na ilustração para dividir a coleção os autores circularam a mesma quantidade de selos, obtendo 1/3 do total. Espera-se portanto, que de modo análogo possam obter ¼ de 12 e 96 unidades. No entanto, é pouco provável que os alunos resolvam corretamente os itens (c) e (b). Assim sendo, é provável que muitos alunos instigados pelo comando ("*Efetue uma conta*..."), realizem uma operação de adição, subtração ou multiplicação, com os dados do enunciado, exceto a divisão do inteiro.

- O contexto utilizado pelos autores para representar o inteiro de natureza discreta, a coleção de selos, nos parece inadequado porque na atualidade o hábito de colecionar selos caiu em desuso até entre pessoas adultas. Talvez, fosse mais plausível substituir o contexto utilizado para representar o inteiro de natureza discreta por coleções de miniaturas ou figurinhas de jogadores, por exemplo, atribuindo assim um sentido realístico para os alunos.

- No item (d) o inteiro volta a ser apresentado num contexto contínuo, e a variável didática mais uma vez presente na atividade para estabelecer a relação parte/todo é a utilização de formas planas poligonais. Neste caso, o retângulo foi dividido em três ou seis partes iguais. Assim como, o hexágono, do exemplo à direita da ilustração, foi utilizado para ilustrar o texto que antecede as atividades. Como já constatamos em algumas atividades que precedem o item (d) o enunciado reafirma a definição acerca do número racional fracionário e solicita o registro simbólico fracionário para representar as frações pintadas de amarelo em cada um dos três retângulos.

- O valor da variável atribuída pelos autores no item (d) tem a finalidade de introduzir a noção de equivalência de frações. Conjecturamos que essa cota da variável refere-se ao fato de que o total de partes do polígono, 3 e 6 respectivamente são múltiplos entre si. Está implícita, portanto a ideia de comparação e equivalência entre as áreas da região poligonal. Mais precisamente, em relação a terça e a sexta parte da superfície do retângulo, esta conexão possibilita verificar que a fração da área correspondente a sexta parte equivale à metade da fração relativa à terça parte da área dessa mesma figura geométrica. Mas, não acreditamos na mínima chance dos alunos atentarem para esse aspecto por conta própria, mesmo que o trabalho esteja sendo realizado em grupo. A não ser que haja, nesse caso, alguma intervenção do professor durante a aplicação da sequência didática.

d. Possíveis estratégias mobilizadas pelos alunos durante o processo de resolução

- No item (a) como mencionamos anteriormente a maioria dos alunos transcreverá o registro em linguagem natural, ou seja, a nomenclatura da fração solicitada presente no texto introdutório da atividade.

- No item (b) os alunos devem determinar a quantidade de selos equivalente a um quarto total de selos da cartela. O valor da variável definida pelos autores do livro didático tem como objetivo que os alunos dividam o total de selos (12), que é múltiplo de 3 e 4, e inicialmente foi dividido em 3 grupos composto por 4 selos, seja dividido em 4 grupos de 3 selos, que consiste na solução do problema.

- A expectativa é que a estratégia a ser mobilizada pelos alunos coincida com a sugerida no exemplo à esquerda da ilustração. Assim sendo eles poderão (re) dividir a quantidade de selos da cartela (12 unidades), exposta na ilustração, circulando quatro grupos com 3 selos em cada um. Mesmo porque a quantidade discreta da coleção é facilmente dividida utilizando o cálculo mental, muito estimulado neste nível do Ensino Fundamental. Por outro lado a probabilidade de que apresentem a solução expressando o algoritmo da divisão, ou seja, a conta efetuada é praticamente nula. Embora, a idéia de dividir seja mencionada desde a primeira atividade da sequência.

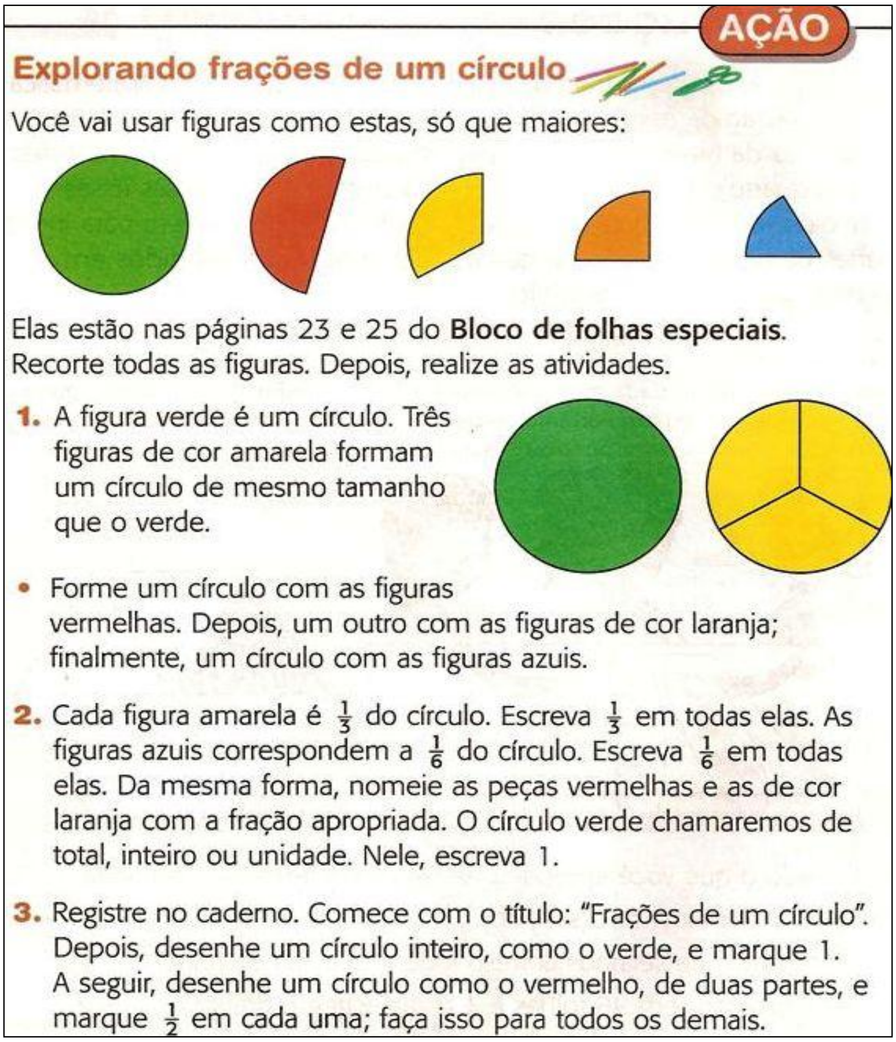
- A resolução do item (c) é similar à solução do item (b). Porém, os autores esperam o registro do algoritmo que representa a divisão do inteiro em partes iguais. A solicitação exige que o aluno se desvincule da estratégia de circular os elementos de um conjunto, portanto a variável de comando do item (c) difere do item anterior. Pelas razões que apresentamos ao nos referirmos no item anterior sobre a variável didática e o valor atribuído a mesma pelos autores do livro didático consideramos que a maioria dos alunos não conseguirá resolver o problema corretamente. A não ser que haja intervenções da professora ao pilotar a sequência. Outro fator a ser considerado é que nessa sequência didática predominam atividades em que o significado parte/todo do número racional é explorado nos contextos em que o inteiro é de natureza contínua; aspecto que poderá limitar a compreensão por parte do aluno.

- ✔ A ilustração que antecede as atividades e que exemplifica os argumentos apresentados no texto induz a solução da alternativa (d). Neste item espera-se que o aluno mobilize o que conhecimentos que já adquiriu para representar as frações do polígono (três retângulos com as mesmas dimensões), mediante a escrita em linguagem natural ou através da notação $\frac{a}{b}$, ou seja, pela utilização do registro simbólico fracionário. Mesmo que o aluno não tenha se apropriado do significado parte/todo do número racional e do modelo referente ao registro simbólico fracionário para representar as frações solicitadas, no item (d) da atividade 2, é suficiente observar e associar os exemplos contidos na ilustração e será capaz de transferir a notação $\frac{1}{3}$ (utilizada para representar os subconjuntos da coleção de selos), e $\frac{1}{6}$ (esta fração representa a parte colorida de vermelho no hexágono que compõe a ilustração). Ou seja, o aluno estará apenas reproduzindo o que lhe foi apresentado anteriormente e, além disso, não há garantias que a resposta apresentada tem significado para ele.

II) Análise a priori das atividades da 2ª Sessão – "AÇÃO: Explorando frações de um círculo"

Atividade [1], [2] e [3]

a. Descrição: A Figura 18 mostra a sequência de atividades iniciais do capítulo denominado: Ação. Vale salientar que para realizar as atividades dessa sessão foi disponibilizado para cada um dos dez grupos de alunos um material manipulativo conhecido como "as frações do círculo", que o livro didático trás nas folhas especiais para serem recortadas. Nesse bloco de atividade, que compõe a 2ª sessão da sequência didática, está implícito o princípio da invariância. Na atividade 1 cabe ao aluno a missão de descobrir novas possibilidades de recompor o inteiro contínuo (círculo) com frações de mesma cor. Por exemplo, duas frações vermelhas, ou seja, duas metades formam outro círculo idêntico ao círculo verde. Na atividade 2 os autores institucionalizam a relação entre a quantidade de partes e a notação fracionária correspondente a cada uma das frações do círculo. E, na atividade 3, a tarefa do aluno consiste em reproduzir os círculos construídos com o material concreto na ficha de atividades. Assim como, também deve transcrever o registro simbólico fracionário pertencente a cada fração do círculo para a ficha de atividades.



AÇÃO

Explorando frações de um círculo

Você vai usar figuras como estas, só que maiores:

Elas estão nas páginas 23 e 25 do **Bloco de folhas especiais**.
Recorte todas as figuras. Depois, realize as atividades.

1. A figura verde é um círculo. Três figuras de cor amarela formam um círculo de mesmo tamanho que o verde.

- Forme um círculo com as figuras vermelhas. Depois, um outro com as figuras de cor laranja; finalmente, um círculo com as figuras azuis.

2. Cada figura amarela é $\frac{1}{3}$ do círculo. Escreva $\frac{1}{3}$ em todas elas. As figuras azuis correspondem a $\frac{1}{6}$ do círculo. Escreva $\frac{1}{6}$ em todas elas. Da mesma forma, nomeie as peças vermelhas e as de cor laranja com a fração apropriada. O círculo verde chamaremos de total, inteiro ou unidade. Nele, escreva 1.

3. Registre no caderno. Comece com o título: "Frações de um círculo". Depois, desenhe um círculo inteiro, como o verde, e marque 1. A seguir, desenhe um círculo como o vermelho, de duas partes, e marque $\frac{1}{2}$ em cada uma; faça isso para todos os demais.

Figura 18: Atividades 1, 2 e 3 da 2ª sessão da sequência didática
Fonte: Imenes et al (2007, p.132)

b. Objetivos

- ✓ Compor o todo (círculos), de mesmo diâmetro, agrupando frações unitárias. Nesse caso, o aluno deveria juntar seções do círculo, de mesma cor: todas as seções vermelhas (1/2), amarelas (1/3), laranjas (1/4) ou azuis (1/6) (Atividade 1) para obter o inteiro contínuo.

- Registrar simultaneamente em linguagem pictórica e simbólica fracionária as construções realizadas com o material manipulativo. (Atividade 2 e 3)

c. Variável(is) didática(s) e os possíveis efeitos didáticos

- Diferentemente das atividades da 1ª sessão da sequência didática os autores utilização uma forma não poligonal plana (o círculo), para explorar o significado parte/todo do número racional. Com a qual os alunos familiarizar-se-ão por meio da manipulação do material concreto (frações do círculo).

d. Possíveis estratégias mobilizadas pelos alunos durante o processo de resolução

- A estratégia passível de adoção pela maioria dos alunos refere-se a separar as partes do círculo por cores (vermelhas, azuis, amarelas e laranjas), para através do método tentativa e erro ao compor círculos iguais ao verde (o inteiro). Dessa forma, a expectativa dos autores é que os alunos apresentem as seguintes soluções:
  1. *Um círculo constituído por duas metades (vermelhas)*
  2. *Um círculo constituído por três terços (amarelos)*
  3. *Um círculo constituído por quatro quartos (laranja)*
  4. *Um círculo constituído por seis sextos (azuis)*

- Com relação ao registro escrito das notações pertencentes a cada uma das frações do círculo, provavelmente não haverá nenhum obstáculo à realização da tarefa pelo aluno, uma vez que os autores institucionalizam no enunciado da atividade 2 e 3 como o mesmo deverá proceder para indicar as frações do círculo equivalentes à 1/2, 1/3 e 1/6. E, embora não expressem a fração um quarto (1/4), os alunos já tiveram acesso a notação correta nas atividades 1, 2, 3 e 4 da 1ª sessão. Portanto, a maioria deles terá êxito na resolução da atividade, mesmo que ainda não tenha progredido em suas aprendizagens com relação ao significado parte/todo do número racional.

Atividade [4]

a. Descrição: Nessa atividade, ilustrada na Figura 19, assim como na atividade anterior os autores deixam subentendido o princípio da invariância. Ao aluno cabe a missão de descobrir novas possibilidades de recompor o inteiro contínuo (círculo) com frações de mesma cor. Por exemplo, duas frações vermelhas, ou seja, compor outro círculo similar ao círculo verde usando duas metades.

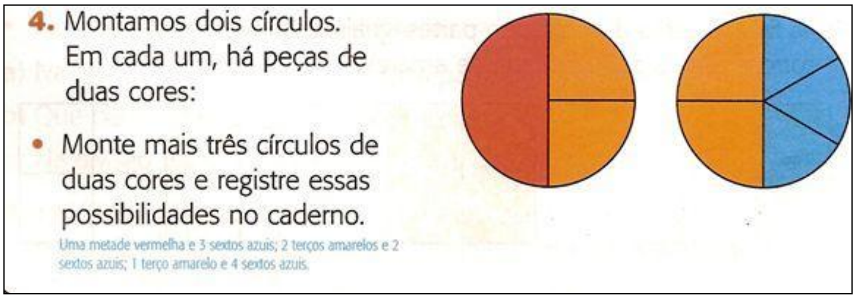


Figura 19: Atividade 4 da 2ª sessão da sequência didática
Fonte: Imenes et al (2007, p.132)

b. Objetivo

- Perceber que o todo (círculos de mesmo diâmetro) pode ser representado pela composição de diferentes frações.

c. Variável(is) didática(s) e os possíveis efeitos didáticos

- A escolha didática dos autores se mantém ao explorar, com material manipulativo, o significado parte/todo a partir da composição e decomposição do círculo, que consiste numa forma plana não-poligonal. Talvez o efeito decorrente dessa opção metodológica seja uma maior incidência de respostas corretas, independentemente da apropriação da relação parte/todo pelo aluno.

d. Possíveis estratégias mobilizadas pelos alunos durante o processo de resolução

- Os alunos dos grupos poderão discutir entre si sobre as possibilidades de formar novos círculos usando frações distintas formulando hipóteses, testando a eficácia dos procedimentos (as tentativas de construção) e a validação dessas hipóteses (ao obter respostas condizentes com a variável de comando: *"Monte três círculos de duas cores e registre no caderno",* tomando como referência as soluções à direita da ilustração que compõe a Figura 17. Dessa forma, é possível que na maioria das respostas dos alunos seja evidenciado o aparecimento de círculos compostos da seguinte forma:

(i) *Uma metade vermelha e três sextos azuis.*

(ii) *Dois terços amarelos e dois sextos azuis.*

(iii) *Um terço amarelo e quatro sextos azuis*

Atividade [5]

a. Descrição: Como podemos observar na Figura 18, a atividade 5 da segunda sessão da sequência didática, sugere que o aluno compare as frações do círculo manipuladas durante o desenvolvimento da atividade, a partir do modelo apresentado na introdução da atividade. Para tanto o aluno deverá expressar em linguagem natural se uma fração é maior ou menor que a outra.

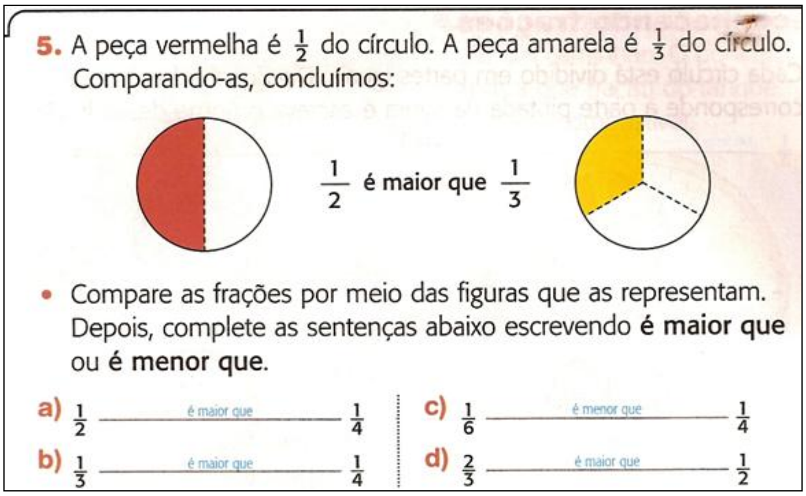


Figura 20: Atividades 5 da 2ª sessão da sequência didática
Fonte: Imenes et al (2007, p.133)

b. Objetivo

- Comparar frações (do círculo), usando as expressões "*é maior que*" ou "*é menor que*".

c. Variável(is) didática(s) e os possíveis efeitos didáticos

- A utilização do material manipulativo facilitará a atividade de comparação das frações do círculo pelo aluno. O estímulo a atividade de comparação das frações com denominadores iguais e numeradores diferentes bem como com numeradores iguais e denominadores diferentes favorece a compreensão de que quanto maior o número de partes iguais em que o inteiro é dividido, menores serão essas partes. Comparando frações, o aluno tem acesso ao conceito fundamental de equivalência.

- O uso de materiais manipulativos pode favorecer a compreensão dos conceitos matemáticos. Porém, as situações didáticas desenvolvidas em sala de aula, relativas ao ensino e a aprendizagem do número racional, neste caso específico das frações, devem ser diversificadas para que o aluno se desprenda das características do(s) material(is) manipulativo(s), evitando conceitos errôneos. De certo modo, esses conceitos equivocados podem surgir, por exemplo, quando o aluno só vê a aplicação e a representação de frações em situações muito limitadas, por exemplo: situações em que as frações ficam restritas à porções de pizzas ou chocolates. No caso da sequência didática analisada nesse estudo, as atividade do capítulo Ação “Explorando frações do círculo”, estão restritas à composição, decomposição, comparação e construção de equivalências com frações de círculos com as mesmas dimensões.

d. Possíveis estratégias mobilizadas pelos alunos durante o processo de resolução

- Na atividade 5 pode ocorrer dos alunos ao apresentarem suas respostas utilizarem os símbolos > (maior que) ou < (menor que) ao invés da linguagem natural ao comparar as frações do círculo. Pois, embora a teoria dos conjuntos tenha perdido espaço ou até mesmo sido abolidas nos livros didáticos e nas bases curriculares, ainda resiste na prática de alguns professores dos primeiros anos do Ensino Fundamental. Aspectos como correspondência biunívoca, pertinência, com elementos de conjuntos ainda são abordados. E, consequentemente a simbologia inerente a esse objeto de estudo entra em cena nesse jogo.

- É possível que ao responder a atividade os alunos dos grupos utilizem como estratégia a sobreposição das frações do círculo, com o material manipulativo, na atividade de comparação obtendo assim as soluções esperadas pelos autores do livro didático.

- Porém, se forem desconsideradas as peças do material manipulativo e a referência for apenas os registros simbólicos fracionários apresentados nos itens (a), (b), (c) e (d), da atividade, pois quando comparam frações os alunos provavelmente cometem alguns equívocos, ao considerar as seguintes hipóteses em relação aos termos das frações:

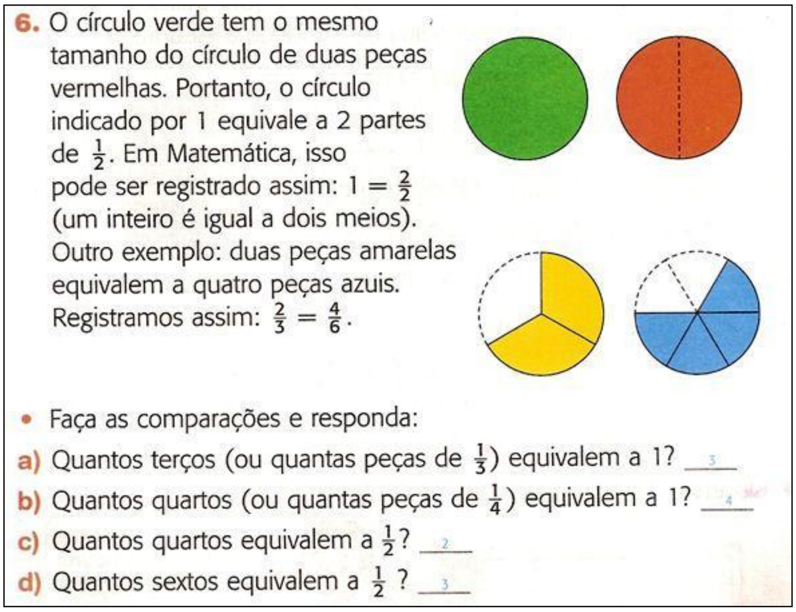
  (i) *Quando os numeradores são iguais e os denominadores são diferentes* (itens a, b e c) – Os alunos acreditam que a fração cujo denominador é representado por um algarismo de valor absoluto maior, esta corresponde a uma porção maior que a outra.

  (ii) *Quando os denominadores são iguais e os numeradores são diferentes* o efeito é contrário ao anterior. Ou seja, a fração é maior que a outra fração se o numerador está representado por um algarismo de maior valor absoluto.

  (iii) *Quando numeradores e denominadores são diferentes é provável que afirmem que a fração é maior que a outra caso o numerador e o denominador apresentam algarismos de maior valor absoluto em relação a outra fração.5*

As interpretações errôneas, citadas anteriormente, que frequentemente emergem na atividade de comparar frações advêm do fato dos alunos não compreenderem a fração como um número em sua essência. Mas, como dois números distintos o numerador e o denominador da fração quando estes algarismos são os termos que possibilitam a representação simbólica do significado parte/todo do número racional.

Atividade [6]


6. O círculo verde tem o mesmo tamanho do círculo de duas peças vermelhas. Portanto, o círculo indicado por 1 equivale a 2 partes de $\frac{1}{2}$. Em Matemática, isso pode ser registrado assim: $1 = \frac{2}{2}$ (um inteiro é igual a dois meios). Outro exemplo: duas peças amarelas equivalem a quatro peças azuis. Registramos assim: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.

- Faça as comparações e responda:

a) Quantos terços (ou quantas peças de $\frac{1}{3}$) equivalem a 1? 3

b) Quantos quartos (ou quantas peças de $\frac{1}{4}$) equivalem a 1? 4

c) Quantos quartos equivalem a $\frac{1}{2}$? 2

d) Quantos sextos equivalem a $\frac{1}{2}$? 3

Figura 21: Atividades 6 da 2ª sessão da sequência didática
Fonte: Imenes et al (2007, p.133)

a. Descrição: O propósito da atividade 6, como ilustra a Figura 21, consiste em dois aspectos: o primeiro objetiva reforçar o significado parte/todo com uma grandeza contínua (nos itens a e b), e o segundo possibilitar o estabelecimento de relação de equivalência entre as frações do inteiro (nos itens c e d). Mais precisamente à metade do círculo por meio da observação e da comparação das secções do círculo disponibilizadas (material manipulativo). De modo análogo ao modelo que introduz a atividade para o aluno.

b. Objetivo

✔ Estabelecer relações de equivalência entre frações.

c. Variável(is) didática(s) e os possíveis efeitos didáticos

✔ Os autores optam por abordar a relação parte/todo através das atividades de comparação e equivalência entre as frações do círculo (inteiro contínuo). Pelo fato dos alunos terem manipulado as frações do círculo concretamente a expectativa é a de que sejam capazes de perceber frações equivalentes ao inteiro e à metade do círculo.

- ✔ As subdivisões nos círculos que compõem a ilustração, que serve como suporte do texto que enuncia a atividade, sugere o procedimento a ser adotado pelo aluno. Ou seja, compete ao aluno, por exemplo, montar um círculo usando apenas as peças amarelas para responder o item (b) e (c). Ou simplesmente, observar o desenho do círculo subdividido em quatro partes iguais e a notação que foram registrados na atividade 3 dessa sessão. Porém, é possível que algum aluno subdivida o círculo vermelho traçando um segmento de reta horizontal para responder os itens aos quais nos referimos.

- ✔ Na atividade 6, as subdivisões dos círculos: vermelho e amarelo induzem o aluno as resposta correta em todos os itens que compõem a atividade. É suficiente que aluno observe que um dos círculos é composto por três terços. A “olho nu” o círculo vermelho poderá ser repartido mais uma vez ao meio de modo que se obtém quatro quartos, respondendo automaticamente os itens (b) e (c). Assim como, uma das metades do círculo colorida de vermelho ao ser associada com o círculo que possui frações na cor azul, facilmente conduzem a solução do item (d).

d. Possíveis estratégias mobilizadas pelos alunos durante o processo de resolução

- ✔ As estratégias da maioria dos alunos que os conduzirão as repostas bem ou mal sucedidas possivelmente estarão pautadas na: composição e decomposição dos círculos, na associação entre os modelos sugeridos na ilustração da atividade, ou ainda na análise dos registros realizados em outras atividades precedentes. Mesmo sem que haja significado ou apropriação concernente à equivalência de frações.

Atividade [7]

a. Descrição: Na atividade, ilustrada na Figura 22, os autores sugerem que o aluno consulte os registros pictóricos das frações dos círculos, contidos na ficha de atividades e voltem a desenhar as igualdades dos itens (a) e (b). Neste caso, a atividade solicita do aluno a validação das classes de equivalência sugeridas por meio da conversão do registro fracionário para o registro figural.

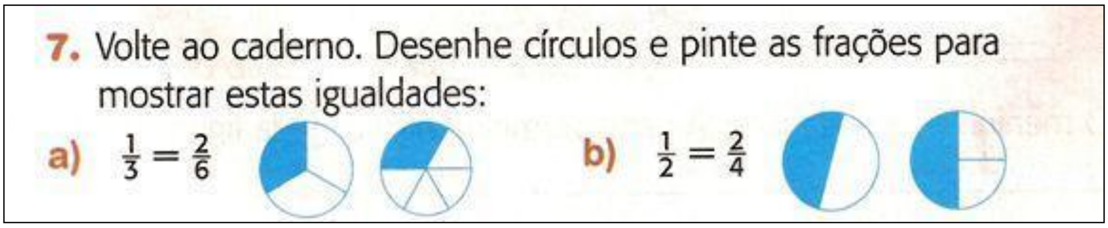


Figura 22: Atividade 7 da 2ª sessão da sequência didática
Fonte: Imenes et al (2007, p.133)

b. Objetivo

- Representar a relação de equivalência entre frações.

c. Variável(is) Didática(s) e os possíveis efeitos didáticos

- O estudo da relação de equivalência nas atividades, que integram a sequência didática analisada, tem seu ponto de partida com as frações relativas a um terço e a um meio da região circular. Provavelmente, porque os alunos já tiveram acesso a tais frações desde o início da escolaridade e, este aspecto denota que o aprofundamento com relação às propriedades relativas aos racionais teria aí uma maior facilidade.

d. Possíveis estratégias mobilizadas pelos alunos durante o processo de resolução

- Os autores sugerem que os alunos desenhem os círculos a mão livre ou com o auxílio de uma moeda para representar a igualdades de frações. Possivelmente, a maioria dos alunos repetirá o registro pictórico das frações correspondentes à metade e a terça parte da região circular. Em seguida, provavelmente deverão comparar as frações solicitadas (2/6 e 2/4), com aquelas das quais já dispõe do registro pictórico na ficha de atividades, para enfim representar as igualdades dos itens (a) e (b) da atividade.

III) Análise a priori da 3ª SESSÃO - "Reconhecendo frações"

Atividade [5]

a. Descrição: Parece-nos importante ressaltar que essa atividade, ilustrada na Figura 23, foi precedida de outra, denominada "Explorando frações de um círculo", com a utilização de material de manipulação. Após a manipulação das frações do círculo, correspondentes às metades, terços, quartos e sextos, os autores resgatam através da atividade 5, a relação parte/todo no contexto contínuo utilizando mais uma vez uma forma não poligonal (círculo). A atividade requer do aluno a realização das conversões do registro pictórico para o registro em linguagem natural e simbólica numérica (fracionária).

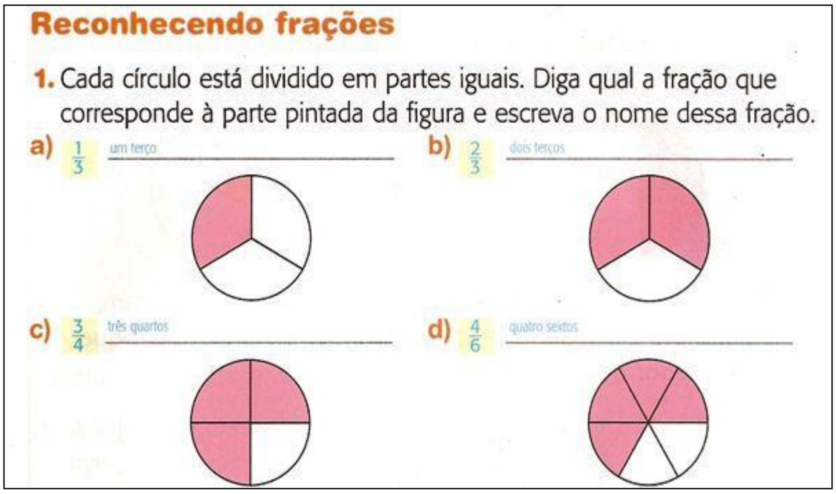


Figura 23: Atividade 5 da 3ª sessão da sequência didática
Fonte: Imenes et al (2007, p.134)

b. Objetivo(s)

- Realizar conversões entre os registros de representação do número racional.
- Representar por meio do registro simbólico (numérico fracionário) e em linguagem natural as frações do círculo.

c. Variável(is) didática(s) e os possíveis efeitos didáticos

- Uma "das variáveis presentes nessa atividade consiste na utilização de uma forma plana não poligonal, neste caso o círculo", utilizada para resgatar o significado parte/todo do número racional no contexto contínuo. Possivelmente, outra intenção didática dos autores reside na possibilidade do professor retomar aspectos como comparação e equivalência com as frações do círculo que foram exploradas nas atividades que compõem a primeira etapa da segunda sessão (Ação).

- Nesta atividade o aluno é convidado a converter o registro pictórico das frações em linguagem natural e em registro simbólico fracionário. No entanto, o aluno já teve acesso a ambos os registros das frações do círculo nas atividades 3 e 6 da 2ª Sessão (Ação). Portanto, os registros referentes aos itens (a), (b), e (d), correspondentes as frações um terço, dois terços e quatro sextos foram disponibilizados ao aluno anteriormente. E, agora são solicitados.

- Outra variável didática intrínseca à atividade é o uso das frações resultantes da divisão do inteiro contínuo em 3, 4 ou 6 porções idênticas. Essa escolha dos autores permite que o professor resgate a memória didática, em relação a outras atividades desenvolvidas anteriormente, o que facilitaria o trabalho do aluno.

d. Possíveis estratégias mobilizadas pelos alunos durante o processo de resolução

- Partindo do pressuposto que o aluno progrediu em suas aprendizagens, sobre o significado parte/todo do número racional, e vivenciou a situação didática anterior (AÇÃO), explorando satisfatoriamente o material manipulativo oferecido para resolver as atividades da 2ª sessão, é possível que este apresente as respostas esperadas nos quatro itens sugeridos.

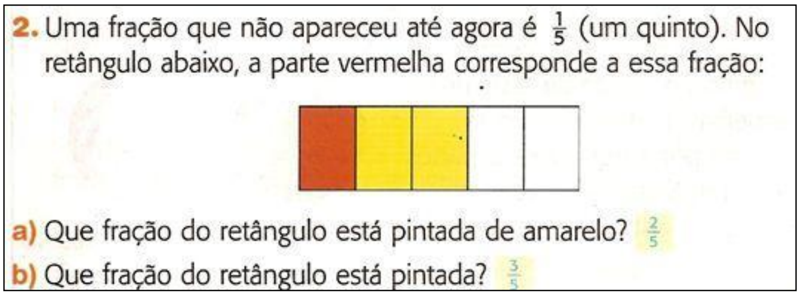
- Diante do fato das frações, para as quais os alunos devem apresentar a nomenclatura e a notação específica, já terem sido explicitadas nos enunciados de algumas atividades que precedem a tarefa atual destacamos que independente da dificuldade inerente as conversões exigidas. A frequência de respostas adequadas atenderá as expectativas dos autores do livro didático, mesmo que a maioria deles não apresente a compreensão do significado parte/todo do número racional.

- No entanto, o sentido das conversões solicitadas na atividade (linguagem pictórica→linguagem simbólica fracionária→linguagem natural), oferece várias dificuldades. Uma delas refere-se à notação das frações caso o professor não tenha institucionalizado a ordem dos termos (numerador e denominador), os alunos poderão inverter a posição dos mesmos ao apresentar as respostas para os itens propostos na atividade. Além disso, podem ser frequentes as respostas já descritas na literatura, na qual o aluno ao constituir a notação das frações, utiliza como termos a quantidade de partes pintadas e não pintadas, não necessariamente nessa ordem. Ao invés de representar o numerador com a quantidade de partes pintadas e o denominador com o total de partes que o inteiro foi dividido.

- Para nomear as frações o aluno deverá dispor das regras que permitem a atribuição de uma nomenclatura. Por exemplo, ao ler dar nome a uma fração, o aluno precisa saber que primeiro lê-se o numerador em seguida observa-se o denominador, caso o denominador seja dois (meios) de 3 a 10 (lê-se o número ordinal, quartos, quintos e assim por diante), entre 11 e 99 (lê-se o numeral cardinal acrescentado da palavra avos), e o denominador da fração for uma centena ou a milhar lê-se centésimo(s) e milésimo(s), respectivamente. E, para que o aluno se aproprie da gama de regras que possibilitam atribuir nomes as frações é necessária a intervenção do professor.

Atividade [6]

a. Descrição: A atividade 6, ilustrada na Figura 24, tem como objetivo introduzir a fração um quinto reforçando o significado parte/todo do número racional. Assim como, em outras atividades isto ocorre mediante a divisão do inteiro contínuo em partes iguais. Por outro lado, a atividade propõe o exercício da conversão entre registros de representação no seguinte sentido: linguagem pictórica→ linguagem simbólica fracionária.


2. Uma fração que não apareceu até agora é $\frac{1}{5}$ (um quinto). No retângulo abaixo, a parte vermelha corresponde a essa fração:

a) Que fração do retângulo está pintada de amarelo? $\frac{2}{5}$

b) Que fração do retângulo está pintada? $\frac{3}{5}$

Figura 24: Atividade 6 da 3ª sessão da sequência didática
Fonte: Imenes et al (2007, p.134)

b. Objetivo(s)

- ✔ Realizar a conversão do registro pictórico do número racional para o registro simbólico fracionário.

c. Variável(is) didática(s) e os possíveis efeitos didáticos

- ✔ As variáveis utilizadas pelos autores do livro didático nessa atividade se mantêm. Estamos nos referindo à dimensionalidade das figuras geométricas planas bidimensionais5 e ao contexto contínuo para ilustrar a relação parte/todo. Estes por sua vez recorrem às formas planas que são bidimensionais.

- ✔ Ainda em relação à forma poligonal retangular das atividades 1 e 2 é mais uma vez utilizada na atividade 5. Talvez pela familiaridade com a forma retangular os alunos não apresentem dificuldade para responder os questionamentos dos itens propostos na atividade.

d. Possíveis estratégias mobilizadas pelos alunos durante o processo de resolução

- Assim como na atividade 5, o sentido das conversões (linguagem pictórica→linguagem simbólica fracionária→linguagem natural). Portanto, é provável que as dificuldades e equívocos nas estratégias mobilizadas pelos alunos também sejam as mesmas. Consequentemente, os erros cometidos por eles na atividade anterior deverão ser recorrentes ao responder esta atividade 6. Os equívocos aos quais nos referimos são aqueles que poderão vir a ocorrer durante o processo de resolução são os mesmos descritos na atividade 5 em relação ao registro simbólico fracionário, pois as atividades 5 e 6 são similares.

Atividade [7]

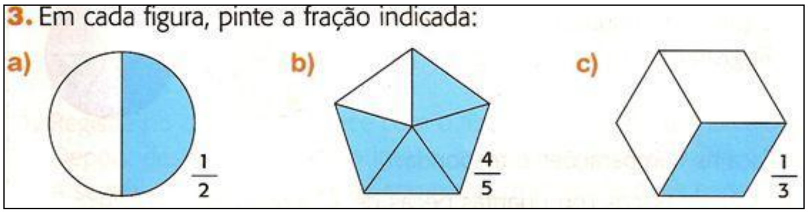


Figura 25: Atividade 7 da 3ª sessão da sequência didática
Fonte: Imenes et al (2007, p.134)

a. Descrição: A atividade 7, a qual expomos na Figura 25, apresenta três formas geométricas que já se encontram divididas em partes iguais. Nesse caso, cabe ao aluno colorir na figura a fração indicada no registro simbólico fracionário.

b. Objetivo

- Converter do registro simbólico fracionário para o registro em linguagem pictórica.

c. Variável(is) didática(s) e os possíveis efeitos didáticos

- Como já dissemos anteriormente os autores optam mais uma vez por figuras bidimensionais: o círculo, o pentágono e o hexágono para explorar a relação parte/todo no contexto contínuo.
- Outra escolha didática dos autores, presente também na atividade 7, consiste na utilização periódica das frações correspondentes à metade e a terça parte do inteiro. Estas frações aparecem em praticamente todas as atividades que integram a sequência didática extraída do livro didático.

d. Possíveis estratégias mobilizadas pelos alunos durante o processo de resolução

- Como podemos perceber na Figura 25 as soluções esperadas pelos autores do livro didático são aquelas ilustradas nos itens que compõem a atividade 7. O fato das formas geométricas estarem divididas possivelmente reduzirá a incidência de erros no sentido das conversões proposta nesta atividade. Pois, por estarem divididas o aluno poderá relacionar o denominador ao número de partes em que o inteiro foi dividido. Em consequência disso, poderá deduzir que a quantidade de partes a colorir correspondente ao numerador mesmo que não tenha se apropriado dos diferentes registros de representação concernentes aos números racionais sugeridos na atividade. Por este motivo, acreditamos que a maioria dos alunos adotará esta estratégia ao responder o item (b), embora a fração quatro quintos não tenha aparecido em nenhum contexto

- Após realizar diversas atividades com frações do círculo, todos com diâmetros aproximadamente iguais, é provável que a maioria dos alunos pinte metade do círculo corretamente no item (a).

- No item (c) a forma geométrica (hexágono), embora esteja na posição prototípica, assim como as demais formas poligonais utilizadas em toda a sequência didática, o modo como foi dividida parece não favorecer a identificação desse polígono. A repartição da região poligonal, nesse caso o hexágono, poderá ocasionar uma visualização ambígua. Pois, a figura poderá ser interpretada, pelo aluno, como sendo um sólido geométrico: o hexaedro, uma forma espacial ou tridimensional (a ilustração 2 da Figura 26), a qual é reconhecida pelos alunos como cubo. Ou ainda, como uma forma geométrica plana de seis lados: o hexágono (a ilustração 1 da Figura 26), uma vez que já foi utilizada pelos autores na atividade 4, para ilustrar a relação parte/todo no contexto contínuo.

- Ainda com relação ao item (c), caso os alunos não reconheçam o hexágono e interpretarem a forma ilustrada na atividade como sendo a vista lateral ou como um movimento rotacional do cubo (hexaedro), os conduzirá o raciocínio dos mesmos para o fato de que o cubo é um poliedro com seis faces iguais de formato quadrangular. E, mesmo que a posição do objeto geométrico não permita visualizar todas as faces é sabido que deverá colorir duas das seis faces do poliedro para representar $\frac{1}{3}$ do total de faces como exemplifica o fracionamento do hexágono (1) da Figura 26. Assim sendo, os alunos poderiam questionar por que a fração solicitada no item (c) da atividade é um terço e não dois sextos. E, portanto a ocorrência desse evento seria pertinente que a professora retomasse a noção de equivalência de frações. Essa hipótese seria descartada se o polígono estivesse decomposto em seis triângulos equiláteros. Mesmo tendo apresentado essa discussão a postura dos alunos não é questionadora e esses aspectos passarão despercebidos a não ser que a professora regente ao pilotar a sequência provoque a reflexão questionando os alunos ou intervindo diretamente na situação proposta no livro didático.

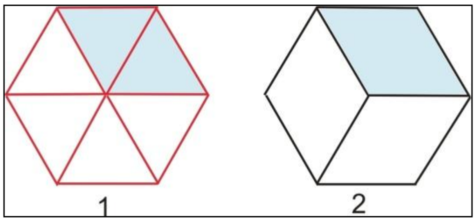


Figura 26: Exemplos da subdivisão do hexágono regular

- ✔ Caso os alunos apresentem a percepção desejada, pelos autores do livro didático, ou seja, que a figura geométrica do item (c) corresponde a um hexágono regular subdividido em três partes iguais. É pouco provável que o aluno deixe de colorir um terço do polígono.

Atividades [8]

Figura 27: Atividade 8 da 3ª Sessão da sequência didática
Fonte: Imenes et al (2007, p.134)

a. Descrição: A atividade 8 da sequência didática solicita a atenção dos alunos para a divisão do retângulo em quatro partes desproporcionais. Como podemos observar na Figura 27 a personagem da ilustração afirma que pintou um quarto da figura. Imediatamente, o enunciado informa que a personagem cometeu um equívoco e solicita do aluno uma justificativa para a afirmação fornecida.

b. Objetivo

- ✔ Perceber que as partes do todo devem ser “iguais” (equivalentes ou congruentes).

c. Variável(is) didática(s) e os possíveis efeitos

- A forma retangular aparece mais uma vez para resgatar o significado parte/todo do número racional no contexto contínuo. Possivelmente, os alunos reconhecerão prontamente a forma poligonal (retângulo), e a fração (um quarto). Ou seja, a representação pictórica e simbólica da fração um quarto. Por estas razões, o efeito resultante dessa variável será a apresentação de argumentos explicativos para o fato de que o personagem não dividiu o retângulo em partes iguais ou equivalentes.

d. Possíveis estratégias mobilizadas pelos alunos durante o processo de resolução

- É provável que a maioria dos alunos, após a observação e a análise comparativa das frações do retângulo, concluirá as porções resultantes da divisão não são iguais. Consequentemente, a resposta proveniente desse raciocínio estará alicerçada no argumento de que a parte vermelha não corresponde à quarta parte da figura geométrica porque o retângulo não foi dividido em partes iguais.

Atividade [9] e [10]

a. Descrição: As atividades 9 e 10, que compõem a sequência didática, apresentadas na Figura 28, utilizam como suporte duas ilustrações cuja finalidade consiste em auxiliar o aluno na ação de comparar e estimar frações de inteiros de natureza contínua: uma região retangular (área de um muro), e outra semicircular (o marcador de combustível de um automóvel).

Figura 28: Atividades 9 e 10 da 3ª sessão da sequência didática
Fonte: Imenes et al (2007, p.135)

b. Objetivo

- Estimar uma fração da área de uma região retangular (Atividade 9).
- Comparar frações do inteiro. (Atividades 9 e 10).

c. Variável(is) didática(s) e os possíveis efeitos didáticos

(i) Atividade 9

- A ilustração exibe um muro (retângulo), que representa o inteiro de natureza contínua, na qual a relação parte/todo é retomada. Os autores, provavelmente acreditam que após realizar seis atividades que exploram frações de uma região retangular os alunos têm condições de estimar a fração do muro que foi pintada de amarelo.

- Sendo que, em duas das cinco atividades que precedem a atividade 9, o retângulo foi dividido em três porções aproximadamente iguais. Mais precisamente na atividade 1 (barra de chocolate) e na atividade 4 (item d). Logo, este seria mais indício da intencionalidade dos autores na elaboração da sequência didática sobre o significado parte/todo do número racional com a utilização das frações que descendem das frações unitárias, neste caso a fração um terço. A consequência dessa variável seria minimizar a incidência de erro na ação a ser desenvolvida pelo aluno ao comparar as frações um quarto e dois terços.

- A tarefa de comparar os números racionais na representação fracionária tem seu ponto de partida com as frações: um meio, um terço e um quarto, as quais são facilmente reconhecidas pelos alunos e cujo significado já foi consolidado com a exploração em diversos contextos. Nas atividades que foram realizadas pelo aluno nas sessões anteriores foi institucionalizado pelos autores que as partes do inteiro devem ser iguais. Portanto, a fim de promover a comparação entre os números racionais mencionados ou entre frações correlatas, os autores estimulam o aluno a fazer estimativa ou aproximações possibilitando uma incidência maior de respostas corretas.

(ii) Atividade 10

- O jogo de cores utilizado pelos autores para indicar no odômetro frações do volume de combustível contido no tanque de um automóvel induz o aluno à contagem dessas partes.

Aspecto que facilita a comparação (item a), e o registro simbólico fracionário da fração do tanque que está cheia, solicitada no item (b).

d. Possíveis estratégias mobilizadas pelos alunos durante o processo de resolução

(i) Em Relação à Atividade 9

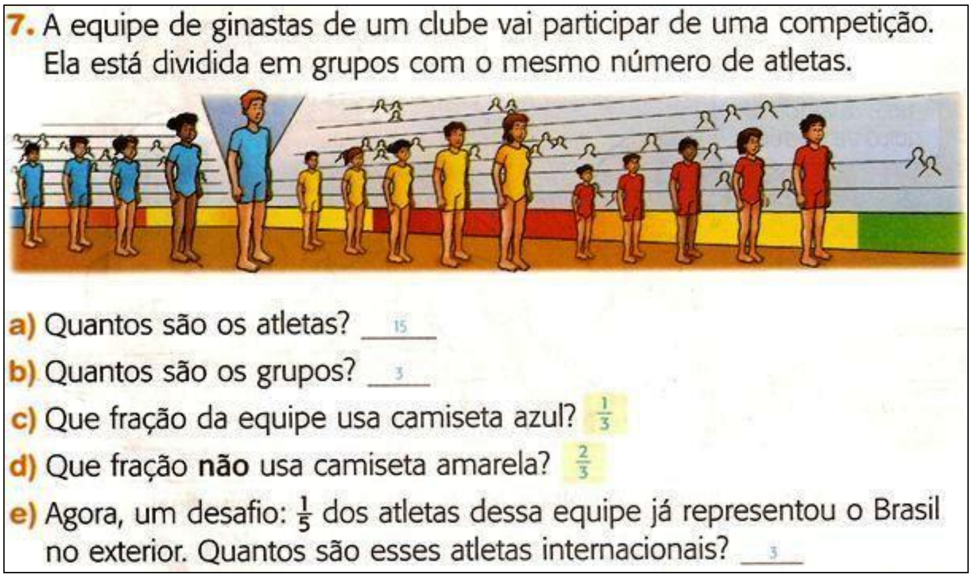
- ✔ A expectativa em relação ao aluno é que o mesmo compare a porção que não foi pintada com a parte do muro que já foi pintada. E, conclua que a área do retângulo que já foi pintada equivale ao dobro da área do retângulo que ainda não foi pintada. Assim sendo, que o aluno perceba que duas porções da área do muro foram pintadas e uma não está pintada, logo a fração amarela corresponde a dois terços do muro.

(ii) Em Relação à Atividade 10

- ✔ O contexto utilizado na atividade 10 é uma situação pouco presente na realidade dos alunos da escola pública. O fato de ter utilizado um ôdometro que consiste no instrumento localizado no painel dos veículos cuja finalidade é mostrar a quantidade de combustível no tanque. O posicionamento do ponteiro desse instrumento numa escala serve como parâmetro que possibilita a comparação de frações que o aluno já assimilou como, por exemplo, um meio e um quarto. Embora o jogo de cores facilite as tarefas solicitadas: comparar frações e converter os registros de representação (no seguinte sentido: linguagem pictórica → linguagem simbólica fracionária). Acreditamos que alguns alunos apresentarão dificuldades para encontrar as respostas esperadas pelos autores do livro didático, pois nesse caso o contexto é inadequado.

Atividade [11]

a. Descrição: Nesta atividade, ilustrada na Figura 29, os autores abordam o significado parte/todo do número racional num contexto discreto, que corresponde a um grupo com 15 ginastas. Os itens (a) e (b) solicitam a quantidade total de atletas e de equipes que participarão de uma competição de ginástica. Enquanto os itens (c) e (d) solicitam os registros em linguagem simbólica fracionária da quantidade de atletas que usam uniforme azul e daqueles que não usam uniforme amarelo. E, o item (e) questiona a quantidade de ginastas que equivale a um quinto do total de inscritos na competição.



7. A equipe de ginastas de um clube vai participar de uma competição. Ela está dividida em grupos com o mesmo número de atletas.

a) Quantos são os atletas? 15

b) Quantos são os grupos? 3

c) Que fração da equipe usa camiseta azul? $\frac{1}{3}$

d) Que fração **não** usa camiseta amarela? $\frac{2}{3}$

e) Agora, um desafio: $\frac{1}{5}$ dos atletas dessa equipe já representou o Brasil no exterior. Quantos são esses atletas internacionais? 3

Figura 29: Atividades 11 da 3ª sessão da sequência didática
Fonte: Imenes et al (2007, p.135)

b. Objetivo

- Determinar a fração de uma quantidade discreta (grupo de ginastas).
- Converter do registro pictórico para o registro simbólico fracionário.

c. Variável(is) didática(s) e os possíveis efeitos didáticos

- Os autores continuam explorando noção de fração a partir do significado parte-todo do número racional, porém com uma quantidade discreta. O contexto que ilustra o inteiro de natureza discreta consiste numa equipe de ginastas.

- O jogo de cores, nos uniformes dos atletas conforme ilustra a Figura 29, induz o aluno à contagem do total de ginastas (item a), e a quantidade de grupos (item b), em que a equipe foi dividida E, em seguida a fração correspondente aos atletas que não estão de camiseta amarela. Finalmente, deveram determinar a quantidade de atletas que corresponde à quinta parte do total do grupo de ginastas.

- Outra variável didática, identificada na atividade 11, na abordagem da relação parte/todo sob com uma quantidade discreta, os autores têm o cuidado de fornecer o número de elementos da coleção que é múltiplo do número de subcoleções (frações). Neste caso, o total de atletas (15) é múltiplo de 3 (quantidade de equipes de ginastas) e 5 (. Portanto, é possível determinar frações dessa quantidade por meio da divisão exata por 3 ou 5. Assim sendo, o aluno estará reforçando a idéia de dividir em partes iguais, ao determinar, por exemplo, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ ou $\frac{1}{5}$ de 15.

d. Possíveis estratégias mobilizadas pelos alunos durante o processo de resolução

- O contexto utilizado na atividade: coleção, conjunto, grupo ou equipe é familiar ao aluno que nesse nível já conserva quantidades ou grandezas de natureza discreta. Neste caso, cada equipe de ginastas foi dividida em três grupos compostos por cinco pessoas totalizando 15 atletas. Sendo assim, os alunos não apresentarão dificuldades para responder os itens (a) e (b). E, portanto presumimos que a estratégia a ser adotada pela totalidade dos seja de fato a contagem dos atletas e das equipes, uma vez que o jogo de cores favorece essa prática. Consequentemente, nestes itens da atividade é provável que não sejam identificados erros.

- As equipes foram diferenciadas por uniformes de cores distintas. Ou seja, o fato da ilustração exibir três grupos, com cinco atletas em cada um deles, devidamente separados pelas cores dos uniformes, facilita tanto a contagem dessas quantidades quanto auxilia o trabalho do aluno ao estabelecer correspondências entre o registro pictórico e o simbólico fracionário. No item (c), por exemplo, a fração da equipe que usa camiseta azul corresponde a um terço. Uma vez que dos três grupos apenas um deles está vestido de azul. Portanto, este poderá ser o raciocínio dos alunos que apresentarem a resposta esperada pelos autores (um terço). Todavia, neste item alguns alunos poderão apresentar como solução uma fração equivalente à fração um terço. Neste caso, a fração $\frac{5}{15}$ (cinco quinze avos), pois cinco atletas vestem o uniforme azul num total de 15 pessoas que participam da competição.

- No item (d) a expectativa dos autores é que os alunos apresentem como solução a fração $\frac{2}{3}$ (dois terços), do total. Porém, alguns alunos poderão apresentar um raciocínio similar ao descrito no tópico anterior em relação ao item (c). Ou seja, a solução para questão poderá ser uma fração equivalente a dois terços, neste caso a fração: $\frac{10}{15}$(dez quinze avos), pois, 10 dos 15 atletas que participarão da competição vestem uniformes nas cores: azul e vermelho. Caso as equipes de atletas não fossem identificadas pelas cores dos uniformes seria provável que os alunos apresentassem dificuldades na elaboração de estratégias que conduzissem às subdivisões do inteiro discreto.

- Ainda em relação ao item (d), um pequeno detalhe da merece destaque, no questionamento deste item o advérbio adversativo de negação (**não)** aparece grifado em negrito provavelmente com o intuito de chamar a atenção do aluno para o fato de não incluir na contagem das partes os atletas cujo uniforme é da cor amarela. De certo modo, é possível que os alunos ao perceberem o destaque em negrito descartem da contagem o grupo vestido de amarelo aumentando a probabilidade de acerto neste item.

- No item (e) o aluno deve determinar um quinto do total de atletas. Neste caso, a expectativa é que o aluno observe a ilustração suporte da atividade e perceba que a equipe já está separada de 5 e 5. E, portanto um quinto de quinze corresponde a três, ou seja, um atleta de cada grupo (azul, amarelo e vermelho). Também é possível que eles utilizem como estratégia para obtenção da solução circular os atletas (15) formando grupos de cinco em cinco. Afinal, esse procedimento foi sutilmente sugerido na atividade 4 da 1ª sessão da sequência didática. Além disso, por ser uma quantidade discreta existe a possibilidade dos alunos efetuarem a divisão mentalmente, uma vez que o registro do algoritmo não foi solicitado. No entanto, ressaltamos que estas estratégias ou procedimentos de resolução só emergirão se e somente se, o aluno tiver compreendido a relação parte/todo, independentemente do contexto utilizado corresponder ao inteiro de natureza contínua ou discreta. Caso contrário, é pouco provável que os alunos sejam bem sucedidos na realização da tarefa.

Atividade 12

Figura 30: Atividades 12 da 3ª sessão da sequência didática
Fonte: Imenes et al (2007, p.135)

a. Descrição: Os autores solicitam que o aluno observe a cena para responder os questionamentos levantados. A ilustração apresenta duas pessoas comendo uma pizza. A finalidade da tarefa consiste em conduzir a percepção dos alunos, por meio da observação da quantidade de fatias consumidas e aquelas que ainda restam sobre a mesa, para a equivalência de frações. Neste caso, a equivalência entre a metade e três sextos da pizza (item b). Assim como, no item (b) a equivalência corresponde às frações dois sextos e um terço.

b. Objetivos

- Converter do registro pictórico para o registro simbólico fracionário.
- Escrever frações equivalentes (à metade e a terça parte).

c. Variável(is) didática(s) e os possíveis efeitos didáticos

- Mais uma vez os autores reforçam a idéia de fração como uma relação entre as partes de um inteiro de natureza contínuo. Neste caso, a unidade ou inteiro utilizado como contexto da atividade é uma pizza, cujo formato é circular. Assim sendo, o inteiro contínuo e as frações do círculo correspondem aos aspectos mais explorados nas atividades propostas anteriormente na sequência didática sugerida pelos autores do livro didático. Nesse sentido, é provável que tais circunstâncias repercutam diretamente na minimização do erro por parte do aluno. Embora, a equivalência entre números racionais fracionários, que consiste noutro aspecto concernente à atividade, tenha sido pouco abordada na sequência didática

- A pizza foi dividida em seis partes iguais de modo a produzir frações equivalentes à metade, terça e a sexta parte. Nessa atividade os autores buscam abordar o princípio da invariância. Ou seja, a soma das frações constituídas corresponde ao inteiro contínuo representado por uma pizza. Todavia, se a professora regente não discutir sobre a decomposição e reconstituição do inteiro é pouco provável que algum aluno comente acerca do princípio da invariância.

- A quantidade total de fatias é múltipla de 2, 3 e 6. Portanto, é possível determinar frações resultantes da divisão exata entre a quantidade de fatias e os números inteiros citados. Portanto, este seria um aspecto a ser retomado no contexto contínuo, uma vez que na atividade anterior sugerida com o contexto discreto. Porém, esta tarefa não foi solicitada ao aluno.

- O estudo das equivalências estabelecidas entre frações é um aspecto crucial a ser explorado nas atividades porque possibilita a compreensão e domínio das frações. O aluno compreende a idéia quando consegue construir classes de equivalência de uma fração por meio da subdivisão dos do inteiro seja no contexto discreto ou contínuo. Assim sendo, verificamos que esta atividade foi proposta com o intuito de estabelecer equivalências entre as frações $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}\ e\ \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, utilizando como artifício o conectivo "***ou***". No entanto, não esperamos que os alunos percebam a intenção didática dos autores ao colocar esse elemento nas questões dos itens (b) e (c).

d. Possíveis estratégias mobilizadas pelos alunos durante o processo de resolução

- Com relação à escolha didática dos autores ao induzir a busca por frações equivalentes utilizando nos itens (b) e (c) a conjunção ***"ou"*** que designa a hesitação, a incerteza, por exemplo. E, portanto remete a idéia de que o aluno deve escrever a mesma fração de outro modo. Embora, essa seja a expectativa dos autores com relação a ação dos alunos, presumimos que é pouco provável que os alunos escrevam as frações equivalentes à metade e a um terço. É plausível sim, que a maioria deles, apresente como solução o registro das frações correspondentes a quantidade de fatias que ainda está na forma (item b), ou a fração equivalente a quantidade de fatias que as pessoas comeram (item c).

CAPÍTULO V – ANÁLISE DOS EFEITOS DIDÁTICOS

5.1 Análise a posteriori dos efeitos didáticos emergentes na evolução da sequência didática

Neste capítulo apresentamos as análises dos dados obtidos no desenvolvimento das situações didáticas vivenciadas com os alunos do 5º Ano do Ensino Fundamental. Nas situações didáticas de aprendizagem e avaliação caracterizam-se fundamentalmente pela aplicação das atividades integrantes de uma sequência didática proposta no livro didático de Matemática destinada ao ensino e a aprendizagem do significado parte/todo do número racional.

Portanto, ancorados na Teoria das Situações Didáticas buscamos fundamentar as análises que objetivam mostrar a emergência dos efeitos didáticos decorrentes das variáveis e dos respectivos valores elencados pelos autores do livro didático na construção da sequência de atividades. Assim sendo, evidenciamos as análises dos dados nos auxiliam na compreensão do funcionamento do dispositivo de ensino (a sequência didática), sugerida no livro didático. E, dessa forma, acreditamos estar contribuindo para promover as adequações necessárias nessa sequência didática com o intuito de favorecer a progressão das aprendizagens dos alunos em relação ao significado parte/todo do número racional.

5.1.1 Análise das atividades da situação de aprendizagem: SESSÃO 1 – “Dividindo coisas inteiras”

Atividade [1]

- ✔ Constatamos a eficácia da variável didática com relação à utilização de formas geométricas bidimensionais, neste caso dos polígonos regulares: retângulos e quadrados, para explicitar o significado parte/todo do número racional no contexto contínuo. 34 dos 36 alunos (94%), que responderam a atividade, perceberam a existência de uma totalidade divisível. Portanto, a maioria dos alunos não apresentou dificuldades ao realizar a divisão equitativa das regiões poligonais. As estratégias adotadas pelos mesmos foram bem sucedidas e a interação com a atividade atendeu as expectativas. Pois, ao decompor o inteiro em partes “iguais”, sem deixar resíduos, a maioria dos alunos mostrou compreender o esgotamento do todo que consiste numa condição essencial para considerar as porções decorrentes da divisão do inteiro como sendo frações dessa unidade divisível.

- Em relação ao valor da variável, que mencionamos na análise a priori, mais precisamente na relação entre a quantidade de cortes e a quantidade de partes (frações), podemos afirmar que quando os autores do livro didático definem quantos cortes podem ser feitos no inteiro para dividi-lo em partes iguais a frequência de estratégias bem sucedidas aumenta consideravelmente. Como sabemos a quantidade de cortes nem sempre é proporcional ao total de partes em que o inteiro foi dividido. Nesse caso, o controle dessa variável (quantidade de cortes), evitaria uma grande quantidade de soluções satisfatórias para o mesmo problema. Na atividade 1, por exemplo, para produzir metade do sanduíche (quadrado), um corte é o suficiente. Enquanto para dividir a torta de limão (retângulo), em quatro partes iguais poderão ser feitos dois, três ou mais cortes.

- Com relação ao item (a) da atividade 1 "*dividir cada sanduíche com apenas um corte de modo que cada um dos quatro amigos receba uma parte*" destacamos que esta variável de comando estabelecida pelos autores do livro didático praticamente eliminou a possibilidade de erro, portanto, todos responderam corretamente. Mas, como prevíamos os alunos apresentaram diferentes estratégias de resolução.

- Ainda em relação ao item (a), é pertinente considerar que há indícios de que 11 dos 36 alunos (31%) encontraram mais de uma solução para o problema proposto. No entanto, todos optaram pelo registro de apenas uma das respostas, apagando as demais, como podemos verificar nos extratos dos protocolos das Figuras 31, 32 e 33. Mesmo sem que houvesse incentivo, tanto dos autores da coleção quanto da professora regente, na busca de outras soluções que atendessem a variável de comando (fazendo apenas um corte). Cumpre destacar que todos os alunos optaram por padronizar suas respostas com as dos colegas de grupo, geral por influência de um deles.

- *17 dos 36 alunos (47%) seccionaram cada um dos quadrados (sanduíches), traçando a diagonal ao fazer junção dos vértices opostos por um segmento de reta, como podemos observar na Figura 31. E, como mencionamos anteriormente, a expectativa dos autores do livro didático era que a maioria dos alunos apresentasse essa solução.*

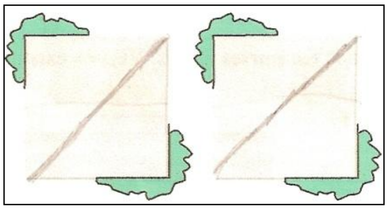


Figura 31: Extrato do protocolo n.º 04 relativo
à resolução do item (a) da atividade 1

(i) 17 dos 36 alunos (47%) dividiram os quadrados unindo os pontos médios dos lados paralelos traçando segmentos de reta perpendicular ou na posição horizontal, como podemos observar nos extratos de um dos protocolos dos alunos ilustrado na Figura 32.

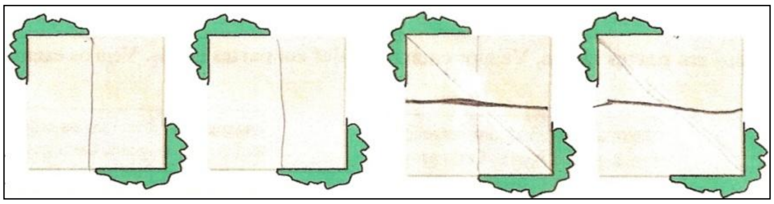


Figura 32: Extratos dos protocolos n.º 08 e 24 relativo
à resolução do item (a) da atividade 1

(ii) Apenas 2 dos 36 alunos (6%) apresentaram soluções equivocadas porque não atenderam a variável (fazendo apenas um corte), ambos traçaram dois segmentos de reta concorrentes, de modo que produziram quatro partes em cada quadrado. Talvez o fato de ter que dividir dois sanduíches para quatro pessoas tenha influenciado na estratégia adotada, como podemos observar na Figura 33.

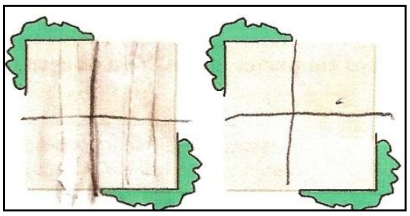


Figura 33: Extrato do protocolo n.º 22 relativo
à resolução incorreta do item (a) da atividade 1

- ✔ Em relação ao item (b) da atividade, destacamos que como havíamos previsto o fato dos autores do livro didático não determinarem a quantidade de cortes que deveriam ser feitos no retângulo gerou múltiplas respostas. Deste modo, independentemente da solução apresentada, 35 dos 36 alunos (97%) foram exitosos na tarefa. No entanto, 1 dos 36 alunos (3%) dividiu o retângulo equivocadamente produzindo porções desproporcionais. Em seguida, apresentamos a frequência das respostas apresentadas pelos alunos neste item.

1. Fazendo dois cortes

(i) Como podemos observar no extrato do protocolo 36, exposto no item (I) da Figura 34, 4 dos 36 alunos (11%) uniram dois vértices obtendo uma das diagonais dos quadrados.

(ii) A maioria dos alunos efetuou a divisão do retângulo dividiram o retângulo cruzando os segmentos de reta que unem os pontos médios dos lados paralelos. A frequência neste item corresponde a 21 dos 36 alunos (57%), tal como o aluno que efetuou o registro (II) no protocolo 04 ilustrado na Figura 34.

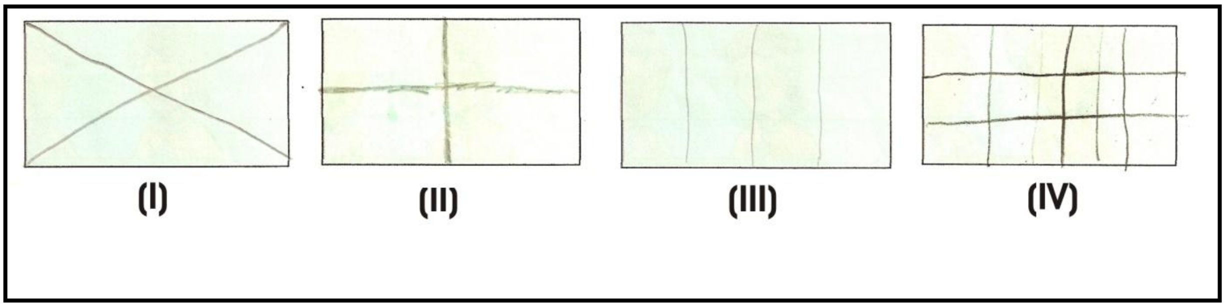


Figura 34: Extratos dos protocolos n.º 36, 04, 08 e 22 relativos às soluções apresentadas no item (b) da atividade 1

2. Fazendo três cortes

(i) 8 dos 36 alunos (22%) dividiram o retângulo traçando três segmentos de reta perpendiculares e equidistantes. Da forma como ilustra o item (III) da Figura 34. Que consistia na resposta da maioria para os autores do livro didático. Mas, não foi o que ocorreu, pois possivelmente os alunos tentaram reproduzir as práticas usuais do próprio cotidiano, nesse contexto fictício.

(ii) Outra estratégia prevista na análise a priori consistia na divisão do retângulo traçando segmentos de reta equidistantes na posição horizontal. Porém, nenhum aluno apresentou esta solução na ficha de atividades.

3. Fazendo mais de três cortes

- ✔ *Como a quantidade de cortes a serem feitos no retângulo do item b não foi definida 2 dos 36 alunos (6%) obtiveram frações equivalentes a um quarto do retângulo. Ao fazer 4 cortes produziram 8 fatias e com 5 cortes acabaram dividindo a região retangular em 12 partes "iguais" ou equivalentes. O item (IV) da Figura 34 mostra uma das soluções apresentadas pelos alunos. Portanto, as soluções mencionadas correspondem a subdivisões do retângulo ilustrado na Figura 34.*

- No que se refere ao item (b) da atividade, destacamos que há indícios de que apenas 4 dos 37 alunos (11%) encontraram mais de uma solução para o problema proposto. Embora, tenham registrado apenas uma das respostas no protocolo e apagado as demais. De modo análogo, ao item anterior da atividade, os alunos não foram estimulados a encontrar outras soluções que atendessem a variável de comando atribuída pelos autores da sequência didática. Porém, nos protocolos é possível verificar a “sombra” ou as marcas de outras soluções obtidas.

Atividade [2]

- Como antecipamos na análise a priori, a semântica do enunciado da atividade 2, interferiu nas respostas dos alunos. O aspecto comum às variáveis de comando dos itens (a), (b) e (c) é a palavra parte. Neste caso, a frequência das respostas apresentadas pelo aluno em que as expressões ***uma parte***, ***uma fatia*** *ou* ***um pedaço*** aparece é 13 dos 36 alunos no item (a), 10 dos 36 alunos no item (b) e 11 dos 36 alunos o que corresponde respectivamente a 36%, 28% e 31% das soluções registradas na ficha de atividades. Para exemplificar tal situação apresentamos o extrato de um dos protocolos dos alunos na Figura 35.

Agora, observe as divisões efetuadas na atividade 1 e responda:
a) Na divisão do chocolate, qual foi a parte de cada um? um Terço
b) Que parte do sanduíche cada amigo recebeu? um Parte
c) Na divisão da torta, que parte cada amigo recebeu? uma Parte

Figura 35: Extrato do protocolo n.º 04 relativo à resolução da atividade 2

- No item (a), 23 dos 36 alunos (64%) apresentaram a resposta esperada pelos autores, ou seja, efetuou o registro da fração um terço em linguagem natural.

- No item (b), 18 dos 36 alunos (50%), atenderam a expectativa dos autores registrando em linguagem natural a fração correspondente à metade ou a um meio. Entretanto, 8 dos 36 alunos (22%) apresentaram como resposta a fração um quarto possivelmente porque o inteiro: os dois sanduíches foram divididos ao meio, resultando em quatro partes equivalentes e os alunos consideraram que cada pessoa recebeu uma fração do total.

- No item (c) 25 dos 36 alunos (69%) atenderam as expectativas apresentando como solução o registro da fração um quarto em linguagem natural como resposta para este item.

- A frequência de soluções bem sucedidas foi acima da média em todos os itens da atividade 2. Este fato denota que os argumentos apresentados nos quadrinhos da ilustração influenciaram as respostas da maioria dos alunos. Apesar de saber que as crianças utilizam a terminologia relativa às frações abordadas nas atividades 1 e 2 muito antes de ingressarem na escola a hipótese de que as nomenclaturas das frações solicitadas tenham sido transcritas do enunciado pelos alunos é bastante plausível.

Atividade [3]

- A padronização da notação das frações unitárias, promovida na sequenciação dos registros simbólicos fracionários relativos às frações um meio e um terço modelizadas no enunciado da atividade 3 induz a resposta esperada (um quarto), de 34 dos 36 alunos (94%), como mostra o registro correspondente a Figura 36.

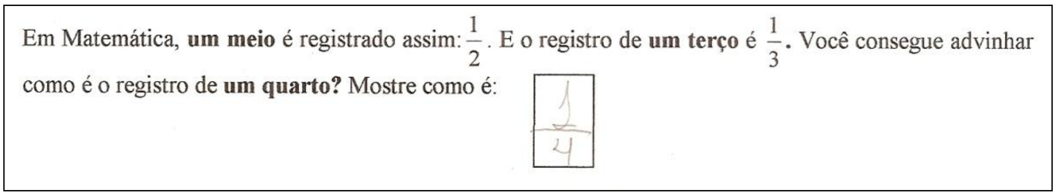
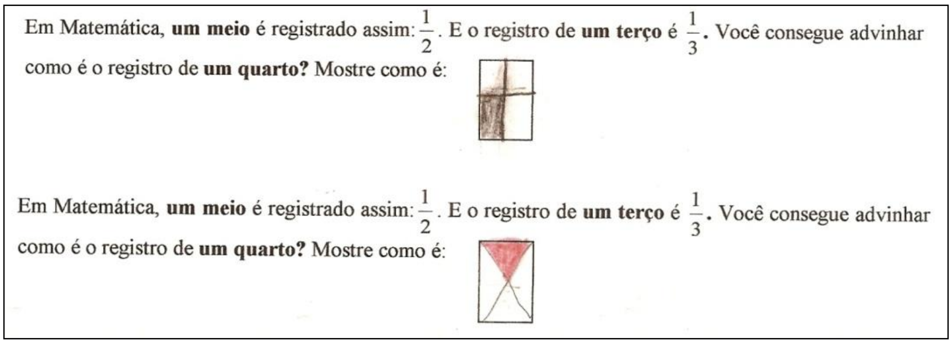

Em Matemática, **um meio** é registrado assim: $\frac{1}{2}$. E o registro de **um terço** é $\frac{1}{3}$. Você consegue advinhar como é o registro de **um quarto?** Mostre como é: $\frac{1}{4}$

Figura 36: Extrato do protocolo n.º 08 relativo à resolução da atividade 3

- A variável de comando *"mostre como é..."* induziu a resposta de 2 dos 36 alunos (6%) a apresentarem o registro pictórico da fração um quarto como podemos perceber nos extratos dos protocolos exibidos na Figura 37.


Em Matemática, **um meio** é registrado assim: $\frac{1}{2}$. E o registro de **um terço** é $\frac{1}{3}$. Você consegue advinhar como é o registro de **um quarto?** Mostre como é:

Em Matemática, **um meio** é registrado assim: $\frac{1}{2}$. E o registro de **um terço** é $\frac{1}{3}$. Você consegue advinhar como é o registro de **um quarto?** Mostre como é:

Figura 37: Extrato dos protocolos n.º 22 e 24 relativos à resolução da atividade 3.

- Como podemos observar em um dos trechos dos diálogos, relativos à atividade 3 da sequência didática, a professora institucionaliza a forma de efetivar o registro simbólico fracionário de uma fração. No episódio transcrito em seguida (Quadro 5), identificamos o efeito didático denominado por Brousseau (1986) como "efeito Jourdain". Na fala da professora regente é nítida a existência de uma subjetividade latente. Na qual está implícito o desejo de identificar, na interação do aluno para consigo, algo de científico em relação ao objeto do saber: a representação simbólica do número racional. Além disso, toma para si a responsabilidade de refletir e responder a pergunta formulada acerca da representação que preconizada nas primeiras atividades da sequência didática sugerida no livro didático.

(P) [...] Atividade número três! Em matemática, um meio é registrado assim: [Aponta a fração que corresponde a um meio na ficha de atividades.] Está escrito aí, não é? Vejam: o número um é o numerador. E, o número que fica embaixo do traçinho se chama...

Aluna (C): Dois! (P) [Expressão de insatisfação com a resposta.]
(Als.) [Risos]

(P) Quem lembra? O número de cima é o numerador. E, o de baixo é o ... **denoooo**.... [Fala o pré-fixo da palavra com bastante ênfase.]

(Als.) Respondem: **dor!!!!**

(P) Isso mesmo! Numerador é o número que fica em cima e denominador é o que fica em baixo do traçinho. [Continua a leitura do enunciado] E, o registro de um terço é assim. Aí tão vendo como é que faz um terço, não é? O numero um é o numerador e o três é o denominador. Você consegue adivinhar como é o registro de um quarto? Mostre como é!

Quadro 5: Fragmento da transcrição dos diálogos da 1ª parte da 2ª sessão (A)

Atividade [4]

- No item (a) 36 alunos (100%) efetuaram o registro da fração um quarto em linguagem natural. Embora, como mencionamos na análise a priori não há dificuldade alguma para aluno na realização da tarefa, basta transcrever nomenclatura da fração solicitada que está contida no texto que introduz a atividade. Por outro lado, destacamos que as conversões entre os diferentes registros (pictórico, linguagem natural e simbólico fracionário), da fração um quarto são exploradas desde a primeira atividade da sequência didática.

- No item (b) os alunos deveriam determinar a quantidade de selos equivalente a um quarto total de selos da cartela, que corresponde a uma dúzia. A finalidade da variável didática e sua cota, definida pelos autores na elaboração da sequência didática contida no livro didático, consistia na divisão do total de selos (12) em três (exemplo da ilustração) ou quatro partes iguais (tarefa proposta ao aluno). Mas, nenhum aluno apresentou a resposta esperada.

- A expectativa prevista anteriormente incidia na percepção dos alunos para o fato de que a cartela de selos foi separada em três grupos contendo quatro selos em cada um. E, portanto adotassem um procedimento análogo ao anterior na tarefa de determinar um quarto dos 12 selos. Ou seja, circulassem a cartela mais uma vez de modo que houvesse quatro grupos contendo três selos em cada um.

- O fato de o inteiro corresponder a uma quantidade discreta poderia levar o aluno a utilizar como procedimento de resolução o cálculo mental, para tanto seria necessária a compreensão de que ao determinar uma fração de uma quantidade a operação a ser efetuada é a divisão, neste caso entre dois números inteiros (12: 4). Como antecipamos na análise a priori, embora os autores institucionalizem a idéia de dividir o inteiro em partes iguais, os alunos não conseguiram transpor a ação de dividir o inteiro no contexto contínuo para o discreto. A frequência das respostas apresentadas pelos alunos nesse item e os percentuais referentes estão relacionados abaixo:

(i) 3 dos 36 alunos (8%) somaram os dados do enunciado (12 + 4), nesta solução a fração um quarto foi interpretada como quatro unidades.Verificamos, nesse caso o efeito "idade do capitão". Os alunos costumam efetuar operações com os dados do enunciado. Vale salientar que os alunos interpretaram a fração $\frac{1}{4}$ como sendo 4 unidades.

(ii) 5 dos 36 alunos (14%) apresentaram como respostas frações cujos termos (numerador e denominador), foram representados pelos dados do texto introdutório ou do próprio enunciado do item (b). Assim sendo, as soluções registradas na ficha de atividades pelos alunos consistiam nas frações: três quartos, doze quartos, doze sextos. Acreditamos que estes alunos buscaram estabelecer relação entre o exemplo e o problema proposto resgatantando elementos presentes no suporte (ilustração).

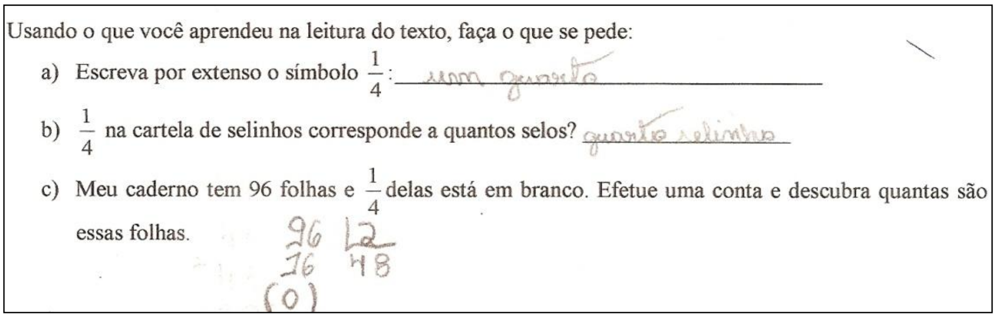
(iii) 6 dos 36 alunos (17%) responderam que um quarto de doze corresponde a "4º selo". Neste caso, um elevado percentual de alunos associaram a fração à cardinalidade talvez esse efeito didático tenha emergido em decorrência da própria nomenclatura do número racional (um quarto).

(iv) 22 dos 36 alunos (61%) apresentaram como solução do item 4 ou 12 selos. Neste caso, é provável que tenham adotado como referência os 4 selos circulados em cada um dos três grupos ou o total de selos contidos na cartela da ilustração que serviu como suporte da atividade. Ou ainda, que alguns desses alunos tenham simplesmente transcrito os dados do enunciado.

- ✔ Assim como prevíamos, os alunos não apresentaram estratégias adequadas para a obtenção da resposta esperada em relação ao item (b). Talvez, pela similaridade com o item (b), nenhum aluno apresentou a solução esperada para o item (c). Uma vez que a condição necessária para resolver ambas as questões pressupõe a compreensão do significado parte/todo do número racional também no contexto em que o inteiro equivale a uma quantidade discreta. Porém, o registro do algoritmo da divisão realizada é solicitado no item (c) comando que difere do item anterior. Tal situação se configura como uma ruptura de contrato didático.

- ✔ Ainda com relação ao item (c), destacamos que a professora ao coordenar a aplicação da sequência didática adotou uma postura contraproducente à prevista na análise a priori. Em nenhum momento da aplicação houve interferência da docente com a finalidade de promover ou regatar a memória didática quanto à idéia de dividir o inteiro contínuo em partes iguais. A ocorrência desses eventos poderia fazer com que o aluno facultasse a possibilidade de proceder da mesma maneira (dividir em partes iguais), com as quantidades discretas (selos da coleção e as folhas do caderno). Uma vez que, predominam na sequência didática a divisão em partes iguais é privilegiada nos contextos em que o inteiro é de natureza contínua.

- ✔ A variável de comando do item (c): *"efetue uma conta"* desencadeou o surgimento do efeito denominado como "*idade do capitão*". Os alunos acabaram por efetuar as operações de adição e subtração utilizando os dados contidos no enunciado, em detrimento do algoritmo da divisão fatores que caracterizam o efeito mencionado. Na figura 38 podemos observar as soluções apresentadas pelo aluno em relação aos três primeiros itens da atividade 4. Em seguida, relacionamos as freqüências e percentuais referentes às soluções apresentadas pelos alunos nesse item (c).


Usando o que você aprendeu na leitura do texto, faça o que se pede:

a) Escreva por extenso o símbolo $\frac{1}{4}$: um quarto

b) $\frac{1}{4}$ na cartela de selinhos corresponde a quantos selos? quarto selinhos

c) Meu caderno tem 96 folhas e $\frac{1}{4}$ delas está em branco. Efetue uma conta e descubra quantas são essas folhas.

96 | 2
16 48
(0)

Figura 38: Extrato do protocolo n.º 15 relativo à resolução da atividade 4

(i) 2 dos 36 alunos (6%) efetuaram a divisão (96 : 2 = 48). Porém, a não ser pelo fato da familiaridade dos alunos em dividir as quantidades contínuas e discretas ao meio não encontramos outros elementos das variáveis e seus respectivos valores para justificar a solução apresentada.

(ii) 14 dos 36 alunos (39%) registraram o algoritmo 96 – 14 = 82. Neste caso, os alunos utilizaram como subtraendo os termos da fração um quarto. O subtraendo (14) corresponde à interpretação da fração um quarto como sendo dois números distintos: o numerador equivalente a uma dezena e o denominador correspondente a 4 unidades.

(iii) 18 dos 36 alunos (50%) apresentaram como resposta (4 – 96 = 92) ou (96 – 4 = 92). Assim sendo, fica evidenciado que a fração um quarto foi interpretada como o número inteiro 4.

(iv) 2 dos 36 alunos (6%) efetuaram a subtração (96 – 12 = 84) Neste caso, foram utilizados os totais correspondentes aos dois contextos apresentados na atividade: a coleção com 12 selos e as 96 folhas de caderno.

- ✔ No item (d) os alunos deveriam escrever a fração correspondente as porções dos retângulos coloridas de amarelo. E, embora seja uma atividade estimulada desde o início da sequência didática os alunos não foram bem sucedidos nessa tarefa, pois, a freqüência média de êxito na apresentação das respostas esperadas em relação ao item (d), exemplificadas nos protocolos da Figura 39, corresponde a 13 dos 36 alunos (37%). Portanto, mesmo sabendo que os alunos realizaram nas atividades anteriores o registro simbólico de algumas frações ressaltamos que as frequências referentes a cada retângulo do item (d) oscilou num intervalo compreendido entre 30 e 45%. As frequências e os percentuais correspondentes às soluções, apresentadas pelos alunos, relacionamos em seguida:

(i) *Na representação simbólica da fração colorida no primeiro retângulo do item (d) 12 dos 36 alunos (33%) apresentaram a resposta esperada: um terço. Sendo que efetuaram 6 alunos apresentaram os registros simultâneos da fração um terço (em linguagem natural e simbólica fracionária) e outros 3 alunos efetuaram o registro em linguagem natural, enquanto 3 alunos apenas nomearam a fração correspondente a parte colorida da região poligonal mencionada.*

(ii) *Em relação à fração amarela do segundo retângulo do item (d), 16 dos 36 alunos (44%) apresentaram a resposta esperada: dois terços. Entre esses alunos, 7 apresentaram os registros simultâneos da fração dois terços (em linguagem natural e simbólica fracionária e 4 alunos efetuaram o registro em linguagem natural. Enquanto, outros 5 alunos apenas nomearam a fração correspondente a parte colorida do segundo retângulo proposto no item (d).*

(iii) *Assim como, o primeiro retângulo do item (d), 12 dos 36 alunos (33%) apresentaram a resposta esperada: um sexto. Sendo que efetuaram 6 alunos apresentaram os registros simultâneos da fração um sexto (em linguagem natural e simbólica fracionária), outros 3 alunos efetuaram o registro em linguagem natural, ou seja, escreveram a nomenclatura da fração solicitada correspondentes a parte colorida do retângulo proposto.*

- ✔ É possível observar nos extratos dos protocolos n.º 01, 03 e 27 exibidos na Figura 39 a utilização dos registros, em linguagem natural e simbólica fracionária. Sendo que 19 dos 36 alunos privilegiaram ambos os registros na representação das frações dos retângulos propostos no item (d). Ou seja, mais de 50% dos alunos atuou dessa forma.

- ✔ No item (b) do protocolo n.º 01, exibido na Figura 39, verificamos que ao efetuar o registro da fração colorida no retângulo o aluno comete um equívoco ao efetuar converter do registro pictórico para o simbólico fracionário. Esse erro é frequentemente diagnosticado na maioria dos protocolos dos alunos nas atividades que solicitam a conversão do registro pictórico para o simbólico fracionário. Pois, neste caso, o aluno toma como termos da fração as porções pintadas e não pintadas do polígono, respectivamente como o numerador e o denominador da fração a ser representada.

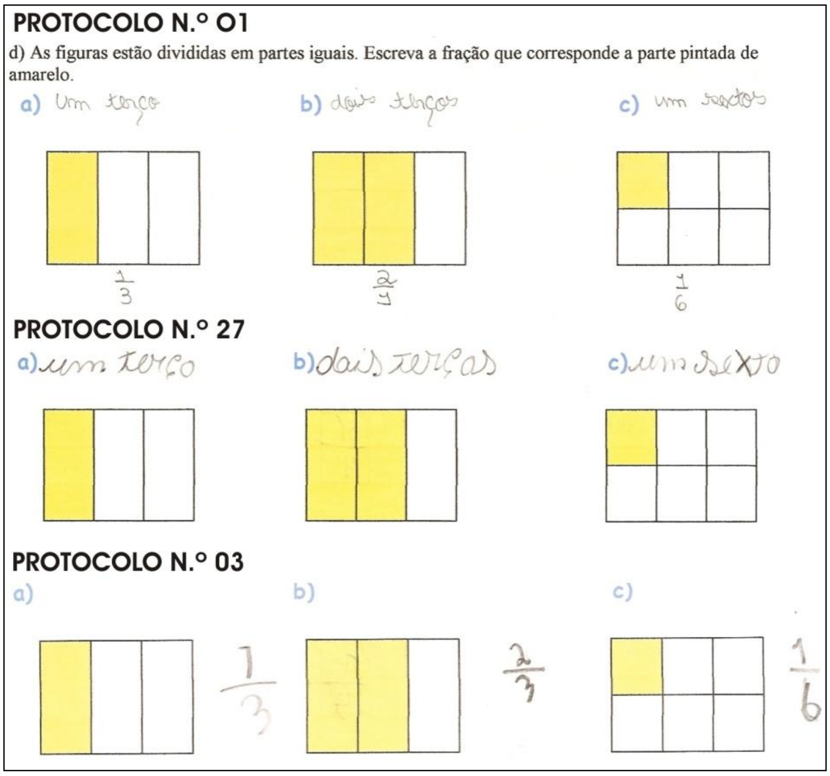


Figura 39: Extratos dos protocolos n.º 01, 03 e 27 relativos
à resolução do item (d) da atividade 4

- Em relação aos equívocos cometidos pelos alunos ao representar as frações do retângulo referem-se às conversões no sentido do registro pictórico para o registro simbólico fracionário. Mais precisamente com relação às associações entre os termos da fração e as porções pintadas ou não pintadas e vice-versa, como podemos observar nos retângulo (a), (b) e (c) do protocolo n.º 28 ilustrado na Figura 40.

- Outro erro recorrente identificado consiste na inversão dos termos da fração. O total de parte representado pelo numerador e as porções consideradas do polígono são representadas no denominador. Assim sendo, 3 dos 24 alunos (12%), procederam o registro simbólico fracionário escrevendo 3/1 referente ao retângulo (a). 2 dos 20 alunos (10%) cometeram o mesmo equívoco em relação ao retângulo (b), expressando o registro 3/2. Enquanto, 7 dos 24 alunos (30%), representaram deste modo a fração amarela do retângulo (c) registrando 6/1.

- Neste sentido, a frequência e o percentual referente independentemente da tipologia dos erros, diagnosticados nos protocolos dos alunos, em relação aos registros das frações solicitadas no item (d) da atividade 4 correspondem a: 24 dos 36 alunos (67%) no primeiro retângulo; na escrita da fração tomada no segundo retângulo a frequência diminui para 20 dos 36 alunos (56%) e no registro da fração pertencente ao terceiro retângulo a frequência aumenta para 26 dos 36 alunos (73%). Acreditamos que esse efeito indesejado foi proveniente da ausência de intervenções tanto dos autores do livro didático na elaboração da sequência didática quanto da professora regente quanto à institucionalização do modo como efetuar o registro simbólico fracionário. Mais exatamente com relação às quantidades que devem ser representadas para formar os termos da fração (numerador = porções consideradas do inteiro e denominador = total de partes em que o inteiro foi dividido).

- Outro dado interessante foi encontrado nos protocolos de 4 alunos, provavelmente do mesmo grupo, que apresentaram o registro simbólico fracionário dos retângulos através da associação entre as partes pintadas e as partes não pintadas. De modo que no retângulo (a) o registro correspondia à fração 1/2; no retângulo (b) a 2/1 e no retângulo (c) o registro correspondia à fração 1/5, como podemos observar no extrato do protocolo n.º 28 da Figura 40.. Porém, todos apagaram as frações e efetuaram operações de subtração e adição para justificar a quantidade de partes, conforme exemplifica o extrato do protocolo n.º 02 que ilustra a Figura 40. Talvez o fato da atividade anterior apresentar a variável de comando “*efetue uma conta*” solicitado no item (c) tenha influenciado na padronização da solução apresentada pelo grupo para o item (d).

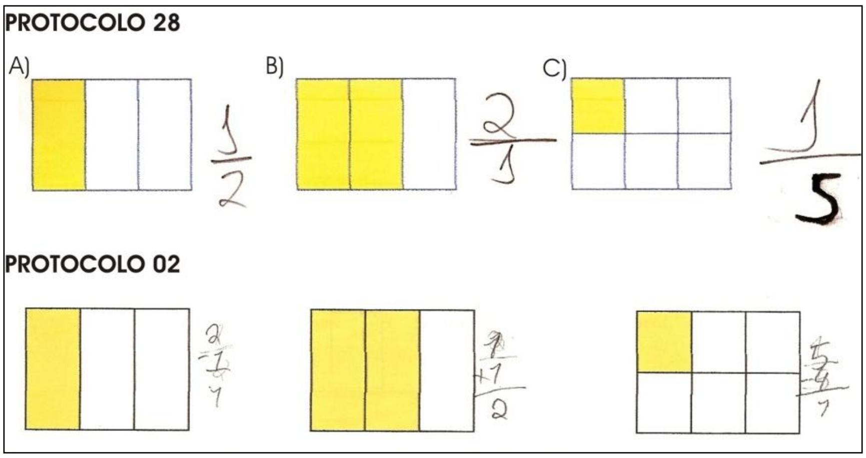


Figura 40: Extratos dos protocolos n.º 28 e 02 relativos aos erros diagnosticados na resolução do item (d) da atividade 4

5.1.2 Análise das atividades da situação de aprendizagem: Sessão 2 – “AÇÃO: Explorando frações de um círculo”

Atividade [1]

- 41 alunos vivenciaram a primeira etapa da 2ª sessão (Ação). Ao manipular o material concreto, as frações do círculo, todos os grupos apresentaram as respostas esperadas na atividade 1. A obtenção das soluções esperadas ocorreu através da tentativa e do erro ao justapor as frações do círculo. Este foi o procedimento adotado pelos alunos dos grupos para compor o círculo (inteiro), com metades, terços, quartos e sextos. Porém, os alunos não demonstraram dificuldades para construir os círculos porque as frações 1/2, 1/3, 1/4 e 1/6 disponibilizadas apresentavam cores distintas. Por exemplo, o inteiro formado por duas metades vermelhas, outro círculo amarelo composto por quatro quartos.

Atividade [2]

- Na atividade os alunos deveriam realizar as conversões do registro pictórico simultaneamente para os registros em linguagem natural e simbólico fracionário, de uma das frações que compõem os círculos: vermelho (formado por duas metades), e amarelo (constituído por quatro quartos). Em relação às repostas apresentadas, destacamos que no que se refere ao:

(i) Círculo vermelho – 22 dos 41 alunos (54%) efetuaram as conversões esperadas. No entanto, 15 dos 41 alunos (37%) registraram na ficha de atividades apenas a notação ou a nomenclatura referente à fração um meio. Ressaltamos que 4 dos 41 alunos (9%) apresentaram equivocadamente o registro simbólico da fração um meio como sendo um terço.

(ii) Círculo amarelo – Em contraposição ao que previmos na análise a priori dessa atividade apenas 10 dos 41 alunos (24%) realizaram as conversões esperadas. Ou seja, a conversão simultânea do registro pictórico para a linguagem natural e para o simbólico fracionário da fração um quarto. Entretanto, 22 dos 41 alunos (54%) registraram na ficha de atividades apenas a notação ou a nomenclatura referente à fração solicitada. Outros 9 dos 41 alunos (22%) efetuaram o registro simbólico fracionário da fração um quarto como sendo um terço (6 alunos) ou um sexto (3 alunos)**.**

Atividade [3]

- Todos os alunos efetuaram o registro simbólico fracionário (notação) e em linguagem natural (nomenclatura) das frações do círculo, como podemos verificar na Figura 41. Obviamente, o fato de termos constatado na análise dos protocolos, um percentual relativamente significativo, referente ao quantitativo de erros dos alunos ao confundir o registro das frações um meio e um quarto na atividade anterior voltamos a analisar o registro videográfico dessa sessão.

- O comportamento dos alunos nos grupos justifica os 100% de êxito na realização da tarefa. Verificamos que após a conclusão da montagem dos círculos com as frações os alunos passaram a desenhar nas suas fichas de atividades estas construções. E, à medida que iam desenhando os círculos também transferiam os registros de representação das frações do círculo indicados ou validados pelos colegas dos grupos. Portanto, alguns alunos se limitaram a copiar os registros das frações sem a devida compreensão das propriedades, do significado das frações mencionadas.

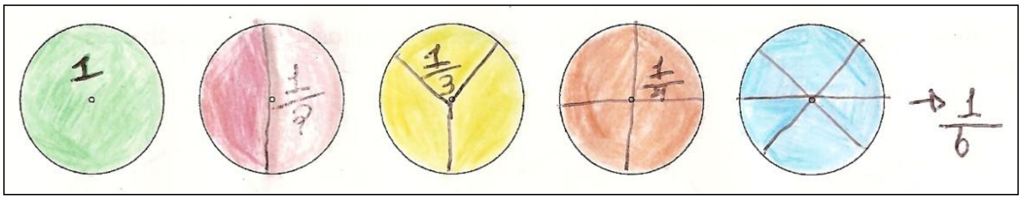


Figura 41: Extrato do protocolo n.º 26 referentes ao registro pictórico e simbólico dos círculos solicitados na atividade 3 (Ação)

Atividade [4]

- Para responder esta atividade os autores sugerem, por exemplo, a utilização de moedas como recurso para representar os círculos. Mas, montar os círculos ou desenhá-los no papel não constitui uma dificuldade. Mas, reproduzir na ficha de atividades as frações do círculo, especialmente as frações um terço e um sexto. No extrato do protocolo nº. 03, da Figura 42, na divisão do último círculo é possível visualizar tal dificuldade do aluno ao desenhar estas frações do círculo.

- Apenas 4 dos 41 alunos (10%) apresentaram pelo menos uma das soluções esperadas. Como podemos observar nos registros (desenhos) expressam a montagem dos círculos (2) e (3), contidos no protocolo n.º 03, exibido na Figura 42.

- 22 dos 41 alunos (54%) não apresentaram todas as construções condizentes com a variável de comando "*montar três círculos usando <u>apenas duas cores</u>*". Dentre as soluções apresentadas, houve uma grande incidência de registros das composições realizadas com o material concreto. Nas quais os alunos construíram duas das soluções esperadas e um terceiro círculo usando três cores. Neste caso, o círculo constituído por frações correspondentes à metade (vermelho), um terço (amarelo) e um sexto (azul). Ou ainda, o círculo formado por dois quartos (laranja), um terço (amarelo) e um sexto (azul). Como podemos constatar na Figura 42 o aluno atendeu parcialmente a variável de comando, pois na composição do círculo 1 foram utilizadas mais de duas cores.

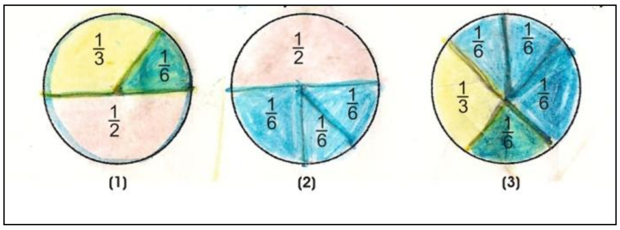


Figura 42: Extrato do protocolo n.º 03 relativos à resolução da atividade 4 (Ação)

- 15 dos 41 alunos (36%) repetiram pelo menos uma das construções expressas na ficha de atividades. No protocolo do aluno, apresentado na Figura 43, constatamos que os dois primeiros círculos correspondem aos exemplos sugeridos pelos autores ao introduzir esta atividade. O terceiro círculo, embora esteja mal dividido denota uma possível dificuldade enfrentada pelo aluno ao tentar esboçar no papel as frações um terço e um sexto do círculo.

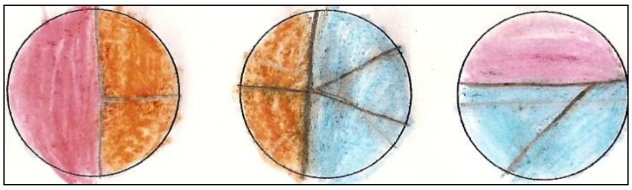


Figura 43: Extrato do protocolo n.º 31 relativos à resolução da atividade 4 (Ação)

Atividade [5]

- Para responder a atividade de comparação muitos dos alunos usaram como procedimento a sobreposição das peças. Colocando as peças (frações do círculo), umas sobre as outras, a maioria dos alunos obteve êxito na tarefa de comparar as frações do círculo. Embora, alguns alunos não adotaram essa estratégia e incorreram em erros clássicos inerentes a atividade de comparação das frações, já descritos na literatura. E, conforme havíamos mencionado e previsto na análise a priori da atividade 5, nos itens (i), (ii), (iii) e (iv) os alunos não corresponderam às expectativas na realização, apresentando soluções incoerentes na atividade proposta. Nesse sentido, as frequências e os percentuais indicam que:

- *Ao comparar as frações um meio e um quarto 29 dos 41 alunos (71%) chegaram à conclusão que a primeira é maior que a segunda. Entretanto, 12 alunos (29%) afirmaram o inverso.*

- *Em relação ao item (ii) 33 dos 41 alunos (80%) afirmaram que a fração um terço é maior que a fração um quarto. No entanto, 8 alunos (20%) compararam as frações mencionadas e afirmaram o contrário do que relatamos anteriormente.*

- *No que se refere ao item (iii) os alunos compararam as frações um sexto e um quarto. Sendo que 33 dos 41 alunos (80%) afirmaram que um sexto é menor que um quarto, enquanto 8 alunos (20%) apresentaram exatamente o contrário da afirmação anterior.*
- *Em relação ao item (iv) da atividade apenas 13 dos 41 alunos (32%) registraram que dois terços é maior que um meio. Porém, a maioria dos alunos (68%) afirmou exatamente o contrário.*

- Nos extratos dos protocolos que ilustram a Figura 44 verificamos que no primeiro exemplo (protocolo n.º 16), o aluno considerou os denominadores das frações dos itens (i), (ii) e (iii) na ação de comparar as frações sugeridas. È possível, que os alunos agiram dessa forma não tenham considerado as ilustrações contidas no enunciado da atividade muito menos as frações do círculo fornecidas para desenvolver as atividades dessa sessão. E, consequentemente demonstram que o aluno não reconhece a fração como um número em si, mas como dois algarismos distintos (o numerador e o denominador da fração). No segundo exemplo (protocolo n.º 31), o aluno utiliza os símbolos, > (maior que) e < (menor que), ao invés de atender a variável de comando que solicitava do mesmo a escrita em linguagem natural das expressões mencionadas. Esse efeito decorre da intervenção da professora regente durante a realização da atividade.

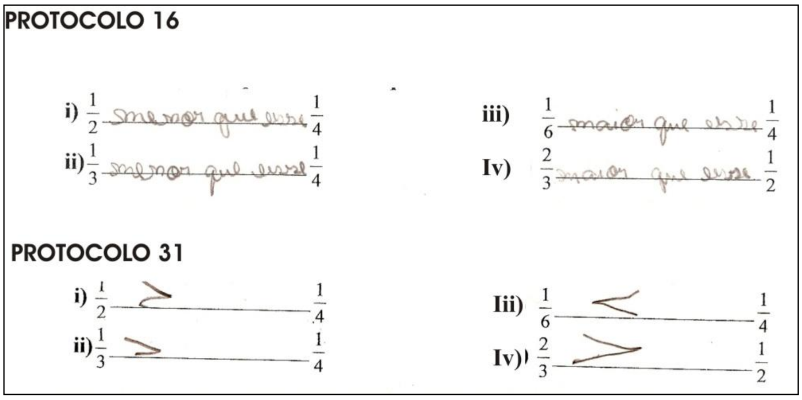


Figura 44: Extratos dos protocolos n.º 16 e 31 relativos
à resolução da atividade 5 (Ação)

- No fragmento da transcrição de um dos episódios da 2ª sessão, que apresentamos no Quadro 6, a professora interfere na resolução da atividade ao fazer referência aos símbolos: > (maior que) e < (menor que), gesticulando com as mãos e desenhando no quadro. A consequência desta intervenção é que 35 dos 41 alunos (85%) completaram a sentença corretamente. No entanto, dentre estes alunos 8 (23%) efetuaram simultaneamente o registro do símbolo e a expressão correspondente. Enquanto, 6 dos 41 alunos (15%) acabam completando as sentenças apenas com os símbolos > (maior) e < (menor) como podemos observar no protocolo n.º 31 da Figura 44.

(P) Vamos prestar atenção? Pessoal, vamos prestar atenção aí. A gente vai usar os símbolos: maior que e menor que. *Compare as frações por meio das figuras que as representa. Depois complete as sentenças abaixo* ***escrevendo é maior que ou é menor que***. Quem lembra dos símbolos? Gesticula com as mãos direita e esquerda fazendo analogia ao símbolos: > (maior) e < (menor), respectivamente. [Volta-se para o quadro e desenha os símbolos e escreve ao lado de cada um a expressão maior que e menor que].

(P) Então, vamos voltar à atividade: um meio é maior ou menor que um quarto? Um terço é maior ou menor que um quarto? Um sexto é maior ou menor que um quarto? E, dois terços é maior ou menor que um meio? Não se esqueçam de colocar a resposta. Imaginem a fração para poder responder direitinho.

Aluno (G) [Convida a professora a se aproximar.] Olhe aqui a minha resposta. Eu coloquei os dois. [Mostra a ficha de atividades para a professora apontando os registros da expressão em linguagem natural e simbólica.]

(P) É, está certo. Pode usar o símbolo ou a palavra. Escrevendo na linha é maior que ou menor que. Esse aí é só o modelo [referindo-se ao exemplo que antecede a atividade.] Esse desenho aí está mostrando como seria. *Um meio é maior ou menor do que um terço?* Você olha a fração e verifica quem é maior. Se isso fosse um pedaço de chocolate, quem ganharia o maior? Imaginem que o chocolate está sendo dividido para três pessoas e o outro para duas. Então, quem ganharia o pedaço maior? Quem ganharia mais? Pelo desenho você imagina o restante das sentenças. E, coloquem quem é maior e quem é menor.

Quadro 6: Fragmento da transcrição dos diálogos da 1ª parte da 2ª sessão (B)

- De certo modo, a intervenção da professora configurou-se como a instituição de uma regra de contrato didático. Nesse sentido, para satisfazer as expectativas da professora com relação às repostas das frações solicitadas na atividade 5, 14 dos 41 alunos (34%) efetuaram o registro dos símbolos > (maior que) e < (menor que).

Atividade [6]

- Diferentemente ao que havíamos previsto na análise preliminar dessa atividade os alunos não usaram como referência as composições dos círculos e os registros dessas construções realizadas por eles na ficha de atividades. Estes adotaram como parâmetro para estabelecer a equivalência entre frações os círculos fornecidos como suporte da ilustração introdutória da atividade.

- Verificamos no registro em vídeo que ao responder à atividade, a maioria dos alunos, efetuou a contagem das frações dos círculos fornecidos na ilustração. Por exemplo, alguns perceberam que o inteiro representado pelo círculo verde corresponde aos três terços do círculo amarelo da ilustração (resposta para o item i). Por outro lado, metade do círculo vermelho corresponde a três frações azuis do quarto e último círculo apresentado na ilustração (resposta para o item iv). De modo que, entre as respostas apresentadas no protocolo, apontam que em relação ao item:

  - (i) "*Quantos terços equivalem a 1*?" 34 dos 41 alunos (83%) responderam corretamente. No entanto, 5 dos 41 alunos (12%) responderam que seriam necessárias *4 partes* (1 aluno) ou *um terço* (4 alunos). E, 2 dos 41 alunos (5%) não responderam este questionamento.

  - (ii) *"Quantos quartos equivalem a 1?"* 33 dos 41 alunos (80%) responderam corretamente. No entanto, 6 dos 41 alunos (15%) responderam que seria necessário *um pedaço* (1 aluno), *3 partes* (1 aluno), *um quarto* (3 alunos) ou *um terço* (1 aluno). E, assim como no item anterior, 2 dos 41 alunos (5%) não responderam este questionamento.
  - (iii) *"Quantos quartos equivalem a 1/2?"* 24 dos 41 alunos (59%) responderam corretamente. A frequência acima da média seria justificada pelo fato dos alunos terem acesso e manipularem as frações do círculo (material concreto), mesmo porque o círculo constituído por quatro quartos não faz parte da ilustração suporte. Todavia,

15 dos 41 alunos (36%) responderam que seria necessária 1 parte (5 alunos), 4 *partes* (5 alunos), *um oitavo* (1 aluno) ou *metade* (4 aluno). Analogamente aos itens anteriores 2 dos 41 alunos (5%) deixaram de responder o item (ii).

- (iv) *"Quantos sextos equivalem a 1/2?"*, apenas 6 dos 41 alunos (15%) atenderam as expectativas apresentado a resposta esperada. Assim sendo, 34 dos 41 alunos (83%) apresentaram como solução 6 partes (18 alunos), 1/6 (3 alunos), 1 (5 alunos), meio (1 aluno) ou um sexto (3 alunos). Neste item apena 1 dos 41 alunos (2%) não respondeu o questionamento.

Atividade [7]

- ✔ Assim como, discorremos na análise a priori, os alunos sentem dificuldade em transferir para o papel (desenhando) as frações do círculo. Muitos alunos, não conseguiram dividir os círculos em porções equivalentes o que consequentemente, compromete a resposta a ser apresentada. Talvez se as divisões fossem realizadas em outras formas geométricas poligonais essa dificuldade poderia ser dissipada.

- ✔ Em relação ao item (a), apenas 10 dos 41 alunos (24%) efetivaram o registro em linguagem pictórica da igualdade $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$ **.** Quanto às outras soluções apresentadas podemos afirmar que 18 dos 31 alunos dividiram os círculos em partes desproporcionais; 6 dos 31 alunos dividiu em partes proporcionais mas não coloriu as frações solicitadas em cada um deles. Neste mesmo item 5 dos 31 dividiu os círculos corretamente, no entanto coloriu todas as partes, conforme ilustra a Figura 45. Enquanto 2 dos 31 alunos, que se equivocaram ao responder a atividade, dividiram os círculos corretamente mais não coloriram nenhuma das frações (seções) dos círculos.

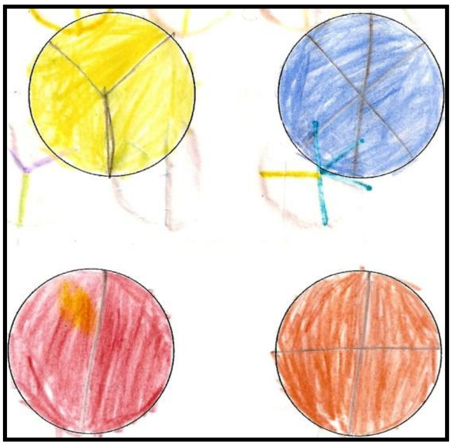


Figura 45: Extrato do protocolo n.º 15 referente à solução da atividade 7

- No que diz respeito ao item (b), a frequência de respostas corretas corresponde a 23 dos 41 alunos (56%), efetivaram o registro em linguagem pictórica da igualdade $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$.

  Quanto às outras soluções apresentadas podemos afirmar que 6 dos 18 alunos dividiram os círculos em partes desproporcionais; 6 dos 18 alunos dividiram em partes proporcionais, mas, não coloriu as frações solicitadas. Outros 4 dividiram os círculos corretamente, no entanto, coloriu todas as frações dos círculos. Enquanto, 2 dos 31 alunos, que se equivocaram ao responder a atividade, dividiu os círculos corretamente mais não coloriu nenhuma das frações dos círculos.

5.1.3 Análise das atividades da situação de aprendizagem: Sessão 3 – "Reconhecendo frações"

Atividade [5]

- Embora os alunos tenham vivenciado a situação didática anterior (AÇÃO) e manipulado o material concreto oferecido para resolver as atividades da 2ª sessão, os alunos continuaram incorrendo nos mesmos erros, identificados nas atividades propostas anteriormente na sequência didática, no que diz respeito a conversão do registro pictórico das frações sugeridas para a linguagem natural e simbólica fracionária.

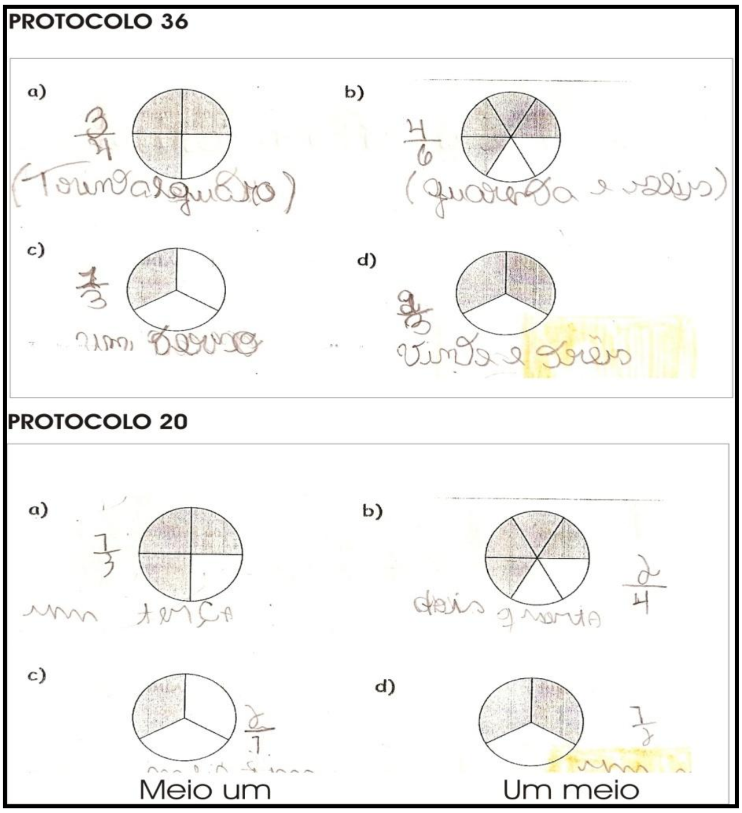


Figura 46: Extratos dos protocolos n.º 36 e 20 relativos à resolução da atividade 1 (3ª Sessão)

- A afirmação anterior advém da constatação de que em relação aos itens sugeridos pelos autores do livro didático, a frequência e os percentuais de respostas bem sucedidas e dos equívocos cometidos pelos alunos correspondem a:

(i) No item (a), 15 dos 40 alunos (38%) apresentaram a resposta esperada, ou seja, o registro simultâneo da fração três quartos. Porém, 6 dos 40 alunos (15%), apresentaram como solução a fração um quarto. E, neste caso o aluno considerou a fração do círculo não colorida como numerador e o total de partes do círculo como denominador. Enquanto, 19 dos 40 alunos (47%) apresentaram como resposta a fração um terço (o numerador equivale à parte não pintada e o denominador a parte colorida no círculo).

(ii) No que se refere ao item (b), a frequência se mantém em relação ao item anterior, pois 15 dos 40 alunos (38%) apresentaram a resposta esperada, ou seja, o registro simultâneo da fração quatro sextos. Todavia, 14 dos 40 alunos (35%), apresentaram como solução a fração um quarto. E, neste caso, o aluno considerou as duas frações do círculo não coloridas como sendo uma única parte e a representou no numerador e o total de partes coloridas do círculo no denominador. Outros 4 dos 40 alunos (10%) registraram a fração dois quartos (parte não pintada / parte pintada). Assim como, outros 4 alunos (10%) apresentaram como solução as frações dois sextos e seis meios (correspondendo as frações não pintadas / total de partes e total de partes/partes não pintadas respectivamente). Enquanto, 3 dos 40 alunos (7%) apresentaram como resposta a fração um sexto (o numerador equivale às duas partes não coloridas enquanto o denominador a corresponde ao total de partes do círculo).

(iii) No item (c), a frequência aumentou para 20 dos 40 alunos (50%). Estes apresentaram a resposta esperada, ou seja, o registro simultâneo da fração um terço. Entretanto, 11 dos 40 alunos (28%), apresentaram como solução 1/1 ou um pedaço. Portanto, um grande número de alunos que consideram a fração azul do círculo como a unidade, uma parte ou uma fatia do inteiro contínuo. Enquanto, 7 dos 40 alunos (18%) apresentaram como resposta a fração 1/2 (um meio) ou 2/1 (o numerador equivale à parte pintada e o denominador ao total de partes não coloridas do círculo). Um dos alunos que realizaram a atividade (2%) registrou neste item a fração dois terços (o numerador corresponde a quantidade de partes coloridas no círculo e o denominador equivale a parte não

colorida). E, outro aluno (2%) deixou de efetuar os registros referentes à fração um terço.

(iv) No item (d) 19 dos 40 alunos (48%) atenderam as expectativas registrando a fração dois terços. Porém, 18 dos 40 alunos (45%) registrou a fração um meio (numerador equivale a parte não pintada e o denominador ao total de partes pintadas do círculo). Enquanto, 3 dos 40 alunos (7%) efetuaram os registros da fração um terço. Neste caso, os alunos consideraram o numerador como a parte não colorida (1) e o denominador como o total de partes do círculo (3).

- ✔ O tratamento dos dados sinaliza que os alunos fazem confusão ao efetuar o registro porque consideram a relação parte/parte e não a relação parte/todo. No extrato do protocolo n.º 36 da Figura 47, verificamos que o aluno atendeu a uma das variáveis de comando: *"*[...] *diga qual a fração que corresponde à parte pintada da figura..."* efetuou corretamente a conversão do registro pictórico para o registro simbólico fracionário. Porém, as respostas do aluno em relação à nomenclatura das frações solicitadas, não obedecem à variável de comando: "[...] *escreva o nome dessa fração."* Os registros em linguagem natural denotam que o aluno ainda não se apropriou desse conhecimento (ler frações). Neste caso, a leitura da fração três quartos, por exemplo, corresponde a trinta e quatro. Ou seja, em todos os itens o aluno reconhece o numerador como a ordem das dezenas e o denominador como a ordem das unidades, de acordo com as regras do Sistema de Numeração Decimal.

- ✔ Em outro exemplo contido na Figura 46 (protocolo n.º 20), podemos observar que o aluno já se apropriou do modo de nomear frações. No entanto, ao converter do registro pictórico para o simbólico fracionário o aluno considera como termos da fração a quantidade de partes que não estão coloridas para representar o numerador e o total de partes coloridas é concebido como denominador. Portanto, este erro é trivial no sentido das conversões (linguagem pictórica→linguagem simbólica fracionária→linguagem natural), exigidas no estudo das propriedades relativas ao número racional, referem-se às correlações entre as partes pintadas/não pintadas que repercutem na aprendizagem do significado parte/todo.

- ✔ Estes efeitos identificados e descritos, referente à realização das conversões entre os diferentes registros de representação do número racional fracionário, corroboram para reforçar a tese de que o sentido da conversão (linguagem pictórica→linguagem simbólica fracionária→linguagem natural) traz uma série de dificuldades à aprendizagem dos aspectos relativos ao número racional, especialmente no que diz respeito a notação e a nomenclatura. Nesse sentido, se faz necessário a intervenção do professor na proposição de outros contextos, novas situações didáticas, no resgate a memória didática e a institucionalização da funcionalidade e das propriedades características do número racional para que o aluno perceba e compreenda a relação parte/todo possibilitando assim nomear e escrever a notação das frações. E, posteriormente construa uma teia de conceitos e relações pertinentes que favoreçam a apropriação de outros significados do número racional.

Atividade [6]

- ✔ Assim como, antecipamos na análise preliminar da atividade, as dificuldades enfrentadas ao efetuar a conversão, do registro pictórico para o simbólico fracionário e em linguagem natural, são as mesmas detectadas nas atividades desenvolvidas anteriormente sobre um contexto em que o inteiro corresponde a uma grandeza contínua, independentemente de o inteiro ser representado por uma região poligonal (quadrado, retângulo, por exemplo) ou não poligonal (círculo). Pois, ao registrar a notação e atribuir a nomenclatura para as frações solicitadas os alunos tendem a considerar a parte pintada e não pintada na disposição dos termos da fração. Ao que tudo indica a minoria deles considera a relação parte todo, possivelmente pelo fato de não ter havido nenhuma intervenção intencional da professora regente com a finalidade de institucionalizar o modo correto de efetuar os registros de representação concernentes ao número racional fracionário.

- ✔ Como podemos observar no fragmento do protocolo de um dos alunos, exibido na Figura 47, o registro das frações coloridas de vermelho e amarelo o aluno descarta o total de partes em que o inteiro (retângulo) foi dividido. De modo que no item (a) o aluno registra 1/2 como a fração correspondente a fração vermelha do retângulo. Neste caso, ele considera que há apenas uma parte vermelha (numerador) e duas são amarelas (denominador). Por via de regra, no item (b) este aluno escreve a notação um terço como o registro correspondente a porção amarela do retângulo. E, neste caso o numerador corresponde a parte não amarela (1) e o denominador equivale ao total de partes coloridas (3).

Figura 47: Extratos do protocolo n.º 33 relativo
à resolução da atividade 2 (Sessão 3)

- Assim sendo, apresentamos a frequência e os percentuais referentes às soluções exitosas e fracassadas identificadas nos protocolos dos alunos:

(i) *No item (a) 22 dos 40 alunos (55%) apresentaram a solução esperada o registro da fração dois quintos predominantemente mediante a utilização da linguagem simbólica fracionária. Sendo que 14 dos 40 alunos (35%) registraram as frações 2/1 (2 alunos), 1/2 (9 alunos ou 2/2 (3 alunos). Enquanto, 4 dos 40 alunos (10%) efetuaram o registro da fração 3/1. Portanto, os percentuais indicam que os alunos continuam cometendo os mesmos equívocos identificados nas atividades similares realizadas anteriormente. Esses erros tornam a ressurgir quando o aluno considera a relação parte/parte ao invés da relação parte/todo no registro das frações sugeridas.*

(ii) *No item (b) 15 dos 40 alunos (38%) foram bem sucedidos na realização da conversão exigida. No entanto, 11 dos 40 alunos (28%) registraram a fração um terço. 6 dos 40 alunos (15%) apresentaram o registro da fração dois terços. Outros 5 alunos (12%) efetuaram o registro da fração um meio. Além disso, 1 dos 40 alunos (2%) afirmou que a fração pintada no retângulo corresponde a 3 unidades. E, 2 alunos (5%) não responderam este item. Portanto, os erros identificados na resolução deste item se assemelham aos descritos no item anterior.*

Atividade [7]

- As informações contidas na Tabela 1 ratificam alguns argumentos relativos aos efeitos derivados das variáveis didáticas inerentes a atividade proposta. E, por isso destacamos que a baixa incidência de erros por parte dos alunos na realização da atividade deve-se ao fato de que:

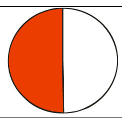
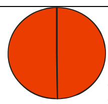
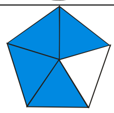
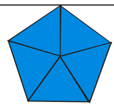
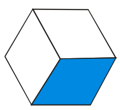
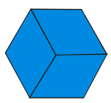
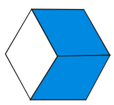
1. *A atividade vem sendo exercitada desde os primeiros anos da escolaridade. Pois, constituí uma situação bastante frequente nos livros didáticos e nas práticas docentes no ensino e na aprendizagem das frações.*

2. *As formas geométricas sugeridas na atividade já estavam divididas em partes iguais.*

3. *O sentido da conversão (registro simbólico fracionário→ registro figural), favoreceu a associação entre a quantidade de partes em que a figura foi dividida e a(s) parte(s) que deveria(m) ser coloridas. Consequentemente, a relação parte/todo se torna mais evidente.*

✔ De acordo com os dados apresentados na Tabela 1, tanto no item (a) quanto no item (b), 39 dos 40 alunos (98%) atenderam às expectativas apresentando o registro correto das frações indicadas na atividade. No entanto, em ambos os casos 1 aluno apresentou uma resposta incompatível com a variável de comando *"[...] Pinte a fração a fração indicada."*, colorindo inteiramente as regiões correspondentes ao círculo e ao pentágono, respectivamente. No que se refere à ação de colorir metade do círculo, proposta no item (a), os alunos antecipadamente já haviam visualizado e registrado essa fração em diversos momentos da 2ª sessão da sequência didática (AÇÃO). Por este motivo, acreditamos que a atividade não representa qualquer obstáculo para o aluno. Mesmo que este ainda não tenha se apropriado do significado parte/todo do número racional.

Tabela 1
Demonstrativo das frequências e percentuais relativos à atividade 3 da 3ª sessão

<table>
<tr><th>Item</th><th colspan="2">Respostas Esperadas</th><th>Frequência</th><th colspan="2">Respostas Incompatíveis</th><th>Frequência</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>$\frac{1}{2}$ (Um meio)</td><td></td><td>39 Alunos (98%)</td><td colspan="2"> Inteiro</td><td>1 Aluno (2%)</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$\frac{4}{5}$ (Quatro quintos)</td><td></td><td>39 Alunos (98%)</td><td colspan="2"> Inteiro</td><td>1 Aluno (2%)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">c)</td><td rowspan="2">$\frac{1}{3}$ (Um terço)</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">31 Alunos (78%)</td><td> Inteiro</td><td> 2 partes</td><td rowspan="2">9 Alunos (22%)</td></tr>
<tr><td>5 Alunos</td><td>4 Alunos</td></tr>
</table>

- Muito embora, 31 dos 40 alunos (78%), tenham respondido satisfatoriamente o item (c) da atividade, outros 9 alunos (22%) interpretaram o polígono (hexágono) como sendo um poliedro (hexaedro). Mesmo dentro de uma margem relativamente discreta de respostas incompatíveis com a expectativa dos autores, a disposição e a divisão do hexágono da atividade, repercutiu nas estratégias adotadas por alguns alunos no momento de colorir a figura.

- Nos extratos dos protocolos n.º 20, 38 e 41, apresentados na Figura 48, observamos três respostas distintas para o mesmo item. No entanto, todas elas denunciam que a percepção do aluno em relação à figura geométrica proposta no item (c) corresponde ao hexaedro, que os alunos reconhecem como cubo. No protocolo n.º 20 o aluno pintou duas frações da figura, o que poderia ser justificado pelo fato do poliedro apresentar seis faces. E, portanto um terço dessas faces corresponde a duas unidades. Por outro lado, o modo como o do aluno coloriu a figura no protocolo n.º 38 nos leva a crer que o mesmo visualizou uma "caixa" cúbica ao invés do hexágono. E talvez tenha pintado todas as partes porque considerou apenas o denominador da fração. Enquanto, no protocolo n.º 41 identificamos a tentativa de um dos alunos em planificar o hexaedro (cubo). Nessa tentativa, o aluno desenhou quatro faces do poliedro e resolveu colorir na figura apenas uma das frações, muito provavelmente este aluno ocasionalmente apresentou a resposta esperada embora o raciocínio do mesmo o conduzisse a uma solução indesejada devido à própria percepção geométrica em relação ao polígono sugerido na atividade.

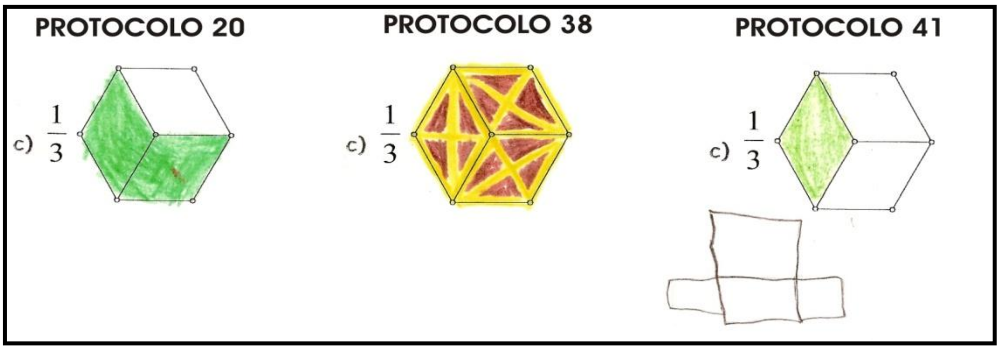


Figura 48: Extratos dos protocolos n.º 20, 38 e 41 relativos
à resolução da atividade 7 (Sessão 3)

- Vale ressaltar que os autores na coleção reformulada, promoveram uma pequena modificação nesta atividade. Mais precisamente no sentido da conversão do registro simbólico fracionário, mas as formas geométricas são mantidas conforme a Figura 49.

Diante das estratégias mobilizadas e dificuldades detectadas na resolução da atividade essa alteração do exercício apenas evitará que os alunos pitem a figura por inteiro. Uma vez que ficou constatada a dificuldade em desenhar as formas geométricas para representar as frações sugeridas. Além disso, é possível que a interpretação do polígono utilizado pelos autores no item (c) continue sendo ambígua, já que a posição e a divisão dessa forma poligonal foram mantidas.

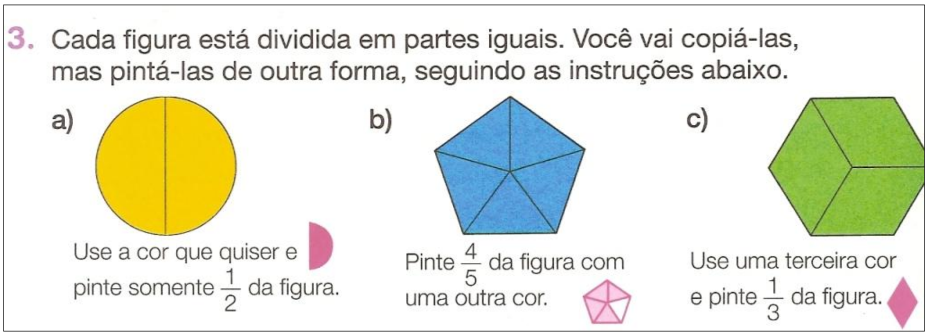


Figura 49: Atividade 3 do volume do 4º Ano da Coleção Matemática (Projeto Conviver)
Fonte: Milani et al (2010, p. 122)

Atividade [8]

- A intencionalidade didática, que figura como pano de fundo das escolhas dos autores do livro didático, ao propor esta atividade consiste na expectativa de que os alunos reproduzam a definição de número racional veiculada e reforçada nos enunciado, nos exemplos, nas ilustrações e nos textos que constituem as atividades e exercícios do início ao final da sequência didática. A noção de fração, que vigora na sequência didática, é aquela que advém do significado parte/todo do número racional. Ou seja, o estudo do número racional inicia a partir da fração resultante da divisão do inteiro, predominantemente contínuo, em partes iguais.

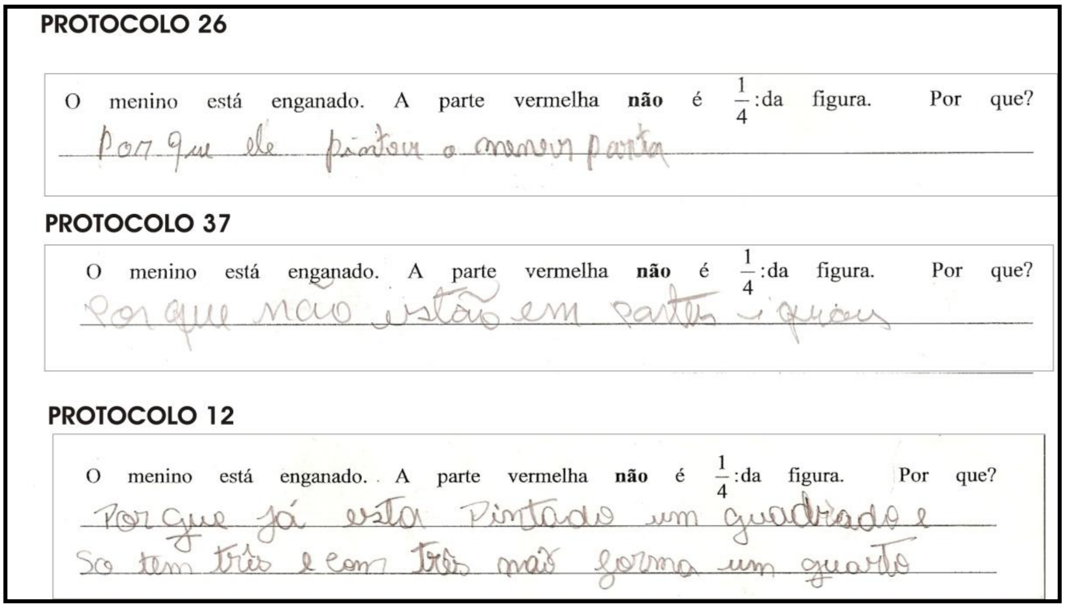
- Portanto, contraditoriamente ao que havíamos previsto a maioria dos alunos não foi bem sucedida na execução da tarefa sugerida pelos autores da sequência didática. A frequência e os percentuais relativos das respostas registradas nos protocolos pelos alunos correspondem a:

(i) 7 dos 40 alunos (18%) após observarem a divisão do retângulo afirmam que o polígono não foi dividido em partes iguais, com argumentos similares ao do protocolo n.º 37 da Figura 50.

(ii) 27 dos 40 alunos (68%) formularam justificativas incoerentes, como por exemplo, o argumento apresentado no protocolo n.º 26 da Figura 50.

(iii)5 dos 40 alunos (12%) argumentaram em relação à divisão da forma poligonal (retângulo), porém foram inconclusivos. Para exemplificar o tipo de resposta apresentada poderemos nos basear n o argumento do protocolo n.º 12 da Figura 50.

(iv) 1 aluno não apresentou qualquer justificativa para o fato da personagem da ilustração ter se enganado ao afirmar que a fração corresponderia a um quarto do polígono.


PROTOCOLO 26

O menino está enganado. A parte vermelha **não** é $\frac{1}{4}$:da figura. Por que?

Por que ele pintou a menor parte

PROTOCOLO 37

O menino está enganado. A parte vermelha **não** é $\frac{1}{4}$:da figura. Por que?

Porque não estão em partes iguais

PROTOCOLO 12

O menino está enganado. A parte vermelha **não** é $\frac{1}{4}$:da figura. Por que?

Porque já esta Pintado um quadrado e So tem três e com três mais forma um quarto

Figura 50: Extratos dos protocolos n.º 12, 26 e 37 relativo
à resolução da atividade 8 (3ª Sessão)

Atividade [9] e [10]

- Em relação à atividade 9 podemos afirmar que, assim como havíamos previsto na análise preliminar, os autores apostam que os alunos serão capazes de estimar uma fração do inteiro contínuo (representado por uma região retangular). Uma vez que o polígono (retângulo) foi fracionado em 3, 4 e 5 partes em diferentes contextos. Porém, os retângulos das atividades apresentam aproximadamente as mesmas dimensões e estão dispostos em posições prototípicas, assim como o muro que ilustra a atividade 9. Assim sendo, apresentamos em seguida a frequência relativa e os respectivos percentuais referentes às respostas apresentadas pelos alunos nessa atividade:

(i) *No item (a) 34 dos 40 alunos (85%) estimaram que dois terços (2/3) do muro havia sido pintado. Ou seja, apresentaram a resposta esperada. Muito embora, 3 dos 40 alunos (8%) afirmaram que a fração pintada equivaleria a um quarto do muro. 2 alunos (5%) registraram que metade (1/2) do muro havia sido pintada. Enquanto, um dos alunos (2%) não apresentou nenhuma resposta para este item.*

(ii) *No item (b), apenas 13 dos 40 alunos (33%) corresponderam as expectativas, pois, estimaram que faltava pintar um terço (1/3) do muro. No entanto, 16 dos 40 alunos (40%) afirmaram que essa fração do muro corresponderia a um quarto (1/4). Outros 8 alunos (20%) registraram que faltava pintar um pedaço ou uma parte do muro. Enquanto, 2 dos 40 alunos (5%) afirmaram que a fração equivaleria à metade (1/2) do muro. Assim como, no item anterior um dos alunos (2%) não respondeu a atividade.*

- Na atividade 10 a ilustração o mostrador de combustível corresponde a um semicírculo e as frações, que indicam o volume contido no tanque, são identificadas pelo jogo de cores com o intuito de facilitar a leitura e a compreensão das informações fornecidas por este instrumento (o odômetro do automóvel). Porém, este subterfúgio utilizado pelos autores parece não ter favorecido a resolução do item (a), pois, apenas 15 dos 40 alunos (38%) afirmaram que mais da metade do tanque de combustível estava cheio. 19 dos 40 alunos (48%) disseram que havia menos de meio tanque de combustível. 4 alunos (10%) afirmaram que o tanque estava cheio. E, embora o questionamento já induzisse a possível resposta ("*O combustível ocupa mais ou menos que 1/2 do tanque?"),* um dos alunos (2%) escreveu que um quarto do tanque estava cheio. Enquanto, outro aluno (2%) deixou de responder.

- No item (b) da atividade 10 a pergunta a ser respondida é: *"Que fração do tanque está cheia?"* E, nesse caso, apenas 3 dos 40 alunos (8%) apresentaram o registro da fração 3/5. Entretanto, 15 dos 40 alunos (38%) afirmaram que a fração do tanque corresponderia a um terço do total. Outros 6 alunos (15%) escreveram frações correspondentes ao inteiro (2/2 e 3/3). Enquanto 9 dos 40 alunos (23%) registraram as frações dois terços (4), três quartos (3) e um quarto (2). Como podemos perceber os alunos continuam repetindo os erros que emergiram em atividades que precederam a atual quanto o sentido da conversão corresponde a transição do registro figural para o simbólico fracionário. O jogo de cores não oportunizou a progressão das aprendizagens da maioria dos alunos em relação ao significado parte/todo do número racional. Pois, os alunos ao efetuarem o registro simbólico das frações solicitadas continuam levando em consideração a relação parte/parte em detrimento da relação parte/todo.

- É fato que os contextos realísticos, nos quais as evidências da funcionalidade do número racional fracionário possam ser reconhecidas, são escassos. Bem como, que a utilização do odômetro dos veículos (que é um dos poucos instrumentos cujos parâmetros para medição são frações), como contexto realístico para abordar diferentes registros de representação nos parece inadequado para o público ao qual se destina. Uma vez que, o livro didático é destinado predominantemente às crianças das escolas públicas do país que na maioria dos casos não conhecem e não têm acesso a esse tipo de instrumento de medida. Como podemos verificar na frequência e nos percentuais de respostas inadequadas para os itens propostos nessa atividade o desempenho dos alunos insatisfatório. Portanto, seria plausível que esta atividade foi subtraída pelos autores da sequência didática contida na reformulação da nova coleção (Projeto Conviver).

Atividade [11]

- Das 19 atividades que compõem a sequência didática proposta no livro de Matemática para o ensino e a aprendizagem do significado parte/todo do número racional apenas 2 exploram contextos em que o inteiro corresponde a quantidades de natureza discreta. E, embora as quantidades discretas façam parte do universo do aluno, muito antes de ingressarem na escola, uma vez que a criança começa a contagem de pequenas quantidades muito precocemente. Em si tratando de estabelecer a relação parte/todo com quantidades discretas o aluno não consegue transpor ou acionar os conhecimentos que dispõe em relação às grandezas contínuas. Eles, por exemplo, dividem um polígono em partes iguais, mas não conseguem associar que a mesma partilha poderá ser realizada com uma quantidade de objetos de uma coleção.

- O contexto utilizado na atividade: coleção, conjunto, grupo ou equipe é familiar ao aluno que nesse nível já conserva quantidades ou grandezas de natureza discreta. Neste caso, cada equipe de ginastas foi dividida em três grupos compostos por cinco pessoas totalizando 15 atletas. Sendo assim, os alunos não apresentarão dificuldades para responder os itens (a) e (b). E, portanto presumimos que a estratégia a ser adotada pela totalidade dos seja de fato a contagem dos atletas e das equipes, uma vez que o jogo de cores favorece essa prática. Consequentemente, nestes itens da atividade é provável que não sejam identificados erros.

- As antecipações da análise preliminar da atividade, em relação aos itens (a) e (b) se confirmaram, pois o fato das equipes serem diferenciadas pelas cores dos seus uniformes propiciou a contagem do total de atletas (15) e das equipes (3). No item (a) os 40 alunos (100%) apresentaram a solução esperada. Enquanto, no item (b) 36 dos 40 alunos (90%) foram bem sucedidos na contagem. Entretanto, 4 dos 40 alunos (10%) afirmaram que a quantidade de equipes corresponderia a 5 atletas (3) ou 15 atletas (1).

- Como antecipamos na análise preliminar o fato da ilustração exibir os três grupos, contendo cinco atletas em cada, devidamente separados pelas cores dos uniformes, facilitou apenas a contagem dessas quantidades na apresentação das respostas dos itens (a) e (b). No entanto, o aluno não percebeu que poderia aproveitar essas escolhas didáticas dos autores para estabelecer as devidas correspondências entre o registro pictórico e o simbólico fracionário do número racional. O estabelecimento da conexão entre o jogo de cores (grupos de atletas), versus a notação fracionária dessa quantidade discreta possibilitaria a resolução dos itens (c) e (d). Ou seja, a percepção da relação parte (grupo de 5 ginastas) / todo (equipe de 15 ginastas), os conduziria a resposta esperada em ambos os itens mencionados, porém:

(i) No item (c) nenhum aluno efetuou o registro da resposta esperada: um terço (1/3) ou cinco quinze avos (5/15). Entre os registros efetuados equivocadamente pelos alunos, destacamos que 32 dos 40 alunos (80%) responderam que a fração de atletas com camiseta azul corresponde a 1/5 do total. E, neste caso, os alunos não consideraram o total de atletas (15), mas a quantidades de componentes da equipe azul (5). 7 dos 40 alunos (18%) afirmaram que a fração de atletas vestidos de azul corresponde a 5, 1, 2/5 ou 2/3. Enquanto, um dos alunos (2%) não representou a fração solicitada.

(ii) No item (d), o fato da palavra ***"não"*** *ser destacada em negrito surtiu o efeito desejado, pois mesmo apresentado soluções incompatíveis em relação ao que foi questionado nesse item todos os alunos desconsideraram o grupo de uniforme amarelo na escrita do registro simbólico da fração. Porém, em relação ao questionamento: "Que fração* **não** *usa camisa amarela?", apenas 1 dos 40 alunos (2%) registrou na ficha de atividades a resposta*

esperada (2/3). Neste item, 3 dos 40 alunos (8%) não efetivaram nenhum registro referente à fração solicitada. Enquanto, 36 dos 40 alunos (90%) fracassaram na tarefa de realizar a conversão entre os registros de representação no sentido sugerido (registro pictórico → registro simbólico fracionário). Constatamos, portanto que a maioria dos erros na efetivação do registro simbólico de uma fração ocorre devido ao aluno observar a relação parte/parte ao invés de considerar a relação parte/todo. Assim sendo, entre as respostas incoerentes apresentadas neste item, destacamos que:

- ✔ *8 dos 36 alunos (23%) registraram a fração dois décimos (2/10). Pois, nesse caso, os alunos mediante a contagem consideraram que as equipes azul e vermelha têm juntas 10 atletas. Portanto, estas quantidades foram utilizadas, por eles como termos da fração de atletas cujo uniforme não é amarelo.*

- ✔ *12 dos 36 alunos (33%) afirmaram que a fração de atletas cujos uniformes não são amarelos correspondem a uma unidade (1) e metade deles registraram a fração dois quintos (2/5). Consequentemente, neste último registro o numerador (2) corresponde a um atleta de cada cor (vermelha e azul) e o denominador (5) a quantidade de animais de cada grupo.*

- ✔ *16 dos 36 alunos (44%) apresentaram outras soluções, entre as quais a fração um quinto (4), um meio (4), um terço (2), um décimo (2) ou um nono (4).*

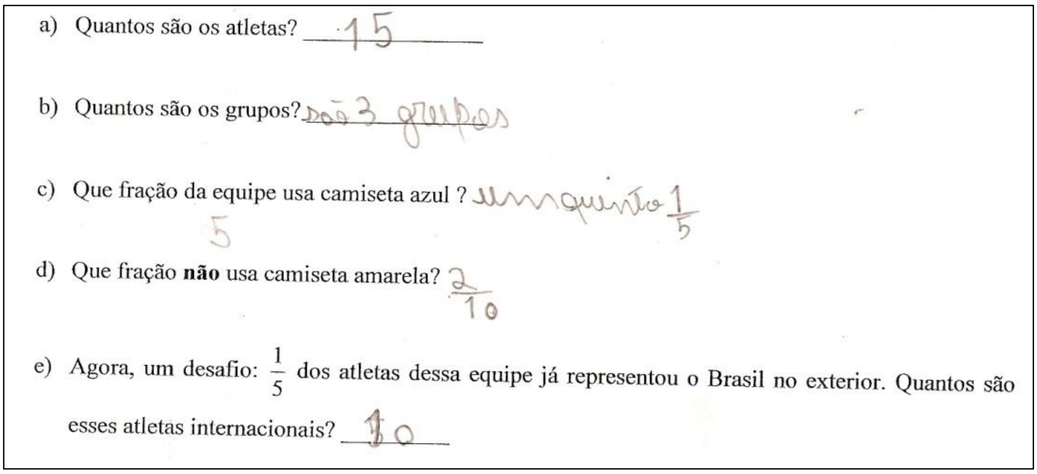
- ✔ *No item (e)* nenhum aluno conseguiu determinar um quinto do total de atletas. Além disso, não identificamos nos protocolos dos alunos, qualquer indício de que tenham utilizado as estratégias ou procedimentos mencionados na análise prévia deste item, como dividir a quantidade de atletas (15) circulando subgrupos contendo 5 ginastas em cada um. É pertinente ressaltar que a quantidade de atividades em que o inteiro corresponde a uma quantidade discreta, nessa sequência didática, está restrita a apenas três tópicos: os itens (b) e (c) da atividade 4 da 1ª sessão e o item (e) da atividade 11, sob alegação dos autores de que a determinação de frações de quantidade discretas será intensificada em um capítulo posterior denominado "*Frações de quantidade.* Acreditamos que a escolha didática dos autores de postergar o cálculo de frações de quantidades discretas, possivelmente tanto promoveu a dificuldade com relação à apropriação quanto limitou a compreensão da aplicabilidade do significado parte/todo do número racional quando o contexto é discreto. Como podemos constatar na frequências e nos respectivos percentuais das respostas identificadas nos protocolos dos alunos.

- *12 dos 40 alunos (30%) registraram que um quinto da quantidade de atletas corresponderia a 5 ginastas. Portanto, os alunos possivelmente consideraram a quantidade de ginastas em cada um dos grupos, independentemente das cores dos uniformes.*

- *15 dos 40 alunos (38%) afirmaram que quinze ginastas corresponderiam à quantidade de atletas que competiram no exterior representando o país. Neste caso, especificamente a maioria dos alunos considerou o total de atletas fornecido no enunciado do problema.*

- *6 dos 40 alunos (15%) responderam que a quantidade de atletas que competiram no exterior corresponderia a 10 pessoas, conforme o extrato do protocolo exibido na Figura 49. Acreditamos que, embora o aluno não tenha registrado o algoritmo da subtração, é possível que o mesmo tenha feito o cálculo mental (15 – 5 = 10) ao apresentar essa solução. Assim sendo a fração um quinto foi interpretada como equivalente a 5 unidades inteiras.*

- *7 dos 40 alunos (17%) registraram nos seus protocolos outras soluções para o mesmo problema, entre as quais destacamos as frações dois quintos (3), um terço (3) e um quinto (1).* Nas respostas apresentadas pelo aluno no protocolo n.º 22, ilustrado na Figura 51, exemplificam os efeitos didáticos descritos anteriormente.


a) Quantos são os atletas? 15

b) Quantos são os grupos? são 3 grupos

c) Que fração da equipe usa camiseta azul ? um quinto $\frac{1}{5}$ 5

d) Que fração **não** usa camiseta amarela? $\frac{2}{10}$

e) Agora, um desafio: $\frac{1}{5}$ dos atletas dessa equipe já representou o Brasil no exterior. Quantos são esses atletas internacionais? 10

Figura 51: Extrato do protocolo n.º 22 relativo à resolução da atividade 11

Atividade [12]

- A intenção de reforçar a noção de fração veiculada ao longo de toda a sequência didática não surtiu o efeito desejado. Afinal, mesmo após terem realizado todas as dezenove atividades propostas no livro didático, os alunos não foram bem sucedidos na resolução da atividade que encerra a sequência. E, embora os alunos tenham manipulado o material concreto e realizado diversas atividades em que frações do círculo estavam inseridas, a eficiência das estratégias e dos procedimentos utilizados na obtenção da solução dessa atividade foi comprometida.

- A ilustração suporte da atividade sugere que uma pizza foi dividida em seis partes iguais. Mas, na forma só havia três fatias e no prato de uma das personagens mais uma fatia. Dessa forma, os autores intencionavam que os alunos percebessem o princípio da invariância. Afinal, a soma das fatias/frações da pizza reconstituiria o inteiro contínuo: a pizza. Todavia, este aspecto da atividade não foi abordado pela professora regente no momento da aplicação da atividade nem tão pouco pelos alunos. No entanto, se uma discussão o princípio da invariância fosse desencadeada, provavelmente teria repercutido numa frequência maior de respostas coerentes para os questionamentos elencados nos itens que integram a atividade.

- Por exemplo, no item (a) apenas 2 dos 40 alunos (5%) apresentaram a solução esperada, respondendo que havia 1/6 (um sexto) da pizza no prato da menina. Com relação aos registros equivocados registrados nos protocolos no item (a) da atividade, destacamos que:

(i) Em contrapartida, 27 dos 40 alunos (68%) afirmaram que a fração no prato corresponderia a uma fatia, uma parte ou a uma unidade. Neste caso, tudo leva a crer que os alunos reproduziram uma das expressões utilizadas no cotidiano.

(ii) 9 dos 40 alunos (23%) disseram que a fatia no prato equivaleria a 1/3 (um terço) da pizza. E, ao que tudo indica não consideraram a pizza inteira (seis fatias), mas a quantidade de fatias no prato (1) e a quantidade de fatias que restou na forma (3) para representar os termos da fração.

(iii) 2 dos 40 alunos (5%) afirmaram que a fração no prato da menina equivaleria à metade (1/2). Talvez a confusão desses alunos resida no fato de considerarem a quantidade de fatias da forma ao invés da quantidade de fatias no prato da menina.

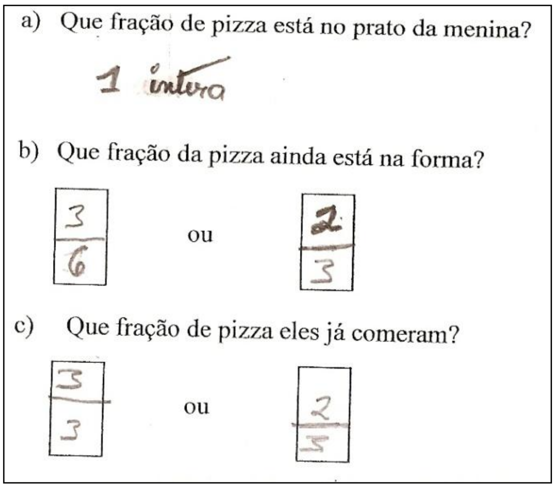
- No que se refere à equivalência entre frações podemos afirmar que esse aspecto não foi compreendido pelo aluno. Mesmo sabendo que estes realizaram duas atividades (atividade 6 e 7 da 2ª Sessão da sequência didática), similares a esta, nas quais a equivalência também é estabelecida entre as frações do círculo, o aluno apresentaria dificuldade em efetuar o registro das igualdades: $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}\,e\,\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$ apenas pela indicação do conectivo "***ou***".

- De fato, como presumimos na análise preliminar da atividade, os itens (b) e (c) foram parcialmente respondidos. A maioria dos alunos apresentou como solução pelo menos um dos registros das frações equivalentes a quantidade de fatias que ainda está na forma (item b), e analogamente a fração correspondente a quantidade de fatias que as pessoas haviam consumido (item c). Portanto, relacionamos em seguida as frequências relativas às respostas identificadas nos protocolos dos alunos em ambos os itens:

  - *No item (b), em relação à resposta esperada, 14 dos 40 alunos (35%) registraram a fração 1/2 (um meio) para representar a fração que restou na forma. Enquanto, 3 dos 40 alunos (7%) efetuaram o registro da fração 3/6 (três sextos). Agora, no que se refere às respostas incompatíveis diante do questionamento proposto neste item, 23 dos 40 alunos (58%) efetuaram múltiplos registros. Porém a maior incidência corresponde a: três fatias, três partes ou três pedaços.*

  - *No item (c), 28 dos 40 alunos (70%) corresponderam parcialmente às expectativas escrevendo na linguagem simbólica uma das frações da igualdade. Nesse caso, os alunos apresentaram o registro da fração 1/3 (um terço) para simbolizar a quantidade consumida do inteiro (pizza). Porém, 11 dos 40 alunos (28%) forneceram diferentes registros para a fração solicitada, entre os quais predominam como resposta: duas fatias, duas partes ou dois pedaços.*

- No extrato do protocolo n.º 12, exibido na Figura 52, é possível verificar que no item (a) o aluno considerou que a porção no prato da menina corresponderia a uma fatia inteira. No item (b) este mesmo aluno apresenta uma das frações esperadas. No entanto, não consegue estabelecer uma relação de equivalência com a metade da pizza, que constitui parte da ilustração que serve como suporte para a realização da atividade. No item (c), no registro da primeira fração foram consideradas as fatias do prato da menina e que já foram consumidas como sendo o numerador da fração enquanto as fatias que restavam na forma (3) ocuparam na notação a posição do denominador. O segundo registro, corresponde a uma segunda tentativa de registrar a fração da pizza que já foi consumida. E, neste caso, o aluno registra o numerador a partir da quantidade que realmente já foi consumida (2), porém ao dispor o denominador da fração desconsidera o total de fatias em que a pizza foi dividida (6) e considera apenas as fatias que restaram na forma (3). Dessa forma, ressaltamos que assim como em outras atividades cujo sentido da conversão obedece a sequência: registro pictórico $\rightarrow$ registro simbólico fracionário, o aluno se agarra na relação parte/parte e não na relação parte/todo. Bem como, fica evidente que partir do pressuposto de que os alunos associariam o conectivo "ou" ao efetivo registro de frações iguais escritas de modo diferente foi um equívoco. Uma vez que as atividades sugeridas na sequência didática sobre comparação e equivalência de frações foram insuficientes para consecução dos objetivos que se encerram nessa atividade específica.


a) Que fração de pizza está no prato da menina?

1 inteira

b) Que fração da pizza ainda está na forma?

$\frac{3}{6}$ ou $\frac{2}{3}$

c) Que fração de pizza eles já comeram?

$\frac{3}{3}$ ou $\frac{2}{3}$

Figura 52: Extrato do protocolo n.º 12 relativo à resolução da atividade 12

5.2 Análise a priori das atividades que integram a sequência didática da situação de avaliação

A idéia de (re) aplicar algumas das atividades sugeridas pelos autores do livro de Matemática, para o ensino do significado parte/todo do número racional emergiu da necessidade de trazer mais fidedignidade à análise dos dados oriundos da aplicação da sequência didática por meio da investigação acerca da ocorrência dos seguintes aspectos:

(i) No manual do livro didático os autores instruem o professor para que promovam a interação dos alunos com o dispositivo de modo individual sob alegação de que esta postura do professor acaba favorecendo o desenvolvimento da autonomia dos alunos.

Porém, como já mencionamos no percurso metodológico, a professora regente resolveu romper com o plano de aplicação que foi acordado com a pesquisadora. E, resolveu coordenar a aplicação da sequência didática original com os alunos dispostos em pequenos grupos. Nesse sentido, emerge a primeira questão: *A influência das variáveis didáticas no afloramento dos efeitos didáticos independe do tipo de interação (individual ou coletiva), com o dispositivo de ensino (sequência didática)?*

(ii) Durante o processo de aplicação da sequência didática, percebemos que durante as sessões alguns alunos apagavam suas respostas, uma vez que em alguns casos havia mais de uma possibilidade de solução para o mesmo problema, às questões iniciais e registravam apenas a(s) resposta(s) sugerida(s) pelo “líder” do grupo. Este aluno, de modo geral, assumia para si a função de convencimento dos seus pares quanto à padronização das respostas aos problemas. Na maioria das vezes, identificamos que o poder de convencer os demais alunos era exercido com veemência, sob o argumento de que as suas soluções seriam as mais apropriadas ou que deveria escrever na folha (protocolo) a única solução que satisfaz a situação apresentada. A Figura 53 ilustra a padronização das respostas pelos componentes de um mesmo grupo. Assim sendo, surge a segunda questão: *Até que ponto os efeitos didáticos identificados mediante a análise das respostas fornecidas individualmente nos protocolos pelos alunos dos grupos representam o raciocínio particular ou coletivo diante dos problemas propostos?*

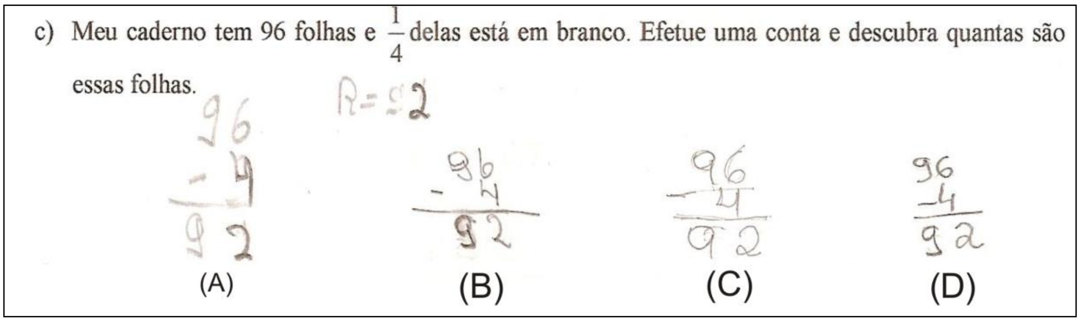


Figura 53: Fragmentos dos protocolos n.º 06 (A), 09 (B), 08 (C) e 04 (D) referentes à solução do item (c) da atividade 4 (1ª Sessão)

(iii) Por outro lado, é possível que o discurso da professora tenha influenciado a ação dos alunos na formulação de hipóteses, na verificação de procedimentos, na validação das soluções para os problemas propostos. Nas interações dialógicas registradas e transcritas, encontramos elementos do contrato didático estabelecido entre os parceiros da relação didática que nos levam na direção de que alguns efeitos emergentes são decorrentes das

cláusulas desse acordo. No trecho do transcrito, no Quadro 7, ilustramos um dos diálogos travados durante a 1ª sessão. Nesse episódio, a professora impõe o modo como os alunos podem proceder na busca de soluções. Uma das regras é explicitamente colocada os alunos só podem conversar com as pessoas que fazem parte do seu grupo, por exemplo. E, a outra clausula está implícita no discurso da professora: caso haja mais de uma solução os alunos devem chegar a um consenso para posteriormente efetuar o registro na ficha de atividades. Dessa forma, surge um terceiro questionamento: *Na ausência de intervenções didáticas seja da professora regente, de qualquer material didático ou das interações dialógicas os efeitos didáticos identificados na aplicação da sequência didática original ressurgem?*

Aluno (D):Tia, ele não entendeu e esta olhando pelo meu. [Inaudível]

(P) Responde: *Não pode ficar olhando para o do colega. Mas, pode conversar. Não é isso? Vocês podem comentar, falar sobre o que eles acham? É essencial, até porque é assim que vocês vão descobrir a resposta... Ta bom? Vocês podem conversar com os colegas do grupo para discutir sobre o que vocês acham que dá certo. Como é que faz a divisão, aí? [Referindo-se a divisão dos sanduíches (quadrados) atividade da 1ª Sessão.] Agora, todos têm que concordar porque se ficar na dúvida aí é complicado pra responder. Pensem e conversem entre vocês. Só não pode conversar com outro grupo. Podem conversar. Pode conversar pra discutir qual seria a solução.*

Quadro 7: Fragmento da transcrição de um dos episódios referente à 1ª parte da 1ª sessão (A)

(iv) Ao aplicar a sequência didática, respeitando as recomendações dos autores, sem que fossem feitas modificações em qualquer escolha didática: contexto, dados, formas geométricas, por exemplo, utilizadas por eles na elaboração dos exercícios e atividades que compõem a sequência didática, vislumbrávamos a possibilidade de identificar e descrever os efeitos didáticos decorrentes das variáveis que mencionamos. Nesse sentido, chamou-nos a atenção o fato dos alunos atenderem plenamente as expectativas quanto às conversões solicitadas, entre os registros de representação (pictórico, simbólico e em linguagem natural), do número racional. E, em outros momentos o desempenho dos mesmos alunos na tarefa de realizar as conversões solicitadas serem extremamente mal sucedidos, apresentando percentuais de acerto muito aquém das expectativas. Elencamos, portanto mais questões em aberto: *Os resultados obtidos, com a aplicação da sequência didática original, denotam efeitos didáticos que revelam as dificuldades individuais ou*

coletivas dos alunos? Estes entraves dependem do sentido das conversões ou são inerentes ao objeto de estudo (o significado parte/todo do número racional)?

As questões mencionadas foram aflorando à medida que avançávamos na análise a posteriori da sequência didática vivenciada em sala de aula com os alunos do 5º Ano do Ensino Fundamental. Portanto, na pretensa tentativa de responder os questionamentos elencados, nos dispomos a repetir a aplicação das atividades da sequência didática, nas quais a frequência em relação às respostas esperadas ficou muito acima da média ou muito inferior a média[30], conforme o Quadro 3 (p.110). Entretanto, não há garantias de que a (re) apresentação de 9 das 19 atividades (47%), nos fornecerá informações precisas e suficientemente satisfatórias para esclarecer as questões anteriormente postas.

Para tanto, consideramos que durante a evolução da aplicação da sequência didática original, que os alunos com mais dificuldade para apropriar-se do significado parte/todo do número racional, em alguns momentos do processo apresentavam-se dispersos ou desmotivados. Vale salientar que uma das maiores dificuldades diagnosticadas no processo se refere à leitura, a escrita e à interpretação de textos. Pois, o aluno ao assumir a tarefa proposta necessita compreender qual é a finalidade da mesma. Assim como, deverá saber qual o percurso a ser trilhado para alcançar esse objetivo.

Além disso, durante a aplicação da sequência didática, configurada como situação de aprendizagem, constatamos que os alunos com mais dificuldade, com relação à apropriação do conteúdo abordado nas situações didáticas, mostravam-se dispersos ou desmotivados, em alguns momentos do processo. Neste sentido, verificamos que estes se limitavam apenas em registrar na ficha de atividades as respostas obtidas por outros alunos, sem a participação ativa na discussão. E, embora tenham ocorrido episódios dessa natureza o trabalho em grupo fluiu de modo produtivo, devido à aceitação da proposta (responder as atividades da sequência didática), pelo fato de estarem numa situação atípica: trabalhar em grupo, realizando atividades em que era necessário colorir figuras, desenhar ou manipular materiais concretos e, ainda, sem se sentirem compelidos a copiar textos, enunciados, ou questões no caderno.

[30] No Quadro 3 apresentamos o índice médio de acerto e erro, relativos às atividades da sequência didática original, os quais constituem os critérios de escolha das atividades que compõem a sequência proposta na situação de avaliação.

Nos registros em vídeos, realizados durante as sessões da sequência didática, também constatamos que embora estivessem agrupados, os alunos apresentam comportamentos individualistas. Pois, alguns deles até posicionam o braço sobre a ficha de atividades para esconder suas respostas. Esta característica predominante dos alunos denota que possivelmente não é frequente na rotina de sala de aula o exercício do trabalho coletivo e colaborativo.

Outro aspecto pertinente nessa investigação diz respeito ao contrato didático, que apesar de não ser o foco desta pesquisa, ressaltamos que a forma como as suas regras foram sendo elaboradas e implementadas, durante a condução do processo de aplicação da sequência didática, estas repercutiram no desempenho dos alunos durante a resolução das atividades sugeridas na sequência didática. E, por conseguinte, as regras de contrato didático fixaram as variáveis e suas cotas, evidenciando alguns efeitos didáticos que na maioria das vezes são danosos à aprendizagem do significado parte/todo do número racional.

Esses efeitos didáticos não se manifestam apenas através das escolhas didáticas, da metodologia adequada, das interações dialógicas, mas também na negociação do contrato didático. De acordo com Brousseau (1996), o controle dessas variáveis pelo professor, é necessário para evitar ou minimizar os efeitos didáticos. E, além disso, esta é uma das atribuições desse profissional. E, por Afinal, o professor se caracteriza como uma espécie de ator que atua segundo um texto, escrito em outro contexto, seguindo suas tradições. E, nesta atividade improvisa na hora da aula em função de um argumento ou da própria trama estabelecida na relação didática.

Portanto, que diz respeito ao contrato didático, firmado entre a professora e seus alunos do 5º Ano do Ensino Fundamental, podemos afirmar que suas cláusulas, em nenhum momento das sessões foram discutidas, negociadas nem tão pouco (re) negociadas. A formação das equipes, por exemplo, não foi aleatória, obedeceu a um critério incontestável: alunos com bom desempenho, desempenho regular e desempenho insatisfatório em relação à aprendizagem dos conteúdos de Matemática. Quando questionada, pela pesquisadora, sobre a constituição dos grupos pelo princípio da afinidade, argumentou que deste modo teríamos menos erros na realização das tarefas.

Outra característica predominante, do contrato didático mencionado, é que durante toda a aplicação da sequência didática a professora tomou para si a função de ler os textos e enunciados que antecedem as atividades, reservando-se ao direito de interromper a leitura todas as vezes que os alunos insistiam em acompanhar em voz alta. Porém, a leitura em voz alta consiste em uma das recomendações dos autores para que o aluno atribua sentido ao enunciado dos exercícios e atividades. No trecho que transcrevemos em seguida (Quadro 8), exemplificamos uma das intervenções da professora regente.

(P) Então, eu posso ler? Posso ler? (Als.) Pode!

(P) Então lá vai: atividade número um. Ninguém conversa, fica prestando atenção à leitura para poder ir logo entendendo como é a pergunta. Está certo? Aqui vocês vêem a gravura, vocês vão responder a atividade se baseando e observando a gravura. [Começa a ler o texto que antecede a atividade] "*Os três*... Quem são os três?

(Als) respondem: os alunos.

(P)Certo! *Os três alunos querem o chocolate mais só havia uma barra*. Então começando, está certo? Vou ler outra vez. Olha para a folhinha (ficha de atividade). Porque, se vocês ficarem conversando aí, perderão a explicação. Olhem para folhinha [aponta a ficha de atividades] Atenção! Olha lá! Lendo outra vez. Atividade número um: *Os três alunos, não é? queriam chocolate, mas só havia uma barra. Qual a solução? Partir a barra em três pedaços iguais. Vamos ver outras situações em que coisas inteiras têm de ser divididas. Usando seu lápis você deve mostrar como se faz a divisão.* Deu para vocês entenderem?

Quadro 8: Fragmento da transcrição do episódio referente
à 1ª parte da 1ª sessão (B)

No episódio anterior à medida que a professora lê a atividade vai impetrando as regras do contrato didático. No entanto, ao definir o papel do professor, Brousseau (1996) comenta que um professor que simplesmente recita, não pode comunicar o essencial e se quisermos fazê-lo deveremos apresentar uma situação didática sem margem para recriações, pois caso contrário, o ensino fracassa.

Neste estudo, ao analisar as das relações didáticas nessa sala de aula, conjecturamos que estas provavelmente foram construídas em terreno instável e oscilavam entre o limiar da incoerência, da insegurança ou da omissão diante dos questionamentos, das dúvidas, dos entraves à aprendizagem e as constantes rupturas de contrato, por parte do aluno.

Além disso, ao revisitarmos esses episódios videografados, percebemos que o jogo didático foi fortemente influenciado pela epistemologia do professor, ou seja, por suas concepções em relação ao objeto matemático (números racionais). Por conseguinte, tal perspectiva pode ter interferido nos resultados apresentados pelos alunos, uma vez que a educadora não possui formação especifica em Matemática. Em um dos trechos dos diálogos travados entre a professora e os alunos durante a 1ª sessão, os quais são exibidos no Quadro 9, é possível identificar elementos que justificam as afirmações anteriores:

(Als.) [Continuam lendo coletivamente em voz alta.] *No retângulo abaixo, a parte vermelha corresponde a essa fração.* Letra (a) *Que fração do retângulo está pintada de amarelo?* Letra (b) *Que fração do retângulo está pintada?*

A aluna (C) [Interrompe a leitura.] Diz: Não estou entendendo nada.

(P) Gente, eu vou ler também. Calma, aí. Deixem que eu entenda também a pergunta. Porque eu também fiquei confusa. Espera, aí. [Recomeça a leitura do enunciado.] *Uma fração que não apareceu até agora é um quinto.* Está, certo! A gente já entendeu isso. Aí, no retângulo abaixo, que está dividido em cinco pedaços e a parte vermelha corresponde a essa fração. [Leva o indicador ao queixo com uma expressão de dúvida.] Aí, a pergunta é...já explicou lá o que é o retângulo. Já explicou o que é o vermelho. Aí, vem: Letra (a) *Que fração do retângulo agora está pintada de amarelo?*

Quadro 9: Fragmento da transcrição do episódio referente à 1ª parte da 1ª sessão (C)

Nesse sentido, Charnay (1988) considera que as escolhas das estratégias de aprendizagem também são atribuições do professor. Porém, estas escolhas são influenciadas por variáveis diversas, entre elas o seu ponto de vista a respeito dos conceitos ensinados, dos objetivos gerais do ensino e aqueles que são específicos da Matemática, bem como acerca dos alunos (suas possibilidades e expectativas), a respeito da imagem sobre as demandas da escola (explícita, implícita e suposta), entre outras. Assim sendo, Brousseau (1996) reforça os argumentos anteriores afirmando que quando o professor não tem um bom controle de suas concepções epistemológicas, em relação ao objeto matemático, mais carregados de conseqüência estarão seus erros.

Deste modo, a ingerência dos fenômenos didáticos que foram surgindo ao longo da aplicação da sequência didática nos inquietou e, por conseguinte despertou ainda mais o interesse pelas questões em aberto, as quais foram colocadas anteriormente e sintetizadas: O*s efeitos didáticos, evidenciados durante a aplicação da sequência didática, serão recorrentes se os alunos resolverem individualmente atividades similares e/ou idênticas às sugeridas no livro didático? Os percentuais referentes aos acertos e erros ao realizar conversões entre os registros de representação se mantêm na ausência de intervenções externas?*

Portanto, vislumbramos na (re) apresentação da sequência didática ao aluno, a possibilidade de responder às questões citadas no parágrafo anterior em consonância com o problema de pesquisa, analisando se a ocorrência dos efeitos didáticos, identificados inicialmente, é episódica ou se esses fenômenos são continuamente repetidos em consonância com o contrato didático acordado entre os parceiros da relação didática.

Em contrapartida, possivelmente a nova situação didática (situação de avaliação), fornecerá subsídios mais confiáveis acerca do desempenho individual dos alunos, na ausência das intervenções do professor ou dos colegas de classe, ao realizar conversões entre os diferentes registros de representação do mesmo número racional, cujo mote é o significado parte/todo. Portanto, diante das características da situação didática, denominamos a nova oportunidade do aluno resolver os problemas selecionados como situação de avaliação.

Diante dos pressupostos organizamos a situação de avaliação considerando as mesmas variáveis e valores atribuídos pelos autores para as atividades que constituem a sequência didática original, a qual foi extraída do livro didático de Matemática. Portanto, algumas atividades produzidas são similares àquelas que os alunos resolveram na 1ª e 2ª sessão enquanto outras não sofreram qualquer alteração. Ou seja, modificamos apenas alguns atributos dos contextos das atividades 1, 2, 3, 4 e 7. Enquanto, as atividades 5, 6, 8 e 9 foram isentas de alterações. E, consequentemente foram reproduzidas na íntegra.

Portanto, a situação de avaliação é constituída por nove atividades, as quais foram distribuídas não necessariamente seguindo a ordem seqüencial estabelecida pelos autores do livro didático na sequência didática original. Após o tratamento dos dados obtidos, nos protocolos da 1ª e 2ª sessão realizamos a escolha das atividades. Os critérios de seleção das atividades são relativos às facilidades e dificuldades demonstradas pelos alunos na realização das conversões entre os registros de representação (pictórico, simbólico fracionário e em linguagem natural), do número racional. Em algumas atividades verificamos que houve 100% sucesso enquanto em outras o desempenho dos alunos foi extremamente insatisfatório na realização das mesmas conversões.

Portanto, visando analisar em que medida as variáveis didáticas, presentes em cada situação, poderiam ter influenciado, ou não as estratégias mobilizadas pelos alunos, adotamos como parâmetro as frequências e os percentuais de erros e acertos identificados na resolução dos exercícios e atividades. Bem como, no efetivo registro das conversões solicitadas em cada atividade. Nos parágrafos subsequentes, apresentaremos os argumentos que justificam a reutilização das atividades selecionadas para compor a sequência didática da situação de avaliação.

Atividade [1]

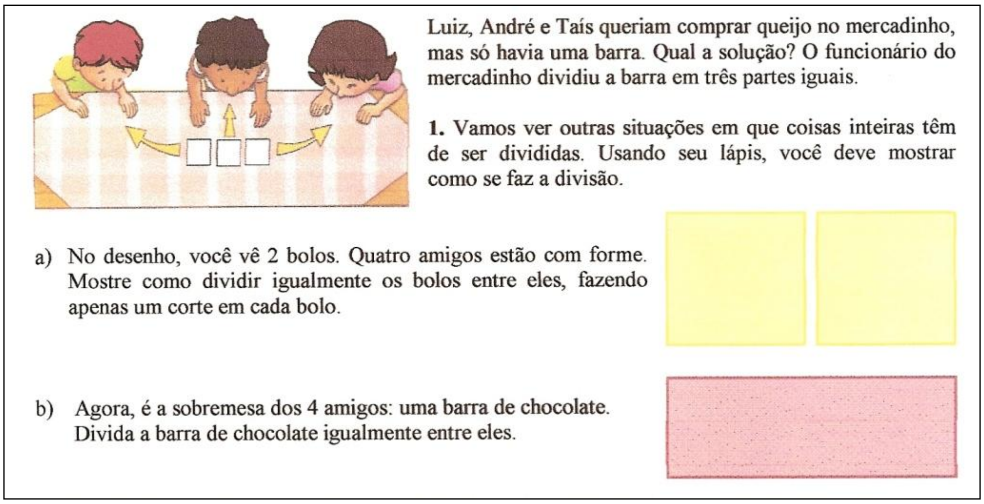


Figura 54: Atividade 1 da situação didática de avaliação

a. Descrição: A presente atividade, exibida na Figura 13 (p.127), é análoga a primeira questão proposta na sequência didática. Esta atividade sofreu alteração apenas no texto introdutório que está associado às ilustrações. Neste caso, o contexto aborda a relação parte/todo mediante a divisão do inteiro contínuo (queijo, bolos e barra de chocolate). Ou seja, é solicitado ao aluno que ele mostre como dividir o inteiro (dois bolos) fazendo apenas um corte em cada um deles de modo a obter porções iguais com o objetivo de conduzir a percepção do aluno para a existência de uma totalidade divisível.

b. Expectativa quanto às implicações das variáveis didáticas e dos seus respectivos valores na mobilização das estratégias e procedimentos pelos alunos

- Nesta atividade, a variável relativa à dimensionalidade das figuras se mantém. Portanto, as mesmas formas planas poligonais, apresentadas pelos autores na sequência didática original, permanecem no contexto da atividade na representação dos bolos (quadrado), do queijo e da barra de chocolate (retângulo). Na situação de aprendizagem, 34 dos 36 alunos não tiveram dificuldade para dividir o inteiro em partes iguais, mesmo sem compreendido a noção de fração como uma relação parte/todo. Portanto, esperamos que a maioria dos alunos não se deparem com dificuldades na divisão dos inteiros (quadrados e retângulo).

- Neste caso, são duas as expectativas, a primeira consiste na averiguação do alto índice de estratégias compatíveis com a variável: "[...] *Dividir fazendo apenas um corte",* se confirma. Pois, na situação didática vivenciada anteriormente, muitos alunos copiaram as respostas uns dos outros. A segunda expectativa incide na apresentação de mais de uma resposta para o problema. Uma vez que muitos alunos se depararam com várias soluções que atendiam à variável de comando, mas, optaram pelo registro de apenas uma dessas alternativas.

- Em relação ao valor da variável que diz respeito à noção de fração atrelada à existência de uma totalidade divisível, sob a qual o inteiro pode ser decomposto em partes iguais, de forma a esgotá-lo (sem que haja resíduos), acreditamos que a maioria dos alunos perceberá este princípio, porque o trabalho está sendo realizado com crianças conservativas, ou seja, elas já conseguem conservar quantidades.

- No que se refere ao valor da variável que consiste em relacionar a quantidade de cortes e a quantidade de partes, esperamos que os alunos ao terem acesso à atividade pela segunda vez, percebam que a quantidade de cortes se altera nem sempre é proporcional à quantidade de fatias obtidas do inteiro. Nesse caso, para produzir metade de uma forma poligonal (quadrado, retângulo, hexágono, por exemplo), ou não-poligonal (círculo, semicírculo, por exemplo), um corte é o suficiente. Enquanto para dividir o retângulo em quatro partes iguais serão necessários apenas dois ou três cortes, dependendo da disposição desses cortes. No entanto, como os autores não delimitam a quantidade de cortes a serem feitos no retângulo (item b), mais uma vez esperamos a multiplicidade de respostas.

- No que se refere às estratégias e procedimentos mobilizados pelos alunos, conjecturamos que estes tenderão a apresentar as mesmas divisões dos polígonos propostos (quadrado e retângulo), assim como fizeram na situação didática de aprendizagem.

*(iii)**No item (a)*** – Assim como na divisão dos sanduíches, que são representados por uma região poligonal quadrada, fazendo apenas um único corte em cada polígono (variável de comando), os alunos poderão:

- Dividir os quadrados traçando as diagonais de modo que estabeleçam a união dos vértices opostos. Esta estratégia foi utilizada por 47% dos alunos na situação didática de aprendizagem.
- Dividir os quadrados unindo os pontos médios dos lados paralelos traçando um segmento de reta na posição horizontal. Ou ainda, dividir os quadrados unindo os pontos médios dos lados paralelos traçando um segmento de reta na posição vertical. Assim como no tópico anterior 17dos 36 alunos (47%) utilizaram essa estratégia.

*(iv)**No item (b)*** – Nesse caso, a variável de comando consiste em realizar a divisão do inteiro (uma torta representada por uma região poligonal retangular), para quatro pessoas sem limitar o número de cortes são várias as possibilidades de realizar a divisão. Assim sendo que está os alunos poderão:

1. Fazendo 2 cortes

- Dividir o retângulo em quatro partes equivalentes entre si traçando segmentos de reta concorrentes, que unem os pontos médios dos lados opostos, na posição vertical e horizontal. Essa estratégia representou 57% das soluções apresentadas pelos alunos na situação de aprendizagem.
- Unindo os vértices opostos de modo a obter as diagonais do retângulo. Identificamos em 11% das soluções coerentes a utilização dessa estratégia.

2. Fazendo 3 cortes

- Traçando três segmentos de reta equidistantes na posição vertical. Esta estratégia foi utilizada por 22% dos alunos.

- Traçando três segmentos de reta equidistantes na posição horizontal. Na situação didática proposta inicialmente nenhum aluno realizou a divisão do retângulo dessa forma.

Fazendo mais de 3 cortes

- Traçando três segmentos de reta equidistantes na posição horizontal sobre os quais é traçado outro segmento de reta que une os pontos médios na posição vertical obtendo assim oito frações equivalentes do retângulo. Portanto, as divisões com quatro, cinco ou mais cortes resultam das subdivisões do retângulo, com dois ou três cortes. Na resolução da atividade na situação didática anterior 2 alunos (6%) dividiram o polígono desse modo.

Atividade [2]

2. Observe as divisões efetuadas na atividade 1 e responda:

   - Na divisão do queijo, qual foi a parte de cada um? ____________________
   - Que parte do bolo cada amigos recebeu? ____________________
   - Na divisão da barra de chocolate, que parte cada amigo recebeu?__________

Figura 55: Atividade 2 da situação didática de avaliação

a. Descrição:

A atividade 2, conforme mostra a Figura 55, também é similar à segunda atividade da sequência didática original. As alterações foram feitas na denominação do inteiro (barra de chocolate equivale ao queijo, os sanduíches correspondem aos bolos e a torta de limão foi substituída por uma barra de chocolate). Esta atividade demanda a conversão do registro pictórico para a linguagem natural. Ela toma como referência a atividade anterior, em que o aluno representou três frações (1/2, 1/3 e 1/4) em situações de divisão em partes iguais. Na primeira, um queijo (retangular) foi dividido entre três crianças, na segunda, dois bolos (quadrados) foram divididos entre quatro crianças e, na terceira, uma barra de chocolate (retangular) foi dividida entre quatro amigos. Ou seja, para responder a atividade o aluno tem como suporte as ilustrações na atividade anterior.

b. Expectativa quanto às implicações das variáveis didáticas e dos seus respectivos valores na mobilização das estratégias e procedimentos pelos alunos

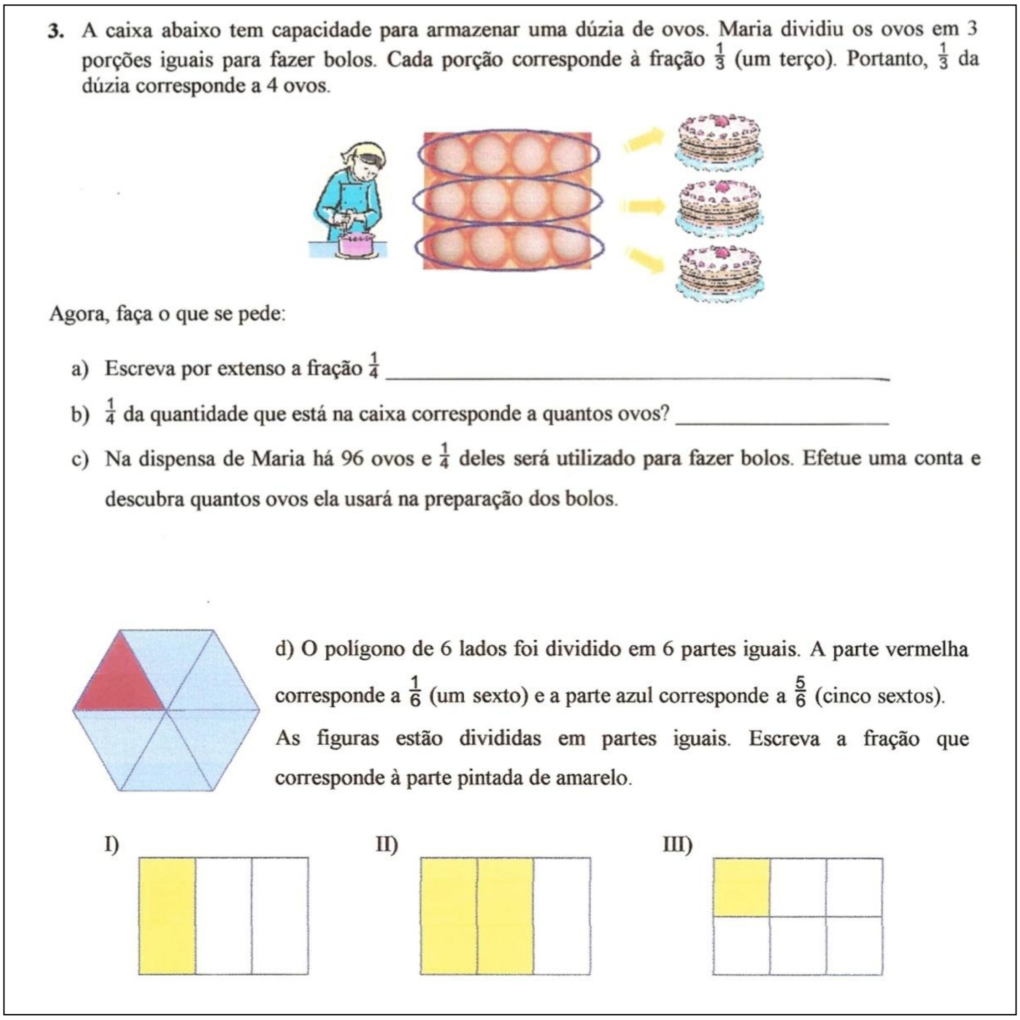
- O fato da atividade explorar divisões do inteiro contínuo, em 2, 3 e 4 partes iguais, para introduzir a nomenclatura e a notação dessas frações acreditamos que este aspecto favorece a apresentação das respostas esperadas, pois os alunos já têm certa familiaridade com as frações correspondentes à metade, terços e quartos, as quais foram exaustivamente aproveitadas em diferentes situações e contextos nas atividades que compõem a sequência didática original.

- Ao realizar esta atividade na situação didática anterior, os alunos mobilizaram exclusivamente nos três itens, registros em linguagem natural. Podemos verificar que independente das respostas estarem certas ou não 33 dos 36 dos alunos optaram pelo registro em linguagem natural. Sendo que no item (a) 64% conseguiu realizar corretamente a conversão do registro pictórico para o registro das frações em linguagem natural, no item (b) 72% e no item (c) 69%. Porém, como estes alunos estão refazendo a atividade é provável que a maioria deles registre as frações solicitadas escrevendo a notação específica. Haja vista que este foi o registro mais exigido e efetivamente exercitado no desenvolvimento das atividades que integram a sequência didática original.

- Pressupomos que a diferença peculiar das frequências e dos percentuais de respostas exitosas nos três itens deverá se manter devido à característica peculiar de cada um dos três registros pictóricos associados. Pois, embora os inteiros sejam contínuos, nos itens (a) e (c), que apresentaram o maior número de acertos na situação de aprendizagem, o inteiro é formado por um único elemento (um chocolate e uma torta, respectivamente), enquanto no item (b) a frequência e o percentual de acertos foi menor porque o inteiro está associado a dois sanduíches.

- Ainda, no que diz respeito à resolução dessa atividade proposta na situação didática anterior, o tipo de inteiro considerado (barra de chocolate, sanduíches e torta de limão) também parece influenciar nos erros cometidos pelos alunos. Os resultados obtidos indicam que a maioria dos erros cometidos pelos alunos, 11 dos 36 alunos (32%) em média, evidencia que eles atribuem significado diferente para a situação, apresentando como resposta "uma parte" ou "um pedaço". Dessa forma, o conceito envolvido (fração) é substituído pela percepção cotidiana, em que, realmente, cada um deles comerá "uma parte" ou "um pedaço". No item (b), em que o inteiro é formado por duas unidades (dois sanduíches), os alunos apresentam forte tendência a associar o denominador da fração ao número de partes obtidas pelos cortes nos sanduíches. No entanto, este efeito pode ter sido decorrente da semântica dos questionamentos, no item (a*):* [...] "*qual foi **a parte** de cada um?"*, no item (b): "*Que **parte** dos sanduíches cada amigo recebeu?"* e no item (c): *"Na divisão da torta que **parte** cada amigo recebeu?"*. Nesse sentido, é possível verificar que o vocábulo: **parte** aparece em todos os itens. Talvez, este aspecto tenha levado os alunos a considerar que cada indivíduo receberia "uma parte", "um pedaço" ou simplesmente "1" da barra de chocolate, dos sanduíches ou da torta. Portanto, a probabilidade de que os alunos procedam desta forma é bastante plausível. Caso, não façam as associações necessárias, entre os registros de representação: pictórico, simbólico fracionário e em linguagem natural das frações $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ tomando como referência a relação parte/todo abordada ao longo de toda a sequência didática.

Atividade [3]



3. A caixa abaixo tem capacidade para armazenar uma dúzia de ovos. Maria dividiu os ovos em 3 porções iguais para fazer bolos. Cada porção corresponde à fração $\frac{1}{3}$ (um terço). Portanto, $\frac{1}{3}$ da dúzia corresponde a 4 ovos.

Agora, faça o que se pede:

a) Escreva por extenso a fração $\frac{1}{4}$ ____________________________________

b) $\frac{1}{4}$ da quantidade que está na caixa corresponde a quantos ovos? __________________

c) Na dispensa de Maria há 96 ovos e $\frac{1}{4}$ deles será utilizado para fazer bolos. Efetue uma conta e descubra quantos ovos ela usará na preparação dos bolos.

d) O polígono de 6 lados foi dividido em 6 partes iguais. A parte vermelha corresponde a $\frac{1}{6}$ (um sexto) e a parte azul corresponde a $\frac{5}{6}$ (cinco sextos). As figuras estão divididas em partes iguais. Escreva a fração que corresponde à parte pintada de amarelo.

I) II) III)

Figura 56: Atividade 3 da situação didática de avaliação

a. Descrição

Esta atividade, ilustrada na Figura 56, corresponde à atividade 4 da sequência didática original. No entanto, nesta atividade optamos pela modificação do contexto introdutório nos itens (a), (b) substituindo uma coleção de selos por uma caixa de ovos, no item (c) trocamos as 96 folhas de caderno pela mesma quantidade de ovos e mantivemos o item (d), conforme podemos observar na ilustração. Os textos continuam ancorados por ilustrações que contemplam a divisão do inteiro contínuo (hexágono) ou discreto (dúzia de ovos) e exemplificam as informações expressas no texto. Objetivando reforçar o registro simbólico fracionário e a nomenclatura das frações. Essa atividade contempla diferentes conversões de registros de representação, como mostrado no Quadro 10.

Item	**Sentido das Conversões**		
	Registro de partida	**⇒**	**Registro de chegada**
A	Linguagem simbólica fracionária ⇒ Linguagem natural		
b	Linguagem simbólica fracionária ⇒ Linguagem simbólica natural		
c	Linguagem simbólica fracionária ⇒ Linguagem simbólica natural		
d	Linguagem pictórica ⇒ linguagem simbólica fracionária		

Quadro 10: Conversões requeridas da execução na atividade 3 da Situação de Avaliação

b. Expectativa quanto às implicações das variáveis didáticas e dos seus respectivos valores na mobilização das estratégias e procedimentos pelos alunos

- Assim como na situação didática de aprendizagem as alternativas (a), (b) e (c) referem-se à fração um quarto. Mais, uma vez o aluno efetuará os registros solicitados a partir da compreensão do significado parte/todo do número racional mencionado. No caso do item (a) o aluno deve escrever essa fração por extenso. E, ele o fará, pois, em outras oportunidades o aluno já nomeou ou leu a nomenclatura nos textos introdutórios ou nos enunciados das atividades vivenciadas anteriormente. Portanto, é provável que a maioria dos alunos realize a atividade mesmo que o significado mencionado não tenha se construído por eles.

- Assim como no item (b), o item (c) solicita do aluno a realização e o registro do algoritmo da divisão para determinar frações de uma quantidade (12 ou 96 unidades). A finalidade deste item consiste em introduzir a idéia de que as frações de uma quantidade resultam da divisão entre dois números inteiros quaisquer, desde que o divisor seja diferente de zero. Além disso, a idéia de dividir o inteiro em partes iguais subjaz na atividade, porém requer que o aluno faça a transposição dessa ideia do contexto contínuo (que predomina na maioria das atividades), para o contexto discreto. Vale salientar que na situação didática anterior 100% dos alunos não foram bem sucedidos na tarefa de calcular frações de quantidade tanto no item (b) quanto no item (c). Porém, como a atividade está sendo reapresentada, é possível que alguns deles atentem para a ideia constantemente repetida: *"dividir em partes iguais"* e, realizem de fato o algoritmo da divisão.

- ✔ Ainda em relação ao itens (b) e (c) o percentual de respostas em que os alunos realizaram as operações de adição e subtração com os dados numéricos fornecidos no enunciado ou na ilustração suporte corresponde a 100%) em ambos os casos. E, embora os problemas propostos tenham solução, o efeito resultante da variável de comando "*efetue uma conta"* (que o aluno efetua operações sem a devida compreensão de qual algoritmo deve apresentar), denota o efeito didático conhecido como "Idade do Capitão" caracterizado por Estela Baruk (1986). Por este motivo, acreditamos na possibilidade de que a grande maioria dos alunos continue repetindo o mesmo equívoco ao determinar as frações de quantidades. Porém, a expectativa agora, é que alguns desses alunos pelo de ter uma nova oportunidade de resolver o problema apresente a resposta esperada.

- ✔ Assim como, na situação didática vivenciada anteriormente, no item (d) o inteiro é representado no contexto contínuo, um polígono (retângulo), dividido em 3 ou 6 partes iguais. O valor da variável atribuída pelos autores refere-se ao fato de que o total de partes do polígono, 3 e 6 respectivamente são múltiplos entre si. Nesse caso, a atividade reforça a notação e a nomenclatura das frações resultantes dessas divisões por três e por seis. Neste item, a intervenção referente a idéia de comparação das áreas seria pertinente. Por exemplo, nos retângulos (I) e (II) as frações pintadas de amarelo correspondem a $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$ respectivamente. Talvez fosse pertinente conduzir a percepção do aluno para o fato de que a segunda fração equivale à metade da primeira. Possivelmente, essa intervenção facilitaria a resolução de outras atividades posteriores cuja tarefa do aluno consiste em comparar frações.

- ✔ Assim sendo, no item (d) os alunos devem representar as frações do polígono (retângulos I, II e III) mediante a escrita da notação $\frac{a}{b}$ (registro simbólico fracionário). Mesmo que o aluno não tenha assimilado o modo de representar a notação de uma fração basta que este leia e observe os exemplos que compõem a ilustração e, assim será capaz de registrar a notação $\frac{1}{3}$ (para o retângulo I) e $\frac{1}{6}$ (para o retângulo III). Embora, antes de vivenciar a situação de avaliação os alunos tenham realizado várias atividades que requeriam o registro simbólico das frações mencionadas. Portanto, acreditamos que a maioria dos alunos efetuará o registro simbólico fracionários das porções coloridas no retângulo corretamente.

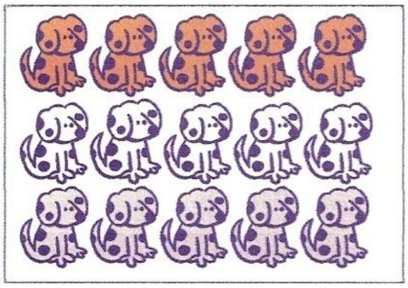
- Os dados fornecidos na análise a posteriori das atividades que compõem a sequência didática, mais especificamente referentes às conversões em que o registro de partida é pictórico e o registro de chegada é simbólico fracionário, indicam que há uma forte tendência dos alunos em associar parte/parte (parte colorida/não colorida), ao efetuar o registro da fração. A frequência média de ocorrência desse efeito didático no item (d) da atividade 4 da 1ª sessão da sequência didática corresponde a 14 dos 24 alunos (58%), que apresentaram respostas equivocadas. Enquanto, 11 dos 24 alunos (46%) inverteram a posição dos termos das frações solicitadas. Ou seja, o numerador foi colocado na posição do denominador e vice-versa. Portanto, é provável que os alunos continuem apresentando este tipo de resposta nas atividades com estas características. Afinal, em nenhum momento ficou institucionalizado a disposição correta dos termos da fração ao efetivar o registro simbólico fracionário (notação).

- Ainda em relação ao item (d), cuja demanda consiste em realizar a conversão do registro pictórico para o registro simbólico fracionário, vale salientar que a frequência média de êxito neste item corresponde a 36% dos alunos, uma vez que este tipo de exercício é bastante frequente nos livros didáticos e em nossas salas de aula. Ressaltamos que 28 dos 36 alunos optaram pela conversão do registro pictórico para o registro simbólico fracionário. 6 alunos realizaram simultaneamente conversões para o registro simbólico fracionário (notação) e em linguagem natural (nomenclatura) e apenas 2 alunos optaram pelo sentido: registro pictórico → registro em linguagem natural. E, nesse sentido, é provável que a maioria dos alunos continue optando pelo registro simbólico fracionário das regiões coloridas nos retângulos propostos na situação didática de avaliação, pois esse tipo de representação foi a mais solicitada na sequência didática original.

- Ainda com relação ao item (d) apesar da ilustração que antecede as atividades sugerir a relação entre o número de lados do polígono (hexágono) e a quantidade de partes (6) no qual o inteiro foi dividido. Apenas 12 dos 36 alunos apresentaram a resposta esperada registrando a fração do retângulo (III) convertendo do registro figural para o simbólico fracionário (notação) ou em linguagem natural (nomenclatura). Pode até ser possível que os alunos tenham feito associação entre o hexágono e o retângulo. No entanto, não há como comprovar que a ilustração induziu-os à resposta correta porque ocorreu 67% de erro. Nesse caso, portanto esperamos com a (re) apresentação da atividade para averiguar a procedência da hipótese anteriormente mencionada.

Atividade [4]

4. O canil Cão Legal promove uma competição para eleger os cães mais bonitos do Brasil. Nessa competição os animais serão divididos em grupos com o mesmo número de cães.



a) Quantos cachorros participam da competição? ______

b) Quantos são os grupos? ________

c) Que fração dos animais tem o pêlo na cor marrom?

d) Escreva a fração dos cachorros **não** têm pêlo marrom?

e) Agora, um desafio: $\frac{1}{5}$ dos animais receberá o título de cachorro mais bonito do Brasil. Quantos cães serão premiados nessa competição? ______________________

Figura 57: Atividade 4 da situação didática de avaliação

a. Descrição

Esta atividade corresponde à atividade 4 da sequência didática, ilustrada na Figura 29 (p.158). E, conforme podemos observar na Figura 57, nesta atividade optamos pela modificação do contexto, substituindo a equipe de ginástica por um conjunto de cachorros, os quais também separados em grupos por cores distintas. No entanto, o total de cachorros (15) e a quantidade de grupos (3) são as mesmas variáveis utilizadas pelos autores da sequência didática original. Consequentemente, o valor da variável também não sofreu alteração. E, como podemos perceber na Figura 58, essa atividade segue na mesma direção da atividade 1, pois, contempla diferentes conversões de registros de representação, como mostrado no Quadro 11.

Item	**Conversão**		
	Registro de partida	**⇒**	**Registro de chegada**
a	Linguagem pictórica	⇒	Linguagem simbólica natural
b	Linguagem pictórica	⇒	Linguagem simbólica natural
c	Linguagem simbólica natural	⇒	Linguagem simbólica fracionária
d	Linguagem simbólica natural	⇒	Linguagem simbólica fracionária
e	Linguagem simbólica fracionária	⇒	Linguagem simbólica natural

Quadro 11: Conversões requeridas da execução na atividade 4 da Situação de Avaliação

b. Expectativa quanto às implicações das variáveis didáticas e dos seus respectivos valores na mobilização das estratégias e procedimentos pelos alunos

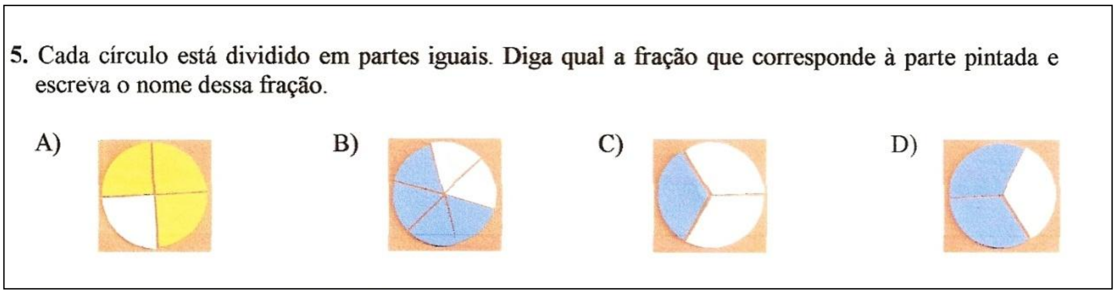
- Na situação de aprendizagem a conversão do registro pictórico para a linguagem simbólica natural foi bem sucedida pelos alunos, atingindo 100% no item (a) e 90% no item (b). Essa pequena queda no rendimento pode ser atribuída à falta de compreensão do enunciado, na medida em que 75% das respostas erradas correspondem à resposta 5 e 25% à resposta 15 que correspondem, respectivamente, ao número de atletas de cada grupo e ao total de atletas representados na figura. Esperamos com a (re) apresentação da atividade que o índice de respostas coerentes seja ainda maior do que aqueles aos quais nos referimos.

- No que diz respeito aos itens (c) e (d), que demandam a conversão entre registros simbólicos, do natural para o fracionário, mesmo apresentando o registro pictórico como suporte mostrou um rendimento bastante baixo por parte dos alunos, com nenhum acerto para o item (c) e apenas 3% para o item (d). Trata-se, nessa atividade, da idéia de fração de quantidade discreta, e chama a atenção o fato de um aluno ter acertado o item (d), que demanda o complementar da fração, enquanto o item que solicita a determinação direta da fração não ter sido contemplado com nenhum acerto. Nesse sentido, a nossa expectativa é a de que alguns alunos estabeleçam uma relação entre a divisão dos cachorros pela cor dos pelos e apresente as frações solicitadas nos itens (c) e (d).

- Da mesma forma, em relação aos erros na situação didática proposta anteriormente, verificamos que 8% das respostas erradas no item (c) correspondem a não realização da conversão, apresentando respostas em linguagem simbólica natural, enquanto no item (d) todos os alunos que erraram realizaram a conversão. Em ambos os itens, a maior parte dos erros corresponde a uma busca por estabelecer relações entre partes do todo. Quando na realidade as associações estabelecidas pelos alunos, consiste na relação parte/parte. No item (c), por exemplo, 82% dos alunos que erraram indicaram a fração 1/5, que corresponde a “1 grupo de 5 atletas”, enquanto no item (d) esse fenômeno aparece em 56% das respostas erradas, que indicam a fração 1/5 (1 grupo de 5), 2/5 (2 grupos de 5), 1/10 (1 grupo de 10) e 2/10 (2 grupos de 10). Portanto, a probabilidade de que os alunos continuem cometendo os mesmos erros é bastante razoável. Caso, eles não tenham passado pela 4ª etapa da situação didática que consiste na fase de institucionalização, que constituí uma atribuição exclusiva do professor.

- O último item da atividade solicita que o aluno realize a conversão da linguagem simbólica fracionária para a linguagem simbólica natural. Ao realizar a atividade, proposta na situação de aprendizagem, nenhum aluno obteve sucesso. Nesse caso, 18% das respostas erradas se relacionam a não realização da conversão de registros. Assim como, nos itens anteriormente mencionados, encontramos o mesmo tipo de estratégia adotada pelos alunos que apresentaram a tendência a associar parte a parte. Dentre as respostas erradas que contemplam a conversão de registros, 45% correspondem ao total de atletas, 30% ao número de atletas de dois grupos e 15% ao número de atletas de um dos grupos. Portanto, é possível que a maioria dos alunos continuem incorrendo nos mesmos erros desde que não seja oportunizada a passagem pela fase de institucionalização. Embora, a expectativa seja de que alguns alunos consigam determinar a fração (um quinto), da quantidade de cachorros (quinze), tomando como referência a ilustração fornecida como apoio à realização das atividades. Uma vez que, a estes foi oferecida outra oportunidade de resolver o problema proposto.

Atividade [5]


5. Cada círculo está dividido em partes iguais. Diga qual a fração que corresponde à parte pintada e escreva o nome dessa fração.

A) B) C) D)

Figura 58: Atividade 5 da situação didática de avaliação

a. Descrição

A Figura 58 ilustra a atividade 5, a qual não passou por qualquer modificação e, assim como item (d) da atividade anterior, a demanda aqui é de realizar a conversão entre o registro pictórico e o registro simbólico fracionário, sendo acrescida, na presente atividade, pela solicitação de realizar também a conversão para a linguagem natural. É pertinente salientar, que diferentemente da situação didática anterior, nessa atividade não fornecemos o material de manipulativo (frações do círculo).

b. Expectativa quanto às implicações das variáveis didáticas e dos seus respectivos valores na mobilização das estratégias e procedimentos pelos alunos

- Na situação didática anterior, o índice médio dos alunos que obtiveram sucesso na atividade corresponde a 43%, bem próximo do índice de 37% obtido no item (d) da atividade 4, embora, como foi dito anteriormente, eles tenham realizado uma atividade específica utilizando o registro pictórico (círculo) com o apoio de material de manipulação. Os percentuais de acerto aparecem representados na Tabela 2.

Tabela 2
Percentuais de acerto referentes à atividade 5 da situação de aprendizagem

Item	Solução	% acertos
a	3/4	38
b	4/6	38
c	1/3	50
d	2/3	48

- No entanto, apenas 67% dos alunos realizam simultaneamente as conversões para a linguagem natural e simbólica fracionária. Enquanto, 27% dos alunos atendem ao comando: *"Diga qual a fração"*, registrando apenas a escrita fracionária e os demais (6%) responderam *"escreva o nome dessa fração"* utilizando a linguagem natural. Da mesma forma que na atividade anterior, a maioria dos erros se baseia no estabelecimento de relações entre as partes ou entre o todo e uma das partes, como mostra a Tabela 3.

Tabela 3
Índice de erro referente à atividade 5 da situação de aprendizagem

Item	Erro	%
a	Não pintada/pintada (1/3)	76
	Não pintada/total (1/4)	34
b	Não pintada/pintada (2/4 ou 1/4)	72
	Não pintada/total (2/6 ou 1/6)	24
	Outros	4
c	Um pedaço	55
	Não pintada/pintada (2/1)	20
	Pintada/não pintada (1/2)	15
	Não pintada/total (2/3)	5
	Não respondeu	5
d	Não pintada/pintada (1/2)	86
	Não pintada/total (1/3)	14

- Parece-nos importante colocar em evidência o fato de mais da metade dos erros do item (c) corresponder à resposta "um pedaço", resposta bastante freqüente na atividade 1, em que o todo se relacionava a alimentos (chocolate, sanduíche e torta), e cujos numeradores correspondem ao algarismo "1". Fica a questão, a ser esclarecida posteriormente com a (re) aplicação dessa atividade na situação de avaliação, sobre as possíveis relações entre registros pictóricos em que a parte considerada da unidade é unitária e o sentido que o aluno atribui a esse registro. É provável que os alguns alunos continuem interagindo da mesma maneira para com a atividade proposta. Porém, levando em consideração que estes estão vivenciando a atividade pela segunda vez, esperamos que avancem com relação à compreensão do significado parte/todo do número racional. E, consequentemente, a iminência da melhoria desse aspecto torna plausível a minimização dos efeitos didáticos mencionados.

Atividade [6]

a. Descrição: Essa atividade, exibida na Figura 59, corresponde à atividade 7 da sequência didática que precedeu a situação de avaliação que vivenciaremos com os alunos. Nessa atividade a demanda consiste em realizar a conversão do registro simbólico fracionário para o registro pictórico, sendo solicitado ao aluno que pinte na figura (círculo, pentágono e hexágono), a parte correspondente à fração fornecida.

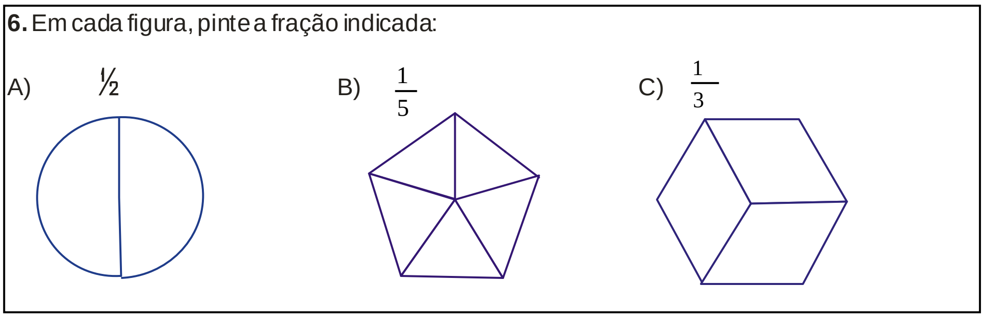


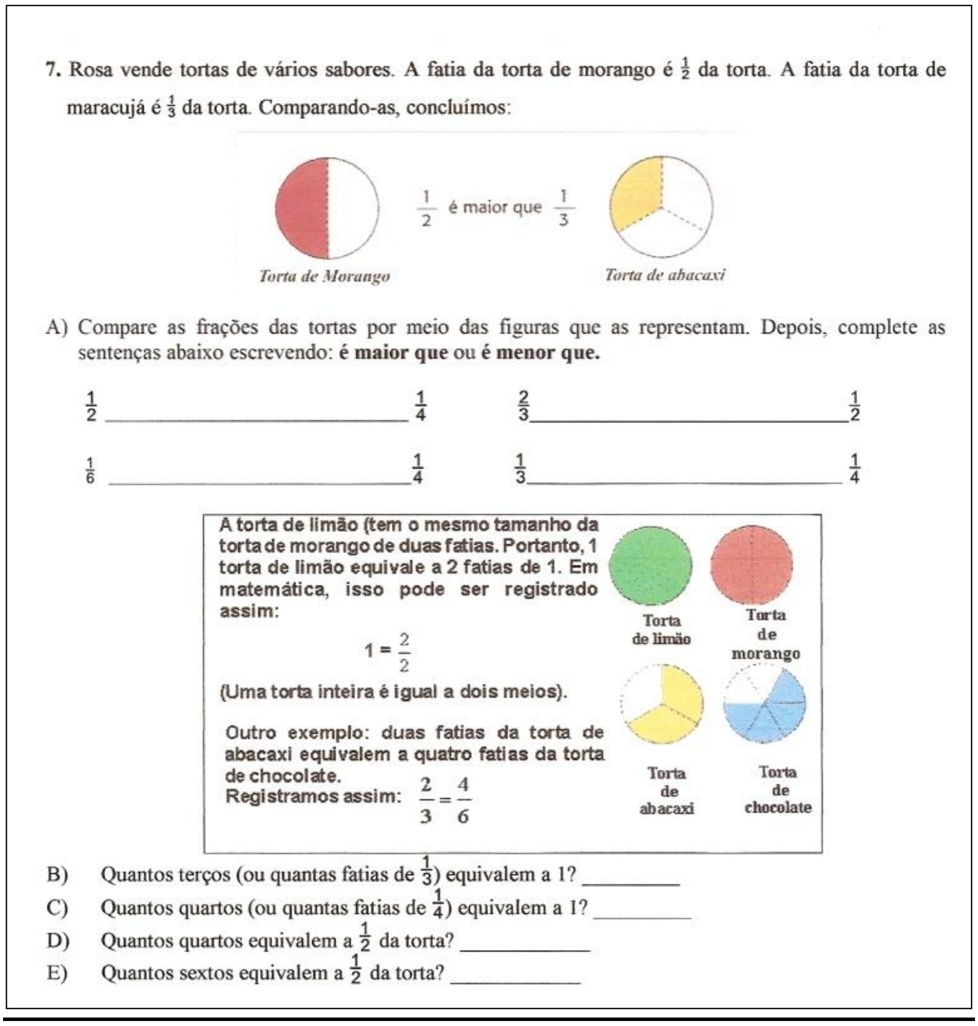
Figura 59: Atividade 6 da situação didática de avaliação

b. Expectativa quanto às implicações das variáveis didáticas e dos seus respectivos valores na mobilização das estratégias e procedimentos pelos alunos

- ✔ O índice de sucesso na atividade foi de 98% nos dois primeiros itens e de 78% no terceiro. Essa diferença pode ser explicada pela familiaridade do aluno com as formas geométricas apresentadas e pelo fato das figuras estarem divididas pelo mesmo número de partes dos denominadores.

- ✔ Em relação aos erros, nas duas primeiras figuras correspondeu a pintar a figura toda. Já na terceira figura, esse erro corresponde a 56% dos erros, sendo os outros 44% correspondentes a pintar duas das partes, como se o aluno buscasse estabelecer uma relação entre partes não pintadas e partes pintadas (1/3). Vale salientar que alguns dos alunos que apresentaram respostas equivocadas no item (c), demonstraram através dos registros nos protocolos, a tentativa de interpretar a divisão da forma poligonal (hexágono), apresentada pelos autores como sendo uma forma espacial (hexaedro), conhecida dos alunos: o cubo. Nosso argumento advém da constatação de que alguns alunos tentaram planificar esse poliedro e registraram essa estratégia nos protocolos. Assim sendo, acreditamos na possibilidade de que ocorrência desses mesmos efeitos didáticos identificados na primeira vez que aplicamos a atividade.

Atividade [7]



7. Rosa vende tortas de vários sabores. A fatia da torta de morango é $\frac{1}{2}$ da torta. A fatia da torta de maracujá é $\frac{1}{3}$ da torta. Comparando-as, concluímos:

A) Compare as frações das tortas por meio das figuras que as representam. Depois, complete as sentenças abaixo escrevendo: **é maior que** ou **é menor que.**

$\frac{1}{2}$ ____________________ $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{3}$ ____________________ $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{6}$ ____________________ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ ____________________ $\frac{1}{4}$

A torta de limão (tem o mesmo tamanho da torta de morango de duas fatias. Portanto, 1 torta de limão equivale a 2 fatias de 1. Em matemática, isso pode ser registrado assim:

$$1 = \frac{2}{2}$$

(Uma torta inteira é igual a dois meios).

Outro exemplo: duas fatias da torta de abacaxi equivalem a quatro fatias da torta de chocolate.
Registramos assim: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

B) Quantos terços (ou quantas fatias de $\frac{1}{3}$) equivalem a 1? ________

C) Quantos quartos (ou quantas fatias de $\frac{1}{4}$) equivalem a 1? ________

D) Quantos quartos equivalem a $\frac{1}{2}$ da torta? ________

E) Quantos sextos equivalem a $\frac{1}{2}$ da torta? ________

Figura 60: Atividade 7 da situação didática de avaliação

a. **Descrição:** A atividade 7, conforme mostra a Figura 60, consiste em uma adaptação que unifica as atividade 5 e 6 da 1ª parte da 2ª sessão da sequência didática denominada "AÇÃO (Explorando frações de um círculo)". Nessas atividades os autores exploram a comparação e a equivalência entre algumas frações do círculo por intermédio das relações parte/parte e parte/todo. A tarefa de comparar é facilitada para o aluno porque os autores fazem uso das frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$ exploradas nas atividades precedentes. No entanto, para realização dessa atividade os alunos não utilizarão como suporte o material manipulativo (as frações do círculo), fornecido na situação didática anterior.

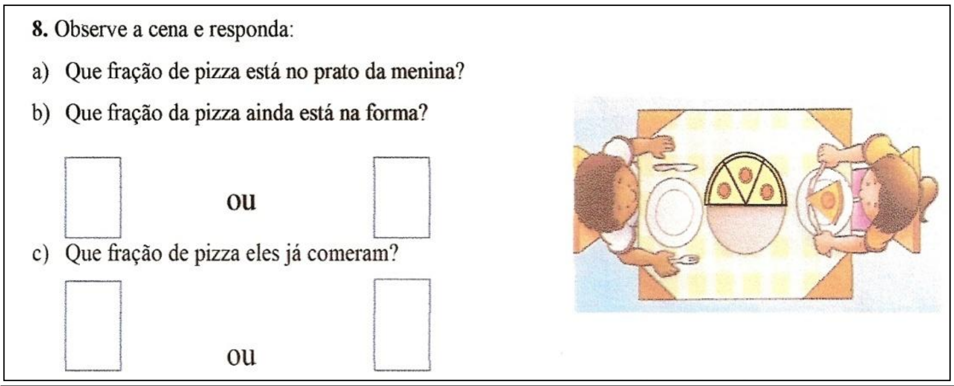
b. Expectativa quanto às implicações das variáveis didáticas e dos seus respectivos valores na mobilização das estratégias e procedimentos pelos alunos

- ✔ Com o suporte da figura, no item (e), da situação didática de aprendizagem, a média corresponde a 77% de acerto nas sentenças i), ii) e iii), as quais compreendem a comparação das frações: 1/2 e 1/4; 1/3 e1/4 e 1/6 e 1/4, respectivamente. Portanto, aproximadamente 30 dos 41 alunos que realizaram a atividade conseguiram comparar corretamente as frações citadas. Na sentença iv), na qual o aluno deveria comparar as frações dois terços e um meio, apenas 13 alunos responderam corretamente. Mas, independentemente do percentual de êxito, 35 dos 41 alunos atenderam a variável de comando: *"escrevendo é MAIOR QUE ou é MENOR QUE"*, outros 6 alunos optaram pela utilização dos símbolos > (maior que) ou < (menor que) para preencher as lacunas. Por outro lado, 8 dos 35 alunos que mencionamos realizaram o registro simultâneo do símbolo e do seu significado. A expectativa em relação ao índice referente às respostas corretas no item (a) dessa atividade seja ainda maior devido às alterações nas atividades serem pontuais, afinal no contexto modificado os círculos correspondem às tortas. E, além disso, os alunos terão outra oportunidade de ler, interpretar e refazer a atividade proposta.

- ✔ Ainda com relação ao item (e), constatamos que os erros dos alunos correspondem à comparação das frações mediante a observação dos denominadores. Em geral, os equívocos dos alunos são relativos ao fato da fração apresentar o denominador maior leva-os a considerá-la a maior e vice-versa. Este raciocínio dos alunos corresponde em média, a 23% nas sentenças i), ii) e iii). No entanto, o percentual de erro chega a 68% na sentença iv). Portanto, acreditamos na possibilidade de que estes erros continuem ocorrendo na situação de avaliação, pois não há evidências de que após a aplicação da sequência didática, de que a memória didática do aluno em relação ao significado parte/todo tenha sido resgatada, ou de que os erros dos alunos tenham sido discutidos, questionado ou reavaliados. Ou ainda, de que tenham sido feitas as institucionalizações necessárias em relação às conversões entre os registros de representação, das propriedades características, do significado parte/todo do número racional.

- No que diz respeito ao item (f), da situação de aprendizagem, os dados apontam que a representação, o registro figural e simbólico fracionário utilização do material concreto propiciou a margem de êxito dos alunos na correspondência entre as partes e o inteiro (no caso dos itens i e ii) que ficou em torno de 81%. Nas sentenças iii) e iv) a comparação parte/parte deveria ser realizada. Neste caso, o percentual de acerto foi de 59% e 15% respectivamente. Essa queda considerável no desempenho dos alunos possivelmente foi em decorrência da pouca exposição a atividades que exigiam essa habilidade. Mesmo com o suporte do material concreto e da ilustração nenhum aluno sobrepôs as frações para realizar as comparações. Portanto, esperamos investigar se os percentuais apresentados anteriormente procedem na situação peculiar de avaliação, onde o aluno sem o auxílio de material concreto exercitará a habilidade de comparar as frações do círculo mediante apenas a análise e a observação da ilustração.

Atividade [8]


8. Observe a cena e responda:

a) Que fração de pizza está no prato da menina?

b) Que fração da pizza ainda está na forma?

ou

c) Que fração de pizza eles já comeram?

ou

Figura 61: Atividade 8 da situação didática de avaliação

a. Descrição: A atividade 8, conforme a Figura 61 corresponde à atividade 12 da sequência didática original e não foi modificada. Nesta questão os autores visam introduzir a idéia de equivalência mediante a comparação da área ocupara pelas frações do círculo (uma pizza composta por 6 fatias). Nessa atividade os autores reforçam a idéia de fração como uma relação entre as partes e o todo contínuo, aspecto bastante explorado nas atividades anteriores. Além disso, o contexto explora frações que os alunos já reconhecem $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$, por exemplo, isso consequentemente repercute na minimização de erros por parte do aluno.

b. **Expectativa quanto às implicações das variáveis didáticas e dos seus respectivos valores na mobilização das estratégias e procedimentos pelos alunos**

- A pizza foi dividida em seis partes iguais de modo a produzir frações equivalentes à metade, terça e a sexta parte. Nessa atividade os autores buscam abordar o princípio da invariância. Ou seja, a soma das frações constituídas corresponde ao inteiro contínuo representado por uma pizza. No entanto, não foi possível perceber nas respostas, apresentadas pelos alunos na situação de aprendizagem, a efetiva apropriação desse aspecto concernente ao significado parte/todo.

- A quantidade de fatias é múltipla de 2, 3 ou 6, portanto, é possível determinar frações equivalentes resultantes da divisão por estes números. O estudo das equivalências estabelecidas entre frações é um aspecto crucial a ser explorado nas atividades porque possibilita a compreensão e domínio das frações. O aluno compreende a idéia quando consegue construir classes de equivalência de uma fração por meio da subdivisão dos do inteiro seja no contexto discreto ou contínuo. Porém, na situação de aprendizagem, apenas 2 dos 40 alunos registraram no item (a) a fração correta (um sexto). Assim como, nas atividades 1 e 2, 27 dos 40 alunos que responderam a atividade apresentaram como solução “um pedaço”, “uma fatia” ou “1” enquanto 11 alunos responderam “um meio” ou um “terço”. Portanto, esperamos que a reapresentação da atividade na situação de avaliação se configure como um novo momento para reflexão do aluno acerca dos questionamentos. E, consequentemente, que possam amadurecer as suas idéias em relação a equivalência entre frações, aumentando assim o índice de êxito em todos os itens da atividade 8.

- No que se refere à escolha didática dos autores, mais exatamente ao tentar induzir os alunos na busca por frações equivalentes utilizando a conjunção: “ou”, que designa a incerteza, portanto remete a idéia de “outro modo”, “por outro lado”, por exemplo, destacamos que é pouco provável que este artifício desperte no aluno tal compreensão. Ao contrário, é provável que sejam capazes de registrar apenas as frações correspondentes à metade ou três sextos e as frações um terço ou dois sextos, respectivamente nos itens (b) e (c), sem que haja qualquer conexão entre os registros. Na situação didática vivenciada anteriormente, nos itens (b) e (c) os acertos foram parciais, pois apenas 3 dos 40 alunos (8%) registraram a fração $\frac{3}{6}$, outros 14 alunos (35%) registraram a fração $\frac{1}{2}$ como resposta para o item (b). No caso do item (c) 28 dos 40 alunos registraram a fração $\frac{1}{3}$ (70%), nenhum aluno escreveu a fração $\frac{2}{6}$.

Atividade [9]

a. Descrição

- Atividade 9, que ilustra a Figura 62, corresponde exatamente à atividade 8 da sequência didática original. Portanto, não foram realizadas modificações em relação às variáveis globais: contexto, polígono, por exemplo. Assim como, na maioria das atividades esta tem como objetivo abordar a relação parte/todo no contexto contínuo. A atividade solicita que o aluno formule uma explicação para o equívoco cometido pela personagem da ilustração. Após analisar a divisão do retângulo o aluno deverá concluir que a personagem não dividiu o polígono em partes iguais. E, por isso, a fração colorida não corresponde a um quarto do retângulo. Vale salientar que este argumento consiste na expectativa dos autores em relação ao aluno.

9. Observe a figura e veja o que diz o menino:

O menino está enganado. A parte vermelha **não** é $\frac{1}{4}$ Da figura. Por quê?

Figura 62: Atividade 9 da situação didática de avaliação

b. Expectativa quanto às implicações das variáveis didáticas e dos seus respectivos valores na mobilização das estratégias e procedimentos pelos alunos

- Ao realizar esta atividade, na situação de aprendizagem, apenas 7 dos 40 alunos (18%) escreveram a resposta esperada pelos autores. Outros 27 alunos (68%) apresentaram explicações equivocadas (a maioria respondeu que o menino já havia pintado um quarto do retângulo), 5 alunos (12%) registraram respostas inconclusivas e 1 aluno (2%) não soube responder. Estes dados possivelmente indicam que os alunos não são estimulados ou estão acostumados a fornecer explicações sobre suas estratégias, procedimentos e raciocínios. Nesse sentido, (re) apresentamos a atividade para que o aluno tenha a oportunidade de refletir sobre a situação posta, considerando divisões realizadas anteriormente no retângulo (Atividade 2), os conhecimentos que já dispõe acerca do significado parte/todo do número racional e, consequentemente tenha condição de formular uma justificativa consistente ao explicar o erro cometido pela personagem.

5.3 Análise a posteriori dos efeitos didáticos emergentes na evolução emergentes atividades que integram a situação de avaliação

Atividade [1]

- Como mencionamos anteriormente, a situação de avaliação foi realizada por 37 dos 41 alunos do 5º Ano do Ensino Fundamental. Nesta situação didática a professora regente não forneceu nenhuma instrução complementar, apenas leu os enunciados e solicitou que os alunos respondessem sozinhos, assim como os autores sugerem no manual do professor. No entanto, ressaltamos que esta postura didática não evitou que os alunos interagissem com seus pares, questionando "*qual foi a resposta para tal pergunta?*" ou "*como posso resolver essa questão?*", por exemplo. Porém, esses eventos ocorreram em menor escala que na situação de aprendizagem quando os alunos foram dispostos em pequenos grupos. E, por este motivo acreditamos que as respostas dos alunos são mais fidedignas aos raciocínios producentes.

- Esta atividade, como dissemos na análise preliminar, sofreu pequenas alterações, no entanto, as variáveis didáticas permaneceram as mesmas: por exemplo, a utilização dos polígonos regulares: retângulos (queijo e a barra de chocolate) e quadrados (bolos), para explicitar o significado parte/todo do número racional no contexto contínuo. Embora, a atividade sugerida seja praticamente idêntica àquela proposta na situação de aprendizagem, nos surpreendeu a frequência e os percentuais de êxito e insucesso dos alunos na realização da atividade. Diferentemente da situação didática proposta anteriormente, a média de 22 dos 37 alunos (59%) dos que responderam os itens (a) e (b) satisfatoriamente, provavelmente perceberam a existência de uma totalidade divisível. A frequência, relativa às divisões do inteiro contínuo, indica que praticamente a metade dos alunos não encontrou dificuldades ao realizar a divisão equitativa das regiões poligonais. Mas, ao comparar os percentuais de estratégias exitosas da situação de avaliação com os da situação de aprendizagem na resolução da atividade 1, constatamos que houve um declínio de 35 pontos percentuais.

- A maioria das estratégias, adotadas pelos alunos, foi eficaz no atendimento das variáveis de comando e correspondem basicamente aos mesmos procedimentos utilizados na resolução dessa atividade na situação didática de aprendizagem. No entanto, 41% dos alunos ao decompor o inteiro acabaram produzindo partes desproporcionais. Portanto, a divisão desigual dos polígonos, ou seja, a repartição das regiões poligonais deixando resíduos, identificadas nos protocolos dos alunos nos fornece indícios de que a compreensão relativa à necessidade do esgotamento do todo na produção de frações legítimas foi superficial.

- ✔ Em relação ao valor da variável: a quantidade de cortes e a quantidade de partes a serem produzidas (frações do inteiro contínuo), voltamos a afirmar que ao definir a variável: número de cortes que podem ser feitos no inteiro para dividi-lo em partes iguais a frequência de estratégias bem sucedidas aumenta consideravelmente. Portanto, o controle dessa variável, possibilita mais precisão na obtenção das soluções esperadas ao propor o problema. No item (a), para produzir metade do bolo (quadrado), se faz necessário apenas um corte é suficiente. Enquanto, no item (b) dessa atividade, para dividir a barra de chocolate (retângulo), dois cortes seriam suficientes.

- ✔ Com relação ao item (a) da atividade 1 "*dividir cada bolo fazendo apenas um corte, de modo que, cada um dos quatro amigos receba uma parte*" desencadeou, na situação de avaliação, a mobilização das seguintes estratégias:

(i) 9 dos 37 alunos (24%) seccionaram cada um dos quadrados (sanduíches), traçando a diagonal ao fazer junção dos vértices opostos por um segmento de reta, como podemos observar na divisão dos quadrados, registrado pelo aluno no protocolo n.º 07 exibido na Figura 63.

(ii) Assim como no tópico anterior, 9 dos 36 alunos (24%) dividiram os quadrados unindo os pontos médios dos lados paralelos, por meio do traçado de segmentos perpendiculares ou horizontais. Uma das soluções descritas pode ser observada no extrato do protocolo n.º 06 ilustrado na Figura 63.

(iii) Dentre os alunos que apresentaram soluções incompatíveis para com a variável de comando do item (a) (fazendo apenas um corte), 5 dos 37 alunos (14%) efetuaram a divisão dos quadrados unindo os pontos médios dos lados paralelos ou os vértices do polígono por meio da construção de dois segmentos de reta. Enquanto, 14 dos 37 alunos (38%) apresentaram outras soluções, nas quais predomina a utilização de três segmentos de reta. A tese de que as divisões dos quadrados, efetuadas pelos alunos, possa ter sofrido

influência da outra variável didática (dividir os bolos para 4 pessoas), é bastante plausível diante dos dados apresentadas nesse estudo. No fragmento do protocolo n.º 07, por exemplo, é possível observar uma das soluções apresentadas pelos alunos fazendo 2 cortes em cada um dos quadrados conforme mostra a Figura 63.

(iv) Além disso, é pertinente considerar que 6 dos 37 alunos (16%) encontraram mais de uma solução para o problema. Porém, assim como na situação de aprendizagem, os alunos decidiram efetuar o registro de apenas uma delas.

- Em relação ao item (b) da atividade, assim como na situação didática proposta anteriormente, o fato dos autores do livro didático não determinarem a quantidade de cortes que poderiam ser efetuados na região poligonal retangular suscitou múltiplas respostas. Portanto, independentemente da solução apresentada, 26 dos 37 alunos (70%) foram bem sucedidos na realização da tarefa, porém numa escala inferior ao resultado apresentado na situação didática anterior. Por outro lado, 10 dos 37 alunos (27%) dividiram o retângulo equivocadamente produzindo porções desproporcionais. Enquanto um dos alunos (3%) não respondeu a atividade. Nos parágrafos subsequentes apresentamos as frequências e os percentuais referentes às respostas apresentadas pelos alunos neste item.

- **Fazendo dois cortes**

(ii) Como podemos observar no extrato do protocolo n.º 07, exposto na Figura 63, 3 dos 37 alunos (8%) uniram dois vértices obtendo uma das diagonais dos quadrados. Como mencionamos na análise a priori a expectativa dos autores era que a maioria dos alunos apresentasse essa solução.

(iii) A maioria dos alunos efetuou a divisão do retângulo dividiram o retângulo cruzando os segmentos de reta que unem os pontos médios dos lados paralelos. A frequência neste item corresponde a 7 dos 37 alunos (19%), tal como o ilustra o extrato do protocolo n.º 06 da Figura 63.

- **Fazendo três cortes**

(iv) 13 dos 37 alunos (35%) dividiram o retângulo traçando três segmentos de reta perpendiculares e equidistantes. E, neste caso, a freqüência corresponde à maioria das respostas que atendem a variável explícita no item (b) "dividir para 4..."

(v) Outra estratégia prevista na análise a priori consistia na divisão do retângulo traçando segmentos de reta equidistantes na posição horizontal. Assim como na situação didática proposta anteriormente, nenhum dos alunos efetuou o registro desta solução na ficha de atividades.

- **Fazendo mais de três cortes**

(vi) Como a quantidade de cortes a serem feitos no retângulo do item b não foi definida 3 dos 37 alunos (8%) obtiveram frações equivalentes a um quarto do retângulo. Ao fazer 4 cortes produziram 8 frações equivalentes do retângulo. E, ao efetuar 5 cortes no polígono acabaram dividindo em 12 partes "iguais" ou equivalentes. Consequentemente, ao dividir a figura em 24 partes o aluno realizou 10 cortes. Na divisão do retângulo registrada no protocolo n.º 36, exibido na Figura 63, é possível verificar que o aluno executou 5 cortes.

(vii) 10 dos 37 alunos (27%) dividiu o retângulos em porções desproporcionais. Sendo que 9 dos 10 alunos (24%) ao efetuar 2 cortes irregulares produziram 3 porções desiguais. Enquanto, um dos alunos (3%) efetuou 4 cortes obtendo 10 partes equivalentes.

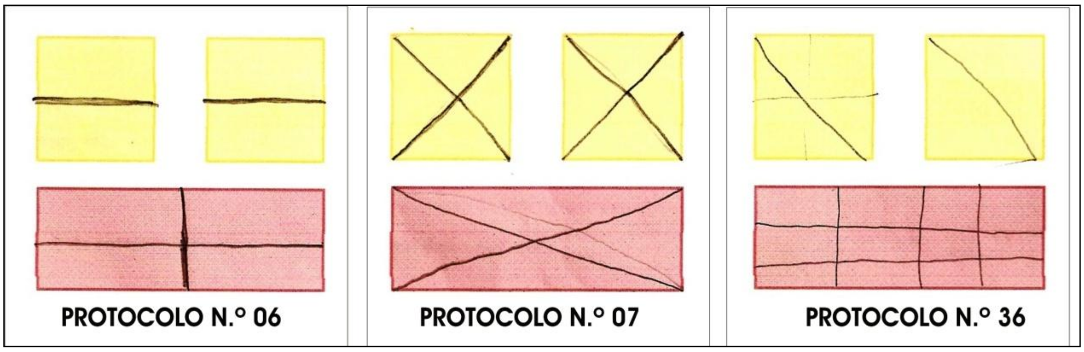
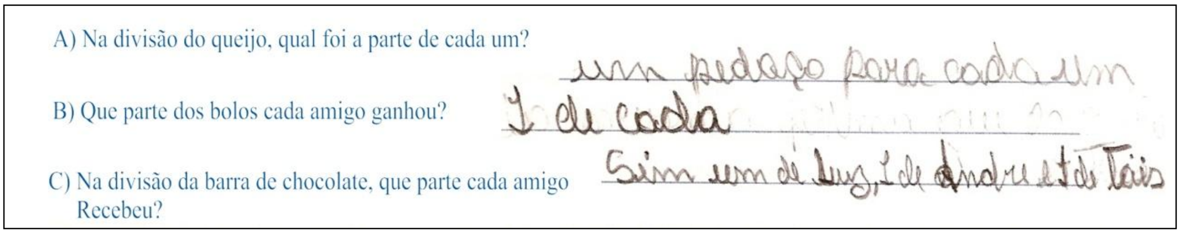


Figura 63: Extrato dos protocolos n.º 06, 07 e 36 relativos à resolução dos itens (a) e (b) da atividade 1 da situação de avaliação

Atividade [2]

- ✔ Assim como, na situação didática vivenciada anteriormente, a semântica do enunciado da atividade 2, continuou interferindo nas respostas dos alunos. Como já mencionamos um elemento comum às variáveis de comando dos itens que compõem a atividade consiste na palavra **parte**. Neste caso, a frequência das respostas apresentadas pelo aluno em que as expressões ***uma parte***, ***uma fatia*** *ou* ***um pedaço*** aparece é 14 dos 37 alunos (38%) no item (a), 6 dos 37 alunos (16%) no item (b) e 13 dos 37 alunos (35%). Para exemplificar tal situação apresentamos o extrato de um dos protocolos dos alunos na Figura 64.


A) Na divisão do queijo, qual foi a parte de cada um? um pedaço para cada um

B) Que parte dos bolos cada amigo ganhou? 1 de cada

C) Na divisão da barra de chocolate, que parte cada amigo Recebeu? Sim um de Luz, 1 de André e 1 de Tais

Figura 64: Extrato do protocolo n.º 16 relativo à resolução
da atividade 2 da situação de avaliação

- No item (a), apenas 8 dos 37 alunos (22%) apresentaram a resposta esperada pelos autores, ou seja, efetuou o registro da fração um terço em linguagem natural ou simbólica fracionária. O segundo registro foi mais frequente um aspecto que reflete a gama de atividades da situação de aprendizagem que solicitavam este tipo de conversão. Neste item, 9 dos 37 alunos (24%) registraram na ficha de atividades outras soluções (1/4, 2 ou 3 partes ou 1/2), as quais configuram-se como erros cometidos pelos alunos na conversão do registro pictórico para o registro em linguagem natural ou simbólico fracionário. Além disso, 10 dos 37 alunos (16%) se abstiveram de responder este item.

- No item (b), apenas 7 dos 37 alunos (19%), atenderam a expectativa dos autores efetuando o registro em linguagem natural ou simbólico da fração correspondente à metade ou a um meio. É pertinente considerar que houve uma diferença de 31% em relação ao percentual referente ao êxito dos alunos nesse item ao vivenciar a situação de aprendizagem. Assim como na divisão dos sanduíches, 2 dos 37 alunos (5%) apresentaram como resposta a fração um quarto dos bolos é bem provável que o fato do inteiro corresponder a duas unidades contínuas terem sido divididas ao meio e resultado em quatro partes equivalentes, possam ter feito com que os alunos considerassem a fração um quarto do total de partes (4) em detrimento da quantidade de parte (2) de cada uma dessas unidades (bolos). Além disso, 6 dos 37 alunos (16%) deixaram de representar a fração do bolo que coube a cada um dos amigos.

- No item (c), apenas 7 dos 37 alunos (19%), diferença de 60 pontos percentuais se comparado ao índice de soluções que atendem à variável de comando as expectativas apresentando como solução o registro da fração um quarto em linguagem natural como resposta para este item. Entre as respostas que não satisfazem ao questionamento, destacamos que 2 dos 37 alunos (5%) afirmaram que a fração correspondente a cada um equivaleria à metade do bolo. Outros 7 alunos (19%) respondeu que a cada um caberia 3 ou 4 fatias, partes ou pedaços. Enquanto 4 alunos (11%) registraram a notação da fração um terço. Acreditamos que em relação às duas últimas respostas citadas anteriormente (11 alunos), as quais foram identificadas nos protocolos, deve-se ao fato dos alunos terem se fundamentado na ilustração e nas informações que introduzem a atividade. Neste item, 4 alunos (11%) não efetuaram o registro da fração solicitada.

Atividade [3]

- ✔ No item (a), ocorreu um discreto declínio no atendimento à variável de comando: *"escreva por extenso a fração 1/4"*, pois 31 dos 37 alunos (84%) efetuaram o registro da fração um quarto em linguagem natural. As outras respostas apresentadas referem-se a 5 alunos (13%) terem feito o registro em linguagem natural das frações: um terço ou quatro terços. Enquanto, um dos alunos (3%) não realizou a tarefa. Embora, a maioria não tenha apresentado qualquer dificuldade na realização da tarefa: nomear a fração solicitada (1/4) destacamos que as conversões entre os diferentes registros (pictórico, linguagem natural e simbólico fracionário), da fração um quarto foram diversas vezes exploradas nas atividades que integram a sequência didática original.

- ✔ No item (b) os alunos deveriam determinar a quantidade de ovos equivalente a um quarto total de ovos armazenados numa caixa, que corresponde a uma dúzia. Devido a atividade corresponde a uma adaptação da atividade 4, parte que compõe a sequência didática fornecida pelo livro didático, a finalidade da variável didática e da respectiva cota, são equivalentes. Neste item, esperávamos que o aluno efetuasse a divisão da dúzia de ovos (12) em quatro partes iguais. E, na realização da tarefa utilizasse o cálculo mental, ou circulasse os ovos dispostos na caixa, conforme sugere a ilustração utilizada como suporte da atividade. Entretanto, nenhum aluno apresentou a resposta esperada.

- ✔ A propósito de o inteiro corresponder a uma quantidade discreta (12) poderia pressupor que o aluno ao determinar a fração (um quarto), recorresse aos procedimentos de cálculo mental, ou até ao algoritmo da divisão uma vez que já estava institucionalizada a idéia de **dividir** o inteiro (contínuo ou discreto), em partes iguais. E, além disso, o acesso ou a reapresentação das atividades realizadas anteriormente na situação de aprendizagem poderia promover automaticamente o resgate da memória didática do aluno, por exemplo, ao tentar lembrar como procedeu naquela situação ou restaurar a resposta apresentada na primeira situação didática. Porém, não foi o que nós constatamos as freqüências e os percentuais referentes aos efeitos “colaterais” dessa variável e sua cota indicam que:

(v) Apenas 1 dos 37 alunos (3%) apresentou a resposta esperada, dividindo 12 por 4 obtendo como solução 3. E, ao que tudo indica o procedimento de cálculo da fração da quantidade discreta, utilizado pelo aluno possivelmente foi mental, pois o mesmo não (re)dividiu os ovos da ilustração nem tão pouco registrou o algoritmo da divisão. Nossa hipótese está ancorada na evidente resolução do item (c), que propõe a mesma tarefa (calcular uma fração de uma quantidade discreta, por este mesmo aluno.

(vi) 3 dos 37 alunos (8%) somaram os dados do enunciado (12 + 4), nesta solução a fração um quarto foi interpretada como quatro unidades.

(vii) 1 dos 37 alunos (3%) subtraiu os dados do enunciado (12 – 4). Assim como, no tópico precedente, os alunos interpretaram a fração um quarto como quatro unidades inteiras.

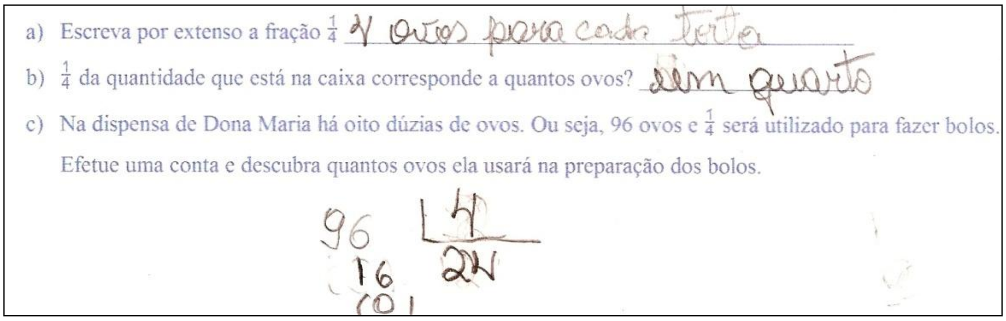
(viii)3 dos 37 alunos (8%) apresentaram como respostas frações cujos termos (numerador e denominador), foram representados pelos dados do texto introdutório ou do próprio enunciado do item (b). Assim sendo, as soluções registradas na ficha de atividades pelos alunos consistiam nas frações: um quarto, um doze avos ou quatro doze avos. No protocolo n.º 06, conforme mostra a Figura 65, é possível verificar que uma dessas frações corresponde à solução apresentada pelo aluno.

(ix)12 dos 37 alunos (32%) responderam que um quarto de doze corresponde a 4 selos. Provavelmente porque na ilustração traz um exemplo no qual uma dúzia de ovos foi dividida em três partes. E, portanto, cada uma dessas partes corresponde a 4 ovos, os quais se encontram circulados.

(x) 11 dos 37 alunos (30%) efetuaram o algoritmo da multiplicação entre alguns dados fornecidos no exemplo que ilustra a determinação de uma fração da quantidade. O aluno efetuou a operação entre 3 (quantidade de bolos) e 4 (quantidade de ovos em cada um dos bolos), obtendo obviamente como resultado 12 unidades.

(xi) 3 dos 37 alunos (8%) registraram como solução 96 ovos, essa quantidade corresponde a um dos dados do item posterior (c). Enquanto, outros 3 alunos (8%), deixaram de realizar esta tarefa.

- Em relação à situação de aprendizagem houve uma progressão significativa quanto à compreensão do aluno em relação ao significado parte/todo do número racional na determinação de uma fração de quantidades discretas. Na situação de avaliação, apenas 1 aluno (3%) resolveu o problema efetuando a divisão equitativa da quantidade discreta. Entretanto, no item (c) 18 dos 37 alunos (49%) atentaram para a idéia de divisão, embora apenas 5 deles (14%) tenham efetuado corretamente a operação (96 : 4), como podemos observar no extrato do protocolo ilustrado na Figura 65. Enquanto, na situação de aprendizagem apenas 2 dos 36 alunos (5%) efetuaram a divisão (96 : 2).


a) Escreva por extenso a fração $\frac{1}{4}$ 4 ovos para cada torta

b) $\frac{1}{4}$ da quantidade que está na caixa corresponde a quantos ovos? sem quarto

c) Na dispensa de Dona Maria há oito dúzias de ovos. Ou seja, 96 ovos e $\frac{1}{4}$ será utilizado para fazer bolos. Efetue uma conta e descubra quantos ovos ela usará na preparação dos bolos.

96 | 4
16 24
(0)

Figura 65: Extrato do protocolo n.º 06 relativo à resolução
da atividade 3 da situação de avaliação

- A variável de comando do item (c): *"efetue uma conta"* continuou desencadeando o surgimento do efeito "*idade do capitão*". 21 dos 37 alunos (57%) efetuaram uma das quatro operações fundamentais utilizando os dados contidos no enunciado. Assim como podemos verificar nas freqüências e percentuais referentes às soluções apresentadas pelos alunos nesse item (c) que relacionamos em seguida:

(v) 12 dos 37 alunos (33%) efetuaram uma das divisões (96 : 2 = 48), (96: 12 = 8) ou (12 : 3 = 4). Nesse caso, podemos verificar que os divisores quantidade discreta são relativos aos dados do exemplo fornecido na ilustração ou no enunciado do item (C), 12(quantidade de ovos na caixa), 4 (quantidade de ovos utilizada em cada bolo), por exemplo. Mas, no que se refere à divisão ao meio, ressaltamos que na maioria das atividades houve uma forte tendência dos alunos em dividir dessa forma qualquer tipo de inteiro, seja contínuo (formas planas) ou discreto (quantidades, coleções ou grupos), nas

vezes que foram solicitadas frações de quantidades discretas ou conversões nos seguintes sentidos: registro simbólico fracionário → registro pictórico ou linguagem natural → registro pictórico.

(vi) Apenas 2 dos 37 alunos (5%) registraram o algoritmo (96 - 28=72) e (96 – 4). Neste caso, os alunos utilizaram como subtraendo os termos da fração um quarto. O subtraendo (14) corresponde à interpretação da fração um quarto como sendo dois números distintos: o numerador equivalente a uma dezena e o denominador correspondente a 4 unidades.

(vii) Assim como, no tópico anterior 2 alunos (5%) apresentaram como solução para o problema as seguintes expressões aritméticas: (96 + 14) ou (96 + 1+ 4). E, nesse sentido podemos afirmar que os termos da fração um quarto foram interpretados como dezena e unidade. A hipótese de que o aluno não vê a fração como um número mais como dois números distintos, nesse caso é plausível.

(viii) 3 dos 37 alunos (8%) efetuaram multiplicações, entre as quais: (96 x 4) e (12 x 3). Na situação didática vivenciada anteriormente esta foi a única operação que não havia sido realizada pelos alunos com os dados fornecidos no problema.

(ix) Além disso, 2 dos 37 alunos (5%) apresentaram registros incoerentes: (1/10) e (32). Enquanto, outros 11 alunos (30%) se abstiveram ou não conseguiram realizar a tarefa de calcular uma fração de uma quantidade discreta.

- ✔ No item (d), assim como na situação didática vivenciada anteriormente, alunos deveriam escrever a fração correspondente as porções dos retângulos coloridas de amarelo. Analogamente, a situação didática de aprendizagem os alunos não foram exitosos na realização da tarefa proposta. A freqüência de êxito na apresentação das respostas esperadas em relação ao item (d) ficou aquém das expectativas correspondendo a 16 dos 37 alunos (43%), uma vez que a atividade está sendo reapresentada ao aluno, ou seja, eles já haviam realizado essa tarefa anteriormente. E, além disso, a maioria dos alunos efetuou outras vezes as conversões solicitadas, cujo sentido de partida é pictórico e o de chegada é simbólico em atividades similares a esta. No entanto, a frequência média de respostas equivocadas equivale a 45%, na representação das frações dos retângulos sugeridos no item (d), as quais estão relacionadas abaixo:

(iv) Independentemente, das respostas fornecidas pelos alunos nos protocolos estarem corretas ou equivocadas, a frequência média correspondente a utilização do registro em linguagem natural equivale a 1 dos 26 alunos que representaram as frações dos retângulos. No que se refere ao uso do registro simbólico fracionário entre 20 dos26 alunos, privilegiaram apenas essa forma de representação das frações. Porém, destes 20 alunos seis efetivaram a representação em ambos os registros. Ou seja, nomearam e escreveram a notação das frações solicitadas. Este aspecto denota que o registro simbólico fracionário foi a conversão mais solicitada na maioria das atividades tanto da sequência didática original quanto da sequência utilizada na situação de avaliação. E, por isso, o aluno mesmo sem ser solicitado tende a utilizá-lo.

(v) Na representação simbólica da fração colorida no primeiro retângulo do item (d) 16 dos 37 alunos (43%) apresentaram a resposta esperada: um terço. E, dentre os 16 alunos 14 (85%) optaram apenas pelo registro simbólico das frações dos retângulos. Um dos alunos (6,5%) utilizou enquanto outro aluno (6,5%) efetuou a conversão simultânea.

(vi) Em relação à fração amarela do segundo retângulo do item (d), podemos afirmar que as frequências referentes às respostas fornecidas nos protocolos dos alunos coincidem com aquelas que foram relacionadas no tópico anterior.

(vii) No que se refere à fração colorida no terceiro retângulo do item (d), assim como nos casos anteriores, 16 dos 37 alunos (43%) apresentaram a resposta esperada: um sexto. Sendo que dentre os 16, quatro alunos efetuaram os registros simultâneos da fração um sexto (em linguagem natural e simbólica fracionária), outros 11 alunos privilegiaram apenas a representação simbólica fracionária. Enquanto, um dos alunos nomeou a fração solicitada na atividade.

- ✔ É possível observar na Figura 66, que no extrato do protocolo n.º 03 ao efetuar o registro simbólico o aluno representou no numerador a quantidade de partes pintadas do retângulo e no denominador a quantidade de partes não pintadas. Mais uma vez verificamos que o aluno não representou a relação parte/todo e, sim a relação parte/parte. Enquanto, no protocolo n.º 22 na representação das frações, em linguagem simbólica fracionária, o aluno inverteu a ordem dos termos da fração.

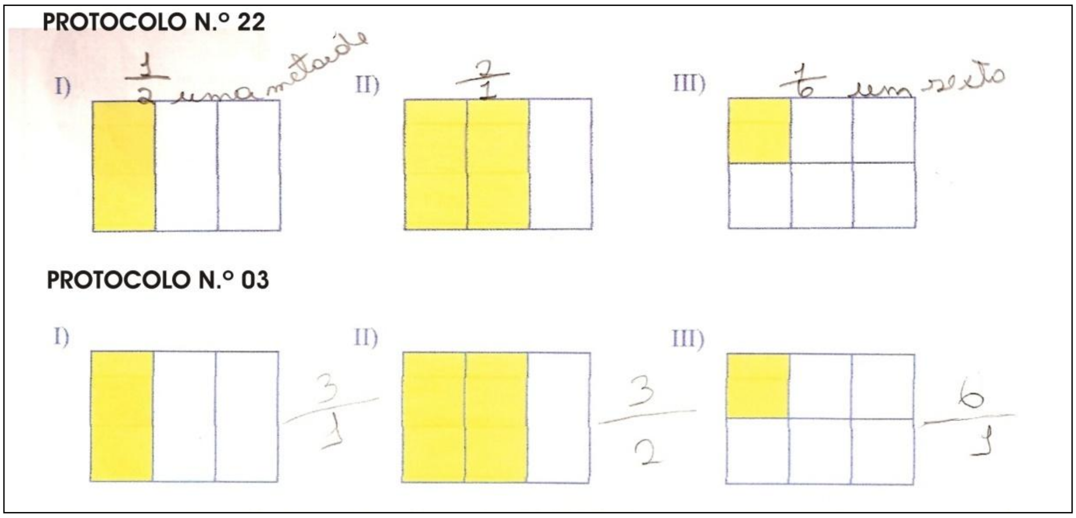


Figura 66: Extratos dos protocolos dos alunos relativos à resolução do item (d) da atividade 3 da situação de avaliação

- Como exemplifica as respostas contidas no extrato do protocolo nº. 03, apresentado na Figura 66, o erro identificado consiste na inversão dos termos da fração. O total de partes em que o polígono foi dividido é representado pelo numerador e as porções consideradas do mesmo são representadas no denominador. Assim sendo, 2 dos 17 alunos (12%), procederam ao registro simbólico fracionário escrevendo 3/1 referente ao retângulo (a). 1 dos 17 alunos (6%) cometeu o mesmo equívoco em relação ao retângulo (b), expressando o registro 3/2. Enquanto, 2 dos 17 alunos (12%), representaram deste modo a fração amarela do retângulo (c) registrando 6/1.

- Além disso, o erro dos alunos ao considerar da relação parte/parte ao invés da relação parte/todo podemos afirmar que no item (d): 9 dos 17 alunos (53%) procederam dessa forma na representação do retângulo (a); na escrita da fração tomada do retângulo (b) a frequência corresponde a 15 dos 17 alunos (88%) e no registro da fração pertencente ao terceiro retângulo a frequência aumenta para 11 dos 17 alunos (65%). %). Em relação à hipótese de que os alunos associariam a divisão do hexágono, sugerida na ilustração que antecede a atividade, com a divisão do retângulo (c) e, consequentemente possibilitaria o registro correto da fração um sexto não se confirma, pois o percentual de erro nesse item corresponde à 45%.

Atividade [4]

- Como os animais estão divididos pela cor da pelagem, os alunos efetuaram a contagem do total de cachorros (15) e dos grupos (3). E, contrariando as antecipações contidas na análise preliminar da atividade, no item (a) 35 dos 37 alunos (94%) apresentaram a solução esperada. Outros 2 alunos (6%) afirmaram que a quantidade de cachorros corresponderia a 11 ou 30 unidades.

- No que se refere ao item (b), apenas 29 dos 37 alunos (78%) foram bem sucedidos na contagem dos grupos de animais. Entretanto, outras respostas emergiram entre as quais:
  (i) 4 dos 37 alunos (11%) afirmaram que a quantidade de grupos corresponderia a 5 cachorros. E, nesse caso, os alunos consideraram a quantidade de animais que possuem pelagem da mesma cor (5) ou o total de cachorros que faz parte da competição (15).

  (ii) 3 dos 37 alunos (8%) registraram que a quantidade de grupos corresponderia a uma unidade. Nesse sentido, pressupomos que os alunos consideraram o total de animais (15) como o inteiro (1).

  (iii)Enquanto, um dos alunos (3%) apresentou como solução o registro simbólico fracionário equivalente a um quinto dos animais. Portanto, o aluno considerou um dos cachorros de um grupo de cinco animais da mesma cor.

- Como antecipamos na análise preliminar o fato da ilustração exibir os três grupos, contendo cinco animais em cada um, devidamente separados pelas cores dos pelos, facilitou apenas a utilização da contagem dessas quantidades na apresentação das respostas dos itens (a) e (b), assim como é possível observar no extrato do protocolo exibido na Figura 67. No entanto, assim como na situação didática vivenciada anteriormente, o aluno não percebeu que poderia aproveitar essas escolhas didáticas dos autores para estabelecer as devidas correspondências entre o registro pictórico e o simbólico fracionário do número racional, necessárias à resolução dos itens posteriores. Ou seja, o estabelecimento de uma conexão entre o jogo de cores (grupos de animais) e a notação fracionária dessa quantidade discreta (total de cachorros) possibilitaria a resolução dos itens (c) e (d). Ou seja, a percepção da relação parte (grupo de 5 cachorros) / todo (cachorros inscritos na competição), os conduziria a resposta esperada em ambos os itens mencionados, porém:

(iv) *No item (c) houve uma discreta melhora na frequência de respostas condizentes com as expectativas: (1/3) ou cinco quinze avos (5/15). Neste caso, 5 dos 37 alunos apresentaram um dos registros simbólicos das frações mencionadas.*

- ✔ *Entre os registros efetuados equivocadamente pelos alunos, destacamos que 16 dos 37 alunos (43%) responderam que a fração de cachorros cujo pelo é marrom corresponde a 1/5 do total, conforme ilustra o protocolo n.º03 da Figura 67. E, neste caso, os alunos não consideraram o total de animais (15), mas a quantidades de cachorros pertencentes ao mesmo grupo (5). 15 dos 40 alunos (41%) afirmaram que a fração de atletas vestidos de azul corresponde a 5, 1, 2/5 ou 2/3. Enquanto, um dos alunos (3%) não representou a fração solicitada.*

- ✔ *No que diz respeito ao item (d), o fato da palavra **"não"** ser destacada em negrito surtiu o efeito desejado, pois mesmo apresentado soluções incompatíveis em relação ao que foi questionado nesse item todos os alunos desconsideraram o grupo de uniforme amarelo na escrita do registro simbólico da fração. Porém, em relação ao questionamento: "Que fração* **não** *usa camisa amarela?", apenas 3 dos 37 alunos (8%) registraram na ficha de atividades a fração equivalente (10/15) à resposta esperada (2/3).*

- ✔ *Neste mesmo item, 3 dos 37 alunos (8%) não efetivaram nenhum registro referente à fração solicitada. Enquanto, 31 dos 37 alunos (84%) fracassaram na tarefa de realizar a conversão entre os registros de representação no sentido sugerido (registro pictórico → registro simbólico fracionário). Assim como, na atividade 11 da sequência didática original, verificamos que a maioria dos erros na efetivação do registro simbólico de uma fração ocorre devido ao aluno observar a relação parte/parte ao invés de considerar a relação parte/todo. Assim sendo, entre as respostas incoerentes apresentadas neste item, destacamos que:*

- ✔ *10 dos 37 alunos (27%) registraram a fração um décimo (1/10), resposta apresentada por um dos alunos no protocolo n.º 03 da Figura 67. Nesse caso, os alunos mediante a contagem consideraram que os grupos de cachorros (branco e cinza) corresponderiam a um único conjunto representado como numerador da fração. Enquanto, os totais de animais desses dois grupos somam 10 animais, quantidade correspondente ao* *denominador. Portanto, estas quantidades foram utilizadas, por eles como termos da fração de cachorros cuja pelagem não é marrom.*

(v) *5 dos 37 alunos (14%) afirmaram que a fração de cães cuja cor dos pelos não é marrom correspondem a uma dezena de animais (10). Portanto, os alunos efetuaram esse registro mediante a contagem dos animais dos grupos de cor branca e cinza.*

- *3 dos 37 alunos (8%) registraram a fração um quinto (1/5). Consequentemente, o numerador (1) corresponde ao conjunto formado pelas cores: branca e cinza. Enquanto, a quantidade de cães de um dos grupos (5) foi disposta no denominador da fração.*

- *13 dos 37 alunos (35%) apresentaram outras soluções, porém incoerentes com a variável de comando: "Escreva a fração dos animais que não têm pelo de cor marrom". Entre as respostas apresentadas nos protocolos encontram-se as frações: um meio (4), um terço (5) ou um nono (4).*

(vi) *Assim como, na resolução do item (e) da atividade 11 da situação de aprendizagem,* nenhum aluno conseguiu determinar um quinto do total de atletas. Mesmo aqueles alunos que solucionaram o problema similar proposto na atividade 3 (calcular um quarto de 12). Além disso, não identificamos nos protocolos dos alunos, qualquer indício de que tenham utilizado as estratégias ou procedimentos mencionados na análise prévia deste item, como dividir a quantidade de cães (15) circulando subgrupos (5). Ou ainda, através do cálculo mental ou do algoritmo da divisão (15 : 5). Mais uma vez, percebemos a dificuldade do aluno em associar que a idéia de dividir em partes iguais não está restrita às grandezas contínuas, mas que é extensiva as grandezas de natureza discreta.

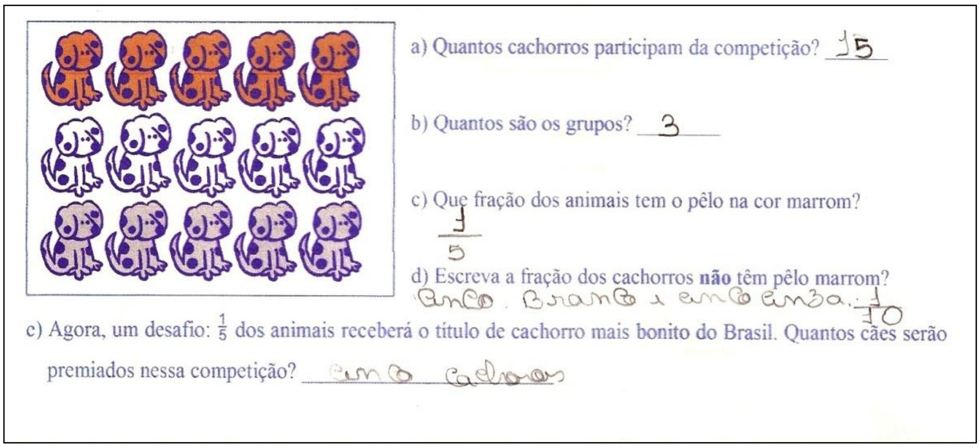
(vii) Dentre os equívocos cometidos no item (e), ressaltamos que a maioria dos alunos, embora não tenha efetuado operações com os dados contidos no enunciado e na ilustração ao determinar a fração solicitada (1/5) de uma quantidade discreta (15), como observamos nos itens (b) e (c) da atividade 4 (1ª sessão), apresentaram-nos como solução para o problema. Portanto, voltamos a afirmar que a pequena quantidade de atividades, que abordam o significado parte/todo do número racional, no contexto discreto comprometeu tanto a compreensão quanto a aplicabilidade desse conceito. Assim sendo, ressaltamos que a frequência e o percentual referente cada registro são relacionados em seguida:

- *19 dos 37 alunos (51%) afirmaram que a fração correspondente aos cães que representaram o Brasil no exterior equivale a 5 exemplares, como podemos observar no protocolo n.º 03, ilustrado na Figura 67. E, neste caso, a maioria dos alunos errou ao considerar a quantidade de cachorros que constituem cada um dos grupos como solução para o problema.*

- *6 dos 37 alunos (16%) responderam que apenas um dos quinze animais representou o Brasil em competições internacionais. Ao fornecer esta solução para o problema o aluno demonstrou que não houve compreensão da variável de comando: "Quantos cães serão premiados nessa competição?" O questionamento, portanto, sugere que a quantidade é superior a unidade.*

- *3 dos 37 alunos (8%) afirmaram que a fração correspondente aos cachorros que representaram o Brasil no exterior equivale a 10 ou 15 unidades. Neste caso, os alunos é possível que os alunos tenham efetuado uma subtração (15 – 5= 10), aspecto que denota que a fração um quinto foi interpretada como 5 unidades inteiras. Ou ainda, que o aluno tenha considerado a quantidade de animais inscritos na competição (15)*

- *Outros 8 dos 37 alunos (22%) registraram nos seus protocolos outras soluções para o mesmo problema, entre as quais destacamos as frações dois quintos (2), um terço (3) e um quinto (3).* Nas respostas apresentadas pelo aluno no protocolo n.º 03, ilustrado na Figura 68, exemplificam os efeitos didáticos descritos anteriormente.


a) Quantos cachorros participam da competição? 15

b) Quantos são os grupos? 3

c) Que fração dos animais tem o pêlo na cor marrom? $\frac{1}{5}$

d) Escreva a fração dos cachorros **não** têm pêlo marrom? Cinco. Branco e cinco cinza. $\frac{1}{10}$

e) Agora, um desafio: $\frac{1}{5}$ dos animais receberá o título de cachorro mais bonito do Brasil. Quantos cães serão premiados nessa competição? cinco cachorros

Figura 67: Fragmento do protocolo n.º 03 referente à resolução da atividade 4 da situação de avaliação

Atividade [5]

- A atividade foi desenvolvida na situação didática anterior (3ª Sessão). E, consequentemente, foi reapresentada aos alunos na situação de avaliação sem que promovêssemos qualquer modificação. No entanto, o aluno continua apresentando a mesma dificuldade diagnosticada em relação à conversão solicitada, cujo registro de partida é pictórico e o registro de chegada corresponde ao simbólico fracionário. Nossa constatação advém das frequências e percentuais relativos aos registros dos alunos efetuados nos protocolos, resultantes das conversões solicitadas.

(i) *No item (a), apenas 9 dos 37 alunos (24%) apresentaram a resposta esperada, ou seja, o registro simultâneo da fração três quartos. Porém, 4 dos 37 alunos (11%), apresentaram como solução a fração um quarto. E, neste caso o aluno considerou a fração do círculo não colorida como numerador e o total de partes do círculo como denominador.* Enquanto, 14 dos 37 alunos (38%) apresentaram como resposta a fração um terço (o numerador equivale à parte não pintada e o denominador a parte colorida no círculo). 8 dos 37 alunos (22%) inverteram a posição dos termos da fração. 3 alunos (8%) apresentaram soluções incoerentes, para as quais não há justificativa plausível. Um dos alunos (3%) não respondeu este item.

(ii) *No que se refere ao item (b), a frequência se mantém no mesmo patamar do item anterior, pois 10 dos 37 alunos (27%) apresentaram a resposta esperada, ou seja, o registro simultâneo da fração quatro sextos. Porém, dentre os equívocos dos alunos destacamos que:*

- *Todavia, 3 dos 37 alunos (8%), apresentaram como solução a fração um quarto. E, neste caso, o aluno considerou as duas frações do círculo não coloridas como sendo uma única parte e a representou no numerador e o total de partes coloridas do círculo no denominador.*
- *8 dos 37 alunos (22%) responderam que a fração colorida no círculo corresponderia a quatro meios. Ou seja, o aluno considerou como numerador a porção colorida e, como denominador, a porção não colorida da figura.*
- *6 dos 37 alunos (16%) registraram a fração dois quartos (parte não pintada / parte pintada).*

- *4 alunos (11%) apresentaram como solução às frações dois sextos e seis quartos correspondendo às frações não pintadas / total de partes e total de partes/partes não pintadas equivalendo respectivamente aos termos da fração.*
- *Outros 5 dos 37 alunos (%) apresentaram outras soluções, no entanto não encontramos nenhum argumento que as explique.*
- *Um dos alunos (3%) não realizou as conversões solicitadas.*

(iii)No item (c), a frequência aumentou para 14 dos 37 alunos (38%). Estes apresentaram a resposta esperada, ou seja, o registro simultâneo da fração um terço. Entretanto, 22 dos 37 alunos (60%), não conseguiram realizar a tarefa corretamente. E, entre os equívocos dos alunos identificamos que:

- ✔ *2 dos 37 alunos (5%) apresentaram como solução 1/1 ou um pedaço. Portanto, um grande número de alunos que consideram a fração azul do círculo como a unidade, uma parte ou uma fatia do inteiro contínuo.*
- ✔ *12 dos 37 alunos (32%) apresentaram como resposta a fração 1/2 (um meio) ou 2/1 (o numerador equivale à parte pintada e o denominador ao total de partes não coloridas do círculo).*
- ✔ *2 dos 37 alunos (5%) que realizaram a atividade registraram neste item a fração dois terços (o numerador corresponde à quantidade de partes coloridas no círculo e o denominador equivale a parte não colorida). E, outros 6 alunos (16%) efetivaram o registros de inúmeras frações para as quais não conseguimos estabelecer relação para com o raciocínio do aluno. Enquanto, um dos alunos (3%) deixou de efetuar os registros solicitados na atividade.*

(iv) No item (d), apenas 13 dos 37 alunos (35%) atenderam as expectativas registrando a fração dois terços. Portanto, 23 dos 37 alunos (62%) apresentaram soluções incompatíveis com a variável de comando da atividade. Assim sendo, relacionamos a seguir as frequências e os percentuais relativos aos equívocos cometidos pelos alunos:

- ✔ *16 dos 37 alunos (43%) registraram a fração um meio, na qual o numerador equivale a parte não pintada e o denominador ao total de partes pintadas do círculo. Ou ainda a fração 2/1, obviamente que os termos dessa fração correspondem à relação: pintada/não pintada.*
- ✔ *4 dos 37 alunos (11%) efetuaram os registros da fração um terço. No primeiro caso, os alunos consideraram o numerador como a parte não colorida (1) e o denominador como*

o total de partes do círculo (3). E, no segundo caso a ordem dos termos está invertida, porém as partes consideradas correspondem ao total de partes do círculo/parte do círculo que não está colorida.

- *3 dos 37 alunos (8%) registraram outras respostas para este item. No entanto, não temos como explicitar o raciocínio seguido pelo aluno ao apresentar tais soluções. Outro aluno (3%) deixou de realizar as conversões exigidas neste item.*

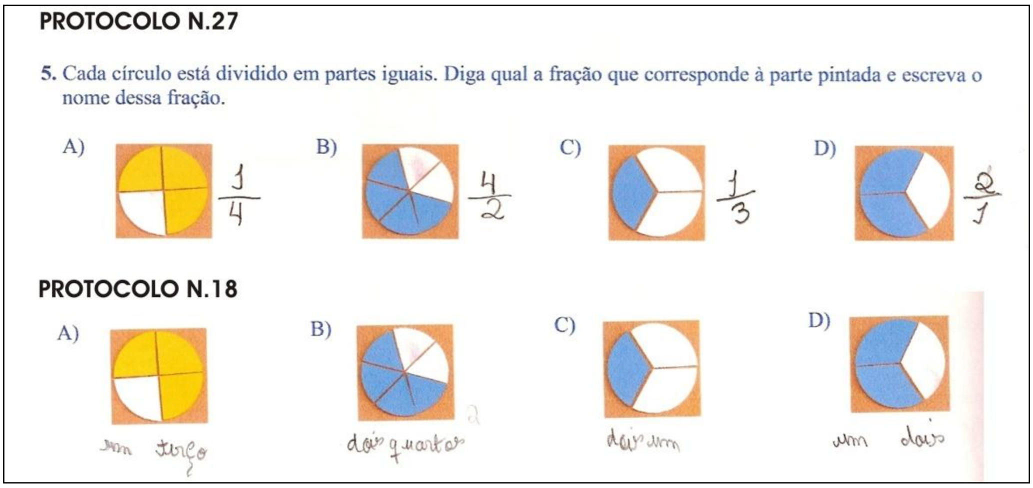


Figura 68: Fragmentos dos protocolos n.º 18 e 27 referente à resolução da atividade 5 da situação de avaliação

- Ao adotar como referência a Figura 68, poderemos notar que o aluno representou as frações dos círculos no item (a) do protocolo n.º 27, considerando como numerador as porção não colorida do círculo. E, o denominador foi representado pelas porções coloridas na figura. Nos itens (b) e (d) o aluno considerou os termos da fração como a razão partes coloridas/não coloridas. Enquanto, no item (c) esse mesmo aluno representou a relação parte/todo. No extrato do protocolo n.º 18 da Figura 68, verificamos que o aluno não escreveu a notação das frações coloridas nos círculos, mas nomeou estas frações levando em consideração a leitura da quantidade de partes não pintadas e, posteriormente das partes coloridas na figura. No item (a), por exemplo, o aluno leu um terço. Neste caso, o círculo possui uma parte não colorida e três partes coloridas, quando deveria ter nomeado a fração três quartos. Observando o extrato do protocolo n.º 18 percebemos que o aluno atua dessa maneira em todos os outros itens propostos na atividade.

- Em síntese, afirmamos que independentemente das respostas dos protocolos estarem corretas ou incorretas, apenas 6 dos 37 alunos (16%) atendeu satisfatoriamente às variáveis de comando: 1. "[...] *diga qual a fração que corresponde à parte pintada da* *figura..."* e 2. "[...] escreva o nome dessa fração." efetuando simultaneamente as conversões solicitadas: cujo registro de partida corresponde ao registro pictórico (frações do círculo) enquanto os registros de chegada são o simbólico fracionário (notação) e a linguagem natural (nomenclatura). 28 dos 37 alunos (75%) atenderam parcialmente as variáveis mencionadas efetuando o registro das frações por meio do registro simbólico. Enquanto 2 dos 37 alunos, também realizaram a tarefa parcialmente efetuando o registro das frações em linguagem natural, ou seja, atribuíram um nome aos números racionais fracionários.

- ✔ Assim como em outras atividades realizadas anteriormente pelos alunos a dificuldade incide sobre as conversões realizadas no seguinte sentido: linguagem pictórica→linguagem simbólica fracionária→linguagem natural. Pois, ao converter do registro pictórico para o simbólico fracionário o aluno, geralmente considera como termos da fração, a quantidade de partes que não estão coloridas para representar o numerador e o total de partes coloridas é para representar o denominador (não necessariamente nessa ordem). Portanto, o fato de considerar a relação parte/parte ao modelizar a notação de uma fração, acaba repercutindo na atribuição da nomenclatura das frações representadas.

Atividade [6]

- ✔ As frequências e percentuais expressos na Tabela 4 se assemelham às informações contidas na Tabela 1 (p. 187), referente à atividade 6 que também foi vivenciada na situação didática de aprendizagem, corroboram para explicitar os argumentos acerca dos efeitos didáticos que se configuram como consequência das variáveis didáticas inerentes atividade proposta. E, por isso destacamos que a baixa incidência de erros por parte dos alunos na realização da atividade descende dos seguintes aspectos:

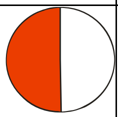
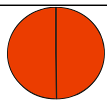
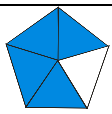
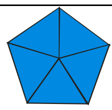
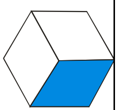
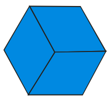
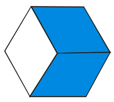
1. *A atividade (colorir a fração indicada no inteiro contínuo), foi bastante executada.na sequência didática original, de forma mais enfática na 2ª Sessão (Ação: Explorando frações do círculos"). No entanto, este tipo de atividade permeou todas as situações didáticas vivenciadas durante a intervenção.*

2. *As formas geométricas sugeridas na atividade já estavam divididas em partes iguais. Consequentemente, a maioria dos alunos estabeleceu relações entre o números de partes que constituem o inteiro e os termos das frações indicadas na atividade satisfazendo assim, a variável:* [..] *"Pinte a fração indicada.*

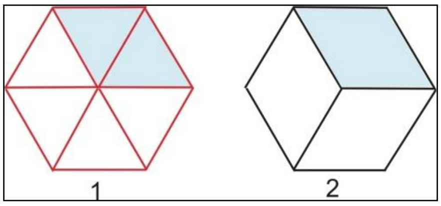
3. *O sentido da conversão, registro simbólico fracionário→ registro figural, também favoreceu a associação entre a quantidade de partes em que a figura foi dividida e a(s) parte(s) que deveria(m) ser coloridas. Consequentemente, a relação parte/todo foi percebida pela maioria dos alunos.*

- ✔ De acordo com os dados apresentados na Tabela 4, a frequência média de respostas compatíveis com a solicitação expressa na variável de comando corresponde a 31 dos 37 alunos (84%). A frequência média de erro equivale a 5 dos 37 alunos (13%) e de abstenção apenas 1 dos 37 alunos (3%).

Tabela 4
Demonstrativo das frequências e percentuais relativos à atividade 7 (Situação de Avaliação)

Item	**Respostas Esperadas**		**Frequência**	**Respostas Incompatíveis**		**Frequência**	**Não respondeu**
a)	$\frac{1}{2}$ Um meio		**33 Alunos 89%**	 Inteiro	**Outras respostas**	**3 Alunos 8%**	**1 Aluno 3%**
				3 Alunos	-		
b)	$\frac{4}{5}$ Quatro quintos		**31 Alunos 84%**	 Inteiro	**Outras respostas**	**5 Alunos 13%**	**1 Aluno 3%**
				2 Alunos	3 Alunos		
c)	$\frac{1}{3}$ Um terço		**81% 30 Alunos**	 Inteiro	 2 partes	**16% 6 Alunos**	**3% 1 Aluno**
				3 Alunos	3 Alunos		

- ✔ Na Figura 69, é possível verificar nos fragmentos dos protocolos n.º 01, 21 e 22 as respostas apresentadas no item (c). Neste caso, os alunos interpretaram o hexágono regular, dividido em três partes equivalentes, como sendo um hexaedro (cubo), conforme havíamos antecipado na análise preliminar da sequência didática. A maioria dos alunos não visualizou que as figuras (1) e (2), representadas na ilustração abaixo, correspondem ao mesmo polígono, porém com divisões distintas: 3 ou 6 partes iguais. Consequentemente, o efeito da divisão do hexágono em 3 partes iguais (a variável didática e o valor estipulado pelos autores do livro didático), resultou na tentativa de planificação do cubo para poder determinar a quantidade de faces que deveria ser colorida.



- Nesse sentido, 3 dos 37 alunos (8%) que responderam o item (c), coloriram duas partes do inteiro (hexágono). Talvez, o raciocínio desses alunos incidiu sobre o fato de que um terço das seis faces equivale a duas faces. Esta seria a provável explicação para o fato dos alunos terem procedido dessa forma. O extrato do protocolo n.º 22 da Figura 69 exemplifica essa iniciativa do aluno.

- 6 dos 30 alunos (20%) embora tenham acertado ao apresentaram a solução esperada no item (c), reconheceram na figura uma forma cúbica e desenharam-na próxima ao polígono a ser colorido na tentativa de compreender ou estabelecer relações entre as duas representações figurais, como podemos observar no extrato do protocolo n.º 01 da Figura 69.

- Outros 3 alunos (8%) não coloriram a figura fornecida, mas, um prolongamento dessa figura, que poderíamos chamar de face, uma vez que fica comprovado que o aluno identifica a figura como um cubo. Na Figura 69 é possível verificar este procedimento adotado pelos alunos ao responder o item (c) da atividade, conforme o extrato do protocolo n.º 21.

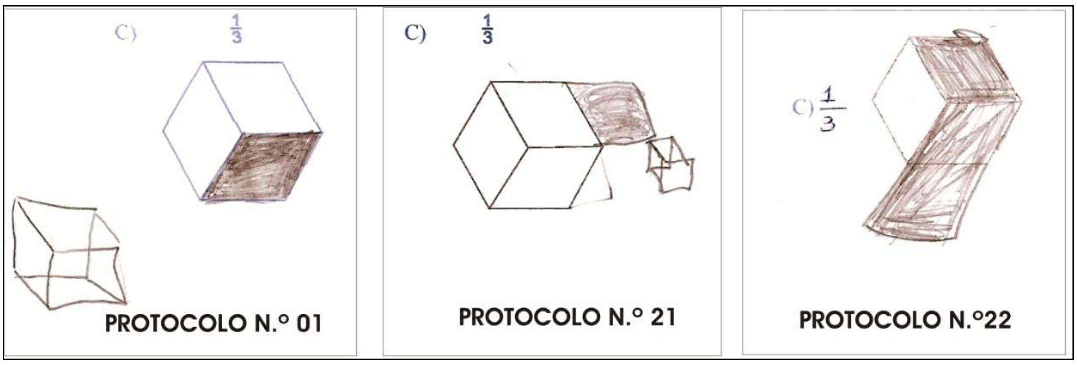


Figura 69: Fragmentos dos protocolos n.º 01, 21 e 22 referente à resolução da atividade 6 da situação de avaliação

Atividade [7]

- Ao responder a atividade de comparação, proposta na atividade 7, os alunos recorreram apenas à visualização das frações do círculo apresentada nas ilustrações que foram incorporadas ao enunciado. A frequência de respostas corretas oscilou entre 37 e 52%, representando uma queda de até 42% em relação à resolução da atividade na situação didática de aprendizagem. Portanto, a maioria dos alunos obteve êxito na tarefa de comparar as frações do círculo. Uma vez que, não teríamos condições de providenciar o material manipulativo para os 37 alunos que vivenciaram a situação de avaliação. Embora, a frequência e os respectivos percentuais relativos à tarefa proposta não diferem da situação didática de aprendizagem. Portanto, com ou sem a utilização de materiais manipulativos muitos alunos continuam cometendo erros clássicos inerentes a atividade de comparação das frações, já descritos na literatura. Por conseguinte, relacionamos as frequências e os percentuais relativos às soluções apresentadas nos protocolos dos alunos referentes ao item (A) da atividade 7, as quais ratificam os argumentos iniciais:

- ✔ *Ao comparar as frações um meio e um quarto 16 dos 37 alunos (44%) chegaram à conclusão que a primeira é maior que a segunda. Entretanto, 15 alunos (40%) afirmaram o inverso. Enquanto, 6 dos 37 alunos (16%) não responderam este item.*

- ✔ *Neste mesmo item 15 dos 37 alunos (40%) afirmaram que a fração um terço é maior que a fração um quarto. No entanto, 16 alunos (44%) compararam as frações mencionadas e afirmaram o contrário do que relatamos anteriormente. E, assim como no item anterior 6 alunos (16%) não apresentaram resposta.*

- ✔ *Ao comparar as frações um sexto e um quarto, 19 dos 37 alunos (51%) registraram que um sexto é menor que um quarto. Todavia, 12 dos 37 alunos (33%) afirmou exatamente o contrário. E, 6 alunos (16%) não preencheram a lacuna com uma das expressões sugeridas.*

- ✔ *Em relação às frações dois terços e um meio, 14 dos 37 alunos (38%) afirmaram que dois terços é maior que a metade. No entanto, 17 dos 37 alunos (46%) registraram exatamente o inverso da afirmação anterior. E, como nos demais itens 6 alunos (16%) não responderam este item.*

- ✔ Os protocolos n.º 01 e 36, ilustrados na Figura 70, exemplificam os principais equívocos cometidos pelos alunos na atividade de comparação. Observando o protocolo n.º 01 percebemos que o aluno foi bem sucedido na ação de comparar frações. Embora, tenha se equivocado ao registrar que $\frac{2}{3} < \frac{1}{2}$. Mas, ao invés das expressões: é maior que ou é menor que, este aluno resolveu utilizar os símbolos: > e < ao comparar as frações sugeridas nessa atividade. Neste caso, o aluno traz as marcas da intervenção da professora regente na aplicação da sequência didática original. Enquanto, no protocolo n.º 36 o aluno preenche as lacunas com as expressões sugeridas. Em contrapartida, considera as frações como maiores que as outras a partir do número inteiro disposto no denominador. Nesse sentido, o raciocínio do aluno provavelmente enveredou pelos seguinte destino: Se, 6 é maior que 4 então 1/6 é maior que ¼.

Figura 70: Fragmentos dos protocolos n.º 01 e 36 referente à resolução da atividade 7(comparação de frações) proposta na situação de avaliação

- Ainda em relação à tarefa de comparar as frações propostas, independentemente das respostas estarem corretas, apenas 16 dos 37 alunos (44%) atendeu a variável de comando: [...] "*compare as fatias escrevendo: é maior que ou é menor que*." Ou seja, os alunos utilizaram as expressões em linguagem natural. 15 dos 37 alunos (40%) optaram por preencher as lacunas usando os símbolos: > ou <. E, diferentemente da situação didática anterior na qual todos os alunos realizaram a tarefa proposta, 6 dos 37 alunos (16%) se abstiveram de responder.

- Após a comparação das frações dos círculos, que nesse caso, corresponde às fatias das tortas, o aluno deveria estabelecer relações de equivalência entre o inteiro e as frações (fatias). Assim como, deveria estabelecer equivalências entre frações de divisões distintas dos círculos, tomando como referência os círculos da ilustração, conforme a Figura 71. Neste sentido, apresentamos as frequências e os percentuais referentes às respostas dos alunos nessa atividade:

(i) *No item (B) 18 dos 37 alunos (49%) apresentaram a resposta esperada: 3, conforme ilustra a Figura 58. E, embora tivessem acesso aos círculos que exemplificam o texto introdutório da atividade, cerca de 15 alunos (40%) apresentaram outras respostas,entre as quais: 2 fatias (5), um terço (4),por exemplo. Enquanto, 4 dos 37 alunos (11%) deixaram de responder.*

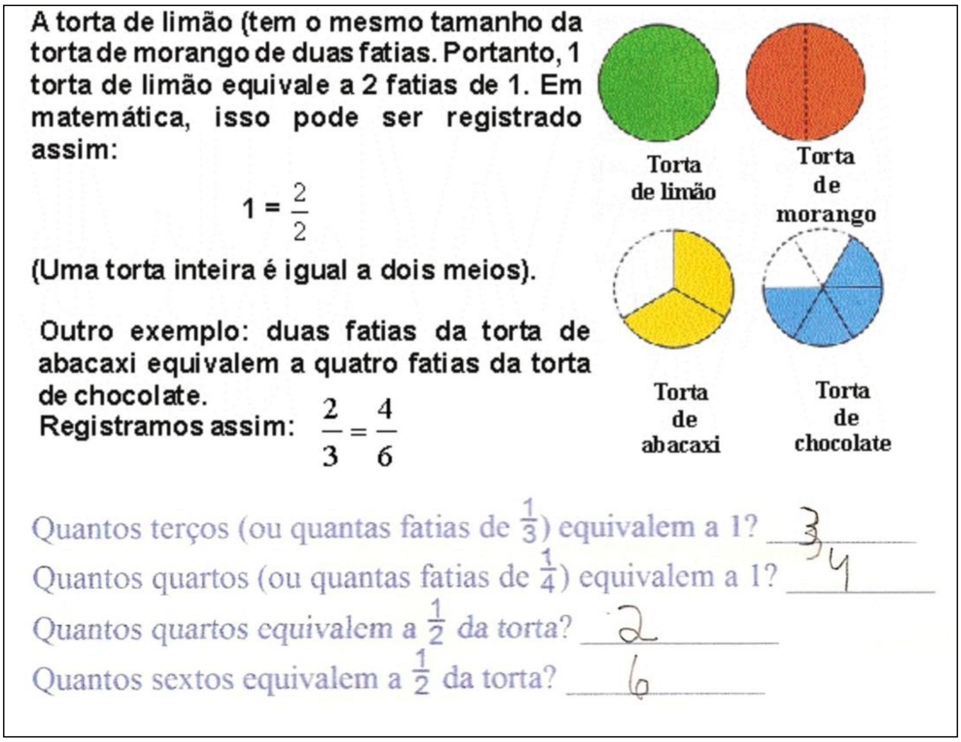


Figura 71: Fragmento do protocolo n.º 36 referente à resolução da atividade 7 (equivalência de frações) proposta na situação de avaliação

(ii) *No item (C) a frequência e os percentuais relativa às respostas dos alunos são os mesmos descritos em relação ao item (c). No entanto, entre as respostas equivocadas surgiram: um pedaço (2), 3 fatias (6), um quarto (5), por exemplo.*

(iii) *No item (D), 14 dos 37 alunos (38%) forneceram a solução esperadas (2), como podemos verificar em um dos protocolos ilustrados na Figura 71. Porém, 18 dos 37 alunos (49%) cometeram alguns equívocos ao afirmar que a solução para o problema seria 4 quartos (4), um quarto (1), um (6) ou um meio (6), por exemplo. Acreditamos que a baixa frequência de sucesso na busca da resposta solicitada deve-se ao fato do aluno não dispor do círculo dividido em quatro partes iguais na ilustração que serve como suporte para a realização da atividade. Uma vez que ele dispõe das outras divisões do círculo. Por outro lado, 5 alunos (13%) não responderam este item.*

(iv) *No item (E) apena 8 dos 37 alunos (22%) apresentaram a resposta esperada (3). A maior incidência foi da resposta: seis partes, cuja frequência corresponde a 8 dos 24 alunos (33%) que apresentaram soluções equivocadas. Nesse caso, é possível que os alunos tenham tomado como referência o círculo inteiro e não a metade.*

- Diante das frequências e percentuais apresentados reafirmamos que os equívocos cometidos pelos alunos descendem principalmente da dificuldade de compreensão do significado parte/todo do número racional. Além disso, a discreta quantidade de atividades que exploram a comparação e equivalência de frações contribui para o agravamento da estagnação da aprendizagem do aluno em relação ao saber. Nesse sentido, reforçamos que a identificação e da intercorrência efeitos didáticos indesejáveis inerentes ao ensino e a aprendizagem do número racional poderão contribuir para intervenção do professor no suprimento das demandas emergenciais e da minimização dos efeitos mediante a exposição do aluno às novas situações de aprendizagem que deverão ser propostas para que o mesmo evolua.

Atividade [8]

- A atividade foi outra vez proposta ao aluno com o intuito de verificar a possível evolução da compreensão do aluno em relação às tarefas de comparar e produzir frações equivalentes. Como podemos perceber na Figura 73, a ilustração serve como suporte para a realização da atividade, nela há uma forma e um prato contendo partes de uma pizza que foi inicialmente dividida em seis partes iguais. Mas, essa situação supostamente não favoreceu o direcionamento da percepção dos alunos para o princípio da invariância. Uma vez que, a intenção dos autores do livro didático, era que os alunos reconhecessem mediante a análise da situação ilustrada que a soma das fatias (frações) da pizza reconstituiria o inteiro contínuo: a pizza. Pois, assim os alunos comparariam as porções de forma mais coerente e, consequentemente chegariam ao estabelecimento da equivalência entre frações. No entanto, a maioria dos alunos não conseguiu atender completamente aos propósitos da atividade. Isto fica evidente nas frequências e percentuais referentes aos registros apresentados nos protocolos pelos alunos:

(i) *Assim como na situação didática anterior, no item (a) apenas 2 dos 37 alunos (6%) apresentaram a solução esperada, respondendo que havia 1/6 (um sexto) da pizza no*

prato da menina. Com relação aos registros equivocados registrados nos protocolos no item (a) da atividade, destacamos que:

- *12 dos 37 alunos (32%) afirmaram que a fração no prato corresponderia a uma fatia, uma parte ou a uma unidade. Neste caso, tudo leva a crer que os alunos reproduziram uma das expressões utilizadas no cotidiano.*

- *8 dos 37 alunos (22%) disseram que a fatia no prato equivaleria a 1/3 (um terço) da pizza. E, ao que tudo indica não consideraram a pizza inteira (seis fatias), mas a quantidade de fatias no prato (1) e a quantidade de fatias que restou na forma (3) para representar os termos da fração. Esta é a solução apresentada pelo aluno no protocolo que ilustra a Figura 72.*

- *5 dos 37 alunos (13%) apresentaram várias soluções, porém a maioria afirmou que a fração no prato da menina equivaleria, por exemplo, à metade (1/2) do inteiro. Talvez a confusão desses alunos resida no fato de considerarem a quantidade de fatias da forma ao invés da quantidade de fatias no prato da menina.*

- *10 dos 37 alunos (27%) se abstiveram ou não conseguiram responder o item (a).*

(ii) De certo modo, os dados indicam que em si tratando do princípio da equivalência entre frações há uma emergente necessidade de propor outras situações e contextos que propicie a melhoria da compreensão do aluno em relação esse aspecto. A utilização do conectivo "***ou***" não despertou no aluno atenção para a necessidade de registrar as igualdades: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}\, e\, \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.

(iii) Analogamente, à situação didática precedente, os itens (b) e (c) foram parcialmente respondidos. A maioria dos alunos apresentou como solução pelo menos um dos registros das frações equivalentes a quantidade de fatias que ainda está na forma (item b), e analogamente a fração correspondente a quantidade de fatias que as pessoas haviam consumido (item c). Para esclarecer acerca das soluções apresentadas pelos alunos, relacionamos em seguida as frequências e os percentuais relativos às respostas:

- *No item (b), em relação à resposta esperada, 7 dos 37 alunos (19%) registraram a fração 1/2 (um meio) para representar a fração que restou na forma. Enquanto, 4 dos 37 alunos (11%) efetuaram o registro da fração 3/6 (três sextos), como podemos observar no extrato do protocolo n.º37. Entretanto, 23 dos 37 alunos (62%) forneceram nos protocolos múltiplos registros incompatíveis para com a variável de comando: "Que fração da pizza está na forma?". E, assim como na primeira vez que a atividade foi proposta, neste item houve maior incidência das respostas: três fatias, três partes ou três pedaços que representa 13 dos 23 alunos (56%) que realizaram atividade. Em contrapartida 3 alunos (8%) não efetuaram o registro da fração solicitada.*

- *No item (c), 20 dos 37 alunos (54%) corresponderam parcialmente às expectativas escrevendo na linguagem simbólica uma das frações da igualdade. Nesse caso, 19 dos 20 alunos (95%) efetuaram o registro da fração 1/3 (um terço) para simbolizar a quantidade consumida do inteiro (pizza), esta ação foi identificada no protocolo n.º 37 da Figura 72. E, um dos 20 alunos (5%) apresentou a fração 2/6 (dois sextos). Porém, 14 dos 37 alunos (38%) forneceram diferentes registros para a fração solicitada, entre os quais predominam como resposta: duas fatias, duas partes ou dois pedaços. Outros 3 alunos (8%) não responderam a atividade.*

(iv) Ainda com relação às respostas expressas pelo aluno no protocolo n.º 37, exibido na Figura 72, destacamos que o conectivo "ou", que insinua a igualdade entre as frações, não foi plenamente pois o aluno apenas tomou para si a tarefa de preencher as lacunas nos itens (b) e (c) com as frações que haviam sido utilizadas por ele.

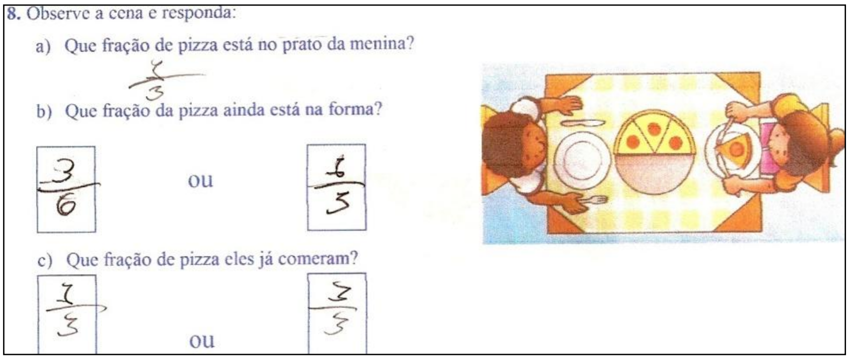


Figura 72: Fragmento do protocolo n.º37 referente à resolução da atividade 8 da situação de avaliação

Atividade [9]

- De fato, ao reapresentarmos a atividade percebemos que os alunos formularam justificativas mais coerentes para explicar o episódio ilustrado na atividade. Após a leitura e a realização de várias atividades nas quais a idéia de fração inoculada pelos autores do livro didático está explícita o aluno consegue reproduzir com as mesmas palavras tal noção.

- Portanto, conforme havíamos previsto a frequência de respostas condizentes com o questionamento proposto aumentou em relação à situação didática anterior. Embora, a maioria dos alunos não foi bem sucedida na execução da tarefa sugerida pelos autores da sequência didática. A frequência e os percentuais relativos das respostas registradas nos protocolos pelos alunos correspondem a:

(v) 11 dos 37 alunos (30%) após observarem a divisão do retângulo afirmam que o polígono não foi dividido em partes iguais, com argumentos similares ao do protocolo n.º 02 da Figura 73.

(vi) 13 dos 37 alunos (35%) formularam justificativas incoerentes, como por exemplo, o argumento apresentado no extrato do protocolo n.º 18 ilustrado na Figura 73. Neste exemplo, na formulação da justificativa o aluno considera que todas as partes são equivalentes, embora a divisão do retângulo não seja equitativa. Consequentemente, este aluno considerou que uma das partes está pintada e as outras três não estão afirmando, portanto, que a fração corresponderia a um terço do retângulo. Este argumento do aluno reforça a tese de que a relação parte/parte persiste na resolução das atividades propostas. E, nesse caso, as intervenções direcionadas pelo professor para minimização desse efeito, possibilitariam a progressão da aprendizagem do aluno em relação ao significado parte/todo do número racional.

(vii) 10 dos 37 alunos (27%) argumentaram em relação à divisão da forma poligonal (retângulo), porém foram inconclusivos. Para exemplificar o tipo de resposta apresentada poderemos nos basear no argumento do protocolo n.º 36 da Figura 73.

(viii) 3 dos 37 alunos (8%) não apresentaram qualquer justificativa para o fato da personagem da ilustração ter se enganado ao afirmar que a fração corresponderia a um quarto do polígono.

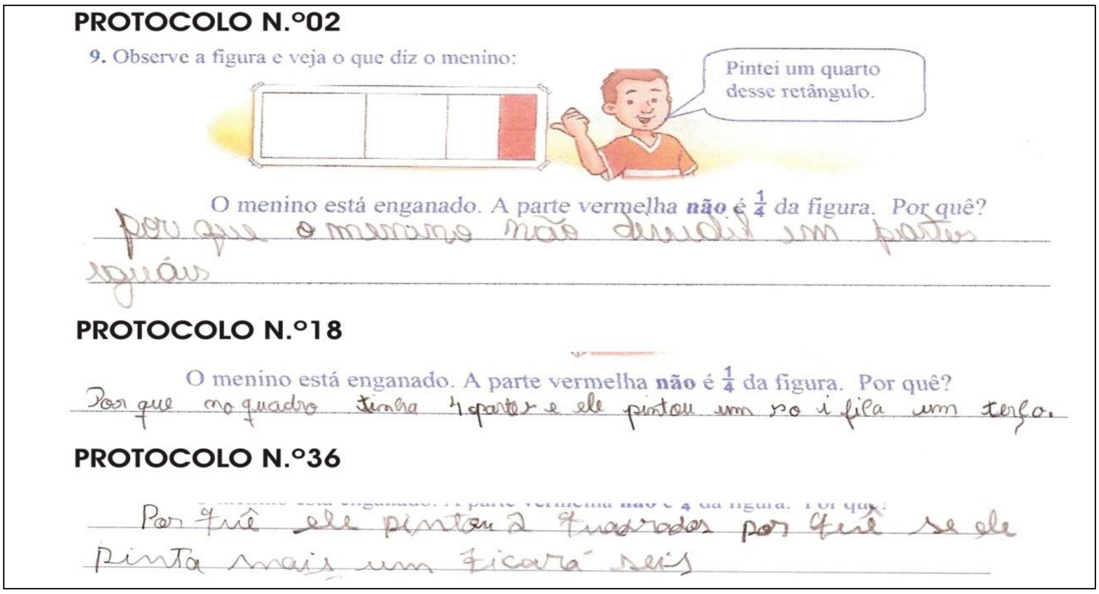


Figura 73: Extratos dos protocolos n.º 02, 18 e 36 relativos à resolução da atividade 9 da situação de avaliação

5.4 Síntese das análises das situações didáticas propostas aos alunos

As análises das situações didáticas de aprendizagem e avaliação indicam alguns fatores que possivelmente repercutiram na gênese dos efeitos didáticos detectados na realização das atividades propostas no dispositivo de ensino. Em ambas as situações didáticas, a sequência das atividades sugeridas ao aluno é praticamente idêntica. A finalidade comum as referidas sequências consiste em servir como meio didático para o ensino e a aprendizagem do significado parte-todo do número racional.

Entre os referidos fatores, destacamos a pertinência da análise do jogo didático sugerido pelos autores do livro de Matemática; variáveis manipuladas pelos autores na elaboração da sequência didática; do trânsito dos alunos entre as diferentes fases de uma situação didática e da influência do contrato didático no direcionamento da interação dos alunos com o meio didático utilizado nesta pesquisa em relação à emergência dos efeitos didáticos diagnosticados.

1. ***O jogo didático*** sugerido pelos autores do livro da Coleção Matemática Paratodos: o professor não intervém, não indaga o aluno, apenas lê as atividades e o aluno responde individualmente, revelou a insuficiência da proposta no atendimento das demandas emergenciais relativas às dúvidas, questionamentos e discussão das diferentes soluções para o mesmo problema. Embora, no manual do professor, os autores manifestem que o professor tem autonomia para adaptar a proposta pedagógica da coleção, o professor se exime da responsabilidade de realizar alterações estruturais nos textos e atividades contidas no livro didático, adaptando-a a realidade da sua classe de alunos. Em detrimento da sua expectativa positiva quanto aos resultados relativos à aprendizagem do aluno, o professor assume a postura e acata categoricamente a proposta pedagógica ofertada pelos autores do livro didático de Matemática. Constatamos, nesse caso, que o aluno por sua vez aceita o desafio de realizar as atividades com autonomia (um dos argumentos que justifica o jogo didático sugeridos pelos autores do livro didático). No entanto, se depara constantemente com a própria inexperiência diante da nova condição assumida. E, além disso, deixa transparecer nas expressões faciais ou no exercício da oralidade, certa inquietude e angústia ao confrontar-se com a insuficiência dos conhecimentos prévios em relação ao significado parte/todo do número racional. Julgamos os aspectos comportamentais relatados revelam uma característica presente na maioria dos alunos das séries iniciais do Ensino Fundamental: a dependência exacerbada do acompanhamento do professor, ditando o quê os alunos devem fazer, como devem proceder, quando e onde podem mobilizar procedimentos ou técnicas operatórias. Amparados na TSD e diante dos resultados obtidos no trabalho desenvolvido com os alunos e a professora do 5º Ano do Ensino Fundamental, acreditamos que a minimização dos efeitos didáticos requer uma nova postura discente e docente para com as propostas contidas nos livros didáticos. Portanto, se faz necessária a reflexão sobre a prática docente, a repercussão quanto à implementação das propostas pedagógicas sugeridas pelos autores dos livros didáticos nas salas de aula sem um olhar clínico em relação aos efeitos indesejáveis que poderão emergir na maré das aprendizagens. E, além disso, exige dos parceiros da relação didática o reconhecimento da capacidade do aluno de superar os obstáculos didáticos e epistêmicos, de produzir conhecimento e de progressão em suas aprendizagens. Portanto, a complexa teia de fatores que envolvem a aprendizagem da Matemática deverá ser considerada na compreensão da emergência dos efeitos didáticos em sala de aula.

2. ***As variáveis didáticas*** manipuladas pelos autores da Coleção Matemática Paratodos na elaboração das atividades que integram a sequência didática relativa ao ensino e a aprendizagem do significado parte/todo do número racional, nos parece repetitivas. Nesse sentido, a exploração do significado parte/todo é privilegiada em 83% das atividades relativas ao número racional propostas na referida coleção. Consequentemente, o efeito didático indesejável dessa variável é refletido na dificuldade do aluno em solucionar problemas cujo inteiro é de natureza discreta. Outro fator que resultou numa série de efeitos consiste na dimensionalidade das formas geométricas utilizadas na estruturação dos modelos e atividades que compõem a sequência didática. Na representação do inteiro contínuo, foram utilizadas apenas formas planas bidimensionais, podendo ser poligonais (quadrado, triângulo, retângulo, pentágono e o hexágono), ou não-poligonais (círculo e semicírculo). Porém, prevalece como opção didática a utilização da forma retangular e circular nas atividades sugeridas. A exposição do inteiro condicionada a figuras planas bidimensionais não favoreceu a identificação do polígono utilizado no item c da atividade 7 e 6 (hexágono), respectivamente nas situações de aprendizagem e avaliação. A divisão do polígono em três partes desencadeou na visualização da representação pictórica e o reconhecimento de um poliedro: o hexaedro regular. O efeito didático contrário configura-se ao verificarmos a decisão de um percentual de alunos: que na realização da conversão do registro simbólico para o pictórico mobilizaram a estratégia de planificação do hexaedro. Na sequência didática utilizada na pesquisa constata-se que a relação todo-parte e parte-parte são pouco exploradas. Esta opção didática, dos autores do livro didático, provavelmente poderá ter limitado a compreensão do aluno acerca do significado parte-todo do número racional. Uma vez que, o percentual de alunos efetivamente bem sucedidos na tarefa de realizar conversões entre diferentes registros do número racional é verificado nas situações em que a relação parte/todo é apresentada com o inteiro de natureza contínua. Visto que, em si tratando das atividades que exploram a divisão do inteiro discreto, houve forte tendência dos alunos em efetuar operações aritméticas com os dados fornecidos no enunciado ou nas ilustrações e exemplos que serviam como suporte. E, embora os alunos já disponham de meios para operar com grandezas de natureza discreta estes não conseguem determinar frações de quantidade. O surgimento do efeito didático, conhecido como “idade do capitão”, está condicionado ao emprego da variável de comando: “efetue uma conta”, nas atividades cuja tarefa consiste em determinar uma fração de um inteiro de natureza discreta. Muito embora, o aluno seja capaz de descobrir e mobilizar diversas estratégias que conduzem às respostas esperadas, a quantidade de atividades que contem esta tarefa, é insuficiente para favorecer associações em relação à ideia exaustivamente impetrada em toda a sequência didática: a divisão do inteiro em partes iguais. Por outro lado, a organização sequencial das atividades do dispositivo, acaba institucionalizando o significado parte/todo do número racional antes que o aluno transite por todas as etapas da situação didática (ação, formulação e validação). Quando o trânsito do aluno por todas as fases de uma situação didática abriria a possibilidade dele mesmo concluir, por meio de associações, que o inteiro contínuo ou discreto, pode ser dividido em partes iguais. E, as partes resultantes das divisões possíveis correspondem às frações, que ao serem reagrupadas voltam a compor o inteiro. No entanto, ao concluírem a execução das atividades da sequência didática, os alunos reproduzem a definição de fração difundida no livro didático, mas sem a devida compreensão do significado parte/todo. Os textos informativos, exemplos, ilustrações e os enunciados referentes a 14 das 19 atividades (74%). Identificamos que as atividades 2, 3, 4, AÇÃO (7 atividades), 6, 7, 10 e 11, da sequência didática, trazem subsídios mais que suficientes para a resolução do problema. Em algumas dessas atividades, são explicitadas ou antecipadas algumas das soluções esperadas, as quais se encontram diluídas em meio aos artifícios mencionados. Em contrapartida, esta opção didática dos autores do livro, produz efeitos didáticos sucessivos. Mas, precisamente os efeitos Topázio e Jourdain. Conduzindo tanto o professor quanto os alunos à falsa sensação de que houve aprendizagem em relação ao objeto matemático (número racional).

Para exemplificar uma destas situações poderemos citar o caso referente ao valor da variável mais utilizado pelos autores do livro didático. Estamos nos referindo ao jogo de cores utilizado para estabelecer a relação parte/todo tanto com o inteiro contínuo quanto o inteiro discreto. Analisando os protocolos verificamos que o jogo de cores utilizado nas ilustrações, que servem como suporte das atividades propostas direciona a ação dos alunos. Este artifício induz a contagem das partes que constituem o inteiro contínuo ou discreto, sem a devida compreensão do significado parte/todo. O aluno apresenta a resposta esperada mais não consegue apresentar argumentos convincentes que justifiquem o raciocínio utilizado ou que demonstrem que de fato compreendeu o significado acerca do número racional. Além disso, uma das intenções didáticas do dispositivo consiste na implementação dos diferentes registros de representação (a nomenclatura, a notação fracionária, por exemplo), do número racional. Nesse sentido, as atividades requerem do aluno a conversão entre os diferentes registros de representação semiótica, com exceção do registro simbólico decimal. No entanto, estas atividades privilegiam conversões cujo sentido LP (registro de partida) → LSF (registro de chegada) e LP → LN. O sentido privilegiado repercutiu na decisão dos alunos ao resolverem as atividades que foram reapresentadas na situação de avaliação. Estes automaticamente efetuaram as conversões solicitadas para a linguagem simbólica fracionária em todas as atividades cujo registro de partida consistia no registro do inteiro (contínuo ou discreto) em linguagem pictórica (LP) ou natural (LN), independentemente da variável de comando exigir o registro (LSF).

3. ***As situações didáticas*** vivenciadas em sala de aula promoveram o trânsito dos alunos pelas fases de ação, formulação e validação. Nessas situações o aluno utilizou ferramentas didáticas e as informações disponibilizadas para expressar oralmente ou por escrito suas respostas. Assim como, externou suas inquietações e incertezas diante das soluções apresentadas. No entanto, estas foram desconsideradas no controle da situação. Ou seja, não foram feitas devoluções necessárias à avaliação das ações e decisões do aluno. Uma vez que a institucionalização do significado parte/todo do número racional, assim como as diferentes formas de representação e notação do número foi precocemente realizada, pelos autores do livro didático, à medida que a sequência didática foi sendo desenvolvida. Esta característica do dispositivo de ensino fez com que a professora regente chegasse à conclusão de que seria desnecessária a retomada dos aspectos relativos ao número racional que foram explorados pelos autores do livro didático na elaboração da sequência didática. Por outro lado, mesmo tendo sido disponibilizado os dados referentes ao desempenho dos alunos na situação de aprendizagem e propositalmente destinado um intervalo de dois meses entre a situação de aprendizagem e a situação de avaliação não foram realizadas intervenções no sentido de atribuir o status ao objeto matemático em questão. Talvez por conta da falta de sistematização acerca do significado parte/todo e das formas de representação do número racional os alunos não conseguiram superar as dificuldades diagnosticadas inicialmente incidindo nos mesmos erros e estancando nas situações em que poderiam ter progredido. Além disso, não houve renegociação das cláusulas do contrato didático e por este motivo os efeitos didáticos que emergiram nas situações de aprendizagem e avaliação são basicamente são os mesmos.

4. A interação dos alunos com o dispositivo de ensino, independentemente da ocorrência de forma coletiva, individual ou dialógica, revelou atitudes individualistas por parte do aluno. Mas, que não o impediram formular hipóteses, de comparar as soluções, justificar suas técnicas e procedimentos, buscar mecanismos para validar essas respostas. No primeiro momento, denominado como situação de aprendizagem, a interação com o meio didático, ou seja, a sequência de atividades ocorreu, com os alunos dispostos em pequenos grupos. A organização dos grupos se deu em função das expectativas da docente com relação ao histórico do desempenho dos alunos na atividade matemática. Esta opção metodológica da professora regente contrariava a orientação manifestada pelos autores do livro didático. No entanto, realçou características do contrato didático estabelecido entre a professora e seus alunos, que favoreceram o surgimento de efeitos Topázio e Jourdain, os quais são danosos à aprendizagem. A professora acordou com seus alunos que caberia a ela a responsabilidade de ler em voz alta os enunciados e exemplos contidos na sequência didática. As explicações concedidas mediante os insistentes questionamentos dos alunos consistiam apenas na releitura das atividades e das variáveis de comandos pertencentes às mesmas, como é possível verificar nas transcrições dos registros das interações dialógicas. Particularmente, na situação de aprendizagem, após a leitura da atividade, a professora regente disponibilizava um determinado período de tempo, para que os alunos respondessem cada uma das atividades. Nesses momentos, a totalidade dos alunos apesar de estarem nos grupos realizava as atividades de forma individualizada. Este aspecto comportamental denota a falta de hábito dos alunos em relação ao trabalho coletivo. No qual, a interação entre os pares beneficia o desenvolvimento de habilidades relativas à cooperação, a expressão das ideias por meio da argumentação, da formulação e da validação de hipóteses, por exemplo, que são indispensáveis no processo de resolução dos problemas. Nos registros videográficos, verificamos que alguns alunos assumiram a liderança dos grupos. E, nesse papel, encarregaram-se da uniformização das respostas apresentadas para o problema. Principalmente, ao identificarem a descoberta de múltiplas soluções para a mesma questão. Este aspecto, em algumas atividades camuflou a incidência de erros relativos às conversões exigidas entre os diferentes registros de representação (pictórico, simbólico e linguagem natural), do número racional. Por outro lado, nesse primeiro momento, não foi possível precisar a origem dos erros recorrentes, motivo pelo qual redirecionamos os procedimentos metodológicos da pesquisa. Portanto, devido à dinâmica das interações entre os parceiros da relação didática para com o dispositivo sugerido pelo livro didático, oportunizamos a reapresentação de 9 atividades da sequência didática, caracterizando assim a segunda situação didática, denominada como situação de avaliação. Ao vivenciarmos esta nova situação didática consideramos todas as recomendações dos autores do livro didático. Os resultados dessas variáveis mostraram certa similaridade com aqueles obtidos na situação de aprendizagem. Porém, houve uma pequena discrepância nos percentuais de êxito, referente ao cálculo de frações de uma quantidade discreta, solicitada na atividade 4 da sequência didática, que no primeiro momento os alunos não conseguiram responder. Entretanto, mediante uma nova oportunidade de resolução para os mesmos problemas constatamos a otimização dos resultados dos alunos ao efetuarem o procedimento de cálculo correto (divisão).

Os pressupostos apresentados nos fornecem indícios de que o dispositivo de ensino, ou seja, a sequência didática necessita de modificações que equacionem os problemas identificados. Principalmente, em relação à equilibração do quantitativo de atividades ou exercícios cujo contexto aborda o inteiro contínuo e discreto. Entre as alterações necessárias encontra-se a melhoria da distribuição de exercícios e atividades que utilizam as regiões poligonais ou não-poligonais utilizadas na representação do inteiro contínuo. Assim como, a diversificação da utilização das formas geométricas planas. Ainda no que se refere à representação pictórica do inteiro talvez seja necessária a readequação ou a substituição dos contextos, utilizados pelos autores do livro didático analisado para explorar o significado parte/todo, tornando-os mais plausíveis à realidade dos alunos. O caso da coleção de selos que exemplifica a atividade 4 da sequência didática não favoreceu ao aluno o estabelecimento de conexões com práticas usuais da atualidade.

De acordo com Brousseau (2008) a escolha das condições de ensino justifica-se essencialmente pela necessidade de atribuir sentido ao conhecimento em cena no jogo didático. Portanto, é de suma importância considerar que a modelização das situações didáticas, independentemente de serem elaboradas ou adaptadas tomando como referência o livro didático, deveria garantir a tramitação do aluno pelas fases de ação, formulação, validação e institucionalização.

No controle do processo de ensino, o professor é fundamental, pois ao propor diferentes tipos de situação (ação, formulação, validação), evoca devoluções cujo objetivo é fazer com que o aluno atribua sentido aos conhecimentos que manipula. No entanto, a garantia da institucionalização possibilita ao aluno fazer reformulações de suas ideias, técnicas ou estratégias. As reformulações são essenciais para que as estratégias ou procedimentos encontrados por ele sejam descartadas ou mantidas, tornando-as um meio de referência, ao solucionarem novos problemas.

Portanto, concluímos que o funcionamento das situações didáticas é acionado mediante o controle das condições de ensino e aprendizagem que envolve o estabelecimento de um contrato particular entre o professor e os alunos. E, os meios disponibilizados, as variáveis embutidas nesses dispositivos e a ação didática poderão desencadear efeitos didáticos. Os quais podem ser episódicos ou ininterruptos e necessitam da intervenção direta do professor para a continuidade da aprendizagem, coibindo assim, o fracasso do ensino.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A questão central da pesquisa, os resultados e a perspectiva de continuidade...

A presente pesquisa foi realizada com uma professora e alunos do 5º Ano do Ensino Fundamental da escola pública. Munindo-nos dos subsídios presentes na Teoria das Situações Didáticas buscamos o aporte necessário à identificação e a descrição dos efeitos didáticos emergentes de uma sequência didática, sugerida pelo livro de Matemática, e direcionada para o ensino e a aprendizagem do significado parte/todo do número racional.

As análises a priori e a posteriori, das atividades que compõem o dispositivo, foram realizadas mediante a antecipação e verificação dos efeitos didáticos de acordo com um exame minucioso das variáveis manipuladas pelos autores do livro didático na elaboração das atividades e das interações dialógicas entre os parceiros da relação didática acerca dos aspectos relativos ao número racional. Especificamente no que se refere ao significado parte/todo e as conversões exigidas entre os diferentes registros de representação do número racional.

Por intermédio dos instrumentos utilizados na construção dos dados, entre os quais a análise dos protocolos dos alunos, as entrevistas com os mesmos e os registros videográficos, confirmamos a nossa hipótese inicial. A qual se apoiava na produção acadêmica que precede este estudo, na experiência da pesquisadora enquanto docente e tutora na formação continuada dos professores do Ensino Fundamental. Mas, que encontrou respaldo na TSD. Partimos do pressuposto de que as variáveis didáticas manipuladas na elaboração de uma atividade, exercício ou problemas que constituem as sequências didáticas, repercutem consideravelmente na gênese dos efeitos didáticos.

Porém, esta não a única comprovação. Uma vez que a análise minuciosa dos protocolos de resolução das atividades possibilitou apuração de outros aspectos concernentes à dinâmica da interação dos alunos com o dispositivo: a sequência didática. Entre os referidos fatores, destacamos que o manejo das variáveis pelos autores do livro didático resultou no direcionamento e uniformização das ações e decisões dos alunos. Por outro lado, não há como precisar a intencionalidade das escolhas didáticas dos autores quanto à minimização dos erros. A análise também revelou que os erros mais comuns ou recorrentes se concentram na realização das conversões entre os diferentes registros de representação (pictórico, simbólico ou em linguagem natural) do número racional, independentemente da situação didática ser vivenciada com os alunos dispostos individualmente ou em grupo.

Não obstante referendamos que a análise das situações didáticas revelou que os efeitos didáticos que repercutem na aprendizagem do significado parte/todo e na apropriação das diferentes representações do número racional também poderão emergir em função de múltiplos fatores que permeiam as relações estabelecidas entre o professor, o aluno e o saber em cena no jogo didático. Nesse sentido, podemos afirmar que os efeitos didáticos que comprometem, estagnam ou inviabilizam a progressão das aprendizagens no que tange ao significado parte/todo do número racional não são desencadeados apenas pela modelização das situações didáticas, ou pela estruturação meios (sequência de atividades) a partir da manipulação das variáveis didáticas no trabalho de engenharia dos instrumentos de ensino.

De certa forma os elementos apresentados neste trabalho de pesquisa nos fazem considerar que a emergência dos efeitos didáticos aos quais nos referimos pode está atrelada a influência de outras variáveis, como por exemplo, a implementação do contrato didático, a institucionalização das cláusulas, nas (re) negociações ou rupturas de contrato, nas problemáticas concernentes à gestão dos tempos pedagógicos e de aprendizagem.

Os estudos teóricos e didáticos, apresentados nos Capítulos IV e V, auxiliam-nos na compreensão dos fenômenos que afloram no universo da sala de aula. Portanto, o entendimento da natureza desses fenômenos, inclusive dos efeitos didáticos, possibilita um controle mais eficaz do processo relativo ao ensino do significado parte/todo e das diferentes representações do número racional. Consequentemente, o controle das variáveis inerentes às situações didáticas, paulatinamente favorecerão a otimização das aprendizagens.

Por outro lado, o modo como a sequência didática, que consistiu no referencial para o nosso estudo, foi organizada/estruturada denota a concepção de ensino dos autores acerca dos números racionais, que vem sendo difundida no livro didático de Matemática aprovado no PNLD. Neste caso específico, a definição de fração (que se espera que o aluno memorize) é exaustivamente repetida em praticamente todos os enunciados e exemplos, para logo em seguida serem exercitadas a nomenclatura, a notação fracionária e figural relativa ao número racional. A linearidade da sequência didática por nós utilizada, de certa forma, revelou a fragilidade da proposta pedagógica apresentada no livro didático de Matemática em relação à atribuição de significado pelo aluno para o número racional. Uma vez que as situações didáticas (de aprendizagem e avaliação) e o meio (sequências de atividades) conduziram os alunos pelas veredas de resolução dos exercícios e pseudoproblemas automatizando os tratamentos e conversões entre os registros de representação do número racional.

Os resultados da pesquisa sinalizam que o fracasso dos alunos evidenciado na realização das atividades sugeridas pelo livro didático, ao que tudo indica, advém da perda de sentido oriunda da compartimentação dos aspectos relativos ao número racional, sejam idéias, significados e representações. A análise a posteriori da sequência didática indicam que ao final da realização das dezenove atividades propostas no livro didático que o aluno não compreendeu o significado parte/todo do número racional. Na verdade, ele apenas memorizou a definição de fração. Além disso, a análise dos registros contidos nos protocolos dos alunos nos fornece evidencias da capacidade do aluno para realizar tratamentos e conversões entre os diferentes registros de representação do número racional.

No entanto, as estratégias exitosas no processo de resolução estão presentes nas atividades cujo sentido das conversões tem como registro de partida a representação pictórica e o registro de chegada às representações em linguagem natural ou simbólica fracionária em um contexto que envolve um todo/inteiro de natureza contínua. Muito embora, isso seja fruto de um exaustivo treinamento, ou seja, após resolver/responder 17 das 19 atividades propostas (89%) da sequência didática que subsidiou esta pesquisa. Por outro lado, o aluno não consegue transpor tais aquisições, em relação aos tratamentos e conversões entre os registros de representação do número racional, quando o contexto da atividade envolve uma quantidade discreta.

Embora tenhamos ciência de que a passagem dos números naturais aos racionais não ocorre de modo imediato e pressupõe um grande esforço conceitual que pressupõe a ruptura para com os aspectos relativos às propriedades dos naturais para que o aluno tenha condições de progredir em suas aprendizagens as conclusões apresentadas nessa pesquisa visam contribuir em relação à compreensão dos efeitos didáticos que repercutem na aprendizagem do significado parte/todo, bem como em relação à apropriação dos múltiplos registros de representação (linguagem natural, pictórica e simbólica), relativos ao número racional. Todavia a emergência dos efeitos didáticos não significa a falência das situações didáticas, das estratégias, dos meios de ensino ou ainda das aprendizagens. Mas, o ponto de partida para a diversificação das situações, o redirecionamento das estratégias, a reformulação dos meios de ensino ou ainda da (re)significação das aprendizagens.

Para tanto, cabe a nós professores visualizar a sala de aula como o espaço democrático em que interagem e atuam simultaneamente o professor e o aluno em prol das descobertas e aquisições. Portanto, (re) pensar as condições e os meios didáticos, entre eles as sequências didáticas, que possibilitam, estimulam ou viabilizam as ações discentes, a formulação de hipóteses, a argumentação na tentativa de validar essas proposições, consiste em assumir os riscos e enfrentar os obstáculos inerentes aos processos de ensino e a aprendizagem. No entanto, isto requer uma mudança de postura tanto por parte do professor quanto por parte do aluno em relação à Matemática.

No que se refere às perspectivas de continuidade da presente pesquisa ressaltamos a real possibilidade de readequação objetivando o aprimoramento da sequência didática, extraída do livro de Matemática, em função das análises apresentadas nesse estudo. Para em uma etapa posterior à aplicação investigar a emergência e/ou a minimização dos efeitos didáticos. Nesse sentido, também seria viável realizar um trabalho de engenharia didática para elaborar uma nova sequência didática destinada ao ensino e a aprendizagem do significado parte/todo do número racional através de transformações (tratamentos e conversões) entre os diferentes registros de representação (linguagem natural, figural e simbólica numérica).

A readequação da sequência didática que subsidiou nossa pesquisa ou a elaboração de outra sequência de atividades favoreceria o estudo de outros fenômenos didáticos, tais como: o contrato didático ou a transposição didática interna ao utilizar um dos dispositivos de ensino e aprendizagem. Além disso, haveria a possibilidade de pesquisar acerca da dinâmica das interações entre o aluno e o meio didático (sequências de atividades).

Vale salientar outra questão passível de investigação refere-se aos obstáculos, de natureza didática e/ou epistemológica, inerentes aos tratamentos e conversões entre os diferentes registros de representação do número racional nas atividades da sequência didática que subsidiou nossa pesquisa. Esse estudo já foi iniciado por Santos & Câmara dos Santos (2009). Os resultados deste estudo preliminar foi apresentado na modalidade comunicação científica no IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE, Michèle. *Engenharia Didática*. In: *Didáctica das Matemáticas*. Horizontes Pedagógicos. Brun, J. (org.). Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193 – 209.

BATISTA, Antônio Augusto Gomes. *Recomendações para uma política de livros didáticos*. Brasília, MEC/SEF, 2001.

BEHR, Merlyn J.; LESH, Richard; POST, Thomas R.; SILVER, Edward A. *Rational-Number Concepts.* In: LESH, Richard; LANDAU, Marsha (Ed.). *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press, 1983.

BEZERRA, Francisco José Bravo. *Introdução ao conceito de número fracionário de suas representações. Uma abordagem criativa para sala de aula.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. 2001. 1 v. 220p. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

BIANCHINI, Bárbara Lutaif. *Estudo sobre a Aplicação de uma Sequencia Didática para o Ensino dos Números Decimais. 2*001 1 v. 278p. Doutorado em Psicologia da Educação. PUC - São Paulo. Disponível em:hapto://www.servicos.capes.gov.br/capesdw/resumo.html?idtese=200128433005010002P5 . Acesso em: 27. Jun.2008

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.

BRASIL, Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Matemática Vol. 3 (Matemática), Brasília, 1997.

________. Ministério da Educação/Secretaria de Educação Básica. *Guia do livro didático 2007 : Matemática : séries/anos iniciais do ensino fundamental.* Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

BRITO MENEZES, Anna. Paula de A. *Contrato Didático e Transposição Didática: análise das inter-relações entre os fenômenos didáticos na iniciação a álgebra na 6ª série do ensino fundamental.* 2006. Tese de Doutorado em Educação/UFPE. Disponível em: http://www.ce.ufpe.br/posemeducacao/documentos/teses2006/annapaula_de_avelar_brito_menezes.pdf.Último acesso em: 06.set.2008.

BROUSSEAU, Guy. *Recherches em didactique des mathématiques* Paris : La pensée sauvage, 1986. (Tradução Livre)

____________. *Os diferentes papéis do professor*. In : Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas. PARRA, Cecília. (Org.). Porto Alegre: Editora Artmed, 1996. p.65 – 66.

____________. *Education et Didactique des mathématiques.* Article paru el paru en espagnol dans la revue Mexicaine«Educacion matematica» Vol 12 n°1 Abril 2000 p. 5 – 39.

____________. *Fundamentos e Métodos da Didática da Matemática*. In: Didáctica das Matemáticas. Horizontes Pedagógicos. Brun, J. (org.). Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 35 – 85.

____________. *Introdução ao Estudo das Situações Didáticas*. São Paulo: Editora Ática, 2008.

BRUN, Jean. *Evolução das Relações entre a Psicologia do Desenvolvimento Cognitivo e a Didática da Matemática*. Didáctica das Matemáticas. Horizontes Pedagógicos. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 17 – 34.

CÂMARA, Marcelo. *O professor e o tempo*. Revista Tópicos Educacionais, Recife, n. 1 / 2, vol. 15, Editora UFPE, 1997.

CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. *Um exemplo de situação-problema: o problema do bilhar.* Revista do Professor de Matemática, Revista da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Rio de Janeiro, n.º 50, p. 38 - 45, 3º quadrimestre, 2002(a).

______________. *Algumas concepções sobre o ensino-aprendizagem de matemática.* Educação Matemática em Revista, Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), São Paulo, n.º 12, p. 11 - 15, Ano 3, 2002(b)

CHARNAY, Roland. *Aprendendo (com) a resolução de problemas. In: Didática da Matemática: Reflexões Pisicopedagógicas*. PARRA, Cecília. (Org.). Porto Alegre: Editora Artmed, 1996. p.36 – 47.

CARRAHER, Teresinha Nunes (Org.) *Aprender pensando: contribuições da psicologia cognitiva para a educação*. Petrópolis: Editora Vozes, 1986.

CASTORINA, José Antônio. FERREIRO, Emília. LERNER, Delia. & OLIVEIRA, Marta Khol de. *Piaget – Vygotsky: novas contribuições para o debate.* São Paulo: Editora Ática, 2003.

CATTO, Glória Garrido. *Registros de Representação e o Número Racional: Uma abordagem nos livros didáticos.* 2000. 152 f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – PUC – São Paulo.

CHEVALLARD, Yves. *La transposicion didáctiva: del saber sabio el saber enseñado*. Buenos Aires: Editora Aique, 1991.

D'AMBRÓSIO, Ubiratam. *A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexo na Educação Matemática.* In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora Unesp, 1999. p. 97 – 116.

D'AMORE, Bruno. *Elementos de Didática da Matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

DUVAL, Raymond. *Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática.* IN: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara. (Org) Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. São Paulo: EDUC, 2005.

GALVEZ, Grecia. *A didática da matemática*. IN: PARRA, Cecília (org.). et.al. Didática da matemática: Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

GÉRARD, François-Marie.; ROEGIERS, Xavier. *Conceber e avaliar manuais escolares.* Coleção Ciências da Educação. Porto, Ed. Porto, 1998.

HENRY, Michel. *Analyse Theorique de situations Didactiques.* In : Anais do Simpósio Internacional de Educação Matemática. Recife: UFPE, 2006. 15p.

KIEREN, T. E. *Personal Knowledge of rational numbers: It's intuitive and formal development.* In: Numbers concepts and operations in the middle grades. HIEBERT, J. & BEHR, M. (Eds.) Hillsdale, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p.162 – 181.

LERNER, Delia. *O ensino e o aprendizado escolar: argumentos contra uma falsa oposição*. IN: CASTORINA, José Antônio. FERREIRO, Emília. LERNER, Delia. & OLIVEIRA, Marta Khol de. Piaget – Vygotsky: novas contribuições para o debate. São Paulo: Editora Ática, 2003

LÉVY, Pierre. *As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática.* Rio de Janeiro: Editora 34, 1993. p. 70-71.

LIMA, José Maurício de. *Iniciação ao Conceito de Fração e o Desenvolvimento da Conservação de Quantidade.* In: CARRAHER, Teresinha Nunes (Org.) Aprender pensando: contribuições da psicologia cognitiva para a educação. Petrópolis: Vozes, 2005.

LOPES, Antonio José. *O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhe ensinar frações.* BOLEMA: Boletim de Educação Matemática. Rio Claro: UNESP. Ano 21 n.º 31, p. 1 – 22, 2008.

LOVELL, K. *Didáctica de las Matematicas (sus bases psicológicas): Desarrollos de los conceptos basicos.* Madrid: Ediciones Morata. 1969.

MACIEL, Adegundes.; CÂMARA, Marcelo. *Analisando o Rendimento de Alunos das Séries Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio em Atividades Envolvendo Frações e Ideias Associadas.* BOLEMA: Boletim de Educação Matemática. Rio Claro: UNESP. Ano 20 n.º 28, p. 163 – 177, 2007.

MACHADO, Cacilda T. Oliveira. *Concepções Epistemológicas e Experiências de Professores de Matemática sobre Números Fracionários: As implicações em suas Práticas na 5ª Série do Ensino Fundamental.* 2007. 132 f. Dissertação de Mestrado em Ensino das Ciências – Universidade Federal Rural de Pernambuco.

MACHADO, Sílvia Dias Alcântara. (Org.) *Educação Matemática: uma (nova) introdução.* São Paulo: EDUC, 2008.

MARANHÃO, M. Cristina S. A. & IGLIORI, Sônia B. Camargo. *Registros de representação e números racionais.* IN: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara. (Org) Educação Matemática: uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2005.

MARGOLINAS, Claire. *Le milieu et Le contrat, concepts pour La construction et l'analyse de situations d'enseignement.* IN : Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques. La Rochelle – Charente – Maritime : IREM de Clermont-Ferrand, 1998.

MEIRIEU, Philippe. *Aprender... sim, mas como?* Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

MENDONÇA, Sávio Almeida. *Matemática Moderna*. 1º Volume. São Paulo: Edições Fortaleza, 1972.

NUNES, Terezinha. Et. al. *Educação Matemática: Números e operações numéricas*. São Paulo: Cortez, 2005.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. *Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas.* In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora Unesp, 1999.

___________; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. *Novas Reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas*. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (Org.). Educação Matemática pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2005.

PAIS, Luiz Carlos. Didática da Matemática: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PARRA, Cecília (org.). et.al. *Didática da matemática: Reflexões Psicopedagógicas.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação. *Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco: matemática/*Secretaria de Educação. Recife: SE, 2008.

PERRENOUD, Phillipe. *Construir Competências desde a escola.* Porto Alegre: Editora Artmed, 2000.

PINTO, Neuza Bertoni. *O erro como estratégia didática: estudo do erro na matemática elementar*. São Paulo: Papirus, 2000.

PONCE, Hector. *Ensenãr y aprender matemática: Propuestas para el segundo ciclo.* Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas, 2006.

RODRIGUES, Wilson Roberto. *Números Racionais: um estudo das concepções de alunos após o estudo formal.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. 2005. 1 v. 246p. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Disponível em: http://servicos.capes.gov.br/capesdw/resumo.html?idtese=20051833005010005P4 Último acesso em: 27. Jun.2008.

ROJO, Roxane. *Recomendações para uma política de materiais didáticos*. Brasília, MEC/SEF, 2007.

ROMANATTO, Mauro Carlos. *Número Racional: Relações Necessárias a sua compreensão.* 1997 169 f. Tese de Doutorado em Educação. Universidade Estadual de Campinas.

Disponível em: http://libdigi.unicamp.br/document/?code=vtls000128860 Último Acesso em: 27. Jun. 2008

SANDOVSKY, Patrícia. *O ensino de matemática hoje: enfoques, sentidos e desafios*. São Paulo: Editora Ática, 2007.

SANTALÓ, Luis A. *Matemática para não-matemáticos*. In : Didática da Matemática: Reflexões Psico-pedagógicas. PARRA, Cecíclia. (Org.). Porto Alegre: Editora Artmed, 1996. p. 11 – 25.

SANTOS, L. S. & CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. *Análise da conversão de registros de representação semiótica no trabalho com números racionais.* Resumo completo publicados nos Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. PUC de Brasília, outubro de 2009.

__________________. *Análise dos efeitos didáticos emergentes de uma sequência de atividades na aprendizagem do significado parte/todo do número racional*. Resumo completo publicados nos Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática. PUC de Salvador, julho de 2010.

SILVA, Maria José Ferreira da. *Investigando saberes de Professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série*. 2005 301 f. Tese de Doutorado em Educação Matemática. PUC de São Paulo. Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertaçãomariajose.pdf Acesso em: 27. Jun. 2008

SILVA JÚNIOR, Clóvis Gomes da. *Critérios de adoção e utilização do livro didático de matemática no ensino fundamental e a participação do professor na adoção: o caso do agreste de Pernambuco.* 2005. 110 f. Dissertação de Mestrado em Ensino das Ciências - Universidade Federal Rural de Pernambuco.

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. *Como Dois e Dois. A construção da matemática*. São Paulo: Editora FTD, 1997.

TRIVIÑOS, Augusto Nibaldo Silva. *Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação.* São Paulo: Editora Atlas, 2008.

WOERLE. Nilce Helena. *Números Racionais no Ensino Fundamental: Múltiplas representações.* 1999 130 f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC de São Paulo. Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertaçãonilcewoerle.pdf Acesso em: 27. Jun. 2008.