UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

A APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA POR ALUNOS ADOLESCENTES NA MODALIDADE EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: ANALISANDO AS DIFICULDADES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ESTRUTURA ADITIVA.

SIMONE MOURA QUEIROZ

Recife

2010

SIMONE MOURA QUEIROZ

A APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA POR ALUNOS ADOLESCENTES NA MODALIDADE EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: ANALISANDO AS DIFICULDADES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ESTRUTURA ADITIVA.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências e Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora:

Profa. Dra. Mônica Lins.

Recife

2010

SIMONE MOURA QUEIROZ

A APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA POR ALUNOS ADOLESCENTES NA MODALIDADE EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS: ANALISANDO AS DIFICULDADES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ESTRUTURA ADITIVA.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Mônica Lins

Orientadora - Presidente

Profa. Dra. Rute Elizabete Rosa Borba – UFPE

Examinadora Externa

Profa. Dra. Lúcia de Fátima Araújo – UFRPE

Examinadora Externa

Profa. Dra. Claudia Roberta de Araújo Gomes – UFRPE

Examinadora Interna

DEDICATÓRIA

À minha família, meu berço de amor, onde se iniciou minha paixão pela educação.

AGRADECIMENTOS

À Deus, Aquele que me enche de vida, desafia-me a cada instante, surpreende-me e faz com que eu acredite, cada vez mais, que tudo posso quando estou nEle.

Aos meus pais, Herrisson e Bernadete, amores de minha vida e maiores tesouros, que são responsáveis por eu estar concluindo mais uma importante etapa da minha vida, aos quais serei eternamente grata.

Aos meus amados irmãos: Dani, que me fez descobrir a educação e me apaixonar pelo que faço e Neto, meu bebê, meu grande incentivador, que geralmente acredita mais em mim, além do que eu mesma julgo ser capaz.

Ao Júnior, Edna, Deco, Rikelmy e Malu, minha linda família em crescimento, que com o seu jeito divertido de levar a vida, tornou este período de intensa produção científica, menos sofrido.

Aos meus amigos, minha família de coração: Bru, pelas nossas discussões calorosas sobre nossos projetos, que nos inspiravam e Ana, por me incentivar, por acreditar em mim, por me instigar quando perdia o ânimo para ir adiante, por fazer comigo esta dissertação de uma maneira indireta.

À professora Mônica Lins, minha orientadora, pelo compromisso assumido durante esta produção acadêmica, pela seriedade, dedicação, paciência, incentivo, por saber escutar e corrigir no momento apropriado, moldando carinhosamente esta produção acadêmica. Por vê-la sofrer comigo, pela sua acessibilidade, enfim, por me fazer ver através do seu amor pela educação, o que é vocação e como se deve lutar por ela.

Às professoras Claudia Gomes, Lúcia Araújo e Rute Borba, pela delicadeza e seriedade desta banca durante as sugestões, comentários e correções, nos momentos de qualificação e pré-banca, que só vieram a enriquecer este trabalho.

Aos professores do mestrado, pela contribuição à minha formação e pela construção de conhecimento que me proporcionaram.

Às Lulus, demais amigos, familiares e alunos, por me ajudarem a concretizar este sonho, que pensei estar tão distante, mas que hoje, posso dizer que realizei. Sou mestre, também, graças a vocês.

RESUMO

Esta dissertação realiza um estudo com a finalidade de analisar as principais dificuldades relacionadas à resolução de problemas aritméticos inseridos no campo conceitual das estruturas aditivas, enfrentadas pelos alunos que compõe a modalidade de ensino “Educação de Jovens e Adultos” (EJA), que em nosso estudo é composto por adolescentes. A EJA, a princípio, tinha o objetivo principal de alfabetizar e era composta apenas por adultos ou jovens que nunca foram à escola ou por aqueles que precisaram abandonar seus estudos devido a diversos fatores. Agora, forma-se por pessoas que, após anos de afastamento, tendo neste intervalo, conquistado um espaço na sociedade com seu trabalho. Nestes últimos anos, ocorreu o acréscimo de estudantes cada vez mais jovens a estes programas. Ou, segundo os sujeitos de nossa pesquisa, adolescentes inseridos nesta modalidade por estarem fora de faixa etária. Para investigarmos o conhecimento, aplicamos duas fichas coletivas em uma turma de EJA do turno diurno formada por alunos adolescentes, de uma Escola pública Estadual. A primeira ficha é composta por dez problemas aritméticos de estrutura aditiva, seguindo a classificação de Carpenter e Moser (1982), que o fizeram de acordo com suas características, considerando os conhecimentos conceituais relativos aos acréscimos e decréscimos, combinações e comparações propostas nos enunciados. A segunda ficha contém dez algoritmos de estrutura aditiva prontas para eles resolverem, sendo estes algoritmos os mesmos da ficha um. Este tipo de fichas nos permitiu analisar, segundo Vergnaud (1982), o cálculo relacional (a escolha da operação) e o cálculo numérico (realização da operação). O total de alunos que participaram das duas etapas foram nove e com esta pesquisa pudemos observar, o quanto estes alunos, que estão finalizando o Ensino Fundamental, mesmo conseguindo compreender os problemas (cálculo relacional), não conseguem algumas vezes executar o cálculo numérico. Constatamos que eles apresentaram dificuldades básicas, relacionadas às operações de subtração, apresentando os seguintes erros: *erro de inversão, supremacia do zero, decomposição e composição e zero neutro.* Estes erros, ignorados ou não por seus professores, podem dificultar a aprendizagem nos anos vindouros.

Palavras-chave: **Educação de Jovens e Adultos, Campos Conceituais das Estruturas Aditivas, Problemas Aritméticos.**

ABSTRACT

This dissertation work brings the analyses of the main difficulties related to solving arithmetic problems, included in the conceptual field of additive structures. Which comes to be a challenge those students from Young and Adults Education (Educação de Jovens e Adultos – EJA), modality has to deal with these groups in our study, consist of adolescent students. The “EJA”, which, the principle was the main goal of literacy and was composed only of adults or young people who have never attended to school or those who had to give up school revere developing reading and writing skills due to several factors. Now, is formed by people who, after years of removal, in that period, won a place in society with their work. In recent years, younger students are adding to this “EJA” programs. Or, according to the subjects of our research, adolescents placed in this study modality because they are out of age. To investigate acquired knowledge, we applied two collective papers in an “young and adult education” group composed only or young students – day shift – from public school in the state of Pernambuco, Brazil. The first paper consists of ten arithmetic problems of additive structure, following the classification of Carpenter and Moser (1982), which was made in accordance to their characteristics, whereas the conceptual knowledge related to increases and decreases, combinations and comparisons proposed in the statements. The second paper was made of ten algorithms of additive structures ready for them to solve, these algorithms were the same in paper one. These collectives papers allowed us to analyze, second Vergnaud (1982), the relational calculus (the choice of operation) and numerical calculation (the transaction). The total number of students who participated in the two stages was nine and with this research we have seen, how these students who are finishing the elementary school, even if we understand the problems (relational calculus), they can sometimes perform the numerical calculation. We found that they had basic difficulties related to the operations of subtraction, giving the following errors: error of inversion, the supremacy of zero, decomposition and composition, and zero neutral. These errors, ignored or not by their teachers, can make learning in the years to come.

Keywords: **Young and Adults Education, Conceptual Field of Additive Structures, Arithmetic Problems.**

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Durante toda a vida, adquire-se uma infinidade de conhecimentos na interação com os outros e com o ambiente (VYGOTSKY, 1987). Diante de uma situação, o indivíduo pode olhar o objeto “estranho” ou problema como desafio. Uma respectiva falta de conhecimento faz com que a pessoa se “desequilibre” intelectualmente, fique curioso, instigado, motivado e, através de assimilações e acomodações (PIAGET, 1979), procura restabelecer o equilíbrio que é sempre dinâmico, alcançado por meio de ações físicas e mentais. Com isto o pensamento vai se tornando complexo e abrangente, interagindo com diferentes e abstratos objetos do conhecimento.

É na escola que este indivíduo (aluno) precisa organizar formalmente os conhecimentos adquiridos, com o objetivo de acrescentar novos conhecimentos e aplicá-los em outros procedimentos ou, ainda, modificar os já existentes. Isto leva o, então, aluno distinguir a dois tipos de matemática: *A matemática da vida e a matemática da escola* (CARRAHER, CARRAHER e SCHLIEMANN, 1988). E ao dividi-la, classifica-a em dois conjuntos disjuntos, não conseguindo fazer mais a associação devida entre elas.

A suposta “matemática da escola” passa a só ter sentido dentro da escola, é vinculada à necessidade de tirar boas notas para passar de ano. Entretanto, a “matemática da vida” de alguma forma tem a entrada vetada na escola. Uma boa maneira de criar um elo entre estas duas é através de problemas que induzam os alunos a buscar conhecimentos adquiridos extraclasse para conseguir solucioná-los. Todavia estes problemas matemáticos devem fazer sentido para os alunos, pois a realização de conexões com o cotidiano é importante para o processo de produção do conhecimento matemático. Nesse sentido, Vergnaud propõe que o saber se constitui a partir do momento que o aluno interage com este.

> O saber se forma a partir de problemas para resolver, quer dizer, de situações para dominar. [...] Por problema é preciso entender, no sentido amplo que lhe atribui o psicólogo, toda situação na qual é preciso descobrir relações, desenvolver atividades de exploração, de hipótese e de verificação, para produzir uma solução. (1990, p.52)

Hoje já se tem a consciência de que o ensino e a aprendizagem da Matemática precisam focar a resolução de problemas, como apontam os referenciais curriculares.

> [...] o ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema, porque no processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisam desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las; o problema não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. (BRASIL, MEC, 1998, p.40)

Dessa forma, a competência na resolução de problemas deve desenvolver-se desde as séries iniciais do Ensino Fundamental para que ao final da escolarização básica os alunos sejam capazes de resolver, por meio de estratégias variadas, situações matemáticas de diferentes naturezas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Secretaria de Educação Fundamental, 1997/1998) definem a solução de problemas como um eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

A opção por organizar o trabalho pedagógico a partir da resolução de problemas "traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução de problemas" (BRASIL, 1998, p.40).

Resolver problemas sempre foi um desafio para alunos e professores, na maioria das vezes com métodos que enfatizam a repetição e a mecanização da resolução de problemas, excluindo a evolução natural do processo cognitivo. A esse respeito, Vergnaud aponta que:

> Um problema não é um problema para um indivíduo a menos que ele tenha os conceitos que o tornem capaz de considerá-lo um problema para si mesmo. (VERGNAUD, 1994, p. 42)

Os alunos se deparam com problemas complexos em seu cotidiano, envolvendo diversas variáveis (explicitas, mas também implícitas), não há uma única solução e nem um único caminho a ser seguido. A cada opção o problema se reelabora. Fora isto, possuem cálculos diversificados, e mesmo assim, é esperado que os alunos encontrem formas de solucioná-los em sua maioria. Na escola, questões similares, porém sem tanta complexidade, não têm o mesmo resultado. É aí que nos perguntamos: Por que isso acontece? Por que os alunos se saem bem quando usam a matemática nas situações do cotidiano, e não conseguem o mesmo quando usam a matemática da escola, mesmo quando ambas tratam do mesmo conteúdo, como por exemplo, as quatro operações? Essas questões fizeram parte do programa de pesquisa de Carraher, Carraher e Schliemann nos anos 80, e resultaram na obra intitulada “Na Vida Dez, Na Escola Zero”.

A resolução de problemas na escola perde o significado porque tem objetivos que diferem daqueles que nos movem para resolver problemas de matemática fora da sala de aula, como discutido por Carraher, Carraher e Schliemann:

> Perde o significado também porque na sala de aula não estamos preocupados com situações particulares, mas com regras gerais, que tendem a esvaziar o significado das situações. Perde o significado também porque o que interessa à professora não é o esforço de resolução do problema pelo aluno, mas a aplicação de uma fórmula, de um algoritmo, de uma operação, predeterminada pelo capítulo em que o problema se insere ou pela série escolar que a criança freqüenta. (CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2006, p.22)

Ou seja, ocorre um melhor aprendizado “quando se estabelecem pontes entre ação e reflexão, entre a experiência e a conceituação, entre teoria e prática; quando ambas se alimentam mutuamente”. (MORAN; MASETTO; BEHRENS, 2000, p.23). A resolução de problemas tem como objetivo, além de criar uma intersecção entre a “matemática da vida” e a “matemática da escola”, levar os alunos a pensarem no problema antes de executá-lo. A diferença entre estas duas matemáticas é quase inexistente, pois os cálculos são os mesmos, porém o significado destes problemas para os alunos são distintos, assim como seus objetivos, como nos esclarecem Carraher, Carraher e Schliemann:

> Na escola, a matemática é uma ciência, ensinada em um momento definido por alguém de maior competência. Na vida, a matemática é parte da atividade de um sujeito que compra, que vende, que mede e encomenda peças de madeira, que constrói paredes, que faz jogo na esquina. (...) Na aula de matemática, as crianças fazem conta para acertar, para ganhar boas notas, para agradar a professora, para passar de ano. Na vida cotidiana, fazem a mesma conta para pagar, dar troco, convencer o freguês de que seu preço é razoável. (CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2006, p.19)

É muito comum aos alunos, diante de um problema matemático, perguntarem: “É conta de mais ou de menos?”. Para Centurion (1994), isso prova que o aluno não conseguiu identificar no problema quais as idéias envolvidas, podem nem saber do que se trata, concentrando-se apenas nos valores numéricos deste, tendo como sua única preocupação o que fazer com aqueles números para dar a resposta que a professora espera. Algumas vezes isto ocorre porque ele não está interessado em interpretar o texto, outras vezes, por ter sido ensinado a apenas olhar as “palavras-chaves” e, assim, resolver as questões, sem interpretarem, buscando entender do que o problema trata. A resolução de um problema compreende quatro etapas: *a compreensão, o estabelecimento e a execução de um plano* (POLYA, 1995). Equivocadamente, o aluno concentra-se apenas na execução. Polya ainda ressalta a minimização da 4ª etapa, que se refere ao *retrospecto da resolução*, revendo-a e discutindo-a.

Para Vergnaud (1994), são as situações que dão sentido ao conceito. Tais situações podem ser chamadas de problema, que constituem o referente do conceito. Para resolvê-las, o aluno constrói invariantes operatórios que dão significado ao conceito.

“Quanto mais adequado for o nosso conhecimento da realidade, tanto mais adequados serão os meios de que dispomos para agir sobre ela... E, para o conhecimento da situação, nós contamos hoje com um instrumento valioso: a Ciência” (SAVIANI, 1993, p. 73). Podemos nos utilizar desta citação da seguinte forma: quanto maior for o domínio do aluno do “fazer matemática”, maior será sua liberdade para utilizá-la, para articulá-la, ou seja, não fará apenas uma reprodução de exercícios já vistos, mas poderá criar relações com conteúdos anteriormente vistos.

Com isto vemos que a compreensão da matemática vai além de seus códigos específicos e de repetições sucessivas destes. É fundamental na esfera psicológica, para que haja a compreensão do que está sendo feito e de como se está fazendo, para que através disto se consiga analisar o que está acontecendo a sua volta, interpretando os fenômenos e agindo sobre eles de uma maneira mais segura, por acreditar no domínio que possui. A confiança neste domínio matemático levará o aluno a abandonar a concepção de que a matemática é apenas como mais uma disciplina que precisa cursar com o intuito passar de ano. O conhecimento matemático será algo que transcende a sala de aula, ou seja, que ele poderá aplicar em seu dia-a-dia, fora dos muros da escola, de maneira espontânea, livre do formalismo acadêmico. Como nos mostra Carraher, Carraher e Schiliemann:

> Nesta direção, não podemos separar a matemática da psicologia do pensamento enquanto ciência, mas não podemos separá-las enquanto fenômenos acontecendo na prática. Quando alguém resolve um problema de matemática, estamos diante de uma pessoa que pensa. (CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2006, p.11)

É justamente este pensar que diferencia o aluno de um mero repetidor de exercícios, de um aluno que pensa e raciocina sobre os problemas. Este aluno constrói e compreende os conceitos. É nesta direção que se concentra nossos esforços de pesquisa.

A educação de jovens e adultos (EJA) compreende a educação formal e permanente, a educação não formal e toda a gama de oportunidades de educação informal e ocasional existentes em uma sociedade educativa e multicultural, na qual se reconhecem os enfoques teóricos baseados na prática (Declaração de Hamburgo, 1997). Muitos destes alunos, que compõem esta modalidade de ensino, tiveram que abandonar os estudos devido à necessidade de trabalhar para ajudar a família, sustentarem-se, entre outras razões. Todavia, nosso público alvo não é formado de adultos, mas sim de adolescentes, que não completaram os anos da Educação Básica em idade apropriada, mesmo sem nunca terem abandonado efetivamente os estudos, devido o acúmulo de repetições de séries ou evasões de curto prazo constantes em seu histórico escolar.

A questão norteadora de nosso projeto concentra-se em detectar as dificuldades, os principais erros cometidos pelos alunos da EJA – 4ª fase, que corresponde ao 8º e 9º ano do ensino fundamental (antigas 7ª e 8ª série), ao se depararem com problemas aritméticos de estrutura aditiva, que são aqueles que envolvem operações de adição ou subtração.

Este público adolescente, composto por meninos e meninas, com idade variando entre 14 e 19 anos são os sujeitos de nossa pesquisa, que busca observar os principais erros cometidos por eles, diante de problemas de estrutura aditiva. Será que tais erros se encontram no algoritmo que ainda não conseguiram dominar? Será na interpretação do problema? Ou será no momento de transição entre o enunciado e a escolha da operação aritmética?

Por isto utilizamos como aportes teóricos, para nortear nosso estudo, os estudos de Vergnaud (1982), um psicólogo que foca seu estudo na matemática, analisando a estrutura de um problema aditivo, os conceitos básicos necessários para sua resolução.

O nosso trabalho está organizado da seguinte forma: No **primeiro capítulo** traçaremos um perfil do ideal da EJA, assim como definiremos quais são seus atores, uma vez que faremos nossa análise em uma turma de EJA – 4ª fase.

No **segundo capítulo,** trataremos de perspectivas teóricas acerca da resolução de problemas aritméticos, em que será feito um levantamento das contribuições conceituais de Vergnaud, e sua teoria dos campos conceituais. Assim como será apresentada uma síntese de estudos sobre o campo das estruturas aditivas, na qual procuraremos classificar os problemas que envolvem as estruturas aditivas e tomaremos a classificação de Vergnaud como norteadora. Ainda, trataremos os estudos realizados, envolvendo as estruturas aditivas na Educação Infantil, no Ensino Fundamental e na Educação de Jovens e Adultos.

No **terceiro capítulo,** iremos apresentar a metodologia norteadora de nosso projeto, assim como os sujeitos participantes, o contexto em que esta pesquisa foi inserida, as etapas de investigação e os critérios que utilizamos para analisar os dados colhidos.

No **quarto capítulo**, que denominamos de análise dos resultados, iremos apresentar uma análise geral das dificuldades enfrentadas pelos sujeitos da pesquisa, assim como as principais dificuldades existentes nos problemas e contas de ambas as fichas, e por fim o desempenho de cada sujeito diante delas.

Para sintetizar o que foi visto em cada um dos capítulos anteriores, apresentaremos o **quinto capítulo,** com a discussão dos resultados, concluindo este trabalho de pesquisa com algumas considerações finais.

CAPÍTULO 1

EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS (EJA)

> "... o desafio da expansão do atendimento na educação de jovens e adultos já não reside apenas na população que jamais foi à escola, mas se estende àquela que freqüentou os bancos escolares, mas neles não obteve aprendizagens suficientes para participar plenamente da vida econômica, política e cultural do país e a seguir aprendendo ao longo da vida." (EUGÊNIO, *apud* Haddad e Di Pierro, 2004, p.27)

A Educação de Jovens e Adultos (EJA) é uma modalidade específica da Educação Básica que se propõe a atender a um público ao qual foi negado o direito à educação durante a infância e/ou adolescência, devido à falta de vagas, a inadequações do sistema de ensino ou, ainda por, condições socioeconômicas desfavoráveis. Com isto, podemos dizer que a EJA possui um caráter político, pois tem como um intuito corrigir (resolver ou extinguir) uma situação de exclusão. Também, é uma prática pedagógica, que tem como objetivo propiciar as condições de ensino-aprendizagem para os sujeitos se apropriarem de um sistema de representação da realidade, no caso da linguagem matemática e escrita, internalizando-o.

A Educação de Jovens e Adultos vivenciou uma série de acontecimentos nacionais que causou a consolidação desta modalidade de ensino na educação formal. Devido a isto, desencadeou-se uma série de reflexões pedagógicas. Entrelaçadas à história da educação que dizem respeito à modalidade Educação de Adultos no Brasil, temos a história dos modelos econômicos e políticos, assim como a história das relações de poder dos grupos que estão no seu "comando".

1.1. EJA – BREVE HISTÓRICO

A EJA (Educação de Jovens e Adultos) foi fruto de uma conquista gradativa, passando por vitórias e derrotas, avanços e retrocessos. Os avanços se deram no sentido de ter sua importância racionalmente reconhecida, atraindo o investimento público. Os retrocessos surgiram porque houve momentos em que as verbas destinadas para este tipo de formação foram suspensas, assim como a isenção da responsabilidade governamental.

Segundo os estudos de Haddad e Di Pierro (2000), na década de 40, inúmeras políticas educacionais de peso apareceram, relacionadas à escolarização de jovens e adolescentes, como a regulamentação do Fundo Nacional do Ensino Primário (FNEP), a criação do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP), que incentivaram e realizaram estudos na área, além de obras dedicadas ao ensino supletivo, campanhas, congressos e seminários. Iniciando com isto a reflexão a respeito da educação voltada para este tipo de público (DI PIERRO *et al.,* 2001).

No final dos anos 50 e início dos anos 60, as proposições de Paulo Freire serviram de inspiração para as principais proposta de alfabetização e educação popular que se realizaram no país (DI PIERRO *et al,* 2001). Em 1958, um evento veio a se constituir um marco histórico para a área: O Congresso Nacional de Educação de Adultos, onde Paulo Freire e um grupo de educadores pernambucanos apresentaram e defenderam um relatório intitulado “A Educação de Adultos e as Populações Marginais - o problema dos Mocambos”, que defendia e propunha uma educação de adultos que estimulasse a colaboração, a decisão, à participação e a responsabilidade social e política.

Segundo Paiva (1973), o trabalho desse educador constituiu uma proposta de mudança radical na educação e objetivos de ensino, partido da compreensão de que o aluno não apenas sabe da realidade em que vive, mas também participa de sua transformação. Di Pierro *et al.* escreve a respeito deste momento educacional:

> O paradigma pedagógico que então se gestava preconizava com centralidade o diálogo como princípio educativo e a assunção, por parte dos educandos adultos, de seu papel de sujeitos de aprendizagem, de produção de cultura e de transformação do mundo. (2001, p. 58)

Paulo Freire foi convidado pelo recém empossado – na época – Ministro da Educação Paulo de Tarso Santos, do governo de João Goulart, para coordenar o Programa Nacional de Alfabetização (PNA), promulgado através de Decreto 53.465 em 21 de janeiro de 1964, que tinha como objetivo alfabetizar cinco milhões de brasileiros até 1965, utilizando seu método de ensino, além de construir um processo de conscientização e organização política da população de baixa-renda.

Através desse plano, tornou possível legitimar, sua concepção de alfabetização como um ato de conhecimento criador em que o alfabetizando é o sujeito do seu processo de alfabetização. Todavia em 14 de abril do mesmo ano este programa foi extinto pelo governo militar. (DI PIERRO, JOIA, RIBEIRO, 2001)

A EJA chegou a seu reconhecimento na Constituição de 1988 com o artigo 208 inciso I: "O dever do Estado com a educação será efetivado mediante a garantia de: I - ensino fundamental, obrigatório e gratuito, inclusive para os que a ele não tiveram acesso na idade própria", que em 1996 foi corrigido pela Emenda Constitucional nº 14 de 1996, ficando da seguinte forma: "I - ensino fundamental, obrigatório e gratuito, assegurada, inclusive, sua oferta gratuita para todos os que a ele não tiveram acesso na idade própria." Assim também reforçou o artigo 214 inciso I e II da constituição de 1988: "A lei estabelecerá o plano nacional de educação, de duração plurianual, visando à articulação e ao desenvolvimento do ensino em seus diversos níveis e à integração das ações do Poder Público que conduzam à: I - erradicação do analfabetismo; II - universalização do atendimento escolar"

Com este ato foi dado aos jovens e adultos que não tiveram oportunidade de terminar seus estudos e também àqueles que nunca tiveram em uma sala de aula, o direito que os alunos de cursos regulares tinham à educação básica.

Todavia, a luta pelo direito a alfabetização não terminou em 1988, pois em 1990, foi homologado o decreto nº 99.240, de 07 de maio de 1990: "Art. 1º Fica determinada a extinção das seguintes entidades: II – fundações: f) Fundação Nacional para Educação de Jovens e Adultos – EDUCAR." Com isto, tivemos um retrocesso às conquistas da constituição de 1988 em relação à alfabetização de adultos. Neste mesmo decreto foi também suprimido o mecanismo que facultava às pessoas jurídicas direcionar voluntariamente 2% do valor do imposto de renda devido às atividades de alfabetização de adultos. (HADDAD, DI PIERRO, 2000)

Em 1996 houve uma nova virada na luta pelo direito à educação de jovens fora de faixa e adultos, com o FUNDEF (Fundo de Valorização do Ensino Fundamental), que foi institucionalizado pela Emenda Constitucional nº 14/96 que alterou, entre outros dispositivos, o art. 60 do ADCT (Atos das Disposições

Constitucionais Transitórias), que levou à promulgação na Lei nº 9.424/96, referente à aplicação dos recursos do FUNDEF: “Art.2º. Os recursos do Fundo serão aplicados na manutenção e desenvolvimento do ensino fundamental público e na valorização de seu magistério (...) Art.7º. Os recursos do Fundo, incluída a complementação da União, quando for o caso, serão utilizados pelos Estados, Distrito Federal e os municípios, assegurados, pelo menos 60% (sessenta por cento) para a remuneração dos profissionais do magistério, em efetivo exercício de suas atividades no ensino fundamental público”.

Neste mesmo ano de 1996 foi aprovada por unanimidade, no Congresso Nacional, a LDB (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional) que implementou o direito à Educação de Jovens e Adultos, como vemos na seção V do Capítulo II (Da Educação Básica) composta de apenas dois artigos (arts. 37 e 38): “Seção V – Da Educação de jovens e adultos. Art. 37 – A educação de jovens e adultos será destinada àqueles que não tiveram acesso aos estudos, ou continuidade deles, nos ensinos Fundamental e Médio na idade própria. (...) Art. 38 – Os sistemas de ensino manterão cursos e exames supletivos, que compreenderão a base nacional comum do currículo, habilitando ao prosseguimento de estudos em caráter regular.”

Entretanto, o presidente Fernando Henrique Cardoso (1995 – 2003), vetou algumas partes dos artigos da Lei 9424/96, regulamentando que as matrículas contabilizadas para fins do FUNDEF são apenas as do ensino fundamental regular, excluindo a educação de adultos, a educação infantil e o ensino médio. Foram com isto, priorizados o ensino fundamental dos 7 aos 14 anos, ficando os demais sem garantias financeiras.

Neste mesmo período, o Ministério da Educação destinou a EJA à iniciativa privada, através do Programa Alfabetização Solidária, se propondo a financiar parte das ações com seus recursos. Ou seja, distinguir-se, a partir de tal ação, um terceiro tipo de serviço: o de propriedade pública não-estatal. Segundo o economista e cientista político brasileiro Luiz Carlos Bresser Gonçalves Pereira (BRESSER-PEREIRA, 1999) a expressão “público não-estatal” trata de instituições de direito privado voltadas ao interesse geral (interesse público), são “não-estatais” porque não fazem parte do aparato do Estado, seja porque não utilizam servidores públicos ou porque não coincidem com os agentes políticos tradicionais. Enfim, trata-se de um sistema de parceria ou de co-gestão entre o Estado e a sociedade civil.

No governo de Luís Inácio Lula da Silva (1º de janeiro de 2003 aos dias atuais) esta tendência foi revertida. A EJA voltou a ser responsabilidade pública, procurando garantir o sentido educacional da mesma, tirando o caráter assistencial que mantinha anteriormente, com a criação, em julho de 2004, de uma nova secretaria do Ministério da Educação (MEC): A Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização e Diversidade (SECAD).

Além disto, o Congresso Nacional, em sessão solene realizada no dia 19 de dezembro de 2006, declarou promulgada a Emenda Constitucional nº 53/2006, que cria o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais de Educação (FUNDEB[1]). Diferente do FUNDEF, que vigorou até o fim de 2006, que permitia investimentos apenas no Ensino Fundamental nas modalidades regular e especial, o FUNDEB vai proporcionar a garantia de recursos para acesso a Educação Básica para todos os brasileiros – da creche ao final do Ensino Médio – inclusive àqueles que não tiveram acesso à educação em sua infância, pois atende não apenas o Ensino Fundamental [6/7 anos até 14 anos], como também a Educação Infantil [0 até 5/6 anos], o Ensino Médio [15 até 17 anos] e a Educação de Jovens e Adultos.

1.2. ESPECIFICIDADES DA EJA

> A educação de adultos torna-se mais que um direito: é a chave para o século XXI; é tanto conseqüência do exercício da cidadania como condição para uma plena participação na sociedade. Além do mais, é um poderoso argumento em favor do desenvolvimento ecológico sustentável, da democracia, da justiça, da igualdade entre os sexos, do desenvolvimento socioeconômico e científico, além de um requisito fundamental para a construção de um mundo onde a violência cede lugar ao diálogo e à cultura de paz baseada na justiça. (Declaração de Hamburgo, 1997).

Di Pierro (2001) analisa este processo de alfabetização de jovens e adultos no Brasil com a visão de nosso Estado é incapaz de regular os conflitos sociais, distribuir, com eqüidade, justiça no território nacional e cumprir suas funções

[1] O FUNDEB terá vigência de 14 anos, a partir do primeiro ano da sua implantação

econômicas e sociais básicas - dentre as quais a de prover educação fundamental para todos. Ressalte-se que não se trata apenas de incapacidade, mas de uma opção do Estado por determinadas práticas políticas. Aqui, cabe a expressão popular “saída pela tangente”, que beneficia muitos que não tiveram oportunidade de concluir ou até mesmo iniciar seus estudos. Convém ressaltar que o objetivo deste programa é o de reparação.

A função da EJA é a de dar cobertura a trabalhadores, dentre outros segmentos sociais, como o das donas de casa, migrantes, aposentados. Proporcionando a oportunidade de voltar ao sistema educacional aos que tiveram uma interrupção forçada, causada por repetência ou evasão, pelas desiguais oportunidades de permanência ou outras condições adversas e possibilita aos indivíduos novas inserções no mundo do trabalho, na vida social. Segundo o Parecer CNE/CEB nº 15/98, esta caracterização se estende também ao ensino fundamental:

> ...são adultos ou jovens adultos, via de regra mais pobres e com vida escolar mais acidentada. Estudantes que aspiram a trabalhar, trabalhadores que precisam estudar, a clientela do ensino médio tende a tornar-se mais heterogênea, tanto etária quanto socioeconomicamente, pela incorporação crescente de jovens adultos originários de grupos sociais, até o presente, sub–representados nessa etapa da escolaridade.

Por isto, durante algumas décadas, a EJA foi configurada somente como Educação de Adultos, cujo principal objetivo era a alfabetização destas pessoas. O que ocorreu nestes últimos anos foi o acréscimo de jovens a este programa. “fatores pedagógicos, políticos, legais e estruturais fazem com que muitos jovens procurem cada vez mais esta modalidade e a cada ano mais precocemente” (BRUNEL, 2004, p. 19). Podemos justificar esta opção dos jovens por este programa devido à exigência de certificação escolar para o mercado de trabalho. Isto mais também ocorre devido ao disparate em relação à idade de alguns alunos já adolescentes que, por questões de espaço físico, são levados a compartilhar a sala de aula com crianças ou adolescentes consideravelmente mais jovens.

Com a redução da idade mínima permitida pela LDB para 14 anos completos, facilitou-se esta migração. Foi promovido um estímulo para os alunos dos ensinos Fundamentais e Médios optarem por abandonar, temporariamente, a escola, para, logo no ano seguinte, se matricularem em turmas de EJA. O que preocupa é estes alunos recorrerem a este programa com o intuito apenas de “acelerar” sua certificação, mesmo que isto possa significar alguma perda de qualidade na sua escolarização. Além disto, algumas vezes a escola não considera a possibilidade de sua permanência na escola regular, encaminhando-o às turmas de EJA, devido à idade, sem muitas vezes consultá-los.

> São jovens que, por uma série de motivos, precisaram abandonar a escola; vivem em periferias, favelas, vilas e bairros pobres, principalmente nas grandes cidades; são majoritariamente negros; circulam no espaço escolar um “incansável” número de vezes, com entradas, saídas e retornos, após o período estabelecido como o próprio para a vida escolar (de 7 a 14 anos). (ANDRADE, 2004, p. 50).

A Educação de Jovens e Adultos era anteriormente composta por adultos ou jovens que nunca foram à escola, ou aqueles que precisaram abandonar seus estudos, devido a diversos fatores e que agora retornam após anos de afastamento, tendo neste intervalo conquistado um espaço na sociedade, todavia, agora compõe esta modalidade os que nunca chegaram a abandonar o ensino por completo, mas não realizaram aprendizagens suficientes para participar plenamente da vida social.

Com isto, passam a conviver dois tipos de público: os adultos que vêem na escola uma perspectiva de integração sociocultural e os jovens que mantêm com ela uma relação de tensão e conflito aprendida nas experiências anteriores de convivência escolar (HADDAD e DI PIERRO, 2000). Ou seja, os adultos carregam consigo um estereótipo impregnado historicamente na escola, e os jovens, um estigma de alunos-problema. Podemos dizer que se trata de jovens e adolescentes marginalizados, que anteriormente foram excluídos desse sistema escolar, por não terem conseguido estabelecer uma inter-relação com a escola que possibilitasse concluir o Ensino Fundamental dentro da idade esperada. Ou seja, não conseguiram se adaptar e, agora, regressam, encontrando a mesma escola, sem nenhuma modificação de ordem pedagógica, onde provavelmente tenderão a repetir o mesmo procedimento já que não conseguem se adequar a ela. Todavia agora temos um fator em potencial: Eles são “frutos do fracasso escolar” e esta situação de desconforto psicológico pode comprometer sua cognição (OLIVEIRA, 1999). São pessoas marcadas pela exclusão social, que trazem consigo histórias e culturas próprias. Estes jovens que retornam à escola são, na maioria das vezes,

> evadidos ou excluídos da escola, antes do que portadores de trajetórias escolares truncadas, eles e elas carregam trajetórias perversas de exclusão social, vivenciam trajetórias de negação

> dos direitos mais básicos à vida, ao afeto, à alimentação, à moradia, ao trabalho e à sobrevivência. Negação até ao direito de ser jovem. As trajetórias truncadas se tornam mais perversas porque se misturam com essas trajetórias humanas. Se reforçam mutuamente. A EJA, como política pública, adquire uma nova configuração quando equacionada na abrangência das políticas públicas que vêm sendo exigidas por essa juventude (Arroyo, 2005, p. 24).

Esta heterogeneidade em sala de aula desafia os professores que não foram preparados para assumi-la, pois precisam aprender a lidar com universos muito distintos, que agregam diversas idades, culturas e expectativas com relação à escola. Eles estão cientes que a finalidade da EJA é tentar regularizar o fluxo escolar, ocorrido com a defasagem idade/série, buscando para isto acelerar esta educação, este aprendizado. O desafio maior da EJA, segundo Haddad e Di Pierro (2000), é o de encontrar caminhos para fazer convergir as metodologias e práticas da educação continuada em favor da superação de problemas, como a universalização da alfabetização.

1.3. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE JOVENS E ADULTOS

A Matemática, isolada em seu caráter técnico, é universal, tem uma linguagem própria repleta de códigos específicos, não levando em conta a diversidade cultural, tão ressaltada por D'Ambrósio (1998), pai da Etnomatemática. Ela possui uma imensa dificuldade em sair de si mesma (FONSECA; 2002). E quando ocorre a reorganização dos seus conteúdos, até então científicos, para adequá-lo à educação, tornando-os compreensível para os leigos, o "toque impessoal" desta ainda se faz presente, prejudicando os interesses de uma educação para todos; os que não conseguem compreendê-la podem automarginalizar-se, pois seu mundo é constituído por determinados códigos que se apresentam completamente diferentes dos códigos que permeiam o ambiente escolar regular.

Na matemática, partindo de uma visão construtivista, tem-se a premissa de que a observação do desencadeamento da questão, o caminho percorrido até a resposta é tão importante quanto o conhecimento do resultado desta. É através desta observação minuciosa do desencadeamento da questão, que o aluno chegará ao final desta, sabendo o porquê de cada passo, podendo com isto abranger o seu conhecimento e generalizá-lo.

Com freqüência, o professor, equivocadamente considera que o aluno aprende a partir do momento em que consegue repetir o conteúdo tal qual foi apresentado e exercitado. Para Freire (2005), a passividade torna o indivíduo um tanto quanto ingênuo, faz com que ele tente se adaptar à realidade de uma maneira parcializada, ele não busca interagir com ela, ou questioná-la, ele a segue sem, muitas vezes, entender o que está ocorrendo a sua volta. Se trouxermos tal perspectiva de comportamento para o estudo da Matemática, isto ocorre quando o aluno só sabe resolver determinado problema se tiver dados específicos. Ele não vai além da repetição das técnicas apresentadas pelo professor, sem entender o porquê de cada etapa de análise e solução a ser realizada.

Tudo isto ocorre porque tanto o professor quanto os alunos ainda estão muito presos às teorias Behavioristas (introduzida por John B. Watson,1913), onde o primeiro (professor) dita os conceitos e o segundo (alunos) repetem mecanicamente os sons memorizados. Ou seja, na didática matemática tradicional o professor age como um transmissor, ele tem o olhar focado no conteúdo, seu objetivo muitas vezes é abordar o máximo de assuntos possíveis, para que o aluno no final do ano saiba tudo o que contém no livro didático. O aluno, por sua vez, faz um imenso esforço para acompanhar o ritmo de aula do professor. A disciplina passa a ser informativa, descontextualizada, não há construção, apenas transmissão, ela está orientada, basicamente, para a memorização e aplicação automática de conceitos (CHACÓN, 2003).

É preciso estabelecer a diferença que há entre o saber e o conhecimento. Isto porque, segundo Pais (2008), na linguagem utilizada no meio científico, o saber é quase sempre caracterizado por ser relativamente descontextualizado. “(...) saber matemático faz-se referência a uma ciência que tem sua própria concepção estruturada num contexto próprio” (PAIS, 2008, P.13). Por outro lado o conhecimento sempre diz respeito ao contexto individual e subjetivo, revelando algum aspecto com o qual o sujeito tem uma experiência direta e pessoal. Sendo então o conhecimento mais associado ao caráter experimental.

> Nas propostas científicas didáticas, o aluno passa a ser construtor de seus conhecimentos em interação com sua experiência, realizando na prática a elevação do senso comum à cientificidade,

> construindo o seu saber e incorporando a matemática espontânea o conhecimento que, não sendo vazio, será útil e poderá servir para transformar a sociedade. (BICUDO, 1999, p.82)

O aluno precisa ser instigado a buscar o conhecimento, a visualizar como ação prazerosa conhecer, aprender, pensar, elaborar as informações para que possam ser aplicadas à realidade que está vivendo, passando o professor e o aluno a serem parceiros de um projeto comum. Paulo Freire aponta o conhecimento como produto das relações entre os seres humanos e destes com o mundo. Como ele mesmo afirma (2005, p. 68), "Ninguém educa ninguém, ninguém educa a si mesmo, os homens se educam entre si, mediatizados pelo mundo". Os seres humanos devem buscar respostas para os desafios encontrados nestas relações. Para isso devem reconhecer a questão, compreendê-la e imaginar formas de respondê-la adequadamente. Daí outras questões se colocam e novos desafios aparecem. Assim se constitui o conhecimento, ou seja, a partir das necessidades humanas. E a curiosidade epistemológica, que se tem do objeto apreendido na sua substantividade (FREIRE, 2001), é a grande geradora neste processo de construção do conhecimento.

Este tipo de pensamento precisa estar muito presente, pois o aprendizado não deve estar focado na quantidade de conteúdo a ser visto, mas sim na qualidade com que estes conteúdos estão sendo trabalhados em sala.

> Em geral pessoas adultas, quando não introjetam completamente as representações que lhes atribuem: os professores, a escola, o sistema, ou a sociedade, tendem a não formular explicitamente seu desconforto ou constrangimento diante de tais ações pedagógicas, mas se deixam invadir pelo desinteresse e pelo desânimo, alimentado, principalmente, pela impossibilidade de conferir sentido àquilo que se vêem obrigados a realizar. Nesses casos, o ensino de Matemática poderá contribuir para um novo episódio de evasão escolar... (FONSECA, 2007, p.37)

Mesmo Fonseca se referindo a EJA composta por adultos, podemos fazer um paralelo em relação à EJA constituída por jovens e adolescentes que, também, quando não conseguem adequar aquele conhecimento ao que já possuem, findam por generalizar o sentimento de incompetência, incapacidade, insucesso para tudo que se refere instituição educacional.

Todavia, a cada ano, surgem novas esperanças para aqueles alunos desistentes. Afinal de contas, atualmente nas escolas públicas, só são reprovados alunos desistentes ou que, mesmo freqüentando as aulas, assumem a postura de desistentes e vão para a escola por conta da merenda, para estarem com seus colegas, para sair de casa ou para ser notado por alguém. São indivíduos não comprometidos, pois não se esforçam o suficiente para tentar compreender o que está sendo ensinado. Eles já se julgam inferiores e supervalorizam conteúdos ou pressupõem sua falibilidade. Neste momento, a intervenção do professor é algo extremamente necessária. Ele precisa atentar para a auto-estima de seu aluno, fazendo-o acreditar em si, valorizar-se e a mostrar-lhe que os erros e falhas fazem parte do processo cognitivo de aprendizagem. O aluno deve perceber quanto ele é capaz, afinal de contas o processo de aprendizagem ocorre quando a pessoa consegue re-inventar o que aprendeu (FREIRE, 2001). Levar o aluno acreditar em si facilitará esta reinvenção por parte dele.

Segundo Weiner (1986), a motivação está determinada pelo incentivo que uma pessoa pode obter e pela probabilidade (expectativa) de consegui-lo. Em relação aos alunos, é importante que saibam atribuir tanto os seus êxitos como fracassos ao nível de esforço envolvido na realização das tarefas, entendendo o esforço como uma causa interna, instável e controlável (WEINER, 1986). E quanto ao professor, ele precisa ser um incentivador no processo de aprendizagem (CHACÓN, 2003). O aluno só pode dar significado ao que ele está aprendendo se for capaz de criar *links* entre o conhecimento que ele já possui e este novo. Esta deve ser a principal proposta para este tipo de público, pois muitos dos assuntos eles já viram não só em sala de aula, como em seu dia-a-dia. Entretanto, não conseguem organizá-los em sua mente, cabe o professor atuar neste momento.

> O que tenho dito sem cansar, e redito, é que não podemos deixar de lado, desprezado como algo imprestável, o que educandos, sejam crianças chegando à escola ou jovens e adultos a centro de educação popular, trazem consigo de compreensão do mundo, nas mais variadas dimensões de sua prática na prática social de que fazem parte. Sua fala, seu modo de contar, de calcular, de seus saberes em torno da saúde, do corpo, da sexualidade, da vida da morte, da força dos santos, dos conjuros. (FREIRE, 2003, p.85-86).

Para Paulo Freire, o diálogo é o elemento chave onde o professor e aluno sejam sujeitos atuantes. Ao ser estabelecido o diálogo, processar-se-á a conscientização, porque ela tem um caráter de horizontalidade (igualdade em que todos procuram pensar e agir criticamente), partindo da linguagem comum. É caminhar na direção do aluno e não esperar que ele venha até você.

> Jamais subestimar ou negar os saberes de experiências feitas, com que os alunos chegam à escola (...). Evidentemente que há diferenças na forma de como lidar com esses saberes (...), porém subestimar a sabedoria que resulta necessariamente da experiência sócio-cultural é ao mesmo tempo um erro científico e a expressão equivocada da presença de uma ideologia elitista. (FREIRE, 2001, p.85)

Nossos alunos de EJA nem estão no curso regular, nem são propriamente adultos que deixaram de estudar, mas sim jovens e adolescentes que já experimentaram o fracasso escolar e temem revivê-lo quando voltam a estudar. A Matemática é, muitas vezes, a causa do trauma deste aluno, afinal de contas para muitos o sucesso ou fracasso em matemática é diretamente proporcional à inteligência do aluno (CARVALHO, 2001), já que se trata de uma ciência tão nobre e perfeita, podendo esta ser acessível apenas as poucas mentes privilegiadas. Isto é um equívoco de proporção comsiderável.

Além de desconfortante, esta maneira de enxergar a matemática, cria certo comodismo por parte do aluno jovem, pois ele se esconde por trás desta afirmativa para justificar o seu fracasso.

> Temos de reconhecer que a Matemática tem sido considerada, em demasia, como uma matéria detestada pela maioria dos alunos, ou como uma área que só pode ser bem compreendida por uma minoria dos mesmos. Desde que um aluno passe a temer a Matemática, começa este ciclo crescente e vicioso, de ansiedade Matemática e de deficiência de seu aprendizado. Não é mais compreensível presenciarmos professores que parecem sentir prazer em dar à Matemática uma impressão de algo difícil de ser entendido. (VITTI, 1996, p.26)

Uma forma errônea de caracterizar a matemática é traduzi-la como sinônima de números e operações entre eles. Os adeptos dessa interpretação costumam acreditar que o bom matemático é aquele que consegue fazer, com destreza e agilidade, enormes contas de cabeça. Apesar de existirem matemáticos com essa habilidade, sabe-se que isso tem pouco a ver com a essência dessa ciência. Quando muito, poderíamos dizer que a arte prática de calcular com números é uma parte pequena do universo da matemática. Já a capacidade de pensar matematicamente, explorando conexões entre linguagem e matemática faz parte da essência humana. Ou seja, para realmente compreender esta ciência (CARVALHO, 2001), é preciso buscar compreender seus *símbolos*, *memorizá-los*, para depois saber resolver *problemas,* envolvendo-os. Cabe ao professor estabelecer esta mediação.

Esta *memorização*, como diz Carvalho (2001), deve estar em constante reestruturação e reorganização, sempre modificada pela prática do cálculo, sendo necessário, também, que os alunos possuam o conhecimento das propriedades anteriormente utilizadas, a fim de poderem retomá-las sempre que for necessário de uma forma implícita.

O *problema* é uma situação onde ocorre um desequilíbrio estrutural, é algo que necessita de uma solução, não sendo imediata (mecânica), mas exigindo um pouco mais de organização mental (recodificação) dos conhecimentos adquiridos, que muitas vezes provém das desestruturações de exercícios já executados, para, em meio a estas montar, uma solução, sugando uma parte de cada modelo já visto, findando numa compreensão maior do aluno que ao se deparar com o problema, vê-se na obrigação de reelaborar, complementar, complexificar e sistematizar os seus próprios conhecimentos. É algo novo, como se descoberto unicamente pelos esforços do aluno. Por isso, a resolução de um problema é tão gratificante, tanto para os alunos que se sentem autores, como para o professor, que pode avaliar o nível de compreensão dos alunos para com o assunto.

Os seres humanos devem buscar respostas para os desafios encontrados nestas relações. Para isso, devem reconhecer a questão, compreendê-la e imaginar formas de respondê-la, adequadamente. Daí, outras questões se colocam e novos desafios aparecem. É uma constante ação entre a tríade piagetiana: equilibração, desequilibração e reequilibração (PIAGET, 1976). Segundo Freire (2001) o conhecimento se constitui a partir das necessidades humanas.

Todavia, segundo Damm (2008) para que haja a apreensão de um objeto de matemática é necessário que ocorra a *noésis* (conceitualização) através de significativas *semiósis* (representações), pois esta apreensão conceitual dos objetos matemáticos só poderá ser possível com a coordenação, pelo sujeito que apreende, de vários registros de representação. Ou seja, a possibilidade de apreensão será diretamente proporcional aos registros de representações diferentes, deste mesmo objeto.

O que ocorre constantemente (DELVIN, 2004) é que a matemática escolar prepara os alunos para resolver apenas testes de matemática, em vez de ensinar como resolver problemas reais que também envolvem a matemática. A grande dificuldade é que o cérebro humano tenta buscar sentido em tudo, diferente de um computador que é programado para manipular símbolos, sem entender o sentido destes.

É um erro julgar que, quando buscamos dar sentido às operações, não estamos aprendendo ou ensinando os "símbolos" ou a matemática abstrata. Estaremos, de fato, facilitando a construção de todo o processo, aprendendo de maneira mais natural e efetiva porque é inerente ao ser humano buscar constantemente explicar a realidade a qual está inserido (D'AMBRÓSIO, 1996). A compulsão por querer entendê-la transforma sua vida numa busca incessante, pois surgem, a cada descoberta, novos questionamentos e estes não se esgotam.

Uma parte essencial da inteligência consiste em não registrar coisas inúteis. A atenção é seletiva, a memória é seletiva. O próprio esquecimento é essencial para não "entulhar a cabeça com informações inúteis". A energia que investimos ao olhar um acontecimento, ou um conjunto de informações, depende do interesse que o acontecimento desperta em nós. Também, depende de motivações, como já foi dito, que vão muito além do processamento intelectual. Aprender fórmulas matemáticas que não percebemos como úteis pode ser um martírio, e o cérebro logo as descartará.

No entanto o que garante a apreensão do objeto matemático, a conceitualização, não são a determinação de representações ou as várias representações possíveis de um mesmo objeto, mas a coordenação entre estes vários registros de representações. Funciona apenas quando o sujeito, tendo se apropriado de vários registros de representação, consegue coordená-los e através desta coordenação, estabelece uma apreensão do objetivo matemático envolvido.

> A produção de conhecimento com autonomia, com criatividade, com criticidade e espírito investigativo provoca a interpretação do conhecimento e não apenas a sua aceitação (...) para ultrapassar a visão de que o aluno é produto e objeto, e torná-lo sujeito e produtor do próprio conhecimento. (BEHRENS, 2002, p.86)

Afinal de contas, nos dias atuais, saber operar com números, símbolos, códigos e instrumentos com mais qualidade e agilidade é uma exigência do mercado de trabalho. Ou seja, os jovens e adultos precisam ter um domínio maior das tecnologias e da lógica matemática para atuar no mundo do trabalho, sendo capazes de resolver problemas nessa área.

Schliemann (1998) fez uma pesquisa a respeito da aplicação de Análise Combinatória com estudantes recém aprovados no exame de vestibular, para observar o conhecimento adquirido por eles, comparando-os com cambistas de jogo do bicho, que tinham o nível de escolaridade variando de zero a 11 anos. Ela percebeu, com este estudo, que a experiência facilitou mais uma vez o aprendizado. Todavia, esta não pareceu ser suficiente. Porém, quando a experiência diária foi acoplada à experiência da escola os resultados melhoraram significativamente.

Magalhães (1990) trabalhou com 60 alunas da 1º fase da EJA (2º e 3º ano ou 1ª e 2ª série), que exerciam a profissão de cozinheiras, utilizando cálculos relacionados à proporção, com problemas envolvendo receita de bolo, remédio e dinheiro. Ela concluiu que as alunas, mesmo não sabendo, utilizavam a idéia de proporção no seu dia-a-dia. Além disto, elas eram capazes de transferir as estratégias que utilizavam na resolução dos problemas de um contexto para outro, estabelecendo, com isto, uma relação entre o conhecido e o não conhecido. Segundo Magalhães é justamente neste momento que o educador entra em cena, para mediar esta relação do aluno com a matemática escolar, ampliando o conhecimento do aluno ao aplicar os problemas já conhecidos por eles em contextos distintos, atribuindo significados práticos e reais.

Nunes Carraher (1998) também analisou cálculos de proporção, utilizando, para isto, duas escalas comuns à construção civil e duas não usuais, em dois grupos distintos, constituídos por alunos de 7ª série e mestres-de-obras, em sua maior parte analfabetos, tendo apenas três destes profissionais cursado até a 7ª série. Os mestres-de-obras tiveram o maior percentual de acerto nas escalas comuns à construção civil, todavia nas outras duas tiveram desempenho compatível. Ela observou que, mesmo nos diversos contextos, as aprendizagens de conceito matemáticas podem ser favorecidas.

Gomes (2007) investigou os conhecimentos de números decimais. Um grupo formado por quatro pedreiros e quatro marceneiros, estudantes da EJA, módulos I e II da rede estadual do Recife, que ainda não haviam recebido instrução formal acerca deste assunto. Este estudo foi composto por 12 questões e os dados foram coletados individualmente por meio de entrevistas. Com isto, pôde-se comprovar que estes alunos, com poucos anos de escolaridade conseqüentes de seu exercício profissional, desenvolveram procedimentos próprios, criaram estratégias de resolução de situações dentro do campo numérico dos decimais. Observou-se que o maior percentual de erros foi numérico, pois os profissionais compreendiam e sabiam escolher a estratégia mais adequada para cada uma das situações, todavia sentiam dificuldades em operacionalizar com decimais.

Silva (2006) buscou diferenciar os saberes relacionados a números decimais entre os adultos de EJA e crianças da 4ª à 6ª série do Ensino Fundamental (atual 5º e 7º ano do Fundamental), todos de uma mesma escola da rede municipal da cidade do Recife. Foram 16 problemas elaborados com base na Teoria dos Campos Conceituais, sendo a coleta feita por meio de entrevista individual. Silva (2006) observou que, no geral, os adultos sem instrução formal em Números Decimais tiveram um melhor desempenho que as crianças, mesmo estas já tendo experiência escolar com este assunto. Assim ocorreu nos estudos de Magalhães (1990), Schliemann (1998), Nunes Carraher (1998), Gomes (2007), dentre tantos outros, que serão mencionados nos capítulos vindouros.

O conhecimento do jovem e adulto diferencia-se do conhecimento dos alunos do Ensino Fundamental regular. E precisamente este colóquio entre a matemática da escola e a matemática da vida, que o professor deve aplicar a sua práxis, para facilitar a compreensão do aluno em sala de aula. O educador busca este conhecimento, desenvolvido por seus alunos fora de sala, por meio das práticas profissionais deles. Com isto, é possível fazer com que eles, ao sair da escola, saibam empregar o conhecimento adquirido e não o restrinja apenas ao contexto escolar.

CAPÍTULO 2

PERSPECTIVAS TEÓRICAS ACERCA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS

É interessante perceber o grande elo que há entre a psicologia e a matemática, ainda que a psicologia trate de aspectos mais subjetivos e a matemática seja objetiva, mecânica e exata. Ou seja, mesmo com tantas distinções, hoje temos grupos de pesquisas que focam a Psicologia da Educação Matemática, a junção destas duas disciplinas.

Neste capítulo iremos tratar de um, entre tantos teóricos, que contribui até hoje com suas idéias para estudos como esse, que relacionam a matemática e seus procedimentos teóricos, metodológicos e psicológicos. Trata-se do francês Gerard Vergnaud, psicólogo e pesquisador, que se destaca pela sua Teria dos Campos Conceituais

Vergnaud tenta entender os procedimentos psicológicos, assim como as barreiras cognitivas com que o indivíduo se depara ao solucionar um problema de matemática, tendo o foco no indivíduo *resolvedor* de problema e as faculdades mentais necessárias para se chegar ou não à resposta desejada.

2.1. GERARD VERGNAUD – TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Gérard Vergnaud, ex-diretor de pesquisa do Centro Nacional de Pesquisa Científica (CNRS) da França, estudou com Piaget em Paris e Genebra. Ele foi sua grande influência na "transição" (ou integração) da Psicologia e Filosofia para a Matemática (GROSSI, 2003). Segundo MOREIRA (2002), Vergnaud amplia e redireciona, em sua teoria, o foco piagetiano das operações lógicas gerais, das estruturas gerais do pensamento, para o estudo do funcionamento cognitivo do "sujeito-em-situação". Foi durante a III Conferência de Educação, Cultura e Desporto (2002), que assuntos como: as quatro operações, destacando as dificuldades de somar e subtrair (aritmética) foram vistos como os mais dolorosos dentro do processo de aprendizagem, levando Vergnaud à seguinte análise, segundo Grossi (2003):

> No ensino secundário, mais do que no primário, é justamente a matemática o que coloca o aluno em cheque. (...) Se o aluno não tem capacidade de compreender as quatro operações, por exemplo, ele não é considerado inteligente. (...) Quando se fala de adição e subtração, não é verdade que estejamos tratando apenas de compreensão elementar. Elas podem ter aplicações mais elaboradas, podem ser mais complicadas, como a questão de números negativos. (p.18)

Aqui ele nos apresenta diversas barreiras que impedem o desenvolvimento por parte dos alunos, das quatro operações básicas da Matemática. O que, de antemão deveria ser algo simples, vai ampliar-se com o passar dos anos, como acréscimo de outros conjuntos numéricos, pois até então se via as operações apenas com o conjunto dos números naturais {0, 1, 2, 3, 4,...}. Posteriormente, as operações envolverão o conjunto dos números inteiros (ou relativos) {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...}. Assim, a dificuldade se ampliará a cada ano, pois serão inseridos ao conteúdo os demais conjuntos (racionais, irracionais e reais). Ao chegar ao ensino secundário (atual Ensino Médio), eles se depararão com o conjunto dos números complexos.

Isto tudo chamou a atenção de Vergnaud, que percebeu que o foco do aluno em matemática não devia se basear apenas no conhecimento mecânico, mas sim no campo conceitual em que está inserido cada assunto matemático.

> A teoria dos campos conceituais é uma teoria cognitivista que visa *a* fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo *do* desenvolvimento e da aprendizagem *de* competências complexas*, notadamente das que se* relevam das ciências e das técnicas*. (VERGNAUD, 1996, p.155)*

Para Vergnaud o conhecimento está organizado em campos conceituais cujo domínio, por parte do sujeito, ocorre ao longo de um largo período de tempo, através de experiência, maturidade e aprendizagem. Campo conceitual é um conjunto de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição (VERGNAUD, 1982, p. 40). Em meio a este processo, surgem as dificuldades conceituais que só são superadas à medida que são encontradas e enfrentadas. Porém, isso ocorre progressivamente e não uma única vez.

Na teoria dos campos conceituais tem-se que o núcleo do desenvolvimento cognitivo é a conceitualização. Logo, deve-se dar toda atenção aos aspectos conceituais dos esquemas e à análise conceitual das situações para as quais os estudantes desenvolvem seus esquemas, na escola ou fora dela. Não é uma teoria de ensino de conceitos explícitos e formalizados, mas sim uma teoria psicológica do processo de conceitualização do real que permite localizar e estudar continuidades e rupturas entre conhecimentos do ponto de vista de seu conteúdo conceitual (VERGNAUD, 1996).

> De acordo, com Vergnaud, é necessário e prioritário, no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, que um conceito matemático seja funcional e significativo para o aluno: isto é, os conceitos devem ser explorados por meio de situações-problema que despertem a curiosidade do aluno, que tenham significado para o aluno, que permitam ao aluno associar conceitos a sua realidade, percebendo a aplicabilidade do conceito. (SILVA, 2002, p. 28)

Ou seja, o problema matemático precisa ter sentido para o aluno, diante dos conhecimentos que ele já possui, pois ao se resolver um problema matemático, o aluno não se depara apenas com um único conceito. Na situação-problema a seguir, veremos que existe uma diversidade de conceitos inter-relacionando-se e tendo como objetivo representar a situação da melhor forma, para a partir daí iniciar sua resolução.

Duda tinha 25 figurinhas, ganhou 17. Quantas figurinhas Duda tem agora?

É um problema que trata de uma situação aditiva: 25 + 17 = 42.

Todavia, esta situação envolve alguns conceitos que são necessários para que o problema seja resolvido corretamente, citaremos algumas:

- algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9;

- ordem de grandeza do número: unidade, dezena, centena, unidade de milhar (sistema de numeração decimal);

- valor posicional (25: 5 unidades e 2 dezenas ou 25 unidades);

- símbolos numéricos (+ ; - ; =)

- algoritmo da adição: parcela + parcela = soma (25 + 17 = 42);

- adição com reserva: somando as unidades 5 + 7 = 12, “vai um” para a dezena;

- estrutura lingüística que indica a alteração da situação ou problema: tinha (passado) e tem (presente);

Este campo conceitual, segundo Vergnaud (1982, 1996), trata também de um conjunto de situações, em que cada uma delas exige o domínio de uma variedade de conceitos (como o exemplo apresentado), de procedimentos e de representações simbólicas.

Três argumentos principais levaram Vergnaud (1983, p. 393) ao conceito de campo conceitual:

1) um conceito não se forma dentro de um só tipo de situações;

2) uma situação não se analisa com um só conceito;

3) a construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é prolixo e se estende ao longo dos anos, às vezes uma dezena de anos, com analogias e mal-entendidos entre situações, entre concepções, entre procedimentos, entre significantes.

Para Vergnaud (2000)

> Um conceito não assume sua significação em uma só classe de situações, e uma situação não é analisada por meio de um conceito único. É preciso, pois, tomar como objetos de pesquisa conjuntos relativamente amplos em situações e conceitos, classificando os tipos de relações, classes de problemas, esquemas de tratamento, representações lingüísticas e simbólicas, e os conceitos matemáticos que organizam o conjunto. (VERGNAUD, 2000, p. 25).

Ou seja, os conceitos que compõem um campo conceitual não são assimilados de forma seqüencial, pois existem diversas ligações, fazendo com que a junção das partes seja maior que o todo, devido a interação entre estes conceitos. Logo os conceitos matemáticos devem estar sempre inter-relacionados com um conjunto de situações que permitam variados tipos de raciocínio.

Sendo o conceito (VERGNAUD, 2000) composto por um conjunto de três elementos, representado simbolicamente por:

C = (S, I, R), em que: $\begin{cases} C = conceito \\ S = situações \\ I = in\,\mathrm{var}\,iantes \\ R = representações \end{cases}$

Situações – referente do conceito – conjunto de situações que dão sentido ao conceito;

Invariantes operatório – significado do conceito – é um conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações) sobre os quais repousa a operacionalidade do conceito, ou o conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito, ou o conjunto de invariantes que podem ser reconhecidos e usados pelos sujeitos para analisar e dominar as situações do primeiro conjunto. Os invariantes podem ser implícito (propriedades e relações que o sujeito usa numa estratégia de resolução de um problema) ou explícitos, quando estão ligados a uma concepção e expressos através de representações simbólicas.

Representação simbólica – é a forma como o indivíduo expõe seu pensamento (significante) e a simbologia ou conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais, etc.) que podem ser usadas para indicar e representar esses invariantes e, conseqüentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas.

Através do diagrama abaixo, podemos visualizar esta relação conceitual entre a tríade: situação (S), invariante operatório (I) e representação simbólica (R), que compõe um conceito (C).

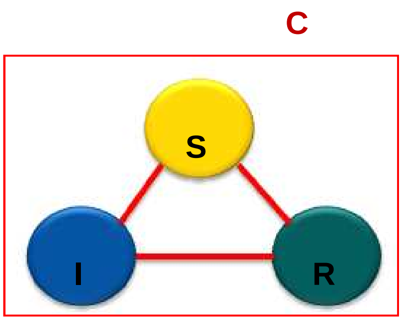


Figura 1: esquema da relação entre a tríade conceitual de Vergnaud (C, S, I, R)

Em relação às situações (S) Vergnaud (2000) distingue dois tipos de classes:

a) aquelas em que o sujeito dispõe no seu repertório, em dado momento de seu desenvolvimento e de suas circunstâncias, de competências necessárias ao tratamento relativamente imediato à situação.

Nesses casos, o autor afirma que se observam, para uma mesma classe de situações, condutas automatizadas, organizadas por um só esquema;

b) aquelas em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, sendo obrigado a um tempo de exploração, reflexão, hesitação e muitas tentativas, sempre em busca de uma solução, podendo chegar ou não ao que se espera dele. Esses casos envolvem a utilização de vários esquemas, em sucessivas experiências acompanhadas de descobertas.

Com isto percebe-se que a construção do conhecimento pelo aprendiz não é um processo linear, facilmente identificável. Ao contrário, é complexo, tortuoso, demorado, com avanços e retrocessos, continuidades e rupturas. O conhecimento prévio é determinante no progressivo domínio de um campo conceitual, mas isto também não significa que conhecimento prévio, por si, venha a favorecer ou impedir a referida evolução (domínio).

Vergnaud faz uma releitura do conceito de esquemas, feita pelo por Jean Piaget (1896 – 1980), que redefine esquemas como estruturas cognitivas através das quais as pessoas se organizam e se adaptam ao meio.

> Para Vergnaud, o esquema consiste em uma organização invariante do comportamento voltada para uma classe de situações que atuam como guia na condução das ações do indivíduo quando diante de uma situação problema. (LAUTERT e SPINILLO, 2006, p.48)

Ou seja, novos esquemas não podem ser desenvolvidos sem novos *invariantes operatórios*. A linguagem e os símbolos são importantes nesse processo de acomodação e o professor faz amplo uso deles na sua função mediadora. Mas o principal ato mediador do professor é o de prover *situações* frutíferas aos alunos. Um conceito, ou uma proposição, torna-se *significativo* através de uma *variedade de situações*, mas o aluno não capta o significado sozinho. O papel mediador do professor é essencial, pois de acordo com Vygotsky (1984), a interação é, também, responsável pelo desenvolvimento do indivíduo. Na sala de aula, deverá ocorrer uma interação contínua entre os processos internos e as influências externas. Assim, o indivíduo entenderá, desenvolvendo seus próprios processos de interpretação.

Segundo Vergnaud, o indivíduo, diante de uma situação, age de acordo com as representações que faz desta. Então, os esquemas são uma organização invariante para uma determinada classe de situações, servindo com isto para compreender os processos de resolução dos problemas, que se apresentam em tal situação. Existem diferentes tipos de esquemas. Os algoritmos são esquemas e quando utilizados repetidamente para situações similares tornam-se esquemas ordinários (MOREIRA, 2002).

A definição de esquema seria: a organização invariante do comportamento para uma dada classe de situações. Para facilitar a compreensão, Vergnaud (MOREIRA, 2002) cita os quatro ingredientes dos esquemas. São eles:

1. Metas e antecipações, pois um esquema está sempre voltado para a resolução de uma determinada classe de situações;

2. Regras de ação (do tipo "se... então") podem se classificar como geratrizes de um esquema, pois induzem a busca por informações e controle, que são os elementos que dirigem a seqüência de ações do sujeito;

3. Invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) que dirigem o reconhecimento, por parte do indivíduo, dos elementos pertinentes à situação e, portanto, guiam a construção dos modelos mentais;

4. Possibilidades de inferência (ou raciocínios) que permitem determinar as regras e antecipações a partir das informações e invariantes operatórios de que dispõe o sujeito.

Segundo Vergnaud (MOREIRA, 2002), quando se utiliza um esquema ineficaz para certa situação, isto pode levá-lo a modificar a experiência, levando-o a alterá-lo ou modificá-lo, partindo para outro esquema. Isto ocorre quando se está diante de um problema, em que segundo Polya (2006):

> Ao procurarmos a solução, podemos variar continuamente o nosso ponto de vista, a nossa maneira de encarar o problema. Temos de mudar de posição de quando em quando. É provável que a nossa concepção do problema seja muito incompleta no princípio; a nossa perspectiva é outra depois de feito alguns progressos; ela é ainda mais diferente quando estamos quase a chegar à solução. (p. 4)

Chegando à solução, alguns desses esquemas, utilizados na resolução de um problema, por exemplo, podem ser empregados outras vezes, em situações novas para a pessoa, até porque os procedimentos de uma dada situação são respaldados por um repertório inicial de esquemas disposto por ela (MOREIRA, 2002). Segundo Polya (2006), um problema não termina nele mesmo. Os conhecimentos técnicos e cognitivos, adquiridos por quem o resolve, transcendem-no, pois com a resolução deste os conhecimentos prévios são “re-ordenados” e conseqüentemente expandidos, servindo de base para outros problemas.

> É difícil imaginar um problema absolutamente novo, sem qualquer semelhança ou relação com qualquer outro que já haja sido resolvido; se tal problema pudesse existir, ele seria insolúvel. De fato, ao resolver um problema, sempre aproveitamos algum problema anteriormente resolvido, usando o seu resultado, ou o seu método, ou a experiência adquirida ao resolvê-lo. (POLYA, 2006, p. 41)

Estes métodos ou experiências adquiridas são o que podemos incluir no conceito de Esquemas. Moreira (2002) cita um exemplo feito por Franchi (1999), que facilita a compreensão do Esquema:

> Trata-se do esquema da enumeração de uma pequena coleção de objetos discretos por uma criança de cinco anos: por mais que varie a forma de contar, por exemplo, copos na mesa, cadeiras da sala, pessoas sentadas de maneira esparsa em um jardim, não deixa de haver uma organização invariante para o funcionamento do esquema: coordenação dos movimentos dos olhos e gestos dos dedos e das mãos, enunciação correta da série numérica, identificação do último elemento da série como o cardinal do conjunto enumerado (acentuação ou repetição do último "número" pronunciado). Vê-se facilmente que o esquema descrito recorre a atividades perceptivo-motoras, a significante (as palavras-números) e a construções conceituais, tais como a de correspondência biunívoca entre conjuntos de objetos e subconjuntos de números naturais, a de cardinal e ordinal e outras. (p. 165)

Podemos, então, continuar com esta idéia de esquemas relacionando-a aos conhecimentos prévios do aluno, até porque estes são compostos por esquemas, que serão utilizados tais como foram “armazenados” ou reelaborados antes de sua utilização.

No ensino, é necessário desestabilizar cognitivamente o aluno, mas não demais. É preciso identificar os esquemas presentes nos conhecimentos prévios, nos quais o aluno pode se apoiar ou utilizar para aprender o novo conhecimento.

Evitam-se, com isto, as situações para as quais os alunos não têm em que se apoiar.

Como são as situações que dão sentido aos conceitos, é natural definir campo conceitual como sendo, sobretudo, um conjunto de situações. Um conceito torna-se significativo através de uma variedade de situações, mas o sentido não está nas situações em si mesmas, assim como não está nas palavras nem nos símbolos. O sentido é uma relação do sujeito com situações e significantes. Mais precisamente, são os esquemas, as ações e sua organização, evocados no sujeito por uma situação ou por um significante que constituem o sentido dessa situação ou desse significante para esse indivíduo.

Em relação à aritmética, Vergnaud (LAUTERT e SPINILLO, 2006) considera dois grandes campos conceituais: os das estruturas aditivas e os das estruturas multiplicativas. No campo conceitual das estruturas aditivas, que são compostas por situações que induzem as regras operatórias de natureza aditiva (adição e subtração), à qual há uma relação entre as partes e o todo, em que ao adicionarmos duas variáveis forma-se o todo. Ou seja, somando duas, sempre obteremos uma terceira, que pode ser uma variável já enunciada na questão ou uma desconhecida. Na multiplicação (NUNES e BRYANT, 1997) também há uma relação parte-todo, côo aquelas presentes nas estruturas aditivas. Porém, a relação base das estruturas multiplicativas é a correspondência um-a-muitos. Neste campo temos: multiplicações, divisões, fração, razão, proporção e porcentagem, sobre as quais não discorreremos por não serem objetos desta pesquisa.

Segundo Vergnaud (1996), o campo conceitual das estruturas aditivas é o conjunto das situações em que se inserem cálculos relacionados às adições ou subtrações, havendo nestas uma diversidade de conceitos, como o conceito de numeral, antecessor, sucessor, além de diversas operações envolvendo as variáveis do problema, como: seriar, ordenar, reunir, juntar, somar, acrescentar, subtrair, separar, afastar, transformar e comparar. Também estão presentes os teoremas que permitem analisar tais situações como tarefas matemáticas.

Inseridos no Campo Conceitual das Estruturas Aditivas (VERGNAUD, 1982), temos seis tipos diferentes de situações envolvendo esses conceitos de estruturas aditivas, em que o aprendizado realmente ocorreu após o domínio destas situações, pois elas são geradores de *todos* os problemas relacionados à adição e subtração. Elas são as “relações aditivas de base”.

A seguir, iremos mostrar as representações através de esquemas e equações propostas por Vergnaud (1996), em que, para ele, cada figura possui um significado, como apresentado na tabela:

Nomenclaturas (e símbolo)	**Significado (o que representa)**
Quantidades	Grandezas discretas
Medidas	Grandezas contínuas
Transformações	Alterações efetuadas sobre as quantidades que implicam tempo e podem receber o sinal positivo ou negativo, de acordo com as informações do problema
Relações	Obtidas a partir de comparações entre as quantidades.
■	Quantidades ou medidas
●	Transformações ou relações
→	Transformações que ocorrem entre o estado inicial e o estado final, no decorrer de certo tempo
↑	Comparações entre as quantidades (ou medidas) e transformações (ou relações)
}	Composições

Quadro 1: Significados das nomenclaturas e símbolos utilizados por Vergnaud (1982).

- ***Composição*** de duas medidas em uma terceira.

Exemplo: *Dudu tem 157 figurinhas. Cássio tem 98. Quantas figurinhas têm os dois juntos?*

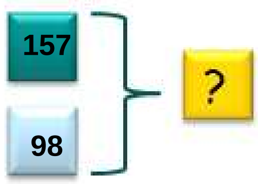


Figura 2: Esquema da relação parte-todo

Segundo a figura, percebe-se que duas quantidades se compõem para dar lugar a outra. Nesta relação, encontram-se problemas de reunião ou de fracionamento em busca do todo ou de uma das partes, podendo para isto operar um uma adição ou subtração.

O exemplo citado foi o de adição, o de subtração seria deste tipo: *Gustavo fará 286 pastéis, sendo 178 de queijo e o restante de carne. Quantos pastéis de carne ele fará?*

- ***Transformação*** de uma medida inicial em uma medida final.

Exemplo: *Jorge tem R$ 23,00. Ganhou R$ 25,00. Quantos reais ele possui ao todo?*

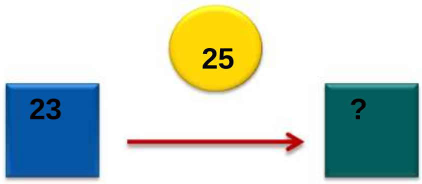


Figura 3: Esquema da transformação de Estados

Trata-se de uma situação que será alterada (mudada). Nela existe um estado inicial que sofre uma transformação, podendo ser positiva ou negativa, passando para um novo estado. Nesta, incluíram-se seis subcategorias, a depender de tal transformação ser positiva ou negativa, de estar em busca do estado inicial ou final, ou de querer o valor da transformação.

Acima, o exemplo é uma transformação positiva que está em busca do estado final. Podíamos reelaborar o problema desta maneira: *Jorge possuía R$ 48,00, comprou um presente recebendo um troco de R$ 25,00. Qual o valor do presente?*

Neste problema a transformação é negativa e está em busca do valor da transformação.

- Relação de ***comparação*** entre duas medidas.

Exemplo: *Um pipoqueiro fez 568 pipocas salgadas e 396 pipocas doces. Quantas pipocas salgadas ele fez a mais?*

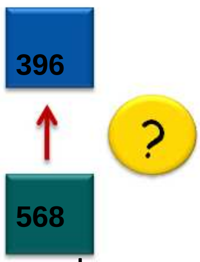


Figura 4: Esquema da comparação de estados

Está relacionado à comparação entre dois valores ou objetos, ou seja, as quantidades são conhecidas buscando-se comparar a diferença existente entre as duas (relação). A pergunta sempre se refere a expressões como “a mais” ou “a menos” e também possui seis subcategorias, podendo a relação ser positiva ou negativa, a pergunta fazer menção ao referido, ao referente ou de comparação (relação).

No problema anterior, trata-se de uma relação negativa, com a pergunta focando o referente. No exemplo abaixo temos uma relação positiva, em que se faz menção ao referido: *Após uma partida de basquete entre o time Amarelo e o Vermelho. O Amarelo fez 81 pontos e o Vermelho fez 23 pontos a mais. Quantos pontos fez o time Vermelho?*

As três primeiras relações, apresentadas, dão origem a outras três, ao serem agrupadas dois a dois, são elas: Composição de transformações; Transformação de uma relação e Composição de duas relações.

- Composição de transformações.

Exemplo: *Sabrina no sábado foi ao cinema gastando R$ 28,00. No domingo ela decidiu ir à praia com suas amigas gastando R$ 16,00. Quanto reais Sabrina gastou no final de semana?*

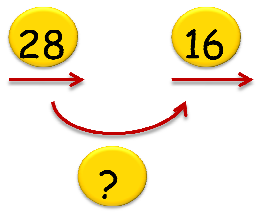


Figura 5: Esquema da composição de transformações

Duas transformações se compõem para dar lugar a uma transformação final. Trata-se de quantidades inicial, intermediária e final ignoradas, conhecendo-se apenas as transformações, as quais ocorrem ao longo de um período de tempo, que deverão compor uma transformação final.

- Transformação de uma relação.

Exemplo: *Ulisses tem 13 quilos a mais que Diana. No último mês ele ganhou mais 4 quilos. Quantos quilos Ulisses têm a mais que Diana?*

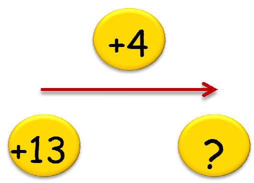


Figura 6: Esquema de transformação de uma relação

Uma transformação opera sobre uma relação para dar lugar a uma nova relação. Novamente, não se conhece nenhuma das quantidades, sabendo-se, entretanto das relações existentes que se transformam no decorrer de um período.

- Composição de duas relações.

Exemplo: *Maurício deve R$ 208,00 a Clara e R$ 175,00 a Roberto. Quantos reais Maurício deve no total?*

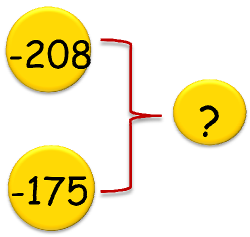


Figura 7: Esquema da composição de duas relações

Duas relações se compõem para dar lugar a uma nova relação. Existem duas relações quantificadas e concomitantes que devem ser compostas. No caso do exemplo, se desconhecem as quantidades de reais de cada sujeito, que em nenhum momento são significativas. Apesar da semelhança com a quarta categoria apresentada, neste caso, não há transformação de tempo. As relações são consideradas necessariamente contemporâneas.

Os problemas acima, mesmo apresentados em textos convencionais e poucos extensos, podem gerar abissais diferenças de desempenho, isto dependendo do termo que se procura. Para exemplificar escolhemos dois problemas de transformação:

- Transformação Direta

Jorge tem R$ 23. Ganhou R$ 25. Quantos reais ele possui ao todo?

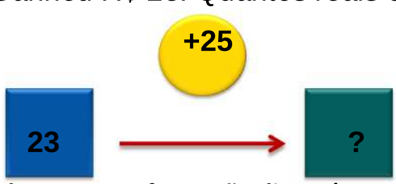


Figura 8: Esquema de uma transformação direta (termo final desconhecido)

Operação algorítmica: 23 + 25 = ? $\Rightarrow$ **23 + 25 = 48**

- Transformação Inversa

Jorge ganhou R$ 25 e ficou com um total de R$ 48. Quantos reais ele possuía antes?

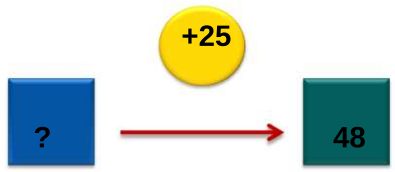


Figura 9: Esquema de uma transformação inversa (termo inicial desconhecido)

Operação algorítmica: ? + 25 = 48 $\Rightarrow$ **48 – 25 = 23**

Nestes dois exemplos, nota-se que não é a dificuldade relacionada ao cálculo numérico (na resolução de uma soma ou subtração), mas sim no cálculo relacional, em que ao interpretar o problema o aluno precisará pensar especificamente na maneira inversa, pois na “transformação inversa” ele já possui o “resultado” e está em busca, do termo inicial, podendo também ser o termo intermediário, precisando, com isto, reorganizar seus esquemas relacionados ao Campo Conceitual das Estruturas Aditivas.

Logo, segundo Vergnaud, a competência inicial na resolução deste tipo de problemas encontra-se no momento da escolha operacional, no discernimento, entre uma adição ou uma subtração e a ordenação adequada dos valores apresentados. Este momento de discernimento é o que Vergnaud (1982) denomina de **cálculo relacional.** Pois, segundo ele existem dois tipos de cálculo:

- O cálculo relacional que são às operações de pensamento necessárias para a compreensão das relações envolvidas nas situações. Ou seja, para se resolver um problema, por exemplo, é preciso antes compreender o enunciado da situação proposta, para daí perceber as relações que há entre os dados do problema e o caminho que deve ser percorrido até encontrar o resultado.

- O cálculo numérico que envolve as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, dentre outras. É neste momento que se põe em prática os procedimentos concebidos no cálculo relacional.

Como foi expresso anteriormente, a resolução de um problema é algo que exige tempo por parte do aluno para que ele compreenda a *situação* (S) exposta no enunciado do problema e reconheça seus *invariantes* (I), podendo em seguida, *representá*-los (R) através de estratégias. O domínio de um campo conceitual é algo que exige tempo, pois vai sendo constituído a partir do momento em que o aluno se depara com novos problemas, novas propriedades, novas resoluções (ou novos olhares sobre o mesmo problema) e saibam relacioná-los, adquirindo com isto as competências necessárias para lidar com o campo conceitual que se está estudando. Não basta apenas o aluno repetir os procedimentos de resoluções dos problemas, é preciso dominá-los, saber destrinchá-lo, compreendendo cada etapa deles.

> Inicialmente precisamos de uma dada situação-problema com o objetivo de despertar no aluno o interesse em buscar a(s) solução(ões) do problema. Esse processo de busca da solução envolve um conjunto de invariantes (significados, relações, fórmulas, algoritmos, etc) e um conjunto de representações simbólicas (linguagem oral, linguagem escrita, linguagem matemática, etc) que serão utilizados com o intuito de resolver o problema. (SILVA, 2002, p. 29)

Um conceito envolve vários outros, inseridos em uma teia de inter-relações. Quando ocorre a apropriação de um conceito o sujeito é induzido a explorar diversas situações em que ele pode estar inserido, assim como contextos diferenciados. Com isto, cria-se uma gama de representações e constroem-se invariantes operatórios para dar significado a este conceito.

> O saber se forma a partir de problemas para resolver, quer dizer, de situações para dominar. [...] Por problema é preciso entender, no sentido amplo que lhe atribui o psicólogo, toda situação na qual é preciso descobrir relações, desenvolver atividades de exploração, de hipótese e de verificação, para produzir uma solução. (VERGNAUD, 1996, p. 52)

No subtópico a seguir iremos apresentar algumas classificações construídas a partir das proposições de Vergnaud sobre campo conceitual das estruturas aditivas dos problemas matemáticos.

2.2. CLASSIFICAÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO AS ESTRUTURAS ADITIVAS

Inicialmente, apresentaremos uma das classificações de problemas envolvendo estruturas aditivas: A classificação proposta por Carpenter e Moser

(1982), que se assemelha à feita por Vergnaud (1982). Após analisarem as estratégias utilizadas por crianças e as suas dificuldades envolvendo o cálculo relacional (VERGNAUD, 1982), os problemas de estruturas aditivas são classificados considerando as características, as informações relativas aos acréscimos e decréscimos e as combinações e comparações apresentadas nos seus enunciados. Assim, Carpenter e Moser (1982) propõem quatro categorias principais e suas ramificações. São elas: ***Mudança***, ***Comparação***, ***Combinação***, e ***Igualização***, que se subdividem em dezesseis outras de acordo com o item procurado no enunciado do problema.

Tendo em vista que essa classificação foi escolhida para a realização do estudo, exemplificaremos cada uma destas categorias e algumas de suas ramificações, com problemas que foram utilizados em alunos de EJA de uma escola pública estadual, no ano de 2008. A construção das fichas contendo os problemas propostos foi baseada nesta classificação. São elas:

Mudança – *change* – Problemas que envolvem um relacionamento dinâmico, pois a partir de uma quantidade inicial e através de uma ação direta ou indireta causa-se um aumento ou diminuição na mesma.

Exemplos:

1. Edu tinha 327 figurinhas, ganhou 238 figurinhas de seu pai. Com quantas figurinhas ele ficou?

Mudança – situação de acréscimo – série final desconhecida

$$327 + 238 = ?$$

Podemos alterar a situação de acréscimo para decréscimo, mantendo a série final desconhecida.

2. Nara tinha R$ 896,00, emprestou para Fábio R$ 574,00, com quanto ela ficou?

Mudança – situação de decréscimo – série final desconhecida

$$896 - 574 = ?$$

3. Sabrina tinha uma loja que vendia brincos, mas resolveu fechá-la. Dando 264 brincos para sua irmã, ficou com 503. Quantos brincos Sabrina tinha antes?

Mudança – situação de decréscimo – série inicial desconhecida

? – 264 = 503

4. *Alice já tinha algumas garrafas pet para fazer a decoração da escola, seus amigos lhe deram 503, fazendo-a ficar com 767 garrafas pet. Quantas garrafas pet Alice tinha antes?*

Mudança – situação de acréscimo – série inicial desconhecida

? + 503 = 767

5. Dona Telma tinha 248 latas de refrigerante para vender. Ela ganhou alguns de Marcão. Ela tem agora 500. Quantas latas de refrigerante dona Telma ganhou de Marcão?

Mudança – situação de acréscimo – subsérie desconhecida

248 + ? = 500

6. Antônio comprou uma locadora com 500 DVDs. Ele doou alguns, ficando apenas com 248. Quantos DVDs ele doou?

Mudança – situação de decréscimo – subsérie desconhecida

500 – ? = 248

Comparação – *compare* – Problemas que envolvem a comparação entre duas quantidades. Neste problema a diferença entre duas quantidades precisa ser encontrada, ou é dada uma quantidade e a sua relação com outra quantidade, sendo necessário descobrir o valor dessa segunda quantidade. Ao contrário dos problemas de mudança que envolve uma dinâmica (mudança), pois os valores são alterados, esses são estáticos, os valores não se alteram, são apenas comparados.

Exemplos:

7. *Dois amigos resolveram participar do rali Dakar, em modalidades diferentes, Lucas de carro e Jorge de moto. Até certo momento, Lucas tinha andado 348 quilômetros e Jorge, 209 quilômetros. Jorge andou quantos quilômetros a menos que Lucas?*

Comparação – diferença (série final) desconhecida – termo a menos

348 – 209 = ?

8. Renata e Patrícia têm muitos lápis de cor. Renata tem 224 e Patrícia tem 187. Quantos lápis de cor Renata têm a mais que Patrícia?

Comparação – diferença (série final) desconhecida – termo a mais

224 – 187 = ?

*9. Os primos Nil e Veloso moram no interior de Pernambuco, mas resolveram se encontrar em Recife. A viagem de Nil durou 512 minutos, enquanto a viagem de Veloso durou 248 minutos **a menos**. Quanto tempo durou a viagem de Veloso?*

Comparação – quantidade menor desconhecida – termo a mais

512 **–** 248 = ?

*10. Os primos Nil e Veloso moram no interior de Pernambuco, mas resolveram se encontrar em Recife. A viagem de Nil durou 512 minutos, enquanto a viagem de Veloso durou 248 minutos **a mais**. Quanto tempo durou a viagem de Veloso?*

Comparação – quantidade maior desconhecida – termo a menos

512 **+** 248 = ?

São nas questões sete e oito que geralmente ocorrem o maior número de erros, pois os termos “a mais” e “a menos” não são relacionados à operação aritmética e eles confundem o aluno, quanto à escolha da operação.

11. *Tales e Geraldo são fazendeiros. Tales possui 638 cabeças de gado, enquanto Geraldo possui 120 cabeças de gado **a mais**. Quantas cabeças de gado Geraldo possui?*

Comparação – quantidade maior desconhecida – termo a mais

638 **+** 120 = ?

12. *Tales e Geraldo são fazendeiros. Tales possui 638 cabeças de gado, enquanto Geraldo possui 120 cabeças de gado **a menos**. Quantas cabeças de gado Geraldo possui?*

Comparação – quantidade maior desconhecida – termo a mais

638 **-** 120 = ?

Igualização – equalize – Problema que envolve a mesma estrutura de ação encontrada nos problemas de mudança, mas existe, também, uma comparação envolvida. Problemas deste tipo abrangem a mudança de uma quantidade para que as duas venham a ter a mesma quantidade ou o mesmo número de atributos. É praticamente a fusão das duas categorias anteriormente apresentadas.

Exemplos:

13. Beatriz e Tomé têm o mesmo peso, mas em um mês Beatriz ganhou 326 gramas e Tomé ganhou 175 gramas. Quantos gramas Beatriz precisa perder para que eles voltem a ter o mesmo peso?

Igualização – decréscimo da quantidade maior

326 – ? = 175

14. Bruno fez 640 pastéis. Ana fez 429 pastéis. Quantos pastéis Ana precisa fazer para ter a mesma quantidade que Bruno?

Igualização – acréscimo da quantidade menor

429 + ? = 640

Combinação – combine – Problemas, assim como na comparação, que descrevem um relacionamento estático entre duas quantidades e suas partes.

Exemplos:

15. Luís tem 405 bolas de gude. Maria tem 196 bolas de gude. Quantas bolas de gude têm as duas juntas?

Combinação – série final desconhecida (o todo)

405 + 196 = ?

16. Toni e Carlos encheram juntos, em uma semana, 306 garrafas de água. Se destas Toni encheu 175 garrafas de água, quantas Carlos encheu?

Combinação – subsérie desconhecida (a parte)

175 + ? = 306

As variedades de problemas em função do termo a que se refere os enunciados das questões são importantes, pois possibilitam que haja uma reflexão a respeito dos diferentes tipos de relações, podendo envolver com isso estratégias de resolução diversas. Causadas estas também pelas propriedades invariantes (VERGNAUD, 1982), em que nos problemas diretos o aluno vai se deparar com o final desconhecido, enquanto que se os problemas forem inversos, eles precisarão reelaborar suas estratégias, já que neste o início é que é desconhecido, tendo que fazer operações inversas àquelas que o problema se refere. O que ocorreu, dentre outros, com o seguinte exemplo abaixo:

Sabrina tinha uma loja que vendia brincos, mas resolveu fechá-la. Dando 264 brincos para sua irmã, ficou com 503. Quantos brincos Sabrina tinha antes?

$$? - 264 = 503$$

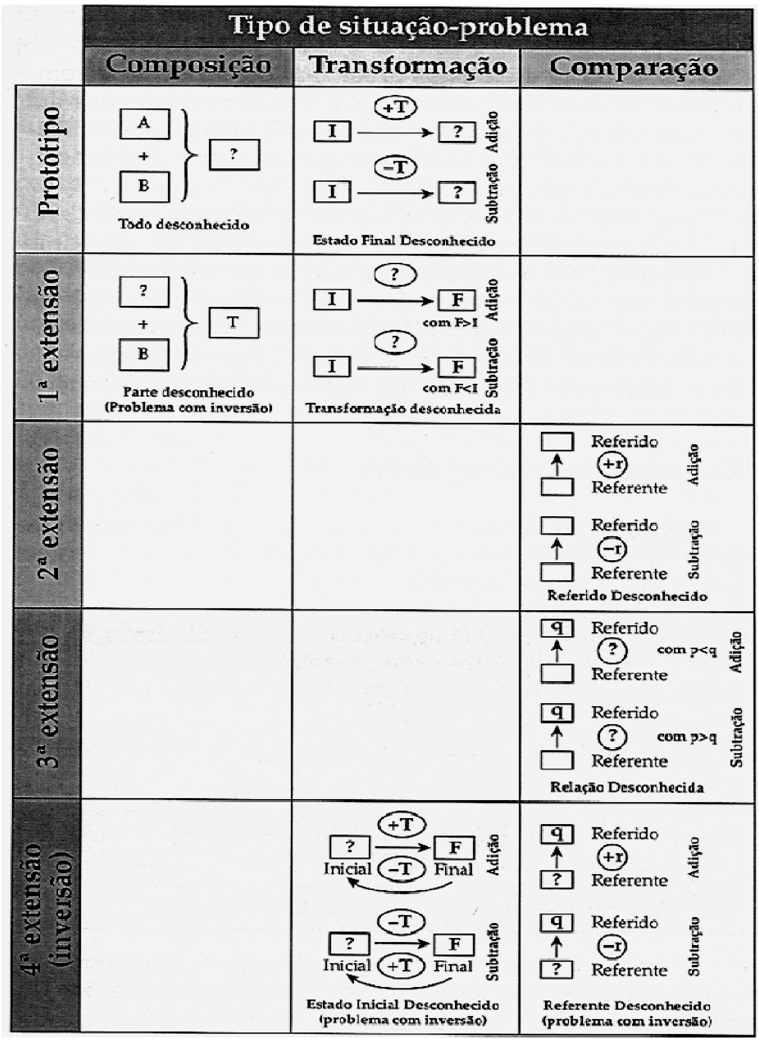
Mesmo sendo uma operação de subtração, pois o verbo “dar” (dando) implica em uma situação de decréscimo, a operação que precisará ser executada será de soma.

$$503 + 264 = ?$$

Outra proposta de classificação foi apresentada por Magina, Campos, Nunes e Gitirana (2001), que montaram uma tabela resumo que classifica os tipos de situações-problemas relacionados às estruturas aditivas, a partir da proposta por Vergnaud (1982).

Através dela, tem-se um panorama geral das diferentes representações simbólicas da adição e subtração, além de evidenciar a complexidade dos fatores que se encontram implícito em um problema aditivo, oferecendo uma estrutura teórica que ajude o pesquisador a compreender e graduarem as dificuldades enfrentadas pelos alunos diante de um problema de estrutura aditiva, podendo analisar onde ocorre o maior número de erros e acertos.

A seguir trazemos um quadro elaborado por MAGINA et. al (2001, p. 51), do qual, no capítulo anterior, foi apresentado um quadro (p. 31), que contém o significado dos símbolos contidos neste.



Quadro 2: Quadro com a classificação dos problemas aditivos segundo Magina et al (2001)

Como apresentado no quadro, existem três grupos básicos de problema que, segundo suas características, podem ser classificados como: composição, transformação e comparação (MAGINA e CAMPOS, 2004)

A classe dos problemas de *composição* compreende as situações que envolvem parte-todo: juntar uma parte com outra para obter o todo, ou subtrair uma parte do todo para obter a outra parte. Problemas do tipo: “Há 4 meninos e 7 meninas em volta de uma mesa. Quantas crianças são ao todo?”, são considerados como *protótipo* da adição, trata-se de um problema direto, em que se conhece as partes e pede-se o todo.

Como no quadro apresentado, pode haver também problemas de composição como a “1ª extensão”, em que o todo e uma das partes são conhecidos e pergunta-se sobre a outra parte. Por exemplo: “Há, ao todo, 11 crianças em volta de uma mesa, sendo 4 meninos e o restante meninas. Quantas meninas há em volta da mesa?” – Este tipo de problema requer mais concentração por parte do aluno por se tratar de um problema inverso.

Os problemas de *transformação* envolvem situações em que a idéia temporal está sempre presente: no estado inicial tem-se uma quantidade que se transforma através de perda ou ganho, chegando ao estado final com outra quantidade. O *protótipo* deste tipo de situação de transformação seria:

“Roberto tinha 7 bolas de gude. Ele jogou uma partida e perdeu 4 bolas de gude. Com quantas bolas de gude ele ficou?”

O estado inicial e a transformação são conhecidos, sendo pedido o estado final. Na 1ª extensão seriam conhecidos os dois estados (inicial e final), sendo a transformação desconhecida.

Os problemas de transformação considerados mais difíceis são aqueles em que o estado inicial é desconhecido. Magina et. al (2001) classifica esse tipo de problema como de 4ª extensão. Segundo Magina e Campos (2004) os problemas de transformação podem ser ainda mais complexos se considerarmos composição de transformações, na qual não se conhece nem o estado inicial, nem o final, mas sim as transformações ocorridas. Como o problema a seguir:

“Roberto jogou duas partidas de bola de gude. Na primeira ele perdeu 4 bolas de gude. ele jogou a segunda partida, mas não se lembra o que aconteceu nela. No final das duas partidas ele contou e viu que tinha ganhado 7 bolas de gude. O que aconteceu na segunda partida?”.

Os problemas de *comparação* são aqueles que comparam duas quantidades, uma denominada de referente e a outra de referido. Podendo ser uma relação estática ou dinâmica entre dois todos, como os exemplos:

“Ana tem 8 anos. Carlos tem 12 anos. Quem tem *mais* anos? Quantos anos a mais?” (estática e 3ª extensão do quadro)

“Carlos tem 9 reais e Luiz tem 6 reais a mais que Carlos. Quantos reais tem Luiz?” (dinâmica, apenas um todo é conhecido, 4ª extensão do quadro).

Magina et al (2001) mostrou que a dificuldade maior ocorre com maior freqüência na 3ª extensão dos problemas de comparação do que na 4ª extensão, devido a utilização do termo “a mais”, pois este pode sugerir uma transformação de uma quantia específica em outra, mas o problema apresenta uma comparação entre duas quantidades (dois todos)

Além destes grupos de problemas, em Vasconcelos (2003) temos a categorização dos problemas de acordo com seus elementos desconhecidos: estado inicial, transformação e estado final. Todavia optamos em nossos problemas adotar as seguintes denominações para os termos aditivos, de acordo com sua disposição:

$$\mathbf{a \pm b = c}$$

a	**b**	**c**
Série inicial	Subsérie	Série final

Quadro 3: Denominações dos termos aditivos de acordo com a sua posição

A procura por cada um desses elementos em um problema exige uma diversidade de estratégias de resolução, assim como níveis diferentes de dificuldades. Pois, para resolver um problema, o aluno alude a uma representação direta da seqüência de dados contidos nele. Nunes et al (2001) afirmam que quanto mais direta for essa relação entre os dados apresentados, mais fácil se torna o entendimento do problema. Sendo assim, quando não é a série inicial (ou estado inicial) o elemento desconhecido o aluno tem dificuldade em encontrar a solução do problema, pois quanto maior for o número de operações mentais necessárias para se encontrar um caminho para a solução, mais alto será o nível de dificuldade do problema.

Este tipo de problema com nível maior de dificuldade pode ser denominado de Problema Aditivo de Ordem Inversa em que o aluno deve perceber que o problema se resolve da “mesma forma”, sendo que, na resolução deste, o estado inicial (série final) ocupa o lugar do estado inicial (série inicial), aplicando a mesma transformação (subsérie), só que de maneira inversa. Como na representação (FRANCHI, 1999):

$$\mathbf{F = T(I) \Rightarrow I = T^{-1}(F)}$$

Em que,

F: estado final

I: estado inicial

T: transformação direta

T^{-1}: transformação inversa

Quadro 4: Representação da relação entre os termos aditivos de ordem direta e inversa, segundo Franchi (1999)

Para evitar este tipo de barreira cognitiva Nunes et al (2005) defende que ao se deparar com o campo conceituais das Estruturas Aditivas (adição e subtração) é preciso coordenar os três esquemas de ação do raciocínio aditivo, que são: Juntar, retirar e colocar em correspondência um a um.

Mesmo tendo denominações distintas, os três grupos de estudo (VERGNAUD, 1982; CARPENTER e MOSER, 1982 e MAGINA et al.,2001) mencionados, analisaram as situações-problema de acordo com sua composição, buscando categorizá-las com o intuito de gerar análises mais específicas em suas pesquisas. Eles subdividiram os problemas em partes (categorias) para investigar a atuação dos alunos mediante a eles, e em seguida, propor intervenções no processo de ensino e aprendizagem desses problemas matemáticos.

No subtópico 2.3, serão apresentados trabalhos de campo realizados a partir dessas classificações. Nestes trabalhos, analisa-se a resolução de problemas de estrutura aditiva em públicos diferentes.

2.3. ESTUDOS ANTERIORES QUE ENVOLVEM AS ESTRUTURAS ADITIVAS EM EDUCAÇÃO INFANTIL, ENSINO FUNDAMENTAL E EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS.

Muitos estudos já foram feitos relacionados às estruturas aditivas e multiplicativas, definidas por Gerard Vergnaud. Todavia, o foco é predominantemente o público infantil, como vemos em alguns trabalhos, que demonstram as dificuldades apresentadas pelos alunos diante da compreensão dos problemas que envolvem as estruturas aditivas, principalmente as mais complexas.

Esta dificuldade, infelizmente, não está restrita apenas ao público infantil, pois se o aluno, independente de sua faixa etária ou escolar, não tiver uma compreensão das relações implícitas no problema, provavelmente irá cometer erros. Pois, como já foram apresentados, em dados problemas é possível que os verbos apresentem um significado que compromete à operação aritmética adequada à resolução deste.

Como apresentado nos capítulos anteriores, as contribuições de Vergnaud geraram diversas pesquisas voltadas às Estruturas aditivas, assim como as de

Carpenter e Moser. Ambas nos levam a observar que um mesmo cálculo numérico (adição ou subtração), de acordo com a estrutura do problema, pode nos induzir a diferentes cálculos relacionais.

Carpenter e Moser (1982) realizaram estudos com crianças das séries de educação infantil de escolas norte-americanas. Elas ainda não haviam recebido instrução formal sobre adição e subtração, realizando atividades através da manipulação e contagem de blocos. O uso de blocos favoreceu a realização de cálculo com 78,5% de acerto. Sem o uso do material, a quantidade de acerto caiu para 68%. Quando os pesquisadores aumentaram os valores para números maiores que 10, estas quantidades de acerto se destoaram mais: 60,5% acertaram usando o material manipulativo, enquanto apenas 36,5% acertaram sem o uso do material.

Selva e Brandão (2000) fizeram uma pesquisa com 30 crianças de 4 a 6 anos, que compunham o Jardim I, Jardim II e Alfabetização. Elas notaram que as crianças da alfabetização apresentaram um desempenho significativamente superior às do Jardim II e Jardim I. As crianças da Alfabetização apresentaram desempenhos semelhantes na resolução de problemas de *mudança* e *comparação*. Não ocorreu o mesmo com as crianças do Jardim II que, mesmo conseguindo desenvolver problemas envolvendo *mudança*, tiveram dificuldades em entender os problemas de *comparação*. As crianças do Jardim I demonstraram dificuldades em ambos os tipos de problemas. Todavia, problemas de *comparação* não houve acertos. Elas perceberam também que independente dos valores serem pequenos ou grandes, os problemas do tipo *comparação* trazem maior dificuldade, por serem mais complexos.

Magina, Campos, Nunes e Gitirana (2001), fizeram um trabalho com 782 crianças das quatro séries iniciais do Ensino Fundamental, utilizando uma classificação similar à proposta por Vergnaud, para as estruturas aditivas. Magina et al. (2001) constataram que o desempenho, mediante os problemas por eles apresentados tiveram um baixo índice de acertos entre os alunos de 1ª série, sendo este percentual aumentado à medida que ocorre o avanço do nível de escolaridade deles.

Em relação aos problemas considerados protótipos tanto de *composição de quantidade* quanto de *transformação de quantidade* (nos quais se desconhece o estado final), até os alunos de 1ª série demonstraram dominá-los conseguindo um percentual de acertos acima de 90%. Já nos problemas de *comparação de quantidades,* em que são dados o referente e a relação, sendo o referido desconhecido, os índices de acertos das crianças da 1ª série caíram para menos de 60%.

A percentagem de acerto declina quando as crianças de 1ª série se deparam com problemas de *transformação de quantidade*, em que são dados a transformação e o estado final e se pede o estado inicial. Apenas 50% dos alunos obtiveram êxito. Os alunos de outras séries também sentiram dificuldades neste tipo de problema, tendo êxito aproximadamente 67% dos alunos da 2ª e 3ª série. Os alunos da 4ª série conseguiram um percentual um pouco maior que 80% de acerto.

Magina e Campos (2004) fizeram uma investigação sobre o raciocínio aditivo em 248 crianças de 1ª série a 4ª série de duas escolas da rede pública do estado de São Paulo, sendo 62 alunos da 1ª série, 63 da 2ª, 62 da 3ª e 59 alunos da 4ª série. A investigação consistia de 20 situações-problema relativas às quatro operações básicas e entre estas cinco situações-problema relativas às estruturas aditivas. Tendo os problemas as seguintes estruturas:

O problema 1 é de composição com as partes conhecidas.

O problema 2 trata de uma transformação com o estado inicial e a transformação conhecidos.

O problema 3 compara duas quantidades. Trata-se de problema de comparação com referentes conhecidos e a relação entre eles desconhecida. A criança deve perceber a subtração como o inverso da adição.

O problema 4 é uma questão de transformação considerada simples, classificado em Magina et. al (2001) como problema de 1ª extensão.

O problema 5 é um protótipo de composição em que se conhece as partes caminhadas e pede-se o todo. Também pode ser considerado um problema de transformação com os estados inicial e final, onde se pede a transformação.

Deste estudo, obtiveram a seguinte tabela contendo a percentagem de acertos dos alunos de cada uma das quatro séries:

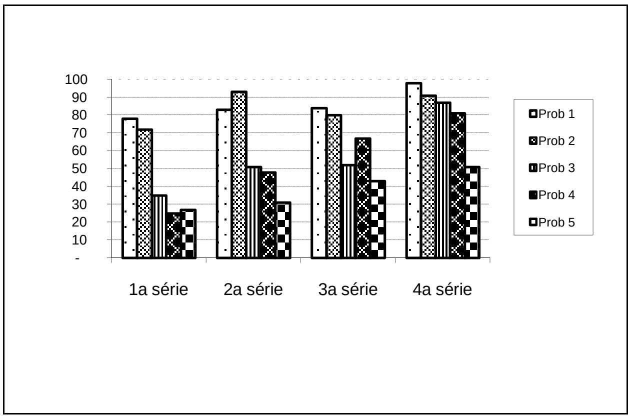


Gráfico 1: Resultados dos desempenhos dos alunos por série, da pesquisa de Magina e Campos (2004)

Os problemas 1 e 2 apresentaram altos índices de acertos em todas as séries, mesmo para as crianças da 1ª série (mais de 70% de acerto). Já o problema 3 mostrou baixo índice de acerto nas 1ª séries, apresentando significativa melhoria na medida que a escolaridade avança. No problema 3 e 4, há uma melhora no percentual de acerto, referente ao ano de escolaridade. Os problemas 4 e 5 possuem baixos índices percentuais de acertos. O problema 5 foi, efetivamente, o que apresentou o menor percentual de acerto. De acordo com a tabela, apenas 50% dos alunos de 4ª série conseguiram resolvê-lo corretamente.

Os resultados do estudo deles mostraram que a maioria das crianças consegue resolver problemas de combinação e transformação de resultado desconhecido, que envolvem apenas o ato de juntar e retirar. Para os problemas de transformação com início desconhecido e transformação desconhecida, o desempenho foi baixo. Seria preciso que as crianças dominassem a operação inversa de cada uma das operações aditivas (adição e subtração).

As dificuldades na resolução de problemas com estruturas aditivas se assemelham em alguns pontos. Vasconcelos (2003) elaborou um conjunto com estas dificuldades. Daremos ênfase a apenas três delas:

- A resolução de problemas de adição e subtração pelas crianças é fortemente influenciada pela estrutura semântica da situação-problema;

- A identificação da quantidade desconhecida num problema é uma das dificuldades na sua resolução (pois o *elemento desconhecido* pode se encontrar no estado inicial, na transformação ou no estado final);

- A tendência em separar representações quantitativas e representações simbólicas é apontada como obstáculo no ensino da matemática;

> No caso da resolução de problemas, o objetivo maior não é a prática do cálculo aritmético, mas, sim, a compreensão da situação problema. Portanto, as atividades devem dar prioridade à identificação e diferenciação dos tipos de enunciados, à identificação dos dados do problema e, principalmente, às relações entre esses dados (VASCONCELOS, 2003, p. 70).

É fundamental, segundo Vasconcelos (2003), o reconhecimento da existência de uma variedade de estruturas de problemas, assim como analisar as relações envolvidas, as operações de pensamento e os procedimentos necessários para resolver cada classe de problema. Por isto, é importante que o aluno tome conhecimento de uma variedade de situações, sem que se exija dele apenas a repetição de um mesmo tipo de raciocínio.

Segundo Vasconcelos (2003), as dificuldades dos alunos diante dos problemas de estruturas aditivas, surgem a partir da 1ª série (ou 2º ano) do Ensino Fundamental. Ela enfatizou alguns aspectos que caracterizam o ensino deste conteúdo, que são:

1. A ênfase excessiva no cálculo numérico necessário para a resolução;

2. O trabalho com “palavras chave” como regra para que a criança identifique a operação a ser utilizada;

3. A não preocupação com a compreensão do enunciado do problema;

4. O fato de não procurar identificar e analisar as diferenças entre os diversos tipos de problemas;

Estes aspectos se mostrarão presentes em todas as pesquisas, feitas elas em Estados diferentes do Brasil, assim como em outros países como nos Estados Unidos (CARPENTER e MOSER, 1982), França (VERGNAUD, 1982), dentre outros.

Borba e Santos (1997) fizeram um estudo com 17 alunos da 3ª série de uma escola particular da cidade do Recife, com 6 questões e 16 problemas de estrutura aditiva, seguindo, dentre outras, a classificação de Carpenter e Moser (1982), apresentada no subtópico anterior. Elas subdividiram os erros em duas naturezas:

- Eixo devido a incompreensão das relações implícitas na estrutura do problema.

- Eixo devido aos procedimentos incorretos quando do uso do algoritmo.

Quanto as dificuldades destas crianças mediante aos problemas de estrutura aditiva proposto por Carpenter e Moser (1982), foram referentes às seguintes categorias (BORBA e SANTOS, 1997):

- Comparação:

- Quantidade maior desconhecida (termo “a menos”);
- Quantidade menor desconhecida (termo “a mais”);
- Diferença desconhecida (termo “a mais”);

- Mudança:

- Série inicial desconhecida (situação de decréscimo);
- Transformação desconhecida (situação de acréscimo).

Constatou-se que alguns destes problemas teve o resultado influenciado pela semântica do enunciado. Não compreendendo as relações implícitas destes problemas, as crianças erraram o cálculo relacional e conseqüentemente deram resultados indevidos à questão.

Os três problemas em que ocorreram o maior percentual de erro relacional foram os seguintes:

Problema	**Classificação**	**Erro (%)**
9. Joca tem 26 lápis de cor. Lúcia tem 18 lápis de cor. Quantos lápis Joca têm a mais do que Lúcia?	Comparação – diferença desconhecida – termo “a mais”	64,7
17. Bruno tinha alguns carrinhos. Ele deu 28 para seu irmão menor. Ele tem agora 53 carrinhos. Quantos ele tinha antes?	Mudança – série inicial desconhecida – situação de decréscimo	58,8
19. Gustavo tem 67 selos. Ele tem 23 a menos que Tiago. Quantos selos Tiago têm?	Comparação – quantidade maior desconhecida – termo “a menos”	82,4

Tabela 1: Problemas que tiveram o maior percentual de erro relacional, na pesquisa de Borba e Santos (1997).

Quanto ao erro no cálculo numérico, de todas as 22 operações que foram executadas, houve duas que tiveram o percentual de erro acima de 50% (ambas apresentaram 65% de erros). Estas foram as que tinham como estrutura aditiva: subtração com reserva (523 – 198) e a subtração com reserva e zero (607 – 375).

Borba e Santos (1997) concluíram que a maior parte desses erros numéricos ocorreu na subtração, sendo estes de duas naturezas: Incompreensão da reserva e troca de termos (minuendo e subtraendo).

Enfocando as noções da teoria dos Campos Conceituais e os procedimentos de cálculos de adição e subtração, Carraher, Carraher e Schliemann (2006), Magina (2001), Fayol (1996) e Parra (1996) partem da premissa de que a escola não é a única fonte de conhecimentos matemáticos. Este pode ser processado na rua, na família ou em outros grupos. O contato com o mundo leva a criança a aprender maneiras de representar a realidade, a estabelecer relações e criar modelos matemáticos próprios.

Carraher e Schliemann (1983) realizaram um estudo com 50 crianças, com idades entre sete e treze anos, buscando identificar as estratégias utilizadas por estas crianças para a resolver as questões apresentadas, referentes às estruturas aditivas.

Elas concluíram, através de análises feitas com os materiais colhidos, que, muitas vezes, não eram as estratégias e algoritmos ensinados na escola os escolhidos pelos alunos para resolver as questões, optando estes pelos seus conhecimentos prévios, ou melhor, pelo conhecimento apreendido fora da sala de aula.

Ou seja, o essencial seria trabalhar com os saberes matemáticos prévios dos alunos, para, a partir daí, fazê-lo avançar. É este o grande desafio: descobrir as características do conhecimento que os alunos carregam consigo e trazem para sala de aula, os conceitos e procedimentos por eles usados, em vez de ficar apenas tentando moldá-los à estrutura escolar. É o pensar junto com eles em busca de uma melhor solução, pois os métodos apreendidos fora da escola podem ser úteis até certo nível de questão. Depois, é preciso ir além. Aí está a oportunidade do professor apresentar a este aluno os saberes da “matemática universal” (CARVALHO, *apud* SILVA, 2006).

Carvalho sugere formas de possibilitar estes avanços.

> 1. Os conceitos e procedimentos matemáticos que os indivíduos utilizam no dia-a-dia são restritos a circunstâncias práticas, portanto propiciam a construção de instrumentos de mediação contextualizados na situação, não se transformando em amplificadores culturais. Nessas situações as pessoas não precisam incluir a descrição desses procedimentos na fala comunicativa. Quando o professor solicita que o aluno descreva, ele terá que tomar consciência das propriedades implícitas dos instrumentos matemáticos que usa como mediadores, tornando-os mais descontextualizados da situação que o gerou

> 2. A elaboração da descrição do procedimento matemático pressupõe a construção de uma linguagem que aos poucos, a partir da interação com os diferentes interlocutores, vai se aproximando da linguagem matemática convencional. Esta transformação da linguagem exteriorizada produz uma mudança de qualidade nos instrumentos matemáticos que o indivíduo tem exteriorizado, pois se tornam menos dependentes das circunstâncias concretas em que foram gerados. Um momento desta mesma atividade é o registro gráfico que, além de ser o produto exteriorizado das ações mentais, as torna independentes dos gestos e expressões faciais que acompanham a comunicação oral e (...) converte-se em linguagem universal. (CARVALHO, *apud* SILVA, 2006, p 74-75).

Isto se percebe no estudo feito por Carraher, Carraher e Schliemann (2006) com 16 crianças entre 8 e 13 anos, da terceira série. Cada criança foi entrevistada individualmente e todos os problemas foram também apresentados oralmente, tendo a criança papel e lápis à disposição. Os problemas aritméticos foram apresentados em três tipos de situações:

1) Simulação de vendas – eram colocados sobre a mesa os objetos referente ao enunciado do problema, a criança simulava o papel de comprador e o pesquisador o de vendedor;

2) Problemas verbais com pequenas estórias – similares aos de Vergnaud (1982);

3) Como exercícios de computação – envolvia números sem qualquer referência a objetos do mundo real.

As crianças obtiveram resultados melhores nas vendas simuladas e nos problemas verbais (matemática oral) do que no algoritmo formal (exercício de computação). O cálculo oral foi a maior fonte de acerto: Fez com que o aluno refletisse melhor, repensando a resposta dada, ao perceber possíveis disparates. Já com os problemas escritos (matemática escrita), o aluno se confundia no algoritmo, sem refletir sobre seu erro, pois a criança trabalha com símbolos e usa-os automaticamente. Eles não possuem significados para ela, podendo obter resultados absurdos, sem se darem conta disto.

> Este tipo de procedimento leva a criança a focalizar sua atenção nos símbolos escritos, perdendo, assim, tanto o significado das transações que estão sendo quantificado, como o significado dos algarismos dentro do sistema de quantificação. Esta perda de significado parece explicar a facilidade com que a criança aceita resultados absurdos, como resto de

> uma subtração maior que o minuendo, resposta que é prontamente rejeitada quando a criança considera o significado implícito na computação. (CARRAHER, CARRAHER e SCHLIEMANN, 2006, p. 65)

É o que ocorre com um dos alunos que, ao resolver o algoritmo “200 – 35” e encontrar como resposta 235, se dá por satisfeito. Todavia, quando o interlocutor intervém na resposta, contextualizando o problema: “Você compra uma coisa e ela custa 35. Você dá duzentos e eu lhe dou os duzentos de volta e mais trinta e cinco?” (2006, p.64), o aluno rapidamente percebe o erro, executando mentalmente o cálculo e dando a resposta correta. Os pesquisadores observaram que “A presença do zero facilita a resolução oral dos problemas, ao contrário do que acontece com o cálculo escrito” (2006, p. 63). Pois, na matemática oral a ausência de dezenas ou unidades, como no exemplo acima (200 – 35) não leva o aluno a operar sobre o zero. O número é visto como 200 e não como 2 centenas, zero dezenas e zero unidades, em que o zero precisa ser explicitado.

Carraher, Carraher e Schliemann (2006) também analisaram cinco estudantes entre 9 e 15 anos, com nível de escolaridade variando entre 3ª e 8ª série, que trabalhavam como vendedoras. Foram respondidas 63 questões de matemática em um Teste Informal e 99 em um Teste Formal, em que o examinador pedia para o sujeito da pesquisa fazer as contas no papel.

No teste informal, eram-lhes propostos problemas de matemática relacionados ao contexto em que estavam inseridas, obtendo respostas verbais, sendo elas gravadas. Após esta etapa, era recolhida uma amostra dos problemas resolvidos por eles para compor o teste formal.

No teste formal havia:

1) Operações aritméticas descontextualizadas a serem resolvidas;
2) Problemas escolares.

Nos dois tipos, foram utilizados os mesmo números que o sujeito já havia operado, no teste informal, sendo acrescidas algumas variações.

“Os resultados indicam uma decisiva influência do contexto sobre a solução de problemas de matemática”. (2006, p. 34). No geral, dos 63 problemas no Teste Informal, 98,2% foram respondidos corretamente, enquanto no Teste Formal obteve-se a seguinte percentagem de acerto: 36,8% nas operações aritméticas e 73,7% nos problemas. Os sujeitos desta pesquisa demonstraram possuir a compreensão do sistema numérico, sendo capaz de operar de maneira eficaz em contextos naturais.

Foram também feita algumas pesquisas com jovens e adultos que regressaram à sala de aula, após alguns anos, com o intuito de dar início aos estudos ou obter a formação escolar interrompida, constituindo as turmas de EJA (Educação Jovens e Adultos). A discrepância entre a matemática da vida e a matemática da escola, como classifica Carraher, Carraher e Schiliemann (2006), chamou a atenção de alguns pesquisadores, que optaram por averiguar os conceitos matemáticos constituídos através da experiência destes jovens e adultos trabalhadores.

Há mais de vinte anos, este tipo de estudante tem atraído a atenção de diversos pesquisadores, devido às dificuldades enfrentadas por eles que optaram em voltar a estudar, deparando-se com uma educação infantilizada, totalmente alheia à sua realidade.

> O adulto está inserido no mundo do trabalho e das relações interpessoais trazendo consigo uma longa história, experiências e conhecimentos acumulados. Em relação a situações de aprendizagem, as peculiaridades dessa etapa de vida fazem com que traga consigo diferentes habilidades e dificuldades em comparação com a criança e provavelmente maior capacidade de reflexão sobre o conhecimento e sobre os próprios processos de aprendizagem (OLIVEIRA, 1999, p.60).

As pesquisas sobre resolução de problemas aritméticos que antes eram voltadas apenas para o público infantil, tendo com inspiração inicial os quatro estágios de desenvolvimento de Piaget (sensório motor, pré-operatório, operatório concreto e operatório formal), tiveram seus horizontes ampliados ao incluir jovens e adultos trabalhadores.

Schliemann (1998) trabalhou com resolução de problemas ligados à prática de marcenaria, tendo dois parâmetros: Um grupo formado por 15 adultos com 0 até 6 anos de escolaridade, os marceneiros, que aprenderam através do “Teorema em Ação”, ou seja, na informalidade da prática, e 28 estudantes, que ela chama de aprendizes do curso de Marcenaria, de uma escola pública do Recife.

Foi pedido para cada um destes sujeitos calcularem a quantidade de madeira necessária para construir cinco camas, conforme as dimensões apresentadas no desenho a eles entregue.

Dentre as analises feitas em respeito aos cálculos, algo chama a atenção: os profissionais procuravam respostas que fossem viáveis, apresentando até as peças existentes no mercado para solucionar os problemas, enquanto os aprendizes tentavam resolver o problema como se fosse mais uma tarefa de sala, indo em busca de uma resposta única, independente de sua viabilidade.

Com isto Schliemann constatou que a transferência da matemática formal para a prática não ocorreu entre os aprendizes de marcenaria, sugerindo e apontando, com isto, um dos principais preceitos da EJA: trabalhar mais com situações problemas, que reflitam a realidade, intensificando este elo entre a formalidade e a prática.

Estes tipos de estudos feitos em turmas de EJA, com pessoas que não tiveram oportunidade de freqüentar a escola ou não conseguiram terminar o ensino básico, tornam evidentes que, mesmo estas pessoas não tendo acesso à matemática formal, possuem conhecimento matemático construído em meio a exercício profissional. A sobrevivência ensinou-os a pôr a matemática em prática, e quando o professor consegue fazer esta ponte entre a matemática da vida e a matemática da escola (CARRAHER, CARRAHER e SCHILIEMANN, 2006) o progresso passa a ser algo evidente.

Barreto (2002) decidiu focar seus estudos em alunos que estão no último ano do fundamental (8ª série ou 9º ano), concluindo, em suas pesquisas que estes alunos ainda apresentam diversas falhas de concepção e revelando que eles ainda não têm o domínio dos conceitos necessários que possibilitem a compreensão plena dos problemas aditivos.

Nesta pesquisa, foi demonstrado que erros cometidos nas séries anteriores são reproduzidos na 8ª série, tais como: alguns alunos considerarem fundamental para encontrar a solução de o problema conhecer as quantidades iniciais, tendo dificuldade quando não a identificam; a dificuldade diante do algoritmo da subtração e principalmente quanto ao uso do zero que segundo Barreto (2002) “... ainda é um tabu para os alunos”.

Ruiz e Nascimento (1993) fizeram um estudo com alunos do 6º ao 9º ano (5ª a 8ª série) do Ensino Fundamental de Escolas Públicas, sobre o desempenho destes na resolução de operações de subtração, analisando também, como Barreto (2002), os tipos de erros cometidos. O método consistiu na aplicação de 2 provas, cada uma com 11 itens relativos à subtração. Submeteram-se ao teste 213 alunos de duas escolas públicas, sendo uma diurna e outra noturna.

Ruiz e Nascimento (1993) concluíram que os alunos demonstram conhecimentos apenas parciais do algoritmo de subtração, quando as operações apresentam recurso. Os alunos continuam utilizando os mesmos processos de resolução de subtração que usavam desde o Ensino Fundamental I (2º ao 5º ano, ou 1ª a 4ª série), generalizando o uso de certas regras e findando por trabalhar com algarismos em ordem isolada, sem levar em conta a quantidade. Aplicam o seguinte raciocínio: "só posso tirar do maior o menor", demonstrando com isto o desconhecimento de algumas propriedades existentes neste campo conceitual de estruturas aditivas.

Eles observaram que o zero representa uma das grandes dificuldades no momento de resolução da subtração. O zero, para os alunos investigados, possui significados diferentes, dependendo da posição que ocupa na operação. Segundo Ruiz e Nascimento (1993), o zero ora era considerado como zero, ora como dez.

As operações com recurso que continham zero em diferentes posições, tanto no minuendo quando no subtraendo, foram as que tiveram o maior índice de erros, variando de 41,9% a 61,2%. As operações que tiveram o maior percentual de erros foram as seguintes:

Operação	Tipos de subtrações	Erro (%)
124 – 68	Com reserva	61,2
702 – 307	Com reserva e com zero no minuendo e subtraendo	60,9
445 – 290	Com reserva e zero no subtraendo	59,9

Tabela 2: Operações aditivas que tiveram o maior percentual de erro, na pesquisa de Ruiz e Nascimento (1993).

Ruiz (1993), através de seus estudos, concluiu que a subtração, entre as quatro operações básicas é a de mais difícil domínio por parte dos alunos.

Bertini e Passos (2007) fizeram um trabalho com 64 alunos, entre 9 e 13 anos da 3ª série (4º ano), de uma escola da rede pública de São Paulo, cujo enfoque estava nas dificuldades apresentadas por estes alunos na aprendizagem da adição e da subtração com números naturais.

Elas categorizaram sete tipos de erros:

1. Reprodução errada da proposta – Ao "armar" a conta, copiam os números errados ou "armam" as contas corretamente, mas confundem a operação a ser realizada.

2. Erro na contagem – Erra ao efetuar a contagem de uma das colunas. Segundo Bertini e Passos (2007), a contagem é feita pela maioria dos alunos contando nos dedos da mão. Portanto, quando o resultado da soma da coluna ultrapassa dez ou no caso da subtração quando, devido às trocas, o número do qual se deve subtrair é maior que dez, os números não podem ser representados nas mãos, que se constituem na "ferramenta" de cálculo dos alunos, ocorrendo erros.

3. Erro na organização espacial – por não compreenderem os alunos não organizam de maneira correta as colunas da unidade, dezena, centena, podendo somar unidades com dezenas, por exemplo.

4. Erro ao somar ou subtrair o zero – Os alunos acertam as operações aditivas. Todavia, quando estas envolvem o zero, iniciam-se os erros. Tanto na adição quanto na subtração, a coluna que possui zero tem como resposta o próprio zero.

5. Erro ao utilizar reagrupamentos – É o erro mais frequente (BERTINI e PASSOS, 2007), principalmente na subtração, e tem sua origem na falta de compreensão do sistema de numeração decimal.

6. Operação invertida – Caso específico da subtração. Ocorre quando o minuendo apresenta números menores que o subtraendo. O aluno efetua "subtraendo menos minuendo".

7. Erro na compensação – Na utilização desse algoritmo os alunos erram ao "emprestar" e "devolver".

Bertini e Passos (2007) concluíram que as principais dificuldades apresentadas pelos alunos foram geradas pela mecanização dos conteúdos, tanto na resolução de algoritmos como na resolução de problema.

Os estudos acima mencionados e a teoria dos campos conceituais proposta por Gérard Vergnaud (1982) constituem o aporte teórico-metodológico para a elaboração da proposta metodológica do nosso estudo, assim como a análise dos dados, como será apresentada nos próximos capítulos do trabalho.

Todavia, vale ressaltar que, apesar deste referencial teórico ter sido o escolhido para nortear proposição estudo, este não é o único que analisa o processo de resolução de problemas matemáticos. No livro *How to solve it* (1945), traduzido para o português como “A arte de resolver problemas*”,* George Polya, matemático húngaro, dá a idéia de classificar os problemas não pelo seu objeto, mas sim pelo seu método de solução, sendo, com isto, uma obra inovadora e investigada até os dias de hoje. Na citação abaixo, nota-se a fascinação de Polya pela resolução de problema e pela preparação do estudante para este procedimento:

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda vida, a sua marca na mente e no caráter. (POLYA, prefácio da primeira edição)

Segundo Polya (2006), de nada vai adiantar o estudante iniciar a resolução de um problema sem tê-lo compreendido e também se não desejar resolvê-lo. Para ele, diante de um problema, é preciso que haja compreensão e interesse por parte de quem o resolverá*,* pois o caminho percorrido da compreensão até a resolução pode ser longo e tortuoso, e resolver problemas não é algo simples, como já foi visto neste capítulo. Após alguns estudos, Polya (2006) constatou que existem quatro etapas na resolução de um problema, são elas: *1º Compreensão do problema; 2º Estabelecimento de um plano; 3º Execução do plano; 4º Retrospecto.*

Numa tentativa de estabelecer uma possível relação entre as propostas de Polya e Vergnaud, poderíamos propor que as duas primeiras etapas de Polya (*compreensão do problema e o estabelecimento de um plano*), que é algo mais subjetivo e envolve uma "visita" aos problemas correlatos (conhecimentos prévios), estariam relacionadas ao que Vergnaud denomina *cálculo relacional*. A terceira etapa de Polya, que é a *execução do plano,* poderia ser relacionada ao que Vergnaud chamou de *cálculo numérico*, que é a parte objetiva de colocar em prática os cálculos do problema.

No próximo capítulo será apresentada a metodologia do estudo, onde está explicita a opção feita pelas pesquisadoras em propor uma pesquisa com o público adolescente de EJA à luz do referencial teórico vergnausiano.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA

Neste capítulo, apresentaremos os procedimentos metodológicos que nortearam nossa pesquisa, assim como os sujeitos investigados e a abordagem utilizada para analisar os dados colhidos.

3.1. SUJEITOS PARTICIPANTES

Participaram de nossa pesquisa **nove alunos**, todos eles adolescentes da **4ª fase da Educação Jovens e Adultos (EJA),** correspondente ao 8º e 9º ano no Ensino Fundamental, no **turno diurno** de uma escola pertencente à **rede pública Estadual de Pernambuco**, situada no bairro do Rosarinho, na cidade de Recife.

Optamos por alunos de EJA, por estes apresentarem muitas dificuldades em disciplinas, tais como Matemática. Nesta escola em que a pesquisa foi realizada, constatou-se que os alunos adolescentes são inseridos em turmas de EJA por estarem fora de faixa etária, e foram vindos de uma seqüência de reprovações sofridas nas quatro últimas séries ou anos do Ensino Fundamental (5ª, 6ª, 7ª e 8ª série, ou 6º, 7º, 8º e 9º ano).

A escolha em analisar problemas aritméticos aditivos ocorreu após uma sondagem que foi realizada nas turmas de EJA em que a autora desta dissertação era a professora de matemática no ano de 2008. O objetivo desta sondagem foi verificar os conhecimentos aritméticos sobre as quatro operações por esses alunos (adição, subtração, multiplicação e divisão) que compunham o EJA 3º fase, correspondente ao 6º e 7º ano (antiga 5ª e 6ª série). A pesquisa era composta por fichas contendo problemas que remeteriam os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios em aritmética, visto que todos desta turma já tinham sido reprovados na 6ª série do Ensino Fundamental ou no 7º ano, tendo sido transferido para esta turma de EJA por estarem fora de faixa. A idade mínima para os alunos ingressarem nas turmas de EJA é de 14 anos.

Ao analisar as fichas, fomos surpreendidas pelo elevado número de erros na resolução das operações aritméticas daquela turma, decidindo aplicar a sondagem também na sua turma do EJA 4ª fase. O mesmo procedimento foi repetido com os alunos dessa outra turma, e o número de erros se manteve elevado. Este desempenho dos alunos nessas duas turmas de EJA, 3ª e 4ª fase, levou a reflexão sobre a defasagem de conhecimentos matemáticos que os alunos apresentavam em relação ao que é exigido nestas séries nos programas curriculares. O que nos chamou atenção foi que alunos com mais de 14 anos cursando séries equivalentes a 5ª e 6ª (6º e 7º ano) – EJA 3ª fase, e a 7ª e 8ª série (8º e 9º ano) – EJA 4ª fase, não dominavam o campo conceitual das estruturas aditivas, após tantos anos na escola.

Esta sondagem foi constituída por duas fichas: uma contendo 14 problemas e a outra contendo 9 operações. Os problemas envolviam as quatro operações básicas. Os problemas de estrutura aditiva foram elaborados a partir da classificação sugerida por Vergnaud (1982) e Carpenter e Moser (1982), sendo adotadas as nomenclaturas do último, com problemas envolvendo: mudança, combinação, comparação e igualização. Os problemas de multiplicação sugeriam a idéia de adição de parcelas iguais e raciocínio combinatório, e os problemas de divisão envolviam as idéias de partição e quotição. À medida que os alunos iam terminando esta primeira ficha, recebiam uma segunda ficha, em que as operações já estavam "armadas" para serem resolvidas. A análise desta sondagem consistiu apenas em quantificar o percentual de acertos, erros e em branco, e foi apresentada no 2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEMAT), em 2008 (Queiroz e Lins Lessa, 2008).

Como os tipos de erros não foram analisados na pesquisa Queiroz e Lins Lessa (2008), e devido o percentual de erros nos problemas com estruturas aditivas e nas operações de adição e subtração ser elevado (em torno de 56%, de acordo com esta pesquisa), decidimos investigá-los com o intuito de identificar a natureza dessas dificuldades em torno dessas operações, procurando analisar tanto o cálculo numérico quanto o cálculo relacional no campo das estruturas aditivas, constituindo-se assim no objeto de estudo desta pesquisa.

Nesta direção, optamos por aplicar problemas e contas do tipo "arme e efetue" no campo das estruturas aditivas, para ampliar os estudos neste campo de investigação, sendo agora na modalidade de ensino EJA. Muitos estudos já foram realizados tanto no Brasil quanto em outros países, neste campo conceitual (VERGNAUD, 1982), focalizando o cálculo relacional e o cálculo numérico, mas poucos investigaram alunos adolescentes, na modalidade de ensino de jovens e adultos.

A escolha por uma **turma de EJA, 4ª fase**, se deu pelo fato dos alunos estarem no seu último ano de escolaridade fundamental. Com isto, desejamos avaliar o perfil dos alunos adolescentes desta instituição pública que estão se preparando para sua próxima etapa educativa: cursar o Ensino Médio. Ou seja, esses alunos deveriam dominar os conhecimentos básicos em Matemática para progredir ou avançar em seus estudos.

3.2. CONTEXTO DA PESQUISA: CARACTERIZANDO A ESCOLA PÚBLICA ESTADUAL, A SALA DE AULA DE EJA E O PROFESSOR.

A EJA, como foi dito no capítulo 1 desta pesquisa beneficia muitos que não tiveram oportunidade de iniciar ou concluir seus estudos. É um recurso de reparação e não de solução. Sua função é de dar cobertura aqueles jovens e adultos compostos, na maior parte, por trabalhadores. O público que compõe o período noturno da mesma escola e que não foi o por nós investigado é formado em sua maior parte por alunos que trabalham como empregadas domésticas, babás, porteiros, motoristas, marceneiros, vigias, seguranças, dentre outras funções. Eles trabalham geralmente nas proximidades da escola.

Este turno noturno é composto, em sua maior parte, por turmas de EJA. Esta modalidade de ensino foi incorporada em menos de seis anos na instituição, neste turno, que antes tinha séries do ensino regular, atraindo um público maior de trabalhadores. Ali além do horário noturno, pode concluir seus estudos em um programa de menos duração. Os professores, a princípio, recebiam livros direcionados para este novo tipo de público, que já possuem o conhecimento empírico nas disciplinas curriculares, procurando, com isto, mesclá-lo com o novo conhecimento. Neste turno, os alunos as seguintes opções:

Ensino Fundamental:

EJA 2ª fase – equivalente ao 4º e 5º ano (3ª e 4ª série).

EJA 3ª fase – equivalente ao 6º e 7º ano (5ª e 6ª série).

EJA 4ª fase – equivalente ao 8º e 9º ano (7ª e 8ª série).

Ensino Médio:

EJA 1ª fase – equivalente ao 1º ano e parte do 2º ano.

EJA 2ª fase – equivalente a continuação do 2º ano e o 3º ano.

Além destas opções, existe o 3º ano do Ensino Médio regular e o atual “Projeto Avançar”, em que, no período de tempo de 18 meses, os alunos concluem o Ensino Médio.

O turno diurno, em que está inserida a turma de nossa pesquisa, tem todas as séries do ensino regular, composta pelo ensino fundamental 2 (6º ano ao 9º ano ou 5ª à 8ª série) e pelo ensino médio (1º, 2º e 3º ano) e há apenas dois anos foram acrescidas duas turmas de EJA do Ensino Fundamental:

EJA 3ª fase – equivalente ao 6º e 7º ano (5ª e 6ª série).

EJA 4ª fase – equivalente ao 8º e 9º ano (7ª e 8ª série).

Diferente do turno noturno, estas duas turmas de EJA diurna são compostas por alunos adolescentes que nunca saíram da escola e possuem, em seu currículo escolar, uma série de repetências referentes aos anos do ensino fundamental. Ou seja, sua composição é atípica, embora cada vez mais comum, predominando a questão de faixa etária.

3.3. CONSTRUÇÃO DOS DADOS

Os dados foram construídos a partir da aplicação de duas fichas com problemas e operações em sala de aula, coletivamente, e em diferentes momentos. Duas aulas de matemáticas geminadas, num total de 100 minutos, foram cedidas pela professora de matemática, que permaneceu na sala enquanto a pesquisadora deste estudo aplicava as fichas. As professoras puderam observar ao lerem a ficha 1, muitos alunos acharam os problemas fáceis, expressando verbalmente. Contudo, aos poucos iam se concentrando, o mesmo ocorria quando se deparavam com os problemas que requeriam mais raciocínio. Os alunos demonstraram interesse oscilante entre concentração e agitação de alguns, em diversos instantes, desconcentrando o grupo. O mesmo ocorreu quando foi aplicado a ficha 2.

Os alunos que terminavam tinham que permanecer na sala de aula até o toque que marcava o fim da aula, mas não ficavam em silêncio, numa atitude típica de adolescente. Todavia, não foi percebido o auxílio ou intervenção destes alunos aos que ainda não havia terminado as fichas.

A seguir serão descritas as etapas de investigação para a construção dos dados do estudo em questão:

3.3.1. Etapas da investigação

Inicialmente foi realizado um estudo piloto com o objetivo de sondar os conhecimentos aritméticos dos alunos da EJA 4ª fase. Este estudo piloto foi constituído por dois momentos, onde foram aplicadas pela professora da turma fichas contendo "contas armadas" de adição e subtração. O intuito deste foi o de fazer uma sondagem a respeito do sujeito de nossa pesquisa.

Na tabela a seguir encontram-se as questões e seus respectivos percentuais de acertos e erros:

Questões	Operação Aritmética	Acerto (%)	Erro (%)
1) 327 + 238 = ?	adição com reserva	85	15
2) 405 + 196 = ?	adição com reserva e com zero	100	0
3) 264 + 503 = ?	adição sem reserva e com zero	92	8
4) 896 – 574 = ?	subtração sem reserva	100	0
5) 358 – 209 = ?	**subtração com reserva e com zero**	**38**	**62**
6) 640 – 429 = ?	**subtração com reserva e com zero na unidade**	**46**	**54**
7) 306 – 175 = ?	**subtração com reserva e com zero na dezena**	**38**	**62**
8) 500 – 248 = ?	**subtração com reserva e com zero na dezena e na unidade**	**23**	**77**

Tabela 3: Percentuais de acerto e erro da primeira ficha do estudo piloto.

Após a análise de acerto e erro dessas contas, como consta na tabela acima, levantou-se a hipótese de que os erros poderiam ter acontecido em virtude da ordem dos números, ou seja, todas as operações envolviam centenas. Observa-se que os percentuais de erros aumentavam quando os alunos se deparavam com a operação de subtração envolvendo reserva e zero. Em virtude dessa hipótese e devido ao alto índice de erro, após um intervalo de 15 dias, foi aplicada outra ficha com as mesmas operações e dificuldades aritméticas (com reserva; com zero), mas com números na ordem das dezenas. Nesta nova ficha foram acrescentadas duas operações de subtração com reserva, sem a utilização do zero, envolvendo centenas, que não constaram na ficha anterior (as questões 7 e 8). Veja tabela a seguir:

Questões	Operação Aritmética	Acerto (%)	Erro (%)
1) 27 + 38 = ?	adição com reserva	100	0
2) 40 +79 = ?	adição com reserva e com zero	100	0
3) 64 + 30 = ?	adição sem reserva e com zero	100	0
4) 89 – 57 = ?	subtração sem reserva	100	0
5) 56 – 39 = ?	subtração com reserva	63	37
6) 40 – 29 = ?	**subtração com reserva e com zero**	**88**	**12**
7) 326 – 175 = ?	**subtração com reserva na dezena**	**88**	**12**
8) 512 – 248 = ?	**subtração com reserva na dezena e na unidade**	**100**	**0**

Tabela 4: Percentuais de acerto e erro da segunda ficha do estudo piloto.

Quando a pesquisadora perguntou à professora sobre a reação dos alunos diante desta segunda ficha, ela mencionou que os alunos resolveram rapidamente (em menos de dez minutos), e que acharam muito fácil. Isto pode se perceber na análise dos percentuais de acertos e erros na tabela acima, onde predomina 100% de acerto em cinco das oito questões apresentadas. Todavia, o percentual de erro apenas foi maior diante da operação de subtração envolvendo reserva (37%), como se pode ver na questão 5.

Após estes dois momentos do estudo piloto, optou-se em elaborar uma ficha com problemas baseando-se nos campos conceituais das estruturas aditivas proposta por Gérard Vergnaud (1982), mas seguindo a classificação dos tipos de problemas aditivos proposta por Carpeter e Moser (1982). Além dessa ficha contendo problemas, foi elaborada também uma ficha contendo operações de adição e subtração. Optamos por explorar a ordem da centena, em vez da dezena, em que eles obtiveram o maior índice de acertos, pois o objetivo desta pesquisa é o de identificar as dificuldades aritméticas dos jovens alunos que cursam o EJA 4ª fase de uma escola pública.

Sendo assim, o estudo contou com duas etapas de investigação organizadas da seguinte forma: **etapa 1** – o estudo piloto (com duas fichas), e **etapa 2** – análise dos problemas e operações.

A etapa 2 foi realizada em dois momentos. No primeiro momento, foi aplicada a ficha 1, referente aos problemas de estrutura aditiva. No segundo momento, foi aplicada a ficha 2, referente às operações de adição e subtração já prontas (armadas) para serem respondidas. Os mesmos números dos problemas da ficha 1 constaram na ficha 2.

Não foram utilizadas todas as classificações de Carpenter e Moser (1982), pois nosso foco durante elaboração manteve-se nas dificuldades algorítmicas. A ficha de problemas (ficha 1) foi elaborada após a ficha das contas armadas (ficha 2), que continha dez tipos de operações aritméticas, contendo uma graduação de dificuldades crescente.

O intervalo de tempo entre a aplicação das duas fichas foi de 15 dias. Alguns alunos participaram da ficha 1, mas não vieram no dia da aplicação da ficha 2. Também, tivemos alunos extra no dia da aplicação da ficha 2. Por isso, optamos por considerar os alunos que participaram das duas fichas, perfazendo um total de 9 alunos sujeitos desse estudo. Isto, devido à análise que optamos em fazer, baseada no desempenho destes sujeitos em cada uma das duas fichas, buscando com isto relações entre elas. A aplicação dessas fichas ocorreu no mês de agosto de 2009, pela pesquisadora.

No quadro a seguir, serão apresentados os tipos problemas da ficha 1 e as operações da ficha 2 aplicadas neste estudo. Assim como as possíveis estruturas aditivas para a resolução deles e as dificuldades algorítmicas. As operações apresentadas na ficha 2 estão destacadas em **negrito**.

Problemas	Tipo	Estrutura Aditiva	Operação Aritmética
1. Edu tinha 327 figurinhas, ganhou 238 figurinhas de seu pai. Com quantas figurinhas ele ficou?	Mudança	**327 + 238 = ?** resultado desconhecido	Adição com reserva
2. Luís tem 405 bolas de gude. Maria tem 196 bolas de gude. Quantas bolas de gude têm as duas juntas?	Combinação	**405 + 196 = ?** resultado desconhecido	Adição com reserva e com zero

3. Sabrina tinha uma loja que vendia brincos, mas resolveu fechá-la. Dando 264 brincos para sua irmã, ficou com 503. Quantos brincos Sabrina tinha antes?	Mudança	? – 264 = 503 série inicial desconhecida **503 + 264 = ?**	Adição sem reserva e com zero
4. Nara tinha R$ 896,00, emprestou para Fábio R$ 574,00, com quanto ela ficou?	Mudança	**896 – 574 = ?** resultado desconhecido	Subtração sem reserva
5. Dois amigos resolveram participar do rali Dakar, em modalidades diferentes, Lucas de carro e Jorge de moto. Até o momento Lucas tinha andado 348 quilômetros e Jorge 209 quilômetros. Jorge andou quantos quilômetros a menos que Lucas?	Comparação	**348 – 209 = ?** diferença desconhecida	Subtração com reserva e com zero
6. Bruno fez 640 pastéis. Ana fez 429 pastéis. Quantos pastéis Ana precisa fazer para ter a mesma quantidade que João?	Igualização	429 + ? = 640 aumento da quantidade menor **640 – 429 = ?**	Subtração com reserva e com zero na unidade
7. Toni e Carlos encheram juntos em uma semana 306 garrafas de água. Se destas Toni encheu 175 garrafas de água, quantas Carlos encheu?	Combinação	175 + ? = 306 subsérie desconhecida **306 – 175 = ?**	Subtração com reserva e com zero na dezena
8. Dona Telma tinha 248 latas de refrigerante para vender. Ela ganhou alguns de Marcão. Ela tem agora 500. Quantas latas de refrigerante dona Telma ganhou de Marcão?	Mudança	248 + ? = 500 subsérie desconhecida **500 – 248 = ?**	Subtração com reserva e com zero na dezena e na unidade
9. Beatriz e Tomé têm o mesmo peso, mas em um mês Beatriz ganhou 326 gramas e Tomé ganhou 175 gramas. Quantos gramas Beatriz precisa perder para que eles voltem a ter o mesmo peso?	Igualização	326 - ? = 175 diminuição da quantidade maior **326 – 175 = ?**	Subtração com reserva na dezena
10. Os primos Nil e Veloso moram no interior de Pernambuco, mas resolveram se encontrar em Recife. A viagem de Nil durou 512 minutos, enquanto a viagem de Veloso durou 248 minutos a menos. Quanto tempo durou a viagem de Veloso?	Comparação	512 – ? = 248 diminuição na quantidade maior **512 – 248 = ?**	Subtração com reserva na dezena e na unidade

Quadro 5: Problemas e sua estrutura algorítmica, contidos na ficha 1

3.4. CRITÉRIOS DE ANÁLISE DOS DADOS

Após a conclusão da primeira etapa, que denominamos de estudo piloto, elaboramos a etapa seguinte, que será analisada no próximo capítulo. Sendo esta etapa, separada em dois momentos (duas fichas), nas quais foram investigados os seguintes elementos:

- Na ficha 1: Cálculo relacional e o Cálculo numérico, segundo Vergnaud;

- Na ficha 2: Cálculo numérico.

- Integração das fichas: se ocorreu o mesmo erro relacionado ao cálculo numérico nas duas fichas, sendo com isto montado o perfil do aluno em relação a seus conhecimentos matemáticos aditivos.

Estas análises foram feitas sobre o material obtido após a aplicação de duas fichas, com o intuito de averiguar o conhecimento cognitivo dos alunos mediante o Campo Conceitual das Estruturas Aditivas, que iremos apresentar no capítulo seguinte.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Iniciaremos este capítulo discutindo os resultados obtidos na ficha dois, por esta analisar apenas um dos dois tipos de cálculo: o cálculo numérico. Em seguida, analisaremos a ficha um, que consta de problemas de estruturas aditivas, sendo observado o cálculo relacional, além do cálculo numérico. Traçamos um paralelo do desempenho dos sujeitos em cada uma das duas fichas, referente ao cálculo numérico, já que a operação das estruturas aditivas eram as mesmas.

Finalizando este capítulo, analisaremos as dificuldades de cada um dos problemas e operações aditivas das duas fichas, assim como os erros cometidos pelos sujeitos de nossa pesquisa.

4.1. ANÁLISE GERAL

As questões foram estruturadas da seguinte forma:

Questões	Operação Aritmética
1) 327 + 238 = ?	Adição com reserva
2) 405 + 196 = ?	Adição com reserva e com zero
3) 264 + 503 = ?	Adição sem reserva e com zero
4) 896 – 574 = ?	Subtração sem reserva
5) 358 – 209 = ?	Subtração com reserva e com zero
6) 640 – 429 = ?	Subtração com reserva e com zero na unidade
7) 306 – 175 = ?	Subtração com reserva e com zero na dezena
8) 500 – 248 = ?	Subtração com reserva e com zero na dezena e na unidade
9) 326 – 175 = ?	Subtração com reserva na dezena
10) 512 – 248 = ?	Subtração com reserva na dezena e na unidade

Quadro 6: Operações aditivas da ficha 2

O gráfico a seguir apresenta os erros e acertos dos alunos diante das operações de adição e subtração, com as suas dificuldades algorítmicas apresentadas no quadro acima.

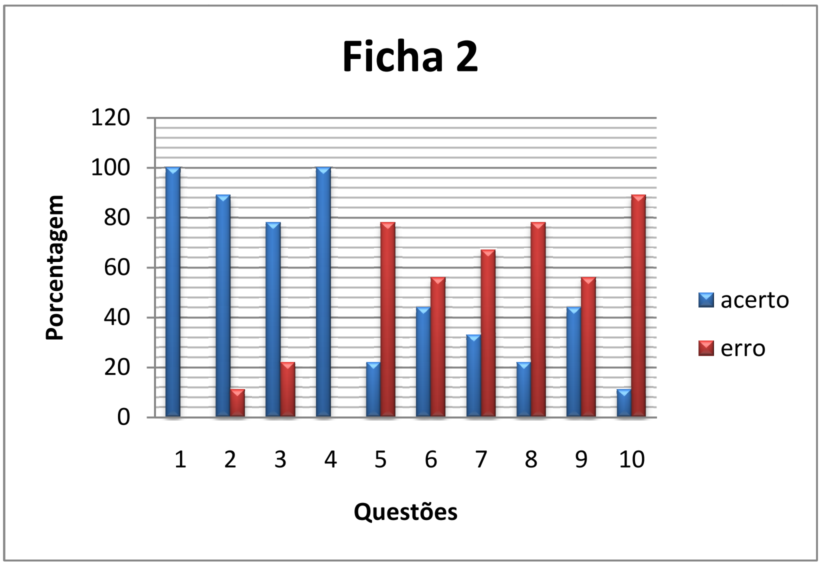


Gráfico 2: Percentual de acerto e erro dos alunos em cada uma das operações aditivas da ficha 2

O que se percebe neste gráfico é um declive no percentual de acerto a partir da questão cinco. Anterior a esta, a de menor percentual foi a 3ª questão, com quase 80% de acerto e cerca de 20% de erros. Na 5ª questão, temos o inverso do percentual obtido na 3ª questão; quase 80% de erro e apenas 20% de acerto. Tal análise explicita a dificuldade encontrada pelos alunos, relacionadas à operação de subtração com o zero.

Nas quatro primeiras operações, eles obtiveram quase 100% de acerto. Todavia, tanto na questão 2 quanto na questão 3, foi inserido o zero. Então, ocorrem os primeiros erros. Todavia, estes erros se ampliaram consideravelmente quando os alunos se depararam com as operações de subtração.

As questões 6 e 9 estão entre aquelas em que o percentual de erro foi maior que o de acerto, provavelmente porque na questão 6 o zero aparece na ordem das unidades do minuendo, e na questão 9, não aparece o algarismo zero em nenhum dos números envolvidos na operação. Tal aspecto pode ter contribuído para o aumento no percentual de acerto em relação à questão 6. Todavia, como a questão 9 trata de uma subtração com reserva, fator dificultador, o percentual de erro superou o de acerto. Mais de 56% dos alunos cometeram erros neste tipo de subtração e este tipo de erro, no procedimento algorítmico, repete-se em outras subtrações que envolvem reserva.

Ou seja, ao executaram o algoritmo (326 – 175) na ordem das unidades, os alunos fizeram 6 – 5, acertando. Na ordem das dezenas e centenas podem ter ocorrido dois tipos de erro:

- **Erro da inversão**: eles invertem o algarismo do minuendo pelo do subtraendo, fazendo o seguinte cálculo: 7 – 2, encontrando como resultado o 5.

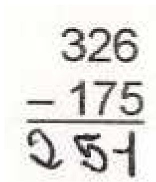


Figura 10: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvido por Wilma na questão 9 da ficha 2

- **Erro no processo de decomposição e composição:** eles decompõem uma das 3 centenas em 10 dezenas, executando 12 – 7, encontrando também 5. Todavia a decomposição ocorrida na centena é ignorada, fazendo a subtração 3 – 1, em vez de 2 – 1. Como ocorre no algoritmo abaixo:

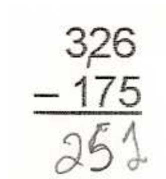


Figura 11: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvido por Petrus na questão 9 da ficha 2

Desta ficha 2, as três questões que eles obtiveram o maior percentual de erro foram as questões 5 e 8, com o percentual de erro (78%) para ambas. A questão 10 apresentou 89% de erro.

Na questão 8, eles se depararam com dois zeros em vez de um, tanto na unidade quanto na dezena do minuendo. Com isto, identificamos o erro abaixo em 44% dos alunos.

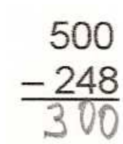


Figura 12: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvido por Isabel na questão 8 da ficha 2

Denominamos este erro de "**supremacia do zero**", pois ao surgir o zero, este é automaticamente repetido no resto, sendo os algarismos do subtraendo das colunas a eles correspondentes ignorados. Este tipo de erro é freqüente em outras questões em que aparece o valor do zero no minuendo. Todavia, na questão 5, como se vê abaixo, o zero aparece no subtraendo e a aluna o repete no subtraendo, ignorando o 5 da dezena.

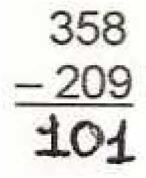


Figura 13: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvido por Wilma na questão 5 da ficha 2

Este cálculo da aluna Wilma nos chamou a atenção, pois aqui apresenta dois tipos de erro: um deles, já foi citado, é o da Supremacia do zero; O outro erro é a inversão do algarismo do minuendo com o subtraendo da unidade, ficando o cálculo 9 – 8, em vez de 8 – 9.

Nessa quinta questão, com apenas 22% de acerto, temos duas barreiras relacionadas ao algoritmo, por ser uma subtração com reserva e com o zero, mesmo este estando no subtraendo.

A questão que apresenta o menor percentual de acerto (11%) foi a 10. Isto quer dizer que apenas um aluno conseguiu acertar esta subtração com duas reservas, tanto na unidade quanto na dezena. Todavia, mesmo não aparecendo o algarismo zero, este surge durante a execução do cálculo, na decomposição, como uma aluna o fez corretamente:

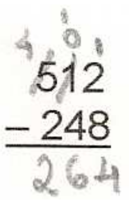


Figura 14: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvido por Marcela na questão 10 da ficha 2

Ou seja, como existe apenas uma dezena e esta é decomposta em 10 unidades, o minuendo fica com zero na dezena.

Na 10ª questão, 56% dos alunos, cometeram o “erro da Inversão”, tanto na coluna das unidades (fazendo 8 – 2), quanto na das dezenas (fazendo 4 – 1), como se ver a seguir:

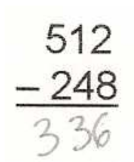


Figura 15: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvido por Breno na questão 10 da ficha 2

Passaremos agora à análise da ficha 1. A seguir, temos o gráfico relacionado aos acertos e erros cometidos da ficha um, que se refere aos problemas. O objetivo deste gráfico é apresentar uma visão geral da postura dos nove alunos, por nós investigados, a respeito dos problemas aritméticos de estrutura aditiva. Tratamos por erro qualquer falha cometida pelo aluno. Ou seja, neste grupo de erros, temos erros no cálculo relacional, assim como no cálculo numérico, e também erros construídos por cálculo relacional e numérico.

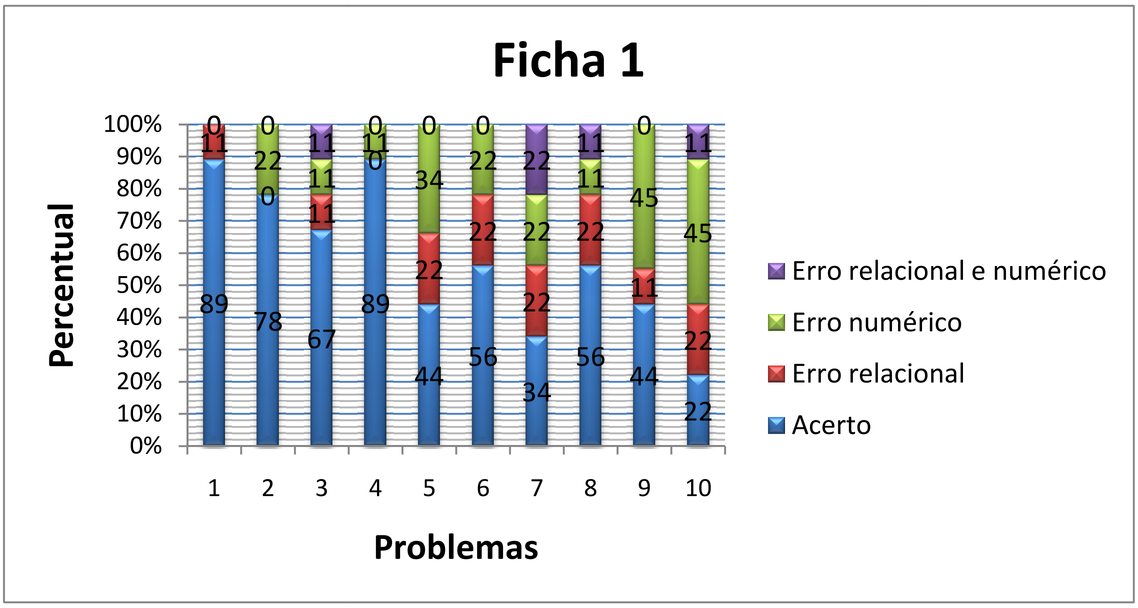


Gráfico 3: Percentual de acerto e erros (relacional, numérico ou ambos) da ficha 1

Pode-se observar que os dois problemas em que os alunos apresentaram o melhor percentual de acerto (89%) foram os de número 1 e 4, que são problemas diretos que envolvem Mudança, sendo o 1º uma adição com reserva e o 4º uma subtração sem reserva e sem zero.

O maior percentual de erros ocorreu no problema 10 (78%, no total): é um problema indireto de Combinação, em que ocorre uma diminuição da parte maior. Devido a isto, apresentam-se 33% de erros de origem relacional. Quanto ao cálculo numérico, trata-se de uma subtração com duas decomposições, tendo um percentual de 45% de erros cometidos.

Podemos dividir esta análise dos problemas (ficha 1) em três grupos de problemas:

Primeiro grupo – os que compõem os quatro primeiros problemas em que se percebe um maior percentual de acerto, estando estas barras azuis em maior destaque. Sendo os problemas 1, 2 e 4 o que Vergnaud chama de direto. No problema direto que são dadas as partes e se pede o resultado final, apenas o problema 3 é inverso, pois a série inicial é desconhecida. O cálculo que se apresenta ao aluno se depara nestes são operações envolvendo adição e uma com subtração, sem zero e sem reserva.

Segundo grupo – compõem as questões 6 e 8, em que o percentual de erro aproxima-se do percentual de acerto. Notamos, com isto, que as dificuldades começam realmente a surgir, pois o percentual de erro do grupo anterior, por ser mínimo, pode ter ocorrido também por distração. Entretanto, neste grupo, é preciso sondar que dificuldades são estas. Estes são problemas de Igualização e Mudança. Porém, neste caso, os alunos se deparam com problemas indiretos, em que é apresentado o resultado final, sendo pedida a subsérie, ou quando eles precisam comparar duas quantias, fugindo do padrão ao qual eles estão acostumados. Nestes, eles precisam raciocinar um pouco mais, em vez de apenas juntar os números, como poderiam fazer no grupo anterior.

Apresenta-se, com isto, dificuldade nas duas primeiras etapas de Polya (2006): compreender (interpretar) o problema e elaborar um plano, pois para fazê-lo eles precisam buscar algo de semelhante em seus conhecimentos prévios. Isto envolve um conjunto dos esquemas (VERGNAUD, 2000) utilizados pelos sujeitos em situações semelhantes a estas. Além desta dificuldade, quando alguns dos sujeitos conseguem resolver corretamente o cálculo relacional, se deparam com outra que é a terceira etapa de Polya, a *execução do plano*; operações aditivas de subtração, na qual se apresentam o cálculo com reserva e algarismo zero no minuendo.

Terceiro grupo – neste último grupo, o percentual de erro superou o de acerto, são os problemas 5, 7, 9 e 10, onde se observam as maiores dificuldades dos sujeitos. Neste grupo, estão inseridos problemas de Comparação, Combinação e Mudança, todos eles indireto, exigindo mais atenção e mais reflexão durante sua execução.

Deste último grupo, os que tiveram o menor percentual de acertos foram os problemas 7, que é uma combinação em que a subsérie é desconhecida, tendo apenas 34% de acerto, e o problema 10, como já foi mencionado, com apenas 22%.

Ao analisarmos as origens dos erros ocorridos, apresentados pelo gráfico da ficha 1, podemos observar que, em alguns problemas, o erro numérico se sobressaiu aos demais erros. Se não considerarmos o percentual da categoria que se refere tanto ao erro relacional quanto no numérico, assim como os percentuais de acertos dos problemas, podemos observar a comparação entre os erros de natureza numérica e de natureza relacional no gráfico abaixo:

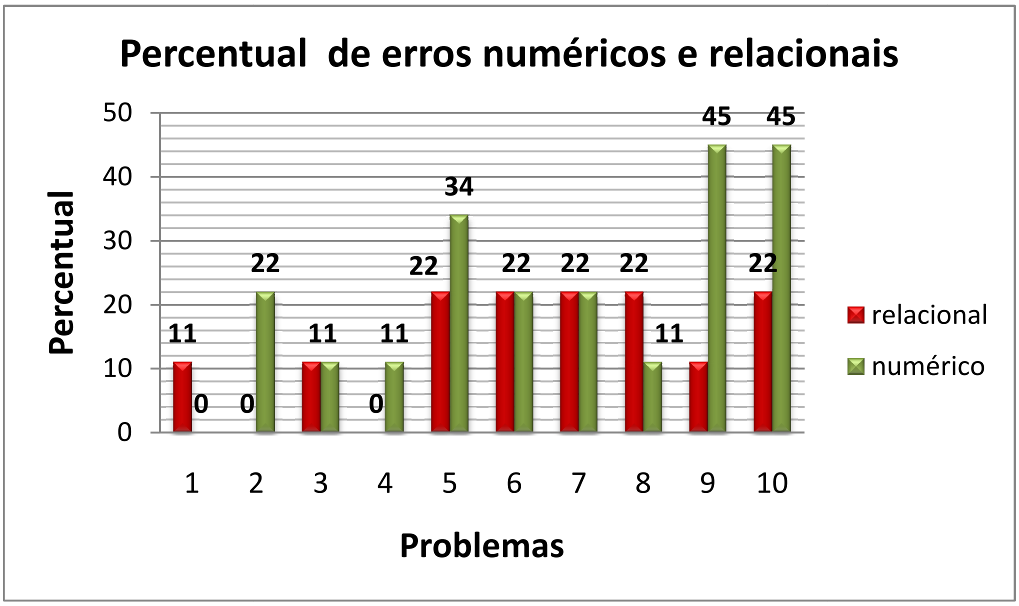


Gráfico 4: Percentual de erros numéricos e relacionais na ficha 1

Com este resultado constata-se que os sujeitos em alguns casos, compreendem o problema, mas não conseguem realizar corretamente o cálculo do algoritmo.

O maior percentual de erro do tipo numérico apresentado no gráfico 4, cometido pelos alunos de EJA adolescentes foi na questão 9 e na questão 10, que corresponde, respectivamente, a problemas do tipo *igualização* e de *comparação*, ambos com 45% de erro numérico, que se sobressaiu ao percentual de erro relacional (11% na questão 9 e 22% na questão 10). Seguido pelo problema 5, que se trata de um problema de *comparação*, tendo 34% de erro numérico e 22% de erro relacional.

Os alunos adolescentes de EJA, mesmo tendo um percentual mais reduzido de erros do tipo relacional, os maiores percentuais (22%) ocorreram nos problemas 5 (comparação, diferença desconhecida), 6 (igualização, aumento da quantidade menor), 7 (combinação, subsérie desconhecida), 8 (mudança, subsérie desconhecida) e 10 (comparação, diminuição na quantidade maior). Observa-se a dificuldade quando se está diante de um problema que envolve *comparação*, pois os dois únicos problemas deste tipo estão inseridos entre aqueles que eles mais cometeram erros relacionais.

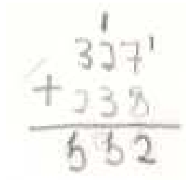
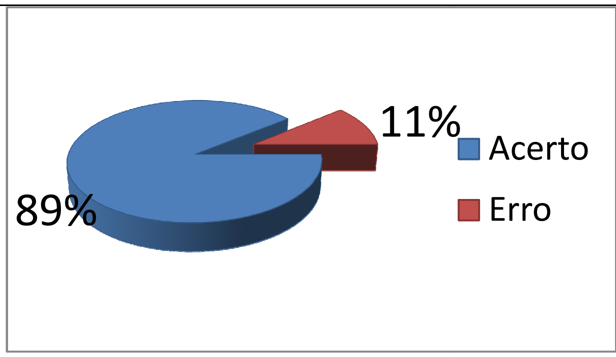
Segue-se uma análise mais focal dos problemas com os quais estes alunos se depararam. São apresentadas as dificuldades relacionais e numéricas, assim como o desempenho dos alunos mediante estas.

4.2. ANALISANDO AS DIFICULDADES DOS PROBLEMAS

Neste tópico, iremos analisar as características e dificuldades de cada um dos problemas propostos, o percentual de acertos e erros dos alunos diante dos mesmos e os tipos de erros cometidos.

Problema 1: *Edu tinha 327 figurinhas, ganhou 238 figurinhas de seu pai. Com quantas figurinhas ele ficou?*

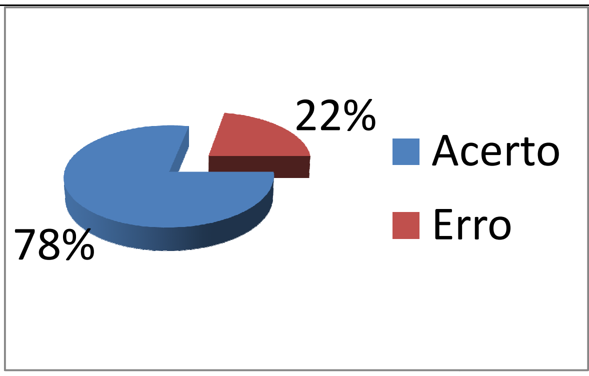
TÓPICOS	ANÁLISE
Tipo do problema	É um problema que envolve **Mudança**, numa situação de acréscimo. O termo desconhecido a ser encontrado é o resultado. A questão se refere ao personagem Edu que tinha certa quantidade de figurinha e “ganhou” outra quantidade de seu pai. O termo “ganhar” é tratado, na literatura, como uma pista lingüística que conduz o aluno a uma soma.
Estrutura Aditiva	327 + 238 = ? resultado desconhecido

Operação Aritmética	Adição com reserva.
Resultado obtido	89% dos alunos acertaram, mas 11% dos alunos apresentaram erro. Esse percentual indica que apenas um aluno errou o problema.
Análise do erro	O erro foi cometido no cálculo numérico. Como podemos ver no exemplo abaixo:  Mesmo sendo uma operação de adição com reserva na unidade, esta aluna, por alguma distração, cometeu esta falha. Na ficha dois, diante do mesmo problema ela o fez de maneira correta. 
Gráfico	

Quadro 7: Análise estrutural e percentual de acertos e erros do problema 1 da ficha 1

Problema 2: *Luís tem 405 bolas de gude. Maria tem 196 bolas de gude. Quantas bolas de gude têm as duas juntas?*

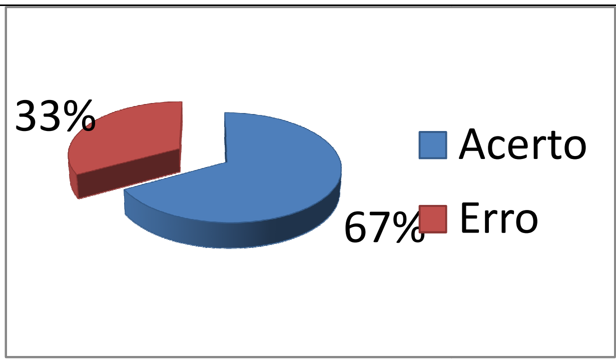
TÓPICOS	ANÁLISE
Análise da estrutura do problema	Este é um problema de **Combinação.** Duas pessoas possuem certa quantidade de objetos, e o problema pede para "juntar". Novamente o

	verbo sugere a operação a ser escolhida. Trata-se de um problema direto, em que se apresentam as partes dos personagens Luís e Maria, e se pede o todo.
Estrutura Aditiva	405 + 196 = ? resultado desconhecido
Operação Aritmética	Adição com reserva e com zero
Resultado obtido	78% dos alunos acertaram, mas 22% dos alunos apresentaram erro. Esse percentual indica que apenas dois alunos erraram o problema.
Análise do erro	O erro foi no cálculo numérico. O aparecimento do zero na casa da dezena parece ter gerado o erro no cálculo. Assim como a adição com reserva, tanto na unidade quanto na dezena, serviram de obstáculo na resolução.
Gráfico	

Quadro 8: Análise estrutural e percentual de acertos e erros do problema 2 da ficha 1

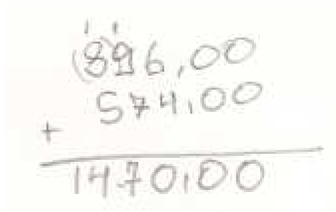
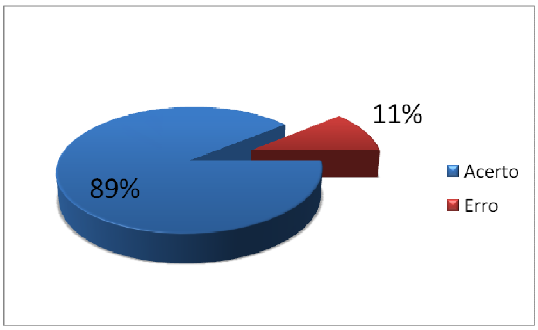
Problema 3: *Sabrina tinha uma loja que vendia brincos, mas resolveu fechá-la. Dando 264 brincos para sua irmã, ficou com 503. Quantos brincos Sabrina tinha antes?*

TÓPICOS	ANÁLISE
Tipo de problema	É um problema que envolve **Mudança**. Neste caso, a série inicial é o termo desconhecido. Trata-se de uma situação de decréscimo, onde ocorre uma diminuição da quantidade inicial desconhecida. A pergunta do problema se refere à quantidade inicial e não à quantidade final, ou seja, a questão é justamente descobrir essa quantidade inicial, em vez da quantidade final. Para descobrir essa quantidade terá que

	realizar a operação inversa.
Estrutura Aditiva	? – 264 = 503 série inicial desconhecida **503 + 264 = ?**
Operação Aritmética	Adição sem reserva e com zero
Resultado obtido	67% dos alunos acertaram, mas 33% dos alunos apresentaram erro. Esse percentual indica que apenas três dos nove alunos erraram o problema. Esses 33% que apresentaram erro foram divididos da seguinte forma: 11% erraram o cálculo relacional, 11% cometeram erro no momento da resolução do algoritmo (cálculo numérico), e 11% que cometeram os dois tipos de erros.
Análise do erro	Erro relacional: como o verbo "dar" sugere uma operação de subtração, o erro consistiu em subtrair o número menor do número maior Erro numérico: o erro parece estar relacionado com o aparecimento do zero na operação Erro relacional e numérico: o erro consistiu em realizar uma subtração com reserva com zero em vez de realizar uma adição sem reserva com zero.
Gráfico	

Quadro 9: Análise estrutural e percentual de acertos e erros do problema 3 da ficha 1

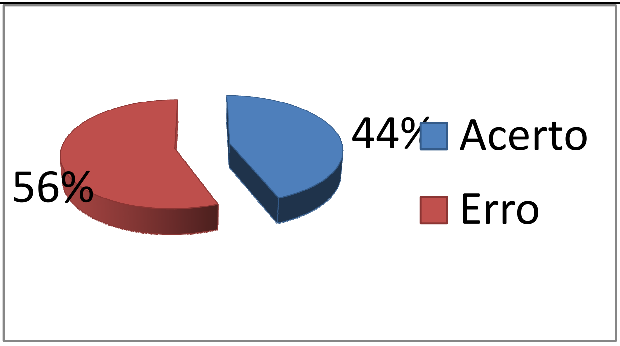
Problema 4: *Nara tinha R$ 896,00, emprestou para Fábio R$ 574,00, com quanto ela ficou?*

TÓPICOS	ANÁLISE
Estrutura do problema	É um problema que envolve **Mudança**, sendo uma situação de decréscimo, como a questão anterior, mas agora o que é desconhecido é a série final, o resultado. Trata-se de um problema direto, em que a personagem Nara tinha dada quantidade e emprestou uma certa quantidade à Fábio. Busca-se saber a quantidade final. O verbo "emprestar" sugere uma subtração, uma diminuição do valor inicial.
Estrutura Aditiva	896 – 574 = ? resultado desconhecido
Operação Aritmética	Subtração sem reserva
Resultado obtido	89% dos alunos acertaram, mas 11% dos alunos apresentaram erro. Esse percentual indica que apenas um aluno errou o problema.
Análise do erro	O erro ocorrido foi no cálculo relacional, pois o aluno optou por uma operação de adição, em vez de subtração, como o problema sugere. Executando o seguinte cálculo numérico 
Gráfico	

Quadro 10: Análise estrutural e percentual de acertos e erros do problema 4 da ficha 1

Problema 5: *Dois amigos resolveram participar do rali Dakar, em modalidades diferentes, Lucas de carro e Jorge de moto. Até o momento Lucas tinha andado 348* *quilômetros e Jorge 209 quilômetros. Jorge andou quantos quilômetros a menos que Lucas?*

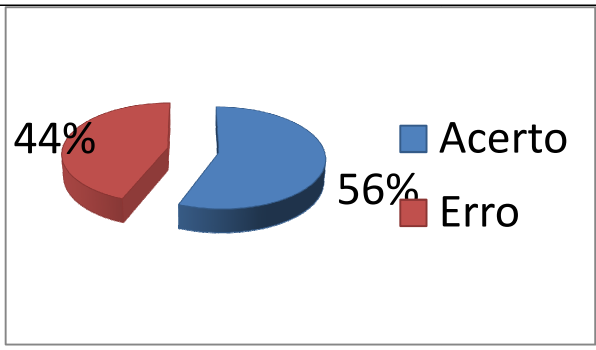
TÓPICOS	ANÁLISE
Tipo de problema	É um problema que envolve **Comparação**, e busca a diferença entre dois valores. Seu grau de dificuldade consiste na comparação de duas distâncias, e o surgimento do “a menos”, que sugere aos alunos uma subtração. Todavia, a pergunta toma Jorge como referencial, para saber quanto ele andou a menos, em vez de ter perguntado simplesmente qual a diferença entre as distâncias.
Estrutura Aditiva	348 – 209 = ? diferença desconhecida
Operação Aritmética	Subtração com reserva e com zero
Resultado obtido	Este foi um dos problemas que os alunos mais cometeram erro, ultrapassando percentual de acerto (44%). Dos 56% de erro, 22% ocorreram na escolha do cálculo (cálculo relacional), e 34% ocorram no procedimento algorítmico (cálculo numérico).
Análise do erro	Erro numérico: Trata-se de uma subtração sem reserva, mas os alunos se depararam com o zero no subtraendo (na ordem da dezena). Os erros apresentados pelos alunos parecem estar relacionados ao procedimento algorítmico em relação ao zero. Erro relacional: Como a questão trata de duas medidas e de dois personagens, alguns transformam um problema de Comparação em um problema de Combinação. Ou seja, em vez de comparar as duas medidas e encontrar a diferença entre elas (subtração), eles as combinam, juntando-as (adição).

Gráfico	

Quadro 11: Análise estrutural e percentual de acertos e erros do problema 5 da ficha 1

Problema 6: *Bruno fez 640 pastéis. Ana fez 429 pastéis. Quantos pastéis Ana precisa fazer para ter a mesma quantidade que Bruno?*

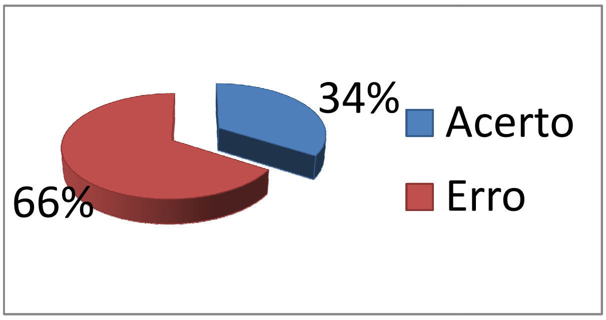
TÓPICOS	ANÁLISE
Tipo do problema	Trata-se de um problema que busca a **Igualização** de duas quantidades. Para se *igualizar* duas quantidades, antes é preciso fazer uma comparação entre elas para, em seguida, torná-las iguais. Os dois personagens, Bruno e Ana fizeram pastéis. Todavia, Bruno fez dada quantia a mais que Ana. Como a pergunta do problema focalizou Ana, então é preciso descobrir quantos pastéis ela deve fazer para se igualar à quantidade de pastéis feita por Bruno. Ou seja, trata-se de um acréscimo da quantidade menor.
Estrutura Aditiva	429 + ? = 640 aumento da quantidade menor **640 – 429 = ?**
Operação Aritmética	Subtração com reserva e com zero
Resultado obtido	56% dos alunos conseguiram acertar, enquanto 44% apresentaram erro. Destes 44%, 22% incidiram no cálculo relacional, e 22% foram no cálculo numérico.
Análise do erro	Erro numérico: A dificuldade desse cálculo é o zero no minuendo (na ordem das unidades). "*Como posso tirar algo do zero?"* Essa pergunta implícita frequente indica dificuldades em torno

	do entendimento do sistema de numeração decimal. Diante disso, alguns alunos ignoram a presença do zero, repetindo o algarismo posicional correspondente a ele no subtraendo, neste caso o nove. Erro relacional: Como cada personagem fez uma quantidade de pastéis, a pergunta da igualização é ignorada ou parece sugerir uma adição.
Gráfico	

Quadro 12: Análise estrutural e percentual de acertos e erros do problema 6 da ficha 1

Problema 7: *Toni e Carlos encheram juntos em uma semana 306 garrafas de água. Se destas Toni encheu 175 garrafas de água, quantas Carlos encheu?*

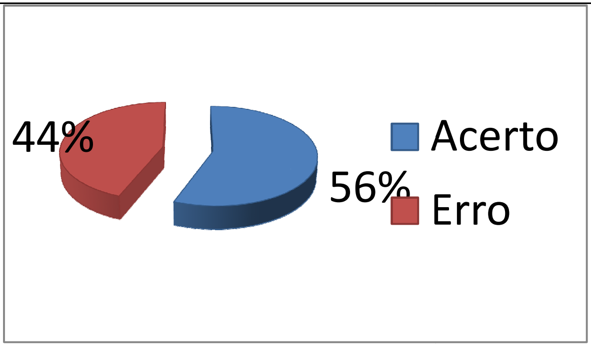
TÓPICOS	ANÁLISE
Tipo do problema	Este é um problema de **Combinação**. Trata-se da quantidade de garrafas de água que dois personagens encheram juntos. Neste problema, a quantidade total (o todo) e a quantidade de uma das partes (a parte) foram apresentadas. A pergunta do problema se refere à outra parte, que é desconhecida. Ou seja, a pergunta se refere à subsérie. A questão é justamente descobrir essa subsérie, e não o total. Para descobrir essa quantidade o aluno terá que realizar a operação inversa.
Estrutura Aditiva	175 + ? = 306 subsérie desconhecida **306 – 175 = ?**
Operação Aritmética	Subtração com reserva e com zero

Resultado obtido	Este foi o segundo problema com a maior percentual de erro: 34% de acerto e 66% de erro. Dos 66% de erro, 22% foram no cálculo relacional, 22% no cálculo numérico e 22% nos dois cálculos: relacional e numérico.
Análise do erro	Erro numérico: O aparecimento do zero na dezena do minuendo faz com que os alunos o ignorem, e coloquem na reposta do cálculo, o algarismo posicional correspondente a ele do subtraendo (no caso o 7). Isso indica dificuldades em torno do entendimento do sistema de numeração decimal. Erro relacional: A frase *''encheram juntos''* parece estar sugerindo uma operação aditiva, levando os alunos a fazerem uma adição com os dois números (306 e 175) que aparecem no problema. Erro relacional e numérico: Como os alunos erraram no cálculo relacional, realizando uma adição, eles se depararam com uma adição com reserva (na ordem das unidades), e com zero (na ordem da dezena). Eles parecem ter se confundido com a reserva (uma dezena) que adicionaria um ao zero (na ordem da dezena), tendo depois que somá-lo ao 7 (sete dezenas) da outra parcela.
Gráfico	

Quadro 13: Análise estrutural e percentual de acertos e erros do problema 7 da ficha 1

Problema 8: *Dona Telma tinha 248 latas de refrigerante para vender. Ela ganhou algumas de Marcão. Ela tem agora 500. Quantas latas de refrigerante dona Telma ganhou de Marcão?*

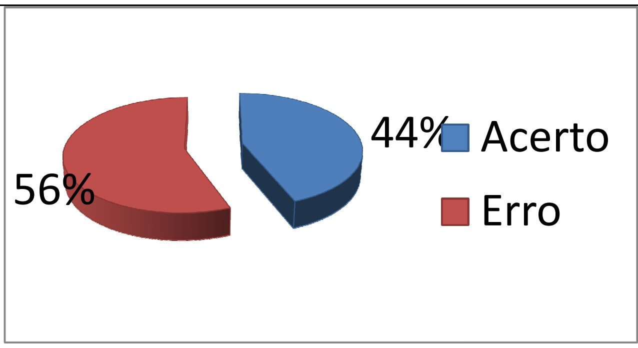
TÓPICOS	ANÁLISE
Estrutura do problema	É um problema de **Mudança** que envolve uma situação de acréscimo. A personagem Telma tinha uma quantidade conhecida de latas de refrigerante e “ganhou algumas latas”, ou seja, uma quantidade desconhecida. Neste caso, a pergunta do problema se refere à quantidade desconhecida, que é a subsérie. A questão é justamente descobrir essa subsérie e não o total, pois esse já foi dado no problema. Para descobrir essa subsérie, o aluno terá que realizar a operação inversa.
Estrutura Aditiva	248 + ? = 500 subsérie desconhecida **500 – 248 = ?**
Operação Aritmética	Subtração com reserva e com zero na dezena e unidade
Resultado obtido	56% dos alunos acertaram e 44% dos alunos apresentaram erro. Houve 44% de erro: 22% de origem relacional, 11% numérico e 11% de erros tanto relacional quanto numérico.
Análise do erro	Erro relacional: Temos nesse caso a *pista lingüística* do verbo *“ganhar”* induzindo o aluno a realizar uma adição entre as duas quantidades que aparecem no problema, sem se deter e refletir sobre a pergunta do mesmo. Erro numérico: Aparecem dois zeros no minuendo, tanto na dezena quanto na unidade. Os alunos que cometeram esse erro desconsideraram a reserva e escreveram 348 no resultado, em vez de 252. Erro relacional e numérico: Os alunos cometeram esses dois erros porque realizaram a operação de adição em vez da subtração, e erraram o resultado desta.

Gráfico	

Quadro 14: Análise estrutural e percentual de acertos e erros do problema 8 da ficha 1

Problema 9: *Beatriz e Tomé têm o mesmo peso, mas em um mês Beatriz ganhou 326 gramas e Tomé ganhou 175 gramas. Quantos gramas Beatriz precisa perder para que eles voltem a ter o mesmo peso?*

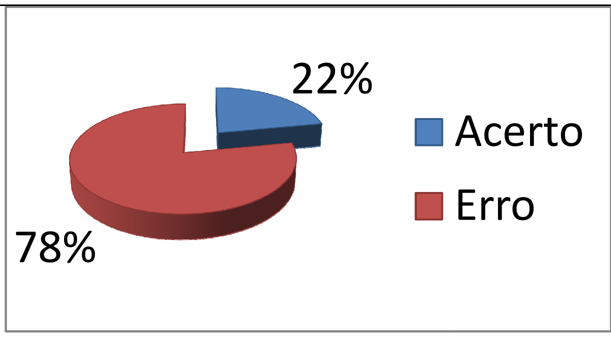
TÓPICOS	ANÁLISE
Tipo do problema	Trata-se de um problema mais complexo no que se refere ao cálculo relacional, Vejamos: a pergunta pede uma **Igualização,** mas além da comparação e mudança que estão implícitas nos problemas de igualização (através da comparação, constata-se uma diferença e se calcula uma mudança para poder igualizar), há também uma comparação sobre uma mudança inicial. Isto é, os personagens Beatriz e Tomé no início têm o mesmo peso. O peso deles é alterado, ocorrendo uma ***Mudança no estado inicial de ambos, seguida de uma Comparação sobre essa Mudança.*** Os dados do problema se referem a essa mudança. Após esse entendimento, constata-se que o peso deles ficou diferente, e a pergunta do problema pede para igualizá-los. Para esta igualização, Beatriz precisa perder peso para poder ficar igual a Tomé, entretanto perder do que ganhou. Ou seja, ela tinha um peso igual a Tomé, porém ganhou mais do que ele, então ela precisa perder isto que "ganhou a mais do que ele", para ficarem com o mesmo peso. Além disso, o peso final dos personagens será diferente do peso inicial, mas continuará desconhecido, pois se partiu de um peso inicial desconhecido.

Estrutura Aditiva	326 - ? = 175 diminuição da quantidade maior **326 – 175 = ?**
Operação Aritmética	Subtração com reserva na dezena
Resultado obtido	44% dos alunos acertaram e 56% dos alunos apresentaram erro. Esses percentuais indicam que apenas quatro alunos acertaram e cinco alunos erraram. Dos 56% de erro, 45% ocorreram no cálculo numérico, e 11% foi no cálculo relacional.
Análise do erro	Erro numérico: A decomposição é algo que confunde bastante os alunos. Então, a resposta dada foi 251, em vez de 151, porque os alunos subtraíram 2 dezenas de 7 dezenas, e 1 centena de 3 centenas, em vez de considerar a reserva, e transformar uma centena em dez dezenas. Isto é, deixa de ser 3 centenas e passar a ser 2 centenas e 12 dezenas. Erro relacional: Na pergunta aparece o verbo ''perder'' que é uma pista lingüística para a subtração. Além disso, no problema, o número maior (326) aparece primeiro do que o não número menor (175). Então, o que parece ter acontecido é que as pistas dos problemas sugerem a operação aritmética correspondente àquela a ser usada no cálculo relacional. Não indicando, portanto, que a escolha pela subtração demonstre que os alunos compreenderam a complexidade das transformações presentes no problema.
Gráfico	

Quadro 15: Análise estrutural e percentual de acertos e erros do problema 9 da ficha 1

Problema 10: *Os primos Nil e Veloso moram no interior de Pernambuco, mas resolveram se encontrar em Recife. A viagem de Nil durou 512 minutos, enquanto a viagem de Veloso durou 248 minutos a menos. Quanto tempo durou a viagem de Veloso?*

TÓPICOS	ANÁLISE
Tipo do problema	Trata-se de um problema de **Comparação** entre duas medidas de tempo. A pergunta não é uma pergunta direta, do tipo: *qual a diferença de tempo entre eles*? O grau de dificuldade consiste na comparação da duração de tempo entre os dois personagens, na informação que é dada e na pergunta que foi feita. Ou seja, a pergunta toma Nil como referencial, para saber quanto tempo durou a viagem de Veloso, sabendo que a deste último durou alguns minutos a menos.
Estrutura Aditiva	512 – ? = 248 diminuição na quantidade maior **512 – 248 = ?**
Operação Aritmética	Subtração com reserva na dezena e na unidade
Resultado obtido	22% dos alunos acertaram e 78% dos alunos apresentaram erro. Esses percentuais indicam que apenas dois alunos acertaram e sete alunos erraram. Esta foi uma a questão com o maior índice de erro. Dos 78% de erro, 22% foram no cálculo relacional; 45% no cálculo numérico, e 11% nos cálculo relacional e numérico.
Análise do erro	Erro relacional: o problema deve ter sido entendido como **um problema de combinação**, onde foram informadas as partes (tempo de viagem de cada um) e solicitado o tempo total gasto pelos dois. O problema não informa o tempo que durou a viagem de um dos personagens: Veloso. A informação de que a sua viagem durou menos

	do que a do outro personagem, Nil, e que, portanto, foi mais rápida, parece não ter sido compreendida pelos alunos. Erro no cálculo numérico: os alunos de deparam com uma subtração com reserva, tanto na ordem das unidades quanto na ordem das dezenas, tendo de decompor as cinco centenas, e a única dezena do minuendo, indicando dificuldades na compreensão do SND (sistema de numeração decimal). Erro nos cálculo relacional e numérico: Ao optar pela operação de adição, os alunos se deparam com uma adição com reserva na ordem das unidades, não acrescentando o “vai um” na ordem das dezenas. O que também pode sugerir dificuldades na compreensão do SND.
Gráfico	

Quadro 16: Análise estrutural e percentual de acertos e erros do problema 10 da ficha 1

4.3. Analisando o desempenho dos sujeitos da pesquisa

Neste capítulo iremos apresentar o desempenho dos nove sujeitos desta pesquisa, diante de cada uma das duas fichas propostas, traçando um paralelo entre elas. Dividimos da seguinte forma:

- Ficha um: **Lista dos problemas** – relacionada aos problemas propriamente ditos, em que o aluno desenvolveu o cálculo relacional e numérico para solucioná-la;
- Ficha dois: **Lista de contas** – relacionada ao desenvolvimento do cálculo numérico, buscando analisar apenas o conhecimento algorítmico do aluno.

No apêndice deste trabalho encontram-se as fichas tais quais foram distribuídas para os alunos, assim como o desempenho de cada um dos sujeitos e a análise feita sobre os procedimentos escolhidos por eles para a resolução das questões. A seguir, iremos apresentar o desempenho destes nove alunos. Entretanto, nem sempre apresentaremos o cálculo de todos eles em cada uma das questões, quando os erros ocorridos forem similares.

Ficha um: Lista de Problemas	Ficha dois: Lista de Contas
1. Edu tinha 327 figurinhas, ganhou 238 figurinhas de seu pai. Com quantas figurinhas ele ficou?	**1) 327 + 238**

Quadro 17: Problema 1 da ficha 1 e questão 1 da ficha 2

Sendo este um problema direto de *Mudança,* não ocorreram erros dos alunos na ficha dois, por ser uma operação aditiva com reserva na unidade e sem zero. O único erro encontrado foi o manifestado pela aluna Joana[2] na ficha um. Que apresentou o cálculo da seguinte forma:

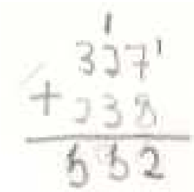


Figura 16: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvida por Joana no problema 1 da ficha 1

Entretanto na ficha dois, esta mesma aluna respondeu corretamente ao cálculo, após rasurar algumas vezes.

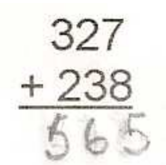


Figura 17: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvida por Joana na questão 2 da ficha 2

Ficha um: Lista de Problemas	Ficha dois: Lista de Contas
2. Luís tem 405 bolas de gude. Maria tem 196 bolas de gude. Quantas bolas de gude têm as duas juntas?	**2) 405 + 196**

Quadro 18: Problema 2 da ficha 1 e questão 2 da ficha 2

[2] Este é um nome fictício, assim como os demais que serão citados no trabalho, garantindo o anonimato dos sujeitos da pesquisa.

Neste segundo tipo, dois alunos demonstraram sua falta de domínio operacional (Antônio e Joana), quando surgiu um zero entre os algarismos que compõem as parcelas, assim como as parcelas que precisam de reserva.

Na resolução do problema, Antônio resolveu parte da operação corretamente, mesmo se deparando com a reserva, que foi o caso de 5 + 6 = 11, em que ele transformou 10 unidades em 1 dezena e somou esta dezena com as 9 dezenas do subtraendo, obtendo 10 dezenas como resultado. Todavia, nesta etapa do algoritmo, ele precisava transformar essas 10 dezenas em 1 centena. Pode-se inferir, a partir do registro escrito, que o aluno assim o fez; obtendo o valor 10, ele escreveu o zero no resultado, porém esqueceu-se de adicionar 1 centena na ordem das centenas. A soma que deveria ter sido 601 foi 501.

Figura 18: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvida por Antônio no problema 2 da ficha 1

Assim como Antônio, Joana, mais uma vez, cometeu erros numéricos na ficha um, como podemos perceber no cálculo abaixo:

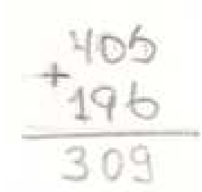


Figura 19: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvida por Joana no problema 2 da ficha 1

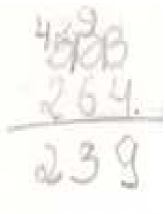
Pelo que consta neste procedimento, Joana não executou um cálculo de adição, mas sim de subtração, demonstrando com isto, além da inversão de operações sua dificuldade também em subtração com reserva e zero.

Ficha um: Lista de Problemas	Ficha dois: Lista de Contas
3. Sabrina tinha uma loja que vendia brincos, mas resolveu fechá-la. Dando 264 brincos para sua irmã, ficou com 503. Quantos brincos Sabrina tinha antes?	**3) 264 + 503**

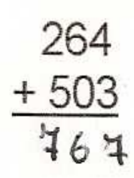
Quadro 19: Problema 3 da ficha 1 e questão 3 da ficha 2

Mesmo com a citação do verbo “dar” no enunciado do problema (Dando...), dois alunos se confundiram. Tanto Saulo quanto Roberta, no momento de compreensão do problema, ao se depararem com este problema inverso, não perceberam que o objetivo era saber o valor inicial e não o final, até porque este já é dado (503). Tal equivoco os levou a executar uma operação de subtração, em vez de adição.

Ambos transformaram uma adição sem reservas em uma subtração com reserva e com zero no minuendo, ou seja, o cálculo numérico ficou mais complicado. Todavia, eles resolveram corretamente a subtração, primeiro transformando uma das centenas em 10 dezenas, já que havia 0 dezenas no minuendo, destas 10 tirou uma dezena transformando em 10 unidades, ficando 13 – 4. Na dezena fez 9 – 6, assim como executou corretamente a centena 4 – 2. Como podemos ver em seguida:



Na ficha um: Roberta transformou uma adição sem reserva, em uma subtração com reserva e zero, resolvendo-a corretamente.



Na ficha dois: Roberta resolveu corretamente o algoritmo de adição.

Figura 20: Comparação entre os algoritmos de estrutura aditiva desenvolvida por Roberta da ficha 1 e da ficha 2, na questão e problema 3

Na ficha dois, o único aluno a errar no cálculo foi Joana, que mesmo acertando-o na ficha um, optou por apagar a resposta certa que pusera (767), pondo 707. A qual se percebe que seria a sua resposta inicial. Houve um provável retrospecto, observado pela rasura da resposta, e então escolheu anular o 6 da dezena, por conta do 0.

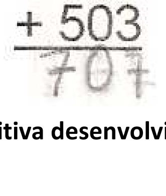


Figura 21: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvida por Joana na questão 3 da ficha 2

Ficha um: Lista de Problemas	Ficha dois: Lista de Contas
4. Nara tinha R$ 896,00, emprestou para Fábio R$ 574,00, com quanto ela ficou?	**4) 896 – 574**

Quadro 20: Problema 4 da ficha 1 e questão 4 da ficha 2

É um problema que envolve *Mudança* numa situação de decréscimo. Tinha-se uma quantia, reduzida por ter emprestado certo valor a alguém, ficando com menos. É um problema direto. O uso dos verbos “tinha”, “emprestou”, “ficou” já sugere a ação matemática que deve ser executada. O cálculo numérico refere-se a uma operação de subtração sem zero e sem reserva.

Apenas Bartolomeu, que escolheu este problema como o mais difícil para ele (quando sugerimos que destacassem), errou na escolha da operação de estrutura aditiva, pois em vez de optar pela subtração, ele executou uma adição. Resolvendo o cálculo (uma adição com reserva) da seguinte forma:

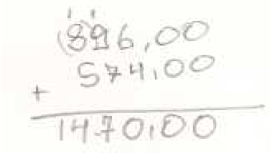


Figura 22: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvida por Bartolomeu no problema 4 da ficha 1

Ficha um: Lista de Problemas	Ficha dois: Lista de Contas
5. Dois amigos resolveram participar do rali Dakar, em modalidades diferentes, Lucas de carro e Jorge de moto. Até o momento Lucas tinha andado 348 quilômetros e Jorge 209 quilômetros. Jorge andou quantos quilômetros a menos que Lucas?	**5) 358 – 209**

Quadro 21: Problema 5 da ficha 1 e questão 5 da ficha 2

Este é um problema de comparação entre duas medidas (quilômetros). Mesmo estando explícito o termo “a menos”, dois alunos (Bartolomeu e Isabel) o compreenderam de maneira inadequada, optando por uma operação de adição em vez de subtração.

Por se tratar de uma subtração com reserva, alguns alunos cometeram algumas falhas durante a execução destes. Escolhemos os seguintes exemplos para expressar a diversidade de erros ocorridos neste.

Antônio e Bartolomeu, em vez de fazer 8 – 9 nas unidades e, com isto, transformar uma das dezenas que compõem o 5 em unidade, optaram por inverter a posição dos algarismos transformando o 9 em minuendo e o 8 em subtraendo, ficando 9 – 8.

Figura 23: Algoritmo de estruturas aditivas desenvolvidas por Antônio e Bartolomeu, respectivamente, na questão 5 da ficha 2

Já Wilma, além de cometer o mesmo erro dos alunos acima, cometeu o que denominamos de "*supremacia do zero*". Ao surgir um zero, como ocorreu na dezena do subtraendo, a aluna reproduziu-o no resto, desprezando o 5 da dezena do minuendo.

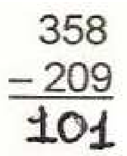


Figura 24: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvida por Wilma na questão 5 da ficha 2

Petrus iniciou o cálculo corretamente, transformando uma das 5 dezenas em 10 unidades, ficando 18 – 9. Todavia, ele continua o cálculo como se não tivesse feito esta transformação, fazendo 5 – 0, em vez de 4 – 0.

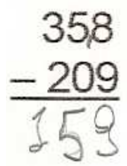


Figura 25: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvida por Petrus na questão 5 da ficha 2

Ficha um: Lista de Problemas	Ficha dois: Lista de Contas
6. Bruno fez 640 pastéis. Ana fez 429 pastéis. Quantos pastéis, Ana precisa fazer para ter a mesma quantidade que Bruno?	**6) 640 – 429**

Quadro 22: Problema 6 da ficha 1 e questão 6 da ficha 2

Apenas dois alunos, Bartolomeu e Isabel, erraram o cálculo relacional neste problema de *Igualização*. Em vez de comparar e completar a medida de Ana para chegar à mesma quantidade de Bruno, ambos somaram as duas medidas.

Figura 26: Algoritmo de estruturas aditivas desenvolvidas por Isabel e Bartolomeu, respectivamente, no problema 6 da ficha 1

Outro aluno, Petrus, optou por resolver o problema também utilizando a adição, em vez da subtração, realizando o algoritmo corretamente.

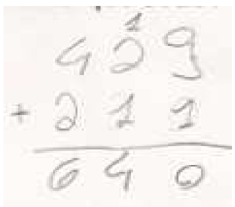


Figura 27: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvida por Petrus no problema 6 da ficha 1

Petrus, no entanto, percebeu que o objetivo do problema era igualizar as quantidades. Logo, ele pegou o menor valor (429), pondo-o na primeira parcela e o maior valor (640) na soma, buscando a parcela intermediária, que somando à primeira apresentou o resultado desejado. Com este tipo de resolução, ele demonstrou o conhecimento que possui no Campo Conceitual das Estruturas Aditivas, em que é preciso não apenas ver a adição e a subtração como operações antagônicas, mas fazendo parte de uma mesma estrutura.

Quanto aos erros no cálculo numéricos encontrados, relacionados a esta operação de subtração com zero no minuendo, consequentemente com reserva, temos o do tipo "*supremacia do zero*", como podemos ver no cálculo de Isabel.

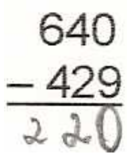


Figura 28: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvida por Isabel na questão 6 da ficha 2

Ela, Joana, Marcela e Wilma erraram na hora de executar a subtração das unidades 0 – 9, optando por ignorar o 9 e pondo o 0 como resposta. Esta *supremacia do 0* parece estar relacionada com operações de multiplicação e divisão (ao multiplica-se por zero; ou diante do zero no dividendo), fazendo com que muitos alunos confundam este procedimento com os da estrutura aditiva.

Petrus e Saulo se equivocaram quando transformaram uma das 4 dezenas do minuendo em unidade e depois prosseguiram com o cálculo, como se não tivesse executado esta operação, fazendo na dezena: 4 – 2, em vez de 3 – 2. Como se percebe a seguir.

Figura 29: Algoritmo de estruturas aditivas desenvolvidas por Saulo e Petrus, respectivamente, na questão 6 da ficha 2

Observe, no cálculo de Petrus, que no momento da decomposição das dezenas, após o algarismo 4, ele representa a composição da unidade, que agora possui 10 unidades, podendo prosseguir o cálculo com 10 – 9.

Ficha um: Lista de Problemas	Ficha dois: Lista de Contas
7. Toni e Carlos encheram juntos em uma semana 306 garrafas de água. Se destas Toni encheu 175 garrafas de água, quantas Carlos encheu?	**7) 306** **– 175**

Quadro 23: Problema 7 da ficha 1 e questão 7 da ficha 2

No início do problema é dito que "encheram juntos". Isto pode induzir a uma soma, que foi o que aconteceu com quatro dos nossos alunos (Antônio, Bartolomeu, Isabel e Joana), mesmo sendo um problema de combinação. Mas, como se trata de um problema indireto, dificultou-se a interpretação.

Para resolver o problema, eles transformaram uma subtração com zero em uma adição com reserva e com zero, ocorrendo erro na interpretação do problema. Como se vê abaixo, na produção de Isabel, que foi similar aos demais citados.

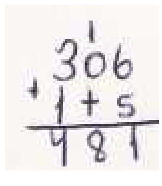


Figura 30: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvida por Isabel no problema 7 da ficha 1

O aluno Petrus resolveu este problema da mesma maneira que fez na questão 6, procurando a quantidade que é preciso acrescentar ao menor valor dado (175), para se alcançar o valor total (306), encontrando corretamente a resposta (131).

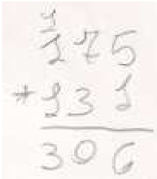


Figura 31: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvida por Petrus no problema 7 da ficha 1

Com relação à resolução das contas, Isabel, Joana e Wilma cometeram erros nos cálculos numéricos, que denominamos de *“supremacia do zero”,* como se percebe a seguir:

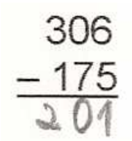


Figura 32: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvida por Joana na questão 7 da ficha 2

A aluna Marcela diferente das três anteriores, optou por ignorar a existência do zero, repetindo o algarismo 7, da dezena do subtraendo, no resto.

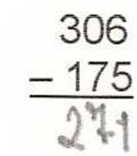


Figura 33: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvida por Marcela na questão 7 da ficha 2

Tanto Petrus quanto Saulo acertaram a conta no que se refere ao procedimento algorítmico da unidade (uma subtração “direta” que não precisa de transformações: 6 – 5), e da dezena (transformou uma das 3 centenas em 10 unidades, ficando 10 – 7), mas erraram quando não corrigiram a centena do minuendo, que depois da transformação passaria a ser 2, sendo 2 – 1 e não 3 – 1, como eles efetuaram.

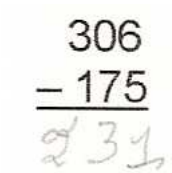


Figura 34: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvida por Saulo na questão 7 da ficha 2

Ficha um: Lista de Problemas	Ficha dois: Lista de Contas
8. Dona Telma tinha 248 latas de refrigerante para vender. Ela ganhou alguns de Marcão. Ela tem agora 500. Quantas latas de refrigerante dona Telma ganhou de Marcão?	**8) 500 – 248**

Quadro 24: Problema 8 da ficha 1 e questão 8 da ficha 2

Sendo este um problema indireto em que se busca a subsérie, e como o verbo que surge no problema é ganhar (Ela ganhou...), duas alunas (Isabel e Joana) devem ter deduzido que Dona Telma ganhou de Marcão, atropelando a pontuação, lendo como se Marcão tivesse dado 500 a ela, e não que este era o valor de latas após acrescentar “x” de Marcão. Assim, Isabel e Joana fizeram uma adição em vez de uma subtração, errando o cálculo relacional.

Ao armar a operação de adição, as parcelas foram escritas à medida que os valores iam aparecendo no texto, ou seja, seguindo a ordem do texto.

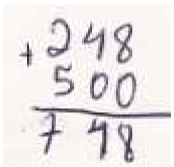


Figura 35: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvida por Isabel

É interessante observar que, neste problema inverso de *Mudança*, em que uma das quantidades é desconhecida, sendo dado o valor final para obtê-la, a aluna Wilma efetua uma subtração, mas os valores foram escritos de maneira diferente da tradicional (500 – 248). Pode-se dizer que ela compreendeu o problema, uma vez que efetuou uma subtração. Contudo, no momento de organizar o algoritmo para a resolução, ela dispôs os valores escrevendo de acordo com a seqüência do texto: “tinha 248”, “agora tem 500”, “quanto ganhou?” A resposta 251 em vez de 252 deve ter sido em decorrência de uma falta de atenção na subtração 10 – 8.

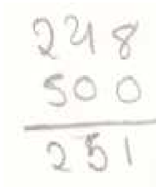


Figura 36: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvida por Wilma no problema 8 da ficha 1

Petrus, assim como nos problemas seis e sete, em que tradicionalmente se utiliza a operação de subtração para resolvê-lo, emprega a adição e responde corretamente, como se pode ver a seguir.

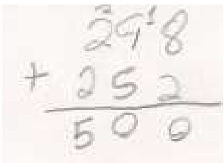


Figura 37: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvida por Petrus no problema 8 da ficha 1

Na ficha dois, novamente Petrus e Saulo cometeram o mesmo erro. Eles responderam corretamente os valores da unidade, fazendo 10 – 8. Todavia, o valor 0 da dezena se tornou 10, após transformar uma centena em dez unidades, e destas 10 dezenas, 1 se transformou em 10 unidades, ficando com 9 dezenas, sendo o cálculo das dezenas: 9 – 4 e não 10 – 4, como ele efetuou. Foi o que ocorreu também com a centena, que passou a ser 4 devido a transformação, mas ao operar, Petrus considerou o seu valor inicial. No cálculo abaixo é possível observar que ele escreve discretamente um traço anterior ao zero, representando o 10.

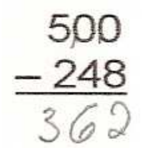


Figura 38: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvida por Petrus na questão 8 da ficha 2

Petrus, durante o problema, consegue resolvê-lo corretamente e demonstra seu domínio da estrutura aditiva. Todavia, quando se depara com o algoritmo descontextualizado na ficha dois, percebe-se que o conhecimento anteriormente expresso pelo aluno não condiz com a resolução apresentada. Sendo uma operação de subtração o inverso de uma adição, ele poderia somar o resto que encontrou (362) com o subtraendo (248) obtendo 610 e não 500, que é o valor correto. Assim, ele perceberia que algo estaria errado em seu cálculo. Este procedimento é conhecido como “prova real”, que é uma operação matemática realizada para verificar se que outra operação está correta ou não.

Quatro alunos (Antônio, Isabel, Joana, Wilma) cometem o erro da “supremacia do zero” e apenas Bartolomeu ignorou os zeros do minuendo, repetindo os valores do subtraendo no resto. Todavia, rasurou a resposta, como se observasse que havia algo errado, mas sem conseguir identificar o motivo.

Escurecendo o valor escrito por ele, antes da rasura, teríamos este exemplo ao lado.

Figura 39: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvida por Bartolomeu, na questão 8 da ficha 2

Ficha um: Lista de Problemas	Ficha dois: Lista de Contas
9. Beatriz e Tomé têm o mesmo peso, mas em um mês Beatriz ganhou 326 gramas e Tomé ganhou 175 gramas. Quantos gramas Beatriz precisa perder para que eles voltem a ter o mesmo peso?	**9) 326** **– 175**

Quadro 25: Problema 9 da ficha 1 e questão 9 da ficha 2

Este problema era considerado o mais difícil pelas pesquisadoras, pois mesmo se tratando de uma *Igualização,* há uma *Mudança* no estado inicial de ambos, seguida de uma *Comparação* sobre essa *Mudança*. Além disso, ele faz referência aos três tempos: ao passado, quando os personagens possuíam o mesmo peso, ao presente, em que Beatriz ganha mais peso que Tomé, e ao futuro, em que eles precisam ter novamente o mesmo peso.

Entretanto, a palavra-chave: “perder” facilitou a operação que deveria ser escolhida por eles. Ou seja, eles tinham duas quantidades e uma das personagens precisava perder algo para ficar igual ao outro. Então, foi subtraído a menor quantidade da maior. Neste problema não apareceu nenhum erro no cálculo relacional, assim como também não houve erros no cálculo numérico. Possivelmente, acerto no cálculo relacional pode ser devido ao termo “precisa perder” da pergunta, uma vez que o problema traz algumas *pistas lingüísticas*.

Quanto ao cálculo numérico realizados na lista das contas, Bartolomeu, Isabel, Petrus e Wilma cometeram o erro que denominamos de inversão, em que se troca a posição do algarismo do minuendo pelo subtraendo, partindo do princípio que só se pode tirar o menor valor do maior e não ao contrário. Com aparece nas dezenas em vez de 2 – 7, fizeram 7 – 2.

Figura 40: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvida por Wilma na questão 9 da ficha 2

É interessante perceber que Isabel, assim como os demais, respondeu corretamente a ficha um. Porém, esta aluna em especial, no momento da resolução se atrapalhou no final do cálculo numérico, apresentando uma rasura em seu cálculo. Isto nos mostra que ela cometeu um erro, todavia reconheceu que havia algo errado em seu cálculo, corrigindo-o em seguida. Com isto, ela obteve o *resultado correto*, ao transformar a dezena 2 em 12 do minuendo, para subtrair com as 7 dezenas do subtraendo, lembrando de decompor uma das 3 centenas do minuendo.

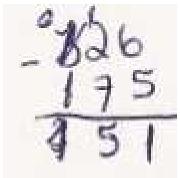


Figura 41: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvida por Isabel no problema 9 da ficha 1

Ficha um: Lista de Problemas	Ficha dois: Lista de Contas
10. Os primos Nil e Veloso moram no interior de Pernambuco, mas resolveram se encontrar em Recife. A viagem de Nil durou 512 minutos, enquanto a viagem de Veloso durou 248 minutos a menos. Quanto tempo durou a viagem de Veloso?	**10) 512 – 248**

Quadro 26: Problema 10 da ficha 1 e questão 10 da ficha 2

Este é um problema de *Comparação* entre duas partes. Entretanto, a questão apresenta uma destas partes, tendo o aluno que calcular a outra parte (o tempo de duração da viagem de Veloso), a partir da relação entre as duas partes, que é informada no problema. Para tal, tem que subtrair o tempo da relação entre elas do tempo de duração da viagem de Nil. Sete dos nove alunos conseguiram identificar o cálculo relacional que deveria ser realizado, sendo este uma subtração com reserva. Apenas, Isabel e Joana, optaram por resolver uma adição.

Em relação às contas, foi observado que os erros apresentado no cálculo numérico dos alunos são repetidos nas contas. Bartolomeu, Isabel, Joana, Saulo e Wilma cometem o erro da inversão, trocando alguns algarismos do minuendo pelo do subtraendo. Invertendo de posição tanto os algarismos da unidade quanto o da dezena, por seus valores absolutos serem maiores, ficando 8 – 2 na unidade, em vez de 2 – 8 e 4 – 1, na dezena, em vez de 1 – 4. Como se pode ver a seguir.

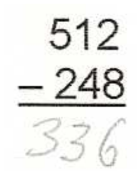


Figura 42: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvida por Saulo na questão 10 da ficha 1

O aluno Petrus, percebendo que não podia subtrair 2 de 8, transforma a única dezena do minuendo em 10 unidades, ficando 12 – 8, todavia quando vai executar a subtração das dezenas, ele ignora que no minuendo não possui dezenas, devido a decomposição anterior, sendo agora zero dezena em vez de 1. Com isto, ele transforma uma das 5 centena em 10 dezenas, fazendo 11 – 4, em vez de 10 – 4. O mesmo erro ocorre com as centenas, pois o minuendo continua com 5 centenas, em vez de 4, já que uma delas foi transformada em 10 dezenas. Ele erra a casa das centenas pondo 3 no resto, em vez de 2, já que a subtração correta na centena seria: 4 – 2 e não 5 – 2 como ele fez.

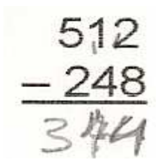


Figura 43: Algoritmo de estrutura aditiva desenvolvida por Petrus na questão 10 da ficha 1

4.3.1. Perfil dos sujeitos na resolução dos problemas e nas contas

Após analisar o processo de resolução dos nove alunos diante de cada uma das duas fichas, decidimos concluir este capítulo apresentando um breve perfil dos sujeitos quanto ao desempenho no estudo.

Sujeito 1: Antônio

Aluno que no ano anterior havia cursado o EJA 3ª fase da mesma escola, cometeu o erro que denominamos “supremacia do zero” na questão 8, assim como erros em que inverte os algarismos do minuendo com o do subtraendo, para que em seu cálculo sempre fique o maior número menos o menor.

Erros cometidos de origem:

- Relacional: ficha um – questão 7.

- Numérica: ficha um – questões 2, 7, 10.

ficha dois – questões 2, 5, 8, 10.

Sujeito 2: Bartolomeu

Aluno que no ano anterior havia cursado o EJA 3ª fase da mesma escola, optou por transformar todos os cálculos da primeira ficha em adição, como se esta escolha não tivesse relação alguma com o enunciado, mas com o domínio que ele possui nesta operação.

O primeiro erro na ficha 2, ocorreu no cálculo 5 e se repetiu com os cálculos das questões 9 e 10, em que ele inverteu a posição do minuendo (valor absoluto menor) pela do subtraendo dos algarismos da unidade. Entretanto, algo de interessante ocorreu nas duas questões 6 e 7, em que aparece o zero, pois ele resolveu corretamente as subtrações com reserva e zero. No cálculo 8, percebe-se a dúvida dele quando se deparou com dois zero no minuendo. Ele decidiu ignorar o zero, porém ao concluir que havia algo errado, optou por rasurar a questão.

Erros cometidos de origem:

- Relacional: ficha um – questões 5, 6, 7, 8, 9, 10.

- Numérica: ficha um – questão 4.

ficha dois – questões 5, 8, 9, 10.

Sujeito 3: Isabel

A aluna, no ano anterior, havia cursado o EJA 3ª fase da mesma escola. Esta aluna também optou por transformar quase todos os cálculos da primeira ficha em adição, exceto a questão 9, em que acertou o cálculo relacional e numérico, mesmo que neste último tenha rasurado, resolveu-o corretamente. O interessante é que quando esta aluna se deparou com o mesmo cálculo, na ficha 2, errou.

Na ficha 2, a aluna respondeu até o cálculo 5, que se tratava de um adição com reserva, corretamente. Todavia, desta questão em diante ocorreram erros do tipo: inverter a posição dos algarismos (minuendo com subtraendo) para “facilitar” o cálculo, partindo do princípio de sempre tirar o menor do maior e a “supremacia do zero”, em que, aparecendo o zero no cálculo, ela o reproduzia automaticamente no resto.

Erros cometidos de origem:

- Relacional: ficha um – questões 5, 6, 7, 8, 10.

- Numérica: Nenhum (ficha um)

ficha dois – questões 6, 7, 8, 9, 10.

Sujeito 4: Joana

Aluna que no ano anterior havia cursado uma série do ensino regular (7ª série ou 8º ano) em outra escola, foi neste ano inserida nesta turma, por ser uma aluna considerada fora de faixa para o ensino regular.

Em ambas as fichas percebem-se as dificuldades desta aluna em matemática. De sua turma, ela foi a última a entregar as fichas nos dois dias. Nos problemas, de todos os alunos avaliados, ela foi a única que errou as operações de adição iniciais. Isto ocorre também na ficha com as contas armadas. Assim como alguns de seus colegas, existe em seus cálculos a inversão dos termos (minuendo e subtraendo) e a *“supremacia do zero”.*

Os erros no cálculo relacional surgem em algumas questões, assim como cálculos que se contradizem àqueles relacionados à *“supremacia do zero”,* que é o de ignorá-lo por completo em uma conta, como ela fez no problema 6.

Erros cometidos de origem:

- Relacional: ficha um – questões 7, 8, 10.

- Numérica: ficha um – questões 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10.

ficha dois – questões 1, 5, 6, 7, 8, 10.

Sujeito 5: Marcela

Aluna que no ano anterior também havia cursado uma série do ensino regular em outra escola, foi inserida nesta turma, por ser considerada uma aluna fora de faixa para o ensino regular.

Seus erros numéricos se mostraram presentes nas questões 5, 6 e 7 da ficha 2, pois na ficha dos problemas (ficha 1) ela não cometeu erros relacionais nem numérico, nem à interpretação do problema, mostrando seu domínio aritmético aditivo. Na ficha 2, seu erro estava relacionado a ignorar a existência do zero: questão 6 (640 – 429), ela respondeu 229. Na questão 7 (306 – 175), a resposta dela deu 271, sendo o algarismo correspondente a ele repetido no resto. O interessante é que em questões mais “complicadas” que estas, como a questão 8, que apresenta o cálculo 500 – 248, a aluna resolveu corretamente. Na questão 10, em que o zero surge durante o cálculo (512 – 248), a aluna também não cometeu erros. Quanto à questão 5 ela fez a decomposição e composição corretamente. Todavia, errou na subtração das centenas, ficando o cálculo 358 – 209 = 249.

Erros cometidos de origem:

- Relacional: Nenhum (ficha um).

- Numérica: ficha dois – questões 5, 6, 7.

Sujeito 6: Petrus

Este aluno estava freqüentando pela terceira vez a mesma turma de EJA 4ª fase, sendo inserido nesta em 2006, devido a seus insucessos na 7ª série (8º ano). Porém, não conseguiu, ainda assim, avançar em seus estudos.

O erro cometido por este aluno é interessante e bastante atípico neste grupo. Ele conseguiu “preparar” corretamente as subtrações com reserva e zero, transformando centena em dezenas, dezena em unidades, quando surgiu a necessidade. Contudo, esquecia de diminuir a unidade dos algarismos que tinha sido transformada.

Outro ponto interessante deste aluno ocorreu nos problemas 6, 7 e 8, em que ele transformou um algoritmo de subtração num de adição, resolvendo-o corretamente. Neste, percebemos o domínio deste aluno no campo conceitual das estruturas aditivas, pois ele consegue perceber a relação entre as duas operações que compõem este campo, adição e subtração, e sabe se utilizar delas corretamente.

Erros cometidos de origem:

- Relacional: Nenhum (ficha um)

- Numérica: ficha um – questões 5, 9, 10.

ficha dois – questões 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Sujeito 7: Roberta

A aluna, no ano anterior, havia cursado o EJA 3ª fase da mesma escola. Ela cometeu apenas um erro referente ao cálculo relacional na ficha 1, que foi no problema de número três. Quanto ao cálculo numérico, esta aluna cometeu erro apenas na questão 10 das duas fichas, na subtração com reserva e sem zero, como se pode ver a seguir.

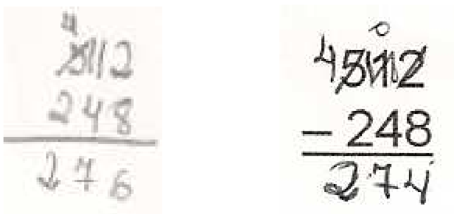


Figura 44: Algoritmo de estruturas aditivas desenvolvidas por Roberta no problema e questão 10 da ficha 1 e 2.

Erros cometidos de origem:

- Relacional: ficha um – questão 3.

- Numérica: ficha um – questões 10.

ficha dois – questão 10.

Sujeito 8: Saulo

Aluno, que no ano anterior havia cursado uma série do ensino regular nesta mesma escola, foi inserido nesta turma, por ser considerado um aluno fora de faixa para o ensino regular.

Este aluno cometeu apenas um erro referente ao cálculo relacional, na ficha 1, no problema de número três. Em relação ao cálculo numérico, notamos que alguns erros cometidos na ficha 1, não foram reproduzidos na ficha 2 e vice-versa.

Em algumas questões o aluno consegue resolver corretamente cálculo de subtração com reserva e com zero. Em outras, ele comete erros do tipo: inversão da posição (minuendo e subtraendo) e Supremacia do zero. Nas questões 6 e 8 da ficha 2, ele transforma os valores, mas continua o cálculo como se aqueles valores não tivessem sido alterados. Veja os cálculos na questão 6 e questão 8 (ficha 2).

Figura 45: Algoritmo de estruturas aditivas desenvolvidas por Saulo nas questões 6 e 8, respectivamente, da ficha 2

Erros cometidos de origem:

- Relacional: ficha um – questão 3.

- Numérica: ficha um – questões 7, 8.

ficha dois – questões 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Sujeito 9: Wilma

Aluna, que no ano anterior havia cursado a turma de EJA 3ª fase nesta mesma escola, apresentou sua compreensão do problema, acertando os cálculos relacionais da ficha 1, assim como os cálculos numéricos relacionados à adição como um todo e a subtração sem reserva e sem zero.

Os erros numéricos desta aluna começaram a surgir quando se deparou com questões envolvendo subtração com reserva. Ela inverte os algarismos do minuendo pelo do subtraendo, para poder tirar o menor valor absoluto do maior, e nas questões em que aparecia o zero, cometeu o erro que consideramos "supremacia do zero". Estes erros se apresentaram nas duas fichas, da mesma forma.

Erros cometidos de origem:

- Relacional: Nenhum (ficha um)

- Numérica: 6 (ficha um) – questões 5, 6, 7, 8, 9, 10.

6 (ficha dois) – questões 5, 6, 7, 8, 9, 10.

CAPÍTULO 5

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Este grupo, por nós investigado, está na faixa etária entre 14 e 18 anos, são estudantes que tiveram a oportunidade de acelerar seus estudos através do Parecer CNE/CEB nº 15/98, pelo qual a idade mínima da EJA foi reduzida para 14 anos. Devido à necessidade dos jovens que estavam fora de faixa, de concluir seus estudos para ingressar no mercado de trabalho, deu-se a transferência dos mesmos para essa modalidade de ensino.

Diferentes de outras turmas de EJA, esses alunos acumulavam repetências em seu histórico escolar e nunca chegaram a abandonar oficialmente a escola. Foram essas características dos alunos que despertaram o nosso interesse em investigar os conhecimentos matemáticos adquiridos por eles, que estão finalizando seus estudos do ensino fundamental.

Nossa investigação teve como suporte teórico o francês Gerard Vergnaud e seus estudos feitos em Matemática, que nos forneceu meios de analisar onde se localizava o erro do aluno, quando a resposta de seu problema diferia da correta. Tal erro incidiria no cálculo numérico ou no cálculo relacional (VERGNAUD, 1982). A partir desta premissa, foram realizados testes com duas fichas: a primeira ficha, contendo 10 problemas, utilizamos para avaliar o desempenho dos alunos as quatro classificações de Carperter e Moser (1982), que são problemas de *mudança, combinação, comparação* e *igualização* e suas subdivisões. A segunda ficha trazia o algoritmo destes problemas prontos para serem resolvidos, analisando, com isto, apenas o cálculo numérico, sem a interferência do contexto em que os valores estavam inseridos, como na ficha anterior.

Nesta pesquisa pudemos observar que o problema com maior percentual de erros do tipo relacional (relacional e relacional/numérico), foi de ***combinação***, em que se apresenta a quantidade total e uma das partes, sendo a outra parte desconhecida (subsérie desconhecida). Isto fez com que 44% dos alunos errassem (gráfico 3). Seguido pelos problemas de ***mudança***, em que a subsérie é desconhecida e de ***comparação***, sendo pedida a relação entre as partes, ambos com 33% de erros.

Selva e Brandão (2000) observaram que as crianças da Educação Infantil tiveram dificuldades em entender os problemas de ***comparação***. Nos estudos de

Magina et al. (2001) mais uma vez o problema de ***comparação*** de quantidades em que são dados o referente e a relação, sendo o referido desconhecido, tiveram os índices de acertos reduzidos nas crianças da 1ª série, sendo este inferiores a 60%. Todavia, o problema de ***transformação*** de quantidade, em que são dados a transformação e o estado final e se pede o estado inicial, foi aquele no qual apenas 50% dos alunos obtiveram êxito. Magina e Campos (2004) observaram que, de forma geral, os alunos no geral do ensino fundamental I (1ª a 4ª série) tiveram mais dificuldade no problema de ***transformação***, em que o estado inicial e final é dado, sendo pedida a relação entre eles. Apenas 50% dos alunos de 4ª série conseguiram acertar.

No estudo de Borba e Santos (1996) as maiores dificuldades enfrentadas pelas crianças foram aquelas nas quais elas se depararam com problemas de comparação e mudança da seguinte forma:

- ***Comparação***, com a quantidade maior desconhecida (com o termo "a menos" expresso), a quantidade menor desconhecida (com o termo "a mais" expresso), ou quando a diferença entre as quantidades era desconhecida (com o termo "a mais" expresso);

- ***Mudança,*** em que a série inicial é desconhecida ou quando a transformação era desconhecida.

Isto se torna mais evidente, no campo das estruturas aditivas, por exemplo, quando ocorre a junção de operações distintas, adição e subtração, deixando-os inseguros quanto a melhor opção de resolução, por estarem habituados apenas a repetir os procedimentos sem refletir a respeito. Além do mais, estes tipos de operações são compreendidos por eles como oposta e não integrantes de um mesmo campo conceitual.

Vergnaud (MAGINA, 2005), afirma que muitas vezes a competência do aluno é analisada, através da conduta deste diante de um problema matemático, seguindo três aspectos:

1. Análise do acerto e erro, sendo considerado competente aquele que acerta;

2. Análise do tipo de estratégia utilizada, podendo alguém ser mais competente que outro;

3. Análise da capacidade de escolher o melhor método para resolver um problema centro de uma situação particular.

Muitos alunos são avaliados apenas seguindo o primeiro tópico citado. Neste trabalho buscamos analisar esta competência um pouco mais, enfatizando os erros cometidos por eles para, a partir daí, podermos analisar se estes erros são pontuais ou se há repetição destes.

Ruiz e Nascimento (1993) concluíram, em seus estudos com alunos do Ensino Fundamental II (5ª a 8ª série ou do 6º ao 9º ano) que, assim como nossos alunos de EJA, eles demonstraram conhecimentos parciais do algoritmo de subtração, quando as operações apresentaram recurso. Destas, as operações com recurso em que havia zero tanto no minuendo quanto no subtraendo, os alunos tiveram um alto percentual de erro, com variações de 41,9% a 61,2%.

O erro que denominamos ***supremacia do zero*** também foi percebido por Ruiz e Nascimento (1993), durante sua pesquisa, quando mencionaram a utilização das regras (0 – N = 0) e (N – 0 = 0), assim como o ***zero neutro*** é visto quando eles descreveram a fórmula (0 – N = N). Eles observaram que os alunos subtraiam sem levar em conta a posição do algarismo na operação (***inversão***). Segundo os autores, os alunos ainda aplicaram a regra “só posso tirar do maior o menor”, assim como utilizaram o recurso da composição nas unidades, mas não compensaram nas outras ordens (***decomposição e composição***).

Barreto (2002), em sua pesquisa com alunos de 8ª série (9º ano), constatou que os erros no cálculo numérico cometidos nas séries anteriores ainda são reproduzidos no último ano do Fundamental, sendo percebida a grande dificuldade dos alunos diante do algoritmo da subtração, principalmente se nesta houver o **zero**.

Bertini e Passos (2007), em seu estudo com alunos de 3ª série (4º ano), entre 9 e 13 anos, compuseram sete categorias de erros e, entre estes, destacaremos três, que se assemelham aos de nosso estudo. São eles: Erro ao somar ou subtrair o ***zero*** (a coluna que possui zero tem como resposta o próprio zero); ***operação invertida*** (quando o minuendo apresenta números menores que o subtraendo, o aluno efetua "subtraendo menos minuendo") e ***erro na compensação*** (os alunos erram ao "emprestar" e "devolver”). Similares a estes, denominamos respectivamente, de ***inversão, supremacia do zero, decomposição e composição***.

Borba e Santos (1997), em seus estudos com alunos de 3ª série em relação aos erros no cálculo numérico, concluiu que 65% dos alunos cometeram erro tanto na operação que envolvia subtração com reserva, quanto na operação de subtração com reserva e zero. Elas perceberam que o aluno efetuava a reserva, mas não compensava (***decomposição e composição***), assim como tinha dificuldades ao subtrair “o menor do maior” (***inversão***). E, diante do **zero** as autoras citaram as mesmas regras do estudo de Ruiz e Nascimento (1993).

Após analisar as fichas utilizadas em nossa pesquisa, que foram compostas pelos os mesmos números, para melhor analisar os erros ocorridos no cálculo relacional e no cálculo numérico, foram observados que alguns erros de natureza diferentes se repetiram. Nesta pesquisa, os erros registrados foram subdivididos em quatro grupos:

Grupo 1 – ***Erro da inversão***: quando o algarismo do subtraendo era maior que o do minuendo, eles invertiam a posição dos algarismos, como por exemplo, na questão 10, quando, nas unidades, apresentava-se “2 – 8”, ao invés de transformar 1 dezena em 10 unidades e juntar ao 2, efetuando “12 – 8”, alguns deles optaram por inverter “8 – 2”, pondo 6 como resto.

Quando surge o zero no minuendo existem dois caminhos errados que eles optam, são eles:

Grupo 2 – ***Supremacia do zero*****:** deparando-se com o zero, automaticamente reproduzem o zero no resto, confundindo este método com o da estrutura aditiva em que multiplicando qualquer valor por 0, obtêm 0 no produto. Na questão 8, em que aparecem dois zeros, pode-se perceber isto. Quando na subtração de 500 por 248, eles subtraem apenas as centenas “5 – 2” e reproduzem os zeros, dando-lhes supremacia, respondendo erroneamente 300, em vez de 252.

Grupo 3 – ***Zero neutro***: Este é o oposto do tipo anterior. Aqui, a presença do zero é ignorada, sendo repetidos os valores do subtraendo. Como na subtração da questão 6, cuja operação apresentada “640 – 429” registra “640 – 429 = 211” erroneamente o 229 como resposta, ao invés de 211, pois reproduziu a unidade 9 do subtraendo no resto, ignorando ou neutralizando a presença do 0 no minuendo, assim como sua importância no algoritmo desenvolvido.

Grupo 4 – ***Erro de decomposição e composição***: Eles não invertem os algarismos como no primeiro caso, todavia ao transformar alguns valores, prosseguem o cálculo como se isto não tivesse ocorrido. Como na questão 5, que a operação é “348 – 209”. Faz a unidade 8 ficar com 18, ao decompor uma das dezenas em 10 unidades, subtraindo corretamente “18 – 9”. Entretanto, não decompõem o algarismo a ser alterado, mantém o 4 na dezena, subtraindo 4 de 0, em vez de 3.

Após observarmos cada um dos erros cometidos pelos alunos investigados, o gráfico abaixo mostra o percentual de cada um dos *quatro tipos de erros* que apareceram neste estudo, para isto excluímos as questões que eles acertaram.

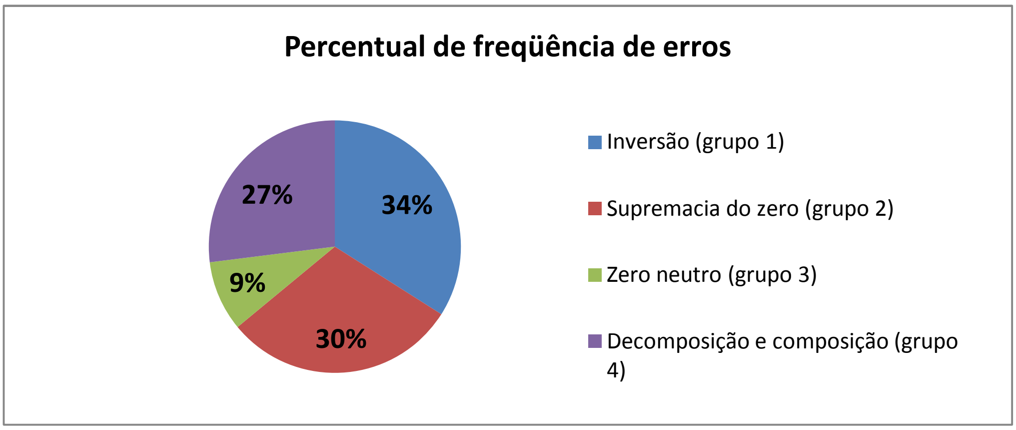


Gráfico 5: Percentual da freqüência de erros cometidos pelos alunos

Com o gráfico 5, podemos ter uma visão panorâmica dos erros mais freqüentes cometidos por eles. Diferente do que se imaginava a inversão posicional dos algarismos (trocar o algarismo do minuendo pelo do subtraendo) se tornou o erro mais freqüente (34%) cometido por este grupo de alunos, superando, apesar da pequena diferença, o erro de “supremacia do zero” (30%), que pensávamos ser o maior obstáculo de nossos alunos.

Este erro de inversão advém da idéia de que só se pode tirar o menor valor do maior, conceito este geralmente aprendido nos primeiros anos do ensino fundamental destes adolescentes, faz com que eles desconsiderem o procedimento algorítmico da operação de subtração (“minuendo menos subtraendo”), invertendo em alguns momentos (“subtraendo menos minuendo”), dependendo do valor absoluto dos algarismos em questão.

Observamos com isto, que os quatro erros cometidos em relação às operações no campo conceitual das estruturas aditivas, referiam-se apenas às operações de subtração. Os resultados do nosso estudo foram na mesma direção dos de Ruiz e Nascimento (1993), indicando que os alunos do ensino fundamental II (5ª a 8ª série ou do 6º ao 9º ano) assim como os alunos de EJA, apresentaram conhecimentos parciais do algoritmo de subtração, quando as operações apresentam recurso. E, das sete categorias de erros apontadas pelo estudo de Bertini e Passos (2007) três se assemelham aos de nosso estudo, são eles: *inversão, supremacia do zero, decomposição e composição*.

Nesta pesquisa foram trabalhadas apenas operações aritméticas contidas no conjunto dos números naturais (acrescido do zero), que é um conjunto contável, porém infinito. Isto nos leva a concluir que há a tendência de tais erros detectados serem replicados, pois dentre os demais o conjunto dos números naturais está contido (inserido) em outros conjuntos numéricos como o conjunto dos números inteiros, racionais, reais e complexos.

Nossa pesquisa analisou os dois tipos de cálculo: ***relacional*** e ***numérico*** (VERGNAUD, 1982). Foi elaborada uma ficha com **problemas**, onde optamos pela classificação dos tipos de problemas sugerida por Carpenter e Moser (1982), no campo das estruturas aditivas, considerando os conhecimentos conceituais relativos aos acréscimos e decréscimos, combinações e comparações propostas nos enunciados, são eles: *mudança, combinação, comparação* e *igualização*.

Esses problemas permitiram analisar, segundo Gérard Vergnaud (1982), o *cálculo relacional* ou o momento de decisão, quando o aluno escolhe a operação apropriada para a resolução proposta por aquele problema, assim como o *cálculo numérico,* que é a realização deste cálculo.

Ao analisar os erros ocorridos nesses problemas, sentiu-se a necessidade, de analisar apenas o cálculo numérico (VERGNAUD, 1982), focando apenas no procedimento algorítmico, para identificar os erros mais freqüentes. Neste caso, as dificuldades relacionadas à língua materna, à compreensão e à interpretação do problema seriam excluídas, tendo como foco apenas o procedimento algorítmico.

Após análise, o resultado nos surpreendeu, pois estes alunos de EJA 4ª fase, que corresponde as duas últimas séries do Ensino fundamental, e que estão concluindo mais uma etapa de seus estudos, apresentaram conhecimentos aquém dos exigidos nos programas curriculares. Eles ainda não têm o domínio algorítmico das estruturas aditivas (adição e subtração), pois apesar de não terem dificuldades nas adições, eles não sabem operar com subtrações. Isto é preocupante, já que possivelmente estarão no Ensino Médio, futuramente concorrendo por uma vaga nas universidades.

Estudos anteriores feitos com crianças do ensino infantil e do ensino fundamental I, como os de Selva e Brandão (2000), Magina et al. (2001), Magina e Campos (2004), Vasconcelos (2003), Borba e Santos (1997) apresentaram dificuldades relacionadas à resolução de problemas que também foram encontradas nos alunos, adolescentes, sujeitos de nossa pesquisa. Isto porque, segundo Vasconcelos (2003), a identificação da quantidade desconhecida num problema é uma das grandes dificuldades na sua resolução, pois pode se encontrar no estado inicial, na transformação ou no estado final.

Nesta pesquisa, observou-se que o menor percentual de acerto ocorreu no problema 10, da ficha 1, a saber: “Os primos Nil e Veloso...”. Tal problema de ***comparação***, em que a quantidade maior é diminuída, teve apenas 22% de acerto, seguido pelo problema 7, da ficha 1, “Toni e Carlos encheram juntos...”, um problema de ***combinação*** em que a subsérie é desconhecida, com apenas 34% de acerto.

Devido a isto, posteriormente optamos em aplicar nessa mesma turma outra ficha, contendo apenas **contas** (operações de adição e subtração) relativas à ficha de problemas, com a finalidade de observar o desempenho dos alunos diante dos algoritmos de estrutura aditiva. Ao analisar o procedimento algorítmico usado para resolver essas contas, foi possível perceber a existência de alguns erros também encontrados nas pesquisas de Ruiz & Nascimento (1993), Borba & Santos (1997), Barreto (2002) e Bertini & Passos (2007) referentes aos erros no cálculo numérico.

Em nossa pesquisa, observamos que os quatro erros cometidos em relação ao cálculo numérico referiam-se apenas às operações de subtração: 67% dos alunos cometeram o erro da ***inversão***, em que se inverte a posição do algarismo do minuendo pelo do subtraendo. O 2º tipo de erro mais cometido, por 56% dos alunos, foi o da ***supremacia do zero***, em que diante do zero o aluno o reproduz no resto sem operar com ele. Seguido a este, temos o do ***zero neutro*** (22%) em que se ignora a presença do zero e o da ***decomposição*** e ***composição*** (22%).

Borba e Santos (1997) observaram, no mesmo aspecto analisados acima, que o percentual de erros no cálculo numérico foi menor que os do cálculo relacional, apresentando a dificuldade maior destes alunos na, como elas chamara, incompreensão das relações implícitas na estrutura do problema. Em nosso trabalho com adolescente da 4ª fase de EJA, ocorreu o contrário: o erro relacional (35%) foi inferior ao percentual de erros numéricos (65%). É como se estes alunos com o passar dos anos na escola, compreendessem melhor o contexto em que estão inseridos os problemas. Assim, as habilidades de sua interpretação vão melhorando e ele já começa a visualizar o problema. Entretanto, ainda trazem consigo uma grande dificuldade em dominar o algoritmo da subtração.

Em se tratando de erros no cálculo numérico, esses se repetiram em cada um dos estudos aqui mencionados, alterando apenas o percentual de alunos que os cometiam, isto quando se deparavam principalmente com as operações de subtração que tinham reserva e que tinham zero. É interessante observar que, na ficha 1 dos problemas, observamos momentos em que os alunos acertaram o cálculo numérico, por este está contextualizado e por seus valores terem sentido. Contudo, quando se depararam com o algoritmo fora do contexto, mesmo sendo algumas vezes o mesmo cálculo, erraram-no. Conclui-se que o resultado encontrado precisa fazer sentido, e isto interfere nos cálculos feito por eles, como na ficha 1, em que ocorreram 36,7% de erros numéricos, destoando dos 63,8% de erros da ficha 2.

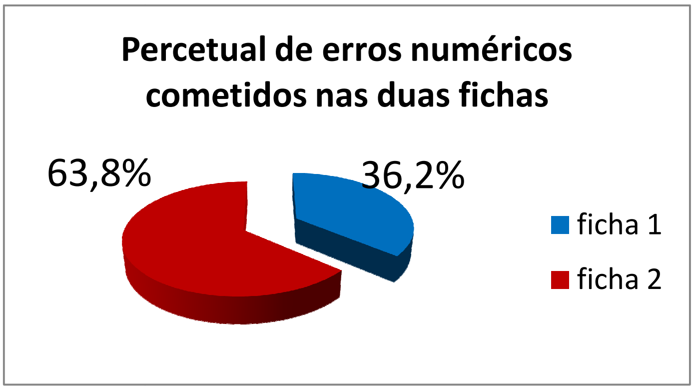


Gráfico 6: comparação entre o percentual de erros numéricos cometidos na ficha um e dois

Conformamos assim, que as dificuldades encontradas, tanto na compreensão do problema quanto na execução deste, ocorrem pelo fato deles ainda não terem o domínio dos conceitos necessários que possibilitem a compreensão plena dos problemas de estruturas aditivas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho dissertativo teve como objetivo contribuir na investigação de alunos adolescentes da modalidade de ensino EJA, nas questões relativas à resolução de problemas aritméticos, inseridos no campo conceitual das estruturas aditivas.

Para alcançarmos nossos objetivos adentramos em sala de aula previamente, para fazermos uma sondagem, antes de elaborarmos as fichas de análise propriamente ditas.

Nosso público, sujeitos da pesquisa, está na faixa etária entre 14 e no máximo 18 anos e tiveram a oportunidade de acelerar seus estudos através do Parecer CNE/CEB nº 15/98, que reduziu a idade mínima da EJA para 14 anos devido à necessidade destes estudantes, concluírem seus estudos para integrar-se ao mercado de trabalho.

Tal fato, instigou-nos a investigar os conhecimentos adquiridos por esses alunos adolescentes durante sua escolaridade até a série atual, buscando identificar as dificuldades que, de alguma forma, os impediam de avançar em seus estudos. Essas dificuldades identificadas em nossa pesquisa desencadeiam outras, que vão se acumulando com o passar dos anos.

Como a base matemática se encontra nas quatro operações básicas, mantivemos nosso foco nas de estruturas aditivas por serem as mais simples, e para nossa surpresa, esses alunos apresentaram dificuldades da formação de base.

Ao analisar os problemas no campo conceitual das estruturas aditivas é preciso levar em consideração: compreensão e interpretação do problema, passagem da linguagem natural para a linguagem matemática, os conhecimentos aritméticos em torno das operações de adição e subtração, os procedimentos algorítmicos, dentre outras ações. Para entender o que o aluno pensa e faz para chegar à reposta do problema, usamos como suporte teórico os estudos de Gerard Vergnaud em resolução de problemas matemáticos, Assim, Vergnaud fornece uma teorização que nos permite analisar a natureza do erro do aluno.

Compreendemos que os erros observados podem estar na i*nterpretação* ou *compreensão do problema* (POLYA, 2006), pois o aluno precisa ter o domínio da língua deste, observando o contexto em que o problema está inserido: sua história (a relação entre os personagens, figuras ou objetos e qual o foco), seu questionamento, os dados que se dispõem (as informações implícitas no texto), dentre outros. Neste momento de '*pré-cálculo',* o aluno faz uma análise de seus conhecimentos matemáticos prévios, buscando em sua mente alguns problemas correlatos (POLYA, 2006) àquele novo problema; trata-se de um momento retrospectivo/introspectivo. Então, após a leitura e interpretação do problema, as informações serão comparadas com as que ele já possui para, em seguida, o aluno tentar construir um plano para a resolução do mesmo.

Para Polya (2006), o processo que o aluno faz até chegar à resposta dos problemas é ilustrado no fluxograma abaixo. Ele inicia este processo no momento em que faz a *leitura do problema*, *analisa os dados* (interpreta-o), *busca problemas correlatos* em sua mente, *elabora um plano de execução* e *executa-o*. Muitas vezes, faz um retrospecto para saber se a resposta está coerente com a pergunta levantada pelo problema. O retorno à fase ou fases anteriores pode ser feito durante qualquer uma delas, para se certificar de que está no caminho correto.

Figura 46: Fluxograma do percurso percorrido até a resolução do problema

Relacionando com Vergnaud (1982), esse processo é tratado como *cálculo relacional*, que são todos os procedimentos anteriores ao cálculo propriamente dito (o pré-calculo), e são repletos de idas e vindas em seus conhecimentos prévios; o aluno busca a melhor opção para a resolução do problema proposto. É interessante perceber que encontrando o possível caminho, o aluno torna a reler o problema para rever a compatibilidade desta "descoberta" com o enunciado deste. Este retorno pode ocorrer mais de uma vez, antes dele iniciar o cálculo. Se for cometido um erro neste momento, o aluno poderá optar por operações aritméticas inadequadas.

Terminado a fase de reflexão que Vergnaud (1982) denominou de ***cálculo relacional***, o aluno passa para o ***cálculo numérico*** (VERGNAUD, 1982). É neste momento em que ele se depara com os seus conhecimentos operacionais matemáticos, mais precisamente, em nossa pesquisa, relacionado à execução de algoritmos envolvendo adição e subtração.

Nossos alunos adolescentes de EJA tiveram dificuldades e erraram o cálculo relacional**.** Todavia, seu erro relacional é menor que o numérico. Mesmo estes alunos tendo passado por todas estas fases do fundamental I, ainda trazem consigo uma gama de dúvidas, questionamentos e interrogações que não foram esclarecidas durante muitos anos.

Esta dificuldade advém muitas vezes de uma prática pedagógica que se baseia na apresentação de um conceito, seguida por uma sucessão de problemas, em que os alunos aplicam as regras “decoradas”, com o intuito de fixar o conteúdo. Isto impede que o aluno reflita sobre suas dúvidas, crie novos questionamentos, tornando-o mero repetidor de procedimentos algoritmos sem nenhum significado para ele.

Quando falamos sobre dominar o conceito das estruturas aditivas, estamos considerando que a teoria dos campos conceituais, segundo Vergnaud parte do princípio que a apropriação de um conceito pelo sujeito ocorre a partir de sucessivas aproximações deste com o objeto de conhecimento. A aquisição de um conceito não é algo que ocorre rapidamente, trata-se de uma construção gradativa, em que ocorrem entrelaces e rupturas sucessivas entre o novo e o antigo.

Infelizmente, algumas vezes, o que se enfatiza em demasia são a repetição e a memorização, que mesmo possuindo sua importância, não podem se sobrepor ao desenvolvimento de outras habilidades tais como: reflexão, análise e associação necessárias à construção de conceitos.

O aluno precisa se deparar com uma diversidade de situações, representações e invariantes operatórios para compreender o campo conceitual das estruturas aditivas. Devido a isto, em estudos posteriores, poderemos analisar algumas pesquisas que apresentam metodologias aplicadas em turmas de ensino regular e EJA, que facilitaram a aquisição destes conceitos de estruturas aditivas.

Uma das contribuições deste estudo foi nos levar a refletir sobre o estado em que se encontra a educação matemática, com alunos que ainda não possuem o domínio do campo conceitual das estruturas aditivas a serem desenvolvidas no Ensino Fundamental I e vão seguindo seus estudos, trazendo consigo estes erros relacionais e numéricos. Consideramos que foram alcançados com esse estudo, os objetivos propostos, e também respondidas às questões relacionadas às dificuldades referentes ao “não aprendizado” da Matemática Básica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, E. R. **Os jovens da EJA e a EJA dos jovens**. In: OLIVEIRA, I. B. de e PAIVA, J. (Orgs.). Educação de jovens e adultos. Rio de Janeiro: DP&A, 2004.

ARROYO, M. G. **Educação de jovens-adultos: um campo de direitos e de responsabilidade pública**. In SOARES, G. e GOMES (Orgs.). Diálogos na educação de jovens e adultos. Belo Horizonte: Autêntica, 2005, p. 19-50.

BARRETO, M. C. **O Material Didático do telensino e o desenvolvimento de conceitos matemáticos**. In: FARIAS, I. S. de. NUNES, J. B. C; CAVALCANTE, M. M. D. (org.) Telensino percurso e polêmicas. Fortaleza: UECE, 2001.

BERTINI, L. de F; PASSOS, C. L. B. **Dificuldades de aprendizagem em aritmética nas séries iniciais.** Anais da 16ª COLE, Campinas, 2007. Disponível em: < http://www.alb.com.br/anais16/sem15dpf/sm15ss08_02.pdf> Acesso em: 28 jan. 2010

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas.** São Paulo: Editora UNESP, 1999.

BITTAR, M. **A teoria dos campos conceituais e o ensino de vetores no ensino secundário francês**. Disponível em: <http://www.anped.org.br/reunioes/25/excedentes25/marilenabittart19.rtf.> Acesso em: 10 out, 2009.

BORBA, R. E. S. R. e SANTOS, R. B. **Investigando a resolução de problemas de estruturas aditivas por crianças de 3ª série.** In: Tópicos educacionais, Recife, v. 15, n. 3, p. 125 -140, 1997

BRAVO, J.A. F; HUETE, J.C. S. **O ensino da matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógica**. (trad: ROSA, E.). Porto Alegre: Artmed, 2006.

BRASIL/MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, MEC, 1998

BRASIL. MEC/Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. Parecer n.15, de 1º de jun. de 1998.

BRESSER-PEREIRA, L. C. **sociedade civil: sua democratização para a reforma do estado.** *In:* BRESSER-PEREIRA, L. C., WILHEIM, J; SOLA, L. orgs. Sociedade e Estado em Transformação. UNESP/ENAP, 1999: 67-116. Disponível em: < http://www.proead.unit.br/professor/dante_flavio/arquivos/atividades/93SociedadeCivil.pdf> Acesso em: 22 jan. 2010.

BRUNEL, C. **Jovens cada vez mais jovens na educação de jovens e adultos**. Porto Alegre: Mediação, 2004.

CARPENTER, T. P; MOSER, J. M. **The development of addition and subtraction problem-solving skills.** In: CARPENTER, T. P; MOSER, J. M; ROMBERG, T. A. Addition and Subtract: a Cognitive Perspective. New Jersey: LEA, 1982.

CARRAHER, T. N; SCHLIEMANN, A. D. **A adição e a subtração na escola: algoritmos ensinados e estratégias aprendidas**. Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, 64 (148), 1983.

CARRAHER, D. W (org). **A compreensão de conceitos aritméticos.** Campinas: Papiros, 1998. (Perspectiva em Educação Matemática)

CARRAHER, T; CARRAHER, D; SCHLIEMANN, A. L. **Na vida dez, na escola zero.** 14 ed. São Paulo: Cortez, 2006.

CAVALCANTE, M. M. D. (Orgs.) **Telensino: percursos e polêmicas**. Fortaleza: Demócrito Rocha, UECE, 2001.

CÉSAR, L. V. A. **A resolução dos problemas de adição e subtração na escola de 1º grau.** Dissertação de Mestrado em Psicologia Cognitiva. UFPE, 1990.

CHACÓN, I. M. G. **Matemática Emocional – os afetos na aprendizagem matemática.** (trad. Daisy Vaz de Moraes). Porto Alegre: Artmed, 2003

D´AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática - da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 1996.

DAMM, R. F. **Registros de representação.** In: FRANCHI, A. *et al.* (org. MACHADO, S. D. A) Educação Matemática: uma (nova) introdução. 3 ed. São Paulo: EDUC, 2008.

DANYLUK, O. S. (org.). **Educação de Adultos: ampliando horizontes de conhecimento.** Porto Alegre, 2001.

DECLARAÇÃO DE HAMBURGO e AGENDA PARA O FUTURO. **Conferência Internacional de Educação de Adultos**. Hamburgo, Alemanha: UNESCO, 1997

DELVIN, K. **O gene da Matemática.** Rio de Janeiro: Recorde, 2004

DI PIERRO, M. C. **Descentralização, Focalização e Parceria: Uma Análise das tendências nas políticas públicas de Educação de Jovens e Adultos.** Educação e Pesquisa: Revista da Faculdade de Educação da USP, São Paulo: v. 27, n. 2, p. 321-337, jul./dez., 2001.

DI PIERRO, Maria Clara *et al*. **Visões da educação de jovens e adultos no Brasil.** *Caderno Cedes*, Campinas, v. 21, n. 55, 2001. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0101-32622001000300005> Acesso em: 22 jan. 2010.

DI PIERRO, M. C; JOIA, O; RIBEIRO, V. M. **Visões da educação de jovens e adultos no Brasil**. *Cad. CEDES* [online]. 2001, vol.21, n.55, pp. 58-77. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0101-32622001000300005&script=sci_abstract&tlng=en> Acesso em: 22 jan. 2010.

EUGÊNIO, B. G. **O currículo na Educação de Jovens E Adultos: entre o formal e o cotidiano numa escola municipal em Belo Horizonte*.*** Dissertação do Mestrado em Educação. PUC-MG, 2004.

FAYOL, M. **A criança e o número: da contagem à resolução de problemas.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

FONSECA, M. da C. F. R. **Educação Matemática de jovens e adultos – especificidades, desafios e contribuições.** 2ª edição. Belo horizonte: Autêntica, 2007. (coleção: Tendências em Educação Matemática).

FRANCHI, A. **Considerações sobre a Teoria dos Campos Conceituais**. In: MACHADO et al. Educação Matemática: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa.** São Paulo: Paz e Terra, 2001

______. **Pedagogia da Esperança: um reencontro com a Pedagogia do Oprimido.** 11ª ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2003.

______. **Pedagogia do Oprimido**. 40ª ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2005.

GOMES, M. J. **Profissionais fazendo matemática: o conhecimento de números decimais de alunos pedreiros e marceneiros da educação de jovens e adultos.** Dissertação do mestrado em educação, UFPE, 2007.

GROSSI, E. P. **Por que ainda há quem não aprende? : A teoria.** Petrópolis: Vozes, 2003.

HADDAD, Sérgio; DI PIERRO, Maria Clara. **Escolarização de jovens e adultos.** Revista Brasileira de Educação, São Paulo, n. 14, p. 108-130, mai./ago. 2000.

KLAUSMEIER, H. J; GOODWIN, W. **Manual de Psicologia Educacional: aprendizagem e capacidades humanas**. (Tradução de Abreu, M. C. T. A.). São Paulo: Harper & Row, 1977.

LAUTERT, S.; SPINILLO, A. **As Relações Entre o Desempenho em Problemas de Divisão e as Concepções de Crianças Sobre a Divisão**. In: Psicologia: Teoria e Pesquisa. Vol. 18 n. 3, pp. 237-246. Universidade federal de Pernambuco, 2002. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ptp/v18n3/a02v18n3.pdf> Acesso em: 26 jan. 2010

LUCHESI, C. C. **A avaliação da aprendizagem escolar**. São Paulo: Cortez, 1995.

MAYER, R. E. **A Capacidade para a Matemática**. In R. J. Sternberg, As capacidades Intelectuais Humanas: Uma Abordagem em Processamento de Informações. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992

MACEDO, L. de. **Ensaios construtivistas**. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1994.

MAGALHÃES, V. P. de. **A resolução de problemas de proporção e sua transferência entre diferentes conteúdos.** Dissertação do Mestrado em Psicologia Cognitiva, 1990.

MAGINA, S; CAMPOS, T. M. M; NUNES, Terezinha; GITIRANA, Verônica. **Repensando Adição e Subtração: contribuições da Teoria dos Campos Conceituais**. São Paulo: PROEM, 2001.

MAGINA, S; CAMPOS, T. **Educação Matemática Pesquisa**. V. 6 n. 1. São Paulo: EDUC, 2004.

MORAN, J. M; MASETTO, M.; BEHRENS, M. P. **Novas tecnologias e mediações pedagógicas.** Revisão: Maria Lúcia A. Maier. Campinas-SP: Editora Papirus, 2002. (Coleção Papirus Educação).

MOREIRA, M. A. **A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área**. *In:* Investigações em Ensino de Ciências, v. 7, n. 1, 2002. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n1/v7_n1_a1.html> Acessado em: 26 jan. 2010

NUNES, T; BRYANT, P. **Crianças Fazendo Matemática.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1997

NUNES, T; CAMPOS, T; BRYANT, P. **Introdução à Educação Matemática: Números e operações.** São Paulo: PROEM, 2001.

NUNES, T; CAMPOS, T; MAGINA, S; BRYANT, P. **Educação Matemática 1: números e operações numéricas**. São Paulo: Cortez, 2005.

OLIVEIRA, M. K. de. **Jovens e adultos como sujeitos de conhecimento e aprendizagem.** Trabalho apresentado na XXII Reunião Anual da ANPEd, Caxambu, setembro de 1999. Disponível em: http://www.pead.faced.ufrgs.br/sites/publico/eixo7/eja/jovens_e_adultos_como_sujeitos_de_conhecimento_e_aprendizagem.pdf.> Acesso em: 22 jan. 2010.

PAIS, L.C. **Transposição didática.** In: FRANCHI, A. *et al.* (org. MACHADO, S. D. A) Educação Matemática: uma (nova) introdução. 3 ed. São Paulo: EDUC, 2008.

PARRA, C. e SAIZ, I. (org.) **Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

PIAGET, J. **Equilibração das Estruturas Cognitivas.** Trad. Marion M.S. Penna. Rio de Janeiro: Zahar, 1976

______ . **Aprendizagem e conhecimento.** Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1979.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.** (Trad. Heitor Lisboa de Araújo). Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

RUIZ, E. R. e NASCIMENTO, R. A. **Identificação e análise de erros cometidos por alunos de 5ª a 8ª série do 1º grau na resolução da subtração.** In: Tópicos Educacionais, Recife, v. 11, n. 1/2, 1993.

SAVIANI, D. **Escola e democracia**. Campinas: Autores Associados, 1993.

SILVA, B. A. da. at al. **Educação matemática – uma introdução**. São Paulo: Editora EDUC. PUC-SP, 1999. (série Trilhas).

SILVA, I. A. **Probabilidades: a visão laplaciana e a visão freqüentista na introdução do conceito**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC-SP, 2002.

SILVA, V. L. da. **Números decimais: no que os saberes de adultos diferem dos de crianças?** Dissertação de Mestrado em Educação. UFPE, 2006.

SCHLIEMANN, A. D. **Escolarização formal versus experiência prática na resolução de problemas.** *In:* CARRAHER, T; CARRAHER, D; SCHLIEMANN, A.L. Na vida dez, na escola zero. 14 ed. São Paulo: Cortez, 2006.

VASCONCELOS, L. **Problemas de Adição e Subtração: modelos teóricos e práticas de ensino**. In: SCHLIEMANN, Analúcia D. CARRAHER, David W. (Org.). A compreensão de conceitos aritméticos: ensino e pesquisa. 2 ed. Campinas: Papirus, 2003.

VERGNAUD, G. **A classification of Cognitive Tasks and Operations of thought Involved Addition and Subtractions Problems.** In: Addition and Subtraction: a cognitive perspective, Ed. Lawrense Erlbaun Hillsdale, USA, 1982.

__________. **Quelques problèmes theóriques de la didactique a propos d'un example: les structures additives.** Atelier International d'Eté: Récherche en Didactique de la Physique. La Londe les Maures, França, 1983.

__________. **La théorie des champs conceptuels**. In: Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

___________. **El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de lãs matemáticas em la escuela primaria**. México: Trillas, 1991.

__________. **A teoria dos campos conceituais.** In: BRUN, Jean (dir.). Didáctica das matemáticas. Trad. Maria José Figueiredo. Lisboa: INSTITUTO PIAGET, 1996.

____________. **Teoria dos Campos Conceituais**. I Seminário Internacional de Educação Matemática. São Paulo: SBEM, 2000. v.1.

VIANNA, C. R. **Resolução de Problemas.** In: Futuro Congressos e Eventos. (Org.). Temas em Educação I - Livro das Jornadas 2002. Curitiba: Futuro Congressos e Eventos, 2002, p. 401-410.

VITTI, C. M. **Matemática com prazer.** Piracicaba: Unimep, 1996.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente.** (Trad. José Cipolla Neto, Luís Silveira Menna Barreto e Solange Castro Afeche). São Paulo: Livraria Martins Fontes, 1984.

__________. **Pensamento e linguagem.** São Paulo: Martins Fontes, 1987.

WEINER, B. **An attributional theory of motivation and emotion**. New York: Springer-Verlag, 1986

ANEXOS

1. FICHAS 1 E 2

Ficha um: Lista de Problemas	Tipo de Problemas	**Ficha dois: Lista de Contas**	Operação Aritmética
1. Edu tinha 327 figurinhas, ganhou 238 figurinhas de seu pai. Com quantas figurinhas ele ficou?	Mudança	327 + 238	Adição com reserva
2. Luís tem 405 bolas de gude. Maria tem 196 bolas de gude. Quantas bolas de gude têm as duas juntas?	Combinação	405 + 196	Adição com reserva e com zero
3. Sabrina tinha uma loja que vendia brincos, mas resolveu fechá-la. Dando 264 brincos para sua irmã, ficou com 503. Quantos brincos Sabrina tinha antes?	Mudança	264 + 503	Adição sem reserva e com zero
4. Nara tinha R$ 896,00, emprestou para Fábio R$ 574,00, com quanto ela ficou?	Mudança	896 – 574	Subtração sem reserva
5. Dois amigos resolveram participar do rali Dakar, em modalidades diferentes, Lucas de carro e Jorge de moto. Até o momento Lucas tinha andado 348 quilômetros e Jorge 209 quilômetros. Jorge andou quantos quilômetros a menos que Lucas?	Comparação	358 – 209	Subtração com reserva e com zero
6. Bruno fez 640 pastéis. Ana fez 429 pastéis. Quantos pastéis Ana precisa fazer para ter a mesma quantidade que João?	Igualização	640 – 429	Subtração com reserva e com zero na unidade
7. Toni e Carlos encheram juntos em uma semana 306 garrafas de água. Se destas Toni encheu 175 garrafas de água, quantas Carlos encheu?	Combinação	306 – 175	Subtração com reserva e com zero na dezena
8. Dona Telma tinha 248 latas de refrigerante para vender. Ela ganhou alguns de Marcão. Ela tem agora 500. Quantas latas de refrigerante dona Telma ganhou de Marcão?	Mudança	500 – 248	Subtração com reserva e com zero na dezena e na unidade
9. Beatriz e Tomé têm o mesmo peso, mas em um mês Beatriz ganhou 326 gramas e Tomé ganhou 175 gramas. Quantos gramas Beatriz precisa perder para que eles voltem a ter o mesmo peso?	Igualização	326 – 175	Subtração com reserva na dezena
10. Os primos Nil e Veloso moram no interior de Pernambuco, mas resolveram se encontrar em Recife. A viagem de Nil durou 512 minutos, enquanto a viagem de Veloso durou 248 minutos a menos. Quanto tempo durou a viagem de Veloso?	Comparação	512 – 248	Subtração com reserva na dezena e na unidade

2. PROTOCOLO DOS SUJEITOS DA PESQUISA

Sujeito 1: Antônio[3]

Ficha um: Lista de Problemas	Ficha dois: Lista de Contas
1. Edu tinha 327 figurinhas, ganhou 238 figurinhas de seu pai. Com quantas figurinhas ele ficou?	1) 327 + 238
327 +238 565	1) 327 + 238 565
2. Luís tem 405 bolas de gude. Maria tem 196 bolas de gude. Quantas bolas de gude têm as duas juntas?	2) 405 + 196
405 196 501	2) 405 + 196 505
3. Sabrina tinha uma loja que vendia brincos, mas resolveu fechá-la. Dando 264 brincos para sua irmã, ficou com 503. Quantos brincos Sabrina tinha antes?	3) 264 + 503
264 503 767	3) 264 + 503 767
4. Nara tinha R$ 896,00, emprestou para Fábio R$ 574,00, com quanto ela ficou?	4) 896 – 574
322	4) 896 – 574 322
5. Dois amigos resolveram participar do rali Dakar, em modalidades diferentes, Lucas de carro e Jorge de moto. Até o momento Lucas tinha andado 348 quilômetros e Jorge 209 quilômetros. Jorge andou quantos quilômetros a menos que Lucas?	5) 358 – 209

[3] Este é um nome fictício, assim como os demais para preservando o anonimato dos sujeitos da pesquisa.

739	5) 358 – 209 1[illegible]1
6. Bruno fez 640 pastéis. Ana fez 429 pastéis. Quantos pastéis Ana precisa fazer para ter a mesma quantidade que Bruno?	6) 640 – 429
211	6) 640 – 429 ~~[illegible]~~ 211
7. Toni e Carlos encheram juntos em uma semana 306 garrafas de água. Se destas Toni encheu 175 garrafas de água, quantas Carlos encheu?	7) 306 – 175
481	7) 306 – 175 ~~[illegible]~~ 131
8. Dona Telma tinha 248 latas de refrigerante para vender. Ela ganhou alguns de Marcão. Ela tem agora 500. Quantas latas de refrigerante dona Telma ganhou de Marcão?	8) 500 – 248
252	8) 500 – 248 300
9. Beatriz e Tomé têm o mesmo peso, mas em um mês Beatriz ganhou 326 gramas e Tomé ganhou 175 gramas. Quantos gramas Beatriz precisa perder para que eles voltem a ter o mesmo peso?	9) 326 – 175
157	9) 326 – 175 151

10. Os primos Nil e Veloso moram no interior de Pernambuco, mas resolveram se encontrar em Recife. A viagem de Nil durou 512 minutos, enquanto a viagem de Veloso durou 248 minutos a menos. Quanto tempo durou a viagem de Veloso?	10) 512 – 248
312	10) 512 – 248 2[illegible]4

Sujeito 2: Bartolomeu

Ficha um: Lista de Problemas	Ficha dois: Lista de Contas
1. Edu tinha 327 figurinhas, ganhou 238 figurinhas de seu pai. Com quantas figurinhas ele ficou?	1) 327 + 238
1 327 + 238 565	1 327 + 238 565
2. Luís tem 405 bolas de gude. Maria tem 196 bolas de gude. Quantas bolas de gude têm as duas juntas?	2) 405 + 196
405 + 196 601	11 405 + 196 601
3. Sabrina tinha uma loja que vendia brincos, mas resolveu fechá-la. Dando 264 brincos para sua irmã, ficou com 503. Quantos brincos Sabrina tinha antes?	3) 264 + 503
264 503 + 767	264 + 503 767

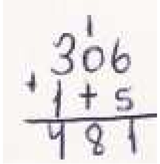
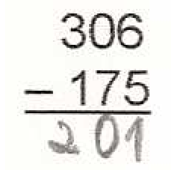
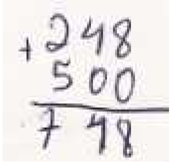
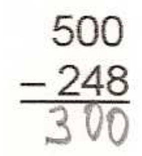
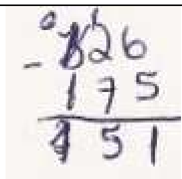
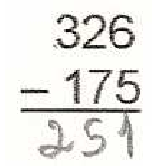
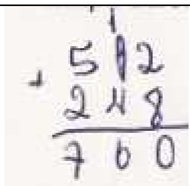
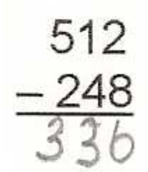
4. Nara tinha R$ 896,00, emprestou para Fábio R$ 574,00, com quanto ela ficou?	4) 896 – 574
896,00 574,00 + 1470,00	896 – 574 322
5. Dois amigos resolveram participar do rali Dakar, em modalidades diferentes, Lucas de carro e Jorge de moto. Até o momento Lucas tinha andado 348 quilômetros e Jorge 209 quilômetros. Jorge andou quantos quilômetros a menos que Lucas?	5) 358 – 209
348 209 557	358 – 209 151
6. Bruno fez 640 pastéis. Ana fez 429 pastéis. Quantos pastéis Ana precisa fazer para ter a mesma quantidade que Bruno?	6) 640 – 429
640 + 429 1069	3 640 – 429 21[illegible]
7. Toni e Carlos encheram juntos em uma semana 306 garrafas de água. Se destas Toni encheu 175 garrafas de água, quantas Carlos encheu?	7) 306 – 175
306 175 + 481	2 306 – 175 131
8. Dona Telma tinha 248 latas de refrigerante para vender. Ela ganhou alguns de Marcão. Ela tem agora 500. Quantas latas de refrigerante dona Telma ganhou de Marcão?	8) 500 – 248

248 500 748	500 – 248 [illegible]
9. Beatriz e Tomé têm o mesmo peso, mas em um mês Beatriz ganhou 326 gramas e Tomé ganhou 175 gramas. Quantos gramas Beatriz precisa perder para que eles voltem a ter o mesmo peso?	9) 326 – 175
1 1 326 175 + 503	326 – 175 251
10. Os primos Nil e Veloso moram no interior de Pernambuco, mas resolveram se encontrar em Recife. A viagem de Nil durou 512 minutos, enquanto a viagem de Veloso durou 248 minutos a menos. Quanto tempo durou a viagem de Veloso?	10) 512 – 248
512 248 760	512 – 248 336

Sujeito 3: Isabel

Ficha um: Lista de Problemas	Ficha dois: Lista de Contas
1. Edu tinha 327 figurinhas, ganhou 238 figurinhas de seu pai. Com quantas figurinhas ele ficou?	1) 327 + 238
1 327 + 238 565	1 327 + 238 565
2. Luís tem 405 bolas de gude. Maria tem 196 bolas de gude. Quantas bolas de gude têm as duas juntas?	2) 405 + 196

1 1 405 + 196 601	1 1 405 + 196 601
3. Sabrina tinha uma loja que vendia brincos, mas resolveu fechá-la. Dando 264 brincos para sua irmã, ficou com 503. Quantos brincos Sabrina tinha antes?	3) 264 + 503
+ 264 503 767	264 + 503 767
4. Nara tinha R$ 896,00, emprestou para Fábio R$ 574,00, com quanto ela ficou?	4) 896 – 574
− 896,00 574 322.00	896 – 574 322
5. Dois amigos resolveram participar do rali Dakar, em modalidades diferentes, Lucas de carro e Jorge de moto. Até o momento Lucas tinha andado 348 quilômetros e Jorge 209 quilômetros. Jorge andou quantos quilômetros a menos que Lucas?	5) 358 – 209
1 + 348 209 557	4 1 358 – 209 149
6. Bruno fez 640 pastéis. Ana fez 429 pastéis. Quantos pastéis Ana precisa fazer para ter a mesma quantidade que Bruno?	6) 640 – 429
+ 640 429 1069	640 – 429 220
7. Toni e Carlos encheram juntos em uma semana 306 garrafas de água. Se destas Toni encheu 175 garrafas de água, quantas Carlos encheu?	7) 306 – 175

	
8. Dona Telma tinha 248 latas de refrigerante para vender. Ela ganhou alguns de Marcão. Ela tem agora 500. Quantas latas de refrigerante dona Telma ganhou de Marcão?	8) 500 – 248
	
9. Beatriz e Tomé têm o mesmo peso, mas em um mês Beatriz ganhou 326 gramas e Tomé ganhou 175 gramas. Quantos gramas Beatriz precisa perder para que eles voltem a ter o mesmo peso?	9) 326 – 175
	
10. Os primos Nil e Veloso moram no interior de Pernambuco, mas resolveram se encontrar em Recife. A viagem de Nil durou 512 minutos, enquanto a viagem de Veloso durou 248 minutos a menos. Quanto tempo durou a viagem de Veloso?	10) 512 – 248
	

Sujeito 4: Joana

Ficha um: Lista de Problemas	Ficha dois: Lista de Contas
1. Edu tinha 327 figurinhas, ganhou 238 figurinhas de seu pai. Com quantas figurinhas ele ficou?	1) 327 + 238

1 337' + 238 552	327 + 238 565
2. Luís tem 405 bolas de gude. Maria tem 196 bolas de gude. Quantas bolas de gude têm as duas juntas?	2) 405 + 196
405 + 196 309	405 + 196 601
3. Sabrina tinha uma loja que vendia brincos, mas resolveu fechá-la. Dando 264 brincos para sua irmã, ficou com 503. Quantos brincos Sabrina tinha antes?	3) 264 + 503
264 + 503 1767	264 + 503 707
4. Nara tinha R$ 896,00, emprestou para Fábio R$ 574,00, com quanto ela ficou?	4) 896 – 574
896,00 – 574,00 322,00	896 – 574 322
5. Dois amigos resolveram participar do rali Dakar, em modalidades diferentes, Lucas de carro e Jorge de moto. Até o momento Lucas tinha andado 348 quilômetros e Jorge 209 quilômetros. Jorge andou quantos quilômetros a menos que Lucas?	5) 358 – 209
348 – 209 139	358 – 209 157
6. Bruno fez 640 pastéis. Ana fez 429 pastéis. Quantos pastéis Ana precisa fazer para ter a mesma quantidade que Bruno?	6) 640 – 429

940 − 429 529	640 − 429 120
7. Toni e Carlos encheram juntos em uma semana 306 garrafas de água. Se destas Toni encheu 175 garrafas de água, quantas Carlos encheu?	7) 306 – 175
306 + 175 421	306 – 175 201
8. Dona Telma tinha 248 latas de refrigerante para vender. Ela ganhou alguns de Marcão. Ela tem agora 500. Quantas latas de refrigerante dona Telma ganhou de Marcão?	8) 500 – 248
248 + 500 17,00	500 – 248 200
9. Beatriz e Tomé têm o mesmo peso, mas em um mês Beatriz ganhou 326 gramas e Tomé ganhou 175 gramas. Quantos gramas Beatriz precisa perder para que eles voltem a ter o mesmo peso?	9) 326 – 175
326 − 175 261	326 – 175 151
10. Os primos Nil e Veloso moram no interior de Pernambuco, mas resolveram se encontrar em Recife. A viagem de Nil durou 512 minutos, enquanto a viagem de Veloso durou 248 minutos a menos. Quanto tempo durou a viagem de Veloso?	10) 512 – 248
512 + 248 760	512 – 248 336

Sujeito 5: Marcela

Ficha um: Lista de Problemas	Ficha dois: Lista de Contas
1. Edu tinha 327 figurinhas, ganhou 238 figurinhas de seu pai. Com quantas figurinhas ele ficou?	1) 327 + 238
1 327 + 238 565	1 327 + 238 565
2. Luís tem 405 bolas de gude. Maria tem 196 bolas de gude. Quantas bolas de gude têm as duas juntas?	2) 405 + 196
1 1 405 196 601	1 1 405 + 196 601
3. Sabrina tinha uma loja que vendia brincos, mas resolveu fechá-la. Dando 264 brincos para sua irmã, ficou com 503. Quantos brincos Sabrina tinha antes?	3) 264 + 503
503 + 264 767	264 + 503 767
4. Nara tinha R$ 896,00, emprestou para Fábio R$ 574,00, com quanto ela ficou?	4) 896 – 574
896 – 574 322	896 – 574 322
5. Dois amigos resolveram participar do rali Dakar, em modalidades diferentes, Lucas de carro e Jorge de moto. Até o momento Lucas tinha andado 348 quilômetros e Jorge 209 quilômetros. Jorge andou quantos quilômetros a menos que Lucas?	5) 358 – 209

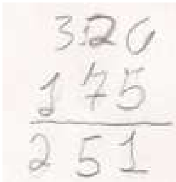
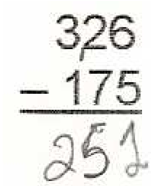
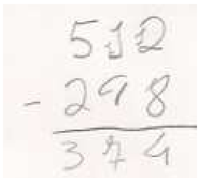
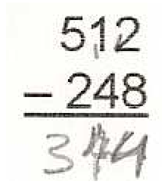
348 – 206 142	4 1 3~~5~~8 – 209 249
6. Bruno fez 640 pastéis. Ana fez 429 pastéis. Quantos pastéis Ana precisa fazer para ter a mesma quantidade que Bruno?	6) 640 – 429
3 6~~4~~0 – 429 211	640 – 429 229
7. Toni e Carlos encheram juntos em uma semana 306 garrafas de água. Se destas Toni encheu 175 garrafas de água, quantas Carlos encheu?	7) 306 – 175
2 1 ~~3~~06 – 175 131	306 – 175 271
8. Dona Telma tinha 248 latas de refrigerante para vender. Ela ganhou alguns de Marcão. Ela tem agora 500. Quantas latas de refrigerante dona Telma ganhou de Marcão?	8) 500 – 248
Dona Telma ganhou 252 latas de Marcão	4 9 1 ~~5~~~~0~~0 – 248 252
9. Beatriz e Tomé têm o mesmo peso, mas em um mês Beatriz ganhou 326 gramas e Tomé ganhou 175 gramas. Quantos gramas Beatriz precisa perder para que eles voltem a ter o mesmo peso?	9) 326 – 175
2 1 ~~3~~26 – 175 151	2 1 ~~3~~26 – 175 151

10. Os primos Nil e Veloso moram no interior de Pernambuco, mas resolveram se encontrar em Recife. A viagem de Nil durou 512 minutos, enquanto a viagem de Veloso durou 248 minutos a menos. Quanto tempo durou a viagem de Veloso?	10) 512 – 248
512 – 248 264	512 – 248 264

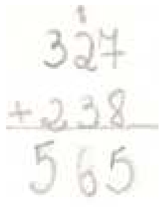
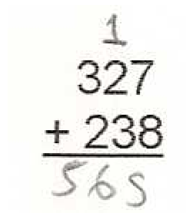
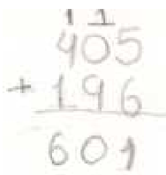
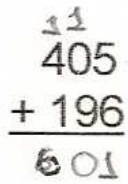
Sujeito 6: Petrus

Ficha um: Lista de Problemas	Ficha dois: Lista de Contas
1. Edu tinha 327 figurinhas, ganhou 238 figurinhas de seu pai. Com quantas figurinhas ele ficou?	1) 327 + 238
327 + 238 565	327 + 238 565
2. Luís tem 405 bolas de gude. Maria tem 196 bolas de gude. Quantas bolas de gude têm as duas juntas?	2) 405 + 196
405 + 196 601	405 + 196 601
3. Sabrina tinha uma loja que vendia brincos, mas resolveu fechá-la. Dando 264 brincos para sua irmã, ficou com 503. Quantos brincos Sabrina tinha antes?	3) 264 + 503
264 + 503 767	264 + 503 767

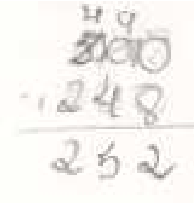
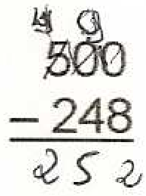
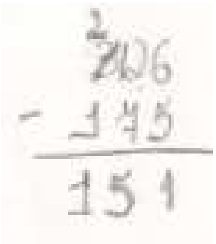
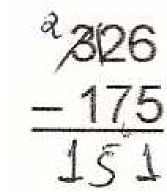
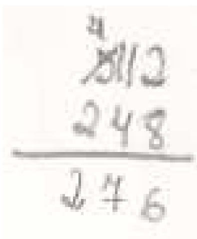
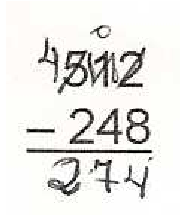
4. Nara tinha R$ 896,00, emprestou para Fábio R$ 574,00, com quanto ela ficou?	4) 896 – 574
896,00, - 574,00, 322,00,	896 – 574 322
5. Dois amigos resolveram participar do rali Dakar, em modalidades diferentes, Lucas de carro e Jorge de moto. Até o momento Lucas tinha andado 348 quilômetros e Jorge 209 quilômetros. Jorge andou quantos quilômetros a menos que Lucas?	5) 358 – 209
348 - 209 149	358 – 209 159
6. Bruno fez 640 pastéis. Ana fez 429 pastéis. Quantos pastéis Ana precisa fazer para ter a mesma quantidade que Bruno?	6) 640 – 429
429 + 211 640	640 – 429 221
7. Toni e Carlos encheram juntos em uma semana 306 garrafas de água. Se destas Toni encheu 175 garrafas de água, quantas Carlos encheu?	7) 306 – 175
175 + 131 306	306 – 175 231
8. Dona Telma tinha 248 latas de refrigerante para vender. Ela ganhou alguns de Marcão. Ela tem agora 500. Quantas latas de refrigerante dona Telma ganhou de Marcão?	8) 500 – 248
248 + 252 500	500 – 248 362

9. Beatriz e Tomé têm o mesmo peso, mas em um mês Beatriz ganhou 326 gramas e Tomé ganhou 175 gramas. Quantos gramas Beatriz precisa perder para que eles voltem a ter o mesmo peso?	9) 326 – 175
	
10. Os primos Nil e Veloso moram no interior de Pernambuco, mas resolveram se encontrar em Recife. A viagem de Nil durou 512 minutos, enquanto a viagem de Veloso durou 248 minutos a menos. Quanto tempo durou a viagem de Veloso?	10) 512 – 248
	

Sujeito 7: Roberta

Ficha um: Lista de Problemas	Ficha dois: Lista de Contas
1. Edu tinha 327 figurinhas, ganhou 238 figurinhas de seu pai. Com quantas figurinhas ele ficou?	1) 327 + 238
	
2. Luís tem 405 bolas de gude. Maria tem 196 bolas de gude. Quantas bolas de gude têm as duas juntas?	2) 405 + 196
	

3. Sabrina tinha uma loja que vendia brincos, mas resolveu fechá-la. Dando 264 brincos para sua irmã, ficou com 503. Quantos brincos Sabrina tinha antes?	3) 264 + 503
4 9 13 ~~503~~ 264. 239	264 + 503 767
4. Nara tinha R$ 896,00, emprestou para Fábio R$ 574,00, com quanto ela ficou?	4) 896 – 574
896,00 +574,00 322,00	896 – 574 322
5. Dois amigos resolveram participar do rali Dakar, em modalidades diferentes, Lucas de carro e Jorge de moto. Até o momento Lucas tinha andado 348 quilômetros e Jorge 209 quilômetros. Jorge andou quantos quilômetros a menos que Lucas?	5) 358 – 209
3 ~~4~~ 1 18 +209 139	4 3 ~~5~~ 18 – 209 149
6. Bruno fez 640 pastéis. Ana fez 429 pastéis. Quantos pastéis Ana precisa fazer para ter a mesma quantidade que Bruno?	6) 640 – 429
3 6 ~~4~~ 10 429 211	3 6 ~~4~~ 10 – 429 211
7. Toni e Carlos encheram juntos em uma semana 306 garrafas de água. Se destas Toni encheu 175 garrafas de água, quantas Carlos encheu?	7) 306 – 175
2 ~~3~~ 10 6 – 175 131	2 ~~3~~ 10 6 – 175 131

8. Dona Telma tinha 248 latas de refrigerante para vender. Ela ganhou alguns de Marcão. Ela tem agora 500. Quantas latas de refrigerante dona Telma ganhou de Marcão?	8) 500 – 248
	
9. Beatriz e Tomé têm o mesmo peso, mas em um mês Beatriz ganhou 326 gramas e Tomé ganhou 175 gramas. Quantos gramas Beatriz precisa perder para que eles voltem a ter o mesmo peso?	9) 326 – 175
	
10. Os primos Nil e Veloso moram no interior de Pernambuco, mas resolveram se encontrar em Recife. A viagem de Nil durou 512 minutos, enquanto a viagem de Veloso durou 248 minutos a menos. Quanto tempo durou a viagem de Veloso?	10) 512 – 248
	

Sujeito 8: Saulo

Ficha um: Lista de Problemas	Ficha dois: Lista de Contas
1. Edu tinha 327 figurinhas, ganhou 238 figurinhas de seu pai. Com quantas	1) 327 + 238

figurinhas ele ficou?	
327 + 238 565	1 327 + 238 565
2. Luís tem 405 bolas de gude. Maria tem 196 bolas de gude. Quantas bolas de gude têm as duas juntas?	2) 405 + 196
1 1 405 + 196 601	1 1 405 + 196 601
3. Sabrina tinha uma loja que vendia brincos, mas resolveu fechá-la. Dando 264 brincos para sua irmã, ficou com 503. Quantos brincos Sabrina tinha antes?	3) 264 + 503
239.	264 + 503 761
4. Nara tinha R$ 896,00, emprestou para Fábio R$ 574,00, com quanto ela ficou?	4) 896 – 574
322.	896 – 574 322
5. Dois amigos resolveram participar do rali Dakar, em modalidades diferentes, Lucas de carro e Jorge de moto. Até o momento Lucas tinha andado 348 quilômetros e Jorge 209 quilômetros. Jorge andou quantos quilômetros a menos que Lucas?	5) 358 – 209
139.	358 – 209 601

6. Bruno fez 640 pastéis. Ana fez 429 pastéis. Quantos pastéis Ana precisa fazer para ter a mesma quantidade que Bruno?	6) 640 – 429
211	640 – 429 221
7. Toni e Carlos encheram juntos em uma semana 306 garrafas de água. Se destas Toni encheu 175 garrafas de água, quantas Carlos encheu?	7) 306 – 175
181.	306 – 175 231
8. Dona Telma tinha 248 latas de refrigerante para vender. Ela ganhou alguns de Marcão. Ela tem agora 500. Quantas latas de refrigerante dona Telma ganhou de Marcão?	8) 500 – 248
252.	500 – 248 362
9. Beatriz e Tomé têm o mesmo peso, mas em um mês Beatriz ganhou 326 gramas e Tomé ganhou 175 gramas. Quantos gramas Beatriz precisa perder para que eles voltem a ter o mesmo peso?	9) 326 – 175
251.	326 – 175 255
10. Os primos Nil e Veloso moram no interior de Pernambuco, mas resolveram se encontrar em Recife. A viagem de Nil durou 512 minutos, enquanto a viagem de Veloso durou 248 minutos a menos. Quanto tempo durou a viagem de Veloso?	10) 512 – 248
264.	512 – 248 336

Sujeito 9: Wilma

Ficha um: Lista de Problemas	Ficha dois: Lista de Contas
1. Edu tinha 327 figurinhas, ganhou 238 figurinhas de seu pai. Com quantas figurinhas ele ficou?	1) 327 + 238
1 327 238 565	1 327 + 238 565
2. Luís tem 405 bolas de gude. Maria tem 196 bolas de gude. Quantas bolas de gude têm as duas juntas?	2) 405 + 196
1 1 405 luís 196 maria 601	1 1 405 + 196 601
3. Sabrina tinha uma loja que vendia brincos, mas resolveu fechá-la. Dando 264 brincos para sua irmã, ficou com 503. Quantos brincos Sabrina tinha antes?	3) 264 + 503
503 − 264 767	264 + 503 767
4. Nara tinha R$ 896,00, emprestou para Fábio R$ 574,00, com quanto ela ficou?	4) 896 – 574
− 896,00 574,00 322,00	896 – 574 322
5. Dois amigos resolveram participar do rali Dakar, em modalidades diferentes, Lucas de carro e Jorge de moto. Até o momento Lucas tinha andado 348 quilômetros e Jorge 209 quilômetros. Jorge andou quantos quilômetros a	5) 358 – 209

menos que Lucas?	
348 quilômitros lucas 209 yorge. 101	358 – 209 101
6. Bruno fez 640 pastéis. Ana fez 429 pastéis. Quantos pastéis Ana precisa fazer para ter a mesma quantidade que Bruno?	6) 640 – 429
– 640 429 220	640 – 429 220
7. Toni e Carlos encheram juntos em uma semana 306 garrafas de água. Se destas Toni encheu 175 garrafas de água, quantas Carlos encheu?	7) 306 – 175
306 175 201	306 – 175 201
8. Dona Telma tinha 248 latas de refrigerante para vender. Ela ganhou alguns de Marcão. Ela tem agora 500. Quantas latas de refrigerante dona Telma ganhou de Marcão?	8) 500 – 248
248 500 251	500 – 248 300
9. Beatriz e Tomé têm o mesmo peso, mas em um mês Beatriz ganhou 326 gramas e Tomé ganhou 175 gramas. Quantos gramas Beatriz precisa perder para que eles voltem a ter o mesmo peso?	9) 326 – 175
326 – 175 251	326 – 175 251

10. Os primos Nil e Veloso moram no interior de Pernambuco, mas resolveram se encontrar em Recife. A viagem de Nil durou 512 minutos, enquanto a viagem de Veloso durou 248 minutos a menos. Quanto tempo durou a viagem de Veloso?	10) $\begin{array}{r} 512 \\ \underline{-\,248} \end{array}$
$\begin{array}{r} 512 \\ \underline{248} \\ 336 \end{array}$	$\begin{array}{r} 512 \\ \underline{-\,248} \\ 336 \end{array}$