UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

DOUTORADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Jadilson Ramos de Almeida

NÍVEIS DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO: UM MODELO PARA OS PROBLEMAS DE PARTILHA DE QUANTIDADE

Recife

2016

Jadilson Ramos de Almeida

NÍVEIS DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO: UM MODELO PARA OS PROBLEMAS DE PARTILHA DE QUANTIDADE

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências como requisito parcial para a obtenção do título de doutor em Ensino de Ciências e Matemática

Orientador: Dr. Marcelo Câmara dos Santos

Recife

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

A447n Almeida, Jadilson Ramos de
Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico: um modelo para os problemas de partilha de quantidade / Jadilson Ramos de Almeida. – 2016.
200 f. : il.

Orientador: Marcelo Câmara dos Santos.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Recife, BR-PE, 2016.
Inclui referências e apêndice(s)

1. Modelo 2. Pensamento algébrico 3. Níveis de desenvolvimento 4. Problemas de partilha I. Santos, Marcelo Câmara dos, orient. II. Título

CDD 370

JADILSON RAMOS DE ALMEIDA

NÍVEIS DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO: UM MODELO PARA OS PROBLEMAS DE PARTILHA DE QUANTIDADE

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE, submetida à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

____

Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos
1º examinador – Presidente/Orientador – UFPE/UFRPE

____

Profª. Drª. Barbara Lutaif Bianchini
2ª Examinadora Externa – PUC – SP

____

Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes
3º Examinador externo – UFCG

____

Profª. Drª. Anna Paula de Avelar Brito Lima
4ª Examinadora Interna – UFRPE

____

Profª. Drª. Mônica Maria Lins Santiago
5ª Examinadora Interna – UFRPE

Data da aprovação: 28 de novembro de 2016

Dedico esse trabalho à Deus
e à minha família, em especial
aos pequenos Arthur e Pedro,
fontes de alegria e amor.

Agradecimentos

Desde o início desse trabalho que sonho com esse momento, o de agradecer àqueles que estiveram juntos comigo nessa longa caminhada, partilhando conhecimento, alegrias, dores, frustações e conquistas. Sei que aqui não é o final dessa jornada, sei que essa pesquisa renderá frutos no futuro. Deixo aqui meus sinceros agradecimentos:

A **Deus**, criador e regente desse universo maravilho que nos encontramos. Sem Ele nada disso seria possível. A ele toda honra e glória.

À minha **família**, pela compreensão e carinho. Em especial a minha **mãe, Rita**, que foi a grande responsável pela pessoa que sou hoje, muito obrigado por tudo, pelo amor, cuidado, broncas, conselhos.

À minha amiga, namorada, amante, e esposa **Pollyanna**, que desde o início de minha vida de pesquisador esteve sempre ao meu lado, dividindo comigo as tristezas e alegrias, as perdas e as conquistas dessa caminhada. Obrigado pela compreensão nas ausências, por me escutar nos momentos de desespero, por me incentivar quando eu queria desistir.

Ao meu orientador, professor **Marcelo Câmara**, que desde o mestrado vem me acompanhando e me ensinando a ser um pesquisador. Obrigado pelas orientações, conversas e sugestões no desenvolvimento desse trabalho. Espero que essa parceria continue e que renda muitas pesquisas futuras.

Aos colegas **Daniella, Edelweis, Flávia, Luciana, Melquesedeque e Risonilta** da quarta turma de doutorado em Ensino de Ciências e Matemática da UFRPE, que muito me ajudaram nessa jornada.

Aos colegas do grupo de pesquisa **Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática**, pelas valiosas contribuições no percurso da pesquisa. Que esse grupo continue contribuindo na formação de bons professores.

Às professoras **Anna Paula, Mônica Lins e Barbara Bianchini** e ao professor **Marcus Bessa** pelas contribuições feitas na qualificação do projeto e na defesa da tese.

Às **professoras e professores** do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da UFRPE pelas sugestões e contrições no desenvolvimento dessa pesquisa.

À **UFRPE** por me oportunizar esse momento de crescimento profissional.

Às **gestões** e aos **professores** das escolas que permitiram a coleta de dados em suas salas de aula. Muito obrigado.

Aos meus colegas de trabalho do **Departamento de Educação** da UFRPE por me acolher durante o processo de construção dessa pesquisa e por acreditar no meu trabalho.

"Nosso cérebro é o melhor brinquedo já criado: nele se encontra todos os segredos, inclusive o da felicidade"

Charlie Chaplin

RESUMO

Esse trabalho de tese teve por objetivo propor um modelo que possibilite a identificação de níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico revelado por estudantes ao resolverem problemas de partilha. Nossa pesquisa foi realizada em duas etapas. Na primeira construímos uma versão *a priori* do modelo após a análise dos resultados da pesquisa de Oliveira e Câmara (2011) e de Santos Junior (2013) e das respostas de 342 alunos do 6º ano do ensino fundamental, sendo 195 alunos brasileiros de três escolas da região metropolitana do Recife e 147 alunos canadenses de quatro escolas da província do Québec a um questionário composto por seis problemas de partilha. Na segunda etapa buscamos validar nosso modelo. Para isso, reaplicamos o questionário utilizado na primeira etapa a 343 alunos dos anos finais do ensino fundamental de duas escolas da cidade do Recife, sendo 72 do 6º ano, 83 do 7º ano, 93 do 8º ano e 95 do 9º ano e realizamos uma entrevista de explicitação com oito alunos, sendo dois de cada nível do modelo. Ao final chegamos à proposição de um modelo de níveis de pensamento algébrico que vai desde o nível 0, caracterizado pela ausência de pensamento algébrico, passando por um nível incipiente de pensamento algébrico (nível 1), por um nível intermediário (nível 2) e por um nível consolidado de pensamento algébrico (nível 3). Propomos, também, para cada nível, a partir do nível 1, três subníveis, que denominamos de subníveis A, B e C.

Palavras-Chave: Modelo; Pensamento algébrico; Níveis de desenvolvimento; Problemas de partilha.

ABSTRACT

This thesis aimed to propose a model that allows the identification of levels of development of algebraic thinking revealed by students to solve partition problems. Our research was conducted in two stages. The first built a previous version of the model after analysis of Oliveira and Câmara (2011) and Santos Junior (2013) results, and the responses of 342 students from the 6th grade of elementary school, 195 Brazilian students from three schools of the metropolitan region of Recife and 147 Canadian students from four schools in the province of Quebec to a questionnaire composed of six partition problems. In the second stage we seek to validate our model. For this, we reapplied the questionnaire used in the first stage to 343 students of the final years of elementary education at two schools in the city of Recife, 72 of the 6th year, 83 of the 7th year, 93 of the 8th year and 95 the 9th year and conducted a explicitness interview with eight students, two from each level of the model. At the end we arrive at the proposition of an algebraic thinking model that goes from level 0, characterized by the absence of algebraic thinking, through an incipient level of algebraic thinking (level 1) for an intermediate level (level 2) and a consolidated level of algebraic thinking (level 3). We also propose to each level, from level 1, three sublevels, which we call sublevels A, B and C.

Keywords: Model; algebraic thinking; levels of development; partition problems.

RÉSUMÉ

Ce travail de thèse a eu pour objectif de proposer un modèle rendant possible l'identification de niveaux de développement de la pensée algébrique révélés par des élèves lors de résolution de problèmes de partage. Notre recherche s'est effectuée en deux étapes. Dans la première, nous avons construit une version *a priori* du modèle après avoir analysé les résultats de la recherche de Oliveira et Câmara (2011) et de Santos Junior (2013) et les réponses à un questionnaire composé de six problèmes de partage de 342 élèves de 6e année (équivalent à la 6e en France), c'est-à-dire 195 élèves brésiliens de trois écoles de la Région Métropolitaine de Recife et 147 élèves canadiens de quatre écoles de la province de Québec. Lors de la deuxième étape, nous avons cherché à valider notre modèle. Pour cela, nous avons appliqué de nouveau le questionnaire utilisé lors de la première étape à 343 élèves des dernières années de l'enseignement fondamental (jusqu'à la 3e en France) de deux écoles de la ville de Recife, dont 72 de 6e année (en France 6e), 83 de 7e année (en France 5e), 93 de 8e année (en France 4e) et 95 de 9e année (en France 3e) et nous avons réalisé un entretien d'explication avec huit élèves, deux de chaque niveau du modèle. A la fin, nous sommes arrivés à la proposition d'un modèle de niveaux de pensée algébrique qui va du niveau 0, caractérisé par l'absence de pensée algébrique, passant par un niveau initial de pensée algébrique (niveau 1), un niveau intermédiaire (niveau 2) et un niveau consolidé (niveau 3). Nous proposons également pour chaque niveau, à partir du niveau 1, trois sous-niveaux que nous appelons sous-niveaux A, B et C.

Mots-clés: Modèle; Pensée algébrique; Niveaux de développement; Problèmes de partage.

SUMÁRIO

Introdução

A matemática sempre foi considerada de difícil compreensão por parte dos estudantes. Em alguns casos, a matemática era, e talvez ainda seja, determinante no futuro escolar de algumas crianças. Avaliações externas de larga escala no Brasil, como o SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) em nível nacional, e o SAEPE (Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco) em nível estadual, revelam baixos índices no rendimento por parte dos estudantes no que se refere à matemática.

Com relação à álgebra, essas mesmas avaliações mostram, desde a década de noventa, que as dificuldades dos estudantes, neste campo de conhecimento matemático, são ainda maiores. Por exemplo, o SAEPE revela, em seus resultados, que apenas 21,4% dos alunos do 9º ano do ensino fundamental conseguem identificar uma equação do 2º grau que expressa um problema, e que apenas 22% conseguem identificar uma equação do 1º grau que representa a conversão de um problema em linguagem natural (ALMEIDA; CÂMARA, 2014b).

Além disso, pesquisadores, como Radford (2002) e Lins e Gimenez (2005), consideram que o fracasso em álgebra significa, muitas vezes, o fracasso absoluto na escola, e que uma das principais dificuldades ao aprendizado da álgebra é que a álgebra escolar representa, muitas vezes, um "momento de seleção" na educação básica.

Talvez por conta disso, o ensino de álgebra tenha ganhado destaque nos atuais currículos da educação básica. Porém, durante muito tempo o ensino de álgebra foi, e em muitos casos ainda é, principalmente no Brasil, essencialmente voltado para a manipulação mecânica de sua linguagem; prevalecia, como nos colocam Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), o transformismo algébrico. Essa maneira de se trabalhar a álgebra reduz o "pensamento algébrico"[1] à "linguagem simbólica algébrica"[2], formada por símbolos abstratos e sem sentido. Entretanto, pesquisas apontam que pensar algebricamente não tem, necessariamente, uma relação biunívoca com essa

---

[1] Nessa tese estamos adotando pensamento algébrico como uma ação exclusivamente humana revelada por meio das seguintes características: estabelecer relações; generalizar; modelar; operar com o desconhecido como se fosse conhecido; e construir significado para os objetos e a linguagem simbólica algébrica. Mais sobre essa caracterização é encontrado no capítulo 3.

[2] Nessa tese estamos adotando linguagem algébrica simbólica a normalmente utilizada atualmente nos ambientes escolares, ou seja, formada por símbolos essencialmente algébricos, como letras (que podem representar valores desconhecidos, como incógnitas e variáveis), números, sinais das operações aritméticas, sinal de igualdade, etc.

linguagem. O estudante tem condições de revelar essa forma especial de pensar sem, necessariamente, ser por meio de uma linguagem simbólica algébrica (KIERAN, 1992, 2007, CANAVARRO, 2007, OLIVEIRA; CÂMARA, 2011, SILVA; SAVIOLI, 2012).

A partir do final da década de 80 e início de 1990 as pesquisas em educação matemática começam a apontar que no cerne do ensino de álgebra deve estar o pensamento algébrico, uma vez que pensar algebricamente possibilita construir sentido para os objetos algébricos e suas representações, o que dificilmente acontece quando a ênfase está na linguagem simbólica algébrica (LINS, 1992; ARCAVI, 2005).

Diante disso, um dos objetivos principais para o ensino da álgebra na educação básica passa a ser o de desenvolver o pensamento algébrico. Isso pode ser confirmado em algumas propostas curriculares mais atuais, como os Parâmetros Curriculares de Matemática para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) e a segunda versão da Base Nacional Comum Curricular[3] – BNCC (BRASIL, 2016).

Além disso, muitas são as pesquisas realizadas com o propósito de entender o desenvolvimento do pensamento algébrico em crianças. Elas vêm mostrando a necessidade de diversificar as atividades propostas aos estudantes com o intuito de desenvolver esse raciocínio matemático e indicam que para levar o estudante a desenvolver essa forma particular de pensar, o mais importante é o trabalho com a resolução de problemas, em detrimento ao transformismo algébrico. (PONTE; VELEZ, 2011; SILVA; SAVIOLI, 2012; PEREIRA; BRAGA, 2012; ANDRADE; BECHER, 2011; BORRALHO; BARBOSA, 2011).

Becher e Groenwald (2009), em uma pesquisa que tinha por objetivo identificar as competências e habilidades algébricas[4] desenvolvidas durante o ensino fundamental por estudantes do 1º ano do ensino médio, perceberam que os alunos “apresentam maturidade suficiente para perceberem variações e até mesmo para procederem a sua representação por meio do uso da álgebra, no entanto não conseguem fazer isso quando se deparam com situações problemas” (p. 7). Isso se

[3] A BNCC vem sendo discutida e construída e atualmente se encontra em sua segunda versão.

[4] Para esses pesquisadores competências e habilidades algébricas são como características do pensamento algébrico, e as dividem em: compreender representações algébricas; operar algebricamente; reconhecer/representar padrões; e resolver problemas algebricamente.

deve, segundo Kieran (1992), a um ensino fundamental voltado essencialmente para a manipulação mecânica, que leva o estudante a memorizar procedimentos, sem compreender o que está fazendo e nem como utilizar isso em novas situações.

Diante desse cenário, acreditamos que o ensino de conceitos algébricos, principalmente aqueles que têm por objetivo o desenvolvimento do pensamento algébrico, deva ser feito por meio da resolução de problemas, uma vez que pesquisas apontam que o estudante não precisa, necessariamente, conhecer a linguagem simbólica algébrica para pensar algebricamente (CÂMARA; OLIVEIRA, 2010; OLIVEIRA; CÂMARA, 2011; SILVA; SAVIOLI, 2012).

Em uma pesquisa que tinha por objetivo compreender como alunos do 5º ano do ensino fundamental lidam com tarefas que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico, Silva e Savioli (2012) observaram que, por meio das respostas apresentadas e das indagações e afirmações dos estudantes durante a resolução das tarefas, os estudantes investigados têm condições de lidar e de desenvolver aspectos relacionados ao pensamento algébrico, mesmo não apresentando linguagem simbólica algébrica.

Resultados parecidos foram identificados nas pesquisas de Oliveira e Câmara (2011), que ao investigarem as estratégias de crianças na resolução de problemas de partilha de quantidade, observaram que mesmo não utilizando um registro algébrico, algumas crianças, que ainda não tinham entrado em contato formalmente com a álgebra, mobilizavam elementos do pensamento algébrico.

Borralho e Barbosa (2011), em um artigo que pretendeu compreender o significado da utilização, em aulas de matemática, de tarefas investigativas utilizando padrões, perceberam que esse tipo de tarefa pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Já Silva (2012), em um estudo que objetivava evidenciar indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico no tópico equações polinomiais do 1º grau do caderno do professor de matemática adotado na rede pública do Estado de São Paulo, concluiu que uma das atividades propostas nesse caderno que possibilita o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos é a resolução de problemas envolvendo equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita.

Em outra pesquisa que buscou compreender como se desenvolve o pensamento algébrico de alunos portugueses do 10º ano, equivalente ao 1º ano do ensino médio no Brasil, no estudo do tema das funções, por meio da resolução de problemas com recurso às tecnologias da informação e comunicação (TIC), Nogueira (2010) percebeu que a resolução de problemas e as TIC podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico, uma vez que a perspectiva dinâmica das TIC leva os alunos a “interpretar, pensar, abstrair, conjecturar/refutar resultados e processos e a aplicar o que aprendem a situações do seu cotidiano” (p. 4).

Silva (2007) buscou investigar uma abordagem de ensino dos conceitos de incógnita, variável e equações polinomiais do 1º grau para alunos da educação de jovens e adultos. Esse pesquisador percebeu que o processo de ensino e de aprendizagem de conceitos algébricos ganha força quando se inicia a partir da resolução de situações concretas pertencentes ao cotidiano do aluno, reforçando nossa hipótese de que não é necessário o aluno conhecer a linguagem simbólica algébrica para pensar algebricamente e, consequentemente, desenvolver essa forma de pensar.

Já Grecco (2008), em uma pesquisa que tinha por objetivo apresentar uma proposta de sequência didática destinada a alunos do 7º ano do ensino fundamental para a introdução à álgebra, observou que a resolução de problemas envolvendo a generalização e a construção de expressões algébricas a partir de padrões e sequências pode favorecer o desenvolvimento dessa forma de pensar. Resultados parecidos foram obtidos no estudo de Kern (2008), que ao investigar uma proposta de ensino voltada à introdução da álgebra por meio de relações funcionais, concluiu que o contato com problemas possibilita um significado maior para conceitos algébricos, como o de constante, além de potencializar o desenvolvimento do pensamento algébrico em crianças.

Em outro estudo, que tinha por objetivo apresentar uma proposta de ensino e de aprendizagem para o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de sequências de padrões geométricos, Modanez (2003) constatou, assim como as pesquisas de Grecco (2008) e Kern (2008), que o desenvolvimento do pensamento algébrico em iniciantes em álgebra é potencializado se o professor conseguir “engajar o aluno em atividades que inter-relacionem diferentes aspectos da álgebra, como a resolução de problemas, e não só para encontrar o valor numérico de uma expressão algébrica ou atividades meramente mecânicas (p. 86).

Portanto, essas pesquisas revelam que a melhor forma de levar o aluno a desenvolver o pensamento algébrico é o trabalho com a resolução de problemas variados. Porém, como saber se um aluno desenvolve ou não essa forma de pensar?

Acreditamos que isso só é possível se tivermos um instrumento que nos possibilite identificar o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno em um determinado momento.

Alguns pesquisadores, como Brito Lima (1996), Oliveira e Câmara (2011), Fiorentini, Fernandes e Cristovão, (2005) e Godino et al. (2014) já apontam, em suas pesquisas, indícios de que é possível a construção de um instrumento que nos possibilite identificar qual o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico que um determinado aluno se encontra.

Em uma pesquisa que teve por objetivo investigar a resolução de problemas envolvendo igualdades por crianças de 1ª série (atual 2º ano) à 6ª série (atual 7º ano) do ensino fundamental, analisando como as formas de representação utilizadas pela criança podem facilitar a compreensão dos dados e relações de tais problemas, Brito Lima (1996) apontou para uma evolução na compreensão, por parte dos alunos, dos problemas algébricos, revelada, principalmente, ao longo da escolarização.

Já Oliveira e Câmara (2011), que tiveram em sua pesquisa o objetivo de analisar as estratégias adotadas por alunos do 6º ano na resolução de problemas de partilha, perceberam que alguns alunos adotam estratégias mais sofisticadas que outros, indicando existir, entre eles, níveis de desenvolvimento na compreensão desse tipo de problema.

Enquanto Brito Lima (1996) e Oliveira e Câmara (2011) apontam para uma evolução na compreensão por parte dos alunos dos problemas de estrutura algébrica, Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) e Godino et al. (2014) já indicam a existência de níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico revelados pelos alunos ao se depararem com um problema desse tipo de estrutura.

Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) revelam, em uma pesquisa que teve por objetivo investigar as potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no ensino de álgebra elementar, que os alunos passam por fases de desenvolvimento do pensamento algébrico, e que eles podem estar, em um determinado momento, em uma fase mais ou menos desenvolvida. Porém, em nenhum momento o objetivo dessa pesquisa foi de investigar essas fases, como é possível verificar no capítulo 4 dessa tese, que realiza uma análise mais detalhada desse estudo e da pesquisa de Godino et al. (2014).

Em seus estudos, Godino et al. (2014) tiveram por objetivo apresentar um modelo no qual se diferenciam níveis de pensamento algébrico elementar. Entretanto, a intenção desses pesquisadores foi de ter um modelo para ser utilizado na formação de professores, uma vez que eles acreditam que esses profissionais têm que ter o conhecimento de qual nível de pensamento algébrico seus alunos se encontram para só então propor situações que os levam a desenvolver melhor essa forma de pensar.

Porém, Godino et al. (2014) utilizam, na construção de seu modelo, possíveis respostas de alunos a determinadas situações, sem, em nenhum momento, realizar um estudo empírico com sujeitos. Além disso, eles utilizam, na caracterização do modelo, diferentes problemas de estrutura algébrica. Porém, acreditamos que um sujeito possa estar, em determinado momento, em um nível de desenvolvimento do pensamento algébrico quando se depara com uma situação de um tipo, como as de generalização de sequências, e em outro nível quando se depara com outro tipo de situação, como, por exemplo, um problema de partilha, dependendo da experiência que esse sujeito já teve com esses tipos de situações (BLANTON; KAPUT, 2005; RADFORD, 2009).

Diante disso, acreditamos que nossa pesquisa se diferencia dessas últimas por propor um modelo a partir das respostas de alunos dos anos finais do ensino fundamental a um tipo específico de problemas de estrutura algébrica, os problemas de partilha.

Diante disso temos, nessa pesquisa, o objetivo de "**propor um modelo que possibilite a identificação de níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico revelado por estudantes ao resolverem problemas de partilha**".

Para alcançar esse objetivo, nosso texto foi divido em sete capítulos. No primeiro, intitulado, "Problemas de estrutura algébrica e problemas de partilha" temos a caracterização de problemas de estrutura algébrica e de seus tipos, finalizando com a caracterização de problema de partilha, dos níveis de dificuldades desses problemas e da justificativa para a escolha desse tipo de problema na construção de nosso modelo.

No segundo capítulo, denominado "Álgebra escolar", dissertamos sobre a caracterização desse campo da matemática, além de refletir sobre o ensino de álgebra voltado para a linguagem simbólica algébrica e para o pensamento algébrico, finalizando com a álgebra em algumas orientações curriculares nacionais.

Já o capítulo 3 versa sobre "Pensamento algébrico", e teve por objetivo, a partir das perspectivas de Rômulo Lins, de James Kaput e de Luis Radford, construir nossa caracterização de pensamento algébrico.

No quarto capítulo, intitulado de "Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico: indícios em algumas pesquisas", temos uma análise de algumas pesquisas que apontam para a possibilidade de proposição de um modelo que possibilite a identificação de níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos.

No quinto capítulo temos a construção da "Versão *a priori* do modelo". Nele é construída, a partir dos resultados das pesquisas de Oliveira e Câmara (2011) e de Santos Junior (2013), além da análise da produção escrita de 342 alunos do 6º ano do ensino fundamental, uma versão *a priori* do modelo proposto nessa tese, que, no capítulo 6, intitulado "Versão final do modelo", é validado a partir da análise na produção escrita de 343 alunos, sendo 72 do 6º ano, 83 do 7º ano, 93 do 8º ano e 95 do 9º ano do ensino fundamental, e da análise das entrevistas realizadas com oito alunos.

Por fim temos, no capítulo 7, nossas "Considerações finais", seguidas pelas "Referências" e "Apêndices".

Capítulo 1

Problemas de estrutura algébrica e problemas de partilha

1.1. Introdução

Nosso trabalho busca construir um modelo que possibilite a identificação de níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico revelado por alunos da educação básica ao resolverem um tipo especial de problema de estrutura algébrica, os problemas de partilha. Porém, o que caracteriza um problema de partilha? E, por que problemas de partilha? Antes de responder a essas questões, é necessário entender o que chamamos de problema de estrutura algébrica na educação matemática. Nesse sentido temos, a seguir, uma breve caracterização de problema de estrutura algébrica, para, em seguida, caracterizarmos problemas de partilha e justificarmos a escolha por esse tipo de problema.

1.2. Problemas de estrutura algébrica

Para alguns autores, como Da Rocha Falcão (1997), os problemas de estrutura algébrica são aqueles que para sua resolução os procedimentos aritméticos mostram-se demorados, cansativos, enfadonhos ou, mesmo, insuficientes. Nesse caso, os procedimentos algébricos são utilizados para facilitar a resolução desses problemas. Essa caracterização de problemas de estrutura algébrica é próxima das primeiras caracterizações de problemas algébricos encontrados na literatura, como nos coloca Radford (2011b). Esse pesquisador relata que as técnicas algébricas surgiram para resolver os problemas em que os procedimentos aritméticos ou geométricos eram demorados ou insuficientes.

Booth (1995) destaca que existe uma diferença entre a atividade aritmética e a algébrica. Para essa pesquisadora, o foco da atividade aritmética "é encontrar determinadas respostas numéricas particulares" (p. 24). Já nas atividades algébricas é diferente, o "foco é estabelecer procedimentos e relações e expressá-las numa forma simplificada geral" (p. 24). A ideia de estabelecer relações, como características dos problemas algébricos, é partilhada por outros pesquisadores, como Marchand e Bednarz (1999), Gama (2003) e Ruiz, Bosch e Gascón (2010).

Para Ruiz, Bosch e Gascón (2010), o que diferencia um problema aritmético de um algébrico é que o primeiro pode ser resolvido mediante uma cadeia de operações aritméticas (+, –, x, /, etc.), executadas a partir dos dados do problema, dados esses que costumam ser quantidades conhecidas de certas magnitudes. As técnicas clássicas de resolução recorrem a discursos verbais e operações aritméticas para calcular a quantidade desconhecida.

Já em um problema algébrico, nem todos os dados são numéricos (alguns são relações) e, também, o desconhecido nem sempre é um resultado numérico. Por conta disso, na resolução de um problema desse tipo é necessário o estabelecimento de relações.

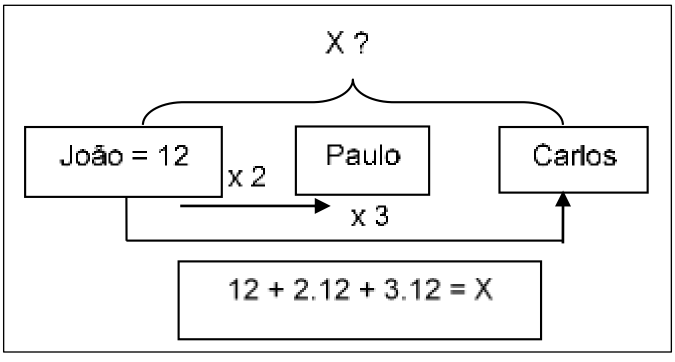
Indo ao encontro dessa caracterização, Gama (2003) e Marchand e Bednarz (1999) relatam que em um problema de estrutura algébrica se faz necessário a construção de relações entre os dados (as informações) do enunciado para construir, por exemplo, uma equação equivalente ao problema. Portanto, para esses autores, um problema é caracterizado como problema de estrutura algébrica quando é necessário estabelecer relações entre as informações contidas no enunciado no momento que se deseja convertê-lo em uma linguagem matemática, como a simbólica algébrica, por exemplo.

Ainda de acordo com Marchand e Bednarz (1999) o que diferencia um problema de estrutura algébrica de um problema aritmético, é que em um problema aritmético o estudante parte de valores conhecidos para determinar valores desconhecidos, como no exemplo 1 a seguir.

<u>*Exemplo 1*</u>*. João tem 12 figurinhas, Paulo tem o dobro de figurinhas de João e Carlos tem o triplo de figurinhas de João. Quantas figurinhas os três têm, ao todo?*

Esse problema pode ser representado por duas operações de multiplicação e duas de adição, como podemos visualizar no esquema a seguir.

Figura 1 – Esquema do problema de extrutura aritmética do exemplo 1.



Fonte: o autor

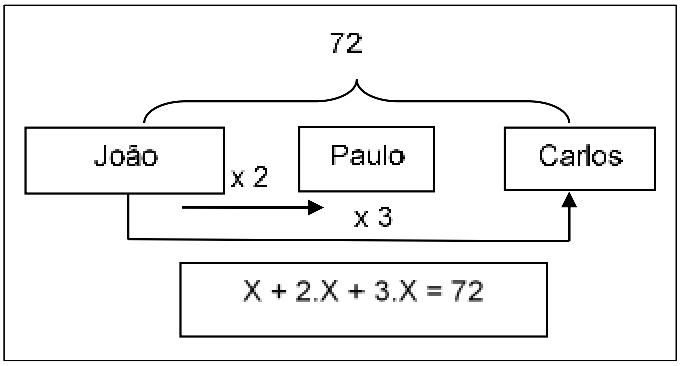
O estudante chega à resposta por ter um valor conhecido, o número de figurinhas de João, que se relaciona com os outros elementos do enunciado.

Já em um problema de estrutura algébrica, o estudante é levado a partir de "relações para se chegar ao valor desconhecido, em um processo inverso ao problema do tipo aritmético" (CÂMARA; OLIVEIRA, 2010, p. 3). Podemos verificar essa situação no exemplo 2 a seguir.

<u>Exemplo 2</u>. João, Paulo e Carlos têm, juntos, 72 figurinhas. Paulo tem o dobro de figurinhas de João e Carlos tem o triplo de figurinhas de João. Quantas figurinhas têm cada um?

Em uma situação desse tipo, o aluno não pode partir de um valor conhecido, mas, sim, deve estabelecer relações entre os dados do problema, a fim de encontrar uma equação que represente o enunciado. Por exemplo, o problema acima poderia ser representado pelo esquema a seguir, e convertido em uma equação polinomial do 1º grau.

Figura 2 – Esquema do problema de extrutura algébrica do exemplo 2.



Fonte: o autor

Portanto, em um problema de estrutura algébrica, "os valores desconhecidos (incógnitas) não mais poderiam (ou deveriam) ser obtidos por uma sequência de operações aritméticas, sendo necessário estabelecer uma equação que expresse as relações" (CÂMARA; OLIVEIRA, 2010, p. 3).

Entretanto, vale lembrar que, quando nos referimos a problema de estrutura algébrica, não significa dizer que esse tipo de problema seja resolvido apenas por procedimentos essencialmente algébricos, mas, sim, que os procedimentos aritméticos se tornam cansativos, pouco econômicos ou até mesmo, em alguns casos, insuficientes. Nesse sentido, consideramos problemas de estrutura algébrica aqueles em que os procedimentos algébricos facilitam em sua resolução.

Porém, salientamos que para utilizar procedimentos aritméticos na resolução de problemas algébricos é necessário, assim como nos procedimentos algébricos, estabelecer as relações existentes entre as informações do enunciado. Por exemplo, o exemplo 2 pode ser resolvido pela estratégia atribuir valores, caracterizada por Câmara e Oliveira (2010) como uma estratégia aritmética. Vejamos o exemplo 2 sendo resolvido por essa estratégia.

Resposta ao exemplo 2 utilizando a estratégia atribuir valores:

"Supondo que João tenha 10 figurinhas, logo Paulo tem 20 e Carlos tem 30. Somando a quantidade de figurinhas, temos: 10 + 20 + 30 = 60. Logo, João não pode ter 10 figurinhas".

"Supondo, agora, que João tenha 12 figurinhas, logo Paulo tem 24 e Carlos tem 36. Somando a quantidade de figurinhas, temos: 12 + 24 + 36 = 72.

Portanto, João tem 12 figurinhas, Paulo tem 24 figurinhas, o dobro de João, e Carlos tem 36 figurinhas, o triplo de João".

Percebemos, nesse caso, que diferentemente de um problema aritmético, como o exemplo 1, em que o estudante parte de um valor conhecido, em um problema algébrico, como o exemplo 2, o aluno não tem um valor conhecido para iniciar a resolução. É necessário, quando ele adota a estratégia atribuir valores, supor a quantidade de figurinhas de João e estabelecer as relações entre a quantidade de figurinhas de Paulo e Carlos com a quantidade de João. Além de estabelecer a relação entre a soma das quantidades das três personagens com o total de figurinhas.

1.3. Tipos de problemas de estrutura algébrica

Marchand e Bednarz (1999), em uma pesquisa realizada na província do Québec, no Canadá, conseguiram identificar e classificar os problemas de estrutura algébrica em três classes, os "*problemas de transformação*"; os "*problemas de taxa*" e os "*problemas de partilha*".

Nessa pesquisa, Marchand e Bednarz analisaram os problemas propostos para o ensino de álgebra em duas coleções de livros didáticos para o secundário, equivalente aos anos finais do ensino fundamental no Brasil. Essas autoras perceberam também, em suas pesquisas, que os livros didáticos canadenses propõem um tipo de problema para o ensino de álgebra que não pode ser considerado, de acordo com a caracterização adotada, um problema algébrico, que, por conta disso, elas chamaram de *"falsos problemas".*

Esses tipos de problemas, exceto os de taxa, também foram encontrados nos livros didáticos brasileiros, em uma pesquisa realizada por Almeida (2011), que teve por objetivo analisar os problemas propostos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita nos livros didáticos de matemática do 7º ano do ensino fundamental. Além desses problemas, Almeida (2011) identificou, em sua pesquisa, outro tipo de problemas relacionado com as equações polinomiais do 1º grau, os problemas de Lilavati.

Nas seções seguintes temos as caracterizações desses problemas.

1.3.1. Falsos problemas

Os falsos problemas são, segundo Marchand e Bednarz (1999), aqueles que, no momento da resolução, a conversão[5] é direta do registro em linguagem natural para o registro em linguagem simbólica algébrica, para a equação, sem ser necessário estabelecer relações entre os dados do enunciado, como no exemplo 3 a seguir.

<u>Exemplo 3</u>. O dobro de um número mais 20 é igual a 50. Qual é esse número?

O enunciado do problema acima pode ser convertido na equação: $2X + 20 = 50$.

Esse tipo de problema não leva os estudantes, no momento da conversão, a estabelecer relações entre os dados do problema, relações que são necessárias na caracterização de um problema de estrutura algébrica. Portanto, apesar de ele ser

[5] "Converter é transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro" (DUVAL, 2009, p. 58).

convertido em uma equação polinomial do 1º grau, ele não é considerado um problema de estrutura algébrica.

Em problemas desse tipo ocorre, no momento da conversão da linguagem natural para a simbólica algébrica, o que Duval (2003, p. 19) chama de “uma situação de simples codificação”, ou seja, o registro de chegada é muito próximo do registro de partida, não favorecendo aos estudantes o desenvolvimento do pensamento algébrico, como afirma Marchand e Bednarz (2000). Segundo essas pesquisadoras, o foco dos falsos problemas está nas técnicas de resolução de equações.

1.3.2. Problemas de Lilavati

Esse tipo de problema é, segundo Almeida (2011), inspirado nos problemas antigos, como o da personagem “Lilavati”, por isso essa nomenclatura. Em um problema de Lilavati temos um valor total desconhecido que é repartido em algumas partes também desconhecida e em uma parte conhecida, como podemos verificar no exemplo 4 a seguir.

<u>Exemplo 4.</u> *Partiu-se um colar durante um jogo amoroso. Um terço das pérolas caiu no chão, um quinto ficou no leito, um sexto foi encontrado pela mulher e um sexto foi achado pelo homem; oito pérolas ficaram no fio. Diz-me: de quantas pérolas se compunha o colar?*

Nesse caso, Almeida (2011) relata que esse tipo de problema se caracteriza como um problema de estrutura algébrica uma vez que se faz necessário o estabelecimento de relações entre o total de pérolas, mesmo que seja desconhecido, e as partes, para encontrar, no momento da conversão, a seguinte equação polinomial do 1º grau. “$\frac{X}{3}+\frac{X}{5}+\frac{X}{6}+\frac{X}{6}+8=X$".

A resposta a essa equação pode ser encontrada da seguinte maneira.

i. 30($\frac{X}{3}+\frac{X}{5}+\frac{X}{6}+\frac{X}{6}+8=X$)
ii. 10X + 6X + 5X + 5X + 240 = 30X
iii. 26X – 30X = – 240
iv. (– 4X = – 240)(-1)
v. 4X = 180

vi. $X = \frac{180}{4}$

vii. $X = 60$

1.3.3. Problemas de transformação

Os problemas de transformação se caracterizam pelas transformações que o valor inicial sofre que, por sua vez, não é dado explicitamente no enunciado do problema. Nesse caso, tanto o valor inicial é desconhecido como os valores finais (MARCHAND; BEDNARZ 1999), como mostrado no exemplo 5 a seguir.

Exemplo 5. *Ao ser perguntado sobre sua idade Paulo respondeu: o dobro da minha idade quatro anos atrás é igual à minha idade atual mais dezoito anos. Qual é a idade de Paulo?*

Nesse problema, a idade de Paulo é o valor inicial e desconhecido. Nesse valor inicial foram realizadas três transformações, sendo duas aditivas, que são representadas por "*quatro anos atrás*" e "*mais dezoito anos*" e uma multiplicativa, representada pela operação "*dobro*". Podemos converter o enunciado desse problema na equação a seguir e resolvê-la utilizando os seguintes passos.

i. $2(X - 4) = X + 18$

ii. $2X - 8 = X + 18$

iii. $2X - X = 18 + 8$

iv. $X = 26$

Logo, a idade de Paulo é igual a 26 anos.

Percebemos que para resolver um problema desse tipo é necessário estabelecer relações entre as informações apresentadas no enunciado, o que caracteriza um problema de estrutura algébrica.

1.3.4. Problemas de taxa

Já os problemas de taxa são aqueles que se caracterizam por existirem relações entre grandezas não homogêneas, como mostrado no exemplo 6 a seguir.

Exemplo 6. Sejam duas cidades A e B. Um homem viaja de automóvel a uma velocidade média de 80 km/h na ida. Ele volta pela mesma estrada a uma velocidade média de 60 km/h. Se ele faz toda viagem de ida e volta entre as cidades A e B em 7 horas, qual a distância entre essas duas cidades?

No caso desse exemplo, é preciso estabelecer relações entre as grandezas (não-homogêneas) velocidade média, tempo e distância, para obter a solução do problema, que pode ser encontrada da seguinte maneira.

Adotando a medida da distância entre as duas cidades de D e a medida do tempo gasto na ida de T, e considerando que $Vm = \frac{D}{T}$ (velocidade média = a medida da distância dividido pela medida do tempo), temos:

i. *Na ida:* $80 = \frac{D}{T}$, *então* $D = 80T$.
ii. *Na volta:* $60 = \frac{D}{7-T}$, *então* $D = 60(7-T)$.
iii. *Igualando i e ii, temos* $80T = 60(7-T) \Rightarrow T = 3$.
iv. *Substituindo T em i, temos D = 80 x 3, logo D = 240 Km.*

Portanto, a distância entre as cidades A e B é de 240 Km.

Nesse tipo de problema, além de conhecimentos matemáticos, o estudante mobiliza conhecimentos da física, como a noção de velocidade média.

1.3.5. Problemas de partilha

Um problema de partilha (PP) se caracteriza por ter um valor conhecido que será repartido em partes desiguais e desconhecidas, ou seja, nesse tipo de problema, tem-se uma quantidade total conhecida e essa quantidade é repartida em partes desiguais e desconhecidas, como no exemplo 7 a seguir.

Exemplo 7. Alan, Bruno e Carlos têm, juntos, 120 figurinhas. Bruno tem o dobro de figurinhas de Alan e Carlos tem 40 figurinhas a mais que Alan. Quantas figurinhas têm cada um?

O enunciado desse problema pode ser convertido em uma equação e resolvido seguindo os seguintes passos.

I. $X + 2X + (X + 40) = 120$

II. $X + 2X + X = 120 - 40$

III. $4X = 80$

IV. $X = \frac{80}{4}$

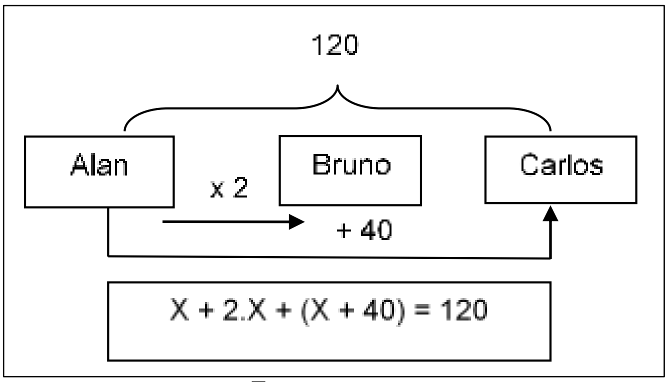
V. $X = 20$

Logo, Alan tem 20 figurinhas, Bruno tem 40 figurinhas, o dobro de Alan, e Carlos tem 60 figurinhas, quarenta a mais que Alan.

Marchand e Bednarz (1999) destacam que um problema de partilha pode ser classificado de acordo com as relações existentes entre as partes. Elas realizaram essa classificação levando em consideração o número das relações, a natureza das relações e o tipo de encadeamento das relações.

Para entender melhor a classificação proposta por essas pesquisadoras, iremos, a partir de então, criar um esquema para cada exemplo de problema de partilha analisado. O primeiro esquema, exposto na Figura 3 a seguir, revela a estrutura do problema de partilha do exemplo 7.

Figura 3 – Esquema do problema de partilha do exemplo 7.



Fonte: o autor

Quanto ao número de relações, os problemas de partilha podem ser classificados como tendo uma, duas ou mais relações. Nesse caso, do exemplo 7, temos um problema de partilha com duas relações. "*Bruno tem o dobro de figurinhas de Alan"* é uma relação, e "*Carlos tem 40 figurinhas a mais que Alan"* é outra relação.

Já a natureza das relações entre os dados do problema pode ser aditiva, quando se lança mão de somas ou subtrações, multiplicativa, quando de multiplicações ou divisões, ou naturezas diferentes, quando se tem, em um mesmo problema, pelo menos uma natureza aditiva e uma multiplicativa. No caso do exemplo

7 temos a primeira relação de natureza multiplicativa e a segunda de natureza aditiva, logo, esse problema é, de acordo com a natureza de suas relações, de natureza diferente.

Quanto ao encadeamento das relações os problemas de partilha podem ser de três tipos distintos: "*fonte*", "*composição*" ou "*poço*".

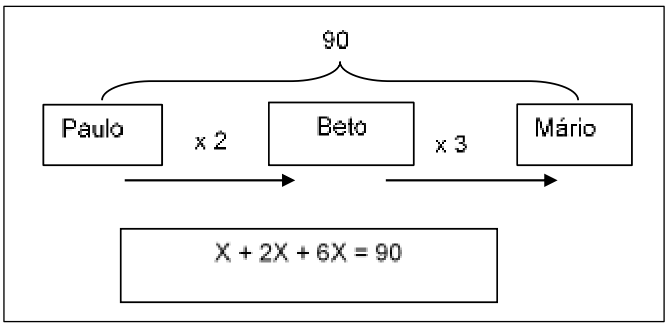
Problemas de partilha com encadeamento tipo fonte: Em um problema em que o encadeamento é tipo fonte, as grandezas são originadas em função de apenas uma grandeza. Um problema desse tipo pode ser observado no exemplo 7, em que a fonte é a quantidade de figurinhas de Alan, que indicamos, na resolução do problema, pela letra X. As outras grandezas, isto é, a quantidade de figurinhas de Bruno e de Carlos, são originadas a partir da quantidade de figurinhas de Alan. Por isso, dizer que "Bruno tem o dobro de figurinhas de Alan" é representado, no momento da conversão, por "2X", assim como dizer que "Carlos tem 40 figurinhas a mais que Alan" é representado por "X + 40". Por isso, após a conversão do exemplo 7, temos a equação "X + 2X + (X + 40) = 120".

Problemas de partilha com encadeamento tipo composição: Nos problemas de partilha cujo encadeamento é do tipo composição, as relações são estabelecidas seguindo uma sequência, como mostra o exemplo 8 a seguir.

Exemplo 8. Paulo, Beto e Mário vão repartir entre eles 90 figurinhas de modo que Beto receba o dobro de figurinhas de Paulo e Mário receba o triplo de Beto. Quantas figurinhas cada um vai receber?

Podemos observar melhor a estrutura desse exemplo no esquema a seguir.

Figura 4 – Esquema do problema de partila do exemplo 8.



Fonte: o autor

Nesse problema, as relações seguem uma sequência, *"Beto receba o dobro de figurinhas de Paulo e Mário receba o triplo de Beto"*, ou seja, a ordem Paulo $\Rightarrow$ Beto $\Rightarrow$ Mário. Portanto, diferentemente dos problemas de partilha tipo fonte, nos tipos composição as grandezas são originadas de fontes diferente.

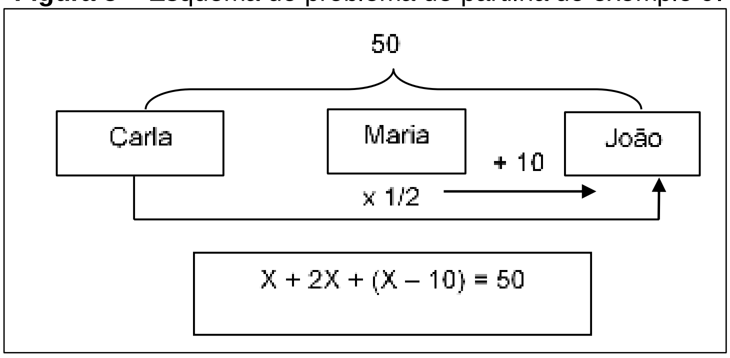
Para converter o enunciado do problema do exemplo 8, por exemplo, temos que adotar, como fonte inicial, a quantidade de figurinhas de Paulo, que podemos representar por "X". Como Beto tem o dobro de figurinhas de Paulo, temos que representar sua quantidade por "2X". Já Mário tem o triplo de figurinhas de Beto, e, como a quantidade de Beto está representada por "2X", então a quantidade de Mário deve ser representada por "3.2X", ou "6X". Nesse caso a fonte não é mais a quantidade de figurinhas de Paulo, como seria em um problema tipo fonte, mas, sim, a quantidade de figurinhas de Beto. Finalizando, como a soma das quantidades de figurinhas de Paulo, Beto e Mário é igual a 90, temos a equação "X + 2X + 6X = 90".

<u>Problemas de partilha com encadeamento tipo poço</u>: Já nos problemas desse tipo, as relações convergem para uma das personagens do problema. O exemplo 9 a seguir mostra um problema de partilha com esse tipo de encadeamento.

<u>Exemplo 9</u>. *João, Carla e Maria vão repartir entre eles 50 chaveiros de modo que João receba metade dos chaveiros de Carla e 10 chaveiros a mais que Maria. Quantos chaveiros cada um vai receber?*

Podemos visualizar a estrutura desse problema no esquema a seguir.

Figura 5 – Esquema do problema de partilha do exemplo 9.



Fonte: o autor

No caso desse problema, as relações convergem para João, ou seja, todas as relações colocadas no enunciado do problema centralizam, convergem para uma das personagens do problema.

No exemplo 9, dizer que *“João recebe metade dos chaveiros de Carla”* significa que, no momento da conversão, o estudante tem que levar em consideração a operação inversa, isto é, representar essa expressão por “2X” e não por “$\frac{X}{2}$”. Isso porque ele tem que perceber que se João recebe metade dos chaveiros de Carla, então Carla recebe o dobro de chaveiros de João, por isso 2X.

Da mesma forma, a conversão da expressão *“dez chaveiros a mais que Maria”* não significa “X + 10” e sim “X – 10”, uma vez que o estudante tem que perceber que se João recebe dez chaveiros a mais que Maria, então Maria recebe dez chaveiros a menos que João. Por fim, como a soma dos chaveiros de João, Carla e Maria é igual a 50, temos, após a realização da conversão, a equação “X + 2X + X – 10 = 50”.

1.4. Níveis de dificuldade dos problemas de partilha

Pesquisas como as de Oliveira e Câmara (2011) e Santos Junior (2013) indicam níveis de dificuldade nos problemas de partilha com duas relações. Esses níveis são bem percebidos quando é levado em consideração o encadeamento das relações. Segundo essas pesquisas, os problemas de partilha tipo fonte são os considerados mais fáceis de serem resolvidos pelos estudantes, seguidos dos problemas com encadeamento tipo composição. Já os com encadeamento tipo poço são os que os alunos encontram maior dificuldade em chegar na resposta correta.

A pesquisa realizada por Oliveira e Câmara (2011) investigou as estratégias que são mobilizadas por alunos brasileiros e canadenses na resolução de problemas de partilha. Participaram desse estudo 473 sujeitos do 6º ano do ensino fundamental, sendo 333 alunos de 4 escolas da cidade do Recife (Brasil) e 140 de 5 escolas da província do Québec (Canadá). Cada participante respondeu, individualmente, seis problemas de partilha com duas relações, variando a natureza das relações (aditiva e multiplicativa) e o encadeamento dessas relações (fonte, composição e poço).

No Quadro 1 a seguir temos a síntese dos resultados dessa pesquisa, levando em consideração o rendimento dos alunos por encadeamento das relações dos problemas de partilha.

Quadro 1 – Rendimento por encadeamento das relações dos PP

	Fonte		**Composição**		**Poço**	
	Brasil	Québec	Brasil	Québec	Brasil	Québec
Acertos	44%	63%	33%	45%	23%	39%
Erros	41%	25%	43%	28%	39%	36%
Não resposta	15%	12%	24%	27%	38%	26%

Fonte: Oliveira e Câmara (2011)

Percebemos, portanto, que os participantes da pesquisa encontram maior dificuldade em resolver os problemas de partilha com encadeamento tipo poço, uma vez que apenas 23% dos alunos brasileiros e 39% dos canadenses conseguiram resolver corretamente esse tipo de PP, enquanto que 33% e 45%, respectivamente, conseguiram chegar a resposta correta dos PP tipo composição, e 44% e 63% acertaram os PP tipo fonte.

Esses resultados são corroborados com os da pesquisa de Santos Junior (2013), que teve por objetivo identificar as estratégias mobilizadas por alunos do 7º, 8º e 9º anos do ensino fundamental na resolução de PP. Participaram dessa pesquisa 251 alunos, sendo 82 do 7º ano do ensino fundamental, 75 do 8º ano e 94 do 9º ano de 3 escolas da região metropolitana do Recife. As questões utilizadas nessa pesquisa tinham as mesmas estruturas das utilizadas na de Oliveira e Câmara (2011).

Temos, no Quadro 2 a seguir, a síntese dos resultados da pesquisa de Santos Junior (2013) levando em consideração o rendimento dos participantes.

Quadro 2 – Rendimento por encadeamento das relações dos PP

	Fonte			**Composição**			**Poço**		
	7º	8º	9º	7º	8º	9º	7º	8º	9º
Acertos	54%	49%	68%	29%	37%	44%	15%	17%	29%
Erros	27%	15%	23%	38%	19%	25%	35%	24%	27%
Não resposta	19%	36%	33%	33%	44%	31%	51%	59%	44%

Fonte: Santos Junior (2013)

Podemos verificar que, assim como os resultados da pesquisa de Oliveira e Câmara (2011), os de Santos Junior (2013) também revelam que os estudantes, independente do ano em que se encontram matriculados, encontram maior dificuldade em resolver os problemas de partilha com encadeamento tipo poço, seguido pelos PP tipo composição.

Acreditamos que esses níveis de dificuldade dos problemas de partilha, em relação aos encadeamentos das relações, podem ser explicados tomando como referência o momento da conversão do registro em linguagem natural para o registro em linguagem matemática. Isso porque defendemos, assim como Kieran (1992) e Duval (2003), que o esforço prévio de equacionar o problema, isto é, realizar a conversão, é cognitivamente maior que o de escolher e executar um algoritmo algébrico, como na resolução de uma equação polinomial do 1º grau.

Para entendermos melhor o que foi dito, temos, no Quadro 3 a seguir, a conversão do enunciado de três problemas de partilha diferentes, principalmente quando levamos em consideração os encadeamentos das relações. Porém, como resultado das conversões encontramos a mesma equação, mostrando, portanto, que as dificuldades do aluno em chegar na resposta correta desse tipo de problema não estão, pelo menos a princípio, na resolução da equação, mas, sim, no momento de converter o enunciado em linguagem natural para a linguagem simbólica algébrica.

Moretti (2002) corrobora com nossas ideias ao concluir que dois problemas semelhantes que representam o mesmo objeto matemático podem ter níveis de dificuldades diferentes, "não do ponto de vista matemático, mas do ponto de vista cognitivo" (361).

Quadro 3 – Diferenças entre os registros e níveis de dificuldade de um PP de acordo com seu encadeamento

	Encadeamento tipo fonte	Encadeamento tipo composição	Encadeamento tipo poço
Problema de partilha	*Paulo, Beto e Mário vão repartir entre eles 35 figurinhas de modo que Beto fique com o dobro de Paulo e Mário fique com quatro vezes a quantidade de figurinhas de Paulo. Quantas figurinhas cada uma vai receber?*	*Paulo, Beto e Mário vão repartir entre eles 35 figurinhas de modo que Beto receba o dobro de figurinhas de Paulo e Mário receba o dobro de Beto. Quantas figurinhas cada um vai receber?*	*Paulo, Beto e Mário vão repartir entre eles 35 figurinhas de modo que Paulo receba metade das figurinhas de Beto e um quarto das figurinhas de Mário. Quantas figurinhas cada um vai receber?*
Equação	X + 2X + 4X = 35	X + 2X + 4X = 35	X + 2X + 4X = 35
Grau de congruência semântica[6]	Alto	Médio	Baixo
Nível de dificuldade	Baixo	Médio	Alto

Fonte: o autor

No caso do problema de partilha com encadeamento tipo fonte percebemos que o grau de congruência semântica entre o registro em linguagem natural e o em

[6] Utilizaremos a noção de grau de congruência semântica adotada por Moretti (2002).

linguagem simbólica algébrica é alto, uma vez que, dizer que “Beto fique com o dobro de Paulo” significa, na linguagem simbólica algébrica, “2X” e dizer que “Mário fique com quatro vezes a quantidade de figurinhas de Paulo” significa “4X”. Nesse caso, as duas relações do problema de partilha têm um grau de congruência alto.

Já em um problema com encadeamento tipo composição o grau de congruência entre os registros diminui, e, por conta disso, o nível de dificuldade do problema é maior. Por exemplo, no problema exposto no Quadro 3, a expressão “Beto recebe o dobro de figurinhas de Paulo” pode ser representada, após a conversão, por “2X”. Agora, quando no problema diz que “Mário receba o dobro de Beto” não significa “2X”, mas, sim, “2.2X”, ou seja, “4X”, pois o “dobro de Beto”, nesse caso, é o dobro de 2X. Portanto, apenas a primeira relação tem um grau de congruência alto, exigindo dos alunos, por conta disso, um trabalho cognitivo maior que na conversão do enunciado de um problema de partilha com encadeamento tipo fonte, que tem as duas relações com um grau de congruência alto.

Por fim, nos problemas com encadeamento tipo poço o grau de congruência semântica é ainda menor que nos problemas com encadeamento tipo composição, uma vez que as duas relações não são congruentes. Podemos perceber isso no exemplo do Quadro 3, pois, dizer que “Paulo recebe metade das figurinhas de Beto” significa, no momento da conversão, que o estudante tem que levar em consideração a operação inversa, e, representar essa expressão por “2X”, e não por “$\frac{X}{2}$”. Nesse caso o aluno tem que perceber que a frase “Paulo recebe metade das figurinhas de Beto”, significa “Beto recebe o dobro de figurinhas de Paulo”, e por isso, os 2X na equação, uma vez que Paulo é a fonte inicial na conversão do enunciado do problema, isto é, o X.

Da mesma forma, a conversão da expressão “Um quarto das figurinhas de Mário” não pode ser convertido em “$\frac{X}{4}$” mas, sim, em “4X”. Portanto, em um problema de partilha com encadeamento tipo poço o grau de congruência semântica das relações entre o registro em linguagem natural e o registro em linguagem simbólica algébrica é nenhum, demandado do aluno um trabalho cognitivo ainda maior que os problemas de partilha com encadeamento tipo composição.

1.5. Conclusões do capítulo

A nossa pesquisa se inicia a partir dos resultados da pesquisa de Oliveira e Câmara (2011), e, por conta disso, iremos adotar, na construção de nosso modelo, assim como esses pesquisadores, os problemas de partilha com duas relações. Porém, por que a escolha desse tipo de problema? É o que iremos argumentar a seguir.

O que nos levou a escolher os problemas de partilha é que historicamente eles contribuíram para o desenvolvimento da álgebra, com a divisão de heranças na antiguidade, além de ser os problemas propostos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita que mais aparecem nos livros didáticos brasileiros do 7º ano do ensino fundamental (ALMEIDA, 2011, ALMEIDA; CÂMARA, 2014a).

Continuando, algumas pesquisas indicam que esses problemas podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos da educação básica, foco de nossa tese (MARCHAND; BEDNARZ, 2000, OLIVEIRA; CÂMARA, 2011). Além disso, as pesquisas de Oliveira e Câmara (2011) e de Santos Junior (2013) indicam que alguns estudantes adotam estratégias mais sofisticadas, mais próximas de uma álgebra simbólica formal que outros, apontando para níveis diferentes de pensamento algébrico.

Por fim, propostas curriculares atuais, como os Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) e a segunda versão da BNCC (BRASIL, 2016), apontam os problemas de partilha como problemas que podem ajudar no ensino da álgebra escolar no ensino fundamental.

Portanto, acreditamos que a proposição de um modelo que possibilite a identificação do nível de desenvolvimento do pensamento algébrico, mesmo que para um tipo específico de problema, em que um determinado aluno se encontra, seja relevante tanto para as pesquisas em educação matemática, como para os professores que ensinam matemática na educação básica, uma vez que acreditamos que desenvolver esse tipo particular de pensamento matemático seja fundamental para aprender, de forma significativa, a matemática.

Capítulo 2

Álgebra Escolar

2.1. Introdução

Caracterizar álgebra escolar não é uma tarefa fácil. Alguns autores preferem caracterizar esse ramo da matemática levando em consideração sua linguagem, entendendo a álgebra como uma linguagem específica para representar, por exemplo, quantidades desconhecidas (BOOTH, 1995; USISKIN 1995). Outros, baseados em perspectivas atuais, defendem a álgebra como uma forma peculiar de pensar (KIERAN, 2007; KAPUT, 2008; RADFORD, 2011b).

Diante disso, surgiu a necessidade de discutir a álgebra escolar de uma forma reflexiva. Portanto, temos, nesse capítulo, no tópico seguinte uma tentativa de caracterizar a álgebra escolar, em seguida temos três seções que discutem questões referentes ao ensino da álgebra. Na primeira refletimos sobre o ensino da álgebra com foco na linguagem, na segunda temos uma discussão sobre o ensino da álgebra com foco no pensamento algébrico e, por fim, trazemos uma reflexão de como está proposto o ensino de álgebra em algumas orientações curriculares. Nessa última seção iremos analisar os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), os Parâmetros para Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) e a 2ª versão da Base Nacional Curricular Comum (BRASIL, 2016).

2.2. Álgebra escolar: algumas características

A álgebra escolar se caracteriza, principalmente, pela álgebra trabalhada na educação básica. Mas o que é essa álgebra? Booth (1995) nos coloca que uma das diferenças mais marcantes entre “a aritmética e a álgebra é, obviamente, a utilização, nessa última, de letras para indicar valores” (p. 30). Apesar de letras aparecerem também em aritmética, essa autora lembra que os sentidos são bastantes diferentes. Por exemplo, a letra “m” “pode ser utilizada em aritmética para representar ‘metros’, mas não para representar o número de metros, como em álgebra” (p. 30).

Acreditamos que utilizar essa definição de álgebra é, a princípio, reduzi-la a uma linguagem, a linguagem simbólica algébrica, formada essencialmente por símbolos e letras para representar valores, muitas vezes desconhecidos. Entretanto, muitos pesquisadores na área de educação matemática, com foco na algébrica escolar, como Kieran (1992, 1996, 2004, 2007), Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Blanton e Kaput (2005), Arcavi (2005), Kaput (1999, 2008), Radford (2009, 2011b), dentre outros, defendem que a álgebra é muito mais que uma linguagem. É, essencialmente, uma forma de pensar. Portanto,

> álgebra não é apenas um conjunto de procedimentos envolvendo os símbolos em forma de letra, mas consiste, também, na atividade de generalização e proporciona uma variedade de ferramentas para representar a generalidade das relações matemáticas, padrões e regras (e.g. Mason, 2005). Assim, a álgebra passou a ser encarada não apenas como uma técnica, mas também como uma forma de pensamento e raciocínio acerca de situações matemáticas[7] (KIERAN, 2007, p. 5, tradução nossa, grifo nosso).

Defendemos, nessa pesquisa, essa ideia de álgebra escolar. Acreditamos que a álgebra se revela muito mais na maneira do sujeito pensar, em detrimento da linguagem utilizada para expressar esse pensamento. Para entender melhor essa definição de álgebra escolar, discutiremos, a seguir, dois exemplos.

Exemplo 1. A expressão “7 + 5 = 12”, é álgebra ou aritmética?

Quem defende a definição de álgebra de Booth (1995) responderá a essa questão sem muita dificuldade, afirmando que essa expressão se relaciona à aritmética, por conter apenas operações numéricas. Porém, será isso mesmo? Para nós não é tão simples assim. Não é a maneira que a expressão é apresentada que diz se ela pertence ao domínio da álgebra ou da aritmética, mas o que o sujeito pensa sobre ela.

Nesse sentido, para nós, a resposta a essa questão é “depende”. Depende de como o sujeito compreende essa expressão. Se ele entende o sinal de igual como uma simples ação para se chegar ao valor da adição “7 + 5”, isto é, o sinal de igualdade apresenta um significado operacional correspondendo a uma ação a ser realizada, essa expressão estaria no campo da aritmética. Porém, se o sujeito consegue perceber que o sinal de igual significa que existe uma equivalência entre o termo antes da igualdade e o termo depois da igualdade, se ele entender que “7 + 5”

---

[7] Algebra was not merely a set of procedures involving the letter-symbolic form, but also that it consisted of generalizing activity and provided a range of tools for representing the generality of mathematical relationships, patterns, and rules (e.g., Mason, 2005). Thus, algebra came to be seen not merely as technique, but also as a way of thinking and reasoning about mathematical situations (KIERAN, 2007, p. 5).

equivale a 12, isto é, é igual a 12, essa expressão deixa de ser pensada pelo sujeito como uma expressão aritmética e passa a ser pensada como algébrica.

Lins e Gimenez (1997, p. 152) nos colocam que “o que caracteriza a “verdadeira” operação aritmética é a “sensação” de se estar “fazendo uma conta”: dois elementos são associados para “produzir” um terceiro”. Portanto, se um sujeito se depara com essa situação e ele tem essa sensação de estar fazendo uma conta, podemos concluir que ele está no domínio da aritmética. Todavia, não é o fato da expressão está na linguagem numérica, formada essencialmente por símbolos utilizados na aritmética, que ela se caracteriza como uma expressão aritmética.

Exemplo 2. A expressão “2X + 3 = 15”, é álgebra ou aritmética?

Novamente, o sujeito que defende a ideia de álgebra de Booth (1995) responderá a essa questão de imediato, afirmando que se trata de álgebra, por aparecer símbolos (letras) para indicar valores desconhecidos. Porém, assim como a resposta à primeira questão, a nossa resposta para essa questão também é “depende”. Depende, assim como para a primeira questão, da maneira que o sujeito entende essa expressão.

Por exemplo, se pedirmos para um aluno responder a essa equação, e ele iniciar da seguinte maneira: “5X = 15”, considerando o binômio “2X + 3” como uma expressão que não está terminada e que pode ser alvo de simplificação, o aluno não entende o sinal de “=” como uma relação de equivalência, mas, sim, como um símbolo operador.

Além disso, “influenciado pela sua experiência anterior em aritmética, encara o sinal de “+” como um indicador da necessidade de proceder a uma adição e obter um resultado” (PONTE; BRANCO; MATOS, 2008, p. 91), isto é, o aluno revela a “sensação” de estar fazendo uma conta, característico do domínio aritmético (LINS; GIMENEZ, 1997).

Nesse caso, essa expressão, mesmo sendo composta por símbolos essencialmente algébricos (números, sinais de operações e de igualdade e letras), para o aluno que a entende como foi colocado, não passa de uma expressão aritmética.

Entretanto, se o aluno entender o sinal de “=” dessa expressão como uma relação de equivalência, ou seja, perceber que “2X + 3” equivale a 15, essa expressão passa a ser entendida pelo aluno como uma expressão algébrica. Nesse caso, ele revela compreender que nessa situação o símbolo "=" está representando uma relação de equivalência, típico do domínio algébrico.

Portanto, para que essa equação seja pensada no âmbito algébrico, é necessário que o aluno a veja como uma relação de equivalência em que o "X" é um valor desconhecido que deve ser encontrado.

Entender a álgebra escolar como uma maneira especial de pensar, na qual os objetos algébricos – por exemplo, uma equação – estão muito mais no pensamento do sujeito, e não apenas na representação no papel, não significa menosprezar a linguagem simbólica algébrica, pois temos plena convicção de que a álgebra, e a matemática como um todo, teve um avanço considerável a partir do momento que o homem conseguiu dominar e entender essa linguagem como a conhecemos hoje.

Entendemos que a evolução da álgebra e, consequentemente, da álgebra escolar, se deu por meio da evolução da linguagem algébrica, uma linguagem cada vez mais concisa e simbólica, "uma linguagem matemática que, liberta das palavras, se volta para expressar o pensamento matemático" (ARAÚJO, 2008, p. 341).

Entretanto, essa evolução não aconteceu de um dia para o outro. Muito pelo contrário, a linguagem algébrica, como a conhecemos hoje, repleta de símbolos, só foi possível por conta de, ao que tudo indica, muito esforço da humanidade por séculos. Radford (2011b, p. 16-17) nos lembra que

> a álgebra geralmente é vista como o domínio de uma certa linguagem simbólica de modo que, desde o começo, todos os esforços na sala de aula são feitos para que os alunos tornem-se competentes nesta linguagem. Historicamente, entretanto, o 'simbolismo' (em seu sentido moderno, aquele que encontramos nos livros didáticos atuais) só se tornou a força motriz do desenvolvimento algébrico no período da Renascença (isto é, mais de 30 séculos depois de as primeiras ideias algébricas terem visto a luz do dia!).

A história da matemática e, em particular, a história da álgebra, nos revela que a linguagem algébrica passou por três grandes estágios, de uma linguagem natural, corrente, passando por uma linguagem sincopada, até chegar à forma como a conhecemos hoje em dia.

O primeiro estágio da linguagem algébrica é conhecido, como apontam Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), como *"retórico".* Nesse estágio o pensamento algébrico era expresso por meio da linguagem natural, verbal, ou seja, por meio de palavras. Araújo (2008) lembra que se buscarmos na história, esse estágio da linguagem algébrica pode ser encontrado já no ano 2000 a.C., período em que o povo egípcio sentiu necessidade da superação do número natural. É nessa época que aparecem as primeiras palavras, como, por exemplo, a palavra *"aha",* que aparece no papiro de Rhind (século XVIII a.C.), para representar um número desconhecido.

Também podemos encontrar exemplos dessa forma de expressar o pensamento algébrico na álgebra da Babilônia, por volta do ano 1700 a.C. em alguns problemas encontrados em tábuas de argila, pois,

> muitos textos de problemas do período Babilônio antigo mostram que a solução da equação quadrática completa não constituía dificuldade para os babilônios, [...] muitas fórmulas simples de fatoração lhe eram familiares. Não usavam letras para quantidades desconhecidas [...] palavras como "comprimento", "área" e "volume" serviam bem nesse papel. (BOYER,1974, p. 22, Apud ARAÚJO, 2008, p. 340)

O segundo estágio da linguagem algébrica é denominado de "sincopado", no qual o pensamento algébrico deixa de ser expresso só por meio de palavras. Passam a ser incorporados abreviações e letras para representar, por exemplo, quantidades desconhecidas. Só que a utilização de abreviações e letras aconteceu após séculos, como nos coloca Araújo (2008).

Para essa pesquisadora, só com a nova visão de mundo, que surgiu no Renascimento, é que o movimento passou a fazer parte do cotidiano das pessoas e, portanto, foi necessária a criação de algo para representar essa fluência. O primeiro a propor algo sobre isso foi Diofante, que, no século III d.C., concebia o número como um dos elementos fundamentais do pensamento matemático. Ele é quem, pela primeira vez, utiliza letras para representar a "fluência", além de ser o responsável por determinar regras para abreviar potências, relações e operações. Boyer (1974) afirma que Diofante é um representante do segundo estágio da linguagem algébrica, que tem início após séculos dos primeiros registros algébricos em linguagem corrente.

O terceiro estágio da linguagem algébrica é o "simbólico". Esse período tem como um dos primeiros e maior representante François Viète (1540 – 1603). É esse matemático que, pela primeira vez, se vale de símbolos para representar quantidades desconhecidas. Ele utilizava "vogais para representar uma quantidade supostamente desconhecida ou indeterminada (variável), e consoantes para representar números supostamente conhecidos (parâmetros)" (ARAÚJO, 2008, p. 341).

Até o último estágio da evolução da linguagem algébrica, ou seja, até Viète, "o símbolo é utilizado apenas para representar quantidades desconhecidas em uma equação, isto é, para representar genericamente uma quantidade determinada, ainda que provisoriamente desconhecida” (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993). Para se chegar a essa nova maneira de expressar o pensar algebricamente, desde os primeiros registros algébricos, no estágio retórico, até o início da álgebra simbólica, no século XVI d.C., se passaram trinta e quatro séculos ou cerca de três mil e quatrocentos anos.

Verificamos, portanto, que a linguagem simbólica algébrica, tal como a utilizamos hoje, não foi desenvolvida de forma simples e rápida. Essa forma sintética de representar uma maneira particular de pensar, o pensar algébrico, levou séculos para ser desenvolvida. Entretanto, essa informação muitas vezes não é levada em consideração quando se fala no ensino da álgebra na educação básica, em que se espera que o aluno se torne proficiente nessa linguagem em um curto espaço de tempo.

Por outro lado, pesquisas apontam que a supervalorização da linguagem simbólica algébrica em situações de ensino não garante uma compreensão, por parte dos estudantes, dessa linguagem, muito menos do que ela representa. Essa forma de trabalhar a álgebra escolar a torna, muitas vezes, sem sentido, descontextualizada e mecânica (KIERAN,1992, PONTE; BRANCO; MATOS, 2008)

É diante desse cenário que pretendemos refletir a partir de então sobre duas vertentes da álgebra escolar. Uma voltada para a supervalorização da linguagem, e outra cujo foco é o desenvolvimento do pensamento algébrico, pois acreditamos que o ensino de álgebra pode ter esses dois enfoques, dependendo das escolhas feitas pelo professor. Entretanto, ressaltamos que discutir a álgebra escolar a partir desses dois enfoques não significa, necessariamente, que são os únicos que aparecem no ensino atual. Porém, nessa pesquisa resolvemos refletir apenas sobre esses dois enfoques.

2.3. Álgebra escolar com ênfase na linguagem

Na escola, o ensino de álgebra quase sempre foi voltado para a manipulação de símbolos no papel, sem sentido, ou na resolução, por meio de técnicas, de equações, como a técnica “muda de lado muda de sinal”. Esse ensino mecânico dificilmente possibilita ao aluno construir um significado para o que está fazendo. Ele repete apenas o que o professor escreve no quadro, seguindo os modelos. Essa forma de ensinar a álgebra, essencialmente mecânica, voltada para a manipulação e o transformismo algébrico[8], leva o aluno a memorizar procedimentos sem compreender o que está fazendo e nem como utilizar o que está sendo estudado em outras situações (KIERAN, 1992).

No Brasil, durante muito tempo, o ensino de álgebra foi voltado essencialmente para a manipulação mecânica de símbolos sem sentido. Apesar de pesquisadores em educação matemática e orientações curriculares, como os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998) do final dos anos 1990, indicarem que o ensino mecânico, no qual a ênfase se encontra na linguagem simbólica algébrica, não é suficiente para que os alunos aprendam de forma significativa os conceitos algébricos.

Ainda hoje encontramos, em muitas escolas, essa forma de ensinar. Araújo (2008) lembra que o "pensar algébrico ainda não faz parte de muitos processos de aprendizagem que ocorrem na escola" (p. 338-339). Para essa pesquisadora, o ensino de álgebra nas escolas brasileiras ainda está voltado muito mais para a manipulação de símbolos, para o transformismo algébrico.

Em uma pesquisa, que buscou traçar um breve caminho histórico do ensino de álgebra no Brasil, Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) perceberam que durante muito tempo as pesquisas em educação matemática não se preocupavam com o ensino desse campo de conhecimento matemático. Ressaltam que a forma como boa parte dos professores ainda ensina a álgebra, "de forma mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significado social e lógico, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões" (p. 40), quase da mesma forma como ocorria há várias décadas atrás, indica que o seu ensino não tem, portanto, recebido a devida atenção.

Apesar de esse artigo ter sido escrito no início da década de noventa, percebemos que o cenário em relação ao ensino de álgebra no Brasil não está muito diferente nos dias de hoje (ARAÚJO, 2008), mesmo com o aumento do número de estudos nessa área.

---

[8] Estamos considerando transformismo algébrico como a manipulação de expressões simbólicas a partir de determinadas regras.

Castro (2003) lembra que o ensino de álgebra pouco mudou nas últimas décadas, tendo em vista que “o ensino da álgebra ainda está bastante referido à pedagogia tradicional baseada na sequência: definição - exemplos – aplicações” (Ibid. p. 6). Ainda segundo essa pesquisadora, os alunos, em geral, terminam o ensino fundamental com bastante “dificuldade em dar significado para as atividades [algébricas] que lhes são propostas, na maioria das vezes adotando um comportamento de meros repetidores de procedimentos que o professor utiliza no desenvolvimento do tema” (Ibid. p. 6).

Para entender melhor o percurso histórico do ensino de álgebra, em específico no Brasil, Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) dividem essa trajetória em três momentos – “antes do movimento da matemática moderna”, “durante o movimento da matemática moderna” e “depois do movimento da matemática moderna”. Em outro artigo, os mesmos autores tentam caracterizar as fases do ensino da álgebra no Brasil dividindo-o em três concepções de educação algébrica, a “linguístico-pragmática”, a “fundamentalista-estrutural” e a “fundamentalista-analógica” (FIORENTINI; MIORIM, MIGUEL, 1993).

A primeira concepção de educação algébrica colocada por esses autores, a “linguístico-pragmática”, correspondente ao período histórico antes do movimento da matemática moderna (MMM), iniciada com a Carta Régia de 19 de agosto de 1799, documento que legaliza o ensino desse campo de conhecimento matemático junto com a aritmética, geometria e a trigonometria. Nesse período, o ensino de matemática era organizado em campos separados, em que o ensino da álgebra sucedia o ensino da aritmética e antecedia o de geometria. Essa forma de se trabalhar a matemática na escola prevalece durante muito tempo, pois, mesmo com a Reforma Francisco Campos, em 1931, a qual assume pela primeira vez a denominação “matemática” para designar o ensino de aritmética, álgebra, geometria e trigonometria, o ensino da matemática permanecia em compartimentos estanques, nos quais se trabalhava os campos da matemática de forma isolada.

Na concepção linguístico-pragmática prevalece, segundo os autores,

> a crença de que a aquisição, ainda que mecânica, das técnicas requeridas pelo 'transformismo algébrico' seria necessária e suficiente para que o aluno adquirisse a capacidade de resolver problemas, ainda que esses problemas fossem, quase sempre, artificiais, no sentido de que não era a natureza e relevância deles que determinavam os conteúdos algébricos a serem aprendidos, mas a forma como 'fabricar' um problema para cuja solução tais e tais tópicos, tidos como indispensáveis, deveriam ser utilizados (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 83-84).

Essa forma de se ensinar a álgebra tinha, quase sempre, uma sequência de tópicos que partia do estudo de expressões e de suas operações, até chegar às equações, finalizando com a resolução de problemas. Para Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005, p. 3), "o papel do ensino da álgebra era fornecer um instrumental técnico (superior ao da aritmética) para a resolução de equações ou de problemas equacionáveis".

Na segunda concepção de educação algébrica, a "fundamentalista-estrutural", que se intensifica durante o movimento da matemática moderna, o ensino de álgebra perde o seu papel pragmático, e se volta para "os aspectos lógico-estruturais dos conteúdos e a precisão da linguagem" (ARAÚJO, 2008, p. 333). Durante esse período a álgebra assume um lugar de destaque na escola, passando a desempenhar o papel de "fundamentador dos vários campos da matemática escolar" (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993 p. 84).

Esse período, que se inicia nos anos de 1960, é fortemente lembrado até hoje pela introdução da teoria dos conjuntos na educação básica e pela "adoção de um certo formalismo na linguagem e a valorização das estruturas algébricas" (BÚRIGO, 2010, p. 278). Nessa época, o ensino de álgebra é voltado fortemente para a valorização da linguagem simbólica e de cálculos algébricos.

Portanto, assim como a primeira concepção de educação algébrica, a "linguístico-pragmática", a segunda, a "fundamentalista-estrutural", também está voltada muito mais para o ensino mecânico e automatizado. A mudança essencial da primeira concepção em relação à segunda, é que essa última perde o caráter pragmático, útil para resolver problemas, passando a ter como foco a resolução de equações e a simplificações de expressões algébricas.

Com as críticas ao movimento da matemática moderna, que entrou em declínio na metade da década de 70, começam a aparecer preocupações para tentar corrigir os excessos cometidos durante esse período, como nos coloca Araújo (2008). É após o MMM que aparece a terceira concepção de educação algébrica no Brasil, a “fundamentalista-analógica”.

Essa nova concepção de educação algébrica tenta realizar uma síntese entre as duas concepções anteriores, tendo em vista que, “procura, por um lado, recuperar o valor instrumental da álgebra e, por outro, manter o caráter fundamentalista – só que não mais de forma lógico-estrutural – de justificação das passagens presentes no transformismo algébrico” (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 84).

A diferença entre essa concepção e as primeiras é que, nessa última, as justificações dos transformismos algébricos são realizadas “não com base nas propriedades estruturais, mas, sim, por meio do uso de modelos analógicos geométricos (blocos de madeira ou mesmo figuras geométricas) ou físicos (como a balança) que visualizam ou justificam as passagens do transformismo algébrico” (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2005, p. 4).

Essa nova forma de ensinar a álgebra na educação básica defendia a ideia de que a utilização de materiais concretos, como blocos geométricos, tornando assim visível certas identidades algébricas, seria “didaticamente superior a qualquer forma de abordagem estritamente lógico-simbólica” (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 84). Entretanto, essa ideia não deixaria de lado a abordagem simbólico-formal das outras concepções, acreditava-se simplesmente que essa etapa, geométrico-visual, poderia compor um estágio intermediário e/ou paralelo à abordagem simbólico-formal.

Apesar de essas três fases do ensino da álgebra acontecerem de forma bem definida, a primeira antes do movimento da matemática moderna, a segunda durante e a terceira depois desse movimento, percebemos que em ambas as fases a ênfase era muito mais na linguagem simbólica algébrica, no transformismo algébrico, em tópicos descontextualizados e estáticos necessários à resolução de alguns problemas artificiais, em detrimento da construção de sentido para os objetos estudados, isto é, não se tinha nenhuma preocupação com o desenvolvimento do pensamento algébrico (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

Verificamos, portanto, que desde o início do ensino da álgebra nas escolas brasileiras, e até o final dos anos de 1980 e início dos anos de 1990, a ênfase estava no ensino de uma linguagem simbólica algébrica já constituída. Só a partir do fracasso do MMM é que se começa a discutir que essa maneira de ensinar álgebra, voltada essencialmente para a linguagem e técnicas sem sentido, não atende ao anseio da escola e da sociedade de uma forma geral.

Os primeiros textos que começam a refletir sobre uma nova maneira de se pensar o ensino de álgebra, no qual o foco deixa de ser a manipulação mecânica, e passa a ser o desenvolvimento do pensamento algébrico e de sua linguagem, começam a ser publicados no início dos anos 1990. Temos, como exemplos, os textos de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e Kieran (1992). Esses pesquisadores começam a discutir uma nova maneira de pensar o ensino de álgebra, na qual o mais importante é a construção do significado para os objetos algébricos estudado por meio do desenvolvimento do pensamento algébrico. É essa nova maneira de pensar o ensino de álgebra que iremos discutir no tópico a seguir.

2.4. Álgebra escolar com ênfase no pensamento algébrico

Durante muito tempo o ensino de álgebra, como foi discutido anteriormente, estava voltado essencialmente para a manipulação mecânica de símbolos no papel. Prevalecia, essencialmente, o transformismo algébrico e, segundo pesquisadores como Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), os estudos em educação matemática não se preocupavam, até então – final da década de 80 – em investigar sobre o ensino de álgebra. Esses pesquisadores lembram que dentre as mais de 150 pesquisas, entre teses e dissertações em educação matemática produzidas no Brasil entre 1972 e 1990, nenhuma tinha como objeto de estudo a álgebra escolar.

Só a partir do final dos anos 1980 e início dos anos 1990 é que os pesquisadores em educação matemática começam a se preocupar com o ensino e a aprendizagem da álgebra, período em que começam a aparecer as primeiras pesquisas focadas no "modo como os alunos desenvolvem a sua compreensão de conceitos e procedimentos algébrico" (CYRINO; OLIVEIRA, 2011, p. 100). Lins (1992), Brito Lima (1996), Lessa (1996, 2005), Kaput, (1999, 2008), Kieran (1992, 2007), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Arcavi (2005), Blanton e Kaput (2005), Radford (2009, 2011a, 2011c) são exemplos de pesquisadores que buscam, em suas pesquisas, entender como os alunos constroem o significado dos objetos e processos algébricos.

Para a maior parte desses pesquisadores, o centro da aprendizagem da álgebra deve ser o pensamento algébrico[9]. Relatam ainda que o ensino voltado para a manipulação de técnicas e de símbolos sem sentido no papel, em que prevalece o transformismo algébrico, não é suficiente. Não possibilita ao estudante entender a álgebra como deveria. O ensino de álgebra na educação básica, começando desde os anos iniciais até o ensino médio, deve estar voltado muito mais para a construção de significado e o desenvolvimento do pensamento algébrico, em detrimento da manipulação da linguagem simbólica algébrica. Para esses autores, o estudante aprenderá de forma significativa os objetos algébricos se no cerne do ensino da álgebra estiver o pensamento algébrico.

Pode parecer estranho falar em ensino de álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental, uma vez que, no Brasil, tradicionalmente o ensino desse campo da matemática começa a partir do 7º ano do ensino fundamental. Porém, pesquisadores vêm demonstrando que é possível, sim, iniciar o estudo da álgebra desde os anos iniciais (SCHLIEMANN; CARRAHER; BRIZUELA, 2006; BLANTON; KAPUT, 2005; CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008). Entretanto, Silva e Savioli (2014, p. 141) ressaltam que

> trabalhar com álgebra nos anos iniciais não implica introduzir a notação convencional, como por exemplo, é trabalhada no sétimo ano. Mas, pelo contrário, trabalhar com a álgebra nos anos iniciais é suscitar uma abordagem em sala de aula, na qual os estudantes tenham oportunidades de refletirem e construírem significados para relações matemáticas e conceitos algébricos, utilizando suas representações intuitivas de modo que aos poucos vão aprendendo a estabelecer representações convencionais, bem como a formular generalizações fazendo uso da notação algébrica.

Continuando, Araújo (2008) lembra que o ensino de álgebra deve ser focado em atividades que levem as crianças a construírem significado para aquilo que estão aprendendo. Para essa pesquisadora,

[9] Adotaremos nessa tese pensamento algébrico como a capacidade de analisar e estabelecer relações; de expressar ou explicar a estrutura de um problema, ou seja, construir um modelo matemático (modelar); de generalizar; de operar com o desconhecido como se fosse conhecido; e de produzir significado para a linguagem e os objetos algébricos. Essa caracterização é melhor discutida no próximo capítulo.

> se não se introduzir a álgebra de maneira significativa, conectando os novos conhecimentos aos conhecimentos prévios que os alunos já possuem, se aos objetos algébricos não se associar nenhum sentido, se a aprendizagem da álgebra for centrada na manipulação de expressões simbólicas a partir de regras que se referem a objetos abstratos, muito cedo os alunos encontrarão dificuldades nos cálculos algébricos e passarão a apresentar uma atitude negativa em relação à aprendizagem matemática, que para muitos fica desprovida de significação (p. 336-337).

Essa pesquisadora lembra ainda que para ocorrer as mudanças necessárias para um ensino de álgebra significativo, no qual os estudantes entendam o sentido dos objetos algébricos estudados, "é preciso que se contemple além dos aspectos formais, <u>a construção do pensamento algébrico</u>" (Ibid. p. 338, grifo nosso). Assim como essa pesquisadora, Lins (1992) defende a ideia de que pensar algebricamente é uma forma de construir significado para álgebra e sua linguagem. Nesse sentido, entendemos que o pensamento algébrico deve ser o centro do ensino da álgebra. Defendemos a ideia de que os alunos constroem significado para os objetos algébricos quando são levados a desenvolverem essa forma especial de pensar.

Porém, acreditamos também que não exista uma ordem hierárquica entre esses fenômenos, ou seja, o aluno não desenvolve primeiro o pensamento algébrico para só depois construir significado para a álgebra e sua linguagem. Pensamos que isso ocorre de forma concomitante, isto é, o aluno desenvolve o pensar algebricamente e, consequentemente, constrói significado para álgebra e sua linguagem e, quanto mais significado da álgebra e de sua linguagem é construído pelo aluno mais ele desenvolve o pensamento algébrico.

Entretanto, quando falamos em construir significado para a álgebra e sua linguagem, não nos referimos, impreterivelmente, que o aluno está pensando algebricamente quando constrói o significado de um objeto algébrico em linguagem simbólica algébrica. Por exemplo, o aluno pode pensar algebricamente quando percebe as relações existentes entre as operações com números naturais, identificando suas propriedades, como a comutatividade, sem, necessariamente, representá-las em uma linguagem simbólica, ou seja, $(\mathrm{a}+\mathrm{b})=(\mathrm{b}+\mathrm{a}), \forall\ \mathrm{a\ e\ b}\ \in \mathrm{IN}$.

Compartilhamos, também, das ideias colocadas por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e Araújo (2008), quando defendem que não devemos apresentar aos alunos uma nova linguagem, no caso a algébrica, sem lhe dar sentido, sem que não se tenha a necessidade de utilizá-la. Devemos ter consciência de que “a linguagem é, pelo menos a princípio, a expressão de um pensamento” (ARAÚJO, 2008, p, 338).

Pesquisas, como as de Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005), Radford (2009), Oliveira e Câmara (2011) e Silva e Savioli (2012), revelam que os estudantes não precisam, necessariamente, dominar uma linguagem simbólica algébrica para desenvolver aspectos referentes ao pensamento algébrico. Esses pesquisadores perceberam, em seus estudos, que algumas crianças têm condições de lidar e de desenvolver aspectos relacionados ao pensamento algébrico antes de serem apresentadas à uma linguagem simbólica algébrica. Diante disso, acreditamos que podemos trabalhar com alunos da educação básica, tarefas que potencializem o pensar algebricamente, sem que os estudantes tenham, ainda, domínio da linguagem simbólica algébrica.

Ponte, Branco e Matos (2008), em uma pesquisa que teve por objetivo analisar os erros e as dificuldades mais comuns dos alunos no trabalho com expressões algébricas e na resolução de equações polinomiais do primeiro grau, concluíram que o ensino e a aprendizagem da álgebra devem visar a compreensão dos seus conceitos fundamentais. “Para isso deve dar-se atenção ao desenvolvimento do pensamento algébrico, nas suas diversas vertentes, permitindo aos alunos a elaboração de raciocínios cada vez mais abstratos e complexos” (p. 95).

Canavarro (2007) é outra pesquisadora que defende a inclusão de atividades que contribuam para o desenvolvimento do pensamento algébrico no currículo da educação básica desde os primeiros anos de escolaridade. Para ela, a inclusão de atividades que potencializem o desenvolvimento do pensamento algébrico no currículo de matemática “tem a ver com o seu potencial para dar unidade e sentido à matemática escolar desde o seu início, pela natureza do próprio pensamento algébrico” (p. 91). Outro pesquisador que defende essa ideia é Kaput (1999). Para ele, o ensino com a finalidade de desenvolver o pensamento algébrico potencializa uma aprendizagem ativa que valoriza a construção de significado e a compreensão dos objetos estudados.

Percebemos, portanto, que existe um consenso entre os pesquisadores em educação matemática, principalmente entre os que pesquisam sobre o ensino da álgebra na educação básica, ao defenderem que o ensino de álgebra não pode ter sua ênfase na manipulação de símbolos, no transformismo algébrico, em que o foco é essencialmente na linguagem simbólica algébrica. Para esses pesquisadores o ensino de álgebra deve estar voltado, principalmente, para a construção de significado dos objetos algébricos. Os estudantes devem compreender o que a linguagem simbólica algébrica significa e, para que isso aconteça, é de comum acordo entre pesquisadores que o ensino da álgebra deve estar voltado para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

2.5. Álgebra escolar em algumas orientações curriculares

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) foi, desde o final dos anos de 1990 até pouco tempo[10], o principal documento orientador do currículo escolar brasileiro. O de matemática para os anos finais do ensino fundamental orienta que o ensino da álgebra não pode ser centrado na manipulação mecânica de símbolos no papel. Segundo ele,

> é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da álgebra apenas enfatizando as “manipulações” com expressões e equações de uma forma meramente mecânica (BRASIL, 1998, p. 116).

Ainda segundo esse documento, o pensamento algébrico deve ser levado em consideração no ensino da álgebra. Ele enfatiza que “para garantir o desenvolvimento do pensamento algébrico o aluno deve estar necessariamente engajado em atividades que inter-relacionem as diferentes concepções da álgebra” (Ibid. p. 116).

Entretanto, para classificar as concepções de álgebra, esse documento leva em consideração apenas a função da letra, isso ocorre, talvez, na tentativa de incorporar tradicionais práticas das escolas brasileiras, uma vez que esse documento adota a mesma tipologia de Usiskin (1995), substituindo, apenas, a concepção “meio de resolver problemas” pela dimensão “resolução de equações”, como podemos verificar no Quadro 4 a seguir, que traz a síntese dessas concepções de acordo com os PCN.

[10] Esse documento está sendo substituído pela Base Nacional Curricular Comum, que já está, até a escrita dessa tese, na sua segunda versão, prestes a ser divulgada a versão final.

Acreditamos que essa forma de classificar as concepções da álgebra nos remete a uma concepção letrista, concepção essa que se distancia do pensamento algébrico, como proposto por alguns pesquisadores, como Kieran (1992, 2007), Kaput (2008) e Radford (2009).

Quadro 4 – Álgebra no ensino fundamental segundo os PCN

Álgebra no ensino fundamental

Dimensões da álgebra	Aritmética generalizada	Funcional	Equações	Estrutural
Uso das letras	Letras como generalizações do modelo aritmético	Letras como variáveis para expressar relações e funções	Letras como incógnitas	Letras como símbolo abstrato
Conteúdos (conceitos e procedimentos)	Propriedades das operações. Generalizações de padrões aritméticos	Variação de grandezas	Resolução de equações	Cálculo algébrico. Obtenção de expressões equivalentes

Fonte: Brasil (1998, p. 196).

Além disso, os PCN reafirmam, em diversos trechos, a importância da linguagem simbólica algébrica. Contrariamente ao que sugere no início, nos parece que esse documento defende um ensino da álgebra voltado, quase que essencialmente, para o domínio de sua linguagem. Por exemplo, ao discutir a importância de propor situações que levem o aluno a perceber padrões, tanto em sequências numéricas como em geométricas, os PCN afirmam que "esse trabalho favorece a que o aluno construa a ideia de álgebra como uma linguagem para expressar regularidades" (BRASIL, 1998, p. 117).

Continuando, esse documento completa lembrando que "iniciar o estudo da sintaxe que o aluno está construindo com as letras poderá completar a noção da álgebra como uma linguagem com regras específicas para o manuseio das expressões, ou seja, o cálculo algébrico" (Ibid. p, 118, grifo nosso).

Portanto, nos parece que em alguns momentos a ideia de álgebra defendida nos PCN vai de encontro à ideia de vários pesquisadores contemporâneos dessa área, a álgebra escolar, como Arcavi (2005), Kieran (1992, 2007), Kaput, (2008) e Radford (2009). Para esses pesquisadores, a álgebra é caracterizada como uma forma especial de pensar, e que o pensamento algébrico pode, sim, ser revelado por linguagens que não sejam exclusivamente a simbólica formal.

Diferentemente dos PCN, as atuais propostas curriculares, como a 2ª versão da BNCC e os Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco orientam que o ensino de álgebra deve ser voltado para a construção do significado dos objetos algébricos e da linguagem simbólica algébrica. Por exemplo, para a 2ª versão da BNCC o trabalho com a álgebra deve contribuir "para que os/as estudantes desenvolvam um tipo de <u>raciocínio especifico</u>, denominado <u>pensamento algébrico</u>. Essa ideia, atualmente considerada, diferencia-se de uma ideia de álgebra escolar como um processo de manipulação de símbolos" (BRASIL, 2016, p. 278, grifo nosso).

Corroborando com essa proposta, os Parâmetros de Pernambuco defendem que a álgebra deve ser encarada "não mais como um bloco de conteúdos, mas como uma forma de <u>pensar matematicamente</u> caracterizada, entre outros aspectos, pela busca de generalizações e de regularidades" (PERNAMBUCO, 2012, p. 63, grifo nosso).

Continuando, esses documentos argumentam ainda que o trabalho no nível simbólico, com ênfase na manipulação de "letras", tão comum no 6º e 7º anos, deveria ser evitado. Ao invés disso, o ensino de álgebra deve ser voltado à construção de significado e ao estabelecimento de relações, como, por exemplo, levar o aluno a reconhecer que uma expressão algébrica pode ser vista como a interpretação de uma relação entre duas grandezas.

Além disso, conceitos tidos como essencialmente algébricos, como equações polinomiais de 1º grau, resolução de equações polinomiais de 1º grau e fatorações de expressões algébricas, devem aparecer de forma natural, não como um objeto de estudo em si mesmo. Por exemplo, "nas situações que envolvem resolver e elaborar problemas, é importante que o/a estudante seja incentivado a fazer uso de estratégias pessoais, inclusive por tentativa e erro, que são válidas e importantes para atribuir sentido aos métodos algébricos formais (BRASIL, 2016, p. 432).

Essa forma de propor o estudo desses tópicos algébricos vai de encontro às práticas tradicionais, como as indicadas anteriormente, em que o ensino se baseia na sequência: exposição de conteúdo; exemplos resolvidos; e lista de exercício, e que muitas vezes ainda tem espaço nas escolas em dias atuais, como nos colocam Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e Araújo (2008).

A maneira de pensar o ensino da álgebra, proposta na 2ª versão da BNCC e nos Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco, diferente em muitos pontos da proposta pelos PCN, é a defendida por muitos pesquisadores em algébrica escolar da atualidade, como Kaput, Kieran e Radford.

2.6. Conclusões do capítulo

A álgebra escolar tem, atualmente, um destaque grande nas propostas curriculares. Percebemos isso, por exemplo, na 2ª versão da Base Nacional Curricular Comum (BRASIL, 2016) e nos Parâmetros Curriculares do Estado de Pernambuco (PERNANBUCO, 2012), que colocam, diferentemente dos PCN, a álgebra como um eixo da matemática. Nos PCN ela está junto do eixo “números e operações”. Essa posição, em relação a adotar a álgebra como eixo da matemática, talvez tenha sido influenciada pelo aumento do número de pesquisas nesse campo da matemática escolar, o que não existia no momento da formulação dos PCN.

Além disso, o foco do ensino da álgebra também sofreu mudanças. Enquanto nos PCN (BRASIL, 1998) podemos perceber uma preocupação em levar o aluno a entender a álgebra como uma linguagem específica, na 2ª versão da BNCC, assim como nos Parâmetros de Pernambuco, verificamos que o foco passa a ser outro, o de desenvolver no aluno o potencial do pensamento algébrico. Essa proposta ocorre, ao que tudo indica, baseada nas tendências atuais das pesquisas em educação matemática que se preocupam em estudar a álgebra escolar.

Diante disso, defendemos, nesse trabalho, que o ensino da álgebra deva ser voltado muito mais para o desenvolvimento do pensamento algébrico em detrimento do transformismo algébrico, como discutido anteriormente.

Porém, o que caracteriza essa forma especial de pensar? Acreditamos que para que o professor de matemática tenha condições de levar seu estudante a desenvolver o pensamento algébrico é necessário que ele saiba a resposta dessa questão. Por conta disso, temos, no próximo capítulo, o propósito de caracterizar pensamento algébrico com base em pesquisadores da área de educação matemática que se dedicam a estudar esse fenômeno.

Por fim, ressaltamos que defender o ensino de álgebra voltado para o desenvolvimento do pensamento algébrico não significa menosprezar sua linguagem. O que defendemos é que essa linguagem deve ser trabalhada com significado. Que, com o desenvolvimento do pensamento algébrico, o aluno sentirá a necessidade de representá-lo em uma linguagem cada vez mais simbólica, chegando, ao final, ao domínio dessa linguagem, porém, com significado.

Capítulo 3

Pensamento algébrico

3.1. Introdução

Apesar de existir um consenso entre os pesquisadores da área de educação matemática da importância de levar o estudante a desenvolver o pensamento algébrico, esse consenso não existe quando nos referimos ao conceito dessa forma de pensar. Radford (2006) lembra que se ainda não temos uma caracterização definitiva para pensamento algébrico, isso se deve possivelmente ao “extenso escopo de objetos (por exemplo, equações, funções, padrões, ...) e processos algébricos (inversão, simplificação, ...) bem como os vários modos possíveis de conceber o pensamento em geral[11]” (p. 2, tradução nossa).

É diante desse fato que iremos tentar chegar a uma caracterização de pensamento algébrico que atenda ao nosso objetivo de pesquisa, utilizando como referência trabalhos de alguns pesquisadores que se dedicam, ou se dedicaram, a pesquisar sobre o tema.

Kieran (1992), uma das pesquisadoras em educação matemática dedicada a investigar esse fenômeno, buscou fazer uma diferenciação entre o pensamento aritmético e o algébrico. Para ela, o pensamento aritmético está intimamente ligado ao cálculo e à realização de operações na procura de um resultado, enquanto que o pensamento algébrico está relacionado com as estruturas e ao “uso de uma variedade de representações que permitem lidar com situações quantitativas de uma forma relacional” (p. 4).

Portanto, o aluno está no âmbito do pensamento aritmético quando assume, por exemplo, o sinal de “=” como o indicador de uma ação, independentemente da situação em que ele aparece, levando-o a erros elementares, como a soma de termos não semelhantes, como, por exemplo, “4 + 3X = 7X” (PONTE; BRANCO; MATOS, 2008). Já no âmbito do pensamento algébrico, o aluno percebe o sinal de “=” como um indicador de equivalência, em que as quantidades, por exemplo em uma equação, são tratadas de forma relacional.

Pesquisadores como Schliemann; Carraher; Brizuela (2012), Lins (1992, 1994a, 1994b), Arcavi (2005), Kaput (1999, 2008), Blanton e Kaput (2005), Silva e

[11] “Scope of algebraic objects (e.g. equations, functions, patterns, ….) and processes (inverting, simplifying, …) as well the various possible ways of conceiving thinking in general” (RADFORD, 2006, p. 2).

Savioli (2012, 2014), Radford (2006, 2009, 2011a, 2011c) dentre outros, adotam uma postura próxima à de Kieran. Eles tendem a entender pensamento algébrico como ações acerca de situações quantitativas, ou não, percebendo e generalizando as relações entre as informações contidas nessas situações. Além disso, defendem a ideia de que o pensamento algébrico pode ser revelado por diferentes linguagens, como a gestual, natural, pictórica e simbólica.

Para construir a caracterização de pensamento algébrico que será adotada nessa tese, iremos nos basear, principalmente, nos trabalhos de Rômulo Lins, James Kaput e Luis Radford. Por conta disso, esse capítulo foi construído com três seções, cada uma com uma perspectiva diferente de pensamento algébrico, a primeira seção traz a perspectiva de Rômulo Lins; a segunda seção é a perspectiva de James Kaput; e a última discute a perspectiva de Luis Radford. Por fim, concluímos esse capítulo com a caracterização de pensamento algébrico que iremos adotar em nossa pesquisa, construída a partir das perspectivas desses autores.

3.2. Pensamento algébrico na perspectiva de Rômulo Lins

Rômulo Lins (1992) em sua tese de doutorado intitulada “A framework for understanding: what algebraic thinking is[12]” destaca que pensar algebricamente é uma maneira, entre outras, de produzir significado para a álgebra. Nesse sentido, para esse autor, o aluno está pensando algebricamente quando ele consegue construir significado para os objetos algébricos, como as equações e inequações. Quando o aluno consegue perceber regularidades em operações aritméticas, como a propriedade comutativa, ou quando ele consegue perceber, por exemplo, quando o “X” está representando uma incógnita (em uma equação) ou uma variável (em uma função).

A produção de significado para os objetos e os símbolos algébricos como elemento caracterizador do pensamento algébrico também é defendida por Arcavi (2005). Ele lembra que o essencial no desenvolvimento do pensamento algébrico é a construção do sentido para os símbolos, em especial os símbolos algébricos, ou seja, para esse pesquisador, assim como para Rômulo Lins, o aluno está pensando

[12] Um quadro para a compreensão do que é pensamento algébrico

algebricamente quando constrói significado para os objetos algébricos e para a linguagem algébrica formal (simbólica).

Para discutir a construção de significado em álgebra Rômulo Lins utiliza, como referencial, o “Modelo Teórico dos Campos Semânticos[13]” (MTCS).

> O MTCS é um modelo epistemológico que propõe que *conhecimento é uma crença-afirmação junto com uma justificação para a crença-afirmação*. Indicamos, desta forma, que conhecimento é algo do domínio da enunciação – e que, portanto, todo *conhecimento* tem um sujeito – e não do domínio do *enunciado*; podemos também expressar este fato dizendo que *conhecimento* é do domínio da *fala*, e não do *texto*. Desde este ponto de vista, a matemática é um *texto*, e não *conhecimento*; tem-se *conhecimento* apenas na medida em que pessoas se dispõem a *enunciar* este *texto* (LINS, 1994b, p. 29).

Nesse sentido, para esse autor, um objeto matemático só se torna conhecimento quando ele passa a ser enunciado por um indivíduo, isto é, o conhecimento não está no texto, e sim, no sujeito.

Ainda segundo Lins (1994b, p. 31), “um campo semântico é um modo [como outro] de produzir significado”. Ele defende que podemos construir significado para uma equação em diferentes campos semânticos como, por exemplo, o campo da “balança de dois pratos” ou o campo do “pensamento algébrico”

Para entender a diferença entre esses dois campos semânticos, Lins (1994a) nos coloca que quando um aluno resolve uma equação não significa, necessariamente, que ele está pensando algebricamente. Quer dizer, um aluno pode responder facilmente a equação 3X + 10 = 100, utilizando como técnica, por exemplo, o “modelo da balança de dois pratos”, no qual deve ter um equilíbrio entre os pratos. Entretanto, isso não é o suficiente para garantir que ele compreendeu a equação enquanto uma relação de igualdade numérica, e que o “X” é um número desconhecido a ser encontrado.

Por conta disso, esse mesmo aluno pode encontrar dificuldades para responder a equação 3X + 100 = 10, uma vez que essa equação não tem sentido no “modelo da balança”. Para que um aluno consiga responder a essa equação ele tem que ter construído o significado de equação como igualdades numéricas, ou seja, perceber que existe uma relação entre o primeiro e o segundo membro da equação e, por conta dessa relação, é possível, por exemplo, subtrair 100 do primeiro e do segundo membros e encontrar uma equação equivalente à primeira. Compreender uma

[13] Mais elementos desse modelo é encontrado em Lins (1992, 1994a, 1994b)

equação dessa forma caracteriza, segundo Lins (1992), que o aluno está pensando algebricamente.

Outro aspecto interessante do pensamento algébrico colocado por Lins (1992) é que ele só se desenvolve por meio de um ato intencional, isto é, não é algo que acontece espontaneamente. Por conta disso, ele ressalta que no processo de ensino o professor deve compreender que desenvolver essa maneira de pensar

> requer uma mudança de perspectiva, um "parafuso solto", uma intenção específica, e isso só pode ser atingido conscientemente comparando diferentes formas de modelar a mesma situação, e discutir abertamente as características, os valores e as dificuldades de cada método utilizado[14] (Ibid. p. 12, tradução nossa).

Continuando, ele afirma ainda que “a intenção de manipular uma equação algébrica deve necessariamente preceder a habilidade técnica para fazê-la” (Ibid. p. 11).

Radford (2011c) é outro pesquisador que defende, assim como Lins (1992), que o pensamento algébrico não se desenvolve de forma espontânea, pelo contrário. Para ele,

> o pensamento algébrico é de nenhuma maneira “natural”, algo que aparecerá e se desenvolverá uma vez que os estudantes tenham amadurecido o bastante. O pensamento algébrico é um tipo de reflexão e ação cultural muito sofisticado, um modo de pensamento que foi refinado sucessivamente ao longo de séculos antes de alcançar sua forma atual[15] (p. 319).

Defendemos nessa tese, assim como nos colocam Lins (1992) e Radford (2011c), que desenvolver o pensamento algébrico deve ser, principalmente no ambiente escolar, um ato intencional. Porém, o ato intencional não é o mesmo para o aluno e o professor. O ato intencional do professor em levar o seu aluno a desenvolver o pensamento algébrico é, ou deveria ser, explícito. O professor deve ter a intenção de propor situações que possibilitem desenvolver essa forma de pensar em seus alunos, como por exemplo, explorando os problemas de partilha.

---

[14] Requires a shift of perspective, a "loose screw," a specific *intention*, and this can only be achieved by consciously comparing different ways of modelling the same situation, and openly discussing the characteristics, virtues, and difficulties of each method used (LINS, 1992, p. 12).

[15] The algebraic thinking is by no means something “natural”, something that will appear and develop once the students have matured enough. Algebraic thinking is a very sophisticated cultural type of reflection and action, a way of thinking that was refined again and again through centuries before it reached its actual form (RADFORD, 2011C, p. 319).

Já com relação ao aluno, essa intenção não é, necessariamente, direta, isto é, ao se deparar com um problema de partilha, por exemplo, o aluno não tem a intenção de desenvolver o pensamento algébrico, mas, sim, a intenção de resolver o problema. É essa intenção de resolver uma situação que pode levar o aluno a desenvolver o pensar algebricamente.

Diante da complexidade do que seja pensar algebricamente, Lins (1992) formulou, em sua pesquisa, três vertentes dessa forma de pensar. Para ele pensar algebricamente requer "pensar aritmeticamente" (aritmeticismo), "pensar internamente" (internalismo) e "pensar analiticamente" (analiticidade).

Aritmeticismo: nessa vertente do pensamento algébrico o objeto de trabalho é exclusivamente números, operações aritméticas e uma relação de igualdade. Nessa perspectiva, é no bojo da linguagem aritmética que o pensamento algébrico emerge nas suas primeiras características.

Ainda segundo Lins (1992, p. 12, tradução nossa) "aritmeticismo significa precisamente 'modelar em números', o que naturalmente implica a utilização das operações aritméticas a fim de produzir as relações que constituem o modelo[16]".

Portanto, podemos dizer que nessa vertente do pensamento algébrico os números e as operações aritméticas são vistos como ferramentas no intuito de resolver, ou modelar, determinadas situações. Parece estranho essa caracterização de pensamento algébrico, uma vez que não trata, em nenhum momento, de uma linguagem simbólica algébrica. Entretanto, como defendemos anteriormente, não é a linguagem utilizada para revelar o pensamento que determina a forma que o sujeito está pensando.

Além disso,

---

[16] Arithmeticity means precisely "modelling in numbers," which naturally implies the use of the arithmetical operations in order to produce the relationships which constitute the model (LINS, 1992, p. 12).

> não há nenhum problema em dizer que "número é qualquer elemento do conjunto de base de uma estrutura algébrica". Outros autores colocam restrições, por exemplo, que essa estrutura algébrica tenha duas de tal e tal tipo, mas isso não é realmente necessário. Segundo nosso ponto de vista, números naturais, inteiros, reais e complexos são números, mas também o são: polinômios, vetores, matrizes, permutações, conjuntos, e assim por diante, *sempre que estiverem sendo considerados do ponto de vista da estrutura algébrica correspondente*. Por outro lado, o que caracteriza a "verdadeira" operação aritmética é a "sensação" de se estar "fazendo uma conta": dois elementos são associados para "produzir" um terceiro. É essa característica – forte – das operações aritméticas "verdadeiras" que persiste nas leis de composição da álgebra abstrata, de modo que não vemos inconveniente em utilizar a nomenclatura que adotamos, de modo a preservar o *insight* que ela oferece (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 152).

Internalismo: implica considerar os números e as operações apenas segundo as suas propriedades, possivelmente envolvendo igualdade e desigualdade. "As propriedades destes objetos, que sustentam a ação dos alunos, não fazem referência a coisa alguma fora do domínio desses objetos" (CYRINO; OLIVEIRA, 2011, p. 101). Portanto, nessa segunda vertente do pensamento algébrico o foco é na possibilidade que temos de "distinguir soluções internas, isto é, aquelas produzidas dentro das fronteiras dos campos semânticos dos números e das operações aritméticas[17]" (LINS, 1992, p. 14, tradução nossa).

Nessa vertente do pensamento algébrico os números são tratados como objetos de estudo, deixando de servir como ferramentas na resolução ou modelação de situações problemas.

Lins (1992, p. 14 - 15) destaca que

> é uma característica do pensamento algébrico que as operações aritméticas se tornem objetos, ao mesmo tempo que são usadas como ferramentas, e esta é apenas uma consequência do conjunto de requisitos do *aritmeticismo* e do *internalismo* do pensamento algébrico[18] (tradução nossa).

[17] Distinguish internal solutions, ie, those which proceed within the boundaries of the *Semantical Field* of numbers and arithmetical operations (LINS, 1992, p. 14).

[18] It is characteristic of algebraic thinking that arithmetical operations become objects, while also being used as tools and this is only a consequence of the combined requirements of the *arithmeticism* and of the *internalism* of algebraic thinking.

Portanto, podemos perceber que não existe uma fronteira clara e definida, segundo Lins (1992), entre o pensar no aritmeticismo ou no internalismo. Na verdade, o pesquisador não busca, em sua tese, definir quando o aluno está pensando em uma ou outra vertente do pensamento algébrico. Para ele, o aluno está pensando algebricamente quando mobiliza os elementos das três vertentes ao mesmo tempo.

Entretanto, acreditamos que o aluno pode estar pensando algebricamente quando, por exemplo, utiliza números como ferramentas para resolver determinados problemas, como os problemas de partilha, uma vez que esse tipo de problema é resolvido, principalmente, quando o sujeito consegue estabelecer as relações entre as partes e o todo. Talvez o que aconteça é que o aluno que utiliza números como ferramenta para resolver um problema de partilha esteja em um nível menos desenvolvido do que os que utilizam, por exemplo, uma equação polinomial do 1º grau.

Analiticidade: nessa vertente o pensamento algébrico é caracterizado como um método de procura de verdades no qual o “desconhecido é tratado como conhecido” (LINS, 1992, p. 16). Os números genéricos são tidos exatamente como se fossem específicos e as “incógnitas” são tidas exatamente como se fossem “dados”.

Por exemplo, nessa vertente do pensamento algébrico as expressões algébricas que formam uma equação são manipuladas segundo as leis da aritmética, isto é, os elementos desconhecidos, como o “X”, são tratados como valores conhecidos, para que possam ser geradas equações equivalentes até encontrar o desconhecido, o “X”. Lins (1992) destaca que nessa vertente do pensamento algébrico “os elementos "desconhecidos" devem ser manipulados com base em propriedades gerais para a classe de objetos a que pertencem, e não como uma manipulação real de um determinado, específico, objeto” (p. 15).

Diante disso, podemos concluir que pensar algebricamente, de acordo com as ideias de Rômulo Lins, nada mais é do que produzir significado para as situações em termos de números e operações aritméticas (e igualdade ou desigualdades), e com base nisso transformar as expressões obtidas operando sempre de acordo com o aritmeticismo, o internalismo e a analiticidade (LINS; GIMENEZ, 1997).

Apesar de em sua definição de pensamento algébrico Lins (1992) falar de “transformismo”, ele destaca que essa forma de pensar não é revelada apenas por meio de uma notação, ou linguagem, simbólica-literal, como dito anteriormente.

Mesmo defendendo a ideia de que “a notação algébrica compacta tal como se desenvolveu a partir de empréstimos da notação da aritmética – não só é possível no contexto do pensamento algébrico, mas também adequada” (LINS, 1992, p. 17). Porém, para esse autor, o transformismo algébrico dentro de sua caracterização de pensamento algébrico não acontece de forma mecanizada.

Para compreender melhor, temos o exemplo a seguir, o qual mostra os possíveis passos para se chegar à solução de uma equação.

$2X + 5 = 25$

I. $2X = 25 - 5$

II. $2X = 20$

III. $X = \frac{20}{2}$

IV. $X = 10$

Para Lins (1992), se o aluno realiza os passos (I), (II), (III) e (IV) de forma mecanizada, seguindo o modelo apresentado pelo professor, sem entender o que realmente está por trás de cada operação realizada, ele, o aluno, de forma alguma está pensando algebricamente.

Entretanto, se o aluno entender que esses passos são realizados de acordo com as propriedades das operações aritméticas em relação a uma igualdade, ou seja, perceber que em uma igualdade se subtrairmos ou dividimos (no caso do exemplo colocado) o mesmo valor de ambos os membros, encontraremos uma equação (ou expressão) equivalente, ele está demonstrando pensar algebricamente ao resolver essa equação.

Portanto, assim como Lins (1992), acreditamos que não é pelo fato de o aluno resolver uma equação que mostra que ele está pensando algebricamente, pois, como dito anteriormente, ele pode estar repetindo, de forma mecanizada, o modelo apresentado pelo professor. Para o aluno pensar algebricamente ele tem que demonstrar ter construído o significado das ações realizadas em cada passo.

3.3. Pensamento algébrico na perspectiva de James Kaput

Kaput (2008) classifica a álgebra como uma atividade humana, portanto, assim como Lins (1992), para Kaput o conhecimento está no sujeito e não no objeto. Logo, como dizemos anteriormente, não é pelo fato de um aluno visualizar uma equação, como por exemplo, 2X + 10 = 100, que ele a percebe como um objeto algébrico. Podemos dizer o mesmo para o processo de resolução. O aluno que responde essa equação não significa, necessariamente, que ele esteja fazendo álgebra, ou trabalhando no mundo algébrico.

Acreditamos que um aluno esteja no mundo algébrico quando compreende ou constrói significado para a equação, no sentido colocado por Kaput (1999) e Lins (1992). Isto é, um sujeito está visualizando ou respondendo uma equação como um objeto algébrico quando ele está pensando algebricamente, quando ele entende a equação como uma relação de equivalência entre o primeiro e o segundo membros e para respondê-la ele deve encontrar um valor para o “X” que torne a igualdade verdadeira.

Diante disso, Kaput (1999, 2008) destaca que o pensamento algébrico é uma atividade exclusivamente humana que surge das generalizações estabelecidas, como resultado de conjecturas sobre dados e relações matemáticas e por meio de uma linguagem cada vez mais simbólica, usada na argumentação. Nas ideias desse pesquisador, o processo de generalização é muito marcante. Segundo ele, esse processo pode ocorrer com base em situações aritméticas, geométricas, de modelação matemática ou em quaisquer outras situações matemáticas, surgindo como um prolongamento do raciocínio que vai além dos casos particulares.

Além disso, Kaput nos coloca que para que o aluno desenvolva o pensamento algébrico, a aprendizagem da álgebra deve acontecer com compreensão, ou seja, devemos valorizar, no processo de ensino e aprendizagem desse campo da matemática, atividades que levem os estudantes a compreenderem a álgebra e sua linguagem.

Essa ideia de Kaput, apesar de ser chamada por um nome diferente, é, ao nosso ponto de vista, a mesma colocada por Lins (1992) e Arcavi (2005), quando esses autores afirmam que para que tenhamos o desenvolvimento do pensamento algébrico a aprendizagem da álgebra deve estar voltada para a construção de sentido, ou significado.

Diante disso, Blanton e Kaput (2005) caracterizam pensamento algébrico como um

> processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto particular de exemplos, estabelecem essas generalizações por meio de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade[19] (p. 413, tradução nossa).

Para esses pesquisadores as generalizações podem ser expressas pelos alunos por meio de diferentes linguagens, como a natural, gestual, numérica ou simbólica. O que determina a linguagem utilizada é, segundo Blanton e Kaput (2005) e Radford (2009), o nível de experiência dos alunos.

Entretanto, vale lembrar que quando esses autores tratam de nível de experiência dos alunos, não significa dizer que o nível está, necessariamente, vinculado à idade. Nesse sentido, os alunos mais experientes não são, prioritariamente, os mais velhos, mas, sim, os que tiveram maior contato com situações de ensino que promovam, por exemplo, a capacidade de realizar generalizações de padrões numéricos.

Continuando, Kaput, Blanton e Moreno (2008) destacam ainda que no cerne do pensamento algébrico estão, essencialmente, os significados, está o uso de uma linguagem simbólica algébrica como recurso para representar ideias gerais resultantes do raciocínio com compreensão.

Apesar de colocar os símbolos no cerne do pensamento algébrico, não significa, para esses pesquisadores, reduzi-lo ao transformismo algébrico, muito pelo contrário, o mais importante é a construção de significado, é o pensamento com compreensão. Não é olhar os símbolos que caracteriza o pensamento algébrico, mas, sim, olhar por meio dos símbolos, é entender o que cada símbolo significa, por exemplo, em uma equação, ideias que são compartilhadas com outros pesquisadores, como Lins (1992) e Arcavi (2005).

---

[19] “Process in which students generalize mathematical ideas from a set of particular instances, establish those generalizations through the discourse of argumentation, and express them in increasingly formal and age-appropriate ways” (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413).

Ainda de acordo com Kaput (2008), existem dois aspectos centrais do pensamento algébrico. O primeiro é a “generalização e a sua expressão gradual em sistemas de símbolos convencionais” (CANAVARRO, 2007, p. 88), que está relacionado com o *pensamento representacional*, reservado para designar os processos mentais pelos quais um sujeito constrói significado num sistema de representação (SMITH, 2008).

O segundo aspecto é o “raciocínio e ação sintaticamente orientada sobre as generalizações expressas em sistemas de símbolos organizados” (CANAVARRO, 2007, p. 88), que está associado ao *pensamento simbólico*, à forma como o indivíduo compreende e usa um sistema de símbolos e as respectivas regras, focando-se nos símbolos propriamente ditos (SMITH, 2008).

Esses dois aspectos centrais do pensamento algébrico dão origem a três vertentes dessa forma de pensar. A *“aritmética generalizada ou pensamento quantitativo”,* o *“pensamento funcional”* e a *“modelação”.*

Aritmética generalizada ou pensamento quantitativo: essa vertente do pensamento algébrico, colocada por Kaput (2008), tem por base o potencial caráter algébrico da aritmética, que deve ser explorado explicitamente, de forma sistemática, revelando a sua generalidade. Esse caráter algébrico da aritmética é tomado como base para a caracterização de pensamento algébrico proposta por Lins (1992). Para sua definição de pensamento algébrico, Lins (1994b) caracteriza álgebra como “um conjunto de afirmações a respeito de relações aritméticas, em que por *aritméticas* entendo relações envolvendo apenas operações finitas e homogêneas, precisamente no sentido das leis de composição da álgebra moderna” (p. 30).

Para Canavarro (2007, p. 89),

> é a partir da estrutura da aritmética que se podem construir os aspectos sintáticos da álgebra, o que implica analisar as expressões aritméticas não em termos do valor numérico obtido por meio do cálculo, mas em termos da sua forma (por exemplo, concluir que 33 + 8 = 8 + 33 não porque ambos representam 41, mas porque na adição a ordem das parcelas é indiferente).

No cerne da álgebra como aritmética generalizada está a generalização acerca das operações aritméticas e suas propriedades e o pensamento sobre relações entre números (KAPUT, 2008). Porém, podemos encontrar outros aspectos que podem fazer parte dessa vertente do pensamento algébrico, tais como os propostos por Blanton e Kaput (2005):

- *Explorar propriedades e relações de números inteiros*: esse aspecto caracteriza-se pela generalização sobre somas e produtos de números pares e ímpares; generalização de propriedades como o resultado de uma subtração de um número por ele mesmo, chegando a formalizar com "a – a = 0"; decomposição de números inteiros em possíveis somas e examinar a estrutura dessas somas; ...
- *Explorar propriedades das operações com números inteiros*: nesse aspecto concentra-se a exploração de relações entre operações aritméticas com números inteiros, como a comutatividade da adição e da multiplicação, ou a propriedade distributiva da adição em relação a multiplicação; generalizações em operações, como adicionar ou subtrair o mesmo valor; ...
- *Explorar a igualdade como expressão de uma relação entre quantidade*: nesse aspecto encontramos a exploração do papel algébrico do sinal de "=" usando a ideia de equivalência entre expressões numéricas do tipo 8 + 4 = □ + 5; da mesma forma, tratar equações como objetos que expressam relações entre quantidades, como (3 x n) + 2 = 14; ...
- *Tratar o número algebricamente*: consiste em compreender o número como número generalizado, enfatizando sua estrutura e não seu valor. Por exemplo, se um aluno se deparar com as seguintes questões: 7 + 5 é par ou ímpar? E 45678 + 85631? É par ou ímpar? A resposta dele deve ser baseada na estrutura dos números e não no resultado das adições; ...
- *Resolver expressões numéricas com número desconhecido (equações simples)*: nesse aspecto concentra-se a resolução de equações polinomiais do 1º grau simples com uma incógnita; a resolução de equações com incógnitas repetidas, por exemplo, se V + V = 4, quanto é V + V + 6? A resolução de equações no contexto da reta numérica; completar *puzzles* numéricos no qual faltam números, como, por exemplo, o quadrado mágico; ...

Pensamento funcional: Caracteriza-se pela generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais, além de perceber as relações de variações e (co)variações. Nessa vertente do pensamento algébrico a generalização surge por meio da ideia de função.

> O aspecto sintático da álgebra surge aqui para descrever regularidades por meio de símbolos ou para alterar a forma das expressões que traduzem regularidades, para comparar diferentes expressões relativas à mesma regularidade ou para determinar valores particulares de uma função motivada, por exemplo, pela necessidade de previsão (CANAVARRO, 2007, p. 90).

Apesar de Canavarro destacar que nessa vertente do pensamento algébrico, proposta por Kaput, o aspecto sintático da álgebra surge por meio de símbolos para descrever regularidades, acreditamos, assim como o próprio Kaput (1999; 2008) e Radford (2009), que o aluno pode demonstrar ter percebido regularidades por meio de diferentes linguagens.

No pensamento funcional é possível elencar diversos aspectos revelados pelos alunos, como nos colocam Blanton e Kaput (2005), tais como:

- *Simbolizar quantidades e operar com as expressões simbólicas*: refere-se aos casos em que é utilizado símbolos para modelar problemas ou operar com expressões simbólicas, não no sentido de resolução de equações ou na generalização das propriedades das operações aritméticas, mas, sim, no sentido, por exemplo, do

> contexto de mensagens secretas que são códigos simbólicos para fazer conversões de unidades: *3 ft 5 in* corresponde a 3(12) + 5, pois a mensagem secreta para conversão de pés *(feets)* em polegadas *(inches)* é F(12) + I, em que F representa o número de pés e I o número de polegadas, funcionando, assim, a mensagem secreta como função e F como variável (CANAVARRO, 2007, p. 90).

- *Representar dados graficamente*: Refere-se à construção de gráficos, como os de pares ordenados, para representar uma relação funcional, além de utilizar o gráfico para analisar variações de uma função.
- *Descobrir relações funcionais*: refere-se à exploração de correspondência entre quantidades; à exploração de relações recursivas; à elaboração de regras para descrever relações funcionais; à utilização de tabelas para representar as variações; e à simbolização de regras descobertas.
- *Prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos*: corresponde à formulação de conjecturas sobre o que não se sabe, a partir do que se sabe sem, necessariamente, repetir todo o processo anterior.
- *Identificar e descrever padrões numéricos e geométricos*: Refere-se à identificação de regularidades de sequências numéricas; à identificação de padrões

em sequências de figuras geométricas e/ou em conjuntos de expressões numéricas.

Modelação: é considerada como um domínio para expressar e formalizar generalizações. Nessa perspectiva, a generalização é realizada a partir de situações matemáticas ou de fenômenos, como, por exemplo, a generalização de regularidades em situações do dia a dia na qual a regularidade é secundária relativamente ao objetivo mais geral da tarefa. Portanto, temos a álgebra como a aplicação de um conjunto de linguagens de modelação, tanto do domínio da matemática, como também em outros domínios (KAPUT, 2008).

Para Kaput (2008), modelar é utilizar o aspecto sintático da álgebra para representar diversas situações, desde as essencialmente aritméticas, como problemas simples, como as ditas essencialmente algébricas, como as relações funcionais. Além disso, essa vertente do pensamento algébrico está, sobretudo, entrelaçada com as outras duas vertentes, uma vez que ela é utilizada para representar, muitas vezes, as ações realizadas nessas vertentes.

Além disso, destacamos que modelar uma situação, ou problema de estrutura algébrica, não significa, necessariamente, utilizar a linguagem simbólica da álgebra, ou seja, como dito anteriormente, é possível utilizar, por exemplo, a linguagem gestual, pictórica, natural, numérica ou simbólica algébrica para representar um problema algébrico.

Entretanto, temos convicção da importância do domínio, pelo aluno, da linguagem simbólica algébrica, pelo grande potencial de síntese que ela garante. Porém, o aluno deve perceber a importância da utilização dessa linguagem, e construí-la com compreensão, com significado.

A modelação é defendida como um dos elementos da álgebra escolar e faceta do pensamento algébrico por outros pesquisadores, como Lins (1992), Brito Lima (1996), Lessa (2005), Schliemann, Carraher e Brizuela (2012) e Bianchini e Machado (2010). Para essas últimas, o aluno está a pensar algebricamente quando, por exemplo, utiliza "expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação)" (BIANCHINI; MACHADO, p. 358).

3.4. Pensamento algébrico na perspectiva de Luis Radford

Para caracterizar pensamento algébrico, destacado por Radford (2006, p. 2) como uma “forma particular de refletir matematicamente”, esse pesquisador se apoia na teoria da objetivação do conhecimento[20], elaborada por ele, e que leva em consideração a história, a antropologia e a epistemologia do saber. Além disso, essa teoria discute a unicidade entre a linguagem e o pensamento, e destaca que o esforço para compreender a realidade conceitual e a produção de conhecimento não pode se restringir à linguagem e ao discurso, sendo necessário incluir-se, também, as práticas sociais subjacentes.

Diante disso, Luis Radford, assim como Rômulo Lins, destaca que o ser humano não desenvolve o pensamento algébrico de forma natural. Essa forma particular de pensar não é algo que se desenvolverá uma vez que a pessoa tenha um determinado amadurecimento. Para Radford (2011c, p. 319, tradução nossa) “o pensamento algébrico é um tipo de reflexão e ação cultural muito sofisticado, um modo de pensamento que foi refinado sucessivamente ao longo de séculos antes de alcançar sua forma atual[21]”.

E, o que diferencia o pensamento algébrico do aritmético é que, enquanto nesse último lidamos com quantidades conhecidas, no pensamento algébrico lidamos com quantidades indeterminadas de uma maneira analítica, ou seja, tratamos quantidades desconhecidas (por exemplo, incógnitas ou variáveis) como se fossem conhecidas e realizamos cálculos com elas como fazemos na aritmética, com os números conhecidos (RADFORD, 2011c).

Em um artigo de 2006, Radford caracteriza pensamento algébrico levando em consideração três elementos inter-relacionados entre si. O primeiro elemento lida com um senso de indeterminação que é próprio para objetos algébricos básicos, como incógnitas, variáveis e parâmetros. É essa indeterminação, em oposição à determinação numérica, que torna possível, por exemplo, a substituição de uma

---

[20] Mais sobre essa teoria pode ser encontrada em Radford, 2011a.

[21] “Algebraic thinking is a very sophisticated cultural type of reflection and action, a way of thinking that was refined again and again through centuries before it reached its actual form” (RADFORD, 2011c, p. 319).

variável ou incógnita por outra. Para entendermos melhor, não faz sentido fazer a substituição de 3 por 3 em aritmética, mas, em álgebra, faz sentido a substituição de uma incógnita por outra, sob determinadas condições.

O segundo elemento caracterizador do pensamento algébrico, segundo Radford (2006), é que objetos desconhecidos são manipulados analiticamente. Nesse caso, estamos pensando algebricamente quando conseguimos manipular, como por exemplo na resolução de uma equação, objetos desconhecidos de forma analítica. Essa forma analítica de tratar os objetos desconhecidos também é defendida por Lins (1992), na *analiticidade*, como característica do pensamento algébrico.

Já o terceiro elemento do pensar algebricamente é o modo particular simbólico de designar objetos. Para explicar esse elemento do pensamento algébrico, Radford nos remete a uma reflexão de Kant, filósofo alemão do século 18, que diz que enquanto os objetos da geometria podem ser representados ostensivamente, incógnitas, variáveis e outros objetos algébricos só podem ser representados indiretamente, por meio de construções baseadas em sinais.

O simbolismo alfanumérico é, de fato, considerado como o sistema semiótico da álgebra por excelência. No entanto, a partir de uma perspectiva semiótica, os sinais também podem ser algo muito diferente. Palavras ou gestos, por exemplo, são sinais por conta própria, – "semioticamente" falando, eles podem ser sinais genuinamente algébricos, como as letras. Claro que, isso não significa que eles são equivalentes ou que podemos simplesmente substituir um por outro. O que torna um sistema semiótico único e insubstituível é o seu modo de significar. Há coisas que podem ser representadas por certos sinais, e ter significado, e há coisas que não. (RADFORD, 2009, p. 35).

A história da matemática mostra, por exemplo, que a álgebra pode ser feita recorrendo a outros sistemas semióticos, como, por exemplo, fichas coloridas movidas em uma mesa de madeira, como usado por matemáticos chineses durante todo o século I a.C. ou desenhos geométricos, usados por escribas babilônicos no século XVII a.C. (RADFORD, 2006).

Além disso, Radford (2009), assim como Lins (1992) e Kaput (2008), classifica pensamento algébrico em três vertentes, ou como o próprio Radford chama, três formas diferentes de pensar; são elas:

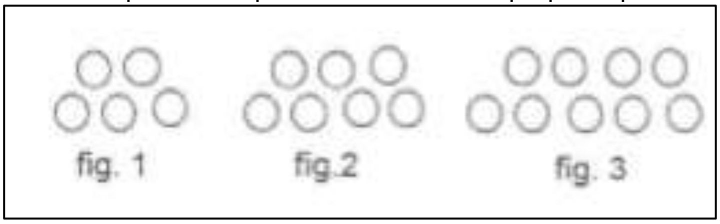
- ✓ "factual algebraic thinking" – "pensamento algébrico factual";
- ✓ "contextual algebraic thinking" – "pensamento algébrico contextual";

✓ “standard algebraic thinking” – “pensamento algébrico padrão”.

Para descrever as formas de pensamento algébrico, Radford (2009) utiliza as ações de alunos trabalhando em grupos de três, em uma atividade de generalização de padrões. A atividade trazida como exemplo por esse pesquisador para explicar as formas de pensamento algébrico consiste em desenhar as figuras 4 e 5 da sequência mostrada na Figura 6 a seguir, e descobrir o número de círculos nas figuras 10 e 1001.

A segunda parte da atividade, consiste em escrever uma mensagem para um aluno de outra classe indicando como descobrir o número de círculos em qualquer figura, e, em seguida, escrever uma fórmula algébrica para o número de círculos na figura n.

Figura 6 – Sequência de padrões da atividade proposta por Radford.



Fonte: Radford (2009)

Temos, a partir de então, o detalhamento de cada forma de pensar algebricamente propostas por Radford.

<u>Pensamento algébrico factual:</u> também chamado por Radford, em alguns momentos, de pensamento algébrico concreto, está intimamente relacionado com situações mais particulares. Nessa forma de pensar algebricamente, a indeterminação, o desconhecido (a incógnita) permanece implícita. Gestos, palavras e ritmo constituem a essência semiótica dos estudantes. É nessa forma de pensar que os estudantes têm condições de construir o que Radford (2009) chama de “fórmulas-em-ação”, expressão que o próprio Radford declara ter tomada emprestada de Vergnaud, com algumas modificações.

O aluno que utiliza essa forma de pensamento algébrico, consegue responder a primeira parte da atividade representada na Figura 6, ou seja, consegue desenhar as figuras 4 e 5, pois percebe que o número de círculos aumenta em dois de uma figura à outra. O aluno também é capaz de objetivar uma regularidade: “a relação entre o número da figura e o número de círculos nas suas linhas” (RADFORD, 2009, p. 39).

Entretanto, Radford (2009) destaca que para determinar o número de círculos nas figuras 100, 1000 ou 10000, identificar a regularidade não é suficiente. A regularidade tem que ser generalizada. O aluno tem que construir uma fórmula para calcular o número de círculos de qualquer figura. Porém, a fórmula construída por um aluno que se encontra nessa forma de pensar não é constituída por símbolos essencialmente algébricos, como os sinais alfanuméricos.

Por exemplo, na atividade da Figura 6, o aluno é capaz de perceber que para calcular o número total de círculos da figura 10, basta somar 1 ao 10 para encontrar o número de círculos da linha superior, que nesse caso é igual a 11, e somar 2 ao 10 para encontrar o número de círculos da linha inferior, que é igual a 12. Logo, o total de círculos da figura 10 é igual à soma dos círculos da linha superior com o total de círculos da linha inferior, ou seja, 23 círculos. Para calcular o número de círculos da figura 100, o estudante utiliza a mesma estrutura. Logo, o número de círculos da figura 100 é igual a 101 + 102, que é igual a 203 círculos.

Percebemos, então, que a fórmula construída por um aluno que se encontra nessa forma de pensar está fortemente relacionada a números particulares, por isso Radford a chama de fórmula-em-ação. "A 'fórmula' desta forma concreta do pensamento algébrico pode ser melhor entendida como um predicado concretizado por uma variável implícita: indeterminação não chega ao nível do discurso[22]" (RADFORD, 2009, p. 40, tradução nossa).

A indeterminação ou incógnita é considerada como um espaço vazio a ser preenchido pela eventual substituição de termos particulares. Nesse sentido, a generalização, nessa forma de pensar algebricamente, ocorre dentro de uma camada primária de generalidade e em um universo de discurso que não excede números específicos, como a figura 1000, figura 3245, e assim por diante (RADFORD, 2009).

Embora essa forma de pensamento algébrico ocorra dentro de uma camada primária de generalidade, Radford (2009) afirma que,

[22] "A "formula" of this concrete form of algebraic thinking can better be understood as an embodied predicate with a tacit variable: indeterminacy does not reach the level of discourse" (RADFORD, 2009, p. 40).

> apesar de sua natureza aparentemente concreta, o pensamento algébrico factual não é uma forma simples de reflexão matemática. Pelo contrário, ele repousa sobre mecanismos altamente evoluídos de percepção e uma sofisticada coordenação rítmica de gestos, palavras e símbolos. A compreensão da regularidade e a imaginação das figuras na busca pela generalização dos resultados, permanece ancorada em um profundo processo de mediação sensorial – mostrando assim a natureza multi-modal do pensamento algébrico factual[23] (p. 40, tradução nossa).

Pensamento algébrico contextual: nessa forma de pensamento algébrico o nível de objetivação é mais profundo do que o da ação e percepção característica do pensamento algébrico factual. Por exemplo, na atividade citada anteriormente, da Figura 6, o aluno tem que ir além de números particulares e lidar com um novo objeto, a figura geral (RADFORD, 2009).

Portanto, os alunos que se encontram nessa forma mais abstrata de pensamento algébrico devem ser capazes de responder a segunda parte da atividade da Figura 6. Ele deve construir uma mensagem (fórmula) que possa ser utilizada para calcular o número de círculos de qualquer figura. Nesse caso, os alunos chegam a lançar mão dos números particulares e pensar em números gerais.

Radford (2009, p. 49, tradução nossa) destaca ainda que “no pensamento algébrico contextual indeterminação se torna um objeto explícito do discurso. Gestos e ritmos são substituídos por dêiticos linguísticos, advérbios, etc[24]”. As fórmulas começam a ser expressas de forma perceptual, baseadas em termos-chave, como “superior” e “inferior”, no exemplo da atividade da Figura 6.

Radford (2009) traz, como exemplo, a seguinte mensagem, ou fórmula, de um aluno que utiliza o pensamento algébrico contextual para responder a segunda parte da atividade da Figura 6.

---

[23] Despite its apparently concrete nature, factual algebraic thinking is not a simple form of mathematical reflection. On the contrary, it rests on highly evolved mechanisms of perception and a sophisticated rhythmic coordination of gestures, words, and symbols. The grasping of the regularity and the imagining of the figures in the course of the generalization results from, and remains anchored in, a profound sensuous mediated process— showing thereby the multi-modal nature of factual algebraic thinking (RADFORD, 2009, p. 40).

[24] In contextual algebraic thinking indeterminacy becomes an explicit object of discourse. Gestures and rhythm are replaced by linguistic deictics, adverbs, etc (RADFORD, 2009, p. 49).

“Você tem que adicionar um círculo ao número da figura para encontrar o número de círculos da linha superior, e adicionar um círculo à linha superior para encontrar o número de círculos da linha inferior”.

Essa frase pode ser vista como uma fórmula, porém muito diferente da apresentada na forma de pensamento algébrico factual. Aqui, ritmo e gestos são substituídos por termos-chave descritivos, como “superior” e “inferior”. Esses termos são, de acordo com Radford (2009), o que os linguistas chamam de dêiticos espaciais, que são palavras que utilizamos para descrever, de forma contextual, objetos no espaço.

No entanto, embora diferente do pensamento algébrico factual, tanto em termos de como a indeterminação é tratada, como nos meios semióticos utilizados pelos alunos para expressar o pensamento, essa forma de pensar algebricamente ainda é contextual e “perspectiva”, na medida que se baseia em um modo particular de relacionar algo. A fórmula algébrica aqui é de fato uma descrição do termo geral (RADFORD, 2009).

Pensamento algébrico padrão: Nessa forma de pensamento algébrico, em alguns momentos chamado por Radford de pensamento algébrico simbólico, o aluno começa a utilizar fórmulas alfanuméricas, ou seja, uma linguagem simbólica algébrica, para expressar o pensamento. No início dessa forma de pensar algebricamente, em vez de ser um dispositivo de cálculo abstrato, essas fórmulas alfanuméricas são narrativas vivas dos fenômenos estudados. Elas são, por exemplo, em atividades de generalização de padrões, como a do tipo da Figura 6, ícones em que os alunos oferecem uma espécie de descrição espacial da figura e as ações a serem realizadas.

Em um nível mais consolidado, as fórmulas deixam de ser ícones, deixam de ter uma natureza “perspectiva”, e passam a significar coisas de uma forma totalmente abstrata. Constituindo, assim, a força da álgebra, que é o distanciamento do contexto (RADFORD, 2009).

Radford (2009) lembra que a gama dos ricos recursos semióticos utilizados nas formas de pensamento algébrico factual e contextual, como ritmos, gestos, dêiticos, advérbios, etc. não têm espaço nas fórmulas algébricas baseadas em símbolos alfanuméricos. Ocorre, portanto, uma drástica mudança na linguagem utilizada para expressar o pensamento algébrico.

Por exemplo, ao ser pedido para, na atividade da Figura 6, escrever uma fórmula para representar o número de círculos da figura n, o aluno chega, em princípio, à seguinte expressão: *(n + 1) + (n + 2)*

Percebemos que essa fórmula é mais evoluída do que a utilizada pelo aluno no pensamento algébrico contextual, uma vez que agora o aluno utiliza uma linguagem com poder de síntese muito maior, a linguagem simbólica algébrica, baseada em sinais alfanuméricos. Entretanto, apesar de utilizar uma linguagem simbólica, os sinais nessa fórmula ainda mantêm uma experiência corporificada e perspectiva do processo de objetivação. Reconhecemos, facilmente, no termo “n + 1” a referência à linha superior da sequência, assim como reconhecemos no termo “n + 2” a referência à linha inferior.

Radford destaca que uma fórmula desse tipo pode ser denominada como um ícone, como uma espécie de descrição geométrica da figura. Isso porque ela não é um artefato simbólico de cálculo abstrato, mas, sim, uma história que narra, de forma altamente condensada, experiências matemáticas dos alunos.

Em um nível mais avançado do pensamento algébrico simbólico, o aluno é capaz de simplificar essa fórmula, chegando a uma que não seja uma descrição espacial da figura, mas uma síntese da relação existente entre o número da figura e o número de círculos. Temos, a seguir, uma fórmula simplificada para representar o número de círculos da figura n.

(*2n + 3)*

No caso dessa fórmula, não temos mais uma representação espacial da figura. Não percebemos a linha superior e a inferior, como na fórmula anterior. É essa natureza não “perspectiva” da fórmula que constitui, segundo Radford, a força da álgebra, que é o distanciamento do contexto, com a finalidade de significar coisas de uma maneira abstrata.

Apesar de concordar que o domínio da linguagem simbólica algébrica é o ápice do pensamento algébrico, Radford destaca a importância do caminho percorrido pelo aluno no desenvolvimento dessa forma de pensar. Caminho que começa no pensamento algébrico factual, passando pelo contextual, até chegar ao pensamento algébrico simbólico.

Ele afirma que esse percurso é fundamental pela importância dele na construção de significado para os objetos e para a linguagem da álgebra. Portanto, assim como Lins (1992) e Kaput (2008), Radford (2009) também ressalta que trabalhar o pensamento algébrico do aluno é fundamental para que ele aprenda, de forma significativa, os objetos algébricos, assim como a linguagem utilizada para representar esses objetos.

3.5. Conclusões do capítulo

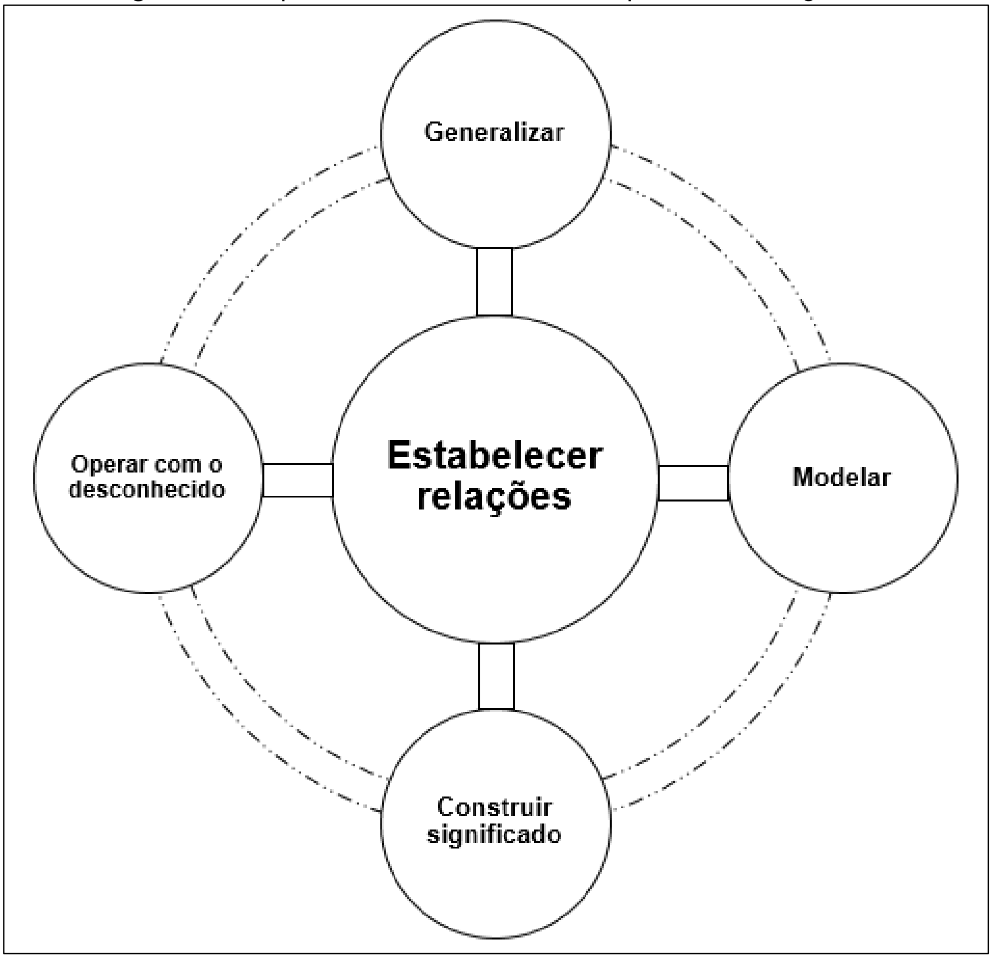
Percebemos, a partir das pesquisas de Lins (1992; 1994a; 1994b), Kaput (1999; 2008) e Radford (2006; 2009; 2011c), que a caracterização de pensamento algébrico não é algo simples. Isso ocorre, talvez, pelo fato de o extenso campo em que essa forma de pensar se insere, a álgebra, ter um número grande de objetos de estudo, como equações, inequações, sistemas de equações e de inequações, funções, padrões, etc., além de processos algébricos, como inversão e simplificação (RADFORD, 2006).

Porém, precisamos delimitar uma caracterização dessa forma particular de pensar matematicamente, uma vez que pretendemos construir um modelo que possibilite a identificação de níveis de pensamento algébrico revelado por alunos ao resolverem problemas de partilha. Portanto, a conclusão desse capítulo será composta por nossa caracterização de pensamento algébrico, tomando por base os estudos de Lins (1992; 1994a; 1994b), Kaput (1999; 2008) e Radford (2006; 2009; 2011c), além de seus colaboradores.

Diante do exposto, acreditamos que o pensar algebricamente é composto pelos seguintes elementos, ou características: estabelecer relações; generalizar; modelar; construir significado; e operar com o desconhecido. Além disso, defendemos, nessa tese, que no centro dessas características está a capacidade de estabelecer relações, e, subjacentes a ela, porém, não menos importantes, estão as outras características. Portanto, acreditamos que a primeira característica do pensamento algébrico desenvolvida e revelada por um sujeito é a capacidade de estabelecer relações, seguida pelas demais.

Para entender melhor essa estrutura, ou formato de pensamento algébrico aqui defendido, temos o esquema a seguir, que mostra como essas características se comunicam e inter-relacionam entre si.

Figura 7 – Esquema das características do pensamento algébrico

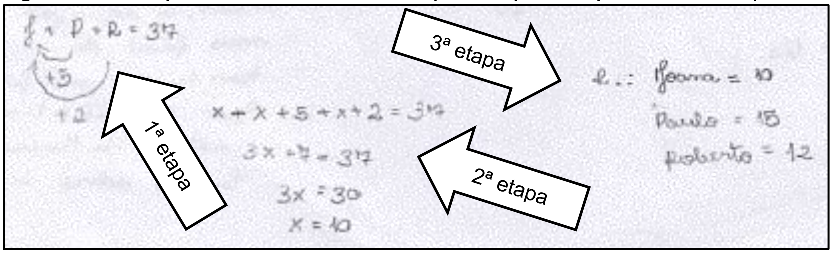


Fonte: o autor

Para entender o que significa cada característica e como elas se revelam na resolução de um problema de partilha, analisaremos a resposta de uma aluna ao problema seguinte.

Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana e Roberto receba 2 balas a mais que Joana. Quantas balas receberá cada um?

Figura 8 – resposta da aluna Júlia[25] (7º ano) a um problema de partilha



Fonte: dados da pesquisa

Podemos perceber que a aluna inicia a resolução do problema mobilizando, para nós, a característica central do pensamento algébrico, que é a **capacidade de estabelecer relações**, uma vez que ela, na 1ª etapa da resolução do problema, estabelece as relações existentes entre as partes (a quantidade de balas que cada personagem irá receber) e o todo (o total de balas).

Além dos registros indicarem que a aluna iniciou a resposta pelo estabelecimento das relações, o que é necessário na resolução de um problema de estrutura algébrica (CÂMARA; OLIVEIRA, 2010), ela, a aluna, confirma isso por meio do seguinte extrato de uma entrevista realizada pelo pesquisador, em que é pedido para ela explicar como respondeu o problema.

> ***P[26]:** Júlia, me explica como você resolveu esse segundo problema.*
> ***Júlia:** Certo. Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana, aqui (apontando para a seta e o mais 5 no modelo) e Roberto receba 2 balas a mais que Joana, aqui (apontando para a seta e o mais 2 no modelo).*

Portanto, percebemos que a aluna não inicia a resolução do problema com a equação. Primeiro ela cria um modelo, utilizando as iniciais dos nomes das personagens, indicando que a soma das quantidades de balas recebida por cada personagem é igual ao total de balas, ou seja, J + P + R = 37, porém, a quantidade de balas não é igual para todos, o que caracterizaria um problema de estrutura aritmética, que seria facilmente resolvido por uma divisão.

Diante disso, a aluna percebe que para chegar na resposta correta é necessário levar em consideração as condições propostas no enunciado. É nesse momento que

[25] Júlia é um nome fictício e participou, como sujeito, da pesquisa. Iremos utilizar, nessa parte do texto, não só a resposta dela a um problema de partilha, mas, também, trechos de uma entrevista de explicitação (VERMERSCH, 1994) realizada com ela após ela ter respondido ao problema. Mais detalhe de como foi realizada a aplicação do teste e a entrevista é encontrado no capítulo 6 dessa tese.

[26] Pesquisador

ela estabelece as relações, indicando-as, inicialmente, pelas setas e os sinais de + e os valores 5 e 2. É possível identificar no modelo que $\left(\underset{+\,5}{\longleftarrow}\right)$, indo do P para o J, indica, para a aluna, que Paulo irá receber 5 balas a mais que Joana, o mesmo acontece com $\left(\underset{+\,2}{\longleftarrow}\right)$, que vai do R ao J, indicando que Roberto vai receber 2 balas a mais que Joana.

Já nesse processo inicial, em que a aluna cria o modelo, para só depois chegar na equação, ela começa a revelar outra característica do pensamento algébrico, a **capacidade de modelar**. Ela começa a construir um modelo matemático para representar o problema apresentado em linguagem natural. E, dependendo do nível de desenvolvimento do pensamento algébrico em que essa aluna se encontra, esse modelo matemático terá uma linguagem simbólica algébrica mais ou menos formal (KAPUT, 1999; 2008; RADFORD, 2009; 2011c).

No início da 2ª etapa de resolução, a aluna evidencia que essa característica do pensamento algébrico, a capacidade de modelar, está bem desenvolvida, uma vez que ela converte o enunciado do problema de partilha em uma equação polinomial do 1º grau em que aparecem todas as relações estabelecidas inicialmente. Ela coloca o “X” para representar a quantidade de balas de Joana, o “X + 5” para representar a quantidade de Paulo, e o “X + 2” para indicar a quantidade de Roberto, além de deixar claro que a soma dessas três quantidades é igual a 37, expressa na equação “X + X + 5 + X + 2 = 37”, como pode ser verificado na Figura 8 e confirmado no extrato da entrevista a seguir.

Júlia: *Então, Joana seria o X, mais X mais 5, que seria o número de Paulo, mais X mais 2, que seria o número de Rogério, porque Paulo tem 5 a mais que Joana, e Rogério tem 2 a mais que Joana. A soma de Joana, Paulo e Roberto é igual a 37.*

Concomitante a esse processo de modelar, surge outra característica do pensar algebricamente, a **capacidade de generalizar**, tendo em vista que a aluna representa, após a conversão do enunciado do problema, as quantidades de balas que cada personagem irá receber de uma forma geral. Ela realiza uma síntese das relações existentes entre as quantidades de balas que cada personagem irá receber e descreve essas relações em uma linguagem genuinamente algébrica, em que o X pode representar um valor qualquer, valor esse que, no problema em questão, é descoberto após a resolução da equação (RADFORD, 2009; 2011c).

Ainda na segunda etapa é revelada a quarta característica do pensamento algébrico adotada nessa tese, a **capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido**, isto é, de forma analítica (LINS, 1992; 1994a; 1994b; RADFORD, 2006; 2009; 2011c).

Essa característica do pensamento algébrico é revelada no exemplo de resposta da Figura 8, em que a aluna manipula o desconhecido, o “X” no caso, segundo as leis da aritmética em relação à igualdade, em que são realizadas algumas operações na equação inicial com o objetivo de gerar equações equivalentes, até se chegar no valor de “X”.

Inicialmente podemos pensar que a resposta da aluna, trazida na Figura 8, indica que ela respondeu à equação de forma mecânica, seguindo o modelo que possivelmente o professor apresentou em aula. Porém, a entrevista com essa aluna revela que ela se valeu das leis da aritmética em relação a uma igualdade para chegar na resposta final. Podemos verificar isso no extrato a seguir.

> ***P:*** *Como você resolveu essa equação?*
> ***Júlia:*** *Então, eu juntei os X separado dos números, ficando 3X mais 7, que é igual a 37. Então eu diminuí 7 dos dois lados, e ficou 3X igual a 30, então X é igual a 10.*
> ***P:*** *E como você fez para chegar em X igual a 10?*
> ***Júlia:*** *Eu dividi os dois lados por 3.*

Portanto, tudo indica que quando a aluna subtrai 7 dos 37, ela indica, na entrevista, saber que isso é possível porque se subtrair o mesmo valor de ambos os membros de uma igualdade, essa igualdade não se altera. E, no caso de uma equação, essa ação gera uma equação equivalente à primeira. O mesmo caso acontece na divisão de ambos os membros da equação por 3.

Por fim, porém não menos importante, ao mesmo tempo em que a aluna mobiliza as características supracitadas do pensamento algébrico, ou algumas delas, ela também está lidando com a quinta e última característica dessa forma de pensar, a **capacidade de construir significado para a linguagem e os objetos algébricos** (LINS, 1992; 1994a; 1994b; KAPUT, 1999; 2008; ARCAVI, 2005; RADFORD, 2009).

Isso acontece tendo em vista que a aluna compreende o problema de partilha como uma equação polinomial do 1º grau, que existe uma relação de igualdade entre quantidades, no caso do exemplo da Figura 8 a soma das quantidades de balas que cada personagem irá receber é igual ao total de balas. Continuando, ela representa essa relação de igualdade por meio de um modelo matemático, utilizando uma linguagem simbólica algébrica.

É por meio disso que a aluna mostra ter construído significado para o objeto algébrico em jogo, no caso a equação. Acreditamos que a aluna não só mostrou ter construído significado para o objeto matemático, mas também para a linguagem simbólica algébrica utilizada para representar esse objeto. A construção de significado dessa linguagem é revelada, por exemplo, ao final da resolução do problema, na 3ª etapa, quando ela indica que o "X" representa a quantidade de balas que Joana irá receber, por isso "Joana = 10", que "X + 5" indica a quantidade de balas de Paulo, daí "Paulo = 15" (10 + 5), e que o "X + 2" é a quantidade de balas de Roberto, levando a "Roberto = 12" (10 + 2).

Portanto, pensar algebricamente requer a mobilização de pelo menos uma das cinco características aqui discutidas, a "capacidade de estabelecer relações". As outras características – a "capacidade de modelar"; a "capacidade de generalizar"; a "capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido" e a "capacidade de construir significado para os objetos e a linguagem simbólica algébrica" – surgem a partir do desenvolvimento da característica central.

Por fim, acreditamos que as características subjacentes à central surgem, e se desenvolvem, de forma concomitante, e que o desenvolvimento de uma dessas características leva, consequentemente, ao desenvolvimento de outras.

Capítulo 4

Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico: indícios em algumas pesquisas

4.1. Introdução

Acreditamos que o estudante pode passar por estágios, fases ou níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico. Nessa pesquisa, o objetivo é propor um modelo que possibilite a identificação de níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico revelado por estudantes ao resolverem problemas de partilha. Nossa hipótese é que um estudante pode se encontrar, em um determinado momento, em um ou outro nível de desenvolvimento do pensamento algébrico e esse nível é revelado, por exemplo, pelas estratégias adotadas na resolução de problemas algébricos.

Resultados de pesquisas, como as de Oliveira e Câmara (2011) e de Santos Júnior (2013) revelam que alguns alunos adotam estratégias mais sofisticadas que outros, indicando que a depender da estratégia adotada o aluno mobiliza mais ou menos características do pensamento algébrico.

Nossa hipótese surgiu a partir de leituras de pesquisas que indicam níveis de compreensão dos alunos em relação a um problema de estrutura algébrica. Dentre essas pesquisas temos as realizadas por Brito Lima (1996), Oliveira e Câmara (2011), Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) e Godino et al. (2014). Esses pesquisadores apontam, a partir de seus estudos, para a existência de níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico, mesmo não tendo como objetivo principal, em seus trabalhos, mostrarem a existência desses níveis.

Brito Lima (1996), em um estudo que tinha por objetivo investigar o desenvolvimento da representação de igualdade na resolução de problemas por crianças de 1ª série (atual 2º ano) à 6ª série (atual 7º ano) do ensino fundamental, analisando como as formas de representação utilizadas pela criança podem facilitar à compreensão dos dados e relações de tais problemas, apontou para uma evolução na compreensão, por parte dos alunos, dos problemas algébricos, revelada principalmente ao longo da escolarização.

Essa pesquisadora identificou que alguns alunos conseguem representar um problema de estrutura algébrica de forma mais clara, aparecendo, em seus registros, as relações existentes no enunciado. Ela verificou também que quanto maior o grau de escolarização maior a capacidade de compreender as relações de um problema algébrico, indicando, assim como nos coloca Radford (2009), que quanto mais experiente o aluno, maior a capacidade de compreender e representar as relações de um problema de estrutura algébrica.

Já em uma pesquisa que teve por objetivo analisar as estratégias adotadas por alunos do 6º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha, Oliveira e Câmara (2011) perceberam que alguns alunos adotam estratégias mais sofisticadas que outros, indicando existir, entre eles, níveis de desenvolvimento na compreensão desse tipo de problema.

Como resultado esses pesquisadores identificaram, por exemplo, que alguns alunos não conseguem compreender o enunciado de um problema de partilha, deixando-o sem respostas ou realizando um cálculo qualquer com os valores do enunciado do problema, ou adotando estratégias essencialmente aritméticas, como a "total como fonte" e "dividir por 3"[27].

Além disso, outros conseguem resolver os problemas de partilha utilizando a estratégia "atribuir valores", em que a incógnita do problema é tida como um espaço vazio que deve ser preenchido por um valor particular. Por fim, alguns alunos conseguem chegar à resposta de um problema de partilha utilizando uma estratégia algébrica, se valendo de uma equação polinomial do 1º grau.

Indo mais além, em um estudo que tinha por objetivo investigar as potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no ensino da álgebra elementar, identificando, sobretudo, indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico de alunos ao iniciarem o estudo desse tópico escolar, Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) defendem a ideia que o aluno passa por estágios de desenvolvimento do pensamento algébrico, que vai de uma fase pré-algébrica, passando por uma fase de transição entre o pensamento aritmético e o algébrico, chegando a uma fase de pensamento algébrico mais desenvolvido.

Já a pesquisa de Godino et al. (2014) teve por objetivo apresentar um modelo no qual se diferenciam níveis de pensamento algébrico elementar para ajudar na formação dos futuros professores de matemática, uma vez que esses pesquisadores acreditam que conhecer o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos e as atividades que potencializam a passagem de um nível a outro é fundamental para o ensino da álgebra escolar.

---

[27] Essas estratégias serão explicadas e analisadas nos capítulos seguinte.

O modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico proposto por Godino e seus colaboradores vai desde o nível 0, caracterizado pela ausência de pensamento algébrico, até o nível 3, em que o pensamento algébrico já é considerado consolidado.

Temos, nas seções seguintes, uma reflexão sobre essas duas últimas pesquisas, com o objetivo de entender o porquê da proposição do modelo.

4.2. Fases do pensamento algébrico segundo Fiorentini, Fernandes e Cristovão

Em um artigo que tinha por objetivo investigar as potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas[28] no ensino de álgebra elementar, identificando, sobretudo, indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico de alunos ao iniciarem o estudo desse tópico escolar, Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) perceberam que os alunos revelam fases de desenvolvimento do pensamento algébrico, e que as investigações matemáticas contribuem para que os alunos passem de uma fase à outra.

Por enquanto, nos preocupamos em discutir as características de cada fase do desenvolvimento do pensamento algébrico evidenciadas nessa pesquisa, uma vez que também acreditamos que os estudantes passam por níveis de desenvolvimento dessa forma de pensar.

Para essa pesquisa, Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) adotam como pensamento algébrico a caracterização de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 87), que aponta que essa forma de pensar é composta pelos seguintes caracterizadores: “percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização”.

A pesquisa desses autores foi realizada com alunos do 7º ano do ensino fundamental, que foram divididos em grupos de quatro para responderem às atividades propostas na pesquisa. Para exemplificar a permanência de um grupo em

---

[28] Esses autores caracterizam investigações matemáticas como situações-problemas desafiadoras e abertas, que permitem aos alunos várias alternativas de exploração e investigação para chegarem a uma solução.

uma determinada fase de desenvolvimento do pensamento algébrico, os autores colocaram exemplos de respostas dos grupos a uma atividade, que será analisada mais adiante.

- ***Fase 1. pré-algébrica*****:** nessa fase de desenvolvimento do pensamento algébrico o estudante tem condições, segundo Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005), de utilizar alguns elementos considerados algébricos como, por exemplo, alguma letra, porém, ainda não consegue conceber esses elementos como um número generalizado qualquer ou como uma variável.

Parece-nos que esses pesquisadores adotam, de alguma forma, a linguagem simbólica algébrica como reveladora do pensamento algébrico, quando afirmam que para um aluno se encontrar na 1ª fase de desenvolvimento do pensamento algébrico ele tem que ter condições de utilizar alguns elementos algébricos, como uma “letra”, indo de encontro a resultados de algumas pesquisas, que indicam que não necessariamente o estudante revela o pensamento algébrico por meio de uma linguagem simbólica algébrica (OLIVEIRA; CÂMARA, 2011, SILVA; SAVIOLI, 2012).

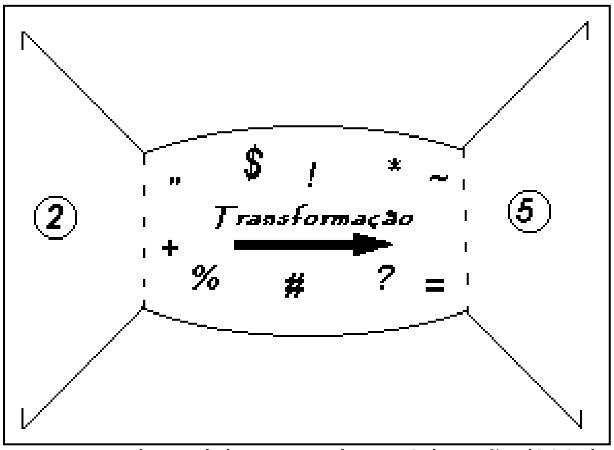
Em outra parte do texto, os próprios autores chegam à conclusão de que o aluno está na segunda fase, a de transição, quando “aceita e concebe a existência de um número qualquer, estabelece alguns processos e generalizações, <u>podendo ou não utilizar a linguagem simbólica</u>” (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2005, p.6, grifo nosso). Portanto, em um momento os autores parecem defender o uso de uma linguagem simbólica algébrica como reveladora do pensamento algébrico e, em outro, indicam que não é necessário utilizar esse tipo de linguagem para revelar indícios dessa forma de pensar.

Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) trazem, em seu artigo, alguns exemplos de respostas de alunos a uma atividade para indicar quando eles se encontram em uma fase ou outra de desenvolvimento do pensamento algébrico. Temos, a seguir, a atividade e as respostas dos alunos participantes da pesquisa, além das análises realizadas por esses pesquisadores para indicar em que fase de desenvolvimento do pensamento algébrico se encontram os participantes da pesquisa. As análises realizadas pelos autores em seu artigo, e que trazemos em nosso texto, são apenas referentes às respostas ao comando 4 da atividade a seguir.

Atividade 1[29]: Hoje, vocês conhecerão a *Máquina Mágica*. Ela faz transformações de números escolhidos por nós em outros números. O seu mecanismo é simples: ela faz a mesma mágica para qualquer número que passar por ela. Além disso, ela é uma máquina especial: ela não possui um segredo único, isto é, existem vários truques de transformação. *Vocês seriam capazes de descobrir as mágicas dessa máquina? Desafio vocês a descobri-las!*

A máquina é a seguinte:

Figura 9 – Máquina mágica



Fonte: Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005)

O modo de operá-la é o seguinte: ao escolher o número 2, a máquina o transformou em 5. Que tal? Muito complicado? Abaixo, encontram-se algumas questões para ajudá-los no entendimento da tarefa.

1. Descubram a mágica dessa máquina e, em seguida, façam um teste para outros cinco valores. Nessa máquina, pode-se escolher números negativos para serem transformados? E o zero?

2. Como foi comentado no início, se vocês analisarem a máquina com mais atenção, encontrarão outras mágicas possíveis para ela. Anotem todas as mágicas que encontrarem. Em seguida, escolham uma dessas mágicas e testem-na para outros cinco valores.

3. Escrevam, com suas palavras, qual é a mágica feita pela máquina escolhida no item 2.

---

[29] A atividade que trazemos como exemplo é retirada do texto de Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005).

4. Com a mágica escolhida no item 2, testem para um número "X". Como ficaria o resultado? Escreva uma expressão matemática que represente o número X transformado pela máquina.

Para Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) um aluno se encontra na fase 1 quando, solicitado para realizar o comando 4 da atividade 1, ele associa o "X ao número que supostamente representaria esta letra na sequência do alfabeto" (p. 16), ou quando o aluno respondesse como o grupo 1 a seguir:

Grupo[30] 1: "8] + 3 [11. A máquina sempre irá somar 3".

Esses pesquisadores afirmam que

> podemos interpretar que, para o último grupo (grupo 1), se "X" representa qualquer número, o número a ser transformado, em particular, pode ser escolhido como sendo o 8. Fica evidente a dificuldade em associar "X" como sendo um número genérico qualquer. Logo, a saída encontrada pelo grupo foi reduzir a situação ao âmbito <u>aritmético</u>. O relatório apresentado pelo grupo parece confirmar essa hipótese, pois <u>não aparece, em momento algum, o "X" que foi solicitado na tarefa</u> (Ibid. p. 16, grifo nosso)

Entretanto, acreditamos que não podemos afirmar, pelo menos a princípio, que os alunos que respondem a essa questão dessa forma não estão mobilizando nenhum indício de pensamento algébrico. Por exemplo, o grupo 1 parece perceber a "mágica" que a máquina realiza, conseguem estabelecer a relação entre o número de entrada e o de saída, além de generalizar uma situação, o que caracteriza muito mais um pensamento algébrico do que um pensamento aritmético. O que pode ter acontecido é que o grupo não tenha ainda um domínio da linguagem simbólica algébrica, o que não caracteriza ausência de pensamento algébrico, como os próprios Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) afirmam.

Portanto, se a fase 1 indica ausência de pensamento algébrico, como é colocado em alguns momentos por esses pesquisadores, ao afirmarem, por exemplo, que a resposta do grupo 1 se restringe ao "âmbito aritmético", acreditamos que os alunos desse grupo não se enquadram nesse nível de desenvolvimento do

[30] Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) se referem a grupo porque a atividade foi realizada em grupos de quatro alunos. Para facilitar a leitura, iremos enumerar os grupos a partir desse momento.

pensamento algébrico, uma vez que revelaram, sim, ter mobilizado indícios de pensamento algébrico. A resposta do grupo 1 nos parece revelar que esses alunos já estão em uma fase de desenvolvimento de pensamento algébrico mais elevada do que a fase pré-algébrica indicada por Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005).

Os indícios de pensamento algébrico revelados por esse tipo de resposta parecem indicar, pelo menos a princípio, que esses alunos estão mais próximos da fase de transição do pensamento aritmético ao algébrico, uma vez que a resposta dada por eles mobiliza elementos caracterizadores do pensamento algébrico, como identificar a “mágica” da máquina, ou seja, conseguiram estabelecer uma relação entre o número que entra e o que sai da máquina.

- ***Fase 2. Transição entre o pensamento aritmético e o algébrico*:** nesse momento de transição entre o pensar aritmeticamente e o pensar algebricamente o estudante é capaz de conceber a existência de um número qualquer, além de estabelecer alguns processos de generalização, se valendo ou não de uma linguagem simbólica algébrica, isto é, o estudante, quando se encontra nessa fase de desenvolvimento do pensamento algébrico, revela indícios de seu nível de desenvolvimento por meio de diferentes linguagens como, por exemplo, a linguagem natural (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2005).

Esses pesquisadores trazem como exemplo, que indica quando os alunos estão nessa fase, a seguinte resposta do grupo 2 ao comando 4 da atividade 1.

Grupo 2: “Eu pego 10] : 2 + 4 [9. Se eu pego outro número não vai dar o mesmo resultado. Mas a mágica dá certo para todos os números”.

Esses autores afirmam que essa resposta “refere-se a uma justificativa em que o grupo não utilizou o valor genérico “X”, mas evidenciou alguns elementos caracterizadores do pensamento algébrico” (Ibid. p. 16). Eles afirmam que essa explicação revela que “o grupo percebeu um aspecto invariante (a mágica) em contraste com outro que varia (outro número não vai dar o mesmo resultado), tendo conseguido perceber e expressar a estrutura da situação” (Ibid. p. 16), mesmo não tendo utilizado uma representação simbólica algébrica para indicar a generalização percebida.

Entretanto, acreditamos que os indícios de pensamento algébrico mobilizados pelos alunos do grupo 2 parecem estar muito próximos dos mobilizados pelos alunos do grupo 1, pois os alunos do grupo 1 também perceberam a "mágica" da máquina, assim como, mesmo sem revelar que o resultado não será igual para outros valores, quando eles afirmam que "a máquina sempre irá somar 3", parecem indicar que perceberam que os resultados serão diferentes dependendo do número escolhido. Portanto, acreditamos que esses alunos estão, pelo menos a princípio, em um mesmo nível de desenvolvimento de pensamento algébrico, ou pelo menos em níveis muito próximos.

Outros dois exemplos de respostas trazidos por Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) para indicar quando um aluno se encontra na segunda fase de desenvolvimento do pensamento algébrico são os seguintes.

Grupo 3: "A letra X é para representar um número desconhecido, por exemplo: X + 3 = 5. O X vai ser o número 2, porque o 2 + 3 = 5."

Grupo 4: "2] + x [5, porque todo X representa um número e nesse caso o X está substituindo o número 3."

Esses pesquisadores afirmam que os alunos dos grupos 3 e 4 fizeram interpretações da atividade não esperadas por eles. Para eles, ambos os grupos "interpretaram o "X" não como variável, mas como incógnita" (Ibid. p. 17). Eles relatam ainda que

> apesar da interpretação feita, não podemos negar que há alguma manifestação de pensamento algébrico nas duas interpretações produzidas. Em ambas, foram mobilizados os conceitos de equação e de incógnita tendo, inclusive, utilizado uma linguagem simbólica. Portanto, o que podemos dizer é que estes grupos (3 e 4) demonstram estar ultrapassando a fase pré-algébrica (Ibid. p. 17).

Entretanto, acreditamos que não é pelo fato de aparecerem símbolos tipicamente algébricos nas respostas dos alunos que indicam que eles estejam em um nível mais desenvolvido de pensamento algébrico. Por exemplo, os grupos 3 e 4 parecem apenas perceber a "mágica" inicial da máquina, que é sempre somar 3, o mesmo percebido pelo grupo 1. Portanto, se perceber a “mágica” inicial da máquina é suficiente para exemplificar um aluno que se encontra na fase de transição do pensamento aritmético ao algébrico, os alunos do grupo 1 se encontram na mesma fase dos alunos dos grupos 3 e 4.

A utilização da letra “X” nas respostas dos grupos 3 e 4 pode indicar uma adequação dos alunos a um contrato didático[31] estabelecido, talvez, pelo seu professor regular.

- ***Fase 3. Pensamento algébrico mais desenvolvido*:** essa fase é revelada quando o estudante desenvolve a capacidade de pensar e de se expressar genericamente, sobretudo “quando o aluno aceita e concebe a existência de grandezas numéricas abertas ou variáveis dentro de um intervalo numérico, sendo capaz não só de expressá-las por escrito, mas, também, de operá-las” (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2005, p. 6).

Esses pesquisadores trazem como exemplo para caracterizar a consolidação do pensamento algébrico a resposta a seguir do grupo 5 ao comando 4 da atividade 1.

Grupo 5: “Pegamos o X, ele entrou na máquina e fez a conta X . 2,5 = __ no final o resultado deu a armação da conta que é X . 2,5 = __.”

Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) afirmam que “esse grupo conseguiu uma forma de representar genericamente a estrutura funcional da máquina” (p. 18). Relatam ainda que o “ ‘__’ funciona como se fosse uma representação equivalente ao convencional ‘Y’ (a variável dependente da função), ou seja, entra ‘X’ na máquina e sai ‘__’ que é igual a ‘X . 2,5’” (p. 18).

Outra resposta ao comando 4 da atividade 1 que caracteriza, segundo esses pesquisadores, a fase 3, é a seguinte, encontrada pelo grupo 6.

---

[31] Brousseau (1986, p.51) considera contrato didático como “uma relação que determina, - explicitamente por uma pequena parte, mas sobretudo implicitamente, - a cada parceiro, professor e aluno, a responsabilidade de gerir aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar contas perante o outro. Esse sistema de obrigações recíprocas assemelha-se a um contrato. O que nos interessa é o contrato didático, ou seja, a parte deste contrato que é específica do conteúdo”.

Grupo 6: "Escolhemos o número X dividimos por 4 e somamos por 4,5 o resultado dará o número A. O número X pode ser representado por qualquer número e o número A depende do resultado".

Para Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005)

> o grupo 6 usou uma linguagem sincopada sem a utilização de uma expressão literal única para representar genericamente a situação-problema da máquina. Além disso, o grupo chegou a perceber a relação de dependência das variáveis. ... Assim, este grupo evidencia um estágio de pensamento algébrico bastante desenvolvido para alunos de 6ª série (atual 7º ano) do ensino fundamental (p. 19).

Portanto, para esses autores, um aluno se encontra em um nível desenvolvido de pensamento algébrico quando, em uma situação de relação entre quantidades, como a utilizada como exemplo, conseguem perceber a regularidade existente na relação entre as grandezas (dependente e independente), e conseguem expressar essa regularidade por meio de uma regra geral, seja em uma linguagem simbólica algébrica ou em outra linguagem.

Entretanto, percebemos que os autores parecem estar presos a uma linguagem simbólica algébrica como reveladora do pensamento algébrico, quando relatam que os alunos se encontram em um nível avançado do pensamento algébrico, ou em um nível de transição entre o pensamento aritmético para o algébrico quando conseguem responder ao comando 4 da atividade 1, comando esse que pede para os alunos testarem a "mágica" da máquina com o número "X", ou seja, um número qualquer expresso em uma linguagem tipicamente algébrica.

4.3. Níveis de pensamento algébrico segundo Godino et al.

Godino et al. (2014) apresentam um modelo no qual se pode diferenciar níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico mobilizado por indivíduos na resolução de diferentes tarefas[32] matemáticas. Esses níveis vão desde a ausência de

[32] Esses autores utilizam os termos tarefas e problemas como sinônimos.

pensamento algébrico, nível 0, a um em que o pensamento algébrico está plenamente desenvolvido, nível 3.

Esses pesquisadores ressaltam que o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico não é atribuído à tarefa a ser resolvida em si, mas, sim, na atividade matemática[33] que é realizada, ou seja, dependendo da maneira como o problema é resolvido, a atividade matemática mobilizada pelo aluno pode ser classificada em um nível ou outro. Não se trata, portanto, de níveis exclusivamente matemáticos (centrados na tarefa) mas de estágios de funcionamentos dos conhecimentos matemáticos mobilizados pelo aluno na resolução dos problemas (GODINO, et al., 2014).

Portanto, para esses autores não são as tarefas matemáticas a serem resolvidas que indicam em que nível de desenvolvimento do pensamento algébrico um aluno se encontra. Os níveis não são construídos de acordo com os tipos de problema que os alunos conseguem resolver, mas de acordo com as estratégias mobilizadas por esses alunos para resolver determinadas situações. Por exemplo, ao ser pedido para resolver uma determinada situação, como um problema de partilha de quantidade, um aluno pode revelar estar em um nível de desenvolvimento do pensamento algébrico, enquanto outro aluno pode revelar, ao resolver o mesmo problema, estar em outro nível. O que vai indicar em que nível os alunos se encontram são as estratégias mobilizadas por eles.

Para descrever os níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico Godino et al. (2014) tomam como exemplos situações pertencentes às três facetas do pensamento algébrico propostas por Kaput (2008), isto é, a aritmética generalizada, o pensamento funcional e a modelização. Temos a seguir a descrição desses níveis.

Seguida a caracterização de cada nível, temos a análise de alguns exemplos com o objetivo de entender como os estudantes podem revelar em que nível de pensamento algébrico se encontram. Todos os exemplos foram retirados do artigo de Godino et al. (2014).

- ***Nível 0*** – *ausência de pensamento algébrico*: nesse nível, no qual o aluno não mobiliza o pensamento algébrico, o trabalho dele é exclusivamente com objetos

[33] Godino e seus colaboradores chamam de “atividade matemática” as estratégias adotadas pelo aluno na resolução de um problema.

extensivos[34] (particulares) representados por meio de linguagem natural, numérica, icônica ou gestual. Podem aparecer símbolos para representar um valor desconhecido, mas esse valor é obtido como resultado de operações sobre objetos particulares. Em tarefas de generalização o mero reconhecimento da regra recursiva que relaciona o último elemento com o seguinte, em casos particulares, não é indicativo de generalização (GODINO et al., 2014).

Exemplo 1: Calcular o termo que falta: 1500 – 925 = ______

Godino et al. (2014) nos colocam que se o resultado 575 é obtido mediante o algoritmo formal da subtração, o número desconhecido, representado pela linha horizontal (____), é simplesmente o resultado da ação, indicada pela operação no primeiro membro da igualdade; o símbolo "igual" expressa o resultado da operação. "Trata-se, portanto, de uma atividade tipicamente aritmética. O trabalho consiste em calcular o número que se deve atribuir à linha horizontal da direita" (GODINO et al., 2014, p. 9). Na realização dessa atividade o aluno não mobilizou nenhum indício de pensamento algébrico, por isso, se encontra no nível 0.

Exemplo 2: Realizar as seguintes somas e comparar os resultados:

a) 24386 + 6035; 6035 + 24386
b) 24386 + 6035 + 715; 6035 + 715 + 24386

Se o aluno se limita a realizar as operações pedidas e comprovar que os resultados são iguais dois a dois, significa dizer, segundo Godino et al. (2014), que a atividade realizada pelo aluno não implica em nenhum nível de pensamento algébrico. Para esse pesquisador, o pensamento mobilizado por esse aluno é essencialmente aritmético.

[34] Para a análise dos níveis de pensamento algébrico Godino et al. (2014) afirmam que temos que levar em consideração os objetos resultantes dos processos de generalização e particularização. Quando o aluno está tratando com objetos particulares, ele está no mundo dos "objetos extensivos". Já quando o aluno consegue realizar generalizações, ou seja, trabalhar com regras, por exemplo, que representa uma sequência, ele se encontra no mundo dos "objetos intensivos".

Entretanto, acreditamos que o comando do exemplo 2 não instiga os alunos a mobilizarem elementos caracterizadores do pensamento algébrico, tendo em vista que, por uma questão de contrato didático, esse comando leva os alunos a realizarem as somas, já que é solicitado isso. Porém, se o comando solicitasse apenas que os alunos comparassem os resultados, aí sim, os que realizassem os cálculos estariam, pelo menos a princípio, pensando aritmeticamente. Já os alunos que dissessem que as somas do item (a) são iguais, sem realizar os cálculos, pois se tratam de somas de parcelas iguais, e os dá letra (b) também são iguais, e é 715 a mais que os da letra (a), estariam mobilizando alguns elementos caracterizadores do pensamento algébrico.

Portanto, acreditamos, assim como Godino et al. (2014), que o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico é revelado pelas estratégias adotadas pelo aluno no momento de resolver determinado problema. Entretanto, temos que ter o cuidado de verificar se o comando da situação a ser resolvida leva o estudante a mobilizar elementos caracterizadores do pensamento algébrico, uma vez que nem sempre a situação leva o aluno a isso.

- ***Nível 1*** *– pensamento algébrico incipiente*: nesse nível inicial do pensamento algébrico o trabalho do aluno começa a ser com objetos intensivos cuja regularidade é reconhecida de maneira explícita mediante linguagem natural, numérica, icônica ou gestual. O aluno pode utilizar símbolos para representar objetos intensivos conhecidos, porém, sem operar com esses objetos. Em tarefas estruturais podem ser aplicadas relações e propriedades das operações e podem trabalhar com dados desconhecidos expressos em símbolos. Já em tarefas envolvendo relações entre grandezas, o aluno é capaz de reconhecer a generalidade embora tenha condições de expressá-la apenas em uma linguagem diferente da simbólica-literal (GODINO et al. 2014).

Se ao resolver o exemplo 2 o aluno pensar da seguinte maneira: “se 24386 + 6035 é igual a 30421, então para calcular 24386 + 6035 + 715 é suficiente adicionar 715 ao resultado 30421, tendo como soma total 31136”. Da mesma forma, “se perceber que os resultados são iguais dois a dois sem realizar todas as adições, uma vez que a ordem das parcelas em uma adição é irrelevante”. O aluno não precisa, necessariamente, nomear esses raciocínios como propriedades associativas e comutativas da adição, “o essencial é que estabeleça uma relação genérica entre números e algumas propriedades reutilizáveis de suas operações” (GODINO et al. 2014, p. 10). A resolução do exemplo 2 dessa forma indica que o aluno revela indícios do nível 1.

Porém, se o comando do exemplo 2 pedisse para que o aluno comparasse os resultados, e ele pensar como é colocado por Godino et al. (2014), ou seja, “se 24386 + 6035 é igual a 30421, então para calcular 24386 + 6035 + 715 é suficiente adicionar 715 ao resultado 30421, tendo como soma total 31136”, acreditamos que esse aluno estaria mais próximo do nível 0, isto é, não estaria, pelo menos *a priori*, mobilizando elementos caracterizadores do pensamento algébrico, uma vez que realiza as somas para só depois realizar as comparações.

Já se o aluno afirma que na primeira conta o resultado é o mesmo, pois os números são os mesmos, apenas trocando a ordem, ele poderia estar mobilizando alguns elementos que caracterizam o pensar algebricamente, revelando estar em um certo nível de desenvolvimento. Esse aluno percebe a propriedade comutativa da adição, e talvez não perceba, de imediato, que os resultados do item (b) também são iguais.

Entretanto, se um aluno que não faz nenhuma das duas contas, e afirma a mesma coisa que o aluno anterior para o item (a), mas no item (b) ele diz que também terão o mesmo resultado, pois apenas somamos o mesmo valor nas duas contas, estaria, pelo menos a princípio, em um nível mais avançado. O primeiro aluno percebe a comutatividade da adição, mas o segundo, além disso, também percebe que a adição de um mesmo valor aos dois membros da igualdade mantém seu valor lógico.

Exemplo 3: Continuar a seguinte sequência: roxo, azul, azul, roxo, azul, azul, ...

Se um aluno pensar da seguinte maneira – depois de um roxo, sempre segue dois azuis e depois de dois azuis segue um roxo – ele reconhece uma regra geral compatível com o conjunto finito de elementos dados, e que o permite ir gerando sucessivamente os termos da sequência. O aluno que resolve o exemplo 3 dessa forma pode ser considerado no nível 1 de pensamento algébrico. Entretanto, se o aluno se limitar a escrever os termos que seguem em alguns casos, sem expressar alguma regra geral estaria no nível 0 (GODINO et al., 2014).

Entretanto, assim como no exemplo 2, o comando do exemplo 3 não leva os alunos a pensarem como nos colocam Godino e seus colaboradores, uma vez que o comando não pede a regra geral da sequência. Além disso, um aluno não consegue escrever o termo correto da sequência sem ter percebido a sua regra geral.

Portanto, acreditamos que se o comando do exemplo 3 pedisse para o aluno escrever uma regra geral para descobrir qualquer termo da sequência, e ele conseguisse expressar de alguma forma que “depois de um roxo, sempre segue dois azuis e depois de dois azuis segue um roxo”, esse estudante estaria em um nível de desenvolvimento do pensamento algébrico diferente de um aluno que consegue encontrar o termo seguinte, mas não consegue expressar a regra geral da sequência. Porém, a diferença de nível se dá pelo fato de o primeiro aluno conseguir expressar a regra geral, enquanto o segundo ainda não consegue; entretanto, ambos os alunos indicam mobilizar elementos caracterizadores do pensamento algébrico.

Exemplo 4: Indicar a medida do lado de um quadrado e a medida da base e da altura de um retângulo que tenham área igual e perímetro diferente.

Solução 1: Supomos que a medida do lado do quadrado é 6; o perímetro será 24 (quatro vezes o lado) e a área 36 (lado vezes lado). Um retângulo de área 36 pode ser formado por uma base igual a 12 e uma altura igual a 3 (12 x 3 = 36); nesse caso o perímetro será 12 + 12 + 3 + 3 = 30, que é diferente de 24.

Nesta resolução intervém os objetos intensivos, fórmulas gerais de cálculo de área de um quadrado (medida do lado vezes medida do lado), e do retângulo (medida da base vezes medida da altura), perímetro do quadrado (4 vezes medida do lado) e perímetro do retângulo (2 vezes a medida da base mais 2 vezes a medida da altura). Entretanto, essas regras não aparecem enunciadas de maneira geral e explícita, mas, sim, particularizadas com valores numéricos específicos. A atividade que se realiza é essencialmente aritmética-geométrica sem nenhum caráter algébrico, ou seja, pode ser classificada como nível 0 (GODINO et al., 2014).

Solução 2: Supomos que a medida do lado do quadrado é 6; o perímetro será 24 e a área 36. Podemos encontrar muitos retângulos cuja área seja 36, e perímetro seja diferente de 24. Por exemplo, se a medida da base for 4, a medida da altura seria 9

$\left(\frac{36}{4} = 9\right)$ e o perímetro seria 26; se a medida da base for 2, a medida da altura seria 18 $\left(\frac{36}{2} = 18\right)$, e o perímetro seria 40. Em geral, a medida da altura seria 36 dividido pela medida da base.

Nesta segunda solução se generaliza um objeto intensivo: o conjunto de soluções possíveis para a medida da base e da altura do retângulo uma vez fixada a área do quadrado. Estabelece-se uma relação geral entre a medida da altura e da base do retângulo, $\left(Altura = \frac{área}{base}\right)$, mesmo essa regra sendo enunciada em linguagem aritmética e/ou natural. Esse tipo de resposta supõe, segundo Godino et al. (2014), um nível incipiente de pensamento algébrico.

- ***Nível 2*** – *pensamento algébrico intermediário*: o aluno já tem condições de trabalhar com incógnitas e variáveis expressas em linguagem simbólica-literal para se referir aos objetos intensivos conhecidos, embora ligados ao contexto espacial temporal. Em tarefas estruturais, as equações são do tipo AX ± B = C. Já em tarefas funcionais se reconhece a generalidade, porém não se opera com as variáveis para obter formas canônicas da expressão (GODINO et al. 2014).

Exemplo 5: Uma caixa mágica duplica o número de moedas que colocamos nela. Entretanto, depois que usar a caixa paga-se 4 moedas. João colocou suas moedas na caixa e, efetivamente se duplicaram. Ele pagou as 4 moedas e voltou a colocar o restante de suas moedas na caixa. Novamente se duplicaram, entretanto, ao pagar as 4 moedas João ficou sem dinheiro. Quantas moedas João tinha no início?

Solução 1: Se João tivesse 2 moedas poderia jogar; ao colocá-las na caixa o valor duplicaria e ficaria com 4 moedas, pagaria 4 e ficaria sem dinheiro, logo João não poderia voltar a jogar. Se João tivesse 3 moedas, ao colocá-las na caixa obteria 6, ao pagar 4 ficaria com 2 moedas. Voltaria a colocar as 2 moedas na caixa, obtendo 4; ao pagar as 4 moedas ficaria sem dinheiro. Logo, João tinha no início 3 moedas.

Segundo Godino et al. (2014), a atividade matemática desenvolvida nessa resolução não põe em jogo nenhum nível de pensamento algébrico. O aluno trabalha com valores particulares das variáveis da tarefa e opera aritmeticamente com eles. Estaria, de acordo com esses pesquisadores, no nível 0.

Entretanto, dependendo da forma como o aluno pensa ao utilizar uma estratégia como essa, de atribuir valores, para resolver o exemplo 5, pode, ao que tudo indica, mobilizar elementos caracterizadores do pensar algebricamente. Por exemplo, se o aluno escolhe valores aleatórios, após a escolha do primeiro valor, revela não ter percebido a regularidade do problema. Ele estaria no campo da aritmética, no nível 0.

Porém, acreditamos que se o aluno escolhe começar com 2 moedas - João colocaria as 2 moedas na caixa que dobraria e ficaria com 4, pagaria 4 e ficaria sem dinheiro. Se o aluno é capaz de perceber que o valor escolhido no início é menor do que o necessário para satisfazer o problema, e, portanto, tem que ser escolhido um valor maior e próximo de 2, ele está indicando mobilizar elementos caracterizadores do pensamento algébrico, revelando estar em um nível um pouco mais desenvolvido do que o aluno que escolhe os valores aleatoriamente. Talvez esse aluno não esteja no nível 2 de desenvolvimento do pensamento algébrico proposto por Godino et al. (2014) mas, possivelmente estaria no nível 1.

Solução 2: João começa com n moedas (quantidade desconhecida); ao colocá-las na caixa obtém 2n; paga 4 e fica com 2n – 4. Coloca 2n – 4 na caixa e obtém o dobro, 2(2n – 4). Ao pagar 4 moedas fica sem dinheiro, ou seja: $2(2n - 4) - 4 = 0$; $4n - 8 - 4 = 0$; $4n - 12 = 0$; $n = 3$.

A solução 2 é, segundo Godino et al. (2014), claramente de nível 2, pois a quantidade desconhecida de moedas (incógnita) é representada, simbolicamente, mediante uma equação da forma $AX \pm B = 0$.

- ***Nível 3*** – *pensamento algébrico consolidado*: nesse nível de desenvolvimento do pensamento algébrico o aluno é capaz de generalizar objetos intensivos e representá-los mediante linguagem simbólica-literal e operar esses objetos;

realizar transformações na forma simbólica das expressões conservando a equivalência; realizar tratamento com as incógnitas para resolver equações do tipo AX ± B = CX ± D; encontrar a forma simbólica e descontextualizada de regras canônicas de expressões de funções e padrões (GODINO et al. 2014).

Exemplo 6: Existem 6 assentos entre cadeiras e tamboretes. As cadeiras têm quatro pés e os tamboretes tem três. No total existem 20 pés. Quantas cadeiras e quantos tamboretes existem?

Solução: Seja T o número de tamboretes e C o número de cadeiras. Como o total de tamboretes e cadeiras deve somar 6, então, T + C = 6. Por outro lado, se deve ter um total de 20 pés entre os tamboretes e as cadeiras, isto é, 3T + 4S = 20. Como de T + C = 6 se obtém que T = 6 – C; portanto, 3(6 – C) + 4C = 20, logo 18 + C = 20, obtemos, finalmente, que C = 2. Se C = 2, então T = 4. Se deve ter 4 tamboretes e 2 cadeiras para ter um total de 20 pés.

Essa solução é considerada como nível 3, pois, o pensamento algébrico do estudante que utiliza essa estratégia está, segundo Godino et al. (2014), consolidado, uma vez que o aluno foi capaz de generalizar objetos intensivos, representá-los por meio de uma linguagem simbólica-literal e operar com eles.

4.4. Conclusões do capítulo

As duas pesquisas analisadas nesse capítulo, assim como as de Brito Lima (1996) e Oliveira e Câmara (2011), apontam para a existências de níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico, e que esses níveis são revelados pelos alunos quando eles são submetidos a problemas de estrutura algébrica.

Porém, diferentemente de Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005), que parecem estar presos à linguagem simbólica algébrica como reveladora do pensamento algébrico, como percebemos em nossas análises, defendemos a ideia de que o aluno pode estar em um nível avançado do pensamento algébrico e mesmo assim utilizar uma linguagem diferente da tradicionalmente adotada na álgebra escolar.

Portanto, acreditamos que o modelo proposto por nós nessa tese se aproxima muito mais do apresentado por Godino et al. (2014), em que o nível de desenvolvimento é revelado pela estratégia mobilizada pelo aluno, além de indicarmos que nosso modelo é formado por quatro níveis, assim como o desses autores. Aliás, em nosso modelo iremos tomar emprestada a nomenclatura utilizada por Godino et al. (2014).

Entretanto, diferentemente deles, acreditamos que esses níveis são específicos ao problema, não no sentido de que o nível de dificuldade do problema é o que determina o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico, apesar de influenciar, mas, sim, específico ao problema no sentido de que o aluno pode encontrar-se em um determinado nível em um, como os de generalização de padrões, e, ao mesmo tempo, encontrar-se em outro nível quando solicitado a resolver outro tipo de situação, como os problemas de partilha, já que as relações necessárias para resolver essas situações são diferentes.

Diante disso resolvemos construir nosso modelo adotando um tipo específico de problema de estrutura algébrica, os problemas de partilha.

Capítulo 5

Versão *a priori* do modelo

5.1. Introdução

Esse capítulo tem por objeto construir uma versão *a priori* do modelo que será proposto nessa tese. Essa versão surgiu a partir dos resultados das pesquisas de Oliveira e Câmara (2011) e de Santos Júnior (2013), uma vez que as estratégias escritas mobilizadas pelos sujeitos dessas pesquisas permitem, pelo menos a princípio, definir distintos níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico.

Além dos resultados dessas pesquisas, analisamos, para a construção desse capítulo, a produção escrita de 342 alunos do 6º ano do ensino fundamental, sendo 202 alunos de 3 escolas da cidade do Recife e 140 alunos de 5 escolas da província do Québec (Canadá). Esses protocolos fazem parte da pesquisa de Oliveira e Câmara (2011), e foram cedidos por eles para serem utilizados nessa primeira versão do modelo aqui proposto.

Na construção dos questionários aplicados por Oliveira e Câmara (2011) foi variado o encadeamento das relações e a natureza das relações dos problemas de partilha com duas relações. Com essas variações foi possível a elaboração de doze problemas de partilha diferentes. Por conta disso, esses pesquisadores resolveram utilizar dois testes (A e B), cada um com 6 problemas, como podemos observar no quadro a seguir.

Quadro 5 – Testes utilizados na pesquisa de Oliveira e Câmara (2011)

Teste A		Teste B	
Questão	**Estrutura**	**Questão**	**Estrutura**
1. Frederico, Lúcia e Rogério têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico e Rogério tem o dobro de revistas de Frederico. Quantas revistas tem cada um?	Encadeamento tipo fonte, com a 1ª relação aditiva e a 2ª relação multiplicativa.	**1.** Frederico, Rogério e Lúcia têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Rogério tem o dobro de revistas de Frederico e Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico. Quantas revistas em quadrinhos têm cada um?	Encadeamento tipo fonte, com a 1ª relação multiplicativa e a 2ª relação aditiva.
2. Em uma escola, 180 alunos praticam esporte. O número de alunos que jogam futebol é o triplo do número de alunos que jogam vôlei e o número de alunos que jogam basquete é o dobro do número de alunos que jogam vôlei. Nessa escola, quantos alunos participam de cada esporte?	Encadeamento tipo fonte, com a 1ª e a 2ª relação multiplicativa.	**2.** Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana e Roberto receba 2 balas a mais que Joana. Quantas balas receberá cada um?	Encadeamento tipo fonte, com a 1ª e a 2ª relação aditiva.
3. Três times de basquetes participam da final do campeonato fazendo, juntos, 260 pontos. O time B fez 20 pontos a mais que o time A e o time C fez o dobro de pontos do time B. Quantos pontos fez cada time?	Encadeamento tipo composição, com a 1ª relação aditiva e a 2ª relação multiplicativa.	**3.** Três times de basquetes participam da final do campeonato fazendo, juntos, 240 pontos. O time B vez o dobro de pontos do time A e o time C fez 40 pontos a mais que o time B. Quantos pontos fez cada time?	Encadeamento tipo composição, com a 1ª relação multiplicativa e a 2ª relação aditiva.
4. Marta, Rafael e Ana têm, juntos, 270 chaveiros. Rafael tem o dobro do número de chaveiros de Marta, e Ana tem o triplo do número de chaveiros de Rafael. Quantos chaveiros têm cada um?	Encadeamento tipo composição, com a 1ª e a 2ª relação multiplicativa.	**4.** Em uma escola, 160 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga basquete é 10 a mais dos que jogam vôlei, e o número de alunos que joga futebol é 20 a mais dos que jogam basquete. Nessa escola, quantos alunos praticam cada esporte?	Encadeamento tipo composição, com a 1ª e a 2ª relação aditiva.
5. João, Pedro e Cláudio têm, juntos, 160 carrinhos. Pedro tem 25 carrinhos a menos que João e 15 carrinhos a menos que Cláudio. Quantos carrinhos tem cada um deles?	Encadeamento tipo poço, com a 1ª e a 2ª relação aditiva.	**5.** Ana, Júlia e Maria têm, juntas, 180 selos. Júlia tem um terço dos selos de Ana e a metade dos selos de Maria. Quantos selos têm cada uma?	Encadeamento tipo poço, com a 1ª e a 2ª relação aditiva.
6. Clara, Marcos e Antônio têm, juntos, 125 bolinhas. Marcos tem a metade de bolinhas de Clara e 5 bolinhas a menos que Antônio. Quantas bolinhas têm cada um?	Encadeamento tipo poço, com a 1ª relação multiplicativa e a 2ª relação aditiva.	**6.** Sílvia, Pedro e Carlos querem dividir 70 figurinhas entre eles de modo que Sílvia receba 30 figurinhas a menos que Pedro e a metade da quantidade de figurinhas de Carlos. Quantas figurinhas cada um vai receber?	Encadeamento tipo poço, com a 1ª relação aditiva e a 2ª relação multiplicativa.

Fonte: Oliveira e Câmara (2011)

A partir de nossas análises conseguimos identificar a existência de quatro níveis diferentes de desenvolvimento do pensamento algébrico, níveis esses que se aproximam dos propostos no artigo de Godino et al. (2014). Por conta disso, resolvemos tomar emprestada a nomenclatura proposta por esses pesquisadores. Nesse sentido, o nosso modelo (versão *a priori*) é composto pelo nível 0 (ausência do pensamento algébrico), passando pelo nível 1 (pensamento algébrico incipiente) e pelo nível 2 (pensamento algébrico intermediário), chegando ao nível 3 (pensamento algébrico consolidado).

Porém, diferentemente do modelo desses pesquisadores, o nosso é construído a partir de um único tipo de problema, os problemas de partilha com duas relações. Portanto, quando dizemos que o aluno se encontra no nível 0, não significa dizer que ele não mobiliza, em nenhum momento, elementos caracterizadores do pensar algebricamente, significa apenas que ele não consegue mobilizar o pensamento algébrico para resolver problemas de partilha com duas relações. O mesmo podemos dizer para os alunos que se encontram no nível 3, ou seja, não significa que o estudante que se encontra nesse nível tenha condições de resolver todas as situações que necessitem da mobilização do pensamento algébrico.

Ressaltamos também que, assim como propõem Godino et al. (2014), o que determina o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno, para nós, não é o tipo de problema que ele consegue resolver, não se trata de níveis exclusivamente matemáticos (centrados na situação a ser resolvida), mas, sim, a relação entre a estratégia de base mobilizada pelo estudante e o nível de dificuldade dos problemas de partilha.

Isso porque os resultados de nossas análises realizadas nas produções escritas dos alunos, que corroboram com os resultados das pesquisas de Oliveira e Câmara (2011) e Santos Junior (2013), indicam que a estratégia adotada inicialmente pelo aluno permanece inalterada, mesmo quando o encadeamento do problema de partilha muda, isto é, se o aluno adota a estratégia atribuir valores para resolver o primeiro problema, ele geralmente a utiliza para responder todos os outros problemas do teste.

Por conta disso, e por acreditar, assim como alguns pesquisadores (BLANTON; KAPUT, 2005, RADFORD, 2009) que a estratégia adotada pelo aluno é reveladora do nível de desenvolvimento do pensamento algébrico que o sujeito se encontra, decidimos adotá-la como pilar de cada nível construído em nosso modelo. Porém, os resultados de nossas análises, como das pesquisas já citadas anteriormente, indicam que existe um grau de dificuldade dos problemas de partilha com duas relações facilmente detectado quando levamos em consideração o tipo de encadeamento das relações.

Diante disso, adotamos esse grau de dificuldade para descrever subníveis que aparecem a partir do nível 1. Por conta disso, para cada nível, a partir do nível 1, propomos três subníveis, que resolvemos nomeá-los pelas primeiras letras do alfabeto. Nesse caso, o nível 1, que é formado pelos alunos que mobilizam a estratégia atribuir valores, é composto pelos subníveis 1A (indicando que os alunos só conseguem resolver os problemas de partilha com encadeamento tipo fonte); 1B (indicando que os alunos só conseguem resolver os problemas de partilha com encadeamento tipo fonte e composição); e 1C (indicando que o aluno consegue resolver os problemas de partilha independente do encadeamento: fonte, composição ou poço), ocorrendo o mesmo para os níveis 2 e 3, como será apresentado a seguir.

5.2. Construção da versão *a priori* do modelo

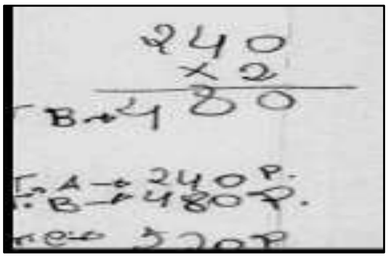
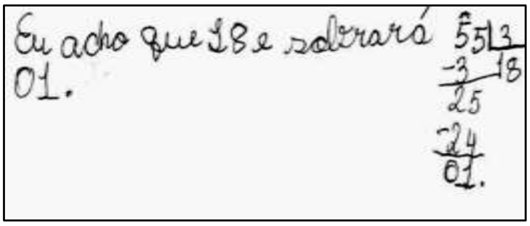
A seguir temos a caracterização de cada nível e subnível que compõe a versão *a priori* do modelo proposto em nossa tese. Lembramos que essa versão será validada no capítulo 6 a seguir, pois acreditamos que as entrevistas que realizamos a partir dos registros escritos nos habilita a construir, de forma mais segura, os níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico.

5.2.1. Nível 0 – ausência de pensamento algébrico

O aluno que se encontra nesse nível de desenvolvimento do pensamento algébrico não consegue mobilizar nenhuma característica dessa forma de pensar no momento em que se depara com um problema de partilha com duas relações, independente da natureza dessas relações (aditivas ou multiplicativas) ou do encadeamento dessas relações (fonte, composição ou poço).

Portanto, um aluno que se encontra nesse nível não consegue resolver um problema de partilha com duas relações, uma vez que ainda não estabelece as relações existentes no enunciado do problema e, o estabelecimento dessas relações é primordial na resolução de um problema de estrutura algébrica (MARCHAND; BEDNARZ, 1999; GAMA, 2003; RUIZ; BOSCH; GASCÓN, 2010; OLIVEIRA; CÂMARA, 2011; ALMEIDA, 2011).

Outra possibilidade é o aluno que se encontra nesse nível entender o problema de partilha como se fosse de estrutura aritmética, mobilizando, no momento em que o está respondendo, estratégias essencialmente aritméticas, denominadas por Oliveira e Câmara (2011) de “total como fonte” e “dividir por 3”. Podemos verificar essas estratégias nas respostas a seguir às questões 1 e 4 do teste B.

Q3b[35]: *Três times de basquetes participam da final do campeonato fazendo, juntos, 240 pontos. O time B vez o dobro de pontos do time A e o time C fez 40 pontos a mais que o time B. Quantos pontos fez cada time?* **Figura 10 –** Estratégia total como fonte  **Fonte:** Oliveira e Câmara (2011)	***Q1b:*** *Frederico, Rogério e Lúcia têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Rogério tem o dobro de revistas de Frederico e Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico. Quantas revistas em quadrinhos têm cada um?* **Figura 11 –** Estratégia dividir por 3  **Fonte:** Oliveira e Câmara (2011)

Percebemos que o aluno que responde à Q3b adota a estratégia *“total como fonte”*, ou seja, associa o total do problema ao valor de uma das incógnitas (OLIVEIRA; CÂMARA, 2011). Nesse caso, o aluno adota o total de 240 pontos como sendo a pontuação do time A e, em seguida, realiza as duas operações propostas no enunciado do problema (“dobro” e “40 a mais”) para encontrar os outros valores. Multiplica 240 por 2 para encontrar a pontuação do time B, que foi o dobro do time A, e soma 40 pontos ao total de pontos do time B para encontrar a pontuação do time C.

Acreditamos que o aluno que adota esse tipo de estratégia entende o problema da seguinte maneira: *Três times de basquetes participam da final do campeonato, o*

---

35 Nesse capítulo iremos adotar a representação Q1a, Q2a, ..., Q6a para indicar as questões do teste A e Q1b, Q2b, ..., Q6b para indicar as questões do teste B.

time A fez 240 pontos. O time B vez o dobro de pontos do time A e o time C fez 40 pontos a mais que o time B. Quantos pontos fez cada time?

Já o aluno que responde à Q1b adota a estratégia *"dividir por 3"*, isto é, "inicia o problema dividindo o total fornecido para as três incógnitas do problema, como se a partilha desse valor fosse em partes iguais" (CÂMARA; OLIVEIRA, 2010). Ele não considera as relações do enunciado, entendendo-o como uma simples situação de estrutura aritmética, que pede para dividir 55 figurinhas para três pessoas em partes iguais.

Portanto, acreditamos que esses alunos não mobilizam nenhum elemento caracterizador do pensamento algébrico adotado nessa tese, indicando estarem no nível 0, ou seja, ao resolver problemas de partilha com duas relações eles mobilizam essencialmente elementos caracterizadores do pensamento aritmético, pois, como nos coloca Kieran (1992), pensar aritmeticamente está intimamente ligado ao cálculo e à realização de operações na procura de um resultado, indicando, nesse caso, que os alunos que se encontram nesse nível têm condições apenas de trabalhar com objetos particulares.

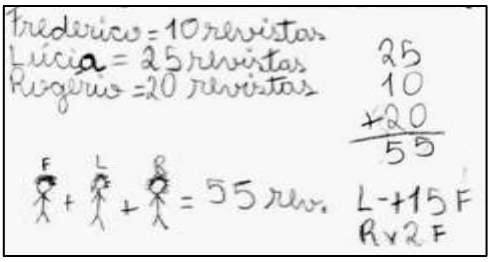
5.2.2. Nível 1 – pensamento algébrico incipiente

Nesse nível de desenvolvimento do pensamento algébrico o aluno já consegue mobilizar a característica central dessa forma de pensar, uma vez que ele revela ter condições de perceber as relações existentes entre as informações contidas no enunciado de um problema de partilha com duas relações, diferentemente dos alunos que se encontram no nível 0, como podemos observar nas respostas a seguir às questões 1 e 4 do teste A.

<table>
<tr>
<td>

Q1a: *Frederico, Lúcia e Rogério têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico e Rogério tem o dobro de revistas de Frederico. Quantas revistas tem cada um?*

Figura 12 – Estratégia atribuir valores

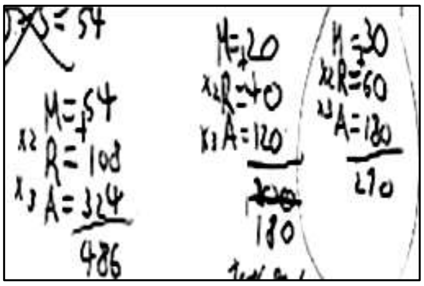


Fonte: Oliveira e Câmara (2011)

</td>
<td>

Q4a: *Marta, Rafael e Ana têm, juntos, 270 chaveiros. Rafael tem o dobro do número de chaveiros de Marta, e Ana tem o triplo do número de chaveiros de Rafael. Quantos chaveiros têm cada um?*

Figura 13 – Estratégia atribuir valores



Fonte: Oliveira e Câmara (2011)

</td>
</tr>
</table>

A estratégia adotada para resolver as questões 1 e 4 (Q1a e Q4a) é denominada de *“atribuir valores”*. Nessa estratégia “o aluno atribui determinado valor a uma das incógnitas, aplicando então as relações para determinar o valor das outras incógnitas" (OLIVEIRA; CÂMARA, 2011, p. 6).

Poderíamos dizer, a princípio, que essa estratégia é essencialmente aritmética, uma vez que se vale de cálculos basicamente aritméticos. Entretanto, acreditamos que o aluno que adota essa estratégia para resolver um problema de partilha está mobilizando, além da característica central dessa forma de pensar, outras características do pensar algebricamente.

Como podemos observar em ambas as respostas que ilustram esse nível, os estudantes utilizam uma linguagem sincopada, formada por abreviações, letras, números, desenhos e sinais de operações para representar o problema, revelando, nesse caso, a mobilização da capacidade de modelar, isto é, de construir um modelo matemático que represente as relações contidas no enunciando do problema.

Apesar do modelo construído pelos alunos que se valem da estratégia atribuir valores não ser o tradicionalmente esperado em um ambiente escolar, uma equação, Lins (1992), Kaput (2008), Radford (2009), dentre outros defendem que um dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico é a generalização e a sua expressão gradual em sistemas de símbolos convencionais, em uma linguagem cada vez mais simbólica.

Por exemplo, na resposta à Q1a, a expressão “L + 15F” registrada pelo aluno é, ao que tudo indica, a conversão da sentença “Lúcia tem 15 revistas a mais que

Frederico”, e “R x 2F” é a conversão de “Rogério tem o dobro de revista de Frederico”. Entretanto, esse aluno não consegue ir além desses registros, e construir a equação “F + F + 15 + 2F = 55”, ou, em uma linguagem simbólica algébrica tradicionalmente utilizada nos ambientes escolares, “X + X + 15 + 2X = 55”. O estabelecimento dessas relações e sua conversão nas expressões “L + 15F” e “R x 2F”, que se aproxima mais de uma equação, parece levar o aluno a chegar no valor correto na primeira tentativa, o que não acontece com o segundo aluno.

Da mesma forma, a resposta à Q4a dá indícios de que o aluno converte as relações contidas no enunciado do problema em um modelo matemático. É possível perceber isso nos modelos criados por ele. Por exemplo, nas tentativas, podemos inferir que ele converte a expressão “Rafael tem o dobro de chaveiros de Marta” pelas letras iniciais dos nomes das personagens, que são M e R, colocando o R abaixo do M, e, do lado esquerdo ele coloca “x2”, indicando que Rafael tem o dobro de Marta.

O mesmo acontece na conversão da expressão “Ana tem o triplo de Rafael”, em que o aluno coloca o A abaixo do R e do lado esquerdo colocar “x3” para indicar a operação o triplo. Além disso, nas três tentativas, o aluno coloca o sinal de “+” entre o valor escolhido para a quantidade de chaveiros de Marta e a quantidade de chaveiros encontrado para Rafael, indicando, possivelmente, que as quantidades de chaveiros de cada personagem devam ser somadas, o que ele faz em cada tentativa.

A última característica do pensamento algébrico revelada nas respostas dos alunos que se encontram no nível 1 é a capacidade de construir significado para os objetos e a linguagem simbólica algébrica. Isso porque o processo de escolha do valor para a incógnita inicial não é feito, ao que tudo indica, de forma aleatória, revelando, por exemplo na resposta à Q4a, que o aluno compreendeu o problema de partilha como uma relação entre a soma das quantidades de chaveiros que cada personagem irá receber e o total de chaveiros. Ele mostrou ter compreendido o problema como uma equação polinomial do 1º grau, mesmo não a representando na linguagem simbólica algébrica esperada.

Porém, diferentemente dos alunos que se encontram em um nível de pensamento algébrico consolidado, a indeterminação, o desconhecido, a incógnita, não aparece de forma explícita nos registros dos estudantes que se encontram em um nível de pensamento algébrico incipiente, apesar das letras utilizadas por ele na resolução do problema. As letras parecem ser utilizadas para que o aluno visualize, ou mentalize, as relações existentes entre os dados do problema.

Isso ocorre porque a incógnita, nesse caso, a quantidade de revistas de Frederico, em Q1a, e a quantidade de chaveiros de Marta, em Q4a, que devem ser utilizadas como fonte para a construção das equações, são consideradas, pelos alunos que se encontram nesse nível, como um espaço vazio a ser preenchido pela eventual substituição de termos particulares (RADFORD, 2009).

Por exemplo, o aluno que responde à Q4a substitui, na primeira tentativa de resposta, a quantidade de chaveiros de Marta por 54, ou seja, substitui o “X” da equação por um valor particular, e, após realizar os cálculos, percebe que o valor escolhido não pode representar a quantidade de chaveiros de Marta. Percebendo que o valor escolhido é maior que o necessário, ele escolhe um valor menor na segunda tentativa. Substitui, então, a quantidade de chaveiros de Marta por 20, e, após os cálculos, chega à conclusão que o valor escolhido é menor que o necessário. Ele partiu então para a terceira tentativa, chegando, enfim, à resposta do problema.

Nossas hipóteses levantadas até o momento, que caracterizam o nível 1, são corroboradas por algumas pesquisas que revelam, por exemplo, que algumas crianças, desde muito cedo, começam a representar um problema de estrutura algébrica por meio de um modelo, que Brito Lima[36] (1996) chama de “desenho da história”, como podemos observar na Figura 13 a seguir, em que duas crianças da 2ª série (atual 3º ano) convertem o enunciado de um problema de partilha com uma relação em linguagem natural para uma linguagem que a pesquisadora chamou de “icônica”.

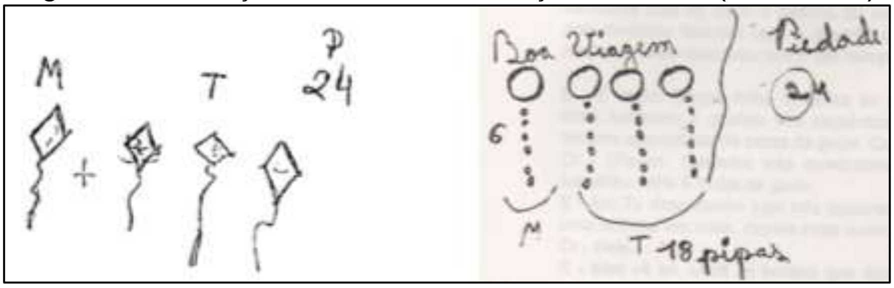
Brito Lima (1996) também percebeu que o modelo utilizado para representar um problema desse tipo vai ficando cada vez mais sofisticado, chegando, principalmente nas respostas dos alunos de 5ª e 6ª séries, nas equações tradicionalmente trabalhadas nas escolas, corroborando, portanto, com os trabalhos de Lins (1992), Kaput (2008) e Radford (2009).

Problema: *No final de semana haveria um concurso de pipas na praia de Boa Viagem. Participaram do concurso crianças dos bairros de Boa Viagem e Piedade. Como já era sexta-feira as crianças trabalharam o dia todo para fazer as pipas. Os meninos de*

[36] O trabalho dessa pesquisadora teve por objetivo investigar a resolução de problemas envolvendo igualdades, analisando como as formas de representação utilizadas pela criança podem facilitar a compreensão dos dados e relações de tais problemas. Participaram do estudo 72 crianças de 1ª (atual 2º ano) à 6ª série (atual 7º ano) de duas escolas da região metropolitana do Recife, sendo 12 crianças de cada série.

Boa viagem fizeram várias pipas pela manhã e à tarde fizeram o triplo da quantidade de pipas da manhã. Os meninos de Piedade fizeram 24 pipas durante o dia. Os dois bairros fizeram a mesma quantidade de pipas para o concurso. Quantas pipas os meninos de Boa Viagem fizeram pela manhã? (BRITO LIMA, 1996, p. 99)

Figura 14 – Produção escrita de duas crianças da 2ª série (atual 3º ano)



Fonte: Brito Lima (1996, p. 33 e 100)

Percebemos, nesse caso, que a primeira criança representa o problema por meio de um modelo em que cada desenho de pipa significa uma certa quantidade de pipas produzidas. O primeiro desenho equivale a quantidade de pipas produzidas pelos meninos de Boa Viagem pela manhã e, como a produção da tarde foi o triplo da manhã, a criança desenha 3 pipas para representar a quantidade de pipas produzidas nesse período. Além disso, ela coloca o sinal de "+" entre os desenhos para indicar que a soma das quantidades de pipas produzidas pela manhã e tarde pelos meninos de Boa Viagem é igual à quantidade produzida pelos meninos de Piedade, mesmo não aparecendo o sinal de igual.

O modelo utilizado por essa criança se aproxima do construído inicialmente pelo aluno do 6º ano que responde à Q1a, uma vez que ele representa as personagens do problema por desenhos de pessoas, só que, diferentemente do aluno da 2ª série, ele indica, mais claramente, que a soma das quantidades de revistas de cada personagem é igual ao total de revistas.

Já a segunda criança que responde ao problema das pipas representa as quantidades de pipas produzidas pelos meninos de Boa Viagem por círculos e, mesmo não colocando o sinal de igual, é possível perceber que o modelo representa que a soma das quantidades de pipas produzidas pelos meninos de Boa Viagem pela manhã e à tarde é igual a quantidade de pipas produzidas pelos de Piedade.

É possível, também, perceber que ele começa a responder o problema atribuindo um valor para a quantidade de pipas produzidas pela manhã, mesmo não representando esse valor por um numeral, mas, sim, por bolinhas. Portanto, ele adota como estratégia a atribuição de valores, como os alunos que se encontram no nível 1 de nosso modelo[37].

Apesar de não transparecer de imediato que o aluno se valeu dessa estratégia, isso é comprovado com o extrato a seguir da entrevista realizada pela pesquisadora no momento em que o aluno respondia o problema em questão. Percebemos, portanto, que a criança atribui 5 bolinhas à quantidade de pipas produzidas pelos meninos de Boa Viagem pela manhã, porém, quando soma com a quantidade produzida à tarde percebe que o total é menor que a quantidade de pipas produzidas pelos meninos de Piedade, isto é, 24. De imediato, ele acrescenta uma bolinha para o valor inicial, recontando a quantidade de pipas, e chega à resposta correta. Portanto, é possível verificar que o valor escolhido não é de forma aleatória, reforçando nossas hipóteses,

> ***Cr[38]:*** *(Desenha um círculo para representar a quantidade de pipas que os meninos de Boa Viagem fizeram pela manhã e três círculos para representar a quantidade que eles fizeram à tarde, que foi o triplo da manhã. Embaixo de cada círculo, desenha inicialmente cinco bolinhas e depois vai acrescentando uma bolinha para cada um, contando "21, 22, 23, 24".) Pronto.*
> ***E[39]:*** *Pronto? Quantas pipas os meninos de Boa Viagem fizeram pela manhã?*
> ***Cr:*** *Pela manhã foi 6.*
> ***E:*** *E à tarde fez quantas?*
> ***Cr:*** *(Pausa) 18.*
> ***E:*** *E, juntando o que eles fizeram pela manhã com o que fizeram à tarde, deu a mesma quantidade que os meninos de Piedade fizeram?*
> ***Cr:*** *Deu. Deu 24 também.*
> ***E:*** *Muito bem! Agora me explica uma coisa: por que tu colocasse 5 bolinhas embaixo de cada círculo e depois colocasse mais uma?*
> ***Cr:*** *Porque se eu botasse 10 ia passar de 24, aí eu botei 5 e depois fui contando até ficar 24.*
> (BRITO LIMA, 1996, p. 99-100)

Finalizando, acreditamos que o aluno que se encontra nesse nível de pensamento algébrico consegue mobilizar, como discutimos anteriormente, três, das

---

[37] Vale ressaltar que os problemas de partilha que foram respondidos por essas crianças são de apenas uma relação, enquanto os adotados para a construção de nosso modelo são compostos por duas relações, o que os tornam mais difíceis. Nesse caso, o aluno que consegue responder a um problema de partilha com uma relação não significa, necessariamente, que ele irá responder um com duas relações. Porém, acreditamos que a pesquisa realizada por Brito Lima (1996) nos ajudará na construção da versão *a priori* do modelo proposto em nossa tese.

[38] Cr – Criança.

[39] Entrevistadora.

cincos características do pensamento algébrico adotadas nessa tese: “a capacidade de estabelecer relações”; “a capacidade de modelar” e “a capacidade de construir significado”. Porém, essas duas últimas características são mobilizadas de forma ainda incipiente, sendo refinadas nas respostas dos alunos dos níveis 2 e 3.

Portanto, acreditamos que apesar de esse nível de pensamento algébrico ocorrer dentro de uma camada primária de generalidade, não podemos afirmar que ele seja uma forma simples de reflexão matemática. Muito pelo contrário, essa forma de pensar algebricamente mobiliza mecanismos mentais sofisticados, uma vez que o aluno é levado a perceber as relações existentes entre os dados do enunciado para que, em seguida, as represente em uma linguagem matemática cada vez mais sofisticada e com significado, chegando, em um nível mais desenvolvido, na linguagem simbólica algébrica.

Essa capacidade de perceber as relações e representá-las em uma linguagem matemática, que tenha significado para o aluno, denota um trabalho cognitivo muito maior que a ação posterior de escolha e execução de um algoritmo algébrico utilizado para resolver, por exemplo, uma equação (KIERAN, 1992; DUVAL, 2003, 2009).

Continuando nossas análises, percebemos, a partir dos resultados das pesquisas de Oliveira e Câmara (2011) e Santos Junior (2013), e da nossa análise na produção escrita de 342 alunos, a ocorrência nesse nível de pensamento algébrico, assim como nos níveis 2 e 3, de três subníveis. Isso ocorre quando levamos em consideração o encadeamento das relações dos problemas de partilha – que indica o nível de dificuldade desses problemas – e a estratégia de base adotada pelo aluno.

Para facilitar nossa leitura, resolvemos adotar as primeiras letras do alfabeto para indicar cada subnível. Portanto, o nível 1 é composto pelos subníveis 1A, 1B e 1C. Os alunos que se encontram no subnível 1A conseguem, com a utilização da estratégia “atribuir valores”, responder apenas aos problemas de partilha de duas relações com o encadeamento tipo fonte, que são os mais fáceis de serem respondidos (OLIVEIRA; CÂMARA, 2011; SANTOS JUNIOR, 2013).

Já os que se encontram no subnível 1B conseguem resolver, mobilizando a estratégia “atribuir valores”, os problemas de partilha de duas relações com o encadeamento das relações tipo fonte e composição.

Por fim, os alunos que se encontram no subnível 1C conseguem resolver os problemas de partilha de duas relações independente do encadeamento das relações, isto é, fonte, composição ou poço.

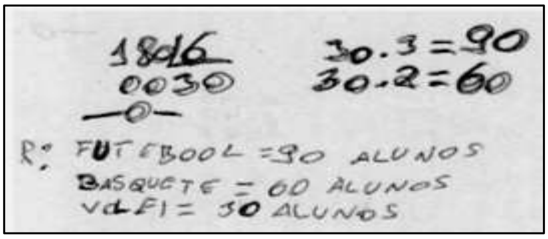
5.2.3. Nível 2 – pensamento algébrico intermediário

Nesse nível, o aluno, assim como o que se encontra no nível 1, consegue perceber as relações existentes entre as informações do enunciado de um problema de partilha, entretanto, ele consegue ir além, uma vez que percebe a equação correspondente ao problema, e, nesse caso, a incógnita deixa de ser um espaço vazio, que deve ser preenchido por um valor particular, como nas respostas em que os alunos utilizam a estratégia atribuir valores.

Porém, essa equação é, em alguns casos, criada mentalmente, ou, em outros, o aluno até consegue utilizar símbolos essencialmente algébricos para representar as quantidades de cada personagem do problema de partilha, mas não consegue colocar as relações entre as quantidades em uma equação na forma tradicionalmente utilizada no ambiente escolar. Podemos observar nos extratos a seguir exemplos de respostas que revelam indícios de pensamento algébrico intermediário.

Q2a: *Em uma escola, 180 alunos praticam esporte. O número de alunos que jogam futebol é o triplo do número de alunos que jogam vôlei e o número de alunos que jogam basquete é o dobro do número de alunos que jogam vôlei. Nessa escola, quantos alunos participam de cada esporte?*

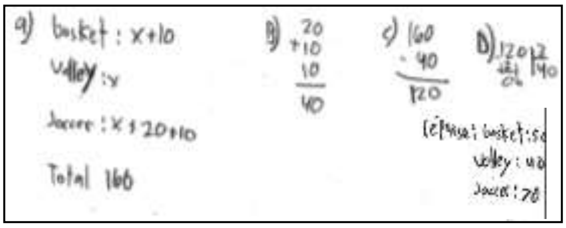
Figura 15 – Estratégia algébrica em linguagem sincopada



Fonte: Oliveira e Câmara (2011)

Q4b: *Em uma escola, 160 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga basquete é 10 a mais dos que jogam vôlei, e o número de alunos que joga futebol é 20 a mais dos que jogam basquete. Nessa escola, quantos alunos praticam cada esporte?*

Figura 16 – Estratégia algébrica em linguagem sincopada



Fonte: Oliveira e Câmara (2011)

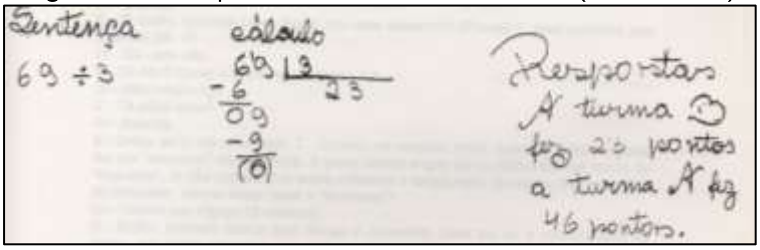
A estratégia mobilizada pelos alunos que respondem às questões Q2a e Q4b é denomindada por Câmara e Oliveira (2010) de *"estratégia algébrica"*, em que, "ao contrário das aritméticas, o sujeito parte do total para deteminar o valor das incógnitas, identificando as relações entre elas" (p. 7). Porém, diferentemente da estratégia adotada pelos alunos do nível 3, em que o registro é totalmente algébrico, a mobilizada pelos alunos do nível 2 é representada por um registro sincopado, formado por letras, abreviações, números, sinais de operações, etc.

Por exemplo, na resposta à Q2a, o aluno, ao que tudo indica, equaciona o problema mentalmente, mesmo não registrando a equação “V + 3V + 2V = 180”, por isso a divisão de 180 por 6. Nesse caso, diferentemente do aluno que se encontra no nível 1, em que ele tem que partir de um valor particular, por isso a estratégia *“atribuir valores”,* o aluno do nível 2 já adota a quantidade de alunos que praticam vôlei como a incógnita fonte da equação. Nesse nível a indeterminação, a incógnita, já aparece de forma explícita ao discurso (RADFORD, 2009), mesmo não aparecendo, em alguns casos, como na resposta à Q2a, nos registros do aluno. Isso revela, portanto, a capacidade de generalizar, que é uma característica do pensamento algébrico que os alunos que se encontram no nível 1 ainda não conseguem mobilizar.

Poderíamos dizer que a divisão por 6, na resposta à Q2a, foi feita pelo aluno de forma aleatória, sem levar em consideração as relações entre as quantidades de alunos que praticam cada esporte. Porém, os resultados da pesquisa de Brito Lima (1996) corroboram com nossas hipóteses, uma vez que essa pesquisadora confirmou que em alguns casos o aluno realiza uma divisão desse tipo por ter percebido as relações entre as informações do enunciado do problema, como pode ser verificado no extrato de resposta ao problema a seguir.

***Problema**: Nos jogos internos da escola Arco-Íris, a 4ª série A ia disputar com a 4ª série B o 1º lugar no basquete. A turma A e a turma B juntas fizeram 69 pontos. A turma B fez a metade dos pontos da turma A. Quantos pontos fizeram cada turmas? (BRITO LIMA, 1996, p. 109).*

Figura 17 – Resposta de um aluno da 4ª série (atual 5º ano)



Fonte: Brito Lima (1996, p. 110)

Percebemos, a partir da resposta do aluno, que ele realizou a divisão por 3 para encontrar a quantidade de pontos que a turma B fez, e multiplicou o resultado por 2 para encontrar a quantidade de pontos efetuados pela turma A, uma vez que a turma B fez a metade de pontos da turma A. Essas conclusões podem ser confirmadas no extrato de entrevista a seguir.

E: *(Depois de ler o problema) Quantos pontos fizeram cada turma?* ***Cr:*** *(Depois de dividir 69 por 3) A turma B fez 23 e a A fez 46 pontos.* ***E:*** *Como foi que tu descobrisse tão rápido? Me explica.* ***Cr:*** *A turma B fez metade do que a turma A fez. Aí tem três metades: duas metades da turma A mais uma metade, que é da turma B. Aí dividi por três e deu 23 pontos da B e 46 da A.* ***E:*** *Como é que você descobriu que eram três metades?* ***Cr:*** *Porque a turma A fez um determinado número de pontos e a turma B fez metade. Então divide por 3, porque os pontos da turma B é uma vez e os pontos da turma A é duas vezes, 23 mais 23, que é 46. E a turma B é 23 que é metade.* (BRITO LIMA, 1996, p. 110)

Já na resposta à Q4b a incógnita aparece no registro do aluno. No caso, ele representa a quantidade de alunos que praticam vôlei por X, e a partir de então consegue representar a quantidade dos alunos que praticam basquete, “X + 10”, e a quantidade dos que praticam futebol “X + 20 + 10”, além de registrar que o total de alunos é igual a 160. Porém, apesar de estabelecer as relações das incógnitas, ele não consegue se desprender da informação contida no enunciado e chegar no registro da equação que representa a conversão do enunciado do problema.

Acreditamos que essa situação de não desprendimento da informação contida no enunciado é o que Radford (2009) chama de “narrativas vivas dos fenômenos estudados”, ou seja, os sinais utilizados na resposta à Q4b, que são sinais tradicionalmente utilizados em álgebra escolar, mantêm uma “experiência corporificada e perspectiva do processo de objetivação” (Ibid.). Por conta disso, o aluno não chega no registro da equação. Entretanto, não chegar ao registro da equação não significa que o aluno não está pensando em seus registros como uma relação entre quantidades, o que caracteriza uma equação, e que, segundo Lins (1992) revela que o aluno está pensando algebricamente.

Apesar de não chegar ao registro da equação que representa a conversão do enunciado do problema, que seria “X + X + 10 + X + 10 + 20 = 160”, os procedimentos utilizados pelo aluno que respondeu à Q4b são praticamente os mesmos utilizados por um aluno que chega a equação.

Vejamos como essa equação é tradicionalmente resolvida na escola:

i) $X + X + 10 + X + 10 + 20 = 160$

ii) $(X + X + X) + (10 + 10 + 20) = 160$

iii) $3X + 40 = 160$

iv) $3X = 160 – 40$

v) $3X = 120$

vi) $X = 120/3$

vii) $X = 40$

Na resposta à Q4b, a etapa “A” é equivalente a etapa “i” da resolução tradicional, isto é, representa a conversão do enunciado do problema em uma equação. Porém, como dito anteriormente, o aluno que se encontra no nível 2 não consegue se desprender das personagens do enunciado, nesse caso, a quantidade de alunos de cada esporte, e por isso não chega na forma tradional da equação.

A etapa “B”, a operação (20 + 10 + 10 =40), equivale a etapa “iii”, que é a soma dos valores conhecidos que se encontram no primeiro membro da equação. Já a etapa “C”, em que o aluno subtrai 40 do total de alunos, corresponde às etapas “iv” e “v”, isto é, passar o valor conhecido do primeiro membro para o segundo com a operação inversa e subtrair 40 de 120 (ou subtrair 40 de ambos os membros). Por fim, a etapa “D” é equivalente às etapas “vi” e “vii”, em que 120 é dividido por 3.

Portanto, acreditamos que o pensamento algébrico de um aluno que se encontra nesse nível é mais desenvolvido do que o pensamento algébrico de um aluno que se encontra no nível 1. Isso porque as característica “capacidade de estabelecer relações”, “capacidadede de modelar” e “capacidade de construir significado” são mobilizadas de uma forma mais refinada por um aluno que se encontra nesse nível, além de ele conseguir mobilizar outra característica do pensamento algébrico, a “capacidade de generalizar”, uma vez que a indeterminação, a incógnita, já aparece no discusso desse aluno.

Portanto, a única característica do penamento algébrico que não é mobilizada pelos alunos que se encontram no nível 2 é a capacidade de operar com o desconhecido.

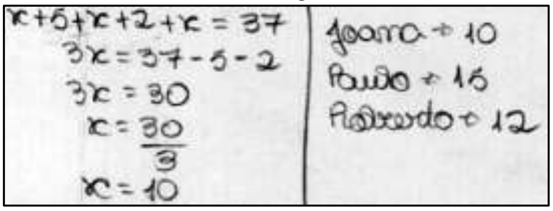
Finalizando, verificamos que no nível 2 é possível identificar, como dito anteriormente, três subníveis (2A; 2B e 2C). No subnível 2A encontram-se os alunos que conseguem resolver, adotando a estratégia algébrica com registro sincopado, os problemas de partilha com duas relações com encadeamento das relações tipo fonte. Enquanto no subnível 2B estão os alunos que conseguem resolver os problemas de partilha com encadeamento das relações tipo fonte e composição, e, por fim, no subnível 2C estão os alunos que conseguem resolver os problemas de partilha com encadeamento das relações tipo fonte, composição e poço.

5.2.4. Nível 3 – pensamento algébrico consolidado

Nesse nível de desenvolvimento do pensamento algébrico o aluno já consegue mobilizar, de forma plena, todas as cinco características que definem o pensamento algébrico adotado nessa tese, a “capacidade de estabelecer relações”; a “capacidade de generalizar”; a “capacidade de modelar”; a “capacidade de operar com o desconhecido”; e a “capacidade de construir significado”, como podemos perceber nas respostas às questões Q2b e Q3b a seguir.

Q2b: *Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana e Roberto receba 2 balas a mais que Joana. Quantas balas receberá cada um?*

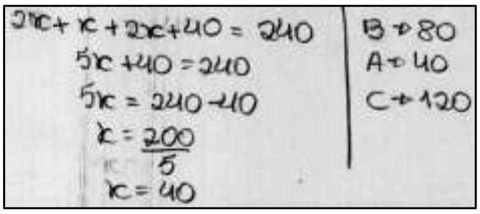
Figura 18 – Estratégia algébrica em linguagem simbólica algébrica



Fonte: Oliveira e Câmara (2011)

Q3b: *Três times de basquetes participam da final do campeonato fazendo, juntos, 240 pontos. O time B vez o dobro de pontos do time A e o time C fez 40 pontos a mais que o time B. Quantos pontos fez cada time?*

Figura 19 – Estratégia algébrica em linguagem simbólica algébrica



Fonte: Oliveira e Câmara (2011)

Percebemos que os alunos que respondem às questões Q2b e Q3b conseguem identificar, de forma clara, as relações existentes no enunciado de um problema de partilha, além de utilizar uma linguagem simbólica algébrica para representar o problema, ou seja, uma equação polinomial do 1º grau, chegando, portanto, ao modelo matemático esperado em um ambiente escolar para representar um problema desse tipo, o que não acontece nas respostas dos alunos que se encontram nos níveis anteriores.

Essa forma de representar os objetos gerais distancia a representação final do problema em linguagem matemática da história contada no enunciado, uma vez que a equação não é uma leitura linear do problema, mas, sim, uma fórmula que representa todas as informações desse enunciado. E isso caracteriza a força da álgebra, em que os símbolos algébricos têm a finalidade de significar coisas de uma maneira abstrata, de construir um modelo matemático para representar problemas do cotidiano (LINS, 1992; KAPUT, 2008; RADFORD, 2009).

Percebemos, também, que nas respostas dos alunos que se encontram nesse nível a indeterminação, a incógnita, se torna um objeto explícito ao discurso, e podemos perceber claramente a representação do geral no registro do aluno. Nesse caso, a fórmula, a equação, deixa de ter uma natureza “perspectiva”, deixa de ser uma experiência corporificada do objeto, como as respostas dos alunos do nível 2, e passa a significar coisas de uma forma totalmente abstrata (RADFORD, 2009), revelando, nesse caso, a mobilização da “capacidade de generalizar”, porém, de uma forma mais desenvolvida do que nas respostas dos alunos que se encontram no nível 2.

Além disso, verificamos, nas respostas dos alunos que se encontram nesse nível, a mobilização da única característica do pensamento algébrico que não é mobilizada em nenhum dos níveis anteriores, a “capacidade de operar com o desconhecido”, tendo em vista que nas respostas às questões Q2b e Q3b que trazemos para ilustrar o nível 3, o desconhecido passa a ser tratado como se fosse conhecido. Isso por que acreditamos que na resolução da equação o aluno manipula o desconhecido como se fossem números conhecidos, segundo as leis da aritmética em relação a uma igualdade.

Por exemplo, nas respostas que ilustram esse nível, os alunos realizam algumas operações na equação inicial com o objetivo de gerar equações equivalentes, até chegar no valor de X.

Por fim, percebemos que o aluno que se encontra no nível 3 mobiliza, de uma forma bem desenvolvida, a última caractérisca do pensamento algébrico, a capacidade de construir significado para a linguagem e os objetos algébricos, isso porque nas respostas à Q2b e à Q3b eles conseguiram compreender o problema de partilha como uma equação polinomial do 1º grau.

Além disso, os alunos monstraram ter construído significado para a linguagem simbólica algébrica, uma vez que, na resposta à Q2b o aluno indica que o “X” representa a quantidade de balas de Joana, e que o “X + 5” e “X + 2” representam, respectivamente, a quantidade de balas de Paulo e de Roberto.

No nível 3, assim como nos níveis 1 e 2, também foi possível identificar a presença de três subníveis, que denominamos de subníveis 3A, 3B e 3C. No subnível

3A estão os alunos que, com a mobilização da estratégia algébrica com registro algébrico formal, conseguem resolver apenas os problemas de partilha mais fáceis, ou seja, os com encadeamento das relações tipo fonte, enquanto que no subnível 3B se encontram os alunos que, com essa estratégia, conseguem resolver corretamente os problemas de partilha com encadeamento das relações tipo fonte e composição. Por fim, no subnível 3C estão os alunos que, com a estratégia algébrica com registro algébrico formal, conseguem resolver os problemas de partilha independente do encadeamento das relações.

5.3. Nível de desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos

Essa seção do capítulo tem por objetivo identificar o nível e subnível de desenvolvimento do pensamento algébrico dos 342 alunos do 6º ano do ensino fundamental que utilizamos para propor a versão *a priori* do modelo. Lembramos que para essa parte utilizamos os protocolos cedidos por Oliveira e Câmara (2011).

No Quadro 6 a seguir temos a síntese dos resultados.

Quadro 6 – Nível de pensamento algébrico dos alunos

Níveis	**Frequência**	**Percentual**	**Subníveis**	**Frequência**	**Percentagem**
Nível 0	101	29%			
Nível 1	199	58%	**1A**	25	7%
			1B	37	11%
			1C	137	40%
Nível 2	25	8%	**2A**	3	1%
			2B	6	2%
			2C	16	5%
Nível 3	17	5%	**3A**	4	1%
			3B	7	2%
			3C	6	2%
Total	**342**	**100%**		**241**	**71%**

Fonte: o autor

Após nossa análise nas respostas dos participantes dessa fase da pesquisa verificamos que 101 dos 342 alunos, ou seja, 29% dos sujeitos não mobilizaram nenhuma característica do pensamento algébrico ao se depararem com um problema de partilha com duas relações. Apesar de esses alunos estarem, no momento da aplicação do questionário, cursando o 6º ano do ensino fundamental, ano que tradicionalmente ainda não se teve um ensino formal de álgebra, acreditamos que essa porcentagem é alta, uma vez que orientações curriculares atuais, como os Parâmetros do Estado de Pernambuco e a 2ª versão da BNCC, já indicarem que o ensino da álgebra deve acontecer desde os primeiros anos da educação básica.

Percebemos, também, que a maior parte dos participantes (58%) consegue resolver os problemas de partilha com duas relações adotando a estratégia “atribuir valores”. Apesar de ser uma estratégia que nos remente ao campo aritmético, por ser formada essencialmente por números e operações aritméticas, concluímos que elas revelam algumas características do pensamento algébrico, como a capacidade de estabelecer relações; e, mesmo que de forma elementar, a capacidade de utilizar um modelo matemático para representar as relações contidas no enunciado do problema; e a capacidade de construir significado para o objeto algébrico em jogo (LINS, 1992; KAPUT, 2008; RADFORD, 2009).

A utilização dessa estratégia pela maioria dos alunos talvez seja explicada pelo fato de os participantes da pesquisa se encontrarem matriculados em um ano anterior ao que se começa, tradicionalmente, o ensino formal de álgebra, o 7º ano.

Talvez por conta disso também, encontramos tão poucos alunos nos níveis 2 (8%) e no nível 3 (5%). Os alunos que se encontram nesses níveis já adotam uma estratégia essencialmente algébrica, mobilizando no nível 2, além das características do pensamento algébrico já mobilizada pelos alunos do nível 1, uma quarta característica dessa forma de pensar, a capacidade de generalizar, uma vez que a incógnita já faz parte do discurso desses alunos.

Além das quatro características mobilizadas pelos alunos que se encontram no nível 2, os que se encontram no nível 3 mobilizam a quinta e última característica, a capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido. Talvez, por conta disso, encontramos tão pouco alunos nos níveis 2 e 3.

Quando levamos em consideração o percentual de alunos por subníveis, percebemos que a maior parte dos alunos do nível 1 (40% dos 58%) se encontram no último subnível, no 1C. Isso parece revelar que a maioria dos alunos ao iniciarem a resolução de um dos problemas do teste de forma correta, adotando a estratégia atribuir valores, conseguem resolver também os demais, independente do encadeamento das relações.

Já com relação aos subníveis dos níveis 2 e 3, não temos, nessa fase da pesquisa, condições de realizar muitas inferencias, tendo em vista que encontramos poucos alunos nesses níveis. Por conta disso, para a versão final de nosso modelo, no capítulo seguinte, aplicamos o teste a alunos de todos os anos finais do ensino fundamental, ou seja, do 6º ao 9º ano.

5.4. Conclusões do capítulo

A partir dos resultados das pesquisas de Oliveira e Câmara (2011) e de Santos Junior (2013) e da análise nas produções escritas dos 342 alunos participantes dessa primeira fase da pesquisa, conseguimos propor uma versão *a priori* de um modelo que possibilita a identificação de níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico revelado pelos alunos na resolução de problemas de partilha com duas relações.

O modelo aqui proposto vai de um nível em que não se encontra, nas respostas dos alunos, indícios de pensamento algébrico, que denominamos de nível 0, passando por um nível incipiente, em que nas respostas dos alunos começam a aparecer algumas características do pensamento algébrico, o nível 1, e por um nível intermediário do pensamento algébrico, o nível 2, em que as respostas dos alunos aos problemas de partilha se aproximam das tradicionalmente esperadas no ambiente escolar, chegando, por fim, ao nível 3, em que o pensamento algébrico dos alunos, em relação aos problemas de partilha com duas relações, se encontra em um nível consolidado.

Na construção desses níveis (0, 1, 2 e 3) adotamos, como elemento principal, as características do pensamento algébrico mobilizadas na estratégia de base adotada pelo aluno na resolução dos problemas de partilha, uma vez que constatamos, assim como as pesquisas de Oliveira e Câmara (2011) e Santos Junior (2013) que o aluno tende a utilizar a mesma estratégia para todos os problemas de partilha que compõem o teste.

Continuando, verificamos a necessidade de propor, quando é levado em consideração o grau de dificuldade dos problemas de partilha, subníveis dentro de cada nível a partir do nível 1. Isso é possível uma vez que esses problemas são considerados menos ou mais difíceis de serem resolvidos quando se é considerado o encadeamento das relações. Diante disso, propomos, dentro de cada nível a partir do nível 1, três subníveis, que nomeamos com as primeiras letras do alfabeto, A, B e C.

Porém, acreditamos que essa versão preliminar do modelo precisa ser validada, uma vez que levamos em consideração apenas produções escritas de alunos, e acreditamos que isso não seja suficiente para propor, de forma segura, um modelo que trate de níveis de desenvolvimento de uma forma particular de pensar, o pensar algebricamente. Por conta disso, no próximo capítulo dessa tese objetivamos validar essa versão *a priori* do modelo.

Capítulo 6

Versão final do modelo

6.1. Introdução

Com as estratégias escritas dos alunos conseguimos, pelo menos a princípio, perceber indícios de pensamento algébrico. Entretanto, fica difícil afirmar a partir da produção escrita, com segurança, quais características do pensamento algébrico são mobilizadas na estratégia adotada pelo estudante para resolver um problema de partilha. Por conta disso, nesse capítulo temos por objetivo validar a versão *a priori* do nosso modelo.

Para tanto, decidimos, no primeiro momento, reaplicar os questionários[40] utilizados na pesquisa de Oliveira e Câmara (2011). Porém, resolvemos modificar a ordem de apresentação dos problemas nos testes, para isso realizamos na distribuição dos problemas o que Brito Lima (1996) chama de randomização, isto é, os últimos problemas de um teste passam a ser os primeiros de outro teste. Essa randomização levou em consideração o encadeamento das relações dos problemas de partilha, uma vez que queríamos que os participantes dessa fase da pesquisa tivessem o contato inicial com problemas de partilha de diferentes graus de dificuldades.

Por conta dessa randomização cada teste deu origem a outros três, portanto, o teste A gerou os testes 1A, 2A e 3A, e o B gerou os testes 1B, 2B e 3B. Temos, no Quadro 7 a seguir, a ordem de apresentação dos problemas em cada teste, levando em consideração os encadeamentos das relações dos problemas de partilha.

Quadro 7 – Ordem de apresentação dos problemas nos testes

	Encadeamento dos problemas					
Questões / Testes	1	2	3	4	5	6
1A	F	F	C	C	P	P
2A	P	P	F	F	C	C
3A	C	C	P	P	F	F
1B	F	F	C	C	P	P
2B	P	P	F	F	C	C
3B	C	C	P	P	F	F

Legenda: F – fonte; **C** – composição; **P** – poço.
Fonte: o autor

[40] Os questionários completos estão na página 107 dessa tese.

Como os resultados apontaram que a ordem de apresentação dos problemas nos testes não influencia no rendimento dos alunos nem na estratégia de base adotada por eles, resolvemos, para facilitar a escrita de nossas análises, não levar em consideração essa variação de posição dos problemas nos testes. Por conta disso, iremos utilizar, em nossos exemplos, a ordem dos problemas dos testes originais (A e B), como foi feito no capítulo anterior.

Os problemas de partilha foram apresentados nos testes em linguagem natural, impressos em folhas de papel ofício, com o seguinte comando geral: resolva os seguintes problemas. Cada problema teve um espaço para serem registradas as estratégias dos alunos.

Os questionários foram aplicados, nessa fase da pesquisa, a 343 alunos dos anos finais do ensino fundamental de duas escolas da cidade do Recife, sendo 72 alunos do 6º ano, 83 do 7º ano, 93 do 8º ano e 95 do 9º ano. Resolvemos ampliar os anos de escolarização com o objetivo de verificar se os níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico permeiam por todos os anos finais do ensino fundamental. Além disso, acreditamos que o último nível seja melhor explicitado pelos alunos que se encontram matriculados a partir do 7º ano do ensino fundamental, uma vez que, o ensino de álgebra é iniciado, tradicionalmente, nesse ano de escolarização.

Entretanto, em conversa com os professores de matemática das duas escolas que ensinavam nas turmas do 7º ano que aplicamos o questionário, ambos informaram que ainda não tinham iniciado o trabalho com álgebra. Por conta disso, temos, em nossa pesquisa, cerca da metade dos participantes (45%) que nunca tiveram um ensino formal de álgebra, que são os alunos dos 6º e 7º anos do ensino fundamental.

Antes da aplicação do teste, o professor de matemática de cada turma apresentou o pesquisador aos alunos e cedeu um tempo de suas aulas (cerca de 10 minutos) para o pesquisador explicar a pesquisa e entregar o termo de consentimento livre e esclarecido para que os responsáveis pelos alunos assinassem.

Cerca de uma semana depois o pesquisador voltou nas turmas e recolheu o termo de consentimento e aplicou o teste. A realização dos testes aconteceu nas aulas de matemática com a presença do professor da turma e do pesquisador. Cada aluno teve cerca de duas aulas – 100 minutos – para responder os problemas de partilha.

A aplicação ocorreu em duas escolas da cidade do Recife. Na escola A participaram 8 turmas – duas do 6º; duas do 7º; duas do 8º; e duas do 9º ano. E na escola B 4 turmas – uma do 6º, uma do 7º, uma do 8º e uma do 9º ano. Diante disso, o tempo entre a entrega do termo de consentimento, da aplicação do teste e da realização da entrevista, em cada escola, foi de aproximadamente quatro semanas.

No momento da aplicação do teste foi pedido que os alunos utilizassem, para resolver os problemas, apenas caneta e papel. Escolhemos apenas esses materiais por acreditarmos que podemos perceber melhor os indícios de pensamento algébrico revelados nas estratégias utilizadas pelos alunos quando essas estratégias estão registradas no papel, o que poderia não ocorrer se, por exemplo, os estudantes utilizassem outras ferramentas, como a calculadora, apesar de termos consciência que o aluno pode mobilizar o pensamento algébrico utilizando qualquer ferramenta.

Após a aplicação do teste se deu a escolha dos alunos para realizar uma entrevista de explicitação. Nesse momento levamos em consideração, a partir da versão *a priori* do modelo, os níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico que os alunos se encontravam. Decidimos entrevistar dois alunos por nível, sendo um que ainda não tinha iniciado o estudo formal de álgebra (6º ou 7º ano) e outro que já tinha iniciado (8º ou 9º ano), totalizando, portanto, oito alunos. No Quadro 8 a seguir encontramos os nomes fictícios desses alunos, o ano de escolaridade e o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico que ele se encontrava.

Quadro 8 – Nomes fictícios dos entrevistados

Nome fictício	Ano de escolaridade	Nível
Ana	7º ano	0
Isabel	8º ano	
Caio	6º ano	1
Carol	9º ano	
Paula	6º ano	2
Polly	9º ano	
Júlia	7º ano	3
Carlos	9º ano	

Fonte: o autor

Utilizamos o método da entrevista de explicitação, desenvolvido por Pierre Vermersch (1994), por acreditar que deveríamos ir além da resposta registrada no papel, uma vez que queríamos identificar características de pensamento algébrico, e essas características são essencialmente mentais. Portanto, não podemos ficar apenas na análise dos registros escritos, pois eles talvez não nos revelem com clareza o que o aluno estaria pensando no momento em que estava resolvendo o problema.

Para Vermersch (1994), essa técnica de entrevista possibilita uma verbalização introspectiva detalhada da ação, uma vez que, "se por ação, eu designo a realização de uma tarefa, a entrevista de explicitação visa à descrição do desenvolvimento desta ação, tal qual ela tenha sido efetivamente colocada em prática em uma tarefa real" (1994 p. 18).

Ainda segundo Vermersch, o propósito da entrevista de explicitação é apoiar o entrevistado no

> desenvolvimento da experiência tal como foi vivenciada para a experiência representada e verbalizada encorajando-o a entrar e a sustentar um estado de evocação, orientando a percepção desta evocação de modo a explorar e verbalizar detalhes dessa experiência (WYKROTA, 2007, p. 79-80).

Nesse tipo de entrevista o papel do entrevistador é fundamental, pois o acompanhamento realizado por ele tem o objetivo de ajudar o entrevistado a evocar e explicitar uma ação já vivenciada em todas as suas dimensões. Portanto, as questões feitas tiveram por objetivo guiar o estudante no momento em que ele explicava as estratégias adotadas por ele na resolução dos problemas de partilha.

As entrevistas foram gravadas em áudio e realizadas individualmente na biblioteca da escola, aproximadamente uma semana após o aluno ter respondido o teste. De início foi explicado ao aluno o objetivo da entrevista e que ela seria gravada em áudio, e, em seguida, o pesquisador/entrevistador perguntava se ele concordava em participar. Nenhum aluno se negou em colaborar com essa fase da pesquisa. Todas as entrevistas foram transcritas e estão, completas, nos apêndices.

6.2. Validação do modelo

Após a análise da produção escrita dos 343 alunos participantes dessa fase da pesquisa, percebemos, assim como os resultados das pesquisas de Oliveira e Câmara (2011) e de Santos Júnior (2013), que os alunos tendem a adotar a mesma estratégia na resolução de todos os problemas do teste. Outro fato comprovado, que também corroboram com essas pesquisas, diz respeito ao grau de dificuldade dos problemas de partilha quando levamos em consideração os encadeamentos de suas relações. Por conta disso, assim como foi proposto na versão *a priori* do modelo, iremos assumir como base para a definição dos níveis a estratégia adotada pelo aluno, e para os subníveis o grau de dificuldade dos problemas de partilha.

6.2.1. Nível 0 – ausência de pensamento algébrico

Os alunos que se encontram nesse nível não conseguem mobilizar, quando se deparam com um problema de partilha com duas relações, nenhuma característica do pensamento algébrico. Isso ocorre pelo fato de eles não conseguirem estabelecer as relações existentes entre as quantidades de cada personagem e o total. Por conta disso, os alunos que se encontram no nível 0 não conseguem chegar na resposta correta de um problema desse tipo, deixando-o sem resposta, ou adotando alguma estratégia que leva à resposta errada.

Uma das estratégias adotadas pelos alunos que se encontram nesse nível é a estratégia total como fonte, em que o aluno associa o total do problema ao valor de uma das incógnitas, e aplica as relações do enunciado chegando, de forma errada, aos valores das outras duas incógnitas, revelando mobilizar, unicamente, elementos caracterizadores do pensamento aritmético.

Outra estratégia é a dividir por 3, em que o aluno divide o total do problema para as três incógnitas do enunciado, como se a partilha desse valor fosse em partes iguais, como em um problema aritmético (OLIVEIRA; CÂMARA, 2011). Temos, na Figura 20 a seguir, a resposta da aluna Isabel, do 8º ano do ensino fundamental, à Q5b.

Q5b. *Ana, Júlia e Maria, têm, juntas, 180 selos. Júlia tem um terço dos selos de Ana e a metade dos selos de Maria. Quantos selos têm cada uma?*

Figura 20 – Resposta da aluna Isabel (8º ano) à Q5b.

Fonte: dados da pesquisa

Percebemos, portanto, que a aluna não considera, quando está a resolver o problema, as relações existentes entre as personagens do enunciado. A condição “Júlia tem um terço dos selos de Ana e a metade dos selos de Maria” não é considerada, em nenhum momento, pela aluna. Na verdade, ela responde o problema como se a divisão fosse em partes iguais, em que cada personagem teria a mesma quantidade de selos, como podemos verificar nas explicações da aluna a seguir.

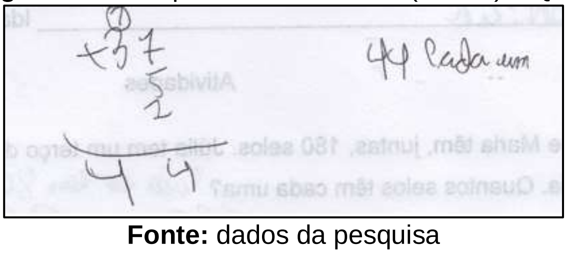
> ***P:*** *Olá Isabel, tudo bom? A ideia é você me explicar como chegou nas respostas dos problemas. Por exemplo, esse problema aqui, como foi que você fez?*
> ***Isabel:*** *Eu peguei esse aqui (apontando para os 180) e dividi por três, que deu 60. Então cada um tem 60.*
> ***P:*** *Por que 180 dividido por 3?*
> ***Isabel:*** *Porque era três pessoas que tinham selos.*
> ***P:*** *Então cada um fica com 60 selos?*
> ***Isabel:*** *Isso, 60 para cada pessoa.*
> ***P:*** *Mas por que 60 para cada pessoa?*
> ***Isabel:*** *Porque são 180 selos para três pessoas, então 180 dividido por 3 dá 60.*
> ***P:*** *Certo.*

Assim sendo, é possível perceber que, mesmo questionada algumas vezes sobre como chegou na resposta, Isabel sempre respondia que era porque tinham três pessoas, “porque são 180 selos para três pessoas, então 180 dividido por 3 dá 60”. Portanto, ela em nenhum momento considera as condições propostas no enunciado do problema, demonstrando compreendê-lo como um simples problema de estrutura aritmética, em que é solicitado a divisão de 180 selos para três pessoas.

Outra estratégia adotada por alunos que não conseguem estabelecer as relações necessárias na resolução de um problema desse tipo é a estratégia cálculo qualquer, em que “eles buscam efetuar uma conta qualquer na tentativa de encontrar uma solução” (OLIVEIRA; CÂMARA, 2011, p. 8). Podemos visualizar essa estratégia na resposta de Ana, aluna do 7º ano do ensino fundamental, à Q2b a seguir.

Q2b. *Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana e Roberto receba 2 balas a mais que Joana. Quantas balas receberá cada um?*

Figura 21 – Resposta da aluna Ana (7º ano) à Q2b.



Fonte: dados da pesquisa

É possível verificar que Ana chega, de forma equivocada, à resposta do problema somando os valores que se encontram no enunciado, e, assim como Isabel, não considera as condições do problema. Além disso, em suas explicações ela afirma que realizou essa soma apenas pelo fato desses serem os valores que se encontravam no enunciado, como podemos observar no extrato a seguir.

> ***P:*** *E esse quarto, como você chegou na resposta?*
> ***Ana:*** *Eu coloquei 37 mais 5 mais 2, e somei 7 mais 5 mais 2, que deu 14. Eu coloquei o 4 aqui (apontando para o 4 abaixo do 2 nos cálculos) e o 1 aqui (apontando para o 1 acima do 3 nos cálculos), e somei 3 mais 1, que deu 4. Então deu no total 44.*
> ***P:*** *Então cada um vai receber 44 balas?*
> ***Ana:*** *É.*
> ***P:*** *Certo. No caso, você fez a soma de 37 mais 5 mais 2?*
> ***Ana:*** *Isso.*
> ***P:*** *Mas por que dessa soma?*
> ***Ana:*** *Porque aqui tem 37, aqui tem 5 e aqui tem 2 (apontando para o problema).*
> ***P:*** *Então você pegou esses valores do problema e somou?*
> ***Ana:*** *Foi.*
> ***P:*** *Certo.*

Nesse caso, Ana retirou os valores que se encontravam no enunciado do problema e realizou uma operação, no caso uma soma, para chegar na resposta do problema. Entretanto, os valores 5 e 2 representam, na verdade, as condições para o problema ser considerado como um problema de estrutura algébrica, o que ela não leva em consideração. Portanto, assim como Isabel, Ana entende o problema de partilha como sendo de estrutura aritmética, em que é necessário para se chegar na resposta realizar algumas operações com os valores conhecidos postos no enunciado.

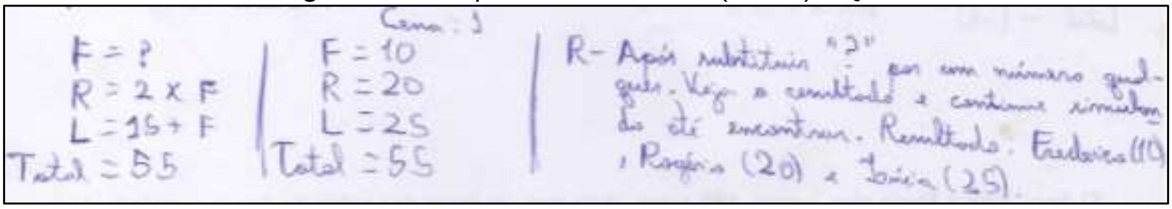
Nesse sentido, concluímos que o nível 0 do modelo aqui proposto é composto pelos alunos que não conseguem se apropriar do significado do problema em questão, ou seja, não conseguem estabelecer as relações existentes entre as incógnitas e o total de um problema de partilha com duas relações. Entretanto, isso não significa que um aluno que se encontra nesse nível não mobiliza, em nenhum momento, alguma característica do pensamento algébrico. Ele pode mobilizar algumas das características dessa forma de pensar quando se depara com outras situações como, por exemplo, as de generalização de sequências.

6.2.2. Nível 1 – pensamento algébrico incipiente

Uma das hipóteses levantadas na versão *a priori* do nosso modelo é que o aluno que se encontra no nível 1 entende a incógnita como um espaço vazio que deve ser preenchido com valores particulares e conhecidos (RADFORD, 2009). Essa hipótese é comprovada na explicação que o aluno Caio, do 6º ano, coloca ao lado da resposta à questão 1 do teste B (Q1b), como podemos observar a seguir.

Q1b. *Frederico, Rogério e Lúcia têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Rogério tem o dobro de revistas de Frederico e Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico. Quantas revistas em quadrinhos têm cada um?*

Figura 22 – Resposta do aluno Caio (6º ano) à Q1b



Fonte: dados a pesquisa

Percebemos, portanto, que o aluno coloca em seu modelo que a quantidade de revistas de Frederico é igual ao sinal de interrogação para indicar que é um valor desconhecido, e que foi substituído, no que ele chama de cena 1, por 10, que é a quantidade correta de revistas de Frederico. Porém, na explicação que ele coloca ao lado, ele indica que no momento da resolução do problema a interrogação pode ser substituída por um valor qualquer até chegar na resposta do problema. Esse fato também é revelado quando o pesquisador pede para ele explicar como chegou na resposta do problema.

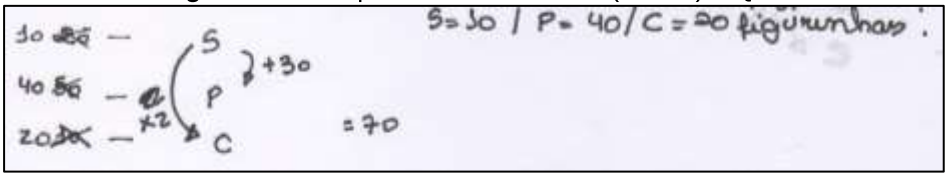
P: *Caio você lembra se começou com o 10 já, ou você tentou outros valores?* ***Caio:*** *Pois é, eu dei sorte nessa hora, porque eu pensei, vou colocar o 10 porque é o valor que não vai dar números com vírgula, então eu coloquei o 10 e deu certo.* ***P:*** *Mas poderia ser outro número?* ***Caio:*** *Poderia.*

Portanto, o aluno não chega à resposta na primeira tentativa por que já sabia que 10 era a quantidade de revistas de Frederico, mas por que o primeiro valor escolhido foi o correto. Como ele mesmo diz, poderia começar com outro valor.

Esse fato de ter a incógnita como um espaço vazio que deve ser preenchido por um valor conhecido, típico de um aluno que se encontra no nível 1, também é percebido na resposta de Carol, aluna do 9º ano, como podemos verificar a seguir, indicando que é possível encontrar alunos nesse nível independente do ano de escolarização que ele se encontra.

Q6b. *Sílvia, Pedro e Carlos querem dividir 70 figurinhas entre eles de modo que Sílvia receba 30 figurinhas a menos que Pedro e a metade da quantidade de figurinhas de Carlos. Quantas figurinhas cada um vai receber?*

Figura 23 – Resposta da aluna Carol (9º ano) à Q6b



Fonte: dados a pesquisa

Quando observamos a resposta da aluna Carol, percebemos que ela inicia a resposta substituindo o número de figurinhas de Sílvia por 20, porém, percebe que a resposta não é a correta e troca o valor por 10, chegando à resposta final. Esse fato é revelado também no extrato a seguir da entrevista realizada com a aluna.

P: *Certo. Carol, agora me explica como foi que você chegou nesses valores aqui?*
Carol: *Também por estimativa.*
P: *Primeiro você tentou com 20, foi isso?*
Carol: *Foi.*
P: *E, quando somou não bateu com o resultado?*
Carol: *É. Deu um número a mais, deu 80.*
P: *Por isso você tentou com 10?*
Carol: *Isso.*
P: *Vê, você tenta com 20, e deu 80, é isso que você está falando?*
Carol: *Isso.*
P: *Então, você diminui a quantidade para 10 para ver se dá 70?*
Carol: *Foi.*
P: *Não poderia aumentar, no caso? Você não tentaria com um número maior que esse?*
Carol: *Não. Se fosse maior sairia ainda mais dos 70.*
P: *Entendi. Então você diminuiu porque você sabe que tem que ser um número menor para dar 70, porque o valor que você encontrou primeiro foi maior?*
Carol: *Isso. E nos outros também foi a mesma coisa.*

Continuando nossas análises, percebemos, no trecho da entrevista de Carol, que as tentativas de chegar nas respostas corretas, a partir da primeira tentativa, não são feitas ao acaso. Por exemplo, na primeira tentativa Carol atribui 20 ao número de figurinhas de Sílvia, e, após realizar seus cálculos percebe que o valor encontrado é maior que o desejável, partindo para um valor menor, escolhendo agora o 10. E, questionada se poderia escolher um valor maior que 20 para a segunda tentativa ela responde que não, e explica por que. “Se fosse maior sairia ainda mais dos 70”, ou seja, daria um número ainda maior que 70.

Outras hipóteses levantadas na versão *a priori* do modelo em relação ao nível 1 diz respeito às características do pensamento algébrico reveladas pelos alunos a partir da estratégia adotada na resolução dos problemas de partilha, no caso, a estratégia atribuir valores. Para nós, os alunos que adotam essa estratégia revelam mobilizar as seguintes características do pensar algebricamente: capacidade de estabelecer relações; capacidade de modelar; e capacidade de construir significado para a linguagem e o objeto algébrico.

Na segunda fase da pesquisa foi possível validar essas hipóteses a partir das respostas escritas dos alunos e das entrevistas. Por exemplo, a resposta de Caio à Q1b (Figura 22) indica que ele inicia a resolução do problema estabelecendo as relações entre as informações do enunciado, ou seja, entre as quantidades de revistas de cada personagem e o total de revistas, o que é necessário para iniciar a resolução de um problema de estrutura algébrica (MARCHAND; BEDNARZ, 1999; RUIZ; BOSCH; GASCÓN, 2010; OLIVEIRA; CÂMARA, 2011). Isso é confirmado no extrato de entrevista a seguir.

P: *Então Caio, você consegue fazer essas relações aqui (apontando para o modelo do aluno), por exemplo, isso daqui é o quê (apontando para o modelo do aluno)?*
Caio: *O R é Rogério, e Rogério é duas vezes o valor de Frederico.*
P: *Certo.*
Caio: *Então, vou fazendo essas relações e tentando achar.*
P: *E Lúcia é?*
Caio: *Lúcia é o valor de Frederico mais 15.*
P: *Certo. Então você ia substituindo o valor de Frederico até chegar no total, é isso?*
Caio: *Sim.*
P: *E qual era o total?*
Caio: *55. Porque os três têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos.*

Além disso, também é possível confirmar as outras duas hipóteses levantadas, uma vez que Caio mostra, tanto em sua resposta escrita (Figura 22) como em sua entrevista, que seu modelo representa as relações existentes entre as quantidades de revistas de cada personagem e o total de revistas, revelando ter iniciado a capacidade de modelar e de entender o problema como uma relação de igualdade entre quantidades, ou seja, compreende o problema como uma equação polinomial do 1º grau, mesmo não representando-a na representação simbólica esperada.

Na entrevista, Caio também revela ter compreensão do que cada símbolo de seu modelo significa, reafirmando a capacidade de construir significado para a linguagem simbólica algébrica utilizada, mesmo que essa linguagem ainda seja uma linguagem sincopada.

As hipóteses levantadas para o nível 1 também são comprovadas na resposta da aluna Carol à Q6b (Figura 23), tendo em vista que ela, assim como Caio, inicia a resolução do problema estabelecendo as relações e representando-as em um modelo, isto é, converte o enunciado do problema para um registro em linguagem sincopada, e esse modelo indica que a aluna compreendeu o problema como uma equação, mesmo não representando a equação da forma esperada. Também é possível confirmar isso no extrato de entrevista a seguir.

P: *Ok Carol. E esse segundo? Me explica esses esquemas que você fez?*
Carol: *Isso aqui é Silvia, Pedro e Carlos (apontando para S, P e C), e isso aqui é o total de figurinhas (apontando para o "= 70").*
P: *Por isso você colocou igual a 70?*
Carol: *foi. Então, de Silvia para Pedro, Sílvia receberia 30 figurinhas a menos que Pedro, então eu sabia que, vamos supor, se Sílvia tem X, X mais 30 seria o valor de Pedro.*
P: *Por que ela recebe 30 a menos que Pedro, então Pedro receberia 30 a mais que ela?*
Carol: *Isso. Então eu fui fazendo isso também, e a metade de Carlos, então se ela tinha metade, então X vezes 2 seria igual a Carlos.*
P: *Por que Carlos seria o dobro de Sílvia, é isso?*
Carol: *Isso.*

Portanto, foi possível comprovar, a partir dos registros escritos dos participantes na segunda fase da pesquisa e das entrevistas, que o nível 1 – pensamento algébrico incipiente – é formado pelos alunos que adotam a estratégia atribuir valores na resolução dos problemas de partilha com duas relações, e que a adoção dessa estratégia revela a mobilização de três, das cinco características que compõem o pensamento algébrico, a capacidade de estabelecer relações, a capacidade de modelar e a capacidade de construir significado para a linguagem e os objetos algébricos.

Além disso, foi identificado, assim como na versão *a priori*, que o grau de dificuldade dos problemas de partilha com duas relações possibilita a proposição de subníveis a partir do nível 1. No subnível 1A estão os alunos que conseguem, mobilizando a estratégia atribuir valores, responder problemas de partilha com encadeamento das relações tipo fonte, enquanto no subnível 1B encontram-se os alunos que conseguem responder os problemas com encadeamento das relações tipo fonte e composição e no subnível 1C estão os alunos que respondem aos problemas de partilha independente do encadeamento das relações (fonte, composição ou poço).

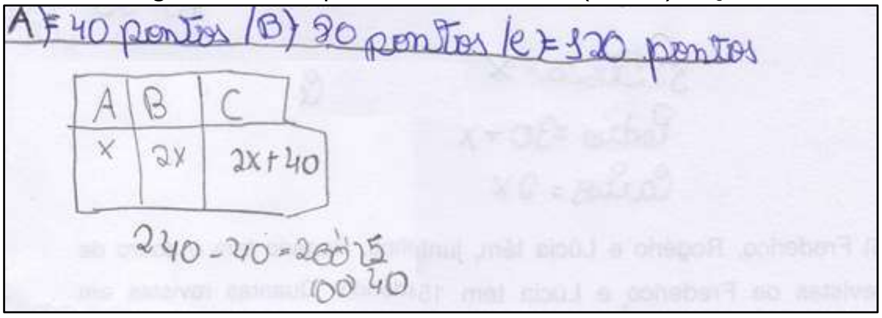
6.2.3. Nível 2 – pensamento algébrico intermediário

A diferença entre os alunos que se encontram no nível 1 e os que se encontram no nível 2 é que nesse último o modelo matemático se aproxima mais do modelo esperado para o problema, a equação polinomial do 1º grau. A estratégia adotada por eles já é denominada por Oliveira e Câmara (2011) de algébrica, porém com um registro sincopado, em que o aluno ainda não consegue chegar no registro da equação da forma que é esperado em um ambiente escolar.

Por pensar o problema já como uma equação, o aluno desse nível mobiliza, além das características do pensamento algébrico já mobilizadas pelos alunos que se encontram no nível anterior, uma quarta característica do pensamento algébrico, a capacidade de generalizar, uma vez que a indeterminação, a incógnita, já aparece de forma explícita no discurso do aluno (RADFORD, 2009), como podemos perceber na resposta da aluna Paula (6º ano) à Q3b.

Q3b. *Três times de basquete participam da final do campeonato fazendo, juntos, 240 pontos. O time B fez o dobro de pontos do time A e o time C fez 40 pontos a mais que o time B. Quantos pontos fez cada time?*

Figura 24 – Resposta da aluna Paula (6º ano) à Q3b



Fonte: dados a pesquisa

Podemos perceber que Paula consegue identificar as relações entre as informações do problema e as converte para um modelo matemático, em que a quantidade de pontos do time A é representada por X, a do time B por 2X, já que ele fez o dobro de pontos do time A, e a do time C por 2X + 40, uma vez que ele fez 40 pontos a mais que o time B. Apesar de Paula não representar no modelo que os três times fizeram, juntos, 240 pontos, na entrevista ela revela saber dessa informação e a utiliza, como podemos verificar no extrato a seguir.

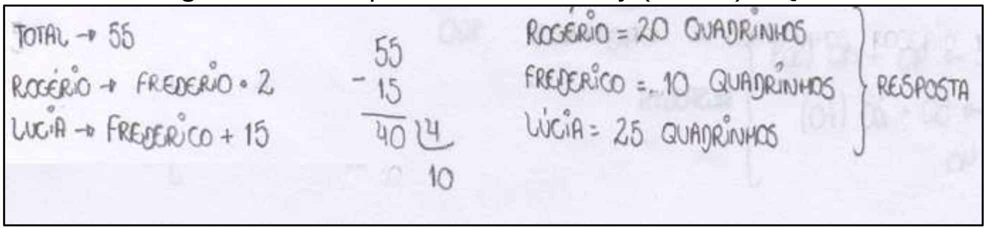
P: *Olá Paula, você pode me explicar como foi que você chegou na resposta desse primeiro problema?*
Paula: *Vê, aqui ele fala que eles fizeram juntos 240 pontos, ou seja, os 3 iguais a 240, e o time B fez o dobro de pontos do time A, e o time C fez 40 pontos a mais que o time B. Então, como o time A é o menor, podemos nos basear nele para fazer as coisas, ou seja, igual a X (se referindo ao time A).*
P: *Certo.*
Paula: *A é igual a X, o B é igual a quanto? A 2X, que é o dobro de X, e o C é igual a 2X, que é o B, mais 40.*
P: *Por que o C é?*
Paula: *40 mais 2X de B, ou seja, 2X mais 40.*
P: *Por que o time B era 2X?*
Paula: *Isso.*
P: *Certo. E depois como foi que você chegou na resposta?*
Paula: *Eu tive que dividir. Então, eu peguei 240 e tirei esse 40 (apontando para os 40 a mais do time C) porque tinha somado para dar os 240.*
P: *Certo.*
Paula: *Por que isso é 240 (apontando para o modelo com os três times) e tirei (se referindo aos 40) e deu 200, para dividir por quanto X? Um, dois, três, quatro, cinco X (apontando para a quantidade de X de cada time representada no modelo), ou seja, 240 dividido por 5, que dá 40, não, 200 dividido por 5, que dá 40, ou seja, esse aqui é 40 (apontando para o time A no modelo), esse aqui é 80 (apontando para o time B), que é 2X, 2 vezes 40, e esse aqui (apontando para o time C) é 80 mais 40, que fica 120. 120 mais 80, duzentos, mais 40, 240.*

Além disso, é possível verificar também que Paula realiza as operações aritméticas ($240 - 40 = 200$ e $\frac{200}{5} = 40$) como se estivesse resolvendo uma equação, como podemos perceber em suas explicações.

Outros alunos, que adotam a estratégia algébrica com registro sincopado, elaboram a equação mentalmente, e o modelo utilizado por eles para representar a conversão do enunciado do problema não é composto pelos símbolos essencialmente algébricos, como o modelo construído pela aluna Paula. Em alguns casos, o aluno não utiliza letras para representar as personagens do problema, mas, sim, os próprios nomes, como podemos observar na resposta da aluna Polly (9º ano) à Q1b, na Figura 25 a seguir.

Q1b. *Frederico, Rogério e Lúcia têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Rogério tem o dobro de revistas de Frederico e Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico. Quantas revistas têm cada um?*

Figura 25 – Resposta da aluna Polly (9º ano) à Q1b



Fonte: dados a pesquisa

No caso da resposta de Polly à Q1b, ela inicia indicando, por meio da expressão "Total → 55", que o total de revistas das três personagens é igual a 55, em seguida ela converte a expressão "Rogério tem o dobro de revistas de Frederico" em "Rogério → Frederico · 2", e "Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico" em "Lúcia → Frederico + 15".

Nesse caso a aluna se vale de uma linguagem mais concisa – que na história da matemática, e, em especial da álgebra, é denominada de sincopada – para representar as relações do problema, construindo, portanto, um modelo matemático.

Após identificar as relações, Polly resolve a equação, mesmo que, assim como Paula, essa equação não esteja da forma que tradicionalmente é trabalhada no ambiente escolar. As etapas dessa resolução são melhor compreendidas nas explicações da aluna no extrato de entrevista a seguir.

P: *Olá Polly, tudo bom? A ideia é você explicar como chegou nas respostas dos problemas. Por exemplo, esse primeiro, como foi que você fez?* ***Polly:*** *Na verdade, eu comecei pela quinta questão, foi quando eu percebi a lógica das questões, que eram todas as mesmas. Então eu voltei para o primeiro, e fiz a questão. Eu peguei e subtraí a quantidade que tinha a mais e depois eu dividi pela quantidade de pessoas que tinha.* ***P:*** *Mas nesse caso tinha três pessoas!* ***Polly:*** *Isso. Mas tinha uma pessoa que tinha o dobro, então, tinha que ser uma quantidade que conseguisse, tipo, tinha três pessoas, mas uma pessoa tinha o dobro de revistas de Frederico. Rogério tinha o dobro de Frederico, então, teoricamente seriam quatro quantidades.* ***P:*** *Por isso você dividiu por 4?* ***Polly:*** *Por isso dividi por 4.* ***P:*** *Então, você tira os 15, que é o que Lúcia tem a mais?* ***Polly:*** *Lúcia tem a mais que Frederico.* ***P:*** *Então você tirou esse 15 para ficar em quantidades iguais para cada um?* ***Polly:*** *Sim.* ***P:*** *Nesse caso você percebe que Rogério tem o dobro de Frederico, então Rogério teria duas quantidades, é isso?* ***Polly:*** *Sim.* ***P:*** *E por isso você, em vez de dividir por 3, dividi por 4?* ***Polly:*** *Sim.* ***P:*** *E quando você dividiu por 4 você achou a quantidade de quem?* ***Polly:*** *Eu achei a quantidade de Frederico, que é a pessoa que Rogério tem o dobro e Lúcia tem mais 15. Ele seria meio que o único que teria uma quantidade certinha. Então, Frederico teria 10, Rogério teria duas vezes Frederico, e Lúcia teria Frederico mais 15, como Frederico é 10, seria 20 e 25.* ***P:*** *Então, você pega o Frederico como base, que você achou a quantidade, que seria 10. E Rogério teria o dobro, que seria 20, é isso?* ***Polly:*** *Sim. E Lúcia teria Frederico mais 15, que fica 25.* ***P:*** *Certo.*

Portanto, percebemos, nas explicações de Polly, que ela utiliza as mesmas etapas de resolução da equação tradicionalmente encontrada após a conversão do enunciado do problema, como podemos observar no quadro a seguir, em que realizamos uma comparação entre as etapas realizadas pela aluna Polly e as etapas tradicionalmente utilizadas para resolver a equação.

Quadro 9 – Comparação entre a resolução tradicional e a algébrica com registro sincopado.

Etapas da resolução de Polly	Etapas da resolução tradicional	Considerações
"Total → 55" "Rogério → Frederico · 2" "Lúcia → Frederico + 15"	X + 2X + X + 15 = 55	Polly converte o enunciado do problema para uma linguagem sincopada, mas, indicando, da mesma forma que a conversão tradicional, que percebeu todas as relações existentes entre as informações do enunciado, ou seja, o entende como uma relação de igualdade entre quantidades.
55 – 15 = 40 (**Polly:** Eu peguei e subtraí a quantidade que tinha a mais... **P:** Então, você tira os 15 que é o que Lúcia tem a mais? **Polly:** Lúcia tem a mais que Frederico. **P:** Então você tirou esse 15 para ficar em quantidade iguais para cada um? **Polly:** Sim.)	X + 2X + X = 55 – 15	Nessa etapa, Polly subtrai 15 do total de revistas, dos 55, que equivalem, na resolução tradicional, a subtrair 15 de ambos os membros e somar os X. A subtração realizada por Polly é para deixar, como ela explica, apenas as quantidades desconhecidas de cada personagem.
	4X = 40	
$\frac{40}{4} = 10$ **Polly:** Eu dividi pela quantidade de pessoas que tinha. **P:** Mas nesse caso tinha três pessoas! **Polly:** Isso. Mas tinha uma pessoa que tinha o dobro, então, tinha que ser uma quantidade que conseguisse, tipo, tinha três pessoas, mas uma pessoa tinha o dobro de revistas de Frederico. Rogério tinha o dobro de Frederico, então, teoricamente seriam quatro quantidades. **P:** Por isso você dividiu por 4? **Polly:** Por isso dividi por 4.	$X = \frac{40}{4}$	A aluna divide, nesse momento, o valor encontrado da subtração que ela realizou por 4, isto é, divide 40 por 4, e explica que realizou a divisão pelo total de personagens que tinha no problema. Porém, quando questionada que tinha 3 personagens e não 4, ela esclarece que a divisão foi por 4 porque, entre as 3 personagens, uma tinha o dobro da personagem fonte, então, por conta disso, teria quatro quantidades desconhecidas e iguais, por isso a divisão por 4, que, na resolução tradicional, são os quatro X.
	X = 10	

Fonte: o autor

Portanto, além das características do pensamento algébrico já mobilizadas pelos alunos que se encontram no nível 1, isto é, a capacidade de estabelecer relações, a capacidade de modelar e a capacidade de construir significado para os objetos e a linguagem simbólica algébrica, os alunos que se encontram no nível 2 mobilizam mais uma característica dessa forma de pensar, a capacidade de generalizar, uma vez que o desconhecido, a incógnita já faz parte de seus discursos (KAPUT, 2008; RADFORD, 2009).

A partir da análise da produção escrita dos participantes dessa fase da pesquisa, foi possível, assim como para os níveis 1 e 3, a proposição de três subníveis dentro do nível 2. O subnível 2A, composto pelos alunos que, adotando a estratégia algébrica com registro sincopado, conseguem responder apenas aos problemas de partilha de duas relações com o encadeamento das relações tipo fonte. Já o subnível 2B é formado pelos alunos que conseguem, com essa estratégia, resolver os problemas de partilha com encadeamento das relações tipo fonte e composição, e, no 3C estão os alunos que com essa estratégia conseguem responder os problemas de partilha independente do encadeamento das relações.

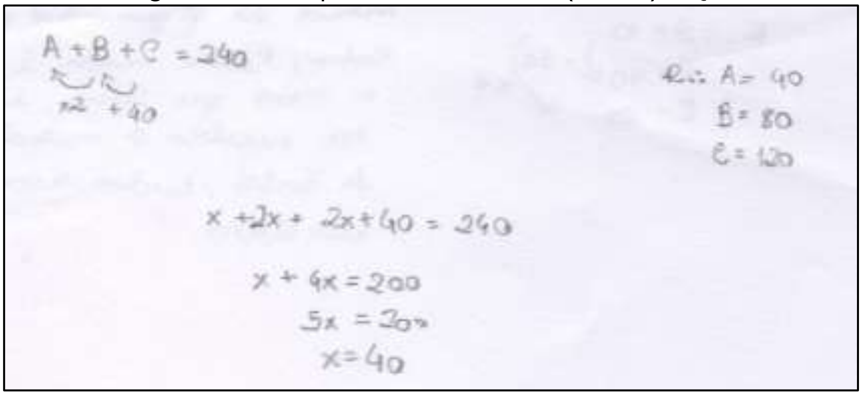
6.2.4. Nível 3 – pensamento algébrico consolidado

No último nível de nosso modelo os alunos conseguem, de forma consolidada, mobilizar todas as cincos características dessa forma de pensar, isto é, além das quatro características mobilizadas pelos alunos que se encontram no nível 2 (capacidade de estabelecer relações; capacidade de modelar; capacidade de generalizar; e capacidade de construir significado), os alunos que se encontram no nível 3 mobilizam a última característica, a capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido, de forma analítica.

Para comprovar nossas hipóteses levantadas na versão *a priori* do modelo temos, a seguir, a análise das respostas e das entrevistas de dois alunos. Iniciaremos pela resposta de Júlia, aluna do 7º ano do ensino fundamental, à Q3b.

Q3b. *Três times de basquete participam da final do campeonato fazendo, juntos, 240 pontos. O time B fez o dobro de pontos do time A e o time C fez 40 pontos a mais que o time B. Quantos pontos fez cada time?*

Figura 26 – Resposta da aluna Júlia (7° ano) à Q3b



Fonte: dados a pesquisa

É possível perceber que Júlia converte o enunciado do problema em dois modelos. Inicialmente ela utiliza as letras de cada time para indicar que a soma dos pontos que eles fizeram é igual a 240, por isso a equação “A + B + C = 240”. E, para indicar as relações existentes entre a quantidade de pontos que cada time fez ela se vale de setas, sinais de operações aritméticas e números. Por exemplo, ela utiliza $\left(\underset{x\,2}{\longleftarrow}\right)$ indo de B para A para indicar que o time B fez o dobro de pontos do time A e $\left(\underset{+\,40}{\longleftarrow}\right)$ indo de C para B para indicar que o time C fez 40 pontos a mais que o time B.

Na segunda etapa da resolução, Júlia transforma o modelo inicial no modelo tradicionalmente esperado em um ambiente escolar, ou seja, em uma equação polinomial do 1º grau, no qual as incógnitas são representadas pela letra “X”. No segundo modelo, diferentemente do primeiro, Júlia já indica as relações existentes entre a quantidade de pontos de cada time na própria equação. O “X” indica a quantidade de pontos do time A, o “2X” indica a quantidade de pontos do time B, uma vez que ele fez o dobro de pontos do time A, e o “2X + 40” indica a quantidade de pontos do time C, já que ele fez 40 pontos a mais que o time B. Essas inferências são comprovadas nas explicações de Júlia, como podemos verificar a seguir.

P: *Ok. Agora Júlia, me explica como você fez esse terceiro?*
Júlia: *(Depois de ler o problema) O time B fez o dobro de pontos do time A (apontando, no modelo inicial, para* $\left(\underset{\text{x }2}{\longleftarrow}\right)$*), e o time C fez 40 pontos a mais que o time B (apontando, no modelo inicial, para* $\left(\underset{+\ 40}{\longleftarrow}\right)$*).*
P: *Certo.*
Júlia: *Então, o A vai ser X, mais 2X, que seria X vezes 2, que é o B, porque o B é o dobro do A, mais 2X, que seria o B, mais 40, e essa equação seria o C (chama 2X + 40 de equação), que é igual a 240.*
P: *Certo.*
Júlia: *Então, X mais 2X mais 2X mais 40 é igual 240. Então, eu diminuí 40 dos dois lados, e ficou X mais 4X, porque eu juntei os 2X com os 2X, que fica igual a 200. E depois eu somei X, que ficou 5X igual a 200. Então, X é igual a 40, porque eu dividi 5 dos dois lados.*
P: *Certo. E depois, você fez como?*
Júlia: *Então, o time A ficou com 40, o time B ficou com o dobro do time A, que é 80, e o time C ficou com mais 40 vezes 2, que seria 120.*
P: *Certo.*

Percebemos, portanto, que Júlia já revela mobilizar as cinco características que formam o pensamento algébrico. A capacidade de estabelecer relações, de modelar, de generalizar e de construir significado já são reveladas quando ela inicia a resolução do problema, uma vez que o modelo utilizado por ela após a conversão do enunciado do problema indica que ela percebeu, de forma clara, as relações existentes entre a quantidade de pontos que cada time fez e o total de pontos, representando essas relações em um modelo matemático apropriado e esperado em um ambiente escolar, em que a incógnita aparece claramente, revelando a capacidade de generalizar, além de ter mostrado que entendeu o problema de partilha como uma relação de igualdade entre quantidades, ou seja, como uma equação, além de entender o que cada símbolo utilizado no modelo representa, revelando que a capacidade de construir significado para o objeto algébrico em jogo e para a linguagem simbólica algébrica utilizada está bem desenvolvida.

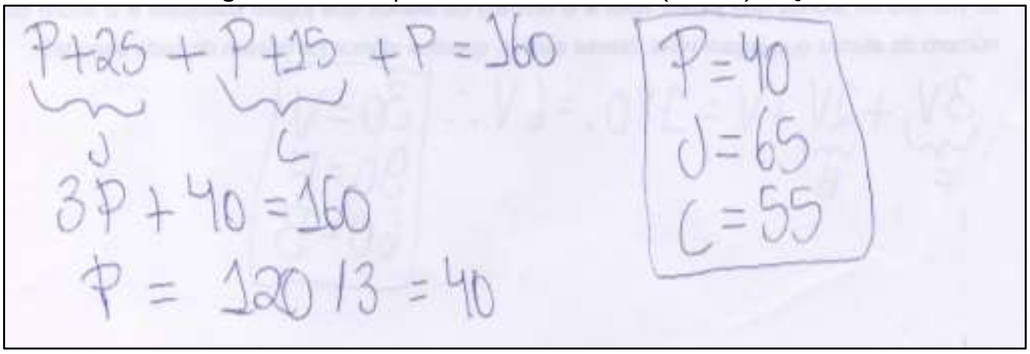
Por fim, Júlia revela que a capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido, característica do pensamento algébrico defendida por vários pesquisadores (LINS, 1992, 1994a, 1994b; KAPUT, 1999, 2000; RADFORD, 2006; 2009), está bem desenvolvida, uma vez que ela manipula, na resolução da equação, a incógnita, o “X”, de acordo com as regras da aritmética em relação a uma igualdade, em que são realizadas operações na equação inicial com o intuito de gerar equações equivalentes até chegar no valor de “X”.

Isso é possível verificar no registro escrito de Júlia, em que ela realiza, de forma mental, as operações para se chegar nas equações equivalentes até encontrar o valor da incógnita. A comprovação de que essas operações foram realizadas de acordo com as regras supracitadas são obtidas a partir das explicações de Júlia, quando, por exemplo, ela diz “eu diminuí 40 dos dois lados, e ficou X mais 4X, porque eu juntei os 2X com os 2X, que fica igual a 200. E depois eu somei X, que ficou 5X igual a 200. Então, X é igual a 40, porque eu dividi 5 dos dois lados”.

Outros alunos também revelam estar em um nível consolidado do pensamento algébrico, porém, seus registros escritos não são tão organizados como os de Júlia. Entretanto, ressaltamos que não é a organização dos registros escritos que indica em que nível o aluno se encontra, mas, sim, as características dessa forma de pensar que são mobilizadas na resolução dos problemas, e que podem ser reveladas nos registros escritos. Por exemplo, a análise da resposta do aluno Carlos (9º ano do ensino fundamental) à Q5a indica que ele se encontra, assim como Júlia, no nível 3, ou seja, no nível de pensamento algébrico consolidado.

Q5a. *João, Pedro e Cláudio têm, juntos, 160 carrinhos. Pedro tem 25 carrinhos a menos que João e 15 carrinhos a menos que Cláudio. Quantos carrinhos tem cada um deles?*

Figura 27 – Resposta do aluno Carlos (9º ano) à Q5a



Fonte: dados a pesquisa

É possível perceber que Carlos inicia a resposta ao problema de partilha convertendo o enunciado direto para uma equação polinomial do 1º grau, além de utilizar como incógnita a letra P, que indica, na equação, a quantidade de carrinhos de Pedro, diferentemente da resposta de Júlia. Entretanto, percebemos que Carlos, assim como Júlia, estabelece as relações existentes entre as informações contidas no enunciado, isto é, entre a quantidade de carrinhos de cada personagem e o total, e revela essas relações na equação, em que o “P” indica a quantidade de carrinhos de

Pedro, o “P + 25” indica a quantidade de carrinhos de João, uma vez que se Pedro tem 25 carrinhos a menos que João, logo João tem 25 carrinhos a mais que Pedro, e o “P + 15” representa a quantidade de carrinhos de Cláudio, visto que se Pedro tem 15 carrinhos a menos que Cláudio, então Cláudio tem 15 carrinhos a mais que Pedro, por isso a equação P + 25 + P + 15 + P = 160.

Carlos explica, no extrato de entrevista a seguir, como chegou na equação após a conversão do enunciado do problema.

P: *Carlos, me explica como você fez esse quinto?*
Carlos: *Esse quinto, como ele fala que Pedro tem 25 carrinhos a menos que João, isso significa que João menos 25 é igual a Pedro. Então, eu passei o 25 para o outro lado, que dá que João é igual a Pedro mais 25, que está escrito aqui (apontando para o “P + 25” na equação). A mesma coisa com Pedro e Cláudio, que Cláudio é Pedro mais 15 (apontando para o “P + 15” na equação) e eu tenho que mostrar o de Pedro, adicionar o valor de Pedro (apontando para o “P” na equação), que dá 160.*
P: *Me explica por que você coloca mais 25 e mais 15, se diz que Pedro tem 25 carrinhos a menos que João, e você coloca P mais 25?*
Carlos: *É porque eu escrevi mentalmente uma equação, em que J, que é João, é igual a P – 25, não, calma, João menos 25 é igual a Pedro. Então, eu peguei esse 25, e mentalmente mesmo eu passei para o outro lado. Então, a gente tem que João é igual a Pedro mais 25, aí eu fui e escrevi isso (apontando para o “P + 25” na equação).*
P: *Entendi, por isso P mais 25?*
Carlos: *Isso*
P: *Por que você quer colocar tudo em função de P?*
Carlos: *Isso.*
P: *Entendi. Então se Pedro tem 25 carrinhos a menos que João, João teria 25 carrinhos a mais que Pedro?*
Carlos: *Isso.*
P: *Certo. A mesma coisa para o de Cláudio?*
Carlos: *Isso. Então, eu adiciono P, que dá 160. Então, eu faço a mesma coisa que eu fiz nas questões anteriores, que é juntar todos os P, juntar todos os números que eu consegui, subtrair os números dos dois lados, que dá P igual a 120 sobre 3, que dá 40.*
P: *Certo. Então me explica melhor como você chegou nesse 3P e nesse 40 (apontando para a segunda equação)?*
Carlos: *Eu somei todos os P e somei 25 mais 15.*
P: *E para chegar em P = 120/3, o que você fez?*
Carlos: *Eu subtraí 40 dos dois lados, que deu 3P = 120, e depois eu dividi os dois lados por 3, por isso esse 120/3 aqui (apontando para a equação), então, P é igual a 40, que é o valor de Pedro.*
P: *E para achar a quantidade de João e Cláudio, você fez o quê?*
Carlos: *Eu adicionei 25 para o João, e adicionei 15 para o Cláudio no resultado, que deu isso aqui (apontando para o resultado final).*

Portanto, percebemos que Carlos, assim como Júlia, mobiliza, de forma consolidada, todas as características do pensamento algébrico. Ele revela mobilizar a capacidade de estabelecer relações quando realiza a conversão do enunciado do problema para a linguagem simbólica algébrica levando em consideração todas as condições postas no enunciado, revelando, nesse caso, outra característica, a capacidade de modelar.

Nesse mesmo momento ele revela, também, mobilizar a capacidade de generalizar, uma vez que a incógnita aparece de forma clara em seu modelo e em suas explicações, e de construir significado para o objeto algébrico em jogo – tendo em vista que ele compreende o problema como uma relação de igualdade entre quantidade – e para a linguagem simbólica algébrica utilizada, pois ele demonstra compreender o que cada símbolo de seu modelo representa.

Por fim, ele revela, assim como Júlia, mobilizar a última característica dessa forma de pensar, a capacidade de operar com o desconhecido de forma analítica, quando ele realiza operações na equação inicial com o objetivo de gerar equações equivalentes até chegar no valor da incógnita. Observando apenas o registro escrito de Carlos não seria suficiente para afirmar que ele se vale das regras da aritmética em relação a uma igualdade. Porém, em suas explicações ele deixa isso claro, quando ele afirma, por exemplo, que “Eu subtraí 40 dos dois lados, que deu 3P = 120, e depois eu dividi os dois lados por 3, por isso esse $\frac{120}{3}$ aqui (apontando para a equação). Então, P é igual a 40”.

Por fim, assim como nos níveis 1 e 2, percebemos que no nível 3 temos três subníveis. No subnível 3A se encontram os alunos que, adotando a estratégia algébrica com registro algébrico formal, conseguem responder apenas os problemas de partilha com encadeamento tipo fonte, enquanto que o subnível 3B é formado pelos alunos que, utilizando a mesma estratégia, conseguem responder os problemas de partilha com encadeamento tipo fonte e composição. Já no subnível 3C estão os estudantes que conseguem, adotando essa estratégia, responder os problemas de partilha independente do encadeamento das relações, ou seja, fonte, composição ou poço.

6.3. Nível de desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos

A partir desse momento temos uma análise com o objetivo de identificar o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico dos participantes da pesquisa. Acreditamos que, mesmo que o objetivo principal dessa tese não seja esse, é interessante essa análise pois nos possibilitar construir algumas conclusões complementares que poderão servir para subsidiar professores de matemática e pesquisadores interessados nesse tema.

Ressaltamos que participaram dessa etapa da pesquisa 343 alunos dos anos finais do ensino fundamental de duas escolas da cidade do Recife, sendo 72 alunos do 6º ano, 83 do 7º ano, 93 do 8º ano e 95 do 9º ano. Em nenhum momento tivemos a intenção de comparar os resultados por escola.

No Quadro 10 a seguir temos a distribuição dos 343 alunos por níveis e subníveis, levando em consideração a frequência e a porcentagem em cada categoria.

Quadro 10 – Nível de desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos

Níveis	Frequência	Percentagem	Subníveis	Frequência	Porcentagem
Nível 0	59	17%			
Nível 1	140	41%	1A	15	4%
			1B	27	8%
			1C	98	29%
Nível 2	36	10,5%	2A	5	1,5%
			2B	6	2%
			2C	25	7%
Nível 3	108	31,5%	3A	1	0,5%
			3B	26	7,5%
			3C	81	23,5%
Total	343	100%		284	83%

Fonte: o autor

Percebemos, ao analisarmos o Quadro 10, que 17% dos alunos se encontram no nível 0, ou seja, não conseguem mobilizar nenhuma das características que compõem o pensamento algébrico. Porém, ao compararmos esse resultado com o da primeira fase dessa pesquisa, verificamos que teve uma diminuição considerável no percentual de alunos nesse nível, de 29% para 17%, que corresponde a uma redução de 12 pontos percentuais. Isso pode ser explicado pelo fato de, na primeira fase da pesquisa, os participantes serem todos alunos do 6º ano do ensino fundamental, e ainda não tinham tido contado, no ambiente escolar, com a álgebra, enquanto que, nessa segunda etapa um pouco mais da metade dos participantes da pesquisa era formada por alunos que já tinham tido esse contado, que são os alunos do 8º e 9º anos (55%).

Verificamos, também, que o nível que concentra mais alunos é o nível 1, no qual o pensamento algébrico ainda é incipiente – 41% dos participantes. Isso revela que 140 alunos, dos 343 participantes da pesquisa, adotam a estratégia atribuir valores como base na resolução de um problema de partilha com duas relações, mobilizando, de acordo com o modelo proposto nessa tese, três, das cinco características que compõe o pensamento algébrico, a capacidade de estabelecer relações, a capacidade de modelar e a capacidade de construir significado para a linguagem e os objetos algébricos.

Com relação aos subníveis do nível 1, percebemos que a grande maioria dos alunos que se encontram nesse nível, tanto da primeira fase da pesquisa (40% dos 58%), como da segunda fase (29% dos 41%) conseguem resolver, a partir da estratégia atribuir valores, os problemas de partilha com duas relações, independente do encadeamento dessas relações, isto é, estão no subnível 1C. Isso também é percebido nos outros níveis, pois 7% dos 10,5% do nível 2 se encontram no subnível 2C, e 23,5% dos 31,5% do nível 3 formam o último subnível desse nível.

Isso parece indicar que, apesar de existir um nível de dificuldade dos problemas de partilha, como foi revelado nas pesquisas de Oliveira e Câmara (2011) e Santos Junior (2013), e corroborado por nossos resultados, boa parte dos alunos (59,5% dos 83% que estão nos níveis 1, 2 e 3) conseguem, ao iniciarem a resolução de um dos problemas de forma correta, resolver os demais problemas do teste, independente do encadeamento das relações desses problemas de partilha.

Já no nível 2, que podemos dizer que é constituído por uma transição entre o pensamento algébrico incipiente e o consolidado, se encontra, tanto na primeira fase da pesquisa (8% dos participantes) como na segunda (10,5%), o menor número de alunos. Isso talvez aconteça pelo fato de a estratégia adotada por esses alunos ser uma estratégia algébrica, em que o aluno pensa o problema de partilha como uma equação polinomial do 1º grau, mas sem representar essa equação na forma que tradicionalmente é estudada no ambiente escolar.

Quando observamos a porcentagem de alunos que se encontra no nível 3, verificamos um aumento considerável entre a primeira fase da pesquisa, em que tínhamos apenas 5% dos alunos, e a segunda, na qual temos 31,5% dos participantes. Isso se justifica pelo fato de, como dito anteriormente, 55% dos participantes dessa última fase da pesquisa já ter estudado, em algum momento de sua vida escolar, álgebra, e em particular, equação polinomial do 1º grau.

Continuando nossas análises temos, no Quadro 11 a seguir, a relação entre ano de escolarização e o nível de desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

Quadro 11 – Escolaridade e nível do pensamento algébrico dos alunos

	Ano de escolarização							
	6º		**7º**		**8º**		**9º**	
Níveis	**F**	**P**	**F**	**P**	**F**	**P**	**F**	**P**
Nível 0	22	30%	15	18%	15	16%	7	7%
Nível 1	36	50%	55	66%	23	25%	26	27%
Nível 2	10	14%	8	10%	8	9%	10	11%
Nível 3	4	6%	5	6%	47	50%	52	55%
Total	72	100%	83	100%	93	100%	95	100%

Legenda: F – Frequência; **P** – Porcentagem.
Fonte: o autor

É possível verificar que o percentual de alunos que não consegue mobilizar nenhuma característica do pensamento algébrico ao se depararem com um problema de partilha com duas relações diminui quando se aumenta a escolarização. Percebemos isso quando comparamos, por exemplo, o percentual de alunos no nível 0 do 6º ano do ensino fundamental, 30%, com o percentual de alunos do 9º ano nesse nível, 7%, ou seja, uma diminuição de 23 pontos percentuais. Isso indica que quanto mais alto a escolarização do aluno maior a capacidade de mobilizar alguma característica do pensamento algébrico.

Essa influência do tempo de escolarização na capacidade de mobilizar características do pensamento algébrico também é percebida quando comparamos o percentual de alunos do 6º e 7º ano nos níveis 1 e 3 com o percentual de alunos do 8º e 9º ano nesses mesmos níveis. Percebemos, nesse caso, uma diminuição considerável no percentual de alunos no nível 1 (de 50% no 6º ano e 66% no 7º ano para 25% no 8º ano e 27% no 9º ano) e, ao mesmo tempo, um aumento significativo no percentual de alunos no nível 3 (de 6% no 6º e 7º ano do ensino fundamental para 50% no 8º ano e 55% no 9º ano).

Porém, o interessante é que os percentuais de alunos no nível 2 são muito próximos, independente do ano de escolarização dos alunos. Isso indica que a influência do ambiente escolar nesse nível de desenvolvimento do pensamento algébrico é muito pouca.

Essa não influência talvez seja pelo fato de esse nível ser um nível de transição entre o pensamento algébrico incipiente – em que os alunos ainda se valem de muitas ferramentas essencialmente aritméticas, pois na estratégia atribuir valores ele toma a incógnita como um espaço vazio que deve ser preenchido por um valor particular e, após escolher um determinado valor, ele realiza as operações aritméticas, seguindo as condições propostas no enunciado do problema – e o pensamento algébrico consolidado, em que a incógnita já é tida como um valor desconhecido que deve ser representado por um sinal, no caso uma letra, para que o enunciado do problema seja convertido em uma equação. Essas ações são exploradas nas aulas de álgebra, principalmente no ensino de equações polinomiais do 1º grau, com os problemas de partilha, como indicam as pesquisas de Almeida (2011) e Almeida e Câmara (2014a).

Quando realizamos a distribuição dos alunos nos subníveis por ano de escolarização, como mostra o Quadro 12 a seguir, percebemos que, independente do ano de escolarização, a maior parte dos alunos se encontra no último subnível de cada nível.

Quadro 12 – Escolaridade e subníveis do pensamento algébrico dos alunos

		6º ano		7º ano		8º ano		9º ano	
Nível	**Subnível**	**F**	**P**	**F**	**P**	**F**	**P**	**F**	**P**
0		22	30%	15	18%	15	16%	7	7%
1	**1A**	2	3%	3	4%	4	4%	6	6%
	1B	8	11%	5	6%	6	7%	8	8,5%
	1C	26	36%	47	57%	13	14%	12	13%
2	**2A**	2	3%	0	0%	2	2%	1	1%
	2B	2	3%	1	1%	2	2%	1	1%
	2C	6	8%	7	8%	4	4%	8	8,5%
3	**3A**	0	0%	0	0%	1	1%	0	0%
	3B	2	3%	2	2%	12	13%	10	11%
	3C	2	3%	3	4%	34	37%	42	44%
Total		72	100%	83	100%	93	100%	95	100%

Legenda: F – Frequência; **P** – Porcentagem.
Fonte: o autor

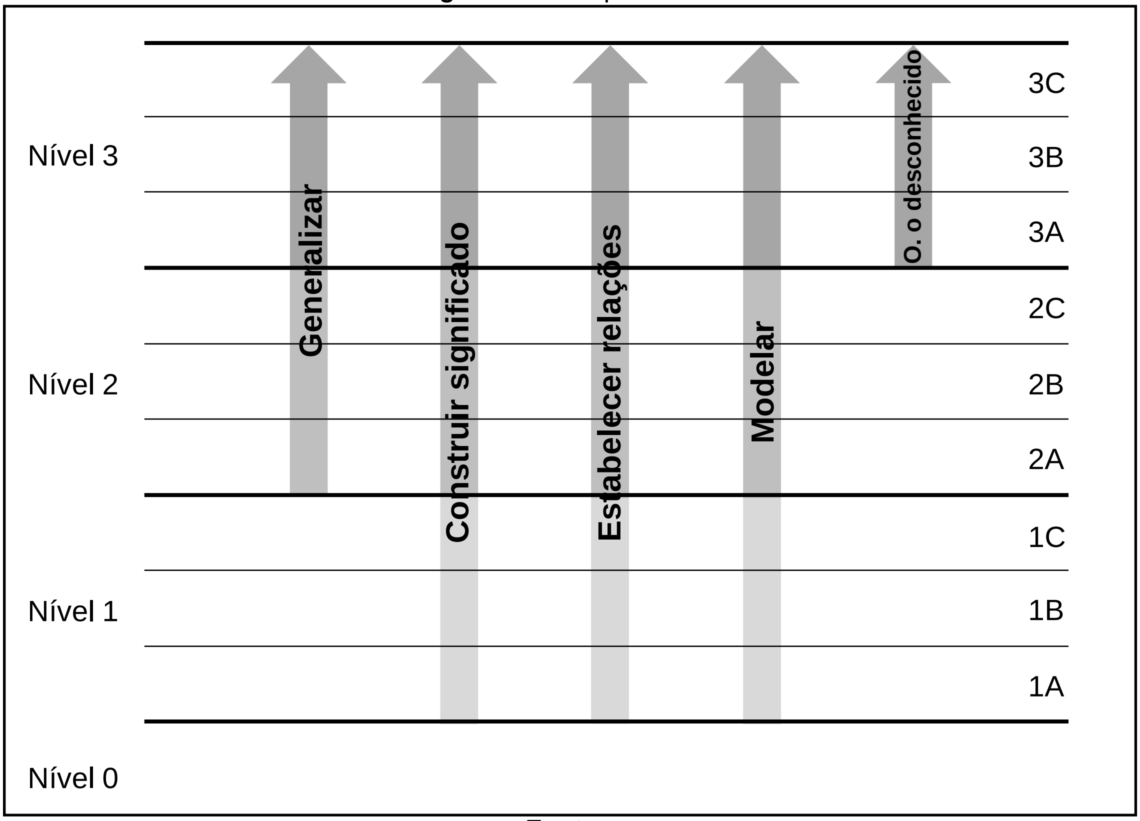
Portanto, assim como foi verificado no Quadro 10, percebemos no Quadro 12 que, independente do ano de escolarização dos alunos, eles conseguem, ao iniciarem de forma correta um dos problemas de partilha do teste, responder aos demais, independentemente do tipo de encadeamento das relações e, consequentemente, do grau de dificuldade.

6.4. Conclusões do capítulo

Este capítulo teve por objetivo validar a versão *a priori* modelo. Ao final chegamos, após a análise das produções escritas e das entrevistas dos alunos participantes, à versão final de um modelo que possibilita a identificação do nível de desenvolvimento do pensamento algébrico de um aluno referente aos problemas de partilha com duas relações. Na elaboração do modelo foi levado em consideração as características do pensamento algébrico mobilizadas pelos alunos ao se depararem com um problema desse tipo.

Para visualizar melhor as características do pensamento algébrico mobilizadas em cada nível do modelo temos o esquema a seguir.

Figura 28 – Esquema do modelo



Fonte: o autor

Portanto, os alunos que se encontram no nível 0 não conseguem, como mostra a Figura 28, mobilizar, ao se depararem com um problema de partilha com duas relações, nenhuma das características que formam o pensamento algébrico. Já os alunos que estão no nível 1 conseguem, de forma incipiente, revelar três das cinco características que compõem essa forma de pensar, a capacidade de estabelecer relações, a capacidade de modelar e a capacidade de construir significado para a linguagem e os objetos algébricos.

No nível 2 encontram-se os alunos que conseguem mobilizar, de forma intermediária, além das três características dos alunos que se encontram no nível anterior, uma quarta, a capacidade de generalizar. Por fim, no nível 3 estão os alunos que conseguem mobilizar de forma consolidada as cinco características do pensamento algébrico, ou seja, além das quatro características mobilizadas pelos alunos que estão no nível 2, eles conseguem mobilizar a capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido, de forma analítica.

Capítulo 7

Considerações finais

Essa pesquisa teve por objetivo propor um modelo que possibilite a identificação de níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico revelado por estudantes ao resolverem problemas de partilha.

Para alcançar esse objetivo construímos, a partir das pesquisas de Lins (1992, 1994a, 1994b), Kaput (1999, 2008) e Radford (2009, 2011c), nossa caracterização de pensamento algébrico, que, para nós se concretiza como uma ação exclusivamente humana, que levou séculos para alcançar o status atual, e que é formada por cinco características inter-relacionadas, porém, em alguns casos, não dependentes, ou seja, para um sujeito pensar algebricamente não precisa, necessariamente, mobilizar todas as cincos características.

Nesse sentido, defendemos, nessa tese, que pensar algebricamente requer a mobilização de pelos menos algumas das seguintes características: capacidade de estabelecer relações; capacidade de modelar; capacidade de generalizar; capacidade de construir significado para a linguagem e os objetos algébricos; e capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido, de forma analítica.

Ao final de nossa pesquisa, concluímos que, assim como apontam as pesquisas de Brito Lima (1996), Oliveira e Câmara (2011), Santos Junior (2013), Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) e Godino et al. (2014), é possível propor um modelo que possibilite a identificação do nível de desenvolvimento do pensamento algébrico de um determinado aluno. No nosso caso, finalizamos nossa pesquisa com a proposição de um modelo que possibilita a identificação do nível de desenvolvimento do pensamento algébrico de um estudante em relação a um tipo específico de problema de estrutura algébrica, o problema de partilha com duas relações.

Nosso modelo vai do nível 0, o qual é caracterizado pela ausência de pensamento algébrico, passando pelo nível 1, no qual o pensamento algébrico do aluno que se encontra nesse nível é ainda incipiente, pelo nível 2, no qual o pensamento algébrico dos alunos que se encontram nele é intermediário, chegando, por fim, no nível 3, em que o pensamento algébrico dos alunos já é consolidado.

O aluno que se encontra no nível 0 não consegue, ao se deparar com um problema de partilha com duas relações, mobilizar nenhuma das características que formam essa maneira específica de pensamento matemático. Já o aluno que se encontra no nível 1 consegue, ao se deparar com um problema de partilha, mobilizar três, das cinco características dessa forma de pensar, a capacidade de estabelecer relações, a capacidade de modelar e a capacidade de construir significado, mesmos que essas duas últimas ainda seja de forma primária.

Já no nível 2 estão os alunos que, ao se depararem com um problema de partilha, conseguem mobilizar quatro características do pensamento algébrico, além das três mobilizadas pelos alunos que se encentram no nível 1, eles mobilizam a mais a capacidade de generalizar. Entretanto, os alunos que se encontram no nível 2 revelam que as características capacidade de construir significado e capacidade de modelar são mobilizadas de forma mais consolidadas do que os alunos do nível 1.

Por fim, no nível 3 estão os alunos que conseguem mobilizar todas as cinco características do pensamento algébrico, ou seja, além das quatro mobilizadas no nível anterior, eles conseguem mobilizar a capacidade de operar com o desconhecido como se fosse conhecido, de forma analítica. Além disso, os alunos que se encontram nesse nível revelam mobilizar todas as cinco características do pensamento algébrico de forma bem consolidada.

Na distribuição dos 343 participantes na segunda etapa da pesquisa nos níveis do nosso modelo, percebemos, de forma clara, que a escolarização tem uma influência no desenvolvimento do pensamento algébrico, uma vez que no 6º ano do ensino fundamental temos 30% dos alunos no nível 0, enquanto que no 9° ano temos apenas 7%, ou seja, uma diminuição de 23 pontos percentuais no número de alunos que não consegue mobilizar nenhuma característica dessa forma de pensar ao se deparar com um problema de partilha com duas relações.

Já o percentual de alunos no nível incipiente do pensamento algébrico, o nível 1, também diminui, de 50% no 6º ano para 27% no 9º ano, isto é, também temos uma diminuição de 23 pontos percentuais no número de alunos no nível 1 no decorrer dos anos de escolarização. Além disso, também temos um aumento considerável de alunos no nível de pensamento algébrico consolidado, o nível 3, exatamente de 49 pontos percentuais, passando de 6% no 6º ano para 55% no 9º ano.

Portanto, percebemos que a escola tem uma influência considerável no desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, pelo menos no que diz respeito aos problemas de partilha, foco de nossa pesquisa. Nesse sentido, acreditamos que o modelo aqui proposto possa ser útil e válido não só para os que se dedicam a pesquisar na área de educação matemática, mas, também, para professores da educação básica que ensinam matemática, uma vez que pode fornecer informações de como seus alunos estão em relação a um campo importante da matemática, a álgebra.

Além disso, acreditamos, também, que nossos resultados sejam interessantes para formação de professores de matemática, tanto a formação continuada como a inicial, tendo em vista que ainda em dias atuais o ensino de álgebra muitas vezes é voltado exclusivamente para a manipulação de expressões simbólicas sem sentido (ARAÚJO, 2008). Nesse caso, nosso modelo indica que o ensino da álgebra pode ter outro foco, defendido por muitos pesquisadores da área, o de desenvolver o pensamento algébrico (CYRINO; OLIVEIRA, 2011; KAPUT, 2008; ARCAVI, 2005; BLANTON; KAPUT, 2005; RADFORD, 2009, 2011a, 2011c).

Por outro lado, percebemos que a escolarização parece não influenciar no número de alunos que se encontram no nível 2, uma vez que 14% dos alunos do 6º e 11% do 9º ano se encontram, em nossa pesquisa, nesse nível de desenvolvimento do pensamento algébrico. Diante disso, surge nossa primeira questão para pesquisas futuras: por que a escolarização não influencia no percentual de alunos no nível 2, diferentemente dos níveis 0, 1 e 3?

Além disso, outros resultados nos inquietaram, nos levando a propor outras questões para futuras pesquisas. Por exemplo, acreditamos que no último ano de escolarização do ensino fundamental ainda se encontra um número considerável de alunos nos primeiros níveis, 7% no nível 0 e 27% no nível 1. Por conta disso, achamos pertinente deixar a seguinte questão de pesquisa em aberto: qual a contribuição de sequências didáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico, relacionado aos problemas de partilha, de alunos dos anos finais do ensino fundamental?

Continuando, uma das limitações de nosso modelo é que ele foi proposto com o objetivo de identificar o nível de pensamento algébrico dos alunos referente a apenas um tipo de problema de estrutura algébrica, os problemas de partilha. Porém, a álgebra é composta, como nos coloca Radford (2006), por um extenso número de objetos. Por conta disso, deixamos, para que sejam respondidas em pesquisas futuras, as seguintes questões: é possível adaptar o modelo aqui proposto para outros problemas de estrutura algébrica? E: é possível propor um modelo geral que possibilite a identificação do nível de desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos em relação a diferentes problemas de estrutura algébrica?

Por fim, acreditamos que é possível encontrar resposta para essas duas últimas questões. Entretanto, acreditamos que o modelo aqui proposto, como os que poderão ser propostos como respostas a essas questões, só terão sentido, ou só serão proveitosos, se o ensino de álgebra na educação básica ganhar um foco diferente do que tradicionalmente encontramos no Brasil, ou seja, deixe de ter a ênfase na linguagem simbólica algébrica e passe a ter no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Isso porque acreditamos, assim como nos coloca Radford (2009), que o domínio da linguagem simbólica algébrica e a capacidade de manipular essa linguagem é o ápice do desenvolvimento do pensamento algébrico. Porém, essa linguagem essencialmente simbólica e sua manipulação não pode, ou não deveria ser, apresentada de imediato ao aluno. Ela deve aparecer de forma natural, a partir da necessidade do aluno de representar os objetos algébricos de uma maneira cada vez mais concisa, mais simbólica, chegando, por fim, a linguagem essencialmente algébrica. Defendemos, portanto, que é preciso valorizar o caminho percorrido no desenvolvimento do pensamento algébrico, caminho esse que revela para o estudante a força da álgebra, que é de significar coisas de uma maneira totalmente abstrata.

Acreditamos, portanto, que quando esse percurso é valorizado o aluno passa a aprender a álgebra de forma significativa, em que ele deixa de olhar e manipular os símbolos para olhar por meio dos símbolos, compreendendo o significado de cada símbolo, passando a ter um pensamento com compreensão.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, J. R. **Problemas propostos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita: um estudo exploratório nos livros didáticos de matemática do 7º ano do Ensino Fundamental**. Dissertação de mestrado em Educação Matemática e Tecnológica. UFPE. Recife, 2011.

ALMEIDA, J. R.; CÂMARA, M. Análise dos problemas propostos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau nos livros didáticos de matemática. In: **Boletim GEPEM**, (Online), n. 64, Rio de Janeiro, 2014a.

______________________________. Pensamento algébrico e formação inicial de professores de matemática. In: **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana,** (Online), vol. 5, n. 2, Recife, 2014b.

ANDRADE, L. S.; BECHER, E. L. As representações semióticas e suas contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico. In: **Anais da XIII Conferência Iteramericana de Educação Matemática.** Recife, 2011.

ARAÚJO, E. A. **Ensino de álgebra e formação de professores**. In: Educação Matemática Pesquisa (Online), v. 10, n. 2, São Paulo, 2008.

ARCAVI, A. El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In: **Conferência plenária no encontro de investigação em educação matemática.** Caminha, Portugal, 2005. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-bibliografia.htm. Acesso em 23/07/2014.

BECHER, E. L.; GROENWALD, C. L. O. Características do pensamento algébrico de estudantes do 1º ano do Ensino Médio. In: **Anais do X Encontro Gaúcho de Educação Matemática**, Ijuí-RS, 2009.

BLANTON, M. L.; KAPUT,J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. In: **Journal for Rescarch in Mathematics Education**. v. 36, n. 5. 2005.

BIANCHINI, B. L.; MACHADO, S. D. A. A dialética entre pensamento e simbolismo algébricos. In: **Educação Matemática Pesquisa** (Online), São Paulo, v. 12, n. 2. 2010.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P.; (Org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza Gomide, São Paulo, Edgar Blücher, 1974.

BORRALHO, A.; BARBOSA, E. Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico. In: **Anais da XIII Conferência Iteramericana de Educação Matemática**, Recife, 2011.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC, SEF. 1998.

_______. **Base Nacional Curricular Comum**. 2ª versão revista. Ministério da Educação, Brasília, 2016.

BRITO LIMA, A. P. A. **Desenvolvimento da representação de igualdade em crianças de 1ª a 6ª série do 1º grau**. Dissertação de mestrado em Psicologia Cognitiva, UFPE, Recife, 1996.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. In: **Recherches en Didactique des Mathématiques**, vol. 7, nº 2, Grenoble, 1986.

BÚRIGO, E. Z. Tradições Modernas: reconfigurações da matemática escolar nos anos 1960. In: **Boletim de Educação Matemática – BOLEMA** (Online), v. 23, n. 35B. Rio Claro – SP, 2010.

CÂMARA, M. Desenvolvimento do pensamento algébrico: o que estamos fazendo em nossas salas de aulas? In: **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**, Salvador, 2010.

CÂMARA, M.; OLIVEIRA, I. Estratégias utilizadas por alunos de 6º ano na resolução de problemas de estrutura algébrica. In: **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática**, Salvador, 2010.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. In: **Quadrante**, v. VXI, n. 2. Portugal, 2007.

CARRAHER, D. W.; MARTINEZ, M. V.; SCHLIEMANN, A. Early algebra and mathematical generalization. In: **ZDM Mathematics Education.** DOI, v. 40, p, 3-22, 2008.

CASTRO, M. R. Educação algébrica e resolução de problemas. In: **Boletim Salto para o Futuro**, TV Escola, 2003.

CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M. Pensamento Algébrico ao longo do Ensino Básico em Portugal. In: **Boletim de Educação Matemática – BOLEMA** (Online), v. 24, n. 38, Rio Claro – SP, 2011.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. In: SCHLIEMANN, A. D. Et al. **Estudos em psicologia da educação matemática.** Recife: Editora Universitária da UFPE, 1997.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003.

_________ **Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

FIORENTINI, D.; MIORIN, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica Elementar. In: **Pro-Posições**. Vol. 4, nº 1[10]. 1993.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: **Seminário Luso-Brasileiro de Investigações Matemáticas no Currículo e na Formação de Professores**. Lisboa, 2005. Disponível em: http://www.educ.fc.pt/docentes/jponte/temporario/SEM-LB/Fiorentini-Fernandes- Cristovao2.doc. Acesso em: 02 de novembro de 2010.

GAMA, C. PAL Tool: uma ferramenta cognitiva para organização e representação de problemas algébricos. In: **XIV Simpósio Brasileiro de Informática na Educação** – NCE – IM/UFRJ, Rio de Janeiro. 2003.

GODINO, J. D.; AKÉ, L. P.; GONZATO, M.; WILHELMI, M. R. Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar: implicaciones para la formación de maestros. In: **Enseñanza de las Ciencias**, (Online), v. 32, n. 1. Espanha, 2014.

GRECCO, E. C. S. **O uso de padrões e sequências: uma proposta de abordagem para introdução à álgebra para alunos de 7º ano do Ensino Fundamental.** Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2008.

KAPUT, J. Teaching and learning a new algebra. In FENNEMA, E. ROMBERG, T.A. **(Eds.), Mathematics classrooms that promote understanding.** Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. 1999.

_________. What is algebra? What is algebraic reasoning? In: KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.), **Algebra in the Early Grades**. Lawrence Erlbaum Associates. New York, 2008.

KAPUT, J. BLANTON, M. L.; MORENO, Algebra from a symbolization point of view. In: KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.), **Algebra in the Early Grades**. Lawrence Erlbaum Associates. New York, 2008.

KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.), **Algebra in the Early Grades**. Lawrence Erlbaum Associates. New York, 2008.

KERN, N. B. **Uma introdução ao pensamento algébrico através de relações funcionais**. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2008.

KIERAN, C. The Learning and Teaching of school Algebra. In: GROWS, D. A. (ed). **Handbook of Resarch on Mathematics Teaching and learning**. New York: Macmillan, 1992.

_________. The changing face of school algebra. In: ALSINA,C. Et al. (Eds.), **ICME 8: Selected Lectures**. Seville: S. A. E. M. Thales. 1996.

_________. The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. In: STACEY, K. Et al. (Eds). **The Future of teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study** (pp. 21-34). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004.

_________. Developing algebraic reasoning: Th e role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. In: **Quadrante**. Vol. XVI, nº 1, Portugal, 2007.

LESSA, M. M. L. **Balança de dois pratos e problemas verbais como ambientes didáticos para iniciação à álgebra: um estudo comparativo**. Dissertação de mestrado em Psicologia Cognitiva, UFPE, Recife, 1996.

_____________. **Aprender álgebra em sala de aula: contribuição de uma sequência didática.** Tese de doutorado em Psicologia Cognitiva, UFPE, Recife, 2005.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. Tese (Doctor of Philosophy) – School of Education, University of Nothingam, Nothingam, UK: 1992.

_________. Campos semânticos y el problema del significado em álgebra. In**: UNO – Didáctica de las Matemáticas**. nº 1, Barcelona, 1994ª.

_________. O modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. In: **Dynamis**. nº 1, v. 7, Blumenau, 1994b.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas. Papirus, 1997.

MARCHAND, P.; BEDNARZ, N. L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. In**: Bulletin AMQ**, Vol. XXXIX, N°4. Québec: AMQ, 1999.

__________________________. Développement de l'algèbre dans un context de resolution de problems. In**: Bulletin AMQ**, Vol. XL, N°4. Québec: AMQ, 2000.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Álgebra ou geometria: para onde pende o pendulo. In: **Pro-Posições**, v. 3, n. 1, 1992

MODANEZ, L. **Das sequências de padrões geométricos à introdução ao pensamento algébrico.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2003.

MORETTI, M. T. O papel dos registros de representação na aprendizagem da matemática. In: **Contrapontos,** Ano 2, n. 6, Itajaí, 2002.

NOGUEIRA, D. M. C. R. **Desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 10º ano no tema funções através da resolução de problemas com recurso às TIC.** Dissertação de Mestrado em Ciências da Educação. Universidade do Minho. Portugal, 2010.

OLIVEIRA, I.; CÂMARA, M. Problemas de estrutura algébrica: uma análise comparativa entre as estratégias utilizadas no Brasil e no Québec. In: **Anais da XIII Conferência Iteramericana de Educação Matemática**, Recife, 2011.

PEREIRA, G. N.; BRAGA, M. N. S. Investigação matemática e a construção do pensamento algébrico: uma metodologia de ensino a compreensão de incógnita. In: **Revista Eventos Pedagógicos**. Mato Grosso, UEMT, v. 3, nº 3, p. 320-340, 2012.

PERNAMBUCO, **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco: Matemática**. Secretaria de Educação, Recife: SE, 2012.

PONTE, J. P.; VELEZ, I. Representações em tarefas algébricas no 2º ano de escolaridade. In: **Boletim GEPEM**. Rio de Janeiro-RJ, Nº 59, p. 53-68, 2011.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. In: **Educação e Matemática**, Lisboa - Portugal. 2008.

RADFORD, L. Algebra as Tekhne: Artefacts, Symbols and, Eqaatiorcs in the Classroom. In: **Mediterranean Journal for Research in Mathernatics Education**. Vol. 1.(1), p. 31-56, 2002.

___________. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In: **North America Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education – PME**. Bergen University College. v. 1, 2006.

___________. Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In: Anais do **Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.** Lyon – França, 2009. Disponível em: <www.inrp.fr/editions/cerme6> Acesso em 18/06/2015.

___________. **Cognição matemática: história, antropologia e epistemologia**. Livraria da Física. São Paulo, 2011a.

___________. Antes que outras incógnitas fossem inventadas: investigações didáticas acerca dos métodos e problemas da álgebra italiana medieval. In: RADFORD, L. **Cognição matemática: história, antropologia e epistemologia**. Livraria da Física. São Paulo, 2011b.

___________. Grade 2 students’ non-symbolic algebraic thinking. In: CAI, J.; KNUTH, E. (Eds). **A global dialogue from multiple perspectives**. Editora Springer. Berlin, 2011c.

RUIZ, N.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. In: MORENO, M.M.; ESTRADA, A.; CARRILLO, J.; SIERRA, T.A. (Eds.), **Investigación en Educación Matemática.** XIV (pp. 545-556). Lleida: SEIEM. 2010.

SANTOS JUNIOR, C. P. **Estratégias utilizadas por alunos do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha**. Dissertação de mestrado em Educação Matemática e Tecnológica – UFPE, Recife. 2013.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W.; BRIZUELA, B. M. **Bringing out the algebraic character of arithmetic: from children’s ideas to classroom practice. studies in mathematical thinking and learning series**. Lawrence Erlbaum Associates, 2006.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D.; BRIZUELA, B. M. Algebra in elementary school. In: **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. especial, pp 109 – 124, 2012

SILVA, A. Z. **Pensamento algébrico e equações no Ensino Fundamental: uma contribuição para o caderno do professor de matemática do oitavo ano.** Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2012.

SILVA, D. P.; SAVIOLI, A. M. P. D. Caracterizações do pensamento algébrico em tarefas realizadas por estudantes do Ensino Fundamental I. In: **Revista Eletrônica de Educação**. São Carlos, SP. UFSCar, v. 6, nº 1, 2012.

______________________________ manifestação do pensamento algébrico em resoluções de tarefas por estudantes do ensino fundamental I. In: **Revista Paranaense de Educação Matemática**. Campo Mourão, PR, v. 3, n. 5, 2014.

SILVA, E. A. **Introdução do pensamento algébrico para alunos do EJA: uma proposta de ensino.** Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2007.

SMITH, Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In: KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.), **Algebra in the Early Grades**. Lawrence Erlbaum Associates. New York, 2008.

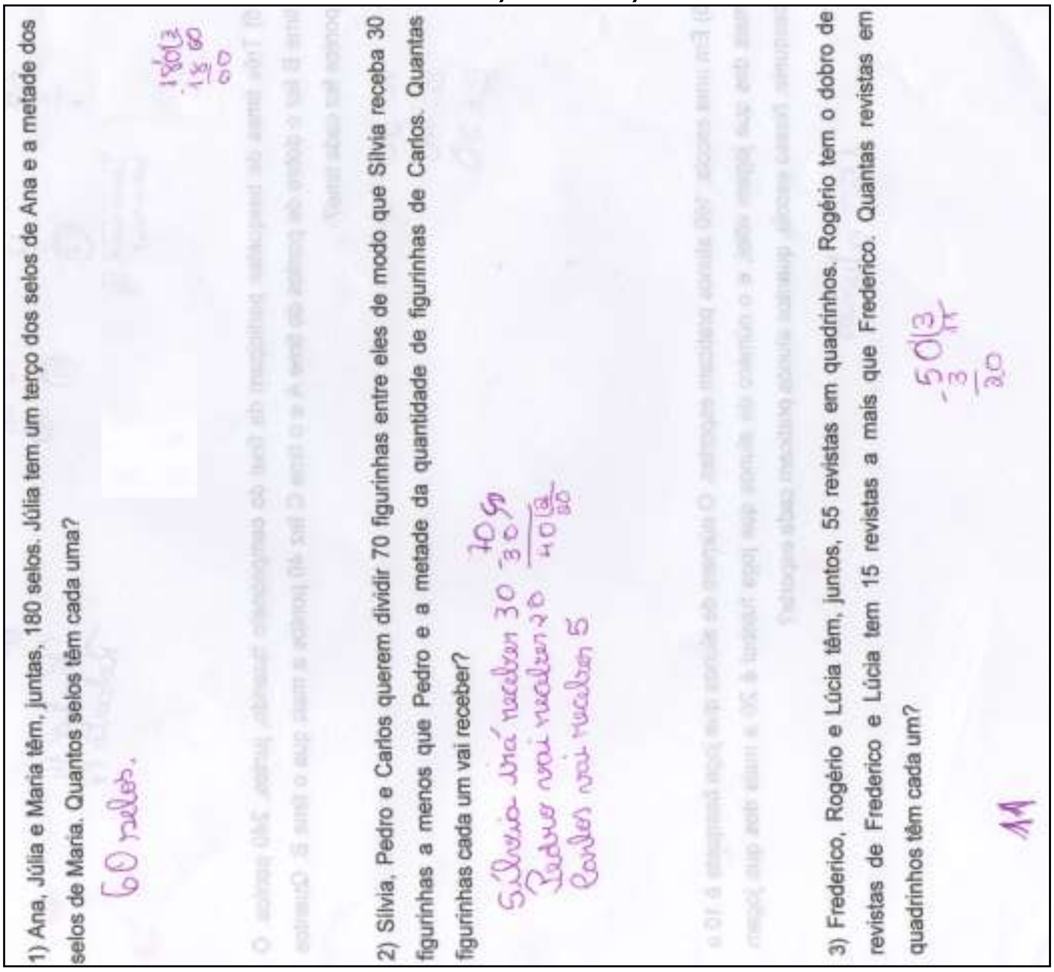
USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P.; (Org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

WYKROTA, J. L. M. **Aspectos emocionais de procedimentos de ensino de professores de ciências do ensino médio**. Tese de doutorado em Educação. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2007.

VERMERSCH, P. **L'entretien d'explicitation en formation initiale et en formation continuale.** Paris: ESF, 1994.

APÊNDICE

Protocolo de Isabel, 8° ano, nível 0


1) Ana, Júlia e Maria têm, juntas, 180 selos. Júlia tem um terço dos selos de Ana e a metade dos selos de Maria. Quantos selos têm cada uma?

60 selos.

180 | 3
-18 60
00

2) Sílvia, Pedro e Carlos querem dividir 70 figurinhas entre eles de modo que Sílvia receba 30 figurinhas a menos que Pedro e a metade da quantidade de figurinhas de Carlos. Quantas figurinhas cada um vai receber?

Sílvia irá receber 30
Pedro vai receber 20
Carlos vai receber 5

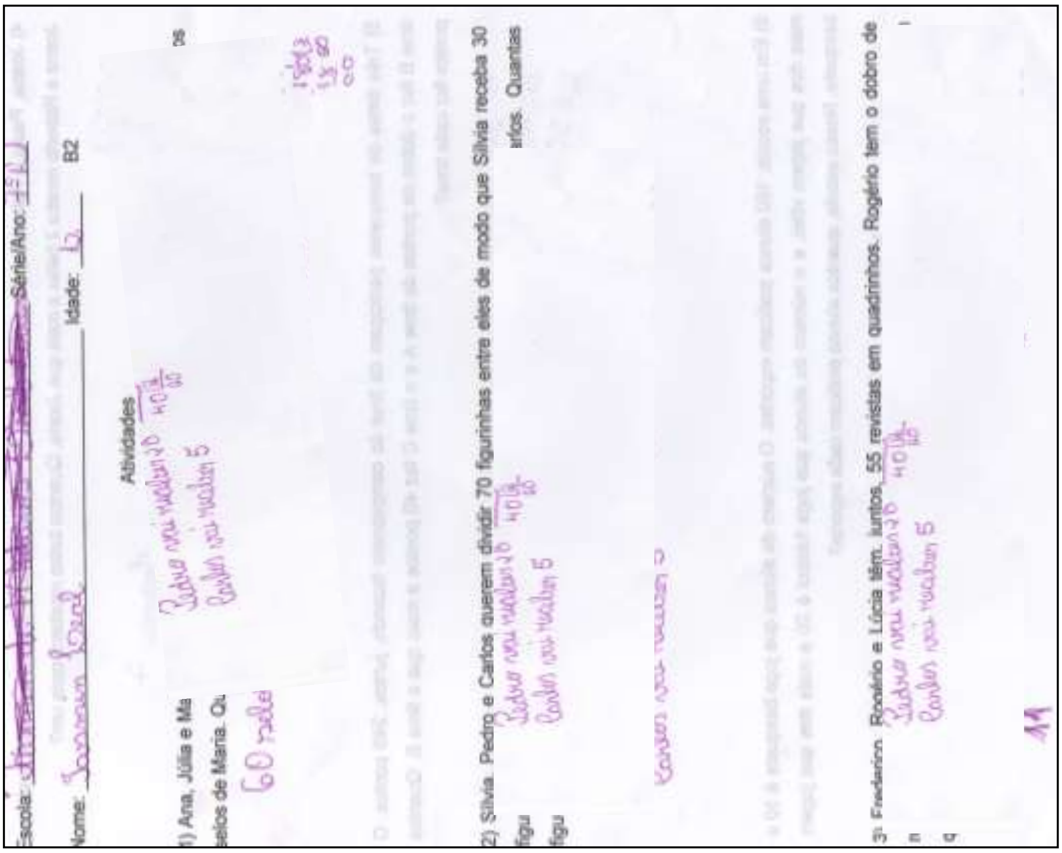
70
-30
40

40 | 2
20

3) Frederico, Rogério e Lúcia têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Rogério tem o dobro de revistas de Frederico e Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico. Quantas revistas em quadrinhos têm cada um?

50 | 3
-3
20

11


Escola: [illegible] Série/Ano: [illegible]

Nome: [illegible] Idade: 12 B2

Atividades

Pedro vai receber 20
Carlos vai receber 5

1) Ana, Júlia e Ma...
selos de Maria. Qu...

60 selos

2) Sílvia, Pedro e Carlos querem dividir 70 figurinhas entre eles de modo que Sílvia receba 30 ...

Pedro vai receber 20
Carlos vai receber 5

3) Frederico, Rogério e Lúcia têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Rogério tem o dobro de

Pedro vai receber 20
Carlos vai receber 5

11

Transcrição da entrevista com Isabel

P: Olá Isabel, tudo bom? A ideia é você me explicar como chegou nas respostas dos problemas. Por exemplo, esse problema aqui, como foi que você fez?

Isabel: Eu peguei esse aqui (apontando para os 180) e dividi por três, que deu 60. Então cada um tem 60.

P: Por que 180 dividido por 3?

Isabel: Porque era três pessoas que tinham selos.

P: Então cada um fica com 60 selos?

Isabel: Isso, 60 para cada pessoa.

P: Mas por que 60 para cada pessoa?

Isabel: Porque são 180 selos para três pessoas, então 180 dividido por 3 dá 60.

P: Certo.

P: E esse segundo, me explica como você fez.

Isabel: Esse segundo eu fiz 70, que era o número total, menos 30, que era a quantidade de Sílvia, e ficou 40, que sobrou, dividido por 2, que deu 20 para cada pessoa, e para ele (apontando para Carlos) deu 5.

P: E de onde vem o 5? Você escolheu ao acaso?

Isabel: Acho que foi.

P: Por que você fez 70 menos 30, que deu 40, foi isso?

Isabel: Foi.

P: E depois?

Isabel: Só que aqui (apontando para Carlos) era para ser 20.

P: No caso Carlos ia receber 20? Por quê?

Isabel: Porque 20 mais 20 da 40, mais 30 dá 70, que é o total.

P: Certo. 20 porque 40 dividido por 2 é igual a 20, é isso?

Isabel: Não. Por que era metade que ele ia receber de Sílvia.

P: Mas Sílvia recebe 30.

Isabel: Então aqui seria 15.

P: Por que é a metade de 30?

Isabel: Isso.

P: Certo. E esse terceiro?

Isabel: Eu dividi 50 por 3.

P: Então é 11 por conta dessa divisão?

Isabel: É.

P: Mas por que dividisse por 3?

Isabel: Por que tinha três pessoas.

P: Certo. Então se tivesse 4 pessoas você dividiria por quanto?

Isabel: Por 4.

P: Certo. E esse quarto?

Isabel: Eu peguei o número de Joana, eu peguei 12. Aqui seria 13 né?

P: Não sei. Por que você fez essa divisão, 37 dividido por 3?

Isabel: Porque era três pessoas que iria receber.

P: Então você dividiu por 3 por que são três pessoas?

Isabel: É.

P: Então deu 12 para cada pessoa?

Isabel: Só que aqui era para ser 13.

P: Por quê?

Isabel: Por que 37 dividido por 3 dá 13, e sobra 1, então cada um iria receber 13 balas e sobraria uma.

P: Certo. E o quinto e sexto, por que você não fez?

Isabel: Porque eu não entendi.

P: Ok. Muito obrigado.

Protocolo de Ana, 7º ano, nível 0

1) Ana, Júlia e Maria têm, juntas, 180 selos. Júlia tem um terço dos selos de Ana e a metade dos selos de Maria. Quantos selos têm cada uma? cada um tem 80 selos 360 selos

-180 / 80 / 700

-180 / 180 / 000 / 080

2) Sílvia, Pedro e Carlos querem dividir 70 figurinhas entre eles de modo que Sílvia receba 30 figurinhas a menos que Pedro e a metade da quantidade de figurinhas de Carlos. Quantas figurinhas cada um vai receber? 90 cada uma vai receber 90

$+70$ / 30 / 90

3) Frederico, Rogério e Lúcia têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Rogério tem o dobro de revistas de Frederico e Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico. Quantas revistas em quadrinhos têm cada um? 40 revistas não recebeu

-55 / 15 / 40

4) Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana e Roberto receba 2 balas a mais que Joana. Quantas balas receberá cada um? 44 cada um

$+37$ / 5 / 2 / 44

5) Três times de basquetes participam da final do campeonato fazendo, juntos, 240 pontos. O time B fez o dobro de pontos do time A e o time C fez 40 pontos a mais que o time B. Quantos pontos fez cada time? 720 cada time 880 cada um

240 / 240 / 240 / 880

6) Em uma escola, 160 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga basquete é 10 a mais dos que jogam vôlei, e o número de alunos que joga futebol é 20 a mais dos que jogam basquete. Nessa escola, quantos alunos praticam cada esporte? 190 jogaram no futebol de cada esporte

$+160$ / 10 / 20 / 190

Transcrição da entrevista com Ana

P: Olá Ana, tudo Bom? A ideia é você explicar como chegou nas respostas dos problemas. Por exemplo, esse primeiro, como foi que você fez?

Ana: Primeiro eu tentei diminuir 80 de 180. Depois eu peguei 180 menos 180, que deu zero. E depois eu botei mais 180, que deu 180. Então eu coloquei 180 mais 180, que deu 360. Então eu coloquei 360 selos.

P: Certo. Mas você colocou também que cada um tem 80 selos, não foi?

Ana: Foi. Só que depois eu coloquei 360 selos.

P: Mas por que 360 selos?

Ana: Porque foi o resultado dessa conta aqui (apontando para os cálculos).

P: Então cada um vai receber 80 ou 360 selos?

Ana: Acho que 360.

P: Mas por que cada um vai receber 360 selos?

Ana: Porque é o resultado dessa conta (apontando para os cálculos).

P: Certo. E esse segundo, como você fez?

Ana: Esse segundo eu coloquei 70 mais 30, que deu 90.

P: Nesse caso cada um vai receber 90 figurinhas, é isso?

Ana: É.

P: Você somou 70 mais 30 por que é esse 70 que tem aqui (apontando para os 70 no problema) e esse 30 (apontando para os 30 no problema)?

Ana: É. Eu somei e deu 90.

P: Então cada um recebe 90 figurinhas?

Ana: É.

P: E esse terceiro, como você fez?

Ana: Eu fiz 55 menos 15, que deu 40. Depois eu coloquei mais 55, que deu 15.

P: Nesse caso cada um recebe 40 revistas?

Ana: É.

P: Que é 55 menos 15?

Ana: Isso.

P: E esse quarto, como você chegou na resposta?

Ana: Eu coloquei 37 mais 5 mais 2, e somei 7 mais 5 mais 2, que deu 14. Eu coloquei o 4 aqui (apontando para o 4 abaixo do 2 nos cálculos) e o 1 aqui (apontando para o 1 sobre o 3 nos cálculos), e somei 3 mais 1, que deu 4. Então deu no total 44.

P: Então cada um vai receber 44 balas?

Ana: É.

P: Certo. No caso, você fez a soma de 37 mais 5 mais 2?

Ana: Isso.

P: Mas por que dessa soma?

Ana: Por que aqui tem 37, aqui tem 5 e aqui tem 2 (apontando para o problema).

P: Então você pegou esses valores do problema e somou?

Ana: Foi.

P: Certo. E esse quinto, como você fez?

Ana: Esse aqui eu fiz duas contas. Eu coloquei 240 mais 240 mais 240, que deu 720.

P: Certo.

Ana: Então eu coloquei aqui (apontando para os cálculos). Na outra eu somei 720 mais 240, que deu 880.

P: Nesse caso você somou três vezes o 240?

Ana: Foi. Que deu 720.

P: Você lembra por que fez essa conta?

Ana: Porque aqui colocou duas vezes, B e B. Para saber quantos negócios cada um ia receber.

P: Ok. E esse último, como você fez?

Ana: Esse eu coloquei 160 mais 10 mais 20, que deu 190. Então eu coloquei aqui que 190 jogaram em cada esporte.

P: Então o resultado da soma que você fez é a resposta?

Ana: Isso.

P: Então o número de alunos que jogam futebol é 190?

Ana: É.

P: E qual é o número de alunos que jogam basquete e vôlei?

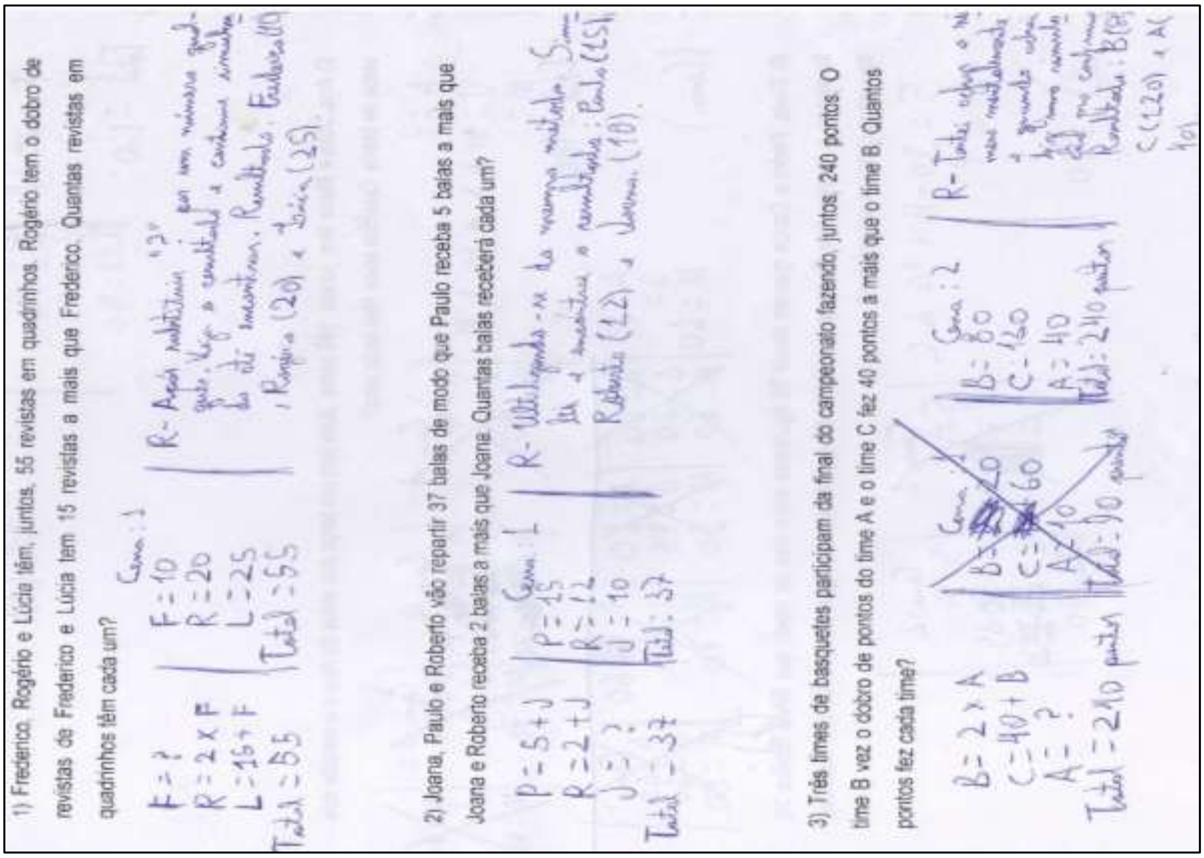
Ana: 190 também.

P: Por quê?

Ana: Porque é o resultado dessa conta (apontando para os cálculos).

P: ok. Muito obrigado.

Protocolo de Caio, 6º ano, nível 1



1) Frederico, Rogério e Lúcia têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Rogério tem o dobro de revistas de Frederico e Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico. Quantas revistas em quadrinhos têm cada um?

F = ?
R = 2 x F
L = 15 + F
Total = 55

Cons. 1
F = 10
R = 20
L = 25
Total = 55

R- Após substituir "?" por um número qualquer, vejo o resultado e continuo simulando até encontrar. Resultado: Frederico (10), Rogério (20) e Lúcia (25).

2) Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana e Roberto receba 2 balas a mais que Joana. Quantas balas receberá cada um?

P = 5 + J
R = 2 + J
J = ?
Total = 37

Cons. 1
P = 15
R = 12
J = 10
Total: 37

R- Utilizando-se do mesmo método, simulei e encontrei o resultado: Paulo (15), Roberto (12) e Joana (10).

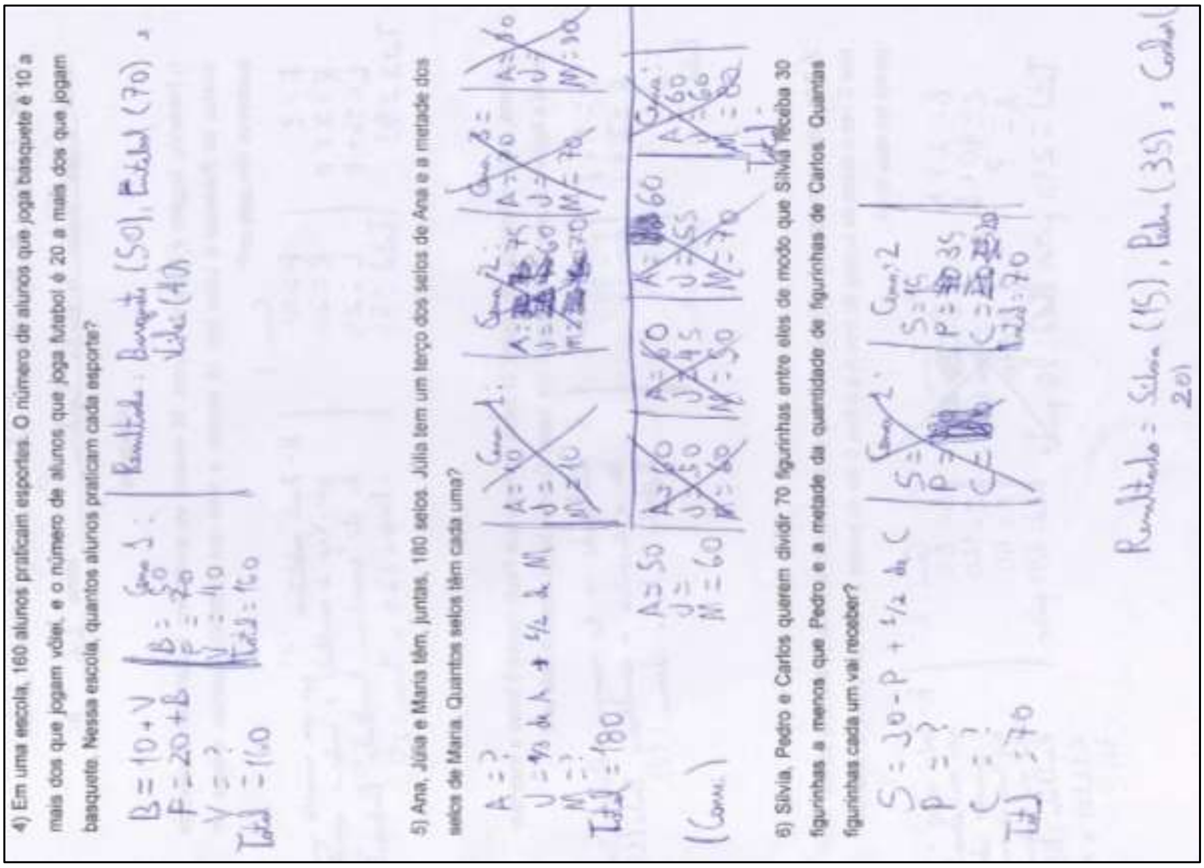
3) Três times de basquetes participam da final do campeonato fazendo, juntos, 240 pontos. O time B vez o dobro de pontos do time A e o time C fez 40 pontos a mais que o time B. Quantos pontos fez cada time?

B = 2 x A
C = 40 + B
A = ?
Total = 240 pontos

~~Cons. 1~~
~~B = 20~~
~~C = 60~~
~~A = 10~~
~~Total: 90 pontos~~

Cons. 2
B = 80
C = 120
A = 40
Total: 240 pontos

R- Tentei achar o número mentalmente e quando achei fiz mais cálculos para confirmar. Resultado: B (80), C (120) e A (40)



4) Em uma escola, 160 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga basquete é 10 a mais dos que jogam vôlei, e o número de alunos que joga futebol é 20 a mais dos que jogam basquete. Nessa escola, quantos alunos praticam cada esporte?

B = 10 + V
F = 20 + B
V = ?
Total = 160

Cons. 1:
B = 50
F = 70
V = 40
Total: 160

Resultado: Basquete (50), Futebol (70) e Vôlei (40)

5) Ana, Júlia e Maria têm, juntas, 180 selos. Júlia tem um terço dos selos de Ana e a metade dos selos de Maria. Quantos selos têm cada uma?

A = ?
J = 1/3 de A + 1/2 de M
M = ?
Total = 180

(Cons.)

A = 50
J = ?
M = 60

6) Sílvia, Pedro e Carlos querem dividir 70 figurinhas entre eles de modo que Sílvia receba 30 figurinhas a menos que Pedro e a metade da quantidade de figurinhas de Carlos. Quantas figurinhas cada um vai receber?

S = 30 - P + 1/2 de C
P = ?
C = ?
Total = 70

Cons. 2
S = 15
P = 35
C = 20
Total: 70

Resultado = Sílvia (15), Pedro (35) e Carlos (20)

Transcrição da entrevista com Caio

P: Olá Caio, tudo bom? A ideia é você explicar como chegou nas respostas dos problemas. Por exemplo, esse primeiro, como foi que você fez?

Caio: Foi um método meio de tentativa e erro, meio que camuflado, por que aqui simplesmente eu ficava substituindo o F por qualquer número e quanto mais se aproximava, enfim, era mais tentativa e erro mesmo.

P: Então Caio, você consegue fazer essas relações aqui (apontando para o modelo do aluno), por exemplo, isso daqui é o quê (apontando para o modelo do aluno)?

Caio: O R é Rogério, e Rogério é duas vezes o valor de Frederico.

P: Certo.

Caio: Então, vou fazendo essas relações e tentando achar.

P: E Lúcia é?

Caio: Lúcia é o valor de Frederico mais 15.

P: Certo. Então você foi substituindo o valor de Frederico até chegar no total, é isso?

Caio: Sim.

P: E qual era o total?

Caio: 55. Porque os três têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos.

P: Caio você lembra se começou com o 10 já, ou você tentou outros valores?

Caio: Pois é, eu dei sorte nessa hora, porque eu pensei, vou colocar o 10 porque é o valor que não vai dá números com vírgula, então eu coloquei o 10 e deu certo.

P: Mas poderia ser outro número?

Caio: Poderia.

P: E o segundo, foi parecido com o primeiro?

Caio: Foi. Na verdade, foi a mesma coisa. Eu vi a relação que tinha, e fui tentado colocar, e acabou que foi a mesma coisa. Eu coloquei 10, e era o valor.

P: Deu certo?

Caio: Foi.

P: E o terceiro, você lembra como fez?

Caio: Esse daqui dá para ver bem que é uma tentativa e erro, porque eu tentei a primeira vez e não consegui. Eu tentei com 10 de novo, que deu 90. Então eu pensei: de 90 para 240 tem que aumentar quanto? Que operação eu tenho que fazer? Então eu tentei com 40 e deu certo.

P: Você escreve aqui que tentou mentalmente, me explica como você pensou.

Caio: Eu pensei, quando eu tentei com 10 o resultado deu 90, que é um valor distante dos 240. Então eu pensei qual o número que poderia dá os 240, e tentei o 40.

P: Certo. E o quarto, você também acertou de primeira?

Caio: Sim. Eu substituí e fiz a relação, e no resultado final deu.

P: Como foi que você chegou no B igual a 10 mais V e o F igual a 20 mais B?

Caio: Só interpretei o que estava no enunciado. Porque aqui o número de alunos que joga basquete é 10 a mais dos que jogam vôlei, então eu coloquei aqui (apontando para o modelo), que 10 mais V, ou seja, 10 alunos a mais que vôlei para descobrir os de basquete, então eu fiz a relação.

P: Certo. E o F?

Caio: O F eu interpretei também o enunciado. Porque o número de alunos que jogam futebol é 20 a mais dos que jogam basquete, então F é igual a 20 mais B, que é o número dos que jogam basquete.

P: E depois você foi tentando? Começasse primeiro pelo número de vôlei?

Caio: Isso. Eu fui fazendo mentalmente, então eu vi que 40 podia dá certo, coloquei 40 e fiz os cálculos, somei tudo e deu o resultado.

P: Como foi que você chegou a B igual a 50?

Caio: Como eu tinha 40, que era o número de vôlei, e como o número de basquete era vôlei, que no caso era 40, mais 10, então deu 50. Então eu coloquei 50 aqui, que é o número de B.

P: E como você chegou em F igual a 70?

Caio: F igual a 70 é porque o número de alunos que jogavam basquete era 50, que eu já tinha feito, mais 20, então o resultado deu 70, que foi 50 mais 20.

P: Então futebol é 70 por que é o número de basquete, que foi 50, mais 20?

Caio: Isso.

P: E o quinto, você não conseguiu chegar no final?

Caio: Não consegui chegar no final.

P: Tentasse várias vezes?

Caio: Muitas. E no final vi que não tinha condição.

P: Mas era o mesmo método que você estava tentando nos outros?

Caio: Era o mesmo método.

P: Você acha que não conseguiu por quê?

Caio: Não sei. É que eu não sei se era porque era muito complexo, porque usava um terço, metade. Então mudou muito. O modo de calcular acabou ficando meio cansativo.

P: No caso você achou esse mais difícil?

Caio: É, achei mais difícil.

P: E o sexto? Você fez como?

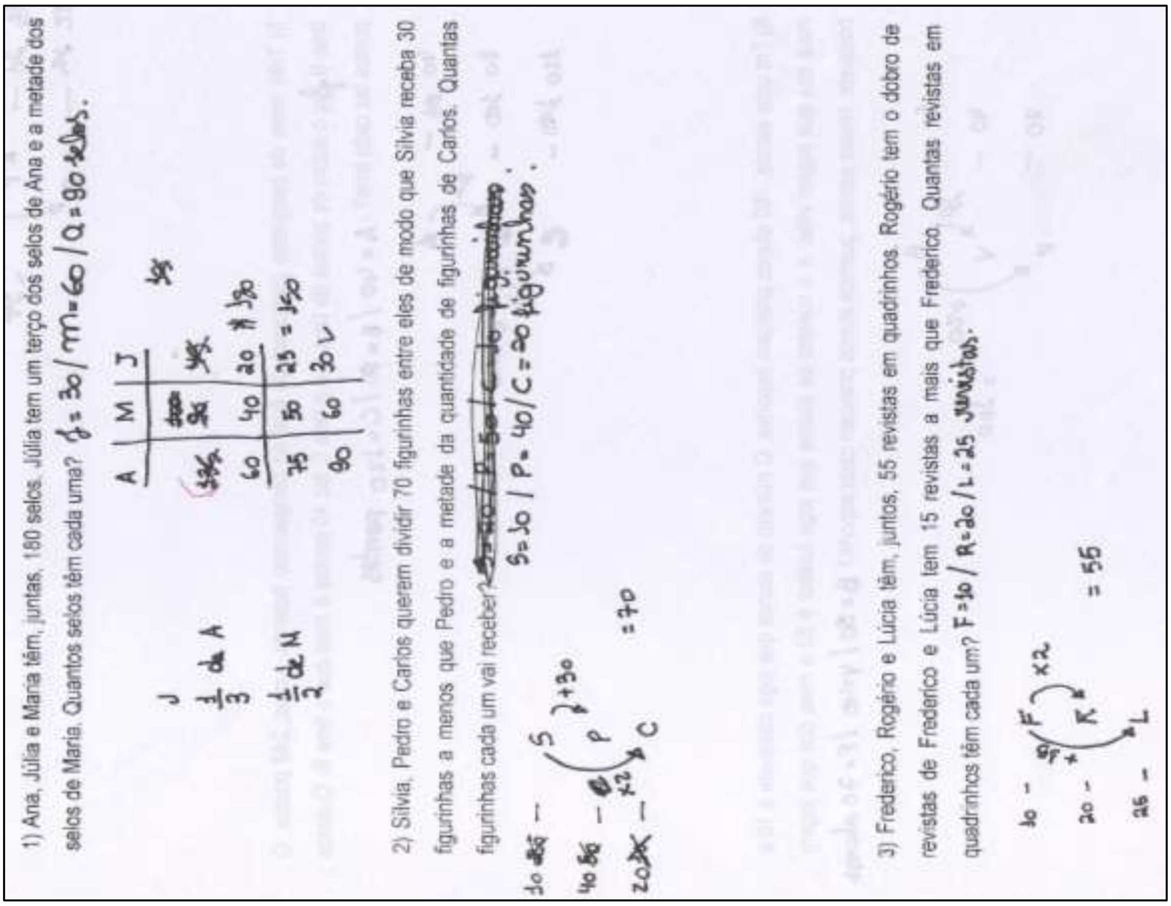
Caio: O sexto eu achei mais fácil, por que não usava tanto coisa de fração, então só tinha muita fração no quinto. Eu fiz do mesmo método, que foi associar aqui (apontando para o modelo), e substituir o número que está faltando por qualquer valor e depois fazer os cálculos.

P: Certo. Então você sempre que está tentando você vai substituindo essa interrogação?

Caio: sim.

P: Certo. Muito obrigado.

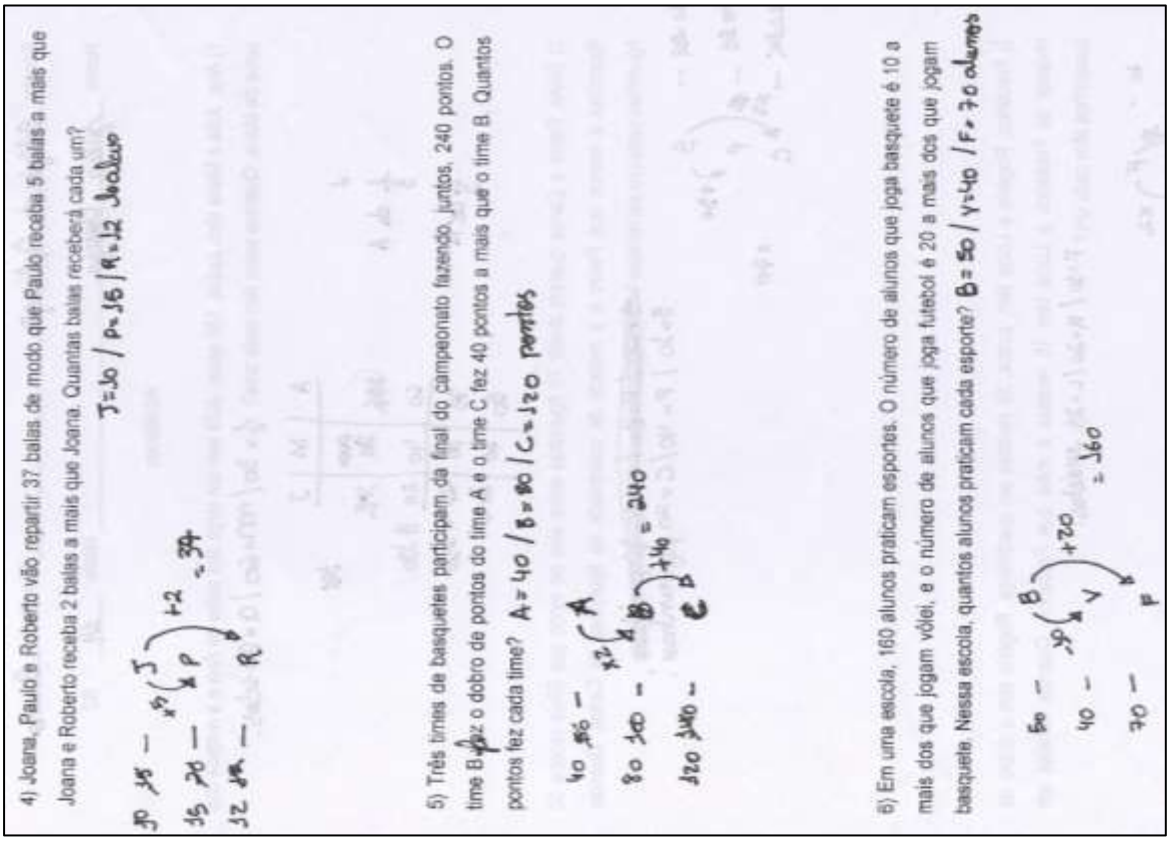
Protocolo de Carol, 9º ano, nível 1



1) Ana, Júlia e Maria têm, juntas, 180 selos. Júlia tem um terço dos selos de Ana e a metade dos selos de Maria. Quantos selos têm cada uma? J = 30 / M = 60 / A = 90 selos.

2) Sílvia, Pedro e Carlos querem dividir 70 figurinhas entre eles de modo que Sílvia receba 30 figurinhas a menos que Pedro e a metade da quantidade de figurinhas de Carlos. Quantas figurinhas cada um vai receber? S = 10 / P = 40 / C = 20 figurinhas.

3) Frederico, Rogério e Lúcia têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Rogério tem o dobro de revistas de Frederico e Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico. Quantas revistas em quadrinhos têm cada um? F = 10 / R = 20 / L = 25 revistas.



4) Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana e Roberto receba 2 balas a mais que Joana. Quantas balas receberá cada um? J = 10 / P = 15 / R = 12 balas

5) Três times de basquetes participam da final do campeonato fazendo, juntos, 240 pontos. O time B faz o dobro de pontos do time A e o time C fez 40 pontos a mais que o time B. Quantos pontos fez cada time? A = 40 / B = 80 / C = 120 pontos

6) Em uma escola, 160 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga basquete é 10 a mais dos que jogam vôlei, e o número de alunos que joga futebol é 20 a mais dos que jogam basquete. Nessa escola, quantos alunos praticam cada esporte? B = 50 / V = 40 / F = 70 alunos

Transcrição da entrevista com Carol

P: Olá Carol, tudo bom? A ideia é você explicar como chegou nas respostas dos problemas. Por exemplo, esse primeiro, como foi que você fez?

Carol: Eu fui fazendo por estimativa, eu acho mais fácil. Eu ia começar fazendo por equação, só que eu ia me atrapalhando, então eu me estressei, e comecei a fazer por estimativa, é mais prático. Eu fiz um esquema em todos.

P: Certo. Esse primeiro, como foi que você chegou na resposta, você lembra como fez?

Carol: Eu percebi que Júlia tinha um terço dos selos de Ana e metade dos selos de Maria. Então primeiro eu dividi o 180 por 2, e considerei que era a quantidade de selos de Ana, só que percebi que estava errado, então depois eu saí voltando, espera, calma. Fui fazendo do maior para o menor. Eu não lembro como eu fiz.

P: Essa primeira tentativa aqui (apontando para o início do modelo) você descartou e começou a fazer a partir daqui?

Carol: Foi.

P: Qual foi a primeira tentativa?

Carol: Eu coloquei o valor de Júlia?

P: Você escolheu qual valor para Júlia?

Carol: 20.

P: A partir desse valor você descobriu o valor de Ana e o de Maria?

Carol: Isso, só que quando eu somava não dava o valor total, que era 180.

P: Mas como foi que você descobriu o de Maria e o de Ana?

Carol: Eu sabia que Júlia tinha um terço de Ana, então eu multipliquei por 3 para achar a quantidade de Ana. E sabia que a metade de Maria, então eu multipliquei por 2.

P: Certo. E quando você somou não bateu com o resultado?

Carol: Isso.

P: Então você tentou com 25?

Carol: Foi. Mas também não bateu, então eu tentei com 30, que deu certo.

P: Por que você tentou 25 e depois 30?

Carol: Porque, eu não lembro. Acho que eu sempre tento de 5 em 5, então eu fui para o 25.

P: Mas, por exemplo, por que você não tentou com 15?

Carol: Por que eu achava que era um valor muito pequeno.

P: Certo. Aqui você somou e deu 150 (apontando para a penúltima tentativa)?

Carol: Foi.

P: Então você aumentou para 30 para ver se dava os 180?

Carol: Sim.

P: Você acha que não poderia ser um número menor? Ou você poderia tentar com um número menor?

Carol: Não.

P: Você acha que deveria ser um número maior que 25 por quê?

Carol: Para que desse os 180 selos, porque se fosse menor seria menos selos que o resultado.

P: Ok Carol. E esse segundo? Me explica esses esquemas que você fez?

Carol: Isso aqui é Silvia, Pedro e Carlos (apontando para S, P e C), e isso aqui é o total de figurinhas (apontando para o “= 70”).

P: Por isso você colocou igual a 70?

Carol: foi. Então, de Silvia para Pedro, Sílvia receberia 30 figurinhas a menos que Pedro, então eu sabia que, vamos supor, se Sílvia tem X, X mais 30 seria o valor de Pedro.

P: Por que ela recebe 30 a menos que Pedro, então Pedro receberia 30 a mais que ela?

Carol: Isso. Então eu fui fazendo isso também, e a metade de Carlos, então se ela tinha metade, então X vezes 2 seria igual a Carlos.

P: Por que Carlos seria o dobro de Sílvia, é isso?

Carol: Isso.

P: Certo. Carol, agora me explica como foi que você chegou nesses valores aqui?

Carol: Também por estimativa.

P: Primeiro você tentou com 20, foi isso?

Carol: Foi.

P: E, quando somou não bateu com o resultado?

Carol: É. Deu um número a mais, deu 80.

P: Por isso você tentou com 10?

Carol: Isso.

P: Vê, você tenta com 20, e deu 80, é isso que você está falando?

Carol: Isso.

P: Então, você diminui a quantidade para 10 para ver se dá 70?

Carol: Foi.

P: Não poderia aumentar, no caso? Você não tentaria com um número maior que esse?

Carol: Não. Se fosse maior sairia ainda mais dos 70.

P: Entendi. Então você diminuiu porque você sabe que tem que ser um número menor para dá 70, por que o valor que você encontrou primeiro foi maior?

Carol: Isso. E nos outros também foi a mesma coisa.

P: Esse terceiro Carol, você acertou na primeira tentativa, foi isso?

Carol: Foi.

P: Mas por quê? Você acha que é mais fácil, ou foi um valor que você escolheu e deu certo?

Carol: Foi meio um valor que veio na cabeça e eu coloquei.

P: Certo. Você não fez cálculo mental para chegar na resposta? Você colocou 10 e foi tentando?

Carol: Eu acho que depois que eu resolvi fazer por esses esquemas eu já comecei a fazer um pouco de cálculo mental.

P: Mas sempre escolhendo um valor primeiro?

Carol: Isso.

P: E esse quarto? A maneira que você fez é bem parecido com os outros.

Carol: É.

P: Você está utilizando o J para quê?

Carol: Para representar Joana, o P para Paulo e o R para Roberto.

P: Quando você faz nesse esquema a seta de J para R (apontando para a seta no modelo) é para dizer o quê?

Carol: Que Roberto tem 2 a mais que Joana.

P: Certo. E de J para P?

Carol: Que Paulo tem 5 bolinhas a mais que Joana.

P: Certo. Então você começou por 15?

Carol: Sim. Mas não deu, deu mais auto, então eu diminuí o valor.

P: Mas você diminuiu por quê?

Carol: Porque deu um número maior.

P: E se tivesse dado um número menor?

Carol: Eu tinha aumentado.

P: Certo. Aqui no quinto foi a mesma coisa?

Carol: Sim.

P: Mas ver, por que aqui no esquema do quarto as setas saem todas do J, de J para R e de J para P, mas aqui no esquema do quinto você tem de A para B e de B para C, por quê? Me explica.

Carol: É por que C não depende de A, não diretamente. Ele está dizendo que o B fez o dobro de pontos de A, então A vezes 2 é igual a B. E o time C fez 40 pontos a mais que o B, então C tem 40 pontos a mais que o B, mas ele não depende diretamente de A, por isso que eu fiz do B para o C.

P: E como foi que você chegou no resultado? Você escolheu 50 para A, é isso?

Carol: Isso. Só que deu um valor maior, por isso eu diminui.

P: Diminuiu para 40?

Carol: Isso.

P: Então quando você fez os cálculos deu certo?

Carol: Isso. Deu os 240.

P: Mas como é que você fez para ver se bate o valor, você faz mentalmente?

Carol: Eu faço quando coloco aqui (apontando para o modelo), quando eu vejo que não dá eu tento outro valor.

P: Sim. Mas você não tem aqui o valor, como é que você fez?

Carol: Eu fiz mentalmente, para ficar mais prático.

P: Em todas as questões você fez a conta mentalmente para verificar se bateu com o total?

Carol: É. Eu fiz assim para facilitar. Fiz o esquema para não me perder.

P: E o sexto?

Carol: Também a mesma coisa, só que foi de primeira, mas a mesma coisa.

P: Então são todos dependentes do basquete?

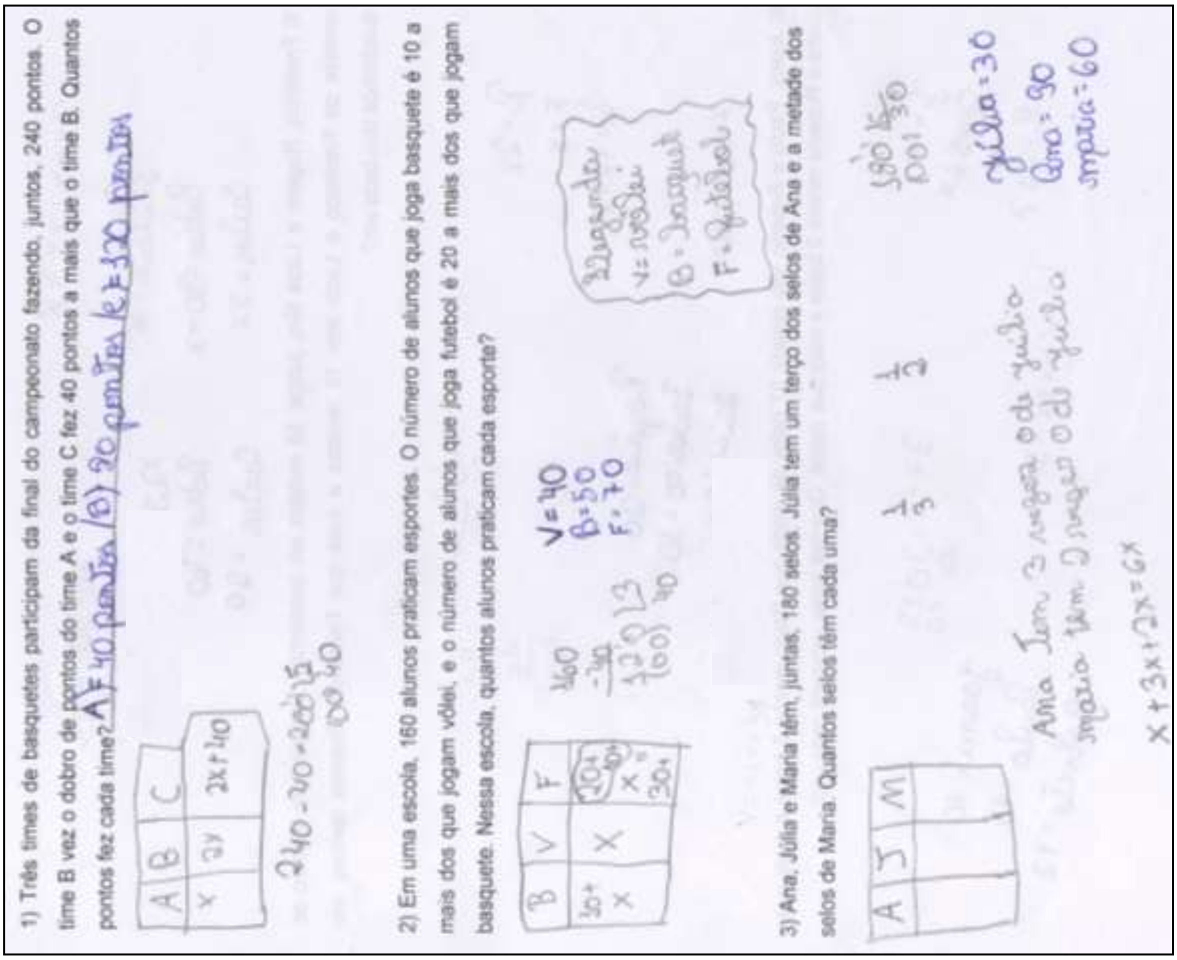
Carol: Isso.

P: Ok. E na primeira tentativa você acertou.

Carol: Isso.

P: Ok. Muito obrigado.

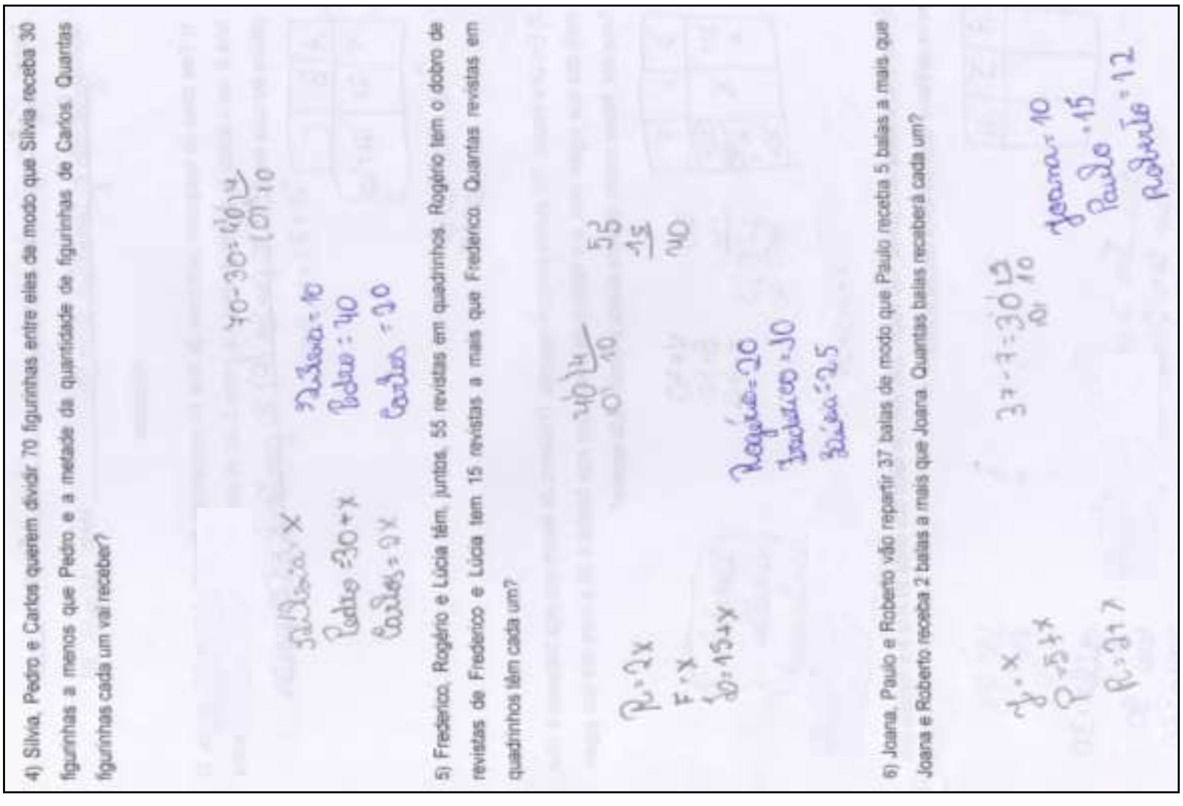
Protocolo de Paula, 6º ano, nível 2



1) Três times de basquetes participam da final do campeonato fazendo, juntos, 240 pontos. O time B fez o dobro de pontos do time A e o time C fez 40 pontos a mais que o time B. Quantos pontos fez cada time?

2) Em uma escola, 160 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga basquete é 10 a mais dos que jogam vôlei, e o número de alunos que joga futebol é 20 a mais dos que jogam basquete. Nessa escola, quantos alunos praticam cada esporte?

3) Ana, Júlia e Maria têm, juntas, 180 selos. Júlia tem um terço dos selos de Ana e a metade dos selos de Maria. Quantos selos têm cada uma?



4) Sílvia, Pedro e Carlos querem dividir 70 figurinhas entre eles de modo que Sílvia receba 30 figurinhas a menos que Pedro e a metade da quantidade de figurinhas de Carlos. Quantas figurinhas cada um vai receber?

5) Frederico, Rogério e Lúcia têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Rogério tem o dobro de revistas de Frederico e Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico. Quantas revistas em quadrinhos têm cada um?

6) Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana e Roberto receba 2 balas a mais que Joana. Quantas balas receberá cada um?

Transcrição da entrevista com Paula

P: Olá Paula, você pode me explicar como foi que você chegou na resposta desse primeiro problema?

Paula: Vê, aqui ele fala que eles fizeram juntos 240 pontos, ou seja, os 3 iguais a 240, e o time B fez o dobro de pontos do time A, e o time C fez 40 pontos a mais que o time B. Então, como o time A é o menor, podemos nos basear nele para fazer as coisas, ou seja, igual a X (se referindo ao time A).

P: Certo.

Paula: A é igual a X, o B é igual a quanto? A 2X, que é o dobro de X, e o C é igual a 2X, que é o B, mais 40.

P: Por que o C é?

Paula: 40 mais 2X de B, ou seja, 2X mais 40.

P: Por que o time B era 2X?

Paula: Isso.

P: Certo. E depois como foi que você chegou na resposta?

Paula: Eu tive que dividir. Então, eu peguei 240 e tirei esse 40 (apontando para os 40 a mais do time C) porque tinha somado para dá os 240.

P: Certo.

Paula: Por que isso é 240 (apontando para o modelo com os três times) e tirei (se referindo aos 40) e deu 200, para dividir por quanto X, um, dois, três, quatro, cinco X (apontando para a quantidade de X de cada time representada no modelo), ou seja, 240 dividido por 5, que dá 40, não, 200 dividido por 5, que dá 40, ou seja, esse aqui é 40 (apontando para o time A no modelo), esse aqui é 80 (apontando para o time B), que é 2X, 2 vezes 40, e esse aqui (apontando para o time C) é 80 mais 40, que fica 120. 120 mais 80, duzentos, mais 40, 240.

P: Certo, ok. E esse segundo, como foi que você fez?

Paula: (Tempo lendo o problema) Eu imaginei, usei a regrinha do X. Peguei o número menor (volta a lê o problema) ou seja, vôlei é o menor aqui. E o número de basquete é quanto?

P: Por isso você chamou vôlei de X?

Paula: Isso.

P: Certo.

Paula: O número de basquete é 10 a mais que X. E o número de futebol é 10 mais 10 mais X, por que isso aqui (apontando para o B no esquema) é 10 mais X, esse aqui (apontando para o F no esquema) é 20 mais 10 mais X (corrigindo o que tinha dito antes).

P: Certo.

Paula: Que deu 30.

P: Ficou 30 por que você somou os 10 mais 20?

Paula: Isso. Somei 10 mais 20, que é 30. Então é 30 mais X. Ele pergunta: quantos alunos praticam cada esporte? Como era 160, é a mesma coisa (se referindo à primeira questão) tiro 30, que fica 130, e tiro 10, que fica 120. 120 dividido por 3, que fica 40 para cada um. Esse aqui (apontando para o V) é 40. Esse aqui (apontando para o B) é 50. E esse aqui (apontando para o F) é 70. 70 mais 50, 120. 120 mais 40, 160.

P: Certo. Me explica melhor por que você tirou 40 aqui dos 160?

Paula: 30 mais 10, que dá 40.

P: Certo. E dividiu por 3 por quê?

Paula: Porque tenho 3X.

P: Certo. E esse terceiro?

Paula: Esse terceiro eu não fiz por essa regrinha. Fiz, só que não fiz, ao mesmo tempo.

P: Você fez o quadradinho, mas não preencheu. Por quê?

Paula: Eu não preenchi o quadradinho porque estava meio complicado. Esse daqui trabalhava com fração, foi o mais complicado. Deixa eu ver, Ana, Júlia e Maria tem juntas isso daqui (apontando para os 180). E Júlia tem um terço dos selos de Ana e a metade dos selos de Maria, ou seja, dá para perceber praticamente a mesma coisa, se ela (apontando para Júlia) tem um terço dos selos de Ana, Ana tem três vezes o de Júlia.

P: Entendi. Se Júlia tem um terço dos selos de Ana, significa dizer que Ana tem?

Paula: Três vezes o de Júlia.

P: Certo.

Paula: E, Júlia tem a metade dos de Maria, ou seja, Júlia é a menor, é o X. Então Ana é 3X, e Maria 2X.

P: Por isso você fez essa expressão? (Apontando para a expressão X + 2X + 3X = 6X).

Paula: Isso. X, 2X, 3X. Soma tudo fica 6X, ou seja, vou fazer isso daqui, dividir por 6X, que dá 30. Logo 30 é o X, ou seja, Júlia é o 30, Ana é 90 e Maria é 60. 60 mais 90, 150. 150 mais 30, 180.

P: Certo. E esse quarto, como foi que você fez?

Paula: (Depois de lê o problema). É a mesma coisa, a mesma regrinha, entendeu? Sílvia tem que receber 30 figurinhas a menos que Pedro, ou seja, Pedro é X mais 30, e a metade de figurinhas de Carlos, ou seja, Carlos é 2X.

P: Por que você está dizendo que Pedro tem X mais 30?

Paula: Ele tem X mais 30 porque aqui fala que de modo que Sílvia receba 30 figurinhas a menos que Pedro, ou seja, Pedro tem que receber 30 figurinhas a mais que Sílvia.

P: Como Sílvia recebe 30 a menos que Pedro...

Paula: E ela é a menor quantidade, ou seja, ela é X.

P: Certo. E Carlos tem 2X por quê?

Paula: Porque Sílvia tem a metade das figurinhas de Carlos.

P: Se Sílvia tem a metade de Carlos, então Carlos tem?

Paula: O dobro dela, que é 2X.

P: Certo.

Paula: Então eu somei tudo, que é 2X, X mais 30, pera aí, quantos X dá? 4X. Do começo. E 4X mais 30, por conta dos 30 de Pedro, ou seja, dos 70 eu tiro 30, que dá 40. 40 dividido por 4, por que é 4X, que dá 10. Sílvia é um X, então ela é 10, Pedro é 40 e Carlos é 20.

P: Certo.

Paula: Somando tudo dá 70.

P: Certo: E o quinto.

Paula: (Depois de lê o problema) é o mesmo processo. Se Rogério tem o dobro de Frederico, ele tem 2X, e se Lúcia tem 15 a mais que Frederico, então Lúcia tem X mais 15, e Rogério tem 2X.

P: Certo.

Paula: 2X, X mais 15, X. Quantos X tem aqui? Um, dois, três, quatro X. Um, dois, três, quatro, dá 4X, mais 15, ou seja, 55 revistas menos 15, porque sempre diminui antes de dividir. Menos 15 dá 40.

P: Menos 15 por que tem mais 15?

Paula: Isso.

P: Certo.

Paula: 40 dividido por 4 dá 10, ou seja, cada X tem 10. Aqui tem 10 (apontando para o X), aqui tem 20 (apontando para o 2X) e aqui tem 25 (apontando para o 15 + X). 25, 10 e 20. Somando tudo dá 55.

P: Para finalizar, como foi que você fez o sexto?

Paula: (depois de lê o problema) Joana foi o X, por que ela é o menor.

P: Certo.

Paula: Paulo é 5 mais X, e Roberto é 2 mais X. 5 mais 2 dá 7. 37 menos 7 dá 30 (apontando para a conta).

P: Certo. Você tira sempre esses valores (apontando para o 2 e o 5) para ficar só os X?

Paula: Isso.

P: Certo.

Paula: E 30 dividido por 3, que são os 3X, dá 10. Cada X é 10, ou seja, isso aqui é 10, esse aqui é 15 e esse aqui é 12 (apontando para o modelo). 12 mais 15, 27. 27 mais 10, 37.

P: Certo. Muito obrigado por participar da pesquisa.

Protocolo de Polly, 9° ano, nível 2

1) Frederico, Rogério e Lúcia têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Rogério tem o dobro de revistas de Frederico e Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico. Quantas revistas em quadrinhos têm cada um?

TOTAL → 55
ROGÉRIO → FREDERICO · 2
LÚCIA → FREDERICO + 15

55
− 15
40 |4
10

ROGÉRIO = 20 QUADRINHOS
FREDERICO = 10 QUADRINHOS
LÚCIA = 25 QUADRINHOS
RESPOSTA

40 → 2FREDERICO + ROGÉRIO
40 → 10 + 10 + 20

2) Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana e Roberto receba 2 balas a mais que Joana. Quantas balas receberá cada um?

TOTAL → 37
PAULO → JOANA + 5
ROBERTO → JOANA + 2

37
− 5
2
30 |3
10

PAULO → 10 + 5 (15)
ROBERTO → 10 + 2 (12)
JOANA → 10
RESPOSTA

3) Três times de basquetes participam da final do campeonato fazendo, juntos, 240 pontos. O time B vez o dobro de pontos do time A e o time C fez 40 pontos a mais que o time B. Quantos pontos fez cada time?

TOTAL → 240
TIME B → 2A
TIME C → B + 40
TIME A → 1/2 DE B

240
− 40
200 |5
40

80 (2A)
+ 120 (B + 40)
40 (1/2 DE B)
240

TIME A → 1/2 DE 80 (40)
TIME B → 2A (80)
TIME C → 80 + 40 (120)
RESPOSTA

4) Em uma escola, 160 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga basquete é 10 a mais dos que jogam vôlei, e o número de alunos que joga futebol é 20 a mais dos que jogam basquete. Nessa escola, quantos alunos praticam cada esporte?

TOTAL → 160
BASQUETE → VÔLEI + 10
FUTEBOL → BASQUETE + 20

160
− 10
150
− 20
120 |3
40

50 (VÔLEI + 10)
+ 70 (BASQUETE + 20)
120
+ 40 (VÔLEI)
160

BASQUETE → 40 + 10 (50)
FUTEBOL → 50 + 20 (70)
VÔLEI → 40
RESPOSTA

5) Ana, Júlia e Maria têm, juntas, 180 selos. Júlia tem um terço dos selos de Ana e a metade dos selos de Maria. Quantos selos têm cada uma?

180 {ANA, JÚLIA, MARIA

JÚLIA → 1/3 DE ANA E 1/2 DE MARIA

180 |3
60 |2
30

30 (JÚLIA)
+ 90 (JÚLIA · 3)
60 (JÚLIA · 2)
180

JÚLIA → 1/3 DE 90 (30)
ANA → 90
MARIA → 2 · 30 (60)
RESPOSTA

6) Silvia, Pedro e Carlos querem dividir 70 figurinhas entre eles de modo que Silvia receba 30 figurinhas a menos que Pedro e a metade da quantidade de figurinhas de Carlos. Quantas figurinhas cada um vai receber?

70 FIGURINHAS {SÍLVIA, PEDRO, CARLOS

SÍLVIA → PEDRO − 30 E 1/2 DE CARLOS

70
− 30
40

SÍLVIA → 40 − 30 (10)
PEDRO → 40
CARLOS → 2 · 10 (20)
RESPOSTA

Transcrição da entrevista com Polly

P: Olá Polly, tudo bom? A ideia é você explicar como chegou nas respostas dos problemas. Por exemplo, esse primeiro, como foi que você fez?

Polly: Na verdade, eu comecei pela quinta questão, foi quando eu percebi a lógica das questões, que eram todas as mesmas. Então eu voltei para o primeiro, e fiz a questão. Eu peguei e subtraí a quantidade que tinha a mais e depois eu dividi pela quantidade de pessoas que tinha.

P: Mas nesse caso tinha três pessoas!

Polly: Isso. Mas tinha uma pessoa que tinha o dobro, então, tinha que ser uma quantidade que conseguisse, tipo, tinha três pessoas, mas uma pessoa tinha o dobro de revistas de Frederico. Rogério tinha o dobro de Frederico, então, teoricamente seriam quatro quantidades.

P: Por isso você dividiu por 4?

Polly: Por isso dividi por 4.

P: Então, você tira os 15, que é o que Lúcia tem a mais?

Polly: Lúcia tem a mais que Frederico.

P: Então você tirou esse 15 para ficar em quantidades iguais para cada um?

Polly: Sim.

P: Nesse caso você percebe que Rogério tem o dobro de Frederico, então Rogério teria duas quantidades, é isso?

Polly: Sim.

P: E por isso você, em vez de dividir por 3, dividi por 4?

Polly: Sim.

P: E quando você dividiu por 4 você achou a quantidade de quem?

Polly: Eu achei a quantidade de Frederico, que é a pessoa que Rogério tem o dobro e Lúcia tem mais 15. Ele seria meio que o único que teria uma quantidade certinha. Então, Frederico teria 10, Rogério teria duas vezes Frederico, e Lúcia teria Frederico mais 15, como Frederico é 10, seria 20 e 25.

P: Então, você pega o Frederico como base, que você achou a quantidade, que seria 10. E Rogério teria o dobro, que seria 20, é isso?

Polly: Sim. E Lúcia teria Frederico mais 15, que fica 25.

P: Certo.

P: E esse segundo, como foi que você resolveu?

Polly: Eu usei a mesma lógica para todos. Eu tirei a quantidade, Paulo tinha 5 bolas a mais que Joana, então tirei 5, e Roberto tem 2 a mais que Joana, então eu tirei 2. Ficou 30. Como era 3 pessoas, e ninguém tinha o dobro nem nada, eu dividi por 3, que deu 10. Então eu usei Joana como base, porque Paulo tem 5 a mais que Joana e Roberto tem 2 a mais. Joana é a base, que tem 10.

P: Por isso Joana tem 10?

Polly: É. E Paulo tem 10 mais 5, que dá 15, e Roberto tem 10 mais 2, que dá 12.

P: Certo. E essa conta aqui (apontando para o registro da aluna) você faz direto? Você subtraiu 5 e o 2 do 37 direto?

Polly: Isso.

P: Certo. Então é 37 menos 5 menos 2? Por isso dá 30?

Polly: Isso.

P: E você dividi por 3 por que são 3 pessoas, e ninguém tem o dobro nem o triplo? Por isso a divisão é só pelas 3 quantidades, por que cada pessoa tem a mesma quantidade? É isso?

Polly: É.

P: Certo. E o terceiro? Por que o terceiro agora é dividido por 5? Você tira os 40 e depois dividi por 5.

Polly: Eram 3 times. O time B fez o dobro do A (tempo em silêncio) estou tentando pensar por que dividi por 5. Realmente não estou conseguindo lembrar por que eu dividi por 5.

P: Você não consegue lembrar?

Polly: Não. Por que teoricamente seria por 4.

P: Por que seria por 4?

Polly: Por que o time B fez, seguindo a lógica da primeira questão, o time B fez o dobro de pontos do time A, então tem o time A e o time C, então seria 4. No meu pensamento, na minha lógica.

P: O time C fez o que? 40?

Polly: 40 pontos a mais, e eu já retirei os 40.

P: Mas foi a mais que qual time?

Polly: Que o time B. E o time B é o dobro de pontos do time A. Ah! Acho que pode ser isso.

P: Você quer fazer o esquema aqui de lado para ver se lembra?

Polly: Não. Acho que não vou lembrar.

P: Sem problemas. E esse quarto?

Polly: 160 alunos. 10 a mais jogam basquete dos que jogam vôlei, então eu retirei os 10, ficou 150, e 20 pessoas jogam futebol a mais que jogam basquete, então eu tirei os 20, ficou 120. Como são 3 esportes, eu dividi por 3. Acho que eu usei vôlei como base, então o basquete era vôlei mais 10 e futebol era basquete mais 20.

P: Mas nesse caso aqui, 150 menos 20 é 120?

Polly: Não, era 130. Então deu errado.

P: Você acha que deu errado?

Polly: Teoricamente meu cálculo deu certo. No final deu certo, eles se completaram, mas aqui o cálculo está errado.

P: Você acha que acertou como?

Polly: Na sorte.

P: E esse quinto, que foi o primeiro que você fez, como foi que você respondeu?

Polly: Foi. Eu acho que foi. Eu não sei se foi o quinto ou o sexto, mas foi um dos dois. Eu comecei por aqui. Ah! Eu comecei pelo sexto.

P: Então me explica como foi que você fez o sexto.

Polly: Ele quer dividir 70 figurinhas de modo que Sílvia receba 30 a menos que Pedro e a metade das figurinhas de Carlos. Eu tirei 30, porque iria igualar. Então 70 figurinhas é o total. Sílvia receberia a quantidade de Pedro menos 30, que é esse 30 que eu coloquei aqui (apontando para a resposta). E um meio de Carlos, aí quando eu dividi a quantidade total deu 40. Eu peguei, Sílvia seria 40 menos 30, que ficou 10. Pedro seria a base, que ficou 40. E Carlos seria duas vezes 10. Porque seria a metade das figurinhas de Carlos. É, Sílvia tem a metade da quantidade de figurinhas de Carlos, então Carlos seria a quantidade de Sílvia vezes 2.

P: Certo. E Pedro é 40 por quê?

Polly: Eu retirei as figurinhas que Sílvia teria a mais que Pedro.

P: Então de imediato você já achou a quantidade de Pedro?

Polly: É.

P: Certo. E esse quinto, por que você dividiu por 3 e depois dividiu por 2?

Polly: Júlia tem um terço dos selos e Ana tem a metade dos selos de Maria. Acho que 180 dividido por 3 é a quantidade de pessoas. E depois, o que é que eu estava pensando nesse momento?

P: Não lembra?

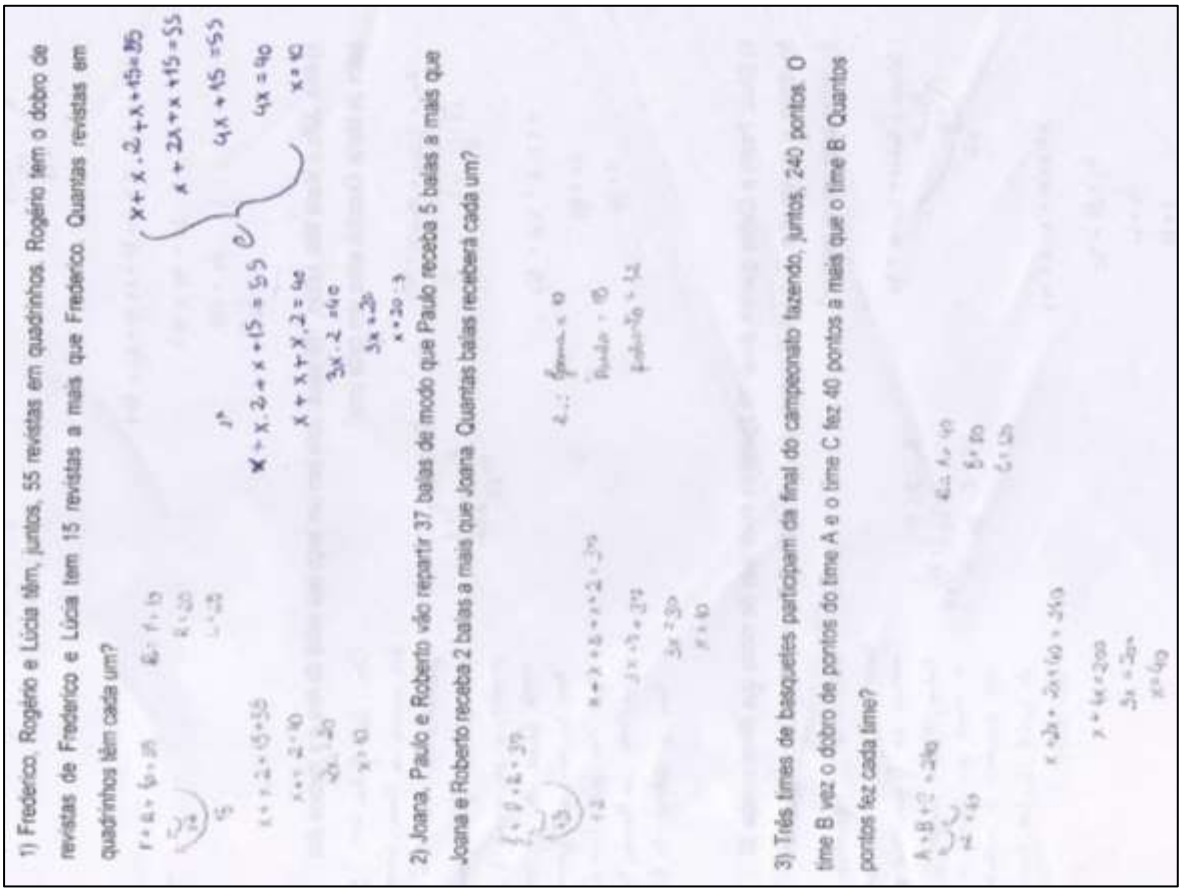
Polly: Eu acho que não foi pela quantidade, acho que foi por aqui, 180 dividido por 3 seria um terço, e por 2 seria a metade dos selos. Então acho que minha base foi Ana. Que é o que Júlia tem, não sei, também não estou lembrando, mas eu acho que segui essa lógica.

P: Ok. Mas você não consegue se lembrar como é que chegou, por exemplo, em Ana igual a 90?

Polly: Acho que eu peguei esse aqui, e como seria um terço, eu multipliquei por 3, que deu 90. Acho que eu usei o 30 como base, porque aqui seria 3 vezes 30 e aqui 2 vezes 30, e aqui seria 30, porque é um terço de noventa (apontando para os cálculos).

P: Certo. Muito obrigado.

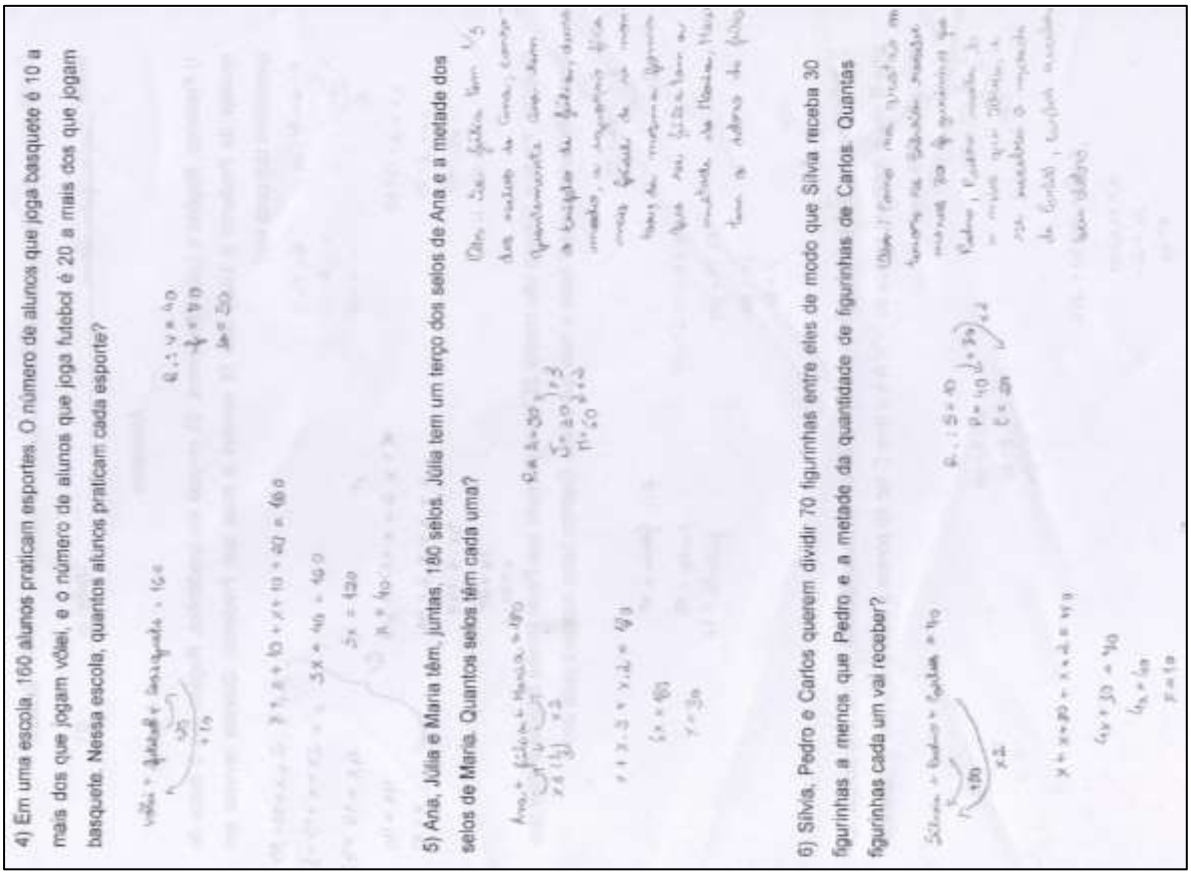
Protocolo de Júlia, 8º ano, nível 3



1) Frederico, Rogério e Lúcia têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Rogério tem o dobro de revistas de Frederico e Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico. Quantas revistas em quadrinhos têm cada um?

2) Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana e Roberto receba 2 balas a mais que Joana. Quantas balas receberá cada um?

3) Três times de basquetes participam da final do campeonato fazendo, juntos, 240 pontos. O time B vez o dobro de pontos do time A e o time C fez 40 pontos a mais que o time B. Quantos pontos fez cada time?



4) Em uma escola, 160 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga basquete é 10 a mais dos que jogam vôlei, e o número de alunos que joga futebol é 20 a mais dos que jogam basquete. Nessa escola, quantos alunos praticam cada esporte?

5) Ana, Júlia e Maria têm, juntas, 180 selos. Júlia tem um terço dos selos de Ana e a metade dos selos de Maria. Quantos selos têm cada uma?

6) Sílvia, Pedro e Carlos querem dividir 70 figurinhas entre eles de modo que Sílvia receba 30 figurinhas a menos que Pedro e a metade da quantidade de figurinhas de Carlos. Quantas figurinhas cada um vai receber?

Transcrição da entrevista com Júlia

P: A ideia é você explicar como chegou nas respostas dos problemas. Por exemplo, esse primeiro, como foi que você fez?

Júlia: (Depois de lê o problema) Bem, eu juntei, eu fiz aqui uma síntese de ideias, que seria, Frederico mais Rogério mais Lúcia tem 55 (Apontando para a equação F + R + L = 55). Rogério tem o dobro de Frederico e Lúcia tem 15 a mais que Frederico.

P: Por isso que você fez essa seta?

Júlia: Isso. Como todos estavam relacionados a Frederico, Frederico seria X, mais X vezes 2, que seria a quantidade de Rogério, mais é, só um minuto, mais 15, que seria a quantidade de revistas de Lúcia. Mas eu acho que deveria ter um X aqui, acho que fiz errado.

P: Você acha que faltou um X?

Júlia: Isso. Porque eu acho que tem que ter um X aqui, eu fiz errado na hora. Então seria, X mais X vezes 2 mais X mais 15. Então, seria, aqui ficaria 40, mais X vezes 2 mais X, e...

P: Você quer fazer de caneta aqui do lado, como ficaria?

Júlia: (Resolvendo o problema de caneta) Então ficaria X mais X vezes 2, que seria o de Rogério, mais X mais 15, que seria igual a 55. Então, X mais X mais X vezes 2, pode ser assim, seria igual a 40.

P: Por que igual a 40?

Júlia: Porque eu tiro 15 do 55 para igualar os dois lados. Aqui eu tiro 15 e desse lado eu tiro 15. Aí, aqui ficaria 3X vezes 2, que é igual a 40. 3X é igual a 20, por que 40, eu divido por 2 dos dois lados, aí fica 20 aqui. Então, 3X é igual a 20, então X seria 20 dividido por 3. Aí Jesus, agora eu tenho dúvida se é esse ou esse. Por que esse daqui não dá um valor exato, então tem alguma coisa errada. (Depois de pensar um tempo).

P: Você não lembra como fez?

Júlia: Eu até lembro, mas é que agora eu estou em dúvida.

P: Você não está sabendo se está certo o que você fez?

Júlia: É. Esse daqui, por que esse daqui não está certo, então não tem sentido.

P: Você quer tentar ver de novo, os procedimentos para ver se você errou em algum local?

Júlia: (Depois de um tempo analisando os procedimentos) Aqui não. Aqui está certo.

P: Você colocou o que aqui?

Júlia: 2X, por que isso daqui é 2X.

P: Se você colocar 2X aqui?

Júlia: Não acho, sabe porque, aqui esqueci de colocar o 2, troquei a ordem.

P: Esse 2X é esse daqui?

Júlia: É. É por que na hora eu esqueci.

P: Depois podemos voltar.

Júlia: Certo.

P: Júlia, me explica como você resolveu esse segundo problema.

Júlia: Certo. Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana, aqui (apontando para a seta e o mais 5 no modelo) e Roberto receba 2 balas a mais que Joana, aqui (apontando para a seta e o mais 2 no modelo). Então, Joana seria o X, mais X mais 5, que seria o número de Paulo, mais X mais 2, que seria o número de Rogério, pois Paulo tem 5 a mais que Joana, e Rogério tem 2 a mais que Joana. A soma de Joana, Paulo e Roberto é igual a 37.

P: Como você resolveu essa equação?

Júlia: Então, eu juntei os X separado dos números, ficando 3X mais 7, que é igual a 37. Então eu diminuí 7 dos dois lados, e ficou 3X igual a 30, então X é igual a 10.

P: E como você fez para chegar em X igual a 10?
Júlia: Eu dividi os dois lados por 3.

P: Ok.

Júlia: Nesse caso, Joana vai ter 10, Paulo vai ter mais 5 que Joana, que seria 15, e Roberto vai ter mais 2 que Joana, que vai ser 12.

P: Ok. Agora Júlia, me explica como você fez esse terceiro.

Júlia: (Depois de lê o problema) O time B fez o dobro de pontos do time A (apontando, no modelo inicial, para $\left(\underset{x\,2}{\longleftarrow}\right)$), e o time C fez 40 pontos a mais que o time B (apontando, no modelo inicial, para $\left(\underset{+\,40}{\longleftarrow}\right)$).

P: Certo.

Júlia: Então, o A vai ser X, mais 2X, que seria X vezes 2, que é o B, porque o B é o dobro do A, mais 2X, que seria o B, mais 40, e essa equação seria o C (chama 2X + 40 de equação), que é igual a 240.

P: Certo.

Júlia: Então, X mais 2X mais 2X mais 40 é igual 240. Então, eu diminuí 40 dos dois lados, e ficou X mais 4X, porque eu juntei os 2X com os 2X, que fica igual a 200. E depois eu somei X, que ficou 5X igual a 200. Então, X é igual a 40, porque eu dividi 5 dos dois lados.

P: Certo. E depois, você fez como?

Júlia: Então, o time A ficou com 40, o time B ficou com o dobro do time A, que é 80, e o time C ficou com mais 40 vezes 2, que seria 120.

P: Certo.

P: Ok. O quarto é bem parecido com o terceiro né isso?

Júlia: É.

P: Certo. E nesse quinto, por que você escreveu isso daqui? (Apontando para a explicação escrita ao lado da resposta) Queria que você me explicasse.

Júlia: É porque podia ficar de maneira confusa, pois eu fiz um cálculo meio estranho aqui (apontando para a resposta), então eu expliquei aqui (apontando para a explicação).

P: O que você achou de estranho?

Júlia: Não, é só o meu cálculo que eu fiz de uma forma que talvez não pudesse entender.

P: Certo. Então me explica o que você fez.

Júlia: (Depois de lê o problema) Se Júlia tem um terço dos selos de Ana, Ana, consequentemente, tem o triplo dos selos de Júlia. Então, para me, fica mais fácil colocar na equação, como se diz, operações positivas, assim, bem...

P: Você acha mais fácil a multiplicação do que a divisão?

Júlia: Isso. Então, se Júlia tem a metade dos selos de Maria, então Maria, consequentemente, tem o dobro dos selos de Júlia.

P: Então, você pegou Júlia como o principal e saiu fazendo os outros em relação a ela?

Júlia: Isso. Então, Júlia mais X vezes 3, que é os selos de Ana, mais X vezes 2 que é os selos de Maria, é igual a 180. Então eu juntei todos os X, e ficou 6X, por que X mais 3X mais 2X é 6X, que é igual a 180. Então X é igual a 30.

P: Certo. Fazendo aquela mesma coisa, dividindo por 6 ambos os membros?

Júlia: Isso. Se X é igual a 30, e Ana vai ter o triplo dos selos de Júlia, então Ana vai ser 90. E Maria vai ter o dobro de Júlia, então Maria vai ter 60.

P: Certo. Aqui no sexto, foi a mesma coisa do quinto?

Júlia: Foi.

P: Ok. Me explica esse sexto, por que ele tem uma adição né isso?

Júlia: É. (Depois de lê o problema) Eles tem 70 figurinhas juntos. Sílvia vai receber 30 figurinhas a menos que Pedro, então Pedro vai receber 30 a mais que Sílvia. X é o de Sílvia, então X mais 30 é o de Pedro. E, Sílvia vai receber a metade da quantidade de figurinhas de Carlos, ou seja, Carlos vai receber o dobro de Sílvia, X vezes 2. Logo, X mais X mais 30 mais 2X é igual a 70.

P: E como você resolveu a equação?

Júlia: Então, vai ser 4X, porque tem X mais X mais 2X mais 30, que é igual a 70. Então 4X é igual a 40, por que eu diminuí 30 dos dois lados. E, então, X é igual a 10, por que eu dividi os dois lados por 4.

P: Certo.

Júlia: Agora eu vou tentar voltar para o primeiro.

P: Você quer tentar.

Júlia: Quero. (Um tempo lendo o problema e analisando seus procedimentos).

P: Organiza esses daqui como esses que você colocou aqui que eu acho que fica mais fácil para você entender?

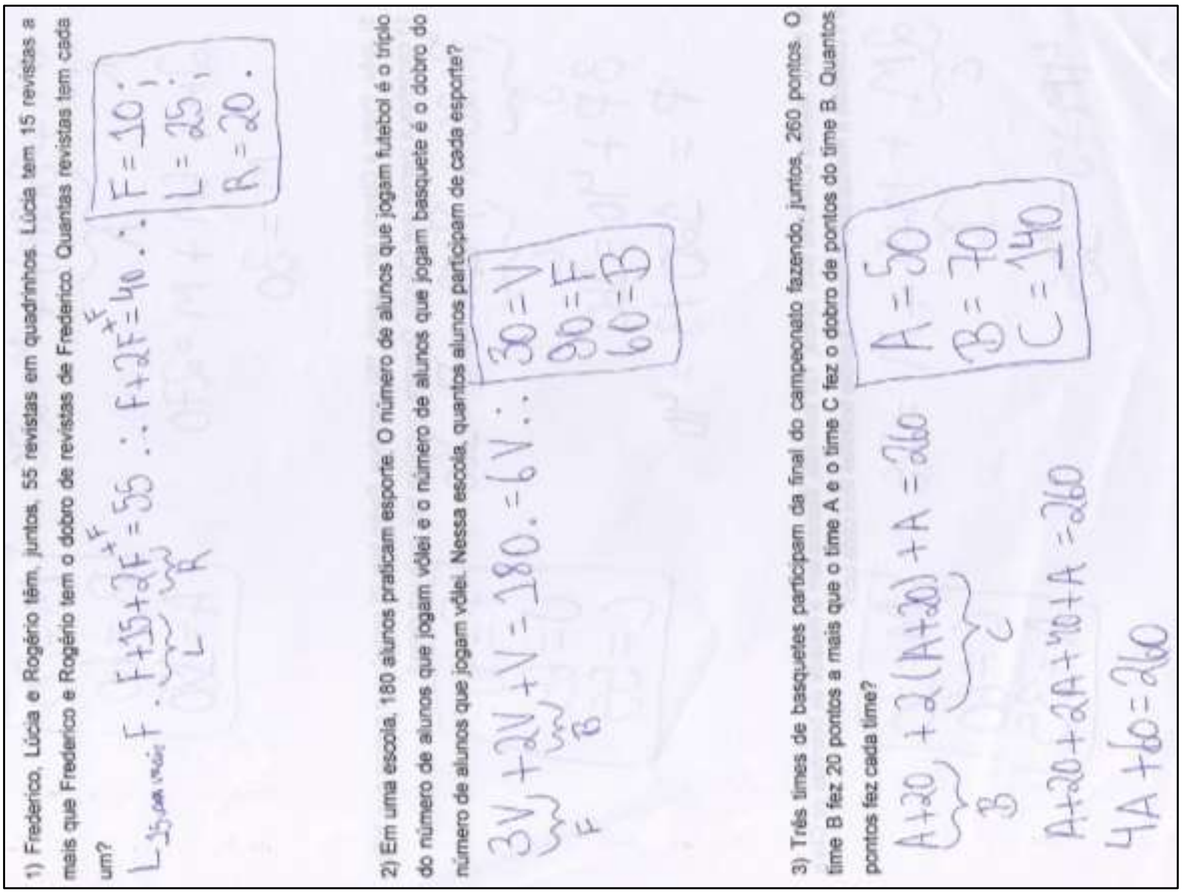
Júlia: Esse aqui é Rogério, não, esse daqui é Frederico, e Rogério tem o dobro que Frederico, mais Lúcia, que tem 15 revistas a mais que Frederico, que seria X mais 15, que é igual a 55. Então, X mais 2X mais X mais 15 é igual a 55. 4X mais 15 é igual a 55. 4X é igual a 40. X é igual a 10. Ué (risos). Ah! Então aqui eu tinha errado alguma coisa. É, realmente, então está certo agora. Então tinha realmente que ter um X aqui. Acabou dando o mesmo resultado, enfim.

P: Então no caso 10 é a quantidade de quem?

Júlia: O 10 é a quantidade de Frederico, por que Frederico é o X. Rogério tem o dobro de revista de Frederico, que é 10 vezes 2, ou seja, 20. Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico, que é 10 mais 15, que dá 25.

P: Ok. Muito obrigado.

Protocolo de Carlos, 9º ano, nível 3



1) Frederico, Lúcia e Rogério têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico e Rogério tem o dobro de revistas de Frederico. Quantas revistas tem cada um?

L 15 a mais F . $\underbrace{F+15}_{L}+\underbrace{2F}_{R}{}^{+F}=55$ ∴ $F+2F^{+F}=40$ ∴ $\boxed{F=10;\ L=25;\ R=20.}$

2) Em uma escola, 180 alunos praticam esporte. O número de alunos que jogam futebol é o triplo do número de alunos que jogam vôlei e o número de alunos que jogam basquete é o dobro do número de alunos que jogam vôlei. Nessa escola, quantos alunos participam de cada esporte?

$\underbrace{3V}_{F}+\underbrace{2V}_{B}+V=180$ ∴ $6V$ ∴ $\boxed{30=V;\ 90=F;\ 60=B}$

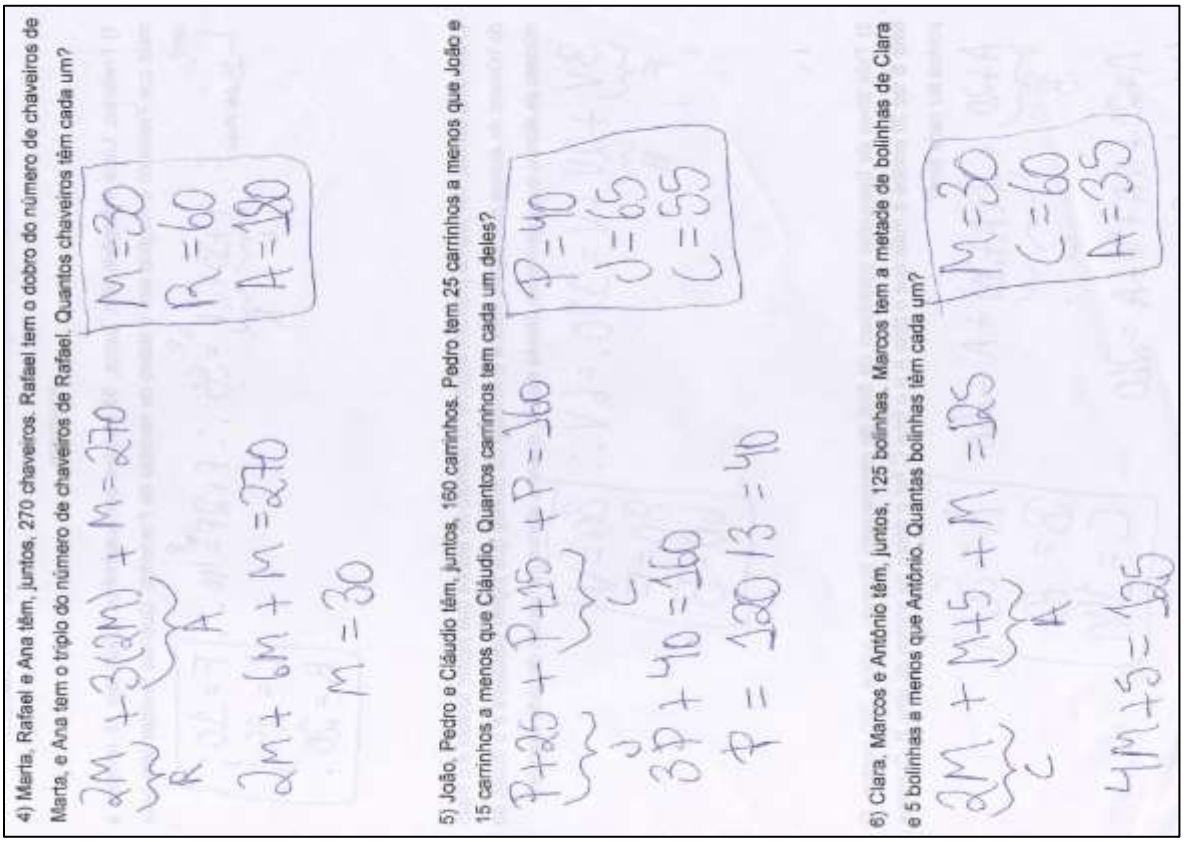
3) Três times de basquetes participam da final do campeonato fazendo, juntos, 260 pontos. O time B fez 20 pontos a mais que o time A e o time C fez o dobro de pontos do time B. Quantos pontos fez cada time?

$\underbrace{A+20}_{B}+\underbrace{2(A+20)}_{C}+A=260$

$A+20+2A+40+A=260$

$4A+60=260$

$\boxed{A=50;\ B=70;\ C=140}$



4) Marta, Rafael e Ana têm, juntos, 270 chaveiros. Rafael tem o dobro do número de chaveiros de Marta, e Ana tem o triplo do número de chaveiros de Rafael. Quantos chaveiros têm cada um?

$\underbrace{2M}_{R}+\underbrace{3(2M)}_{A}+M=270$

$2M+6M+M=270$

$M=30$

$\boxed{M=30;\ R=60;\ A=180}$

5) João, Pedro e Cláudio têm, juntos, 160 carrinhos. Pedro tem 25 carrinhos a menos que João e 15 carrinhos a menos que Cláudio. Quantos carrinhos tem cada um deles?

$\underbrace{P+25}_{J}+\underbrace{P+15}_{C}+P=160$

$3P+40=160$

$P=120/3=40$

$\boxed{P=40;\ J=65;\ C=55}$

6) Clara, Marcos e Antônio têm, juntos, 125 bolinhas. Marcos tem a metade de bolinhas de Clara e 5 bolinhas a menos que Antônio. Quantas bolinhas têm cada um?

$\underbrace{2M}_{C}+\underbrace{M+5}_{A}+M=125$

$4M+5=125$

$\boxed{M=30;\ C=60;\ A=35}$

Transcrição da entrevista com Carlos

P: A ideia é você explicar como chegou nas respostas dos problemas. Por exemplo, esse primeiro, como foi que você fez?

Carlos: Eu tento nessas questões transformar tudo em uma equação. E, o que eu fiz foi tentar achar uma incógnita em comum que represente, que eu consiga absolver dessas questões. Por exemplo, se fala que Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico e Rogério tem o dobro de Frederico, os dois remetem a Frederico, então eu tento escrever uma equação com isso. Então Lúcia é Frederico mais 15, e eu tenho que somar com 2 Frederico, porque Rogério tem o dobro de Frederico, e eu tenho que somar também com Frederico, por isso do mais F. E isso é igual a 55 dá 55. Então eu tirei o 15, e ficou 40, ou seja, 4F igual a 40. Então Frederico tem 10, 10 mais 15 dá o de Lúcia, que é 25, e 10 vezes 2 dá 20, que é o de Rogério.

P: E como foi que você chegou em 40?

Carlos: Eu peguei o 15 e subtraí dos dois lados.

P: Certo. E como você chegou em F igual a 10?

Carlos: Porque eu tenho aqui (apontando para a equação) que 4F é igual a 40, como eu já tirei o 15, então 4F é igual a 40, divido tudo por 4, que dá F igual a 10.

P: Certo. Nesse caso, você não precisa fazer os cálculos todos para chegar na resposta da equação, você faz de cabeça é isso?

Carlos: É.

P: Certo. E esse segundo, me explica como foi que você fez?

Carlos: Esse segundo foi a mesma coisa. Comecei tentando ver o que a questão relacionava entre os esportes. Então o número de alunos que jogam futebol é o triplo dos que jogam vôlei, portanto futebol é igual a três vôlei. E o número de alunos que joga basquete é o dobro dos que jogam vôlei, então basquete é igual a dois vôleis. É tanto que eu coloquei aqui em baixo (apontando para a equação), como na primeira questão, o L indicando Lúcia e o R indicando Rogério. Então 3V, que é o futebol, mais 2V, que é o basquete, mais V, que tem que somar o próprio vôlei, é igual a 180. Somando todos os V dá 6V. Depois eu dividi os dois lados da equação por 6, e deu o número de jogadores de vôlei, que é 30. Multipliquei 30 por 3, para achar o de futebol, que é 90, e por 2 para achar o de basquete, que é 60.

P: Certo. Essa divisão que você faz do 180 por 6, você faz mentalmente?

Carlos: É, eu faço mentalmente.

P: Certo. E esse terceiro, como foi que você fez?

Carlos: Esse terceiro (tempo lendo o problema). O time B fez 20 pontos a mais que o time A, então B é igual a A mais 20. O time C vez o dobro de pontos do time B, então eu coloquei o 2 para fazer a propriedade distributiva com A mais 20, que é o B.

P: Então o 2 vezes A mais 20 é porque o C é o dobro de B?

Carlos: Isso. Mais A, que dá 260. Aqui eu só fiz distribuir e daqui para cá, eu tirei o 60, não, daqui para cá eu juntei os A e juntei os valores em números, que deu 4A mais 60 igual a 260 (sempre apontando para a equação). Daqui para cá eu já fiz mentalmente, eu tirei os 60, que deu 4A igual a 200, e dividi 200 por 4, que deu 50.

P: Por isso você chegou em A igual a 50?

Carlos: Isso. B igual a 70 e C igual a 140.

P: Como você chegou nos valores de B e C, fazendo a substituição do A por 50?

Carlos: Isso.

P: O quarto é parecido com o terceiro?

Carlos: Isso. Fiz da mesma forma.

P: Carlos, me explica como você fez esse quinto?

Carlos: Esse quinto, como ele fala que Pedro tem 25 carrinhos a menos que João, isso significa que João menos 25 é igual a Pedro. Então, eu passei o 25 para o outro lado, que dá que João é igual a Pedro mais 25, que está escrito aqui (apontando para o "P + 25" na equação). A mesma coisa com Pedro e Cláudio, que Cláudio é Pedro mais 15 (apontando para o "P + 15" na equação) e eu tenho que mostrar o de Pedro, adicionar o valor de Pedro (apontando para o "P" na equação), que dá 160.

P: Me explica por que você coloca mais 25 e mais 15, se diz que Pedro tem 25 carrinhos a menos que João, e você coloca P mais 25?

Carlos: É porque eu escrevi mentalmente uma equação, em que J, que é João, é igual a P – 25, não, calma, João menos 25 é igual a Pedro. Então, eu peguei esse 25, e mentalmente mesmo eu passei para o outro lado. Então, a gente tem que João é igual a Pedro mais 25, aí eu fui e escrevi isso (apontando para o "P + 25" na equação).

P: Entendi, por isso P mais 25?

Carlos: Isso

P: Por que você quer colocar tudo em função de P?

Carlos: Isso.

P: Entendi. Então se Pedro tem 25 carrinhos a menos que João, João teria 25 carrinhos a mais que Pedro?

Carlos: Isso.

P: Certo. A mesma coisa para o de Cláudio?

Carlos: Isso. Então, eu adiciono P, que dá 160. Então, eu faço a mesma coisa que eu fiz nas questões anteriores, que é juntar todos os P, juntar todos os números que eu consegui, subtrair os números dos dois lados, que dá P igual a 120 sobre 3, que dá 40.

P: Certo. Então me explica melhor como você chegou nesse 3P e nesse 40 (apontando para a segunda equação)?

Carlos: Eu somei todos os P e somei 25 mais 15.

P: E para chegar em P = 120/3, o que você fez?

Carlos: Eu subtraí 40 dos dois lados, que deu 3P = 120, e depois eu dividi os dois lados por 3, por isso esse 120/3 aqui (apontando para a equação), então, P é igual a 40, que é o valor de Pedro.

P: E para achar a quantidade de João e Cláudio, você fez o quê?

Carlos: Eu adicionei 25 para o João, e adicionei 15 para o Cláudio no resultado, que deu isso aqui (apontando para o resultado final).

P: E esse sexto, foi parecido com o quinto? Me explica.

Carlos: Isso. Eu tento colocar sempre em função de algum dos integrantes. Marcos tem a metade de bolinhas de Clara, então Clara sobre dois é igual a Marcos. Então eu multipliquei tudo por 2, que deu Clara igual a 2 Marcos.

P: Certo. Por isso é 2M aqui (apontando para a equação)?

Carlos: Isso. 2M. Então Marcos tem 5 bolinhas a menos que Antônio, então A menos 5 é igual a M. Eu passei 5 para o outro lado da equação, e ficou que M mais 5 é igual a A, mais M igual a 125. Junto todas as incógnitas, que deu 4M, junto todos os outros valores, que deu 5. Subtraí 5 dos dois lados, que deu 4M igual a 120. Então Marcos tem 30 bolinhas. Depois eu dupliquei esse valor, e então Clara tem 60 bolinhas, e adicionei 5, que deu que Antônio tem 35 bolinhas.

P: Como foi que você chegou em M igual a 30?

Carlos: É que eu retirei 5 mentalmente dos dois lados da igualdade, então ficou que 4M é igual a 120. Depois eu também fiz a divisão mentalmente, dividi os dois lados por 4. Então M é igual a 30.

P: Certo. Muito obrigado.