UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO – UFRPE

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PRPPG

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS – PPGEC

NÍVEL MESTRADO

RONALD DE SANTANA DA SILVA

JOGO DISTÂNCIA EM BATALHA: INVESTIGAÇÃO DO PROCESSO CONTEXTUALIZADO DE APRENDIZAGEM MATEMÁTICA À LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE GÉRARD VERGNAUD

Recife

2010

RONALD DE SANTANA DA SILVA

JOGO DISTÂNCIA EM BATALHA: INVESTIGAÇÃO DO PROCESSO CONTEXTUALIZADO DE APRENDIZAGEM MATEMÁTICA À LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE GÉRARD VERGNAUD

Dissertação apresentada como requisito para a obtenção título de Mestre, pelo Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

Orientadora: Dra. Josinalva Estacio Menezes

Recife

2010

Ficha catalográfica

S586j Silva, Ronald de Santana da

Jogo distância em batalha: investigação do processo contextualizado de aprendizagem matemática à luz da teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud / Ronald de Santana da Silva. – 2010.

162 f. : il.

Orientadora: Josinalva Estácio Menezes

Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco. Departamento de Educação, Recife, 2010.

Inclui referência, anexo e apêndice.

1. Campos conceituais 2. Jogos no ensino de matemática 3. Aprendizagem de matemática I. Menezes, Josinalva Estacio, orientador II. Título

CDD 510.7

RONALD DE SANTANA DA SILVA

JOGO DISTÂNCIA EM BATALHA: INVESTIGAÇÃO DO PROCESSO CONTEXTUALIZADO DE APRENDIZAGEM MATEMÁTICA À LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE GÉRARD VERGNAUD

Dissertação apresentada como requisito para a obtenção título de Mestre, pelo Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

Orientadora: Dra. Josinalva Estacio Menezes

BANCA EXAMINADORA

Dra. Josinalva Estacio Menezes – Universidade Federal Rural de Pernambuco

Dra. Filomena Maria Gonçalves da Silva Cordeiro Moita – Universidade Estadual da Paraíba

Dra. Suely Alves da Silva – Universidade Federal Rural de Pernambuco

Dra. Mônica Maria Lins Lessa – Universidade Federal Rural de Pernambuco

À Edite de Santana.

Minha mãe.

AGRADECIMENTOS

Em todos os momentos na vida caminhamos por que somos dotados de muita garra e perseverança. Essas características são fomentadas pelas pessoas que passam em nossas vidas e nos abrem os olhos para nosso real valor, que às vezes nós mesmos chegamos a duvidar em algum momento. A essas pessoas prestarei, através de algumas palavras, os mais sinceros agradecimentos:

Aos meus amigos Ana Katarina de Santana, Marcela Barros e Marcílio de Castro, que foram os primeiros a acreditarem em meu potencial;

À Professora Josinalva Estacio Menezes, orientadora deste trabalho, pelos seus conhecimentos, sua atenção e boa vontade. Em especial a sua competência e determinação na coordenação do LACAPE, laboratório que me proporcionou muitas oportinodades de crescimento profissional e pessoal;

Aos amigos, sempre presentes, Jamille Mineo e Valdir Bezerra, nos processos de discussão e companheirismo na minha vida acadêmica e pessoal;

A Thiago Barbosa, pelo incansável apoio, pela paciência, atenção e incentivo;

Aos amigos Leonísio e Danilo, pelo apoio em todas nas minhas escolhas;

Aos funcionários Jerry e Jane, que sempre se mostraram atenciosos e realizados com minhas conquistas.

É fundamental considerar que desenvolvimento e aprendizagem não estão nos jogos em si, mas no que é desencadeado a partir das intervenções e dos desafios propostos aos alunos. A prática com jogos, permeada por tais situações [situações-problema], pode resultar em importantes trocas de informações entre os participantes, contribuindo efetivamente para a aquisição de conhecimento. (MACEDO, PETTY E PASSOS, 2000, p. 22).

RESUMO

Partindo das pesquisas que já havíamos realizado no LACAPE, decidimos dar continuidade às mesmas através da análise da aprendizagem com jogos matemáticos. Nosso objetivo foi Investigar a aprendizagem do assunto *distância entre dois pontos* pelos alunos do 3º ano do ensino médio através do jogo *DISTÂNCIA EM BATALHA* como proporcionador de uma situação didática contextualizada. Para este jogo utilizamos o Geoplano, material de manipulação, como tabuleiro para estruturarmos as regras e os objetivos dele. Com isso, realizamos uma revisão da literatura acerca do assunto, explanando os aspectos dos jogos e sua implicação na educação, além de também pesquisar sobre as potencialidades do uso do Geoplano em situações pedagógicas. A situação didática que propormos nos levou a considerar a contextualização do conteúdo como elemento importante do processo. Dessa forma, sentimos a necessidade de investigarmos também sobre este assunto. Utilizamos a Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida por Gerard Vergnaud. Para sistematizarmos a intervenção com os oito participantes da pesquisa, recorremos às fases da Dialética ferramenta-objeto, estruturada por Regine Douady. A partir dos dados obtidos através das transcrições da videografia e dos demais materiais de apoio, realizamos algumas categorizações e realizamos um diálogo dos resultados com a fundamentação teórica que utilizamos como base. À medida que realizamos este diálogo constatamos que o jogo proporcionou um momento de descontração no processo de aprendizagem. Alguns outros pontos positivos da utilização de jogos no processo ensino-aprendizagem em matemática foram constatados, como a competição sadia, a redução da descrença na auto capacidade de realização, a diminuição da dependência, o aumento da atenção e concentração e a de desenvolver a antecipação e estratégia. Os participantes que apresentaram invariantes operatórios mais elaborados, ou melhor, conceitos-em-ação válidos e teoremas-em-ação tomados como verdadeiros, obtiveram melhor desempenho. Os demais participantes nos demonstraram que o assunto mobilizado no momento da intervenção também já faz parte dos esquemas de ação dos mesmos, mas algumas ressalvas devem ser consideradas, uma vez que a maioria deles possuem dificuldades conceituais em matemática, contatadas em erros de cálculos com números reais (em específico números racionais) e de potências.

Palavras-chave: Aprendizagem de matemática, Jogos no ensino de matemática, Campos Conceituais

RÉSUMÉ

S'appuyant sur les travaux qu'ils ont entrepris dans LACAPE, nous avons décidé de poursuivre le même à travers l'analyse de l'apprentissage avec des jeux mathématiques. Notre objectif était d'étudier l'apprentissage de la distance du sujet entre deux points pour les élèves de 3e année du secondaire à travers la distance de jeu BATTLE IN fournisseur que d'une situation d'enseignement dans le contexte. Pour ce jeu, nous avons utilisé Geoplana, la manutention, la façon de structurer les règles du forum et de ses objectifs. Avec cela, nous avons réalisé une revue de la littérature sur le sujet, expliquant les aspects des Jeux et leur implication dans l'éducation, et également des recherches sur l'utilisation potentielle de Geoplana dans des situations pédagogiques. La situation de l'enseignement qui nous conduit à envisager de proposer la contextualisation du contenu comme un élément important du processus. Ainsi, nous pensons qu'il faut aussi enquêter sur cette question. Nous avons utilisé les champs conceptuels théorie, développée par Gérard Vergnaud. Pour systématiser l'intervention avec les huit participants, nous utilisons les étapes de la dialectique outil-objet, organisée par Régine Douady. D'après les données obtenues par la transcription de la vidéographie et autres matériels de soutien, nous avons effectué certaines catégories et a mené un dialogue de résultats avec le cadre théorique que nous utilisons comme base. Comme nous rendre ce dialogue, nous voyons que le jeu fourni un moment de plaisir dans le processus d'apprentissage. Quelques autres points de la bonne utilisation des jeux dans l'enseignement-apprentissage en mathématiques ont été considérées comme une saine concurrence, la réduction de l'incrédulité dans la capacité de réalisation de soi, réduction de la dépendance, une attention croissante et de la concentration et de développer et de progresser stratégie. Les participants qui avaient plus élaborée invariants opératoires, ou plutôt des concepts valables dans l'action et les théorèmes-en-action considérés comme vrais, ont montré une meilleure performance. Les autres participants nous ont montré que la question mobilisés au moment de l'intervention a aussi déjà partie des régimes d'action de la même, mais certaines mises en garde doivent être considérés, puisque la plupart d'entre eux sont des difficultés conceptuelles en mathématiques, en contact avec des erreurs dans les calculs avec des nombres réel (en particulier des nombres rationnels) et les pouvoirs.

Mots-clés : apprentissages en mathématiques, des jeux l’enseignement des mathématiques, Champs Conceptuels.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

> *Há uma grande distância entre o que pode ser realizado em termos de objetivos e a efetiva realização do possível. A superação dessa distância certamente depende de muitas variáveis: formação de professores, redefinição de métodos, expansão dos atuais campos de pesquisa, criação e diversificação de estratégias, incorporação do uso qualitativo das tecnologias digitais e, ainda de uma boa dose de disponibilidade para revirar concepções enrijecidas pelo tempo. (PAIS, 2006, p.13)*

Notamos, ainda nos tempos de hoje, uma dificuldade no ensino da Matemática. Os professores não costumam destacar o papel histórico-social da matemática e não existe uma motivação por parte da organização didática em transformar as aulas dessa disciplina em um laboratório constante de aprendizagem. Essa dificuldade gera uma cadeia de problemas, que inicia com um ensino de matemática descontextualizado; por vez, isso pode gerar nos alunos uma aprendizagem baseada apenas na memorização, e no momento em que eles forem utilizar os conhecimentos adquiridos anteriormente em situações novas, geralmente apresentadas nas séries subseqüentes, eles provavelmente encontrarão dificuldades, pois apenas a memorização não é suficiente para gerar o processo de construção.

Dessa maneira, os alunos esbarram em novas dificuldades e o professor, nesse momento, não possui mais tempo de rever os problemas cognitivos desses alunos, pois possui um cronograma rígido a ser cumprido e os alunos, cada vez menos motivados e com fracassos sucessivos, mais uma vez recorrem apenas à memorização dos conteúdos ministrados pelo professor, podendo vir a gerar outras aprendizagens superficiais fadadas ao fracasso, quando nos referimos à sua utilização[1].

Essas inquietações são também compartilhadas por Araújo (2000). Essa pesquisadora observou que:

---

[1] Essas e outras dificuldades no processo de ensino aprendizagem de matemática serão retomadas e devidamente justificadas no tópico 1.3, do capítulo 1, que se refere às teorias de aprendizagem.

> Há algo errado com o ensino de Matemática: os adultos a temem e odeiam, enquanto as crianças não querem aprendê-la ou não a aprendem. [...] Do ponto de vista dos alunos, o ensino e a aprendizagem não são atividades envolventes. É comum encontrar alunos dizendo “eu não sou bom em Matemática”, “Matemática é uma matéria difícil”, e verificar a constante dificuldade e o conseqüente fracasso quando é proposta a resolução de problemas nas aulas de Matemática. Por que a Escola e a Matemática se tornaram tão desinteressantes? Boa parte dos alunos nem sequer tenta uma resolução própria ficando simplesmente na espera da solução correta, apresentada pelo professor [...] (ARAÚJO, 2000, p.13).

Poderíamos ainda acrescentar outro exemplo da dificuldade gerada pela aprendizagem deficitária da matemática, ou a não aprendizagem dela, que é apresentada pelas Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Neste documento afirma-se:

> Cabe lembrar aqui o papel fundamental da Matemática na construção do conhecimento físico e as práticas comuns da escola em relação às dificuldades dos alunos. Observa-se que em muitos casos se diz que o fracasso na aprendizagem da Física é atribuído à falta de conhecimento em Matemática (BRASIL, 2006, p.54).

Notamos que apenas a memorização dos procedimentos existentes na matemática não gera aprendizagem dos conceitos pertencentes a ela. Dificuldades na aprendizagem em matemática não apenas refletem na dificuldade de aprender assuntos mais complexos pertencentes ao próprio campo dela, mas também influenciam na aprendizagem de outras disciplinas que dependem da matemática para serem entendidas. Não defendemos a extinção da memorização do processo ensino-aprendizagem do conteúdo de matemática, pois assim como Goldemberg (1996), consideramos que a memorização tem um papel importante. No entanto, não podemos nos ater apenas a este mecanismo, visto que, assim como na matemática, em outros campos das ciências e tecnologias, ou melhor, na vida em geral, necessitamos aprender a compreender as coisas. Essa perspectiva de pensamento se justifica quando nos reportamos à finalidade do ensino médio[2] vigente nos documentos que legalizam o ensino no país, encontrada na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (nº. 9394/96). O Art. 35, da referida lei, aponta como finalidade para o ensino médio:

[2] Público alvo do nosso estudo.

> O aprimoramento do educando como ser humano, sua formação ética, desenvolvimento de sua autonomia intelectual e de seu pensamento crítico, sua preparação para o mundo do trabalho e o desenvolvimento de competências para continuar seu aprendizado. (BRASIL, 2006, p.7)

Assim, destacamos mais uma vez o papel importante do ensino de Matemática nas escolas, pois segundo os PCNEM (BRASIL, 2001) e os PCN+ (BRASIL, 2002), o ensino dessa disciplina pode desenvolver nos alunos algumas habilidades básicas que venham contribuir para a formação do cidadão. Nesse contexto destacam-se as habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural.

Nossa inquietação a respeito das dificuldades no ensino da Matemática surgiu a partir do envolvimento e inserção nas pesquisas realizadas no Laboratório Científico de Aprendizagem, Pesquisa e Ensino (LACAPE), da UFRPE. Nele realizamos pesquisas e projetos de extensão direcionados, em sua maioria, para o ensino e aprendizagem de conceitos e habilidades matemáticas. Atualmente, o LACAPE tem direcionado seus estudos a atividades interdisciplinares e que envolvam os temas transversais, entre outros estudos abordados pelos atuais documentos que regem a educação no Brasil. Outra pesquisa do laboratório se refere à inserção das teorias de aprendizagem em matemática como fundamentação das atividades com jogos para o ensino básico. A principal característica do laboratório é desenvolver metodologias e recursos que promovam a aprendizagem significativa de conteúdos matemáticos. Essa característica é embasada nos pressupostos das Orientações Curriculares para o Ensino Médio, disponibilizadas pelo ministério da cultura e outros órgão que ajudam a sistematização e organização do ensino básico. Dessa forma, compartilhamos com a idéia das orientações, onde aponta que:

> A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra-exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. Também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica (BRASIL, 2006, p. 69-70).

Dessa forma, acreditamos que o ensino de Matemática, em específico no nível médio da educação básica, deva sofrer modificações e que estas possam vir levar a um quadro teórico-metodológico pertinente à realidade e às necessidades do aluno. Uma linha metodológica que acreditamos e utilizamos neste estudo está relacionada ao *recurso dos jogos e materiais de manipulação*[3] no ensino desta disciplina, pois observamos, através de pesquisas, testando situações e atividades com o uso dos mesmos em todos os níveis educacionais (SILVA et all, 2005; MENEZES et all, 2006a; 2006b; MENEZES et all, 2007; SILVA et all, 2008; CABRAL et all, 2008), contribuições positivas deles no ensino-aprendizagem de Matemática.

Notamos que, embora já exista uma quantidade considerável de trabalhos apresentados em eventos versando sobre o tema, a ênfase maior está no ensino fundamental; em particular, nas séries iniciais. Entre pesquisadores que têm se dedicado a investigar as formas de inserção dos jogos no contexto da matemática, citamos os trabalhos de Rêgo e Rêgo (1998, 2000, 2004), Menezes (1996, 2004, 2005, 2006a), Araújo (2000), Moratori (2003), Campos (2005), entre outros que servirão para fundamentação teórica sobre este tema.

Elaboramos um jogo nomeado de *DISTÂNCIA EM BATALHA*, que possui a finalidade de mobilizar o conteúdo de distância em entre dois pontos[4]. Este jogo é desenvolvido no *Geoplano*.

O Geoplano é um material de manipulação, que possui uma grande potencialidade didática, tanto para elaboração de jogos, quanto para execução de atividades. Dentre os trabalhos que versam sobre esse material, destacamos as pesquisas de Knijnik, Basso e Klüsener (1995), Leivas (2007), Sabbatiello (1967), Machado (2008), Irvin (1995), GGEP (2001/ 2002), Rocha (2007), Echavarría & Monsalve (2008). As atividades e discussões apresentadas nesses trabalhos estão voltadas para a Geometria Plana, no contexto do ensino fundamental, mais freqüentemente áreas, perímetro de figuras planas e simetrias. Não foram encontradas em buscas realizadas, até o momento, resultados de pesquisas sobre a investigação da aprendizagem de conteúdos do ensino médio com o referido recurso.

---

[3] Dá-se o nome de material de manipulação ao material concreto utilizado nas situações de ensino-aprendizagem.

[4] Assunto curricular do corpo da geometria analítica, ministrado no início do ano letivo do 3º ano do ensino médio.

Nosso estudo é uma continuação das pesquisas que vêm sendo realizadas no LACAPE. Recentemente investigamos e elaboramos algumas propostas metodológicas para a aplicação do Geoplano no ensino médio a as publicamos.[5]

Acreditamos que o jogo *DISTÂNCIA EM BATALHA* possa vir a proporcionar uma situação contextualizada para o ensino-aprendizagem do conteúdo *distância entre dois pontos*, conteúdo previsto para os alunos do 3º ano do ensino médio, já que, na maioria dos casos esse assunto é apresentado de acordo com a seguinte estruturação: definição, fórmula de recorrência, exercícios resolvidos e exercícios de fixação.

Notemos que incluímos outro ponto que será discutido neste trabalho, que é *a contextualização* como prática pedagógica, ao levarmos em consideração que o contexto, segundo Mello (2009), pode ser classificado em três grandes categorias: a da vida pessoal, o dia a dia do aluno; a da sociedade e o mundo em que ele vive; e o do ato da descoberta científica, que pode ser reproduzido de alguma forma. Esses três elementos estão presentes na vida pessoal, social e cultural do aluno. Quando a escola realiza um diálogo entre as três grandes categorias do contexto, o conhecimento a ser aprendido se tornará mais significativo para o aluno. No nosso caso, a aprendizagem contextualizada está na perspectiva do ato da descoberta científica, que pode ser reproduzido de alguma forma, quando estamos nos referindo ao conteúdo distância entre dois pontos.

A questão que nos orientou na realização dessa pesquisa foi: *Quais as principais relações e rupturas dos conhecimentos que emergem no processo ensino-aprendizagem do assunto distância entre dois pontos a partir de atividades com o jogo DISTÂNCIA EM BATALHA, como recurso com potencialidades de gerar uma situação de aprendizagem e contextualização?*

Estruturamos a intervenção a partir dos pressupostos da Dialética Ferramenta-Objeto. Esta teoria é estudada por Régine Douady e faz parte do corpo da Engenharia Didática apresentada pela corrente dos estudiosos da Didática da Matemática francesa. Centramos nossa utilização desta teoria apenas como recurso

[5] Livro 5 da Série Contexto Matemático, intitulado *Conhecimento, interdisciplinaridade e atividades de ensino com jogos Matemáticos: Uma proposta metodológica*, organizado pela Professora Doutora Josinalva Estacio Menezes.

metodológico de estruturação da intervenção, dando o enfoque nas *Fases da Dialética Ferramenta-Objeto.*

A contextualização, de maneira geral, é uma situação proporcionada aos alunos para que eles possam, através dela e de outros elementos, alcançar a aprendizagem. Para analisarmos esse processo recorremos à *Teoria dos Campos Conceituais*, assim definida:

> A teoria dos campos conceptuais é uma teoria cognitivista que visa fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas, nomeadamente daquelas que relevam das ciências e das técnicas (VERGNAUD, 1996a, p.155).

É através das lentes dessa teoria, estruturada por Gérard Vergnaud, que investigaremos a aprendizagem do assunto pelos participantes através dos elementos dessa teoria: *situações, invariantes operatórios e representações simbólicas.* A estruturação da intervenção – realizada através da Dialética Ferramenta-Objeto, na qual suas fases favorecem a observação dos elementos da teoria de Vergnaud – nos forneceu, através da metodologia fundamentada pela *Análise do Conteúdo*, uma possibilidade de solidificarmos os resultados obtidos através dos dados coletados, a partir diálogo entre eles e as teorias e concepções que escolhemos para fundamentar essa pesquisa.

Assim, consideramos pertinente a investigação da aprendizagem do conteúdo distância entre dois pontos, através do jogo DISTÂNCIA EM BATALHA, que favorece a contextualização do conteúdo já citado, a partir da estruturação de uma intervenção. Buscamos com essas colocações, a possibilidade de contribuir para mais uma alternativa metodológica do uso de jogos e material de manipulação para o processo ensino-aprendizagem. Esperamos que esse estudo também sirva como subsídio para área de investigação da aprendizagem em Matemática, e que os resultados obtidos possam levar a gerar outras questões de pesquisas.

Após esta explanação, apresentaremos os objetivos da pesquisa que elaboramos para respondermos a pergunta levantada anteriormente.

1.1. OBJETIVOS

1.1.1. Objetivo geral

Investigar a aprendizagem do assunto *distância entre dois pontos* pelos alunos do 3º ano do ensino médio, através do jogo *DISTÂNCIA EM BATALHA* como componente de uma situação didática contextualizada.

1.1.2. Objetivos específicos

- Identificar os erros, tentativas de acertos e os acertos dos alunos quando diante de uma situação de aprendizagem contextualizada;
- Investigar as formas de interação e os mecanismos de ações que surgem durante uma atividade com jogos.

Para compormos uma base sólida de investigação apresentaremos no capítulo que se segue as principais orientações que utilizamos para realizar nossa investigação.

CAPÍTULO 2: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, discutiremos as idéias teóricas que embasarão nossa pesquisa empírica, referentes ao jogo, à contextualização, às teorias de aprendizagem, em específico à de Vergnaud e a dialética ferramenta-objeto.

2.1. O PAPEL DOS JOGOS NA FORMAÇÃO DE CONCEITOS

> *"Se o ensino for lúdico e desafiador, a aprendizagem prolonga-se fora da sala de aula, fora da escola, pelo cotidiano, até as férias, num crescendo muito mais rico do que algumas informações que o aluno decora porque vão cair na prova" (NETO, 1992).*

As informações que adquirimos, em relação aos jogos, enquanto realizávamos a pesquisa bibliográfica, fundamentadora das discussões que levamos em consideração para a estruturação desse trabalho, emergem de várias fontes e com diversos olhares: Silva (2008); Smole, Diniz e Cândido (2007); Menezes (2007, 2006, 1996); Cury e Konzen (2007); Schaeffer (2006); Cawahisa (2006); Campos, (2005); Jelinek (2005); Moratori (2003); Araújo (2000); entre outros. Essa diversidade de materiais concernentes à utilização de jogos para o ensino, em nosso caso o ensino de Matemática, nos leva a refletir que a utilização dos mesmos não é algo novo e que sua utilização para fins didáticos não aconteça. No entanto, notamos que a utilização de jogos é um assunto de bastante relevância, através do seu significativo potencial, de um vasto e produtivo campo de pesquisa.

Nessa direção, realizaremos um recorte da vasta discussão que esse tema proporciona, sua história, seus principais defensores e as diferentes concepções e definições a respeito do que é o jogo. Sugerimos, para um maior aprofundamento sobre o tema, consultar os trabalhos dos pesquisadores anteriormente citados.

Para que possamos fundamentar nossa pesquisa decorreremos, em seguida, uma apresentação sobre algumas definições de jogo e a diferenciação de jogo, brinquedo e brincadeira, para deixarmos claro a qual perspectiva estamos nos atendo. Outro tópico relevante, que neste capítulo iremos considerar, está relacionado com os apontamentos e relevâncias dos jogos no contexto educacional. Em seguida, delimitaremos esse tema com a inserção dos jogos no ensino-aprendizagem em Matemática. Apresentaremos, também, um recurso didático, o Geoplano, e suas potencialidades para atividades, que serve como tabuleiro do jogo *DISTÂNCIA EM BATALHA*; este é o recurso que servirá de eixo para o desenvolvimento da nossa intervenção, mas detalhada na parte metodológica dessa pesquisa.

Antes de partimos para uma explanação sobre as principais definições de jogo e a diferenciação de jogo, brinquedo e brincadeira, apresentaremos um quadro que nos direcionam ao caminho histórico que o jogo percorreu. Acreditamos, como Cawahisa (2006), na importância dos jogos no contexto da história da humanidade. Essa pesquisadora aponta que:

> Quando se analisa a história da humanidade, verifica-se que os jogos se constituíram em uma forma de atividade inerente ao ser humano. A importância do jogo foi percebida em todos os tempos, e se apresenta como um fato essencial para a construção da personalidade infantil (CAWAHISA, 2006, p.16-17).

O quadro que se segue é um resumo, do texto de Cawahisa (2006), dos principais focos sobre as concepções de jogo em alguns períodos históricos da nossa sociedade.

Quadro 01
OS JOGOS EM DIFERENTES MOMENTOS DA HISTÓRIA DA HUMANIDADE

Momentos da história da humanidade	Concepção de jogos	Principais características
Civilização greco-romana	Jogos como recreação	As atividades com jogos são desvinculadas de trabalhos físicos, intelectuais e/ou educacionais. Direcionado exclusivamente para relaxamento.
Cristianismo	Jogos como delituosos	Nesse período da história foi imposta à sociedade ocidental uma educação disciplinadora, que assim permaneceu durante toda a Idade Média. E não havia espaço para o jogo em detrimento da concepção do mesmo vigente no momento.
Renascimento	Jogos como uma tendência natural do ser humano	É nesse período que os jogos voltam a ser incorporados ao cotidiano dos jovens. Nasce o jogo educativo que se expande durante o século seguinte.
Romantismo	Jogos como uma conduta típica e espontânea da criança.	Nesse período se constrói uma nova imagem da infância e o jogo possui bastante importância para esta mudança de paradigma. Acredita-se que as crianças constroem seus conhecimentos de mundo, do seu contexto sócio-cultural e estrutura sua língua, bem como elabora seus conflitos emocionais, e revela suas possibilidades cognitivas, através de jogos e brincadeiras.

Esse quadro, apresentado anteriormente, nos remete à reflexão da importância da discussão sobre o papel dos jogos na sociedade.

Outro quadro que complementa o percurso histórico das pesquisas em jogos é apresentado mais a frente (Quadro 02). Este apanhado de informações estruturado por Friedmann (1996) se reporta a sete perspectivas teóricas relativas ao jogo.

Quadro 02
PERSPECTIVAS TEÓRICAS RELATIVAS AO JOGO

Período	Perspectiva teórica	Visão do jogo
Final do século XIX.	Pesquisas de evolução e desenvolvimento.	A sociedade adulta tinha bastante influência no jogo infantil. A criança era concebida como um "adulto em miniatura" e os jogos estavam direcionados a reproduzir o cotidiano dos adultos.
Final do século XIX, começo do século XX.	Difusionismo e particularismo: preservação do jogo.	O jogo era considerado uma característica geral de todo a população. Essa perspectiva foi considerada logo após a necessidade de preservar as atividades lúdicas e seu direcionamento para infância.
Décadas de 20 a 50.	Análise do ponto de vista cultural e de personalidade: a projeção do jogo.	O jogo era visto como uma forma de expressão da personalidade e da cultura de cada sociedade.
Décadas de 30 a 50.	Análise funcional: socialização do jogo.	Os jogos adultos foram enfatizados como um mecanismo para socialização.
Começo da década de 50.	Análise estruturalista e cognitivista.	É a partir dessa época que a atividade expressiva e as habilidades cognitivas são observadas através das ações com o jogo.
Décadas de 50 a 70.	Estudos de Comunicação.	O jogo e sua importância na comunicação.
Década de 70 em diante.	Análise ecológica, etológica e experimental: definição do jogo.	O jogo dava ênfase ao uso de critérios ambientais observáveis e/ou comportamentais.

O destaque que fazemos no quadro 02, acima, é para focarmos que perspectiva teórica, em relação ao jogo, e que visão dele estamos adotando.

Depois desse resgate sobre o jogo na história da humanidade, algumas questões se impõem. O que é jogo? Quais as diferenças e semelhanças entre jogo, brinquedo e brincadeira? Necessitamos responder essas questões para que possamos, depois dessa discussão, nos apropriar do conceito de jogo, para em seguida relacioná-lo com os outros temas que discutiremos mais à frente, pertinentes a nossa pesquisa.

2.1.1. Definições de jogo e a diferenciação de jogo, brinquedo e brincadeira.

Apesar de alguns autores referirem que tentar definir jogo é uma tarefa árdua e sujeita a alguns equívocos (KISHIMOTO, 2007; JELINEK, 2005), buscamos realizar um panorama de investigação que nos forneçam dados coerentes para este fim.

As dificuldades de interpretação da palavra jogo estão subjacentes à possível estruturação lingüística de cada povo, pois notamos a que em alguns estudos em outros países, não fica claro a diferenciação do brincar e o jogar. Essa dificuldade pode ser explicada pela própria estruturação da língua mãe de alguns estudos. Essa dificuldade está exposta no trabalho de Jelinek (2005), onde afirma que:

> Ao desenvolver essa pesquisa, buscou-se definir o que são jogos, entretanto esbarrou-se na dificuldade de que muitos autores intencionalmente não diferenciam as brincadeiras dos jogos. Existem ainda traduções de obras que não explicitam essa diferença por não existir, na língua mãe, vocábulos diferenciados para essas duas atividades. Na língua inglesa, por exemplo, temos o único verbo play que traduz-se em brincar, tocar, jogar, jogar contra, disputar. A língua francesa, por sua vez, também nos apresenta um único verbo, jouer, que representa as ações de jogar, brincar e tocar (JELINEK, 2005, p. 31).

Ou seja, a dificuldade de definir jogo pode estar na vasta interpretação que o termo pode trazer. Ao nos referirmos à palavra jogo podemos interpretar como:

> [...] jogos políticos, de adultos, crianças, animais ou amarelinha, xadrez, adivinhas, contar estórias, brincar de "mamãe e filhinha", futebol, dominó, que-bra-cabeça, construir barquinho, brincar na areia e uma infinidade de outros. Tais jogos, embora recebam a mesma denominação, têm suas especificidades. Por exemplo, no faz-de-conta, há forte presença da situação imaginária; no jogo de xadrez, regras padronizadas permitem a movimentação das peças. Brincar na areia, sentir o prazer de fazê-la escorrer pelas mãos, encher e esvaziar copinhos com areia requer a satisfação da manipulação do objeto, já a cosntrução de um barquinho exige nçao só a representação mental do objeto a ser construido, mas também a habilidade manual para operacionalizá-lo (KISHIMOTO, 2007, p.13).

Notamos a complexidade de se definir jogos e possivelmente esse fato está atrelado à falta de clareza em distinguir o que é jogo do que é brincadeira. Em certas culturas não existe diferenciação. Por exemplo, no Brasil o termo jogo, brinquedo e brincadeira não possui grandes diferenciações e em certos momentos não existe nenhuma (idem, 2007). Pesquisadores (BROUGÈRE, 1981, 1993; HENRIOT, 1983, 1989) se interessaram por estudar essa diferenciação e apresentaram estudos que visam desmistificar e estruturá-las. Para eles o jogo pode ser visto em três perspectivas. O quadro abaixo apresenta essas formas.

Quadro 03

TRÊS NÍVEIS DE DIFERENCIAÇÃO DO JOGO

Visão do jogo	Comentários
Em um contexto social, definido pelo sistema lingüístico pertencente a cada um.	O termo jogo está definido de forma pragmática de acordo com o contexto cultural no qual está inserido. Percebemos que dependendo do lugar e da época os jogos assumem significações distintas. Já apresentado no Quadro 1.
Sistema de regras	Nessa perspectiva o jogo pode ser totalmente identificado a partir da sua estruturação seqüencial, que explicita sua modalidade. Os jogos se distinguem a partir de suas regras explicitas. Ao se escolher um jogo, entramos em contato com as regras dele, as executamos, e ao mesmo tempo desenvolvemos uma atividade lúdica.
Objeto	A forma de como o jogo está materializado.

Ao olhar para o jogo, nessas três perspectivas, podemos assim, diferenciá-lo do brinquedo e conseqüentemente da brincadeira. O brinquedo difere do jogo de forma clara, pois o brinquedo desenvolve uma característica intrínseca a criança e apresenta uma indeterminação quanto ao seu uso. Isso favorece a criança no seu desenvolvimento e na construção do conhecimento infantil, por causa da sua potencialidade de deixar o imaginário infantil livre das regras pré-existentes característicos dos jogos. Levaremos em consideração, nesse estudo, que a brincadeira é a manipulação dos brinquedos pela criança, isto é, é a ação da criança enquanto está em uma atividade lúdica. Bujes (2000) apresenta mais uma versão do que é brincar. Compartilhamos da sua idéia, quando afirma que:

> Existe praticamente uma coincidência da maioria dos autores em exaltar o brinquedo e a brincadeira. Dizem muitos deles que não é necessário que descrevamos o brincar. Todos sabemos quando alguém está brincando. O natural seria o brincar. A brincadeira é universal e própria da saúde (WINNICOTT, 1975). O brincar facilitaria o crescimento, a saúde (física e mental), os relacionamentos grupais, constituindo uma forma de comunicação. O brincar seria um espaço de liberdade individual, um lugar de sonhos, inerentemente excitante e precário [...]. (BUJES, 2000, p. 216).

Ao apresentarmos a diferenciação de jogo, brinquedo e brincadeira. Acreditamos deixar claro que o que estamos utilizando em nosso estudo é o jogo. Formalizaremos nossa opção de jogos a partir da definição de Huiziga (1996), que define da seguinte forma:

> [...] o jogo é uma atividade ou ocupação voluntária, exercida dentro de determinados limites de tempo e espaço, segundo regras livremente consentidas, mas absolutamente obrigatórias, dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e de alegria e de uma consciência de ser diferente da vida cotidiana. (p. 33).

Vimos que as atividades lúdicas são inerentes às ações das crianças. Essas atividades extrapolam o período infantil influenciado na formação e desenvolvimento dela até a fase adulta. Onde os jogos tomam proporções diferenciadas, com regras mais elaboradas e maneiras de manipulação mais complexas[6], mas seu caráter lúdico e desafiador continuam encantando jovens e adultos por toda parte. Esse encantamento pelos jogos e o desenvolvimento que ele proporciona nos levou as seguintes questões: O que o jogo pode mobilizar? Será que podemos utilizá-los dentro da sala de aula? Quais os benefícios e malefícios dos jogos na educação? Como desenvolver estratégias didáticas utilizando esse recurso? Quais outros elementos deverão ser mobilizados ao trabalhar com jogos no contexto educativo? Essas e outras discussões serão explanadas no tópico que se segue.

2.1.2. Jogos na educação

Nosso propósito, neste tópico, é desenvolver um panorama da inserção dos jogos dentro da sala de aula como recurso didático. Dessa forma, alguns dos trabalhos investigados, para compor essa fundamentação, não realizaram uma distinção de jogo, brinquedo e brincadeira, mas trataram de inserir esses elementos em um só conjunto e passou a chamá-los apenas de jogos e em outros momentos de atividades lúdicas. Deixamos claro, mais uma vez, que os jogos na nossa perspectiva são os recursos que possuem regras pré-estabelecidas e que possuem uma potencialidade lúdica na sua utilização.

Acreditamos que o jogo possa ser um material com potencialidades dentro da sala de aula, pois eles podem ser direcionados para o ensino sem perder sua característica de jogo. Quando nos referimos ao jogo desta maneira, estamos

---

[6] Estamos nos referindo aos jogos por computador e os dispositivos eletrônicos de última geração, que ganha espaço no mercado e possui diferntes formas de utilização.

direcionando nossos olhares a uma prática educativa que instrui e diverte ao mesmo tempo, sem que nenhuma dessas características se perca.

Uma colocação sobre jogo na educação que ratifica a nossa idéia é apresentada no trabalho de Campos (2005), onde resume as duas funções do jogo educativo:

> [...] o jogo educativo tem sempre duas funções: uma função lúdica, na qual a criança encontra prazer ao jogar, e uma função educativa, através da qual o jogo ensina alguma coisa, ajuda a desenvolver seu conhecimento e a sua apreensão do mundo, onde se pode perceber que a qualidade educativa de um jogo é ser um jogo (CAMPOS, 2005, p.47).

Outra contribuição, nesta mesma linha de discussão, está na investigação de Fernandes (1995), que afirma:

> Os jogos podem ser empregados em uma variedade de propósitos dentro do contexto de aprendizado. Um dos usos básicos muito importantes é a possibilidade de construir-se a autoconfiança. Outro é o incremento da motivação. (...) um método eficaz que possibilita uma prática significativa daquilo que está sendo aprendido. Até mesmo o mais simplório dos jogos pode ser empregado para proporcionar informações factuais e praticar habilidades, conferindo destreza e competência. (FERNANDES, 1995, p.02)

Para continuarmos essa defesa do uso de jogos dentro da sala de aula, convém conhecer como o lúdico ganhou espaço dentro do processo de desenvolvimento e, conseqüentemente, de aprendizagem do sujeito. Ao apresentar essa retomada histórica, acreditamos justificar a inserção dos jogos na educação, pois não é um campo novo de investigação, como deixa transparecer em alguns discursos.

Para que possamos entender um pouco do percurso histórico, nesse contexto, nos remeteremos ao trabalho de Campos (2005). Essa pesquisadora desenvolveu um trabalho amplo de pesquisa bibliográfica e apresentou um reporte teórico sobre como aconteceu o surgimento da utilização de atividades lúdicas em educação e os principais teóricos percussores dessas idéias. Apresentaremos parte da sua pesquisa no quadro que se segue.

Quadro 04

O SURGIMENTO DA PROPOSTA DE SE USAR ATIVIDADES LÚDICAS EM EDUCAÇÃO BASEADO NAS IDÉIAS DE CAMPOS (2005)

Teóricos	Local	Utilização de atividades lúdicas
Platão (427 a.C. – 327 a.C.)	Atenas	Defendeu uma educação onde predominavam os jogos educativos praticados em comum pelas crianças de ambos os sexos até os seis anos.
Quintiliano (35 a.C. – 118)	Roma	Educação baseada no jogo, mas este jogo deveria ser incentivado dentro do lar. Não havia escolha para as crianças menores de sete anos.
Comenius (1592 – 1670)	Eslovênia	Fundador da Didática da Moderna Pedagogia. Seu sistema provocou a reforma do ensino que se tornou conhecido como Realismo em Pedagogia. Ele dividiu os anos do desenvolvimento em infância, puerícia adolescência e juventude. Cada um compreendia um espaço de seis anos. Criou uma escola maternal para as crianças na fase da infância onde recomendava experiências com os brinquedos para exercitar os sentidos externos.
Rousseau (1712 – 1778)	França	Tem como principal idéia a educação baseada na atividade, pois a aprendizagem é adquirida através das experiências. Segundo ele a criança é uma folha de papel em branco e se estiver atenta aos fenômenos da natureza desenvolverá a curiosidade e pesquisará os fatos. Por isso ele defende o contato da criança com a natureza; a criança tem a oportunidade de entrar em contato com a 'sua própria natureza'. Rousseau dizia que a educação da criança deve ser uma livre expressão das atividades naturais da própria criança.
Basedow (1724 – 1790)	Alemanha	Defensor das idéias de Rousseau. Tornou o ensino mais atraente criando jogos e gravuras. Para ele a educação deveria ser o mais interessante e ativa possível.
Fröebel (1782 – 1852)	Alemanha	Possuía uma visão humanitária. Deu muita importância ao lúdico. Fröebel foi o fundador do primeiro Jardim de Infância (Kindergarten), onde, como o próprio nome diz, pretendia-se cultivar as almas das crianças. Em 1837 o brinquedo (lúdico) entra na escola pela primeira vez.
Cecil Reddie (1858 – 1932)	Inglaterra	Criador da primeira escola nova (Abbostsholme) em 1889, onde introduziu o senso de cooperação no jogo e no trabalho.
Montessori (1870 – 1952)	Itália	Criou as Casas das Crianças onde se educava pela vida (aprendizagem por experiência de vida). Para ela as atividades lúdicas ou recreativas constituem uma força propulsora do desenvolvimento da personalidade, influenciando a saúde física e mental do ser humano.
Huizinga (1872 - 1945)	Holanda	O historiador holandês Johan Huizinga chegou a definir o homem como o ser que

		brinca. Para ele todas as atividades humanas incluindo filosofia, guerra, arte, leis e linguagem, podem ser vistas como o resultado de um jogo, como sendo este um ato voluntário.
Piaget (1896-1980)	Suíça	Piaget era um biólogo e epistemólogo e não deixou nenhum método de ensino, mas seus estudos são a base para a maioria das abordagens. Para Piaget a base da estruturação da inteligência é a ação, ou seja, aprender fazendo. É aí que se encaixa o lúdico, pois através das experiências proporcionadas por ele a criança pode estruturar sua inteligência.
Vygotsky (1896-1934)	Rússia	Professor e Pesquisador foi contemporâneo de Piaget e construiu sua teoria tendo como base o desenvolvimento do indivíduo como sendo resultado de um processo sócio-histórico, enfatizando o papel da linguagem e da aprendizagem nesse desenvolvimento. Sua questão central é a aquisição de conhecimentos pela interação do sujeito com o meio. Segundo Vygotsky o lúdico influencia enormemente o desenvolvimento da criança, tendo como conceito central a Zona de Desenvolvimento Proximal, definindo como a discrepância entre o desenvolvimento atual da criança e o nível que atinge quando resolve problemas com auxílio.

Desde então, os jogos tomaram uma dimensão significativa dentro do contexto escolar. Vários outros autores, como Gonçalves (1999); Almeida, (1998); Macedo, Petty e Passos (2005); Kishimoto (2000), entre outros, investigam a inserção de jogos na educação e projetam vários outros olhares para essa prática. Com isto perpassam as idéias de que os jogos são ferramentas para construção de conhecimentos e que as crianças, através do lúdico, passam a conhecer o mundo, os jogos não devem ser considerados como passatempo; e que os jogos venham a contribuir para o desenvolvimento infantil através do exercício das suas estruturas mentais (CAWAHISA, 2006). Avançamos nessas idéias, quando acreditamos que podemos estender os estudos para os adolescentes.

Notamos que hoje, não temos apenas a defesa da utilização desse recurso. Observamos, também, que a prática educativa no ensino básico no Brasil sugere e orienta (através dos documentos que regem a educação, os PCN, PCN+, PCNEM, OCEM) a prática pedagógica com a utilização de jogos dentro da sala de aula. Nos PCN+ encontramos um exemplo dessa defesa:

> Os jogos e brincadeiras são elementos muito valiosos no processo de apropriação do conhecimento. Permitem o desenvolvimento de competências no âmbito da comunicação, das relações interpessoais, da liderança e do trabalho em equipe, utilizando a relação entre cooperação e competição em um contexto formativo. O jogo oferece o estímulo e o ambiente propícios que favorecem o desenvolvimento espontâneo e criativo dos alunos e permite ao professor ampliar seu conhecimento de técnicas ativas de ensino, desenvolver capacidades pessoais e profissionais para estimular nos alunos a capacidade de comunicação e expressão, mostrando-lhes uma nova maneira, lúdica, prazerosa e participativa de relacionar-se com o conteúdo escolar, levando a uma maior apropriação dos conhecimentos envolvidos (BRASIL, 2002, p. 55).

O deslumbre da utilização deste recurso pode acarretar vários problemas, dentre eles, um dos mais sérios é a utilização demasiada do recurso. O comentário realizado por RIZZO (1988) chamou nossa atenção, onde afirma que:

> Não há momentos próprios para desenvolver a inteligência e outros do aluno já estar inteligente, sempre é possível progredir e aperfeiçoar-se. *Os jogos devem estar presentes todos os dias na sala de aula*[7] (RIZZO, 1988, apud MORATORI, 2003, p. 9).

Este pesquisador apresenta uma nuance que discordamos. Assim como o recurso aos jogos, todos os outros recursos, utilizados de forma demasiada proporcionam, a partir das nossas experiências, uma rejeição nos indivíduos que estão envolvidos nessas atividades, além de desconfigurar o objetivo do jogo proposto para educar. Essa é uma das dificuldades que a utilização errônea dos jogos na educação pode proporcionar.

Apresentaremos em seguida um quadro que expõe, colocando em contraposição mais algumas desvantagens e as principais vantagens da utilização dos jogos no processo educacional.

[7] Grifo nosso.

Quadro 05

VANTAGENS E DESVANTAGENS DA UTILIZAÇÃO DE JOGOS NA EDUCAÇÃO

Vantagens	Desvantagens
• Fixação de conceitos já aprendidos de uma forma motivadora para os alunos; • Introdução e desenvolvimento de conceitos de difícil compreensão; • Desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas (desafio dos jogos); • Aprender a tomar decisões e saber avaliá-las; • Significação para conceitos aparentemente incompreensíveis; • Propicia o relacionamento de diferentes disciplinas (interdisciplinaridade); • Requer a participação ativa do aluno na construção do seu próprio conhecimento; • Favorece a socialização entre alunos e a conscientização do trabalho em equipe; • É um fator de motivação para os alunos.	• O caráter aleatório do jogo devido à falta de planejamento; • A falta de controle do tempo estipulado para a atividade com jogos, pode vir a sacrificar outros conteúdos; • As falsas concepções de que devem ensinar todos os conceitos através dos jogos. Então, as aulas, em geral, transformam-se em verdadeiros cassinos, também sem sentido para o aluno; • A perda de "ludicidade" do jogo pela interferência constante do professor, destruindo a sua essência; • A destruição da voluntariedade pertencente a natureza do jogo pelo professor, através da imposição dos jogos. Os jogos não podem ser impostos devem ser sugeridos.

Além das vantagens apresentadas no quadro acima, acreditamos que o jogo na educação pode vir a favorecer o desenvolvimento da criatividade, de senso crítico, da participação, da competição "sadia", da observação, das várias formas de uso da linguagem e do resgate do prazer em aprender. Acrescentamos que os jogos também podem ser utilizados para reforçar ou recuperar habilidades de que os alunos necessitem. São úteis no trabalho com alunos de diferentes níveis, e permitem ao professor identificar, diagnosticar alguns erros de aprendizagem, as atitudes e as dificuldades dos alunos (CAMPOS, 2005).

Ratificamos a idéia de que para uma prática significativa com jogos na educação necessitamos de planejamento. É através dele que o professor irá deixar claro o seu objetivo e quais as estratégias que irá utilizar para a utilização desse recurso. Dessa forma, como os objetivos claros, tanto o professor quanto os alunos perceberão qual a finalidade do jogo na prática pedagógica que está ocorrendo dentro da sala, não recaindo nas dificuldades já apresentadas no quadro 05.

Ressaltamos mais uma vez a importância dos jogos para deixarmos claro o porquê da nossa escolha por este recurso. Compartilhamos da idéia de Moratori (2003), o qual afirma que:

> O jogo pode ser considerado como um importante meio educacional, pois propicia um desenvolvimento integral e dinâmico nas áreas cognitiva, afetiva, lingüística, social, moral e motora, além de contribuir para a construção da autonomia, criticidade, criatividade, responsabilidade e cooperação das crianças e adolescentes (MORATORI, 2003, p. 9).

Como percebemos, temos um grande potencial pedagógico quando utilizamos jogos para o ensino. Uma área em que a atividade com jogos vem contribuindo para a formação, fixação e construção de conceitos é na Matemática. O ensino desta disciplina está repleto de paradigmas e preconceitos e o jogo apresenta potencialidades para a desmistificação da mesma. Apresentaremos a discussão no próximo tópico sobre jogos e o ensino de matemática.

2.1.3. A utilização de jogos no processo ensino-aprendizagem de matemática

O recurso aos jogos para o ensino de matemática vem sendo defendido, nos últimos tempos, como uma das saídas para a desmistificação desta disciplina (ARAÚJO, 2000; MACEDO, PETTY e PASSOS, 2005; BRENELLI, 2005).

A matemática é uma disciplina que possui seu valor social e intelectual muito presente, e é inegável sua importância como área do conhecimento (PAIS, 2006). Mas o ensino-aprendizagem desta disciplina ainda apresenta algumas dificuldades, ocasionando, na maioria dos casos, um processo de rejeição de alguns indivíduos que a estudam e se agrava com o passar do tempo na escola (SILVA & SCARPA, 2008). Quem nunca ouviu alguma dessas afirmações: “a matemática não é para qualquer um”, “não gosto de matemática, pois é muito difícil”, “a matemática é coisa de louco”, “não tenho um bom desempenho em matemática.”? Estes tipos de comentários refletem as “marcas” que a matemática está deixando nos alunos. Este quadro de concepções se torna difícil de ser revertido quando o fracasso nessa disciplina acontece freqüentemente.

Estas concepções apresentadas estão intimamente ligadas à forma como está sendo proposto o ensino de matemática na escola. Para Dienes (apud FAGUNDES, 1977):

> A matemática não deve ser considerada como um conjunto de técnicas, embora tais técnicas sejam claramente essenciais para a sua utilização efetiva. Ela deve ser vista antes como uma estrutura de relações. Uma proposição matemática é relativa a alguma conexão dentro da estrutura; para exprimir tal conexão temos que usar um simbolismo que é uma espécie de linguagem inventada para comunicar partes da estrutura de uma pessoa para a outra[8].

Em vista desta concepção de Dienes, os pesquisadores em matemática identificaram que é um equivoco pensar que ensinar matemática consiste em apenas "transmissão" dos seus conteúdos para os alunos. Dessa forma, outro paradigma de aprendizagem foi formado, onde prevalece a idéia de que o ensino deve despertar o interesse do aluno. A partir dessa mudança de quadro, os materiais pedagógicos ganharam espaço na sala de aula, tendo em vista que estes mudam a relação entre professor, o aluno e o conhecimento. Logo, o aluno passa a ser protagonista de sua aprendizagem e o professor, um mediador que gera situações estimuladoras e eficazes (MORATORI, 2008).

É a partir desta explanação que inserimos o jogo pedagógico como ferramenta significativa para a aprendizagem de conteúdos de matemática, além de, também, favorecer o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático e algumas habilidades (lógica, concentração, memória, raciocínio rápido, percepção de formas e tamanho, etc.).

Para ratificar as idéias lançadas acima, recorremos a D'Ambrósio (1989), o qual afirma que:

> Dentre as propostas para tornar a aprendizagem da matemática mais efetiva e prazerosa, uma é a do uso de jogos no seu ensino, por se considerar que, no processo de desenvolver estratégias de jogo, o aluno envolve-se com o levantamento de hipóteses e conjeturas, aspecto fundamental do desenvolvimento do pensamento científico, inclusive matemático. (D' AMBRÓSIO, 1989, p.18)

---

8 Esta citação não possui o número da página por se referir a um texto publicado em formato HTML. Disponível em: http://mathematikos.psico.ufrgs.br/im/mat01038051/materiais_manip.htm. Acessado em: 04.12.2008.

Citamos anteriormente a inserção do jogo pedagógico no ensino de matemática. Logo, para um jogo ser caracterizado *pedagógico,* levamos em consideração os estudos de Menezes (1996), afirmando que:

> O que caracteriza o jogo pedagógico é sua finalidade básica, ou seja, a aprendizagem. O professor pode, então, lançar mão do mecanismo da intervenção pedagógica, para dirigir essa utilização do jogo junto aos alunos, com o objetivo de buscar uma minimização das dificuldades dos alunos, tanto quanto à participação dos mesmos no jogo, quanto à aprendizagem dos conteúdos a eles relacionados, bem como orientá-los para o estudo dos conteúdos ministrados (MENEZES, 1996, p.52).

Portanto, assim como esta autora e Azevedo (1993), acreditamos que existe a necessidade de uma reflexão sobre uma didática que se compatibilize com a utilização do jogo no ensino para ajudar no processo de formação de conceitos matemáticos. Segundo esta última, de fato, os jogos e os materiais pedagógicos exercem uma influência benéfica e positiva na construção de conceitos em matemática, mas demanda uma organização anterior.

Esse procedimento de organização/planejamento das atividades com jogos são muito importantes. Destacamos essa importância, pois a atividades com jogos proporciona um momento bastante descontraído, que os alunos podem a vir a entender, ou confundir, que a atividade proposta não tenha um fim ou um objetivo específico, que é a aprendizagem. Esse pensamento contradiz a prática educativa com jogos, pois acreditamos no potencial do jogo não apenas como lúdico, mas, também, o seu potencial didático. Antunes (1998) expressa essa atenção que deve existir em uma ação didática com jogos, afirmando que:

> [...] jamais pense em usar jogos pedagógicos sem um rigoroso e cuidadoso planejamento, marcado por etapas nítidas e que efetivamente acompanhem o progresso dos alunos, e jamais avalie sua qualidade de professor pela quantidade de jogos que emprega, e sim pela qualidade dos jogos que se preocupou em pesquisar e selecionar (ANTUNES, 1998, p. 37).

Reportamo-nos a Menezes (1996), para também reforçarmos a importância do jogo como recurso para o ensino de matemática, que complementa nossa visão da utilização desse material. Ela afirma que:

> [...] o jogo adquire o caráter de material de ensino-aprendizagem; se a criança é colocada em situações em que, ao brincar, apreende a estrutura lógica do material, então, pode ser levada a apreender, também, dessa maneira, a estrutura matemática presente. Assim, cabe ao professor o papel de organizar a ação educativa, para que ela seja auto-estruturante do aluno. O jogo passa a ser, assim uma situação-problema significativa para o aluno e que visa à construção de novos significados matemáticos (MENEZES, 1996, p. 70).

É nessa perspectiva que acreditamos que os jogos possam a vir desenvolver nos alunos um interesse em aprender conteúdos matemáticos, pois eles podem vir a contribuir para construção de relações lógicas, através do exercício do raciocínio, e também, desenvolver a consciência da auto-avaliação, questionando seus erros e acertos (DRUZIAN, 2007).

A partir das justificativas apresentadas, acreditamos ter deixado clara a nossa escolha de utilização do jogo no ensino da matemática. Desenvolvemos um jogo para servir de eixo para nossa intervenção e o mesmo é estruturado no Geoplano.

O Geoplano está incluído no contexto do material de manipulação, compondo o corpo dos recursos didáticos. Sendo material manipulativo, presta-se também a atividades de jogos, servindo de tabuleiro; no nosso caso, o tabuleiro do jogo *DISTÂNCIA EM BATALHA*. Assim, o Geoplano também pode ser considerado parte de um jogo pedagógico.

Apresentaremos, no tópico que se segue, uma especificação do Geoplano e algumas potencialidades da utilização dele para o ensino de matemática.

2.1.4. As potencialidades de atividades e jogos no Geoplano

O Geoplano é um material desenvolvido pelo Doutor em Matemática Caleb Gattegno (1911-1988), do qual uma foto é mostrada na figura 01. Este pesquisador possui uma vasta produção e desenvolveu trabalhos multidisciplinares, criando materiais pedagógicos para o ensino da leitura, da língua estrangeira e da matemática (SILVA & MENEZES, 2008). Dentre estes últimos, encontra-se este material que serve de tabuleiro para o jogo *DISTÂNCIA EM BATALHA*.

O Geoplano é produzido, normalmente, com uma base quadrada de madeira e pregos, estes são distribuídos na madeira, formando uma malha que pode ser de diversas texturas (Figura 02)[9]. Nestas malhas utilizam-se elásticos pra desenhar as figuras geométricas.

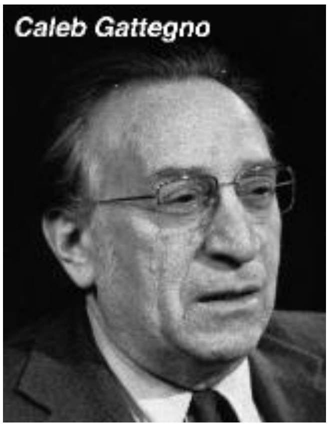


Figura 01: Caleb Gattegno (1911-1988)

Figura 02: Geoplanos Comuns

Uma defesa da utilização desse material apresentado é expressa num texto de Serrazina & Matos (1988), no qual argumentam que:

> Uma das grandes vantagens do Geoplano é a mobilidade, o que faz com que os alunos se habituem a ver figuras em diversas posições. Outra das vantagens específicas do Geoplano e que, ao contrário de uma folha de papel é um aparelho dinâmico, permitindo 'desenhar' e 'apagar' facilmente e possibilitando a aferição rápida de conjecturas (SERRAZINA & MATOS, 1988, p.10).

Além das vantagens apresentadas anteriormente, o Geoplano permite desenvolver atividades tanto voltadas para o ensino fundamental, quanto para o nível médio. No primeiro, são conhecidas atividades em geometria plana, que dizem respeito ao cálculo de áreas, verificação de propriedades e dedução de determinadas fórmulas, entre outros conteúdos (KNIJNIK, BASSO E KLÜSENER, 1995). No ensino médio, no contexto da Geometria Analítica, o Geoplano, com uma adaptação necessária, isto é, um esboço do plano cartesiano (Figura 03), pode vir a ajudar o aluno a se familiarizar com a idéia de localização de pontos, pares ordenados, deslocamento de eixo, entre outros.

---

[9] Figura disponível em: http://luribas.pbwiki.com/f/geoplano%203.jpg. Acessado em: 04.08.2008.

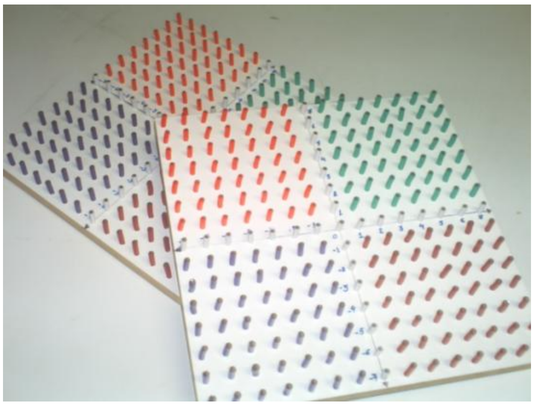


Figura 03: Geoplano com eixos ordenados

Dessa forma, a partir da estrutura citada acima, é possível elaborar e desenvolver várias atividades referentes ao plano cartesiano, envolvendo conteúdos e conceitos de matemática; no nosso caso, será explorado o conteúdo *Distância entre dois pontos*, que será mais abordado no tópico referente ao campo conceitual desse conteúdo.

A seguir, faremos uma descrição do jogo Distância em Batalha.

2.1.5. O jogo: *DISTÂNCIA EM BATALHA*

O jogo é direcionado para alunos do 3º ano do ensino médio, pois o mesmo foi idealizado para ensinar o conteúdo de distância entre dois pontos.

Sugerimos que a quantidade de participantes por jogada seja no mínimo dois e no máximo quatro.

Segue a estrutura do jogo:

- Geoplano de malha quadrangular (no mínimo com 169 pinos) com esboço do plano cartesiano que servirá de tabuleiro para o jogo[10];

- Dois dados diferenciados (cor ou tamanho);

[10] Ver Figura 03 já apresentada.

- 15 fichas de etil vinil acetato (E.V.A) para cada participante (uma cor que represente cada participante);

- Uma folha de papel para cada participante que servirá de placar, onde os jogadores realizam as anotações que julgam mais relevantes.

- 45 cartas (Apêndice I) com as ações que devem ser realizadas pelos participantes. Cada grupo de fichas tem os seguintes comandos:

Carta 01: 02 – Passar a vez;

Carta 02: 06 – Elimine uma ficha do seu oponente – 10 pontos

Carta 03: 02 – Ponha uma ficha sua na origem do plano cartesiano - caso haja uma ficha do seu oponente no local, você irá substituí-la pela sua e ainda adquire 5 pontos. Se a ficha que estiver na origem for sua, você terá a oportunidade de retirar outra carta.

Carta 04: 03 – Escolha uma ficha do seu oponente e informe suas coordenadas - 5 pontos.

Carta 05: 03 – O oponente irá escolher uma ficha para que você possa fornecer suas coordenadas – 5 pontos.

Carta 06: 03 – Escolha uma de suas fichas para que seu oponente possa eliminá-la – 5 pontos para o oponente (caso seja mais de dois participantes, o oponente que eliminará o ponto será o da vez seguinte).

Carta 07: 05 – Jogue os dados novamente e ponha outra ficha sua no Geoplano.

Carta 08: 03 – Informe a distância da origem do plano cartesiano até uma ficha do seu oponente que será eliminada – 10 pontos.

Carta 09: 03 – Informe o maior valor da menor distância entre duas fichas postas no tabuleiro – 10 pontos.

Carta 10: 03 – O seu oponente irá escolher duas fichas quaisquer no tabuleiro para que você forneça a menor distância entre elas. Caso você acerte o valor ganha 10 pontos; caso erre, o oponente ganha 05.

Carta 11: 04 – Escolha três fichas e calcule o perímetro do triângulo formado por elas – 10 pontos.

Carta 12: 04 – Tente localizar um triângulo retângulo no tabuleiro formado por três fichas e calcule a área da figura. Se não houver ou não localizar, deve passar a vez – 15 pontos o acerto.

Carta 13: 04 – Calcule a área de um triângulo retângulo cujos vértices você escolhe. Caso não haja um triângulo retângulo no tabuleiro, coloque uma nova ficha nele de modo a obter um e calcule sua área – 20 pontos.

Objetivos:

Eliminar todas as fichas de E. V. A. do(s) seu(s) oponente(s) ou acumular 30 pontos.

Regras:

- O primeiro a jogar é determinado pelos participantes.

Sugestão: lança os dados e quem obter maior número inicia o jogo. Caso tenha ocorrido empate, lançam-se os dados até obter um vencedor.

- O jogo se alterna entre os participantes.

1º momento: Distribuição das fichas no tabuleiro.

- Determina, inicialmente, qual dos dados representará o sinal (números pares sinal positivo e números impares o negativo).
- Jogam-se os dados duas vezes para obter as coordenadas (X,Y) do ponto. A primeira jogada para o valor X (abscissa) e a segunda para o Y (ordenada). Caso ao lançar os dados os números obtidos neles forem iguais, a coordenada obtida será nula. Em seguida represente o ponto, através da ficha de E.V.A. no Geoplano, repetindo esse movimento alternadamente entre os participantes até que distribuam 05 das 15 fichas.
- Caso uma das jogadas coincida com uma peça já posta do seu oponente no Geoplano, você poderá eliminar a respectiva ficha dele

colocando a sua no lugar e marcar 05 pontos no seu placar. Caso uma das jogadas coincida com uma ficha já posta sua, dará o direito de realizar outra jogada até encontrar outro ponto diferente do seu já marcado.

Estas regras são válidas durante todo o jogo.

2º momento: Dinâmica do jogo com as cartas.

- Depois das fichas distribuídas inicia-se a dinâmica para alcance dos objetivos. O primeiro participante retirará uma carta do monte, este será previamente embaralhado, e irá lê-la em voz alta para que o(s) oponente(s) fique(m) ciente(s) do comando que consta na carta.

- Caso o comando da carta for de eliminar ficha(s), deve-se, antes de eliminar, fornecer o valor numérico da menor distância entre qualquer uma de suas fichas e de qualquer uma das do seu oponente.

- Se houver erro no cálculo da menor distância, o jogador da vez não marca ponto e passa a vez para o oponente.

- Caso as cartas findem antes do alcance dos objetivos é necessário que as embaralhem novamente reiniciando o monte de cartas.

As habilidades mentais que podemos mobilizar no jogo são: Direção, sentido, percepção, elaboração de estratégia de vitória.

Entre os conteúdos matemáticos envolvidos no jogo destacam-se: Contagem, reta numerada com números inteiros, plano cartesiano, Teorema de Pitágoras, cálculo de distância entre dois pontos, possibilidades, localização de pontos no plano.

Esse jogo foi apresentado ao grupo de pesquisa do LACAPE (já mencionado). Realizamos as modificações sugeridas e aplicamos para os alunos do Curso de Mestrado pertencentes ao programa (PPGEC)[11] que esta dissertação é direcionada. Só após estas apresentações é que o jogo serviu de eixo para desenvolvimento da intervenção.

---

[11] Programa de Pós-graduação em Ensino das Ciências – UFRPE.

2.2. CONTEXTUALIZAÇÃO

A contextualização é outro elemento a que recorremos para compor a base teórica de sustentação dessa pesquisa. Sua importância no processo educacional atual é bastante relevante, pois, juntamente com a interdisciplinaridade, compõe um eixo de orientação proposto pelos *Parâmetros Curriculares Nacional para o Ensino Médio* (PCNEM).

Para obter uma aprendizagem eficaz de um determinado conceito, recursos e metodologias são utilizados freqüentemente a favor de uma efetiva transposição didática. Essa preocupação em transformar o conhecimento em conhecimento a ser ensinado está sendo bastante estudada ultimamente e possui como representante principal Y. Chevallard (1991), cuja investigação se direciona a explorar, entender e sistematizar esse processo complexo que o conhecimento percorre desde sua produção até sua inserção dentro da sala de aula.

Para o alcance dessa efetiva transposição didática, o educador pode recorrer à contextualização. É a partir dessa perspectiva didática, onde o aluno deixa de ser um ser passivo no seu processo de aprendizagem para agir efetivamente, que o processo de construção ocorrerá. Dessa forma, o aluno será mobilizado e irá perceber sua relação recíproca com o objeto do conhecimento apresentado (BRASIL, 2000). Defendendo, da mesma forma, a potencialidade da utilização de uma prática baseada na contextualização, Lopes (2002), ao investigar os PCNEM, argumenta que:

> A aprendizagem situada (contextualizada) é associada, nos PCNEM, à preocupação em retirar o aluno da condição de espectador passivo, em produzir uma aprendizagem significativa e em desenvolver o conhecimento espontâneo em direção ao conhecimento abstrato. Com constantes referências a Vigotsky e a Piaget, a contextualização nesses momentos aproxima-se mais da valorização dos saberes prévios dos alunos. Nesse caso, contextualizar é, sobretudo, não entender o aluno como tábula rasa (BRASIL, 1999, v. 1 a 4) (LOPES, 2002, p. 391).

Ainda no campo da transposição didática, em específico a transposição didática da matemática, que é a nossa área de atuação, percebemos que existe uma diferenciação entre o trabalho do matemático e o trabalho do professor. Para o primeiro não existe preocupação em divulgar como o seu trabalho foi realizado, quais suas dificuldades e qual(is) caminho(s) ele percorreu para alcançar seus objetivos, isto é, apresenta o conhecimento de forma descontextualizada. Cabe então ao professor, através da contextualização, re-contextualizar esse conhecimento procurando proporcionar situações que possibilitem promover a aferição de sentido ao conceito que será ensinado. Daí a importância da contextualização no processo de ensino-aprendizagem.

E o que vem a ser contextualização? O que significa contexto? Em nossa perspectiva, o contexto significa procurar se reportar a uma situação que anteriormente existiu, que perdeu parte substancial do seu significado, para ancorar uma referência. Dessa forma, notamos assim como Mello (2009) que *contextualização* é o ancorar do conhecimento ao texto original do qual foi extraído ou a qualquer outro contexto que lhe empresta significado.

Os PCNEM apresentam algumas representações sobre o que é contextualização de conteúdos matemáticos. Notamos que as concepções presentes nos documentos oficiais não são as que normalmente encontramos nos discursos dos professores. Percebemos, assim como em Vasconcelos & Rêgo (2007), que a contextualização está restrita apenas aos aspectos utilitários dos conteúdos matemáticos, isto é, aquilo que pode estar diretamente relacionado com o cotidiano do aluno. Esta perspectiva reducionista de contextualização esbarra em alguns conteúdos que não fazem parte do dia-a-dia do aluno. Dessa forma, indagamos que se não há possibilidade de uma construção significativa desses conteúdos pertencentes apenas às questões internas da própria matemática.

A partir dessas reflexões apresentaremos uma explanação do que vem a ser entendido enquanto contextualização pertencente nos PCNEM. Sentimos a necessidade de, antes de apresentar algumas colocações sobre contextualização, oferecer algumas categorizações didáticas sobre o que é o contexto. Segundo Mello (2009), o contexto pode ser classificado em três grandes categorias: a da vida pessoal, o dia-a-dia do aluno; a da sociedade é o mundo em que ele vive; e o do ato da descoberta científica, que pode ser reproduzido de alguma forma. Essas categorias também são compartilhadas por Lopes (2002). Esses três elementos estão presentes na vida pessoal, social e cultural do aluno. Quando a escola realiza um diálogo entre as três grandes categorias do contexto, o conhecimento a ser aprendido se tornará mais significativo para o aluno. Para o alcance desse objetivo pela escola, a contextualização mobiliza algumas alternativas didáticas. Dentre elas temos, a partir das idéias de Mello (2009):

> - Contextualizar o conhecimento nas questões presentes na vida pessoal do aluno, vivenciar intelectual e afetivamente a relevância do conhecimento para compreender e resolver seus próprios problemas, tomar decisões que afetam a qualidade de sua vida, construir uma visão de mundo e um projeto com identidade própria;
> - Buscar o significado do conhecimento a partir de contextos do mundo ou da sociedade em geral é levar o aluno a compreender a relevância e aplicar o conhecimento para entender os fatos, tendências, fenômenos, processos, que o cercam;
> - Contextualizar o conhecimento no próprio processo de sua produção é criar condições para que ele experimente a curiosidade e o encantamento da descoberta e a satisfação de construir o conhecimento com autonomia. (MELLO, 2009, p.10)

Esta visão apresentada anteriormente é compartilhada e sintetizada por Vasconcelos e Rêgo (2007), que afirmam:

> Ao verificar as representações sobre a contextualização de conteúdos matemáticos, preconizada nos PCN, verificamos que esta se refere a aspectos tais como: a relação entre sujeito e objeto; o papel do aluno como participante e não como sujeito passivo; o ato de compreender, inventar, reconstruir; a relação com as áreas e aspectos presentes na vida social, pessoal e cultural do aluno, entre outros (VASCONCELOS & RÊGO, 2007, p.01).

Portanto, acreditamos que exista uma quantidade muito vasta de contextos que possam ser associados aos conteúdos curriculares, pois não há conteúdos que não possam vir a ser associados ao meio físico, social e psíquico do aluno. Essa conclusão se justifica a partir das idéias da transposição didática, pois notamos que os conteúdos curriculares são recortes representativos das heranças sociais, científicas e intelectuais de uma sociedade em geral.

Na atividade de intervenção, que será apresentada mais à frente, utilizamos a contextualização a partir da terceira categoria, 'o ato da descoberta científica, que pode ser reproduzido de alguma forma', já mostrada anteriormente através da categorização do contexto segundo MELLO (2009), pois acreditamos ser esta a menos utilizada entre as alternativas de trabalhar um contexto.

Nós nos remetermos, a partir deste momento, a uma discussão acerca das teorias de aprendizagem que orientaram este estudo.

2.3. TEORIAS DE APRENDIZAGEM

Uma das dificuldades que constatamos nos alunos em estudar conceitos do currículo de matemática do 3º ano do ensino médio, em especifico geometria analítica, é justamente a falta de significação nos trabalhos dos professores (SANTOS, 2008). Outra dificuldade apontada por Paiva de Figueiredo (2005), é que o problema no ensino médio em matemática esta relacionado aos fracassos sucessivos que o ensino dessa disciplina vem trazendo desde a educação infantil, perpassando por todo ensino fundamental. Causando dessa forma, uma “bola de neve”, difícil de ser desmanchada quando o aluno chega às séries finais do ensino básico.

Para esta autora, o fracasso na matemática é concebido, assim como acreditamos, através da forma de como está tradicionalmente pautado o ensino dessa disciplina, isto é, o ensino de matemática a partir e exclusivamente “de manipulações de técnicas operatórias, resolução de exercícios, que são rapidamente esquecidos, assim como a memorização de fórmulas, tabuada, regras e propriedades” (PAIVA DE FIGUEIREDO, 2005, p. 1). Compartilhando desta idéia, como o ensino de matemática tradicional foi aqui colocado, César (2001) aponta que:

> [...] muitos alunos sucumbiram ao desânimo e acabaram convencidos de que não gostavam de aprender. E, no que se refere à Matemática, muitos deles acreditaram mesmo que não eram suficientemente dotados para aprender, construindo-se uma representação social que a encara como impenetrável para muitos. Assim, inúmeros projetos de vida se viram truncados devido à crença de muitos alunos na sua inaptidão para aprenderem Matemática e à exigência da frequência desta disciplina para uma vasta gama de opções escolares e profissionais (CÉSAR, 2001, p. 105).

Essas e outras dificuldades provêm, em primeira estância, de um aspecto que consiste na não reflexão, por parte dos docentes, de como se dá à aprendizagem de conceitos nos indivíduos, e de que forma agir quando existe essa reflexão. Segundo Fiorentini (1995), há uma grande preocupação na mudança desse quadro apresentado anteriormente. Várias perspectivas e concepções sobre o ensino da matemática vêm sendo apresentadas. Dentre elas, percebemos as correntes mais tradicionais que tratam apenas dos aspectos formais da matemática. Outros concebem essa disciplina como o emprego de técnicas de ensino para controlar o processo ensino-aprendizagem, objetivando reduzir reprovações. Existem posições, também, que relacionam a matemática com o cotidiano do aluno e aquelas que têm como perspectiva o ensino de matemática a serviço da formação da cidadania (CÉSAR, 2001).

Como percebemos, existem concepções sobre o ensino de matemática. Os docentes apresentam uma ou várias dessas concepções. Essa colocação nos permite observar quão complexo é descrever os diferentes modos de ensinar matemática. Segundo Fiorentini (1995) isso não é simples, pois de fato:

> Por trás de cada modo de ensinar, esconde-se uma particular concepção de aprendizagem, de ensino, de Matemática de Educação. O modo de ensinar sofre influência também dos valores e das finalidades que o professor atribui ao ensino da matemática, da forma como concebe a relação professor-aluno e além disso, da visão que tem de mundo, de sociedade e de homem (idem, p.4).

Apresentaremos, nos quadros 6 (1/2) e 6 (2/2), seis tendências pedagógicas no ensino de matemática existentes, cada uma com mais força do que as anteriores, no Brasil. Essa explanação é feita para situarmos que perspectiva estamos levando em consideração para a estruturação de nossa pesquisa. Em cada uma das tendências estão alguns aspectos que consideramos pertinentes, como: a concepção de matemática, o processo de aquisição/produção/descoberta do conhecimento matemático, as finalidades e valores atribuídos ao ensino de matemática, e a concepção de ensino e aprendizagem subjacente a cada uma delas.

Após termos apresentado tais perspectivas, iremos focar a partir de agora apenas a perspectiva construtivista de educação, pois é a partir dos pressupostos dessa concepção que elaboramos nossas ações, uma vez que a pesquisa nessa área visa mais o processo de que o produto, que é a aprendizagem. Busca entender quais os processos que se encadeiam para alcance do desenvolvimento do sujeito.

Pesquisadores com Piaget e Vygotsky, contribuíram muito para o desenvolvimento de estudos nessa pespectiva de aprendizagem, e estes serviram de base para o desenvolvimento da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, que serviu de base teórica para nossa investigação. Antes de partirmos para as contribuições dos precursores da teoria de Vergnaud, apresentaremos duas pespectivas de como de dá a formação de conceitos nos sujeitos, uma vez que é a partir de uma delas que a concepção das teorias citadas acima são desenvolvidas.

Quadro 06 (1/2)

TENDÊNCIAS PEDAGÓGICAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA NO BRASIL BASEADO NAS IDÉIAS DE FIORENTINI (1995)

Tendências pedagógicas	Concepção de matemática	Processo de obtenção/produção/descoberta do conhecimento matemático	Finalidades e valores atribuídos ao ensino de matemática	Concepção de ensino	Concepção de aprendizagem
Formalista clássica	Matemática clássica: modelo euclidiano e concepção platônica. Concepção Inatista.	Visão estática, a -histórica e dogmática.	O desenvolvimento do “espírito”, da “disciplina mental” e do pensamento lógico-dedutivo.	Baseado no livro didático e na forma de expor o conteúdo pelo professor. Sua ação pauta em transmitir o conhecimento de forma sistemática e organizada hierarquicamente.	Passividade do aluno. Memorização e repetição precisa dos procedimentos e regras apresentados pelo professor e o livro.
Empírico-ativista	Negação a posição da escola clássica tradicional. O importante é “aprender a aprender”. Concepção Empirista.	O conhecimento matemático existe no mundo físico e ele é extraído pelo homem através do intelecto.	O ensino deve ser direcionado para o desenvolvimento psicobiológico do aluno. Matemática aplicada.	Através da ação, manipulação e experimentação do(s) objeto(s).	Aluno um ser “ativo”. Surgimento do *associalismo.* O aluno aprende através da associação do mundo empírico como sua abstração.
Formalista moderna	Movimento da Matemática Moderna. Retorno ao formalismo matemático a partir de um novo fundamento: a álgebra e a linguagem da matemática contemporânea.	A matemática por ela mesma auto-suficiente. Ênfase no rigor matemático e justificar as transformações algébricas através das propriedades estruturais.	A apreensão da estrutura subjacente. Previa formar o especialista matemático.	Novamente centrado no autoritarismo do professor. Similar ao formalista clássico.	Aluno volta a ser um sujeito passivo no seu processo de aprendizagem. Para que ele aprenda é necessário que reproduza a linguagem e o raciocínio lógico que o professor apresentou.

Quadro 06 (1/2)

TENDÊNCIAS PEDAGÓGICAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA NO BRASIL BASEADO NAS IDÉIAS DE FIORENTINI (1995)

Tendências pedagógicas	Concepção de matemática	Processo de obtenção/produção/ descoberta do conhecimento matemático	Finalidades e valores atribuídos ao ensino de matemática	Concepção de ensino	Concepção de aprendizagem
Tecnicista	Baseada no funcionalismo.	Procura reduzir a matemática a um conjunto de técnicas regras e algoritmos.	Preparar e integrar o individuo para a sociedade.	“Instrução programada”.	Fundamentada no behaviorismo, que consiste em mudanças comportamentais através de estímulos. A aprendizagem consiste no desenvolvimento de habilidades e atitudes e na fixação de conceitos e princípios.
Construtivista	A matemática é um construto que surge a partir da relação dinâmica do homem como o meio que o circunda.	Constitui-se a partir da ação iterativa/reflexiva do sujeito como o objeto.	A matemática, através dos conteúdos, desenvolve papel importante, mas não indispensável, para a construção e desenvolvimento das estruturas básicas da inteligência.	Deve-se levar a criança a descobrir as estruturas e o modo de como elas se entrelaçam. Esse objetivo será alcançado quando propuser situações que colocarão as crianças em atividade que envolvam essas estruturas.	Preocupa-se mais com o processo do que com o produto.
socioetnoculturalista	Etnomatemática – a matemática adquire significação dentro de um grupo social específico.	O conhecimento matemático é um saber prático, não-universal e dinâmico, produzido histórico-culturalmente nas diferentes práticas sociais, podendo aparecer sistematizado ou não.		Baseado em problemas da realidade.	A aprendizagem é alcançada a partir da compreensão / sistematização do modo de pensar e de saber do aluno.

Percebemos que em muitos casos, atualmente, as dificuldades dos alunos em aprender um determinado conceito estão hoje direcionadas para a parte afetiva ou problemas psicológicos de origem familiar ou de relação social. Para minimizar essas dificuldades, os pais e a escola passam a agir como apenas uma análise psicológica do comportamento ou até medicamentos para crianças classificadas como “hiperativas”, por exemplo, é a solução. Não se percebe que um olhar mais atento na formação do conceito do indivíduo; deve-se verificar, antes de qualquer procedimento “drástico” ou irrelevante, se os problemas de aprendizagem dos alunos estão relacionados a uma base conceitual mal formulada (PAIS, 2001), isto é, se o aluno possui algum obstáculo epistemológico (BACHELARD, 1996), ou a transposição didática (CHEVALLARD, 1991) do conceito e a negociação do contrato didático (BROUSSEAU, 1986) com o aluno não está apresentando significação para ele. É a partir dessas reflexões que partiremos para estruturarmos uma discussão de como se dá à formação do conceito no indivíduo e quais as contribuições para uma metodologia da prática pedagógica na sala de aula.

Cabe aqui um questionamento que costuma ser colocado por autores neste contexto, com uma reflexão mais atenta em torno da aprendizagem de conceitos dos alunos, que pode ser expresso na questão:

Será que os professores, com o foco na construção de conceitos dos alunos, desenvolvem uma prática de sala de aula favorável para esse objetivo?

Embora a questão não faça parte de nossos objetivos, a aprendizagem de conceitos está no nosso foco. Assim, serão apresentadas algumas idéias acerca de como se forma um conceito no indivíduo, através de estudos embasados na *Epistemologia Genética* de Piaget, na *Perspectiva Sócio-histórica* de Vygotsky e na *Teoria dos Campos Conceituais* de Vergnaud.

Dentro dessa discussão nos reportamos a alguns autores que tratam do assunto como Da Rocha Falcão (1996) em “*Elementos para uma abordagem psicológica do desenvolvimento de conceitos científicos e matemáticos”*, onde ele realiza um resgate filosófico do assunto, além de apresentar o que as teorias de Piaget, Vygotsky e Vergnaud contribuem para a aprendizagem de conceitos; e o artigo de

Lima, Araújo & Albuquerque (2008)[12] intitulado *"Aprendizagem de conceitos: O processo de formação de conceitos nas Teorias de Piaget, Vygotsky e Vergnaud"*, também apresenta algumas discussões relativas a esse encontro de três personalidades significativas, que só vieram fomentar a discussão acerca da formação de conceitos.

Apresentaremos em seguida estudo fenomenológico acerca da formação de conceitos um tanto relevante para impulsionar os discursos que os três teóricos citados apresentam.

2.3.1. A perspectiva taxonômica e a funcional quanto à abordagem da formação de conceitos.

A discussão sobre a formação do conceito pelo indivíduo data do período aristotélico. A psicologia, então, vem fornecendo estudos acerca dessa antiga inquietação. Desde W. Wundt (1832-1920), com sua primeira defesa para os processos sensos-perceptivos e seguido de estudos sobre as representações internas, perpassando por discussões comportamentalistas embasadas por I. P. Pavlov (1849-1936) e E. Thorndike (1874-1949), que culminam com os estudos behavioristas de J. B. Watson (1878-1958) e o surgimento da Gestalt se contrapondo as idéias empiristas, até as contribuições das teorias de J. Piaget (1896-1980) e L. S. Vygotsky (1896-1934), essas discussões só ganharam força com o passar do tempo (DA ROCHA FALCÃO, 1996).

Dessa forma, existem duas perspectivas básicas para a indagação acerca da formação/abordagem do conceito: a *taxonômica* e a *funcional*, segundo a perspectiva filosófica de E. Cassier (1977, apud DA ROCHA FALCÃO, 1996, p.142). A primeira, denominada como *clássica*, possui um caráter conceitual muito comum, pois os conceitos são constituídos a partir do mundo empírico do qual se extrai, dos objetos, traços comuns desses para culminar em uma forma conceitual condensada,

---

[12] O referido texto foi trabalhado na disciplina Formação de conceitos, ministrada pela professora Drª Mônica Lins Lessa, no primeiro semestre de 2008. Esse artigo até o momento ainda não tinha sido publicado, mas apresenta um referencial significativo para a construção dessa base teórica.

isto é, todo o conhecimento é fornecido através da percepção e leitura dos objetos dados. Tal paradigma apresenta alguns entraves. Por exemplo: em geometria (plana ou analítica), como seriam explicados alguns conceitos básicos como ponto, reta, plano, através dessa perspectiva? Como encontrar uma relação com o mundo exógeno para tais conceitos?

Com isso, concluímos que um foco direcionado apenas para o conceito apenas como substância, característico da perspectiva taxonômica, não dá conta de todo o processo de constituição do conceito. Porém, uma abordagem mais relacional com a essência dos conceitos, na qual aceite a multiplicidade das coisas, isto é, considera-se o mundo empírico e que através dele exista uma atividade intelectual construtiva para estabelecer então relações, tornam-se mais abrangente o processo de constituição de conceitos. Esse tipo de perspectiva é denominado como *funcional*. Da Rocha Falcão (1996) explica um pouco sobre essa perspectiva inferindo que:

> Diversamente da perspectiva taxonômica, para a qual o conceito seria essencialmente um índice de caráter exógeno, a perspectiva ilustrada acima leva em conta a atividade construtiva do sujeito sobre os objetos do mundo real com aspecto central na formação do conceito (Idem, p. 147).

É nessa perspectiva que os conteúdos, de geometria analítica, por exemplo, deveriam ser estudados na sala de aula, apresentando um caráter de relação contextualizada (através da relação com a economia para o conteúdo citado, por exemplo), mas levando em consideração a perspectiva de construção relacional desses conceitos com outros dento da própria matemática (VERGNAUD, 1996a), pois para que se possa desenvolver estudos para aprendizagem de conceito nessa área, deve-se mobilizar vários outros, com conceitos algébricos e aritméticos, isto é, transitar entre os vários quadros[13] da matemática (DOUADY, 1986), apresentando então uma rede complexa (conceito-relação) e não linear (conceito-substância) da constituição de um conceito.

Dessa forma, as contribuições das teorias de Piaget, Vygotsky e Vergnaud fornecem uma base sólida para tratarmos da construção do conceito pelos indivíduos, as duas primeiras mais gerais e a última fomentadora de estudos direcionados para didática das disciplinas em específico.

---

[13] O jogo de quadros e a dialética ferramenta-objeto, estudada por Douady, serão apresentadas mais a frente.

2.3.2. As teorias de Piaget e Vygotsky: Contribuições para a formação de conceitos

Como já apresentamos qual concepção sobre a formação de conceitos que acreditamos, apresentaremos em seguida as contribuições de Piaget e Vygotsky, por estarem relacionados a Vergnaud, teórico que utilizamos para a nossa investigação. Estes dois autores defendem essa relação interacionista entre o sujeito e o objeto do conhecimento em duas perspectivas teóricas, que possuem suas diferenças, mas seus pontos de convergência são bastante significativos para este estudo.

2.3.2.1. A contribuição piagetiana

Uma das principais idéias da teoria piagetiana é a defesa do processo de adaptação dos sujeitos. Esse processo, segundo Ferreiro (2001) é que determina a inteligência.

Piaget defende a idéia que a construção do conhecimento se dá através da interação com o meio (relação sujeito-objeto) pois, a partir do momento que o sujeito se encontra com situações diferenciadas, estas o levam a construir hipóteses, através dos mecanismos de assimilação e acomodação (LIMA, ARAÚJO & ALBUQUERQUE, 2008). O primeiro designa a ação do sujeito sobre o objeto, enquanto o segundo é antagônico, porém complementar, isto é, a acomodação indica a modificação que o sujeito experimenta em virtude do objeto.

O resultado do interjogo entre os mecanismos de assimilação e acomodação, que não é uma ação simples de diferenciação, é chamado por Piaget de adaptação (FERREIRO, 2001, p.102). Portanto, o núcleo do desenvolvimento cognitivo é a busca constante do sujeito por adaptação, que segue estágios que devem ser levados em consideração, pois nesses o sujeito raciocina de maneiras diferenciadas, e neles os conflitos suscitados necessitam ser de naturezas diversas para que promovam seu progresso cognitivo estrutural (LIMA, ARAÚJO & ALBUQUERQUE, 2008).

Uma das dificuldades em adequar a teoria piagetiana ao estudo aqui proposto, ao conteúdo de geometria analítica em matemática, é que, embora Piaget tenha influência nas idéias de Vergnaud, ele não desenvolveu uma teoria didática escolar especificamente, como ratificam Lima, Araújo & Albuquerque:

> Em sua perspectiva teórica, o termo "conceito" está relacionado às grandes categorias que possibilitam a estruturação cognitiva. No entanto, estas não teriam quaisquer relações com os sistemas conceituais específicos de um domínio do conhecimento, e muito menos com a forma escolar (Idem, p.7).

Mas sua contribuição fornece subsídios para adequar estudos acerca da pedagogia das áreas específicas, em particular da matemática, essa tão presente no cotidiano dos indivíduos. Piaget defende a existência de dois tipos de conceitos, os cotidianos e os científicos, e aponta que exista uma continuidade entre eles. Para este teórico, o problema central do ensino da matemática é a não reciprocidade entre as estruturas operatórias espontâneas e o programa ou os métodos relativos aos domínios matemáticos ensinados (PIAGET, 1976). Portanto, a escola termina por ignorar o uso que poderia fazer do desenvolvimento cognitivo espontâneo do sujeito, explorando-o com métodos adequados, ao invés de inibi-lo como tradicionalmente acontece.

Percebemos a importância das idéias de adaptação de Piaget nos seus estudos e sua contribuição para a investigação em ensino das ciências e matemática, mas acreditamos que a verdadeira pedra angular da teoria piagetiana foi o conceito de esquemas (VERGNAUD, 1996a; 1996b; 2007), que trataremos mais à frente, na abordagem da teoria dos campos conceituais.

Outro teórico que teve uma vida curta, mas uma produção vasta, que muito contribuiu com a formação de conceitos pelos indivíduos e que possui algumas afinidades com Piaget, é Vygotsky. Uma síntese da sua teoria sobre a formação de conceitos será apresentada adiante.

2.3.2.2. A contribuição vygotskyana

Fazendo parte da mesma corrente interacionista-construtivista da qual Piaget se encontra, Vygotsky também aponta a interação recíproca entre o sujeito e o objeto como o *loco* onde desenvolvimento cognitivo dos indivíduos se constitui. Pode-se evidenciar essa idéia anterior em Molon, em sua afirmação: "[...] Ele (Vygotsky) postula que esses processos[14] dependem tanto do indivíduo e das relações que ele estabelece, como de seu meio físico e social [...]" (2003, p.46). Mas, diferentemente do teórico anterior apresentado, Vygotsky apresenta algumas sutilezas, estas decorrentes de sua biografia.

Lev Semonovich Vygotsky nasceu em 17 de novembro de 1896 e morreu em 11 de junho de 1934. Viveu a sua precoce e curta vida na Rússia em um contexto político conturbado, a Revolução Russa. Suas produções só vieram a ser conhecidas e estudadas, fora dessa região, depois da citada revolução. Essas discussões e estudos se tornaram hoje de suma importância para as ciências educacionais e psicológicas. Ele direcionou seus estudos com base no marxismo, e solidifica a idéia de que o ser humano é criado histórica e socialmente. A partir dessa premissa, ele dedicou-se a estudar o que se chama de funções psicológicas superiores ou processos mentais superiores, e desenvolveu um conceito central sobre o funcionamento psicológico, o conceito de *mediação*. "Mediação, em termos genéricos, é o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação; a relação deixa, então, de ser *direta* e passa a ser *mediada* por este elemento" (OLIVEIRA, 1997, p. 75). Isto é, o processo simples de estímulo e resposta passa a ser substituído por um mais complexo, o mediado. E este processo "novo", da relação sujeito-objeto, possui dois tipos de elementos: os instrumentos, consistindo em um processo humano, social e histórico de criação e utilização de tais instrumentos e os símbolos, que agem de como instrumentos da atividade psicológica. Utilizando tais elementos, os indivíduos transformam algumas marcas externas em processos de mediação. Este evento, Vygotsky chama de "processo de internalização" (Ibid). Este é "essencial para o desenvolvimento dos processos

---

[14] Molon se refere aos processos de desenvolvimento cognitivo quanto de aprendizagem e de desenvolvimento da consciência.

mentais superiores e evidenciam a importância das relações sócias ente os indivíduos na construção dos processos psicológicos” (Idem, p.105). O processo de internalização é estruturado a partir dos sistemas de representação da realidade, que são socialmente dados. Vygotsky aponta que é através da linguagem que todo o processo de aprendizagem irá se formar, pois ela é o sistema simbólico básico de todos os grupos humanos.

A partir dessas indagações, acreditamos que Vygotsky defende a idéia de que a interação social fornece a matéria-prima para o desenvolvimento psicológico do indivíduo. Dessa forma, o fundamento do funcionamento psicológico tipicamente humano é social e, portanto, histórico. Seguido destas discussões, Vygotsky realiza um estudo acerca do pensamento e a linguagem que os relacionam com o desenvolvimento e a aprendizagem.

Para ele, a aprendizagem está relacionada ao desenvolvimento, e destaca a existência de quatro níveis de funcionamento psicológico, que são: pseudo-conceitos, conceitos, conceitos cotidianos e conceitos científicos. A partir dessa premissa, Vygotsky afirma que a aprendizagem dos indivíduos vai sendo assim construída mediante processo de relação do sujeito com seu ambiente sócio-cultural e com o suporte de outros indivíduos mais experientes. É, então, na *zona de desenvolvimento proximal* (ZDP) que a interferência desses outros indivíduos é mais transformadora.

O conceito de ZDP é relativamente complexo, ele compreende a região de potencialidade para o aprendizado. No caso da criança, representa uma situação cognitiva em que ela só consegue desenvolver determinada tarefa psicointelectual com o auxílio de alguém mais experiente. Assim, para Vygotsky, as potencialidades do indivíduo devem ser levadas em conta durante o processo ensino-aprendizagem. Isto porque, a partir do contato com a pessoa mais experiente e com o quadro histórico-cultural, as potencialidades do aprendiz são transformadas em situações em que ativam nele esquemas processuais cognitivos ou comportamentais. Pode acontecer também de que este convívio produza no indivíduo novas potencialidades, em um processo dialético contínuo.

Portanto, notamos que Piaget e Vygotsky parecem concordar com a questão acerca de que os conceitos espontâneos (para Piaget) ou conceitos cotidianos (para

Vygotsky) e os científicos surgem de pontos diferentes, mas no final se encontram (LIMA, ARAÚJO & ALBUQUERQUE, 2008), com algumas pequenas ressalvas. Enquanto Vygotsky defende a idéia de que novos conceitos, mesmo na escola, possam ser adquiridos sempre por meio da intervenção didática de um adulto ou criança mais capaz (ou seja, intervindo na ZDP), Piaget argumenta que isso até pode acontecer, mas defende que existe uma forma de instrução extremamente produtiva: criar situações em que uma elaboração espontânea pelo sujeito, para despertá-lo e motivá-lo a compreender o problema, levando-o a construir suas relações em conexão com os conceitos espontaneamente já firmados. Ferreiro (2001) defende essa idéia de Piaget afirmando que:

> A educação – ou, de modo geral, a influência dos adultos – dificilmente pode ser invocada a título de fator único, por que ninguém ensina a uma criança que a quantidade de líquido é conservada se o passarmos de um lugar para outro, e não se ensina porque não tinha ocorrido a ninguém antes de Piaget pensar em algo tão óbvio não pudesse ser admitido pela criança (FERREIRO, 2001, p.102).

É, portanto, em Vygotsky, que a educação escolar ganha força, quando afirma que os conceitos cotidianos servem de base para estruturação e desenvolvimento dos conceitos científicos, e estes, depois de formados, deveriam se transformar em conceitos cotidianos mais elaborados; daí o papel importante da escola e da relação entre os sujeitos desse meio.

Percebemos que tanto Piaget quanto Vygotsky se interessavam por estudar teorias de formação conceitual, mas, enquanto o segundo focava principalmente o papel da linguagem e das representações simbólicas, o primeiro se reportava, freqüentemente, ao desenvolvimento das operações do pensamento e as discussões acerca das estruturas lógicas.

Vergnaud se utilizou das duas teorias acima citadas para formular a sua teoria. Este é outro teórico que tem contribuído significativamente com as investigações sobre a formação de conceitos em ciências e matemática, mas diferente dos outros dois acredita que existam problemas específicos no interior de um mesmo campo de conhecimento (VERGNAUD, 1996a, p.11), e a partir dessa primeira idéia que ele desenvolveu a Teoria dos Campos Conceituais que irá ser apresentada em seguida.

2.3.3. Gerard Vergnaud e a Teoria dos Campos Conceituais

Vergnaud é um dos fundadores da Escola Francesa de Didática da Matemática, foi discípulo de Piaget e durante 18 anos, responsável pelo Centro Nacional de Pesquisa Científica (CNRS). Após um longo caminho, especializou-se em didática da matemática. Enveredou também pelas áreas das artes e de psicologia. No campo da didática da matemática, durante os anos 60, um momento de grande movimentação da Matemática Moderna e criação dos IREM, na França, proporcionou condições institucionais para favorecer o projeto de constituir uma didática como disciplina científica, com o objetivo de estudar as condições de seu ensino. Teve participação efetiva na abertura e consolidação desse campo, desde os anos 70. Vergnaud, junto com Brousseau, foi reconhecido e homenageado pela comunidade de didatas da matemática; motivou discussões entre os matemáticos formais e os psicólogos que se interessam pela aprendizagem da matemática (VERGNAUD, 1993b).

Compartilhamos com a idéia de que a educação matemática é um processo social que tem lugar em diferentes culturas e sociedades que possuem organizações escolares diferentes com alguns pressupostos filosóficos e suas respectivas metas (MAGINA, 2008). Dentro de tais contextos, sente-se a necessidade de compreender como se dá à formação de conceito no indivíduo, em particular nos alunos que estão inseridos nestes contextos educacionais diferentes. Verifica-se que esses conceitos formais, que sofreram uma transposição didática (CHEVALLARD, 1991), não possuem, na maioria das vezes, significado para os alunos. Uma proposta de Vergnaud é repensar as condições de aprendizagem com o objetivo de que esta se torne significativa para os alunos. Nessa perspectiva, a Teoria dos Campos Conceituais oferece condições para que identifiquemos dentro dos saberes científicos e cotidianos os elementos necessários para tal aprendizagem (GRINGS et all, 2006). Essa teoria tem como aspecto relevante o destaque dado ao tratamento do saber escolar, esse situado entre o saber cotidiano e o científico. Dessa maneira, a teoria dos campos conceituais dá sentido ao saber escolar fundamentando-o nos dois saberes já citados, para que não haja o prevalecimento de um sobre o outro. Cabe então à didática o desenvolvimento de situações que possibilitem a mobilização de uma diversidade de conceitos que estão estritamente relacionados (PAIS, 2001; SOUSA e FÁVERO, 2002). Analisaremos agora alguns aspectos da teoria dos campos conceituais.

Vergnaud (1996a) defende que:

> A teoria dos campos conceituais é uma teoria cognitivista que visa fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas, nomeadamente daquelas que relevam das ciências e das técnicas (VERGNAUD, 1996a, p.155).

Entendemos como competências o repertório de ações e capacidades que o sujeito dispõe para agir em determinadas situações em prol da resolução de um problema. Temos, então, que a maioria dos nossos conhecimentos são competências, pois sempre recorremos a eles para resolvermos determinado problema. Lembramos que grande parte das competências não são explicitadas (ou explicitáveis) no momento em que elas estão em ação. Devido a esse aspecto, necessitamos de uma teoria psicológica e didática que favoreça esse entendimento (LIMA, 2007).

Para Vergnaud, segundo Moreira (2002), a psicologia e a investigação na didática das ciências e matemática sofre bastante influência pela teoria de Piaget, através da sua explanação das idéias da adaptação, produto da interrelação entre os mecanismos de assimilação e acomodação, através do conceito de Piaget de esquemas. Sua teoria é, também, bastante influenciada pela teoria vygotskyana. Percebemos essa influência a partir da importância dada às interações sociais, à linguagem e ao processo de simbolização no processo de conceitualização de um determinado campo conceitual pelos alunos. Acrescenta, ainda, que a maior dificuldade para o professor nesse processo é fornecer subsídios aos alunos, através de situações, para que eles possam desenvolver seus esquemas na ZDP. Apresentaremos então a importância dada por Vergnaud aos estudos de Piaget e Vygotsky:

> Piaget e Vygotsky se interessam os dois pelo desenvolvimento e a larga duração do desenvolvimento; suas convergências são grandes. É certo que Piaget enfatiza mais a atividade do sujeito que a cultura, porém é perfeitamente consciente do papel da cultura no desenvolvimento cognitivo da criança. Vygotsky prioriza o peso da cultura e os processos de mediação, assegurado pelo adulto, em vista a apropriação da cultura pela criança, porém ele é um dos pais da teoria da atividade: da linguagem e o simbolismo no papel essencial da mediação (VERGNAUD, 2007, p.286).

Vergnaud ainda acrescenta que:

> [...] minhas experiências como investigador em didática me permitem ver as coisas de maneira diferente a Piaget, que não se interessou pelos conhecimentos escolares, e a Vygotsky, que se bem interessou, não entrou suficientemente na análise dos conteúdos conceituais. A didática assim o faz, e esta nos leva muito longe (idem).

Notamos que a teoria dos campos conceituais considera a existência de conceitos interligados entre si, formando assim uma rede complexa de conceitos. Para que ocorra a apropriação do conhecimento conceitual, este deve emergir dentro de situações-problema. Isto por que, segundo Vergnaud (1994), a Teoria dos Campos Conceituais é uma teoria pragmática no sentido de pressupor que a aquisição do conhecimento é moldada a partir situações, problemas e ações do sujeito nessas situações. Isto é, os docentes devem fornecer situações problematizadoras, que possuem significação para o aluno e que essas tenham como objetivo fornecer potencialidades para o surgimento e aquisição do conceito e sua estrutura. A complexidade dessa teoria está relacionada com o interesse dela em entender o desenvolvimento cognitivo, que é progressivamente dominado a partir das situações propostas, através das suas formas/modos de ações para lhe dar com tais situações e o modo de representá-las eficazmente pelos símbolos e palavras, que dependem, por sua vez, do nível cognitivo do indivíduo.

Vergnaud define um ***Campo Conceitual*** como:

> [...] um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e provavelmente entrelaçados no processo de aquisição. Por exemplo, os conceitos de multiplicação, divisão, fração, razão, proporção, função linear, número racional, similaridade, espaço vetorial e análise dimensional pertencem todos a um grande campo conceitual que é o das estruturas multiplicativas (VERGNAUD, 1982, p. 40).

Dessa forma, temos que os conceitos chave da teoria dos campos conceituais são, além do conceito de campo conceitual, os conceitos de esquemas, situações e invariantes operatórios (MOREIRA, 2002). Esses elementos em conjunto, indistintamente de suas importâncias, influenciam no alcance da conceitualização do real. Essa idéia é o que diferencia a teoria de Vergnaud da teoria de Piaget, pois enquanto este se interessa pelo desenvolvimento das estruturas lógicas gerais do pensamento, aquele direciona seus estudos na psicologia do desenvolvimento dos conceitos em específico. Compartilhamos então com a idéia de Figueiredo (2007), para quem Piaget, através do estudo das estruturas lógicas do pensamento, abarca apenas um dos domínios da análise das competências dos indivíduos, sendo complementada, dessa forma, a partir dos outros elementos propostos por Vergnaud, que abarca todos os registros de atividade do sujeito.

Um dos elementos da teoria de Vergnaud, importante para o nosso trabalho, corresponde ao ***conceito***. Para ele:

> Um conceito não pode ser reduzido à sua definição, pelo menos quando nos interessamos pela sua aprendizagem e pelo seu ensino. É através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança. (VERGNAUD, 1996a, p. 156)

Portanto, segundo Vergnaud (1982, 1990, 1994, 1996a, 1996b, 2007), um conceito (C) é constituído de três conjuntos:

$$C = (S, I, R)$$

— S é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito, também conhecido como *referência*;

— I o conjunto de invariantes (relações, objetos e propriedades), sobre o qual alicerça a operacionalidade dos esquemas (dento deles os conceitos). Eles são caracterizados através dos conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação. *(Significado)*

— R, conjunto de representações simbólicas que representam as situações e os procedimentos para lidar com os invariantes operatórios. *(Significante)*

Dessa forma, para estudarmos a conceitualização, não podemos levar em conta apenas o significado que lhe é atribuído, mas, também o conjunto de situações que lhe dão sentido e as suas representações. Portanto, o conjunto de conceitualização do objeto é indissociável, e seus elementos são de extrema importância para Vergnaud. A partir das idéias dele, percebemos que o conceito não se refere a apenas um tipo situação, e também, em uma mesma situação estão contidos diversos conceitos, formando assim uma rede complexa de conceitos (Idem, 1996a). Portanto, Magina (2001), ratifica a idéia de Vergnaud de que um conceito não deve ser estudado isoladamente e sim em situações que inter-relacionem vários conceitos. Daí a importância de não se estudar apenas o conceito ou as situações isoladamente, mas sim um campo conceitual (SOUSA e FÁVERO, 2002).

Pode parecer que o conceito seja visto como a primeira entrada na teoria dos campos conceituais, mas para Vergnaud (1990) o papel principal de um campo conceitual está reservado, em primeira instância, para as situações. Essa importância dada às situações, em detrimento aos conceitos, pode ser facilmente observada em algumas outras concepções do conjunto de situações apresentadas por ele. Assim sendo,

— O campo conceitual é um conjunto de problemas e situações cujo é necessário, para o seu tratamento, conceitos, procedimentos e representações de tipos distintos, não por isso, indissociáveis. (Idem, 1982)

— Campo conceitual deve ser considerado, em primeiro lugar, como um conjunto de situações. (Idem, 1990, 1996a)

Segundo SOUSA e FÁVERO (2002), Vergnaud diferencia claramente sua concepção de ***situação*** para a idéia de situação didática. Vergnaud afirma que:

> O conceito de situação não tem, aqui, o sentido de situação didática, mas antes o sentido de tarefa, a idéia é que qualquer situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas, cuja natureza e dificuldade próprias é importante conhecer. A dificuldade de uma tarefa não é, nem a soma nem o produto das dificuldades das diferentes subtarefas, mas é claro que o fracasso numa subtarefa implica o fracasso global (VERGNAUD, 1996a, p. 167).

Outro sentido de situações que Vergnaud leva em consideração é o que lhe é atribuído pelos psicólogos. Segundo Moreira (2002), os psicólogos conceituam situações a partir da função dos processos cognitivos e as respostas dos sujeitos perante as situações como as quais é confrontado. E segundo Vergnaud (apud MOREIRA, 2002), destacam-se, além das idéias apresentadas anteriormente, duas idéias principais em relação ao sentido de situação, que são:

> [...] variedade e história. Isto é, em um certo campo conceitual existe uma grande variedade de situações e os conhecimentos dos alunos são moldados pelas situações que encontram e progressivamente dominam, particularmente pelas primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e procedimentos que queremos que aprendam (ibid.). Segundo Vergnaud, muitas de nossas concepções vêm das primeiras situações que fomos capazes de dominar ou de nossa experiência tentando modificá- las (1996a, p. 117) (ibid, p. 11).

Portanto, assim como Figueiredo (2007), ao percebemos o papel importante dado às situações no processo de conceitualização destacamos a compreensão do espaço dado à didática nessa teoria. Pois o próprio Vergnaud, quando se coloca sobre esse ponto, propõe que a teoria dos campos conceituais seja base para a explicação dos fenômenos do desenvolvimento e de aprendizagem, pois sua teoria oferece:

> [...] um quadro para a aprendizagem, ela interessa á didática; mas ela não é só uma teoria didática. Sua principal finalidade é fornecer um quadro teórico que permite compreender as filiações e rupturas entre os conhecimentos, entre as crianças e os adolescentes, aqui entendendo por *conhecimento* tanto o saber fazer como os saberes expressos (VERGNAUD, 1990, p. 136; 1996a, p.155).

Ainda nos referindo às situações, uma dúvida surge quando nos referimos à seguinte afirmação: “Para haver qualquer conceitualização é necessário desenvolver situações que faça sentido para o sujeito”. *E qual é á idéia de sentido que a teoria dos campos conceituais apresenta?* Já que, segundo Sousa e Fávero (2002, p.58), “Assim como o sentido dos conceitos não está nas situações em si, ele também não está nas palavras ou outras representações simbólicas”.

O ***sentido*** é uma relação que o sujeito estabelece com as situações de com os significantes. De maneira mais precisa, são os esquemas evocados nos sujeitos em uma determinada situação ou conjunto de significantes que constituem sentido aos dois. Observamos um exemplo de sentido apresentado por Sousa e Fávero (2002), que explicam:

> [..] o sentido de adição para um determinado sujeito é o conjunto de *esquemas* que ele pode utilizar para lidar com situações com as quais se depara e que implicam a idéia de adição. É também o conjunto de *esquemas* que ele pode usar para operar com símbolos numéricos, algébricos, gráficos e lingüísticos que representam a adição (ibid.). Contudo, uma dada situação ou um simbolismo particular não evocam no indivíduo todos os *esquemas* disponíveis. O sentido de uma situação particular de adição não é, portanto, o sentido de adição, da mesma forma que não o é um símbolo particular. Quando se diz que uma palavra tem um certo sentido se está, de fato, falando de um subconjunto de *esquemas*, impondo-se assim uma restrição ao conjunto de *esquemas* possíveis. (SOUSA E FÁVERO, 2002, p. 58-59)

Dessa forma, percebemos a importância do conceito de esquema na teoria de Vergnaud. Segundo Figueiredo (2007), os estudos de Vergnaud sobre os esquemas ocupam um lugar de suma importância na sua teoria, pois é através dos esquemas que conseguiremos apreender as características do sujeito em situação de aprendizagem, ou melhor, no processo de conceitualização. Vergnaud (1996a, p.157) define ***esquema*** como: “a organização invariante da conduta para uma determinada classe de situações”. Notemos que não é o comportamento que é invariante, mas sim a organização do comportamento. Ele ainda apresenta duas classes de situações que merecem nossa observação:

> — Classe de situações para as quais o sujeito dispõe no seu repertório, num dado momento do seu desenvolvimento, e em determinadas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
> — Classe de situações para as quais o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas abortadas, conduzido-o quer ao êxito, que ao fracasso. (idem, p.156)

Na primeira, é necessário um tratamento das situações a partir de um único esquema de conduta, esta caracterizada, em grande parte, pela automatização. Já na segunda classe de situações apresentadas, o sujeito recorre a uma diversidade de esquemas, tentando combiná-los e recombiná-los, podendo haver até uma concorrência entre eles, tudo isso para que ele possa vir a alcançar a resolução do problema com que se depara. É a partir dessa premissa que Vergnaud (1996b) coloca que é mais apropriado falar da relação esquema-situação do que relação sujeito-objeto, apresentada por Piaget.

Segundo Vergnaud (idem), os esquemas, além de serem uma totalidade dinâmica funcional e uma conduta invariante para uma determinada classe de situações, são compostos de quatro categorias de elementos:

— Objetivos, intenções e antecipações, notórios, especialmente, na verbalização do sujeito;
— Regras de ação, que permitem gerar a seqüência de ações do sujeito, isto é, são regras de busca e controle da informação;
— Invariantes operatórios, que se caracterizam pelo núcleo conceitual dos esquemas;
— Possibilidades de inferência, que permitem a adaptação e a argumentação em situação.

Acreditamos então que os esquemas são um meio significativo entre a conduta e a representação do sujeito perante a uma determinada situação. Eles unem os dois elementos citados objetivando a conceitualização do objeto. E é através dos invariantes operatórios que os sujeitos integram a teoria e a prática, pois a percepção, a busca e a seleção de informações baseiam-se inteiramente no sistema de conceitos-em-ação e teoremas-em-ação. Estes, contidos nos esquemas e podem ser igualmente denominados de ***Invariantes operatórios*** (VERGNAUD, 1996a).

Existe uma diferenciação entre os *teoremas-em-ação* e os *conceitos-em-ação*, que convêm apresentar. Enquanto o primeiro se refere às proposições, podendo ser julgadas como verdadeiras ou falsas sobre o real, o segundo é considerado como a categoria do pensamento, podendo ser considerada pertinente ou não (idem). A partir dessa explanação, ratificamos a déia da diferença entre teoremas-em-ação e conceitos-em-ação. Mas não existe uma separação das duas formas dos invariantes operatórios. Os dois coexistem e dialogam no processo de conceitualização, pois “os conceitos são integrantes de teoremas e teoremas são proposições que dão aos conceitos seus conteúdos” (SOUSA E FÁVERO, 2002, p.60).

Destacamos que os teoremas-em-ação não são verdadeiros teoremas, nem os conceitos-em-ação são verdadeiros conceitos, mas, devidamente explorados e direcionados podem vir a se tornar verdadeiros teoremas e conceitos.

Depreende-se que a teoria dos campos conceituais está intrinsecamente relacionada como modelo construtivista de educação e de pesquisa em ciências e matemática. Em sua teoria Vergnaud mostra uma preocupação com as relações e as rupturas que os sujeitos realizam quando exposto a algum tipo de situação. É a partir dessa relação que percebemos que a teoria de Vergnaud fornece suporte para a didática, mas não por isso podemos reduzi-la a uma teoria didática. Esse estudioso acredita que as situações em que os sujeitos se deparam é a primeira entrada para o processo de conceitualização. Nesse contexto cada conceito está relacionado com outros vários conceitos, pois sem eles a dada situação não se tornaria significativa, formando assim uma rede complexa de conceitos. É por isso que Vergnaud defende a idéia de campos conceituais. Outra característica dessa teoria é que um conceito é constituído de três conjuntos: as situações, em primeira entrada, os invariantes operatórios e as representações simbólicas. Nesse âmbito, os invariantes operatórios são parte dos esquemas de ação do sujeito perante a situação e podem ser de duas formas: os teoremas-em-ação e os conceitos-em-ação.

Nossa pesquisa se direcionou ao estudo do campo conceitual no qual está inserido o conteúdo de distância entre dois pontos. No nosso entendimento, este conteúdo nesta fase da escolarização básica (3º ano do ensino médio) supõe que os alunos, praticamente, já o dominam e seria uma forma diferenciada de complementar o conceito de distância. Dessa forma, realizaremos um diálogo entre os principais elementos da teoria de Vergnaud (situações, invariantes operatórios e representação simbólicas) a favor da investigação das relações e rupturas que os estudantes realizaram enquanto passaram por um processo de intervenção. Este teve como objetivo a aprendizagem de Distância entre dois pontos em geometria analítica.

Apresentaremos em seguida o campo conceitual da geometria analítica e daremos nosso recorte ao conteúdo cuja aprendizagem nos prontificamos a investigar.

2.3.4. O campo conceitual da Geometria Analítica

A geometria analítica cartesiana é estudada, com formalidade, no início do ano letivo escolar do 3º ano do ensino médio. Faremos um breve percurso histórico sobre o surgimento de tal área do conhecimento matemático.

Este campo da matemática foi difundido a partir do século XVII (IEZZI, 2004, p. 80) por René Descartes (1596-1650) e Pierre Fermat (1601-1665), que trabalhavam, apesar de viverem na mesma época, sem nenhum envolvimento. Mas a primeira forma de representação gráfica de uma função surgiu nos estudos de Nicole de Oresme (1313-1382) (Figura 04)[15], feito que lhe valeu o bônus de ser o pioneiro no tratamento de conceitos da geometria analítica. Este, em relação aos estudiosos anteriormente citados, não possuía ainda uma ferramenta valiosa para o estudo e desenvolvimento dessa área da matemática, isto é, não dispunha das ferramentas da álgebra, que surgiu dois séculos depois dos seus estudos (idem, 1977-78).

[15] Figura disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/nicole_d'oresme. Acessado em: 04.12.2008.

Figura 04: Desenho de Nicole de Oresme

Fermat e Descartes avançaram nos estudos da, ainda não divulgada, geometria analítica. O primeiro (Figura 05)[16], estudou este conhecimento como um subproduto de outros estudos que realizava - a reconstrução dos ausentes “Lugares planos, de Apolônio, mediante referências contidas na coleção matemática, de Papus” (ibidem, p. 117). Decorrente de suas inferências sobre o assunto, Fermat mostrou que dada uma equação geral, da forma hoje apresenta como $ax+by=c$, representa uma reta no plano, e que uma equação quadrática de duas variáveis pode representar uma das cônicas (parábola, hipérbole, circunferência ou elipse). Por não haver publicações deste estudioso acerca do assunto, a geometria analítica, que hoje se estuda, era reconhecida apenas como “cartesiana” a partir da obra *A Geometria* de Descartes (TIBÚRCIO, 2008).

Descartes (Figura 06)[17] complementou a idéia de Fermat, a qual só apresentava interpretações geométricas de algumas equações gerais, e implementou o inverso: dado um problema de origem geométrico ele interpretava algebricamente as informações apresentadas. Descartes introduziu as notações algébricas (representar as variáveis e incógnitas por letras do alfabeto) que hoje são utilizadas no ensino de álgebra.

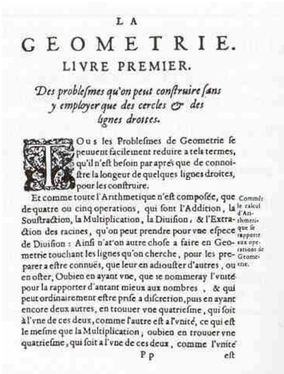
[16] Disponível em http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4b/pierre_de_fermat.png. Acessado em 11.12.2008.
[17] Disponível em http://www.esec-camarate.rcts.pt/matematica/images/rene.jpg. Acessado em 11.12.2008.

Figura 05: Pierre de Fermat (1601-1665)

Figura 06: René Descartes (1596-1650)

Os estudos propostos por Descartes (e os de Fermat) mobilizaram muitas gerações de matemáticos. Esse movimento foi estabelecido por causa da obra, *A Geometria* (Este estudo é um dos anexos da obra *Discurso do Método* (1637) (POMBO, 2008) – Figura 07)[18], que era repleta de omissões e obscuridades. Grandes nomes como Frans van Schooten (1615-1660), John Wallis (1616-1670) e Leonard Euler (1707-1783), tiveram seus nomes registrados em relevantes contribuições para o avanço desta área da matemática. Mas, foi a partir do geômetra e didático Gaspard Monge (1746-1818) que a geometria analítica ganhou uma roupagem didática mais sistemática de alguns conteúdos pertencentes a esta área. Por exemplo, no curso que ministrou na Escola Politécnica e Escola Normal, no período da Revolução Francesa, o material deste curso resultou em sua obra mais conhecida, *Aplicações da análise à geometria* (1809). Nela, entre outros assuntos, Monge (Figura 08)[19] incluiu algumas questões métricas como a fórmula da distância entre duas retas reversas (IEZZI, 1977-78).

[18] Figura disponível em Pombo (2008).
[19] Figura disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Gaspard_Monge. Acessado em: 04.12.2008.



LA

GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision : Ainsi n'a'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Comme le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.

Pp est

Figura 07: Página de *A Geometria*

Figura 08: Gaspard Monge (1746-1818)

Decorrente da retomada histórica apresentada, devemos salientar que o objetivo da geometria analítica que está sendo levado em consideração para este trabalho pode ser representado pela colocação de Lima, na qual infere que:

> A geometria analítica baseia-se na idéia de representar os pontos da reta por números reais, os pontos do plano por pares ordenados de números reais e os pontos do espaço por termos ordenados de números reais. Dentro dessa concepção, as linhas e as superfícies, no plano e no espaço, são descritas por meio de equações. Isto permite tratar algebricamente muitas questões geométricas e, reciprocamente, interpretar de forma geométrica certas situações algébricas (LIMA, 1992, p. 03).

Como percebemos, na citação de Lima que realizamos acima e o resgate histórico desse ramo da matemática, o conceito de geometria analítica não é isolado; pelo contrário, é repleto de outros conceitos pertinentes à própria matemática, isto é, existe um campo conceitual no qual repousa os conceitos de geometria analítica. E a transição entre os quadros algébricos e geométricos dessa área da matemática é uma constante.

Como percebemos, Vergnaud (1982; 1990; 1993b; 1994; 1996a; 1996b; 2007) nos fornece uma base para investigarmos o processo de aprendizagem, através de um olhar atento para as situações, os invariantes operatórios e as representações simbólicas, em uma visão construtivista de educação. Notamos também que a geometria analítica é um frutífero campo de pesquisa quando se trata de campos conceituais. Mas a constante transitividade entre os quadros[20] (aritmético,

[20] "De acordo com Régine Douady, manipular objetos matemáticos em vários contextos ou quadros, como verbal, gráfico e algébrico, pode favorecer o processo de construção do conhecimento desses objetos. [...] um *quadro constitui-se de objetos de um ramo da Matemática, de relações entre os objetos, de suas formulações e de imagens mentais que o indivíduo associa aos objetos.* O jogo de quadros são mudanças que o docente faz e visam fazer o aluno avançar nas etapas do estudo e, em conseqüência, evoluir suas concepções". (BIACHINI e PUGA, 2004, p.6)

geométrico e algébrico), que esta área da matemática apresenta, é de bastante relevância para entender as ligações e rupturas que os alunos realizam no processo de conceitualização do real. Esse processo, segundo Douady (1986), faz-se dentro de uma dualidade Ferramenta-objeto. Os investigadores desta dualidade defendem que um conceito matemático é utilizado inicialmente como uma ferramenta para resolver um problema, que surge através da contextualização, uma situação concreta gerada, para que, em seguida, esse conceito seja descontextualizado transformando-se em objeto do saber matemático. Portanto, é a partir dessa descontextualização, parte importante do processo de aprendizagem, que o conhecimento passa poder ser aplicado em novas situações, pois passam a servir de objetos para futuros estudos (VASCONCELOS, 2002), por já serem parte integrante dos esquemas do sujeito.

É a partir dessa perspectiva do processo de aprendizagem em matemática, que chamaremos Régine Douady, e o seu estudo acerca da Dialética ferramenta-objeto, para fecharmos nossa fundamentação relativa ao que estamos levando em consideração sobre como se dá a aprendizagem de conceitos pelo indivíduo.

2.3.5. O processo ensino-aprendizagem de matemática e a Dialética ferramenta-objeto.

A Dialética ferramenta-objeto (DFO) é um elemento teórico da corrente da didática da matemática de origem francesa desenvolvida por Régine Douady que consiste em um instrumento de sistematização de atividades visando o ensino-aprendizagem de conceitos matemáticos pelos alunos (JAHN e BONGIOVANNI, 2008). Vale aqui uma colocação de Douady que compartilhamos sobre o que é ensinar e aprender matemática:

> *Ensinar*, para um professor, é criar as condições que levarão o conhecimento aos alunos.
>
> *Aprender*, para um aluno, é envolver-se em uma atividade intelectual cuja conseqüência final seja a disponibilidade de um saber com o seu duplo papel de ferramenta e objeto. Para que haja ensino e aprendizagem, é preciso, portanto que o conhecimento seja objeto importante, e mesmo essencial, de troca entre o professor e seus alunos, que o saber seja uma finalidade importante da escola (DOUADY, 1994, p. 34).

Maranhão (2002) nos fornece uma explanação sobre o direcionamento que Douady deu aos seus estudos. Segundo ela:

> Nas engenharias que concebeu, Douady pesquisou o desenvolvimento de concepções matemáticas de estudantes, em sala de aula, na solução de diversas sequências de situações ou problemas (MARANHÃO, 2002, p.143).

Segundo Douady (1986), os conhecimentos matemáticos apresentam duplo aspecto: o de *ferramenta*, consistindo em utilizar algumas noções e teoremas com o fim de resolver um determinado problema proposto e o de *objeto*, quando busca entender as noções e teoremas existentes como um campo de estudo reconhecido tanto cientificamente quanto socialmente, através de formulações, tese de validade e demonstrações neste campo.

Para esta autora, como aponta Saldanha (2007), o processo dialético entre a característica de ferramenta e de objeto que o conhecimento matemático se apresenta, contribui para que o aluno seja um agente ativo no seu processo de aprendizagem, “na medida em que formula conjecturas, hipóteses e argumentos para sustentar sua tese de validar seu conhecimento” (idem, p.21). Dessa forma, podemos entender que a DFO propõe uma metodologia de atividade didática, onde os alunos, postos em uma situação, são direcionados a um processo investigativo, levando-os à construção e à consolidação do seu conhecimento.

Apresentaremos, em seguida, as seis fases da DFO (Douady, 1986). Neste momento, explanaremos apenas o que cada fase da DFO nos oferece. Como ela é posta como uma metodologia de trabalho dentro da sala de aula (Saldanha, 2007; JAHN e BONGIOVANNI, 2008; MARANHÃO 2002), no capítulo que se segue retomaremos a essas fases e explicitaremos como elas nos ajudaram a estruturar a nossa intervenção.

I. Antigo

Nesta fase, os alunos são postos em uma situação na qual necessitam mobilizar conhecimentos anteriores, mas estes não dão conta de resolver todo o problema. Inicia-se o processo de investigação dos alunos.

É nesta fase que percebemos quais os conhecimentos antigos dos alunos. Estes, colocados em ação nesta fase, funcionam como ferramenta.

Os problemas adequados a essa fase objetivam a construção de um novo conhecimento matemático. Portanto, a relação professora-aluno deve estar inteiramente presente, respeitando os princípios do contrato didático, onde o aluno é o investigador e o professor um mediador.

II. Pesquisa – novo implícito

O problema proposto não é resolvido ou é resolvido em parte. Este processo faz desenvolver, nos alunos, um processo de busca/criação de novas ferramentas para a resolução do problema.

III. Explicitação ou institucionalização local

Neste momento, os alunos são motivados a apresentar seus procedimentos e as dificuldades para resolver o problema, expressando suas inquietações para o grupo, para que a partir das informações suscitadas no debate, possa ser verificado qual(is) conhecimento(s) continuou(aram), qual(is) foi(ram) reformulado(s) e qual(is) apresentou(aram) uma possível formulação equivocada.

IV. *Institucionalização*

É nesta fase que o conhecimento adquire status de objeto: quando o professor institucionaliza o saber[21], que está sendo utilizando até este momento como ferramenta, a partir das informações que são fornecidas na fase anterior. A institucionalização se dá através de definições, teoremas, provas, etc. É a partir desse tratamento que caracterizamos o saber matemático como objeto do conhecimento.

---

[21] Entende-se como Institucionalização do saber, a ação de formalizar o conhecimento proposto para uma determinada situação com finalidade de utilizá-lo em outro contexto, por um indivíduo ou uma sociedade que compartilha desse conhecimento (AZEVEDO & PIETROCOLA, 2008).

V. Familiarização – reinvestimento

Consiste na resolução de exercício para familiarizar os alunos com os conhecimentos que foram institucionalizados na fase anterior. Tem como objetivo por em prática os conteúdos que foram mobilizados até este momento.

VI. Novo problema

Nesta fase, é fornecido para os alunos um problema mais complexo, no qual mobilizem o conhecimento que possui caráter de objeto e passa a ter característica de ferramenta para esta nova situação.

Nesta pesquisa, pretendemos investigar uma intervenção didática estruturada a partir das fases da DFO no quadro da Geometria Analítica, com o assunto Distância entre dois pontos.

A metodologia que utilizamos para o processo de intervenção será apresentada no capítulo que se segue.

CAPÍTULO 3: METODOLOGIA

Nossa pesquisa está baseada e obedece aos princípios de uma pesquisa qualitativa, pois realizaremos uma interpretação, a partir da teoria dos campos conceituais, do processo de aprendizagem dos alunos no assunto *Distância entre dois pontos*. Essa interpretação foi realizada através do diálogo das falas, escritas e gestos participantes durante o processo de intervenção e as “lentes” da teoria que escolhemos para analisar os dados.

Com a devida atenção que uma pesquisa qualitativa requer, sua estrutura metodológica de qualquer pesquisa objetiva cercar os dados coletados com todos os cuidados possíveis para que estes respondam, com maior confiabilidade e precisão, às questões levantadas. Essa reflexão ganha força quando constatamos que:

> Precisamos nos lembrar que qualquer estudo científico pode e deve ser replicado, e as pesquisas em ensino das ciências precisam dar aos seus leitores todas as condições para que uma possível réplica, mesmo quando o nosso trabalho for um estudo de caso. Este precisa ser replicado, em situações semelhantes, para que seus resultados possam ser generalizados, permitindo assim novos estudos a partir dos já realizados. Isso é obtido quando a metodologia da pesquisa é descrita com todo o cuidado, mostrando o processo de detalhamento de obtenção e de análise dos dados (CARVALHO, 2006, p.14).

A partir dessas reflexões apresentaremos em seguida o delineamento metodológico a que recorremos para a obtenção e análise dos dados.

3.1. MATERIAIS E MÉTODOS

Apresentaremos em seguida os elementos que compõem os materiais e métodos da pesquisa. Iniciamos com universo e amostra apresentados no tópico que se segue.

3.1.1. Universo e amostra

O universo de pesquisa que escolhemos foi o de uma escola da rede pública de ensino, mais especificamente da esfera estadual, que possui mil duzentos e sessenta e dois (1.262) alunos matriculados, distribuídos em três turnos, e oferece o ensino básico do fundamental II ao ensino médio. Possui uma equipe de gestão representada pela gestora, gestora adjunta e a secretária, além de dispor de uma coordenação pedagógica, uma biblioteca, uma diretoria tecnológica e uma cantina. A escola se localiza no bairro de Cajueiro. Este é um dos dezoito (18) bairros que formam a 2ª Região Político-Administrativa da cidade do Recife, localizado ao Norte da capital pernambucana. Os bairros que fazem fronteiras com ele são os de Porto da Madeira, Fundão e Campina do Barreto, além dele ser próximo a outros bairros relevantes da mesma região como Água Fria e Arruda. Possui cerca de 6.743 habitantes e a renda familiar está em torno de R$ 884,39[22].

Os alunos do 3º ano do ensino médio, público alvo da pesquisa, estão distribuídos em dois turnos, manhã e noite. No primeiro a escola dispõe de duas turmas desta série. A primeira (Turma A) possui trinta e seis (36) alunos e a segunda (Turma B), tem quarenta e dois (42). À noite, a escola possui mais quatro turmas, também da mesma série. Dessa forma, escolhemos uma das turmas do período da manhã, pois esta não possui carga horária reduzida, característica das turmas noturnas. A partir da referida escolha, que foi tomada logo em seguida da investigação dos resultados obtidos de um questionário de sondagem (Apêndice II), aplicado junto a cada turma com duração máxima de vinte (20) minutos, contatamos os alunos que voluntariamente se dispuseram a participar da pesquisa.

O questionário citado nos auxiliou na escolha da turma. Sua principal finalidade era o de categorizar alunos com maiores características diferenciadas de uma mesma turma. As caracterizações foram as seguintes:

- Gosta de matemática, tem facilidade em aprender e gosta de jogos;
- Gosta de matemática, tem facilidade em aprender e não gosta de jogos;

[22] Informações disponíveis em: http://www.pe-az.com.br/bairros_recife/bairros_cajueiro.htm. Acessado em: 03.12.2008.

— Gosta de matemática, não tem facilidade em aprender e gosta de jogos;
— Gosta de matemática, não tem facilidade em aprender e não gosta de jogos;
— Não gosta de matemática, tem facilidade em aprender e gosta de jogos;
— Não gosta de matemática, tem facilidade em aprender e não gosta de jogos;
— Não gosta de matemática, não tem facilidade em aprender e gosta de jogos;
— Não gosta de matemática, não tem facilidade em aprender e não gosta de jogos;

A partir dessas categorizações escolhemos a Turma B, pois apenas ela apresentou pelo menos um aluno em cada categoria.

Os encontros de intervenção foram realizados fora do momento de aula, através de encontros com as duplas apresentadas no quadro 08 mais à frente. Elas foram escolhidas tentando inicialmente relacionar pessoas com características bastante diferenciadas, e procuramos aproximar o perfil das duplas deste intento o mais possível.

O quadro 07, que se segue, nomeia, de forma simbólica para manter a privacidade dos participantes, os oito (08) alunos da Turma B e em que categoria cada um se encontra:

QUADRO 07
Participantes e suas categorizações

Categorizações	Participantes / gênero
Gosta de matemática, tem facilidade em aprender e gosta de jogos.	**Lr (feminino)**
Gosta de matemática, tem facilidade em aprender e não gosta de jogos.	**W (feminino)**
Gosta de matemática, não tem facilidade em aprender e gosta de jogos.	**T (feminino)**
Gosta de matemática, não tem facilidade em aprender e não gosta de jogos.	**R (feminino)**
Não gosta de matemática, tem facilidade em aprender e gosta de jogos.	**JA (masculino)**
Não gosta de matemática, tem facilidade em aprender e não gosta de jogos.	**Lz (feminino)**
Não gosta de matemática, não tem facilidade em aprender e gosta de jogos.	**J (feminino)**
Não gosta de matemática, não tem facilidade em aprender e não gosta de jogos.	**M (feminino)**

Toda a organização da pesquisa/intervenção como os participantes selecionados será apresentada no tópico que se segue.

3.1.2. A estruturação da pesquisa

Todo o processo da pesquisa/intervenção com os alunos forma divididos em sete (07) encontros. O quadro 02 que se segue apresenta essa divisão, a especificação de cada momento, sua duração e seus participantes.

QUADRO 08
Duração, especificação e participantes em cada encontro da pesquisa/intervenção com os alunos

Encontro	Especificação	Duração	Participantes
1	Aplicação do Questionário de Sondagem para escolha da turma e dos 8 participantes.	20 min	**Turma A e B**
2	Intervenção com a dupla 1 (D1)	3h	**Lr e Lz**
3	Intervenção com a dupla 2 (D2)	3h	**W e J**
4	Intervenção com a dupla 3 (D3)	3h	**R e JA**
5	Intervenção com a dupla 4 (D4)	3h	**M e T**
6	Esclarecimento sobre dúvidas	50 min	**Os oito participantes selecionados da Turma B**
7	Aplicação do teste investigativo auxiliar	1h e 40min	**Os oito participantes selecionados da Turma B**

A finalidade do primeiro encontro já foi apresentada no tópico anterior referente ao universo e amostra. No sexto encontro, utilizamos uma ficha de exercícios, na qual os participantes, após o momento de intervenção, levavam-na para casa, para que neste encontro fossem esclarecidas as dúvidas sobre elas. O sétimo e último encontro foi destinado ao teste investigativo auxiliar.

A partir de então especificaremos como se deu o processo de intervenção, baseado nas fases da dialética ferramenta-objeto, com os alunos.

3.1.3. As fases da Dialética ferramenta-objeto na intervenção didática

Do segundo ao quinto encontro com os participantes da pesquisa, desenvolvemos nosso processo de intervenção didática. Em cada encontro estava presente uma das quatro duplas, com já especificado no quadro 08 acima. As atividades foram estruturadas para serem desenvolvidas em três horas/aula. Objetivamos, no fim dessa atividade, facilitar a aprendizagem do conteúdo através do jogo DISTÂNCIA EM BATALHA à luz da dialética ferramenta-objeto, isto é, ensinar a matemática como ferramenta para resolver problemas; estudar o conteúdo de forma a mobilizar a matemática como objeto do conhecimento; e utilizar o conhecimento aprendido em situações mais complexas.

Dessa forma, apresentamos em seguida os momentos da intervenção para alcance desses objetivos.

1º momento: *Antigo*

Jogo livre para que os alunos apenas achem alternativas para encontrar a menor distância entre dois pontos.

Neste momento conterá apenas as cartas de 1 – 10.

2º momento: *Pesquisa novo-implícito*

Neste momento os alunos chegam, após algumas discussões (mediada pelo professor), a um consenso para informar a maior distância entre dois pontos, mas ainda não é o suficiente para resolver o problema.

3º momento: Institucionalização local.

Eles chegaram a um consenso, jogaram a partida e em seguida apresentaram como decidiram achar a menor distância entre dois pontos.
Lançamos então as questões:

Como representamos a menor distância entre dois pontos? Será que a forma encontrada, até então, é a ideal? Caso resposta negativa, Como calcular essa distância?

4º momento: Institucionalização

A Institucionalização do conteúdo Distância entre dois pontos foi realizada a partir da dedução da fórmula de recorrência da distância entre dois pontos através da aplicação do Teorema de Pitágoras. Procedemos da seguinte forma:

1. Retiramos um exemplo a partir de uma situação presente no jogo, que foi a seguinte: Dados os pontos A(-3,5), B(3,5) e C(3,-3) calculávamos

a distância entre os pontos A e B, que é de seis unidades, e em seguida a do ponto B e C, que é de oito unidades. Com os dados apresentados calculamos a distância entre A e C a partir do Teorema de Pitágoras já que os três pontos nesta configuração formam um triângulo retângulo onde os catetos medem seis e oito unidades, distância de A e B e a de B e C respectivamente, logo a hipotenusa, distância entre A e C vale dez unidades.

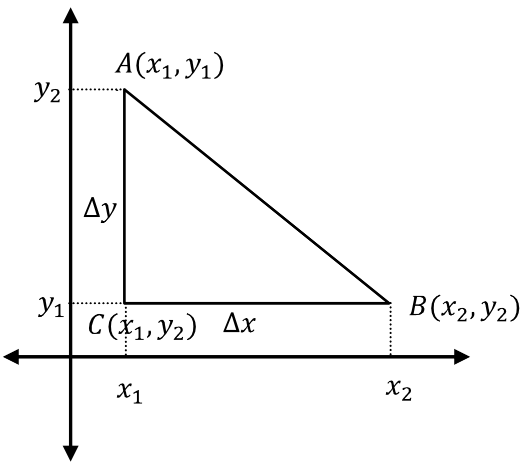
2. Generalizamos esta situação no quadro a partir das seguintes explicações:

   Dados dois pontos A e B, a distância entre eles, que será indicada por $d(A, B)$, é a medida do segmento de extremidades A e B (DANTE, 2005).

   A distância entre A e B, quais quer que sejam $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$. O triângulo ABC é retângulo em C, logo podemos utilizar a relação de Pitágoras:

$\Delta x = (x_2 - x_1)$

$\Delta y = (y_2 - y_1)$



$$[d(A, B)]^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$logo\ \ d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

   Concluímos, então que a distância entre dois pontos A e B quais quer do plano, tal que $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, é dada por:

$$\boxed{d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

3. Realizamos, em seguida, questionamentos sobre a permanência de alguma dúvida em relação ao que foi exposto. Caso existisse dúvidas

essas eram esclarecidas para que os alunos passem sem dificuldades para a próxima fase.

5º momento: Familiarização e reinvestimento

Resolução de exercícios que apliquem o conhecimento anteriormente institucionalizado. Neste momento, o aluno deixa de mobilizar o conhecimento como objeto e passa a aplicá-lo como ferramenta matemática.

6º momento: Novo Problema

2ª rodada com o jogo:

Serão substituídas doze cartas da rodada anterior (três cartas 02, uma carta 04, uma carta 05, uma carta 06, três cartas 07, uma carta 08, uma carta 09 e uma carta 10) pelas 12 cartas do grupo 11 ao 13. Pretendíamos que dessa forma, além de propormos os mesmos problemas anteriores, outros problemas, que servirão de situações novas que mobilize o conteúdo de distância entre dois pontos, surgissem.

Ao apresentarmos como foi realizada a escolha do universo e da amostra, de como estruturamos nossa pesquisa e como a Dialética ferramenta-objeto foi utilizada para a estruturação da intervenção, iremos proferir, no tópico que se segue, quais os conhecimentos que serão mobilizados na atividade com o jogo que escolhemos para a intervenção.

3.1.4. Conhecimentos presentes no jogo DISTÂNCIA EM BATALHA

Mostramos no primeiro capítulo desse estudo qual a estrutura, regras e objetivos do jogo distância em batalha. Aqui trataremos de apresentar os principais conceitos que podem estar presentes na estrutura do jogo selecionado, os quais agrupamos em duas partes respeitando os dois momentos apresentados nas regras.

No primeiro momento, onde os participantes lançam os dados, identificam as coordenadas do ponto e o localiza colocando uma ficha que o represente no

Geoplano, observamos que os conhecimentos mobilizados sobre direção, sentido, contagem, composição de pares ordenados, correspondência biunívoca entre os pontos (P) do plano e o conjunto de pares ordenados (x_p,y_p) de números reais, localização de pontos no plano a partir de coordenadas, intersecção de retas paralelas, estão todos presentes.

Já no segundo momento do jogo, além de continuar mobilizando os conhecimentos do primeiro momento, a dinâmica com as cartas possibilita os alunos mobilizarem os conhecimentos sobre cálculo de distância entre dois pontos, relações métricas no triângulo retângulo, em específico o Teorema de Pitágoras, área e perímetro de polígonos.

A partir das informações que apresentamos até o momento sentimos apropriados para apresentar quais os instrumentos de coleta de dados que utilizamos com propósito de alcançar nossos objetivos.

3.1.5. Instrumentos de coleta de dados

Para que possamos justificar cada instrumento de coleta de dados retornaremos aos objetivos que lançamos no início desse estudo.

Nosso objetivo geral é o de *Investigar o processo de aprendizagem de alunos do 3º ano do ensino médio, do assunto distância entre dois pontos, através do jogo DISTÂNCIA EM BATALHA como proporcionador de uma situação contextualizada.* Para alcance dele perpassamos por alguns específicos e em cada um destes lançamos mão de uma forma de tentar captura as informações que consideramos como relevantes para nossa investigação.

Os objetivos específicos são:

- Interpretar as mensagens, verbais (oral ou escrita) e gestuais, proferidas pelos alunos no processo da intervenção;
- Identificar a existência de padrões nas mensagens (tanto verbais, quanto escritas) dos alunos;

- Observar os erros, tentativas de acertos e os acertos dos alunos quando postos em uma situação de aprendizagem;
- Investigar as características e ações que surgem durante em uma atividade com jogos.

Para alcance de coletarmos dados direcionados para contemplarmos todos os objetivos propostos lançamos mão da *videografia* como elemento chave de análise.

As informações contidas nos vídeos foram transcritas (Apêndice III) com a maior fidedignidade possível para posterior investigação. Nesse momento chamaremos de *PES* o pesquisador que aplicou a intervenção.

Para triangularmos os dados apresentados na transcrição da videografia, recorremos à *ficha de exercícios* (Apêndice IV) e *os papéis de apoio* que foram sugeridos no momento de cada intervenção. Esses dois últimos elementos não contemplam apenas o último objetivo.

Em relação ao processo de aprendizagem recorremos à *primeira, segunda e terceira fase* da Dialética ferramenta-objeto, através da transcrição da videografia, para verificarmos como se encontrava o conhecimento do aluno sobre o assunto tratado. E no final da intervenção recorremos a um *teste investigativo auxiliar* (Apêndice V), para pormos em comparação o que os alunos apresentavam anteriormente e o que foi retido depois da intervenção.

A utilização desses recursos apresentados anteriormente (videografia e sua transcrição, fichas de exercícios, papéis de apoio, avaliação de aprendizagem) para alcance de nossos objetivos, remete-nos mais uma vez a Carvalho (2006), o qual considera que:

> [...] Nesse contexto os dados obtidos pelas gravações em vídeo se tornaram fundamentais para estudarmos o trabalho desenvolvido em sala de aula, uma vez que os vídeos nos mostravam o detalhamento do processo de ensino e de aprendizagem, com as anotações dos professores e os resultados das provas dos launos passando a dados secundários, porém importantes para a triangulação e para validação dos dados gerados pelas gravações em vídeo. (CARVALHO, 2006, p. 17)

Dessa forma, acreditamos que os recursos que utilizamos para obtenção dos dados estejam satisfatoriamente de acordo com a nossa proposta de investigação.

3.1.6. Análise dos dados

Para a análise dos dados, Iremos, através de cada fase da dialética ferramenta-objeto, identificar quais os principais elementos que surgiram no processo de aprendizagem de cada participante da pesquisa. Esses elementos estão presentes nas interpretações das transcrições dos vídeos. Utilizamos também os materiais escritos, como a lista de exercícios, os papéis de apoio e a avaliação de aprendizagem, como fontes para categorizar alguns elementos que expressaram as principais relações e rupturas entre os conceitos existentes no processo de aprendizagem do assunto que escolhemos.

A partir dos pressupostos apresentados, realizamos as seguintes observações:

Observação descritiva – Onde destacamos, através do diálogo entre os elementos da teoria dos campos conceituais, as principais relações e rupturas entre os conceitos no processo de conceitualização. Referimos-nos também à investigação sobre processo de aprendizagem através de jogos. Essa observação foi realizada enquanto transcrevíamos os vídeos, procurando com maior fidedignidade possível apresentar as informações coletadas tanto dos elementos da comunicação (falada e escrita), quanto de outros tipos de expressão como fisionômicos e/ou gestos indicativos de alguma mudança de atitude ou descoberta.

Observação de intervenção – Quando a influência do investigador como mediador no processo de aprendizagem e a relação entre as duplas influenciam no processo de conceitualização. Esse elemento destacado em todo o percurso, com ênfase na avaliação de aprendizagem.

A partir dessas observações, analisamos todos os registros quanto:

- Aos esquemas que os participantes evocaram durante o processo de intervenção;
- Às relações e rupturas entre os conceitos durante o processo de aprendizagem;
- Aos principais elementos que foram mobilizados através de uma atividade didática com jogo para o ensino de matemática.

CAPÍTULO 3: ANÁLISE E RESULTADOS

Neste capítulo nos portaremos a analisar os dados obtidos a través da orientação das seis fases da Dialética ferramenta-objeto. Em cada uma dessas, nos baseamos nas transcrições das gravações realizadas quando estávamos no período da intervenção. Estas transcrições nos deram subsídios para ratificarmos, a partir de uma situação, os invariantes operatórios mobilizados através das representações simbólicas (linguagem oral ou escrita) que os alunos apresentaram no seu processo de conceitualização. Recorremos também ao material de apoio (ficha de exercícios, papéis de apoio e teste investigativo auxiliar) para triangular os dados, fazendo, dessa forma, que haja uma solidez ao tratamento e considerações que realizamos aos dados obtidos.

Partiremos para a análise das duas primeiras fases. A apreciação dos dados foi realizada simultaneamente nas duas fases, pois observamos, após a intervenção, que essas duas praticamente se confundem, pelo motivo que os alunos mobilizam os seus conhecimentos antigos para atribuir sentido a atividade e, a partir disso, eles realizam a pesquisa com a finalidade de resolver o problema.

1º e 2º momentos: Antigo e Pesquisa novo implícito

Nestas fases da intervenção com a Dialética ferramenta-objeto observamos duas situações em que os alunos foram estimulados a recorrer a seus esquemas do conhecimento. Na primeira, sobre a localização de pontos no plano cartesiano, este sendo representado pelo Geoplano, e a segunda as suas alternativas de encontrar a menor distância entre dois pontos. O jogo, por ser realizado em duas etapas facilitou nossa observação.

No primeiro momento do jogo, o de localização de pontos no plano cartesiano, classificamos as ações dos alunos através das seguintes categorizações, dispostas na tabela 1 que se segue:

TABELA 1:
Categorização dos alunos a partir da atividade de localizar pontos no plano cartesiano

Categorização	Alunos
1. Não apresentou dificuldade em localizar pontos no plano cartesiano.	W., Lr., T.
2. Dificuldade em localizar pontos no plano cartesiano.	JA., R., J., Lz., M.
3. Dificuldade em localizar pontos pertencentes a um dos eixos do plano cartesiano.	JA., R., J.

Cinco dos participantes, como podemos observar na tabela acima, foram enquadrados no segundo tipo de categorização, três deles no primeiro e três no terceiro. Esse tipo de atividade nos mostrou que os conceitos e teoremas necessários aos alunos para realizar a atividade de encontrar pontos no plano, para cinco deles, já que os três que ficaram na terceira categorização se repetem na segunda, não estavam formados, pois os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação não apresentaram, inicialmente, validade (VERGNAUD, 1996a). Constatamos inviabilidade a partir do conceito-em-ação não relevante, que foram apresentados por um deles:

> J.: *[Joga os dados]* Três. *[Anota na folha e joga os dados novamente]* Quatro. *[Anota na folha (3,4) e aparenta ainda confusão na localização de pontos no plano]* É esse daqui *[(3,0)]*?

O conceito-em-ação inapropriado que J. utiliza pode ser mais claramente entendido no trecho que se segue:

> J.: *[Joga os dados]* Três. *[Anota na folha e joga os dados novamente]* Cinco. *[Anota na folha (3,5)]* Três... *[Coloca a ficha no ponto de coordenada (3,0)]*
> PES: Temos que levar em consideração o cruzamento das paralelas como foi visto neste ponto. *[Mostra o ponto que J. encontrou anteriormente]*
> J.: Tem que ser os dois ao mesmo tempo, não é? Então é aqui. *[Marca o ponto no plano]*

Observamos que, para J., não existia, até este momento, uma consideração que um ponto no pano cartesiano é formado a partir de duas coordenadas. Já os que tinham esse conceito formado apresentaram dificuldade na localização do ponto, isto é, os teoremas-em-ação que, alguns deles apresentaram poderiam ser considerados como falsos, pois não eram praticamente eficazes para encontrar o ponto no plano. Essa característica pode ser constatada no seguinte trecho:

> JA.: Um. *[Anota no papel as coordenadas (-6,-1), pega uma de suas fichas e marca o ponto de coordenadas (-6,1)]*
> PES: Vocês têm que ser um o juiz do outro. Está certo? *[JA. retira a sua ficha e a coloca no ponto de coordenadas (-6,-1)]*

Elencamos esse trecho para que possamos mostrar que quando JA. entra em conflito, quando nós o questionamos sobre sua resposta, ele muda seu esquema de ação e passa a apresentar um novo invariante operatório, através do teorema-em-ação, explicito através da representação simbólica apresentada nas situações subseqüentes, como podemos observar em:

> PES: Ela tem que acha o ponto...
> R.: Um-menos seis.
> PES: Isso! Um no x e menos seis no y. *[R. tenta marcar o ponto (-6,1)]* Um no x e menos seis no y.
> R.: Onde é?
> JA.: Pode ajudar?
> PES: Pode sim, fique a vontade. *[JA. coloca o dedo no um no eixo dos x e o desliza até encontrar o ponto que pertence à reta paralela à Ox que passa pelo ponto menos seis em Oy. Em seguida R. coloca a ficha no local indicado]*

A intervenção que JA. realiza na ZDP de R. também modifica o teorema-em-ação dela, pois, na continuação da atividade, R. apresenta a seguinte ação:

> PES: Achar agora menos cinco-menos cinco no tabuleiro. *[R. realiza o mesmo procedimento que JA. realizou quando ajudou ela a encontrar o ponto e coloca uma ficha sua no local correto]*

Com já podemos perceber, a atividade com o jogo proporcionou, como já esperávamos, a discussão sobre a socialização; no nosso caso, a socialização do conhecimento. Notamos esse tema explicitamente quando JA. se prontifica a ajudar R., pois atividades com jogo podem criar uma possibilidade de desenvolver nos alunos o espírito de trabalho em equipe, a cooperação, o respeito ao trabalho e às limitações do outro, a competição sadia (MENEZES et all, 2008). Não foi apenas com essa dupla, notamos esses elementos em todos os participantes. Alguns desses elementos mais marcantes são apresentados nos trechos que se seguem:

> Lz.: *[Lança os dados]* Menos dois... *[Anota na folha e lança os dados novamente]* Menos dois... Menos dois?
> Lr.: Não é mais...
> Lz.: Mais dois... Não!
> PES: Atenção que o primeiro é o sinal.
> Lz.: Mais cinco. *[Anota na folha]* É menos dois e cinco. Menos dois... *[Parece se confundir na localização do ponto (-2,5)]*
> Lr.: Menos dois... *[Passa a caneta em cima do eixo Ox]*
> Lz.: Ok. E cinco. É pra cima. *[Coloca o dedo no ponto correto, em seguida o marca com uma ficha sua]*

O trecho que apresentaremos em seguida trata da mesma discussão sobre o que o jogo proporciona. O que destacamos não é nem este momento, mas o que ele desencadeou. Temos então a primeira situação:

> M.: *[Joga os dados]* Menos cinco. *[Anota na folha e joga os dados novamente]* Três *[anota na folha as coordenadas (-5,3)]*
> PES: Quase que era o ponto de T., que foi cinco-menos três! *[Risos. M. continua com dificuldade em encontrar o ponto e T. a ajuda explicando o processo de cruzamento de paralelas nas coordenadas]*

A repercussão da cooperação e disponibilidade entre as participantes promoveram a seguinte situação:

> M.: *[Joga os dados]* Um. *[Anota na folha e joga os dados novamente]* Seis. *[Anota na folha (1,6), em seguida coloca o dedo no um do eixo Ox e o desliza até o ponto seis do eixo Oy]*. Se isso tudo é seis, onde eles se cruzam... É aqui. *[Aponta justamente o ponto de coordenadas (1,6) e coloca uma ficha. Aparenta satisfação por ter conseguido.]*

Essa aparente satisfação que M. apresentou é resultado de outros aspectos que o jogo pode vir a proporcionar. Segundo Lopes (1998) um dos objetivos pedagógicos dos jogos no contexto escolar é o de reduzir a descrença da auto-capacidade de realização e de diminuir a dependência ocasionando o desenvolvimento da autonomia. Portanto, como percebemos no trecho acima, a aparente satisfação está intrinsecamente relacionada aos dois aspectos, podendo, dessa forma, vir a proporcionar uma aprendizagem mais significativa.

Retornando às discussões referentes às dificuldades de localização do ponto no plano cartesiano, percebemos que esse quadro se agrava quando se trata de localizar os pontos pertencentes a um dos eixos que formam o plano cartesiano, isto é, o teorema de cruzamento das paralelas se torna um obstáculo quando uma destas é o próprio eixo de referência. Percebemos essas dificuldades nos dois trechos a seguir:

> <u>Trecho 01:</u>
> J.: *[Joga os dados e aparenta refletir um pouco]* Menos quatro. *[Joga os dados novamente]*
> W.: Dois números iguais, então é zero!
> J.: Isso. *[Anota as coordenadas]*
> J.: Primeiro é x?
> PES: Sim, primeiro é x. *[J. erra o ponto (-4,0), colocando a ficha no ponto (-4,-1)]*
>
> <u>Trecho 02:</u>
> PES: *[JA. lança os dados]* Deu dois números iguais, então?
> JA.: Zero.
> PES: Isso, a primeira coordenada, neste caso, é zero. Agora vai jogar pra saber a segunda coordenada. *[JA. lança os dados]* Quanto vale o y?
> JA.: Três negativo...
> PES: Três positivo!
> JA.: É três positivo! *[JA. tenta marcar o ponto de coordenadas (0,3) e coloca a ficha na origem do plano cartesiano]*
> PES: Esse é o zero-três?

> R.: Não.
> PES: Então onde se encontra o zero-três? *[R. aponta para o ponto de coordenadas (0,-3)]* Esse é o ponto zero-menos três. Onde fica o zero-três? *[R. aponta para o ponto de coordenadas (3,0)]* esse é o três-zero... *[R. aponta para o ponto de coordenadas (0,3)]* agora tu ajudou, né?

Notamos, dessa forma, que R., no trecho 02, recorre ao procedimento de tentativa e erro para encontrar o ponto, mas está certa que ele pertence a um dos eixos do plano cartesiano.

Já os demais participantes (W., Lr., T.), neste momento, não apresentaram dificuldades na realização da atividade. Mostraram, através dos seus teoremas-em-ação e conceitos-em-ação, quando explícitos, segurança e domínio do assunto. Isso podemos observar no trecho que transcrevemos:

> W.: *[Joga os dados]* Cinco. *[Anota na folha e joga os dados novamente]* Zero. *[Anota na folha e em seguida marca o ponto realizando o processo de cruzamento de paralelas nas coordenas]*

E também em:

> Lr.: Positivo. Menos cinco. Zero e cinco.
> PES: E aí como iremos marcar esse ponto?
> Lr.: Tu sabes? *[Dirige-se a Lz., que não responde]* É assim ó. *[Aponta para origem do sistema e desliza o dedo para o valor cinco no eixo Oy]*
> Lz.: *[Lança os dados]* Eu tinha esquecido... Na verdade, eu vi esse assunto ano retrasado.

Neste último, observamos mais uma vez a preocupação que Lr., uma das participantes, demonstra em deixar Lr., sua companheira de atividade, inteirada com o procedimento que utilizou para encontrar o ponto. Mostrou, assim, a importância da socialização no processo de conceitualização, que o jogo pode vir a proporcionar.

Já na segunda parte do jogo, onde os participantes estavam imersos numa dinâmica com as cartas e que o assunto de distância entre dois pontos estava presente, além o de localizar pontos no plano, realizamos algumas análises que destacaremos em seguida. Inicialmente apresentaremos uma tabela que resume nossas observações neste momento da atividade.

TABELA 2:
Categorização dos alunos a partir da atividade da concepção de unidade de medida e do procedimento adotado para o cálculo da distância entre dois pontos

Categorização	Alunos
1. Espaço entre dois pontos consecutivos, na vertical ou horizontal, como uma unidade de medida.	J., JA., W., R., M., e T.
2. Espaço entre dois pontos consecutivos, na vertical, horizontal ou diagonal, como mesma unidade de medida.	Lz. e Lr.
3. Distância entre dois pontos como a contagem de unidades na horizontal e vertical.	J., JA., W., R., M., e T.
4. Distância entre dois pontos como a contagem de unidades na horizontal, vertical e diagonal.	Lz. e Lr.

Ao colocarmos os participantes da pesquisa em uma situação contextualizada. Uma vez que situação, como já apresentada, pode ser entendida como uma tarefa (VERGNAUD, 1996a). Esta é complexa e demanda uma análise das combinações de subtarefas que o sujeito realiza para solucioná-la. Observemos o seguinte trecho:

> PES: O que a carta pede é o maior valor da menor distância entre duas fichas postas no tabuleiro. Para isso, vocês têm que combinar antes como será fornecido a menor distância entre dois pontos.
> W.: *[Parece pensar um pouco. Aponta para duas fichas]* A maior distância é essa, por que vale treze. *[Conta a distância combinando espaços entre pontos no plano na horizontal com vertical]*
> PES: Vocês concordam que essa é a melhor maneira de contar a menor distância entre duas fichas?
> W.: Sim!
> J.: Concordo. E ela realizou o que a carta pediu.
> PES: Então, dez pontos para a W..

A situação era a de encontrar o valor da distância entre dois pontos e julgar se ela seria o maior valor entre as distâncias no tabuleiro. Mas o que nos chamou a atenção foi a forma de calcular o valor dessa menor distância. Primeiramente notamos que W. considera como uma unidade o espaço entre dois pontos consecutivos ou na vertical, ou na diagonal, essa é uma subtarefa, e parece considerar que a menor distância é justamente um “caminho” mais curto que contenha essas unidades explícitas. Dessa forma, W. procede na combinação de espaços na vertical e diagonal para alcançar o ponto. Na situação que apresentaremos agora explicitaremos como elas procedem.

> W.: *[Retira uma carta do monte e realiza leitura silenciosa]* Oxe! *“Escolha uma de suas fichas pra que seu oponente possa eliminá-la. Cinco pontos para o oponente”!* É brincadeira um negócio desse!
> PES: Agora você irá escolher uma ficha sua para que J. possa eliminá-la, lembrando que para eliminar qualquer ficha é necessário que forneça a menor distância entre a sua e a ficha solicitada.
> W.: Essa *[(-6,1)]*.
> J.: Agora eu escolho uma minha não é isso? Depois digo a distância?
> PES: Isso!

J.: Escolho essa *[(-4,0)]*. A distância é três.
PES: Concorda? *[Para W.]* Posso bater o martelo?
W.: Concordo. Da próxima vez vou ficar com a ficha azul. A amarela não está me dando sorte! *[Risos]*

O que J. realiza é o mesmo procedimento que W., pois para verificar a distância ela conta duas unidades para a esquerda na horizontal e uma para cima na vertical, totalizando três unidades. Nesse momento, nenhuma delas explicitou que a menor distância poderia ser um segmento de reta que une os dois pontos, por isso não podemos tirar nenhuma conclusão sobre se elas tinham o conhecimento desse conceito ou não.

Todos os outros participantes, exceto Lz. e Lr., procederam da mesma forma. Adotaram o espaço entre dois pontos, tanto na vertical como na horizontal, como uma unidade e a combinação de unidades na horizontal com unidades na vertical como a distância entre dois pontos solicitada. Podemos notar isto na intervenção com R. e JA, onde destacamos o seguinte momento da transcrição:

R.: *[Retira uma carta do monte]* "Elimine uma ficha do seu oponente. Dez pontos".
PES: Você tem que escolhe uma ficha dele, uma sua e fornecer a menor distância entre elas. *[Os participantes demonstram uma fisionomia que aparenta dúvida sobre o que foi dito]* Você tem que escolhe uma ficha dele, uma sua e fornecer a menor distância entre elas.
JA.: Se ela errar...
PES: Ela não ganha os pontos. E aí, qual a ficha dele você escolhe?
R.: Essa. *[Aponta a ficha de coordenadas (1,2)]*
PES: E a sua?
R.: Essa. *[Aponta a ficha de coordenadas (0,-4)]*
PES: Então, qual é essa distância daqui pr'aqui? *[Põe um dedo em cada pino com as fichas escolhidas]*
R.: É...
PES: Tem que dizer o valor da distância.
R.: *[Parece refletir um pouco e realiza movimentos com os lábios como se estivesse contando algo]* Cinco!
PES: Cinco? Ela acertou ou errou?
JA.: Errou!
PES: Mostra pra mim como você *[R.]* calculou cinco.
R.: *[Pega a caneta e conta da ficha dela para a ficha dele em linha reta]* Um, dois, três, quatro, cinco... seis.
PES: Tu estás contando como a distância? *[R. com a caneta mostra que está considerando como uma unidade a distância entre dois pinos consecutivos na vertical]* Então, quer dizer que a distância entre um pino e outro você está considerando como um?
R.: É!
PES: Mostra pra mim novamente a distância entre as duas fichas que você escolheu.
R.: Um, dois, três, quatro.
PES: Quatro?
R.: *[Balança a cabeça negativamente]* Não, sei não!
PES: Qual o valor da distância entre os dois pontos que você escolheu?
R.: Cinco!

> PES: Ela acertou ou errou JA?
> JA.: Errou!
> PES: Então quanto é? *[Pergunta a JA.]*
> JA.: Sete.
> PES: Mostra pra mim como você calculou sete.
> JA.: *[Com a caneta conta]* Um, dois, três, quatro, cinco, seis... *[Na vertical]* Sete. *[Na horizontal]*
> PES: R. disse que tinha cinco... A distância é cinco?
> R. e JA.: Não!
> PES: Então vocês concordam que não tem cinco e sim tem sete, não é isso? *[R. e JA. concordam com a cabeça]*
> PES: Pois é, R. não ganhou cinco pontos. Então, foi consolidada essa forma *[combinação de vertical e horizontal]* de calcular a distância, entre vocês? *[R. e JA. concordam mais uma vez com a cabeça]*

Antes de discutimos como Lz. e Lr. procederam quando postas na mesma situação, notamos um aspecto que tínhamos como hipótese quando elaboramos o jogo: se deixarmos livre para que eles forneçam apenas o valor da distância entre dois pontos postos no tabuleiro, eles escolheriam apenas aqueles que estivessem alinhados, tanto na horizontal quanto na vertical, pois seria mais fácil de não se equivocarem, como notamos no trecho que se segue:

> M.: *[Retira uma carta do monte]* “Elimine uma ficha do seu oponente. Dez pontos”.
> PES: Para eliminar uma ficha do oponente, o que a gente faz?
> T.: Já fiz isso já.
> PES: Escolha uma ficha tua e uma ficha dela que será eliminada, e você diz a menor distância entre elas.
> M.: Um! *[Aponta a sua ficha de coordenadas (1,6) e a ficha de T. com coordenadas (1,5)]*

Notamos também esse procedimento quando J. retira a mesma carta, o que podemos observar em:

> J.: Escolho essa ficha aqui *[(0,5)]*.
> PES: E a sua, qual é?
> J.: Essa *[(3,5)]*.
> PES: E qual é a distância entre essas duas fichas?
> J.: É três. *[W. aparenta concordar acenando com a cabeça]*

Notamos que todos os participantes procedem da mesma forma, quando duas fichas estão alinhadas na horizontal ou vertical, no fornecimento da distância. Eles consideram o valor absoluto da distância, independente do sentido que ela se apresente (distância de A para B ou de B para A). Mesmo assim eles não procedem como no teorema que afirma se os pontos tiverem alinhados na horizontal basta calcular $\Delta x = |xi - xf|$ e se os mesmos estiverem alinhados na vertical $\Delta y = |yi - yf|$. Eles parecem não perceber que uma das coordenadas fica constante quando estão nesse tipo de alinhamento. Essa dificuldade pode se agravar se, por exemplo, eles forem postos em uma situação que não teriam o concreto para manipular, como valores muito altos de distância nas condições que estamos discutindo.

Retornemos ao caso de Lr. e Lz. quando postas em uma situação de cálculo da distância. Observemos primeiro o seguinte trecho:

> Lz.: *[Retira uma carta do monte]* É a mesma, “Jogue os dados novamente e ponha outra ficha sua no tabuleiro”. *[Lança os dados]* Quatro positivo e... *[Lança os dados novamente]* Zero. Quase! *[Marca o ponto com sua ficha]*
> Lz.: Oxe! Já estás ganhando, tá bom. *[Retira uma carta do monte]* “O oponente irá escolher duas fichas quaisquer no tabuleiro para que você forneça a menor distância entre elas. Caso você acerte o valor ganha dez pontos. Caso erre, o oponente ganha cinco”.
> PES: É o seguinte, Lz., oponente, irá escolher qualquer duas fichas no tabuleiro e você terá que dizer qual o valor da menor distância entre elas. Por exemplo, daqui pra aqui *[distância entre os pontos (-1,0) e (-4,0)]*, quanto vale a distância?
> Lr.: Três.
> PES: Isso,vale três a distância.
> Lz.: Aí ela escolhe.
> Lr.: Pera é, se eu escolher assim? *[Representa no espaço um segmento de reta na diagonal]*
> PES: Aí ela terá que encontrar o valor, para que depois, em consenso, Lr. aceite a sua resposta.
> Lz.: Pode ser na diagonal?
> PES: Como Lr. escolher.
> Lz.: Ai meu Deus!
> Lr.: Esse *[o ponto com a ficha de coordenadas (-2,5)]* e esse *[o ponto com a ficha de coordenadas (5,-5)].*
> Lz.; Mas Lr., rapaz, com sua amiga!
> Lr.: Claro, vale cinco pontos. *[Enquanto Lz. anota as coordenadas Lr. bate palmas numa atitude que aparenta descoberta]* Já sei como ela deve fazer! É fácil.
> Lz.: Não lembro de ter estudado isso não.
> PES: Nem você e nem ela estudaram isso ainda.
> Lr.: Olha é lógica isso. Tem régua para usar, tem barbante...
> Lz.: Eu acho que não é necessário usar isso. Se é lógica, não é necessário usar isso. Cada negócio desse tem um centímetro é? *[Mostra dois pontos consecutivos na horizontal]*
> PES: Um centímetro não. Consideramos essa medida como uma unidade.
> Lz.: É só um chute é? Só um chute? *[Inicia uma contagem de espaços entre os pontos consecutivos na diagonal]*
> Lr.: É a menor distância entre eles é?
> PES: É.
> Lr.: É a menor distância entre eles.
> Lz.: *[Para a contagem]* Tem nada a ver. Nem assim é *[realiza um segmento de reta imaginário composto por pontos consecutivos na diagonal]* pelo menos.
> Lr.: Eu lhe ajudei?
> Lz.: É né, Deixa eu ver se eu consigo assim. *[Pega uma régua e aparenta tentar realizar a medição através dela]* A régua não tem nada a ver. Tem quantas unidades? Uma, duas, trêz... Vou chutar. Quatro, cinco, seis, sete. Dá sete unidades.
> PES: Você *[Lr.]* acha que ela está certa?

> Lr.: Eu acho que está errado. Deixa eu contar. *[Retira a régua do Geoplano e parece iniciar uma contagem silenciosa]* Dez. É dez. Posso dizer como eu faria?
> PES: É uma ótima idéia.
> Lr.: Pegaria o barbante e iria contando assim. *[Pega o barbante e conta os espaços misturando uma unidade como dois pontos consecutivos na horizontal e como dois pontos consecutivos na diagonal]*
> PES: O que você acha Lz.?
> Lz.: Eu acho que do jeito dela faz mais sentido.

Notamos alguns aspectos que valem a pena serem destacados: Primeiramente, notamos que elas, assim como os demais, se apropriaram como unidade de medida o espaço entre dois pontos consecutivos, ou na horizontal, ou na vertical. Como também já percebemos em todos os participantes, e mais claramente explicitado por Lz, a insegurança em calcular a distância entre dois pontos que estejam alinhados na diagonal. Como percebemos, assim como Vergnaud (1996a), elas estão inseridas em uma situação na qual não dispõe de todas as competências necessárias para resolverem o problema. Dessa forma, elas são obrigadas a destinar a um tempo de reflexão, exploração, a hesitação, a tentativas abordadas. Estes elementos irão conduzi-las que ao êxito quer ao fracasso. Isso depende dos esquemas de ação que são mobilizados. No caso das participantes, os esquemas não são suficientes para resolver o problema, pois seus conceitos (os de consideração de uma unidade) e os teoremas (como proceder para calcular a distância) ainda estão muito frágeis e inconstantes, uma vez que alternam uma unidade de medida tanto o espaço entre dois pontos consecutivos na vertical ou horizontal, com o mesmo espaço entre dois pontos consecutivos na diagonal.

No caso delas, essa forma de calcular a distância é muito imprecisa, além de equivocada. Isso aparenta uma diferença da forma que os demais participantes procederam, apesar desta não ser ainda apropriada, mas é a que menos apresenta contradição para uma atividade com jogo. Este deve ter suas regras bem estabelecidas (Campos, 2005), uma vez que calcular a distância entre dois pontos faz parte das regras do jogo.

Uma vez verificado os esquemas que os alunos recorreram na primeira fase da Dialética ferramenta-objeto e quais as sugestões propostas para resolver o problema na segunda, isto é, quais os invariantes operatórios foram mobilizados numa situação proporcionada e quais deles foram estruturados/reestruturados para resolver em parte o problema, partiremos para a terceira fase onde os alunos explicitam seus resultados.

3º momento: Institucionalização local.

Neste momento, antes da institucionalização do saber, observamos se os alunos sustentavam o mesmo invariante para resolver o problema através dos seus discursos, e se o defendia como procedimento correto para calcular a distância. Observemos a tabela que se segue com a distribuição dos participantes categorizados a partir de suas inquietações, ou não, a respeito da forma de calcular a menor distância entre dois pontos.

TABELA 3:
Categorização dos alunos a partir de seus discursos sobre a forma pela qual estabeleceram sobre o cálculo da distância entre dois pontos no período do jogo.

Categorização	Alunos
1. Participantes que apresentaram inquietações sobre o procedimento antes utilizado.	JA., Lr e T.
2. Participantes que não apresentaram inquietações sobre o procedimento antes utilizado.	W. e M.
3. Participantes que colaboraram com a discussão, mas não apresentaram uma colocação sobre o procedimento antes utilizado.	J. e Lz.
4. Participante que não se envolveu na discussão.	R.

Como podemos notar, três dos participantes apresentaram, antes de qualquer questionamento, uma inquietação sobre o procedimento que eles mesmos acordaram a respeito do cálculo da menor distância entre dois pontos. Em alguns discursos podemos observar isso com mais clareza. Selecionamos alguns recortes da transcrição para podermos analisá-las com mais minúcia. Primeiramente iremos observar a inquietação de JA. no trecho que se segue:

> PES: Queria saber de vocês qual a maior dificuldade de achar a distância? Estaria em achar os pontos? Identificar as coordenadas? Esse é o momento que eu posso ajudar vocês. Fiquem a vontade para se expressarem.
> JA.: Minha maior dificuldade é quando estar aqui pra achar o ponto *[aponta para o eixo das abscissas]*, por exemplo, zero-quatro.
> PES: Zero no x e quatro no y. Só isso a sua dúvida. Em relação ao cálculo da distância, existe alguma dúvida?
> JA.: Olha, pra calcular a distância daqui *[um ponto no 3º quadrante e um ponto no 1º quadrante, isto é, os dois pontos estão alinhados na diagonal]* eu só posso fazer isso é? *[Mostra os passos combinados de horizontal com vertical que ligam os pontos]* Será que eu posso fazer isso? *[Mostra o segmento de reta imaginário que une os dois pontos]* Não, né?

Podemos observar fatos importantes em seu discurso. O primeiro e a efetiva constatação que notamos (Ver tabela 1) sem precisar perguntá-lo sobre sua dificuldade em localizar pontos pertencentes ao eixo das abscissas ou ordenadas. Na sua fala ratificamos aquilo que observamos na prática, pois acreditamos, assim como Vergnaud (2007) apoiado no ponto de vista de Vygotsky, na importância da linguagem no processo de ensino das ciências. Porém, não podemos nos restringir em apenas esperar as palavras como única e exclusivamente forma que os alunos possuam para apresentar o conteúdo conceitual dos seus conhecimentos. Suas ações também expressam seus pensamentos.

O segundo fato é sua inquietação a respeito do cálculo da distância. O procedimento que utilizou foi uma forma rápida e invariante que encontrou para resolver o problema, mas ele apresentou uma dúvida que nas suas idéias iniciais já constavam, mas não tinha uma propriedade ou espaço para expressá-las. Dessa forma, este momento que a Dialética ferramenta-objeto propõe, nessa terceira fase, corrobora para entendermos um pouco, através do seu discurso, que conhecimentos antigos estão sendo usados e quais novos estão sendo criados espontaneamente (MARANHÃO, 2002). No caso de JA. ele já apresentava uma concepção, mesmo que "tímida", sobre a representação da menor distância entre dois pontos, apenas não tinha elementos suficientes nos seus esquemas para poder defendê-la.

Da mesma forma notamos em Lr. e T. Esta última apresentou uma forma de indignação, pois em um momento, antes do jogo, ela cogitou, mas não sustentou a idéia de levar em consideração um segmento de reta que une os dois pontos como a menor distância entre eles, uma vez que não chegaram (ela e sua parceira M.) a um consenso na colocação do valor numérico da distância. Podemos constatar a insegurança e o abandono da concepção no trecho que se segue:

> PES: *[Desloca apenas uma das fichas no tabuleiro de forma que fique na diagonal em relação à outra que está fixa]* E agora, qual o valor da menor distância entre esses dois pontos?
> T.: *[Conta, indicando com os dedos, agora o espaço entre dois pontos consecutivos na diagonal como uma unidade]* Um, dois, três!
> PES: Três? Espera um pouco, vocês estavam considerando uma unidade como a distância daqui pra aqui *[mostra dois pontos consecutivos na horizontal]* e agora você contou daqui pra aqui *[mostra dois pontos consecutivos na diagonal]* como uma unidade.
> M.: Então é doze!
> T.: Então, pode ser assim? *[Mostra com os dedos a combinação de horizontal com vertical entre os dois pontos]*
> PES: Precisamos encontrar a menor distância. Vocês devem decidir como quiserem.
> T.: *[Inicia a contagem contando os espaços entre os pontos, combinando horizontal com vertical]* Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove.

PES: Concorda com ela que é a menor distância? *[M. não responde e T. reinicia a contagem]*
T.: Pode ser assim também? *[Mostra com os dedos combinação com diagonal e vertical entre os dois pontos]*
M.: Não! Pode não! *[Olhando para PES]*
T.: Pode não, né?
PES: Como vocês decidirem. Fiquem à vontade. Apenas quero que vocês me dêem o valor numérico. *[T. e M. continuam contando]*
T.: Só pode ser assim mesmo! Se eu contar assim... *[Mostra com os dedos combinação com diagonal e vertical entre os dois pontos]* Um, dois, três, quatro, cinco, seis, ...
PES: Mas esse tamanho aqui *[mostra dois pontos consecutivos na vertical]* e igual a esse daqui? *[Mostra dois pontos consecutivos na diagonal]*
T e M.: Não!
M.: Eu acho que aqui *[Mostra dois pontos consecutivos na vertical]* é um. E aqui, fazendo assim *[mostra dois pontos consecutivos na diagonal]* é dois, não?
T.: Eu só sei que aqui *[mostra dois pontos consecutivos na vertical]* é um, e assim *[mostra dois pontos consecutivos na diagonal]* deve sem mais que um, pois aqui *[mostra dois pontos consecutivos na diagonal]* é maior que aqui! *[Mostra dois pontos consecutivos na vertical]*
PES: A discussão de quanto vale exatamente daqui pra aqui *[Mostra dois pontos consecutivos na diagonal]* pode ficar para outro momento. Agora vocês concordam que esses valores são diferentes?
T.: Sim!
PES: Então a menor distância daqui pra aqui, como você disse... *[Aponta pra T]*
M.: Nove!
PES: Então, você concorda também?
M.: É, pode ser.
PES: Então fechamos como se calcula a menor distância entre dois pontos, por enquanto.

A indignação de T. sobre a nossa “não aceitação” inicial das suas idéias, onde deixamos bem claro que eram os participantes que elegeriam a melhor forma de calcular a menor distância entre dois pontos fica explicita no trecho transcrito a seguir:

PES: [...] Antes de iniciar a partida eu perguntei quanto vale a distância entre duas fichas. Por exemplo, essas duas fichas aqui *[aponta para duas fichas pertencentes a uma reta na horizontal]* vocês, para calcular a distância entre elas, contavam os espaços entre os pinos e deduziam facilmente o valor, que neste caso vale quanto?
T.: Cinco.
PES: Cinco. Nenhuma dúvida enquanto a esta parte? *[As duas balançam a cabeça confirmando]* Qual a distância entre essas duas fichas daqui? *[Aponta duas fichas na mesma linha na vertical]*
M.: Três... É dois.
PES: Ok. Qual a distância entre esta ficha e esta? *[Aponta duas fichas na diagonal]*
T.: *[Inicia a contagem combinando percurso na horizontal com vertical]* Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez. Dez.
PES: É pra esse aqui. *[Aponta mais uma vez a ficha]*
T.: Ah é esse aqui é? *[Inicia uma nova contagem com a mesma combinação de percurso]* Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, onze.
PES: Foi assim que foi feito? *[Confirmam com a cabeça]* Presta atenção agora no raciocínio: vamos dizer que estamos aqui e existe uma barraca ali

> *[desenha dois pontos no quadro]* aí eu solicito a T que compre uma pipoca dessa barraca. Aí ela faz esse percurso *[desenha uma linha curva que une os dois pontos]*. Ok, ela chegou na venda. Aí eu peço a M: vá na mesma barraca, compre outra pipoca, mas vá na menor distância. Aí M faz assim... *[Desenha outra linha curva que une os dois pontos]*
> T.: Mas isso não é a menor distância.
> PES: Então, qual é a menor distância entre dois pontos?
> T.: É direto!
> M.: É uma reta.
> PES: Isso! A menor distância entre dois pontos é um segmento de reta. Quando eu digo qual a menor distância daqui pra aqui *[ponta as mesmas duas fichas na diagonal]* e você me disser onze, eu irei responder que não é a menor distância.
> T.: Por quê?
> PES: Porque a menor distância entre esses dois pontos é uma reta, ou melhor, um segmento de reta.
> T.: *[Aparenta estar decepcionada]* Eu fiz isso daquela vez...

O que podemos perceber na insegurança de T. em defender sua concepção esbarrou na dificuldade em entender como calcular o valor do segmento de reta disposto na diagonal em relação aos eixos ordenados, já que uma unidade é representada por dois pinos consecutivos na horizontal ou vertical.

Quatro dos demais participantes se dividiram igualmente na segunda e terceira categorização. Destaque para W. e M. na segunda, onde não apresentaram nenhuma reflexão diferenciada da inicial a respeito do cálculo da menor distância; e J. e Lz. na terceira que, apesar de terem participado efetivamente da discussão, não demonstraram nenhuma opinião que poderíamos levar em consideração para esta observação. Já R. não conseguimos enquadrá-la em nenhuma das categorias anteriores, pois não se envolveu na discussão.

Depois dessa explanação, percebemos a efetiva constatação dos alunos sobre suas escolhas. Iniciamos, então, um processo investigativo para que os mesmo percebam que sua forma de calcular a distância entre dois pontos só resolve uma parte do problema proposto, isto é, eles facilmente encontram o valor da menor distância entre dois pontos alinhados na horizontal ou vertical, mas se equivocam ao fornecer o valor da menor distância quando dois pontos estão alinhados na diagonal em relação aos eixos do plano cartesiano. Realizamos, dessa forma, através do processo de mediação didática que eles tomem a consciência desse equivoco.

Um fato constatado e que consideramos relevante destacar é que ***todos os participantes, quando questionadas qual a representação da menor distância***

entre dois pontos, deram a entender que é a do segmento de reta que une os dois.

Podemos observar essa constatação no seguinte trecho:

> PES: Mas qual é a menor distância pra vocês. É daqui pra aqui *[mostra com o barbante a linha reta]* ou assim? *[Mostra a combinação de horizontal com vertical, também com o barbante, que eles utilizaram no jogo]*
> JA.: Sem dúvidas é essa. *[Aponta para o segmento de reta, imaginário, que une os dois pontos]*

E também em uma parte do trecho que já apresentamos anteriormente da intervenção de T. e M.:

> T.: Ah é esse aqui é? *[Inicia uma nova contagem com a mesma combinação de percurso]* Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, onze.
> PES: Foi assim que foi feito, não é? *[Confirmam com a cabeça]* Presta a atenção agora no raciocínio: vamos dizer que estamos aqui e existe uma barraca ali *[desenha dois pontos no quadro]* aí eu solicito a T que compre uma pipoca dessa barraca. Aí ela faz esse percurso *[desenha uma linha curva que une os dois pontos]*. Ok, ela chegou na venda. Aí eu peço a M, vá na mesma barraca, compre outra pipoca, mas vá na menor distância. Aí M faz assim... *[Desenha outra linha curva que une os dois pontos]*
> T.: Mas isso não é a menor distância.
> PES: Então, qual é a menor distância entre dois pontos?
> T.: É direto!
> M.: É uma reta.
> PES: Isso! A menor distância entre dois pontos é um segmento de reta. Quando eu digo qual a menor distância daqui pra aqui *[ponta as mesmas duas fichas na diagonal]* e você me disser onze, eu irei responder que não é a menor distância.

Uma das respostas mais categóricas foi a de W. que sem nenhuma dúvida responde a nossa questão, que pode ser observado em:

> PES: *[Coloca duas fichas aleatoriamente na diagonal]* No jogo, para que você possa eliminar uma ficha do seu oponente é necessário que você forneça a menor distância entre duas fichas postas no tabuleiro. Por exemplo, daqui pra aqui vocês realizavam uma combinação de contagem *[Mostra combinação de contagem entre espaços da vertical com a horizontal]*. Uma pergunta: tenho dois pontos, qual é a menor distância entre eles?
> W.: Uma reta! É?

Esse trecho acima, nos remete ao que Vergnaud (1996a, 1996b) afirma sobre o que há de implícito nos esquema, pois W. não apresentou em nenhum momento algum esquema de que deixasse claro que já tinha essa concepção formada sobre a menor distância entre dois pontos.

Ainda nessa observação analisaremos o trecho da intervenção de Lz. e Lr., onde ocorreu o seguinte:

> PES: Certo. E qual a menor distância daqui *[(-1,2)]* pra aqui *[(-1,6)]*?
> Lz. e Lr.: *[Simultaneamente após algum tempo que aparentemente utilizou para realizar a contagem]* Quatro!
> PES: Fácil ou difícil?
> Lr.: Muito fácil. A bronca é quando está assim ô. *[Mostra no espaço um segmento de reta na diagonal]*

Já podemos perceber que Lr. afirma ter dificuldade quando dois pontos estão alinhados na diagonal, mas não apresenta a mesma quando eles estão alinhados na vertical. Continuando a análise, no trecho que se segue:

> PES: Pois é, e quanto vale a distância daqui *[(-4,2)]* pra aqui *[(-1,6)]*?
> Lr.: *[Pega o barbante e realiza um caminho que une os dois pontos e conta os espaços misturando uma unidade como dois pinos consecutivos na vertical e dois pinos consecutivos na diagonal]* Vale seis! Espera um pouco. *[Demonstra uma nova arrumação no barbante]* Errei. Vale cinco.
> PES: Ok. Me respondam uma coisa: Qual é nossa unidade de medida? Qual é a nossa referência?
> Lz.: Você disse que aqui *[espaço entre dois pinos consecutivos na horizontal]* vale um.
> PES: Certo. E aqui *[espaço entre dois pinos consecutivos na diagonal]* vale também um, como Lr. fez?
> Lz.: Eu acho que não. Esse *[espaço entre dois pinos consecutivos na diagonal]* parece ser maior que esse *[espaço entre dois pinos consecutivos na horizontal]*.
> Lr.: Então erramos tudo, não foi?

Esse trecho acima mostra a tomada de consciência de Lr. a respeito do seu equívoco em calcular a menor distância entre dois pontos, no caso quando os pontos estão alinhados na diagonal. Mas ainda continua tentando contar os espaços entre os pinos. Continuemos observando o momento da intervenção de Lr. e Lz.:

> Lz.: Eh! Então ela não ganhou!
> PES: Ganhou sim, vocês combinaram com calculariam a distância, lembra?
> Lz.: Poxa! Já estava ficando feliz! *[Risos]*
> PES: E agora, como vocês calculariam a distância *[(-4,2)]* pra aqui *[(-1,6)]*?
> Lr.: Deixa eu ver... *[Pega a caneta e inicia a contagem dos espaços entre os pinos realizando uma combinação de espaços na horizontal com vertical]* Sete. É a menor não é?
> PES: Sim.
> Lr.: *[Realiza mais duas outras contagens dos espaços entre os pinos com combinação de espaços na horizontal com vertical]* Só tem sete. É sete!
> PES: E aí Lz.. O que acha?
> Lz.: Assim tem mais lógica. Ta vendo que não precisamos de barbante nem régua!
> PES: E aí Lz. quanto vale a distância entre esses dois pontos *[(-5,-3) e (-4,2)]*? Vamos subentender que a distância que estou me referindo é sempre a menor possível.
> Lz.: *[Pega a caneta e conta os espaços repetindo o mesmo procedimento que Lr.]* É seis!

> PES: Concorda ou discorda Lr.?
> Lr.: Concordo.

Realizando um paralelo dos esquemas de ação da dupla nesse momento com aquele já discutido na tabela 2, percebemos uma mudança do esquema que pode ser considerado como relevante e invariante da conduta, uma vez que não há uma forma de se equivocar no valor da distância entre dois pontos através da combinação de espaços na horizontal com espaços na vertical, até o encontro entre os pontos. Esta foi a forma que anteriormente as participantes não estavam levando em consideração. Apesar da forma invariante atual ser mais adequada que a anterior, ela ainda não responde corretamente ao problema de encontrar a menor distância entre dois pontos. Dessa forma, continuamos com as provocações, que podem ser constatadas no trecho se segue:

> PES: Já que está todo mundo concordando vamos mexer um pouco com o juízo de vocês.
> Lr.: Lá vem ele!
> PES: *[Vai para o quadro e mostra dois pontos]* Se eu tenho esse dois pontos qual seria o seguimento que representa a menor distância entre eles.
> Lr.: Uma reta é claro.
> PES: Então, você está me dizendo que a menor distância entre dois pontos descreve uma reta? *[fazem com a cabeça que sim]* Certo. E qual é o valor da distância entre esses dois pontos *[(-1,6) e (-4,2)]*? Você acha que é sete?
> Lr.: Eu não sei como fazer. A única forma que eu encontrei foi essa.
> PES: E você Lz., encontrou outra?
> Lz.: Assim *[espaço entre dois pinos consecutivos na diagonal]* não vale um. Então como agente faz pra contar a reta?

Como vimos, Lr. nos deixa entender de que a menor distância entre dois pontos é o segmento de reta que os une, mas mesmo assim afirma não saber como calcular seu valor.

Um elemento que julgamos importante para o processo de conceitualização e também serve como proporcionador para a mudança de fase na Dialética ferramenta-objeto, é a motivação do aluno em querer conhecer que conhecimento ele necessita para resolver o problema, isto é, a disponibilidade que ele apresenta para aprender. Que podemos observar na última fala de Lz. no trecho acima. Esse pensamento nós compartilhamos com Macedo e Behar (2005), onde afirmam que o sujeito só sente necessidade de compreender o que julga importante para ele. No nosso caso, a institucionalização do saber se tornou importante a partir do momento que todos nossos participantes tomaram a consciência de não terem em seus esquemas uma forma de resolver o problema corretamente. O que constatamos também em:

> PES: Se fosse aqui? *[Retira uma ficha do lugar e a coloca em um pino que pertença a uma diagonal da outra ficha]*
> T.: Agora dá. *[Mais uma vez coloca o lápis para construir um segmento de reta imaginário]* Mas veja só é diferente, ô. *[Mostra a diferença de tamanho entre dois pinos consecutivos na vertical, que foi adotado como unidade, e dois pinos consecutivos na diagonal]*
> M.: Então, só pode quando estiver na reta. *[Aparenta estar se referindo quando duas fichas estão alinhadas na horizontal ou vertical]*
> PES: Não. Você tem que calcular a distância de qual quer jeito. Reto ou inclinado. E aí como agente faz? Eu sei.
> T.: Agente sabe que você sabe! *[Risos. M. e T. parecem tentar resolver o impasse]*
> T.: É quatro? *[M balança a cabeça discordando]*
> PES: *[Elas parecem continuar refletindo sobre o problema]* Querem saber como é que se faz?
> T e M.: *[Simultaneamente]* Quero!

Como percebemos os alunos estão dispostos a aprender. Então partiremos para a 4ª fase da Dialética ferramenta-objeto: a institucionalização.

4º momento: Institucionalização.

O momento da institucionalização foi seguido como previsto na metodologia, destacada no tópico 2.1.3. - 4º momento, já que partimos de um exemplo de como se calcula a distância em um caso particular. Em seguida, realizamos uma generalização, culminado com uma fórmula de recorrência para o cálculo de qualquer distância entre dois pontos, dadas as suas coordenadas.

Na parte em que discutimos como se encontra a distância entre dois pontos em um caso específico constamos alguns elementos nos esquemas dos alunos que consideramos relevante realizar suas análises.

A tabela abaixo expressa quais alunos perceberam a utilização do Teorema de Pitágoras como ferramenta útil para encontrar a distância entre dois pontos no caso particular. Recorremos a este exemplo pontual para tentarmos perceber se este teorema, que iremos utilizar para generalização do cálculo da distância entre dois pontos, fazia parte dos esquemas dos alunos, conforme a tabela que segue:

TABELA 4:
Categorização dos alunos a partir de seu conhecimento sobre o Teorema de Pitágoras.

Categorização	Alunos
1. Apresentaram total conhecimento sobre o teorema.	W., Lr. e R.
2. Apresentaram apenas o conhecimento da existência do teorema, mas não conseguiram expressar totalmente sua relação.	Lz., T., M.
3. Não se expressaram a respeito.	J. e JA.

A interpretação da tabela a cima é bastante curiosa, pois todos os três participantes enquadrados na primeira categoria expressaram claramente seu conhecimento sobre o teorema e informaram até a relação que ele anuncia, isto é, a representação simbólica que eles apresentaram foi bastante útil para entendermos seu conhecimento sobre o assunto. O que constatamos foi que não houve por parte dos seus companheiros de dupla[23] uma não aceitação da informação, por esse motivo existiram dois que se enquadraram na terceira categorização e apenas Lz., parceira de dupla de Lr., se colocou juntamente com a companheira, mas não deixou claro seu conhecimento sobre o teorema. Escolhemos o trecho dessas duas últimas, expresso em seguida, como constatação do que concluímos.

> PES: Boa pergunta. Vamos lá, deixa eu representar esses pontos aqui. *[Realiza um esboço do plano cartesiano no quadro com os pontos (-1,6), (-1,2) e (-4,2)]* quanto vale a distância daqui *[(-1,6)]* pra aqui *[(-1,2)]*? *[Traça um segmento de reta que une os dois pontos]*
> Lr.: Vale seis.
> PES: *[Traça outro segmento de reta que une os pontos (-1,2) e (-4,2)]* E aqui quanto vale?
> Lr.: Três.
> PES: Concorda Lz.? *[Confirma com a cabeça]* E agora, quanto vale daqui pra aqui? *[Traça um segmento de reta que une os pontos (-1,6) e (-4,2). Lz. e Lr. ficam em silêncio]* não estão reconhecendo essa figura que se formou quando eu liguei todos os pontos?
> Lr.: É um triângulo retângulo.
> PES: Pois é, existe uma relação no triângulo retângulo que eu posso saber o valor desse lado aqui. *[Aponta para a hipotenusa do triângulo]*
> Lz.: É aquele negócio do quadrado Lr.... Como chama mesmo? É...
> Lr.: Teorema de Pitágoras.
> PES: Isso. E o que diz o Teorema de Pitágoras?
> Lr.: "a" ao quadrado é igual a "b" ao quadrado mais "c" ao quadrado.
> PES: Na nossa figura, vocês conseguem identificar essas letras?
> Lr.: O "a" é esse maior... Tem um nomezinho... Hipotenusa, lembrei! E o "b" e o "c" pode ser qualquer um dos outros dois.
> PES: *[Escreve o que Lr. disse]* então que dizer que o Teorema de Pitágoras diz que o quadrado de "a", ou melhor, o quadrado da hipotenusa é igual a...
> Lr.: Soma dos quadrados dos catetos! Poxa estou fera! É que eu estou estudando pra o vestibular e vi isso em algum lugar.

[23] As duplas pode ser verificadas no Quadro 2 no capítulo referente a metodologia.

O que podemos também perceber é a idéia de campo conceitual presente neste momento, onde a aluna “passeia” por vários conceitos que estão contidos nos seus esquemas. Estes que estão conectados uns aos outros e se entrelaçam no processo de conceitualização (VERGNAUD, 1982). Apenas nesse trecho percebemos uma identificação de triângulo retângulo, os elementos que o definem e uma de suas relações métricas, o Teorema de Pitágoras. Acrescentamos ainda a presença do campo conceitual das estruturas aditivas, multiplicativas e das estruturas algébricas, quando partimos para calcular o valor da distância. Não satisfeitos com a resposta de Lr., pois ela apenas poderia ter memorizado a relação, formos um pouco mais a fundo no momento do questionamento para entendermos se ela, ou Lz., saberia realizar os cálculos através da relação. Observemos o trecho que se segue:

> PES: Muito bem, Agora é só substituir os valores. O “a” é o que eu quero encontrar. O “b” vale quanto Lz.?
> Lz.: Não sei... Pode ser qualquer um?
> Lr.: Pode!
> Lz.: Então, “b” é três e “c” é quatro.
> PES: Ótimo. Agora é só fazer as contas. Quanto é três ao quadrado?
> Lz.: Seis...
> Lr.: Nove né Lz.?
> Lz.: foi mal!
> PES: E quatro ao quadrado?
> Lr.: Dezesseis.
> PES: *[Escreve os valores no quadro]* Temos, então, que “a” ao quadrado é igual nove mais dezesseis, que dá...
> Lr.: Vinte e cinco.
> PES: E o que eu faço agora?
> Lr.: Tiro a raiz de vinte e cinco.
> PES: Que vale?
> Lr.: Cinco!
> PES: Acabamos de encontrar o quê?
> Lr.: O valor da hipotenusa?
> PES: Qual era o nosso problema Lz.?
> Lz.: Encontrar o valor daqui *[(-4,2)]* pra aqui *[(-1, 6)]*.
> PES: Achamos esse valor?
> Lz. e Lr.: Sim!
> PES: Vale?
> Lz.: Cinco.

Como podemos perceber, elas não apresentaram dificuldades significativas relativas à manipulação do Teorema de Pitágoras, houve sim um equivoco quando nos referimos ao cálculo de potência, mas não podemos afirmar se este foi um engano ou uma dificuldade, já que não houve dados suficientes para esta conclusão neste momento. Após terem realizados os cálculos de potência, elas retornaram ao problema e este aparentou ainda estar presente, pois Lz. responde espontaneamente à pergunta feita.

Voltando para a discussão dos resultados expressos na Tabela 4, as participantes M. e T., que forma uma dupla, foram enquadradas no segundo tipo de categorização. Observemos no trecho que se segue para depois comentaremos o ocorrido.

> PES: *[Realiza uma representação da situação no quadro esboçando um plano cartesiano e a localização das fichas no mesmo]* A distância da vermelha pra amarela *[traça um segmento de reta que une os dois pontos]* vale quanto?
> M.: Oito.
> PES: *[Escreve o oito ao lado do segmento realizado anteriormente]* A distância da vermelha para a rosa *[traça outro segmento de reta]* vale quanto?
> M e T.: Seis.
> PES: *[Anota próximo ao seguimento o número seis]* Seis. *[Realiza outro segmento que une os pontos que representam as fichas rosa e amarela e escreve ao lado dele a letra x]* Esse triângulo que foi formado é um triângulo retângulo. Há alguma possibilidade de eu calcular esse valor aqui? *[Mostra a hipotenusa do triângulo e T. fala baixo algo para M.]* Existe um cálculo muito conhecido pra eu saber esse lado do triângulo retângulo. Quem estudou o triângulo retângulo? Alguém muito famoso estudou esse tipo de triângulo...
> M.: Pitágoras!
> PES: E o que Pitágoras falou sobre o triângulo retângulo?
> M.: Que o quadrado... *[Parece tentar lembrar]*
> PES: Que o quadrado de alguma coisa...
> M.: Hipotenusa!
> PES: Que o quadrado da hipotenusa... Quem é a hipotenusa aqui? O segmento que vale seis, o que vale oito, ou o que eu representei por x?
> M e T.: O x!
> PES: O quadrado da hipotenusa... *[Realiza gesto para que elas continuem]*
> M.: Menos.
> PES: Menos?!
> M.: Lembro mais não.
> PES: Vamos ver se vocês se lembram. Uma das relações no triângulo retângulo, que também é conhecida como Teorema de Pitágoras, diz que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.
> T.: Eita! Bem que você disse que agente iria lembrar!

Notamos a dificuldade que as duas continham, expresso pelo conceito mal formulado da relação que apresentaram através de uma representação simbólica confusa. Como não poderíamos ajudá-las na compreensão deste assunto, nesse momento, pois fugiríamos dos nossos objetivos, apenas expressamos a relação do Teorema de Pitágoras para que elas lembrassem, tanto da relação como realizar cálculos a partir dela. Realizamos tudo isso objetivando que no momento de utilizarmos o teorema como ferramenta para gerarmos uma fórmula de recorrência para o cálculo da distância entre dois pontos, elas não ficassem sem entender o porquê da evocação desse teorema para o nosso assunto. Mais uma vez estamos defendendo a idéia que um conceito não existe isoladamente, mas sim inserido em um campo conceitual (VERGNAUD, 1982, 1996a, 1996b), onde para ocorrer o entendimento da obtenção de uma fórmula de recorrência para o cálculo da distância entre dois pontos, necessitamos mobilizar vários outros conceitos e um deles, a nosso ver, é a relação métrica no triângulo retângulo conhecida como Teorema de Pitágoras.

Como vimos, todos os participantes tomaram conhecimento; uns já os continham outros relembraram a partir da situação que apresentamos, sobre a importância do Teorema do Pitágoras no processo de conceitualização do assunto distância entre dois pontos. O exemplo mais pontual que apresentamos nos proporcionou também a observação, através dos invariantes e representações apresentadas, da forma como os participantes manipulavam o teorema como ferramenta matemática. Não percebendo dificuldades significativas, partimos para a formalização do assunto através da dedução da fórmula de recorrência da distância entre dois pontos. Essa institucionalização do saber foi realizada a partir dos procedimentos apresentados no tópico 2.1.3 – 4º momento da metodologia deste estudo.

Não foi constatada nenhuma dúvida sobre o processo de dedução da fórmula após a institucionalização, apesar de deixarmos claro que eles poderiam perguntar e interromper a qualquer momento a institucionalização para maiores esclarecimentos.

Um fato que merece nossa atenção fica constatado no trecho que se segue:

> PES: Para calcularmos a distância entre os dois pontos eu preciso da régua?
> Lr.: Não!
> PES: Preciso do barbante?
> Lr.: Não! Só da fórmula!
> PES: E para eu utilizar a fórmula eu necessito de quê?
> Lr.: Dos vares de x e de y de cada ponto.
> Lz.: Pra utilizar a fórmula eu preciso fazer isso tudo é? *[Está se referindo a demonstração da fórmula de recorrência]*

Diferente de Lr, Lz não conseguiu perceber que todo procedimento realizado estava direcionado para a obtenção da fórmula de recorrência, e que apenas esta é que irá merecer nosso interesse a partir dessa investida, em momentos que o calculo da distância não é tão simples, no caso quando os dois pontos estão alinhados na diagonal.

> Lr.: Não. Só da fórmula. Aqueles cálculos só foi pra chegar na fórmula.

PES: Entendeu como eu cheguei na fórmula?
Lz.: Entendi.
PES: Vocês tem alguma dúvida ainda em relação a aplicação da fórmula?
Lr.: Não. *[Lz. nega com a cabeça]*

Após a fase de institucionalização a Dialética ferramenta-objeto indica, na próxima fase, que este conhecimento, neste momento tratado como objeto de conhecimento matemático, passe a fazer parte do repertório de ação dos alunos como ferramenta matemática para resolução de problemas. Dessa forma, analisaremos em seguida a resolução dos exercícios propostos aos alunos na 5ª fase da Dialética ferramenta-objeto.

5º momento: familiarização e reinvestimento

Iremos analisar a familiarização e o reinvestimento de duas formas, já que nessa fase são desenvolvidos vários exercícios para a familiarização com o que é novo (MARANHÃO, 2002): primeiramente iremos direcionar nossa investigação para os dados coletados na resolução de exercícios[24] que os alunos realizaram logo após o momento de institucionalização, para em seguida nos direcionarmos para a análise de alguns elementos da segunda rodada com o jogo *DISTÂNCIA EM BATALHA*, já que, a permuta realizada nas cartas nesta rodada do jogo, já explicada na parte 3.1.3.- 6º momento da metodologia, envolve tanto os problemas antigos, quanto três novas situações mais complexas, característica da última fase da Dialética ferramenta-objeto.

Para análise da familiarização e reinvestimento dos alunos no momento dos exercícios, realizamos uma categorização e uma distribuição dos alunos a partir desta, expressas na Tabela 5, a seguir:

TABELA 5:
Categorização dos alunos a respeito da aplicação da fórmula de recorrência e a realização dos cálculos para obter o resultado.

Categorização	Alunos
1. Aplica fórmula corretamente e realiza os cálculos sem dificuldades.	Lr.
2. Aplica fórmula corretamente e apresenta dificuldade em realizar os cálculos com números racionais.	T., W. e Lz.
3. Aplica fórmula equivocadamente e realiza os cálculos com dificuldades.	J., JA., M. e R.

[24] Terceira questão da Ficha de exercícios (Apêndice II).

Como podemos constatar na tabela acima, metade dos participantes apresenta muitas dificuldades na utilização da fórmula de recorrência e na realização correta dos cálculos. A esse fato pode ser associado um fator importante: os alunos não conseguiram, neste momento, atribuir sentido a esse tipo de conhecimento, uma vez que não apresentaram conhecimentos algébricos importantes, nos seus esquemas de ação, para entender o que a fórmula de recorrência solicitava. Podemos constatar este equivoco no trecho que se segue da transcrição da intervenção:

> PES: *[Observa que R. se confunde com as coordenadas para colocá-las na fórmula]* Atenção nessas substituições. Você tem que se perguntar qual é o x de A? Em seguida, qual o x de B? Para depois substituir eles na fórmula. Entendeu?
> R.: Entendi.
> PES: *[Observa o desenvolvimento de JA. e percebe que o mesmo calculou o quadrado de três igual a seis]* Isso aqui é três ao quadrado? Vale quanto, três ao quadrado?
> JA.: Eita! *[Corrige seus cálculos]*
> PES: *[Observa o desenvolvimento de JA., em outra questão, e percebe novamente que o mesmo calculou o quadrado de três igual a seis]* Quanto é cinco menos dois?
> JA.: Três!
> PES: E três ao quadrado?
> JA.: Eita! [Corrige seus cálculos novamente]
> PES: Rapaz... Atenção nas contas!
> JA.: Acho que fiz alguma coisa errada aqui. Vem dar uma olhada...
> PES: *[Observa que JA. realizou a combinação x de A menos o y de A no lugar de x de A menos x de B]* Observe as coordenadas que você utilizou nas substituições. Você deve fazer x de A menos x de B, mais y de A menos y de B. Você não fez isso! Tente corrigir. *[JA. volta para os cálculos]*
> R.: Agora eu não sei mais.
> PES: Como assim, não sei?! Quanto é trinta e seis mais sessenta e quatro? *[R. balança a cabeça negativamente]* Põe um abaixo do outro e soma, oras! *[Risos. R. realiza o procedimento que PES a instruiu]*
> PES: Pronto terminou?
> R.: *[Confirma com a cabeça]* Dá cem!
> PES: E agora, o que eu faço?
> R.: Raiz de cem... dez!

Notamos várias dificuldades apresentadas por R. e JA., não diferentes das que M. e J. apresentaram no momento da resolução de exercícios. Dentre eles, as mais freqüentes estavam na forma de utilização da fórmula de recorrência. Os alunos não apresentaram a iniciativa de investigar quais elementos tinham que ser fixados para que não houvesse erros nos cálculos. Essa dificuldade, não nos preocupou, já que ela pode ser justificada pelo fato de que o conhecimento ainda continua recente.

O que mais chamou nossa atenção foi a dificuldade em outros assuntos que os alunos apresentaram até agora, a potenciação, e que neste momento ficou muito mais explicito, além de também apresentar dificuldades em cálculos com números relativos. Podemos constatar esses problemas, além da transcrição acima, em um dos exercícios representado na figura seguinte:

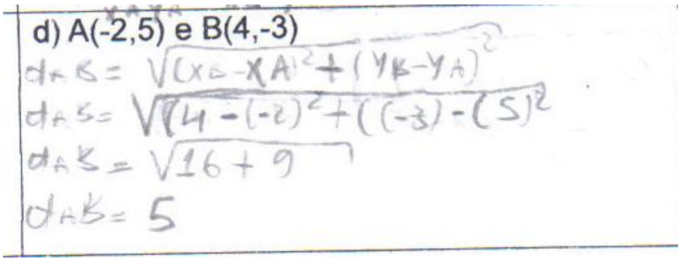


Figura 09: Exercício resolvido por JA.

Retornando aos resultados apresentados na Tabela 5, três alunos foram efetivamente claros informando que não sabiam realizar cálculos com números racionais, que estava disponível na 3ª questão, letra *c*, da lista de exercícios que disponibilizamos. Podemos constatar nas palavras de W. apresentada em seguida:

> W.: A letra "c" do terceiro eu não vou conseguir fazer!
> PES: Por quê?
> W.: Não sei fazer conta com fração, pergunta a JC. *[Referência ao professor dela]*

Já Lr., única a realizar todos os exercícios propostos sem dificuldades, mostra sua desenvoltura em suas respostas mostradas a seguir:

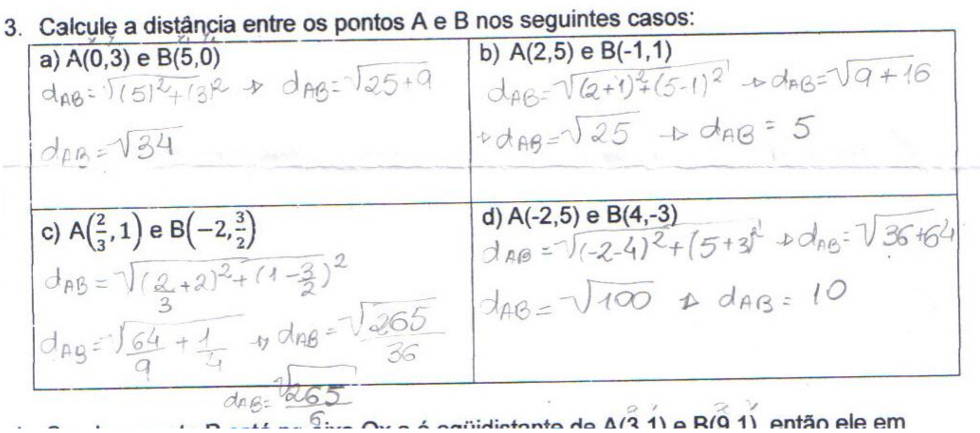


Figura 10: Exercício resolvido por Lr.

Como podemos notar em sua resolução, muitos teoremas e conceitos já fazem parte dos esquemas de ação de Lr. Um teorema-em-ação, de diferenciar os pares ordenados, que ela explicita está exposto a partir da representação simbólica na letra *a*, onde coloca em cima de cada coordenada uma diferenciação para poder utilizar na fórmula. A apropriação desse teorema se torna implícita nas demais questões. A aplicação é tão direta da fórmula de recorrência que aparenta não necessitar repeti-la com freqüência, como faz alguns outros participantes, como por exemplo JA. na figura 01 acima. Lr. realiza muitos cálculos mentais, procedendo dessa forma com vários resumos nos cálculos, deixando transparecer seu domínio com os demais assuntos, potenciação, operações com números racionais e radiciação. O que podemos notar é que sua aprendizagem não apresenta dificuldades em relação aos problemas apresentados, já que também não tem dificuldades nas subtarefas para realização da situação proposta.

Vamos investigar mais esse 5º momento na situação de jogo que apresentaremos em seguida. Nesse momento realizamos as mesmas observações feitas no 1º momento da intervenção. Estas foram divididas em duas partes, sendo a primeira, sobre a localização de pontos no plano cartesiano e a segunda a utilização do conhecimento adquirido até o momento para calcular a distância entre dois pontos.

Partiremos para a análise do primeiro momento do jogo. Realizamos, na Tabela 6 em seguida, a mesma categorização feita na Tabela 1. Para podermos enquadrar os participantes e posteriormente realizar um paralelo entre os resultados.

TABELA 6:
Categorização dos alunos a partir da atividade de localizar pontos no plano cartesiano.

Categorização	Alunos
1. Não apresentou dificuldade em localizar pontos no plano cartesiano.	J., W., Lr., Lz. e T.
2. Dificuldade em localizar pontos no plano cartesiano.	JA. e M.
3. Dificuldade em localizar pontos pertencentes a um dos eixos do plano cartesiano.	JA., R. e M.

Como podemos observar, os participantes apresentaram uma significativa mudança de categorias quando nos referimos a encontrar pontos no plano cartesiano, ao pormos em paralelo com as observações realizadas na Tabela 1. Os três que não apresentaram dificuldade na primeira seção do jogo (Lr., W. e T) continuaram, ratificando, dessa forma sua segurança na localização dos pontos, e foi acrescentada a primeira categorização mais dois participantes: J. e Lz. Seus progressos podem ser observados nos dois trechos seguintes. Primeiramente observemos J., que além de ser enquadrada na categoria de dificuldade em localizar pontos no plano cartesiano, ela apresentava também uma dificuldade que consideramos mais complexa, que era a de localizar pontos em um dos eixos do plano cartesiano. Realizamos essa classificação, uma vez que existiram pessoas que localizavam facilmente pontos que não pertenciam a nenhum dos eixos e quando postos em uma situação de localizar pontos no eixo não conseguiam com facilidade encontrá-los. Como podemos notar em seguida, J. não apresenta nenhuma dificuldade em localizar pontos no plano, nem aqueles pontos que consideramos necessitar de uma abstração mais elaborada, os que pertencem aos eixos ordenados.

> J.: *[Joga os dados duas vezes seguidas e anota as coordenadas]* Seis... E zero. É aqui? Está certo?
> PES: Sim. Pode iniciar W.

Outra participante que demonstrou uma significativa mudança nos seus esquemas de ação foi Lz.. Ela mesma explica seu desenvolvimento no trecho que separamos em seguida:

> Lz.: Depois que a pessoa se acostuma, fica mais fácil. *[Lança os dados]* Seis. *[Anota na folha e lança os dados novamente]* E menos dois.
> PES: Essa foi tua penúltima ficha?
> Lz.: Foi. Seis e menos dois. Seis... *[Coloca o dedo no seis do eixo Ox]* Menos dois. *[Coloca a ficha nas coordenadas encontradas]*

Observamos que essa mudança é significativa, nas duas, mais ainda está sustentada com teoremas-em-ação que precisam ser explicitados, como percebemos em Lz. no trecho acima. Ela ainda procede com o teorema-em-ação do cruzamento de paralelas para localizar o ponto. Esse procedimento não observamos mais em Lr., W. e T.

Os demais participantes continuam com dificuldade em localizar pontos no plano, mas quando questionados sobre sua escolha de localização, eles logo mudam de idéia e encontram o ponto solicitado. Dessa forma, eles continuam errando, mas não necessitam mais de explicações sobre a forma de localizar pontos no plano. Podemos observar isto em:

> JA.: *[Enquanto R. procura o ponto obtido, ele joga os dados]* Menos seis... *[Anota na folha em seguida lança novamente os dados]* Mais seis.
> PES: *[Primeiramente JA. coloca a ficha no ponto de coordenadas (6,-6)]* Tem certeza que é aí?
> JA.: *[Retira a ficha do lugar, encontra o ponto obtido no lance dos dados com o dedo, mas coloca a ficha no ponto (0,6)]* Ôpa! Acho que errei de novo, é aqui. *[Retira a ficha e em seguida a coloca no local obtido com os lances dos dados]*.

No trecho seguinte podemos observar dois fatos; observá-lo-emos:

PES: *[JA. lança os dados e obtêm dois números iguais]* Dois números iguais quanto vale?
R.: Zero!
JA.: *[Joga os dados novamente]* dois. *[Enquanto JA. pensa onde colocar sua ficha R. faz sua jogada silenciosa e realiza as suas anotações. JA. decide colocar a ficha no ponto de coordenadas (0,0)]*
PES.: Esse é o zero-zero JA. Onde fica o zero-dois? Em R., onde fica o zero-dois?
R.: *[Parece concentrada a procura do ponto para colocar sua última ficha]* Como? O zero-dois?
PES: Sim! *[Ela aponta para o ponto de coordenadas (2,0)]* esse é o ponto de coordenadas dois e zero... O que acontece é que procuramos o inverso, o ponto zero e dois. *[R. rapidamente encontra o ponto]*. Lembraram? *[R. coloca a ficha no ponto (-2,2)]* Como é? Qual é o ponto de estás procurando mesmo?
R.: O menos dois-dois! Aqui! *[Aponta o ponto com a ficha já no lugar]*.

Como podemos perceber, mais uma vez, JA. apresenta dificuldade em localizar o ponto e R. ainda não está segura na localização do mesmo quando pertence a um dos eixos ordenados. Procedendo da mesma forma que realizou na primeira seção do jogo, através da tentativa e erro, uma vez que estava certa que esse ponto pertencia a um dos eixos ordenados, já que uma das coordenadas tem valor dois.

Terminada a análise da primeira parte do jogo, observemos os principais elementos que surgiram e a investigação que realizamos para a segunda.

Iniciaremos a observação e análise da segunda parte com o jogo focalizando ainda o 5º momento da intervenção orientada pela 5ª fase da Dialética ferramenta-objeto: familiarização e reinvestimento.

Observemos o trecho transcrito em seguida:

Lz.: Ah! *[Retira uma carta do monte]* Escolha uma de suas fichas para que seu oponente possa eliminá-la. Cinco pontos para ele.
Lr.: Pode escolher.
Lz.: Eu escolho e ela tem que calcular a distância pra ganhar os pontos, não é?
PES: Isso.
Lz.: Aham! *[Sorrir]* Vou escolher essa daqui. *[Aponta para a ficha de coordenadas (-4,0)]*
Lr.: Deixa eu ver qual é a melhor...
Lz.: Menos...
Lr.: É o quatro e menos quatro. *[Anota na folha]* E o meu é menos seis... *[Anota na folha]* E menos três. Vou fazer o Teorema de Pitágoras... Já estou acostumada com aquele *[a utilização da fórmula de recorrência]*, vou fazer desse jeito mesmo.
Lz.: Tu deveria ir pelo outro, seria um desafio, né?
Lr.: Engraçadinha! *[Risos]*
Lz.: Se eu fosse fazer eu já errava. *[Acompanhando a resolução de Lr.]*
PES: E era?
Lz: Por que eu iria colocar dez aqui. *[Aponta para $(-4+6)^2$]* Mas tem o jogo do sinal.

Lr.: A distância é raiz de treze.
PES: Raiz de treze? Está certo? *[Para Lz.]*
Lz.: *[Conferindo os cálculos na folha de Lr.]* Está! Tem nenhum erro não!

Podemos notar, nesse momento do jogo, a ratificação das conclusões que obtemos através da investigação dos dados apresentados na Tabela 5. A desenvoltura de Lr. na resolução do problema apresenta um refinamento, através da representação simbólica que realiza para calcular a distância solicitada. Isso podemos observar na figura em seguida:

$$A(\overset{x_0}{-4},\overset{y_0}{0}) \quad , \quad B(\overset{x_1}{-6},\overset{y_1}{-3})$$

$$d_{AB} = \sqrt{(-4+6)^2 + (-3)^2} \rightarrow d_{AB} = \sqrt{4+9} \rightarrow d_{AB} = \sqrt{13}$$

Figura 11: Cálculos utilizados por Lr. para resolver o problema proposto pela carta que Lz. retirou.

No trecho selecionado acima Lz. confirma nossas conclusões a respeito de sua dificuldade na realização de cálculos matemáticos, através da sua própria fala, uma vez que confirma que iria se confundir nos cálculos com números relativos, já constatado.

Um ponto que despertou nossa curiosidade é como o conhecimento adquirido no processo já faz parte do repertório nos esquemas de ação do sujeito. Essa observação é notória nas palavras de JA., apresentadas em seguida:

R.: “Elimine uma ficha de seu oponente. Dez pontos”.
PES: Lembra como se elimina a ficha de um oponente? Tem que informar a distância de uma ficha tua pra uma ficha dele que será eliminada.
R.: Eu escolho essa minha *[aponta para a ficha de coordenadas (-2,-1)]* e essa dele. *[aponta para a ficha de coordenadas (5,-1)]*
JA.: É bom que está na linha não precisa usar a fórmula!
PES: Qual o valor da distância?
R.: Sete!
PES: Sete! Muito bom! Dez pontos!

Continuando a análise da segunda seção do jogo como JA. e R., notamos, como já havíamos discutido na análise da Tabela 3, JA. apresenta dificuldade em localizar pontos no plano, mas essa dificuldade não é a mesma encontrada na primeira partida como o jogo, pois como podemos perceber, no trecho que se segue, ele não encontra dificuldade em expressar as coordenadas do ponto, mas foi enquadrado na 2ª e 3ª categoria da mesma tabela por não apresentar segurança e perspicácia em todas as suas informações.

> JA.: *[Retira uma ficha do monte]* “Escolha uma ficha e informe suas coordenadas. Cinco pontos”. Escolho essa [aponta para a ficha com coordenadas (-6,6)]
> PES: Sim! E quais são as coordenadas?
> JA.: É menos seis-seis.

Diferentemente de JA., J. apresentou, como já informamos na análise da mesma tabela, uma significativa mudança nos seus esquemas, pois sua segurança na informação das coordenadas do ponto que W. escolheu é visível e permanente, isto é, o teorema-em-ação utilizado é considerado verdadeiro sempre para esse tipo de situação e se estende para as outras seções do jogo. Como podemos notar em:

> J.: [Retira uma carta do monte] “O oponente irá escolher uma ficha para que você possa fornecer suas coordenadas. Cinco pontos.”
> W.: Ela vai ganhar cinco pontos. Essa *[(-5,6)]*.
> J.: Menos cinco-seis.
> PES: J. acaba de abrir o placar com cinco pontos!

A repetição dessa segurança que J. apresenta pode ser observada mais uma vez no trecho eu seguida:

> J.: *[Retira uma carta do monte]* “O oponente irá escolher uma ficha para que você possa fornecer suas coordenadas. Cinco pontos.”
> W.: Essa *[(-4,-2)]*.
> J.: Menos quatro-menos dois. Cinco pontos!

Passaremos para última fase da Dialética ferramenta-objeto, nomeada de novo problema, para finalizarmos o que Régine Douady (1982) considera como ciclo de aprendizagem.

6º momento: Novo problema.

Na tabela 7, em seguida, podemos observar a distribuição dos participantes em sete categorizações diversificadas. Nesta fase da Dialética ferramenta-objeto, observamos a reutilização do novo conhecimento em uma situação mais complexa, que envolveu outros conceitos, propriedades e procedimentos.

A partir das citadas observações, pudemos identificar quais as relações que os participantes realizaram e quais suas principais rupturas entre o novo conhecimento e os conhecimentos já existentes no seu repertório de esquemas.

Compartilhamos da concepção de Douady (1986), uma vez que podemos indagar sobre a apropriação de um conhecimento matemático pelo aluno quando ele é capaz de utilizar esse conhecimento adquirido como ferramenta explicita nos problemas que lhes são propostos, mesmo que não haja indicação explícita acerca da utilização dos conhecimentos para resolver tais problemas. Acrescentamos ainda que essa apropriação é concretizada quando os alunos são capazes de realizar adaptações quando as condições habituais de uso não estão exatamente satisfeitas, para interpretar os problemas. Dessa forma, partiremos para a análise da Tabela 7 em seguida:

TABELA 7:
Categorização dos alunos a partir da identificação e utilização do assunto *distância entre dois* pontos na resolução de um problema mais complexo

Categorização	Alunos
1. Identificou o assunto como ferramenta para resolver o problema e apresentou facilidade na sua manipulação.	Lr. e W.
2. Identificou o assunto como ferramenta para resolver o problema, mas não apresentou facilidade na sua manipulação.	T. e Lz.
3. Identificou o assunto como ferramenta para resolver o problema apenas pela mediação do parceiro(a) de dupla e apresentou facilidade na sua manipulação.	J.
1. Identificou o assunto como ferramenta para resolver o problema apenas pela mediação do pesquisador e apresentou facilidade na sua manipulação.	JA.
2. Identificou o assunto como ferramenta para resolver o problema apenas pela mediação do pesquisador e não apresentou facilidade na sua manipulação.	R.
3. Não foi possível identificar nenhum envolvimento com o problema mais complexo.	M.

Como podemos notar, na leitura da tabela acima, T., Lr., Lz., W. e J. obtiveram um melhor desempenho quando postas em uma situação mais complexa. Um fato que aguçou nossa curiosidade foi que Lr. e Lz. formaram uma dupla e W. e J. outra. E nas duas duplas Lr. e W. apresentaram um repertório de esquemas de ação significativos[25] para a conceitualização do assunto proposto. Podendo a vir a facilitar o processo de conceitualização do assunto por Lz. e J., já que suas respectivas parceiras podem ter realizado algum tipo de intervenção nas suas ZDP. T. apresentou uma maior dificuldade, mas assim como Lz. superou-a, como iremos apresentar mais à frente.

Observemos o processo de identificação e aplicação do assunto nesse novo problema proposto na intervenção de Lr. e Lz., como exemplificação do que

[25] Escolhemos a palavra “significativo”, pois existem algumas ressalvas sobre as dificuldades conceituais das duas que não foi possível levantar dados suficientes para concretizarmos. Uma vez que não faz parte de nenhum dos objetivos propostos neste trabalho. Notamos, apenas, algumas dificuldades em W. em resolver cálculos com números racionais, já exposta nesta análise.

constatamos na tabela acima. Iniciaremos a partir da analise do trecho que se segue:

> Lz.: *[Retira uma carta do monte]* É diferente esse. “Calcule a área do triângulo retângulo cujos vértices você escolhe”. Vértice são os pontos não é? *[PES confirma com a cabeça]* “Caso não haja um triângulo retângulo no tabuleiro coloque uma nova ficha nele de modo a obter um...”
> Lr.: Já achei um triângulo retângulo... Achei dois.
> Lz.: “...e calcule sua área”.

Como podemos perceber Lz. nota a diferença na situação proposta e logo recorre a seus esquemas para atribuir sentido a ela, através do questionamento sobre seu conhecimento acerca do que vem a ser um vértice. Enquanto isso, Lr. não apresenta a mesma inquietação de Lz. sobre o assunto e já encontra o que a carta está solicitando. Continuaremos a nossa análise.

> PES: Primeiro você vai observar se tem um triângulo retângulo...
> Lz.: Tem.
> PES: Se tiver você vai calcular a área do triângulo. Sabe como se calcula a área do triângulo retângulo?
> Lz.: Não.
> PES: Vamos fazer a primeira parte. Identificar o triângulo retângulo.

Como podemos perceber a Lz. expressa através de sua fala que não possui conhecimento sobre o cálculo da área de um triângulo. O pesquisador interfere dividido o problema em duas partes como podemos perceber no mesmo trecho acima. Acompanhado a resolução de Lz.:

> Lz.: Precisa ser com três pontos...
> Lr.: Claro, não é Lz.! *[Risos]*
> Lz.: É que eu estava pensando naquela questão...
> Lr.: E eles têm que estar na mesma direção, no caso aqui agora...
> Lz.: Aqui é um... *[Aponta para as fichas de coordenadas (-4,0) (-5,3) e (-3,5)]* Não... É por que está muito aberto... E se eu não achar, o que é que acontece?
> PES: Aí você pega uma ficha coloca e vai encontrar um triângulo retângulo. Você pode formar um triângulo retângulo a qualquer momento, mas você tem apenas uma ficha pra colocar.
> Lz.: E se eu não conseguir mesmo assim?
> PES: Você perderá a vez e consequentemente os pontos.
> Lr.: Quer que eu diga?
> Lz.: *[Aparenta não ter ouvido a proposta de Lr.]* Pode ser um triângulo retângulo enorme?
> PES: Pode. *[Imediatamente ela coloca dois dedos, um de cada mão, em pontos no Geoplano, o (-5,3) e o (2,2)]* E o outro ponto?
> Lz.: Aqui. *[Indica o ponto (-2,6) como o outro vértice do triângulo]*
> PES: Esse? *[Realiza segmentos de retas imaginários com o dedo, que unem os pontos formando o triângulo]*
> Lz.: Ou aqui *[aponta como terceiro vértice o ponto (-3,5)]* pra ficar menos...
> Lr.: Quer que eu diga onde tem um triângulo retângulo?
> Lz.: Lr., aí você vai estar facilitando pra mim...
> Lr.: Aí eu ganho cinco pontos.

> Lz.: Ai! Não! *[Risos]* Lógico que não!
> PES: Sim você escolheu quais? Tem que ser três pontos que existem.
> Lz.: Então, eu tinha dito aqui. *[Mais uma vez indica os pontos (-5,3), (2,2) e (-2,6) como vértices do triângulo retângulo]*
> PES: Pode ser.
> Lz.: Acertei!
> Lr.: Não. Não tem que estar na mesma reta? *[Desliza o dedo do ponto (-2,5) até o ponto (2,2)]*
> PES: Ele está na reta, mas temos que levar em consideração outras variáveis para verificar se o triângulo é retângulo, mas esse que ela me mostrou é sim retângulo.

Notamos que, no trecho acima, Lz. possui uma dificuldade em encontrar um triangulo retângulo, mas acaba encontrando um que aparentemente não é tão simples de ser identificado (um triângulo retângulo que não está apoiado em nenhuma reta paralela a um dos eixos). Até mesmo Lr. não identifica, a primeira vista, que o triângulo escolhido possa ser retângulo.

Em seguida podemos perceber mais algumas representações que são bastante relevantes apresentadas por Lz. e Lr:

> Lz.: Aí eu vou ter que calcular a área?
> PES: É.
> Lr.: Quer que eu diga o que eu achei?
> PES: Diz.
> Lr.: Esse daqui. Esse *[aponta para o seguimento imaginário que une os pontos (2,2) e (2,-6)]*, esse *[aponta para o seguimento imaginário que une os pontos (5,-6) e (2,-6)]* e esse *[aponta para o seguimento imaginário que une os pontos (2,2) e (5,-6)]*. Mas você disse esse *[aponta para o triângulo imaginário anteriormente encontrado por Lz.]*
> Lz.: Não, é esse mesmo. Mas eu perdi, espera aí... *[Lr. ajuda a encontrar]*
> Lr.: Tem que calcular...
> PES: A área... A área do triângulo. Como é que se faz?
> Lz.: É aquela questão de base vezes altura... Alguma coisa assim?
> PES: Quase isso. Base vezes altura sobre dois.

Notamos, no trecho acima, que o problema proposto para Lz. tem um significado para ela, uma vez que ela sabe exatamente o que deve realizar, que é calcular a área do triângulo. Percebemos também uma provável justificativa da não aceitação de Lr. sobre o triângulo escolhido por Lz, quando aquela aponta um triângulo retângulo apoiado nas paralelas dos eixos ordenados.

Os assuntos que estão sendo colocados em jogo, neste momento, são os de cálculo de área de um triângulo retângulo a partir dos lados e o de distância entre dois pontos. Como já vimos, o primeiro assunto não faz parte dos esquemas de Lz. e não está completamente formulado nos de Lr., por isso que apenas apresentamos como realizar os cálculos. O que queremos perceber é se elas mobilizam o conhecimento adquirido recentemente na resolução do problema, já que este último assunto não foi apresentado nenhuma indicação da sua utilização.

Observemos a continuação da intervenção no trecho que se segue:

> Lz.: A base... A base... Vai ser essa no caso *[Descreve o segmento de reta imaginário que une os pontos (-5,3) e (-2,6)].* E altura é essa *[Descreve o segmento de reta imaginário que une os pontos (-2,6) e (2,2)].* Pra eu saber o valor da base eu tenho que contar o espaço... Não! Eu tenho que saber o valor da distância daqui pra aqui. *[Descreve o segmento de reta imaginário que une os pontos (-5,3) e (-2,6)]* É sério.
> PES: Boa garota! É isso mesmo.
> Lz.: Ai meu Deus! Ai, ai! *[Lr. bate palmas]* Ah, esse *[o triângulo que Lr. encontrou]* também tem que fazer? Não!
> Lr.: Esse seria mais direto. Já está todo mastigadinho.
> PES: Pois é. Quanto valeria a base dele? *[Para Lz.]*
> Lz.: Um, dois, três.
> PES: Qual é a altura?
> Lz.: Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito! Ai Senhor!
> PES: Ou você faz os cálculos ou abre mão dos pontos.
> Lz.: Como? Nãããão! Não! *[Risos]*
> Lr.: Aí me dá cinco.
> Lz.: Não Lr., tu já estás com cinco aí!
> Lr.: E aí eu fico com mais cinco...
> Lz.: Não! Eu não vou desistir.
> Lr.: Então faça!
> Lz.: Lógico que eu vou fazer.
> Lr.: Vai fazer daqui *[(-2,6)]* pra aqui *[(-5,3)]*, depois esse *[(-2,6)]* pra esse *[(2,2)]*, não é?
> PES: Perfeitamente.

Lz. realiza uma boa colocação quando consegue identificar que para encontrar o valor de um lado do triângulo escolhido tem que calcular a distância utilizando o assunto que acabou de estudar. Isso nos remete à apropriação que Lz. realizou do assunto e como ele agora faz parte dos invariantes operatórios dela. Lr. colabora com o entendimento da utilização do novo conhecimento em uma nova situação e ainda demonstra facilidade em perceber a melhor situação para aplicar tal conhecimento, quando diz que no triângulo que ela escolheu “já está todo mastigadinho”.

A situação de jogo proporcionou, nesse momento, um desafio motivacional (FERNANDES, 1995) para que Lz não desistisse de realizar os cálculos. A competição sadia (CAMPOS, 2005) ajudou Lz. a continuar sua investigação e se concentrar no problema proposto. Notamos que a competição é sadia em vários momentos na intervenção, como já apresentamos anteriormente, mas neste momento também fica explícita essa ação, já que Lr. informa como proceder para realizar os cálculos. O que vamos perceber em seguida são as dificuldades que Lz.

demonstrou para realizar os cálculos e o que ocorreu nesse processo de resolução do problema proposto.

> Lz.: X é menos cinco e y é três. Em acho que não sei nem mais como se faz... Menos cinco e três... Achei. No x é menos dois e seis no y. Menos dois e seis. *[Sempre realiza anotações depois de cada descoberta]* Deixa eu dar uma olhada na sua organização...
> Lr.: Vou deixar, vou deixar...
> Lz.: *[Realiza anotações e Lz. faz um gesto que aparenta incômodo com algo que está sendo realizado]* Tem alguma coisa errada é?
> Lr.: Até agora não.
> PES: É que ela quer dá dica, ou estímulo pra você desistir.
> Lz.: Tem alguma coisa errada. *[Pega as anotações de Lr.]*
> PES: Tem que observar a fórmula.
> Lz.: Aqui está errado. Eu coloquei x-zero e x-um... É pra ser x-zero e y-zero.
> Lr.: Vou olhar não, se não dá agonia. Fico com vontade de dizer. Só que eu não posso dizer. Vale quanto mesmo? Vale dez, olha aí! Se eu disser...
> Lz.: Ajuda sua amiguinha. *[Risos.]* Vou pegar minha anotação mesmo. Ainda vou ganhar o ponto e ganhar à custa dela. *[Risos]* Se tiver um erro fala antes de eu acabar.
> Lr.: Eu, falar. Vale dez pontos minha filha!
> PES: Lr. não consegue ficar quieta na cadeira de agonia.
> Lz.: Agoniada estou eu aqui. *[Continua realizando os cálculos]* Tem alguma coisa errada aqui. Está na minha cara e eu não consigo ver.
> PES: X-um...
> Lz.: X-um é menos dois.
> PES: Menos [ênfase] x-zero!
> Lz.: Menos cinco. *[Algo parece incomodar Lr.]* Y-um é seis, menos y-zero que é três.
> PES: Pronto.
> Lz.: Fica três positivo...
> Lr.: Faz a conta Lz.! E eu vou dizer onde está errado depois.
> Lz.: Olha se for uma besteirinha eu choro.
> PES: Ô não chore não!
> Lz.: Rapaz, na minha cara e eu errar, não é possível.
> PES: Deixa de ser ruim Lr.!
> Lz.: Ele já sabe que eu vou errar. Por isso ele estar dizendo pra eu não chorar.
> Lr.: Eu também já sei. Eu vou dar uma dica Lz..
> Lz.: Dê não, é jogo...
> Lr.: Vou dar uma dica... Na fórmula é como? X-um menos x-zero, não é? Pronto já ajudei.
> Lz.: Sim, x-um...
> Lr.: Falei, depois não diga que eu avisei. Pronto, PES também já falou.
> Lz.: Notei! É que o sinal aqui é negativo, então vai ficar dois negativos. *[Refere-se ao sinal de menos da fórmula e o sinal de menos da coordenada negativa]* não é? *[Risos]*
> Lr.: Não sei! Agora está bom de dica.
> Lz.: Pelo menos isso eu encontrei, não é possível... *[Continua a realizar os cálculos]*

Como podemos notar, Lz. sabe identificar quando utilizar o conhecimento, mas apresenta algumas dificuldades procedimentais com a fórmula de recorrência. Essa dificuldade se agrava quando tem que substituir números relativos na citada fórmula. Isso demonstra a fragilidade do conhecimento formulado nos esquemas dela. Por esse motivo a classificamos, juntamente com T., na segunda categorização.

Assim como T., Lz não demonstra essa dificuldade depois desse primeiro encontro com uma situação nova. O que nos faz deduzir que esse encontro favoreceu para uma significativa apropriação do assunto em questão. A nossa colocação é ratificada no trecho que se segue, onde ela não apresenta mais nenhuma dificuldade com o assunto.

> Lr.: Ainda tem a outra pra fazer.
> Lz.: *[Faz as contas e diz passo a passo os procedimentos]* Menos dois, menos com menos dá mais, mais cinco é três... Ao quadrado, mais seis menos três dá três ao quadrado, raiz. Aí, raiz de três ao quadrado é nove, mais nove, dá raiz de dezoito. Raiz de dezoito, exata, tem não...
> Lr.: Tem não, ta bom. *[Lz. aparenta alívio]* Agora o outro... Tem esse aqui!
> Lz.: Ah meu Deus! Socorro!
> Lr.: Vai!
> PES: Uma coisa é certa, você vai sair daqui calculando a distância.
> Lz.: Eu não posso desistir... *[Retorna a fazer os cálculos]* Vou apanhar, mas vou conseguir.
> PES: É isso aí, desistir nunca.
> Lz.: Vai, o ponto "C" vai ser esse. O ponto "C", x é dois e y é dois. E qual vai ser o ponto "D" que eu vou encontrar?
> Lr.: É o "B" novamente.
> Lz.: O "B"... É menos dois-seis. X-um, y-um... Olha, nesse daqui eu estou mais desenrolada.
> Lr.: Também né Lz.!
> Lz.: É mesmo no primeiro levei meia hora, quase. Vou começar por onde eu sei... x-um, menos x-zero... y-um menos y-zero... Êpa, y é seis. *[Laura faz um gesto que aparenta desaprovação do que está sendo realizado por Lz.]*
> Lr.: Ah, não, está certo.
> PES: Ela está craque.
> Lz.: Lr. iria acabar isso em um instante. Aqui fica quatro ao quadrado... Olha! Quatro vezes quatro dá dezesseis. Dezesseis mais dezesseis dá trinta é dois. Ufa! Aí tem mais cálculo, não é?
> PES: Agora é só dizer a área do triângulo. Aquela fórmula... Base vezes altura ao quadrado? Esqueci.
> Lr.: Base vezes altura dividido por dois.
> Lz.: B vezes h dividido por dois. *[Anota na folha]* A base... A base é essa *[Descreve o segmento de reta imaginário que une os pontos (-5,3) e (-2,6)]* e a altura é essa. *[Descreve o segmento de reta imaginário que une os pontos (-2,6) e (2,2)]*
> PES: Pode ser.
> Lz.: *[Substitui os valores na fórmula do cálculo da área]* A base é raiz de dezoito e a altura é raiz de trinta e dois. Fica assim não é? Não sei mais fazer os cálculos.

Lz. apresenta o resultado da seguinte forma:

$$\frac{\sqrt{18}\cdot\sqrt{32}}{2} =$$

Figura 12: Resultado apresentado por Lz para o valor da área de um triângulo retângulo.

Essa resposta nos aponta que em seus esquemas não conta a simplificação de uma raiz. Essa falta pode vir a dificultar a conceitualização de outros conhecimentos. Para o nosso caso não apresenta significativa relevância.

O domínio e a segurança sobre o assunto por Lz. pode ser constatado no trecho que se segue:

> Lz.: *[Retira uma carta do monte]* Me dei mal. "O seu oponente irá escolher duas fichas quaisquer no tabuleiro para que você forneça a menor distância entre elas. Caso você acerte o valor ganha dez pontos, caso erre o oponente ganha cinco".
> Lr.: Agora eu vou judiar. Eu quero essa *[(2,2)]* e essa *[(5,-6)]*.
> Lz.: Agora que eu estou craque, pode mandar. *[Realiza os cálculos na folha]* Esse é dois no x e dois no y e o outro é cinco no x... e menos seis no y. Oito ao quadrado é quanto mesmo?
> PES: Oito vezes oito.
> Lz.: Sessenta e quatro. Mais nove dá setenta e três na raiz. Setenta e três tem raiz?
> PES: Ter tem, mas não é exata. Pode ficar por aí mesmo. Dez pontos pra Lz..
> Lz.: Ta vendo! *[Retira a ficha de Lr.]*

Da mesma maneira poderíamos realizar a investigação da intervenção de W. e J., uma vez que W. demonstra, a partir de representações simbólicas (linguagem escrita e oral), nos seus esquemas um significativo repertório que vem ajudar muito J. na resolução das situações propostas. Diferente de Lz., J. apresenta muitas dificuldades que até este momento não foram superadas, pois tratam de conceitos e teoremas antigos que não estão formados ou foram de uma forma bastante frágil. Essas dificuldades refletem na conceitualização do assunto proposto, que podemos constatar nos trechos que se seguem:

> J.: Menos com mais é quanto?
>
> ...
>
> J.: Estou enrolada... Não sei mais pra onde ir...

Quando partimos para a análise das ações de T., que está na mesma categorização que Lz., apenas estamos ratificando o que já mencionamos para esta última. T apresenta uma dificuldade conceitual inicial, mas nos subsequentes problemas não constatamos mais essas dificuldades. Observemos sua dificuldade no trecho que se segue:

> T.: *[Retira uma carta do monte]* "Escolha três fichas e calcule o perímetro do triângulo formado por elas. Dez pontos".
> PES: Tu vais escolher três fichas, quais quer, e vai calcular o perímetro formado por elas.

T.: A minha ou a dela não é?
PES: Tanto faz. E calcular o perímetro do triângulo.
T.: Sim, mas o que é perímetro de um triângulo?
PES: Perímetro de qualquer polígono é a soma dos lados dele. No nosso caso é a soma dos lados do triângulo.
M.: Aí ela vai ter que formar o triângulo.
PES: Primeiro ela vai dizer quais são os três pontos.
M.: Aí depois de formar...
PES: E calcula o perímetro.
T.: Vou escolher esse triângulo aqui. *[Aponta o triângulo imaginário formado pelas fichas de coordenadas (0,-4), (2,-4) e (2,-6)]*
PES: Qual a soma dos lados desse triângulo?
T.: Menos quatro menos dois. Não é assim?
PES: Me aponte um lado desse triângulo. *[T. aponta para um vértice]* Desenhe um triângulo *[T. Desenha um triângulo na folha]* mostre agora um lado desse triângulo. *[Dessa vez, T. mostra o que é um lado]* Voltando para o tabuleiro, me mostra agora um lado desse triângulo.
T.: É daqui pra aqui. Então a soma vai ser quatro, porque esse é igual a esse. *[T. parece notar que as fichas escolhidas formam um triângulo isósceles, com dois lados valendo duas unidades]*
PES: Quantos lados tem um triângulo?
T.: Quantos lados? Três!
PES: Então, tenho que somar todos os lados. [Dirige-se ao quadro e esboça um triângulo]
T.: Ah, então é seis!
PES: Ela já falou seis. Dado um triângulo qualquer ABC. Por exemplo, de A até C vale cinco, de A até B vale três e de B até C vale quatro...
T.: Aí vai somar todos os números.
PES: Isso. Vou somar...
PES e T.: cinco, mais três, mais quatro.
PES: Que é igual? Cinco mais quatro, nove; mais três, doze. *[Escreve toda a operação]* Doze é o perímetro desse triângulo. Qual o perímetro desse triângulo? *[Voltando para o triângulo escolhido por T. para calcular o perímetro]* Pode escrever, desenhar, se quiser. *[T. aceita a sugestão. Esboça o triângulo na folha]*
T.: Aqui vai ser dois, né? *[Está se referindo a distância entre as fichas de coordenadas (2,-4) e (0,-4). Em seguida marca na folha]*
PES: Isso.
T.: *[Conta quantas unidades têm entre as fichas de coordenadas (2,-4) e (2,-6)]* Também. *[Marca na folha]* Agora tem esse pauzinho aqui, *[aponta a distância entre dois pontos consecutivos na diagonal]* pode também?
PES: Agente já discutiu isso.
T.: Fooi! É a distância daqui pra aqui, né?
PES: É!
T.: Aí vai ter que fazer esse negócio, não é? Vamos lá! *[T. aparenta preguiça para realizar a tarefa]*
PES: Vamos, vamos, vamos!
T.: Poxa... Vou utilizar a fórmula!
PES: Poderia ser pior. Imagina ter que calcular o perímetro do triângulo formado por essas três fichas aqui. *[Aponta as fichas de coordenadas (2,-4), (3,-5) e (2,-6)]*
M.: Tomara que essa carta não caia pra mim.
T.: Ela escolheu um triângulo fácil.
PES: Vamos continuar?
T.: Aqui não vai ser dois! *[Descreve um segmento imaginário que une os pontos (0,-4) e (2,-6)]*
PES: Pois é. Então como eu calculo esse lado triângulo.
T.: Já sei! Pela fórmula?
PES: Pode ser. *[T. procura como aplicar a fórmula nas anotações]*
T.: Ô PES dá uma luz!

PES: De que eu preciso para calcular essa distância?
T.: De A e de B, já estão aqui.
PES: Quais são as coordenadas desse ponto? *[Ela procura nas anotações, mas não foram escritas ainda as coordenadas]* Olha pr'aqui que você as encontra. *[Aponta para o Geoplano]* Quais as coordenadas desse ponto?
T.: Zero no x e menos quatro no y?
PES: Isso. Podemos chamá-lo de A. Quanto é que vale o outro ponto, que chamaremos de B?
T.: Me ajuda M!
M.: Dois e menos seis?
T.: Agora é só colocar ali *[aponta para a fórmula no quadro]* e saber a distância. *[Inicia a aplicação da fórmula para a obtenção da distância entre os pontos de coordenadas (0,-4) e (2,-6)]*
PES: *[T. parece tentar realizar as substituições diretamente sem reescrever a fórmula e se confunde]* É assim que agente faz?
M.: Primeiro vem xis-a...
T.: É que eu queria fazer direto.
PES: Ah!
T.: *[Escreve a fórmula e inicia o procedimento de substituição de valores. Nomeia o ponto de coordenadas (0,-4) como A e o ponto de coordenadas (2,-6) de B]* O x de A é zero e o x de B é dois. Mais o y de A é menos quatro menos o y de b que é menos seis... Fica menos com menos, não é isso?
PES: Sim!
T.: *[Realiza todo o procedimento das contas em voz alta]* Zero menos dois, dá menos dois, ao quadrado dá quatro, mais menos quatro menos, menos seis, que dá mais, aí fica, menos quatro mais seis que dá menos dois ao quadrado é quatro também. A distância de A pra B é a raiz de quatro mais quatro. Somando eu tenho que a distância é raiz de oito. Agora é só eu somar os outros lados pra eu encontrar o... Como é o nome mesmo?
PES: Perímetro. A soma dos lados do triângulo é o perímetro dele.
T.: Então eu vou somar raiz de oito, mais dois, mais dois. E gora, como fica? Eu sei que dois mais dois é quatro, mas como eu somo isso com raiz de oito? Fica como raiz de doze é ou só doze?
PES: Não podemos somar simplesmente os números que estão dentro da raiz. Logo minha resposta, quando a raiz de um número não dá exata, fica um número misto. Quatro mais raiz de oito.
T.: Aí fica assim é. Raiz de oito mais quatro. Acabou? *[Escreve a resposta]*
PES: Acabou!

Como podemos perceber T. apresenta, neste momento, as seguintes dificuldades: o conceito sobre perímetro de figuras planas não constituído ou constituído de forma não significativa, constatado na sua própria fala; da mesma maneira, sua confusão sobre a identificação de vértice e lado de um polígono, reflete também sua fragilidade neste assunto; além de não aparentar segurança nos procedimentos que são utilizados para o cálculo da distância entre dois pontos.

Todas essas dificuldades não são constatadas na situação idêntica que o jogo proporcionou posteriormente para ela. T. procede sem problemas a essa mesma situação, como podemos perceber no trecho em seguida:

T.: Ai meu Deus! De novo! De novo! Ela me persegue! “Escolha três fichas e calcule o perímetro do triângulo formado por elas. Dez pontos”.
PES: Ou você calcula esse, ganha dez pontos e vence ou passa vez.

> T.: É igual, igual. Vou escolher esse pequenininho aqui. *[Aponta o triângulo formado pelas fichas de coordenadas (0,0), (1,-1) e (2,0)]* Eu acho que está mais fácil. Eu já sei que daqui pra aqui vale dois *[distância entre os pontos de coordenadas (0,0) e (0,2)]* e que esse *[distância entre os pontos de coordenadas (0,0) e (1,-1)]* e esse *[distância entre os pontos de coordenadas (1,-1) e (0,2)]* tem o mesmo valor, não é?
> PES: Isso.
> T.: Então eu só faço uma conta daquela. Vamos lá! Aqui eu vou chamar de A, que é zero no x e zero no y. *[Anota na folha]* Aqui é B, um e menos um. *[Anota na folha novamente e inicia os cálculos]*
> PES: Se ela conseguir acaba o jogo.
> T.: Que pressão! *[Risos]* achei o raiz de dois.
> PES: Então vamos voltar para o nosso problema. O que diz a carta?
> T.: "Escolha três fichas e calcule o perímetro do triângulo formado por elas. Dez pontos".
> PES: Qual foi o triângulo?
> T.: Foi esse daqui.
> PES: o que é o perímetro?
> T.: É a soma dos lados de um triângulo.
> PES: E agora, quanto vale os lados desse triângulo?
> T.: Daqui pra aqui *[distância entre os pontos de coordenadas (0,0) e (0,2)]* vale dois. Daqui pra aqui *[distância entre os pontos de coordenadas (0,0) e (1,-1)]* é igual a daqui pra aqui *[distância entre os pontos de coordenadas (1,-1) e (0,2)]* que é raiz de dois.
> PES: E agora, quanto vale o perímetro?
> T.: Vale... Deixa eu ver *[anota na folha o resultado]*... Dois, mais raiz de dois, mais raiz de dois.

Percebemos que a partir dessas sucessivas utilizações do assunto como ferramenta para resolver problemas, T., assim como Lz., apresenta uma maior segurança e domínio do assunto. Essa segurança aparenta refletir no conforto e satisfação que ela expressa no término da resolução do problema proposto. Que podemos constatar no trecho abaixo:

> T.: Ainda bem! *[Retira uma carta do monte]* "Seu oponente irá escolher duas fichas no tabuleiro para que você possa fornecer a menor distância entre elas. Caso você acerte o valor ganha dez pontos, caso erre o oponente ganha cinco." Então eu tenho que acertar!
> PES: Pois é, M. vai escolher duas fichas para que você possa dizer a distância entre elas.
> T.: A menor distância.
> PES: *[M. procura quais fichas irá escolher]* Isso!
> M.: Esse *[aponta para a ficha de coordenadas (0,-4)]* e esse [Aponta para a ficha de coordenadas (-5,-2)].
> T.: Aí eu vou ter que fazer toda aquela conta é?
> PES: Se você quiser. Caso não queira, ou não saiba, é cinco pontos pra M.
> T.: Eu sei! *[Inicia os cálculos através da anotação das coordenadas dos pontos. Nomeia a ficha de coordenadas (0,-4) de A e a de coordenadas (-5,-2) de B]* Vou direto! *[Resolve os cálculos sem falar]* Dá raiz de vinte e nove. Vinte e nove tem raiz... Deixa eu ver... Não!
> PES: Pergunta valendo dez pontos. Preste a atenção. Quanto vale a distância daqui pra aqui? Se você errar M. ganha...
> T.: Raiz de vinte e nove!
> PES: Certo! *[T. grita sorrindo]*

As maiores dificuldades de conceitualização do assunto percebemos em JA. e R.. Enquanto JA. não conseguiu, sem nossa ajuda, utilizar os conhecimentos contidos nos seus esquemas para atribuir significado à situação, R, por sua vez, atribuiu significado, mas não conseguiu relacionar o problema proposto com o assunto que foi estudado até o momento.

A maior dificuldade de JA. foi a de encontrar um triângulo retângulo para calcular, em seguida, seu perímetro, ação que facilmente foi realizada por R, mas ela não conseguiu perceber a ligação desse assunto com o de distância entre dois pontos.

A partida com o jogo terminou e nenhum outro problema novo surgiu, além do primeiro fornecido para JA., que não foi resolvido. Como necessitamos desse novo problema para terminarmos um ciclo da Dialética ferramenta-objeto, propomos para eles os dois problemas novos, o de cálculo da área de um triângulo retângulo e a do cálculo do perímetro de um triângulo qualquer, para constatarmos se haveria alguma forma de mediação para que eles possam chegar a uma solução.

Observemos o seguinte trecho:

> PES: Que bom R. parabéns. Parabéns pra você também JA.. Foi uma boa partida! Terminamos o jogo, mas agora tenho duas questões pra fazer pra vocês: *[recoloca a ficha de JA. que acabou de ser eliminada no mesmo local que se encontrava anteriormente]* está vendo esse triângulo *[aponta para o triângulo retângulo formado pelas fichas de coordenadas (2,2), (-2,2), (2,4)]*, ele é retângulo. Vocês poderiam me informar qual a área desse triângulo? Lembrando que a área de um triângulo é a medida da base, vezes a altura, sobre dois. Vamos tentar?! O triângulo é esse. *[Pega o barbante e realiza o contorno entre os pontos. JA. anota informações referentes à área do triângulo, dedilha de uma ficha a outra os dois catetos do triângulo retângulo e retorna para suas anotações. Conta distância entre as fichas (-2,2) e a (2,2), depois conta a distância entre (2,2) e (2,4) e retorna para suas anotações. Enquanto isso R. tenta realizar o problema, mas não obtém sucesso, pois não se apropriou da fórmula para o cálculo da área de um triângulo]*

Como podemos perceber, depois que fornecermos alguns conceitos relevantes para a resolução do problema (o triângulo retângulo e como calcular sua área), JA. inicia sem dificuldades os cálculos e utiliza o procedimento de fornecer a menor distância entre dois pontos através da contagem dos espaços entre os pinos na diagonal ou horizontal, associando dessa forma o lado do triângulo como o segmento que une os dois pontos. Em seguida expressa o resultado e explica seus procedimentos, como visto em seguida:

JA.: Terminei! Dá quatro!
PES: Como dá quatro?
JA.: A base é quatro, vezes dois da altura dá oito, dividido por dois dá quatro!

R. não consegue proceder com a mesma facilidade pois não se apropriou da forma como se calcula a área de um triângulo retângulo dado os lados.

Para podermos entender melhor a utilização dos conhecimentos contidos nos esquemas de JA. e R. partimos para o segundo problema. Percebemos que os dois. não tinham explicitado corretamente o conceito de perímetro de um polígono. A partir dessa situação indicamos, através da exposição da definição, como se calcula o perímetro de um polígono, em específico o perímetro de um triângulo.

Mais uma vez R. não conseguiu realizar os cálculos, pois não atribuiu significado para a forma de calcular o perímetro de um polígono. Diferentemente de JA, que além de ter entendido (ou ter associado a alguma informação dos seus esquemas) como utilizar as informações que disponibilizamos para resolver o problema, ele também conseguiu associar o assunto distância entre dois pontos como ferramenta matemática como auxiliar na resolução do mesmo. Essas idéias são constatadas no trecho que separamos em seguida:

PES: [...] Agora vamos pra o segundo e último desafio. Observem esse mesmo triângulo que acabamos de calcular a área. Vocês poderiam me informar o perímetro desse triângulo? JA. você sabe o que é o perímetro de um polígono?
JA.: Sei, mas não sei calcular não!
PES: O que é o perímetro?
JA.: Perímetro... Não sei não!
PES: Perímetro é a soma dos lados desse polígono! No caso do nosso triângulo qual é o perímetro dele?
JA.: É a soma dos lados do triângulo!
PES: Sei, mas quanto vale a soma desses lados? Calcula no papel pra mim. *[JA. inicia os cálculos]*
R.: Agora é perímetro é?! Soma dos lados... Deixa eu ver... *[Realiza os cálculos na folha]*
JA.: Tenho uma dúvida.
PES: Sim!
JA.: Daqui pra aqui eu sei quanto vale, é quatro. Daqui pra aqui também, dois, mas e esse lado vale quanto?
PES: Será que tem como eu saber esse valor daqui? *[Aponta para o seguimento de reta com extremidades (-2,2) e (2,4)]*
JA.: Isso é aquilo que agente viu no jogo?
PES: Aquilo o quê?
JA.: A distância daqui pra aqui? *[aponta para as fichas de coordenadas (-2,2) e (2,4)]*
PES: Isso. E aí como calculamos a distância entre essas duas fichas?
JA.: *[JA. repete a fórmula da distância entre dois pontos na folha]* e agora quem é “A” e quem é “B”?

> PES: Você pode determinar qualquer um. A distância daqui pra aqui é a mesma que a daqui pra aqui. *[Alterna o início e o fim do segmento AB com os dedos]*
> JA.: Vou dizer que esse é o “A” e esse é o “B”...
> PES: Quais são as coordenadas de “A”?
> JA.: É... No x é dois e no y é quatro.
> PES: Anote pra facilitar! *[Ele registra na folha]* E as coordenadas do “B”, quais são?
> JA.: Menos dois no x e dois no y... *[Registra na folha]*
> PES: Agora é só fazer continhas! *[Enquanto isso R. tenta acompanhar a resolução de JA.]*
> JA.: *[Continua nos cálculos]* Achei raiz de vinte.
> PES: Agora é só calcular o perímetro. Que é a soma dos lados!
> JA.: Então eu pego esse *[aponta para um dos catetos]*, mais esse, *[aponta para o outro]* mais raiz de vinte?
> PES: Isso. Quanto é que dá o perímetro do triângulo? Escreva no papel o que você me disse agora! *[Ele anota]*
> R.: Vai, soma aí. Quatro, que é daqui pra aqui. *[Aponta o cateto de vértices (-2,2) e (2,2)]* Mais dois, que é esse. *[Aponta o cateto de vértices (-2,2) e (2,2)]* mais raiz de vinte que tu achou!
> JA.: Eu sei, mas o que eu faço com esse raiz de vinte, somo ou não com os outros? *[R. movimenta a cabeça negativamente]*
> PES: Você soma o que sabe somar e a raiz deixa na expressão.
> JA.: Então fica, dois mais quatro, oito. Oito mais raiz de vinte?
> PES: Isso! Alguma dúvida?
> JA. e R.: Não!

Com essas últimas colocações encerramos a análise das fases da Dialética ferramenta-objeto que utilizamos no momento da intervenção.

Como já mencionamos na metodologia recorremos, após o momento da intervenção, a um teste investigativo auxiliar para podermos investigar individualmente quais os resultados obtidos quando se trata do processo de conceitualização do assunto pelos participantes da pesquisa. Esse material de apoio se tornou útil, pois sem ele algumas variáveis individuais sobre a aprendizagem do assunto ficariam sem respostas, como, por exemplo, o desempenho de alguns outros participantes que no momento da intervenção não tenha ficado esclarecido.

Para isso analisaremos cada uma das três questões propostas fazendo a distribuição dos participantes nas seguintes categorizações:

1. Realizou procedimento adequado com cálculo adequado – O participante utilizou o assunto estudado até a substituição dos valores na fórmula de recorrência adequadamente e realizou os cálculos, para alcance do resultado, sem cometer erros;

2. Realizou procedimento adequado, mas efetuou cálculo equivocado – O participante utilizou o assunto estudado até a substituição dos valores na fórmula de recorrência adequadamente e comete erros de cálculo;
3. Realizou procedimento equivocado, mas efetuou cálculo correto -– O participante não utiliza o assunto estudado até a substituição dos valores na fórmula de recorrência, mas não apresenta erros de cálculo nas operações;
4. Realizou procedimento equivocado com cálculo equivocado – O participante não utiliza o assunto estudado até a substituição dos valores na fórmula de recorrência e apresenta erros de cálculo;
5. Não respondeu.

Com isso, buscaremos identificar a adaptação do assunto, que foi colocado em jogo durante o processo de intervenção, nos esquemas dos alunos. Essa verificação da apropriação será investigada a partir dos invariantes operatórios expressos nos teoremas-em-ação e conceitos-em-ação dos participantes e através das representações simbólicas que eles utilizaram para resolução das questões propostas.

Para realizarmos um paralelo entre um estágio de não conhecimento do assunto e um de conhecimento do mesmo, recorremos às duas primeiras fases da Dialética ferramenta-objeto (*Antigo* e *Pesquisa novo implícito*), aplicada no momento da intervenção, quando constatamos que nos esquemas dos alunos não havia uma formalização de como se calcula a distância entre dois pontos, dadas as suas coordenadas.

Com isso percebemos, em todas as questões do teste investigativo auxiliar, que os participantes utilizaram o conhecimento que mobilizaram durante todo o processo de intervenção, isto é, o conceito-em-ação que os participantes mobilizam pode ser considerado como pertinente (VERGNAUD, 1996a). Já os teoremas-em-ação, nem todos conseguiram mobilizar com eficácia.

Dessa forma, analisaremos cada tabela que se segue observando os esquemas de ação dos participantes através dos teroemas-em-ação mobilizados.

As tabelas de 8 a 11 nos fornecem informações a respeito da atividade de localizar pontos no plano cartesiano e de cálculo da distância entre dois pontos. Observemo-las em seguida:

TABELA 8:
Questão 1a: Localização de pontos no plano e cálculo da distância ente dois pontos.

Categorização	Quantidade	Alunos
1. Realizou procedimento adequado com cálculo adequado.	03	Lz., M. e W.
2. Realizou procedimento adequado, mas efetuou cálculo equivocado.	03	J., Lr. e T.
3. Realizou procedimento equivocado, mas efetuou cálculo correto.	01	R.
4. Realizou procedimento equivocado com cálculo equivocado.	01	JA.
5. Não respondeu.	00	-------

Analisando os resultados da tabela acima podemos perceber que a maior parte dos participantes, seis destes, pertence ao primeiro e segundo tipo de categorização. Levando-nos a entender que o conhecimento já faz parte do repertório de esquema de cada participante, mas como ainda três destes, apresenta cálculos equivocados, isso reflete na falta de sucesso ao resolver o problema proposto, como podemos notar na resolução que Lr. apresentou, exemplificada em seguida:

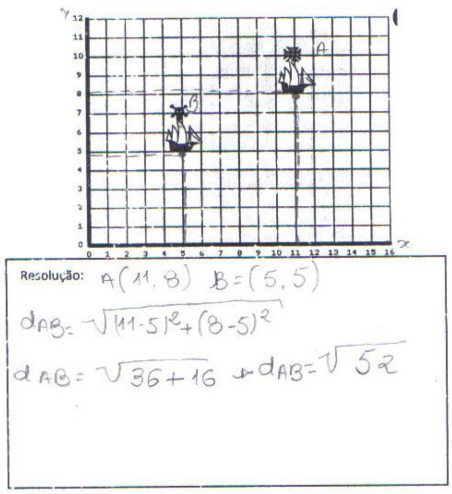


Figura 13: Resolução de Lr. para a questão 1a.

Como podemos notar Lr. comete erro de cálculo, subtração de oito por cinco, comprometendo, dessa forma, sua resposta final. Podemos perceber que todo o seu raciocínio é correto. Também expressa um teorema-em-ação que analogamente apresentou no momento da intervenção, que foi o de realizar as paralelas dos eixos ordenados para encontra as coordenadas do ponto. Recorremos a este exemplo de Lr. para informar que esses erros não foram mais cometidos por ela nas demais subquestões, além de mostrar que esses erros são inerentes a conceitos anteriores. Continuaremos a análise observando a tabela seguinte:

TABELA 9:
Questão 1b: Localização de pontos no plano e cálculo da distância ente dois pontos.

Categorização	Quantidade	Alunos
1. Realizou procedimento adequado com cálculo adequado.	04	JA., Lz., Lr. e W.
2. Realizou procedimento adequado, mas efetuou cálculo equivocado.	01	T.
3. Realizou procedimento equivocado, mas efetuou cálculo correto.	03	J., M. e R.
4. Realizou procedimento equivocado com cálculo equivocado.	00	-------
5. Não respondeu.	00	-------

Nesta esquematização acima, daremos destaque a T. que também apresenta problemas de cálculos, e os mesmo sempre estão relacionados a cálculos de potência. Estes problemas apresentam uma recorrência onde podemos afirmar que ela realiza a multiplicação da base pelo expoente. Como podemos notar nos fragmentos que apresentamos em seguida:

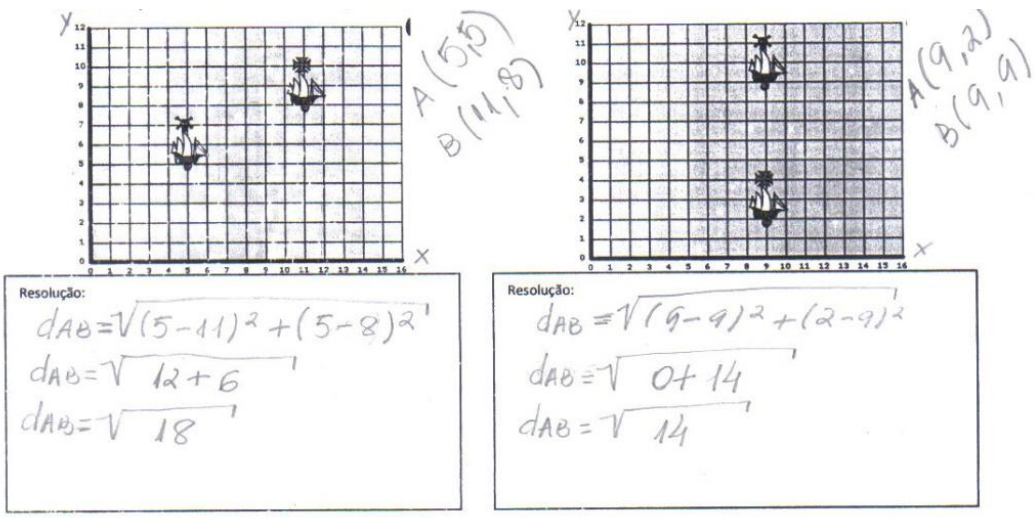


Figura 14: Resolução de T.. para as questões 1a e 1b .

Nas duas subquestões que serão analisadas em seguida, T. não comete mais o mesmo erro. Já os três participantes enquadrados na terceira categoria apresentaram dificuldade na localização do ponto no plano, mas não demonstraram, com os dados que forneceram, dificuldades na realização dos cálculos.

A tabela 10, que apresenta os resultados da subquestão 1c, será analisada em seguida:

TABELA 10:

Questão 1c: Localização de pontos no plano e cálculo da distância ente dois pontos.

Categorização	Quantidade	Alunos
1. Realizou procedimento adequado com cálculo adequado.	06	JA., Lz., Lr., M., T. e W.
2. Realizou procedimento adequado, mas efetuou cálculo equivocado.	01	J.
3. Realizou procedimento equivocado, mas efetuou cálculo correto.	00	-------
4. Realizou procedimento equivocado com cálculo equivocado.	01	R.
5. Não respondeu.	00	-------

Como podemos perceber, essa subquestão foi a que menos apresentou dificuldade para os participantes, pois seis destes foram enquadrados no primeiro tipo de categorização. Observemos as resoluções de J. e R., únicas participantes a não acertar, para podermos entender quais forma suas dificuldades. Iniciaremos com J. na sua resolução que apresentamos em seguida:

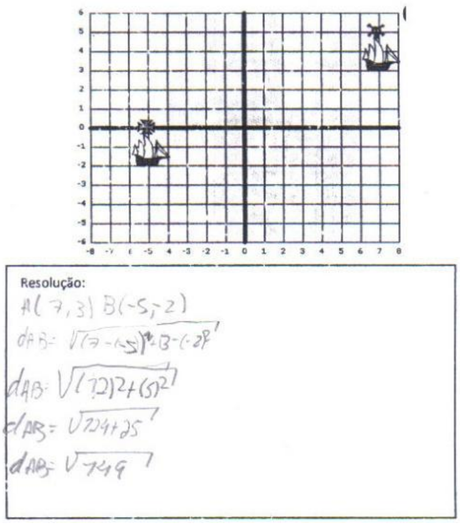


Figura 15: Resolução de J. para a questão 1c.

Observando sua resolução constatamos que sua dificuldade está relacionada ao mesmo problema de T., na subquestão anterior, que é a dificuldade no cálculo de potência, mas diferente de T. ela não se confunde com a multiplicação da base pelo expoente e sim no próprio valor da potência.

Analisaremos agora a resolução de R., apresentada em seguida:

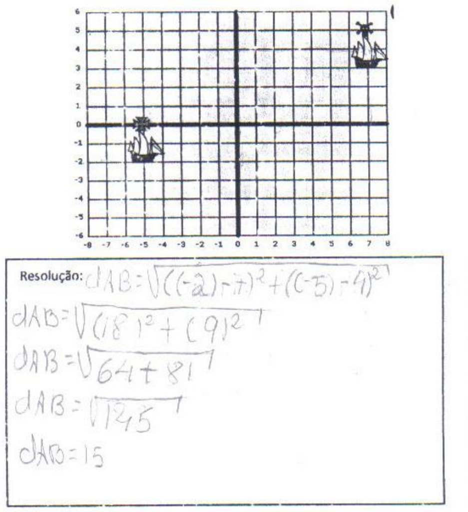


Figura 16: Resolução de R. para a questão 1c.

Como podemos perceber, R. comete três erros. O primeiro está relacionado à localização dos pontos no plano. Já que a localização não foi bem realizada o seu segundo equivoco está na substituição dos valores, pois ela substitui na fórmula de recorrência o valor da ordenada de um menos o valor da abscissa do outro. Mostrando, dessa forma, a sua não apropriação sobre o assunto. Por fim, o último erro que comete está na resolução do radical, no qual afirma que a raiz de cento e quarenta e cinco é quinze. O mesmo equivoco ela comete na subquestão 1d, que analisaremos em seguida.

TABELA 11:
Questão 1d: Localização de pontos no plano e cálculo da distância ente dois pontos.

Categorização	Quantidade	Alunos
1. Realizou procedimento adequado com cálculo adequado.	04	Lz., Lr., T. e W.
2. Realizou procedimento adequado, mas efetuou cálculo equivocado.	01	J.
3. Realizou procedimento equivocado, mas efetuou cálculo correto.	00	-------
4. Realizou procedimento equivocado com cálculo equivocado.	03	JA., M. e R.
5. Não respondeu.	00	-------

Os dados apresentados na tabela acima ratificam as observações que realizamos nas subquestões anteriores. Os participantes que erraram de alguma forma a resolução do problema, apresentaram os erros mais comuns já apresentados, como o de aplicação da fórmula de recorrência de forma equivocada e de erros de cálculo provenientes de invariantes operatórios anteriores ao assunto mal formulados. Os dois tipos de equívocos podem ser constatados na resposta de JA. para a questão, Observado em:

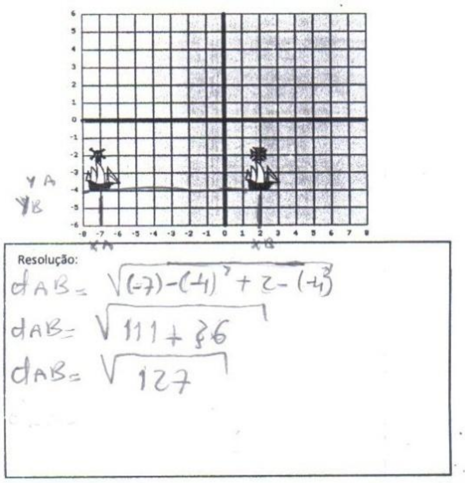


Figura 17: Resolução de JA. para a questão 1c.

Notamos, através de suas anotações acima apresentadas, que não houve uma total assimilação do assunto, já que ele não realiza as substituições condizentes com as que são disponibilizadas pela fórmula de recorrência. Como podemos perceber também JA. apresenta uma dificuldade em esquematizar suas idéias. A dificuldade pode ser percebida através das representações simbólicas confusas, expressada pela utilização dos parênteses equivocadamente na organização do seu pensamento. Notamos, além da dificuldade mostrada anteriormente, que ele também apresenta erros de cálculo, como na manipulação de números relativos e nos cálculos de potência. O primeiro erro está em apresentar a resposta 11 para os cálculos $(-7) - (-4)$. Deduzimos essa afirmação anterior devido ao seu segundo erro cometido, onde se deixa a entender que o resultado de 11^2 é igual a 111. Estes mesmos erros podem ser constatados em R. e M, e em J. apenas o de cálculo.

Uma observação importante constatada em todas as subquestões da questão 1 versou sobre o abandono do invariante operatório que foi constantemente utilizado no jogo, que consistiu em contar os espaços entre os dois pontos quando estes estavam alinhados na horizontal ou vertical, relacionado ao teorema-em-ação $\Delta x = |xi - xf|$, quando os pontos estiverem alinhados na horizontal, ou $\Delta y = |yi - yf|$ para pontos alinhados na vertical.

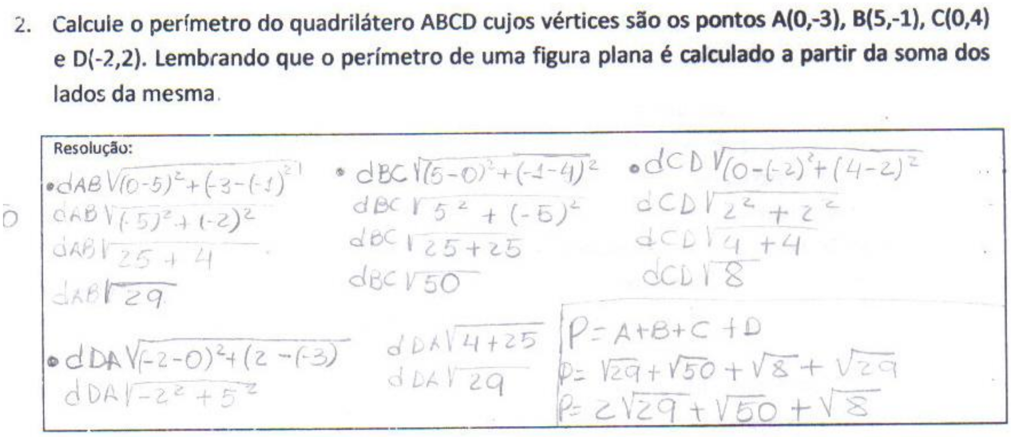
Partiremos para a análise da Questão 2 a partir da observação dos resultados sistematizados na tabela 12, apresentada em seguida:

TABELA 12:

Questão 2: Utilização do assunto em uma situação complexa – cálculo do perímetro de um quadrilátero ABCD dada as coordenadas do vértice.

Categorização	Quantidade	Alunos
1. Realizou procedimento adequado com cálculo adequado.	02	Lr. e W.
2. Realizou procedimento adequado, mas efetuou cálculo equivocado.	04	J., M., Lz. e JA
3. Realizou procedimento equivocado, mas efetuou cálculo correto.	00	-------
4. Realizou procedimento equivocado com cálculo equivocado.	01	T.
5. Não respondeu.	01	R.

O satisfatório desempenho dos participantes, expresso nos resultados acima, ratifica o que observamos no último momento da intervenção, este nomeado de novo problema. Destacamos a permanência de Lr. e W. na primeira categorização, onde constatamos seu significativo desempenho, que podemos constatar nas respostas das mesmas destacadas em seguida:


2. Calcule o perímetro do quadrilátero ABCD cujos vértices são os pontos A(0,-3), B(5,-1), C(0,4) e D(-2,2). Lembrando que o perímetro de uma figura plana é calculado a partir da soma dos lados da mesma.

Resolução:

$dAB\sqrt{(0-5)^2+(-3-(-1))^2}$ $dAB\sqrt{(-5)^2+(-2)^2}$ $dAB\sqrt{25+4}$ $dAB\sqrt{29}$

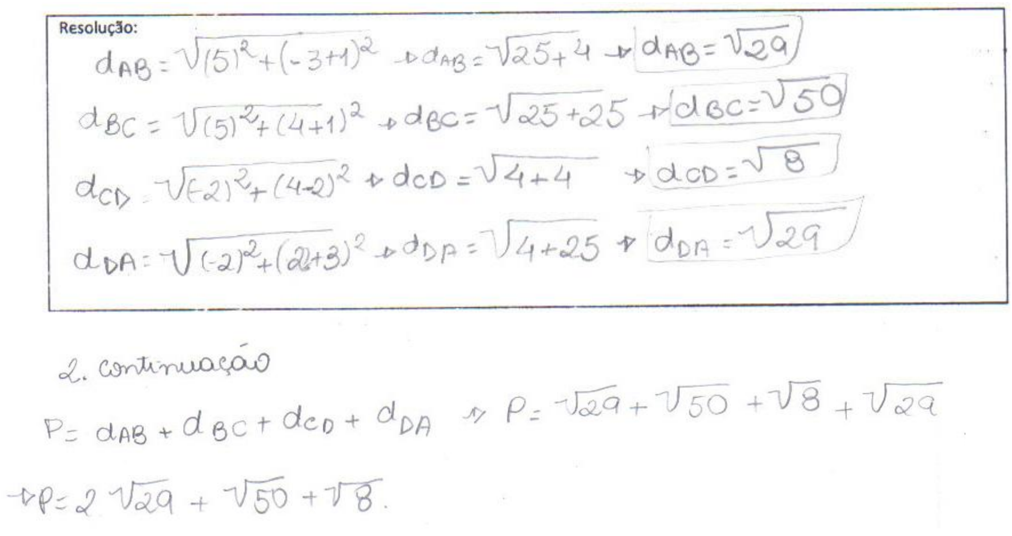
$dBC\sqrt{(5-0)^2+(-1-4)^2}$ $dBC\sqrt{5^2+(-5)^2}$ $dBC\sqrt{25+25}$ $dBC\sqrt{50}$

$dCD\sqrt{(0-(-2))^2+(4-2)^2}$ $dCD\sqrt{2^2+2^2}$ $dCD\sqrt{4+4}$ $dCD\sqrt{8}$

$dDA\sqrt{(-2-0)^2+(2-(-3))}$ $dDA\sqrt{-2^2+5^2}$ $dDA\sqrt{4+25}$ $dDA\sqrt{29}$

$P=A+B+C+D$
$P=\sqrt{29}+\sqrt{50}+\sqrt{8}+\sqrt{29}$
$P=2\sqrt{29}+\sqrt{50}+\sqrt{8}$

Figura 18: Resolução de W. para a questão 2.


Resolução:

$d_{AB}=\sqrt{(5)^2+(-3+1)^2} \to d_{AB}=\sqrt{25+4} \to d_{AB}=\sqrt{29}$

$d_{BC}=\sqrt{(5)^2+(4+1)^2} \to d_{BC}=\sqrt{25+25} \to d_{BC}=\sqrt{50}$

$d_{CD}=\sqrt{(-2)^2+(4-2)^2} \to d_{CD}=\sqrt{4+4} \to d_{CD}=\sqrt{8}$

$d_{DA}=\sqrt{(-2)^2+(2+3)^2} \to d_{DA}=\sqrt{4+25} \to d_{DA}=\sqrt{29}$

2. continuação

$P=d_{AB}+d_{BC}+d_{CD}+d_{DA} \to P=\sqrt{29}+\sqrt{50}+\sqrt{8}+\sqrt{29}$

$\to P=2\sqrt{29}+\sqrt{50}+\sqrt{8}.$

Figura 19: Resolução de Lr. para a questão 2.

O mesmo sucesso não foi alcançado pelos demais, mas como já percebemos, eles já se apropriaram do assunto como ferramenta matemática para resolver problema, isto é, assunto distância entre dois pontos já faz parte dos esquemas de ação dos alunos.

Algumas constatações devem ser mais uma vez esclarecidas, em vista que alguns participantes não conseguiram resolver o problema com êxito. No caso de J., M., Lz. e JA., foi constatado mais uma vez erros nos cálculos, sendo este relacionados à manipulação de números relativos ou concernentes ao calculo de potência. Já T. apresentou maior dificuldade que podemos observar na sua resolução, apresentada em seguida:

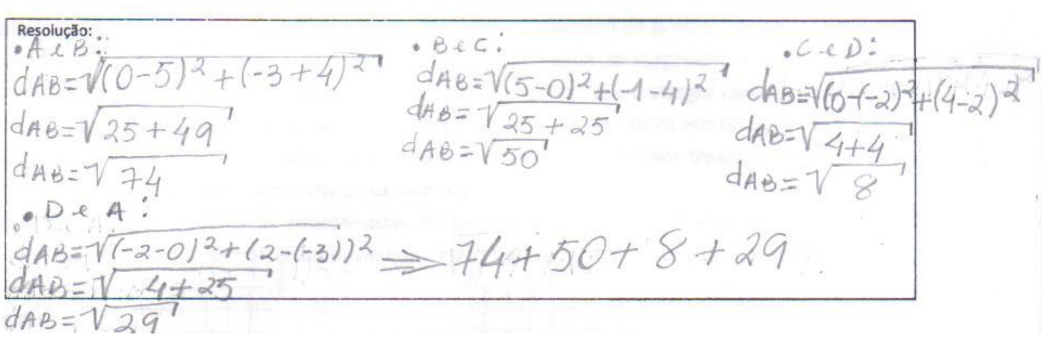


Figura 20: Resolução de T. para a questão 2.

T. confunde os pontos de referência para cada cálculo da distância. Além de, também, apresentar uma resposta na qual vem a desconsiderar todos os radicais.

No caso de R., que não respondeu à questão, podemos associar seu desempenho (ou a falta dele) ao último momento da intervenção, quando ela não conseguiu realizar nenhum dos problemas novos propostos.

A questão 3 exige dos participantes apenas a aplicação da fórmula de recorrência. Podemos observar os resultados nas tabelas que se seguem:

TABELA 13:
Questão 3a: Cálculo da distância entre dois pontos dada suas coordenadas

Categorização	Quantidade	Alunos
1. Realizou procedimento adequado com cálculo adequado.	06	J., M., Lz., Lr., T. e W.
2. Realizou procedimento adequado, mas efetuou cálculo equivocado.	01	JA..
3. Realizou procedimento equivocado, mas efetuou cálculo correto.	01	R.
4. Realizou procedimento equivocado com cálculo equivocado.	00	--------
5. Não respondeu.	00	--------

TABELA 14:
Questão 3b: Cálculo da distância entre dois pontos dada suas coordenadas

Categorização	Quantidade	Alunos
1. Realizou procedimento adequado com cálculo adequado.	02	Lr. e W.
2. Realizou procedimento adequado, mas efetuou cálculo equivocado.	06	R., T., M., Lz., J. e JÁ.
3. Realizou procedimento equivocado, mas efetuou cálculo correto.	00	-------
4. Realizou procedimento equivocado com cálculo equivocado.	00	-------
5. Não respondeu.	00	-------

A observação dos dados apresentados nas tabelas acima confirma mais uma vez a apropriação do assunto pelos participantes da pesquisa. Porém a freqüente recorrência nos erros de cálculo pode vir a prejudicá-los na resolução de problemas futuros.

Partiremos às considerações finais acerca da pesquisa realizada.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como foi esperado, Investigamos a aprendizagem do conteúdo *distância entre dois pontos* pelos alunos do 3º ano do ensino médio, através do jogo *DISTÂNCIA EM BATALHA* como proporcionador de uma situação didática contextualizada.

Os resultados que obtivemos quando interpretamos as mensagens, verbais (oral e escrita) e gestuais, proferidas pelos participantes no processo da intervenção, que foi estruturado a partir das fases da Dialética ferramenta-objeto; quando Identificamos a existência de padrões nas mensagens deles, quando observamos os erros, tentativas de acertos e os acertos dos mesmos quando postos em uma situação de aprendizagem, toda esta embasa nos elementos da Teoria dos Campos Conceituais, além das contribuições relevantes das teorias de Piaget e Vygotsky; e quando investigamos as características e ações que surgem durante em uma atividade com jogos; trouxe-nos a resposta para a questão que lançamos no início dessa pesquisa, na qual estávamos querendo entender quais as principais relações e rupturas dos conhecimentos que emergem no processo ensino-aprendizagem do assunto distância entre dois pontos a partir de atividades com o jogo como recurso com potencialidades de gerar uma situação de aprendizagem contextualizada.

Percebemos que todos os participantes se envolveram no processo, uns com maior grau de envolvimento que outros. Relacionamos este envolvimento a partir do sentido que cada um atribuiu às atividades propostas, pois necessitavam de um repertório considerável de esquemas para percorrerem o processo de conceitualização proposto. Aqueles que apresentaram invariantes operatórios mais elaborados, ou melhor, conceitos-em-ação válidos e teoremas-em-ação tomados como verdadeiros, obtiveram melhor desempenho, que foi o caso de Lr. e W. Os demais participantes nos demonstraram que o assunto mobilizado no momento da intervenção também já faz parte dos esquemas de ação dos mesmos, mas algumas ressalvas devem ser consideradas, uma vez que a maioria deles possuem dificuldades conceituais em matemática, constatadas em erros de cálculos com números reais (em específico números racionais) e de potências. Este resultado nos ratificou uma das idéias que a teoria de Vergnaud defende sobre o processo de conceitualização, quando afirma que o fracasso global, isto é, o fracasso na tarefa proposta, que aqui interpretamos pelo processo de conceitualização do assunto, é resultado do fracasso em outras subtarefas (VERGNAUD, 1996a). Isso nos permite considerar que atingimos os objetivos.

Notamos também que o trabalho em dupla favoreceu significamente a aprendizagem daqueles que informaram não gostar de matemática ou não ter facilidade com a mesma, caso de J. e Lz., que formaram dupla com W. e Lr, respectivamente. Estas duas últimas contribuíram, através de seus repertórios de esquemas, na ZDP das primeiras, influenciando seus desempenhos. Isso não foi observado da mesma forma com as duplas T. e M., e JA. e R., mas sempre percebemos a influência dos conhecimentos de um nas ações do outro, como já foi apresentado, isto é, de alguma forma a interação entre os participantes enriqueceu o repertório de esquemas de cada um.

No caso da ação com jogos, constatamos a mobilização de algumas competências próprias desta atividade enumeradas por Lopes (1998), como a redução da descrença na auto capacidade de realização, a diminuição da dependência, o aumento da atenção e concentração e a de desenvolver a antecipação e estratégia. Percebemos também a constante concepção dos participantes de ser esta uma competição sadia, esta refletida através da constante disponibilidade dos mesmos em ajudar seu oponente espontaneamente. O clima descontraído e fato marcante na atividade com jogos. Todas essas considerações nos levam a afirmar que respondemos à nossa questão de pesquisa.

Uma atividade que nos incomodou diz respeito a algumas observações que não puderam ser realizadas de todos os participantes, já que no trabalho em dupla, como se é esperado, um dos participantes pode se posicionar sobre o assunto e o outro não mostrar sua colocação, ou por consenso ou por não conhecimento acerca do mesmo.

Com todas essas considerações, depreendemos que esta pesquisa obteve resultados significativos tanto para o esclarecimento sobre a forma de utilização e investigação do processo de conceitualização, quanto fomentou um novo questionamento a respeito de como proceder para reverter as dificuldades que todos os participantes apresentaram.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Paulo Nunes. *Educação lúdica: técnicas e jogos pedagógicos.* 9º Ed. São Paulo: Loyola, 1998.

ANTUNES, C.. *Jogos para a estimulação das múltiplas inteligências*. Rio de Janeiro: Vozes, 1998.

ARAÚJO, Iracema Rezende de Oliveira. *A utilização de lúdicos para auxiliar a aprendizagem e desmistificar o ensino da matemática.* Dissetação. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis: Autora, 2000.

AZEVEDO, M. V. R. *Jogando e construindo a matemática: a influência dos jogos e materiais pedagógicos na construção dos conceitos em matemática.* São Paulo: Unidas, 1993.

BACHELARD, G. *A formação do conceito científico*. São Paulo: Contraporto, 1996.

BARDIN, Laurence. *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70, 1977.

BRASIL. *Enciclopédia da Educação Básica Secundária* – Ensino Fundamental. Volume II. Curitiba: Editora educacional Brasileira S.A. – uma organização em prol do desenvolvimento do ensino no país, 1977.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média eTecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais:* ensino médio.Brasília: MEC/SEMTEC, 1999. 4v.

______. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Ministério da Educação. Secretaria de educação fundamental. 3ª edição. Brasília: Secretaria, 2001.

______. *PCN+ ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.* Vol. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002, p. 55-57.

______. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Volume 2. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

BRENELLI, Roseli Palermo. *O jogo como espaço para pensar*. 5º Ed. Campinas, São Paulo: Papirus, 2005.

BROUGÈRE, Gilles. Jeu et education. *Lê jeu clans la péclagogie prescolaire depnis lê Romanüsme.* Thèse pour lê Doctorat d'Etat és Lettres et Sciences Humaines. Paris, Université Paris V, v. I e II, 1993.

______. *Lê jouet ou la production de 1'enfance: l'image cul-turelle de 1'enfance à travers du jouet industriei.* Paris: VIII, v. I. thèse 3eme cycle, UER d'ethnologie, 1981.

BROUSSEAU, G. (1986) Fondementes e méthodes de la didactique dês mathématiques. In : *Recherche en Didactique des Mathématiques,* 7(2), 33-116, paris, 1986.

BUJES, Maria I. Criança e brinquedo: feitos um para o outro? In: COSTA, Marisa V. *Estudos culturais em educação*. Porto Alegre: Ed. Universidade / UFRGS, 2000.

CABRAL, M. F. N. et all. Concepções de professores sobre as implicações do jogo "escô" no ensino-aprendizagem de adição e subtração. In: *TRAVESSIA*. Recife, 2008.

CAMPOS, Daniele Alves. *A importância do lúdico na construção dos conceitos matemáticos*. Dissertação. Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca – CEFET. Rio de Janeiro: Autora, 2005.

CARVALHO, A. M. P.. Uma metodologia de pesquisa para estudar os processos de ensino e aprendizagem em salas de aula. In: Flávia Maria Teixeira dos Santos; Ileana Maria Greca. (Org.). *A pesquisa em ensino de ciências no Brasil e suas metodologias.* 1ª ed. Ijuí: Unijuí, 2006, v. 1, p. 13-48.

CAWAHISA, Eliane Camilo Maia. *As pesquisas sobre jogos e a prática pedagógica com matemática nas séries iniciais do ensino fundamental.* Dissertação. Universidade de Maringá – UEM/PR. Maringá: Autora, 2006.

CÉSAR, M. (2001). E o que é isso de aprender?: Reflexões e exemplos de um processo complexo. In *Actas do ProfMat2001* (pp. 103-109). Vila Real: APM.

CHEVALLARD, Y. *La Transposition Didactique:* Du Savoir Savant au Savoir Ensigné. Grenoble: La pensée Sauvage, 1991.

CURY, Helena Noronha & KONZEN, Beatriz. Uma aplicação de jogos na análise de erros em educação matemática. In: REVEMAT - *Revista Eletrônica de Educação Matemática*. V2.6, p.107-117, UFSC: 2007.

D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989. p. 15-19.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. Elementos para uma abordagem psicológica do desenvolvimento de conceitos científicos e matemáticos. In: DIAS, M. G. & SPINILLO, A. G. orgs. *Tópicos em Psicologia Cognitiva*. Recife: Editora Universitária UFPE, 1996, p. 141-167.

DOUADY*,* R. Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir une chronique en calcul mental, un projet en algèbre à l'articulation collège-seconde par, IREM Paris-VII. *In: Repères IREM* - Topiques Éditions*,* n° 15, avril, 1994.

______. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. In: *Recherche en Didactique des Mathématiques* - La Pensée Sauvage. Volume 7-2 – 1986.

______. Evolução da Relação com o Saber em Matemática na Escola Primária: uma crônica sobre cálculo mental. In: *Em Aberto*. Ano 14, n. 16, abr./jun. Brasília: 1994, p. 32-41.

DRUZIAN, Maria Eliana Barreto. *Jogos como recurso didático no ensino-aprendizagem de frações. Dissertação.* Centro Universitário Franciscano – UNIFRA. Santa Maria: Autora, 2007.

ECHAVARRÍA, Carlos J. & MONSALVE, Migel. *Geoplano* – Lactura para los Monitores. Disponível em: http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/sedes/medellin/nivelacion/uv00004/lecciones/unidades/generalidades/recta/actividad/Geoplano1.PDF. Acessado em 01/08/2008

FAGUNDES, L. C. Materiais manipulativos no ensino de matemática a crianças de 7 a 14 anos: Período das operações concretas. In: *Seminário Nacional Sobre Recursos Audiovisuais no Ensino de 1° Grau*. Departamento de Ensino Fundamental -Mec - Brasília, Junho de 1977.

FERREIRO, E. *Atualidade de Jean Piaget*. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

FERNANDES, C & TERRA, A. *40 horas de esperança:* o método Paulo Freire: Política e pedagogia na experiência de Angicos***.*** São Paulo, Ática, 1995.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil. In: *Revista Zetetiké*. Ano 3 – n° 4/1995.

FRIEDMANN, A. Brincar: crescer e aprender: o resgate do jogo infantil. São Paulo: Ed. Moderna, 1996.

GGEP. *Sugestões de Atividades Educacionais usando o geoplano, entre muitas possíveis*. Revista de Educação Matemática. São Paulo: SBEM, a. 8 n.6-7, 2001/2002.

GOLDEMBERG, E. P. Quatro funções da investigação na aula de Matemática. In: P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa: APM e Projecto MPT, 1996, pp. 35-49.

GONÇALVES, Julia Eugênia. *Jogos como e porque utilizá-los na escola*. Disponível em <http://www.aprender_ai.com/artigos/jogos/jogos.htm>. Acesso em: 17 Fevereiro, 1999, p.1-7.

GRINGS, Edi Terezinha de Oliveira, et all. Possíveis indicadores de invariantes operatórios apresentados por estudantes em conceitos de termodinâmica. In: *Revista Brasileira de Ensino de Física,* v. 28, n. 4. 2006. p. 463-471.

HENRIOT, Jacques. *Lê jeu.* Paris, Synonyme, SOR, 1983.

______. *Sons coiilenr de joner — La métaphore ludique,* Paris, José Corti. 1989. http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/sedes/medellin/nivelacion/uv00004/lecciones/unidades/generalidades/recta/actividad/Geoplano1.PDF. Acessado em 01/08/2008.

HUIZINGA, Johan. Homo Ludens: *O jogo como elemento da cultura.* 4.ed. São Paulo: Perspectiva, 1996.

IEZZI, Gelson. *Fundamentos de Matemática Elementar 7* – Geometria Analítica. São Paulo: Atual Editora, 1977-78.

______ et al. *Matemática*: ciências e aplicações, 3º série: ensino médio. 2ª edição. São Paulo: Atual, 2004.

IRVIN, B. B. *Circular Geoboard* – Activity Book. Lincolshire (USA): Learning Resources-Inc, 1995.

JAHN, Ana Paula & BONGIOVANNI, Vincenzo. O Teorema de Pitágoras segundo a dialética ferramenta-objeto. *Revista Eletrônica de Educação Matemática* – REVEMAT. V 3.7, p. 78-83, UFSC: 2008.

JELINEK, Karin Ritter. *Jogos nas aulas de matemática: Brincadeira ou aprendizagem? O que pensam os professores?* Dissertação. Pontifica Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre: Autora, 2005.

KISHIMOTO, Tizuko Mochida. O jogo e a educação infantil. In: KISHIMOTO, Tizuko Mochida (Org.). *Jogo, brinquedo e brincadeira na educação*. 10. ed. São Paulo: Cortez, 2007. p. 13-43.

KNIJNIK, Gelsa; BASSO, Marcus Vinicius e KLÜSENER, Renita. *Aprendendo e ensinando matemática com o Geoplano*. Ijuí: Editora Unijuí, 1995.

LEIVAS, J. C. P. *Geoplano*. Fundação Universidade Federal do Rio Grande (FURG). Disponível em <http://mathematikos.psico.ufrgs.br/textos/geoplan.pdf> Acesso em 14 mar. 2007.

LIMA, Anna Paula Brito, ARAÚJO, Claudia R. de & ALBUQUERQUE, Eneri C. de. *Aprendizagem de conceitos: O Processo de Formação de Conceitos nas Teorias de Piaget, Vygotsky e Vergnaud.*

LIMA, Elon Lages. *Coordenadas no Plano*. Rio de Janeiro: IMPA/VITAE, 1992.

LIMA, Maria Eliana matos de Figueiredo. *Relações entre as formas espontâneas de comunicação e desempenho ortográfico de crianças*: um estudo com um dispositivo didático Jogo de comunicação por telefone. Tese de doutorado - UFRPE. Recife: O Autor, 2007.

LOPES, Alice Casimiro. Os parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio e a submissão ao mundo produtivo: O caso do conceito de contextualização. In: **Educ. Soc.*, Campinas, vol. 23, n. 80, setembro/2002, p. 386-400. Disponível em http://www.cedes.unicamp.br. Acessado: 14/05/2009.

LOPES, Maria da Glória. *Jogos na Educação, criar, fazer e jogar*. 2. Ed. São Paulo: Cortez, 1998.

MACEDO, Alexandra Lorandi & BEHAR, Patricia Alejandra. A concepção do aluno sobre a própria aprendizagem ao utilizar ambientes virtuais. In: *Novas Tecnologias CINTED-UFRGS na Educação* V. 3 Nº 1, Maio, 2005.

MACEDO, Lino de; PETTY, Ana Lúcia Sícoli; PASSOS, Norimar Christe. *Os jogos e o lúdico na aprendizagem escolar.* Porto Alegre: Artmed, 2005.

MACHADO, Rosa Maria. *Mini-curso - Explorando o Geoplano*. In: II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/M11.pdf>. Acesso em: 04.11. 2008.

MAGINA, Sandra et al. *Repensando Adição e Subtração*: contribuições da teoria dos campos conceituais. 2ª ed. São Paulo: PROEM, 2001.

______. *A teoria dos campos conceituais*: contribuições da psicologia para prática docente. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/conf/conf_01.pdf. Acessado em: 31/03/2008.

MARANHÃO, M. C. S. A. Dialética ferramenta-objeto. In: MACHADO, S. D. A. *Educação matemática*: Uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2002, P. 142-166.

MELLO, Guiomar Namo de. *Transposição didática interdisciplinaridade e contextualização*. Disponível em: *www.namodemello.com.br/pdf/escritos/outros/contextinterdisc.pdf. Acessado em: 05/07/2009.*

MENEZES. *A interação jogo matemático-aluno em ambientes extra classe*: O jogo do Nim. Dissertação de Mestrado. Recife: UFPE-CE, 1996.

______. *Travessias difíceis, divisões divertidas e quadrados mágicos:* evolução histórica de três recreações matemáticas. Série Contexto Matemático, Vol II. Recife: UFRPE, 2004.

______. Recreações Matemáticas, Conhecimento Matemático e Educação Matemática: uma interligação histórica. In: *III Congresso Internacional de Ensino de Matemática*. Canoas: ULBRA, 20-22.10.2005.

______ et all. Classificação geral dos jogos matemáticos. In: *Anais da VI JEPEX*. Recife: UFRPE, 5-7.12.2006a.

______ et all. Uma proposta de utilização de jogos com interdisciplinaridade na perspectivados temas transversais: puzzle com fósforos. In: *VII Reunião da Didática da Matemática do Cone Sul*. Águas de Lindóia: 2006b.

______ et all. Atividades interdisciplinares com jogos virtuais para o ensino de matemática. In: ix encontro nacional de educação matemática. Belo Horizonte: 2007.

______ et all. *Conhecimento, interdisciplinaridade e atividades de ensino com jogos Matemáticos*: Uma proposta metodológica. Série Contexto Matemático – Volume 5. Recife: UFRPE, 2008.

MOLON, Susana Inês. *Subjetividade e construção do conceito em Vygotsky*. Petrópolis, RJ: Vozes, 2003.

MORAES, Roque. Análise de conteúdos: possibilidades e limites. In: ENGERS, Maria Emília A. (org). *Paradigmas e metodologias de pesquisa em educação:* notas para reflexão. Porto Alegre: EDIPUCRS, 1994.

MORATORI, P. B. *Por que Utilizar Jogos Educativos no Processo de Ensino-Aprendizagem?* Trabalho de conclusão da disciplina informática na educação. Rio de Janeiro. UFRJ: 2003.

MOREIRA, Marco Antônio. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. In: *Investigações em Ensino de Ciências* – V7(1), pp. 7-29, 2002

NETO, A. A. *Matemática básica*. São Paulo: Atual, 1992.

OLIVEIRA, Martha Kohl de. *Vygotsky:* aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipione, 1997.

PAIS, Luiz Carlos. *Didática da Matemática*: uma análise da influência francesa. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001, p. 51–63.

______. *Ensinar e aprender Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PAIVA DE FIGUEIREDO, Elza Marisa. O que está sendo ensina do em nossas escolas é, de fato, matemática? In: *Revista Iberoamericana de Educação*. Número 36/3. 2005.

PIAGET, J. *Psicologia e pedagogia.* Tradução: LINDOSO, Dirceu Accioly & SILVA, Rosa Maria Ribeiro da. Rio de Janeiro: Editora Forence Universitária Ltda, 1976.

POMBO, O. *Descartes e a Matemática*. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/ ocentes/opombo/seminario/descartes/matematica.htm. Acessado em: 04.12.2008

RÊGO, Rogéria Gaudêncio do RÊGO, Rômulo Marinho do. *Matematicativa*. João Pessoa: Editora da UFPB, 1998.

______. *A geometria do ORIGAMI*. Brasília: INEP, 2004, 2ª reimpressão.

______. *Matematicativa II*. João Pessoa: Editora da UFPB, 2000.

RIZZO, G. O Método Natural de Alfabetização. In: *Alfabetização Natural*. Rio de Janeiro: Francisco Alvez, p. 33-129, 1988.

ROCHA, Cristiane de Arimatéa et al. O uso do geoplano para o ensino de geometria: uma abordagem através de malhas quadriculadas. In: *Anais do IX ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática*. Belo Horizonte, 2007.

SABBATIELLO, E. E.. *El Geoplano*: Um recurso didáctico para la enseñança dinámica de la geometria plana elemental - Su aplicación e utilización en la escuela primária. Edicciones G.ª D.Y.P., Buenos Aires, 1967.

SALDANHA, Maria Sueli Gomes. *Análise de uma intervenção didática sobre desigualdades e inequações logarítmicas no ensino médio.* Dissertação – PUC/SP. São Paulo: Autora, 2007.

SANTOS, Vinício de Macedo. A matemática escolar, o aluno e o professor: paradoxos aparentes e polarizações em discussão. In: *Cad. Cedes*, Campinas, vol. 28, n. 74, p. 25-38, jan./abr. 2008.

SCHAEFFER, Edna Heloisa. *O jogo matemático como experiência de diálogo: análise fenomenológica da percepção de professores de matemática*. Dissertação. Universidade Estadual de Maringá. Maringá: Autora, 2006.

SERRAZINA, Lourdes & MATOS, José Manuel. *O Geoplano na Sala de Aula*. Editora Associação de Professores de Matemática, 1988.

SILVA, M. J. C. & SCARPA, R. C. *O ensino da matemática e a utilização de meterias concretos pra a sua aprendizagem*. Disponível em: http://ww4.unianhanguera.edu.br/programasinst/Revistas/revistas2007/anuario/O_ensino_da_matematica.pdf. Acessado em 27.11.2008.

SILVA, Ronald de Santana da & MENEZES, Josinalva Estacio. Geoplano In: MENEZES, Josinalva Estacio (org.). *Conhecimento, interdisciplinaridade e atividades de ensino com jogos Matemáticos*: Uma proposta metodológica. Série Contexto Matemático – Volume 5. Recife: UFRPE, 2008, p. 67-77.

SILVA, Ronald de Santana da, MENEZES, J. E., BRITO, J. S. Inclusão digital em jogos de estratégia por computador. In: *V jornada de ensino*, pesquisa e extensão. Recife: Imprensa Universitária da UFRPE, 2005.

SMOLE, Kátia Stocco et all. *Jogos de matemática de 1º a 5º ano*. Porto Alegre: Artmed, 2007.

SOUSA, Célia Maria Soares Gomes de, FÁVERO, Maria Helena. Análise de uma situação de resolução de problemas de física, em situação de interlocução entre um especialista e um novato, à luz da teoria dos campos conceituais de Vergnaud. In: *Investigações em Ensino de Ciências* – V7(1), pp. 55-75, 2002.

TIBÚRCIO, C. E. *RENÉ DESCARTES*. DISPONÍVEL EM: http://www.ime.unicamp.br/~calculo/modulos/history/descartes/descartes.html. Acessado em: 04.12.2008.

VASCONCELOS, M. B. F. & REGO, R. G.. A contextualização na sala de aula: concepções iniciais. In: *IX Encontro Nacional de Educação Matemática-ENEM*. Belo Horizonte: 2007.

VASCONCELOS, Marcelo Camargos de. *Um estudo sobre o incentivo e desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos, através da estratégia de resolução de problemas*. Dissertação. Florianópolis: Autor, 2002.

VERGNAUD, G. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In: Carpenter, T., Moser, J. & Romberg, T. *Addition and subtraction. A cognitive perspective*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. 1982, pp. 39-59.

_______. La teoría de los campos conceptuales. In: *Recherches en Didáctique des Mathématiques, Vol. 10,nº 2, 3, pp. 133-170, 1990*.

_______. Teoria dos campos conceituais. In: Nasser, L. (Ed.) *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro*. 1993a, p. 1-26.

_______. Entrevista à Novidades Educativas. In: *Pátio*, ano II n°5 mai/jul. 1993b, p. 23–26.

_______. Multiplicative conceptual field: what and why? In Guershon, H. and Confrey, J. (1994). (Eds) *Tha development of multiplicative reasoning in the leaning of mathematics*. Albany, N.Y.: State University of New York Press. 1994, pp. 41-59.

_______. A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, Jean (dir.). Didácta das matemáticas. Trad. Maria José Figueiredo. Lisboa: INSTITUTO PIAGET, 1996a, p. 155–191.

_______. Algunas ideas fundamentales de Piaget em torno a la didáctica. In: *Perspectivas*,26(1): 1996b, 195-207.

_______. ¿Em qué sentido La teoría de los campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar a aprendizaje significativo? In: *Investigações em Ensino de Ciências* – V12(2). pp. 285-302, 2007.

APÊNDICE I: CARTAS DE AÇÃO DO JOGO DISTÂNCIA EM BATALHA

Passar a vez	Passar a vez	Elimine uma ficha do seu oponente 10 pontos
Elimine uma ficha do seu oponente 10 pontos	Elimine uma ficha do seu oponente 10 pontos	Elimine uma ficha do seu oponente 10 pontos
Elimine uma ficha do seu oponente 10 pontos	Elimine uma ficha do seu oponente 10 pontos	Ponha uma ficha sua na origem do plano cartesiano - caso haja uma ficha do seu oponente no local, você irá substituí-la pela sua e ainda adquire 5 pontos. Se a ficha que estiver na origem for sua, você terá a oportunidade de retirar outra carta.

Ponha uma ficha sua na origem do plano cartesiano - caso haja uma ficha do seu oponente no local, você irá substituí-la pela sua e ainda adquire 5 pontos. Se a ficha que estiver na origem for sua, você terá a oportunidade de retirar outra carta.	Escolha uma ficha do seu oponente e informe suas coordenadas. 5 pontos	Escolha uma ficha do seu oponente e informe suas coordenadas. 5 pontos
Escolha uma ficha do seu oponente e informe suas coordenadas. 5 pontos	O oponente irá escolher uma ficha para que você possa fornecer suas coordenadas. 5 pontos	O oponente irá escolher uma ficha para que você possa fornecer suas coordenadas. 5 pontos
O oponente irá escolher uma ficha para que você possa fornecer suas coordenadas. 5 pontos	Escolha uma de suas fichas para que seu oponente possa eliminá-la. 5 pontos para o oponente	Escolha uma de suas fichas para que seu oponente possa eliminá-la. 5 pontos para o oponente

Escolha uma de suas fichas para que seu oponente possa eliminá-la. 5 pontos para o oponente	Jogue os dados novamente e ponha outra ficha sua no tabuleiro.	Jogue os dados novamente e ponha outra ficha sua no tabuleiro.
Informe a distância da origem do plano cartesiano até uma ficha do seu oponente que será eliminada. 10 pontos	Informe a distância da origem do plano cartesiano até uma ficha do seu oponente que será eliminada. 10 pontos	Informe a distância da origem do plano cartesiano até uma ficha do seu oponente que será eliminada. 10 pontos
Informe o maior valor da menor distância entre duas fichas postas no tabuleiro. 10 pontos	Informe o maior valor da menor distância entre duas fichas postas no tabuleiro. 10 pontos	Informe o maior valor da menor distância entre duas fichas postas no tabuleiro. 10 pontos

O seu oponente irá escolher duas fichas quaisquer no tabuleiro para que você forneça a menor distância entre elas. Caso você acerte o valor ganha 10 pontos, caso erre o oponente ganha 5.	O seu oponente irá escolher duas fichas quaisquer no tabuleiro para que você forneça a menor distância entre elas. Caso você acerte o valor ganha 10 pontos, caso erre o oponente ganha 5.	O seu oponente irá escolher duas fichas quaisquer no tabuleiro para que você forneça a menor distância entre elas. Caso você acerte o valor ganha 10 pontos, caso erre o oponente ganha 5.
Escolha três fichas e calcule o perímetro do triângulo formado por elas. 10 pontos	Escolha três fichas e calcule o perímetro do triângulo formado por elas. 10 pontos	Escolha três fichas e calcule o perímetro do triângulo formado por elas. 10 pontos
Escolha três fichas e calcule o perímetro do triângulo formado por elas. 10 pontos	Localize um triângulo retângulo no tabuleiro formado por três fichas e calcule a área da figura. Se não houver ou não localizar, passar a vez. 10 pontos o acerto	Localize um triângulo retângulo no tabuleiro formado por três fichas e calcule a área da figura. Se não houver ou não localizar, passar a vez. 10 pontos o acerto

Localize um triângulo retângulo no tabuleiro formado por três fichas e calcule a área da figura. Se não houver ou não localizar, passar a vez. 10 pontos o acerto	Localize um triângulo retângulo no tabuleiro formado por três fichas e calcule a área da figura. Se não houver ou não localizar, passar a vez. 10 pontos o acerto	Calcule a área de um triângulo retângulo cujos vértices você escolhe. Caso não haja um triângulo retângulo no tabuleiro coloque uma nova ficha nele de modo a obter um e calcule sua área. 20 pontos
Calcule a área de um triângulo retângulo cujos vértices você escolhe. Caso não haja um triângulo retângulo no tabuleiro coloque uma nova ficha nele de modo a obter um e calcule sua área. 20 pontos	Calcule a área de um triângulo retângulo cujos vértices você escolhe. Caso não haja um triângulo retângulo no tabuleiro coloque uma nova ficha nele de modo a obter um e calcule sua área. 20 pontos	Calcule a área de um triângulo retângulo cujos vértices você escolhe. Caso não haja um triângulo retângulo no tabuleiro coloque uma nova ficha nele de modo a obter um e calcule sua área. 20 pontos
Jogue os dados novamente e ponha outra ficha sua no tabuleiro.	Jogue os dados novamente e ponha outra ficha sua no tabuleiro.	Jogue os dados novamente e ponha outra ficha sua no tabuleiro.

APÊNDICE II: QUESTIONÁRIO DE SONDAGEM

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
Mestrado em Ensino das Ciências

Nome:____ idade___________

Questionário

1. Dentre as disciplinas (matérias) que estuda na escola, qual você possui maior afinidade?
Em relação à Matemática, marque um “x” na situação que você se enquadra.

a.		Não gosto e tenho dificuldade em aprender.
b.		Não gosto, mas tenho facilidade em aprender.
c.		Gosto, mas tenho dificuldade em aprender.
d.		Gosto e tenho facilidade em aprender.

2. Você acha necessário estudar matemática? Por quê?

3. Em relação a jogos, marque a(s) alternativa(s) que expressa sua opinião.

a.		Eu não gosto, por isso não jogo.
b.		Eu gosto, mas não jogo com freqüência.
c.		Eu gosto e jogo com freqüência.
d.		Outros. Quais? ____

4. Com relação ao seu desempenho em jogos, em que(quais) situação(ões) você se enquadra.

a.		Eu sempre venço, por isso gosto muito de jogar.
b.		Eu venço quase sempre, mas não gosto de jogar.
c.		Eu gosto, perdendo ou ganhando a partida.
d.		Eu perco na maioria das vezes, mas gosto de jogar assim mesmo.
e.		Eu sempre perco, por isso não gosto de jogar.

APÊNDICE III: TRANSCRIÇÃO DE UMA DAS INTERVENÇÕES

II.1 Intervenção com JA. e R.

[Inicio da 1ª rodada do jogo]

1ª parte
PES: Vamos jogar duas partidas. Entre essas partidas vamos estudar o conteúdo. Vocês serão oponentes daqui por diante e um será vencedor do jogo. *[Sorrisos]* Cada um de vocês vai jogar um dado e quem tirar o maior valor inicia o jogo.
JA.: Três.
R.: Quatro.
PES: *[Explica as regras da primeira parte do jogo]* Vamos começar? Quem inicia é R.
JA.: Me explica novamente esse lance de negativo e positivo.
PES: Se no dado azul der um número ímpar, consideraremos o sinal negativo; caso contrário, se no dado der um número par, o sinal é positivo. Compreendeu? Vamos realizar uma vez para ver como fica. R. vai escrever na folha as coordenadas do ponto dela. Vai jogar os dados pra obter o primeiro ponto dela.
R.: *[Demora balançando os dados]* Peraé! *[lança os dados]*
[Sorrisos]
PES: Observem o azul deu seis. É par ou impar?
JA.: É par.
PES: E o vermelho marca um. Então lemos...
JA.: Menos seis... Opa! Mais um.
PES: O azul é o sinal, par positivo e impar negativo, e o vermelho consideramos o número normalmente.
PES: Então, qual é essa coordenada?
JA.: Menos um.
PES: Pode anotar R.. Aí, ela vai jogar novamente para obter o outro valor.
[R. lança os dados novamente]
PES: E agora, qual seria a coordenada?
JA.: Menos seis.
R.: Cinco.
PES: Isso, cinco. Por que o azul é o que me dá o sinal. *[JA. lança os dados]* E agora? Qual o valor?
R.: Seis
PES: Olhem o azul. Deu par ou impar?
R.: Impar.
PES: O sinal vai ser negativo ou positivo?
R. e JA.: Negativo.
PES: Então é menos seis e não seis! Concordam?
[Confirmam com a cabeça]
PES: Anote aí *[Apontando para o papel de JA.]*. Agora lance os dados novamente é... Espera! Falta tu *[R.]* marcar teu ponto. Pega uma ficha amarela e coloque ela onde indica as coordenadas que você anotou. Menos um no x e cinco no y. *[R. coloca a ficha no ponto (-1,5)]* Isso!
PES: *[JA. lança os dados]* Sinal... *[Apontando para o dado azul]* Negativo ou positivo?
JA.: Negativo.
PES: Aí fica menos...
JA.: Um. *[Anota no papel as coordenadas (-6,-1), pega uma de suas fichas e marca o ponto de coordenadas (-6,1)]*
PES: Vocês têm que ser um o juiz do outro. Está certo?
[JA. retira a sua ficha e a coloca no ponto de coordenadas (-6,-1)]
PES: Tua vez. *[para R.]*
R.: *[Aparenta um pouco de timidamente]* Um... *[Joga os dados novamente]*
JA.: Menos...
R.: Menos seis.
PES: Ela tem que achar o ponto...
R.: Um-menos seis.
PES: Isso! Um no x e menos seis no y. *[R. tenta marcar o ponto (-6,1)]* Um no x e menos seis no y.
R.: Onde é?

JA.: Pode ajudar?
PES: Pode sim, fique à vontade. *[JA. coloca o dedo no um no eixo dos x e o desliza até encontrar o ponto que pertence à reta paralela à Ox que passa pelo ponto menos seis em Oy. Em seguida R. coloca a ficha no local indicado]*
PES: Da mesma forma que ele te ajudou, você pode ajudar ele.
JA.: *[Lança os dados]* Vai dar... Mais um positivo...
PES: Olha só, ela tem duas fichas na linha do um... *[Desliza o dedo na reta paralela ao eixo Oy que passa pelo ponto um no eixo Ox]* Se tu tirar agora ou menos seis, ou cinto, tu já vai ganhar cinco pontos. *[JA. lança os dados e aparenta apreensão. O dado azul cai no chão e apresenta o valor seis]* É seis.
JA.: Então fica mais dois.
PES: Um no x e dois no y. *[JA. coloca a ficha no lugar indicado]* Isso! R. *[sinalizando para ela realizar a próxima jogada]*
R.: Menos cinco... Menos cinco. *[Sorrir]*
PES: Achar agora menos cinco-menos cinco no tabuleiro. *[R. realiza o mesmo procedimento que JA. realizou quando ajudou ela a encontrar o ponto. JA. lança os dados]* Deu dois números iguais, então?
JA.: Zero.
PES: Então, a primeira coordenada, neste caso, é zero. Agora vai jogar pra saber a segunda coordenada. *[JA. lança os dados]* Quanto vale o y?
JA.: Três negativo...
PES: Três negativo?
JA.: É três positivo! *[JA. tenta marcar o ponto de coordenadas (0,3) e coloca a ficha na origem do plano cartesiano]*
PES: Esse é o zero-três?
R.: Não.
PES: Então onde se encontra o zero-três? *[R. aponta para o ponto de coordenadas (0,-3)]* Esse é o ponto zero-menos três. Onde fica o zero-três? *[R. aponta para o ponto de coordenadas (3,0)]* esse é o três-zero... *[R. aponta para o ponto de coordenadas (0,3)]* agora tu ajudou, né?
JA.: É aqui? *[Coloca a ficha no local indicado. R. joga os dados]*
PES: olha! Dois números iguais...
JA.: Zero!
PES: Se tirar três, já sai na frente!
R.: *[Lança os dados novamente]* Deu... Quatro negativo... Menos quatro.
PES: Zero e menos quatro... Onde é que eu acho o zero-menos quatro? *[R. parece ponderar um pouco, coloca o dedo na origem do sistema e o desliza até o -4 no eixo Oy. Simultaneamente JA. realiza o mesmo procedimento]* Para R. só falta uma ficha, não é isso? [R. observa a sua folha de anotação e concorda]
JA.: *[Lança os dados]* Dois... *[Anota na folha. Joga os dados novamente, aparenta confuso enquanto ao procedimento de obtenção da coordenada]*
R.: Não. É dois positivo!
PES: O azul é o sinal. Tem que achar o ponto dois-dois. R. sua vez.
R.: Um... Três... um e três.
JA.: *[Lança os dados e obtêm o valor quatro no dado azul e um no dado vermelho]* Um positivo...
PES: Um!
JA.: Um negativo...
PES: Não, estava certo, menos um!
JA.: Menos um... *[Lança os dados novamente]* Menos quatro.
PES: Acabou, não é?! Todos já distribuíram suas fichas? Ponto!

2ª parte

[PES explica as regras da segunda parte do jogo, enquanto os alunos aparentam prestar a atenção]

R.: *[Retira uma carta do monte]* “Passa a vez”.
PES: A primeira carta que ela tira é passar a vez!
[Sorrisos]
JA.: *[Retira uma carta do monte]* “O oponente irá escolher uma ficha para que você possa fornecer suas coordenadas. Cinco pontos o acerto”.
PES: Escolha uma ficha R. para que ele possa fornecer as coordenadas. [*Parece reflete um pouco]* É só pra você apontar uma ficha pra ele informar as coordenadas.

R.: A vermelha!
PES: Você tem que apontar ficha pra ele. *[R. indica um ponto no Geoplano que não tem ficha]* Não. Você tem que apontar um pino que tem uma ficha. Ficha é isso aqui *[Mostra uma ficha no Geoplano]*
R.: Essa aqui! *[Aponta para a ficha de coordenadas (1,-4)]*
PES: Tu tens que informar as coordenadas dessa ficha! *[Reportando-se a JA.]*
JA.: Um e menos quatro.
PES: E aí R., acha que ele acertou? *[R. confirma com a cabeça]*
PES: Pois é, pode marcar cinco pontos aí *[fala para JA.]*. Próximo!
R.: *[Retira uma carta do monte]* "Elimine uma ficha do seu oponente. Dez pontos".
PES: Você tem que escolhe uma ficha dele, uma sua e fornecer a menor distância entre elas. *[Os participantes demonstram uma fisionomia que aparenta dúvida sobre o que foi dito]* Você tem que escolhe uma ficha dele, uma sua e fornecer a menor distância entre elas.
JA.: Se ela errar...
PES: Ela não ganha os pontos. E aí, qual a ficha dele que você escolhe?
R.: Essa. *[Aponta a ficha de coordenadas (1,2)]*
PES: E a sua?
R.: Essa. *[Aponta a ficha de coordenadas (0,-4)]*
PES: Então, qual é essa distância daqui pr'aqui? *[Põe um dedo em cada pino com as fichas escolhidas]*
R.: É...
PES: Tem que dizer o valor da distância?
R.: *[Parece refletir um pouco e realiza movimentos com os lábios como se estivesse contando algo]* Cinco!
PES: Cinco? Ela acertou ou errou?
JA.: Errou!
PES: Mostra pra mim como você *[R.]* calculou cinco.
R.: *[Pega a caneta e conta da ficha dela para a ficha dele em linha reta]* Um, dois, três, quatro, cinco... seis.
PES: Tu estás contando como a distância? *[R. com a caneta mostra que está considerando como uma unidade a distância entre dois pinos consecutivos na vertical]* Então, quer dizer que a distância entre um pino e outro você está considerando como um?
R.: É!
PES: Mostra pra mim novamente a distância entre as duas fichas que você escolheu.
R.: Um, dois, três, quatro.
PES: Quatro?!
R.: *[Balança a cabeça negativamente]* Não, sei não!
PES: Qual o valor da distância entre os dois pontos que você escolheu?
R.: Cinco!
PES: Ela acertou ou errou JA.?
JA.: Errou!
PES: Então quanto é? *[Pergunta a JA.]*
JA.: Sete.
PES: Mostra pra mim como você calculou sete.
JA.: *[Com a caneta conta]* Um, dois, três, quatro, cinco, seis... *[Na vertical]* Sete. *[Na horizontal]*
PES: R. disse que tinha cinco... A distância é cinco?
R. e JA.: Não!
PES: Então vocês concordam que não tem cinco e sim tem sete, não é isso? *[R. e JA. concordam com a cabeça]*
PES: Pois é, R. não ganhou cinco pontos. Então, foi consolidada essa forma *[combinação de vertical e horizontal]* de calcular a distância, entre vocês? *[R. e JA. concordam mais uma vez com a cabeça]*
JA.: *[Retira uma carta do monte]* "Informe o maior valor da menor distância entre duas fichas postas no tabuleiro. Dez pontos".
PES: Entenderam? Ele tem que escolher duas fichas que possuem a maior distância entre elas e dizer o valor dessa distância, para poder ganhar dez pontos.
JA.: A distância da minha ficha?
PES: Não, qualquer ficha. Pode ser as duas tuas, uma tua e uma dela ou as duas dela. Você escolhe. Fiquem a vontade no tabuleiro pra contar, fazer como vocês quiserem. *[JA. demora a escolher as fichas]* Como vocês decidiram calcular a distância?
JA.: Assim... Um vale daqui pra aqui. *[Mostra o espaço de um pino a outro]*.

PES: Pronto, agora você vai escolher duas fichas que você acha que possuem o maior valor da menor distância das que estão postas no tabuleiro.
JA.: Minha ou dela, tanto faz?
PES: Tanto faz!
JA.: Essa... *[(1,5)]*
PES: Escolha outra ficha.
JA.: Essa. *[(-6,-1)]*
PES: Essa e essa *[coloca um dedo em cada pino, com as fichas, escolhido]*. Qual a distância entre essas duas fichas? Será que essa distância é a maior valor entre duas fichas?
JA.: Não.
PES: Então, quais as fichas mais distantes e qual a menor distância entre elas? [JA. parece refletir sobre o questionamento] R., já percebesse a maior distância entre duas fichas postas no tabuleiro?
R.: Não!
JA.: A maior distância é entre essa *[aponta para (1,5)]* e essa *[aponta para [(-1,-6)]*.
PES: Vale quanto a distância entre elas?
JA.: Posso contar?
PES: Pode. Fique a vontade.
JA.: *[Conta, silenciosamente, os espaços entre os pinos de uma ficha a outra combinando vertical com horizontal]* Dezesseis.
PES: Entendeu o que ele fez? Concorda que esse é o maior valor da menor distância?
R.: Concordo.
PES: Dá dezesseis?! [Aparentam concordarem] Ok! Se ele conseguiu... Dez pontos!
R.: *[Retira uma carta do monte]* "O oponente irá escolher duas fichas, quais quer, para que você forneça a menor distância entre elas. Caso acerte você ganha dez pontos, caso erre o oponente ganha cinco".
PES: Entenderam o que deve ser feito?
JA.: Entendi. Eu tenho que escolher duas fichas pra ela para que ela forneça a distância. Não é isso?
PES: Correto. Se ela acertar ganha dez pontos, se ela errar você ganha cinco!
JA.: Deixa eu ver.... Essa daqui *[aponta para (-5,5)]*... E essa *[aponta para (0,-4)]*.
PES: Qual a menor distância R.?
R.: *[Aparenta refletir um pouco e pega a caneta como ferramenta para auxiliar na contagem]* Seis...
PES: Já disse o valor. E aí ela acertou? *[JA. confirma com a cabeça]* Dez pontos pra R..
JA.: *[Retira uma carta do monte]* "Ponha uma ficha sua na origem do plano cartesiano. Caso haja uma ficha do seu oponente no local, você irá substituí-la pela sua e ainda adquire cinco pontos. Se a ficha que estiver na origem for sua, você terá a oportunidade de retirar outra carta".
PES: O primeiro comando é para colocar uma ficha na origem do plano. Tem alguma ficha lá?
JA.: Não!
PES: Então, é só executar a orientação.
R.: *[Retira uma carta do monte]* "Elimine uma ficha do seu oponente. Dez pontos". *[Sorrir]*
PES: Você vai escolher uma ficha tua e uma ficha dele que será eliminada. Tem que escolher uma ficha sua e uma ficha dele e dizer qual a menor distância entre elas.
R.: Um. *[Aponta as fichas de coordenadas (-1,-4) de JA e (0,-4) sua]*
PES: Pronto. Dez pontos!
JA.: *[Retira uma carta do monte]* "Jogue os dados novamente e ponha uma nova ficha sua no tabuleiro". *[Joga os dados]* dois números iguais... Zero. *[Joga os dados novamente]* Um. *[Pega uma ficha e a coloca no ponto (1,0)]*
PES: Aí é o ponto de coordenadas zero-um?
JA.: Desculpa. [*Coloca a ficha no ponto correto]*
R.: *[Retira uma carta do monte]* "Escolha uma de suas fichas para que o oponente possa eliminá-la. Cinco pontos para o oponente".
PES: R. vai agora escolher uma ficha dela pra que você possa eliminá-la informando a menor distância entre a ficha que ela escolheu e uma sua. Pode escolher R.
R.: Essa... *[(0,-4)]*
JA.: Eu escolho essa *[(0,0)]*. A distância é quatro.
PES: Cinco pontos para JA..
JA.: *[Retira uma carta do monte]* "Jogue os novamente dados e ponha uma nova ficha sua no tabuleiro". *[Joga os dados]* Zero. *[Apontando os dados com números iguais Joga os dados novamente]* Menos seis. *[Pega uma ficha e a coloca no local solicitado]*
R.: [Retira uma carta do monte] "Informe a distância entre a origem do plano cartesiano e uma ficha do seu oponente, que será eliminada. Dez pontos".

JA.: Como? *[Sorrisos]*
R.: *[Repete a leitura]* "Informe a distância entre a origem do plano cartesiano e uma ficha do seu oponente, que será eliminada. Dez pontos".
PES: Entenderam? *[R. confirma com a cabeça]* Escolha logo a ficha dele, que será eliminada, e diga qual a distância dela até a origem do plano.
R.: Escolho essa aqui. [Aponta a ficha de coordenadas (1,2)]
PES: Pronto. Agora informe a distância ente esse ponto que você escolheu até a origem do plano.
R.: A distância é quatro...
PES: Ela acertou ou errou?
JA.: Errou!
PES: Errou! Temos que prestar a atenção naquilo que vocês concordaram como calcular a distância entre dois pontos no inicio da partida.
JA.: *[Retira uma carta do monte]* "Escolha uma ficha do seu oponente e informe suas coordenadas, cinco pontos".
PES: Qual a ficha que você escolhe?
JA.: Essa. *[Aponta para a ficha de coordenadas (1,-6)]* Um e menos seis.
PES: Isso. Cinco pontos. Vai R., tua vez. Vai com fé! *[Sorrisos]*
R.: *[Retira uma ficha do monte]* "Escolha uma ficha do seu oponente e informe suas coordenadas, cinco pontos".
PES: Vamos lá! Escolha uma ficha dele e informe as coordenadas. Qual que você escolhe?
R.: Essa aqui. *[Aponta para a ficha de coordenadas (1,2)]*
PES: Sim. Informe as coordenadas dela.
R.: As coordenadas... Um e dois *[Realiza o procedimento de por o dedo no ponto que se deseja encontrar as coordenadas e o desliza até o eixo Ox, encontrando dessa forma o valor da primeira coordenada. Volta com o dedo no ponto inicial e o desliza para o eixo Oy para encontrar a segunda coordenada].*
PES: Concorda com ela? *[JA. confirma com a cabeça]* Então cinco pontos pra R.! [JA. Retira uma carta do monte] Novamente!
JA.: *[Confirma com a cabeça]* "Jogue os dados novamente e ponha outra ficha sua no tabuleiro". *[Joga os dados]* Zero. *[Aponta os dados com números iguais. Joga os dados novamente]* Menos quatro. *[Pega uma ficha e a coloca no local solicitado]*
R.: *[Retira uma carta do monte]* "Jogue os dados novamente e ponha outra ficha sua no tabuleiro". *[Joga os dados]* Menos cinco. *[Joga os dados novamente]* Zero. *[Pega uma ficha e a coloca no local solicitado]*
JA.: *[Retira uma carta do monte]* "Jogue os dados novamente e ponha outra ficha sua no tabuleiro".
PES: Poxa, agora vai ter um monte de pontos pra acertar!
JA.: *[Joga os dados]* Números iguais novamente, zero. *[Joga os dados novamente]* menos três. *[Pega uma ficha e a coloca no local solicitado]*
R.: *[Retira uma cata do monte]* "O oponente irá escolher duas fichas quaisquer para que você forneça a menor distância entre elas. Caso você acerte, ganha dez pontos; caso erre, o oponente ganha cinco".
PES: Essa é a jogada decisiva. Todos dois estão a cinco pontos da vitória. Então vamos lá. JA. tem que escolher duas fichas pra que R. possa fornecer a distância entre elas. Qualquer ficha!
JA.: Essa *[Aponta para ficha de coordenadas (1,6)] e essa [Aponta para ficha de coordenadas(1,-6)]*.
R.: *[Conta as unidades com auxilio da caneta]* Doze.
PES: É doze? *[R. olha para PES aparentando esperar uma resposta]*
R.: *[Olhando para JA.]* É doze?
JA.: É!
PES: E R. acaba de ser a vencedora dessa primeira partida! [Sorrisos]

[início dos questionamentos]

PES: Queria saber de vocês qual a maior dificuldade de achar a distância? Estaria em achar os pontos? Identificar as coordenadas? Esse é o momento que eu posso ajudar vocês, fiquem à vontade para se expressarem.
JA.: Minha maior dificuldade é quando estar aqui pra achar o ponto *[aponta para o eixo das abscissas]*, por exemplo, zero-quatro.
PES: Zero no x e quatro no y. Só isso a sua dúvida. Em relação ao cálculo da distância, existe alguma dúvida?

JA.: Olha, pra calcular a distância daqui *[um ponto no 3º quadrante e um ponto no 1º quadrante, isto é, os dois pontos estão alinhados na diagonal]* eu só posso fazer isso é? *[Mostra os passos combinados de horizontal com vertical que ligam os pontos]* Será que eu posso fazer isso? *[Mostra a linha reta imaginária que une os dois pontos]* Não, né?
PES: Pode! Se você conseguir me dizer qual a distância entre esses dois pontos, é válido. Mas temos que levar em consideração que uma unidade é igual isso aqui. *[Mostra dois pinos consecutivos na horizontal. Pega o barbante e une os dos pontos]* Você sabe me dizer qual a distância daqui para aqui?
JA.: [Conta em voz baixa] Seis.
PES: Me mostre por que seis. *[JA. conta os pinos consecutivos na diagonal como uma unidade]* Você acha que essa medida *[dois pinos consecutivos na horizontal]* é igual a essa? *[Dois pinos consecutivos na diagonal]*
JA.: Não!
PES: Por quê?
JA.: Por que daqui pra aqui *[dois pinos consecutivos na diagonal]* é maior do que daqui pr'aqui.
PES: Mas qual é a menor distância pra vocês. É daqui pra aqui *[mostra com o barbante a linha reta]* ou assim? *[Mostra a combinação de horizontal com vertical, também com o barbante, que eles utilizaram no jogo]*
JA.: Sem dúvidas é essa. *[Aponta para o segmento de reta, imaginário, que une os dois pontos]*
PES: Pois é, a menor distância que une dois pontos é um segmento de reta. A menor distância entre esse ponto zero-três e esse ... Menos cinco-menos cinco é a medida dessa reta *[aponta para o seguimento que une os dois pontos].* Na primeira rodada do jogo vocês estavam calculando dessa forma *[mostra a combinação de horizontal com vertical]* a menor distância. A pergunta é a seguinte: vocês acham que estavam encontrando a menor distância real entre dois pontos?
JA.: Acho que não!
PES: E você *[R.]*, o que acha?
R.: Também acho que não.
PES: Por exemplo, quando tínhamos esses dois pontos *[aponta para os pontos (1,2) e (0,0)]*, calculávamos a menor distância dessa forma: um, dois, três *[combinação de horizontal com vertical]*, mas agora vocês dizem que a menor distância é isso *[demonstra com o barbante um segmento de reta que une os dois pontos]*. Agora temos um problema; como saber essa distância.
JA.: Pois é, e que problema!
PES: É isso que vamos aprender agora. Qualquer distância entre dois pontos no plano cartesiano vamos saber calcular. *[R. e JA. concordam com a cabeça]*
PES: Vamos esvaziar o Geoplano. *[Entrega uma ficha laranja para JA.]* Coloca essa ficha no ponto de coordenadas menos três-cinco. *[Entrega uma ficha vermelha para R.]* Essa ficha no ponto três e cinco. *[Entrega uma ficha amarela para JA.]* E essa no ponto menos três-menos três. Pronto! A distância entre essa ficha vermelha e essa ficha laranja vale quanto?
JA.: Seis!
PES: R., a distância entre essa ficha laranja e essa ficha amarela?
R.: *[Demora um pouco a responder]* Oito.
PES: Para os dois. Qual a distância entre a ficha vermelha e amarela?
JA.: Não sei a reta, mas se for assim *[mostra a combinação de contagem de espaços na horizontal com vertical]* eu sei.
PES: Essa que você disse que sabe é a menor distância?
JA.: Não.
PES: Pois é, o que eu quero é a menor distância.
R.: *[Enquanto PES se prepara realizando uma figura no quadro para demonstração]* É oito também?!
PES: Mostra pra mim o oito. *[R. conta a distância através dos espaços em diagonal dos pinos de uma ficha a outra]* Lembra do que eu disse: uma unidade mede esse tamanho. *[Mostra uma unidade na vertical]* Vocês acham que esse *[mostra dois pinos consecutivos na diagonal]* mede mais, menos ou igual a esse? *[Mostra dois pinos consecutivos na vertical]*
JA.: Esse *[mostra dois pinos consecutivos na diagonal]* é maior que esse. *[Mostra dois pinos consecutivos na vertical]*
PES: Pois é, se levarmos em consideração esse pensamento, então acho que teremos um valor maior que oito aqui, não acham? Esse é o nosso problema, quanto mede essa distância?
R.: Eu ainda acho que é oito.
PES: Então vamos analisar. Está no quadro uma representação dessas fichas no plano cartesiano. Quanto mede daqui pra aqui? *[Mostra a distância de (-3,5) até (3,5)]*
JA.: Seis.

PES: E daqui pra aqui? *[Mostra a distância de (-3,5) até (-3,-3)]*
JA.: Oito.
PES: Nosso problema é achar essa distância. *[Mostra a distância de (3,5) até (-3,-3)]* Olhem esse triângulo que foi formado. Ele é retângulo no ponto menos três-cinco. Um triângulo com essas características eu posso utilizar uma relação conhecida da gente, mais conhecida como um teorema. Vocês sabem que teorema é esse?
R.: Pitágoras
PES.: Lembram o que diz o teorema?
R.: "a" ao quadrado, é igual a "b" ao quadrado, mais "c" ao quadrado.
PES: Quem é o "a" nesse quadrado, também conhecido como hipotenusa?
JA.: E esse aí. *[Aponta para medida que queremos encontrar]*
PES: Pois é. O "a" é a hipotenusa do triângulo, é o que eu quero encontrar. O "b" ao quadrado pode ser qualquer um dos outros dois lados, assim como o "c" também pode ser qualquer um dos dois. Se eu achar o valor de "a" eu encontro a distância entre as duas fichas e resolvo meu problema. Vamos lá, "a" ao quadrado é o que eu quero achar, "b" ao quadrado mede quanto? Pode ser qualquer um dos dois.
JA.: Oito ou seis... Coloca seis.
PES: "a" ao quadrado e igual a seis ao quadrado mais... Oito ao quadrado. Seis ao quadrado?
JA.: Trinta e seis?.
PES: Isso, que é seis vezes seis. E oito ao quadrado vale quanto?
JA.: Sessenta e quatro.
PES: A distância do vermelho para o amarelo ao quadrado é igual a trinta e seis mais sessenta e quatro. Que vai ser igual a cem. A distância do vermelho para o amarelo vai ser raiz de cem, que é... Dez! Então, a distância dessa ficha *[aponta para ficha vermelha]* até essa, *[aponta para ficha amarela]* vale dez! Certo! Alguma dúvida até agora?
JA.: Não. *[R. balança a cabeça negativamente]*
PES: E agora, você continua achando que vale oito a distância ente essas duas fichas *[aponta simultaneamente para as fichas vermelha e amarela]*
R.: Não. Agora eu sei por que é dez!
PES: O próximo passo é agente provar pra qualquer valor, isto é, dados dois pontos quaisquer eu possa encontrar a menor distância entre eles sem necessitar fazer nenhuma figura.

[Inicio da dedução da fórmula de recorrência para a distância entre dois pontos e a resolução de alguns exercícios para aplicação da fórmula]

JA.: Vamos encontra uma fórmula geral, não é?
PES: Isso. Vamos encontra uma fórmula geral para o cálculo da distância entre dois pontos. *[PES, após deduzir a fórmula e apresentar uma aplicação, recorre a alguns exercícios para aplicação da mesma. R. e JA. recorrem ao exercício resolvido para realizarem as questões, enquanto isso PES observa como eles estão realizando as atividades]*
PES: *[Observa que R. se confunde com as coordenadas para colocá-las na fórmula]* Atenção nessas substituições. Você tem que se perguntar qual é o x de A? Em seguida, qual o x de B? Para depois substituir eles na fórmula. Entendeu?
R.: Entendi.
PES: *[Observa o desenvolvimento de JA. e percebe que o mesmo calculou o quadrado de três igual a seis]* Isso aqui é três ao quadrado? Vale quanto três ao quadrado?
JA.: Eita! *[Corrige seus cálculos]*
PES: *[Observa o desenvolvimento de JA., em outra questão, e percebe novamente que o mesmo calculou o quadrado de três igual a seis]* Quanto é cinco menos dois?
JA.: Três!
PES: E três ao quadrado?
JA.: Eita! [Corrige seus cálculos novamente]
PES: Rapaz... Atenção nas contas!
JA.: Acho que fiz alguma coisa errada aqui. Vem dar uma olhada...
PES: *[Observa que JA. realizou a combinação x de A menos o y de A no lugar de x de A menos x de B]* Observe as coordenadas que você utilizou nas substituições. Você deve fazer x de A menos x de B, mais y de A menos y de B. Você não fez isso! Tente corrigir. *[JA. volta para os cálculos]*
R.: Agora eu não sei mais.

PES: Como assim, não sei?! Quanto é trinta e seis mais sessenta e quatro? *[R. balança a cabeça negativamente]* Põe um abaixo do outro e soma, oras! *[Sorrisos. R. realiza o procedimento que PES a instruiu]*
PES: Pronto terminou?
R.: *[Confirma com a cabeça]* Dá cem!
PES: E agora, o que eu faço?
R.: Raiz de cem... dez!
PES: Vamos para a segunda e última partida?!

[Início da 2ª rodada do jogo]

1ª parte
[JA. permite que R. inicie o jogo]
R.: *[Joga os dados]* Menos dois... *[Joga os dados novamente]* Menos três.
PES: Muito bom! Agora coloque a ficha no lugar indicado!
JA.: *[Enquanto R. procura o ponto obtido, ele joga os dados]* Menos seis... *[Anota na folha em seguida lança novamente os dados]* Mais seis.
PES: *[Primeiramente JA. coloca a ficha no ponto de coordenadas (6,-6)] T*em certeza que é aí?
JA.: *[Retira a ficha do lugar, encontra o ponto obtido no lance dos dados com o dedo, mas coloca a ficha no ponto (0,6)]* Ôpa! Acho que errei de novo, é aqui. *[Retira a ficha e em seguida a coloca no local obtido com os lances dos dados]*.
R.: *[Joga os dados]* Menos seis... Espera! Menos um... Não, um! *[joga os dados novamente]* Menos seis. *[Coloca a ficha no local indicado]*
PES: Lembre *[para R.]* que primeiro olhamos pra o eixo dos x *[mostra o eixo Ox]*, depois que olhamos pra os y. *[mostra o eixo Oy]*
JA.: *[Enquanto R. procura o ponto obtido, ele joga os dados]* Mais dois... *[Anota na folha e em seguida lança novamente os dados]* Mais quatro.
PES: Acha esse ponto agora no Geoplano.
R.: *[Enquanto JA. procura o ponto com as coordenadas obtidas R. lança os dados]* Menos seis, *[joga os dados novamente]* um, menos seis um. *[Coloca a ficha no local indicado]*
JA.: *[Joga os dados]* Menos dois...
PES: Presta a atenção que o sinal é dado pelo azul.
JA.: Ok! Mais cinco... *[Anota na folha -5]*
R.: É mais cinco!
JA.: Eita! *[Corrige e em seguida lança novamente os dados]* Menos um. *[Coloca a ficha no local indicado]*
R.: Menos dois, *[joga os dados novamente]* Um! Menos seis-um. *[Coloca a ficha no local indicado]*.
PES: *[JA. lança os dados e obtêm dois números iguais]* Dois números iguais quanto vale?
R.: Zero!
JA.: *[Joga os dados novamente]* Dois. *[Enquanto JA. parece pensar onde colocar sua ficha R. faz sua jogada silenciosa e realiza as suas anotações. JA. decide colocar a ficha no ponto de coordenadas (0,0)]*
PES.: Esse é o zero-zero JA. Onde fica o zero-dois? Em R., onde fica o zero-dois?
R.: *[Parece concentrada a procura do ponto para colocar sua última ficha]* Como? O zero-dois?
PES: Sim! *[Ela aponta para o ponto de coordenadas (2,0)]* esse é o ponto de coordenadas dois e zero... O que acontece é que procuramos o inverso, o ponto zero e dois. *[R. rapidamente encontra o ponto]*. Lembraram? *[R. coloca a ficha no ponto (-2,2)]* Como é? Qual é o ponto de estás procurando mesmo?
R.: O menos dois-dois! Aqui! *[Aponta o ponto com a ficha já no lugar]*.
JA.: *[Joga os dados]* Mais dois... *[Anota na folha e em seguida lança novamente os dados]* De novo! Mais dois. *[instantaneamente coloca sua ficha no local indicado]*
PES: Ok! Vamos para as cartas?!

2ª parte
PES: Primeira carta. *[Aponta para R.]*
R.: *[Retira a carta do monte]* "Informe a distância da origem do plano cartesiano até uma ficha do seu oponente que será eliminada. Dez pontos". Eu escolho esse ponto aqui. *[aponta para a ficha de coordenadas (0,2)]*
PES: Qual a distância dessa ficha até a origem do plano?
R.: Vale dois!

PES: R. abre o placar com dez pontos! *[Sorrisos]*
JA.: *[Retira a carta do monte]* “Tente localizar um triângulo retângulo no tabuleiro formado por três fichas e calcule...”
R.: Já estou vendo... *[Coloca a mão na boca como estivesse se excedido no comentário]*
PES: Você já viu?! *[R. sorrir e afirma com a cabeça]*
JA.: *[Continua a leitura enquanto R. sorrir]* “...a área da figura. Se não houver ou não localizar, passar a vez. Dez pontos o acerto”.
PES: Tente localizar um triângulo Retângulo... Tu já achou foi? Achasse um ou mais de um?
R.: Tem mais.
PES: Tem mais de um?
R.: Tem.
PES: E aí JA., já viu um triângulo retângulo. R. diz que está vendo mais de um! Lembra o que é triângulo retângulo? É aquele que acabamos de trabalhar com o teorema de Pitágoras. Triângulo retângulo tem um ângulo reto! *[JA. inicia as combinações de três pontos postos no tabuleiro para verificar se em alguma algumas delas pode haver um triângulo retângulo]*
R.: Eu acho que tem três! *[Sorrir]* Eu, às vezes, faço isso no meu almoço. Pego o macarrão e faço os triângulos assim. *[Representa o triângulo no espaço. Sorrir]* Vou dizer. Ta demorando muito! *[Sorrisos]*
JA.: *[Aponta as fichas que possuem coordenadas (1,-6), (5,-1) e (2,2)]* esse é retângulo!
PES: E agora como eu calculo a área de um triângulo?
JA.: Assim. *[Aponta para as anotações feitas no quadro]*
PES: Usando a fórmula? *[JA. realiza um gesto afirmativo]*
PES: Acho que apenas a distância entre dois pontos não é o suficiente para calcular a área de um triângulo...
JA.: Não, estou falando de Pitágoras.
PES: Acho que também não! Mas antes de discutirmos isso o que garante que este triângulo que você me disse JA. é retângulo?
JA.: Por isso. *[aponta os lados do triângulo]*
PES: Mas isso não me garante nada sobre o ângulo reto do triângulo retângulo.
JA.: Então não consigo achar um.
PES: Dessa forma, então você passou a vez. R. aponte um triângulo retângulo pra gente ver. *[R. aponta as fichas (2,4), (-2,2) e (2,2)]*
PES: Ok! Vamos continuar. R. retire uma carta.
R.: “Elimine uma ficha de seu oponente. Dez pontos”.
PES: Lembra como se elimina a ficha de um oponente? Tem que informar a distância de uma ficha tua pra uma ficha dele que será eliminada.
R.: Eu escolho essa minha *[aponta para a ficha de coordenadas (-2,-1)]* e essa dele. *[aponta para a ficha de coordenadas (5,-1)]*
JA.: É bom que está na linha não precisa usar a fórmula!
PES: Qual o valor da distância?
R.: Sete!
PES: Sete! Muito bom! Dez pontos!
JA.: *[Retira uma ficha do monte]* “Escolha uma ficha e informe suas coordenadas. Cinco pontos”. Escolho essa [aponta para a ficha com coordenadas (-6,6)]
PES: Sim! E quais são as coordenadas?
JA.: É menos seis-seis.
R.: *[Retira uma carta, lê e sorrir]* “Elimine uma ficha de seu oponente. Dez pontos”.
PES: Eita! Se ela acertar ganha dez pontos e vence o jogo. Escolha uma ficha sua e uma dele e informe a distância. Vamos lá!
R.: Essa minha *[aponta para a ficha de coordenadas (-2,2)]* e essa. *[aponta para a ficha do oponente com coordenadas (2,2)]* É quatro!
PES: Está certa disso? *[R. conta novamente e confirma com a cabeça]* O que achas JA., ela ganhou o jogo?
JA.: Ganhou!
PES: Que bom R. parabéns. Parabéns pra você também JA.. Foi uma boa partida! Terminamos o jogo, mas agora tenho duas questões pra fazer pra vocês: *[recoloca a ficha de JA. que acabou de ser eliminada no mesmo local que se encontrava anteriormente]* está vendo esse triângulo *[aponta para o triângulo retângulo formado pelas fichas de coordenadas (2,2), (-2,2), (-2,4)]*, ele é retângulo. Vocês poderiam me informar qual a área desse triângulo? Lembrando que a área de um triângulo é a medida da base, vezes a altura, sobre dois. Vamos tentar?! O triângulo é esse. *[pega o barbante e*

realiza o contorno entre os pontos. JA. anota informações referentes à área do triângulo, dedilha de uma ficha a outra os dois catetos do triângulo retângulo e retorna para suas anotações. Conta distância entre as fichas (-2,2) e a (2,2), depois conta a distância entre (2,2) e (2,4) e retorna para suas anotações. Enquanto isso R. tenta realizar o problema, mas não obtém sucesso, pois não se apropriou da fórmula para o cálculo da distância]
PES: E aí R., nada! Vamos lá... por partes, acabei de lhe informar que a área do triângulo é a área da base, vezes a altura, sobre dois, não foi isso! *[R. confirma com a cabeça]* Agora anote essa fórmula que te apresentei, “a” é igual a “b” vezes “h” sobre dois! *[R. expressa uma fisionomia que aparenta não entendimento]* Passe um traço em baixo do “b” vezes “h” e coloque o dois lá em baixo.
R.: Tá cetro! *[R. realiza o procedimento solicitado]*
PES: Agora é olhar para o triângulo e entender qual lado representa a altura, qual lado representa a base e substituir os valores deles na fórmula!
JA.: Terminei! Dá quatro!
PES: Como dá quatro?
JA.: A base é quatro, vezes dois da altura dá oito, dividido por dois dá quatro!
PES: Certo! Entendeu R. como foi feita a conta? *[R. confirma com a cabeça]* Agora vamos pra o segundo e último desafio. Observem esse mesmo triângulo que acabamos de calcular a área. Vocês poderiam me informar o perímetro desse triângulo? JA. você sabe o que é o perímetro de um polígono?
JA.: Sei, mas não sei calcular não!
PES: O que é o perímetro?
JA.: Perímetro... Não sei não!
PES: Perímetro é a soma dos lados desse polígono! No caso do nosso triângulo qual é o perímetro dele?
JA.: É a soma dos lados do triângulo!
PES: Sei, mas quanto vale a soma desses lados? Calcula no papel pra mim. *[JA. inicia os cálculos]*
R.: Agora é perímetro é?! Soma dos lados... Deixa eu ver... *[Realiza os cálculos na folha]*
JA.: Tenho uma dúvida.
PES: Sim!
JA.: Daqui pra aqui eu sei quanto vale, é quatro. Daqui pra aqui também, dois, mas e esse lado vale quanto?
PES: Será que tem como eu saber esse valor daqui? *[Aponta para o seguimento de reta com extremidades (-2,2) e (2,4)]*
JA.: Isso é aquilo que a gente viu no jogo?
PES: Aquilo o quê?
JA.: A distância daqui pra aqui? *[aponta para as fichas de coordenadas (-2,2) e (2,4)]*
PES: Isso. E aí como calculamos a distância entre essas duas fichas?
JA.: *[JA. repete a fórmula da distância entre dois pontos na folha]* e agora quem é “A” e quem é “B”?
PES: Você pode determinar qualquer um. A distância daqui pra aqui é a mesma que a daqui pra aqui. *[Alterna o início e o fim do segmento AB com os dedos]*
JA.: Vou dizer que esse é o “A” e esse é o “B”...
PES: Quais são as coordenadas de “A”?
JA.: É... No x é dois e no y é quatro.
PES: Anote pra facilitar! *[Ele registra na folha]* E as coordenadas do “B”, quais são?
JA.: Menos dois no x e dois no y... *[Registra na fola]*
PES: Agora é só fazer continhas! *[Enquanto isso R. tenta acompanhar a resolução de JA.]*
JA.: *[Continua nos cálculos]* Achei raiz de vinte.
PES: Agora é só calcular o perímetro. Que é a soma dos lados!
JA.: Então eu pego esse *[aponta para um dos catetos]*, mais esse, *[aponta para o outro]* mais raiz de vinte?
PES: Isso. Quanto é que dá o perímetro do triângulo? Escrava no papel o que você me disse agora! *[Ele anota]*
R.: Vai soma aí. Quatro, que é daqui pra aqui. *[Aponta o cateto de vértices (-2,2) e (2,2)]* Mais dois, que é esse. *[Aponta o cateto de vértices (-2,2) e (2,2)]* mais raiz de vinte que tu achou!
JA.: Eu sei, mas o que eu faço com esse raiz de vinte, somo ou não com os outros? *[R. movimenta a cabeça negativamente]*
PES: Você soma o que sabe somar e a raiz deixa na expressão.
JA.: Então fica, dois mais quatro, oito. Oito mais raiz de vinte?
PES: Isso! Alguma dúvida?
JA. e R.: Não!

APÊNDICE IV: FICHA DE EXERCÍCIOS

EXERCÍCIOS:

Nome:____

1. Determine o ponto P do eixo Oy eqüidistante dos pontos A(2,0) e B(2,4).

Resolução:

2. Num triângulo ABC, sendo A(4,3), B(0,3), C um ponto dos eixos das abscissas e AC=BC, determine C.

Resolução:

3. Calcule a distância entre os pontos A e B nos seguintes casos:

a) A(0,3) e B(5,0)	b) A(2,5) e B(-1,1)
c) A$\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ e B$\left(-2, \frac{3}{2}\right)$	d) A(-2,5) e B(4,-3)

4. Sendo o ponto P está no eixo Ox e é eqüidistante de A(3,1) e B(9,1), então ele em coordenadas:
   a) (3,0)
   b) (6,0)
   c) (0,8)
   d) (0,6)
   e) (6,1)

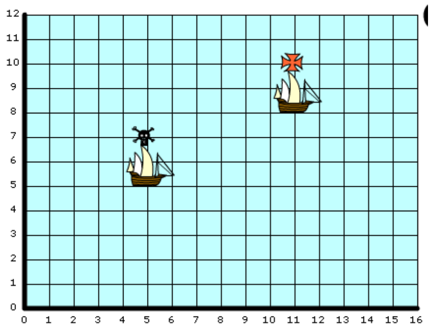
5. Calcular o perímetro do triângulo ABC, sendo dados A(2,1), B(-1,3) e C(4,-2).

APÊNDICE V: TESTE INVESTIGATIVO AUXILIAR

Nome:____

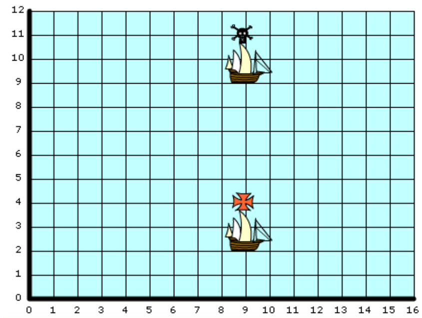
1. As figuras abaixo representam as batalhas que existiam, e que tiveram seu auge entre os séculos XVI e XVII, entre os piratas e a guarda real. Os piratas cruzavam os mares com o objetivo de promover saques e pilhagem a navios e a cidades para obter riquezas e poder. Atualmete a sociedade se surpreendeu com a notícia da existencia e atuação de piratas somalis no Oceano Indico. A marinha francesa consegui capturar 11 dos ditos piras e os transferiram para o Quênia, onde serão julgados (Redação do site Terra em 08 de maio de 2009). Mas antigamente as batalhas entre os piratas e a guarda costeira dos reinos eram travadas através de uma grerra em alto mar, ela era regada de muitas trocas de tiros de canhão.
   Em cada figura que se segue informe as coordenadas de cada embarcação e em seguida calcule a menor distância que a bala de canhão irá percorrer do navio com a cruz vermelha até o barco dos piratas.

1a.



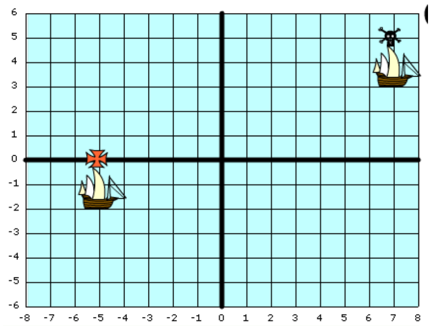
Resolução:

1b.



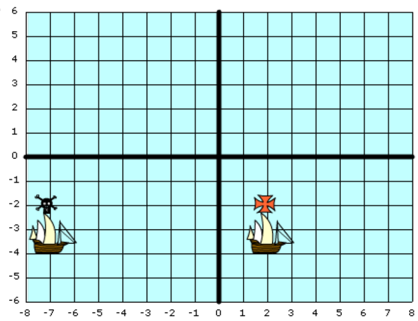
Resolução:

1c.



Resolução:

1d.



Resolução:

2. Calcule o perímetro do quadrilátero ABCD cujos vértices são os pontos A(0,-3), B(5,-1), C(0,4) e D(-2,2). Lembrando que o perímetro de uma figura plana é calculado a partir da soma dos lados da mesma.

Resolução:

3. Determine a distância entre os pontos A e B informados a seguir:

a) A(-1,3) e B(0,4)	b) A(1,-5) e B(0,-1)