



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

FERNANDO EMÍLIO LEITE DE ALMEIDA

**O CONTRATO DIDÁTICO E AS ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICAS E DIDÁTICAS:
ANALISANDO SUAS RELAÇÕES NO ENSINO DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO
GRAU A UMA INCÓGNITA**

RECIFE-PE

2016

FERNANDO EMÍLIO LEITE DE ALMEIDA

**O CONTRATO DIDÁTICO E AS ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICAS E DIDÁTICAS:
ANALISANDO SUAS RELAÇÕES NO ENSINO DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO
GRAU A UMA INCÓGNITA**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de pós-graduação no Ensino das Ciências e Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Anna Paula Avelar de Brito Lima

RECIFE - PE

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

A447c Almeida, Fernando Emílio Leite de
O contrato didático e as organizações matemáticas e didáticas:
analisando suas relações no ensino da equação do segundo grau a
uma incógnita / Fernando Emílio Leite de Almeida. – 2016.
304 f. : il.

Orientadora: Anna Paula de Avelar Brito Lima.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco,
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Recife, BR-PE,
2016.
Inclui referências.

1. Contrato Didático 2. Organização Matemática 3. Organização
Didática 4. Equação do Segundo Grau I. Lima, Anna Paula de Avelar Brito,
orient. II. Título

CDD 507

FOLHA DE APROVAÇÃO

Fernando Emilio Leite de Almeida

O CONTRATO DIDÁTICO E AS ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICAS E DIDÁTICAS: ANALISANDO SUAS RELAÇÕES NO ENSINO DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU A UMA INCÓGNITA

Orientadora: Anna Paula de Avelar de Brito Lima

Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

Defendida em 10 de Agosto de 2016

Banca Examinadora

Prof. Dr^a Anna Paula de Avelar **BRITO LIMA**
Presidente / 1º Examinadora / Orientadora
Instituição: Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Prof. Dr. Marcelo **CÂMARA DOS SANTOS**
2º examinador interno
Instituição: Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Prof. Dr. Vladimir Lira Veras Xavier de **ANDRADE**
3º examinador interno
Instituição: Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Prof. Dr. Marcus **BESSA DE MENEZES**
4º examinador externo
Instituição: Universidade Federal Campina Grande - UFCG

Prof. Dr. Saddo **AG ALMOULUD**
5º examinador externo
Instituição: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC - SP

Dedico este trabalho...

... ao meu pai, Moacir Almeida (*in memoriam*), um homem simples, sereno, sonhador e de fé inabalável. Nas reuniões de família, sempre chamava atenção por sua capacidade de improvisar versos e contar histórias que maracaram época ...

... à minha mãe, Anita Leite, um exemplo de determinação e generosidade ao próximo, dedicou sua vida à família e a educação de pessoas. Chama atenção dos amigos e familiares, sua força espiritual e sua confiança em Deus ...

... aos meus irmãos Júnior (*in memoriam*), Vera, Djinha, Mônica, Socorro, Leitinho (*in memoriam*) e Márcia, que sempre acreditaram no caçula da casa ...

... aos meu filho Gutemberg e a minha filha Giovana, a razão do meu viver, o meu porto seguro ...

... à minha esposa Gláucia, uma companheira para todas as horas, que através do amor me presenteou dois filhos lindos (amor infinito) ...

AGRADECIMENTOS

Agradeço a **Deus**, sem **Ele** nada seria possível.

Várias pessoas contribuíram para à conclusão desse doutorado. Algumas delas, de forma mais direta e outras, indiretamente. Gostaria de agradecer, especialmente ...

... à minha orientadora e amiga *Anna Paula*, pelo respeito, dedicação e disponibilidade. Por saber ouvir, falar e respeitar o meu processo de construção.

Pela amizade que foi edificada ao longo dos dez anos de convivência. Por possibilitar, o exercício do contraditório nas orientações;

... ao meu amigo *Marcus Bessa*, pelas as contribuições iniciais sobre a TAD, na preparação do projeto de doutorado;

... aos *professores e alunos* sujeitos desta pesquisa, bem como aos gestores das instituições escolares, que permitiram o pesquisador entrar na sala de aula e conviver com o cotidiano escolar;

... aos amigos de doutorado *Euzébio, Kalina, Iris, Enery, Adelmo, Graça e Sílvia*, que sempre vibrávamos uns com os outros e compartilhávamos informações e conquistas, mesmo a distância;

... aos *amigos do Grupo Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática*, que, apesar da minha ausência, sempre torceram positivamente para o meu trabalho;

... ao amigo *Edelweis*, pelos momentos de diálogos e, por compartilhar textos sobre a TAD;

... a amiga *Rosário* do IFPE, que ajudou nas correções ortográficas da tese.

Agradeço de todo coração;

... à minha comadre Fabiana e compadre Clésio, um casal que respeito e admiro. Em especial à Fabiana, que por várias vezes deixou suas atividades diárias para me ajudar, na correção da tese. Que Deus projeta vocês;

... à minha esposa, que suportou, a minha ausência (em todos os sentidos), a falta de paciência com tudo. Mesmo assim, me apoiou nos momentos em que mais precisei, e, em outros, justificou aos meus filhos a dificuldade do pai em dispor de tempo para eles;

... aos meus filhos, Gutemberg e Giovana, que por inúmeras vezes me convidaram para brincar, sair, passear, viajar e não foi possível. Que por inúmeras vezes, foram ignorados pelo o Pai que se encontrava a frente do computador sem dar a atenção necessária. Desculpa, papai ama vocês;

... aos Professores do doutorado da UFRPE, Edênia, Heloisa Bastos, Helaine, Marcelo Câmara, Anna Paula, que passaram valiosas informações para construção desse trabalho;

Por fim, à minha família que suportou a minha ausência, em tantas reuniões e festas familiares.

Esta tese procurou analisar as relações entre o contrato didático e as organizações matemáticas e didáticas, no ensino da equação do segundo grau a uma incógnita. Para isso, elegemos como campo teórico o Contrato Didático, um dos principais pilares da teoria das situações didáticas. Essa noção desempenha o papel central na análise e na construção de situações para o ensino e aprendizagem da matemática (BROUSSEAU, 1996). Ancoramos esse estudo, também, na Teoria Antropológica do Didático, em especial nas organizações matemáticas e didáticas, reconhecidas como potentes ferramentas que permitem modelizar e analisar com maior detalhe as práticas escolares (CHEVALLARD, 1996). Elegemos como sujeitos da pesquisa dois professores do 9º ano do ensino fundamental e seus alunos e, como saber matemático, as equações do segundo grau a uma incógnita. Optamos por uma abordagem qualitativa de cunho etnográfico para auxiliar nossa pesquisa. Os resultados encontrados apontam, que os dois professores, na maior parte do tempo das aulas, contemplam os tipos de tarefas T_1 , T_2 e T_3 . Dentre as técnicas utilizadas para realizar os subtipos de tarefas e ou tipos de tarefas, chamamos atenção para a de tentativa e erro e a de completar quadrados. Ambas, não foram utilizadas ao mesmo tempo pelos sujeitos. No que tange à relação entre o contrato didático e as tecnologias, observamos tanto regras explícitas como implícitas nas aulas. As negociações em alguns momentos foram rompidas, precisando de uma renegociação. Em outros momentos, foi preciso, apenas, uma reorganização contratual para manter a negociação. Outro aspecto que pontuamos, nas aulas dos dois sujeitos, foi o encontro entre o CD, OM e OD, que aconteceu na resolução das equações do segundo grau, quando o professor negocia regras de contrato e, essas, se confundem com a realização da técnica matemática. Associado a resolução de cada equação (completa ou incompleta), emergem as regras que nos faz pensar na existência de um núcleo duro do contrato na relação.

Palavras-chave: Contrato Didático, Organização Matemática, Organização Didática, Equação do segundo grau.

RÉSUMÉ

Cette thèse a cherché à analyser les rapports entre le contrat didactique et les organisations mathématiques et didactiques, dans l'enseignement de l'équation du second degré à une inconnue. Pour cela nous avons choisi comme champs théorique le Contrat Didactique, un des principaux piliers de la théorie des situations didactiques. Cette notion joue le rôle central dans l'analyse et la construction de situations pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (BROUSSEAU, 1996). Nous avons aussi ancré cette étude à la Théorie Anthropologique du Didactique, en particulier aux organisations mathématiques et didactiques, reconnues comme des outils puissants qui permettent de moderniser et d'analyser plus minutieusement les pratiques scolaires (CHEVALLARD, 1996). À fin de nous aider dans notre recherche, nous avons opté pour une approche qualitative à visée ethnographique. Nous avons élu comme sujets de recherche deux professeurs de la 9^e. année de l'Enseignement fondamental (3^{ème} en France) et leurs élèves et, tel que savoir mathématique, les équations de second degré à une inconnue. Les résultats trouvés signalent que les deux professeurs, la plupart du temps des cours, proposent des exercices du genre T_1 , T_2 et T_3 . Parmi les techniques employées pour accomplir les sous-types de tâches et/ou des types de tâches, nous mettons en relief celle d'essais et d'erreurs et celle de compléter les cadres. Les deux, n'ont pas été utilisés à la fois par les sujets. En ce qui concerne la relation entre le contrat didactique et les technologies, nous avons observé des règles explicites ainsi que des règles implicites durant les cours. Les négociations, pendant quelques moments, ont été interrompues, et il nous a fallu une nouvelle négociation. À d'autres moments, on n'a eu besoin que de reorganiser le contrat pour maintenir la négociation. Un autre aspect que nous avons observé pendant les cours des deux sujets, a été la rencontre entre le CD, l'OM et l'OD, ce qui s'est passé pendant la résolution des équations du second degré, quand le professeur négocie les règles de contrat et, celles-ci se confondent avec la réalisation de la technique mathématique. Associé à la résolution de chaque équation (complète ou incomplète) suggissent les règles qui nous font penser à l'existence d'un noyau dur de contrat dans la relation.

Mots-clés: Contrat Didactique, Organisation Mathématique, Organisation Didactique, Equation du second degré.

ABSTRACT

This thesis tries to analyze the relations between the didactic contract and the mathematic and didactic organizations in second degree equation to an unknown teaching. For that, we have chosen as theoretical field the Didactic Contract, one of the main column in the didactic situations theory. This idea has the central role in the analyze and in the construction of situations for the mathematic teaching and learning (BROUSSEAU, 1996). We also have anchored this study in the Didactic Anthropological Theory, specially in the mathematic and didactic organizations, known as powerful tools which allows to modelize and analyze with bigger detail the school practices (CHEVALLARD, 1996). We have chosen as subjects of the research two teachers from the 9th grade of the elementary school and their pupils and, as mathematic knowledge, the second degree equation to an unknown. We have chosen a qualitative approach of ethnography nature to help our research. The final results point that both teachers, in the most time of classes, contemplated the types of exercise T_1 , T_2 e T_3 . Among the technics applied to approach the subtypes of exercise and or types of exercises, we call attention to the attempt and mistake and the one of square complement. Both were not used by the subjects at the same time. About the relation between the didactic contract and the technologies, we have observed as well the explicit roles as the implicit ones in classrooms. At some moments, the negotiations were broken up and a renegotiation was needed. At other moments, just a contractual reorganization was needed to keep the negotiation. Other aspect observed in the classes of both subjects was the meeting among the CD, OM and OD, that happened in the resolution of second degree equations, when the teacher negotiates contract roles and those are confused with the Mathematics technics achievement. Connected to the resolution of each equation (complete or incomplete), the roles emerge what makes us think about the existence of a contract hard core in the relation.

Key-words: Didactic Contract, Mathematics Organization, Didactic Organization, Second Degree Equation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE FIGURAS

Figura 01 - O triângulo das situações didáticas e o milieu (meio)	40
Figura 02 - A devolução segundo a adaptação e incerteza	43
Figura 03 - Assimetria na relação ao saber, negociações e rupturas	52
Figura 04 - Dupla relação temporal da relação didática	53
Figura 05 - Uma das funções do contrato didático: ampliar o espaço de diálogo – reduzir a área de risco	68
Figura 06 - Processo de transposição didática	79
Figura 07 - Processo de transposição institucional	84
Figura 08 - Escala de níveis de codeterminação e localização da pesquisa	102
Figura 09 - Resolução do problema montão utilizando a álgebra	120
Figura 10 - Regra do falso utilizado pelo os egípcios	120
Figura 11 - Livro didático do professor Davi – página 05	164
Figura 12 - Livro didático do professor Davi – página 41	165
Figura 13 - Livro didático do professor Davi – página 41	166
Figura 14 - Livro didático do professor Davi – página 43	166
Figura 15 - Livro didático do professor Davi – página 43	167
Figura 16 - Livro didático do professor Davi – página 44	167
Figura 17 - Livro didático do professor Davi – página 46	168
Figura 18 - Livro didático do professor Davi – página 48	168
Figura 19 - Livro didático do professor Davi – página 48	169
Figura 20 - Livro didático do professor Davi – página 48	169
Figura 21 - Livro didático do professor Davi – página 49	170
Figura 22 - Livro didático do professor Davi – página 52	170
Figura 23 - Livro didático do professor Davi – página 45	171
Figura 24 - Livro didático do professor Lucas – página 95	172
Figura 25 - Livro didático do professor Lucas – página 95	172
Figura 26 - Livro didático do professor Lucas – página 96	173
Figura 27 - Livro didático do professor Lucas – página 96	173

Figura 28 - Livro didático do professor Lucas – página 98	174
Figura 29 - Livro didático do professor Lucas – página 99	175
Figura 30 - Livro didático do professor Lucas – página 100	175
Figura 31 - Livro didático do professor Lucas – página 100	176
Figura 32 - Livro didático do professor Lucas – página 101	176
Figura 33 - Livro didático do professor Lucas – página 105	177
Figura 34 - Livro didático do professor Lucas – página 107	178
Figura 35 - Livro didático do professor Lucas – página 108	179
Figura 36 - Livro didático do professor Lucas – página 111	180
Figura 37 - Recorte da atividade de Davi	204
Figura 38 - Recorte da atividade de Davi	208
Figura 39 - Recorte da atividade de Davi	212
Figura 40 - Recorte da atividade de Davi	226

LISTA DE QUADROS

Quadro 01 - Método de resolução de Bhaskara – dedução	123
Quadro 02 - Método retórico e algébrico	125
Quadro 03 - Dedução da fórmula geral da equação do segundo grau	150
Quadro 04 - Dedução das fórmulas incompletas	151
Quadro 05 - Método de resolução completar quadrados	152
Quadro 06 - Casos particulares de resolução	153
Quadro 07 - Resolução de equação incompleta	155
Quadro 08 - Método de resolução das equações incompletas	155
Quadro 09 - Técnica principal e auxiliar dos tipos de tarefas	159
Quadro 10 - Técnica auxiliar e principal dos subtipos de tarefas	160
Quadro 11 - Tecnologias dos tipos de tarefas	162
Quadro 12 - Síntese das organizações matemáticas pontuais das equações do segundo grau a uma incógnita	163
Quadro 13 - Critérios de análises do contrato didático	189
Quadro 14 - Síntese dos critérios de análise das organizações matemáticas	191

Quadro 15 - Recorte da transcrição da aula – Davi	199
Quadro 16 - Recorte da transcrição da aula – Davi	200
Quadro 17 - Recorte da transcrição da aula – Davi	201
Quadro 18 - Recorte da transcrição da aula – Davi	205
Quadro 19 - Registro matemático de Davi	206
Quadro 20 - Registro matemático de Davi	206
Quadro 21 - Recorte da transcrição da aula – Davi	207
Quadro 22 - Registro matemático de Davi	208
Quadro 23 - Recorte da transcrição da aula – Davi	209
Quadro 24 - Registro matemático do professor Davi	213
Quadro 25 - Recorte da transcrição da aula – Davi	213
Quadro 26 - Registro matemático de Davi	215
Quadro 27 - Recorte da transcrição da aula – Davi	215
Quadro 28 - Registro matemático do aluno – aula de Davi	216
Quadro 29 - Registro matemático de Davi	216
Quadro 30 - Registro matemático de Davi	219
Quadro 31 - Recorte da transcrição da aula – Davi	219
Quadro 32 - Recorte da transcrição da aula – Davi	221
Quadro 33 - Recorte da transcrição da aula – Davi	221
Quadro 34 - Registro matemático de Davi	222
Quadro 35 - Recorte da transcrição da aula – Davi	224
Quadro 36 - Registro matemático de Davi	225
Quadro 37 - Recorte da transcrição da aula – Davi	225
Quadro 38 - Registro matemático de Davi	226
Quadro 39 - Recorte da transcrição da aula – Davi	226
Quadro 40 - Registro matemático de Davi	227
Quadro 41 - Recorte da transcrição da aula – Davi	228
Quadro 42 - Recorte da transcrição da aula – Davi	229
Quadro 43 - Registro matemático de Davi	230
Quadro 44 - Recorte da transcrição da aula – Davi	230
Quadro 45 - Recorte da transcrição da aula – Davi	232
Quadro 46 - Registro matemático de Davi	232
Quadro 47 - Recorte da transcrição da aula – Davi	233

Quadro 48 -	Registro matemático de Davi	234
Quadro 49 -	Recorte da transcrição da aula – Davi	235
Quadro 50 -	Registro matemático de Davi	236
Quadro 51 -	Recorte da transcrição da aula – Davi	236
Quadro 52 -	Registro matemático do professor Davi	237
Quadro 53 -	Recorte da transcrição da aula – Davi	238
Quadro 54 -	Recorte da transcrição da aula – Davi	240
Quadro 55 -	Registro matemático de Davi	240
Quadro 56 -	Recorte da transcrição da aula – Lucas	244
Quadro 57 -	Recorte da transcrição da aula – Lucas	245
Quadro 58 -	Registro matemático de Lucas	245
Quadro 59 -	Registro matemático de Lucas	247
Quadro 60 -	Recorte da transcrição da aula – Lucas	248
Quadro 61 -	Recorte da transcrição da aula – Lucas	249
Quadro 62 -	Recorte da transcrição da aula – Lucas	250
Quadro 63 -	Recorte da transcrição da aula – Lucas	251
Quadro 64 -	Recorte da transcrição da aula – Lucas	253
Quadro 65 -	Registro matemático de Lucas	254
Quadro 66 -	Recorte da transcrição da aula – Lucas	254
Quadro 67 -	Registro matemático de Lucas	256
Quadro 68 -	Recorte da transcrição da aula – Lucas	257
Quadro 69 -	Registro matemático de Lucas	258
Quadro 70 -	Recorte da transcrição da aula – Lucas	259
Quadro 71 -	Registro matemático de Lucas	262
Quadro 72 -	Recorte da transcrição da aula – Lucas	262
Quadro 73 -	Recorte da transcrição da aula – Lucas	265
Quadro 74 -	Registro matemático de Lucas	266
Quadro 75 -	Recorte da transcrição da aula – Lucas	266
Quadro 76 -	Recorte da transcrição da aula – Lucas	267
Quadro 77 -	Recorte da transcrição da aula – Lucas	268
Quadro 78 -	Registro matemático de Lucas	269
Quadro 79 -	Recorte da transcrição da aula – Lucas	269
Quadro 80 -	Registro matemático de Lucas	271

Quadro 81 - Recorte da transcrição da aula – Lucas	272
Quadro 82 - Recorte da transcrição da aula – Lucas	272
Quadro 83 - Organização matemática de Davi e Lucas para T_1	274
Quadro 84 - Organização matemática de Davi e Lucas para T_2	275
Quadro 85 - Organização matemática de Davi e Lucas para T_3	276
Quadro 86 - Organização matemática de Davi e Lucas para T_4	277

CAPITULO 1

INTRODUÇÃO	17
1.1 Problemática	21
1.2 Os objetivos	32
1.2.1 Objetivo Geral	32
1.2.2 Objetivos Específicos	32
1.3 Apresentação da Tese	34

CAPITULO 2

O CONTRATO DIDÁTICO	36
2.1 A Geografia Conceitual da Noção de Contrato Didático: um olhar sobre a gênese do conceito	36
2.1.1 O Contrato Didático no Contexto Empírico	37
2.1.2 O Contrato Didático no Contexto Epistemológico	39
2.1.3 O Culturalismo Didático como Mecanismo Gerador de Contrato Didático	46
2.2 Relações Endógenas do Contrato Didático na TSD	48
2.3 O Contrato Didático e a Devolução de uma Situação Adidática	49
2.4 O Sistema Didático e a Relação Didática na Instituição do Contrato Didático	51
2.5 Construindo o Conceito de Contrato: do Stricto Sensu ao Social ..	56
2.6 A Relação do Contrato Pedagógico com o Contrato Didático	57
2.7 Do Contrato Institucional ao Contrato Didático	58
2.8 O Funcionamento da Relação Didática	61
2.8.1 Característica do Contrato Didático	65
2.8.2 A Dinâmica do Contrato Didático	66
2.8.3 Efeitos de Contrato Didático	69

CAPITULO 3

TEORIA ANTROPOLOGICA DO DIDÁTICO	72
3.1 Noção de Transposição Didática	72

3.1.1	Os Saberes: Científico, a Ensinar, Ensinado e Aprendido, Disponível	78
3.2	Transposição Didática e Transposição Institucional	82
3.3	A Teoria Antropológica do Didático	85
3.3.1	A Noção de Praxeologia ou Organização Praxeológica ..	91
3.3.1.1	Tipos de Tarefa (T)	93
3.3.1.2	Técnica (τ)	94
3.3.1.3	Tecnologia (θ)	96
3.3.1.4	Teoria (Θ)	97
3.3.1.5	Saber-Fazer e Saberes	98
3.3.2	A Ecologia das Praxeologias: níveis de codeterminação	100
3.3.3	Praxeologia Matemática ou Organização Matemática	105
3.3.4	Praxeologia Didática ou Organização Didática	107
3.3.5	Equipamento Praxeológico do Professor e dos Alunos ...	113
3.3.6	O Topos do Professor e dos Alunos	114

CAPITULO 4

A	ÁLGEBRA COMO CAMPO DE PESQUISA	118
4.1	A Gênese da Álgebra: aspectos principais	118
4.2	Elementos Históricos Constitutivos da Equação do 2º Grau	122
4.3	Questões de Ensino e Aprendizagem em Álgebra	128
4.4	Orientações Curriculares Para o Ensino da Álgebra: algumas considerações	134
4.4.1	Parâmetros Curriculares Nacionais	135
4.4.1.1	O Ensino da Álgebra e as Orientações no 3º Ciclo ..	138
4.4.1.2	O Ensino da Álgebra e as Orientações no 4º Ciclo ..	139
4.4.2	Parâmetros Curriculares de Matemática de Pernambuco	141
4.4.2.1	A Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental	145
4.4.2.2	A Álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental	146
4.5	Equações do Segundo Grau a uma incógnita: do ponto de vista da matemática e do ensino	147
4.6	Organização Matemática a Priori da Equação do Segundo Grau a uma Incógnita	156

4.6.1 Tipos de Tarefa	157
4.6.2 Técnicas	159
4.6.3 As Tecnologias	161
4.6.4 Síntese das Organizações Matemáticas a Priori	163
4.7 Descrição Analítica do Livro Didático Utilizado por Davi	163
4.8 Descrição Analítica do Livro Didático Utilizado por Lucas	171

CAPITULO 5

ABORDAGEM METODOLOGIA DA PESQUISA	181
5.1 Caracterização da Pesquisa	181
5.2 Os Objetivos, os Sujeitos e o Campo de Pesquisa	182
5.3 Etapas da Pesquisa	187
5.4 Os Critérios de Análise	189

CAPITULO 6

ABORDAGEM ANALITICA DOS DADOS	194
6.1 Esquema para Análise dos Dados	194
6.2 Análise das Relações Contratuais nas Organizações Matemáticas e Didáticas na Sala de Aula dos Professores: Davi e Lucas	196
6.2.1 Análise das Relações Contratuais nas Organizações Matemáticas e Didáticas na Sala de Aula do Professor Davi	197
6.2.2 Análise das Relações Contratuais nas Organizações Matemáticas e Didáticas na Sala de Aula do Professor Lucas	243
6.2.3 Síntese da Análise da Relação entre o Contrato Didático e as Organizações Matemática e Didática dos Professores, Davi e Lucas	273
6.2.3.1 Síntese das Organizações Matemáticas das Aulas de Davi e Lucas	274
6.2.3.2 Os Momentos Didáticos na Relação com $T_1: ax^2 + bx + c = 0$, $T_2: ax^2 + c = 0$ e $T_3: ax^2 + bx = 0$	278

CAPITULO 7

CONSIDERAÇÕES FINAIS	289
7 Retomando à Tese	290
7.1 Os Principais Resultados da Pesquisa	290
7.2 Pesquisas Futuras	295
REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS	297

CAPITULO 1

INTRODUÇÃO

Utilizamos em nossa Tese os pressupostos teóricos¹ e metodológicos da Didática da Matemática de influência francesa, área de investigação que surgiu na França, no final dos anos 60 e início dos anos 70 do século passado, quando foram fundados os Institutos de Pesquisa no Ensino da Matemática (IREM).

As discussões propostas nesses institutos ganharam força e foram se espalhando, inicialmente, pelos países francófonos (Suíça, Canadá, etc.). Posteriormente, surgiram outros países interessados pelos mesmos objetos de estudo, inclusive o Brasil (BROUSSEAU, 1986; GÁLVEZ, 1996). A Espanha, hoje, é um dos países cujo desenvolvimento de pesquisas nessa área também tem se destacado (BOSCH; GASCÓN, 2007a).

As primeiras pesquisas relacionadas a esse campo de estudo foram lideradas por Guy Brousseau (1986) e seus colaboradores (VERGNAUD; CORTES, 1986; CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001; BESSOT, 2003; MARGOLINAS, 1998, entre outros). Nessa época, o interesse principal estava no processo de transmissão e aquisição de diferentes conteúdos matemáticos. Mas, além desse interesse, os pesquisadores procuravam entender e elaborar modelos explicativos para os fenômenos didáticos que, segundo esses autores, emergiam na sala de aula, quando a triangulação didática (professor-alunos-saber) se instituía. Esses estudiosos esperavam que os resultados obtidos permitissem melhorar o funcionamento didático.

Nesse sentido, podemos apontar um conjunto de noções teóricas² que marcaram a existência da Didática da Matemática como campo de investigação: a ideia de sistema didático, de situação didática e adidática, de contrato didático, de dialética ferramenta-objeto, de engenharia didática, de obstáculos epistemológicos, de transposição didática, entre outras noções (BOSCH; GASCÓN, 2007b).

¹ Todos os referenciais teóricos em Francês e Espanhol, citados nessa pesquisa, foram por nós traduzidos de forma livre e pessoal e encontra-se na escrita original em nota de rodapé. Para maior aprofundamento, observar as referências bibliográficas.

² As noções de transposição didática, sistema didático, situação didática e adidática serão conceituadas no capítulo específico sobre o contrato didático e teoria antropológica do didático. Aos interessados em aprofundar as leituras sobre engenharia didática e obstáculos epistemológicos, encontrarão no livro *Didáctica das Matemáticas* com direção de Jean Brun (1996).

Com o passar das décadas, a Didática da Matemática, gradativamente, foi ampliando o seu referencial teórico, tanto em produção de teorias, que surgiam no decorrer dos tempos, quanto de forma interna, ampliando e sofisticando cada teoria. Queremos dizer que internamente as teorias aumentavam o seu poder e seu alcance analítico, com intuito de atender outros problemas de pesquisa que persistiam em não ter respostas.

O que estamos dizendo, podemos encontrar em Chevallard (1996), em que a Transposição Didática (TD) amplia seu campo teórico e se integra à Teoria Antropológica do Didático (TAD), e, com essa integração, o seu potencial teórico aumenta e atende outros enfoques de pesquisa (BOSCH; GASCÓN, 2007b). Sobre essa questão, Chevallard (1996, p. 127) aponta que a TD passa *de uma “máquina” para pensar em universo didático restrito para uma “maquinaria” de mais vasto alcance (...)*, a maquinaria apontada pelo pesquisador seria a TAD.

Nesse mesmo contexto, a literatura aponta outro exemplo, a Teoria das Situações Didáticas (TSD) que através de Brousseau (1986) e seus colaboradores vem, gradativamente, reunindo esforços para ampliar o seu referencial teórico³ para responder novas questões de pesquisa. Filiadas aos pressupostos teóricos e metodológicos da TSD temos a Teoria das Situações Didáticas da Matemáticas (TSDM), Teoria das Situações (TS) e Teoria das Situações Matemáticas (TSM) (BOSCH; GASCÓN, 2013).

Particularmente, Guy Brousseau (1986; 1996b; 2008), Yves Chevallard (1996, 1999, 2001) e Chevallard, Bosch e Gascón (2001) tiveram um papel essencial na definição da DM como ciência e como campo de pesquisa. Para Chevallard, Bosch e Gascón (2001) uma das preocupações centrais da DM está no estudo do funcionamento do sistema didático⁴ e os fenômenos que emergem nesse ambiente, de forma que os pesquisadores apontam a necessidade de investigar, compreender e teorizar esses fenômenos.

De forma complementar, outros pesquisadores contribuíram para construção do nosso aporte teórico. Internacionalmente, podemos citar Brun (1996), Jonnaert e

³ Para Bosch e Gascón³ (2013), esses esforços procuram, de forma ambiciosa, transformar os pressupostos teóricos da TSD e construir “uma ciência didática relativamente autônoma”, que toma como objeto de estudo a “noção de fenômeno didático”.

⁴ O sistema didático se caracteriza a partir do momento em que um professor, os alunos e certo saber entram em constante interação; nessa situação, o professor deixa explícita a intenção de criar condições para fazer com que os alunos se apropriem daquele saber. Este sistema didático está inserido em um sistema maior: o sistema de ensino (JOONAERT E BORGHT, 2007).

Borghet (2002), Bessot (2003), Margolinas (1998), D'Amore (2007), Gálvez (1996), Charnay (1996), entre outros. No Brasil, apontamos Câmara dos Santos (1995), Brito Menezes (2006), Almouloud (2007), Araújo (2009), Almeida (2009), Bessa de Menezes (2010), Silva (2008), Bittar (2015), entre outros.

As preocupações apresentadas anteriormente, em especial aquelas relacionadas ao sistema didático, fazem parte, também, das nossas preocupações. Dentre os fenômenos didáticos que podem ser investigados, nesse contexto, e que foram teorizados no âmbito da Didática da Matemática, tanto na França como em outros países, destacamos o “Contrato Didático (CD) e a Teoria Antropológica do Didático (TAD)”.

Chamamos atenção para perceber que a aproximação entre CD e TAD, no campo da DM, surgiu em virtude do primeiro encontro do “*Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SIIDM)*”, em 1991. Na ocasião, os participantes do seminário demonstraram um interesse particular em aprofundar as discussões e investigações pelo marco teórico apresentado por Brousseau, a Didática da Matemática (BOSCH; GASCÓN, 2013, p. 72).

Além disso, os participantes estavam atentos a outras perspectivas que alimentassem as discussões da DM. Particularmente, as discussões relacionadas aos fenômenos didáticos (contrato didático) estavam mais sólidas, e, de forma crescente, surgiam aquelas relacionadas à antropologia do didático.

Sobre isso, Bosch e Gascón⁵ (2013, p. 74) falam que o principal objetivo do seminário era o de “aprofundar o estudo e compreensão dos *fenômenos didáticos*, quero dizer, daqueles fenômenos relacionados com a *produção e comunicação do conhecimento matemático*”.

No décimo segundo seminário (SIIDM), em 1998, no departamento de didática da matemática da Universidade de Complutense de Madrid (UCM), surge a criação do grupo “Didáctica de las Matemáticas como Disciplina científica (DMDC)”. Vale apenas destacar que próximo ao ano de 2005, o SIIDM deixa de existir dentro do DMDC, e, com isso, o Enfoque Ontosemiótico (EOS) e a Teoria Antropológica do Didático (TAD) passam a ser potentes subgrupo de trabalhos (BOSCH; GASCÓN, 2013).

⁵ Escrita original: El principal objetivo del seminario es el de profundizar en el estudio y comprensión de los fenómenos didácticos, es decir, de aquellos fenómenos relacionados con la producción y comunicación del conocimiento matemático.

Essas questões apresentadas nos permitem inferir que, no quadro atual, existe um diálogo pertinente e forte entre os enfoques teóricos⁶ TSD e TAD. Para Bosch e Gascón (2013), o diálogo entre teorias, nas pesquisas, tem avançado bastante nas últimas décadas e tem sido visto como um importante avanço da DM.

Uma prova da pertinência do diálogo se estabelece a partir do momento em que Chevallard (1996) se apropria de noções teóricas⁷ da TSD, “contrato didático e meio” para discutir o contrato institucional, bem como do conceito de “sistema didático” para discutir as intenções didáticas nas instituições.

Esse mesmo destaque foi apresentado por Brousseau (2007), quando trata de questões e perspectivas referentes à teoria antropológica do didático e a teoria das situações didáticas da matemática. O pesquisador apresenta uma cuidadosa relação, exemplificando quais conceitos que Chevallard se apropria da TSDM para conceituar a TAD.

Nas linhas anteriores apresentamos elementos que motivaram a nossa escolha pela Didática da Matemática como campo teórico e metodológico. Mais adiante, procuramos apresentar a problemática em que se insere a nossa pesquisa e seus objetivos.

1.1 PROBLEMÁTICA

Esta Tese procura apresentar uma discussão sobre a relação que existe entre o Contrato Didático, um dos pilares da TSD, e dois conceitos da TAD, as Organizações Matemáticas e as Organizações Didáticas.

Procuramos apresentar algumas justificativas que estão relacionadas às escolhas do Contrato Didático e TAD. Para iniciar, por que a escolha do contrato didático⁸ como campo de investigação para nossa tese? Quais questões estão relacionadas a esse fenômeno? Para responder a esses questionamentos, nos ancoramos, justamente nos textos referentes ao pesquisador que o teorizou.

⁶ Como podemos perceber na sua escrita original: La actual consolidación de los enfoques y teorías didácticas que conviven en el seno del grupo dmcd abre una nueva etapa en el desarrollo del grupo. En mi opinión se trata de una etapa en la que el *diálogo entre los enfoques teóricos* que conviven dentro del grupo y entre estos y los restantes enfoques del continente didáctico ocupará un lugar central (BOSCH; GASCÓN, 2013, p.73).

⁷ As noções de Contrato, Meio, Contrato Institucional e Instituição, serão discutidos e conceituados nos capítulos teóricos da tese.

⁸ Apresentamos, nesse tópico, algumas justificativas pela escolha da noção de contrato didático. No capítulo específico, iremos aprofundar o debate nos elementos teóricos do conceito.

Brousseau (1986) revela que a noção de contrato didático procura esclarecer, dentre outras questões, como o professor e o aluno se relacionam entre si e com o terceiro polo: o saber, na relação didática. Segundo o pesquisador, ela se encontra intimamente ligada às questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem da matemática. Acrescenta, ainda, que o contrato didático implica regras que emergem na relação didática e que são determinantes para o funcionamento da situação na reconstrução dos saberes pelos alunos, na expectativa com relação às atividades, nas negociações dos saberes em sala de aula, na divisão de papéis entre o professor e os alunos, dentre outros elementos.

Sobre as investigações relacionadas a esse fenômeno e sua importância, Chevallard, Bosch e Gascón (2001) consideram que o contrato didático é a pedra de toque de toda a organização didática. Ele se estabelece quando a relação entre dois (professor e aluno) se transforma numa relação entre três (professor, os alunos e o saber). Chamamos atenção para observar que a entrada do saber na relação é a primeira condição para que possa existir uma relação didática e, conseqüentemente, com a sua dinâmica interna, o contrato didático.

Jonnaert (1994, p. 217) enfatiza essa condição, dizendo que, se o “contrato didático permite compreender o dinamismo da relação didática, inversamente, é o funcionamento da aula que permite decodificar o contrato didático”. Alerta ainda que não existem duas classes que possam ser idênticas, logo, não existem dois contratos idênticos.

Para Brousseau (1996), o CD é a regra do jogo e a estratégia da situação didática é o meio que o professor encontrou e, necessariamente, tem que ser colocado em cena, para que o professor tente transmitir ao aluno aquilo que pretende que ele faça. Contudo, a evolução da situação didática modifica o contrato, que permite então a obtenção de novas situações.

Segundo Astolfi (1990) a relação triangular, apresentada anteriormente, é influenciada por regras, sendo algumas explicitadas; mas, na grande maioria, elas não são identificadas, de forma que são consideradas implícitas. Essas regras regulam, em especial, as obrigações e a divisão de responsabilidade entre o professor e o aluno na gestão do saber (JONNAERT, 1994).

Nesse sentido, ao procurarmos investigar a relação do contrato didático com as organizações matemáticas e didáticas, estamos diante de um fenômeno que tem

forte relação com o ensino e a aprendizagem da matemática, mais especificamente com o campo que estamos investigando, o campo algébrico.

Somando-se aos motivos⁹ anteriores, entendemos que os índices apresentados pelo o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), que avalia nacionalmente a educação brasileira, têm revelado, em seus resultados, baixos rendimentos dos estudantes no que se refere à matemática (SAEB, 2011).

Essas informações disponíveis nos levam a crer que a forma como é desenvolvida a ação didática do professor (o ensino) em sala de aula não tem sido eficiente, tem apontado variações nos resultados obtidos pelos alunos (a aprendizagem).

Observamos também, através da nossa participação em eventos, nacionais e internacionais (ENEM, SIPEM, SIPEMAT, CIAEM, e outros), que o debate sobre as questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem da matemática tem ocupado lugar de destaque.

Além disso, tem sido também objeto de investigação entre grupos de pesquisa de instituições públicas e privadas. Em particular, o grupo de pesquisa Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática (FDCM), do qual faço parte, tem se engajado em mudar esse cenário a partir de suas pesquisas. Todos esses esforços dos pesquisadores têm por objetivo produzir informações necessárias para desenvolver políticas públicas que venham melhorar a educação no Brasil.

Pesquisadores como Charnay (1996) e Câmara dos Santos (2002) acreditam que a aprendizagem está ligada ao significado que tem a matemática para os alunos. Por outro lado, o significado da matemática, faz vínculo com o que os professores pensam sobre ela, o que significa ensinar matemática? Ou o que significa aprender matemática?

Ainda a esse respeito, Charnay (1996, p. 39) aponta que a existência de variações no ensino, por parte dos professores, mantém uma forte relação com o contrato didático adotado em sala de aula. Ele quer dizer que o contrato didático dinamiza a relação didática (professor-aluno-saber), fazendo surgir estratégias diferentes de ensino.

Do ponto de vista das pesquisas, já há algumas décadas, tanto a noção de Contrato Didático (CD), como a Teoria Antropológica do Didático (TAD), têm inspirado

⁹ Ainda nesse capítulo, apresentaremos as devidas justificativas e definições sobre os conceitos de contrato didático e organizações matemáticas e didáticas.

diversos estudos, nacionalmente e internacionalmente, inclusive o nosso, cuja finalidade é cada vez mais compreender e dar subsídios ao trabalho em sala de aula.

Nesse contexto, Almeida (2009) realizou uma pesquisa sobre o Contrato Didático, com dois professores de matemática do ensino fundamental e seus alunos (6ª série/7º ano). Com o olhar voltado para o saber algébrico, procurou investigar as regras contratuais que emergiam numa relação didática na passagem da linguagem natural para linguagem algébrica, bem como na resolução das equações do primeiro grau.

Entre outros resultados, o pesquisador apontou algumas regras de contrato na resolução das equações como, por exemplo, o fato de o professor negociar com seus alunos que o termo desconhecido ou incógnita deveria ficar sempre no primeiro membro; bem como que o valor de x no final da resolução devia ser substituído na equação inicial para verificar se a igualdade continuava sendo verdadeira, etc. Já nos resultados referentes à passagem da linguagem natural para linguagem algébrica, as regras foram: os professores revelam em alguns momentos implicitamente e, em outros momentos, explicitamente, que no enunciado existem palavras-chave importantes para resolução do problema, tais como: o dobro de um número; adicionar produto; diminuir; etc.

Utilizando o mesmo pressuposto teórico, o Contrato Didático, Araújo (2009) procura analisar a relação entre o contrato didático e a metacognição na resolução de problemas em álgebra. A análise dos fenômenos didáticos teve como base interações discursivas numa sala de aula do 8º ano do ensino fundamental. Os resultados apresentados mostraram que, apesar da tentativa do professor em promover estratégias metacognitivas, elas só apareciam implicitamente, trazidas por alguns alunos, uma vez que não houve mudança real das regras de contrato. Entretanto, com o redirecionamento metodológico, os problemas sugeridos pela pesquisadora levaram à ruptura do contrato didático estabelecido e fizeram emergir nos alunos estratégias metacognitivas de autorregulação, de forma bastante explícita.

D'Amore¹⁰ (2007) apresenta os resultados de uma pesquisa sobre regras de contrato didático de D'Amore e Sandri (1998), em que procura investigar as atitudes

¹⁰ D'Amore apresenta outras pesquisas, com enfoque no contrato didático: D'Amore, B. Problemi: pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di Problem solving. Milano: angeli, 1993. D'AMORE, B; MARTINI, B. Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella Risoluzione di problemi scolastici standard. La Matematica e la sua Didattica, Bologna, n. 2, p. 150-175, 1997.

dos alunos perante à resolução de problemas que apresentam enunciado com ausência de informações. O pesquisador utiliza a noção de contrato para observar constantes de comportamentos, que, segundo ele, podem ser chamadas de cláusulas contratuais.

Entre os resultados obtidos na pesquisa, apresentamos os dados do protocolo de “Sterfania”, em que os pesquisadores apontam duas cláusulas de contrato. A “cláusula da expectativa”, em que os alunos respondem à professora uma resposta esperada por ela e não importa o sentido do texto; e a outra é a “cláusula da constância”, em que a professora sempre passou problemas com um texto escrito em palavras e com alguns números e, para produzir o resultado, sempre os alunos tiveram que operar sobre esses números com operações. O pesquisador considera que essa situação não é nova na relação didática.

Ainda com o enfoque do Contrato Didático, Rodriguez, E.; Bosch, M. e Gascón, J. (2007), procuram discutir sobre o contrato didático, metacognição e Recorridos Estudos e Investigação (REI). Os pesquisadores apontam uma nova divisão de responsabilidade entre os sujeitos envolvidos e identificam as restrições que encontram na relação com o contrato didático. Apresentam que a TAD pode ajudar a reformular o problema da metacognição. Apontam, também, que o modelo da atividade matemática descrito pela TAD realmente integra a resolução de problemas e a construção do conhecimento como aspectos inseparáveis. Como a metacognição passa a ser definida de modo operativo em termos de praxeologia.

Dentre as pesquisas relacionadas à noção de Contrato Didático aqui no Brasil, particularmente, chamamos atenção para a de Brito Menezes (2006). A pesquisadora propôs discutir a inter-relação do Contrato Didático (CD) com a Transposição Didática (TD), e o saber focado no estudo foi a álgebra elementar desde a sua introdução até a iniciação dos alunos no trabalho com equações do 1º grau. Os resultados apontam que existe uma estreita relação entre os fenômenos CD e TD. Destaca ainda que os efeitos de contrato aparecem estreitamente relacionados ao fenômeno de TD e que existem momentos em que podemos “pensar” na existência de certos efeitos de transposição, intimamente relacionados ao CD. Nesse aspecto, que tange à identificação de fenômenos relacionados à TD, a pesquisadora aponta uma fragilidade, que diz respeito à ausência de ferramentas de análise da Transposição Didática Interna, o que pode acarretar a falta de aprofundamento nesse aspecto.

Com a incorporação da TD à TAD, encontra-se à disposição dos pesquisadores em didática da matemática uma ferramenta de análise das práticas docentes que se chama as praxeologias. Estas, permitem analisar as organizações matemáticas e didáticas que emergem da relação didática. Então, certos fenômenos, que no passado passavam despercebidos, agora são submetidos à análise. Da nossa parte, pretendemos utilizar essa ferramenta para analisar a relação do contrato didático nas organizações matemáticas e didáticas.

Com relação à Teoria Antropológica do Didático (TAD), em especial às Organizações Matemáticas (OM) e Didáticas (OD), podemos dizer que essas são ferramentas que permitem analisar as transformações que são feitas nos objetos de saberes a ensinar no interior do sistema didático, ou de outra determinada instituição (BOSCH; GASCÓN, 2007b; CHEVALLARD, 1999). Nesse sentido, entendemos que elas permitem descrever elementos que fazem parte da transposição didática interna.

A Organização Matemática (OM) está relacionada à toda atividade matemática que é construída na sala de aula, a partir da Organização Didática (OD). As duas convivem no interior do Sistema Didático, mantendo uma interdependência. O professor como um agente didático é que conduz toda atividade matemática, por meio de uma organização didática. Queremos dizer que a OD é o meio que o professor encontra para colocar em jogo a atividade matemática (BESSOT, 2003). Ao colocar em jogo, o professor se depara com a própria subjetividade, com opções metodológicas e com a cultura estabelecida nesse ambiente didático.

As OM são construídas em torno de tipos de tarefas (T), das atividades matemáticas realizadas, de técnicas (τ) matemáticas explicadas, de tecnologias (θ) justificadas e de teorias (Θ) que são, em tese, os objetos matemáticos a serem estudados ou construídos em momentos de estudo.

Já as Organizações Didáticas (OD) surgem a partir do momento em que existe uma OM sendo colocada em prática. Sua atividade está voltada para a maneira da execução da OM, da realidade matemática.

Chevallard, Bosch e Gascón¹¹ (2001) advertem que o rendimento das técnicas matemáticas (a maneira de fazer ou realizar uma atividade matemática) no SD

¹¹ Essa colocação de Chevallard potencializa a nossa escolha por investigar a relação entre o contrato didático e as organizações praxeológicas.

depende, antes de mais nada, do contrato didático estabelecido, no qual atuam conjuntamente o professor e seus alunos, na apropriação dos saberes.

Os pesquisadores chamam atenção, ainda, que, para compreender o funcionamento de uma aula de matemática não basta observar uma relação didática e descrever as técnicas envolvidas nela. É necessário perguntar sobre a forma como devem ser conduzidas as situações didáticas, bem como sobre as restrições que surgem por parte do contrato didático.

As questões apresentadas acima, apontadas por Chevallard, Bosch e Gascón (2001), nos remetem ao nosso problema de pesquisa, que diz respeito à relação do contrato didático (as negociações e as regras contratuais), ou como ele se comporta com as organizações matemáticas e didáticas. Nesse contexto, procuramos investigar dois professores e seus alunos com o saber algébrico as equações do segundo grau.

No Brasil, as pesquisas relacionadas ao campo da TAD vêm crescendo nos últimos anos, com destaque apresentamos: Rossini (2006), Silva (2005), Araújo (2009) e Bessa de Menezes (2010), entre outras.

A pesquisas de Rossini¹² (2006) procurou discutir sobre as concepções e dificuldades de um grupo de professores sobre o conceito de função, da superação das mesmas ao longo do processo de formação continuada. Os resultados apontaram que à medida que os docentes constroem as organizações didáticas, ao prepararem uma sequência didática para o ensino e aprendizagem de função, para uma classe de 9º ano, eles (re)constroem os seus saberes sobre funções. Os professores também conseguem fazer uma relativa articulação entre as organizações mobilizadas, dando-lhes a possibilidade de criar novos conteúdos.

Utilizando o mesmo pressuposto teórico, Silva¹³ (2005) procurou investigar as concepções de um grupo de professores de Matemática sobre números fracionários, a aprendizagem dos alunos de quinta série e a autonomia e dificuldades em possíveis mudanças dessas concepções em formação continuada. Ainda nesse contexto, os professores, de forma geral, constroem para quinta série organizações matemáticas para os números fracionários muito rígidas, com tipos de tarefas que associam, sobretudo, concepção parte-todo em contextos de superfície, mobilizando a técnica

¹² Para maiores aprofundamentos, esta foi realizada na PUC-SP Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob o título "Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias".

¹³ Pesquisa realizada na PUC- SP, sob o título "Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para quinta série.

da dupla contagem das partes e, com menos incidência, a concepção de razão mobilizando a mesma técnica.

Araújo (2009) insere sua pesquisa numa problemática algébrica, cujo objetivo foi caracterizar e comparar as transposições didáticas realizadas na França e Brasil sobre o ensino das equações do primeiro grau a uma Incógnita. No que diz respeito aos resultados da pesquisa, têm-se: primeiramente, foi o estudo teórico e didático sobre o ensino de resolução das equações do primeiro grau a uma incógnita, os quais permitiram “modelizar”, a priori, as organizações pontuais existentes em torno desse objeto de conhecimento; em seguida, mostram que o ensino das equações do primeiro grau, tanto na França quanto no Brasil, é justificado como uma ferramenta para resolver problemas de contextos sociais e de outros domínios da matemática. E as organizações matemáticas existentes nos documentos oficiais analisados não fornecem elementos que favorecem a caracterização das praxeologias matemáticas existentes, nesses dois países, em torno da resolução de equação do 1º grau.

Na pesquisa de Bessa de Menezes (2010), encontramos uma reflexão sobre as semelhanças e diferenças nas práticas de professores e alunos no trabalho com equações do segundo grau. Os resultados apontam, inicialmente, que a relação do aluno com a equação do segundo grau faz com que reorganize de modo particular o conhecimento construído em sala de aula. Foi identificado que os alunos utilizam técnicas e/ou subtécnicas diferentes das utilizadas pelo professor na resolução de equações do segundo grau. Além disso, o pesquisador observou, por parte do aluno, intencionalidades perante o saber em jogo, que diante das relações de conformidade com a instituição escolar, podem fazer com que o aluno adote, também, técnicas e/ou subtécnicas das apresentadas pelo professor durante as aulas.

Embora a pesquisa de Machado (2011) não faça parte do campo da educação matemática, ela chama atenção por utilizar a TAD como teoria de base para investigar a formação inicial de professores que se encontravam no 4º ano do curso de ciências. O saber investigado foi a digestão humana. Os resultados da pesquisa identificaram organizações praxeológicas com característica pontual, e essas foram consideradas como imprescindível para mudança nos paradigmas de formação docente, na área de conhecimento focada nesta investigação. Segundo a pesquisadora, não basta elaborar praxeologias consideradas corretas, é preciso ir além das praxeologias.

Internacionalmente, destacamos as pesquisas de Bosch e Gascón (2007b; 2009) tanto no campo da TAD como no TSD, especialmente direcionados à Formação

de Professores. Em uma de suas pesquisas, apontam três questões problemáticas: a formação de professores com o âmbito empírico; experimentações de dispositivos de formação; e, por último, uma proposta de evidenciar os fenômenos que incidem no desenvolvimento dessa formação, tanto os que produzem dificuldades, como aqueles que são transformadores, que são facilitadores. Algo, defendido pela DM, semelhante às condições e restrições para o ensino e aprendizagem da matemática.

Em relação às pesquisas que procuram evidenciar os fenômenos na formação, os pesquisadores apontam que existe um risco em querer “fabricar” um tipo de professor ideal, sem discutir as condições e restrições que existem na sua formação profissional. Esse risco seria querer formar os futuros professores não a partir da necessidades que surgem no exercício da profissão; mas, a partir do equipamento praxeológico¹⁴ que está disponível. Isto posto, a responsabilidade do futuro professor estaria restrita à capacidade de poder “aplicar” estes equipamentos em situações concretas que iram encontrar.

Ao escolhermos o CD e a TAD como campo de pesquisa da nossa tese, é fundamental a definição do campo de saber em que eles serão investigados. Um campo que particularmente nos interessa é aquele que diz respeito à álgebra, especificamente, às equações do 2º grau.

A primeira questão importante, sobre porque pesquisar a álgebra, vem do SAEB. Essa instituição revela que as dificuldades dos estudantes no campo algébrico são consideráveis, pois o índice de acertos nesse campo de saber fica em torno de 40% em muitas regiões do país (BRASIL, 1998). Especificamente, no descritor que trata da resolução de equações do segundo grau, o SAEB (2011) aponta que 55% dos alunos não obtiveram êxito.

Outro dado importante em Pernambuco, referente ao Sistema de Avaliação da Educação Básica de Pernambuco (SAEPE), é que apenas 21,4% dos alunos do 9º ano do ensino fundamental, conseguem, por exemplo, identificar uma equação do 2º grau expressa em um problema (CÂMARA DOS SANTOS; RAMOS DE ALMEIDA, 2014).

Sobre esse quadro que encontramos no Brasil, o SAEB discute a partir dos índices, que nessa etapa de escolarização, os alunos sejam incentivados a resolver equações de segundo grau utilizando a fatoração e o processo de completar

¹⁴ No capítulo da TAD será discutido em um tópico específico.

quadrados, que, além de serem métodos eficientes, podem dar significado à fórmula de Bhaskará.

A Base Curricular Comum – BCC (PERNAMBUCO, 2008) aponta que o trabalho didático do professor é um momento importante para o ensino da matemática, pois os professores fazem escolhas didáticas, e o ideal é que estas devem proporcionar aos alunos a elaboração de estratégias voltadas para construção de processos cognitivos. Estes processos não podem ser desenvolvidos por meio de um ensino baseado na memorização, sem compreensão, ou na sistematização precoce de conceitos.

No que diz respeito às equações do segundo grau, a BCC (2009) recomenda que a aplicação direta da fórmula de Bhaskará termina provocando dificuldades posteriores nos alunos, pois, ao estabelecerem a fórmula como método único, em algum momento podem “esquecer a fórmula” e não serem capazes de resolver os problemas.

Essas situações anteriores fazem com que o ensino e a aprendizagem da álgebra ocupem lugar de destaque na educação matemática. Esse lugar de destaque é produto de várias pesquisas, algumas concluídas e outras em andamento.

Apontamos alguns pesquisadores que demonstram interesse nesse campo de investigação: no Brasil, podemos citar Câmara dos Santos (2010), Brito Menezes (2006), Lins Lessa (2005), Araújo (2009), Bessa de Menezes (2010), entre outros. Em outros países, podemos destacar Kieran (1995), Booth (1995), Filoy e Rojano (1984), Lee (1995), Usiskin (1995), Vergnaud; Cortes (1986), entre outros.

Vários são os enfoques discutidos por esses pesquisadores, podemos destacar: a passagem da aritmética para álgebra, as rupturas nessa passagem, as mudanças de concepções que são necessárias e que envolvem essa passagem, introdução a álgebra escolar, o pensamento algébrico. Outras pesquisas procuram discutir sobre a relação que existe entre estes enfoques e os fenômenos didáticos, como por exemplo o contrato didático e a transposição didática (BRITO MENEZES, 2006).

É consenso entre os pesquisadores que a álgebra é um campo de estudo importante para formação crítica dos estudantes e que se constitui como um espaço bastante significativo para o desenvolvimento e o exercício da capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas.

Embora as pesquisas tenham avançado em relação ao ensino e aprendizagem da álgebra e contemplem alguns fatores importantes, como podemos observar na literatura, outras pesquisas deixam algumas questões para trás, muitas vezes por insuficiência de ferramentas de análise.

Em particular, chamamos atenção para a pesquisa de Brito Menezes (2006) que aponta, claramente, que em alguns momentos da sua análise existe uma dificuldade em identificar a inter-relação do contrato didático e a transposição didática interna, porque os fenômenos em alguns momentos se confundem. Entendemos que, com o advento das praxeologias, existe uma possibilidade de minimizar essas dificuldades em termos de identificação dos elementos das transposições didáticas internas: organizações matemáticas e didáticas.

Nesse sentido, reiteramos que pretendemos contribuir com a nossa pesquisa para relação que existe entre o Contrato Didático (negociações, rupturas e renegociações) e as organizações matemáticas e didáticas, quando temos as equações do 2º grau como o saber algébrico no jogo didático.

Para tanto, elaboramos algumas questões que pretendemos responder ao término da pesquisa:

- Como se comportam numa relação didática o professor e seus alunos, sob o ponto de vista do contrato didático, no ensino das equações do segundo grau?
- Quais organizações matemáticas e didáticas surgem no ensino de equação do segundo grau, sob o ponto de vista da teoria antropológica do didático?
- Qual relação entre o contrato didático e as organizações matemáticas, no ensino das equações do segundo grau?
- Qual relação entre o contrato didático e as organizações didáticas, no ensino das equações do segundo grau?

Para responder às questões apresentadas acima, utilizamos a noção de contrato didático, um os pilares da TSD, e a noção de organizações matemáticas e didáticas, noções que encontramos na TAD.

Os sujeitos envolvidos foram dois professores do 9º ano do ensino fundamental. Chamamos atenção para o fato de que um dos professores é considerado como sujeito principal, e o outro como complementar. O sujeito

complementar surgiu com intuito de analisar algumas relações no momento de estabelecer as organizações matemáticas e didáticas.

Ainda no contexto dos problemas a serem investigados, consideramos relevante destacar as preocupações de Brousseau¹⁵ (2007, p. 41), que se traduzem em forma de questões e localizam-se no entorno da nossa pesquisa: “(...) *como as praxeologias assim associadas apresentam os traços das intenções didáticas?*”. O sentido dado as praxeologias são: as tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. Nesse contexto, de forma mais específica, “*qual é o lugar das praxeologias nos processos didáticos segundo a divisão das responsabilidades do contrato?*”

Brousseau (2007) entende que essas indagações são questões importantes e que precisam ser discutidas no âmbito das pesquisas em didática da matemática. Essa consideração do pesquisador reforça a nossa motivação em investigar a relação do Contrato Didático com as Organizações Praxeológicas.

1.2 Os Objetivos

Tomando como referência as nossas questões de pesquisa, apresentamos os nossos objetivos.

1.2.1 Objetivo Geral

Analisar as relações entre o contrato didático e as organizações matemáticas e didáticas no ensino da equação do segundo grau a uma incógnita.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Identificar na relação didática, sob a ótica do Contrato Didático, as negociações, as rupturas e as renegociações no ensino de equação do segundo grau;

¹⁵ Texto original: Mais comment la praxéologie ainsi associée à cet assortiment presente-t-elle les traces des intentions didactiques, la démarcation entre les connaissances du répertoire et celles dont l'acquisition ou le changement de régime sont attendus? Plus généralement, quelle place tiennent les praxéologies dans les processus didactiques suivant le partage des responsabilités du contrat?

- Caracterizar as organizações matemáticas - os tipos de tarefas, as técnicas, as tecnologias e as teorias - no ensino de equações do segundo grau;
- Identificar as organizações didáticas – os seis momentos didáticos – no ensino de equações do segundo grau.

Em termos de Metodologia, para atingir o objetivo geral apresentado anteriormente, elegemos como sujeitos participantes do nosso estudo dois professores do 9º ano do ensino fundamental e os seus respectivos alunos e tomamos como aporte teórico a noção de Contrato Didático, um dos pilares da TSD, que permite analisar a relação didático (professor-alunos-saber), suas negociação, suas rupturas e suas renegociação, bem como as noções da TAD, as organizações matemáticas (tipos de tarefa, técnica, tecnologias, teorias) e as organizações didáticas (os momentos didáticos). Essas noções são consideradas por Chevallard (1996) como potentes ferramentas para análise da prática escolar.

Nosso objetivo geral se desdobra em três objetivos específicos. O primeiro consiste em identificar na relação didática, sob a ótica do contrato didático, as negociações, as rupturas e as renegociações no ensino de equação do segundo grau a uma incógnita. Para a realização desse objetivo, e de todos os outros que apresentaremos adiante, foi necessário filmar uma determinada quantidade de aulas de dois professores e transcrever alguns recortes, para, posteriormente, serem analisadas. Ainda no que diz respeito à noção de contrato didático, buscamos, na literatura e na nossa fundamentação teórica, construir os critérios que possibilitem a análise dos dados.

O segundo objetivo específico consiste em identificar na relação didática, sob a ótica da teoria antropológica do didático, as organizações matemáticas: tipo de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias, no ensino das equações do segundo grau a uma incógnita. A realização desse objetivo depende, também, de uma análise a priori de livros didáticos antigos (compêndios) de matemática que tratam das equações do segundo grau. Essa análise procura reconstruir as praxeologias pontuais (tipos de tarefa, técnicas, tecnologias e teorias) para o ensino das equações do segundo grau a uma incógnita. Uma outra preocupação nossa é que essas informações possam, também, contribuir na formulação dos critérios para a análise dos dados.

O terceiro objetivo consiste em identificar na relação didática, sob a ótica da teoria antropológica do didático, as organizações didáticas, em especial os momentos didáticos: temos o primeiro encontro propriamente dito com as tarefas; a exploração do tipo de tarefa e elaboração da técnica; no terceiro momento, temos a constituição do ambiente tecnológico-teórico; no quarto, o trabalho da técnica; no quinto, a institucionalização e no sexto a avaliação. Além disso, a partir da nossa fundamentação teórica, procuramos construir nossos critérios para análise desse objetivo.

Para auxiliar a nossa pesquisa e responder aos objetivos, optamos por uma abordagem qualitativa de cunho etnográfico, tal como preconizam Ludke e André (1986) e André (2007a).

1.3 Apresentação da Tese

Organizamos a nossa tese em seis capítulos: introdução, o contrato didático, a teoria antropológica do didático, a álgebra como campo de pesquisa, a abordagem metodológica e, por fim, o capítulo referente a análise dos dados.

O primeiro capítulo diz respeito ao que foi construído até o momento. No segundo capítulo, apresentamos a fundamentação teórica referente ao Contrato Didático. Nele discutimos o contrato didático, procurando olhar, inicialmente, para sua gênese. Contemplamos discussões sobre essa noção teórica, tanto no contexto empírico, como no contexto epistemológico. Na sequência, apresentamos algumas contribuições que motivaram o surgimento do contrato didático como, por exemplo, o culturalismo didático. Além disso, apontamos a relação endógena do contrato didático com outros elementos conceituais da TSD. Entre outras questões, chamamos atenção para um tópico que discute a relação do contrato didático e o contrato institucional.

Destinamos o terceiro capítulo para fundamentar a teoria antropológica do didático. Nesse sentido, apresentamos os conceitos fundamentais da transposição didática: os saberes (científico, a ensinar e ensinado), vigilância epistemológica, noosfera, etc. Passamos a discutir os conceitos da teoria antropológica do didático com enfoque: na noção de praxeologias (tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria); na ecologia das praxeologias e os níveis de codeterminação, bem como discutimos o tema organizações didáticas, em especial os momentos de estudo ou didáticos.

No quarto capítulo, tratamos do saber algébrico: as equações do segundo grau. Inicialmente, tomamos os aspectos históricos sobre a álgebra para levantar algumas discussões sobre o tema. Logo após, apontamos, a partir da própria história, as questões relacionadas às equações do segundo grau. Ao apresentar esses elementos, partimos para discutir as equações do segundo grau, tanto do ponto de vista da matemática, como do ponto de vista do ensino. Apresentamos, também, um breve olhar sobre a álgebra no currículo Nacional e Pernambucano. Nesse sentido, apresentamos alguns modelos matemáticos com exemplos de resolução. Esses modelos fazem referências às organizações matemáticas, conceito da TAD.

O quinto capítulo foi destinado à abordagem metodológica. De início, apresentamos a característica da nossa pesquisa. Logo em seguida, apresentamos os objetivos, os sujeitos e o campo de pesquisa. Nesse capítulo, contemplamos, também, as etapas da pesquisa e os critérios de análise.

No último capítulo, apresentamos a análise dos dados. Nesse momento, procuramos responder todas as questões e objetivos que inicialmente foram elaborados.

A partir de agora, daremos continuidade ao nosso trabalho, apresentando na sequência: os capítulos teóricos, a abordagem metodológica e a análise dos dados.

CAPITULO 2

O CONTRATO DIDÁTICO

Neste capítulo, registraremos as principais contribuições teóricas da noção de contrato didático, proposta, inicialmente, por Guy Brousseau (1978), discutida em várias oportunidades por esse mesmo pesquisador (1984, 1986, 1996b, 1997) e retomada em inúmeros estudos por seus colaboradores que compreenderam a relevância e densidade teórica dessa noção. O contrato didático é considerado um dos pilares de sustentação da Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 2008), o que a faz estabelecer relações estreitas com os conceitos que a constituem. Apresentaremos, então, dentre outras questões, uma construção conceitual sobre o Contrato Didático, desde a sua gênese, passando pela evolução desse conceito e pelo funcionamento dele na sala de aula, até a relação entre ele e outros contratos.

2.1 A Geografia Conceitual¹⁶ da Noção de Contrato Didático: um olhar sobre a gênese do conceito

No final dos anos 70 do século passado, Guy Brousseau desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento da Didática da Matemática como ciência e disciplina científica. O foco principal dessa área é o interesse pela produção, comunicação e apropriação do conhecimento entre os homens ou as instituições humanas.

Nessa mesma época, foram vários os trabalhos realizados pelo pesquisador, entre eles, os primeiros elementos da teoria das situações didáticas que se tornaram públicos por meio de sua tese de doutorado (BROUSSEAU, 1986a). Nesse contexto, foram surgindo os elementos teóricos da noção de contrato didático.

As pesquisas propostas por Brousseau e Peres (1981) foram motivadas por problemas de diferentes naturezas, em especial por aqueles relacionados ao ensino, à aprendizagem matemática e à significação. Essas três noções hoje são o centro das preocupações didáticas e estão, como veremos a seguir, na constituição do fenômeno contrato didático (SARRAZY, 1995).

¹⁶ Tomamos a nomenclatura “Geografia Conceitual” a partir de Sarrazy (1995), quando da discussão acerca do contrato didático. Entendemos que o termo “geografia conceitual” permite-nos olhar, de várias formas, para o conceito de contrato didático a partir de sua gênese.

Tais preocupações serão apresentadas sob a perspectiva que chamamos de Geografia Conceitual do Contrato Didático (SARRAZY, 1995). Assim, dois caminhos que motivaram o surgimento do conceito serão discutidos: o contexto empírico e o epistemológico, na mesma direção que propôs Sarrazy (*ibidem*).

2.1.1 O Contrato Didático no Contexto Empírico

No contexto empírico, as primeiras questões sobre o contrato didático foram levantadas em 1978 por G. Brousseau (2008). Esse pesquisador observou que crianças que alcançavam sucesso em outras disciplinas apresentavam problemas de aquisição conceitual, dificuldades de aprendizagem ou falta de “gosto” pela matemática (BROUSSEAU; PERES, 1981). Segundo Bessot (2003), essas falhas eletivas surgiram não da incapacidade de aprender, mas devido aos contratos didáticos existentes.

Pouco tempo depois, Brousseau e Peres (1981) relatam observações de um estudo de caso que se tornou famoso no campo da Didática da Matemática, “o caso Gael”. De maneira resumida, podemos dizer que esses pesquisadores constataram a incapacidade de Gael de envolver-se no processo de aprendizagem em que o conhecimento matemático era o produto de uma construção advinda da interação com o “meio¹⁷” didático, fenômeno posteriormente interpretado por Chevallard (1988) como contrato didático (BROUSSEAU, 2008). Para Henry (1991), essa constatação seria o ponto de partida para discussões sobre os efeitos de contrato.

O problema que fez surgir esse fenômeno foi intitulado como “*A Idade do Capitão*”, título do livro de Stella Baruk¹⁸. Os sujeitos envolvidos na resolução da atividade foram crianças que estavam nos primeiros anos de escolaridade (CHEVALLARD; BOSCH; GASCON, 2001; SARRAZY, 1995; BROUSSEAU, 1997). O enunciado do problema foi o seguinte: “*Em um navio embarcaram 26 ovelhas e 18 cabras. Qual a idade do capitão?*”

Esse problema, que faz parte de uma famosa experiência realizada no IREM de Grenoble, foi proposto a 97 alunos. Dentre eles, 76 utilizaram o enunciado para encontrar a resposta, ou seja, a idade do capitão. A partir desses resultados, Stella Baruk refletiu sobre como o ensino da matemática estava transformando os alunos

¹⁷ Esse conceito – central para compreensão da noção do de contrato didático – será discutido mais adiante.

¹⁸ BARUK, S. (1985). *L'âge du capitaine*. Paris: Eds. Seuil.

em verdadeiros “automaths¹⁹”, visto que respondiam, de maneira absurda, perguntas absurdas (HENRY, 1991).

Segundo Brito Menezes (2006), se essa experiência fosse realizada no Brasil, poderíamos encontrar resultados semelhantes, pois é comum o estabelecimento de um tipo de contrato didático em matemática que parte do pressuposto de que basta fazer-se a combinação dos números do enunciado de um problema para resolvê-lo.

É possível perceber na pesquisa de Almeida (2009) que, quanto à passagem da linguagem natural para linguagem algébrica, o professor estabelece, no seu contrato com os alunos, a ideia de que todo problema de matemática traz palavras-chaves e os alunos podem até desprezar o problema como um todo e fixarem-se apenas em tais palavras – ganhou, perdeu, achou etc. –, que sistematizarão a operação a ser realizada com os números envolvidos no problema. Essa ideia pode gerar um equívoco, uma vez que nem sempre as palavras-chaves conduzirão à operação correta.

Para Sarrazy (1995), o que se observou, a partir do comportamento das crianças frente ao problema referente à idade do capitão, assemelha-se ao que se constatou em relação ao sujeito de pesquisa “Gael”: o conhecimento não teria outro sentido que não o de uma *“atividade ritualizada onde os modelos são repetidos”* (SARRAZY, 1995, p. 87).

Essas atividades nos fazem lembrar que a aquisição do conhecimento por parte dos alunos, nessas situações, segue o caminho das situações descontextualizadas. Caracteriza o tipo de atividades em que o professor produz (de forma implícita ou explícita) um comportamento no aluno que é fruto do seu “desejo”, da sua autoridade pedagógica: *“aquilo que me ensinaram”, “o que o professor diz que é preciso fazer”*. Na pesquisa referente a Gael, essas respostas surgiram por parte dos alunos ao serem indagados sobre as explicações da atividade (SARRAZY, 1995, p. 87).

Brousseau e Peres (1981) alertam que a pesquisa procurou provocar em Gael uma ruptura de concepção a partir das situações didáticas²⁰. Ao concordar em se envolver com o problema que lhe é “devolvido²¹”, Gael entra no jogo e a sua relação ao saber é modificada, quando comparada à situação inicial. Essa visão se coaduna

¹⁹ Um trocadilho que sugere a ideia de “autômatos em matemática”.

²⁰ Adiante conceituaremos as Situações Didáticas.

²¹ Nos escritos mais atualizados de Guy Brousseau (1986, 1996b, 2008, 2010), podemos perceber que o conceito de “meio”, o conceito de “devolução” e outros que congregam a teoria das situações didáticas mantêm uma relação estreita com contrato didático e serão apresentados no decorrer do trabalho.

com um dos principais objetivos de uma relação didática: *“permitir que o aluno modifique a sua relação inicial com o saber”* (JONNAERT; BORGHT, 2002, p. 166).

Os resultados das primeiras questões ensejam a existência de uma relação triangular: o professor (o que ensina), o aluno (o que é ensinado) e o saber (objeto de ensino). Essa relação é produto das situações didáticas e fizeram surgir os elementos iniciais do conceito de contrato didático, definido por Sarrazy (1995, p. 88) como um *“conjunto de comportamentos (específicos [conhecimentos ensinados]) do professor, que são esperados pelo aluno, e o conjunto dos comportamentos do aluno que são esperados pelo professor”*.

2.1.2 O Contrato Didático no Contexto Epistemológico

Do ponto de vista epistemológico, existem duas tendências²² que contribuíram de forma significativa para o avanço do conceito de contrato didático até o advento da teoria das situações: *“o interacionismo e a sociologia das organizações”* (SARRAZY, 1995, p. 92).

O movimento interacionista teve início na França, no século passado, por volta dos anos 70, com as pesquisas anglo-saxônicas. Segundo Sarrazy (1995, p. 92), o pesquisador Goffman²³ (1974) propôs que *“o contrato didático poderia ser definido como um conjunto de modelizações aceitáveis e divididas que devem se atualizar a propósito de um conhecimento no domínio de interação didática”*²⁴.

Outros avanços, ainda no contexto interacionista, sugerem que a aprendizagem pode ser considerada como processos individuais que se desenvolvem graças não só às interações do sujeito com os outros como também do sujeito com o “meio”. Isso significa que as aprendizagens escolares ocorrem em situações nas quais o sujeito se depara com determinadas exigências (JONNAERT; BORGHT, 2002). Quero dizer, as situações com as quais o sujeito se depara são fontes de aprendizagem; elas confrontam o sujeito com as exigências da situação.

²² O surgimento das tendências interacionista e sociológica foi marcado pela ruptura do movimento estruturalista que surgiu na França por volta 1970 do século passado (SARRAZY, 1995).

²³ Para maiores aprofundamentos, GOFFMAN, E. *Les rites d'interactions*, [traduit de l'anglais par A. KIHM], Paris: les Éditions de Minuit, 1971, 230 p.

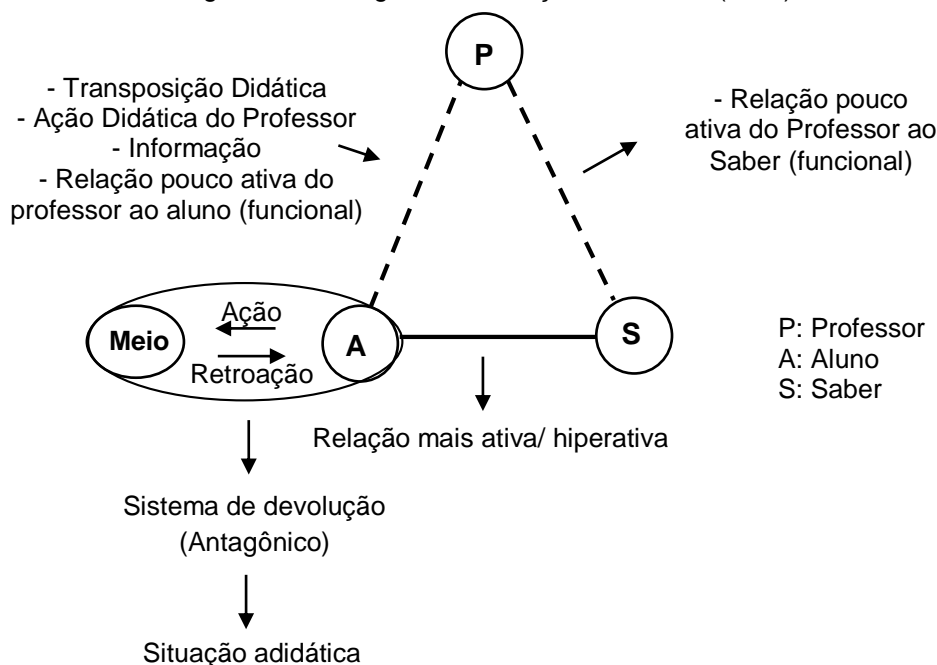
²⁴ “Le contrat didactique pourrait être défini comme l'ensemble des modalisations acceptables et partagées qui doivent s'actualiser à propos d'une connaissance dans le cadre d'une interaction didactique”.

A interação com o meio remete à relação didática que, por sua vez, reporta à sociologia das organizações. Essa tendência aponta uma relação mais próxima com a modelagem das Situações Didáticas (SD), que pode ter influenciado Brousseau na sua construção teórica.

Isso fez avançar os estudos da Teoria das Situações Didáticas (TSD) em uma direção que permite situar o contrato didático tanto na dimensão sociocognitiva²⁵ como no seu contexto interno. O avanço dos estudos referentes a essas dimensões fez surgir outros conceitos os quais consideramos fundamentais para o desenvolvimento do contrato didático: “a incerteza, a negociação e os jogos”²⁶ (SARRAZY, 1995, p. 89).

A modelagem da SD²⁷ quanto às interações sociocognitivas acrescenta um novo componente na relação triangular (o professor, o aluno e o saber): o “meio” (*milieu*). Esse meio permite criar um subsistema antagônico que faz o aluno se tornar um sujeito autônomo na construção do saber matemático (BROUSSEAU, 1986; 2008). Podemos perceber que esse sistema modifica o estado de conhecimento do aluno de forma não controlada. A figura a seguir ilustra a nossa tentativa de sistematizar essa ideia.

Figura 1: O triângulo das situações e o meio (meio)



Fonte: Adaptado de Brousseau (2008, p. 54)

²⁵ Sob o ponto de vista das interações sociocognitivas, uma situação relativa a um conhecimento que o professor procura comunicar ao aluno põe em jogo três componentes: o aluno, o professor e o meio. O mecanismo e o sentido dessa situação são diferentes para o professor e para o aluno.

²⁶ “incertitude, négociation, jeux”.

²⁷ Sempre que aparecer a sigla SD, estamos nos referindo à situação didática.

Chamamos de “retroações” uma informação que parte do meio, ou seja, a informação que é recebida pelo aluno como uma resposta, positiva ou negativa, sobre a sua ação e que lhe permita ajustar essa ação, aceitar ou rejeitar uma hipótese, escolher entre várias soluções (BESSOT, 2003). Os elementos modelados no meio não são necessariamente materiais, pois podem estar relacionados ao conhecimento antigo do sujeito, ao conhecimento estabilizado; as ações dos sujeitos podem ser “mentais”, ou seja, ações não visíveis.

Na configuração em que o “meio” está inserido, o sentido da situação na relação didática é diferente tanto para o professor quanto para o aluno. O professor deve gerenciar o paradoxo inerente a toda situação de ensino, de forma que os conhecimentos do aluno possam se manifestar apenas pelas decisões que ele toma pessoalmente, em situações apropriadas (situações planejadas/situações didáticas). Assim, *“o professor não pode lhe dizer o que quer que faça, nem determinar suas decisões, porque, nesse caso, abriria mão da possibilidade de o aluno as produzir, e também de ensiná-las a ele”* (BROUSSEAU, 1983, p. 3; 2008, p. 76).

Podemos, então, perceber que o ato de aprender não consiste em cumprir ordens e seguir as regras do professor nem tampouco em copiar apenas as soluções dos problemas que foram propostos em sala de aula. O aluno, por sua vez, deve concordar em se envolver no problema, mesmo que ele não tenha o conhecimento necessário para resolvê-lo. Esse é precisamente o desafio da relação didática, estabelecido pelo professor por meio da situação didática. O aluno, ao se envolver nessa situação, deverá produzir seus próprios conhecimentos em um *processo autônomo*, particular com a *situação*.

Na verdade, para Brousseau (1986; 1996b; 2008) e outros pesquisadores (SARRAZY, 1995; BESSOT, 2003; MARGOLINAS, 1998; CHEVALLARD, 2007), o jogador (aluno) não pode se sentir satisfeito com um jogo²⁸ cujas saídas ele conhecia antecipadamente, ou seja, um jogo no qual a aprendizagem já tenha acontecido em

²⁸ Ver Brousseau (1996b, p. 76-84) para maiores aprofundamentos. Esse pesquisador discute a relação entre “situação e jogo”. De início, define “jogo” como atividade psíquica ou mental, puramente gratuita, geralmente fundada na convenção ou na ficção, que não tem, na consciência daquele que a ela se entrega, outra finalidade senão ela própria, outro objetivo além do prazer que confere. Segundo o pesquisador, esta definição põe essencialmente um sena um jogador capaz de experimentar prazer, de conceber uma ficção e de estabelecer convenção e relações com um meio não específico. O termo jogo didática surge dessas questões, tomando didático, como algo relacionado a ensino e a aprendizagem.

outra situação. Da mesma forma, o aluno não se satisfaria com um jogo em que não há qualquer resultado possível. Em ambas as situações, o jogo perderia o sentido, pois o sistema antagônico que o envolve é falho.

Nessa perspectiva, a “*incerteza*” se torna um elemento fundamental (BESSOT, 2003, D’AMORE, 2007a). Ela pode ser considerada um tipo de “combustível” que faz avançar a situação, conduzindo o aluno à aprendizagem.

Para Brousseau (1996b), “*a incerteza constitui a condição da devolução da situação adidática²⁹ ao aluno*”, pois o prazer, o sentido de jogar, engajar-se no processo de ensino e aprendizagem nasce justamente dela, na medida em que o interesse do aluno será maior que o domínio na situação.

A incerteza na qual se encontra mergulhado é, simultaneamente, fonte de angústia e de prazer. A redução desta incerteza é o objeto e o motor da atividade intelectual. Mas conhecer a solução à partida, isto é, ter transformado respostas satisfatórias, mais locais, num método que fornece a resposta em todos os casos, destrói o caráter incerto da situação, que fica então esvaziada de todo o seu interesse (BROUSSEAU, 1996b, p. 71).

Por sua vez, Bessot (2003) entende que a incerteza deve fazer parte da situação adidática. Não existindo a incerteza: o sistema ou está finalizado, com o sucesso do aluno, a aprendizagem; ou o aluno não entrou no jogo didático, o que ocasionará a falta de aprendizagem.

A dinâmica interna na situação didática diz respeito a um processo de “*negociação*” em que as regras do jogo são estabelecidas para que os alunos e o professor mantenham uma relação com o meio adidático. O produto dessa dinâmica permite a evolução da relação didática na direção do aprendizado.

Assim, o contrato didático começa a ser entendido como “*uma ficção que torna possível a negociação*” (SARRAZY, 1995, p. 90) a qual permite ao aluno conquistar a aprendizagem matemática (BROUSSEAU, 1988). Essa “ficção” é aqui entendida como situações não reais criadas pelo professor a fim de fazer o aluno produzir um conhecimento (MARGOLINAS, 1998) que se justifica pela lógica interna da situação, sem o uso de razões didáticas. Complementando, remetemo-nos a Sarrazy (1995, p.

²⁹ As situações adidáticas fazem parte das situações didáticas, as quais podem ser entendidas como todo contexto em que o aluno está inserido. Nele também estão incluídos o professor e o sistema educacional. A situação adidática diz respeito ao momento em que o aluno aceita o problema como seu e o professor se recusa a intervir como fornecedor dos conhecimentos que quer ver surgir. Queremos dizer que o aluno se envolve pela lógica interna da situação e não pela vontade do professor.

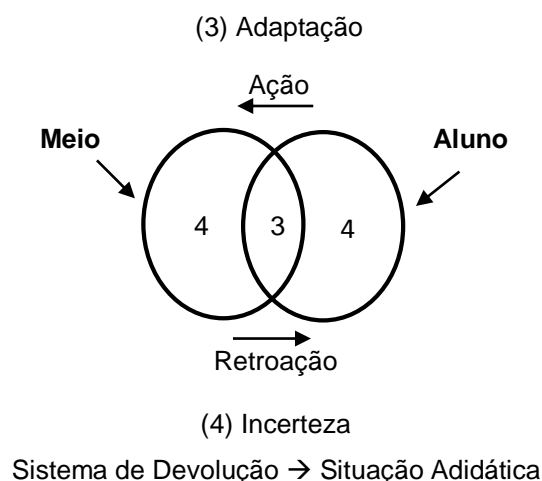
92), para quem a aprendizagem se manifesta pela construção de um conhecimento que corresponde a “*uma estratégia ótima, um caminho menos custoso e mais eficaz*”, e é definida como uma adaptação³⁰ à situação.

No percurso em que o sujeito segue procurando se adaptar à situação, vão sendo gerados frutos que correspondem à aprendizagem e, conseqüentemente, à redução da incerteza ou seu controle. Percebe-se a existência de uma relação proporcional inversa: mais adaptação, menos incerteza. É importante, contudo, registrar que não podemos considerar de forma ingênua a busca da estratégia ótima, pois nela existe toda uma relação permeada por elementos complexos e dinâmicos devido aos quais pode aumentar a incerteza, equilibrar-se, diminuir até advir a conquista de uma aprendizagem.

Nessa direção, Bessot (2003) aponta que, se não houver mais incerteza (como opção relevante) sobre os estados terminais da situação, é porque o aluno respondeu à situação com êxito.

Na figura proposta abaixo, pretendemos contribuir para uma melhor compreensão da relação entre o aumento da adaptação e a redução da incerteza, que caracteriza o surgimento da aprendizagem. Consideramos dois espaços que se encontram em um sistema de devolução e, conseqüentemente, em situação adidática.

Figura 2: A devolução segundo adaptação e incerteza



Fonte: Adaptado de Bessot (2003)

³⁰ O sentido aqui aludido é o de “adaptação” para Piaget (BRUN, 1996; BROUSSEAU, 1996a).

Representamos, aqui, a ideia sobre a qual estamos nos debruçando nos últimos parágrafos. A construção dela toma como base o diálogo de Brousseau (1996b), quando esse autor propõe que a incerteza constitui a condição da devolução. Para Bessot (2003), “é necessário a incerteza na situação adidática; o meio modeliza a situação adidática; o aluno não tem controle no meio, de forma que produz conhecimento”.

Acreditamos que o sucesso da aprendizagem depende da forma como o aluno se envolve com o meio, da intensidade desse envolvimento e das condições de ampliação à *área de adaptação (área 3)* da relação (aluno e meio). A partir do momento em que a *área de adaptação aumenta*, conseqüentemente, a *área da incerteza (área 4)* que não faz parte da interseção diminui para o aluno.

Assim, estamos diante de uma relação inversa: *mais adaptação, menos incerteza*. O desejável seria que pudéssemos encontrar a área da adaptação sempre maior que a área do aluno ($Ad > A$). Reiteramos que essa ideia pode certamente ser vista nas palavras de Sarrazy (1995) quando ele propõe que o caminho rápido para obtenção do conhecimento é aquele em que o aluno encontra mais eficiência em menos tempo. A adaptação seria a resposta.

Nessa análise, podemos acrescentar que a sobrevivência da relação é determinada pelo diálogo, pela negociação das regras do jogo (jogos do aluno com o meio adidático). Nesse sentido, consideramos a área de adaptação (área 3) como aquela capaz de gerar bons frutos para aprendizagens e, em contrapartida, a incerteza (área 4) pode ser considerada como uma área pouco fértil, de forma que isolar-se nela representaria uma diminuição do diálogo.

De acordo com as reflexões de Jonnaert e Borght (2002) bem como as de Brun (1996), estamos diante de uma situação semelhante à do construtivismo de Piaget, uma vez que, para esse pesquisador, o sujeito aprende organizando o seu mundo ao mesmo tempo em que se organiza por meio dos processos de adaptação, de assimilação e de acomodação. O desenvolvimento cognitivo se baseia na passagem de um estágio de desequilíbrio, que gera conflitos, para um estágio de equilíbrio, que condiciona uma das formas de obtenção de um conhecimento novo.

Bessot (2003) e Margolinas (1998) corroboram essa ideia, propondo que o sujeito aprende a partir da adaptação³¹ (assimilação e acomodação) a um meio que está produzindo contradições e desequilíbrio. Para Bessot (2003), outros dois elementos que se encontram na relação são considerados fundamentais para mantê-la viva: a ação por parte do aluno e a retroação por parte do meio. Consideramos, nesse sentido, que esses dois elementos se estruturam no interior da área de adaptação, trabalhando de forma simultânea (para cada ação existe uma retroação) e não controlada (não é possível determinar o momento da ação).

Conforme Bessot (2003), o meio sem intenção didática – que não foi organizado voluntariamente para ensinar um conhecimento – é insuficiente para que o sujeito construa todo o conhecimento que a sociedade deseja.

A esse respeito Brousseau propõe que

o aluno aprende adaptando-se a um meio que é fator de contradições, de dificuldades, de desequilíbrios, um pouco como acontece à sociedade humana. Este saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se através de respostas novas, que são a prova da aprendizagem (BROUSSEAU, 1996b, p. 49)

Sarrazy (1995, p. 92) discute que um momento importante na constituição do contrato didático e que se associa à discussão da sociologia das organizações³² foi apresentado por Brousseau (1970) numa conferência sob o título “*Aprendizagem das Estruturas*”, em que propõe uma modelização das situações didáticas (dialética da ação, da formulação e da validação). Os temas considerados influentes foram: a teoria dos jogos como modelo da relação didática; a noção de incerteza; a negociação e a aprendizagem por ruptura (SARRAZY, 1995; BROUSSEAU, 1986).

Os “*jogos como modelos da relação didática*” são levados em consideração por revelarem características mais ou menos abertas que condicionam uma margem de “incerteza” para os autores envolvidos, o que os faz atuar de forma desigual. Tais desigualdades frente à situação serão usadas como fonte de controle de uma possível “negociação”. Então, a “incerteza” posta pelo controlador produz um envolvimento maior dos parceiros no jogo e amplia as possibilidades de eles responderem ao problema.

³¹ Os problemas de assimilação dizem respeito ao aumento de esquemas já adquiridos pela agregação de fatos novos, a acomodação, que significa a reorganização dos esquemas para aprender questões novas ou para resolver contradições (BROUSSEAU, 1996b, p. 99).

³² Para aprofundar informações, ver CROZIER M., FRIEDBERG E. (1981). *L'acteur et le système: Les contraintes de l'action collective*, Paris: Seuil, 500 p.

Segundo Sarrazy (1995), a aprendizagem por ruptura está relacionada, ao mesmo tempo, a uma ruptura com os antigos jogos cognitivos, efetivos, relacionais, institucionais, e à criação de novos jogos “menos custosos e mais eficazes”, mas também incertos.

Assim, todo esse caminho aponta outra perspectiva que apresentaremos a seguir: o culturalismo didático, que contribuiu para o desenvolvimento do conceito de contrato didático.

2.1.3 O Culturalismo Didático como Mecanismo Gerador de Contrato Didático

Para Brousseau (1980), um momento de destaque que contribui para a compreensão das possíveis razões da perenidade de determinadas interpretações sobre o contrato didático é marcado por uma espécie de “culturalismo didático” que teve origem no interacionismo. Esse aspecto, que aparece como um mecanismo gerador de contrato, diz respeito às repetições de hábitos específicos do professor, que os “*reproduz, conscientemente ou não, de forma repetitiva na sua prática de ensino*” (SARRAZY, 1995).

Esses hábitos que fazem parte da prática do professor permitem ao aluno decodificar a atividade didática. O resultado das atividades que lhes são oferecidas depende em grande medida das ações repetidas pelo professor. Assim, o contrato didático se apresenta “como um traço das exigências habituais do professor sobre uma situação particular” (BESSOT, 2003, p.128).

A partir daí o contrato didático aparece como o produto de um modo específico de comunicação didática (ligado à epistemologia do professor), instaurando uma relação singular do aluno com o seu saber matemático e a situação didática (SARRAZY, 1995; BROUSSEAU, 1996a).

A fim de tomar suas decisões em sala de aula, os professores utilizam,

explícita ou implicitamente, qualquer tipo de conhecimentos, métodos, convicções sobre a maneira de encontrar, aprender ou organizar um saber. Essa bagagem epistemológica é essencialmente construída de modo empírico para satisfazer as necessidades didáticas. Algumas vezes, é o único instrumento que lhes permite propor os processos didáticos escolhidos e de fazê-los aceitar pelos alunos e pelo ambiente deles. O conjunto das convicções dos professores, dos alunos ou dos pais sobre o que convém fazer para ensinar, para aprender e para compreender os saberes que estão em jogo constitui uma epistemologia prática que é impossível ignorar ou eliminar (D'AMORE, 2007a, p. 190).

Outra interpretação do conceito de contrato didático surge no ano de 1984. Até então, alguns pesquisadores questionavam a existência de “bons e maus” contratos. Esse conceito passa a ser visto não apenas como um resultado de uma “*negociação a priori*” das relações na situação didática, em que é fixado um sistema de “*obrigações recíprocas*”, mas surge a partir da não aceitação da “*devolução*” por parte do aluno (BROUSSEAU, 1996b; JONNAERT; BORGHT, 2002). Sobre essa situação, podemos dizer que, no processo de devolução, “*se a aquisição do conhecimento não se produz, abre-se assim um processo ao aluno que não fez o que se espera dele, mas também um processo ao professor que não fez o que deveria ter feito implicitamente*” (BROUSSEAU, 1984, p. 03). Essa ideia se assemelha ao sistema de expectativa entre o aluno e professor.

Nesse contexto, a aprendizagem está ligada à ruptura do contrato didático, o ato de aprender implica para o aluno recusar o contrato (recusar uma negociação), mas, aceitar a responsabilidade do problema, o que caracteriza uma situação de devolução. “*A aprendizagem vai repousar, não sobre o funcionamento do contrato, mas sobre suas rupturas*” (BROUSSEAU, 1986).

As rupturas “são os principais motores da dinâmica de uma relação didática. Se o contrato didático é a turbina da relação didática (para retomar a expressão de Brousseau), essa turbina é alimentada essencialmente pelas rupturas de contrato” (JONNAERT; BORGHT, 2002, p. 194).

Assim, a ideia que existe, na relação didática, da existência de “bons ou maus”, “verdadeiros ou falsos” contratos é desprezada de forma radical, em detrimento da busca de promover e otimizar o processo didático. Dessa forma, surge a “busca de um contrato hipotético”, que “*constitui um conceito a serviço da didática fundamental para analisar os fenômenos de negociação, de emergência, de disfunção... do sentido nas situações didáticas*” (BROUSSEAU, 1996b, p. 53).

Vários foram os momentos em que apresentamos relações entre os elementos do contrato didático e os principais conceitos que constituem a TSD. Nessa direção, Brousseau (2008) alerta que a necessidade teórica de compreender os descompassos profundos que ocorrem no processo de aprendizagem coloca o contrato didático em evidência, e este promove vínculo entre as situações didáticas,

situações adidáticas e o processo de devolução. As relações que acontecem internamente na teoria propõem um sistema interno de relações endógenas.

2.2 Relações Endógenas do Contrato Didático na TSD

A Teoria das Situações Didáticas (TSD), desenvolvida por Brousseau (1978), teve como objetivo maior criar um modelo de interação entre o sujeito, o saber e o milieu (ou meio) no qual a aprendizagem deve se desenvolver.

O *meio* é considerado um sistema autônomo, antagônico ao sujeito. Embora seja um elemento fundamental para desenvolver a aprendizagem, devemos entender que ele, por si só, sem intenções didáticas, é insuficiente para permitir a aquisição do conhecimento matemático desejado. É necessária a presença do professor para criar e organizar um meio no qual serão desenvolvidas as situações favoráveis a essas aprendizagens (ALMOULOU, 2007, p.32).

Por outro lado, é necessária a existência de uma situação didática (SD) para dar início ao processo de aprendizagem, que diz respeito a todo o contexto em que o aluno está inserido, incluindo-se nele tudo que especificamente colabora para a formação do comportamento matemático. Brousseau chama de situação didática

um conjunto de relações estabelecidas explícita e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um determinado meio (que abrange eventualmente instrumento ou objetos) e um sistema educativo (representado pelo professor) com a finalidade de conseguir que estes alunos apropriem-se de um saber constituído ou em vias de constituição (BROUSSEAU, 1982, p.39)³³.

Essas relações não surgem ao acaso, mas são estabelecidas, conforme já mencionamos, mediante negociações entre o professor e os alunos, e o resultado delas tem sido denominado de contrato didático (GÁLVEZ, 1996). Esse contrato, por um lado, mantém características da situação didática – os componentes explícitos e implícitos da relação – e, por outro, define regras para o seu funcionamento.

A presença do contexto escolar não é parte essencial na definição de um sistema didático, mas é imprescindível o caráter intencional do sujeito em modificar o

³³ “Une situation didactique est un ensemble de rapports établis explicitement et/ou implicitement entre un élève ou un groupe d’élèves, un certain milieu (comprenant éventuellement des instruments ou des objets) et un système éducatif (le professeur) aux fins de faire approprier à ces élèves un savoir constitué ou en voie de constituion.” Disponível em: <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2012/03/82-3-Dun-probl%C3%A8me-%C3%A0-l%C3%A9tude-a-priori.pdf>

sistema de conhecimento do outro (BROUSSEAU, 2008; GÁLVES, 1996). A intencionalidade é considerada um “estopim” tanto para desencadear uma situação didática quanto para dar início a uma relação didática. A dinâmica que existe no interior das situações – tais como as negociações e as regras do jogo didático – mantém fortes relações com o meio adidático.

O ponto de partida da situação didática seria o de propor ao aluno situações de aprendizagens para que elabore seus conhecimentos como resposta pessoal a uma pergunta e os faça funcionar ou os modifique como resposta às exigências do meio e não a um desejo do professor (BROUSSEAU, 1996a). É a partir da situação didática que surge a situação de devolução e, posteriormente, a situação adidática. É sobre isso que discutiremos a seguir.

2.3 O Contrato Didático e a Devolução de uma Situação Adidática

Procuramos nesse tópico analisar a relação que o contrato didático mantém com as situações adidáticas. Para isso, fazemos referência a uma situação que trata de um jogo didático e tomamos dois elementos constitutivos do sistema didático: o professor e aluno – os jogadores (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001).

Destacamos, inicialmente, o caso da “devolução do problema”. Para que se torne efetiva essa devolução, é necessário que um dos jogadores (o professor) desenvolva estratégias com a finalidade de fazer o outro jogador (o aluno) apropriar-se de toda a história da situação adidática (do jogo) e responsabilizar-se por ela. A devolução precisa ser estabelecida com a menor quantidade possível de vestígios didáticos (controle do professor), ou seja, da indicação intencional do professor em dar informações sobre as atividades, as perguntas, as maneiras de resolver os problemas etc. (BROUSSEAU, 1996a).

Contudo, acreditamos que, mesmo tendo o professor de evitar disponibilizar informações didáticas, é necessário oportunizar ao aluno uma resposta inicial, uma estratégia de base proveniente dos seus conhecimentos anteriores. Porém, para Brousseau (1996a), essa estratégia deve sair prematuramente do jogo e mostrar-se suficientemente ineficaz a fim de que o aluno sinta a necessidade de realizar acomodações – modificações em seu sistema de conhecimento – para responder à situação proposta.

Além disso, o professor precisa propor ao aluno uma situação de aprendizagem para que este elabore conhecimentos como resposta pessoal a uma pergunta e faça-os funcionar ou modifique-os como resposta às exigências do meio, e não apenas porque deseja (BROUSSEAU, 1996a, p. 49). Entretanto, na ação didática, o professor enfrenta um dilema resultante, segundo Brousseau (1988), de um paradoxo, pois, numa atividade, ele “*não pode dizer de antemão exatamente qual seria a resposta correta ao aluno*”, mas precisa propor situações que façam “*o aluno aceitar a responsabilidade de entrar no jogo e responder a atividade*”. Essa atividade certamente tem que ser nova para o aluno (BROUSSEAU, 1988).

Ainda conforme Brousseau (2008, p. 91), outro paradoxo da devolução é o fato de que o professor, embora deseje que o aluno elabore a resposta com seus próprios meios, “*também quer – e tem o dever social de querer – que o aluno dê a resposta correta*”. Assim, ele precisa “*comunicar esse saber sem precisar revelá-lo, o que é incompatível com relação a uma relação contratual*”.

Nessa perspectiva, Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 218) consideram que, na devolução em uma situação didática, duas ações são importantes: apresentar ao aluno as regras do jogo e fazê-lo sentir-se responsável³⁴ na relação pelo resultado que deve alcançar. A realização dessas ações implica o cumprimento de uma parte essencial do contrato didático, mas não da totalidade dele.

Anteriormente apresentamos questões que contribuíram para a conceituação do contrato didático. Vários foram os diálogos em que pesquisadores utilizaram o sistema didático de forma direta ou indireta e as relações que nele são estabelecidas, para falar do contrato didático.

O sistema didático e as relações didáticas são dois eixos que julgamos importantes, pois eles são considerados como o ambiente onde nascem e residem o contrato e as organizações praxeológicas. Além disso, é tido também como um meio que proporciona múltiplas relações entre professor, alunos e um saber – sejam elas institucionais ou teóricas –, nas quais emergem fenômenos que os pesquisadores da didática da matemática entendem que devem ser investigados, compreendidos, teorizados. Por isso, empreenderemos uma discussão teórica sobre esse sistema e essas relações.

³⁴ No sentido de responsabilidade matemática, e não no sentido de culpa.

2.4 O Sistema Didático e a Relação Didática³⁵ na Instituição do Contrato Didático

A formação do sistema didático se dá no momento em que algumas pessoas se deparam com uma questão cuja resposta não está evidente e, devido a isso, decidem fazer algo para resolvê-la. Na busca da resposta em questão, as pessoas envolvidas se transformam em estudantes (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 195).

No âmbito da atividade docente, encontramos os estudantes (os alunos) que podem recorrer à ajuda de um coordenador de estudo (o professor) para resolver uma atividade problemática (que envolve um saber matemático). Esses três elementos integram o sistema didático e são considerados indissociáveis para apropriação de um saber matemático.

Por outro lado, por meio das múltiplas interações entre si, é constituída uma “relação dinâmica e complexa”, denominada pela didática da matemática como relação didática (BROUSSEAU, 1986). É no interior da relação didática que todo contrato didático se inscreve, por ele mesmo, de forma bem particular.

O sistema didático é composto de três elementos: dois deles humanos, o professor e o aluno (instituição de saber, como veremos adiante), e um não humano (um objeto), o saber matemático (SCHUBAUER-LEONI, 1988). Brousseau (1986) acrescenta que a entrada na relação se dá pelo polo do saber o qual determina, em larga medida, a forma como as relações serão estabelecidas e o ensino será conduzido. Assim, a mudança do saber conduz o professor e os alunos a estabelecerem uma relação diferente ao saber e, assim, surgem novos contratos.

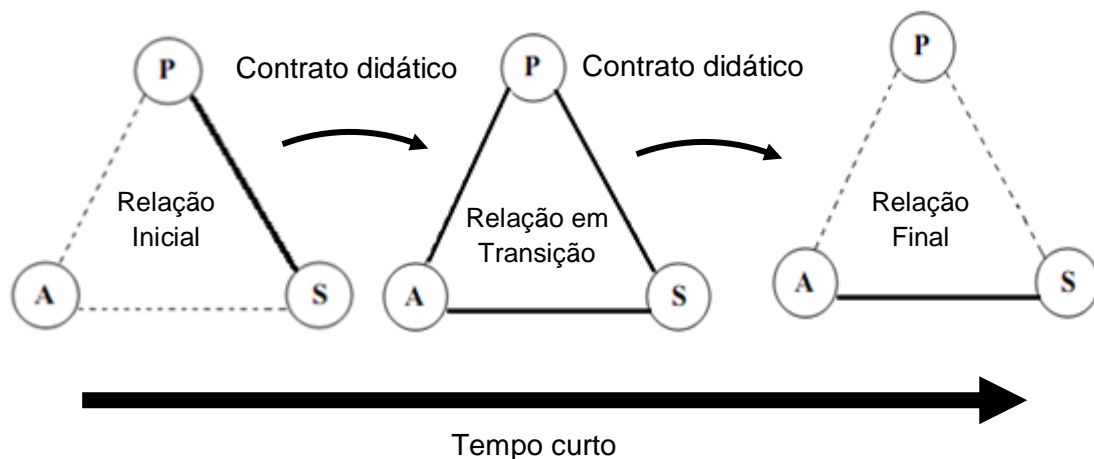
Essa apresentação nos remete ao triângulo da relação didática. A proposição desse triângulo como representante esquemático da relação didática é criticado por alguns pesquisadores (BROUSSEAU, 2008), os quais acreditam que essa representação resume a atividade do aluno apenas sob a ótica da ação do professor. Embora possamos aceitar que tal representação seja reducionista nesse aspecto, acreditamos que ela nos permite visualizar uma superfície e, mais particularmente, a área das interações entre três polos solidários. Cada um desses polos simboliza uma

³⁵ Procuramos destacar o sistema didático e a relação didática por entendermos que esse tema é de extrema importância para a constituição e manutenção do contrato didático. Além disso, julgamos que não podemos analisar contrato didático sem contemplar o ambiente em que ele ocorre. Fora da relação didática, o contrato didático perderia todo o seu significado, ou seja, deixaria de existir.

família de variáveis: as variáveis estabelecidas pelo próprio professor e as definidas pelas singularidades de cada um dos alunos em particular.

No interior das relações, tanto o professor quanto os alunos se relacionam com o saber. No início, considera-se que existe uma assimetria, no sentido de que o professor tem um saber que o aluno ainda não conquistou. Contudo, além da assimetria entre os saberes do professor e os de seus alunos, há diferentes relações de saberes com e entre os próprios alunos, de forma a conduzir a relação didática ao objetivo de modificar e fazer evoluir a relação inicial que o aluno tem ao saber (JONNAERT, 1994; JONNAERT; BORGHT, 2002). A figura abaixo representa essas considerações.

Figura 3: Assimetria na relação ao saber; negociações e rupturas

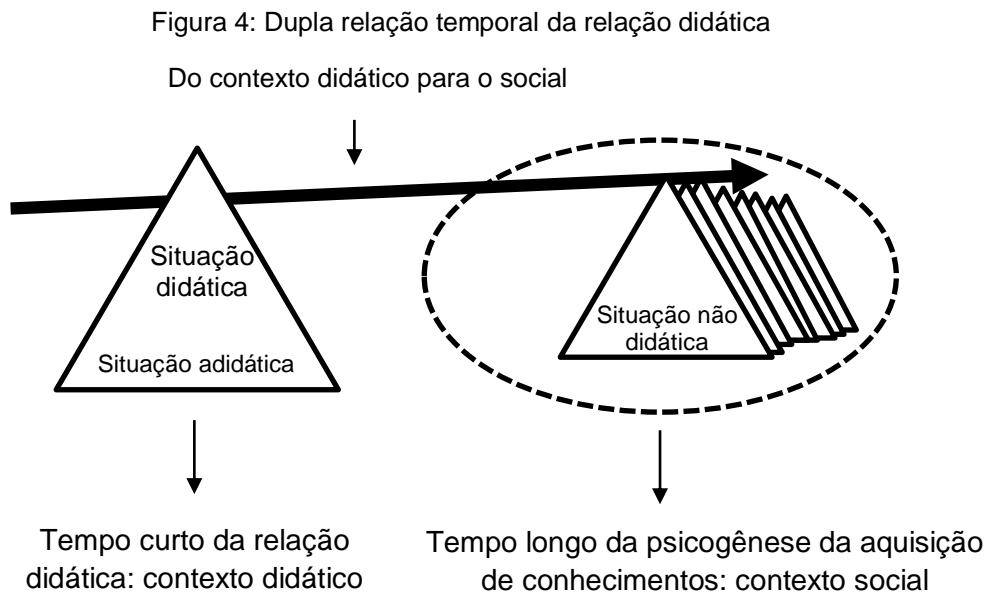


Fonte: Adaptado de Jonnaert e Borght (2002)

Na figura acima, o primeiro sistema apresenta inicialmente o aluno com uma relação “fraca” ou “inadequada” ao saber. O momento final sinaliza uma inversão total da relação ao saber. Sem a hipótese da dessimetria, o sistema didático perderia a razão de existir. Para Jonnaert (1996), o contrato didático seria o motivo principal para a inversão da relação, pois otimiza essas mudanças de relação ao saber.

Além disso, observamos, na figura acima, que há um tempo relativamente curto para essas mudanças acontecerem, levando em consideração a duração de um semestre letivo ou de um ano letivo. Por outro lado, podemos levar em conta o fato de que a construção do conhecimento poderia continuar em uma prolongada trajetória (final do ensino básico), que se caracteriza como longo tempo da psicogênese da aquisição do conhecimento.

Para Jonnaert e Borght (2002), há que se considerar uma dupla dimensão temporal: uma escala temporal curta, que corresponde ao momento do curso; e uma escala temporal longa, que em geral diz respeito ao processo de construção de conhecimentos desencadeada pelo aluno. A figura abaixo ajuda-nos a entender essa relação do contrato didático e sua inserção no tempo.



Fonte: Jonnaert e Borght (2002, p.168)

Na dupla dimensão apresentada acima, a escala temporal curta se refere à evolução das práticas e das concepções do aluno em confronto com uma nova situação. No início, o aluno estabelece uma relação inicial fraca ao saber (JONNAERT; BORGHT, 2002). Assim, a escala temporal, de forma geral, corresponde ao tempo da relação didática e é gerada pelo contrato didático.

A escala longa se desenvolve por um dado período de anos e vai além da relação didática. Para Jonnaert (1996, p. 128), ela oferece a possibilidade aos saberes escolares, se são pertinentes, de saírem do quadro escolar. Segundo esse autor, “Os conhecimentos que o aluno constrói não são saberes em desuso, saídos de um museu qualquer de saberes da escola”.

A situação didática e a adidática já foram discutidas anteriormente. Na situação não didática, a relação do aluno ao saber é independente da relação do professor ao saber. Ou seja, é um tipo de situação não organizada para aprendizagem. Para Margolinas (1998), essa é uma característica paradoxal do sistema de ensino, pois o seu objetivo [relação didática] é desaparecer. Acreditamos que a autora propõe que,

concluído o período em que fica na escola, o aluno deve ser capaz de utilizar seus conhecimentos em situações não didáticas, isto é, que não tenham sido construídas especificamente para adquirir o conhecimento. Assim, o aluno pode resolver problemas em situações do cotidiano, e não em situações de aprendizagem.

Vale destacar que toda essa estrutura e essa dinâmica que envolvem a relação didática pressupõem que

o ponto de partida da relação didática é a *intenção* alimentada por alguém (em geral, um professor) de estabelecer as condições para que uma ou várias outra(s) pessoa(s) (em geral, alunos) *aprendam com êxito* um conteúdo de aprendizagem (em geral conteúdos, sejam ou não saberes, relativos a uma disciplina escolar) (JONNAERT; BORGHT, 2002, p. 83).

Para que a relação didática se institua, deve haver, em primeiro lugar, a intenção do professor em propor situações de ensino que garantam aos alunos a apropriação do saber presente no jogo didático, cuja existência está condicionada a um sistema de relações, geralmente, em um espaço determinado (a sala de aula) e em um tempo disponível (um horário escolar).

O contrato didático se inscreve nessa multiplicidade de relações com os saberes em jogo. Cada relação com os saberes em jogo origina uma “*regra implícita*” do contrato que é parte integrante de toda a reflexão sobre o contrato didático (JONNAERT, 1996). Justificando a necessidade de estudar a relação didática, Jonnaert coloca que, a partir dela, são definidas as primeiras dimensões do quadro geral do funcionamento do contrato didático. Em uma condição geral, poderíamos pensar na existência da relação didática no momento em que precisamos ensinar a alguém alguma coisa.

Para Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 200), uma característica importante a ser analisada na relação didática é a de ser aberta ou fechada. A primeira acontece quando aluno não conhece de antemão o caminho a ser seguido ao longo do estudo e nem entende os motivos que fazem o professor levá-lo por esse caminho. Contudo, como o professor não tem condições de prever todas as dificuldades que existirão durante todo o processo didático, pois elas surgem nas relações contratuais, a relação didática pode ser fechada. Entretanto, toda tentativa de fechar essa relação pode promover o bloqueio ou o enfraquecimento do processo de estudo, causando o

empobrecimento e até a paralisação da aprendizagem. Isso pode ser entendido como um paradoxo, conforme já mencionamos, do contrato didático³⁶.

Assim, tanto Brousseau (1986) quanto Jonnaert e Borght (2002) consideram a relação didática uma relação complexa, pois é motivada por uma série de componentes que se encontram em constante interação e são, conforme, Jonnaert e Borght (2002, p. 84/85), essenciais. Assim, devem ser entendidos de forma não hierárquica. Esses componentes são os seguintes:

- (1) *a presença de um ou mais alunos*: parte constitutiva de uma relação didática e componente importante, além de construtor do próprio conhecimento;
- (2) *a presença um ou mais professores*: parte constitutiva de uma relação didática e componente importante no processo de ensino-aprendizagem, além de responsável pelas situações didáticas;
- (3) *a definição das intenções do encontro*: o verdadeiro propósito, que é entender, por exemplo, o conceito de equivalência nas equações do 1º grau;
- (4) *um conteúdo ou objeto da relação didática*: saber matemático que, *a priori*, é interesse do professor e do aluno;
- (5) *relações entre o professor e o aluno (contrato pedagógico); o professor e o saber; o aluno e o saber*. determinantes na apropriação do conhecimento;
- (6) *um tempo*: a ser gerido de modo que exista um equilíbrio entre atividades;
- (7) *um espaço*: a sala de aula;
- (8) *um contrato didático*: necessário pelo fato de que é a partir dele que se dá início ao processo de ensino e aprendizagem de acordo com a divisão de tarefas e as expectativas que os professores e alunos têm uns em relação aos outros a respeito dessas tarefas.

Dentre os componentes acima apontados, dois são tidos como indispensáveis numa relação didática: “*o conteúdo da relação*” (geralmente denominado “saber”), porque não pode estar ausente, uma vez que define a identidade da relação; e o

³⁶ O professor não pode dizer, explicitamente e de antemão, o que o aluno terá de fazer diante de um problema. Caso isso aconteça, se negará ao aluno o direito de adquirir o conhecimento pelos próprios meios.

“*contrato didático*”, porque define a dinâmica da relação e estabelece as regras do jogo.

2.5 Construindo o Conceito de Contrato: do *Stricto Sensu* ao Social

Um contrato, no sentido *stricto sensu*, pode ser entendido como uma “convenção” de uma ou várias pessoas que se obrigam em relação à(s) outra(s) com intuito de realizar, ou não, um ato; de dizer, ou não, algo; de conceder, ou não, um bem. Tudo isso após uma “negociação”, condição comum entre os contratos. O contrato é também o documento que registra oficialmente os termos dessa convenção (JONNAERT; BORGHT, 2002).

Portanto, trata-se essencialmente de um compromisso mediante o qual as partes presentes se obrigam reciprocamente. A negociação prévia, que permite a constituição do contrato, converge necessariamente para um acordo entre os parceiros em questão. Não existindo esse acordo, não há contrato, pois cada parceiro deverá aderir inteiramente às cláusulas dele e se comprometer em respeitá-las.

Uma característica que define a natureza desse contrato é a de ser “explícito”. Todas as partes devem fazer uma leitura idêntica dele para não ocorrerem interpretações distintas. “Trata-se de um sistema fechado e imutável: as regras não podem ser modificadas no curso da execução do contrato” (JONNAERT; BORGHT, 2002, p. 156).

Por outro lado, temos o contrato “social” que, conforme Rousseau, tem uma proposta diferente, pois se livra da “rigidez”, colocando-se numa perspectiva mais flexível, mais negociável, e aproximando-se do contrato didático (JONNAERT; BORGHT, 2002, p.156).

O contrato social se fundamenta na ideia de uma associação, de um pacto estabelecido de comum acordo, de tal modo que nenhuma das duas partes possa submeter-se à outra. Para Jonnaert e Borcht (2002, p. 156-157),

(...) Rousseau rejeita toda autoridade que repousa sobre os privilégios da natureza ou sobre o direito do mais forte. Para ele, a única autoridade legítima nasce de um acordo recíproco das partes contratantes, de uma convenção. Portanto, pacto de associação, que não é acompanhado de pacto de submissão.

Entendemos também que uma característica do contrato social seria a entrada do indivíduo no mundo social, marcando, conforme defende Rousseau, um processo

de transição do “estado natural” para o “estado social” (SCHUBAUER-LEONI, 1988). A esse respeito, D’Amore (2007) afirma que em um contrato nem todas as cláusulas são enunciadas: elas são “por toda parte tacitamente admitidas e reconhecidas” – algo semelhante ao contrato didático.

No contexto da sala de aula, as pesquisas apontam que existem outros contratos que mantêm relações com os sujeitos do sistema didático: professor e alunos.

2.6 A Relação do Contrato Pedagógico com o Contrato Didático

Para Jonnaert e Borght (2002), o contrato pedagógico é considerado uma técnica de ensino-aprendizagem que permite a um professor negociar com um aprendiz um trabalho pessoal referente a um objetivo determinado. Assim, o próprio aluno se encarrega de escolher a tarefa que deseja cumprir, observando a natureza e a dificuldade que a mesma oferece.

A literatura pedagógica francesa aponta Filoux (1974) como o primeiro a discutir e conceituar o contrato pedagógico. Para a autora, ele regula as trocas entre o professor e seus alunos, por um período limitado, definindo os direitos e deveres recíprocos (JONNAERT; BORGHT, 2002). Esse contrato se baseia em um consentimento mútuo quanto às regras às quais cada um deve se submeter deliberadamente. Portanto, conforme esses autores, esse tipo de contrato fundamenta-se em enunciados e regras que permitem o bom andamento das relações entre o professor e seus alunos.

Para Brito Menezes (2006), o contrato pedagógico é em parte explícito e em parte implícito. A ele subjaz a concepção que um professor tem do que é ensinar e do que é aprender. E, aqui, compreende-se ensinar e aprender no sentido *intransitivo*: não se refere a ensinar e aprender *aquela saber específico* (como no contrato didático), mas ensinar e aprender no *sentido lato*.

Assim, o que pode diferenciar o contrato didático do pedagógico é a entrada do saber na relação entre professor e aluno, pois, se no pedagógico eram apenas dois, no didático são três: o professor, o aluno e o saber matemático. Ou seja, o saber matemático é que caracteriza a mudança do pedagógico para o didático.

Outros contratos são objetos de pesquisa no campo da didática da matemática e fazem parte do contexto da sala de aula, como o contrato diferencial, o contrato

experimental, entre outros. No entanto chamamos atenção para os contratos institucionais por eles estabelecerem uma relação mais próxima com o didático.

2.7 Do Contrato Institucional ao Contrato Didático

O “Sistema Educacional”, em sua estrutura geral, pode ser entendido a partir de três subsistemas que se encontram, em alguns aspectos, independentes e, em outros, dependentes. Estes se caracterizam por imprimirem pressões uns aos outros mediante suas cláusulas internas de funcionamento. O primeiro é o Sistema de Ensino que compõe todos os outros sistemas e, caso esteja ausente, compromete a existência dos outros dois: o Sistema Escolar e o Sistema Didático.

Esses três sistemas – o de Ensino, o Escolar e o Didático –, como organizações estruturais, são agentes decisórios que influenciam de forma intensa, ou não, o funcionamento da relação didática. Essa influência é caracterizada por uma série de pressões na relação e, particularmente, nos seus elementos constitutivos (JONNAERT; BORGHT, 2002).

O Sistema de Ensino pode ser entendido como uma organização mais geral, em que encontramos pessoas as quais, na maioria, representam instituições³⁷ que vão elaborar programas, diretrizes curriculares, livros didáticos etc. Assim, essas instituições se caracterizam como reguladoras, pois normatizam o que deve ser ensinado nas escolas (BRITO MENEZES, 2006). Tais instituições têm como representante maior o Ministério da Educação que cuida das políticas públicas educacionais e é o responsável maior por gerir o ensino no Brasil.

Já o Sistema Escolar (a escola propriamente dita) caracteriza-se por promover situações que visam a uma organização mais local. Nele, podemos encontrar instrumentos que influenciam o ensino e a aprendizagem, como o projeto político pedagógico, projetos de ensino elaborados pela gestão da escola e/ou professores, horário escolar, calendário etc. Além disso, as escolas sofrem pressões sociais tanto das famílias dos alunos como da própria sociedade em geral (JONNAERT; BORGHT, 2002).

Finalmente, o ambiente do Sistema Didático tem como característica fundamental o surgimento do funcionamento didático ou o disfuncionamento

³⁷ Essa Instituição que estamos apresentando não representa ainda o sentido de instituição da TAD.

(SARRAZY, 1995). Esse sistema é constituído na sala de aula e podemos dizer que funciona se nela houver, por exemplo, determinado número de alunos, de carteiras e materiais didáticos disponíveis, recurso didático etc. Quando falta um desses elementos, o sistema não funciona satisfatoriamente, ou seja, ocorre o disfuncionamento didático.

Em se tratando do sistema didático, não podemos deixar de fazer referência à tríade bem conhecida, P-A-S (professor/aluno/saber), que caracteriza uma Relação Didática e tem como objetivo principal modificar e fazer evoluir a relação que os alunos têm ao saber.

Todos esses sistemas, como dito anteriormente, são agentes decisórios e produtores de elementos que pressionam a relação didática, como última instância, até fazerem emergir o Contrato Didático, nosso objeto de pesquisa.

O debate sobre os sistemas lembra-nos o conceito de “Instituição” proposto por Chevallard (1996), que conduz à noção de contrato institucional, modalidade que influencia na relação didática. Segundo Chevallard (1996, p. 129),

a instituição pode ser quase o que quer que seja. Na prática, por causa do sentido corrente da palavra, alguns leitores poderiam sentir-se surpreendidos ao ver a que objetos eu poderia ser levado a colar esta etiqueta. Uma escola é uma instituição, tal como o é uma sala de aula; mas existe igualmente a instituição “trabalhos orientados”, a instituição “curso”, a instituição “família”. A vida cotidiana é uma instituição (num dado meio social), o mesmo acontecendo ao estado amoroso (numa dada cultura), etc.

Nesse sentido, podemos considerar que os sistemas (de ensino, escolar e didático) estão relacionados ao conceito acima que o pesquisador amplia para “instituição didática”, criando então uma Antropologia Didática do Conhecimento. Ele afirma ainda que “qualquer instituição é, em certa medida, uma instituição didática” (CHEVALLARD, 1996, p. 133). Isso porque, como defende esse autor,

Nenhum sistema didático pode viver *in vácuo*, num vazio institucional. Podemos encontrar por trás de qualquer sistema didático, outro sistema, que aparece, em geral, como uma das suas condições de possibilidade, e a que chamarei sistema de ensino (CHEVALLARD, 1996, p. 137).

Assim, entre os dois sistemas citados por Chevallard – o didático e o de ensino –, consideramos que está o sistema escolar.

Para que um SD funcione, é necessário que, em cada instante, relativamente ao tempo próprio do SD como instituição, exista um conjunto de objetos institucionais que, para os sujeitos do SD, sejam naturais. É minimamente necessário que exista também um meio (CHEVALLARD, 1996). Essas são condições necessárias também para a existência do CD.

Aprofundado o diálogo sobre o tema, poderíamos perguntar: o que existe no interior das instituições? Para responder, devemos considerar uma instituição I e, dentro dela, uma pessoa X que se torna sujeito. Isso acontece quando a pessoa X se “sujeita” a I. A partir da metáfora, podemos dizer que X se torna sujeito de I entrando em I (CHEVALLARD, 1996, p. 130).

Ainda a esse respeito, Chevallard (1996, p. 130) acrescenta:

Suponhamos então que a pessoa X entra na instituição I, e seja O um objeto institucional para I. O objeto O começará a “viver” para X sob o constrangimento da relação institucional $R_I(O)$. Por outras palavras, vai construir-se, ou alterar-se, uma relação pessoal R (X, O), sob o constrangimento da $R_I(O)$ – e, mais amplamente, sob o constrangimento do contrato institucional³⁸ C_I .

Dessa forma, podemos dizer que o que existe nas instituições são Pessoas X que se tornam sujeitos dela a partir do próprio assujeitamento. O autor aponta que o sujeito vai construir-se ou alterar-se sob o constrangimento da $R_I(O)$. Entendemos que essa situação reflete o funcionamento da instituição e permite uma construção de mecanismos próprios que a tornem viva, ou lhe permitam viver. Esses mecanismos se constituem verdadeiras cláusulas de contratos institucionais C_I .

Nessas condições, o contrato institucional C_I é fundamental para a permanência da pessoa X na instituição e, conseqüentemente, a evolução dela como sujeito. Uma das características fundamentais sobre o contrato institucional C_I é que sua atuação se dá entre instituições.

Segundo Chevallard (1996), essas situações apresentadas se encontram ainda no pleno cognitivo e não têm nada de didático. Em temas de didática, é necessário haver uma intenção didática presente na instituição I. A manifestação dessa intenção acontece a partir da formação de um sistema didático (SD).

³⁸ Nesse momento em que discorremos sobre o Contrato Institucional, queremos destacar que não encontramos nos escritos de Chevallard e tampouco na literatura da Didática da Matemática que estava ao nosso alcance uma definição do conceito, nem um aprofundamento teórico.

Para Chevallard (1996, p. 133), a instituição SD comporta um ou vários sujeitos de I, que nele ocupam uma posição de “*professor P*”, um ou vários sujeitos de I, que nele ocupam uma posição de “*aluno a*”, e um “*objeto O*”, considerado um conjunto de investimentos didáticos para I.

Chevallard (1996, p. 135) acrescenta que é necessário satisfazer uma série de condições “ecológicas” para que possa não apenas existir o SD, mas continuar existir:

- um sistema didático *não existe sozinho*, uma vez que apela a *outros sistemas* didáticos;
- para que um sistema didático *funcione*, é necessário que estabeleça um *contrato didático*;
- é minimamente necessário um *meio*.

Nessa perspectiva “ecológica”, lembramos que o contrato didático apela ao jogo didático cujo funcionamento apela ao meio. Dizemos, então, que é minimamente necessária a existência do meio. Para Chevallard (*ibidem*), naturalmente o funcionamento do sistema didático “mexe” no meio, ou seja, são as condições que fazem o SD “viver”.

Embora não seja o nosso objeto de pesquisa investigar a relação entre o C_I e o CD, apontamos uma articulação entre ambos a ser estudada em futuras pesquisas. Contudo, vale ressaltar que essa aproximação dos elementos antropológicos de Chevallard com os elementos da Situação Didática de Brousseau está sendo uma constante na nossa pesquisa.

Nas linhas anteriores, procuramos apresentar um ambiente geral que envolve questões relacionadas ao contrato didático. A seguir, iremos nos debruçar sobre os aspectos principais dessa noção teórica.

2.8 O Funcionamento da Relação Didática

As fontes principais que utilizamos para abordar o funcionamento da relação didática são os escritos de Brousseau (1996b, 2007) e seus colaboradores, Chevallard (1991, 2001), Margolinas (1998), Bessot (2003) e Jonnaert e Borghet (2002). Esses autores propõem bases conceituais de grande relevância para teorização do contrato didático e contribuirão para desenvolvimento deste trabalho.

Um das primeiras questões sobre o contrato didático seria o motivo da sua existência e onde ele se localiza. A esse respeito, Jonnaert e Borght (2002, p. 188) defendem que

o contrato didático é indispensável ao funcionamento da relação didática. É, de fato, o que lhe permite a interação entre uma personalidade singular (um professor e seu implícito) e uma personalidade plural (uma aula com seu costume) a propósito de um objeto de ensino e aprendizagem, respeitando as particularidades de cada um dos parceiros.

A noção de contrato didático desempenha um papel central na análise das relações que se estabelecem, explícita ou implicitamente, nas situações didáticas referentes ao ensino e aprendizagem da matemática.

Assim, tratando de situações para o ensino da matemática, invocamos de imediato o sistema didático, local onde se manifestam todas as relações didáticas. Nesse ambiente, o professor tem a função de preparar, de realizar as situações didáticas. A principal atribuição dele é fazer os alunos poderem assumir a posição de aprendiz para que se apropriem dos saberes matemáticos que se encontram no jogo didático. O meio que os alunos encontram para resolver os problemas apresentados diz respeito à interpretação das questões, das informações fornecidas, das exigências impostas. Tudo isso é considerado como a maneira de ensinar do professor, faz parte da sua prática (BROUSSEAU, 2008, p.9).

Esses hábitos específicos do professor, que são esperados pelo aluno, e o comportamento destes, que são esperados pelo professor, regulam o funcionamento da aula e constituem o contrato didático. O ato de esperar tanto do professor quanto do aluno, ou seja, essas “expectativas” não acontecem mediante acordos explícitos, impostos pela escola ou pelos professores, ou compartilhados pelos alunos, mas dependem da concepção da escola, da matemática, da repetição de modalidades (D'AMORE, 2007a).

Entendemos que, na sala de aula, *a priori*, o objetivo do professor é fazer os alunos, a partir das situações didáticas, utilizarem seus conhecimentos prévios (constituídos), ou aqueles que se encontram em constituição. Segundo Brousseau (1996a), um caminho para o ensino matemática é resolver determinados problemas específicos – de preferência problemas novos. O pesquisador acrescenta que fazer matemática não se resume, apenas, à comunicação de um conhecimento aos alunos: é necessário encontrar meios que produzam a devolução do problema. Brousseau

sugere, ainda, que bons problemas nascem de bons planejamentos didáticos e estes sugerem boas respostas. O produto da devolução faz o aluno não apenas repetir ou refazer o que o professor ensinou, “*mas também [procurar] ressignificar em situações novas, de adaptar, de transferir seus conhecimentos para resolver novos problemas*” (BORUSSEAU, 1996b, 38).

Sobre a devolução, chamamos atenção para duas situações que envolvem o aluno (BROUSSEAU, 1996b, p. 51):

- se a devolução é satisfatória, o aluno entra no jogo e, se chegar ao final do jogo, a aprendizagem se torna efetiva;
- mas, se o aluno recusa, evita, ou não resolve o problema, o professor tem a obrigação social de ajudá-lo e até mesmo, por vezes, de se justificar por ter colocado um problema difícil para o aluno resolver.

Quando o professor toma ciência da obrigação social de ajudar ao aluno e até, em algumas ocasiões, de justificar-se, se estabelece

uma relação que determina – explicitamente em pequena parte, mas sobretudo implicitamente – aquilo que cada parceiro, o professor e o aluno, tem a responsabilidade de gerir e pelo qual será, de uma maneira ou de outra, responsável perante o outro. Este sistema de obrigações recíprocas assemelha-se a um contrato. Aquilo que aqui nos interessa é o *contrato didático*, ou seja, a parte deste contrato que é específica do “conteúdo”: o conhecimento matemático visado (BROUSSEAU, 1996b, p. 51).

Podemos observar que o interesse maior do contrato está atrelado especificamente ao conteúdo. Conforme já pontuamos, para Chevallard, Bosch e Gascón (2001), o conteúdo é o que diferencia o contrato pedagógico do contrato didático. A passagem do pedagógico para o didático acontece quando uma relação entre dois (professor e aluno) se transforma em uma relação entre três: o professor, os alunos e o saber matemático (conteúdo).

É devido a essa constatação que entendemos que o cerne da questão está no polo do saber, pois a entrada do contrato na relação se dá por essa via. Isso é confirmado por Brousseau (1996b, p. 50), para quem “*o contrato didático não é um contrato geral, depende estreitamente dos conhecimentos em jogo*”.

Segundo Chevallard e colaboradores (2001), o contrato didático depende inicialmente da existência do pedagógico e este, por sua vez, depende de outro

contrato, o escolar. Ainda sobre os contratos, esses pesquisadores dizem que os conteúdos e a maneira como são interpretados podem influenciar, em grande parte, os tipos de contratos existentes.

Para Brito Menezes (2006, p. 49), esse fenômeno resulta de uma relação ternária (P-A-S) e não apenas implica que cada parceiro olhe para si próprio e para o seu papel nessa interação, mas, necessariamente, estabelece quais *expectativas* um tem em relação ao outro, quais as responsabilidades de cada um na gestão do saber.

Chevallard, Bosch e Gascón (2001), por sua vez, chamam atenção para um fato didático que, de forma semelhante, pode ser vivenciado nas nossas salas de aula. O professor apresenta uma atividade (equações irracionais, por exemplo) e o aluno não consegue compreender bem essa atividade; assim, não utiliza corretamente as técnicas matemáticas para resolvê-la. No entanto, essa relação é potencializada por uma certa desmotivação, uma falta de interesse do aluno em saber se suas soluções estão corretas. A consequência desse fenômeno é chamada por esses pesquisadores de “irresponsabilidade matemática”, que pode ser compreendida como uma “má atitude e um baixo nível de motivação”. Muitos educadores a consideram como falta de “compreensão”.

A natureza desse fenômeno pode ser explicada mediante as leis que regem o processo didático. No âmbito escolar, são importantes as normas que tacitamente, sem acordo expresso,

regem em cada momento as obrigações recíprocas dos alunos e do professor, em relação ao projeto de estudo que têm em comum. Trata-se de cláusulas, que evoluem à medida que o processo didático avança e que fazem parte de uma espécie de “contrato” denominado de contrato didático. (...) o contrato didático não é estático: assim, um professor não pode exigir de seus alunos que, no início do processo de estudo, sejam capazes de resolver os problemas que devem estudar, os estudantes poderão pedir ao professor que os ajude ou dê indicadores sobre os temas (...) (CHEVALLARD, BOSCH E GASCÓN, 2001, p.63).

Essa reflexão confirma que o contrato didático não é algo estático, pois, à medida que sua relação evolui, suas cláusulas são modificadas. Por outro lado, existem claramente, na constituição do contrato, obrigações recíprocas entre os parceiros, uma divisão de responsabilidade que remete ao fenômeno das expectativas. Assim, podemos dizer que o contrato didático surge com algumas características específicas e é sobre elas que discorreremos a seguir.

2.8.1 Características do Contrato Didático

Uma das características principais do contrato didático é otimizar as mudanças estabelecidas na relação entre o aluno e o saber matemático que se encontra no jogo didático. Não de forma negligente, porém gerenciando as relações, não as cristalizando em regras definitivas, mas, ao contrário, colocando-as em tensão por meio de uma série de rupturas.

As rupturas são necessárias para permitirem que os parceiros (professor e alunos) modifiquem permanentemente as suas relações ao saber. São as rupturas que nos permitem também ter acesso, pelo menos em parte, às regras implícitas, anteriormente negociadas em uma relação didática. Sobre as “rupturas” e as “obrigações” na relação, Brousseau (1996b, p. 51) defende que *“não podemos pormenorizar aqui estas obrigações recíprocas; aliás, são as rupturas do contrato didático que são realmente importantes”*.

É consenso entre os estudiosos que pesquisam essa noção que o contrato didático não pode ser completamente explicitado, não pode existir uma combinação prévia do contrato entre o professor e os alunos (aprendizes), pois, se isso ocorrer, ele tenderia ao fracasso. Em síntese, as cláusulas da ruptura e o que está em jogo no contrato não podem ser descritos antes. A esse respeito, Brousseau (2008, p. 75) entende que o conhecimento será justamente o que resolverá as crises surgidas dessas rupturas e elas não podem ser predeterminadas.

As questões aqui debatidas sinalizam características desse fenômeno. Essas peculiaridades nos levam a crer que, no momento em que elas emergem na relação, tudo se passa como se o contrato implícito ligasse o professor ao aluno. Para este último, a surpresa de não saber resolver o problema origina uma rebeldia contra o professor por não tê-lo conduzido ao sucesso. Para o professor, isso também é uma surpresa, pois ele considera a sua ação razoável para conduzir o aluno ao sucesso. Então, a relação enseja *“revolta, negociação, procura de um novo contrato, que depende do novo ‘estado’, dos saberes... adquiridos e visados”* (BROSSEAU, 1996b, p. 53). Ainda nessa direção, Brousseau (1996b) propõe que

o conceito teórico de contrato em didática não é, pois, o contrato (o contrato adequado, desadequado, verdadeiro, ou falso), mas o processo de busca de contrato hipotético. É este processo que representa as observações e deve modelizá-las e explicá-las (BROSSEAU, 1996b, p. 53).

Além disso, destacamos que o mais importante na negociação contratual não é que sejam explicitadas todas as regras que o permeiam e, sim, que possam ser delineados alguns de seus pontos passíveis de rupturas. A ruptura do contrato didático pode ser percebida, por exemplo, quando os alunos, frente ao saber, não atuam da forma esperada pelo professor, ou quando o professor não age da forma esperada pelos alunos (BRITO MENEZES, 2006; ALMEIDA, 2009; BRITO LIMA; ALMEIDA, 2010).

Esses pesquisadores acrescentam que, quando há alguma ruptura do contrato didático na relação, em geral, fala-se algo a respeito. O que é implícito torna-se explícito. Assim, uma nova regra (explícita ou implícita) é negociada. No momento em que acontece a renegociação, pode ser estabelecido um redirecionamento do jogo didático.

2.8.2 A Dinâmica do Contrato Didático

Na sala de aula, percebemos que é por meio do contrato didático que descobrimos o dinamismo da relação didática. Esse dinamismo, segundo Jonnaert e Borght (2002), permite compreender melhor, além das múltiplas relações com os saberes e com os conhecimentos presentes, o longo processo que um aluno estabelece ao aceitar aprender, isto é, representar seu papel de aluno.

Na perspectiva sociointeracionista, a sala de aula é semelhante a um palco de negociação de significados. O professor, conforme essa visão, seria um dos atores fundamentais nesse palco, pois caberia a ele organizar a cena, propor situações em que os significados são instituídos e negociados (BRITO MENEZES, 2006).

Para Brousseau (1986, p. 50), o contrato didático é a *“regra do jogo e a estratégia da situação didática. É o meio que o professor tem de colocar em cena”* as situações didáticas. Por outro lado, a evolução das situações didáticas modifica o contrato, possibilitando, assim, a criação de novas situações. Em outras palavras, a evolução das situações modifica o contrato e este dinamiza a relação didática, gerando mudanças nas relações ao saber. Assim, *“o próprio contrato didático, muda, modifica-se até o ponto de, em um determinado momento, tornar-se inútil”* (JONNAERT; BORGHT, 2002, p. 167).

Essa situação se efetiva, quando o aluno inverte sua relação ao saber, de forma a desenvolver novos conhecimentos. Isso faz, conforme afirma Jonnaert e Borght

(2002), o contrato tornar-se precário, não ter mais utilidade e, portanto, condena-o a desaparecer. Para esse pesquisador, “um bom contrato didático é, em geral, aquele que mais rapidamente se torna obsoleto” (p. 167).

Nessa mesma perspectiva, Brousseau (1996b, p. 88) alerta que “uma das cláusulas do próprio contrato didático implica o processo da sua extinção: está subentendido, desde o início da relação didática, que terá de chegar um momento em que ele se quebrará”.

Nessa dimensão complexa e dinâmica que envolve o conceito de contrato didático, Jonnaert (1994, p. 206) propõe que se considerem três elementos essenciais:

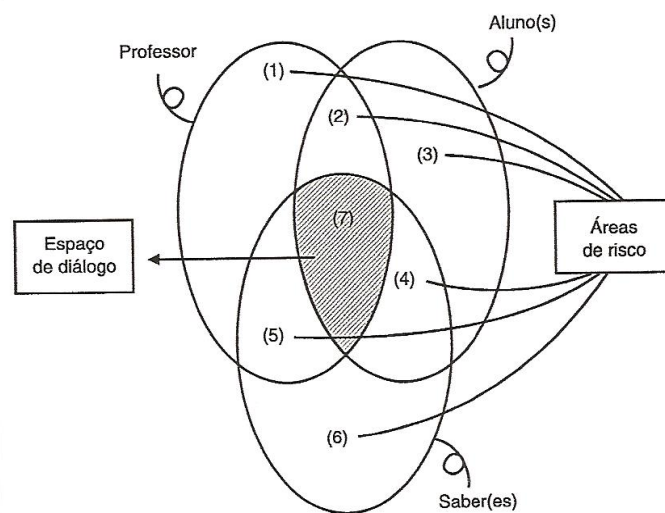
- (1) a ideia de divisão de responsabilidades, em que a relação didática não aparece mais sob o controle exclusivo do professor, pois o aluno deve cumprir o seu papel, ou seja, seu ofício de aluno, fazendo o contrato didático “definir uma divisão de poder”;
- (2) a consideração do implícito, pois a relação funciona mais a partir do não dito do que das regras enunciadas (o que é explicitado), apesar de o contrato inquietar-se mais com esses “não ditos”;
- (3) a relação ao saber, uma vez que é característica do contrato didático levar em conta a relação que os parceiros mantêm, particularmente, com o saber, considerando-se a assimetria entre o professor e o aluno nessa relação.

Ainda segundo o autor, o jogo do contrato didático é um jogo antitético, ou seja, entre opostos: implícito *versus* explícito; unilateral *versus* negociável; espontâneo *versus* imposto; interno à sala de aula *versus* externo à aula.

Para Jonnaert e Borght (2002), o CD tem a intenção de criar e ampliar os espaços de diálogo na sala de aula, estabelecendo um equilíbrio entre esses polos contraditórios do jogo paradoxal. Partindo dessa ideia de “contradição” postulada por Jonnaert, podemos pensar que é inerente ao CD certa “dialética”. Isso porque as regras negociáveis numa relação contratual, embora possam ser duradouras, não são absolutamente estáveis e perenes (BESSOT, 2004), pois, ao longo do processo de ensino e aprendizagem, umas são abandonadas e outras são geradas. Em síntese, podemos dizer que o CD passa por um processo contínuo de negociação, rupturas e renegociação.

Considerando o caráter dialético do CD, lembramos que um dos sentidos de “dialética” é o de “argumentação dialogada”³⁹. Isso nos remete a Jonnaert e Borght (2002), para quem uma das principais funções do contrato didático é criar um espaço de diálogo, como mostra a figura a seguir. As áreas estritamente específicas a cada um dos três parceiros (áreas 1, 3 e 6) são aquelas nas quais eles se encontram sós, confrontados consigo mesmos, isolados das outras famílias de variáveis. Contudo, os autores destacam que uma interação didática não pode limitar-se a essas áreas, pois seria um diálogo de surdos ou, antes, três monólogos que nunca se encontrariam. Após criação dessas áreas, o contrato didático teria uma nova função. Vejamos, então, a figura abaixo para melhor entendermos o que estamos dizendo (JONNAERT; BORGHT, 2002, p.179):

Figura 5: Uma das funções do contrato didático: ampliar o espaço de diálogo – reduzir a área de risco.



Fonte: Jonnaert e Borght (2002, p. 179)

Ao ampliar o espaço de diálogo entre os três parceiros (P, A e S), o contrato didático permite reduzir as áreas de risco, isto é, aquelas em cujo interior um dos três parceiros corre o risco de isolar-se em um monólogo pouco fértil. Assim, no aumento e na redução, existe possibilidade de emergirem fenômenos didáticos que trazem efeitos os quais podem contribuir, ou não, para a aprendizagem da matemática (ALMEIDA, 2009).

³⁹ Dicionário de Português Online. Disponível em: <http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php?palavra=dial%E9tica> (acesso em 18/03/2016).

Nesse mesmo debate, Almouloud (2007) lembra que o conceito de contrato permite analisar e interpretar os fenômenos que não são evidentes, mas interferem no processo de ensino e aprendizagem. Isso nos reporta aos paradoxos referentes ao processo esperado pelo professor no momento em que organiza o ensino visando à produção autônoma, pelo aluno, do conhecimento pretendido.

Para Brousseau (1996b), os fenômenos podem fazer parte da intimidade da sala de aula. A essa reflexão Joannert e Borgh (2002) acrescentam que a negociação contínua do contrato didático tende a nivelar 'por baixo' os objetivos da aprendizagem. Isso pode acontecer porque, como o professor deseja que seus alunos alcancem sucesso em suas atividades, tendem a facilitar a tarefa apresentada. Entretanto, essa facilitação muitas vezes camufla o fracasso da aprendizagem.

Apesar de essas práticas fazerem parte do funcionamento escolar e, portanto, serem inevitáveis, tomar conhecimento delas pode ajudar o professor a ter uma melhor compreensão de como e por que elas se instituem. Buscando, então, elucidá-las, Brousseau (1986) estudou-as e definiu-as como Efeitos Perversos de Contrato.

2.8.3 Efeitos de Contrato Didático

Um primeiro efeito que podemos, aqui, referendar é o *Efeito Pigmalião*, denominado por muitos estudiosos de 'fenômeno das expectativas'⁴⁰. Para Brousseau (1986, 1996b), esse efeito não pode ser incluído entre os outros por não ser um efeito *perverso*, pois está relacionado a um fenômeno que não pode ser evitado quando se institui um contrato e por existir na relação entre os parceiros expectativas, elemento central do contrato didático (HENRY, 1991).

Pesquisadores apontam que o desejo do professor, no contexto escolar, é fazer seus alunos alcançarem sucesso em suas atividades. Assim, tendem a facilitar-lhes a tarefa de diferentes formas: explicações abundantes; indicação de pequenos truques, algoritmos e técnicas de memorização; sinalização de passos para a resolução de problemas etc. Essas atitudes ou práticas costumeiras em sala de aula, frequentemente, participam do funcionamento didático e são inevitáveis (BROUSSEAU, 1986, 1996b, 2008).

⁴⁰ A reflexão a seguir pode ilustrar esse fenômeno: "certos alunos, durante o ano inteiro, recebem sempre a mesma nota, como se existisse uma espécie de acordo tácito com o professor, que limita sua exigência à imagem que faz da capacidade do aluno, que por sua vez, limita seu trabalho em função da imagem que o professor reflete desse aluno" (HENRY, 1991).

O efeito Topázio ou o controle da incerteza, pode ser entendido da seguinte maneira na sala de aula existem situações em que o professor deseja bons resultados por parte dos alunos, então o professor tende a facilitar as atividades de várias formas. Fornecendo-lhes explicações abundantes, explicando-lhes pequenos truques, algoritmos e técnicas de memorização ou mesmo indicando pequenos passos para resolver o problema (BROUSSEAU, 2008; SILVA, 2008). Quando um aluno encontra uma dificuldade, o efeito topázio consiste de uma maneira ou de outra, a superar essa dificuldade em seu lugar.

Brousseau (1996b), referindo-se ao efeito Jourdain, ou mal-entendido fundamental, explica que o professor, para evitar um confronto de conhecimento com o aluno e, eventualmente, a constatação do fracasso do ensino e aprendizagem, associa o conteúdo ministrado a conhecimentos familiares do aluno, o que muitas vezes são aplicações específicas a um importante conhecimento científico. Nessa situação, *“um comportamento banal do aluno é considerado como a manifestação de um grande conhecimento”* (ALMEIDA, 2009, p. 52). Isso se assemelha ao professor de matemática que diz ao aluno que, se ele fizer as combinações das peças de roupa para produzir diferentes formas de vestir, sabe o que é análise combinatória (BRITO MENEZES, 2006).

O Deslize Metacognitivo, segundo Brousseau (1996b), acontece quando uma atividade de ensino fracassa. Dessa forma, *“o professor pode ser levado a justificar-se e, para prosseguir a sua ação, a tomar as suas próprias explicações e os seus meios heurísticos como objetos de estudo no lugar do verdadeiro conhecimento matemático”* (BROUSSEAU, 1996a, p. 43). Assim, uma característica do deslize metacognitivo pode ser entendida como a utilização de uma técnica, tida como útil para resolver um problema como objeto de estudo, que se perpetua na relação didática e leva a perder-se de vista o verdadeiro conhecimento a ser desenvolvido.

A substituição de um objeto de ensino por outro pode acontecer com certa frequência nas situações didáticas e não depende da vontade dos parceiros envolvidos na relação. Para Brousseau (2008), esse efeito não deve ser considerado pelo professor como um erro didático propriamente dito, desde que seja temporário e não volte a acontecer.

Quanto ao uso abusivo da analogia, Brousseau (1996b, 2008) destaca que ela é considerada uma excelente ferramenta heurística na compreensão do significado de determinados conceitos matemáticos. No entanto, esse autor alerta que é

necessário ficar atento, porque seu emprego, de forma abusiva, na relação didática pode descaracterizá-la e produzir o efeito topázio.

Isso é potencializado quando os alunos fracassam em seu processo de aprendizagem. Nesse caso, o professor procura oferecer uma nova oportunidade no mesmo assunto e os alunos já sabem disso (o contrato vigente). “Ainda que o professor dissimule o fato de que o novo problema se parece com o anterior, os alunos vão procurar o método utilizado na atividade precedente” (BROUSSEAU, 2008). A resposta que os alunos estão dando ao problema não significa que a consideram adequada para a pergunta formulada, mas simplesmente que reconhecem os indícios (BROUSSEAU, 2008).

Procuramos dialogar apontando algumas questões sobre os efeitos de contrato didático que foram considerados por Guy Brousseau como efeitos perversos. Adiante iniciaremos as discussões relacionadas à Teoria Antropológica do Didático.

TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Neste capítulo apresentamos as principais reflexões sobre a Teoria Antropológica do Didático e sua construção conceitual. Os primeiros passos dessa teoria foram forjados por Yves Chevallard por volta dos anos 80 do século passado, e tem como um dos principais pilares a Teoria da Transposição Didática e a noção de Organizações Praxeológicas. Na primeira, seu foco principal são os saberes e as instituições e, na segunda, são as praxeologias matemáticas e didáticas. Para Chevallard (1996), a abordagem antropológica contribui, dentre outras coisas, com o desenvolvimento de uma ferramenta potente de análise, que são as organizações praxeológicas, as quais permitem entender melhor o papel das instituições no sistema didático.

3.1 Noção de Transposição Didática

A noção da Transposição Didática foi desenvolvida por Chevallard (1991) por volta dos anos 80 do século passado e se integrou rapidamente ao conjunto de teorias desenvolvidas no campo da Didática da Matemática.

Após ser apresentada pelo pesquisador à comunidade científica, a teoria se espalhou por vários países. Inicialmente, os primeiros interessados foram os países francófonos e, posteriormente, outros. A primeira sistematização dessa teoria foi apresentada na edição *“La transposition didactica. Du savoir savant au savoir enseigné”* de Chevallard (1985). Essa publicação foi considerada pelos pesquisadores como o ponto de partida para um novo campo de estudo que representava uma “porta” de entrada para as pesquisas em didática da matemática e ciências experimentais (BOSCH e GASCÓN, 2007b).

Após mais de duas décadas de contribuições para as pesquisas em didática da matemática, a transposição didática acaba se integrando em um âmbito de investigação próprio desenvolvido por Chevallard: a “teoria antropológica do didático” (BOSCH e GASCÓN, 2007b, p. 389). Ainda segundo esses pesquisadores, *“o recurso da antropologia didática, como propõe Chevallard na segunda edição da ‘transposição*

didática (1991), é uma das primeiras apresentações do que seriam os pilares da teoria antropológica do didático (1992)”.

Os conceitos desenvolvidos pela teoria da transposição didática se edificam a partir da problemática ecológica que emerge das inter-relações entre as noções de “saberes e instituições”, consideradas fundamentais nas primeiras formulações da antropologia didática (CHEVALLAR, 1991; 1996, p. 126).

Nesse mesmo contexto, para Bosch e Gacón (2009), as noções de saberes emergem das práticas sociais num certo domínio de realidade e nesse domínio se realiza. No entanto, o seu desenvolvimento está associado à constituição de determinadas instituições.

Um dos aspectos principais da teoria é a necessidade de considerar que o que se ensina na escola (os saberes), de certo modo, foi gerado fora dela e “transposto” até a sala de aula por uma necessidade social da educação e de sua difusão. Por outro lado, é necessário entender que a transposição didática é um processo e não uma prática individual, ou seja, não se esgota na prática do professor. Para descrever esse processo é necessário distinguir o movimento que leva ao saber (BOSCH; GASCÓN, 2007b).

Esse transporte do saber até a sala de aula, segundo Bosch e Gascón (2007b, p. 387), requer

uma série de transformações adaptativas para que os conhecimentos que se querem ensinar possam “viver” em um novo ambiente que a escola oferece. Para que certo conhecimento seja ensinado na escola, é necessário um *trabalho transpositivo* que faça possibilitar algo que não foi criado para escola sofrer as mudanças necessárias para poder ser reconstruído dentro da escola.⁴¹

Para Chevallard (1991), um saber não existe “*no vácuo*”, pois ele é “*datado*”, aparece em um determinado momento, no contexto de uma sociedade e está ancorado em uma ou mais instituições. Assim: “*todo saber é o saber de uma instituição*”, e a transposição didática permite, então, que “*o saber passe de uma instituição para outra*”. No entanto, esse objeto de saber, ao passar de uma instituição a outra, não deixa de viver na instituição em que nasceu ou viveu. O pesquisador alerta ainda que, “*para que um saber possa viver em uma instituição, é necessário*

⁴¹ “Una serie de transformaciones adaptativas para que los conocimientos que se quieren enseñar puedan “vivir” en el nuevo ambiente que la escuela ofrece. Para que cierto conocimiento sea enseñado en la escuela es necesario un trabajo transpositivo que haga posible que algo que no fue creado para la escuela sufra los cambios necesarios para poder ser reconstruido dentro de la escuela.”

que ele se submeta a certo número de exigências, o que implica necessariamente que ele se modifique, senão ele não pode se manter na instituição” (CHEVALLARD, 2007).

A introdução da noção de “saber” é considerada a princípio como uma primeira noção que designa certa forma de uma organização de conhecimento: a matemática são saberes, a física são saberes etc. Além disso, é reconhecido como aqueles que emergem no âmbito do real antropológico, certo tipo de objeto que serve para designar, correlativamente, o campo da antropologia que se localiza na “*antropologia dos saberes*” (CHEVALLARD, 1991, p.152/153).

Nessa direção, surgem questões importantes sobre a “*vida dos saberes na sociedade*”, que é caracterizada pela sua multilocalização. Nas palavras do autor,

um dado saber S se encontra em diversos tipos de instituições I, que corresponde, em termos de ecologia dos saberes, a respectivos *hábitats* diferentes. Mas, se considerarmos esses *hábitats*, perceberemos imediatamente que o saber em questão ocupa regularmente *nichos* muito diferentes. Ou, de outra maneira, que a relação institucional de I com S, $R_I(S)$, que denominarei como a *problemática de I em relação a S*, pode ocorrer de várias maneiras diferentes. Correlativamente, a maneira em que os agentes da instituição vão “manipular” esse saber também será variável (*ibidem*, p.153-154).⁴²

Assim, podemos perceber que o estudo desse fenômeno nos remete à vida dos saberes nas instituições e que um determinado saber pode viver ao mesmo tempo em instituições diferentes. No entanto, os agentes que fazem parte da instituição I darão, a partir das suas necessidades em relação a S, significados diferentes aos saberes.

Assim, o produto das relações entre a antropologia dos saberes e a antropologia didática do conhecimento está imbricado na antropologia didática dos saberes, cujo objeto é a manipulação dos saberes com intenção didática (CHEVALLARD, 1991, p. 155). Essas condições nos permitem entrar no sistema didático e discutir sobre produção de conhecimento.

No entanto, antes de o saber chegar ao sistema didático, deverá sofrer certas deformações e ou transformações, para que seja possível ser ensinado e aprendido

⁴² “Un saber dado S se encuentra en diversos tipos de instituciones I, que son para aquel, em términos de ecología de los saberes, respectivos *hábitats* diferentes. Pero, si consideramos esos *hábitats*, percibimos inmediatamente que el saber en cuestión ocupa regularmente nichos muy diferentes. O, para decirlo de otro modo, que la relación institucional de I com S, $R_I(S)$, a la que denominaré también la *problemática de I en relación com S*, puede ser harto diferente. Correlativamente, la manera em que los agentes de la institución van a “manipular” ese saber también será variable.”

pelos alunos. Queremos dizer que lhe é dada uma nova forma para que se torne apto a ser ensinado. “*O saber a ensinar e o saber ensinado são necessariamente distintos do saber científico*” (CHEVALLARD, 1991, p. 16).

Por outro lado, o saber científico, ao sofrer as deformações, vai perdendo, gradativamente, o seu formato original. Isso não significa dizer que esse saber vai se perder de suas origens, mas que vão sendo desprezados alguns elementos da sua gênese.

Para Chevallard (1991), há alguns questionamentos pertinentes sobre a transposição didática: qual a importância de os saberes apresentados aos alunos no sistema didático terem resquícios do saber científico? Como se comportam os saberes em termos de distância uns dos outros? Para o pesquisador, essas são perguntas iniciais, porém importantes, pois reportam aos princípios (à gênese) do conceito de transposição didática. Dessa forma, podemos dizer que

a distância entre os saberes, que obrigatoriamente os separa, produz informações necessárias aos questionamentos, ao tempo de se converter em uma primeira ferramenta. Para o didata, é uma ferramenta que permite recapacitar, tomar distância, interrogar as evidências, colocar em questão as ideias simples, desprende-se da familiaridade enganosa de seu objeto de estudo. Em outras palavras, o que permite exercer sua vigilância (CHEVALLARD, 1991, p.16)⁴³.

É fundamental considerar que existe uma distância entre o “saber científico, o saber a ensinar e o saber ensinado”. No entanto, segundo o autor, a atenção agora deve voltar-se para a conexão entre os saberes, a fim de não se negligenciar essa conexão, porque isso provocaria situações de “crise”.

Bordet (1997) aponta uma nova reflexão sobre a existência de uma distância (que ele denomina de “bonne distance”) que se estabelece entre os saberes de referência e aqueles que serão ensinados. O pesquisador chama atenção para o fato de que essa *boa distância*, necessariamente, não significa uma *distância mínima* e interpretá-la dessa forma seria um equívoco, pois “*considerar que o ensino deve estar tão próximo quanto possível dos saberes científicos é uma ilusão perigosa*” (1997, p.

⁴³ “Por lo tanto a la distancia eventual, obligatoria que los separa, da testimonio de ese cuestionamiento necesario, al tempo que se convierte en su primera herramienta. Para el didacta, es una herramienta que permite recapacitar, tomar distancia, interrogar las evidencias, poner en cuestión las ideas simples, desprenderse de la familiaridade enganosa de su objeto de estudio. En una palabra, lo que le permite ejercer su vigilância epistemológica.”

47). Brito Menezes (2006) acrescenta que tal distância (*bonne distance*) deve ser definida em função dos níveis e objetivos de ensino.

A respeito do trabalho transpositivo que começa longe da escola, na seleção dos “*corpos de conhecimentos*” (os saberes) com intuito de fazê-los chegar à sala de aula, Bosch e Gascón (2007b, p. 387) sugerem que essa seleção não é simples, uma mera transferência, adaptação ou simplificação, mas principalmente um trabalho criativo de vários agentes que fazem parte da noosfera.

As situações que envolvem o trabalho transpositivo são consideradas por Bosch e Gascón (2007b, p. 388) fonte de muitas restrições relativas ao tipo de ensino que se deseja transmitir, à atividade matemática que é possível ou impossível de executar na escola. Esses autores acrescentam também que a limitação é maior quando “*o processo de transposição não é capaz de manter ou recriar uma possível razão de ser dos conhecimentos que a escola se propõe a transmitir*”⁴⁴ (*ibidem*).

Essa problemática da “razão de ser dos conhecimentos” nos leva à seguinte questão: o que é necessário fazer para minimizar ou até corrigir grande parte desses problemas? Entendemos que, para isso, é necessário introduzir um novo conceito, o de *vigilância epistemológica*. Sua função, entre outras, seria monitorar a distância entre os saberes para que as deformações e adaptações não acabem por “desfigurar” o saber original, o que seria um problema, pois o *saber a ensinar* deixaria de ser fiel ao saber original, podendo criar certos obstáculos à aprendizagem.

Brousseau concorda com as contribuições e o papel da transposição didática, e lamenta colocá-las sob vigilância. Isso porque, conforme esse pesquisador,

Ela mascara o “verdadeiro” funcionamento da ciência, impossível de comunicar e de descrever fielmente a partir de fora, para colocar em seu lugar uma gênese fictícia. Para tornar mais fácil o ensino, isola determinadas noções e propriedades do tecido de atividades em que elas tiveram sua origem, o seu sentido, a sua motivação e a sua utilização transpondo-as para o contexto escolar. Os epistemólogos chamam a esta operação *transposição didática*. Ela tem sua utilidade, os seus inconvenientes e seu papel, mesmo para a construção da ciência. É, simultaneamente, necessária e, num certo sentido, lamentável, ter que ser colocada sob vigilância (BROUSSEAU, 1996, p. 36).

⁴⁴ “El proceso de transposición no es capaz de mantener o recriar una posible “razón de ser” de los conocimientos que la escuela se propone transmitir.”

Entretanto, a socialização dos saberes apresentados pelas instituições e pessoas, conforme discutido por Chevallard (1991), não implica a disseminação desse saber tal qual ele foi produzido. A sua forma científica 'original' interessa apenas à comunidade científica, que tem uma linguagem própria e necessita conhecer esse saber na sua origem e formato científico (BRITO MENEZES, 2006).

Conforme Araújo (2009), as instituições produtivas de saberes científicos – as academias – são as mais valorizadas pela sociedade. Por outro lado, as instituições “que utilizam” os saberes são quase sempre ignoradas ou opacas e as de ensino são mais visíveis culturalmente do que as de utilização.

Para melhor entendermos isso, lembramos que a instituição que sofre maiores pressões da sociedade são as academias, pois elas produzem os saberes a partir das demandas da sociedade.

De acordo com Chevallard (1991), o longo processo de transformação dos *saberes científicos* em *saberes a ensinar* é realizado numa instituição 'escondida', 'não visível', intitulada de noosfera, que envolve comunidades – professores, pedagogos, técnicos do governo etc. Estes últimos são os responsáveis por estabelecer o que deve ser ensinado na escola. Assim, conforme pontua o autor em enfoque, “a noosfera é considerada o centro operacional do processo de transposição, pois permite que os saberes passem de uma instituição a outra” (CHEVALLARD, 1991, p. 33).

Quando o interesse é a instituição de ensino, a partir da transposição didática é possível analisar-se a trajetória que cumprem os saberes, desde a produção deles nas academias, os “saberes científicos”, passando pelo momento em que são transformados pela noosfera em “saber a ensinar”, até o triângulo fundamental, que constitui a relação didática – *professor/aluno/saber* –, quando se transformam em um *saber ensinado*.

Para Chevallard (1991), na transformação dos saberes – *saber científico* → *saber a ensinar* → *saber ensinado* –, os dois primeiros vão sendo esquecidos no percurso, em especial o primeiro. Assim, o saber que produz a transposição didática será, portanto, um saber exilado de suas origens e separado de sua produção histórica da esfera científica.

A transposição didática é estabelecida mediante uma série de ações em que o papel de cada um dos saberes no processo precisa ser conhecido. Além disso, é

preciso refletir sobre as várias etapas que marcam o caminho percorrido em tal transformação. É o que discutiremos a seguir.

3.1.1 O Saberes: Científico, a Ensinar, Ensinado e Aprendido, Disponível

“Para que o ensino de um determinado elemento de saber seja meramente possível, esse elemento deverá ter sofrido certas deformações, que o tornarão apto para ser ensinado” (CHEVALLARD, 1991, p. 16).

Podemos dizer, então, que distintas instituições produtoras de saberes geram distintas atividades matemáticas e, nestas, existem distintos discursos sobre a matemática. Assim, justifica-se a utilização de distintos termos que a identificam (BOSCH e GASCÓN, 2007b). Para denominar esses termos, Chevallard (1991) propõe o uso do plural “saberes”: “saber científico”, para identificar aqueles produzidos pelos matemáticos, pelos pesquisadores; “saber a ensinar”, tal como designa a noosfera; “saber ensinado”, para nomear o produto da atividade didática dos professores em sala de aula; e o “saber aprendido” pelos alunos, para indicar tanto o final do processo de aprendizagem como o início de novos processos.

Ainda para Chevallard (1991, p. 164-165), os saberes que se encontram na escola dependem eminentemente da legitimidade que a sociedade concede, ou não, concede a eles. Dessa forma, devemos entender os saberes como saberes socialmente imprecisos, quase invisíveis e, portanto, culturalmente frágeis. A sociedade os faz chegarem à escola para fortalecê-los e ajudá-los a viver. Esse autor acrescenta que *“a escola é, antes de tudo, uma vitrine da sociedade em que esta expõe seus saberes sensíveis, um habitat com uma ecologia particular (...)”*⁴⁵ (CHEVALLARD, 1991, p. 166).

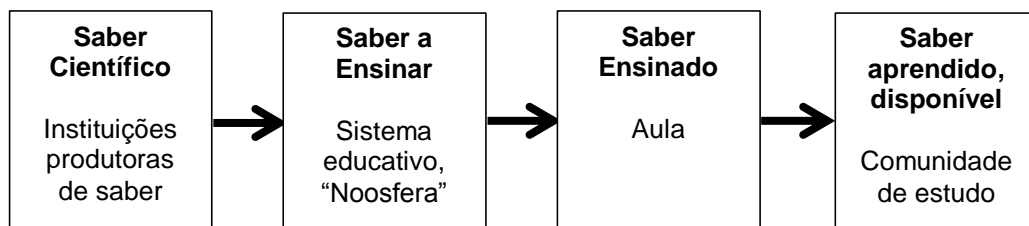
Antes de visualizar o processo transpositivo dos saberes, que apresentaremos a seguir, propomos mais uma reflexão sobre a transposição didática. Chevallard (1991, p. 158; 2007, p. 709) chama atenção para um contexto mais abrangente no qual essa noção está inserida: a transposição institucional. De um lado, a transposição didática acontece entre instituições; do outro, o termo “transposição institucional” engloba outras instituições que não se caracterizam como didáticas. No entanto, existe um ponto em comum: toda transposição institucional, em seu processo, tende

⁴⁵ “La escuela es ante todo una vitrina de la sociedad, en la que esta expone sus saberes sensibles, un hábitat com una ecologia particular (...)”

a articular-se em uma transposição didática. Esse pesquisador chama atenção para essa situação, ao julgá-la como um momento “crucial”. Isso porque, conforme pontua o autor em enfoque, “os processos transpositivos, didáticos e, mais geralmente, institucionais, são como imaginamos, *a mola essencial da vida dos saberes, de sua disseminação e sua funcionalidade adequada*” (CHEVALLARD, 1991, p. 158)⁴⁶. São, portanto, condições *sine qua non* do funcionamento das sociedades. Assim, podemos dizer que o uso da expressão “transposição didática” se justifica quando a instituição alvo é uma instituição de ensino.

Retomamos aqui uma representação do processo transpositivo para facilitar o entendimento e sua visualização. Tomamos por base Bosch e Gascón (2007b, p. 392), que intitulam a figura como o “processo de transposição didática”.

Figura 6: Processo de Transposição Didática



Fonte: Bosch e Gascón (2007b, p. 392)

Ao apresentar essa estrutura, o pesquisador chama atenção para a distinção dos saberes e situa os problemas didáticos além das características individuais dos sujeitos e das instituições envolvidas.

Nesse sentido, considera que, para entender as dificuldades dos alunos na aprendizagem de certa noção, não basta investigar apenas os aspectos cognitivos da aprendizagem. É preciso investigar o papel que desempenha essa noção em diferentes atividades, matemática ou não matemática, que os alunos devem aprender. É importante levantar, entre outros, questionamentos sobre como os alunos se envolvem, o comportamento deles nas atividades guiadas pelos professores, por que essa noção faz parte do “saber a ensinar” na escola em termos de contexto e problemática em que se inscreve (BOSCH e GASCÓN, 2007a).

Sobre a importância do saber científico, Chevallard (1991, p. 24) diz que esse saber “*nos interessa porque certas exigências que intervêm na preparação didática*

⁴⁶ “Los procesos transpositivos, didáticos y más generalmente institucionales, son, tal como se imagina, el resort esencial de la vida de los saberes, de su diseminación y su funcionalidad adecuadas.”

do saber são influenciadas a partir da constituição do *saber científico* ou ao menos a partir da formulação discursiva deste saber”⁴⁷. Isso ocorre particularmente no caso da exigência de uma despersonalização do saber para que ele se torne público.

A produção e comunicação dos saberes científicos nas universidades são consideradas necessidades sociais. Os pesquisadores que se encontram imersos nesse mundo sofrem, conforme Arzac (1989), pressões internas e externas (BRITO MENEZES, 2006). As pressões internas aparecem quando seus pares exigem que os saberes produzidos (dissertações, teses, etc.) sejam comunicados, pois a comunicação pelos atores envolvidos proporciona o surgimento de novos saberes.

Assim, podemos dizer que um saber, ao ser produzido, deixa de ter como “*dono*” aquele pesquisador que o produziu e sistematizou (ALMEIDA; BRITO LIMA, 2013), uma vez que entendemos o saber como uma construção histórica e social, e, por isso, o pesquisador tem o dever de apresentá-lo aos demais membros da comunidade científica em congressos, simpósios etc. e, numa outra instância, de comunicá-lo à sociedade.

Essas publicações dizem respeito às demandas externas, pois a evolução da sociedade se dá, dentre outros aspectos, em função dos avanços culturais, científicos e tecnológicos. Queremos dizer que novas descobertas estão condicionadas à produção dos novos saberes pela comunidade científica. Quando ocorre essa produção, alguns saberes considerados antigos são esquecidos e outros se reafirmam.

No entanto, a comunicação direta dos saberes científicos aos alunos pode impedir a progressão da aprendizagem. É necessário, então, um novo tratamento do saber, no sentido de que sua roupagem mais acadêmica seja retirada e de que ele possa, após essa primeira deformação, ser comunicado, compreendido e, se possível, utilizado socialmente em outros momentos (BRITO MENEZES, 2006).

Esse processo de publicação dos saberes apresenta dois momentos importantes: o primeiro consiste em *despersonalizá-lo*, ou seja, o pesquisador deve suprimir todas as relações pessoais que ele teve com o objeto, assim como eliminar todas as reflexões inúteis, os caminhos tortuosos percorridos, os impasses com os quais se deparou. O segundo caracteriza-se por uma *descontextualização*, que diz

⁴⁷ “El saber sabio nos interesa porque ciertas exigencias que intervienen en la preparación didáctica del saber, están va influyendo a partir de la constitución del saber sabio o al menos a partir de la formulación discursiva de ese saber.”

respeito ao descolamento daquele saber de uma situação específica, do problema de pesquisa que lhe deu origem, para, então, poder generalizá-lo (BRITO MENEZES, 2006).

Segundo Araújo (2009, p. 29), quando um determinado saber científico passa a ser considerado como saber a ser ensinado, ele deve passar pelo controle social de aprendizagens, que define uma progressão no tempo sobre o que e quando deve ser ensinado, bem como verificar a conformidade do desenvolvimento dos conhecimentos dos alunos de acordo com a progressão adotada (ARAUJO, 2009, p. 29). Durante toda a trajetória que cumpre o saber, surgem outras denominações, tais como o saber a ensinar.

Para Brousseau (1986), o saber a ensinar revela-se a partir de uma cultura preexistente e, de certa forma, *torna-se independente das pessoas e instituições interessadas na sua construção e comunicação*. A análise dos fenômenos de comunicação e reconstrução dos saberes pelo sujeito é o centro do sistema didático e o objetivo fundamental da didática. Por outro lado, a transposição didática tanto dá conta das adaptações desses saberes quanto permite o estudo deles no contexto escolar.

Nesse sentido, Godino e colaboradores (2007) entendem que parece claro que o saber matemático se refere a uma forma especial de conhecimento institucionalizado, que habitualmente se registra de forma axiomática e mediante o qual se despersonaliza e descontextualiza.

No ambiente escolar, em especial, o interior do sistema didático, os saberes que lá se encontram também sofrem adaptações por parte dos professores. Para Bessa de Menezes (2010), essa nova produção de saberes pelo professor está impregnada pela relação dele ao saber. Os argumentos utilizados pelo professor, os gestos, os caminhos diferentes do existente nos livros são os meios que o professor encontrou para ensinar algo aos alunos.

O que estamos apontando é chamado por alguns pesquisadores de “transposição didática interna” que deve ser vista pela academia como suficientemente amparada pelo saber científico, a fim de não provocar uma desautorização dos matemáticos, a qual minaria a legitimidade do processo social. Além disso, deve aparecer suficientemente afastada dos saberes dos pais, pois, caso isso aconteça, a legitimidade do processo de ensino será posta em questão (CHEVALLARD, 1991, p. 30).

Por outro lado, se for inadequada a distância entre o saber ensinado e o científico, também se compromete a legitimidade do processo de ensino, degradando seu valor. Para reestabelecer-se a adequação dos caminhos, torna-se

indispensável a instauração de uma corrente de saber proveniente do saber científico. O saber ensinado envelhece na relação com a sociedade; um novo aporte estabelece a distância com o saber científico, os especialistas e coloca os pais longe. Assim, se encontra a origem do processo de transposição didática (CHEVALLARD, 1991, p. 31)⁴⁸.

Como vimos anteriormente, os saberes são transpostos por uma necessidade social da educação, do seu funcionamento e de sua difusão. Neste momento, contudo, às questões apresentadas anteriormente adicionamos outras: por que existe esse fenômeno? Quais as motivações da existência dele? A seguir, procuraremos responder essas indagações.

3.2 Transposição Didática e Transposição Institucional

Pretendemos, neste momento de nosso trabalho, apresentar uma discussão voltada para relação entre as transposições didáticas e a transposição institucional, pontuando algumas questões que consideramos relevantes.

Inicialmente, chamamos atenção para o fato de que as investigações apontam que a maioria dos fenômenos relacionados com o ensino da matemática tem um componente transpositivo essencial (BOSCH; GASCÓN, 2007b). Para Chevallard (1991, p. 45) “todo projeto social de ensino e aprendizagem se constitui dialeticamente com a identificação e a designação de conteúdos de saberes como conteúdos a ensinar”.

A ideia defendida pelo pesquisador acima corresponde aos conteúdos explícitos e implícitos. Os explícitos podem ser encontrados nos programas de ensino e os implícitos estão relacionados aos elementos que podem ser entendidos como a interpretação da evolução dos programas.

A partir dessa problemática, Chevallard (1991, p. 45) define que *“um conteúdo de saber, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre um conjunto de*

⁴⁸ “se torn indispensable la instauración de una corriente de saber proveniente del saber sabio. El saber enseñado se há vuelto viejo en relación con la sociedad; un nuevo aporte acorla da distancia con el saber sabio, el de los especialistas; y pone a distancia a los padres. Allí se encuentra el origen del proceso de transposición didáctica.”

*transformações adaptativas que vão tornando apto para ocupar um lugar entre os objetos de ensino*⁴⁹. Assim, o “trabalho” de transformar um objeto de saber a ensinar em um objeto de ensino é denominado transposição didática.

A existência, então, da transposição didática está relacionada ao funcionamento didático do saber e ao funcionamento científico. Os dois saberes se inter-relacionam, porém funcionam de forma diferente e não se sobrepõem. Isso porque não se deseja que o aluno se aproprie do saber da forma como ele foi produzido em uma comunidade científica (o *savoir savant*, que traduziremos como saber científico ou de referência), pois as comunidades científica e escolar têm objetivos distintos. A escola procura sistematizar o saber científico e, para isso, é necessária uma “didatização”, uma roupagem didática, que consiste em tornar esse saber comunicável para ser passível de ser ensinado aos alunos.

Essa ideia também foi discutida por Chevallard (2001) e é de fundamental importância na teoria da transposição didática. Esse autor diz, textualmente, que o saber científico muitas vezes se perde de sua origem nesse processo de transformações. Cabe à noosfera fazer um trabalho de vigilância epistemológica, para que, em virtude das deformações e supressões sofridas pelo saber, ele não se perca da sua própria epistemologia, de forma que o saber agora transposto não guarde mais qualquer relação com o saber de origem.

A transposição didática externa se caracteriza pela definição dos objetos de ensino, que indica o saber a ser ensinado, ‘texto de saber’. Essa primeira etapa acontece, segundo o autor em enfoque, em uma instituição não visível, chamada de noosfera, que se caracteriza como a ‘esfera pensante’, que define programas, currículos, manuais e livros didáticos, considerando todo o contexto de produção científica, bem como as necessidades da sociedade e do sistema de ensino vigente (CHEVALLARD, 1991).

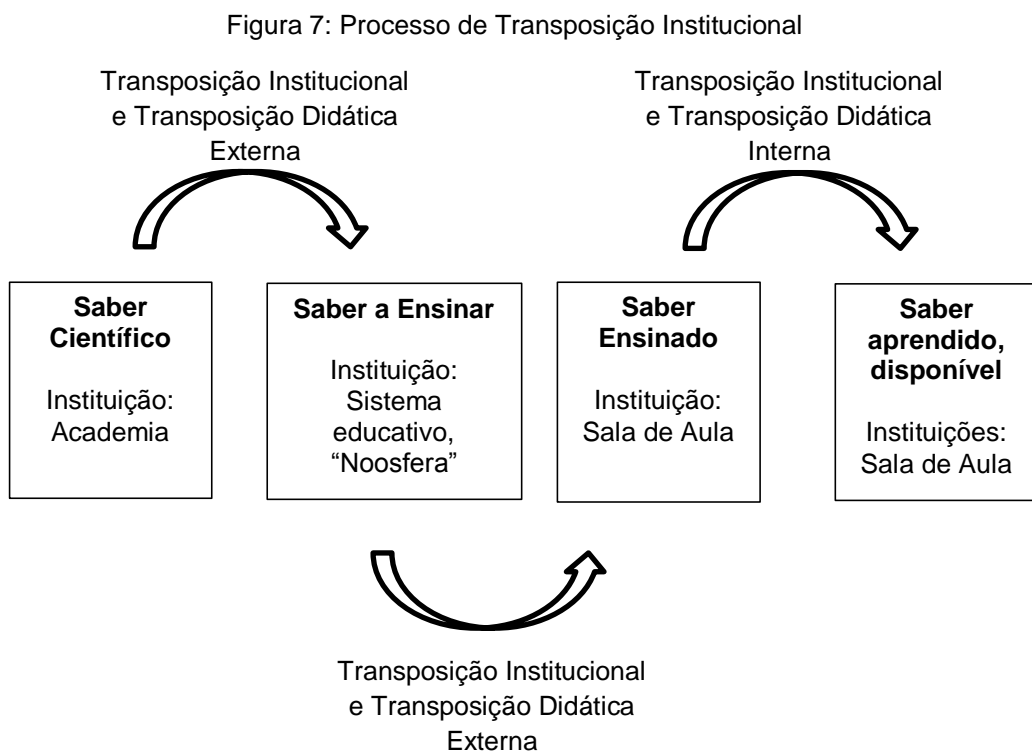
O passo final na transformação sofrida pelo saber científico ocorre na sala de aula (Transposição Didática Interna), *intramuros*, num espaço cujos parceiros envolvidos são o professor e o aluno. Chevallard (1991) chamou esse processo de trabalho interno de transposição, mas, no início de sua proposição teórica, não

⁴⁹ “Un contenido de saber que há sido designado como saber a enseñar, sofre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El “trabajo” que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica.”

aprofundou o que acontecia naquele espaço, apenas pontuou a sua existência e importância. Esse fenômeno pressupõe que o saber científico emerge das práticas sociais em certo domínio de realidade e dentro dessa realidade se mantém. Assim, o seu desenvolvimento está associado à constituição de determinadas instituições.

Dessa forma, ao constituir determinadas instituições, a transposição didática se insere num contexto mais amplo, promovendo uma transposição institucional. Como havíamos apontado, a transposição didática caracteriza-se justamente pela passagem do saber de uma a outra instituição. No caso da transposição institucional, existem outras instituições que não se caracterizam estritamente como sendo didáticas. Assim, podemos dizer que toda transposição institucional, em seu processo, tende a articular-se com uma transposição didática.

É necessário entender que o uso da expressão “transposição didática” se justifica quando a instituição alvo é uma instituição de ensino. Tomamos a figura que trata do processo de transposição didática apresentada anteriormente para discutir a ideia de transposição institucional.



Fonte: Adaptado de Bosch e Gascón (2007b, p. 394)

A estrutura apresentada acima aponta a existência, de uma transposição didática (externa e interna) e de uma transposição institucional, mas a transposição didática se insere no campo da transposição institucional.

Propomos, nas linhas seguintes, discutir a TAD na perspectiva de Chevallard (1996; 1999). Procuramos apresentar questões iniciais de Praxeologia e, posteriormente, dedicar nosso diálogo à antropologia didática e às organizações praxeológicas.

3.3 A Teoria Antropológica do Didático

Neste momento de nosso trabalho, uma das primeiras questões que podemos destacar diz respeito ao significado de “antropologia do didático”. Sobre essa escolha, Chevallard (1999) refere-se não a algo em que fosse preciso colocar uma etiqueta diferente numa loja para chamar atenção dos clientes, ou até, em um local privilegiado numa vitrine, que chamasse a atenção com intuito de conseguir ser vendido rapidamente. Sua resposta inicial segue uma definição da etimologia básica da palavra: “a antropologia⁵⁰ é o estudo do homem” (CHEVALLARD, 1991, p. 147-148).

O pesquisador aponta uma associação da antropologia com a didática. Afirma que a didática da matemática não surge do nada, mas que existe todo um processo histórico. Assim, a didática se inscreve no campo da antropologia, encontra-se dentro desse campo, modificando o seu “poder” e dando-lhe significado.

Ao admitir a didática dentro da antropologia, Chevallard (1991) questiona sobre o seu objeto. Na busca pelo objeto da didática, o pesquisador propõe exemplos dentro do campo da antropologia. Faz referência à antropologia religiosa, lembrando que o objeto dela seria o religioso (que excede “as religiões”), o objeto da antropologia política seria o político (que vai além dos “sistemas políticos”) e o objeto da didática seria o didático. Essa descoberta do pesquisador segue um caminho semelhante ao dos outros objetos que não viviam na cultura. Com esse autor, é possível inferir que

⁵⁰Segundo Ferreira (1986), o termo “antropologia” diz respeito a uma “ciência que reúne várias disciplinas cujas finalidades comuns são descrever o homem e analisá-lo com base nas características biológicas (antropologia física) e culturais (antropologia social) dos grupos em que se distribui, dando ênfase, através das épocas, às diferenças e variações entre estes grupos.”

podemos dar agora o nome ao objeto, o qual é o começo da construção: o didático. O didático, veremos, é uma dimensão da realidade antropológica que atravessa de parte a parte. E que requer a elaboração de uma antropologia didática, subcontinente do mapa em que as didáticas, tal como conhecemos, representam as primeiras bases e instalam uma rede problemática de inteligibilidade (CHEVALLARD, 1991, p. 148)⁵¹.

Para tanto, Chevallard (2007, p. 717) aponta um questionamento, com intuito de definir a didática: o que deve fazer um didático⁵²? De pronto responde: “existe didática logo que uma pessoa ou uma instituição se faz através dela um agente didático, faz algo a fim de que uma instituição ou uma pessoa aprenda um certo conjunto de praxeologias”⁵³. Sendo efetiva essa aprendizagem, o conjunto de praxeologias chega até essa instituição ou a essa pessoa e acaba por “integrar ao seu equipamento praxeológico” (ibidem).

Essas justificativas constituem razões para chamar-se a teorização de “antropológica do didático”. A Teoria Antropológica do Didático (TAD) “situa a atividade matemática, e em consequência a atividade de estudo em matemática, num conjunto de atividades humanas e de instituições sociais”⁵⁴ (CHEVALLARD, 1999, p.1).

O postulado de base da TAD admite que toda atividade humana, regularmente realizada, pode ser descrita e analisada a partir de um modelo “único”, chamado de “praxeologia”. Mas o que seria realmente uma praxeologia? Essa noção, segundo Bosch e Gascón (2007b), é formada a partir da união dos termos gregos⁵⁵ *práxis*, considerada a parte prática, e *logos*, que faz referência ao pensamento, ao raciocínio. Esses termos se encontram no mesmo nível de importância: a dimensão do *saber* com sua dimensão *prática* (cercada do “saber fazer”).

⁵¹ “Entonces, podemos dar ahora su nombre a ese objeto, lo cual es una manera de empezar la construcción: he nombrado lo didáctico. Lo didáctico, veremos es una dimensión de la realidad antropológica que la atraviesa de parte a parte. Y que requiere la elaboración de una antropología didáctica, subcontinente del mapa en el que las didácticas, tal como las conocemos, representan las primeras bases e instalan una red problemática de inteligibilidad.”

⁵² Nomenclatura utilizada por Chevallard. Para Delgado (2006, p. 35), a “TAD identifica o ‘didático’ como tudo relativo ao estudo, tomando a palavra estudo em um sentido muito amplo que engloba as noções de ensino e aprendizagem comumente utilizadas na cultura pedagógica.”

⁵³ “il y a du didactique lorsqu’une personne ou une institution, se faisant par là agent didactique, fait quelque chose afin qu’une institution ou une personne “apprenne” un certain ensemble praxéologique, c’est-à-dire afin que cet ensemble arrive jusqu’à cette institution ou cette personne et finisse par s’intégrer à son équipement praxéologique.”

⁵⁴ “sitúa a atividade matemática, y en consecuencia la actividad del estudio en matemáticas, en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales.”

⁵⁵ Os termos gregos “Práxis” e “Logos” serão discutidos mais adiante de forma mais aprofundada.

Chevallard (1991; 1996) apresenta sua teoria quase de forma axiomática. Considera a antropologia cognitiva ou antropologia do conhecimento como outro pilar de sustentação da TAD com o objetivo de desenvolver uma articulação das noções, cuja elaboração visa permitir pensar de maneira unificada um grande número de fenômenos didáticos.

Nesse sentido, assenta a TAD nos conceitos primitivos de *objetos, pessoas, instituições, relação (pessoal)* de um indivíduo com o objeto e *relação (institucional)* de uma instituição com o objeto. Esses são considerados os elementos iniciais da sua teorização.

Dos conceitos apresentados, Chevallard (1996; 1999; 2007) chama atenção, primeiramente, para o conceito de *objeto O*. Por entender que este tem uma posição privilegiada, considera-o a base de toda a sua construção teórica. Assim, entende que um “*objeto é toda entidade, material ou não, que existe para ao menos um indivíduo*”⁵⁶ (CHEVALLARD, 2003, p. 81). Complementando essa ideia, esse autor explica que “*todas as coisas são objetos, as pessoas X e as instituições I também são objetos, assim como outras entidades que irei introduzir, são objetos de um tipo particular*” (CHEVALLARD, 1996, p. 127). O pesquisador se refere como tipo particular às pessoas e às instituições.

O surgimento da TAD se justifica para Chevallard (1996, p. 127) pelo fato de existir a necessidade de análise de qualquer tipo de objeto. Então, nessa perspectiva, podemos dizer que

a função logarítmica é, evidentemente, um objeto (matemático), mas existe igualmente o objeto escola, o objeto professor, o objeto aprender, o objeto saber, o objeto dor de dente, o objeto fazer xixi, etc. Assim, passa-se de uma máquina a pensar um universo didático restrito a um conjunto de máquinas de alcance mais amplo, apto, em princípio, a nos permitir situar a didática no seio da antropologia (CHEVALLARD, 1996, p. 127-128).

Dessa forma, é possível verificar que, se antes algumas questões não podiam ser analisadas pela Transposição Didática devido à limitação dela, com a teorização da TAD, essa possibilidade começa a existir. É por isso que Chevallard (1996) afirma que se passa de uma máquina (transposição didática) para um conjunto de máquinas (antropológica do didático) de alcance mais amplo, mais vasto.

⁵⁶ “est objet toute entité, matérielle ou immtérielle, qui existe pour au moins un individu.”

Na construção teórica da TAD, outros conceitos primitivos vão surgindo, como o de “relação pessoal de um indivíduo X com um objeto O”. Esse conceito diz respeito a todas as interações que o indivíduo X pode ter com o objeto O. A expressão que pode denotar esse sistema é $R(X, O)$. Vale destacar que um objeto O existe para uma pessoa X se a relação pessoal de X com O é não vazia, ou seja, se $R(X, O) \neq \emptyset$ (CHEVALLARD, 2003, p. 81).

A noção de conhecimento na teoria relaciona-se com o conhecimento de um objeto O. Isso nos leva à seguinte questão: como um indivíduo X conhece um objeto O? Respondemos, então, que ele o conhece a partir do momento em que o objeto passa a existir para ele. Em outras palavras, conhecer um objeto O significa ter uma *relação pessoal* com ele. Além disso, podemos dizer que o objeto O somente existe para a pessoa que o conhece.

O conjunto dos pares formados pelos objetos O (conhecidos de X) e por suas *relações pessoais* $R(X, O)$ é definido por Chevallard (2003) como o *universo cognitivo* de X, assim designado: $U(X) = \{O, R(X, O)\}$.

Essa teoria faz referência ao conceito de pessoa como sendo o par formado pelo indivíduo X e pelo sistema de relações pessoais $R(X, O)$ em algum momento da história de X (CHEVALLARD, 2003, p. 81).

Ainda no que diz respeito a essa relação entre indivíduo e pessoa, o pesquisador chama atenção para o fato de não generalizarmos e dizermos que “*todo indivíduo é uma pessoa*”. Para Chevallard (2003), o sistema de relações pessoais de X no decorrer do tempo pode evoluir, de forma que os objetos que não existem podem passar a existir e outros que existem podem deixar de existir na relação pessoal; assim, X se modifica. Nessa evolução, “o invariante é o *indivíduo*; o que muda é a *pessoa*”. Ainda quanto à existência de um objeto, podemos dizer que um “*objeto existe porque é objeto de conhecimento*” (CHEVALLARD, 1996, p. 128).

Compreendida essa noção, passemos a um dos principais conceitos da TAD, o de “*Instituições*”. Esse conceito, em alguns momentos, pode ser confundido com o sentido usual da palavra “instituição”, o que pode comprometer a conceituação desse termo na teoria em enfoque. Usualmente, podemos dizer que uma escola é uma instituição, tal como uma sala de aula; mas existe igualmente a instituição “trabalhos orientados”, a instituição “curso”, a instituição “família”. Enfim, a vida cotidiana é uma instituição (sendo ela compreendida em dado momento social), etc.

Chevallard (2003, p. 82) trata a instituição I como um dispositivo social “total”, que certamente pode ter uma extensão reduzida no espaço social, mas permite – e impõe – a seus *sujeitos*, isto é, às pessoas X que ocupem as diferentes posições *p* ofertadas em I. Isso porque o cenário do jogo nas instituições permite/conduz maneiras próprias de fazer e pensar.

Em outras palavras, dizemos que os indivíduos X, ao ocuparem determinadas posições nas instituições I, estão se tornando sujeitos dessas instituições. O fato de se assujeitar às instituições como sujeito ativo vai contribuir para sua vida. De uma maneira geral, é por suas sujeições, pelo fato de que ele é o sujeito de uma multiplicidade de instituições, que o indivíduo X se constitui como uma pessoa (CHEVALLARD, 2003).

Inferimos, então, que a pessoa é o produto das sujeições a todas as instituições a que se submete ao longo dos anos. Essas instituições foram, pouco a pouco, construindo a "personalidade" dela e inspirando-lhe a maneira de ser e de ver as suas relações pessoais. Devido a essa inferência, Chevallard (2003, p. 91) entende que as “pessoas emergem de um turbilhão de assujeitamentos institucionais do passado e do presente”⁵⁷.

A partir dessas deduções, julgamos ter chegado o momento de discutirmos o conceito de *relação institucional* de uma instituição I com o objeto O, aqui representado por $R_I(O)$. Começamos, então, por entender que, de forma semelhante ao que acontece para um indivíduo X, podemos dizer que um objeto O existe para uma instituição I, isto é, I conhece O quando $R_I(O) \neq \emptyset$. Nesse caso, dizemos que O é um objeto institucional (ARAÚJO, 2009).

De acordo com Chevallard (2003, p. 82), uma relação institucional com um objeto O é considerada ideal quando ela se assemelha à relação pessoal dos “bons sujeitos” de I, isto é, quando $R_I(O) \cong R(X, O)$. Assim, para Araújo (2009), é possível dizer-se que existe uma *conformidade* entre a relação pessoal de X e a relação institucional de I.

Seguindo esse raciocínio, tomemos a noção de “*aprendizagem*”. Para Chevallard (2003), existe aprendizagem quando um indivíduo X torna-se sujeito de uma instituição I. Nesse caso, um objeto que existe em I vai existir também para X sob a exigência da relação institucional $R_I(O)$ e, mais amplamente, sob a exigência

⁵⁷ “La personne émerge du maelström de ses assujettissements passés et présents.”

do contrato institucional C_i . Assim, a relação pessoal $R(X, O)$ vai se construir, ou vai mudar, sob a exigência de $R_i(O)$ e C_i . Vale destacar que o “*contrato didático*”⁵⁸ é a *pedra de toque de toda organização escolar*” (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001). Nesse sentido, tomamos as palavras de Chevallard (1996) para dizer que o contrato institucional deriva da noção de contrato didático de Guy Brousseau. Para Chevallard (1996),

há, pois, aprendizagem (para a pessoa X, relativamente ao objeto O) quando $R(X, O)$ se altera. Bem entendido, é possível que $R(X, O)$ não se altere: dizemos então que X “nada aprendeu” (CHEVALLARD, 1996, p. 130).

Nesse caso, as alterações cognitivas acontecem a partir do momento em que X se torna sujeito de I e a relação final é diferente da relação inicial ao saber. Essas alterações é que farão de X um “sujeito adequado” de I. Chevallard (1996), para refletir sobre “sujeito adequado”, discute também a ideia de “sujeito desadequado” de uma instituição I. Dessa forma, esse autor entende que

uma pessoa X revela-se um sujeito adequado de I, relativamente ao objeto institucional O, quando a sua relação pessoal $R(X, O)$ é considerada conforme a relação institucional $R_i(O)$. Poderá igualmente revelar-se sujeito desadequado, incapaz de entrar no contrato institucional C_i , e talvez acabe por ser expulso de I. É aqui que engrena um desenvolvimento relativo à avaliação institucional, isto é, relativo aos mecanismos segundo os quais I é levada a pronunciar, através de alguns dos seus agentes, um veredito de conformidade (ou não conformidade) de $R(X, O)$ com $R_i(O)$ (CHEVALLARD, 1996, p. 131).

Em outras palavras, entendemos como sujeito adequado aquele que se encontra dentro de I, metaforicamente falando, estabelecendo relação com o objeto institucional O, e sua relação pessoal é considerada conforme a relação institucional $R_i(O)$. De forma contrária, revela-se um sujeito desadequado. Sendo desadequado, torna-se incapaz de entrar no contrato institucional C_i , o que pode acarretar sua expulsão de I.

Diante disso, podemos dizer que a instituição, para estar viva, precisa ter sujeitos adequados, pois, conforme Chevallard (1996, p. 139), não se constitui uma instituição viável com (demasiados) sujeitos desadequados. Exemplo dessa

⁵⁸ Chamamos atenção para o fato de que o surgimento da noção de contrato didático neste capítulo tem a intenção de apontar as possíveis relações com os conceitos da TAD.

inviabilidade é uma sala de aula em que a maior parte dos alunos não consegue entrar no contrato institucional.

Entendemos que, em toda instituição, existem os mecanismos próprios que a definem, e estes são considerados como regras que dão vida às instituições. Por outro lado, afetam, desequilibram outros mecanismos – por que não dizer fenômenos? –, como, por exemplo, o contrato didático. Queremos dizer que as instituições produzem um tipo de pressão que afeta o sistema escolar, o sistema didático e, em última instância, a relação didática. Nesta última, encontramos o professor e os alunos que se assujeitam a um contrato institucional que, por sua vez, com a entrada do saber em cena, condicionam o surgimento do contrato didático e dos fenômenos a ele associados. Da relação didática, emerge o contrato didático, e este dinamiza a relação didática.

As pesquisas que tratam de fenômenos relacionados ao ensino da matemática, em grande parte, têm um componente transpositivo essencial (BOSCH; GASCÓN, 2007b). Queremos dizer que o fenômeno “contrato didático” existe porque fatores transpositivos permitiram sua existência. Nesse sentido, os pesquisadores afirmam que o fenômeno de transposição está no coração de qualquer problema didático.

Portanto, os fenômenos *contrato didático* e *transposição didática* caminham juntos numa instituição didática. O primeiro mostra-se necessário a uma relação triangular (professor – aluno – saber) e pode ser identificado mais claramente por meio das suas negociações que desencadeiam as rupturas. O segundo advém da necessidade de criar-se um modelo para mostrar com maior detalhe as atividades matemáticas e didáticas.

Para isso, Chevallard (1999) cria uma ferramenta que permite modelizar com maior detalhe as práticas matemáticas, a noção de praxeologia matemática, que está inserida na TAD. Esse pesquisador acrescenta que o postulado de base da TAD, ao contrário de uma visão particular de mundo, admite que toda atividade humana pode ser descrita como um modelo *único*, que pode ser resumido com a palavra *praxeologia*.

3.3.1 A Noção de Praxeologia ou Organização Praxeológica

Uma parte da teorização da TAD diz respeito ao desenvolvimento da noção de *praxeologia*. Na relação com a didática, podemos dizer que a “*didática se dedica a*

*estudar as condições e restrições sob as quais as praxeologias se propõem a viver, a migrar, a mudar, a operar, a definir, a desaparecer, a renascer, etc. no seio das instituições humanas*⁵⁹ (CHEVALLARD, 2007, p. 719).

Essa condição faz dela uma unidade básica que permite analisar-se a *ação humana em geral*. Para Bosch e Gascón (2007a; 2007b; 2009), essa noção é formada a partir da união dos termos gregos “práxis” e “logos”, associação que permite considerar-se, ao mesmo tempo e com mesma importância, a dimensão prática – o “saber fazer” – e a dimensão teórica – o “saber”.

Um princípio fundamental considerado pela TAD remete ao fato de que “*não podem existir ações humanas sem ser, ao menos parcialmente, ‘explicadas’, ‘inteligíveis’, ‘justificadas’, ‘contabilizadas’, em qualquer estilo de ‘raciocínio’ que possa abraçar a dita explicação e justificação*” (CHEVALLARD, 1999, 2007, p. 397). Assim, acrescentamos que toda práxis implica um logos e que nenhuma atividade humana permanece sem questionamento.

Então, a Praxeologia se propõe a analisar essas ações, consideradas por Chevallard (2007, p. 710) como um avanço importante e decisivo que permite observar-se o nascimento e a evolução de uma relação institucional. O pesquisador justifica ainda que, “*para esperar e observar o nascimento ou a evolução de uma relação a um objeto O, é preciso, posso dizer, observar o indivíduo X ou a instituição I na sua relação com o objeto O, nas atividades de X ou sujeitos de I que ativem O*”⁶⁰.

Para isso, a praxeologia se constitui com noções-chaves de *tipos de tarefas* (T) a serem cumpridas por meio de, pelo menos, de certa maneira de executá-las, chamada *técnica* (τ) que, por sua vez, é explicada e legitimada por elementos *tecnológicos* (θ), justificados e esclarecidos por uma *teoria* (Θ).

A praxeologia [T/ τ / θ / Θ /] é formada pela união de quatro componentes que se articulam, formando um bloco prático-técnico $\Pi = [T, \tau]$, designado na linguagem corrente como *saber-fazer (práxis)*, que consiste na associação entre certo tipo de tarefa e uma determinada técnica, e um bloco tecnológico-teórico $\Lambda = [\theta, \Theta]$, designando o *saber (logos)*, resultado da articulação entre a tecnologia e a teoria.

⁵⁹ “la didactique se voue à étudier les conditions et contraintes sous lesquelles les praxéologies se mettent à vivre, à migrer, à changer, à opérer, à dépérir, à disparaître, à renaître, etc., au sein des institutions humaines.”

⁶⁰ “Pour espérer observer la naissance ou l’évolution d’un rapport à un objet O, il faut, si je puis dire, observer l’individu X ou l’institution I “dans son rapport à O”, dans les activités de X ou de sujets de I qui activent O.”

Conforme Delgado (2006, p. 37), a práxis saber-fazer diz respeito aos

tipos de problemas ou tarefas que se estudam, e as técnicas que se constituem e utilizam para abordá-los são consideradas o primeiro nível do saber matemático. O segundo nível recorre à prática descritiva, que organiza e justifica a atividade, que chamamos logos ou, simplesmente, saber.

Andrade (2013) acrescenta ainda, considerando o postulado de Chevallard (1999; 2007), que toda prática institucional pode ser analisada, sob diferentes pontos de vistas e de diferentes formas, em um sistema de tarefas relativamente bem delineadas, destacando-se o fluxo da prática. Aponta ainda que o cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica.

3.3.1.1 Tipos de Tarefa (T)

A raiz da praxeologia se encontra nas noções solidárias *de tarefa t* e *o tipo de tarefa T*. E, quando *t* forma parte de um tipo de tarefa *T*, podemos dizer que existe $t \in T$. A esse respeito, Chevallard (1999, p. 223) aponta que, na maioria dos casos, a associação de uma tarefa a um tipo de tarefa é expressa por um verbo, como “desenvolver” a expressão literal dada, “subir” uma escada etc.

Podemos dizer ainda que a noção de *tarefa*, ou melhor, de *tipo de tarefa*, diz respeito a um objeto relativamente preciso. Assim, quando dizemos *subir uma escada*, estamos diante de um tipo de tarefa. Mas, se dizemos apenas *subir*, não haveria tarefa. Por outro lado, quando dizemos *calcular o valor de uma função no ponto*, temos um tipo de tarefa. Mas *calcular*, simplesmente, é o que chamamos de um gênero de tarefa (CHAVALLARD, 1999). Outros gêneros, tais como decompor e somar, sozinhos, não definem o conteúdo em estudo (SILVA, 2005; ALMOULOU, 2007).

Isso pode retratar muito bem o que acontece na sala de aula de matemática nos dias atuais. Durante muito tempo, o gênero *calcular* pode enriquecer os novos tipos de tarefas. Para Chevallard (1999), essa situação pode ser considerada um ponto de partida para reconstruir as tarefas, como construção institucional que caracteriza um problema a ser resolvido dentro da própria instituição como, por exemplo, a instituição didática.

É importante ressaltar que tarefas, tipos de tarefas, gêneros de tarefas não são dados da natureza, são “artefatos”, “obras”, *construções institucionais*, cuja

reconstrução em tal instituição e, por exemplo, na sala de aula, é um problema completo, o que é um objeto da didática da matemática (CHEVALLARD, 1999).

Assim, é possível afirmar que, em sala de aula, existe um conjunto de práticas de ensino e aprendizagem sistematizadas e compartilhadas na instituição (educacional). Essas práticas dependem fortemente da organização matemática executada pelo professor. Então, podemos questionar: até que ponto as “tarefas e as técnicas”, que são elementos da organização matemática, mantêm relação com o fenômeno “contrato didático”? Mais ainda, podemos perguntar: como ocorrem as negociações, as rupturas, as renegociações no momento em que o professor coloca em execução o bloco prático-técnico $\Pi = [T, \tau]$, designado na linguagem corrente como *saber-fazer (práxis), na organização didática?*

Entendemos que o trabalho didático do professor (organização didática) está, de certa forma, relacionado com um tipo de tarefa e um número de técnicas reconhecidas, ou não, nas instituições que a problematizaram. Por outro lado, os alunos podem ter acesso a técnicas alternativas que não se encontram à disposição nessa mesma instituição. Essas técnicas alternativas podem, em certa medida, gerar rupturas e, conseqüentemente, renegociações.

De acordo com Chevallard (2007), as organizações didáticas dependem fortemente das organizações matemáticas e o isomorfismo didático-matemático é expresso por meio de uma hierarquia de níveis de cogestão entre OD e OM.

A maioria das técnicas institucionais torna-se rotineira quando deixa de apresentar problemas em sua realização. Portanto, o ideal é que exista uma problematização, ou seja, uma tarefa efetivamente problemática que desenvolva pelo menos uma técnica para responder às questões da tarefa (ALMOULOUD, 2007).

Isso nos faz lembrar o papel do meio na relação com o sujeito, segundo as situações didáticas de Guy Brousseau. A seguir discutiremos, então, os elementos conceituais referentes às técnicas.

3.3.1.2 Técnica (τ)

Uma técnica τ diz respeito à *maneira de fazer* ou *realizar as tarefas* $t \in T$. Uma praxeologia relativa a T contém, em princípio, uma técnica τ relativa a T . Para Chevallard (1999, p. 223), se estabelece, então, “*um bloco designado $[T/\tau]$, que se denomina um bloco prático-técnico, em que se identifica, de forma genérica, como*

saber-fazer; este implica um determinado tipo de tarefa T e uma determinada maneira técnica τ de realizar as tarefas desse tipo”⁶¹.

No entanto, uma determinada técnica τ pode não ser suficiente para realizar todas as tarefas $t \in T$; ela pode funcionar para uma parte $P(\tau)$ das tarefas T e fracassar para $T \setminus P(\tau)$. Para Araújo (2009), isso significa que, em uma praxeologia, pode existir uma técnica superior a outras, ao menos no que concerne à realização de certo número de tarefas de T .

Segundo Andrade (2013, p. 191), uma técnica poderia responder a uma questão do tipo: “como escovar os dentes? Como resolver uma equação do segundo grau? Como determinar a média aritmética? Como determinar uma moda? No entanto, existindo mais de uma maneira de cumprir a tarefa, se procuraria entre as técnicas a mais eficiente”.

Numa relação institucional que se estabelece entre uma instituição I (alunos, professor) e um objeto O , o uso de determinadas técnicas depende das posições que os sujeitos ocupam nessa instituição e do conjunto de tarefas que essas pessoas devem cumprir (ALMOULOU, 2007).

A posição que ocupa cada sujeito e o caminho utilizado para cumprir os tipos de tarefas por meio das técnicas, possivelmente, pode ser influenciado pelo CD, ou seja, pode existir um sistema de dependência com esse fenômeno. Nesse sentido, podemos questionar: como se dão as negociações do Contrato Didático entre o estabelecimento das tarefas e a execução das técnicas?

A vida da instituição está relacionada com as *condições e restrições* de produção e utilização nas instituições das tarefas e técnicas. Melhor dizendo, em vez de condições e restrições, podemos dizer que a vida da instituição se constrói a partir de sua ecologia. “*Supõe-se que, para poder existir em uma instituição, uma técnica deve ser compreensível, legível e justificada (...) essa necessidade ecológica implica a existência de um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas que chamamos de tecnologia da técnica*” (CHEVALLARD, 1999, p. 85-86).

Conforme Chevallard (1999), numa instituição I , em princípio, existe um tipo de tarefa e existe também, em geral, uma técnica ou ao menos um pequeno número de técnicas institucionalmente reconhecidas pelos atores envolvidos. Porém, pode existir

⁶¹ “un bloque designado por $[T/\delta]$, que se denomina bloque práctico-técnico y que se identificará genericamente con lo que comúnmente se denomina un saber-hacer: un determinado tipo de tareas, T y una determinada manera, δ , de realizar as tareas de este tipo.”

também um pequeno número técnicas que não se inserem entre as técnicas institucionalmente reconhecidas, porque são de outras instituições, embora estejam sujeitas às transformações institucionais.

As tarefas e técnicas, conhecidas pelos atores e outras conhecidas por parte dos atores (professores/alunos) no jogo didático, podem, de certa forma, afetar o funcionamento institucional por meio de efeitos de contrato didático, ou seja, as instituições são regidas por suas regras institucionais, em grande medida conhecidas, os contratos institucionais. Por outro lado, existem outras regras de contrato didático que, em grande parte, não são identificadas, a não ser quando rompidas.

Esse diálogo aponta os seguintes questionamentos: até que ponto as tarefas e técnicas apresentadas pelos professores aos alunos podem influenciar na relação didática? Qual a influência do contrato didático nas tarefas e técnicas? Como se dão as negociações, as rupturas e as renegociações de contrato que emergem nas tarefas e técnicas?

3.3.1.3 Tecnologia (θ)

Sua definição baseia-se em um *discurso racional* (logos) sobre uma técnica τ e tem como primeiro objetivo justificá-la “racionalmente”. Dessa forma, assegura que a técnica permita que se cumpra bem a tarefa T. Ou seja, a primeira função da tecnologia é *descrever e justificar* a técnica utilizada como uma *maneira de cumprir* corretamente uma tarefa, ou mesmo permitir engendrar (ou a reconstruir, quando ela é “dada”). O mesmo ocorre com a teoria, o que assume nesta instituição ou para esta pessoa, uma função teórica (CHEVALLARD, 2007).

A segunda função da tecnologia apontada por Chevallard (1999) consiste em *explicar* para tornar *inteligível, esclarecer* uma técnica τ , isto é, “em expor por que ela funciona bem”. Além disso, a tecnologia pode produzir novas técnicas mais eficientes e adaptadas à realização de uma determinada tarefa.

Quanto ao bloco tarefa-técnica, qualquer que seja o tipo de tarefa T, a técnica τ relativa a T está sempre acompanhada de, ao menos, um *embrião* ou, mais frequentemente ainda, de um *vestígio* de tecnologia θ (CHEVALLARD, 2007). Em muitos casos, pode acontecer de alguns elementos tecnológicos estarem *integrados à técnica*. Entendemos, então, que toda tecnologia tem a necessidade de uma justificativa que chamamos teoria da técnica.

Assim ocorre tradicionalmente na aritmética elementar, em que um *pequeno discurso* tem um dupla função, técnica e tecnológica, que permite às vezes *encontrar* o resultado pedido (função técnica) e *justificar* que é correto o resultado esperado (função tecnológica), como quando se diz: “se 8 caramelos custam 10 francos, 24 caramelos, ou seja, 3 vezes 8 caramelos, custarão 3 vezes *mais*, quer dizer, 3 vezes 10 francos” (CHAVALLARD, 1999, p. 225)⁶².

Dessa forma, esse pesquisador procura alertar para o fato de existir em I uma técnica considerada *canônica*, em princípio a única reconhecida e empregada. Por outro lado, a tecnologia pode modificar essa técnica para que seja mais eficiente e abrangente, como já colocamos.

Então, vimos que a primeira função consiste em “*justificar a técnica*” e a segunda em expor o porquê de ela estar correta. As duas funções são desiguais, mas são assumidas pela tecnologia. Em matemática, tradicionalmente, a justificação de uma técnica é realizada por meio da exigência de demonstração em detrimento da função de explicação.

A terceira função, segundo Chevallard (1999), corresponde a um emprego mais atual do termo de tecnologia: a função de produção de técnicas. Queremos dizer que existem potentes tecnologias à espera de técnicas, e estas são ainda tecnologias de nenhuma técnica. Esse fenômeno de subutilização de tecnologias será indicado tanto do ponto de vista da produção como da explicação.

3.3.1.4 Teoria (⊙)

O papel da teoria em relação à tecnologia é semelhante ao da tecnologia em relação à técnica, ou seja, a teoria (⊙) tem como objetivo justificar e esclarecer a tecnologia. Para Chevallard (1999, p. 86), nesse caso, passa-se ao nível superior de justificação/explicação/produção.

Em termos gerais, podemos dizer que a teoria assume para a instituição ou para a pessoa uma função, no caso, teórica para justificar e esclarecer. No entanto, os caminhos trilhados para tornar efetiva essa função não têm sido tão

⁶² “Así ocurre tradicionalmente en la aritmética elemental, en la que el mismo pequeño discurso tiene una doble función, técnica y tecnológica, que permite a la vez encontrar el resultado pedido (función técnica) y justificar que es correcto el resultado esperado (función tecnológica), como cuando se disse: ‘se 8 caramelos cuestan 10 francos, 24 caramelos, e sea, 3 veces 8 caramelos, costarán 3 veces más, es decir, 3 veces 10 francos’.”

“transparentes”, pois a prática educacional tem mostrado uma grande quantidade de abstração na apresentação da teoria por parte dos professores e na disposição dela (da teoria) nos livros didáticos.

Podemos acrescentar ainda que, segundo Chevallard (2007), é mais importante ainda precisar que as noções de tecnologia e de teoria devem ser entendidas num sentido próprio da instituição ou da pessoa considerada.

É tecnologia aquilo que, numa instituição ou para uma pessoa preenche a função tecnológica – justificar, esclarecer a técnica τ relativa ao tipo de tarefa T , ou mesmo permitir engendrar (ou a reconstruir, quando ela é “dada”). O mesmo ocorre com a teoria que assume, em certa instituição ou para certa pessoa, uma função teórica (CHEVALLARD, 2007, p. 714)⁶³.

3.3.1.5 Saber-fazer e Saberes

Para Chevallard (1999, 2007), em torno de um tipo de tarefa (T), encontra-se, em princípio, um trio formado, ao menos, por uma técnica (τ), por uma tecnologia (θ) da técnica e por uma teoria (Θ) da tecnologia. Esses componentes, unidos, se articulam em blocos: o prático-técnico (saber-fazer) e o tecnológico-teórico (saber). Essa articulação constitui uma praxeologia, ou uma organização praxeológica.

Assim, um átomo praxeológico diz respeito a uma *Praxeologia Pontual*, aqui representada por $[T, \tau, \theta, \Theta]$, que é constituída em torno de um único tipo de tarefa T . Além dessa, podemos citar: a *Praxeologia local* $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$, associada a uma determinada tecnologia θ ; a *Praxeologia regional* $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$, desenvolvida em torno de uma única teoria Θ ; e a *Praxeologia global* $[T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{jk}, \Theta_k]$, que resulta da agregação de várias organizações regionais correspondentes a várias teorias Θ_k .

Nesse sentido, para Chevallard,

existe aí um aspecto fundamental da *ecologia das organizações praxeológicas*, que é preciso relacionar à noção de *motivação* de uma praxeologia (ou de um fragmento praxeológico): um tipo de tarefas T (e a praxeologia pontual que se formará em torno dele) é motivado por uma praxeologia $[T^\#/\tau^\#/\theta^\#/\Theta^\#]$ se a execução da técnica $\tau^\#$ (para concluir uma tarefa do tipo $T^\#$) chama a conclusão, em um dado momento, de uma tarefa do tipo T . Segundo um conceito emprestado

⁶³ “Est technologie ce qui, dans une institution ou pour une personne, remplit la fonction technologique – justifier, éclairer la technique τ relative au type de tâches T , voire permettre de l’engendrer (ou de la reconstruire, quand elle est donnée). De même, est théorie ce qui assume, en cette institution ou pour cette personne, une fonction théorique.”

da ecologia biológica, se criam – e se rompem ao decorrer, notadamente, dos movimentos transpositivos – *cadeias trópicas*, em que uma praxeologia ‘alimenta-se de uma outra’ – e, paradoxalmente, por isso, *a faz existir* na instituição que lhe serve de habitat (CHEVALLARD, 2007, p. 715) ⁶⁴.

Podemos observar que a passagem de uma praxeologia pontual $[T, \tau, \theta, \Theta]$ para uma praxeologia local $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$ coloca em evidência a tecnologia θ . De forma semelhante acontece na passagem posterior a uma praxeologia regional $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$, que colocará em primeiro plano a teoria Θ . Nesse sentido, Chevallard (1999) aponta que a organização praxeológica, tal qual foi apresentada acima, como uma noção genérica, necessita de um aprofundamento de estudos empíricos nas instituições e da análise de dados recolhidos.

Como havíamos dito, toda atividade humana pode ser descrita em termos de praxeologia. Para Bosch e Gascón (2007a), o conhecimento matemático não é uma construção definitiva, mas pode ser descrito em termos de praxeologia. Da mesma forma, as praxeologias matemáticas não surgem de repente e estão em permanente desenvolvimento. Existe todo um caminho a percorrer até chegar à sua modelização, que surge a partir de atividades variadas e contínuas, com dinâmicas complexas, até chegar à sua forma (*ibidem*, p. 399).

É importante ressaltar que as praxeologias não são construções individuais. Podemos dizer que conhecimento, capacidade ou competência de uma pessoa corresponde ao que designamos como um “*equipamento praxeológico*” ⁶⁵. Além disso, as praxeologias e elementos praxeológicos que a pessoa tem à sua disposição podem ser ativados em algum momento a partir de certas *restrições e condições* dadas (BOSCH E GASCÓN, 2009, p. 05).

Ainda quanto às praxeologias,

⁶⁴ “Il y a là un aspect fondamental de l’écologie des organisations praxéologiques, qu’il faut relier à la notion de motivation d’une praxéologie (ou d’un fragmente praxéologique): un type de tâches T (et la praxéologie ponctuelle qui se formera autour de lui) est motivé par une praxéologie $[T^\#/\tau^\#/\theta^\#/\Theta^\#]$ si la mise en oeuvre de la technique $\tau^\#$ (pour accomplir une tâche de type $T^\#$) appelle l’accomplissement, à un moment donné, d’une tâche du type T . Selon une image empruntée à l’écologie biologique, se créent – et se rompent, au cours notamment des mouvements transpositifs – des chaînes trophiques, où une praxéologie “se nourrit d’une autre” – et, paradoxalement, par cela, la fait exister dans l’institution qui lui sert d’habitat.”

⁶⁵ O conjunto de praxeologias de uma pessoa X é o que eu chamo de (um pouco arrogante) o *equipamento praxeológico* de X e que eu anoto $Ep(X)$; é claro, àquelas relativas aos sujeitos de uma instituição I em posição P em seu seio, $Epi(P)$ (CHEVALLARD, 1999; 2007).

pode-se imaginar um mundo institucional em que as atividades humanas regidas por praxeologias bem adaptadas que permitissem realizar todas as tarefas desenhadas de maneira eficaz, segura e inteligível. Mas tal mundo não existe: como sugerido, as instituições são percorridas por toda uma dinâmica praxeológica, que apenas estamos examinando brevemente (CHEVALLARD, 1999, p. 228) ⁶⁶.

As palavras de Chevallard propõem que as praxeologias envelhecem, de forma que seus componentes teóricos e tecnológicos perdem créditos e chegam a ser opacos. Simultaneamente, emergem novas tecnologias que consideram as técnicas estabelecidas como arcaicas e põem-nas em dúvida. Isso, para esse autor, está relacionado ao fenômeno da Obsolescência (CHEVALLARD, 1991).

Retomando o conceito de didática, reportamo-nos a Bosch e Gascón (2007b), para quem, se substituirmos “condições e restrições” por “ecologia”, poderemos dizer que a didática se preocupa com o estudo da *ecologia institucional, ou seja, das praxeologias matemáticas e das praxeologias didáticas*.

Apresentamos adiante uma discussão que enfoca a ecologia das praxeologias a partir dos níveis de codeterminação para, em seguida, avançarmos nas questões das praxeologias.

3.3.2 A Ecologia das Praxeologias: Níveis de codeterminação

O estudo das *condições e restrições* da difusão da matemática diz respeito a tudo aquilo que permite, favorece ou impede essa difusão. Contudo são as restrições as condições que dificilmente podem ser modificáveis em dado momento, numa certa posição institucional que foi estabelecida (BOSCH E GASCÓN, 2009).

Para melhor entendermos o que são condições e restrições, lembremos, por exemplo, um professor em sala de aula, em prática docente, que procura criar condições a fim de que seus alunos possam executar certa atividade matemática. Assim, propõe questões e usa materiais que considera importantes para eles, e intervém em alguns momentos, se necessário. No entanto, para que isso ocorra, sabemos ser fundamental haver uma escola, uma sala de aula com alunos da mesma idade, um tempo e uma determinada carga horária de aula, e um currículo. Podemos,

⁶⁶ “Se puede imaginar un mundo institucional en el que las actividades humanas estuviesen regidas por praxeologías bien adaptadas que permitiesen realizar todas las tareas deseadas de una manera a la vez eficaz, segura e inteligible. Pero tal mundo no existe: como se ha sugerido, las instituciones son recorridas por toda una dinámica praxeológica, que tan sólo examinaremos aquí brevemente.”

então, dizer que essas são as *condições* que tornam possíveis o ensino e aprendizagem dos alunos. Para o professor (o agente didático), as *restrições* seriam sua capacidade de ação e decisão.

Chevallard (2002b) aponta uma relação das condições e restrições com a escala hierárquica de “níveis de codeterminação”. Segundo ele, essa relação permite que os investigadores em didática da matemática localizem e identifiquem as “condições e restrições” em determinadas instituições.

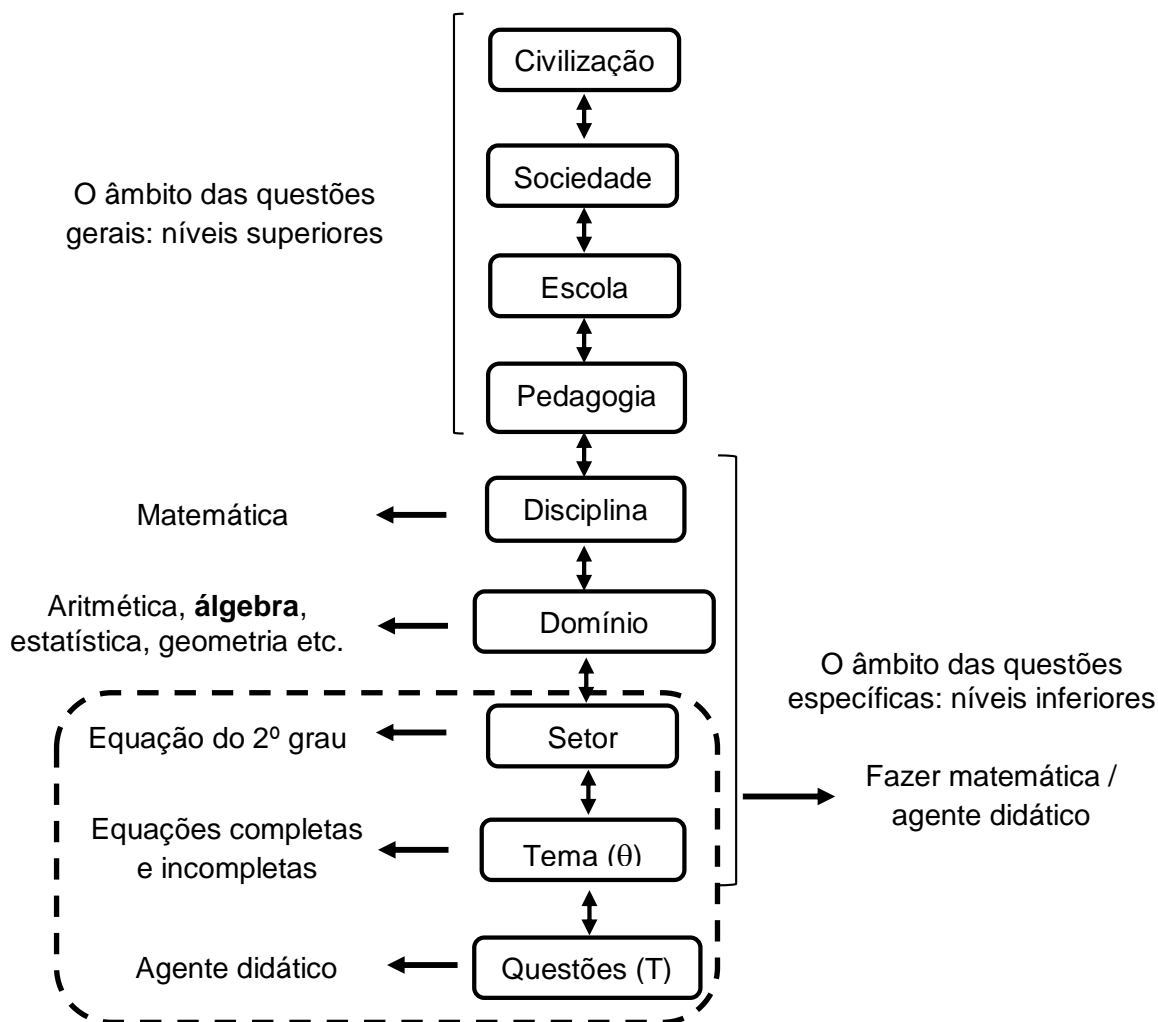
Conforme Parra e Otero (2011), há três aspectos inter-relacionados e inseparáveis no trabalho do professor: o processo de estudo, a organização matemática (OM) e a organização didática (OD). De forma resumida, podemos dizer que o primeiro pode ser entendido como o processo da construção matemática, do qual resultam as organizações matemáticas. Já a maneira como essa organização se constrói configura a organização didática.

Por sua vez, Chevallard (2001, p. 02) aponta que a relação OM e OD conduz a um “isomorfismo didático-matemático” e propõe uma hierarquia de níveis⁶⁷ de codeterminação entre as OM e as correspondentes OD. Assim, temos, de um lado, a forma de estruturar as questões matemáticas a estudar e, do outro, a maneira de organizar o estudo das distintas questões.

No esquema apresentado na figura abaixo, cada nível corresponde a uma estruturação da organização matemática (CHEVALLARD, 2007; 2002b).

⁶⁷ Nos níveis adotados por Chevallard (1999, 2007), o domínio é apresentado, por Bosch e Gascón (2002a), como área. Esses autores interpretam de forma semelhante o significado de nível.

Figura 8: Escala de Níveis de Codeterminação e localização da pesquisa



Fonte: Adaptado de Chevallard (1999; 2007, p. 737)

É possível perceber que Chevallard (1999, 2007) aponta uma hierarquia de entidades que pode ser interpretada da seguinte forma: para estudar-se um conhecimento sobre certa *questão* (no último nível), tem-se que percorrer um caminho que inicia na *civilização* (primeiro nível), segue pela *sociedade*, passa pela *escola* e chega ao nível da *pedagogia*. Neste nível – o da pedagogia –, entra-se em certa *área* inserida na *disciplina* em que se estuda a *questão*, passa-se por certo *setor* da *área* e chega-se a certo *tema* inserido no *setor* (CHEVALLARD, 2007, 2002b).

Contudo, em cada uma das etapas indicadas, existem as restrições e condições que acabam definindo o que é preciso fazer-se para estudar-se a questão considerada – como criar e construir –, qualquer que seja a resposta esperada da questão (CHEVALLARD, 2001).

Na figura acima, localiza-se o nosso tema de pesquisa, que diz respeito à análise do fenômeno “Contrato Didático no *setor equação do 2º grau*”. O nível do tema (θ) será determinado pelo sujeito da pesquisa, o encarregado da ação didática (o professor). Em especial, procuramos investigar, nas equações do 2º grau, as negociações, as rupturas, as renegociações de contrato didático. Essas relações contratuais estarão em atividade no momento em que uma organização matemática está sendo *colocada em jogo*⁶⁸ por meio de uma organização didática.

Para Chevallard (2007), existe, nos níveis de codeterminação, um abandono por parte dos professores das organizações didáticas⁶⁹, as quais particularmente se encontram no âmbito das questões específicas que vão da disciplina (a matemática), passam pelo “tema” (θ) e chegam até o último nível.

Esse pesquisador aponta algumas dificuldades relacionadas à cultura matemática escolar, aos níveis de “setor”, de “domínio” e de “disciplina”. Esses elementos têm um papel de “etiquetagem” ao apresentarem vantagens vistas como fontes de condições benéficas ao desenvolvimento dos níveis inferiores, no entanto não conseguem sequer articular os níveis até chegar ao último, o tema.

Um exemplo disso pode ser o fato de um professor, devido a essa restrição, não tomar por objeto de estudo a *geometria* (domínio), ou os *triângulos e quadriláteros* (setor), e restringir sua atenção a certos temas, como o *triângulo retângulo* ou o *paralelogramo*.

Outro exemplo diz respeito à “simetria de retângulo não quadrado”, encontrado na maioria dos sistemas escolares. O professor estuda essa questão como se ela estivesse inserida no tema “simetria de polígonos”, que se inclui no “setor” das “transformações do plano” que, por sua vez, se encontra no “domínio” de geometria, “disciplina” de matemática.

Para Chevallard,

⁶⁸ A ideia de jogo didático nos remete à noção de contrato didático.

⁶⁹ Esta situação pode ser vista, também, partindo-se de outro nível de codeterminação. Segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001), observa-se, de maneira geral, um abandono, por parte do professor, dos níveis superiores de OD, desde a sociedade à escola, chegando ao nível de setores, o que provoca um travamento de sua ação sobre os níveis dos temas, gerando o fenômeno de “autismo temático do professor”.

por consequência, [esse professor] tende a não situar o tema θ a ser ensinado em relação ao setor e ao domínio no qual este tema se insere. Isso não lhe permite mais, então, responder as questões sobre as quais ele vem regularmente e por exemplo identificar um tipo de tarefas T “gerador” de θ . Seja assim a propriedade θ_1 diagonais de um paralelogramo para se cortar no meio; em direção de que espécie de tarefas T se volta para fazer aparecer θ_1 como principal “ingrediente” tecnológico da solução de um certo problema técnico? (CHEVALLARD, 2007, p. 739) ⁷⁰

Os níveis apresentados, em especial os inferiores que dizem respeito ao tema, ao setor e o domínio, mantêm relação com as praxeologias pontuais, locais, regionais e globais (BOSCH; GASCON, 2007b; 2007a). O nível superior é considerado o mais geral e trata, por exemplo, das questões relacionadas à organização curricular. Nas outras escalas superiores, podem ser encontradas situações que se relacionem, por exemplo, com a academia, a sociedade etc.

Nesse sentido, quando o interesse se encontra nas práticas docentes em, por exemplo, como realizar a tarefa do tipo T ou, ainda, em como realizar melhor este tipo de tarefa, exige-se a *produção das técnicas* e, portanto, de *praxeologias*. Por outro lado, a falta dessas técnicas é apontada por Chevallard (1999) como a grande “penúria praxeológica”.

Para Chevallard (1998, 1999), os tipos de tarefa T são considerados como tema de estudo matemático que serão tratados em uma *instituição I* (sala de aula). Podem ser classificados em duas classes distintas, dado um tema de estudo matemático θ : o *primeiro* diz respeito a questionar a “realidade matemática”, o que corresponde à construção de uma praxeologia matemática ou à organização matemática, denominada OM_θ ; o *segundo* é aquele em que se estabelece o olhar para a didática, ou seja, em que o questionamento reflete “a maneira que, ou como, executa a realidade matemática”, que se denominará a praxeologia didática ou a organização didática, indicado por OD_θ .

Para Bosch e Gascón (2007b, p. 400), manifesta-se o estudo da ecologia das praxeologias matemáticas e didáticas quando o professor e os alunos estabelecem

⁷⁰ “En conséquence, il tendra à ne pas situer le thème θ à enseigner par rapport au secteur et u domaine dans lequel ce thème s’inscrit, ce qui ne lui permettra guère, alors, de répondre aux questions sur lesquelles il vient régulièrement buter, et par exemple d’identifier un type de tâches T generateur de θ . Sont ainsi la propriété θ_1 des diagonales d’un parallélogramme de se couper en leur milieu; vers quelle espèce de type de tâches T se tourner pour faire apparaitre θ_1 comme principal ingrédiente technologique de la solution d’un certain problème technique?”

relação ao saber que deve ser ensinado e aprendido a partir de um conjunto de condições e restrições que se encontram dentro e fora da sala de aula (níveis de codeterminação).

3.3.3 Praxeologia Matemática ou Organização Matemática

A Organização Matemática (OM) está relacionada a toda a atividade matemática que é construída na sala de aula a partir de uma organização didática. Para entendermos melhor, Higueiras e Garcia (2011) apontam que a Probabilidade, a Geometria euclidiana, as Funções, a Proporcionalidade etc. são organizações matemáticas que se desenvolvem no âmbito escolar e se modelizam por meio das organizações didáticas.

As OM são construídas em torno de tipos de tarefas (T) matemáticas realizadas, de técnicas (τ) matemáticas explicadas, de tecnologias (θ) justificadas e de teorias (Θ) que são, em tese, os objetos matemáticos a serem estudados ou construídos em momentos de estudo.

Delgado (2006) entende que OM corresponde à concepção do trabalho matemático como estudo de problemas ou tarefas problemáticas. No entanto, afirma que este não é o único aspecto do trabalho matemático, pois não se restringe unicamente à apresentação de bons problemas e resoluções. “Pretende, caracterizar, delimitar e inclusive classificar os problemas em tipos de problemas, entender, descrever e caracterizar as técnicas que utiliza para resolvê-los” (...), entre outras coisas (DELGADO, 2006, p. 37).

Para Chevallard (1999, 2002b), o trabalho inicial do professor ou pesquisador consiste em determinar e caracterizar as praxeologias matemáticas a serem trabalhadas. Essas podem ter origem nas análises de documentos oficiais existentes, nos programas e/ou livros didáticos, considerados saberes de referência que devem ser ensinados pelos professores e aprendidos pelos alunos.

O contexto que leva o professor a caracterizar as praxeologias permite também determinar que tipos de tarefa serão os “condutores” para o processo de “aquisição” dos saberes de referência, trazendo com eles os demais componentes praxeológicos (técnica, tecnologia e teoria) (CHAVALLARD, 1999).

O processo de aquisição dos saberes de referência inicia-se em uma situação problemática na qual o professor propõe ao aluno resolver um tipo de tarefa, e a resolução solicita uma técnica para atender ao tipo de tarefa.

Para Araújo (2009, p. 40) e Bessa de Menezes (2010, p. 83), algumas questões devem tangenciar essas caracterizações:

- Existe clareza nos tipos de tarefa e eles são bem identificados? Eles são representativos? Os tipos de tarefa são pertinentes em relação às necessidades matemáticas? Está explicada a razão de ser dos tipos de tarefa?
- As técnicas propostas para a resolução dos tipos de tarefa foram efetivamente elaboradas? São suficientes para os tipos de tarefa propostos? Poderão sofrer evoluções?
- As tecnologias disponíveis dão conta das técnicas empregadas? As justificativas têm um distanciamento grande, ou estão próximas das formas canônicas matemáticas? Esclarecem as técnicas utilizadas?
- Os elementos teóricos são explicitados? Justificam a tecnologia empregada?

Para Bosch e Gascón (2007b, p. 399), as praxeologias, semelhante à construção do conhecimento, não emergem de repente e estão em permanente desenvolvimento. Ou seja, as praxeologias matemáticas decorrem de atividades variadas e contínuas, e, nessa complexidade, elas precisam ser modelizadas.

Dessa forma, a atividade matemática apresenta dois aspectos intimamente relacionados: o processo de construção de conhecimento e o processo de estudo ou processo didático. O processo de estudo, como atividade humana, também pode ser modelizado em termos de praxeologias, ao que chamamos de praxeologia didática (CHEVALLARD, 1999).

As praxeologias apresentadas se formam em pares (OM, OD) e, em uma situação de ensino, apresentam-se como caminho mais curto para aprendizagem e devem satisfazer os seguintes indicadores: a OM deve ser uma praxeologia local relativamente completa; a OD é um processo de estudo que inclui e se desenvolve a partir da *razão de ser* de OM (HIGUERAS; GARCIA, 2011).

Podemos dizer, ainda segundo os pesquisadores, que à medida que surgem as OM, suas características próprias conduzem a formas de organizar o estudo e

possibilitam-nas, ou seja, facultam o surgimento da organização didática. Portanto, há uma relação dialética: a OD possui características que possibilitam a construção da OM.

Esses elementos estabelecidos pela TAD sugerem que o processo de estudo se desenvolve, levando-se em consideração o par OM/OD, que mantém entre si certa dependência (HIGUERAS E GARCIA, 2011).

Nesse sentido, sendo o contrato didático a pedra de toque de todo o sistema didático, podemos pensar em como se comporta o fenômeno CD em função das praxeologias matemáticas e didáticas (OM, OD) com o saber equações do 2º grau no jogo didático.

Nessa interdependência, temos as organizações didáticas que, por meio do trabalho docente, terá a função de transformar a realidade matemática numa realidade didática. Sobre essas questões iremos nos aprofundar adiante.

3.3.4 Praxeologia Didática ou Organização Didática

A Organização Didática (OD) surge a partir do momento em que existe uma Organização Matemática sendo colocada em prática. Queremos dizer que a sua atividade está voltada para a maneira da execução da OM, da realidade matemática.

Assim, as formas de organizar o ensino escolar de matemática podem ser descritas em termos de praxeologias didáticas e, como tais, apresentam uma estrutura composta por blocos inseparáveis: o bloco prático-técnico (a práxis, o “saber-fazer” didático) e o bloco tecnológico-teórico (o logos, o “saber” didático) (BOSCH E GASCÓN, 2007a).

Durante um processo de estudo, alguns atores estão envolvidos e participam de forma integrada: o professor e seus alunos. O professor, nesse processo, conduz uma ação didática com intuito de fazer os alunos aprenderem uma OM. As construções vão caracterizando as organizações matemáticas que, por sua vez, condicionam as possíveis formas de organizar os estudos e, conseqüentemente, as organizações didáticas – OD (HIGUERAS; GARCIA, 2011).

Para Higuera e Garcia (2011), já existe uma boa quantidade de pesquisas relacionadas à TAD com enfoque nas OM e OD. De forma particular, as relacionadas à OM têm superado aquelas relacionadas às OD. No entanto, um ponto comum entre elas está na necessidade de descrever e identificar seus elementos para submetê-los

a uma análise mais criteriosa. Essa descrição e identificação das OM apresentam menor dificuldade em relação às OD, que são consideradas mais complexas por não serem tão transparentes.

Tomando como referência a identificação das técnicas nos momentos de estudo, diríamos que as OM seriam de menor dificuldade porque a identificação delas se dá em forma de registro. O mesmo não ocorre com as OD, pois elas têm uma natureza mais discursiva, o que aumenta a dificuldade delas.

Vale ressaltar que tanto as OM como as OD passam pela ação didática do professor. Nesse sentido, entendemos que o par OM/OD está mais suscetível aos fenômenos didáticos (em especial ao CD). Dessa forma, é pertinente questionar: qual a relação entre o CD e o par OM/OD ou, de forma específica, a OM e a OD?

Para Delgado (2006), a noção de momento se utiliza tanto em sentido cronológico como da dimensão da atividade. Assim, o processo de estudo se situa em um espaço determinado por seis momentos didáticos.

Aprofundando as discussões das OD, Chevallard (1999) distingue seis momentos de estudo ou didáticos, que levam em conta fatores básicos da dimensão e do desenvolvimento da atividade matemática, bem como permitem a descrição da organização didática: (1) o primeiro encontro com a organização matemática; (2) a exploração do tipo de tarefa e elaboração de uma técnica; (3) a constituição do ambiente tecnológico-teórico; (4) o trabalho com a técnica; (5) a institucionalização; (6) a avaliação.

Na sala de aula, uma das primeiras questões relacionadas aos momentos didáticos diz respeito à *razão de ser* das atividades que, por sua vez, é reflexo do tipo de tarefa apresentado aos alunos e estes, por conseguinte, procuram desenvolver as técnicas adequadas a esses tipos de tarefas (CHEVALLARD, 2007). Questiona-se, então, se a razão de ser está ligada aos porquês, como: o porquê da geometria, o porquê do triângulo, o porquê das alturas do ortocentro. Para o pesquisador essa lista não tem fim.

Outros questionamentos estão voltados para as OD: como descrever a organização? Como são os principais tipos de tarefas? Chevallard (1999) alerta que não se deve esperar que a (re)construção em curso de um processo de estudo, de uma organização matemática dada, organize-se, ela mesma, de uma maneira única. Entretanto, esse autor chega à conclusão de que, embora não exista um único

caminho para executar o momento⁷¹ de estudo, certos tipos de situações estão necessariamente presentes e de maneira muito variada, tanto no plano quantitativo como no plano qualitativo. Essas situações podem ser observadas numa análise concreta das organizações didáticas, o que permite que se distingam os seis momentos didáticos anteriormente apresentados.

O *primeiro momento* diz respeito ao *primeiro encontro propriamente dito com o tipo de tarefa*, ou seja, com a organização matemática que está em jogo. Entendemos que essa situação não se caracteriza como momento único, pois pode surgir, em algum momento, a necessidade de um novo encontro com o mesmo tipo de tarefa, que pode ser interpretado como um “reencontro”. Essa situação pode ocorrer em função⁷² do entorno matemático e didático, ambos produzidos pelos atores. Para Chevallard (1999, p. 43), é possível “*voltar a descobrir um tipo de tarefa como se volta a descobrir uma pessoa que se crê conhecer*”.

Em estudo posterior, esse pesquisador retoma essa analogia de outro modo, conforme podemos verificar no fragmento abaixo registrado.

Por mais que pareça paradoxal, isso acontece várias vezes em função dos ambientes matemáticos e didáticos nos quais ocorre: podemos redescobrir um tipo de tarefa como redescobrimos uma pessoa que acreditávamos conhecer. Assim o trabalho, de repente tão essencial em toda organização de estudo, está integrado na modelização do funcionamento didático (CHEVALLARD, 2007, p. 730)⁷³.

Quanto ao *segundo momento*, referente à *exploração do tipo de tarefa e elaboração da técnica* relativa a esse tipo de tarefa, Chevallard (2007; 1999) apresenta duas observações importantes: é preciso verificar se determinado lugar é o melhor para explorar certo tipo de tarefa, pois este é o operador-chave da construção de tipos de tarefa enquanto entidade específica; é importante averiguar, na elaboração da técnica, se o tipo de tarefa faz parte do conjunto de tarefas problemáticas, pois essa elaboração está no coração do trabalho do sistema didático.

⁷¹ A palavra “momento” não implica uma ordem cronológica determinada sobre a realização dos diversos momentos que o distinguem (CHEVALLARD, 1999; 2007).

⁷² Entendemos que o reencontro possivelmente sofre uma influência das negociações que se encontram em torno dos tipos de tarefas.

⁷³ “Quelque paradoxal que la chose paraisse, avoir lieu en plusieurs fois, en fonction des environnements mathématiques et didactiques dans lesquels elle se produit: on peut redécouvrir un type de tâches comme on redécouvre une personne que l’on croyait connaître. Ainsi le travail d’après-coup, si essentiel em toute organization de l’étude, est-il intègré dans la modélisation du fonctionnement didactique.”

O estudo da resolução de *um* problema de um determinado tipo – como efetuar a tarefa $t \in Ti$? – caminha par a par com a construção de ao menos um embrião de técnica, a partir do qual uma técnica mais desenvolvida poderá eventualmente emergir: o estudo de um problema *particular*, em breve percebido como um espécime do *tipo* estudado, aparece, assim, não como um fim em si, mas como um *meio* para que tal técnica se constitua. Trava-se assim uma *dialética fundamental*: estudar problemas é um meio que permite criar e pôr em prática uma técnica relativa aos problemas do mesmo tipo, técnica que será seguida e o meio para resolver de maneira quase rotineira os problemas desse tipo, quer dizer, efetuar as tarefas $t \in Ti$ (CHEVALLARD, 2007, p. 731) ⁷⁴.

O *terceiro momento* de estudo é a *constituição do ambiente tecnológico-teórico* [θ/Θ] relativo à técnica e ao tipo de tarefa proposto pela OM. Podemos observar que esse momento, conforme pontua Chevallard (2007; 1999), mantém uma relação estreita com cada um dos outros momentos. Esse pesquisador acrescenta que, desde o primeiro encontro com o tipo de tarefa T, existe, em geral, uma relação com um campo tecnológico-teórico anteriormente elaborado, ou com sementes de um ambiente a ser criado. Essa situação promove uma relação dialética com o surgimento da técnica que, em algumas situações, aparece com vestígios do ambiente tecnológico-teórico.

Podemos dizer que o terceiro momento é utilizado em muitas ocasiões como o primeiro momento por uma questão de economia “didática global”. Isto é, o responsável pela ação didática (o professor) inverte a ordem do ensino, semelhante ao conhecimento baldista⁷⁵ (CÂMARA DOS SANTOS, 2002): primeiro apresenta o conceito ou definição, a seguir, exemplos e, por fim, aplicações de exercícios, tomando, então, a direção do estudo tradicional. Dessa forma, torna-se comum o estudo de vários tipos de problemas com o mesmo entorno tecnológico-teórico [θ/Θ]. O estudo desses tipos de problema apresenta-se classicamente como uma série de aplicações do bloco tecnológico-teórico (CHEVALLARD, 1999).

⁷⁴ “L’étude et la résolution d’un problème d’un type déterminé – comment effectuer la tâche $t \in Ti$? – Va de pair avec la constitution d’au moins un embryon de technique, à partir de quoi une technique plus développée pourra éventuellement émerger: l’étude d’un problème particulier, bientôt perçu comme spécimemdu type étudié, apparait ainsi, non comme une fin em soi, mais comme un moyen pour qu’une telle technique se constitue. Se nouve ainsi une dialectique fondamentale: étudier des problèmes est un moyern permettant de créer et de mettre au point une technique relative aux problèmes de même type, technique qui ele-même sera ensuite, éventuellement, le moyen de résoudre de mamière quase routinière des problèmes de ce type, c’est-à-dire d’effectuer des tâches $t \in Ti$.”

⁷⁵ Para aprofundar as leituras, ver Câmara dos Santos (2002) “Algumas Concepções de Ensino e Aprendizagem de Matemáticas”.

O *quarto momento* é o *trabalho da técnica*, que pode ser considerado como trabalho da organização matemática. Esse momento diz respeito à melhoria da técnica, tornando-a mais eficaz e mais confiável – o que exige geralmente um retoque da tecnologia, ou mesmo da teoria. Além disso, diz respeito ao aumento do domínio desse campo, tanto quantitativa quanto qualitativamente.

O *quinto momento*, a *institucionalização*, tem por objetivo incorporar o que de fato diz respeito à organização matemática, distinguindo, claramente, os elementos que participaram da organização matemática daqueles que se incorporaram ao seu equipamento praxeológico⁷⁶. Devido a isso, os elementos que fizeram parte do estudo em fases anteriores podem ser descartados e outros integrados definitivamente a partir de sua explicitação oficial pelo professor ou pelo aluno, tornando-se parte integrante da cultura da instituição ou da sala de aula (CHEVALLARD, 1999; ALMOULOU, 2007). Esse movimento torna-se dinâmico, não acontecendo de forma pontual.

O *sexto momento* é a *avaliação*, que se articula com o momento da institucionalização, e pode ser considerado sob dois aspectos: a avaliação das relações “institucionais” e das relações “pessoais”. Segundo Chevallard (1999), o primeiro tipo transcende o segundo, pois, em parte, fundamenta as relações pessoais.

Assim, ele considera que a avaliação das relações institucionais tem um caráter mais amplo. Isso significa que da avaliação clássica de relação pessoal (das pessoas) emerge a avaliação da relação institucional e esta passa a ser considerada como a matriz devido à sua amplitude.

Na avaliação clássica, as preocupações estão voltadas para a organização da matemática construída ou em vias de construção, algo semelhante a uma avaliação da organização matemática em si mesma. Sua articulação com a institucionalização se efetiva, especialmente, no que se deve tornar “claro” ao examinar: o que é válido, o que foi construído e o que foi aprendido na organização matemática (CHEVALLARD, 2007, 1999).

Chevallard (1999) sinaliza, ainda, em forma de questões, a importância da avaliação na ação do professor quando da realização de diferentes momentos de estudo. Esse autor propõe que se questione:

⁷⁶ Discutiremos mais a frente esse conceito.

- como realizar concretamente o primeiro encontro com, especificamente, aquela organização matemática?
- com qual tipo de tarefa?
- como conduzir o estudo exploratório de um tipo de tarefa dado?
- como realizar a institucionalização?
- como realizar o momento de avaliação?

Todas essas questões podem ser respondidas de uma forma genérica: *criando situações didáticas adequadas*.

Para Chevallard (1999), a avaliação é sempre “relativa”, ou seja, “o valor apresentado a um objeto, em efeito, não é nunca intrínseco, absoluto, porque a atribuição de valor se refere sempre, implicitamente ou não, a certo uso social do objeto avaliado: se avalia sempre desde um determinado ponto de vista” (p. 248).

Nessa perspectiva, podemos considerar um problema mais específico: a avaliação de uma sala de aula I, por um aluno X, ou um professor Y, ou um observador Z, de um objeto O que será uma organização matemática OM_{θ} , ou organização didática OD_{θ} , previamente observado na literatura (manuais, por exemplo) e analisados por Y com a intenção de desenvolver as organizações (CHAVALLARD, 1999).

Conforme esse pesquisador, se o interesse for avaliar a organização matemática, devemos olhar mais especificamente para seus elementos: tipo de tarefa, técnicas, tecnologias e teorias. Assim, para avaliar os *tipos de tarefas*, devemos observar alguns critérios: (1) de identificação – verificar se o tipo de tarefa T se encontra de fato “claro” e bem identificado; (2) da razão de ser – observar se as razões de ser do tipo de tarefa T estão bem explicadas, ou estão sem sentido; (3) de pertinência a partir do ponto de vista do professor – averiguar se os tipos de tarefa trabalhados promovem uma boa amostra das situações matemáticas encontradas; (4) de pertinência a partir do ponto de vista dos alunos – examinar se as necessidades matemáticas são pertinentes à realidade presente e futura, ou se estão desconectadas, sem razão de ser.

Quando o interesse da avaliação está nas *técnicas*, surgem outros questionamentos, como: as técnicas propostas são efetivamente elaboradas ou

somente esboçadas? O alcance delas é satisfatório? São fidedignas e confiáveis, dadas as condições de sua utilização?

Para avaliar as tecnologias, de forma semelhante à avaliação do tipo de tarefa e das técnicas, algumas observações são importantes: o problema de sua justificação está somente colocado, ou é considerado tacitamente como pertinente, evidente, natural ou bem conhecido? As formas de justificação utilizadas são parecidas, próximas às formas canônicas matemáticas? Adaptam as condições de utilização e favorecem as justificativas explicativas? Essas e outras questões são pertinentes para uma avaliação das tecnologias.

Já a avaliação direcionada à teoria suscita as seguintes questões: existem elementos teóricos explícitos? Os elementos teóricos estão implícitos? É possível tornar claros ou justificar esses elementos implícitos?

Chevallard (1999) propõe ainda que a avaliação nas organizações didáticas, de forma explícita ou implícita, “*é um dos motores do progresso das investigações didáticas*”. Segundo esse autor, a intenção de fazer uma análise nesses termos deverá estar subordinada às orientações anteriores, nas quais podemos observar um conjunto de reflexões sobre as organizações matemáticas.

Em sala de aula, várias são as atribuições do professor e todas elas buscam colocar o aluno frente a situações de aprendizagem, com intuito de construir a aprendizagem matemática. Isso envolve uma discussão sobre o *equipamento praxeológico matemático* do professor e do aluno, bem como sobre os seus respectivos *topos*.

3.3.5 Equipamento Praxeológico do Professor e dos Alunos

Para discutir sobre “*equipamento praxeológico*”, Chevallard (2007) se apoia em conceitos analisados anteriormente, tais como: relações pessoais $R(X, O)$ e relações institucionais $R_I(p, O)$. Podemos dizer que a partir das relações é que os objetos passam a existir para pessoas e, nesse sentido, existe aprendizagem. Assim, objetos que antes não existiam passam a existir e outros deixam de existir.

Em sala de aula, o professor, como agente didático, promove situações de aprendizagem a fim de que uma “*instituição ou uma pessoa aprenda um certo conjunto de praxeologias*” (CHEVALLARD, 2007, p. 798). Para esse pesquisador, é necessário

que um conjunto de praxeologias “*chegue até a instituição ou a uma pessoa e acabe por integrar-se ao seu equipamento praxeológico*” (p. 798).

Para Bosch e Gascón (2009), “o equipamento praxeológico” corresponde ao conhecimento, à capacidade ou à competência de cada *pessoa X* e é identificado por $EP(X)$. Esse equipamento é relativo aos sujeitos de uma *instituição I* em posição p no seio $EP(p)$ (CHEVALLARD, 2007).

Podemos dizer ainda que elementos praxeológicos que participaram de uma organização matemática anterior podem ser incorporados ao equipamento praxeológico do aluno. Por outro lado, uns podem ser descartados e outros integrados definitivamente, a partir da explicitação oficial desses elementos pelo professor ou pelo aluno.

3.3.6 O Topos do Professor e o Aluno

No sistema didático, são muitas as possibilidades para o trabalho didático. Existem tipos de tarefa que são integrados às praxeologias matemáticas e tradicionalmente são realizados por um único aluno. O aluno $x \in X$ deve aprender, por exemplo, a fatorar sozinho, sem ajuda de outro, em um tipo de expressão algébrica: calcular por seus próprios meios, por exemplo. Em outro viés, podemos dizer que, se o aluno “não aprender sozinho, oficialmente, deve receber, ao menos, a ajuda do professor” (CHEVALLARD, 1999).

Então, as *tarefas didáticas, em certos contextos, são “cooperativas” no sentido de que devem ser realizadas por muitas pessoas/alunos x_1, x_2, \dots, x_n , estas pessoas são consideradas os atores envolvidos na tarefa* (CHEVALLARD, 1999, p. 240). Esses atores, nessa tarefa, devem realizar “*gestos*” que, em conjunto, efetivam o papel deles: cumprir a tarefa cooperativa. Podem existir, também, gestos distintos entre os atores envolvidos, porém acompanhados de uma técnica coletiva.

Chevallard (1999) entende que alguns desses gestos poderão ser vistos como uma tarefa completa e a realização deles por x_i será, em algum momento, *autônoma* em relação a outros atores da tarefa. O conjunto dessas tarefas, subconjunto do papel de x_i quando *realiza* as tarefas com o aporte de uma técnica, é denominado o *topos* de x_i em tarefa.

Em grego *topos* significa “lugar”: o *topos* de x_i é o “lugar de x_i ”, seu “local”, o lugar onde, psicologicamente, x_i experimenta a sensação de desempenhar, na realização de t , um papel com gosto em executá-lo. No caso de uma classe, se falará então do *topos* do aluno e do *topos* do professor (CHAVALLARD, 1999, p. 240) ⁷⁷.

A sala de aula se caracteriza como o ambiente em que se realizam atividades matemáticas – os exercícios se configuram como uma tarefa cooperativa. O enunciado do exercício, uma subtarefa, é atribuição do professor: pertence a seu *topos*, referente a toda essa situação que envolve a tarefa proposta pelo professor e que sugere uma solução para o exercício pertence ao *topos* do aluno. A tarefa inicial pode ter uma continuação, a construção da correção por parte do professor, etapa que configura um novo *topos* do professor (CHEVALLARD, 1999).

Esse pesquisador acrescenta que, se um aluno, no momento da resolução do exercício, faz uma pergunta, intervém (atitude que pode ser entendida como uma reclamação), para o professor, essa pergunta se configura como um simples “gesto”. A partir dessa intervenção, surge uma resposta por parte do professor em forma de gestos também. Tais gestos do professor podem ser positivos ou negativos.

Um ponto essencial desta visão consiste em examinar, em toda organização didática escolar, a qualidade e a quantidade do trabalho autônomo exigido ao aluno X_i (para assegurar um bom rendimento em termos de aprendizagem) e que é invisível (oficialmente) para o professor Y (existe também, por suposição, todo um trabalho exigido por Y e invisível para X , que conta por igual para viabilidade de uma organização didática...) Sucede, às vezes, que este trabalho invisível, cumprido pelo aluno em outra cena, que o professor pode em princípio ignorar, tende a ocupar o essencial do espaço de estudo (...) (CHEVALLARD, 1999, p. 241) ⁷⁸.

Tratar sobre um trabalho autônomo com intuito de assegurar um bom rendimento remete ao *topos*, ou seja, ao lugar que o aluno e o professor devem ocupar nas situações de aprendizagens, na relação didática. O professor, como diretor de

⁷⁷ “El griego *topos* significa “lugar”: el *topos* de x_i es el “lugar de x_i ”, su “sitio”, el lugar donde, psicologicamente, x_i experimenta la sensación de desempeñar, en la realización de t , “un papel a gusto para él”. En el caso de una clase, se hablará así del *topos* del alumno y del *topos* del profesor.”

⁷⁸ “Un punto esencial de esta visión consiste en examinar, en toda organización didáctica escolar, la calidad y la cantidad del trabajo autónomo exigido a los alumnos x_i (para asegurar un buen rendimiento en términos de aprendizaje) y que es invisible (oficialmente) para el profesor y (existe también, por supuesto, todo un trabajo exigido por y e invisible para x , que cuenta por igual en la viabilidad de una organización didáctica...) Sucede a veces que este trabajo invisible, cumplido por el alumno en otra escena, que el profesor puede en principio ignorar, tiende a ocupar lo esencial del espacio de estudio, como en el ejemplo que aparece a continuación.”

estudo, ao desempenhar seu papel, pode empobrecer, ou não, a cultura didática do aluno-estudante.

Esse diálogo nos faz lembrar o fenômeno “contrato didático”. Acreditamos que existe aqui uma relação forte do contrato didático com o *topos* do professor e do aluno. Existe no *topos* toda uma dinâmica que faz funcionar a relação didática, e esse funcionamento é uma condição primeira para existência do contrato didático.

Essas questões têm sido discutidas por Brousseau que atribui um “forte caráter problemático” ao “contrato didático”. Esse pesquisador entende que o professor fica diante de uma verdadeira comunicação paradoxal, já discutida no capítulo referente a contrato didático e a ser retomada adiante (CHEVALLARD, 1999, p. 242).

Segundo Chevallard (1999, p. 242), acerca do primeiro paradoxo apontado por Brousseau, tudo que o professor faz para conseguir do aluno os comportamentos que ele espera *“tende a privar este último das condições necessárias para a compreensão e a aprendizagem da noção que se perseguem: se o professor disser o que quer, não pode obter isso”*⁷⁹.

Nessa mesma dinâmica, temos o aluno também diante de uma situação paradoxal: se ele aceita, segue o contrato e o professor lhe ensina os resultados; ele não os estabelece por si mesmo e, assim, não aprende a matemática, não se apropria dela, pois aprender “implica para ele recusar o contrato, mas também, aceitar fazer parte dele”. Devido a isso, podemos dizer que a aprendizagem repousando não sobre o bom funcionamento do contrato e sim sobre suas *rupturas* (CHAVALLARD, 1999).

Ainda de acordo com Chevallard (1999, p. 242), o “drama didático” que a palavra *topos* resume está em torno do jogo do professor: *“sempre sutilmente presente, ainda que na ausência, este deve saber se ausentar, inclusive em presença, a fim de deixar o aluno livre para conquistar uma independência que a figura tutelar do professor faz ser possível e incerta”*⁸⁰.

Então, discutir, investigar qual seria o melhor lugar (*topos*) do aluno, o melhor lugar (*topos*) do professor, o seu verdadeiro papel numa situação didática é uma das questões da didática da matemática.

⁷⁹ “tienden a privar a este último de las condiciones necesarias para la comprensión y ele aprendizaje de la noción que se persigue: si el maestro dice lo que quiere, no lo puede obtener.”

⁸⁰ “Siempre sutilmente presente, aunque en ausencia, éste debe saberse ausentar incluso em presencia, a fin de dejar al alumno libre para conquistar una independencia que la figura tutelar del profesor hace a la vez posible e incierta.”

Destinamos o capítulo seguinte às questões relacionadas ao saber matemático. O saber que, particularmente, nos interessa são as equações do segundo grau a uma incógnita.

A ÁLGEBRA COMO CAMPO DE PESQUISA

Neste capítulo, o nosso enfoque principal será o saber algébrico, particularmente as equações do 2º grau a uma incógnita. Isto posto, apresentamos uma modelização, a priori, das praxeologias pontuais que se constituem a partir dos seus tipos de tarefas. Apontamos inicialmente os principais aspectos da gênese da álgebra. De forma complementar, contemplamos um diálogo sobre os elementos históricos constitutivos da equação do segundo grau, sob um ponto de vista matemático e do ensino. Na sequência, apresentamos uma discussão, tomando como referência a teoria antropológica do didático, sobre as organizações matemáticas: tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. Essa escolha visa fornecer elementos para construção de critérios para análise da transcrição da fala do professor e alunos.

4.1 A Gênese da Álgebra: aspectos principais

A História da Matemática é um campo de investigação que tem avançado bastante, tanto em termos científicos, como no campo educacional. É considerada um elemento fundamental para entender como teorias e as práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas no contexto específico de sua época (D'AMBROSIO, 1996; MIGUEL; MIORIM, 2005; SESSA, 2009). Essa visão crítica da história oportuniza o desenvolvimento de novas teorias e técnicas matemáticas nos dias atuais, bem como o aprofundamento e a ampliação de outras teorias iniciadas no passado.

Em termos educacionais, a história da matemática, ao ser apresentada ao aluno como criação humana produzida a partir das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e ao estabelecer comparações entre os conceitos e procedimentos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que desenvolva no estudante atitudes e valores mais favoráveis diante do conhecimento que se encontra em questão (BRASIL, 1998).

No que diz respeito à nossa pesquisa, julgamos pertinente apresentar os principais elementos que permearam o surgimento da álgebra, em especial das equações do 2º grau. Não pretendemos discorrer detalhadamente, sobre os elementos históricos. O nosso intuito principal é apontar uma base histórica em que as equações do segundo grau estão inseridas.

Os primeiros elementos relacionados à história da álgebra, conforme documentos, surgiram há cerca de 4000 anos nas regiões da Babilônia e no Egito (BOYER, 1996).

Guelli (2005) aponta que vivia no Egito um escriba chamado Aahmesu, conhecido por 'Ahmes'. Este escriba é considerado autor de uma das mais antigas obras de matemática: o '*Papiros Ahmes*', com problemas resolvidos, e que, na atualidade, está guardado no museu Britânico.

Na região da Babilônia existia uma tabela de valores de $n^3 + n^2$ para valores inteiros de "n", que era considerada essencial. Esse assunto, segundo Boyer (1996), atingiu um nível de importância muito grande na Mesopotâmia, diferentemente do Egito; O que representava que a solução da equação quadrática não constituía dificuldade séria para os Babilônios, pois tinham desenvolvidas operações algébricas flexíveis.

Os problemas descritos no "Papiro Ahmes", boa parte, eram aritméticos, e outros receberam a denominação de algébricos. Não se referiam a objetos concretos, específicos, como o preço de pão, a alimentação do gado, a quantidade dos grãos de trigo armazenado, etc.. Ao invés disso, apresenta o que equivale a soluções de equação lineares, da forma $x + ax = b$ ou $x + ax + bx = c$, onde a, b, c são conhecidos e x é desconhecido (BOYER, 1996, p. 11).

Para Boyer (1996) e Guelli (2005), o processo de solução de Ahmes era conhecido como "método de falsa posição" ou "regra de falso". Segundo Boyer (1996), esse método diz respeito a um valor específico, provavelmente falso, que é assumido e as operações são indicadas à esquerda do sinal de igualdade que são efetuados sobre o suposto número. A partir daí, o resultado é comparado com o resultado que se pretende e, usando proporções, chega à solução correta.

Nesses problemas, o número procurado era sempre representado pela mesma palavra: **montão**. Vejamos um exemplo: "*Um montão, sua metade, seus dois terços, todos juntos são 26. Digam-me: Qual é a quantidade?*" (GUELLI, 2005).

Nos dias atuais, a resolução necessita de uma passagem da linguagem natural para linguagem algébrica, ou seja, transformar em equação, como veremos a seguir:

Figura 9: Resolução do problema montão utilizando a álgebra.

$$x + \frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = 26$$

E resolvê-lo não é nada difícil:

$$6 \cdot \left(x + \frac{x}{2} + \frac{2x}{3} \right) = 6 \cdot 26$$

$$6x + 3x + 4x = 156$$

$$13x = 156$$

$$x = \frac{156}{13}$$

$$x = \text{montão} = 12$$

Fonte: Guelli (2005)

Para os egípcios, esse problema seria resolvido de modo engenhoso: o que foi denominado “*regra do falso*”, como mostramos na figura abaixo:

Figura 10: Regra do falso utilizado pelo os egípcios

Os egípcios não usavam Álgebra, mas conseguiam resolver este problema de um modo muito engenhoso: a ***regra do falso***.

- Inicialmente, atribuíam a montão um valor falso, por exemplo, **18**:

$$18 + \frac{1}{2} \cdot 18 + \frac{2}{3} \cdot 18 =$$

$$= 18 + 9 + 12 =$$

$$= \mathbf{39}$$
- Os valores falsos (**18** e **39**) eram então usados para montar uma regra de três simples com os elementos do problema:

<i>Valor falso</i>	<i>Valor verdadeiro</i>
18	montão
39	26

$$\frac{18}{39} = \frac{\text{montão}}{26}$$

$$\text{montão} \cdot 39 = 18 \cdot 26$$

$$\text{montão} = \frac{468}{39}$$

$$\mathbf{\text{montão} = 12}$$

Fonte: Guelli (2005)

Em outro aspecto, a literatura mostra que o desenvolvimento da álgebra, inicialmente, aparece vinculado à aritmética e à geometria. Nesse sentido, Boyer (1996) discute que, entre 250 a 350 d.C. aproximadamente, no início desse período - chamado segunda idade de Alexandrina - encontramos o maior algebrista grego, Diofante de Alexandria e, pelo fim desse período, apareceu o último geômetra grego importante, Pappus de Alexandria.

Historicamente, foi o matemático grego Diofante que primeiro usou sistematicamente os símbolos para representar as incógnitas, sendo pioneiro na solução das equações indeterminadas, também chamadas de diofantinas.

A principal obra de Diofante foi 'Aritmética' e era constituída por treze livros, dos quais apenas seis restaram. Essa obra, 'Aritmética', é inteiramente dedicada à resolução dos mais diversos tipos de equações, e, até hoje, uma série dessas são conhecidas como "equações de Diofante ou equações diofantinas" (SESSA, 2009). Também, a obra de Diofante introduzia e usava sistematicamente a simbologia criada por ele e que se compõe essencialmente de abreviaturas (ALMEIDA, 2009).

Durante todo esse tempo a história se encarregou de produzir um número significativo de palavras matemáticas de origem Árabe. Um exemplo do que estamos falando é a palavra 'Álgebra', que surgiu a partir de Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi, que por volta do ano 825 (século IX) influenciou sua origem e, através do seu livro considerado o mais importante, '*Al-jabr Wa-l muqabalah*', criou uma palavra mais familiar: 'Al-jabr, donde, a partir dela, surgiu a Álgebra'. Não se sabe ao certo o seu significado literal, mas alguns autores interpretam como sendo "restauração" ou "completação", e que parece se referir à transposição de termos subtraídos para o outro lado da equação (BOYER, 1996; SESSA, 2009).

Traduzindo de forma literal, o título do livro de Al-Khowarizmi, temos a "ciência da restauração (ou reunião) e redução". Matematicamente seria melhor "ciência da transposição e do cancelamento" (BOYER, 1996).

No título do livro, encontramos o termo "muqabalah" que se refere à "redução" e "equilibração", o que corresponde ao cancelamento de termos semelhantes em lados opostos da equação.

Com o surgimento da álgebra a sua evolução caminha para as descobertas das resoluções das equações. Como veremos adiante.

4.2 Elementos Históricos Constitutivos da Equação do 2º Grau

As informações, que constam na história da matemática, apontam que a equação do 2º grau não surgiu de repente e não foi um único matemático responsável por tal feito (BOYER, 1996). A sua descoberta passou por vários momentos históricos e transformações até chegar a sua fórmula resolutive.

A literatura que trata dessa parte da história da matemática revela vários matemáticos envolvidos em tal constituição: dentre os matemáticos, entendemos como principais Diofante de Alexandria, Al-Whowarizmi, François Viète e Thomas Harriot.

Para Boyer (1996) o matemático Diofante de Alexandria foi considerado um dos maiores algebristas Grego. Na mesma época, no final do período de Diofante, surgiu outro personagem importante, o geômetra Pappus de Alexandria. Esse fato colocou a cidade de Alexandria como um centro de referência de atividades de matemática, diferente das outras cidades.

Entre os trabalhos de Diofante que marcaram época, temos a *Arithmetica*. Esse documento é quase todo dedicado à resolução exata de equações tanto determinadas quanto indeterminadas (BOYER, 1996).

Para muitos historiadores, esse trabalho foi considerado a primeira ocorrência da notação simbólica que caracteriza a nossa álgebra (ROQUE, 2012). Por essas contribuições, se “pensarmos de forma primária em termos de notação”, Diofante tem boas razões para pretender o título de “pai da álgebra”, mas, em termos de motivação e conceitos, a pretensão é menos justificada (BOYER, 1996).

Nesse sentido, Diofante de Alexandria foi considerado como o primeiro matemático a fazer uso sistemático de símbolos algébricos (ROQUE, 2012). Isto é, de abreviações nas operações com números. Os símbolos de Diofante marcam, dessa forma, a passagem da álgebra retórica (verbal), na qual as expressões são escritas totalmente em palavras, para a álgebra sincopada, onde surgem expressões com palavras e outras são abreviações.

Já as contribuições de Bhaskara para a equação do 2º grau surgiram a partir de seus livros, os mais conhecidos, o *Lilavati* e o *Bija Ganita*. A organização desses livros apresenta o sistema posicional decimal e as operações de modo padronizado, incluindo operações com frações e zeros. No *Bija Ganita*, que quer dizer “semente do

cálculo”, tais regras são sucedidas por algoritmos para resolver problemas, envolvendo quantidades desconhecidas (ROQUE, 2012; BOYER, 1996).

Essas regras eram expressas em versos, e estes, ilustrados por exemplos que continham comentários do próprio autor, visando explicá-las. Tais comentários fornecem enunciados numéricos e métodos retóricos de soluções em modo padronizado para resolver os problemas que eram dados nos exemplos.

Os métodos eram considerados como gerais, semelhante aos dias atuais, como “completar quadrados”. Abaixo podemos observar a tradução do método de Bhaskara em nossa notação (ROQUE, 2012, p. 241):

Quadro 1: Método de resolução de Bhaskara - Dedução

Para Resolver a Equação $ax^2 + bx = c$	
Multiplicamos ambos os lados por $4a$	$4a^2 + 4abx = 4ac$
Adicionamos b^2 a ambos os lados	$4a^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2$
Reescrevendo essa igualdade	$(2ax + b)^2 = 4ac + b^2$
As quantidades desconhecidas possuem uma raiz. Obtemos:	$2ax + b = \sqrt{4ac + b^2}$, então $x = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a}$

Fonte: Adaptado de Roque (2012)

O método de resolução, apresentado acima, consiste em: “*completar o quadrado no primeiro membro para tornar o termo contendo a quantidade desconhecida e seu quadrado um quadrado perfeito; diminuir o grau da equação extraindo a raiz quadrada dos dois membros; resolver a equação de primeiro grau que daí resulta*” (ROQUE, 2012, p. 242).

A Aritmética de Al-Khowarizmi tornou-se um idioma na sua época, seus trabalhos contribuíram de forma preponderante para instituição do termo “Álgebra”, como apresentamos anteriormente e aprofundaremos um pouco mais.

Para Boyer (1996) deveria ser Al-Khowarizmi considerado “o pai da álgebra”, o que revela a importância dos seus trabalhos, embora o pesquisador apresente dois aspectos representam um retrocesso aos trabalhos de Diofante. O primeiro é por representar problemas com um nível elementar e o segundo, de acordo com Roque (2012), sua álgebra é inteiramente expressa em palavras (retórica), sem nada de sincopação.

Os trabalhos relacionados às equações quadráticas de Al-Khowarizmi se iniciam com uma breve explanação introdutória que trata do princípio posicional para os números; logo após, passa à resolução. São seis capítulos curtos, dos seis tipos de equações formadas, com as três espécies de quantidades: raízes, quadrados, e números (isto é x , x^2 , e números) (BOYER, 1996; ROQUE, 2012).

Segundo Guelli (2004; 2005), Al-Khowariizmi não utilizava nenhum tipo de símbolo: ao invés de x^2 escrevia *quadrado*, no lugar de x , colocava *raízes*, e, por números, entende os *coeficientes das variáveis* e os *termos independentes*.

Outro destaque surgiu a partir da descoberta do zero na Índia (GUELLI, 2005). Equações do 2º grau como esta $x^2 = 2x$ passaram a ser resolvidas corretamente, mesmo sendo expressas totalmente em palavras. Para resolver, eram necessárias duas propriedades dos números, observe a resolução:

- Primeiro subtrai $2x$ dos dois membros da equação:

$$\begin{aligned}x^2 - 2x &= 2x - 2x \\x^2 - 2x &= 0\end{aligned}$$

- Depois é necessário fatorar a expressão do primeiro membro:

$$x \cdot (x - 2) = 0$$

- Se o produto de dois números é zero, então um dos fatores é igual a zero, ou os dois, simultaneamente, são iguais a zero:

$$\begin{aligned}x &= 0 & x - 2 &= 0 \\x &= 2 & \text{Raízes } 0 \text{ e } 2.\end{aligned}$$

Para Guelli (2005), este tipo de equação do 2º grau era resolvido em todo mundo através de duas propriedades dos números: (a) a operação inversa da potenciação é a radiciação; (b) Se $b \cdot c = 0$, então $b = 0$ ou $c = 0$.

Vale destacar que Al-jabr Al-Khowarizmi classificou as equações do 2º grau em vários tipos, como podemos observar abaixo os enunciados de modo retórico (com tradução em notação atual entre parênteses) (ROQUE, 2012):

- Quadrados iguais a raízes ($ax^2 = bx$);
- Quadrados iguais a um número ($ax^2 = c$);
- Raízes iguais a um número ($bx = c$);
- Quadrados e raízes iguais a um número ($ax^2 + bx = c$);
- Quadrados e um número iguais a raízes ($ax^2 + c = bx$);

- Raízes e um número iguais a quadrados ($bx + c = ax^2$).

Vale ressaltar que Al-Khowarizmi resolvia as equações utilizando somente palavras, inclusive para expressar números. O método que o matemático utilizava era “completar quadrados”, que significa formar o trinômio quadrado perfeito. Podemos perceber que a álgebra desse período é muito parecida com a ensinada na escola. Vejamos os métodos, retórico e algébrico:

Quadro 2: Método retorico e algébrico

Método Retórico	Método Algébrico
Somando o quadrado com dez raízes, vamos encontrar trinta e nove.	$x^2 + 10x = 39$
Determinar a metade das raízes	$\frac{10}{2}$
Multiplica essa metade por si mesmo, o que dá vinte e cinco.	$\frac{10}{2} \cdot \frac{10}{2} = 5 \cdot 5 = 25$
Vinte e cinco somado ao quadrado e às dez raízes resulta sessenta e quatro.	$x^2 + 10x + 25 = \underbrace{39 + 25}_{64}$
Então, o número que multiplicado por si mesmo dá sessenta e quatro é o oito.	$(x + 5)^2 = 64$ $x + 5 = \sqrt{64}$ $x + 5 = 8$
O valor da raiz é igual a oito, diminuindo cinco unidades; assim, o valor vai ser três unidades.	$x = 8 - 5$ $x = 3$

Fonte: Guelli (2005)

Ainda no que diz respeito às equações do 2º grau, Al-Khowarizmi também sabia interpretar os casos que não tinham raízes reais. Esse método utilizado por Al-Khowarizmi foi utilizado por outros matemáticos setecentos anos mais tarde.

Podemos perceber que a álgebra desse período é muito parecida com a que é ensinada na escola. Queremos dizer que a álgebra apresentada possui semelhança com a que encontramos nos dias atuais.

As contribuições de Viète à Álgebra apontam para a introdução de seus símbolos. Nesse aspecto, Boyer (1996) considera que estas contribuições foram as mais importantes em relação a de outros matemáticos, devido à proximidade com as ideias modernas.

Nesse sentido, Viète usou uma vogal para representar, em álgebra, uma quantidade supostamente desconhecida, ou indeterminada, e uma consoante para representar uma grandeza ou números supostos conhecidos ou dados.

Corroborando com as informações anteriores, Guelli (2005) aponta, que após representar a incógnita por uma vogal, surge o momento de representar as palavras “mais e menos” por p e m . Podemos observar abaixo um exemplo com os dois tipos de equação, a primeira (A) representa a equação como nos dias atuais e a segunda (B) como representaria Viète:

$$(A) 3x + 4 = 10$$

$$(B) A3\bar{p}4 \text{ é igual a } 10$$

O traço sobre a letra “p” indica que ela está sendo utilizada como símbolo matemático, o exemplo acima representa o “mais”, já o “menos” seria representado por “m” com o traço sobre ela. Viète utilizou ainda outras palavras, *área* para representar o *quadrado*; *cubo* para representar a *terceira potência*. O símbolo de = seria *é igual a*.

Apointa, ainda, que as descobertas de Viète tiveram uma importância diferente, porque, pela primeira vez em álgebra, foi feita “uma distinção clara entre o importante conceito de parâmetro e a ideia de uma quantidade desconhecida (SESSA, 2009).

Da mesma forma que Viète apoiou trabalhos de matemáticos da antiguidade, outros matemáticos, que apareceram posteriormente a ele, aperfeiçoaram seu trabalho, propondo a “álgebra simbólica”. O matemático inglês Robert Record introduziu nas descobertas de Viète o sinal de igual “=” e o matemático Thomas Harriot adotou uma nova notação para as potências das incógnitas: o que Viète representava como “área” passou a ser representado por “AA” e “cubo por AAA” (GUELLI, 2005).

A passagem para a álgebra simbólica foi completada por René Descartes. Esse grande matemático avançou nas contribuições de Viète com as seguintes inovações: antes “área (AA) com Descartes passou a ser A^2 e o cubo (AAA) por A^3 , o que encontramos nos dias atuais. Substituiu “in” pelo sinal “x”; passou a representar as incógnitas de uma equação pelas últimas letras do alfabeto “x, y e z”, e os coeficientes literais pelas letras “a, b e c”. Dessa forma, René Descartes consolidou a chegada da álgebra simbólica. Observe o exemplo das mudanças:

$$B \text{ in } A \text{ área} + C \text{ in } A + D = 0$$

Temos

$$a.x^2 + b.x + c = 0$$

Assim, podemos observar como se comportava a álgebra na antiguidade e a consolidação simbólica. Isso nos faz lembrar um importante marco da álgebra que nos dias atuais em muitas situações é levado em consideração, a passagem da álgebra retórica, para álgebra sincopada e a álgebra simbólica (BOYER, 1996; SESSA, 2009).

(A) *Álgebra Retórica (ou verbal)* – A fase retórica ou verbal se estende desde os Babilônios (1700 a.C.) até o matemático grego Diofante (250 d.C.). É caracterizada pela a completa ausência de símbolos e abreviações que possam expressar o pensamento algébrico. Todos os passos relativos a números e equações eram descritos na linguagem corrente. Esta teria sido a álgebra dos Egípcios, dos Babilônios e dos gregos pré-diofantinos (BOYER, 1996).

(B) *Álgebra Sincopada* – Essa fase teria surgido com Diofanto de Alexandria e ficou marcada pela introdução de um símbolo para a incógnita, onde algumas expressões são escritas em palavras, e outras utilizando uma forma mais abreviada e concisa para expressar suas equações. É registrada também na história uma sincopada similar à de Diofanto, que surgiu através dos Hindus, especialmente por Brahmagupta (século XII). Essa fase se prolongou até o início do século XVI. Neste momento histórico, temos a impressão de que os matemáticos não demorariam muito tempo para descobrirem os sinais (BOYER, 1996).

(C) *Álgebra Simbólica* – Os registros indicam que essa fase iniciou-se a partir do momento em que as ideias algébricas passaram a ser expressas somente através de símbolos, deixando de lado o uso das palavras. Embora o jurista francês, François Viète⁸¹ (1540 - 1603), ainda utilizasse um estilo sincopado, foi ele o principal responsável pela criação de novos símbolos na álgebra (BOYER, 1996).

É importante para o nosso trabalho que se faça essa breve análise da história da álgebra, em especial as equações do 2º grau, para localizar o seu desenvolvimento dentro da matemática e quais relações e influências deste com as praxeologias matemáticas e didáticas.

⁸¹ A história aponta um relato interessante sobre esse jurista. Na época da guerra entre França e Espanha, para que os inimigos não descobrissem o plano de cada um dos países, eram usados códigos nas mensagens. Com os Espanhóis isso não funcionava. Ao ser preso o seu mensageiro, os Franceses descobriram imediatamente os seus planos. Questionamentos surgiam por parte dos Espanhóis: como poderia acontecer isso se apenas algumas poucas pessoas de confiança tinham a chave dos códigos? – “os Franceses tinham um pacto com o demônio, murmuravam os Espanhóis”. Nesse caso, o demônio tinha um nome, François Viète, inteligente e capaz de descobrir chaves secretas das mensagens Espanholas. O que lhe deu um título o Pai da Álgebra para alguns (GUELLI, 2005).

Isto posto, nos deteremos a seguir às questões relacionadas ao ensino e aprendizagem da álgebra e, posteriormente, apresentaremos uma discussão sobre as equações do 2º grau do ponto de vista matemático e didático.

4.3 Questões de Ensino e Aprendizagem em Álgebra

As pesquisas relacionadas ao ensino e aprendizagem da álgebra elementar têm ocupado, no cenário das pesquisas em Educação Matemática, um lugar de destaque. Têm sido um campo de descobertas relevantes já há algumas décadas.

Muitos pesquisadores demonstram interesse nesse campo de investigação; no Brasil podemos citar Câmara dos Santos (2010), Brito Menezes (2006), Lins Lessa (2005), Araújo (2009), Bessa de Menezes (2010), entre outros. Em outros países, podemos destacar Kieran (1995), Booth (1995), Filoy e Rojano (1984), Lee (1995), Usiskin (1995), entre outros. Vários são os enfoques discutidos por esses pesquisadores, como podemos destacar a passagem da aritmética para álgebra, mudanças de concepções que são necessárias e que envolvem essa passagem, introdução à álgebra escolar, o pensamento algébrico. Outras pesquisas procuram discutir sobre a relação que existe destes enfoques com os fenômenos didáticos, como, por exemplo, o contrato didático e a transposição didática.

Embora os debates tenham avançado bastante em relação à álgebra na educação básica, boa parte da literatura que apresentam esses estudos não contemplam alguns fatores importantes. Como a relação entre o contrato didático e as organizações matemáticas e didáticas quando temos as equações do 2º grau como o saber algébrico no jogo didático, nossa pesquisa.

É consenso entre os pesquisadores que a álgebra é um campo de estudo importante para formação crítica dos estudantes, constitui-se como um espaço bastante significativo para o desenvolvimento e o exercício da capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas (BRASIL, 1998).

Podemos acrescentar que o sucesso da formação do aluno está condicionada à relação que ele mantém com o saber algébrico. Assim, a relação não sendo adequada, o aluno tem possibilidade de fracassar na disciplina matemática; por outro lado, quando a relação torna-se adequada, surge o sucesso na disciplina (CÂMARA DOS SANTOS, 2010; BOOTH, 1995).

Isso pode acontecer quando um grupo de alunos tem a facilidade em manipular as expressões algébricas, em resolver equações, sistemas etc.; com esses atributos pessoais produz um caminho aberto para continuação da escolarização. Sendo o contrário, o aluno que não consegue demonstrar habilidade com a álgebra está fadado ao fracasso. Essa situação, possivelmente, tem uma ligação com o motivo do afastamento de vários alunos da escola.

Esse fato que estamos discutindo, sobre o fracasso em álgebra dos alunos, é apontado por Câmara dos Santos (2010) como falta de desenvolvimento do pensamento algébrico. Essas preocupações, chamaram atenção de Ramos de Almeida (2016), de forma, que propõe na sua pesquisa de doutorado discutir questões relacionadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Nesse estudo, Ramos de Almeida, propõe um modelo que possibilita a identificação de níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico revelado pelos alunos da educação básica ao resolverem problemas de partilha de quantidades.

Por outro lado, temos pesquisas que, de forma semelhante, discutem o pensamento numérico e pensamento probabilístico, entre outros. Gradativamente, as pesquisas relacionada ao campo da educação matemática vai tomando corpo.

Associado ao pensamento algébrico, ou até antes desse objeto de estudo, é necessário questionar o que seria álgebra, ou o que seria álgebra na escola básica (USISKIN, 1995). Na visão do pesquisador, esses questionamentos têm a ver com a compreensão do significado das letras e suas operações. As letras para Usiskin (1995), nos dias atuais, são comumente chamadas de variáveis. Porém, discutir sobre álgebra apenas sob o ponto de vista das variáveis pode ser considerado uma forma de reducionismo.

Usiskin (1995) aponta, também, que a finalidade do ensino e da aprendizagem da álgebra, as concepções que tenhamos dessa matéria e a utilização de variáveis estão intrinsecamente relacionadas. Essas ideias são corroboradas pelo Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) ao falarem que os alunos devem estar engajados em atividades que inter-relacionem as diferentes concepções da álgebra.

As finalidades da álgebra, apresentada por Usiskin (1996), são determinadas pelas relações que existem entre as diferentes concepções da álgebra que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos usos das variáveis.

No tocante às concepções acerca da álgebra, considerando que elas nos ajudam a refletir sobre a natureza do saber algébrico, Usiskin (1995) aponta quatro: a

álgebra como aritmética generalizada, a álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, a álgebra como estudo de relação entre grandezas e a álgebra como estudo das estruturas.

Na primeira concepção, temos “*a álgebra como aritmética generalizada*”. Nessa concepção é natural pensar as variáveis como generalizadora de modelos (USISKIN, 1995). Podemos generalizar $3 + 5.7 = 5.7 + 3$, tal como generalizamos $a + b = b + a$. Por outro lado, se pensarmos de forma mais avançada, como propõe o pesquisador, temos a noção de variável como generalizadora de modelos, o que é fundamental em modelagem matemática.

Inserido nessa concepção e considerado como a informação mais importante que deve chegar ao aluno, temos o entendimento de “*traduzir e generalizar*”. Trata-se de técnicas importantes, não só para a álgebra como para a aritmética.

Na segunda concepção, tem-se “*a álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas*”. Para iniciarmos a discussão, devemos considerar o problema seguinte: “Adicionando 3 ao quádruplo de um certo número, a soma é 40. Achar esse número”. A resolução do problema resume-se a traduzir em linguagem natural para linguagem algébrica, que seria $5x + 3 = 40$. Nessa concepção, seria suficiente ter a álgebra como generalizadora de modelos.

No entanto, a álgebra pode ser entendida como estudo de procedimentos. Observe o exemplo, $5x + 3 = 40$ (equação): ao adicionar -3 a ambos os membros, passamos a ter $5x + 3 - 3 = 40 - 3$.

A resolução pode ser simplificada, de forma que reduz o número de passos necessários até chegar a solução. Esses caminhos a serem reduzidos dependem da relação do aluno com o saber e da opção didática do professor. Então, $5x = 37$ resolvendo temos $x = 7,4$ o número procurado.

Alguns pesquisadores concordam com Usiskin (1995) ao falar que um momento de dificuldade para o aluno é a passagem da linguagem natural para algébrica (DA ROCHA FALCÃO, 1997; ALMEIDA, 2009). Podemos perceber que a resolução desse problema na aritmética, com raciocínio lógico, consiste em subtrair 3 e dividir por 5, a forma algébrica $5x + 3$ envolve a multiplicação por 5 e a adição de 3, as operações são inversas (USISKIN, 1995).

Outro destaque sobre essa concepção, segundo Usiskin (1995), diz respeito às variáveis, que são entendidas como incógnita ou constantes. Em relação à concepção anterior, em que o foco está em traduzir e generalizar, aqui as informações que devem

ser privilegiadas são “*simplificar e resolver*”. O pesquisador aponta que “*simplificar e resolver são, às vezes, dois nomes diferentes para a mesma ideia*” (USISKIN, 1995, p. 15).

A terceira concepção, “*a álgebra como estudo de relações entre grandezas*”, para Usiskin (1995), é a concepção de álgebra como o estudo das relações e pode começar com fórmulas; a distinção com a concepção anterior é que, neste caso, as variáveis variam. A álgebra pode ser concebida como a *expressão de relações entre grandezas*, que nos remete à ideia de *função*.

Na quarta concepção apresentada pelo pesquisador “*a álgebra como estudo das estruturas*”, é considerada uma concepção mais relacionada à álgebra superior. O seu estudo envolve grupos, anéis, domínios de integridade, corpos e espaços vetoriais, que dizem respeito a um domínio algébrico mais sofisticado, com pouca semelhança com ensino básico (USISKIN, 1995).

Para essa concepção, embora exista pouca semelhança com o ensino básico, é necessário entender que os corpos dos números reais e números complexos e os vários anéis de polinômios fundamentam a teoria da álgebra. Além disso, permitem explicar o porquê de que certas equações podem ser resolvidas e outras não podem.

Para Lesley Lee (1996) a álgebra pode ser considerada uma *minicultura na cultura da matemática*. Nesse sentido, existem concepções e perspectivas específicas acerca desse saber que se faz necessário de serem compreendidas para que possamos ter uma noção da dimensão e do potencial da álgebra, sobretudo focalizando o seu ensino.

Essa pesquisadora considera ainda que este campo do conhecimento matemático constitui-se em uma linguagem, no contexto metafórico e metonímico. Corroborando com essa discussão, André (2007) propõe que tal compreensão ajuda a pensar sobre a interação da linguagem e do conhecimento, como um processo de aculturação gradual da álgebra localizado na sala de aula.

Nessa mesma linha de pensamento, entendemos que o ensino da álgebra deve romper com o aspecto mecânico, que visa exclusivamente um conjunto de procedimentos que devem ser aplicados na resolução de um problema específico. Para que isso aconteça, o professor deve criar situações de ensino que possibilitem

ao aluno pensar algebricamente⁸² no momento em que entra em contato com um problema.

Ao deparar-se com a álgebra em sala de aula, algumas dificuldades vão surgindo e distanciando o aluno da aprendizagem. Booth (1995), Lochhead e Mestre (1995), Kieran (1995) apresentam através de suas pesquisas que a álgebra é fonte de confusão e atitudes negativas entre os alunos.

Nas suas investigações, Booth (1995) verifica que parte das dificuldades que os alunos tinham para simplificar expressões como $2a + 5b$ diz respeito à interpretação do símbolo operatório. Em aritmética, por exemplo, os símbolos $+$ e $=$ são interpretados como termo de ação. Em que, o $+$ solicita a realização efetiva de uma operação e o símbolo $=$ significa escrever a resposta.

De forma semelhante, no contexto de estudo de equação, o sinal de $=$ é concebido como um símbolo unidirecional que precede a resposta numérica, algo que vinha sido discutido por Usiskin (1995). Este pesquisador acrescenta ainda que em aritmética, frequentemente, o sinal de igual pode ser visto apenas como operador, mas em álgebra precisa ser compreendido pelo estudante como expressando uma equivalência entre os membros da equação.

Na aritmética, um símbolo de adição entre dois números sempre indica que duas parcelas devem ser somadas, como em $8 + 3 = ?$. Já em álgebra nem sempre é interpretado assim, muitas vezes em uma equação, do tipo, $2x + 7 = 15$, o símbolo de adição não significa que os termos numéricos dados no primeiro membro, 2 e 7, devem ser somados. A menos que conheçamos o valor de $2x$, o símbolo de adição dessa equação significa que se deve subtrair 7 de 15.

Assim, em álgebra, os símbolos operatórios não indicam necessariamente as operações a serem efetuadas. “A principal diferença entre a aritmética e a álgebra é essa distinção entre as operações utilizadas no processo de resolver equações e as operações indicadas nessas equações” (KIERAN, 1995 p.105).

Outra dificuldade é que as letras na álgebra representam também motivos de dificuldade em relação a aprendizagem. Pois, em aritmética, por exemplo, a letra “m” pode ser utilizada para representar “metros”, mas não para representar o número de metros, como em álgebra.

⁸² Existe na literatura uma discussão acerca do que é o pensamento algébrico. Tal pensamento é, em essência, diferente do aritmético e seu desenvolvimento deve ser um dos objetivos no ensino de álgebra. Para aprofundar essa discussão, ver Lins e Gimenez (1997).

Nesse sentido, Booth (1995, p. 30) acrescenta que *“a confusão decorrente dessa mudança de uso pode resultar numa falta de referencial numérico, por parte do aluno, ao interpretar o significado das letras em álgebra”*.

Na relação entre a álgebra e a aritmética, devemos entender que à álgebra não deve ser isolada da aritmética. Em muitos aspectos ela é considerada à aritmética generalizada. Nesse ponto Booth (1995, p. 33) revela uma fonte de dificuldade, pois *“para compreender a generalização das relações e procedimentos aritméticos é preciso inicialmente que tais relações e procedimentos sejam apreendidos dentro do contexto aritmético”*.

Essa falta de compreensão por parte dos alunos pode comprometer o seu desempenho na álgebra. Por outro lado, esse problema nos faz refletir onde se encontra a dificuldade, na aritmética ou na álgebra?

No que diz respeito ao papel do professor, documentos oficiais orientam que a ênfase que é dada em sala de aula ao ensino, especificamente da álgebra, não está sendo suficiente para combater e sanar algumas dificuldades dos alunos em matemática. Embora as pesquisas apontem para uma mudança e, mesmo que existam professores que desejam tornar a aprendizagem mais significativa, a realidade mostra o contrário: dados do SAEB (2011) indicam que 55% dos alunos não obtiveram êxito no descritor que trata da resolução de equações do segundo grau.

Os PCN (BRASIL, 1998) indicam que, embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. Sua ampliação acontece

pela exploração de situação-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis e incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a “sintaxe” (regras para resolução) de uma equação (BRASIL, 1998, p. 50).

Por outro lado, as atividades propostas pelos educadores seguem em caminhos contrários: nas orientações para o trabalho com problemas algébricos é dada ênfase puramente ao processo de resolução. Fazer o aluno pensar, questionar, fica em segundo plano, tornando estas atividades puramente mecânicas, rotineiras e muitas vezes desinteressantes para o mesmo.

Para Lins e Gimenez (1997) alguns fatores ainda persistem na prática docente e estes não são nunca “neutros” ou “ingênuos” em relação aos pressupostos de toda ordem: relativos à natureza dos processos cognitivos, à natureza dos objetos que ali são apresentados, ou relativos a concepções de conhecimentos.

Nesse contexto, sobre o ensino e aprendizagem em álgebra, os pesquisadores apresentam uma discussão sobre tendências letristas.

Alguém que acredite que a atividade algébrica se resume a um “cálculo com letras”, pode propor o que para sala de aula? Talvez adote, seguindo algumas péssimas ideias encontradas em propostas para educação aritmética, a prática de utilizar a “sequência” técnica (algoritmo)/prática (exercícios) (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 105).

Ainda no tocante a essa discussão, os autores afirmam: “com toda franqueza, isso é praticamente tudo que encontramos na quase total maioria dos livros didáticos que estão disponíveis no mercado brasileiro” (LINS E GIMENEZ, 1997, p.105). Por fim, arrematam que, por outro lado, é verdade que precisamos que as editoras e universidades, em suas produções científicas, colaborem mais, produzindo materiais que ofereçam alternativas ao que predomina hoje.

Para aprofundar um pouco mais sobre o saber matemático “equações do segundo grau”, apresentamos adiante alguns aspectos relacionados às situações matemáticas e didáticas.

4.4 Orientações Curriculares Para o Ensino da Álgebra: algumas considerações

Nesse tópico procuramos apresentar algumas considerações sobre o ensino de álgebra, levando em consideração as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN (BRASIL, 1998) e dos Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012). Essas considerações não se caracterizam como uma análise profunda dos documentos sobre a álgebra. No entanto, entendemos ser necessário uma reflexão acerca do que temos hoje à disposição dos educadores sobre o ensino da matemática e sobretudo da álgebra. As informações que fazem parte dos documentos que apresentaremos são consideradas importantes para o desenvolvimento do nosso trabalho.

4.4.1 Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)

Uma primeira questão que apresentamos, e que faz parte da introdução dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p. 15), diz respeito à sua finalidade. Os documentos tem como finalidade *“fornecer elementos para ampliar o debate nacional sobre o ensino dessa área de conhecimento, socializar informações e resultados de pesquisas, levando-as ao conjunto dos professores brasileiros”*.

Entendemos que os documentos aparecem no cenário educacional como um elemento que possibilita o estabelecimento de metas e diretrizes para o ensino, visando o desenvolvimento do aluno crítico, criativo, reflexivo e cidadão.

As informações e resultados de pesquisas que fazem parte dos PCN (BRASIL, 1998, p. 15), quando colocadas à disposição dos profissionais responsáveis pela prática escolar, *“contribui para que toda criança e jovem brasileiros tenham acesso a um conhecimento matemático que lhes possibilite de fato sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura”*.

A esse respeito, podemos dizer que a matemática se caracteriza como uma forma de compreender e atuar no mundo, e o conhecimento gerado nela como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural.

Para os PCN (BRASIL, 1998), o estudo dos fenômenos relacionados ao ensino e aprendizagem de matemática, surgem a partir da análise das variáveis envolvidas nesse processo, tais como os *alunos*, o *professor* e o *saber matemático*, bem como das suas relações duais.

Entre as relações que são estabelecidas na relação triangular (professor, aluno e o saber matemático), o documento defende que o professor desempenhe um papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno. Assim, é necessário que

“esse conhecimento seja transformado, pois a obra e o pensamento do matemático teórico geralmente são difíceis de ser comunicados diretamente aos alunos. Essa consideração implica rever a ideia, que persiste na escola, de ver nos objetos de ensino cópias fieis dos objetos da ciência” (BRASIL, 1998, p. 36).

O que o documento discute é que tornar o conhecimento passível de ser ensinado e aprendido em sala de aula aponta para a necessidade de que esse

conhecimento passe por transformações. Essa condição é chamada por Chevallard (2001) de transposição didática.

Além disso, a “transposição implica conhecer os obstáculos envolvidos no processo de construção de conceitos e procedimentos para que o professor possa compreender melhor alguns aspectos da aprendizagem do aluno” (BRASIL, 1998, p. 36).

No que diz respeito à relação professor aluno(s), o documento deixa claro a importância da divisão de responsabilidade, da divisão dos papéis de ambos (professor e aluno) para nortear as interações em sala de aula e potencializar a construção do conhecimento.

De forma contrária à estratégia de reprodução de conhecimento e o acúmulo de informações que é utilizada em algumas situações pelos professores, os PCN (BRASIL, 1998) apresentam aos educadores matemáticos a resolução de problemas como ponto de partida para a atividade matemática. *“Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução”* (ibidem, p. 40).

Mesmo sendo a resolução de problemas o caminho indicado pelos PCN, é possível perceber que ela não tem desempenhado o seu verdadeiro papel no ensino; na melhor das hipóteses, tem sido utilizada como forma de aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente pelos alunos (BRASIL, 1998).

Os PCN consideram que a prática mais frequente em sala de aula,

consiste em ensinar um conceito, procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para a grande maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com os números do enunciado ou aplicar algo que aprenderam nas aulas. Desse modo, o que o professor explora na atividade matemática não é mais a atividade, ela mesma, mas seus resultados, definições técnicas e demonstrações (BRASIL, 1998, p. 40).

A resolução de problemas, que é defendida pelos PCN (1998) como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem de matemática, pode ser resumida em cinco princípios. Destacamos apenas dois:

A situação problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las.

O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada (BRASIL, 1998, p. 41).

Os PCN considera ainda que um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado (BRASIL, 1998). Nesse sentido, podemos acrescentar que a solução não deve estar disponível no enunciado problema, com palavras que apontam a sua resposta.

Acrescentam que *“em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas, porque, via de regra, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução”* (BRASIL, 1998, p. 41).

O aluno envolvido na situação didática, segundo PCN pressupõe que ele:

- Elabore um ou vários procedimentos de resolução de problemas (como realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses);
- Compare seus resultados com os de outros alunos;
- Valide seus procedimentos.

Dentro desse conjunto de situações, um dos objetivos gerais para o ensino da matemática é “identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o carácter de jogo intelectual, característico da matemática, como aspecto que estimule o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas” (BRASIL, 1998, p. 47).

Para efetivar os objetivos dos PCN, os currículos de Matemática para o Ensino Fundamental são organizados por ciclos de aprendizagem e em blocos de conteúdos assim denominados: números e operações; espaço e forma; grandezas e medidas; tratamento de informação.

O nosso interesse está no ensino da álgebra, o estudo de conteúdos algébricos se localiza nos blocos de números e operações, no 3º e 4º ciclos, como foi dito anteriormente, a partir do desenvolvimento das diferentes funções da álgebra.

4.4.1.1 O Ensino da Álgebra e as Orientações no 3º Ciclo

No terceiro ciclo do Ensino Fundamental, os PCN recomendam que é fundamental que os alunos ampliem os significados que possuem acerca dos conteúdos dos diferentes blocos. Além disso, procure as relações entre os blocos, aprimorando a capacidade de análise e de tomadas de decisões, que começam a se manifestar. É necessário nesse momento, também, explorar o potencial crescente de abstração, fazendo com que os alunos descubram regularidades e propriedades numéricas, geométricas e métricas.

Vale destacar que as situações de aprendizagem propostas devem estar centradas na construção de significados, na elaboração de estratégias e na resolução de problemas, em que o aluno desenvolve processos importantes como intuição, analogias, indução e dedução, em detrimento as atividades voltadas para memorização desprovidas de compreensão.

O PCN (BRASIL, 1998, p. 64) orienta no terceiro ciclo, com relação ao ensino da álgebra, que esse deve visar ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

- reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problemas e favorecer as possíveis soluções;
- traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificando os significados das letras;
- utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico.

Fica claro no documento, também, que no estudo dos conteúdos apresentados no bloco de Números e Operações é fundamental a proposição de situações-problema que possibilitem o desenvolvimento do sentido numérico e os significados das operações.

No decorrer do trabalho com números, os PCN orientam, que é fundamental estudar algumas relações funcionais pela exploração de padrões em sequências numéricas que levem os alunos a fazer algumas generalizações e compreender, por um processo de aproximações sucessivas, a natureza das representações algébricas. Vale destacar que a construção dessas generalizações e de suas respectivas representações permitem a exploração das primeiras noções de álgebra.

O documento entende a importância do ensino da álgebra, mas, devido à complexidade que caracteriza os conceitos e procedimentos algébricos, chama atenção para o fato de não ser desejável que no terceiro ciclo se desenvolva um trabalho visando ao aprofundamento das operações com as expressões algébricas e as equações. Os PCN considera que,

é suficiente nesse ciclo que os alunos compreendam a noção de variável e reconheçam a expressão algébrica como uma forma de traduzir a relação existente entre a variação de duas grandezas. É provável que ao explorar situações-problema que envolvam variação de grandezas o aluno depare com equação, o que possibilita interpretar a letra como incógnita (BRAISL, 1998, 68).

Para os PCN (BRASIL, 2012), a introdução de variáveis para representar relações funcionais em situações-problema concretas permite que o aluno veja uma outra função para as letras ao identificá-las como números de um conjunto numérico, úteis para representar generalizações.

Os documentos recomendam, ainda, que os alunos sejam estimulados a construir procedimentos diversos para resolver as equações, deixando as técnicas convencionais para o estudo mais detalhado no quarto ciclo.

4.4.1.2 O Ensino da Álgebra e as Orientações no 4º Ciclo

No quarto ciclo do Ensino Fundamental, os PCN apontam que a matemática é um campo de conhecimento que tem influenciado de forma positiva a vida dos jovens, em especial, daqueles já inseridos no mercado de trabalho. Nesse mesmo contexto, é perceptível aos alunos a presença da matemática em outras áreas conhecimento, particularmente no estudo de alguns fenômenos físicos, químicos, no estudo da informática, etc.

Para os PCN, é preciso fazer uso de todas essas situações para mostrar aos alunos que a matemática é parte do saber científico e que tem um papel central na cultura moderna, assim como também para mostrar que algum conhecimento básico da natureza dessa área e uma certa familiaridade com suas ideias-chave são requisitos para ter acesso a outros conhecimentos, em especial à literatura científica e tecnológica (BRASIL, 1998, p. 80).

Contrariando essa visão, em geral, tradicionalmente em sala de aula, a ênfase recai no estudo dos conteúdos algébricos abordados de forma mecânica, distanciando-se ainda mais das situações-problemas do cotidiano.

Um caminho adequado, segundo o documento, é de proporcionar aos alunos ao desenvolvimento do “pensamento algébrico”, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a (BRASIL, 1998, p. 81):

- produzir e interpretar diferentes escritas algébricas – expressões, igualdades e desigualdades -, identificando as equações, inequações e sistemas;
- resolver situações-problemas por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos;
- observar regularidades e leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis.

Do ponto de vista do ensino, os PCN propõem que o trabalho com a álgebra tenha como ponto de partida a pré-álgebra⁸³, desenvolvida no ciclo anterior, em que as noções algébricas são exploradas por meio de atividades de generalização e de representação matemáticas, o que permite dar significado à linguagem e às ideias matemáticas e levar o aluno a reconhecer os diferentes objetos da álgebra (equações, inequações, incógnita, variáveis, parâmetros), em suas diferentes dimensões (aritméticas generalizada, funcional, equações e estrutural).

Nesse contexto, os documentos afirmam que no trabalho com álgebra é fundamental a compreensão de “conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma gráfica; a formação e a resolução de problemas por meio de equação (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da “sintaxe” (regras para resolução) de uma equação” (BRASIL, 2012, p. 84).

⁸³ No terceiro ciclo o documento não faz menção a esse termo.

Ainda falando de ensino, não se pode configurar o abandono da aritmética, como muitas vezes é observado. Esse aspecto pode ser percebido a partir do momento em que o professor, nas suas ações didáticas, privilegiam a aplicação de conceitos algébricos.

Pode-se até afirmar que os procedimentos “não-algébricos” (os que não utilizam equações, sistemas etc.) para resolver problemas são desestimulados nos últimos anos do ensino fundamental, mesmo em situações em que a álgebra não é necessária (BRASIL, 1998, p. 83).

Assim, os PCN defendem que o professor proponha aos alunos resolução de novas situações-problema, e, nas situações, os alunos possam analisar o problema, interpretar e formular para depois resolvê-lo. Orientam também que as situações “envolvam números naturais, inteiros e racionais e os diferentes significados das operações, bem como valorizem as resoluções *aritméticas* tanto quanto as *algébricas* (BRASIL, 1998, p. 83).

Vale ressaltar que, para uma tomada de decisão a respeito da álgebra, deve-se ter, evidentemente, clareza de seu papel no currículo, além de reflexão de como a criança ou adolescente constroem o conhecimento matemático, principalmente quanto a variedades de representações.

No que diz respeito ao ensino das equações do segundo grau, apenas em um momento os PCN discutem que a “resolução de situação-problemas que podem ser resolvidas por uma equação do segundo grau cujas as raízes sejam obtidas pela fatoração, discutindo o significado dessas raízes em confronto com a situação proposta” (BRASIL, 1998, p. 88).

De forma complementar, apresentamos a seguir, a orientação do parâmetro curricular de Pernambuco (2012) sobre o “ensino da álgebra”.

4.4.2 Parâmetros Curriculares de Matemática de Pernambuco

Logo na introdução, os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PCP), apontam que “educar significa elevar a consciência sobre a situação pessoal, cultural e social” dos alunos (PERNAMBUCO, 2012, p. 13). Significa, também, que os professores devem promover situações para que os alunos possam construir

competências básicas, o que implica a necessidade de uma reflexão sobre os conhecimentos envolvidos na construção.

Direcionando as atenções para o caso específico da Matemática, o documento considera fundamental que “se reflita não apenas sobre os conteúdos a serem ensinados, mas também sobre as expectativas de aprendizagem, ou seja, o que se espera que o estudante aprenda” (ibidem, p.13). Isso é necessário para o acompanhamento do processo de ensino e a garantia do seu sucesso.

Nos dias atuais, a matemática tem desempenhado um papel fundamental na formação humana, em especial por vivermos em uma sociedade cada vez mais permeada pela “Ciência e pela Tecnologia”. Podemos dizer que diversas profissões, das mais simples às mais complexas, exigem conhecimentos matemáticos e competências básicas para lidar com esses conhecimentos.

As habilidades e os conhecimentos, que os documentos consideram necessários, produzem nos alunos a capacidade de compreender gráficos, de efetuar estimativas, de organizar o seu pensamento e tomar decisões conscientes, entre outras coisas.

As mais elementares ações cotidianas requerem competências matemáticas, que se tornam mais complexas na medida em que as interações sociais e as relações de produção e troca de bens e serviços vão sendo diversificadas e intensificadas (PERNAMBUCO, 2012, p. 16).

O que estamos dialogando até agora aponta a sala de aula como um ambiente onde acontece a aprendizagem nos estudantes. Podemos dizer que essa evolução é decorrente do que se “ensina” de matemática, por parte do professor.

Ao falar sobre o ensino e a aprendizagem, o documento de Pernambuco considera necessário questionar o que se entende por ensinar e aprender. Em respostas ao questionamento, cita três grandes correntes.

A primeira, considerada a mais presente na maioria das nossas salas de aula, em que identifica o ensino como transmissão (papel do professor) e a aprendizagem como a recepção (papel dos alunos) dos conhecimentos. A aprendizagem nessa concepção é tida como um acúmulo de conteúdos e o ensino se baseia, essencialmente, na verbalização do conhecimento (PERNAMBUCO, 2012, p. 22).

A segunda corrente é baseada nas ideias behavioristas, “concebe a aprendizagem com base na fragmentação do conhecimento. Essa concepção apoia-se na identificação de objetivos de aprendizagem cada vez mais específicos, na

suposição de que atingir cada um desses levaria a aquisição de conceitos subjacentes” (ibidem, 2012, p. 22).

A terceira é destaque pelo documento como pouco explorada nos nossos sistemas de ensino, transfere para os estudantes a responsabilidade pela sua aprendizagem, na medida em que o coloca como ator principal no processo de ensino e aprendizagem.

Um outro destaque, apresentado pelo documento, diz respeito ao confronto da primeira corrente e a terceira corrente.

A primeira se baseia no modelo “definição → exemplos → exercício”, ou seja, a introdução de um novo conceito se daria pela sua apresentação direta, seguida de certo número de exemplos, que serviriam como modelos, os quais os alunos iriam seguir de forma acrítica, em momentos anteriores. A cadeia se completa com a proposição dos chamados “exercícios de fixação”. A terceira concepção apresenta outra lógica, ou seja, a aprendizagem de um novo conceito ocorre pela apresentação de uma situação-problema ao estudante. A análise dessa situação conduz à definição, à generalização e à sistematização do conceito, que vai sendo construído ao longo do processo de aprendizagem (PERNAMBUCO, 2012, p. 23).

As correntes apresentadas acima, de certa maneira, estão relacionadas a diferentes fenômenos, tais como o contrato pedagógico, o *contrato didático* e a transposição didática (PERNAMBUCO, 2012). Esses fenômenos podem ser observados a partir de relação didática. Vale ressaltar que o segundo fenômeno em destaque faz parte da nossa pesquisa.

Os documentos resumem, dizendo “o contrato pedagógico se baseia no funcionamento da classe, o contrato didático tem suas cláusulas ancoradas no conhecimento que está em jogo nessa classe” (PERNAMBUCO, 2012, p. 24).

Ainda no que diz respeito aos fenômenos, os acordos existentes nas concepções de aprendizagem estão fortemente articulados ao conceito de contrato didático, e surgem da ideia de transposição didática. O transposição didática divide-se em dois momentos, transposição didática externa e transposição didática interna. A primeira está relacionada à transformação, inclusão e exclusão sofridas pelos objetos de conhecimento, desde o momento de sua produção até o momento em que eles chegam à porta da escola. Vale destacar que o produto da transposição didática externa se materializa, em sua maior parte, através do livro didático. A transposição didática interna, “se apresenta por sua própria natureza, dentro da sala de aula. É o

momento em cada professor vai transformar os conhecimentos que lhe foram designados para ensinar em objetos de conhecimento efetivamente ensinados” (PERNAMBUCO, 2012, p. 24).

Tratando da matemática em sala de aula, esse documento recomenda que um dos caminhos para levar o aluno a fazer matemática está em privilegiar a resolução de problemas como estratégias de ensino e aprendizagem.

A resolução de problemas é um tema central quando se discute qualidade no ensino da Matemática. Diversos autores ressaltam a importância da estratégia de resolução de problemas na construção do conhecimento matemático e afirmam que a atividade de resolver problemas está no cerne da ciência Matemática (PERNAMBUCO, 2012, p. 26).

Os documentos apresentam três abordagens relacionadas a essa estratégia: “o problema fechado, o problema aberto e a situação-problema”. O problema fechado se caracteriza como um problema cujo enunciado, ou localização no desenvolvimento dos conteúdos, já identifica, para o aluno, que conteúdo deverá ser utilizado para resolvê-lo. Quando é utilizado esse problema com exclusividade, é mascarada a aprendizagem, pois, o aluno sabe, através de informações contidas no enunciado, qual operação deve ser utilizada.

A sua predominância provoca a cristalização de uma forma de contrato didático que apresenta, como uma de suas regras implícitas, que o estudante não deve se preocupar com o enunciado do problema, pois para resolver basta identificar os números presentes e descobrir a operação que conduz ao resultado.

Os outros dois, o problema aberto e a situação-problema, apesar de apresentarem objetivos diferentes, tomam por eixo central, guardando as devidas proporções, colocar o aluno numa situação análoga a do matemático. Sendo assim, o aluno, diante do problema, deve ser capaz de “realizar tentativas, esclarecer hipóteses, testar essas hipóteses e validar seus resultados”, provando que são verdadeiros, ou, em caso contrário, mostrando alguns contraexemplos.

Em sala de aula, a prática do problema aberto acaba transformando as relações didáticas: o que era uma prática de memorização, passa a ser vista com uma dinâmica diferente.

O objetivo da situação-problema é levar o aluno a “construção” de um novo conhecimento matemático. Ela pode se caracterizar como uma situação geradora de

um problema, cuja resolução envolva necessariamente aquele conceito que queremos que o aluno construa (CÂMARA DOS SANTOS, 2002; PERNAMBUCO, 2012).

As duas últimas abordagens são recomendadas por esse documento, e devem ser trabalhadas em sala de aula, pois seu trabalho tem uma relação positiva na construção da aprendizagem matemática.

4.4.2.1 A Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

O Parâmetro Curricular de Pernambuco (2012), no que diz respeito às expectativas de aprendizagem para os anos iniciais, considera que a criança, ao chegar à escola, traz consigo um conjunto de saberes matemáticos constituídos em interação com o seu meio social. Nesse sentido, é necessário incentivá-la a utilizar tais conhecimentos para resolver situações que devem estar carregadas de significado e que facilitem a construção de saberes mais elaborados nas etapas posteriores.

O documento recomenda que,

a introdução dos conceitos, procedimentos, simbologia, nomenclatura e sistematização característicos da matemática como conhecimento estruturado se faça de forma progressiva e com extremo cuidado, para não gerar dificuldades de aprendizagem (PERNAMBUCO, 2012, p. 49).

Chama atenção ainda, para o fato de que, nessa etapa de escolarização, existe uma característica importante da matemática, que é a forte ligação entre a língua materna e a linguagem matemática. Assim, reconhece que os símbolos matemáticos devem aparecer não como uma imposição do professor, mas como elementos facilitadores da comunicação.

Durante muito tempo, a organização dos conteúdos escolares de matemática foi realizada em três blocos: geometria, aritmética e álgebra. “Usualmente, o estudo dos números tem sido associado ao campo da aritmética, enquanto o trabalho com as letras tem sido ligado à álgebra” (p.63). Sobre isso, o documento aponta que as tendências em Educação Matemática encaram a álgebra não mais como um bloco de conteúdos e sim como uma forma de pensar matematicamente, caracterizada, entre outros aspectos, pela busca de generalizações e de regularidades.

4.4.2.2 A Álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental

Essa etapa de escolarização pode ser vista como uma continuação da anterior, ou seja, como avanço, ampliação e continuação das aprendizagens realizadas anteriormente. Então, o papel do professor se torna muito importante nesse período, pois deve conhecer bem as aprendizagens já realizadas pelos estudantes, para evitar o aparecimento de rupturas que os possam prejudicar.

Nessa etapa, a resolução de problemas continua com sua importância para a construção do conhecimento matemático, pois é na elaboração de estratégia e na resolução de problemas que o estudante estabelece processos cognitivos importantes que não podem ser desenvolvidos por meio de um ensino baseado na memorização.

No que diz respeito ao trabalho com a álgebra, com o surgimento das “letras”, é importante que o estudante construa a *noção de variável e reconheça uma expressão algébrica* como a interpretação de uma relação entre das grandezas. Por outro lado, os documentos sugerem que, para que a álgebra possa ser entendida dessa forma, é necessário que o trabalho no nível simbólico, com ênfase na manipulação de “letras”, tão comum no 6º e no 7º anos, seja evitado.

Para o conteúdo equações de primeiro grau, o parâmetro de Pernambuco (2012) aconselha que as equações devem surgir de forma natural, não como um objeto de estudo em si mesmo, mas como uma representação de um determinado problema a ser resolvido.

Recomenda, ainda, que cabe ao professor elaborar situações em que, cada vez mais, os procedimentos aritméticos sejam considerados pouco econômicos para resolvê-las, levando os estudantes à necessidade de estabelecer outros processos. É preciso cautela no momento de tratar a passagem acima referida, não deve acontecer como uma ruptura, pois existem estudantes que utilizam, sistematicamente, procedimentos aritméticos sempre que é preciso (PERNAMBUCO, 2012, p.102).

De acordo com o documento de Pernambuco (2012), as técnicas de resolução de equação do primeiro grau não devem ser consideradas como objetos de estudo, em especial no 6º e 7º ano do ensino fundamental. Por outro lado, ao propor situações de resolução de problemas em que as equações sejam ferramentas apropriadas, o docente poderá levar, gradativamente, o estudante à construção e à sistematização dessas técnicas. Além disso, a retomada da ideia de operações inversas, iniciada na etapa anterior, poderá facilitar bastante a construção desse processo.

Os documentos afirmam ainda que a ampliação da ideia de generalização por meio de expressões algébricas vai dar origem a algumas fatorações de expressões algébricas simples. Afirma que, nesse momento, é imprescindível a articulação das propriedades das operações aritméticas com a geometria e as grandezas geométricas (PERNAMBUCO, 2012, p. 102).

Um exemplo do que foi dito está em: “o estudante pode identificar a expressão algébrica $(a + b)^2$ com a que fornece a área de um quadrado de lado $(a + b)$ ”. Ainda sobre o que foi dito, de forma clara, o documento reitera que atividades envolvendo expressões algébricas podem ser vistas como uma ferramenta para a resolução de problemas e não como um objeto de estudo independente.

Para as equações do segundo grau, os documentos apontam que utilizar apenas a aplicação direta da fórmula de Bhaskara, termina provocando nos estudantes dificuldades posteriores. Assim, os alunos acabam tomando o método de resolução de Bhaskara como um único e, quando “esquecem a fórmula”, não são capazes de resolver o problema.

No que concerne a resolução das equações do segundo grau, as recomendações dos documentos aos estudantes passam pela ação didática do professor, que deve incentivar os estudantes a resolverem as equações utilizando a fatoração e o processo de completar quadrados, os quais, além de serem métodos eficazes, podem dar significados à fórmula de Bhaskara, que somente deverá ser apresentada aos estudantes no ensino médio (PERNAMBUCO, 2012, p. 103).

4.5 Equações do Segundo Grau a uma incógnita: do ponto de vista da matemática⁸⁴ e do ensino

O estudo das equações do segundo grau a uma incógnita, do ponto de vista da matemática, fundamenta-se nas equações algébricas, que, por sua vez, fundamentam-se na estrutura algébrica denominada anel dos polinômios.

As equações algébricas na sua forma geral podem ser entendidas como: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$; n , número inteiro e positivo, chama-se grau da equação;

⁸⁴ Embora não tenhamos contemplado no grupo de objetivos específicos, consideramos importante ressaltar que “modelizar, a priori, as organizações matemáticas pontuais que se podem construir em torno dos tipos de tarefas relativos à resolução das equações do segundo grau a uma incógnita” representa um objetivo específico da nossa pesquisa. Destacamos que o resultado desse objetivo permitirá identificar no trabalho didático do professor as organizações matemáticas.

a variável x chama-se incógnita e os números a_0, a_1, \dots, a_n , coeficientes da equação (CARAÇA, 2000). O pesquisador aponta também o que se entende por raiz da equação: é todo número α tal que $a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n \equiv 0$.

Além disso, Caraça (2000) fala que o problema fundamental da teoria das equações algébricas é a determinação das suas raízes, ou seja, a resolução da equação. Isto posto, divide-se em momentos importantes a resolução: a primeira questão, é saber se equação têm raízes? E quantas? A segunda é como determiná-las?. Adiante nos deteremos em apresentar as formas de resolução, ou seja, de determinar suas raízes.

No que diz respeito à aprendizagem das equações, em especial as equações do segundo grau a uma incógnita, ela é considerada pela comunidade científica como um importante tema da álgebra escolar (PONTE, 2004). Por outro lado, esse tema proporciona grandes dificuldades aos alunos, no que diz respeito, ao seu significado, bem como, por parte dos professores na escolha de atividades, na identificação de quais conceitos são realmente necessários aos alunos para dominar o tema e os temas posteriores às equações.

Do ponto de vista da didática, queremos dizer que os elementos de ensino e aprendizagem das equações sofrem grande influência das produções históricas, e estes, através da transposição didática, se encontram à disposição dos alunos e professores a partir dos livros didáticos (saber a ser ensinado).

Os textos encontrados referentes ao ensino da matemática no Brasil, por razões da própria história da matemática, foram também influenciados pela produção matemática Portuguesa (PONTE, 2004; ARAUJO, 2009, p. 58). Em artigo publicado por Ponte (2007) sobre alguns livros de matemática publicados entre o fim do século XIX e o início do século XXI, em que se analisa quatro compêndios do ensino da matemática, apresenta-se uma discussão sobre equações do segundo grau com ênfase na análise da dedução das fórmulas resolutivas e das tarefas propostas aos alunos, os exercícios.

Podemos dizer, guardando as devidas proporções, que as preocupações de Ponte (2007) são as nossas preocupações, pois entendemos que a forma como as equações estão apresentadas nos livros didáticos, tanto as questões formais como as informais, pode influenciar o trabalho didático do professor e, conseqüentemente, a aprendizagem dos alunos.

Por outro lado, corroborando com Ponte (2004) devemos lembrar que todas as construções conceituais são estabelecidas pelas deduções matemáticas, técnicas de resolução, opções metodológicas, entre outras questões e conceitos.

Procuramos, nesse momento, apresentar alguns questionamentos⁸⁵ relacionados às equações do segundo grau que contribuam com a nossa pesquisa: quais técnicas de resolução são privilegiadas no passado e quais conceitos estão envolvidos e de que forma eles aparecem nos dias atuais. Essas questões são importantes, pois sabemos que o trabalho didático do professor é influenciado pelos conceitos históricos.

Entendemos que os compêndios têm uma riqueza maior de informações conceituais para o nosso trabalho, por se tratar de livros que sofreram o mínimo de transformações do saber (transposição didática), ou seja, os conceitos utilizados nesses livros estão próximo da sua gênese; diferentemente do livro utilizado pelo professor, sujeito da pesquisa.

Uma primeira discussão que chamamos atenção é apontada por Cunha (1914) no livro III, no segundo capítulo, intitulado “Equação do segundo grau a uma incógnita”, onde trata no “Resolução de Equação”. Esse autor define uma equação do segundo grau a uma incógnita (§§, 246-247),

“quando é 2 o mais elevado expoente da incógnita, não estando este em denominador, nem debaixo do sinal $\sqrt{\quad}$ é manifesto que uma tal equação só pode conter três espécies de termos: termos em que entre a incógnita elevada ao quadrado, termos envolvam a incógnita no primeiro grau, e termos conhecidos. Representando a incógnita por x^2 , fazendo passar para o primeiro termos todos os termos, e somando todos os que contém x^2 , todos os que contém x , e todos os conhecidos (...) (CUNHA, 1914, p. 207).

Para Ponte (2007), a época que surgiu este manual em Portugal foi no final da monarquia e várias foram as edições desse livro e destinava-se a alunos dos 4º e 5º anos do liceu⁸⁶ (as equações do segundo grau surgem no 5º ano).

Para Trajano (1943), equação do segundo grau é uma equação que tem na quantidade desconhecida no maior grau, elevada ao quadrado, isto é, com o expoente 2. As equações podem ser incompletas ou completas. Sendo as completas aquelas

⁸⁵ O nosso intuito não é analisar os livros e fazer comparações sobre o tema equação do segundo grau. No entanto, procuramos contribuições nos referidos livros.

⁸⁶ Atuais 8º e 9º anos de escolaridade.

que, reduzidos os termos semelhantes, contêm termos do 2º grau, do 1ª grau e do grau zero (termo independente) em relação à incógnita.

A definição anterior é semelhante a outras definições que encontramos em Calado (1956), Menezes (1969) e Cunha (1914). As diferenças são maiores na opção dos conceitos envolvidos na resolução das equações completas e incompletas.

Para Cunha (1914) a equação poderá sempre ser reduzida a forma $ax^2 + bx + c = 0$ em que a , b e c são quantidades conhecidas. Para o autor, após ser reduzida a esta forma, poderá receber outra simplificação e chegar à forma equivalente $x^2 + px + q = 0$, essa discussão foi dedicada aos §246 e §247.

Esta forma é considerada para Calado (1956) como forma canônica. Nesse sentido, estabelece que uma equação do segundo grau a uma incógnita é aquela que pode ser reduzida a esta forma, e que a , b e c são números reais quaisquer, contanto que $a \neq 0$.

Nesse contexto, Cunha (1914) alerta para a conveniência em deduzir a fórmula $ax^2 + bx + c = 0$ para que se permita encontrar as raízes da equação (§ 250).

Quadro 3: Dedução da fórmula geral da equação do segundo grau

$ax^2 + bx + c = 0$
$a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$
$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Fonte: (CUNHA, 1914)

Segundo Menezes (1969), a natureza dos sinais das raízes da equação do segundo grau, depende do radicando $b^2 - 4ac$, denominado discriminante da equação e designado por Δ (OLHAR COMO SE REFERE EM MENEZES); e os sinais das duas raízes dependem dos sinais dos coeficientes b e c . Quando $\Delta > 0$ (duas raízes reais e desiguais), quando $\Delta = 0$ (nulo, duas raízes e iguais) e quando $\Delta < 0$ (não temos raízes reais).

A equação do segundo grau a uma incógnita, pode apresentar-se como incompleta quando falta o termo do primeiro grau bx , ou quando falta o termo independente de x . Assim, supondo a falta do termo do primeiro grau, a equação passa a ter a forma $ax^2 + c = 0$ ($b = 0$). Por outro lado, se a equação não tem o termo conhecido c , então a forma será $ax^2 + bx = 0$ ($c = 0$). Segue as deduções segundo Cunha (1914):

Quadro 4: Dedução das fórmulas incompletas

$ax^2 + c = 0$	$ax^2 + bx = 0$
<p>Passando (transpondo) c para segundo membro e dividindo por a resulta:</p> $x^2 = -\frac{c}{a}$	<p>Colocando x em evidencia, temos:</p> $x(ax + b) = 0$
<p>Extraindo a raiz quadrada:</p> $x^2 = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$	<p>Para o produto de dois fatores seja zero, é suficiente que um dos fatores seja nulo; logo a equação é satisfeito pelo fator de x que anulam o x, ou o fator $ax + b$.</p> $x = 0, ax + b = 0$
<p>As duas raízes são:</p> $+ \sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ e } - \sqrt{-\frac{c}{a}}$	<p>Resolvendo a equação $ax + b = 0$, temos:</p> <p>Transpondo b para segundo membro</p> $ax = -b$ <p>dividindo os membros por a:</p> $x = -\frac{b}{a}$
<p>Observação:</p> <p>Se a quantidade de $-\frac{c}{a}$ for positiva, o que depende dos sinais de a e c, as raízes serão reais; se a quantidade for negativa, sucede que a e c tem sinais iguais, as duas raízes serão imaginárias.</p>	<p>Logo, são raízes da equação:</p> $x = 0, x = -\frac{b}{a}$

Fonte: (CUNHA, 1914)

Nesse mesmo contexto, são semelhantes em Calado (1956) os casos apresentados acima por Cunha (1914). Difere em alguns aspectos a sua forma de aplicar a dedução. Por outro lado, Calado (1956) apresenta o 3º caso, de forma mais estruturada, quando $ax^2 = 0$ ($b = 0$ e $c = 0$); Na resolução, divide-se ambos os seus membros pelo coeficiente a , obtendo-se desse modo a equação $x^2 = 0$; donde resulta

$x = 0$. “A equação proposta admite então uma raiz nula. Chama atenção que uma equação do 2º grau admite sempre duas raízes. Se, como no caso presente, se encontra uma raiz distinta, diz-se que a equação admite duas raízes iguais” (CALADO, 1956).

Destacamos também que a autora Menezes (1969), de forma semelhante aos autores que estamos apresentando, discute o tema equação do segundo grau a uma incógnita, de forma detalhada com enfoque na resolução (§264 – §275).

Trajano (1943, p. 153) trata de forma mais direta as questões teóricas sobre as equações. No entanto, as discussões de resolução são mais detalhadas. Na visão do autor, é importante anunciar os conceitos envolvidos, tanto nas equações completas, como nas incompletas.

Logo, na resolução das equações completas, Trajano (1943) utiliza de forma detalhada o método de resolução “completar quadrados”. Apresentamos um problema e recortes das explicações do autor, como forma de exemplo. “Quais as raízes da equação $x^2 + 8x = 33$?”.

Quadro 5: Método de resolução completar quadrados

Equação	$x^2 + 8x = 33$
Adiciona 16 no primeiro e segundo membro para não alterar a igualdade;	$x^2 + 8x + 16 = 33 + 16$ $x^2 + 8x + 16 = 49$
Extraíndo a raiz quadrada em ambos os membros, achamos $x + 4$ e $+ 7$ ou $- 7$;	$x + 4 = \pm 7$
O valor de x aparece com a forma de; Isto quer dizer que, se o número 7 for tomado, no sentido positivo, o valor de x será $- 4 + 7 = 3$; no sentido negativo será $- 4 - 7 = - 11$	$x = - 4 \pm 7$
Respostas da equação	$x' = 3$ ou $x'' = - 11$

Fonte: Trajano (1943)

O autor indica ainda o caminho para testar as respostas, substituindo na equação o valor das raízes e verificando através da igualdade se o valor da raiz satisfaz a equação (TRAJANO, 1943).

Por outro lado, vale destacar que, quando a equação não se encontra na forma mais simples, a canônica, são necessários procedimentos para reduzi-la. Estes, passam por algumas operações semelhantes às equações do primeiro grau. É

necessário, em muitas situações, tornar os termos fracionados da equação em valores inteiros, simplificar, transpor os termos, adicionar, reduzir ao menor número em que a equação deve ser expressa.

Para Calado (1956), “qualquer equação do 2º grau é redutível à forma canônica”. Indica também que toda equação desta forma pode se transformar numa equação equivalente em que um dos seus membros é um quadrado perfeito e o outro é independente da incógnita. O autor apresenta três casos particulares de resolução:

1º caso: o 1º membro da equação é o desenvolvimento do quadrado num binômio e o 2º membro é zero, exemplo: $x^2 + 2x + 1 = 0$;

2º caso: o 1º membro da equação é o desenvolvimento do quadrado num binômio e o 2º é um número positivo, exemplo: $x^2 - 4x + 4 = 9$;

3º caso geral: se a equação proposta não se enquadra em nenhuma das formas particulares anteriormente consideradas, é possível reduzi-la a uma dessas formas.

Com intuito de tornar mais claro os casos apresentados, propomos observar as resoluções seguintes (CALADO, 1956).

Quadro 6: Casos particulares de resolução

1º Caso: equação $x^2 - 2x + 1 = 0$	2º Caso: $x^2 - 4x + 4 = 9$
O 1º membro da equação é um desenvolvimento do quadrado binômio $x - 1$.	O 1º membro é o desenvolvimento do quadrado $(x - 2)^2 = 9$
Portanto, a equação é equivalente a $(x - 1)^2 = 0$	Pode ser escrito na forma: $(x - 2)^2 - 9 = 0$
Pode ser escrita na forma: $(x - 1)(x - 1) = 0$, onde, $x = 1$ e $x = 1$	O 1º membro é uma diferença de quadrados, podemos escrever na seguinte forma: $(x - 2 + 3)(x - 2 - 3) = 0$
A equação proposta admite a raiz 1, ou seja, duas raízes iguais. $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$	Valores de x que verificam essa equação são os que anulam os fatores do seu 1º membro: $x - 2 + 3 = 0$, donde, $x = -1$ Ou, a condição, $x - 2 - 3 = 0$, donde, $x = 5$ Raízes: $x_1 = -1$ e $x_2 = 5$
3º Caso geral ⁸⁷ : equação $4x^2 + 8x - 5 = 0$	

⁸⁷ Calado (1956) considera, em primeiro lugar, a identidade $x^2 + 2ax + a^2 \equiv (x + a)^2$. Esta identidade mostra claramente que, quando se conhecem apenas os dois primeiros termos x^2 e $2ax$ do seu 1º membro, é fácil determinar o terceiro termo a^2 . Este termo é precisamente o quadrado de metade do coeficiente de x .

Consideremos a identidade $x^2 + 2ax + a^2 \equiv (x + a)^2$
Dividir ambos os membros da equação por 4 – coeficiente do termo em x^2 : Temos, $x^2 + 2x - \frac{5}{4} = 0$
Transpondo para o segundo membro o termo independente de x , teremos: $x^2 + 2x = \frac{5}{4}$
Transformando o 1º membro no quadrado de um binômio; para isso, basta adicionar aos dois membros da equação o número 1 – quadrado da metade do coeficiente de x : $x^2 + 2x + 1 = \frac{5}{4} + 1, \text{ ou, } x^2 + 2x + 1 = \frac{9}{4}$
Resolve-se, utilizando o caso particular 2º, obtemos: $(x + 1)^2 = \frac{9}{4}$ ou $(x + 1)^2 - (\frac{3}{2})^2 = 0$ E portanto: $(x + 1 + \frac{3}{2})(x + 1 - \frac{3}{2}) = 0$ Donde resulta: $x + 1 + \frac{3}{2} = 0$ e por isso $x = -\frac{5}{2}$ ou então, $x + 1 - \frac{3}{2} = 0$ e por isso $x = \frac{1}{2}$ Solução da equação: $x_1 = -\frac{5}{2}$ ou $x_2 = \frac{1}{2}$

Fonte: Calado (1956)

No que diz respeito à resolução das equações incompletas, tanto na forma $ax^2 + c = 0$, onde $a \neq 0$ e $b = 0$, ou na forma $ax^2 + bx = 0$, onde $a \neq 0$ e $c = 0$, Trajano (1956) apresenta algumas resoluções. A primeira forma propõe o seguinte exemplo: “Qual é o valor de x na equação $5x^2 - 18 = 3x^2 + 14$?”, observemos a resolução no quadro a seguir.

Quadro 7: Resolução de equação incompleta

Equação	$5x^2 - 18 = 3x^2 + 14$
Transpondo os termos	$5x^2 - 3x^2 = 14 + 18$
Reduzindo	$2x^2 = 32$
Dividindo os membros por dois	$x^2 = 16$
Extraindo as raízes	$X \pm 4$

Fonte: Trajano (1956)

Esse processo de resolução, em alguns momentos, segue o caminho da resolução das equações do primeiro grau. Trajano (1943) apresenta outras variações do problema, como, por exemplo, achar o valor de x na equação do tipo $ax^2 + b = cx^2 + d$. Vale destacar que o autor propõe reduzir a equação $ax^2 = c$, da mesma forma, o segundo tipo de equação incompleta, ao tipo $ax^2 = bx$.

Na segunda forma, temos como exemplo o problema, “achar o valor de x na equação $7x^2 + 5x = 8x + 9x^2$ ”.

A resolução desse exemplo utiliza alguns argumentos do exemplo anterior. No entanto, outros conceitos são necessários para concluir a resolução, como colocar em evidência valores, com intuito de dividir e reduzir a equação.

Segundo Trajano (1943), em toda equação incompleta na forma $ax^2 = bx$ existe duas raízes, sendo que uma delas é sempre zero; em segundo lugar que a outra raiz é igual a b/a , isto é, ao coeficiente de x dividido pelo coeficiente de x^2 .

Menezes (1969), no que diz respeito à resolução das equações incompletas, (1) $ax^2 + bx = 0$, (2) $ax^2 + c = 0$ e (3) $ax^2 = 0$, aponta algumas regras que auxiliam a resolução (§282, §283 e §284).

Quadro 8: Método de resolução das equações incompletas

(1) § 282	(2) § 283	(3) § 284
Reduzir a equação a forma $ax^2 + bx = 0$, se necessário.	Reduzir a equação a forma $ax^2 + c = 0$, se necessário.	Reduzir a equação a forma $ax^2 = 0$, se necessário.
Fatorar o seu primeiro membro, isto é, decompor em um produto de dois fatores lineares ou do 1º grau, $x(ax + b) = 0$;	Transpor c para o segundo membro e dividir ambos os membros por a .	Dividir ambos os membros por a , que sempre deve ser diferente de zero.
Igualar a zero cada fator linear, isto é: $x = 0$ ou $ax + b = 0$ Obter o valor de x de cada equação do 1º grau, para obter as raízes x_1 e x_2 .	Extrair a raiz quadrada de ambos os membros da última igualdade, atribuindo-se no valor dessa raiz o duplo sinal \pm e obtendo para x , dois valores simétricos que são as raízes x_1 e x_2 .	Fatorar o primeiro membro; igualar cada fator a zero, a fim de tornar evidentes as duas raízes da equação proposta do 2º grau.

Fonte: Menezes (1956)

A resolução da equação completa em Menezes (1956) solicita reduzir a equação à forma geral, se for necessário. Após a redução, apresenta de forma direta a fórmula resolutive, indicando os valores dos coeficientes a , b , c , na fórmula para obter as duas raízes x_1 e x_2 .

Procuramos apresentar, a partir do contexto histórico, uma discussão sobre as resoluções de equação do segundo grau a uma incógnita. Temos vários elementos relacionados à resolução das equações completas e incompletas. Na sequência, procuramos relacionar esses elementos em termos de organização matemática e didáticas.

4.6 Organização Matemática a Priori da Equação do Segundo Grau a uma Incógnita

Nesse momento, procuramos apresentar a Organização Matemática a priori da equação do segundo grau a uma incógnita. Para isso, utilizamos os elementos matemáticos discutidos no tópico anterior, aqueles que foram destaques nos livros de Cunha (1914), Trajano (1943), Calado (1956) e Menezes (1969), bem como as pesquisas de Ponte (2007), Bessa de Menezes (2010), entre outras que encontramos na literatura.

A escolha por esses compêndios atende à necessidade para caracterizar as organizações matemáticas da equação do segundo grau a uma incógnita. Além disso, entende-se que os saberes à disposição, nesses livros, sofreram uma quantidade menor de transformações, estão mais próximos da sua gênese, mostram a realidade matemática com uma riqueza maior de detalhes. Assim, deixamos de lado o livro didático, adotado pela escola, para essa função.

A Organização Matemática, como já discutido no segundo capítulo, diz respeito a toda atividade matemática que é construída na sala de aula, e esta, dialeticamente, se constitui a partir da organização didática. Devemos lembrar que toda OM é construída em torno de quatro componentes: tipos de tarefas (T), a matemática a ser realizada, de técnicas (τ) matemáticas explicadas, de tecnologias (θ) justificadas e de teorias (Θ) que são, em tese, os objetos matemáticos a serem estudados ou construídos em momentos de estudo.

4.6.1 Tipos de Tarefa

Na leitura feita nos livros (compêndios), citados anteriormente, observamos que tanto Cunha (1914, p. 207) como Trajano (1943, p. 153) entendem que existe uma

equação do segundo grau quando temos o valor 2 como o mais elevado expoente da incógnita, e este não deve se encontrar em denominador e nem debaixo do sinal de $\sqrt{\quad}$. Os autores apontam também que a equação deve conter três espécies de termos: termos em incógnita elevado ao quadrado, termos em incógnita no primeiro grau e termos conhecidos. Após as devidas operações, a equação poderá reduzir-se à forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Para Calado (1956, p.389), “*chama-se equação do 2º grau a uma incógnita toda equação inteira que se pode reduzir a forma (canônica) $ax^2 + bx + c = 0$, em que a , b , e c são números reais (os números inteiros, fracionários e irracionais têm o nome genérico de números reais) quaisquer, contanto que $a \neq 0$ ”.*

As equações do segundo grau são apresentadas nos livros (compêndios) citados, tanto na forma completa, como nas incompletas. Em termos de resolução, as informações contidas nos livros e documentos encontrados na literatura, bem como através da nossa prática como professor de matemática, permitem-nos classificar/categorizar as praxeologias matemáticas pontuais em quatro tipos de tarefa:

- T₁: Resolver a equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$;
- T₂: Resolver a equação do tipo $ax^2 + c = 0$;
- T₃: Resolver a equação do tipo $ax^2 + bx = 0$;
- T₄: Resolver a equação do tipo $ax^2 = 0$.

Vale destacar que nem sempre as equações do segundo grau vão aparecer na forma apresentada acima, podem surgir em diferentes formas. Queremos dizer que existem formas que precedem esse tipo de tarefa, e, estas, consideramos como subtipos⁸⁸ de tarefas. Entendemos que os subtipos de tarefas são formas que ainda não foram reduzidas à forma canônica apresentada anteriormente.

O termo subtipos de tarefas⁸⁹ é apresentado por Chevallard (1988; 1999) muito superficialmente e em apenas dois artigos. Porém, nas pesquisas de Araújo (2009) e

⁸⁸ *Sub* como prefixo em latim significa “por baixo”. *Sub* pode ser entendido também como um elemento designativo de inferioridade, substituição, aproximação. Informação contida, in Dicionário Priberam da Língua Portuguesa [em linha], 2008-2013, <http://www.priberam.pt/dlpo/sub> [consultado em 30-06-2015].

⁸⁹ Não encontramos informações suficientes por parte dos artigos de Chevallard que permitissem construir um entendimento sobre a categoria subtipos de tarefas. Dessa forma, analisamos os trabalhos de Araújo (2009) e Bessa de Menezes (2010) para auxiliar a nossa tomada de decisão sobre o conceito de subtipo de tarefas.

Bessa de Menezes (2010), essa categoria é utilizada com frequência. No entanto, divergimos com os pesquisadores, em especial com Bessa de Menezes (2010), no momento de identificar essa categoria, como apresentamos no parágrafo anterior. Seguimos as orientações do dicionário da língua portuguesa Priberam (2013), em que entende “*sub* como prefixo em latim significa “por baixo”. Sub pode ser entendido também como um elemento designativo de inferioridade, substituição, aproximação”.

Para Cunha (1914) e Menezes (1969) existem situações em que os elementos da equação devem ser desenvolvidos, sofrer transposições, serem reduzidas até chegar a uma forma limite da equação, a forma canônica.

Podemos dizer, então, que os tipos de tarefas T_{11} , T_{12} e T_{13} , apresentados abaixo, ao sofrerem as etapas anteriores se transformam em T_1 ($ax^2 + bx + c = 0$). Da mesma forma, T_{21} em T_2 ($ax^2 + c = 0$), T_{31} em T_3 ($ax^2 + bx = 0$) e assim por diante, como outras variações de subtipo de tarefas que surgirem a partir de um processo de resolução para se transformar num dos quatro tipos de tarefas.

- T_{11} : Resolver a equação do tipo $ax^2 + bx + c = d$;
- T_{12} : Resolver a equação do tipo $(ax + c)^2 = 0$;
- T_{13} : Resolver a equação do tipo $(x + a).(x + b) = 0$;
- T_{21} : Resolver a equação do tipo $(x + a).(x + b) = cx + d$;
- T_{31} : Resolver a equação do tipo $(x + a).(x + b) = c$.

No tópico posterior apresentaremos as técnicas utilizadas referentes às tarefas discutidas anteriormente. Reforçamos que toda nossa discussão baseia-se em dados retirados na maior parte dos livros de Cunha (1914), Trajano (1943), Calado (1956) e Menezes (1969) com intuito de fomentar nossa discussão na análise dos dados da pesquisa.

Os estudos apresentados nesse tópico nos permitem, ainda, apontar no próximo tópico as técnicas matemáticas a serem mobilizadas no processo de resolução de equação do segundo grau a uma incógnita.

4.6.2 As Técnicas

Para resolver um tipo de tarefa ou subtipo de tarefa, é necessário, no mínimo, uma técnica de base. E esta diz respeito à maneira de fazer ou realizar as tarefas $t \in T$. Para Chevallard (1999, p. 83), estabelece-se, então, um bloco designado $[T/\tau]$, que se denomina um bloco prático-técnico, que pode ser identificado como saber-fazer. Queremos dizer que em um determinado tipo de tarefa T , existe uma determinada maneira de realizar esta tarefa, chamada de técnica τ .

Da mesma forma que apontamos as tarefas a partir dos estudos, procuramos apresentar as técnicas relativas aos tipos de tarefas que foram selecionados:

Quadro 9: Técnica principal e auxiliar dos tipos de tarefas

$T_1: ax^2 + bx + c = 0$	
τ Principal	<ul style="list-style-type: none"> • τ_{CQ}: Completar quadrados; • τ_{FB}: Fórmula de Bháskara.
τ Auxiliar	<ul style="list-style-type: none"> • τ_{DRE}: Desenvolver ou reduzir expressões; • τ_{TTC}: Transpondo termos ou coeficientes, invertendo operações.
$T_2: ax^2 + c = 0$	
τ Principal	<ul style="list-style-type: none"> • τ_{TTC}: Transpondo termos ou coeficientes, invertendo operações.
τ Auxiliar	<ul style="list-style-type: none"> • τ_{DRE}: Desenvolver ou reduzir expressões.
$T_3: ax^2 + bx = 0$	
τ Principal	<ul style="list-style-type: none"> • τ_{FE}: Fatorar expressões, colocando em evidencia o fator comum.
τ Auxiliar	<ul style="list-style-type: none"> • τ_{ITZ}: Igualando os termos do produto a zero; • τ_{TTC}: Transpondo termos ou coeficientes, invertendo operações.
$T_4: ax^2 = 0$	
τ Principal	<ul style="list-style-type: none"> • τ_{DRE}: Desenvolver ou reduzir expressões.

τ Auxiliar	<ul style="list-style-type: none"> • τ_{FE}: Fatorar expressões, colocando em evidencia o fator comum.
-----------------	---

Fonte: Elaborado pelo autor da Tese

Dependendo da forma que o subtipo de tarefa relacionada à equação do segundo grau se encontra, surge a necessidade de mobilizar outras técnicas, que consideramos como técnica auxiliar, ou seja, as técnicas auxiliares são aquelas desenvolvidas pelo professor para chegar à forma canônica da equação do segundo grau, observe a seguir:

Quadro 10: Técnica Auxiliar e Principal dos Subtipos de Tarefa

$T_{11}: ax^2 + bx + c = d$	
τ Auxiliar	<ul style="list-style-type: none"> • τ_{DRE}: Desenvolver ou reduzir expressões; • τ_{TTC}: Transpondo termos ou coeficientes, invertendo operações.
τ Principal	<ul style="list-style-type: none"> • τ_{CQ}: Completar quadrados; • τ_{FB}: Fórmula de Bhaskara.
$T_{12}: (ax + c)^2 = 0$	
τ Auxiliar	<ul style="list-style-type: none"> • τ_{TTC}: Transpondo termos ou coeficientes, invertendo operações.
τ Principal	<ul style="list-style-type: none"> • τ_{ERQ}: Extrair raiz quadrada da equação.
$T_{13}: (x + a).(x + b) = 0$	
τ Auxiliar	<ul style="list-style-type: none"> • τ_{TTC}: Transpondo termos ou coeficientes, invertendo operações.
τ Principal	<ul style="list-style-type: none"> • τ_{PN}: Produto nulo, igualando os fatores a zero.
$T_{21}: (x + a).(x + b) = cx + d$	
τ Auxiliar	<ul style="list-style-type: none"> • τ_{FE}: Fatorar expressões, colocando em evidencia o fator comum; • τ_{DRE}: Desenvolver ou reduzir expressões; • τ_{TTC}: Transpondo termos ou coeficientes, invertendo operações.

τ Principal	<ul style="list-style-type: none"> • τ_{DRE}: Desenvolver ou reduzir expressões.
$T_{31}: (x + a).(x + b) = c$	
τ Auxiliar	<ul style="list-style-type: none"> • τ_{DRE}: Desenvolver ou reduzir expressões; • τ_{PN}: Produto nulo, igualando os fatores a zero; • τ_{TTC}: Transpondo termos ou coeficientes, invertendo operações.
τ Principal	<ul style="list-style-type: none"> • τ_{FE}: Fatorar expressões, colocando em evidencia o fator comum.

Fonte: Elaborado pelo autor da Tese

Na tabela acima, construímos uma estrutura dos subtipos de tarefas acompanhados das técnicas auxiliares que consideramos as mais importantes nas equações do segundo grau. No entanto, entendemos que existem outros subtipos de tarefas e, conseqüentemente, que podem solicitar outras técnicas auxiliares que não foram contemplados no quadro acima.

Na sequência, procuramos apontar as tecnologias que justificam as técnicas e as tarefas que foram apresentadas anteriormente.

4.6.3 As Tecnologias

Retornando rapidamente ao conceito de tecnologia, podemos dizer que a tecnologia (θ) assegura que a técnica permita o bom cumprimento da tarefa T. Ou seja, ela aparece para *descrever e justificar* a técnica utilizada como uma *maneira de cumprir* corretamente uma tarefa (CHEVALLARD, 2007).

Lembramos que, em muitos casos, pode acontecer de alguns elementos tecnológicos estarem *integrados à técnica*. Entendemos que toda tecnologia tem a necessidade de uma justificativa que chamamos teoria da técnica.

Utilizando a mesma dinâmica dos itens anteriores, apontamos as tecnologias matemáticas que justificam as técnicas apresentadas nos dois últimos quadros. O objeto dessa informação é produzir elementos teóricos que justifiquem a resolução das equações do segundo grau. Observemos a tabela:

Quadro 11: Tecnologias dos tipos de tarefas

Equação na forma completa $ax^2 + bx + c = 0$:
<ul style="list-style-type: none"> • Θ_{POI}: Propriedades das operações inversas em IR (conjunto dos números reais) ou leis da transposição de termos; • Θ_{PR}: Propriedade da radiciação.
Equação na forma incompleta $ax^2 + c = 0$:
<ul style="list-style-type: none"> • Θ_{PR}: Propriedade da radiciação; • Θ_{POI}: Propriedades das operações inversas em IR (conjunto dos números reais) ou leis da transposição de termos.
Equação incompleta na forma $ax^2 + bx = 0$:
<ul style="list-style-type: none"> • Θ_{PDM}: Propriedade distributiva da multiplicação; • Θ_{PPN}: Propriedade do produto nulo; • Θ_{POI}: Propriedades das operações inversas em IR (conjunto dos números reais) ou leis da transposição de termos.
Equação incompleta na forma $ax^2 = 0$:
<ul style="list-style-type: none"> • Θ_{PDM}: Propriedade distributiva da multiplicação; • Θ_{PPN}: Propriedade do produto nulo.

Fonte: Elaborado pelo autor da Tese

Vale destacar que as tecnologias apresentadas anteriormente, no que concerne às equações do segundo grau, consistem de propriedades (ou axiomas) apoiados nas equações algébricas, que, por sua vez, pertencem à teoria dos *anéis dos polinômios* (Θ_{AP}). Por outro lado, as propriedades das operações inversas e as propriedades gerais das igualdades pertencem ao corpo dos reais (Θ_{CR}).

Chevallard (1999) aponta ainda que devemos entender, com relação às Teorias (Θ), que sua função é justificar e esclarecer a tecnologia e pode ser assumida por uma instituição ou uma pessoa. No entanto, uma grande quantidade de professores, ao assumir essa atribuição, está seguindo pelo caminho da valorização da abstração, tornando a teoria quase imperceptível aos alunos.

4.6.4 Síntese das Organizações Matemáticas a Priori

Procuramos sintetizar, no quadro abaixo, as organizações matemáticas pontuais, referentes aos tipos de tarefas sobre as equações do segundo grau a uma incógnita.

Quadro 12: Síntese das organizações matemáticas pontuais das equações do segundo grau a uma incógnita

Tipo de Tarefas	Técnicas		Tecnologias
	Principal	Auxiliar	
T_1	τ_{CQ} / τ_{FB}	τ_{DRE} / τ_{TTC}	$\theta_{POI} / \theta_{PR}$
T_2	τ_{TTC}	τ_{DRE}	$\theta_{PR} / \theta_{POI}$
T_3	τ_{FE}	τ_{ITZ} / τ_{TTC}	$\theta_{PDM} / \theta_{PPN} / \theta_{POI}$
T_4	τ_{DRE}	τ_{FE}	$\theta_{PDM} / \theta_{PPN}$

Fonte: Elaborado pelo autor da Tese

Esse quadro representa uma estrutura que deve seguir para realizar um tipo de tarefa (T_1, T_2, \dots, T_4), não significa dizer que em situações didáticas represente um único caminho, segundo uma ordem de execução. É possível utilizar outras técnicas e em ordens diferentes para concluir um tipo de tarefa.

Até o momento procuramos contemplar a fundamentação teórica da nossa tese. Pretendemos adiante, apresentar uma descrição analítica dos livros didáticos utilizado pelos sujeitos da pesquisa em sala de aula.

4.7 Descrição Analítica do Livro Didático Utilizado por Davi

Nesse momento procuramos apresentar uma breve descrição e análise do livro didático que encontramos à disposição do professor “Davi⁹⁰” e seus alunos na sala de aula, campo de pesquisa. A descrição está relacionado ao saber: equação do segundo grau a uma incógnita, especialmente, nas resoluções das equações completas e

⁹⁰ Davi é um pseudônimo dado a um dos sujeitos da nossa pesquisa. Na metodológica detalhamos mais essas informações.

incompletas. Entendemos que, embora o professor não tenha recorrido ao livro didático na sala de aula, no momento da filmagem, ele é considerado um “texto de saber”, e serve de referência para o professor como uma instituição que representa os saberes a serem ensinados (CHEVALLARD, 1991).

Vale destacar que o professor relatou ao pesquisador, antes e no momento da filmagem em sala de aula, que as atividades fotocopiadas e entregue aos alunos, pertenciam a resumos retirados do livro didático que estavam de posse do aluno.

A necessidade em descrever os conteúdos do livro didático relacionados à equação do segundo grau, diz respeito, à possibilidade em responder a questões do tipo qual a relação entre o CD o conceito de conformidade do professor em relação a instituição livro didático.

Apresentamos adiante uma análise descritiva do livro didático “Praticando a Matemática” de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos⁹¹ do 9º ano do ensino fundamental (antiga 8º série). O livro apresenta, apenas, um capítulo relacionado a equação do segundo grau. No recorte abaixo apresentamos o sumário do livro, com os tópicos relacionados a esse conteúdo.

Figura 11: Livro didático do professor Davi - página 05

Unidade 2	
Equações do 2º grau	
1. Equações.....	41
2. Resolvendo equações do 2º grau	43
3. Forma geral de uma equação do 2º grau	48
4. Trinômios quadrados perfeitos e equações do 2º grau	49
5. Fórmula geral de resolução da equação do 2º grau	54
6. Resolvendo problemas.....	58
7. Soma e produto das raízes de uma equação do 2º grau.....	62
8. Equações fracionárias que recaem em equação do 2º grau	68
9. Equações biquadradas	71
10. Equações irracionais.....	72

Fonte: Andrini (2012)

⁹¹ Livro selecionado no PNLD – programa nacional do livro didático para os 2014, 2015 e 2016. Optamos a partir desse momento, na análise, fazer referência apenas à página relacionada ao capítulo analisado.

O autor localiza na segunda unidade o conteúdo “Equação do 2º grau” e no primeiro tópico, começa destacando o tema “Equações”. Os autores iniciam fazendo uma relação entre as equações e a resolução de problemas, no sentido da utilidade das equações para resolver problemas do cotidiano. Nesse sentido apresentam um problema, que utiliza a figura de uma loja, como podemos observar a seguir (p. 41):

“um kit-presente com duas bermudas e três camisetas custa o mesmo que um kit-presente com uma bermuda e duas camisas. Qual é o preço de uma bermuda? Com um colega, tentem resolver o problema antes de prosseguir com a leitura. A seguir, leia a resolução que apresentamos. Observe que ela utiliza a álgebra.” (p.41).

Na sequência, os autores indicam que no problema o preço da bermuda deve ser representado por x e esse, representa o valor desconhecido (p. 41). Em outra situação, podemos observar uma preocupação no tratamento da linguagem natural e algébrica. Como veremos o recorte a seguir (p. 41):

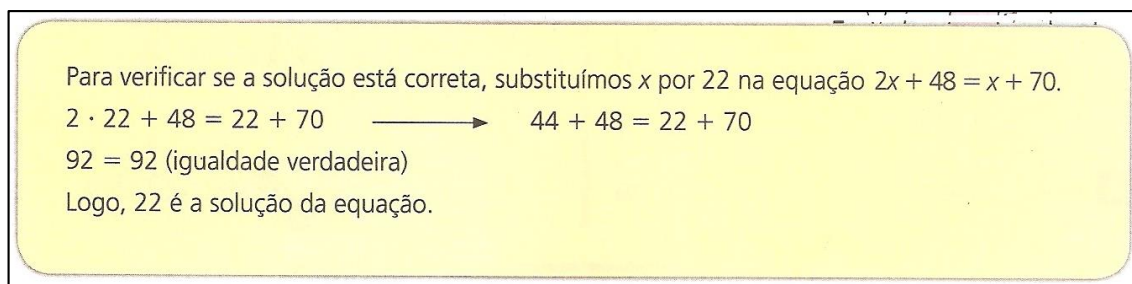
Figura 12: Livro didático do professor Davi - página 41

<p>Representaremos o preço da bermuda por x. Duas bermudas e três camisetas custam $2x + 48$. Uma bermuda e duas camisas custam $x + 70$. Como os preços dos kits são iguais, temos que:</p> $2x + 48 = x + 70$ <p>Subtraindo x de ambos os membros da equação:</p> $2x + 48 - x = x + 70 - x$ $x + 48 = 70$ $x = 70 - 48$ $x = 22$ <p>A bermuda custa R\$ 22,00.</p>
--

Fonte: Andrini (2012)

O livro didático ainda propõe, no recorte abaixo, uma recomendação no término da resolução do problema das bermudas, que diz respeito à necessidade de verificar se a resposta é verdadeira (p.41):

Figura 13: Livro didático do professor Davi - página 41



Fonte: Andrini (2012)

No sequência o autor apresenta uma discussão referente ao “grau de uma equação” (p. 42). Procura fazer uma relação entre vários tipos de equação: 1º grau, 2º e 3º grau, entre outros.

“A equação $2x + 48 = x + 70$, que acabamos de resolver, é uma equação do 1º grau, pois o maior expoente de x é 1”.

As equações podem ser classificadas de acordo com o valor do maior expoente da incógnita. Nas equações do 2º grau, o valor do maior expoente da incógnita é 2.

No segundo tópico: “Resolvendo equações do segundo grau”, a primeira atividade proposta pelo autor, diz respeito, a um problema em linguagem natural, sobre equação do segundo grau incompleta e mais adiante aponta sua transformação em linguagem algébrica (p. 43). Como podemos observar no recorte a seguir:

Figura 14: Livro didático do professor Davi - página 43



Fonte: Andrini (2012)


Após apresentar o problema, sugere aos alunos chamarem o número desconhecido de x e escrever a equação, que destacamos abaixo (p. 43):

Figura 15: Livro didático do professor Davi - página 43

$x^2 = 9$

Há dois números que elevados ao quadrado resultam em nove: 3 e -3 .
Indicamos assim:
 $x = \pm\sqrt{9}$
 $x = \pm 3$
3 e -3 são as **soluções** da equação do 2º grau $x^2 = 9$.

Essa equação tem duas soluções! Isso não acontecia nas equações do 1º grau!



Usando outra nomenclatura bastante comum: 3 e -3 são as **raízes** dessa equação.

Fonte: Andrini (2012)

Observamos, ainda, que o livro aponta distinções entre as equações do primeiro grau com as equações do segundo grau: “*essa equação tem duas soluções! Isso não acontece nas equações do 1º grau!*”. Ainda propõem aos alunos pensarem e responder sobre a seguinte questão: “*resolver a equação $x^2 = 49$ é a mesma coisa que calcular $\sqrt{49}$? Explique sua resposta.*” (p. 43)

O autor do livro didático apresenta um problema para discutir o conceito de número real, como podemos observar abaixo (p. 44):

Figura 16: Livro didático do professor Davi - página 44

3. Existe um número real que elevado ao quadrado e somado a 16 resulta em zero?
Não há número real nessas condições. Veja por que:
Número desconhecido: x .
Elevamos x ao quadrado, somamos 16 e igualamos a zero, obtendo uma equação:

$$x^2 + 16 = 0$$

Fonte: Andrini (2012)

Ainda nesse contexto, chama atenção: para que tenhamos $x^2 + 16 = 0$ é preciso que $x^2 = -16$, mas que não existe número real que elevado ao quadrado resulte em um número negativo.

Assim, a equação $x^2 + 16 = 0$ não tem solução, ou não tem raízes, no conjunto dos números reais, \mathbb{R} .

Mais adiante, o autor apresenta um exemplo relacionando duas áreas de figuras planas (p. 46). Nesse exemplo o autor discute o conceito de equivalência e transformação da linguagem natural para linguagem algébrica, como podem ser observado no recorte abaixo. Além disso, utiliza a fatoração para resolver a atividade e destaca ao aluno a lei do anulamento do produto.

Figura 17: Livro didático do professor Davi – página 46

5. Os retângulos ilustrados abaixo têm a mesma área.
Com essa informação, podemos escrever e resolver uma equação e determinar as medidas dos lados de cada retângulo. Acompanhe.

• Área do retângulo (I)
 $A_I = 2x(x + 2) = 2x^2 + 4x$

• Área do retângulo (II)
 $A_{II} = x(x + 8) = x^2 + 8x$

Como $A_I = A_{II}$, temos

$2x^2 + 4x = x^2 + 8x$ Subtraímos x^2 de ambos os membros da equação:
 $2x^2 + 4x - x^2 = x^2 + 8x - x^2$
 $x^2 + 4x = 8x$ Subtraímos $8x$ de ambos os membros da equação:
 $x^2 + 4x - 8x = 8x - 8x$
 $x^2 - 4x = 0$ Colocamos x em evidência no primeiro membro da equação:
 $x(x - 4) = 0$
 Para que o produto $x(x - 4)$ seja igual a zero, devemos ter:
 $x = 0$ ou
 $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$
 A solução $x = 0$ não serve, pois os retângulos não existiriam.
 Então $x = 4$ cm.

As medidas estão em centímetros.

Fonte: Andrini (2012)

No terceiro tópico do capítulo (p. 48), o autor apresenta o tema: “Forma geral de uma equação do 2º grau” e discute seus conceitos. Recomenda caracterizar as equações, antes de se aprofundar nas equação do segundo, em termos de métodos de resolução.

Figura 18: Livro didático do professor Davi – página 48

Equações do 2º grau na incógnita x têm a seguinte forma:
 $ax^2 + bx + c = 0$, onde a , b e c são números reais com $a \neq 0$:

- a é o coeficiente do termo em x^2 .
- b é o coeficiente do termo em x .
- c é chamado de termo independente.

Se $a = 0$, o termo em x^2 se anula e não temos mais uma equação do 2º grau. Por isso colocamos a condição $a \neq 0$.

Fonte: Andrini (2012)

Ao mesmo tempo que aponta as características da equação, sugere também aos alunos, que ao se depararem com um equação dessa natureza $5x - 3x^2 = 4 - 2x$ é necessário reorganizá-la, colocar na forma: $ax^2 + bx + c = 0$ (p. 48).

Figura 19: Livro didático do professor Davi - página 48

A equação $5x - 3x^2 = 4 - 2x$ não está na forma $ax^2 + bx + c = 0$.
No entanto, é possível reorganizá-la, escrevendo-a na forma geral:

$$5x - 3x^2 + 2x = 4$$

$$-3x^2 + 7x = 4$$

$$-3x^2 + 7x - 4 = 0$$

$$a = -3; b = 7 \text{ e } c = -4$$

Por uma questão de organização, daremos preferência ao registro na forma geral.

Fonte: Andrini (2012)

Assim, o autor diz que devemos ter $a \neq 0$. No entanto, ao reorganizar a equação podemos ter o termo $b = 0$ ou $c = 0$, ou ainda $b = 0$ e $c = 0$. Nesses casos teremos equações do 2º grau incompletas.

Figura 20: Livro didático do professor Davi - página 48

$2x^2 + 5x = 0$ $a = 2$ $b = 5$ $c = 0$	$x^2 - 16 = 0$ $a = 1$ $b = 0$ $c = -16$	$6x^2 = 0$ $a = 6$ $b = 0$ $c = 0$
--	---	---

As equações do 2º grau que resolvemos até agora eram equações incompletas.

Consequentemente, se $b \neq 0$ e $c \neq 0$, a equação do 2º grau é chamada de **completa**.

Fonte: Andrini (2012)

No quarto tópico, o autor apresenta uma discussão referente ao conteúdo “trinômio quadrado perfeito e equações do 2º grau” (p. 49). Essa discussão é proposta, tendo como base áreas de figuras quadradas, e através dessas figuras, são modelizadas as formas algébricas.

A área da figura ao lado pode ser escrita como:
 $A = (a + b)^2$, ou:
 $A = a^2 + 2ab + b^2$ • Polinômio com três termos: trinômio.

a^2 : área do quadrado de lado a .
 $2ab$: 2 vezes a área do retângulo de lados a e b .
 b^2 : área do quadrado de lado b .

Ou seja, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Fonte: Andrini (2012)

A partir dessas constatações, o autor aponta exemplos que utilizam a estratégia de resolução de equação do segundo grau, o trinômio quadrado perfeito.

No quinto tópico, o autor apresenta a discussão que trata da “Fórmula geral de resolução da equação do 2º grau” (p. 54). As atividades relacionadas a esse tema, basicamente, são com exclusividade, as resoluções de equações do 2º grau na forma completa. Para obter essa fórmula, o autor utiliza o método de completar quadrados (p. 54). A primeira figura a seguir retrata um diálogo do professor com os alunos sobre a obtenção trinômio.

Figura 22: Livro didático do professor Davi - página 51

Partiremos da equação genérica $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.
 Nosso objetivo é obter um trinômio quadrado perfeito no primeiro membro da equação.

O coeficiente a pode não ser um número quadrado perfeito.

Por isso vamos multiplicar os dois membros da equação por $4a$.

Fonte: Andrini (2012)

A figura abaixo, o autor apresenta todo o desenvolvimento do método completar quadrado:

Figura 23: Livro didático do professor Davi - página 54

$ax^2 + bx + c = 0$
 $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$
 Observe a figura. O terceiro termo do trinômio deve ser b^2 .
 Vamos somar b^2 a ambos os membros da equação:
 $4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2$
 Para que no primeiro membro da equação fique somente o trinômio quadrado perfeito, vamos subtrair $4ac$ de ambos os membros:
 $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$
 Fatorando o trinômio quadrado perfeito, obtemos:
 $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$
 A expressão $b^2 - 4ac$ será representada pela letra grega Δ (delta).
 Fazendo $\Delta = b^2 - 4ac$ na equação acima, temos:
 $(2ax + b)^2 = \Delta$
 Supondo $\Delta > 0$ vem:
 $2ax + b = \pm \sqrt{\Delta}$ Subtraindo b de ambos os membros da equação:
 $2ax = -b \pm \sqrt{\Delta}$ e, finalmente, dividindo ambos os membros por $2a$ para encontrar x :

	$2ax$	b	
$2ax$	$4a^2x^2$	$2abx$	$\frac{b}{2a}$
b	$2abx$	b^2	

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Fonte: Andrini (2012)

Embora o autor aponte a demonstração para obter a fórmula resolvente da equação do 2º grau, os exemplos apresentados no decorrer do tópico seguem o caminho apenas da manipulação da fórmula. Em nenhum momento o autor resolve um exemplo através da demonstração, ou seja, com o trinômio quadrado perfeito. O tópico seguinte, diz respeito a resolução de problemas. Nesse momento o autor apresenta exemplos com áreas de figuras planas, em que a resolução parte do produto da medida do lado da figura. A proposta de resolução utiliza a fórmula de Bhaskara.

4.8 Descrição Analítica do Livro Didático Utilizado por Lucas

A análise do livro utilizado pelo professor Lucas segue a mesma dinâmica do tópico anterior (análise do livro do professor Davi). Nas filmagens é possível perceber, claramente, que professor apoia-se nos conceitos e exemplos disponíveis no livro.

Adiante, apresentaremos a análise descritiva do livro didático “A Conquista da Matemática” de Giovane, Castrucci e Giovane Jr. (2007) do 9º ano do ensino fundamental.

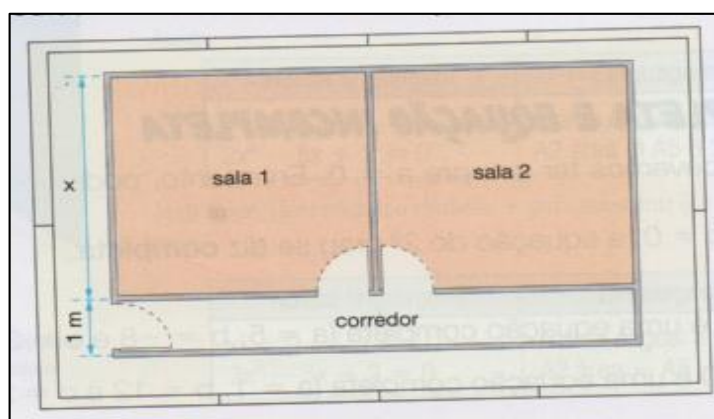
Uma primeira informação que destacamos encontra-se no sumário, revela apenas o quarto capítulo relacionado a equação do segundo grau. Dentre os tópicos associados à ele, destacamos: equação do 2º grau com uma incógnita; resolvendo equações incompletas do 2º grau; resolvendo uma equação completa do 2º grau com uma incógnita e resolvendo problemas.

No primeiro tópico os autores fazem referência a textos antigos, dizendo que alguns problemas utilizados nos dias atuais são semelhantes à 4 000 anos atrás. Ainda sobre isso, aponta que um problema comum nos escritos babilônicos tratava da determinação de dois números, quando conhecidos a soma e o produto deles.

Após esse diálogo dos autores, o tópico propõe ao leitor “conhecer a equação do 2º com uma incógnita”. Para isso, apresenta um problema através de uma figura geométrica, como podemos observar seu enunciado e a figura.

“Observe a planta parcial de um escritório. As duas salas quadradas e o corredor retangular têm, juntos, 40 m² de área. Cada sala tem x metros de lado e o corredor tem 1 metro de largura. Qual é a medida x de cada sala quadrada?”

Figura 24: Livro didático do professor Lucas - página 95



Fonte: Giovanni (2007)

O problema finaliza dizendo “de acordo com a figura e os dados do problema, temos:”

Figura 25: Livro didático do professor Lucas - página 95

• A área de cada sala é x^2 .
 • A área do corredor é dada por $1 \cdot 2x$ ou $2x$.
 • A equação que representa o problema é:

$$2x^2 + 2x = 40$$

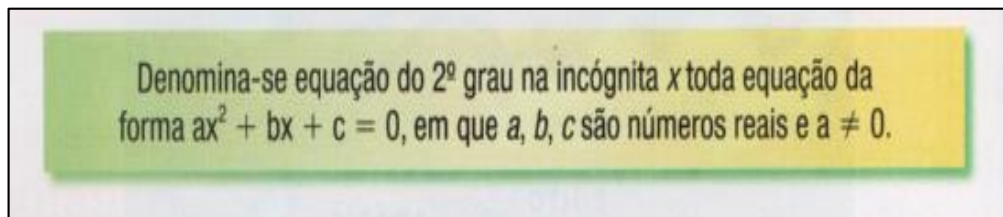
→ área do corredor
 → área das duas salas

Fonte: Giovanni (2007)

Após essa resolução, os autores fazem algumas considerações, a primeira é que o resultado não reflete “uma equação do 1º grau” e que as equações do primeiro grau os alunos já saberiam resolver. A segunda é que só é possível perceber se a equação é do primeiro grau ou do segundo grau através do expoente 2.

O livro na sequência apresenta uma conceituação das equações do segundo grau. Essa conceituação surge em forma de destaque, como podemos observar o recorte do livro.

Figura 26: Livro didático do professor Lucas - página 96



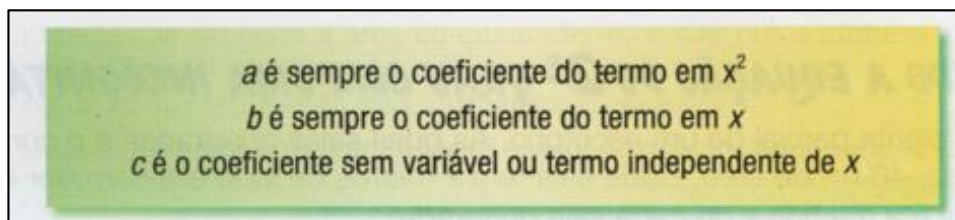
Fonte: Giovanni (2007)

Após apresentar o conceito, os autores propõem alguns exemplos de equação do segundo grau na incógnita x , em que identificam os valores dos coeficientes a, b e c . Apontamos na íntegra dois exemplos utilizados no livro.

- $2x^2 + 2x - 40 = 0$ é uma equação do 2º grau na incógnita x , em que $a = 2$, $b = 2$ e $c = -40$.
- $x^2 - 25 = 0$ é uma equação do 2º grau na incógnita x , em que $a = 1$, $b = 0$ e $c = -25$.

Ainda sobre o primeiro tópico, os autores procuram outros conceitos relacionadas a equação do segundo grau. Como por exemplo, os autores apontam que “nas equações dos 2º grau com uma incógnita, os números reais a, b e c são chamados **coeficientes** da equação. Assim, se a equação for na incógnita x , teremos:” Após essa afirmação apresenta o destaque abaixo.

Figura 27: Livro didático do professor Lucas - página 96



Fonte: Giovanni (2007)

Logo após essa definição os autores apresentam dois exemplos contemplando equações completas e equações incompletas. E, sequencialmente, um exercício sobre as discussões anteriores.

O segundo tópico apresentamos abaixo. Como podemos observar o interesse maior dos autores é sobre a apresentação da equação do 2º grau na sua forma reduzida.

Figura 28: Livro didático do professor Lucas - página 98

ESCREVENDO UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU COM UMA INCÓGNITA NA SUA FORMA REDUZIDA

Observe as seguintes equações do 2º grau com uma incógnita:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad y^2 - 25 = 0 \quad -3t^2 + 4t - 1 = 0 \quad -2x^2 + 8x = 0$$

Essas equações estão escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$, que é denominada **forma reduzida** de uma equação do 2º grau com uma incógnita.

Há, porém, algumas equações do 2º grau que não estão escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$, como por exemplo:

$$3x^2 - 6x = x - 3 \quad \frac{2}{x} - \frac{1}{2} = \frac{x}{x-4}$$

Fonte: Giovanni (2007)

Os autores chamam atenção também que é “por meio de transformações, nas quais aplicamos os princípios aditivo e multiplicativo da igualdade, tais equações podem ser expressas nessa forma, veja:” Dois três exemplos apresentados pelos autores, destacamos o primeiro:

1 Dada a equação $2x^2 - 7x + 4 = 1 - x^2$, escrevê-la na forma reduzida.

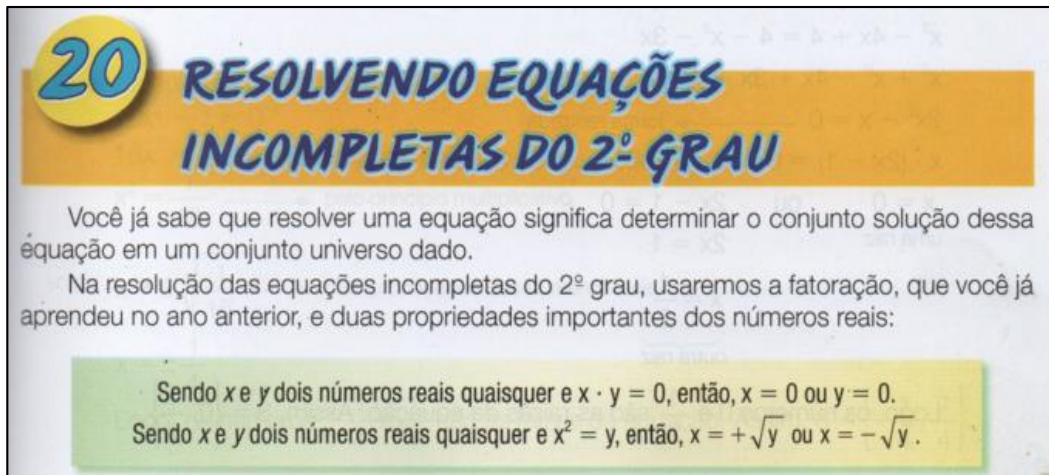
$$2x^2 - 7x + 4 = 1 - x^2 \rightarrow \text{equação dada}$$

$$2x^2 - 7x + 4 - 1 + x^2 = 0 \rightarrow \text{aplicamos o princípio aditivo}$$

$$3x^2 - 7x + 3 = 0 \rightarrow \text{forma reduzida da equação dada}$$

Após a aplicação dos três exemplos, referente a forma reduzida das equações, os autores apresentam os exercícios. Em que, das seis questões propostas, cinco tem características de um problema e apenas uma apresenta de forma direta a pergunta.

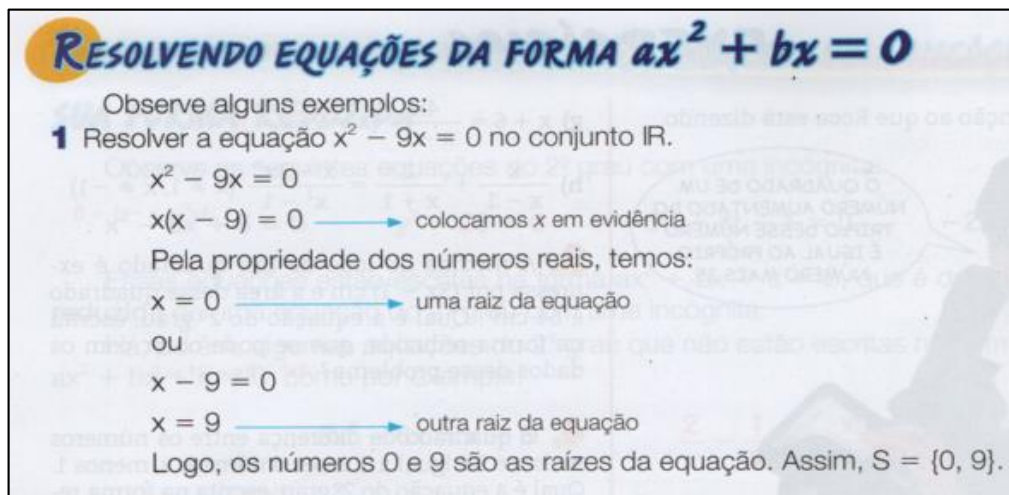
Dando continuidade, apresentamos a seguir mais um tópico do livro didático, em que procura discutir a resolução de equações incompletas do 2º grau.



Fonte: Giovanni (2007)

Assim, os autores procuram resolver equações na forma $ax^2 + bx = 0$. As resoluções são apresentadas em forma de exemplos. Alguns são apresentados na forma reduzida e outros solicitam também a redução. Observe o recorte do primeiro e terceiro exemplos:

Figura 30: Livro didático do professor Lucas - página 100



Fonte: Giovanni (2007)

Figura 31: Livro didático do professor Lucas - página 100

3 No conjunto \mathbb{R} , determinar o conjunto solução da equação $(x - 2)^2 = 4 - x \cdot (x + 3)$.

Vamos, inicialmente, escrever a equação na sua forma reduzida:

$$(x - 2)^2 = 4 - x \cdot (x + 3)$$

$$x^2 - 4x + 4 = 4 - x^2 - 3x$$

$$x^2 + x^2 - 4x + 3x + 4 - 4 = 0$$

$$2x^2 - x = 0 \longrightarrow \text{forma reduzida}$$

$$x \cdot (2x - 1) = 0 \longrightarrow \text{colocamos } x \text{ em evidência}$$

$x = 0$ ou $2x - 1 = 0$
 uma raiz $2x = 1$
 $x = \frac{1}{2}$
 outra raiz

Logo, os números 0 e $\frac{1}{2}$ são as raízes da equação. Assim, $S = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$.

Fonte: Giovanni (2007)

Com a mesma dinâmica, os autores apresentam a resolução de equações do 2º grau na forma $ax^2 + c = 0$ em forma de exemplos. Desses, apontamos o recorte do primeiro exemplo.

Figura 32: Livro didático do professor Lucas - página 101

RESOLVENDO EQUAÇÕES DA FORMA $ax^2 + c = 0$

Observe os seguintes exemplos:

1 Resolver a equação $x^2 - 49 = 0$, no conjunto \mathbb{R} .

$$x^2 - 49 = 0$$

$$x^2 = 49 \longrightarrow \text{pelo princípio aditivo}$$

Aplicando a propriedade dos números reais já citada, temos:

$$x = +\sqrt{49} \text{ ou } x = -\sqrt{49}$$

$$x = +7 \text{ ou } x = -7$$

Podemos escrever $x = \pm 7$.

Logo, os números 7 e -7 são as raízes da equação. Assim, $S = \{-7, 7\}$.

Fonte: Giovanni (2007)

Após a apresentação dos exemplos referente as formas $ax^2 + bx = 0$ e $ax^2 + c = 0$, os autores apresentam no livro didático um exercício que contempla oito questões (p. 103).

Na sequência, os autores procuram discutir a resolução de equação completa do 2º grau, com uma incógnita, pelo “o processo de completamento de quadrados” (p.105), observe o recorte abaixo:

Figura 33: Livro didático do professor Lucas - página 105

Usando o quadrado e os quatro retângulos, Mariana formou a seguinte figura.

Agora, Mariana quer formar um novo quadrado. Para isso, terá de acrescentar quadradinhos à figura.

- De quantos quadradinhos ela vai precisar? 4
- Qual é a área de cada um desses quadradinhos? 1
- Qual é a área do novo quadrado? 25

Fonte: Giovanni (2007)

Os autores falam que com base na interpretação geométrica dada pelos gregos à expressão $(a + b)^2$, o matemático al-khowarizmi estabeleceu um processo geométrico para resolução de equações do 2º grau com uma incógnita.

Na sequência apresenta uma figura que é a representação geométrica da expressão $(a + b)^2$. Desenvolve a expressão e encontra $a^2 + 2ab + b^2$. Utilizando essa interpretação, os autores apresentam exemplos, que mostram como al-khowarizmi desenvolveu seus estudos. Após os exemplos, surgem os exercícios. Observe um dos exemplos propostos pelos autores.

Figura 34: Livro didático do professor Lucas - página 107

2 Fazer uma interpretação geométrica da expressão $x^2 + 5x$.

$$x^2 + 5x = x^2 + 2\left(\frac{5}{2}x\right)$$

→ área de um retângulo cujos lados medem $\frac{5}{2}$ e x
 → área de um quadrado cujo lado mede x

Construindo a figura de acordo com a interpretação geométrica dada:

Pela figura, notamos que, para completar um quadrado, devemos acrescentar o quadrado de lado $\frac{5}{2}$, ou seja, um quadrado de área $\left(\frac{5}{2}\right)^2$:

Daí, teremos:

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = x^2 + 5x + \frac{25}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2$$

expressão algébrica correspondente à área do quadrado formado trinômio quadrado perfeito forma fatorada do trinômio

Fonte: Giovanni (2007)

Após discutir a representação geométrica da expressão e exemplos de como Al-Whowarizmi desenvolveu seus estudos, o livro didático faz referência ao processo de completar quadrados ou, segundo os autores, o processo de Al-Khowarizmi.

Figura 35: Livro didático do professor Lucas - página 108

RESOLVENDO UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU PELO PROCESSO DE AL-KHOWARIZMI (COMPLETANDO QUADRADOS)

Aplicando o que acabamos de ver, vamos resolver as seguintes equações do 2º grau com uma incógnita no conjunto dos números reais.

1 Resolver a equação $x^2 + 6x + 8 = 0$.
 Considerando a expressão $x^2 + 6x$, temos:

$$x^2 + 6x = x^2 + 2(3x)$$

área de um retângulo cujos lados medem 3 e x
 área de um quadrado cujo lado mede x

Pela figura, observamos que é necessário acrescentar o número $(3)^2$ à expressão $x^2 + 6x$, ou seja, 9, para obter um quadrado.

Fonte: Giovanni (2007)

O recorte acima dá início a resolução, do primeiro exemplo, pelo processo de completar quadrados. Descubra geometricamente o valor que devemos acrescentar à expressão $x^2 + 6x$. Observe a continuação da resolução.

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

$$x^2 + 6x = -8 \rightarrow \text{princípio aditivo}$$

$$x^2 + 6x + 9 = -8 + 9 \rightarrow \text{princípio de equivalência das equações}$$

Os autores apontam também que $x^2 + 6x + 9$ é um quadrado perfeito. Assim, os autores seguem a resolução e determinam as raízes da equação. Na sequência, propõe outros exemplos com características anteriores e um exercício, em que solicita dos alunos que “utilizando o processo algébrico de Bhaskara, determine as raízes das equações do 2º grau no conjunto solução dos números reais”.

O último recorte que apresentaremos, diz respeito, a uma relação entre o processo algébrico de Bhaskara e a dedução da fórmula resolvente da equação do 2º grau.

Figura 36: Livro didático do professor Lucas - página 111

FÓRMULA RESOLUTIVA OU FÓRMULA DE BHASKARA

Veja como podemos chegar à fórmula resolutive:

Processo algébrico de Bhaskara	Dedução da fórmula resolutive
$x^2 + 4x - 12 = 0$	$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$
	$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$
	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c/a}{a} - \frac{c/a}{a} = 0 - \frac{c}{a}$
$x^2 + 4x = 12$	$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 12 + \left(\frac{4}{2}\right)^2$	$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b/a}{2}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b/a}{2}\right)^2$
	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$
$x^2 + 4x + 4 = 12 + 4$	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
$(x + 2)^2 = 16$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
$(x + 2) = \pm\sqrt{16}$	$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$
$x + 2 = \pm 4$	$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$x = -2 \pm 4$	$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$x = 2 \text{ ou } x = -6$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Fonte: Giovanni (2007)

Embora não faça parte dos nossos objetivos à análise do livro didático dos sujeitos. Esperamos que esta descrição possa contribuir para algumas colocações que o professor faça em sala de aula. Por outro lado, as informações existentes no livro didático pode despertar outros caminhos para futuras pesquisas.

Nesse sentido, podemos questionar, que relação existe entre a conformidade e não conformidade que o sujeito (professor e aluno) mantém com a instituição livro didático com as relações contratuais que emergem na relação didática. Adiante, apontamos a abordagem metodológica da pesquisa.

ABORDAGEM METODOLOGICA

Neste momento, contemplamos o desenho metodológico que traçamos para realização dessa pesquisa, cuja apresentação será dividida em quatro partes: a primeira parte discorreremos sobre a característica da pesquisa; na segunda parte, procuramos apresentar os objetivos, os sujeitos e o campo de pesquisa; na terceira parte, apontamos os critérios que auxiliaram a nossa análise; na quarta parte, as etapas da nossa pesquisa, justificando as nossas escolhas.

5.1 Característica da Pesquisa

Para auxiliar a nossa pesquisa e responder aos objetivos, optamos por uma abordagem qualitativa de cunho etnográfico. Para Ludke e André (1986), a pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento. Os pesquisadores acrescentam que a pesquisa qualitativa supõe o contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo investigada. A esse respeito, podemos dizer que a nossa pesquisa se enquadra aos conceitos de pesquisa qualitativa, pois temos como ambiente uma sala de aula e o pesquisador como sujeito principal na produção das informações.

André (2007a) e Fiorentini (2009) ressaltam, nesse tipo de abordagem, a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vala-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar. Para estes estudiosos, o pesquisador carrega consigo experiências acerca do objeto de estudo e vivencia essas experiências nos momentos da pesquisa.

Nesse contexto, a preocupação maior do pesquisador está no processo, e não no produto desse processo. Seu interesse é estudar um determinado problema, é verificar como ele se manifesta nas atividades, nos procedimentos e nas interações cotidianas.

A pesquisa qualitativa se manifesta no trabalho de campo, em que o pesquisador procura se envolver na coleta de dados, utilizando equipamentos como filmadora, gravador, entrevista e anotações. O pesquisador deverá aprender a usar

sua própria pessoa como mais um instrumento de observação (ANDRÉ, 2007a). Esse aspecto faz do pesquisador um elemento importante na produção das informações, bem como na análise dos mesmos.

Entre as várias formas que podem assumir uma pesquisa qualitativa, destacamos a pesquisa do tipo etnográfica. Esse tipo de pesquisa vem, já algum tempo, ganhando espaço na área de educação matemática, devido principalmente ao seu potencial para estudar as questões relacionadas à escola.

As pesquisas do tipo etnográfico caracterizam-se, na educação, quando fazem uso das técnicas de observação participante, entrevista e análise de documentos. As observações participantes são aquelas em que o pesquisador interage com a situação estudada, afetando-a e sendo por ela afetado. A finalidade das entrevistas é aprofundar as questões e esclarecer os problemas observados, e os documentos são usados no sentido de contextualizar o fenômeno (ANDRE, 2007).

Podemos acrescentar ainda, a esse contexto de pesquisa do tipo etnográfica, que o pesquisador é o instrumento principal na coleta e na análise dos dados. Os dados são mediados pelo instrumento humano, o pesquisador; na pesquisa etnográfica, a ênfase é dada ao processo, naquilo que está ocorrendo e não no produto ou nos resultados finais; a pesquisa envolve um trabalho de campo, e, nela, o pesquisador se aproxima de pessoas, situações, locais, eventos, mantendo com eles um contato direto e prolongado.

Nesse sentido, entendemos que a nossa pesquisa preenche os requisitos que permitem utilizar a pesquisa qualitativa do tipo etnográfica para responder aos nossos objetivos ou questões lançadas.

5.2 Os Objetivos, os Sujeitos e o Campo de Pesquisa

Como já discutimos anteriormente, esta Tese tem por objetivo analisar a relação entre o contrato didático (negociações, rupturas e as renegociações) e as organizações matemáticas e as organizações didáticas, com o saber em jogo as equações do segundo grau a uma incógnita.

Para isso, elegemos, como sujeitos participantes do nosso estudo, dois professores do 9º ano do ensino fundamental e os seus respectivos alunos. A escolha de dois sujeitos aconteceu porque acreditamos que eles vão permitir apontar com mais clareza a relação que o contrato didático mantém com as organizações

matemáticas e didáticas. Quero dizer, acreditamos que os dois sujeitos nos permitem apontar que certos contratos didáticos estão associados a certas organizações matemáticas e didáticas. Como, por exemplo, numa relação didática, em que um determinado professor estabelece uma negociação com seus alunos sobre um determinado tipo de tarefa, emerge certo tipo de regras contratuais. Outro professor, numa negociação com o mesmo tipo de tarefa, pode fazer emergir regras de contrato didático semelhantes ou diferentes. Acreditamos que os dois sujeitos envolvidos na pesquisa vão permitir observar de maneira mais clara suas relações.

Ainda no que diz respeito aos dois sujeitos, chamamos atenção para o nível de envolvimento com a análise dos dados. Determinamos um como sujeito principal de análise, em que contemplamos todas os elementos analíticos, e outro sujeito é considerado sujeito auxiliar, o qual será utilizado em situações específicas que tratam da relação entre o contrato didático e as praxeologias.

A fase experimental da pesquisa foram realizadas em duas escolas, uma pública e outra privada, localizadas em Pesqueira-PE. Na sala de aula da escola pública foram sujeitos da pesquisa, 38 alunos e um professor (com pseudônimo⁹² de Davi), licenciado em ciências com habilitação em matemática. A segunda foi da rede privada, participaram da pesquisa 26 alunos e um professor (com pseudônimo de Lucas), licenciado em Matemática.

Algumas situações influenciaram a escolha, do campo de pesquisa e dos sujeitos. A escola publica por manter um convênio com o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco (IFPE), no qual o proponente dessa pesquisa leciona. Esse convênio permite a utilização do espaço como campo de estágio curricular supervisionado. Esta mesma instituição mantém outro convênio com o IFPE para execução das atividades do Programa Institucional de Bolsas para Iniciação à Docência (PIBID). Vale destacar que, tanto a disciplina de estágio curricular supervisionado, como a coordenação de área do PIBID, o pesquisador esteve à frente. Nesse sentido, a boa relação com os educadores e o corpo administrativo, facilitaram o acesso e motivaram a nossa escolha.

A segunda escola, sua escolha aconteceu de forma aleatória. Chamamos atenção que, das escolas privadas, essa foi a única que aceitou a pesquisa em suas dependências, bem como o professor aceitou ser filmado.

⁹² A opção em colocar um pseudônimo se faz necessário para resguardar a identidade original do professor.

Os dados foram produzidos através de uma videografia; foram nove aulas filmadas com o saber algébrico, as equações do segundo grau a uma incógnita. É relevante informar que recebemos os dados sem nenhum tratamento analítico por parte do pesquisador.

O nosso objetivo geral se desdobra em três objetivos específicos. O primeiro, foi identificar na relação didática, sob a ótica do Contrato Didático, as negociações, as rupturas e as renegociações no ensino das equações do segundo grau a uma incógnita; O segundo, caracterizar as organizações matemáticas – os tipos de tarefas, as técnicas, as tecnologias e as teorias, no ensino das equações do segundo grau a uma incógnita; O terceiro, identificar as organizações didáticas – os momentos didáticos, no ensino das equações do segundo grau a uma incógnita. A realização desses três objetivos específicos, apresentados acima, está condicionada ao cumprimento das etapas da pesquisa, que serão discutidas adiante.

Embora, nesse momento, estejamos apresentando algumas justificativas, queremos destacar que a introdução e os capítulos específicos deste trabalho apresentam, de forma mais detalhada, os motivos que nos levaram às escolhas, do Contrato Didático e da Teoria Antropológica do Didático (as organizações matemáticas e didáticas) como campo teórico e metodológico para nossa pesquisa, bem como o saber algébrico, as equações do segundo grau a uma incógnita.

De forma sucinta, podemos dizer que a noção de contrato didático é considerada por Brousseau (2008) e seus colaboradores, como Bessot (2003), Margolinas (1998), Charnay (1996), Bosch e Gascon (2007) e outros, um dos principais elementos da teoria das situações didáticas e desempenha um papel central na análise e na construção de situações para o ensino e aprendizagem da matemática.

Brousseau (2010, p. 09) aponta que o contrato didático se revela no momento em que o professor prepara e realiza uma situação de ensino. A realização pressupõe uma relação didática, em que o aluno, em geral, tem a tarefa de resolver o problema que lhe é apresentado. A resolução acontece *“por meio da interpretação das questões colocadas, das informações fornecidas, das exigências importas, que são a maneira de ensinar do professor. Esses hábitos específicos do professor, esperados pelo aluno, e o comportamento deste, esperado pelo professor, constituem o contrato didático”*.

Já a TAD situa a atividade matemática dentro do conjunto de atividades humanas e das instituições sociais. Queremos dizer que a TAD estuda o homem diante do saber matemático e, mais particularmente, frente a situações matemáticas (CHEVALLARD, 1999).

Esse pesquisador compreende que um saber é constituído pelas noções de tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria, e que a união desses elementos, em função de um tipo de tarefa, forma uma organização praxeológica. Essa organização praxeológica é considerada pelo pesquisador como uma potente ferramenta teórico-metodológica que permite modelar as práticas sociais em uma instituição (CHEVALLARD, 1996). Em especial, consideramos que essa ferramenta vai permitir modelar a atividade matemática que se encontra numa relação didática, dentro do sistema didático. Nesse contexto, procuramos analisar a relação do contrato didático com as organizações matemáticas e didáticas.

A Organização Matemática (OM) estuda a situação, por exemplo, que se observa em uma sala de aula em relação ao objeto matemático (tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria). A Organização Didática (OD), além de observar os objetos matemáticos e surgir aos pares com as OM, também observa a maneira como essa situação foi construída (momentos de estudos).

No que diz respeito à escolha pela álgebra⁹³, uma primeira questão vem do SAEB (2011), que apresentou nos seus índices dificuldades acentuadas dos alunos no campo algébrico, em que os acertos ficaram em torno dos 45% em muitas regiões do Brasil.

Olhando, especificamente, para equação do segundo grau, o SAEPE aponta que apenas 21,4% dos alunos do 9º ano do ensino fundamental conseguem, por exemplo, identificar uma equação do segundo grau expressa em problema (CÂMARA DOS SANTOS; RAMOS DE ALMEIDA, 2014).

Através da nossa prática docente, tanto como professor do ensino básico, como professor do ensino superior, lecionando as disciplinas de Estágio Supervisionado, bem como na coordenação da área de Matemática do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), observamos várias dificuldades dos alunos na resolução de equações do primeiro e nas equações do segundo grau. Algumas relacionadas à passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica; outras,

⁹³ Apresentamos na introdução outras motivações para nossa pesquisa.

relacionadas à própria resolução das equações, em que os alunos precisam manipular letras e números, fatoração, etc.

Fazendo referência à ruptura que existe na passagem da aritmética para álgebra, Bessa de Menezes (2010) aponta a existência de uma possível ruptura dentro da própria álgebra, ao passar das equações de primeiro grau para as equações de segundo grau. O pesquisador entende que, enquanto no primeiro tipo de equações o aluno elege o procedimento de resolução (transposição de um membro para outro da igualdade, realizando a operação inversa, por exemplo), nas equações do 2º grau ele precisa lançar mão de outros procedimentos, como fatorar a equação, ou mesmo utilizar o caminho de completar quadrados, ou utilizar a fórmula de Bhaskara, para resolver as equações.

Nesse contexto, os Parâmetros Curriculares para a Educação Básica de Pernambuco (2012), recomenda que o ensino da álgebra seja desenvolvido desde a primeira etapa do ensino fundamental, “com o cuidado de não o reduzir a simples manipulação simbólica” (PERNAMBUCO, 2012, p, 85).

O documento faz referência ao fato de que é na laboração de estratégia e na resolução de problemas que o aluno “estabelece processos cognitivos importantes, que não podem ser desenvolvidos por meio de um ensino baseado na memorização sem compreensão ou na sistematização precoce de conceitos” (IBIDEM, p. 94).

No que diz respeito às equações do segundo grau, os parâmetros de Pernambuco (2012) propõe que a aplicação direta da fórmula de Bhaskara termina por provocar dificuldades posteriores, porque na maioria dos casos é tratada como o único método de resolução das equações do segundo grau. O documento, chama atenção, nessa etapa de escolarização, para que os alunos possam ser incentivados a resolver equações de segundo grau, utilizando a fatoração e o processo de completar quadrados.

Vários são os enfoques que foram contemplados em pesquisas. Alguns relacionados à passagem da aritmética para álgebra e às rupturas que existem nessa passagem; outros procuram destacar as mudanças de concepções que são necessárias e que envolvem essa passagem; temos, também, pesquisas relacionadas à introdução da álgebra escolar e ao pensamento algébrico, entre outras. Da nossa parte, reafirmamos o interesse em discutir o contrato didático e as organizações praxeológicas.

5.3 Etapas da Pesquisa

Essa construção metodológica leva em consideração que, para analisar a relação entre o CD e as OM e OD, é necessário, em primeiro lugar, identificar as relações contratuais (as negociações, as rupturas e as renegociações). Em segundo lugar, é preciso caracterizar as organizações matemáticas, com seus tipos de tarefas, com as técnicas, com as tecnologias e com as teorias. E nesse contexto, a OM, para ser colocada em prática, segue um determinado caminho que chamamos de Momento Didático, e este será, também, alvo da nossa identificação e análise.

Colocando em prática a nossa metodologia, foi necessário, na **primeira etapa**, uma análise a priori das organizações matemáticas que dizem respeito ao ensino das equações do segundo grau a uma incógnita. Procuramos pesquisar alguns livros antigos (compêndios) para caracterizar as organizações matemáticas da equação do segundo grau a uma incógnita. Escolhemos os compêndios, por entender que os saberes à disposição nesses livros sofreram uma quantidade menor de transformações. Quero dizer que esses saberes estão mais próximos da sua gênese, mostram a realidade matemática com uma riqueza maior de detalhes. Assim, deixamos de lado o livro didático adotado pela escola para essa função.

De posse dessas informações, construímos os nossos critérios de análises referente às organizações matemáticas no ensino das equações do segundo grau para analisar os dados coletados.

Por outro lado, procedemos com a análise descritiva do livro didático do professor que se encontra à disposição dos alunos, por entender que os saberes a ensinar, nesse livro didático, estão mais próximos dos alunos e seria o primeiro contato que os alunos teriam com esses saberes.

A **segunda etapa** da pesquisa diz respeito à produção de dados de dois professores, que nomeamos de Davi e Lucas. Na produção foram filmadas 23 aulas do professor Davi e 9 aulas do professor Lucas com o saber equação do segundo grau a uma incógnita.

Utilizamos, como instrumento de coleta, uma câmara de vídeo e áudio. A escolha pela videografia justifica-se porque ela permite uma análise mais completa das negociações, rupturas e renegociações. Permite, também, identificar de forma mais detalhada as organizações matemáticas e didáticas mobilizadas pelo professor.

Esse é um momento em que o pesquisador pode observar e analisar tanto os gestos como a fala do professor e seus alunos na relação com o saber matemático em jogo.

A **terceira etapa** diz respeito à transcrição dos recortes das aulas dos dois professores e seus alunos. Os recortes procuram apresentar, justamente, o momento em que os fenômenos estão se relacionando.

A **quarta etapa** da pesquisa diz respeito à análise do Contrato Didático nos recortes das transcrições da fala do professor e seus alunos. Analisamos, também, as imagens e os gestos dos sujeitos envolvidos, pois eles podem passar informações importantes para relação entre os fenômenos. Essa etapa visa identificar as negociações contratuais, as rupturas e renegociações que emergem na relação didática.

Na **quinta etapa**, procuramos identificar, nas transcrições, as organizações matemáticas: tipos de tarefa (diz respeito a um objeto relativamente preciso como, por exemplo, resolver a equação $x^2 + 2x + 3 = 0$), técnicas (diz respeito à maneira de fazer ou realizar as tarefas), tecnologias (procura descrever e justificar a técnica utilizada como uma maneira de cumprir corretamente uma tarefa) e teorias (tem a função de justificar e esclarecer a tecnologia), existentes na relação didática.

Na **sexta etapa**, identificamos, nas transcrições, as organizações didáticas existentes numa relação didática. Sabemos que as organizações didáticas se estabelecem a partir de certo caminho, de certo tipo de situações, os quais são chamados de momentos de estudo ou momentos didáticos: (1º) o primeiro encontro propriamente dito com a tarefas, (2º) a exploração do tipo de tarefa e elaboração da técnica, (3º) a constituição do ambiente tecnológico-teórico, (4º) o trabalho da técnica, (5º) a institucionalização e (6º) a avaliação. A OD diz respeito a como colocamos em prática o conteúdo matemático, nesse caso, a equação do segundo grau.

Com a execução dessas etapas, acreditamos ter elementos suficientes para a análise da relação do contrato didático com as organizações matemática e didática.

Vale destacar que, embora tenhamos anunciado em etapas a construção da pesquisa, sua apresentação, em termos de análise, acontecerá de forma dinâmica, envolvendo as etapas três, quatro, cinco e seis.

Todas as etapas apresentadas anteriormente foram analisadas segundo alguns critérios construídos pelo pesquisador, que apresentaremos adiante.

5.4 Os Critérios de Análise

Para a análise acontecer de forma que contemple os objetivos e responda às questões de pesquisa, surge a necessidade de estabelecer critérios a serem seguidos.

Adiante, apresentaremos dois quadros com critérios de análise: do contrato didático e das organizações matemáticas. Esses critérios foram construídos a partir dos elementos encontrados na nossa fundamentação teórica. Tais elementos representam o que devemos identificar na videografia (filmagem e transcrição) da nossa pesquisa.

Quadro 13: Critérios de análises do contrato didático

Critérios de Análise do Contrato Didático	
Expectativa	O que o professor espera do aluno e o aluno espera do professor, em relação ao trabalho na sala de aula (relativo ao saber específico que está em cena).
Negociação	É a convenção de uma ou mais pessoas, a qual implica na aceitação de certos papéis e obrigações a cumprir por cada uma das partes envolvidas, acordo entre parceiros. Diz respeito, também, a como o professor negocia o saber com os alunos numa situação didática. Particularmente em nosso estudo, como ele negocia as equações do segundo grau a uma incógnita.
Ruptura de contrato	A ruptura do contrato didático pode ser percebida, por exemplo, quando os alunos não atuam da forma esperada pelo professor – frente ao saber – ou quando o professor não atua da forma esperada pelos alunos. De forma que pode existir uma reclamação por algumas das partes.
Renegociação do contrato	Quando há alguma ruptura no contrato didático e, em seguida, uma nova regra (explícita ou implícita) é negociada. Quando, embora não havendo claramente uma ruptura, é estabelecido um redirecionamento do jogo didático.
Regras Explícitas e Implícitas	As regras explícitas são claras, expressas sem ambiguidade pelas partes em questão; encontramos no momento em que o saber encontra-se em jogo pelo professor ou o aluno. As regras implícitas, são aquelas que não são explicitamente formuladas por um dos parceiros (quase sempre, o professor), mas que são

	construídas de forma mais subliminar e, embora implícitas, são fundamentais para a condução da relação didática e para fazer valer o contrato didático negociado.
--	---

Fonte: Elaborado pelo autor da tese

Achamos importante chamar atenção para o nível de critérios de explicitação das regras e negociação das regras. No nível de explicitação das regras, elas podem aparecer explícitas, tácitas e implícitas. No nível de negociação das regras, podem aparecer de forma unilateral e também negociadas.

As regras “tácidas” podem ser observadas em sala de aula no momento em que o professor conduz as atividades e os alunos não se declaram, mas se submetem à atividade. Quero dizer que, embora se submeta a atividade, os alunos, por algum instante, ficam calados e silenciosos (JONNAERT, 1994). Essa é uma importante regra a ser considerada para que a situação didática continue a existir.

As regras que são impostas de forma unilateral por um dos participantes da relação didática, podem ser observadas, quando o professor, por sua parte, impõe a negociação de um saber aos alunos. Assim, a sua existência está condicionada à existência de uma relação didática.

Para Jonnaert (1996), o contrato didático joga com diferentes tipos de regras, inclusive essas apresentadas. E cada um dos participantes, em especial o professor, utiliza essas regras em diferentes momentos da relação didática para fazer progredir no aluno a sua relação ao saber.

Reforçamos que os critérios de análise do contrato didático foram construídos a partir dos elementos teóricos que se encontram no capítulo específico sobre o tema. E de forma complementar, utilizaremos outros critérios que se encontram na nossa fundamentação.

O quadro adiante indica um resumo dos tipos de tarefas, técnicas e tecnologias que podem ser utilizadas na ação didática do professor com o saber equações do segundo grau a uma incógnita.

Nesse contexto, o tipo de tarefa é considerado como objeto relativamente preciso. Para Chevallard⁹⁴ (1999, p. 222), “*subir uma escada é um tipo de tarefa, mas subir, simplesmente, não seria*”. Da mesma maneira, “*calcular o valor de uma função em um ponto*” é um tipo de tarefa. Mas, “*calcular*”, simplesmente, é o que chama de “*gênero*” de tarefa.

Sobre uma técnica, Chevallard (1999) propõe que uma praxeologia relativa à uma técnica requer, em princípio, uma maneira de fazer ou realizar uma tarefa. O pesquisador destaca ainda que a técnica está no coração do trabalho no sistema didático.

A tecnologia está relacionada ao discurso racional (o logos). Esse discurso tem como primeiro objetivo justificar racionalmente a técnica, para que possa permitir realizar o tipo de tarefa. A segunda função é de explicar, de tornar inteligível a técnica (CHEVALLARD, 1999).

Esses critérios, que apresentaremos no quadro a seguir, foram construídos a partir de uma análise a priori de livros didáticos (compêndios), com intuito de reconstruir a organização matemática para o ensino da equação do segundo grau a uma incógnita.

Quadro 14: Síntese dos critérios de análise das organizações matemáticas

Tipos de Tarefa	Técnicas		Tecnologias
	Principal	Auxiliar	
T_1	τ_{CQ} / τ_{FB}	τ_{DRE} / τ_{TTC}	$\theta_{POI} / \theta_{PR}$
T_2	τ_{TTC}	τ_{DRE}	$\theta_{PR} / \theta_{POI}$
T_3	τ_{FE}	τ_{ITZ} / τ_{TTC}	$\theta_{PDM} / \theta_{PPN} / \theta_{POI}$
T_4	τ_{DRE}	τ_{FE}	$\theta_{PDM} / \theta_{PPN}$

Fonte: Elaborado pelo autor da tese

Como podemos observar, estes são os quatro tipos de tarefas apresentados acima que contemplam o ensino das equações do segundo grau a uma incógnita:

⁹⁴ Texto original: “Subir una escalera es un tipo de tarea, pero subir, simplemente, no lo Es.” (...), “calcular el valor de una función en un punto es un tipo de tareas”, Pero, “calcular, simplemente, es lo que se llamará un género de tareas”,

- T_1 : resolver equação do segundo grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$;
- T_2 : resolver equação do segundo grau do tipo $ax^2 + c = 0$;
- T_3 : resolver equação do segundo grau do tipo $ax^2 + bx = 0$;
- T_4 : resolver equação do segundo grau do tipo $ax^2 = 0$.

Temos, também, como podemos observar no quadro acima, as técnicas relativas aos tipos de tarefas, as que são consideradas principais e aquelas consideradas auxiliares.

Técnicas principais de T_1 , T_2 , T_3 e T_4 :

- $T_1 \rightarrow \tau_{CQ/FB}$ Completar Quadrados e Fórmula de Bhaskara;
- $T_2 \rightarrow \tau_{TTC}$: Transpondo Termos ou Coeficientes, Invertendo Operações;
- $T_3 \rightarrow \tau_{FE}$: Fatorar Expressões, colocando em evidencia o Fator Comum;
- $T_4 \rightarrow \tau_{DRE}$: Desenvolver ou Reduzir Expressões.

Técnicas auxiliares de T_1 , T_2 , T_3 e T_4 :

- $T_1 \rightarrow \tau_{DRE/TTC}$: Desenvolver ou Reduzir Expressões e Transpondo Termos ou Coeficientes, Invertendo Operações;
- $T_2 \rightarrow \tau_{DRE}$: Desenvolver ou Reduzir Expressões;
- $T_3 \rightarrow \tau_{ITZ/TTC}$: Igualando os Termos do Produto a zero e Transpondo Termos ou Coeficientes, Invertendo Operações;
- $T_4 \rightarrow \tau_{DRE/FE}$: Desenvolver ou Reduzir Expressões e Fatorar Expressões, colocando em evidencia o Fator Comum.

Na sequência, temos as Tecnologias que procuram justificar as Técnicas:

- $T_1 \rightarrow \tau_{CQ/FB} \rightarrow \theta_{POI/PR}$: Propriedades das Operações Inversas em IR ou Lei da Transposição de Termos e Propriedade da Radiciação;
- $T_2 \rightarrow \tau_{TTC} \rightarrow \theta_{PR/POI}$: Propriedade da Radiciação e Propriedades das Operações Inversas em IR ou Lei da Transposição de Termos;
- $T_3 \rightarrow \tau_{FE} \rightarrow \theta_{PDM/PPN/POI}$: Propriedade Distributiva da Multiplicação, Propriedade do Produto Nulo e Propriedades das Operações Inversas em IR ou Lei da Transposição de Termos.;

- $T_4 \rightarrow \tau_{DRE} \rightarrow \theta_{PDM/PPN}$: Propriedade Distributiva da Multiplicação, Propriedade do Produto Nulo.

Outras questões relacionadas aos tipos de tarefas, técnicas e tecnologias podem ser encontradas no capítulo relacionado ao saber algébrica no tópico que trata da sintaxe.

No que diz respeito às organizações didáticas, utilizamos como critérios as informações contidas no capítulo referente à teoria antropológica do didático, em especial, no tópico que trata das OD. Esse tópico traz informações importantes, em que definem os seis momentos didáticos:

- O primeiro momento: o primeiro encontro propriamente dito com a tarefas;
- O segundo momento: a exploração do tipo de tarefa e elaboração da técnica;
- O terceiro momento: a constituição do ambiente tecnológico-teórico;
- O quarto momento: o trabalho da técnica;
- O quinto momento: a institucionalização;
- O sexto momento: a avaliação.

Esperamos que, após passar por todas as etapas da metodologia, possamos contemplar os nossos objetivos. Veremos na análise dos dados como se comportam essas informações.

ABORDAGEM ANALÍTICA DOS DADOS

ABORDAGEM ANALÍTICA DOS DADOS

Nesse capítulo temos a intenção, a partir do referencial teórico adotado e dos critérios de análise construídos, de apresentar a análise do nosso estudo⁹⁵, intitulado: *“O Contrato Didático e as Organizações Matemáticas e Didáticas: analisando suas relações no ensino da equação do segundo grau a uma incógnita”*.

Iniciaremos apresentando um esquema de análise, com intuito de esclarecer o caminho que utilizamos para produzir informações e responder aos nossos questionamentos.

Na sequência, daremos atenção ao primeiro momento de análise que responde ao objetivo geral da pesquisa: a análise das relações contratuais nas organizações matemáticas e didáticas. No segundo momento, apontamos uma síntese das organizações matemáticas utilizadas pelos sujeitos da pesquisa, bem como, a relação com as organizações didáticas. Associado a esse momento, apresentamos também alguns elementos contratuais comuns aos dois sujeitos.

6.1 Esquema para Análise dos Dados

O esquema que apresentaremos a seguir, visa tornar mais claro todas as ações na análise dos nossos dados. Para isso, procuramos apontar: os eixos centrais analíticos da pesquisa; a ordem de análise dos eixos e as relações entre eles; bem como, os elementos específicos de cada eixo que serão alvo das investigações. A partir dessas informações, surge a necessidade de discutir a dinâmica de análise, ou seja, como ela será conduzida.

Temos como eixos centrais de análise: (a) o fenômeno contrato didático, (b) as organizações matemáticas e (c) as organizações didáticas. O fenômeno CD toma

⁹⁵ Destacamos que esse momento é fruto do cumprimento de todas as etapas da pesquisa, apresentadas na abordagem metodológica, destacando a primeira, que se refere à filmagem dos recortes das aulas dos dois professores e seus alunos. Esse destaque existe, porque o cumprimento das demais, depende, necessariamente, da primeira.

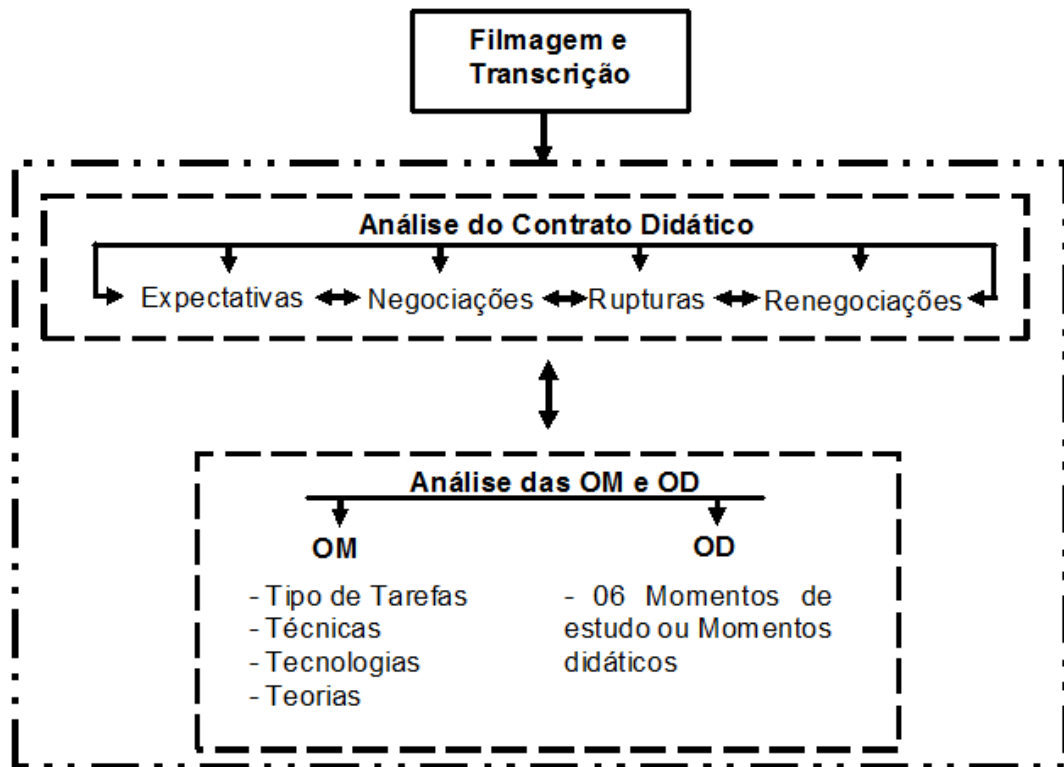
lugar na pesquisa como o eixo principal, por ser o tema central do nosso estudo. A nossa escolha se associa ao pensamento de Chevallard, Bosch e Gáscon (2001) que entende o CD como a pedra de toque de toda a organização didática. Nesse sentido, surge em primeiro lugar sua análise e, de forma complementar, a análise dos outros dois eixos, as OM e OD. A nossa intenção em escolher o CD para iniciar a análise não diminui a importância dos dois outros eixos OM e OD.

As negociações, as rupturas e as renegociações são, de acordo com a literatura, os elementos constitutivos do CD, que fazem parte da nossa análise. Associado à análise desses elementos, temos os tipos de tarefas, as técnicas, as tecnologias e teorias, elementos constitutivos das organizações matemáticas (OM). Nas organizações didáticas (OD), temos os momentos de estudo ou momentos didáticos a serem investigados, esses são em número de seis.

Chamamos atenção para o fato de não termos a intenção de analisar, separadamente, a relação entre o contrato didático, as organizações matemáticas e as organizações didáticas, ou até outros elementos internos a esses conceitos. Optamos por adotar uma estratégia de análise “dinâmica”, em que todos os objetos investigados possam estar dialogando entre si, produzindo informações sobre a relação entre eles.

Pretendemos a seguir organizar essas informações por meio de uma estrutura que chamamos de “Esquema de Análise”. Entendemos que o esquema apresentado permite explicar o caminho que adotamos para obter as informações necessárias que contemplem nossos objetivos.

Figura 36: Esquema de análise



Fonte: Elaborado pelo autor da tese

Antes de dar início às análises, chamamos atenção sobre o “olhar” que daremos aos dados coletados, à transcrição das aulas. Na nossa análise, não temos a intenção, de maneira alguma, de analisar se as aulas dos professores são boas ou ruins; se em dado momento, em relação a um dado conceito, o professor se saiu bem ou mal. Procuramos analisar a aula dos dois professores, sob o ponto de vista do contrato didático, organizações matemáticas e didáticas, para responder as questões de pesquisa elaboradas na introdução.

6.2 Análise das Relações Contratuais nas Organizações Matemáticas e Didáticas na Sala de Aula dos Professores: Davi e Lucas.

Como descrito no capítulo da TAD, existem aspectos que se inter-relacionam e são inseparáveis no trabalho do professor: a organização matemática, o contrato didático e a organização didática. As relações contratuais que emergem da relação didática, estão atuando no momento em que uma organização matemática está sendo colocada em cena por meio de uma organização didática.

Assim, a OD se articula com tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias que darão conta das atividades mobilizadas (CHEVALLARD, 1999). A organização matemática tem seu foco na realidade matemática envolvida, no nosso caso, as equações de segundo grau a uma incógnita. Por outro lado, a OD se preocupa em como pôr em prática metodologias, concepções, recursos didáticos, entre outras questões, na sala de aula.

Antes de iniciarmos a análise⁹⁶, destacamos que os sujeitos⁹⁷ fazem parte de campos de pesquisas distintos, um leciona na rede estadual (Davi) de ensino e o outro na rede privada (Lucas).

No que diz respeito à análise dos dados adiante, organizamos, em forma de quadros, as transcrições dos professores e alunos e, em forma de tabela, os registros matemáticos dos professores e alunos.

Propomos a análise dos dados de maneira a responder os questionamentos da pesquisa: como se comporta numa relação didática o professor e seus alunos, sob o ponto de vista do contrato didático, no ensino das equações do segundo grau? Quais organizações matemáticas e didáticas surgem no ensino de equações do segundo grau, sob o ponto de vista da TAD? E qual a relação entre o contrato didático e as organizações matemáticas, no ensino das equações do segundo grau?

Os primeiros dados submetidos à análise serão as aulas do professor Davi e, logo no tópico seguinte, será a análise das aulas do professor Lucas, e essa discussão será o primeiro momento deste capítulo. Após essa etapa, anunciamos outro tópico em forma de síntese, em que contemplamos os principais elementos da análise dos dois sujeitos, inclusive alguns elementos contratuais comuns.

6.2.1 Análise das Relações Contratuais nas Organizações Matemáticas e Didáticas na Sala de Aula do Professor Davi.

O início da filmagem do professor “Davi” coincidiu com a volta às aulas do segundo semestre do ano de 2014. Nessa mesma época, ocorria a Copa do Mundo e, conseqüentemente, a eliminação do Brasil. Chamamos atenção para esse fato, por

⁹⁶ A análise que apresentamos das aulas dos professores não representa todos os recortes da pesquisa. Escolhemos apenas aqueles que consideramos mais relevantes para contemplar todos os objetivos da tese.

⁹⁷ Com intuito de preservar a identidade dos sujeitos envolvidos na pesquisa, utilizamos os pseudônimos de “Davi e Lucas”.

existir todo um empenho do professor para controlar os ânimos dos alunos e dar início ao trabalho com as equações do segundo grau a uma incógnita. O professor “Davi” chama a atenção dos alunos sobre o retorno às aulas, o início do terceiro bimestre e dos conteúdos a serem trabalhados nesse período.

Após esse diálogo o professor inicia a introdução ao estudo de “equação do segundo grau a uma incógnita”. O seu primeiro registro faz referência ao conteúdo a ser ensinado no decorrer do bimestre. Dentre os conteúdos apresentados, destacamos:

- Introdução às equações;
- Resolvendo equações do segundo grau;
- Trinômio quadrado perfeito e equações do segundo grau;
- Fórmula geral de equação do 2º grau;
- Resolvendo problemas.

Após esse momento, inicia um diálogo com os alunos no intuito de constituir as primeiras “negociações⁹⁸” sobre equação do segundo grau.

O nosso estudo entende negociação⁹⁹, como uma convenção de uma ou mais pessoas, no qual, implica na aceitação de certos papéis e obrigações a cumprir por cada uma das partes envolvidas (JONNAERT; BORGHT, 2002).

A negociação diz respeito, também, a como o professor gerencia o saber com os alunos numa situação didática. O ambiente onde ocorrem essas negociações é a sala de aula, nesse sentido, ela é considerada por pesquisadores como um “palco de negociações de significados” e o professor, nesse palco, tem o papel de organizar a cena em função das situações didáticas (BROUSSEAU, 1986). Ao organizar a cena através das negociações, regras vão surgindo e desaparecendo em função do ciclo de aprendizagens, ou em função de outras negociações e renegociações.

Para Brousseau (1996b, p. 50) o contrato didático é a *“regra do jogo e a estratégia da situação didática. É o meio que o professor tem de colocar em cena”* as situações didáticas. Vale lembrar que a negociação das regras pode ser também unilateral (JONNAERT; BORGHT, 2002). As regras unilaterais surgem de

⁹⁸ Conceito central em Brousseau (1984, 1986), referente ao CD. Utilizamos o sentido de negociação que se encontra nos critérios de análise, e este foi construído a partir de Brousseau (1986; 1996b; 2008), Jonnaert (1994) e Jonnaert e Borght (2002).

⁹⁹ Vários são os momentos em que utilizamos o termo “negociação” e segue esse mesmo sentido.

negociações apenas por parte professor. Os alunos, nessa situação, permanecem sem se declarar, mas as aceitam tacitamente. Entendemos que a negociação pressupõe uma interlocução entre os sujeitos didáticos. Tal interlocução não necessita, fundamentalmente, de que ambos os parceiros “falem”. No sentido linguístico, mesmo com o silêncio de uma das partes, é possível se falar em interlocução (BARROS, 2012¹⁰⁰).

Os desdobramentos das negociações podem gerar regras explícitas, tácitas e ou implícitas. A seguir¹⁰¹, apresentamos um início de negociação proposta pelo professor.

Quadro 15: Recorte da transcrição da aula - Davi

(P): (...) E estamos aí retornando para o terceiro bimestre, onde *nós vamos iniciar equação do segundo grau*. Possivelmente, vocês já trabalharam alguma coisa com equação e a gente *vai fazer uma pequena revisão sobre a equação do primeiro grau* e depois a gente *vai trabalhar em conjunto, em equipe, em grupo...* para desenvolvermos as equações do segundo grau. Então não é novidade para vocês... *vocês possivelmente já tenham (sic) até trabalhado com equações do segundo grau, porém de maneira, assim, bem solto, sem saber que era equação do segundo grau e nós vamos começar, por incrível que pareça, também dessa maneira.*

O recorte acima aponta o professor em um diálogo, em que negocia, explicitamente, com seus alunos que o terceiro bimestre é o momento de trabalhar com as equações do segundo grau. Na sequência, fala que “possivelmente” (palavras do professor¹⁰²) os alunos já tenham trabalhado com “equações”. Esse termo genérico equações, dá a entender a existência de uma negociação implícita com os alunos sobre o ato de conhecer as equações do primeiro grau e também do segundo grau.

Revela adiante, mais explicitamente, que o trabalho com equação para os alunos não é novidade, ou seja, eles podem ter trabalhado em outro momento. Isso nos leva a crer que o ato de conhecer as equações na instituição sistema didático, possivelmente, teve seu nascedouro em outros contextos.

Para Chevallard (1991) um saber S se encontra em diversos tipos de instituições I, que corresponde, em termos de saberes, respectivos habitats diferentes.

¹⁰⁰ <http://www.uff.br/periodicoshumanas/index.php/ecos/article/view/724>.

¹⁰¹ Em todos os recortes apresentados, os trechos em itálico dizem respeito a momentos importantes da transcrição que serão discutidos na análise.

¹⁰² As frases que se encontram entre aspas representam a fala do professor na íntegra.

Além disso, os saberes que se encontram em instituições diferentes da que se originou, devem ter sofrido algum tipo de transposição institucional.

As ações didáticas do professor, nesse início, apontam para necessidade de uma passagem das equações do primeiro grau para o segundo grau. Essa negociação implícita surge, possivelmente, porque o professor entende que as equações do primeiro grau seriam a base para compreender as equações do segundo grau e que o trabalho vai se dar de forma “natural”, ou seja, quase “não perceptível” por parte dos alunos. Por outro lado, embora o professor faça referência às equações, não justifica, em termos de conceitos, que a equação do primeiro grau seria a base para o estudo da equação do segundo grau.

O professor segue sua aula e entrega aos alunos uma atividade impressa¹⁰³ envolvendo equações do segundo grau. Aqui, surge a oportunidade do primeiro contato com essas equações na aula. A atividade procura discutir sobre o *grau de uma equação e resolução de problemas*. Abaixo apresentamos um recorte da transcrição da aula.

Quadro 16: Recorte da transcrição da aula - Davi

(P): Bom, a gente vai começar com o material em mão para a gente ir lendo e acompanhando, possivelmente, já as duas primeiras situações que tem ali, o grau de uma equação e resolver equação do segundo grau, possivelmente, nesse folha que vocês vão recebendo a gente já vai trabalhar, né? Vendo algumas situações problemas, para ver o que vocês identificam... *de como se forma uma equação e o grau das equações que se apresenta aí na folha*. Vocês vão ver que é fácil, muito fácil, não tem realmente nada complicado, você vai ver lá na frente, quando você tiver resolvendo, aí você vai ver como é fácil. Então todos... olha... tá faltando... ficou na metade, né?

O diálogo acima dá início a uma negociação, que visa identificar (de maneira simples e visualmente) as diferenças, especialmente, em termos de grau, entre as equações: do primeiro grau, do segundo grau, do terceiro grau, e em outros graus.

Nesse momento, já é possível imaginar que os registros das equações vão ser as primeiras aparições dos tipos de tarefa ou dos subtipos de tarefa, embora o professor não esteja procurando nenhuma técnica para executá-la.

Já no próximo recorte, o professor negocia, explicitamente, com seus alunos que as equações do segundo grau podem ser “*subdivididas, ou fatiadas*” (palavras do

¹⁰³ Com relação às atividades, percebemos que as informações contidas nelas se encontram em grande parte, também, no livro didático. Na medida do possível, apresentaremos recortes das atividades antes das análises.

professor) em, equações completas e incompletas. Além disso, utiliza, em suas explicações, exemplos de equações na forma completa (tipo de tarefa, $T_1: ax^2 + bx + c = 0$) com intuito de negociar grau da equação. Como podemos ver a seguir.

Quadro 17: Recorte da transcrição da aula - Davi

(P): Bom, a equação do segundo grau, ela pode estar subdividida ou fatiada em equações completas, numa forma geral completa e na forma incompleta, ok?

(A): Ok

(P): Então a gente vai distinguir, vai diferenciar quando uma equação é do primeiro grau, quando é do segundo grau, quando é do terceiro grau, quando é do quarto grau e, assim, sucessivamente. Também não somente conhecer, diferenciar essas equações, como também diferenciar a equação quando ela é completa e quando ela é incompleta... a equação do segundo grau.

(A): O que é incógnita?

(P): Isso... Olhe aí, já achei uma pergunta, o que é a palavra incógnita?

(A): É o valor desconhecido, né?

(P): Oi?

(A1): É o valor desconhecido ou não?

(A2): É o x e o y...

(P): Se é o valor desconhecido?

(A2): Isso.

(P): Pode ser o valor desconhecido de x, de y, né? Pode ser o valor de x e y. Então, incógnita é o valor realmente desconhecido que se procura saber, né? O valor desconhecido que se procura saber. Ou, na questão, pode ser, ou, no problema, pode ser o enigma do problema. Né? Essa incógnita, pode ser o enigma do problema. (...) Então ele traz aqui em cima, dizendo assim, “as equações podem ser classificadas de acordo com o valor do maior expoente da incógnita”.

Uma primeira consideração importante que encontramos no recorte acima, está relacionada ao início de uma negociação implícita, que envolve Davi, os alunos e a constituição de um ambiente tecnológico-teórico (terceiro momento didático). Para Chevallard (2007) esse momento da constituição do ambiente tecnológico-teórico, é utilizado em muitas ocasiões como o primeiro momento da organização didática, por uma questão de “economia da didática global”. Assim, o responsável pela ação didática (o professor) inverte a ordem do ensino, apresentando em primeiro lugar o conceito ou definição do conteúdo, para depois colocar os exemplos e, sequencialmente, os exercícios.

Após dar início à negociação implícita sobre o ambiente tecnológico, surgem outras negociações, dessa vez explícitas, relacionadas também à constituição desse ambiente. A primeira negociação que destacamos, diz respeito à classificação das equações. Nela, Davi propõe que “a equação do segundo grau, ela pode estar subdividida ou fatiada em equações completas, numa forma geral completa e na forma

incompleta". Além disso, o seu discurso tecnológico revela, explicitamente, que é importante para o aluno "*diferenciar quando uma equação é do primeiro grau, quando é do segundo grau, quando é do terceiro grau, quando é do quarto grau*". Outro aspecto explícito diz respeito ao terceiro momento da organização didática, quando Davi fala que: "as equações podem ser classificadas de acordo com o valor do maior expoente da incógnita".

Essas negociações podem ser identificadas como regras contratuais: a primeira regra é implícita e, no contexto mais geral sobre o ensino, ela reflete que é necessário em primeiro lugar o professor preparar o aluno, dentro de um ambiente tecnológico-teórico sobre as equações (por exemplo, grau de equações), para, em seguida, apresentar exemplos e exercícios relacionados à equação do segundo grau a uma incógnita (tipos de tarefa).

De maneira complementar, apresentamos outra regra explicitada por Davi, que diz respeito à classificação da equação. Ele entende que os alunos devem "*olhar para o expoente, sempre que necessário, para classificar a equação, pois é através dele que descobrimos o seu grau*". Essa identificação permite também diferenciar outros tipos de tarefa.

Ainda sobre o recorte acima, é possível perceber na negociação entre o professor e os alunos, uma espécie de "*reorganização contratual*" sobre os conceitos de equação. A ideia de reorganização contratual não aparece originalmente na literatura, e a estamos propondo como uma contribuição de nossa tese. Mais adiante definiremos o que entendemos como sendo essa "reorganização".

Davi fala em "*diferenciar a equação do segundo grau quando ela é completa e quando ela é incompleta*". Imediatamente, o aluno interrompe a sua fala com uma pergunta inesperada naquele momento, sobre "*o que é incógnita?*". Nessa indagação, entendemos que o aluno antecipa a negociação de um outro conceito de equação que não estava, nesse momento, em jogo na relação didática, e tampouco tinha sido apresentado pelo professor em momento anterior. Essa antecipação sugere duas reflexões: a primeira é que o aluno, de fato, estava fazendo parte do contrato do professor, pois ele recorre a um conceito intimamente relacionado ao de equação, que seria discutido mais adiante; a segunda é que, se o aluno apresenta um termo que não foi colocado ainda pelo professor em sala de aula, é porque ele teve acesso a esse conceito em outra "*instituição*".

O questionamento trazido pelo aluno e aceito pelo professor, faz com que o conceito de “incógnita” se torne, antecipadamente, parte daquela cena didática, uma vez que o professor “entra no jogo” e passa a explicar esse conceito, reorganizando as cláusulas do contrato. No entanto, entendemos que não ocorre uma ruptura drástica como nas situações clássicas de ruptura de contrato (por não aceitação das cláusulas, por exemplo). Poderíamos supor que a reorganização seria resultado de uma “ruptura branda” ou do esforço do professor para evitar a ruptura, “ajustando” o jogo didático. Após a reorganização, o professor, explicitamente, pergunta aos alunos, “o que é incógnita?” E os alunos respondem que incógnita “é o valor desconhecido”.

Dito de forma resumida, o termo reorganização, que aqui utilizamos, aparece como uma alternativa à ideia de renegociação, já discutida na literatura (BROUSSEAU, 1996). Enquanto que a renegociação pressupõe que houve uma ruptura do contrato pelo fato dele não ter sido aceito pelo(s) aluno(s), a reorganização sugere que embora não tenha havido uma ruptura no sentido estrito (pela não aceitação daquilo que foi negociado), torna-se necessário “mudar as coisas de lugar”, reorientar, antecipar algo que viria mais tarde, etc.

Assim, podemos pensar que a reorganização contratual que surge na relação didática pode, de alguma forma, está relacionada a algum tipo de sistema de defesa do próprio contrato didático, que impede de imediato uma ruptura ou a minimiza.

Nesse contexto, a “ruptura de contrato” mantém uma relação estreita com a “reorganização contratual”. Embora a reorganização não seja necessariamente decorrente de uma ruptura, ela proporciona ao professor uma retomada da negociação. Do ponto de vista da ruptura de contrato, a aprendizagem vai repousar, não sobre o funcionamento do contrato, mas sobre suas rupturas (BROSUSSEAU, 1996). Isso faz com que o ato de aprender implique para o aluno romper com o contrato (recusar a negociação). Por outro lado, uma relação didática não pode viver constantemente de rupturas, nesse sentido entendemos a reorganização contratual como um contraponto para o equilíbrio da relação didática.

Do ponto de vista da organização didática, quando o professor repete várias vezes que *“a incógnita é realmente o valor desconhecido que se procura saber”*, existem indícios que essa seria uma palavra-chave importante para o estudo das equações. A repetição de palavras pode fazer parte do hábito do professor. Implicitamente, ele pode estar, também, adentrando no quinto momento da organização didática, a *“institucionalização”* do saber. A institucionalização para

Chevallard (1999) tem por objetivo incorporar o que de fato diz respeito à organização matemática, distinguindo claramente os elementos que apenas participaram da organização matemática, daqueles que se incorporaram ao seu equipamento praxeológico.

Os recortes anteriores fazem parte da introdução do estudo da equação do segundo grau. Adiante, procuramos aprofundar nossa análise, enfocando a relação do contrato didático com as organizações matemáticas (tipos de tarefa, técnicas e tecnologias) e didáticas (os momentos didáticos).

Um primeiro destaque a ser feito, diz respeito às negociações em torno do grau da equação e da incógnita. O recorte abaixo apresenta a atividade proposta pelo professor.

Figura 37: Recorte de atividade de Davi

GRAU DE UMA EQUAÇÃO

AS EQUAÇÕES PODEM SER CLASSIFICADAS DE ACORDO COM O VALOR DO MAIOR EXPOENTE DA INCÓGNITA.

1) DADA A TABELA COM 10 (DEZ) EQUAÇÕES, COMPLETE AS LACUNAS, INDICANDO O GRAU DE CADA EQUAÇÃO E A INCÓGNITA EM CADA CASO.

EQUAÇÕES	GRAU	INCÓGNITA
$X^2 - 5X + 6 = 0$		
$2Y^2 - 8 = 0$		
$X^3 - X^2 = 0$		
$Y^3 + 2Y = 0$		
$5X^2 - X + 9 = 0$		
$9Y^2 + 3Y^2 + Y = 20$		
$4X^2 - X = 16$		
$Y^2 = 81$		
$9X + 6 = 7X + 4$		
$3Y + 4 = -20$		

Como podemos observar, a atividade está relacionada à classificação de uma equação de acordo com o valor do maior expoente. É possível perceber que o professor utiliza equações completas e incompletas de diferentes graus, que, sob o ponto de vista das OM, podem ser classificadas em tipos de tarefa. Já o quadro abaixo apresenta um trecho da aula.

Quadro 18: Recorte da transcrição da aula - Davi

(P): Complete as lacunas indicando os graus de cada equação. Aí acima ele diz assim, *as equações elas podem ser classificadas de acordo com o valor do maior expoente da incógnita*. Então, aqui nas equações nós encontramos incógnita com a letra x e incógnita com a letra y?

(Als): y...

(P): Ok? Então eu escolhi aí duas letras diferentes x e y para representar as incógnitas. Será que você daria ou será que você, é... conseguiria identificar o grau dessa primeira situação, dessa primeira equação que está aí? Tá na folhinha aí... então, que grau a gente encontraria aí? Ele disse num enunciado acima, que o *grau de uma equação é visto pela... pelo maior expoente que tem na expressão. Qual é o maior valor que tem aí, qual o expoente ou a incógnita de maior expoente que tem aí?* (...)

(A): inaudível...

(P): Hein? Podem ficar à vontade... não sabem?

(A): Não...

Uma primeira impressão é que o professor procura constituir um ambiente tecnológico-teórico com seus alunos. Desse modo, busca justificar, através de alguns elementos tecnológicos, a classificação das equações. Davi declara explicitamente que as equações podem ser classificadas de acordo com o maior valor que se encontra no expoente da incógnita, e que se chama grau da equação.

O fato de estar repetindo essas informações aos alunos sobre o grau da equação, pode apontar para uma institucionalização do conceito. Esse é, na realidade, o momento em que o professor reforça suas explicações anteriores e destaca as que são importantes para os alunos. Outro aspecto que consideramos relevante é o surgimento de algumas cláusulas de contrato que se confundem com o momento da institucionalização. Observe que o que o professor fala, “as equações podem ser classificadas de acordo com o maior valor que se encontra no expoente da incógnita”, pode ser interpretado de duas formas.

Para Chevallard (1999), a institucionalização procura incorporar os elementos que fazem parte da organização matemática, distinguindo, no entanto, os que de fato devem ser incorporados ao conhecimento dos alunos. Essa fato pode ser relacionado ao que dialogamos no parágrafo anterior.

A equação do segundo grau, que o professor toma como exemplo para discutir o grau da equação, encontra-se na forma completa $ax^2 + bx + c = 0$ (Tipo de tarefa T₁).

Quadro 19: Registro matemático de Davi		
$x^2 - 5x + 6 = 0$	Grau	Incógnita
	2º grau	x

Embora essa tabela não represente uma resolução que determina as raízes da equação, esse registro matemático pode ser entendido como o primeiro encontro propriamente dito com o tipo de tarefa T₁.

Para Chevallard (1999), o primeiro encontro com o tipo de tarefa pode ocorrer várias vezes na aula, em função do entorno matemático e didático que são produzidos pelos os atores que se encontram na relação didática. O pesquisador aponta ainda que é possível voltar a descobrir um tipo de tarefa como se volta a descobrir uma pessoa que se crê conhecer (CHEVALLARD, 2007).

No entanto, chamamos atenção para a função do contrato didático que é tornar o funcionamento da relação didática dinâmico (BROUSSEAU, 1996; JONNAERT; BORGHT, 2002). Então, a partir do que pesquisador afirma, podemos supor que o entorno matemático e didático estão subordinados ao contrato didático, ou que essa poderia ser também uma função do contrato didático.

Vale destacar que a atividade (figura 20) apresentada aos alunos dá início a um desfecho das negociações sobre o grau da equação. É possível observar também que ela mantém uma relação com a exploração do tipo de tarefa e elaboração da técnica na identificação da equação.

A aula segue e o professor faz um questionamento sobre uma equação que, supostamente, seria do segundo grau, como veremos abaixo.

Quadro 20: Registro matemático de Davi
<p>Será que essa equação é do 2º grau?</p> $x^2 + 3x = x + x^2$

Observe a transcrição abaixo:

Quadro 21: Recorte da transcrição da aula - Davi

(P): Ele traz aí uma outra situação. *Será que a equação x ao quadrado mais três x igual a x mais x ao quadrado é do segundo grau?* Calcule o valor de x . Para você saber se ela é igual ou não... então, será que elas são? x , ou seja, se é do segundo grau né? Será que essa equação é do segundo grau? Será?

Silêncio...

(P): Será que essa equação aqui é do segundo grau?

(A): É...

(P): É mesmo?

(A): É...

Silêncio...

(P): Aparentemente, parece ser do segundo grau porque o expoente é dois... Né verdade?

(A): Quando for resolver vai ser do primeiro grau...

(P): Quando for resolver vai ser do primeiro grau, porque... aí agora eu quero saber o porquê... Hein?

No recorte acima, o professor Davi apresenta um subtipo de tarefa com intuito de discutir o grau da equação. Logo de início, ele questiona aos alunos se a equação é do segundo grau, e os alunos de imediato afirmam que sim. O professor insiste no questionamento colocando em dúvida a resposta dos alunos. Refletindo sobre isso, podemos dizer que a primeira afirmação por parte dos alunos acontece, possivelmente, porque, anteriormente, a cláusula de contrato vigente sobre a classificação da equação se referia a olhar para os termos da equação e identificar o valor do expoente, e, assim, determinar se a equação é do primeiro grau ou do segundo grau.

Por outro lado, no segundo questionamento, o professor produz uma ruptura nos alunos a partir de um subtipo de tarefa. Implicitamente, o professor propõe através da frase *“aparentemente, parece ser do segundo grau porque o expoente é dois”*. Essa informação remete os alunos à necessidade de romper e renegociar outra regra, que reforça a ideia de que apenas olhar para equação é insuficiente para identificar o seu grau. Agora é necessário manipular os valores da equação, através de técnicas (auxiliares) que permitam a equação ser reduzida à forma canônica, e, assim, identificar o seu grau e a sua forma.

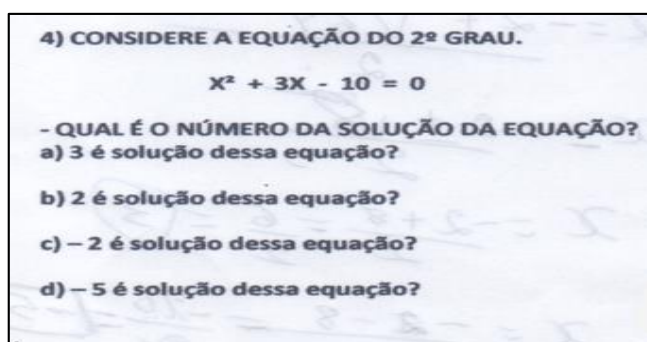
Nesse contexto, a nova regra de contrato aponta que as equações, na sua forma inicial, nem sempre refletem o que apresentam, e isso faz com que exista a necessidade do aluno utilizar uma técnica matemática (em geral auxiliar, desenvolver ou reduzir expressões) para que a equação assuma a sua forma canônica (o tipo de

tarifa) e, assim, seja possível classificar a equação em do primeiro grau ou do segundo grau.

Essa técnica negociada, embora ainda no início da aula, enseja um passo a passo (os movimentos das incógnitas e números do primeiro membro ao segundo membro) na resolução, que se revela semelhante a uma regra de contrato e se baseia em colocar sempre os valores de x no primeiro membro (antes da igualdade), nas palavras de Davi “agrupando os valores de x no primeiro membro”, e os valores numéricos no segundo membro (depois da igualdade). Observe a fala do professor: “*Como é que eu resolvo uma equação... agrupando os valores de x no primeiro? Membro...*” Depois o professor conduz, quase de forma ritualizada, as outras regras.

Após essas negociações, o professor apresenta uma equação do 2º grau na sua forma completa. Segue abaixo o recorte da atividade, o registro matemático do professor e a negociação com seus alunos.

Figura 38: Recorte de atividade de Davi



Quadro 22: Registro matemático de Davi

$x^2 + 3x - 10 = 0$	
$x^2 + 3x = 10$	
a)	3
b)	2
c)	- 2
d)	- 5

Quadro 23: Recorte da transcrição da aula - Davi

(P): Tem uma outra situação aí... ele diz assim, considere a equação do segundo grau: x ao quadrado, mais três x , menos dez é igual a zero... (...) quando o número da solução da equação, dessa equação que está aí... ele traz quatro itens. (...) *E por incrível que pareça é uma equação do segundo grau na forma completa... ela está escrita aqui na forma completa.* (...) Será que dá para vocês resolverem sozinhos aí? Eu vou dar dez minutos para vocês....

(A1): Dá não professor...

(P): Hein...

(A1): Dá não...

(P): Dá não? Nem para começar?

(A1): Não...

(P): Tem certeza... J (aluno)?, C (aluno)?...

(A2): Oi professor... Tô em dúvida no x ao quadrado...

(P): O problema é esse x ao quadrado, né?

(A2): É...

(P): Mas vamos diminuir aqui o problema. Olha, a gente vai resolver isso aí por incrível que pareça mentalmente viu... mentalmente... para vocês verem como é fácil. Eu tenho aqui x ao quadrado, mais três x ...

(A): Igual a zero...

(P): Vou pegar aqui o dez, que está antes da igualdade, vou passar para depois da igualdade... né assim, que a gente tem feito sempre nas outras equações, o valor que não tem x vai sempre para depois da igualdade. O dez está antes da igualdade negativo, vai para depois...

(...)

(P): A gente pode resolver isso por *tentativa*, não pode? É só trocar o valor que você tem aqui e você vai *testando*. Se eu colocar aqui o três ao quadrado e pego o três aqui e multiplico pelo o mesmo três, será que vai dar dez? Hein?

(A): Três vezes três é igual a nove...

(P): Tentem aí... vejam quanto é que dá... eu tenho certeza que vocês resolvem isso aí...

(A): É para substituir é?

(P): Um... tente... invente... faça diferente... aí a gente já vai partir para resolver equação do segundo grau, até agora a gente viu só do primeiro grau. E a gente vai resolver equação do segundo grau de uma maneira bem prática, né? ... de uma maneira bem, simples... ei, G (aluno)? Tu acha (sic) que é a letra b ?

O professor apresenta uma atividade com o tipo de tarefa T_1 ($ax^2 + bx + c = 0$) aos alunos com intuito de negociar sua resolução pela técnica de tentativa e erro. No problema existem quatro valores como alternativas, que os alunos devem identificar qual deles é solução para equação.

É perceptível a negociação do professor com os alunos na procura de uma divisão de responsabilidade para a atividade em curso. Um fator que denuncia essa negociação são os questionamentos por parte do professor. Em meio à divisão de responsabilidade surgem indícios de uma *reorganização contratual* por parte do professor. Observe que após o aluno responder negativamente a solicitação do professor, foi necessário o estabelecimento de uma reorganização.

Para reduzir o problema, o professor apresenta, implicitamente, uma técnica matemática que se refere à transposição de termos ou coeficientes, invertendo operações. Assim, faz a transposição do termo dez para o segundo membro de forma que reduz o grau de dificuldade dos alunos. Essa ação do professor aponta também indícios de efeitos de contrato.

Veja o trecho que corresponde ao que falamos: (P): *“tem uma outra situação aí... Será que dá para vocês resolverem sozinhos aí? Eu vou dar dez minutos para vocês...”*. O professor propõe aos alunos a resolução e os alunos começam a questionar, fazendo surgir, implicitamente, uma reorganização contratual. Observe a fala do aluno: *“dá não professor...”*. O professor prontamente procura reorganizar a negociação, para salvar a situação proposta, *“(P): Dá não... Nem para começar?”* O aluno diz *“não”* e fala que *“existe dúvida no x ao quadrado”*. Nesse sentido, o professor reorganiza a situação, apontando para os efeitos de contrato. Veja o que o professor fala: *“mas vamos diminuir aqui o problema”*. Assim, o professor passa o dez para o segundo membro e dá dica para os alunos substituírem o valor na equação e observar a igualdade. Essa reorganização salva a situação e os alunos se colocam à disposição da resolução.

Logo após essas considerações, o professor faz convites aos alunos para responderem no quadro esse problema. A participação no quadro se resume a três alunos, nesse caso quem participou foi G (aluno). Ele substituiu o valor na equação e encontrou a resposta esperada por Davi. O professor em seguida propõe outra atividade: *“olhe, a primeira equação do segundo grau que eu botei aí no quadro ele respondeu”*. [...] *“(P): eu vou... deixa eu passar uma outra diferente, parecida com essa aí...”*.

É possível observar que na relação entre o CD e a OM, o professor Davi negocia, implicitamente, com seus alunos a técnica da transposição de termos ou coeficientes e, explicitamente, a técnica de tentativa e erro na resolução da equação do segundo grau. A mesma negociação estabelece, também, que a primeira técnica (transposição de termos), que poderia ser considerada uma técnica auxiliar, deve ser utilizada antes da segunda técnica (tentativa e erro), pois o professor passa sempre o termo “c” para o segundo membro com intuito de estabelecer o conceito de equivalência pela substituição do valor na incógnita.

Sobre as técnicas, Chevallard (1999) aponta que existem situações em uma praxeologia em que pode existir uma técnica superior à outra, ao menos no que

concerne à realização de certo número de tarefas. O pesquisador se refere a essa técnica como sendo mais potente e eficaz. No caso de Davi, a técnica de tentativa e erro para se tornar mais eficiente necessita de outra técnica: a transposição de termos ou coeficientes.

As regras de contrato negociadas pelo professor na resolução, dizem respeito aos movimentos que as incógnitas e os números fazem entre o primeiro e segundo membro. Essa regra aproxima-se do papel da técnica: transpor termos ou incógnitas. Já a regra de contrato: substituir valores para testar a igualdade, está próxima da técnica de tentativa e erro.

A regra de contrato e a utilização da técnica estão tão próximas que na ação didática do professor se confundem. Essa situação acontece, de forma exaustiva, nas negociações da equação do primeiro grau e passam a fazer parte das negociações da resolução com as equações do segundo grau.

Do início das aulas até esse momento que destacamos, é possível dizer que existem indícios de uma regra de contrato implícita, válida para a resolução da equação do primeiro grau e a resolução da equação do segundo grau: as técnicas para encontrar a raiz da equação são as mesmas.

Sob o ponto de vista das OD, o professor promove negociações com os alunos a respeito do primeiro encontro propriamente dito com o tipo de tarefa ($T_1: ax^2 + bx + c = 0$), esse é o momento em que o professor apresenta aos alunos a organização matemática que está em jogo. Um aspecto importante é que a resolução da equação acontece de forma parcial (o professor identifica apenas uma raiz da equação). Outro destaque é que, com o primeiro encontro temos também o segundo momento didático, que é a exploração do tipo de tarefa, e o terceiro momento didático, que é o trabalho da técnica.

A análise da aula de Davi, coaduna-se com a visão de Chevallard (2003) que considera, sobre o segundo momento didático, que o estudo de um problema particular não deve ter como único objetivo sua resolução, mas ser um meio para que se constitua uma determinada técnica de resolução. Acrescenta, ainda, que a elaboração da técnica está no coração da atividade matemática.

Ainda sobre as OD foi observado o quinto momento didático, a institucionalização da situação. O professor nas suas ações didáticas, ao término das atividades dos alunos, faz as suas considerações com intuito de institucionalizar a

situação. Essa atitude do professor torna-se recorrente ao longo das aulas. A sua atenção fica voltada para resolução da equação, em si mesma.

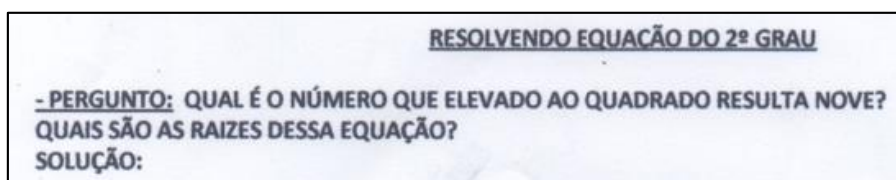
No momento em que o aluno participa no quadro resolvendo as equações, sob a orientação do professor, é perceptível na relação didática o papel do professor na avaliação (sexto momento da OD) da situação. Essa avaliação se restringe a momentos pontuais. No entanto, o professor chama atenção na institucionalização para os detalhes da resolução que colocam em risco a aprendizagem do aluno.

Para Chevallard (1999) é possível existir uma articulação entre a avaliação e a institucionalização. Esse aspecto foi observado na nossa análise. No entanto, entendemos como uma avaliação clássica¹⁰⁴, em que as preocupações estão voltadas para a organização da matemática construída ou em vias de construção, algo semelhante a uma avaliação da organização matemática em si mesma.

O professor, na sequência do exemplo, propõe outros exemplos com características iguais ao anterior. Entendemos que essa atitude potencializa a ideia de que existe um trabalho com a técnica (quarto momento da organização didática) tentativa e erro. O trabalho da técnica, segundo Chevallard (1999), pode ser considerado como trabalho da organização matemática e diz respeito à melhoria da técnica para que ela se torne mais confiável.

No decorrer da aula, o professor propõe outras atividades com intuito de apresentar a resolução da equação, contemplando as duas raízes. Essa situação caracteriza o momento em que o professor determina na resolução as duas raízes da equação do segundo grau. Em seguida Davi convida uma aluna para resolver o problema ilustrado abaixo.

Figura 39: Recorte de atividade de Davi



A aluna aceita o convite, porém não consegue transformar o problema que se encontra em linguagem natural para a linguagem algébrica. Assim, resolve o problema ao seu modo “ $x^2 = 9 \rightarrow 3^2 = 9$ ” (registro da aluna). A forma que a aluna resolve o problema não é aceita pelo professor, sua atitude aponta para uma ruptura de

¹⁰⁴ Termo utilizado por Chevallard (2003; 1999) para discutir o momento didático da avaliação.

contrato, observe: “eu quero a montagem e você já está resolvendo o problema”; os alunos começam a rir da colega em sala de aula e o professor tenta renegociar a situação que se tornou constrangedora, dizendo que “*não... correto... ela está resolvendo correto aí... minha amiga você resolveu o correto*” e a aluna fala “*então eu não sei resolver o problema*”. Assim, o professor manda a aluna sentar-se e explica a resolução. Essa atitude do professor aponta, no nosso entendimento, para o fato de que a aluna não atendeu à sua expectativa em relação à utilização da técnica na resolução da equação no quadro. Além disso, os colegas ao sorrirem, parece reforçar essa ideia de não atendimento à expectativa do professor, remetendo-nos à ideia de fenômeno das expectativas, proposto por Brousseau (1996b), quando menciona o Efeito Pigmalião¹⁰⁵.

Observe abaixo o registro do professor e a transcrição referente à negociação com os alunos.

Quadro 24: Registro matemático de Davi	
$(-3)^2 = 9$	$x^2 = 9$
$(+3)^2 = 9$	$x = \pm \sqrt{9}$
$(+3) \cdot (+3) = 9$	$x = \pm 3$
$(-3) \cdot (-3) = 9$	$S = \{ +3, -3 \}$

Quadro 25: Registro da transcrição da aula - Davi

(P): Agora, aparentemente, existe mais algum acréscimo nessa situação... *aparentemente, ela resolveu certo as raízes...veja a pergunta, as raízes. Isso mostra que ele tem mais de um resultado, ela só colocou aqui como resultado quem?*

(Als): Três...

(P): Três... não foi?

(Als): Foi...

(P): Ela colocou somente como um resultado três, mas... *a equação do segundo grau me dá mais possibilidades. Se eu colocar aqui... ô, presta atenção, menos três ao quadrado também é igual a nove?*

(A1): É sim....

(P): É... porque menos três, vezes menos três. É igual a quanto?

(A1): A nove...

(P): A nove positivo... né verdade?

(Als): É...

(P): Então, se eu colocar aqui mais três, vezes mais três, também é igual a nove?

(Als): É...

(P): É... então, menos três elevado ao quadrado é igual a nove.... Também, mais três elevado ao quadrado também é...

(A): Nove...

(P): É nove... interessante né? Então, eu tenho duas possi... eu tenho duas soluções para esse problema... *tenho o menos três e tenho o mais três*. Por isso para resolver uma

¹⁰⁵ Maiores informações no tópico 3.2.

potenciação que indica uma equação do segundo grau. Não é, como eu tenho aqui, eu faço assim, olha... *x é igual a mais ou menos, raiz quadrada de nove. Perde o expoente aqui dois o x, a incógnita perde o expoente aqui dois e a gente acrescenta aqui a raiz quadrada com o mais ou menos... porque essa solução aqui, ela me dá duas possibilidades, pode ser o mais três e pode ser o menos três...* E se eu multiplicar o menos três ao quadrado também vai me dar nove... e se eu multiplicar mais três ao quadrado também vai dar nove. Tudo bem até aí?

Até esse momento, em termos de OM, Davi negociava com os alunos o tipo de tarefa T_1 ($ax^2 + bx + c = 0$) e a técnica τ_{TE} : Tentativa e Erro (tanto para as equações do primeiro grau quanto as do segundo grau), e o princípio da igualdade dava suporte à aplicação dessa técnica.

Outro destaque é que as equações do segundo grau tinham como resposta apenas uma raiz. No entanto, a negociação acima procura construir a ideia de uma equação do segundo grau com duas raízes. Estamos vendo que, gradativamente, o professor passou da equação do primeiro grau (com uma raiz) para equação do segundo grau (com duas raízes). É possível perceber que o professor elegeu esse contrato no início da aula, um contrato didático que consideramos mais duradouro. Mesmo havendo um contrato mais duradouro, isso não restringe a existência de outros contratos que não tenham uma vida tão longa.

Uma regra de contrato associada à resolução da equação aponta, explicitamente, que “(...) *perde o expoente aqui dois o x, a incógnita perde o expoente aqui dois e a gente acrescenta aqui a raiz quadrada com o mais ou menos... porque essa solução aqui, ela me dá duas possibilidades, pode ser o mais três e pode ser o menos três...*”. Entendemos que essa regra do contrato didático está tão próxima à técnica de desenvolver ou reduzir a expressão, que esse momento enseja um encontro entre o contrato didático e a técnica, que faz parte da organização matemática e que foi construída a partir da OD.

Vale lembrar que o contrato didático é considerado o coração da relação didática, a pedra de toque (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001), é ele que determina o seu ritmo e sua dinâmica (BROUSSEAU, 2008).

Essa é a primeira vez que aparece uma equação do segundo grau na forma incompleta e diz respeito ao subtipo de tarefa. As negociações associadas ao subtipo de tarefa fazem surgir a técnica τ_{DRE} : desenvolver ou reduzir a expressão.

Destacamos que esse subtipo de tarefa mantém relação com o tipo de tarefa ($ax^2 + c = 0$), o que pode configurar o primeiro encontro com o tipo de tarefa e a exploração do tipo de tarefa e elaboração da técnica. Por outro lado, a partir da utilização dessas técnicas emergem regras que, em função da sua repetição (hábito), cristalizam-se.

Na sequência da sua aula, o professor Davi apresenta outros problemas idênticos ao anterior e os resolve com os alunos. Assim, implicitamente, o professor negocia com os alunos tanto o reencontro com o tipo de tarefa, como a exploração do tipo de tarefa e a elaboração da técnica (segundo momento didático). A repetição da resolução dos problemas pode levar o aluno, também, ao trabalho com a técnica (quarto momento didático).

Esse próximo exemplo diz respeito ao subtipo de tarefa que através da aplicação de técnicas passa a ser um tipo de tarefa (T_3 : resolver equação do segundo grau do tipo $ax^2 + c = 0$). O surgimento da equação se caracteriza como um reencontro com o tipo de tarefa.

Quadro 26: Registro matemático de Davi
--

$x^2 + 1 = 10$

Quadro 27: Recorte da transcrição da aula - Davi

(P): *Isso aqui é uma equação do segundo grau, concordam comigo ou não?*

(Als): Concordo.

(P): Concorda, eu também acho que é do segundo grau. Como é que eu resolvo isso aqui?... Resolva aí essa equação do segundo grau. Ela está na forma in-com-ple-ta... depois eu boto a forma completa para vocês verem a demonstração da equação do segundo grau na forma completa (...). *Mas, por incrível que pareça, você está trabalhando com a equação do segundo grau, sem ainda pensar em forma, em fórmula...* (...) Tudo bem, quem resolveu a letra A?

(A): Eu...

(P): Deu quanto aí G (aluno)?

(A): a do segundo?

(P): Letra A do segundo. É isso, tá claro aí...

(A): Deu três...

(P): Hein?

(Als): Três...

(P): Deu três... e aí P (aluno), dá três mesmo?

(A1): Dá...

(P): Como é? G (aluno) dá um toque aqui de mágica... rapaz, tu é o cara da classe, rapaz...

Quadro 28: Registro matemático do aluno
$x^2 + 1 = 10$ $3^2 + 1 = 10$ $9 + 1 = 10$ $10 = 10$

Silêncio...

(P): Oi... nove mais um igual a dez... termine, some... nove mais um, dez igual a dez...

(A): Pronto, mais alguma coisa?

(P): Bom... resolveu mentalmente, como na questão pedi para resolver mentalmente... só faltou um detalhe... parabéns para ele que fez... palmas para o aluno....

(P): *Mas, a gente vai resolver por outro processo...*

(Als): Ahhhh....

(P): Ele poderia resolver assim... mostra que ele tem um raciocínio na matemática lógica. Ele sabe que substituindo o três, jogando o três aqui elevado ao quadrado dá nove, somado com um vai dar dez... né verdade? *Só que ele esqueceu um detalhe que a gente vinha fazendo antes aqui... se eu colocar também aqui menos três ao quadrado ele vai dá nove positivo também... né verdade?*

(A): É...

(P): *Então... lembre-se que na raiz quadrada sempre existe duas raízes... Na equação do segundo grau sempre existe duas raízes para a incógnita x (...) Qualquer incógnita que venha aparecendo ou apresentando uma equação do segundo grau... ok, G (aluno)?*

(P): Vamos ver isso aqui resolvido de outra maneira...

Quadro 29: Registro matemático de Davi
$X^2 + 1 = 10$ $X^2 = 10 - 1$ $X = \pm \sqrt{9}$ $X = \pm 3$ $S = \{ +3, -3 \}$

(P): X ao quadrado é igual a dez menos um. O que foi que aconteceu? Eu deixei sempre o valor de x antes da igualdade, e o que não tem x para depois da igualdade. Então... vai ficar x ao quadrado é igual a dez menos um... dá quanto?

(A): Nove...

(P): Nove... ok! E aí eu vou dizer que x é igual a mais ou menos, olha o mais ou menos de novo, raiz quadrada de nove, então, x é igual a quem? Mais ou menos, raiz quadrada de nove?

(Als): Três...

(P): Três... então, a solução para esse problema será quem? Mais três ou menos três...

Silêncio...

(P): O nosso amigo ali G (aluno) resolveu certo? Sim, resolveu porque resolveu mentalmente, no seu conhecimento, só que ele esqueceu que menos três ao quadrado também vai dá um nove positivo...

Inicialmente, o professor Davi dialoga com os alunos sobre a classificação da equação, se ela é de fato uma equação do segundo grau, possivelmente, por ser um subtipo de tarefa. Após o questionamento feito por ele, anuncia aos alunos que a equação em jogo é uma equação incompleta e que em outro momento os alunos vão

resolver equações na forma completa (outro tipo de tarefa), utilizando fórmula matemática.

Outro aspecto importante, tratado por Davi, diz respeito a uma expectativa em relação à resolução da equação do segundo grau. Ele fala, “por incrível que pareça” que os alunos já estão trabalhando com equação do segundo grau. Ou seja, os alunos já estão resolvendo equação do segundo grau e não foi preciso utilizar uma fórmula resolutive. Imaginamos que Davi está se referindo à técnica “fórmula de Bhaskara”.

Destacamos também que o professor negocia com os alunos a resolução pelo processo mental; no entanto, a técnica utilizada pelo aluno é tentativa e erro, e em sua resposta consta apenas uma raiz como solução. Nesse contexto, o professor não concorda com o caminho utilizado pelo o aluno. Veja as palavras do professor: *“Bom... resolveu mentalmente, como na questão pedi para resolver mentalmente, só faltou um detalhe. Parabéns para ele que fez... mas, a gente vai resolver por outro processo...”*. O professor, ao falar que faltou um detalhe, possivelmente, está se referindo à técnica utilizada pelo aluno e ao número de raízes como solução.

O desencontro das expectativas entre o aluno (com a técnica de tentativa e erro) e professor (com a técnica transpondo termos ou coeficiente, invertendo operações) faz surgir um ambiente de contradição em que está prestes a acontecer uma ruptura. A situação se potencializa quando o professor não concorda com a resolução do aluno, pois a expectativa do professor nesse momento é a solução com duas raízes.

Por outro lado, a intenção do professor é negociar com os alunos, para esse tipo de tarefa, as técnicas transpor termos ou coeficientes e desenvolver e reduzir expressões. Ainda sobre a opção do aluno de utilizar a técnica de tentativa e erro, ela pode ter sido influenciada pelas negociações anteriores. Embora, na mesma sala de aula, podemos pensar em marcas de outros contratos.

Nesse contexto, a ação didática do professor segue também o caminho da institucionalização e avaliação. A avaliação em jogo é uma “avaliação clássica” (CHEVALLARD, 2007), porque as atenções na situação, por parte de Davi, estão voltadas para a organização matemática em si. Observe quando o professor institucionaliza a situação “ele sabe que substituindo o três, jogando o três aqui elevado ao quadrado dá nove, somado com um vai dar dez... né verdade? Só que ele esqueceu um detalhe que a gente vinha fazendo antes aqui... se eu colocar também aqui menos três ao quadrado ele vai dá nove positivo também... né verdade?”. Como

podemos observar na institucionalização, o professor, implicitamente, avalia o problema resolvido pelo aluno e faz as suas considerações, com intuito de fazer o aluno pensar sobre sua atuação perante à resolução.

A institucionalização observada na análise se coaduna com o pensamento de Chevallard (1999, 2002b). Para esse pesquisador, ela tem por objetivo incorporar o que de fato diz respeito à organização matemática (tipo de tarefa, técnicas e tecnologias), distinguindo claramente os elementos que participam da OM.

No que diz respeito às organizações didáticas, esse problema representa um subtipo de tarefa que através da execução da técnica passa a ser um tipo de tarefa $T_2: ax^2 + c = 0$. Assim, surge o primeiro encontro com o tipo de tarefa e associado ele, a sua exploração e elaboração da técnica relativa ao tipo de tarefa, bem como o trabalho da técnica.

Para Chevallard (2007, p. 730), por mais que pareça paradoxal, acontece várias vezes o primeiro encontro, em função dos ambientes matemáticos e didáticos nos quais ele ocorre: podemos redescobrir um tipo de tarefa como redescobrimos uma pessoa que acreditávamos conhecer.

Nesse contexto, as técnicas trabalhadas pelo professor Davi são: transpor termos ou coeficientes; desenvolver ou reduzir expressões e, essas técnicas se confundem com as regras contratuais. Observe parte da negociação do professor com os seus alunos: *“(P): x ao quadrado é igual a dez menos um... o que foi que aconteceu? Eu deixei sempre o valor de x antes da igualdade, e o que não tem x para depois da igualdade... então vai ficar, x ao quadrado é igual a dez menos um... dá quanto?”*. O professor segue utilizando essas técnicas e determina as duas raízes da equação incompleta. É possível dizer, através da análise do exemplo anterior, que essa técnica na relação didática está próxima às regras do contrato didático.

Ao final da resolução, o professor apresenta outros exemplos¹⁰⁶, com o mesmo tipo de tarefa ($ax^2 + c = 0$) e as mesmas técnicas de resolução. Esse hábito de apresentar outros exemplos semelhantes, gradativamente, vem se cristalizando na relação didática e dando indícios de uma regra de contrato implícita. A utilização de vários exemplos sobre esse tipo de tarefa aponta para o reencontro com o tipo de tarefa (primeiro momento didático), bem como a exploração da técnica (segundo momento didático) e o trabalho da técnica (quarto momento didático). Todas essas

¹⁰⁶ Por ser semelhante ao exemplo anterior, optamos em não apresentá-lo nessa análise.

ações procuram fazer os alunos “melhorarem a técnica, tonando ela mais eficaz e confiável” (CHEVALLARD, 1999).

Mais adiante, Davi contempla um subtipo de tarefa que, ao ser desenvolvido através de uma técnica, se transforma no tipo de tarefa $ax^2 + bx = 0$ (equação incompleta). O problema proposto se encontra em linguagem natural como podemos observar, “pensei em um número elevado ao quadrado e somei ao próprio número, obtive o triplo do número inicial. Em que número pensei?” e ao fazer a leitura para os alunos, o professor vai estabelecendo a linguagem algébrica ($x^2 + x = 3x$). Abaixo apresentamos o registro do professor.

Quadro 30: Registro matemático de Davi
$x^2 + x = 3x$

A equação acima diz respeito a um subtipo de tarefa que, após o professor aplicar a técnica de transpor termos ou coeficientes (técnica que nesse momento é considerada auxiliar), ela passa a ser um tipo de tarefa $ax^2 + bx = 0$. Nesse sentido, o trabalho de Davi gira em torno de negociar as técnicas de resolução, que são: “fatorar expressões, colocando em evidencia o fator comum, bem como igualar os termos do produto a zero e transpor termos ou coeficiente”. A ação didática de Davi representa o primeiro encontro com o tipo de tarefa $ax^2 + bx = 0$. Na transcrição a seguir podemos observar as regras de contrato associado à resolução desse tipo de tarefa.

Quadro 31: Recorte da transcrição da aula - Davi

(P): Olhe aí... vamos tentar resolver? *Jogando o valor de x ao quadrado aqui... jogando aqui o outro valor de x, que já está antes da igualdade... e o três x que está depois da igualdade ele passa para antes da igualdade com o sinal...*

(A): Negativo...

(P): Negativo... então, vai menos três x...

(A): Igual a zero...

(P): Quando a gente jogou tudo para antes da igualdade, quem ficou depois da igualdade?

(A): Zero...

(P): Zero... não ficou ninguém, fica zero. *Então, x ao quadrado é igual a quem? Esses dois termos aqui eles são semelhantes... né verdade? Então, os dois termos semelhantes a gente reduz em um termo só...*

(A): Menos dois x...

(P): Então vai dá menos dois x. Parabéns! Menos dois x que é igual a zero...

(A): Zero...

A regra de contrato associada à resolução, diz respeito à movimentação de valores que se encontram no primeiro e no segundo membro, bem como a fatoração

das expressões, colocando o fator comum em evidência. Esses movimentos fazem parte também das negociações das técnicas matemáticas, transpondo termos e reduzindo a expressão, e torna possível chegar à forma canônica $ax^2 + bx = 0$. Logo em seguida, surge o momento de utilizar a técnica de fatorar as expressões, colocando em evidência o fator comum, igualando os termos do produto a zero e transpondo termos ou coeficientes. Em algum momento é possível pensar que as regras e as técnicas se sobrepõem como se suas ações fossem iguais.

Essa relação didática aponta para uma negociação do primeiro encontro com o tipo de tarefa (primeiro momento didático), embora, inicialmente, o professor coloque em jogo um subtipo de tarefa. A partir dessa apresentação surge todo um contexto de resolução que apresentamos acima.

Outro aspecto importante é que o primeiro momento traz associado¹⁰⁷ a ele o segundo momento didático, que é a exploração do tipo de tarefa e elaboração da técnica. Esse momento ocorre na medida em que são apresentados os tipos de tarefa ou subtipos de tarefa. Além disso, assim como o primeiro momento, ele se repete tantas quantas são as quantidades de tipos de tarefa (BESSA DE MENEZES, 2010).

O primeiro encontro com a organização matemática a ser estudada se produz de diversas maneiras, de acordo com o ponto de vista do organizador do estudo (ARAÚJO, 2009). Nesse contexto, Araújo (2009) toma como base as palavras de Chevallard (1998), esse primeiro encontro pode ocorrer desde o anúncio do professor (amanhã nós estudaremos o cosseno de um ângulo) até um outro extremo, em que o verdadeiro primeiro encontro passa quase que inteiramente despercebido porque o objeto encontrado vive em estreita ligação com o objeto verdadeiro do encontro. Nesse caso, as regras de contrato predominantemente implícitas.

No decorrer da explicação, o professor aponta para outro viés de negociação, coloca no jogo didático a relação entre a equação do segundo grau completa e incompleta. Implicitamente, ele procura despertar o aluno para distinguir os tipos de tarefas ($T_1: ax^2 + bx + c = 0$ e $T_3: ax^2 + bx = 0$). Veja o recorte da transcrição e sua análise:

¹⁰⁷ A associação do primeiro, segundo e quarto momentos didáticos está se tornando uma constante nas aulas do professor Davi.

Quadro 32: Recorte da transcrição da aula - Davi

(P): (...) Resolvendo a equação do segundo grau sem conhecer a forma... bom, nesse caso aqui eu tenho também a forma da equação do segundo grau. Só que nesse caso aqui ela está completa, olha... Aqui tenho um, aqui dois e aqui quinze... Nesse caso aqui o “a” é igual a um... o “b” é igual a dois e o “c” é igual a menos...

(Als): Quinze...

(P): Quinze... e representa essa equação aqui olha... a, b e c... (...) Neste caso aqui eu só tenho o valor de “a” e o valor de “b”. Só tenho esse valor aqui e esse valor aqui... me falta o valor “c” que é o valor independente, aquele que não tem x. Então chama-se esse termo aqui equação do segundo grau incompleta...

Esse recorte mantém uma relação implícita com a construção de um ambiente tecnológico-teórico. É possível observar que o professor procura despertar no aluno o entendimento do que vem a ser os coeficientes, fazendo uma diferenciação entre as equações completas e incompletas. Para Chevallard (2007), a criação desse ambiente mantém uma relação estreita com cada um dos outros momentos didáticos, desde o primeiro encontro com o tipo de tarefa é possível identificar essa relação. Além disso, existe também a relação com o surgimento da técnica que, em algumas situações, aparece com vestígios tecnológicos.

Após a etapa da diferenciação entre os tipos de tarefa, Davi retoma a resolução do exemplo $x^2 + x = 3x$. Podemos observar os detalhes da resolução no recorte a seguir.

Quadro 33: Recorte da transcrição da aula - Davi

(P): (...) aqui o valor de “c” é igual a zero. Quando tem o valor de “c” igual a zero é porque ele não se apresenta na equação... mais como resolver isso? *Vamos resolver esse caso ainda sem usar a fórmula geral...* nós vamos usar aqui... *usando ainda o princípio de fatoração.* Eu falei aqui fatoração na aula passada alguém disse, o que é fatoração? Daqui para aqui tem algum termo que está comum?

(Als): Tem...

(P): Quem está comum?

(Als): x ao quadrado...

(P): x... x está comum. E a gente pega o “x” de menor valor do expoente. Quem é o x de menor valor do expoente... é o x de expoente um... ok... então eu pego ele aqui e coloco em evidencia, isso quer dizer?

(A): Inaudível...

(P): Isso quer dizer que eu ponho ele antes de um parênteses e vou fazer a divisão... x ao quadrado dividido por x... x de expoente dois dividido por x de expoente um?...

(A): x um...

(P): Isso... dá x elevado a um... (...) Menos dois dividido por um, dá menos dois, e x dividido por x, o que acontece quando eu divido x por x...

No quadro acima, Davi fala de forma clara que ainda não é o caso de usar a fórmula geral (técnica fórmula de Bhaskara) para resolver a equação do segundo grau

na forma incompleta (tipo de tarefa $ax^2 + bx = 0$). No entanto, mesmo sem utilizar a fórmula, é possível observar também que ela poderia ser aplicada para determinar as raízes da equação. A opção do professor, nesse recorte, é negociar com os alunos a resolução pelo “*princípio da fatoração*” (palavras do professor).

Esse foi o primeiro momento em que Davi fez referência a um termo relacionado à tecnologia, o “*princípio da fatoração*”. Esse termo procura “*descrever e justificar a técnica utilizada como uma maneira de cumprir corretamente uma tarefa*” (CHEVALLARD, 2007). Além de procurar justificar as técnicas, o professor, implicitamente, está negociando com os alunos, técnicas que fazem parte da organização matemática. As técnicas são: fatorar expressões, colocando em evidência o fator comum, bem como igualar os termos do produto a zero. Essas técnicas, no decorrer da aula, vão se cristalizando, tomando características de um passo a passo que permite chegar ao resultado final da equação. Como já dito em outros momentos, aqui surge mais transparente a relação entre regras de contrato e as técnicas matemáticas.

Além disso, a cristalização de que estamos falando nos leva a pensar que o contrato didático adquire uma característica: a instituição de um núcleo duro que não pode ser “mexido”, como se essa regra pudesse acontecer todas as vezes que esse tipo de tarefa fosse aparecer.

Abaixo apresentamos o registro feito pelo professor sobre a resolução da equação incompleta $ax^2 + bx = 0$.

Quadro 34: Registro matemático de Davi	
$x^2 + x = 3x$ $x^2 + x - 3x = 0$ $x^2 - 2x = 0 \rightarrow \text{valor de } c = 0$ $x(x - 2) = 0$	
$X = 0$	$(x - 2) = 0$ $X - 2 = 0 \quad s = \{0, 2\}$ $X = 0 + 2$ $X = 2$
Forma da equação geral $ax^2 + bx + c = 0$ Verificação:	
$X^2 - 2x = 0$	$x^2 - 2x = 0$
$0^2 - 2 \cdot 0 = 0$	$2^2 - 2 \cdot 2 = 0$
$0 = 0$	$4 - 4 = 0$
	$0 = 0$

A resolução da equação acima acrescenta ao que foi dito outras regras de contrato: o professor Davi propõe, explicitamente, uma verificação em termos de registro. Por outro lado, implicitamente, o sentido da verificação se dá em função da certificação da resposta da equação. Assim, é possível dizer se a equação está correta ou não. A verificação consiste em substituir as incógnitas da equação inicial pelo valor das raízes e observar se a igualdade permanece verdadeira.

Outro destaque sobre os momentos didáticos é que a resolução dessa equação tem características de uma institucionalização. Esse momento didático visa incorporar o que de importante foi trabalhado por Davi na organização matemática. Nesse sentido, a explicação dele deve, de forma implícita ou explícita, descartar alguns elementos que não são importantes para os alunos no estudo da resolução do tipo de tarefa $ax^2 + bx = 0$.

Vale destacar ainda que, nas últimas atividades sobre os tipos de tarefas ($ax^2 = 0$; $ax^2 + c = 0$ e $ax^2 + bx = 0$), o professor segue a mesma dinâmica, em que primeiro procura dialogar sobre um ambiente tecnológico-teórico relacionado ao primeiro exemplo, com a participação dos alunos. Em geral, os alunos utilizam as técnicas de tentativa e erro e o professor retoma a resolução para prestar alguns esclarecimentos.

Logo após a apresentação do primeiro exemplo, seguem outros exemplos com a mesma característica. Na resolução do segundo e terceiro exemplos, o professor resolve sozinho, ressaltando os pontos que, a seu ver, merecem uma atenção maior dos alunos. Procura também dar ênfase às etapas da resolução, como se existisse um passo a passo que deve ser seguido pelos alunos. Esse passo a passo se configura como as regras de contrato e estão próximas das técnicas matemáticas.

Esse hábito do professor, que faz parte da sua ação didática de negociar os tipos de tarefas, revela indícios que em um único momento é possível utilizar vários momentos didáticos: a exploração do tipo de tarefa e elaboração da técnica, trabalho com a técnica, institucionalização e avaliação.

Até esse momento o professor Davi apresentou aos alunos, em forma de negociação, os três tipos de tarefas (equações incompletas), bem como alguns subtipos de tarefas. A fórmula geral ainda não foi utilizada pelo professor para resolver tipos de tarefa e nem subtipos de tarefa.

Após toda essa parte inicial com as negociações em torno dos tipos de tarefas (T_1 , T_2 , T_3 e T_4 , com ênfase em T_2 e T_3) com resolução de exemplos e explicações, o professor propõe um exercício sobre o tema. No exercício, o professor procura trabalhar as técnicas (quarto momento didático) relativas aos tipos de tarefas.

Chega o momento em que o professor Davi apresenta aos alunos “a forma geral de uma equação do 2º grau”. Como podemos observar no recorte a seguir.

Quadro 35: Recorte da transcrição da aula - Davi

(P): (...) Já resolvemos *várias equações do segundo grau* (...)
 (A): Sei disso não...
 (P): É verdade. Nós resolvemos várias equações do segundo grau. Antes de prosseguir estudando outros métodos de resolução, *vamos caracterizar essas equações...*
 (P): *Vocês resolveram equação do segundo grau, muitas vezes sem saber que era equação do segundo grau. Equação do segundo grau na incógnita x, olha a forma da equação do segundo grau na incógnita x... $ax^2 + bx + c = 0$...*
 (A): *Mais bx mais c que é igual a zero...*
 (P): *Onde a, b e c são números reais, com “a” diferente de zero... se “a” for igual a zero o termo x se anula. E não temos mais uma equação do segundo grau....*
 (P): *Ele diz assim, que esse valor “a”, esse valor “b”, esse valor “c”... são chamados de coeficientes...*
 (A): *Coeficientes... eita! Acertei...*
 (P): *Essas letras aqui “a”, “b” e “c” são coeficientes e o x aqui é chamado de incógnita... ok...*
 (A): *Incógnita...*
 (P): *Esta é a fórmula geral da equação do segundo grau. Bom, para que isso aqui seja verdade “a”, “b” e “c” eles devem pertencer ao conjunto dos números reais. ok... dos números reais...*
 (A): *Professor isso é um IR?*
 (P): *É... sendo... isso aqui é o conjunto dos números reais... sendo “a” diferente de zero... e ele diz aqui se esse “a”, se esse “a” aqui, pertencer ou for igual a zero, eu deixo de ter uma equação do segundo grau e passo a ter apenas uma equação do primeiro grau. Então a, b, c ele pode pertencer ao conjunto dos números reais, qualquer número eles podem assumir qualquer (sic) valores... Menos o “a” que não pode ser igual a zero...*
 (A): *porque o “a” não pode...*
 (P): *Porque anula a equação. Se “a” for igual a zero cancela a equação...*
 (A): *Ahh... deixa de ser segundo grau...*

O professor inicia o diálogo fazendo uma declaração explícita aos alunos. Afirmou que durante as aulas anteriores eles resolveram equações do segundo grau sem perceber que eram equações, algo prometido pelo professor no início de todas as aulas.

O diálogo continua e o professor começa a aprofundar as definições da equação do segundo grau na forma completa. Nesse momento, fica claro que o professor procura criar um ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica e ao tipo de

tarefa (terceiro momento didático). Existem indícios por parte do professor de que a constituição desse ambiente prepara os alunos para a resolução das equações completas, uma vez que o professor procura justificar algumas questões relacionadas à equação do segundo grau. Para Araújo (2009), a constituição desse ambiente, por vezes, depende da concepção do professor ou do autor do livro didático.

Veja a frase em que, explicitamente, o professor negocia com os alunos, “*bom, para que isso aqui seja verdade “a”, “b” e “c” eles devem pertencer ao conjunto dos números reais... ok... dos números reais...*”. Além disso, o professor negocia conceitos, tais como coeficiente e incógnita; fala ainda que eles fazem parte da formação da equação do segundo grau. Ainda sobre isso, o professor simula com os alunos o posicionamento dos termos da equação, fazendo referência à equação completa e incompleta.

O registro do professor e a transcrição, a seguir, apresentam uma pequena parte do que estamos falando.

Quadro 36: Registro matemático de Davi			
$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow a, b, c \in \mathbb{R}$ sendo $a \neq 0$.			
↓	↓	↓	Coeficientes
a	b	c	

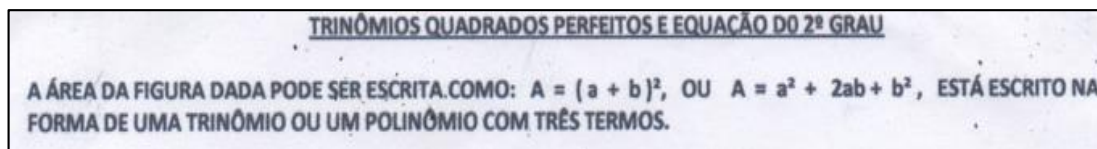
Quadro 37: Recorte da transcrição da aula - Davi

-
- (P): Ele continua dizendo aqui, “a” é o coeficiente do termo em “x ao quadrado”... é verdade?
 (Al): É verdade também...
 (P): “b” é o coeficiente do termo em “x” é verdade ou mentira?
 (A): É verdade...
 (P): “c” é chamando de termo independente...
 (A): Termo independente...
 (P): Porque “c” é o termo independente? Porque não tem “x”... não tem incógnita para ele...
 (A): Não tem “x”...
 (P): Por esse motivo ele é chamado de termo independente...
-

A opção metodológica utilizada pelo professor dá indícios de um tipo de contrato que resume a ação didática a definir alguns conceitos. Em seguida, resolve alguns exemplos referentes a esses conceitos para, na sequência, aplicar em exercícios, como podemos observar no recorte acima.

Na sequência da aula, Davi procura negociar com os alunos a relação que existe entre o trinômio quadrado perfeito e a equação do segundo grau. Essa ação didática é decorrente da anterior. Para apresentar o trinômio quadrado perfeito faz referência aos produtos notáveis.

Figura 40: Recorte de atividade de Davi



Quadro 38: Registro matemático de Davi

<p>Produtos Notáveis</p> $(x + y)^2 = (a + b)^2$ $(x + y) \cdot (x + y)$ $x^2 + xy + xy + y^2$ $x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{Trinômio}$
--

Então, o professor apresenta todo um conjunto de regras para determinar o trinômio quadrado perfeito. E de forma explícita revela que a partir do trinômio é que “surge a equação para o segundo grau” (palavras de Davi). Apresentamos abaixo a transcrição em que Davi revela, explicitamente, algumas regras e propriedades negociadas com os alunos.

Quadro 39: Recorte da transcrição da aula - Davi

(P): Voltando novamente, existe até uma regrazinha para você resolver esse problema aí, esse problema aí, sem fazer nenhuma conta... ela diz assim, é o quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o primeiro termo pelo segundo, mais duas vezes o primeiro termo “a” pelo o segundo termo que é “b”, mais o quadrado do segundo termo que é “b”. Então fica “b” ao quadrado. Então, sem fazer esse processo de multiplicar, “a” mais “b” vezes “a” mais “b”, se você souber essa regrazinha né, na soma do quadrado aqui de dois números, então você é só fazer. Olha, o quadrado do primeiro que é “a”, mais duas vezes o primeiro pelo segundo dois “ab” mais o quadrado do segundo que é “b” ao quadrado, foi a mesma coisa que multipliquei aqui... (...) Que é exatamente o que a gente tem aqui, olha... e isso aqui funciona para todas. É... todo produto notável... O quadrado da soma de dois termos... funciona para todos eles...

(A): Eita, professor...

(P): (...) isso aqui é chamado de uma propriedade distributiva. Né, distributiva... (...)

(P): Bom, aplicando a propriedade distributiva mais uma vez... vocês vão pegar isso e aqui e vocês vão resolver para mim... o primeiro termo desse parênteses eu vou multiplicar com o primeiro termo do segundo parênteses, multiplicando, é um produto aqui vezes... “a” vezes “a” vai dar quanto?


(A): “a” ao quadrado...

(P): “a” ao quadrado... vou pegar aqui ó, é mais, tudo aqui é mais, então é repetir (...)

(P): Chegamos aí, numa mesma situação, um trinômio quadrado perfeito... Cuja a fórmula fatorada...

(A): Trinômio quadrado perfeito...

(P): Para chegar aqui é necessário fatorar o trinômio para na forma de dois termos ao quadrado...

Quadro 40: Registro matemático de Davi	
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	
$(a + b) \cdot (a + b) =$	
$a^2 + ab + ab + b^2$	
$a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow (a + b)^2$	
\uparrow	\uparrow
$\sqrt{a^2}$	$+ \sqrt{b^2} \rightarrow (a + b)^2$

Podemos notar que o professor negocia uma regra de contrato didático de forma explícita, em que apresenta aos alunos que $(a + b)^2$ pode ser escrito como $a^2 + 2ab + b^2$. Nessa mesma negociação, o professor Davi fala também que $(a + b)^2$ é igual a $(a + b) \cdot (a + b)$. Na continuação, surge uma “regrinha” (palavras de Davi) para se chegar ao trinômio, veja a transcrição em destaque: “*é o quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o primeiro termo pelo segundo, mais duas vezes o primeiro termo que “a” pelo o segundo termo que é “b”, mais o quadrado do segundo termo que é “b”. Então fica “b” ao quadrado*”. Davi acrescenta que essa regra serve que para o aluno não esqueça o processo de obtenção do trinômio quadrado perfeito, e que ela serve para todo produto notável. O que estamos apresentando diz respeito a um conjunto de regras contratuais que mantêm relação com a constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica e ao tipo de tarefa $ax^2 + bx + c = 0$.

Por outro lado, Davi chama atenção dos alunos sobre o que é necessário para fatorar o trinômio quadrado perfeito e, sobre isso, ele recomenda que peguem o primeiro termo a^2 para extrair a raiz dele e pegar o b^2 para extrair a raiz dele. Assim, consegue chegar em $(a + b)^2$, pois os termos “a e b” fazem parte de um trinômio quadrado perfeito.

Essa negociação que o professor está estabelecendo com os alunos tem a intenção de fazê-los tomar essa decisão ao se depararem com um trinômio. Para Davi, o aluno, fazendo isso, conclui a fatoração. Essa negociação se torna clara quando Davi apresenta um exemplo com o trinômio “ $x^2 + 6x + 9$, então considera $\sqrt{x^2}$ e $\sqrt{9}$, extrai a raiz dos valores e encontra $(x + 9)^2$ ”.

Reiteramos que toda essa discussão estabelecida por Davi mantém um vínculo com o terceiro momento da organização didática, a constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica e ao tipo de tarefa proposto pela OM.

As regras que emergem na relação didática acima estabelecem um vínculo com uma constituição tecnológica-teórica e dinamizam o funcionamento da relação didática.

Sobre isso, Brousseau (1986) revela que o CD implica regras que emergem na relação didática e que são determinantes para o funcionamento da situação. Jonnaert (1994, p. 217) acrescenta que o “contrato didático permite compreender o dinamismo da relação didática, e, inversamente, é o funcionamento da aula que permite decodificar o contrato didático”.

Além desses elementos conceituais, que estão em constante interação entre o professor e seus alunos, acrescentamos outro, uma negociação explícita sobre a propriedade distributiva. Durante toda a aula, esse é o segundo momento em que o professor faz referência, de forma explícita, a uma propriedade. O trecho a seguir reflete o que estamos dizendo, “(P): *Bom, ele continua dizendo aí, que se eu pego aqui “a” mais “b” vezes “a” mais “b”, isso aqui é chamado de uma propriedade distributiva. Distributiva*”.

Ainda sobre o ambiente tecnológico-teórico apresentamos uma ruptura de contrato, abaixo.

Quadro 41: Recorte da transcrição da aula - Davi

(P): ax ao quadrado mais bx mais c igual $a... zero...$
 (A): Zero...
 (P): Essa aí é a fórmula que vem da equação do segundo grau, a tem que ser diferente de zero, não é? Porém, ele pode pertencer também ao conjunto dos números reais asterisco...
 (A1): *Oxe professor, o que isso?*
 (A1): Não professor...
 (P): O que é isso?
 (A1): *Eu não sei o que isso não?*
 (P): Hein? Vou dizer...
 (A1): Números reais asterisco...
 (A1): (rizadas)
 (P): Nunca virão não?
 (A1): Eu não vi não...
 (A2): Eu já vi...
 (P): Não... é simples, não tem nenhum bicho não... b pode pertencer ao conjunto dos números reais, c também pode pertencer ao conjunto dos números reais. Somente o a é considerado como sendo... é asterisco, ou seja, o a não pode ser igual a zero... Esse asterisco no IR aqui elimina do conjunto o número zero...
 (A1): Zero... Só ele?...
 (P): Só ele... Porque quando a gente tem o conjunto dos números naturais...
 (A1): *Quem foi que inventou esse asterisco mesmo?*
 (P): Olha, se eu tenho aqui o conjunto dos número naturais... zero, um, dois, três... esse aqui não é conhecido de vocês?
 (A): É...
 (P): Mas, se eu colocar isso aqui conjunto dos números naturais asterisco, eu vou começar de onde aqui agora?

(A2): De um...
 (P): De um, zero não entra... dois, três, quatro...
 (A2): Eu não sabia que existia isso não professor...
 (P): Agora está sabendo... a mesma coisa funciona para todos os conjuntos, olha... Conjunto dos números inteiros negativos...(...)
 (A1): O professor que tanta letra é essa Z, IR, IN... dá dor de cabeça só de olhar...
 (P): Você nunca viu isso aqui não? Você nunca viu isso aqui não?
 (A1): Nunca eu vou gravar isso na minha vida...
 (P): Vocês estudaram isso sim... vocês não podem passar pelo nono ano sem saber disso... (...)

É possível ver claramente que o professor, na negociação sobre quais valores podem representar os coeficientes, se depara com uma situação inesperada, o aluno não reconhece o termo asterisco como elemento que exclui o valor zero do conjunto. Mediante essa situação acontece uma ruptura de contrato. Vale lembrar que essa ruptura aconteceu no momento em que o professor se encontra na organização didática, especificamente, constituindo um ambiente tecnológico-teórico. Então, o professor, para salvar a situação, renegocia com os alunos e parte para explicar o que seria asterisco. Na renegociação procura associar esse termo aos conjuntos numéricos. O professor implicitamente parecia não acreditar que a aluna jamais havia mantido relação com essas informações em outra instituição, tanto que pergunta por duas vezes se a aluna já tinha visto o termo associado à ideia de conjunto. Essa ruptura fez o professor retornar até o conjunto dos números racionais e irracionais.

O professor Davi retoma o diálogo sobre equação dizendo, “*vocês viram a equação do segundo grau na forma incompleta, agora vocês vão ver a forma completa*”. Destaca nas explicações que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ está na forma de equação completa; aproveita, também, para lembrar que a, b e c são os coeficientes da equação e x é a incógnita. Logo na sequência, Davi inicia um outro diálogo sobre a produção da fórmula da Bhaskara.

Quadro 42: Recorte da transcrição da aula - Davi

(P): Eu vou produzir a fórmula de Bhaskara...
 (A): O quê?
 (A1): G (professor do ano anterior) estava ensinado isso aí...
 (P): Quem? Foi... estava ensinando... vamos ver como essa fórmula de Bhaskara foi produzida...
 (A2): *Agora vai complicar bonito... a gente tá aprendendo o outro e o senhor vem com essa...*
 (P): Vamos lá... $ax^2 + bx + c = 0$... então, “a” x ao quadrado mais bx que igual a menos c... Sabem o que foi feito aí agora?
 (A): Isolou...
 (P): Isolou o quê?...
 (A): Zero...

O recorte acima apresenta o início da negociação entre o professor e seus alunos sobre a criação de uma ambiente tecnológico-teórico que permita o estabelecimento da fórmula de Bhaskara.

Observe o registro do professor no quadro abaixo e logo após a transcrição referente ao registro.

Quadro 43: Registro matemático de Davi
$ax^2 + bx = -c \quad (4a) \quad a \neq 0$ $4a^2x^2 + 4abx = -4ac \quad (+b^2)$ $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$ $\sqrt{4a^2 \cdot x^2} + \sqrt{b^2}$ $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$ $2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ $2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Quadro 44: Recorte da transcrição da aula - Davi

(P): Vamos lá... $ax^2 + bx + c = 0$. Então, “a” x ao quadrado mais bx que igual a menos c... sabem o que foi feito aí agora?

(A): Isolou...

(P): Isolou o quê?...

(...)

(P): Então, nós vamos produzir aqui a fórmula de Bhaskara, como foi que esse cidadão chegou aí... dizendo que x é igual a menos “b” mais ou menos raiz de b² menos 4ac, dividido por dois “a”...

(A): Eita professor... não professor...

(P): Isso é a formulazinha de Bhaskara... sim... é normal vocês estranharem um pouco... mais vamos ver como ela foi produzida...

(...)

(A): Ô professor porque colocou esse quatro a...

(P): Esse quatro “a” é atribuído a essa equação, para tornar algumas situações viáveis...

(...) Menos quatro “ac”...

(A): Menos quatro “ac”...

(P): Introduzi na equação deixando o valor quatro “a”. Por que quatro “a”? Porque nessa equação aqui eu tenho “a” e nessa eu não tenho, nesse eu tenho... Ok! (...).

(A): É mais difícil...

(P): Para chegar a fórmula de Bhaskara... na produção dela é... mas depois que você entende... *como ela foi produzida, para você resolver um problema com ela e é a coisa mais fácil do mundo...* (...) Ele ficou quatro “ax” ao quadrado mais quatro “abx” mais “b” ao quadrado...

(A): Igual a “b” ao quadrado...

(P): (...) Agora aqui eu tenho olha, esse número aqui é um trinômio quadrado perfeito... esse número que tenho é um trinômio quadrado perfeito (...) A raiz quadrada de quatro é quanto?

(A): Dois...

(A): *Eu num disse que isso aí era complicado...*

(P): Isso aqui é só a dedução da fórmula...

(A): a dedução da fórmula.... (risadas)...

(P): Como a fórmula surgiu como criaram ela... agora a gente vai só resolver...

(A): Ave Maria... ah meu Deus...

O professor negocia com os alunos a dedução da fórmula. Esse momento já havia sido anunciado pelo professor em várias oportunidades, criando uma expectativa sobre ele. Acreditamos que implicitamente esse diálogo visa encontrar uma técnica, que diz respeito à maneira de fazer ou de executar o tipo de tarefa, e assim, ser possível encontrar as raízes da equação do segundo grau.

A análise das aulas aponta, implicitamente, que a fórmula de Bhaskara, teria uma importância diferente para o professor, pois ela poderia ser usada em todas as ocasiões de resolução das equação do segundo grau (de todos os tipos de tarefas), como se fosse um “coringa”. Mesmo nessa situação, o professor percebe um desconforto, um princípio de ruptura dos alunos, perante a dedução da fórmula e procura reorganizar a negociação, observe “(P): Depois que você entende... *como ela foi produzida, para você resolver um problema com ele é a coisa mais fácil do mundo (...)*”. Talvez Davi esteja querendo dizer que a utilização da fórmula não passa de substituição e manipulação de valores e que essas ações dos alunos tornam possível determinar as raízes da equação.

Por outro lado, podemos pensar também, que existe um desconforto perante a dedução da fórmula, o que faz o professor resgate da regra contratual, que é a utilização da técnica “fórmula de Bhaskara”. Isso acontece, sem garantir ao aluno o entendimento da sua justificativa.

A transcrição mostra na última frase uma possível expectativa negativa que os alunos tinham em relação à dedução da fórmula, “Ave Maria, ah meu Deus”. Ainda no que diz respeito às dificuldades, é perceptível o desejo do aluno em romper com a negociação desse ambiente tecnológico-teórico, uma vez que em vários momentos eles revelam que a dedução da fórmula não estava compreensível. Observe a fala dos alunos: *“Eita professor... não professor...; É mais difícil...; Eu num disse que isso aí era complicado, a dedução da fórmula”*.

Por outro lado, percebemos que, implicitamente, na negociação, o professor omite a existência da técnica de completar quadrados, como recurso para resolver as equações do segundo grau na forma completa (T_1 : tipo de tarefa $ax^2 + bx + c = 0$). Isso pode ser observado logo após finalização da dedução da fórmula de Bhaskara.

O professor dá início à resolução de exemplos e não utiliza a técnica de completar quadrados, partindo para resolução substituindo os valores diretamente na fórmula, como podemos observar no quadro abaixo.

Antes de resolver o problema, o professor faz questão de reiterar sua expectativa sobre a utilização da fórmula de Bhaskara. Davi sugere ser fácil a sua utilização, e que através da sua manipulação, afirma, resolvendo-a duas ou três vezes, o aluno não a esquecerá.

Quadro 45: Recorte da transcrição da aula - Davi

(P): Eu fiz questão de deixar essa aqui no quadro para *resolver ela fazendo a tradução da fórmula de Bhaskara, para vocês verem como é fácil*. Quando vocês resolverem por essa fórmula três ou quatro vezes vai ficar na mente de vocês e vocês vão para eternidade sem esquecer ela...

Quadro 46: Registro matemático de Davi	
$a = 1$ $b = 4$ $c = -21$	$x^2 + 4x - 21 = 0$ $x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 41(-21)}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2}$ $x = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2}$ $x = \frac{-4 \pm 10}{2}$ $S = \{3, -7\}$ <div style="margin-left: 150px;"> $X' = \frac{-4+10}{2} = \frac{6}{2} = 3$ $X'' = \frac{-4-10}{2} = \frac{-14}{2} = -7$ </div>

É possível inferir que o professor incentiva o aluno a memorização da fórmula em detrimento da construção conceitual da equação do segundo grau. Nesse sentido, podemos dizer que, em relação a apresentação das equações na forma incompleta, existe uma forte ruptura de contrato, pois a resolução colocava a disposição técnicas que favorecia a construção de conceito.

Ainda sobre o recorte acima, observamos um reencontro com o tipo de tarefa (primeiro momento), ou seja, com a organização matemática que está em jogo, apresenta também a exploração do tipo de tarefa e a elaboração da técnica (segundo momento).

A seguir, podemos observar um recorte da transcrição da fala do professor e de seus alunos sobre a resolução do problema no quadro acima:

Quadro 47: Recorte da transcrição da aula - Davi

(P): Vou usar agora a *bendita fórmula de Bhaskara...*
 (A): *Não vou nem olhar a bendita...*
 (P): A bendita fórmula de Bhaskara... olha só...
 (A): *Qual é essa fórmula mesmo?*
 (A1): *Aquela...*
 (P): Quem é o valor de b aqui?
 (A): *Quatro...*
 (P): b é quatro... Como ele está aqui na fórmula...
 (A): *Menos.*
 (...)
 (P): *Vezes um, vezes c... quem é c?*
 (A): *Menos vinte um...*
 (P): Vou colocar entre parênteses, para não fazer conflito o vezes e o menos... menos vinte e um. Dividido por dois vezes o "a" que é um...
 (A): *Misericórdia...*
 (P): *Substitui os valores das letras que vem para fórmula da equação...*
 (A): *É complicado professor...*
 (P): *É não... quando a gente resolver duas ou três questões vocês vão aprender rápido...*
 (A): *Dezesseis...*
 (P): *Dezesseis. Raiz quadrada de dezesseis, tem um produto aqui olha... Mais, quatro vezes um... quatro, quatro vezes menos vinte um, é quanto? Quatro vezes um quatro, quatro vezes dois oito. Total, dá oitenta e quatro... dividido por dois vezes um, dois... *resolvi a potência, multipliquei e resolvi isso aqui... x é igual a menos quatro, mais ou menos, dezesseis mais oitenta e quatro, dá quanto?**
 (A): *Cem...*
 (P): *Cem... dividido por dois... x é igual a menos quatro mais ou menos, a raiz quadrada de cem é quanto?*
 (A): *Dez...*
 (P): *Dez, dividido por dois... olha eu tenho duas soluções aqui, uma para menos quatro mais dez e outra para menos quatro menos dez...(..)*
 (A): *Seis...*
 (P): *Seis, dividido por dois...*
 (A): *Três...*
 (P): *Então x é igual a três...*
 (Als): *Três...*
 (P): *Então, vai aqui como? Menos, menos dez dá quanto? Menos quatorze... dividido por dois?*
 (A): *É igual a menos sete...*
 (P): *Então... vai ficar x igual aqui menos sete. Então, a solução para essa equação do segundo grau é igual a três e menos sete...*

Como já foi dito anteriormente, o professor faz opção de utilizar como técnica principal a fórmula de Bhaskara para resolver o tipo de tarefa ($T_1: ax^2 + bx + c = 0$). Esse, pode ser considerado também como o reencontro com o tipo de tarefa T_1 da organização matemática. Por outro lado, é a primeira vez que ele utiliza a técnica "fórmula de Bhaskara" para realizar esse tipo de tarefa.

Vale destacar que mesmo escolhendo essa técnica como a principal para resolver as equações completas, o professor utilizou outras técnicas no início das aulas como regra de contrato para adentrar na resolução de outras equações.

O contrato didático faz com que Davi conduza a resolução da equação como se existisse um passo a passo: primeiro deve selecionar o valor de cada termo “a, b e c”, depois substituir esses valores na fórmula, ou seja, os alunos devem se preocupar apenas em substituir letras por números e com o jogo dos sinais (operações com os sinais) para chegar no final da resolução, encontrar as raízes da equação. Essa forma de negociar a resolução das equações, no decorrer da aula, dá indícios de um momento em que o contrato didático se encontra mais rígido, como se fosse o núcleo duro.

Chamamos atenção para o fato de que a cada tipo de tarefa diferente, Davi utiliza a mesma regra de contrato (no sentido geral). Nela, sua ação didática se resume a apresentar o tipo de tarefa descontextualizado, na maioria dos casos, com participação dos alunos. Em seguida, apresenta mais dois ou três tipos de tarefas, também descontextualizados, com intuito de trabalhar a técnica negociada.

Além do encontro com o tipo de tarefa, implicitamente, o professor deseja que o aluno “explore o tipo de tarefa e elabore a técnica relativa a ele”. Somando-se a isso, a repetição dos exemplos com a mesma ideia de resolução tem como objetivo o trabalho da técnica ou da organização matemática.

Uma última colocação nossa, diz respeito à revisão final, em que o professor Davi procura negociar com os alunos um fechamento para o “estudo das equações do segundo grau a uma incógnita”. A sua ação didática corresponde aos tipos de tarefas e para cada tipo de tarefa o professor negocia três técnicas diferentes. Assim, o professor começa com o tipo de tarefa que tem o termo “b = 0” e $a \neq 0$, ou seja, $ax^2 + c = 0$ (tipo de tarefa T_2), com a técnica de tentativa e erro.

Quadro 48: Registro Matemático de Davi

$2x^2 - 8 = 0$ $2x^2 = 8$ $2 \cdot 2^2 = 8$ $2 \cdot 4 = 8$ $8 = 8$ $S = \{-2, 2\}$
--

Quadro 49: Recorte da transcrição da aula - Davi

(P): Dois x ao quadrado menos oito igual a zero. Várias maneiras eu posso encontrar esse resultado, várias maneiras que vocês já viram. Uma das pessoas que se identificaram muito, resolvendo a potenciação...

(A): Eu...

(P): Teve vários aí... Você pode encontrar isso aqui resolvendo o valor de x, *calculando a potenciação*, achando um número aqui para o valor de x elevando ao quadrado multiplicado por dois que dá oito. Quando eu passo a equação aqui, eliminando o zero da equação, né, o oito tá negativo ele passa para depois da igualdade positivo. Aí você já pode dizer, aí é fácil! É uma das maneiras de resolver o valor da incógnita x... e vai ficar quanto resolvendo de cabeça pela potenciação? é quanto? Fica dois vezes dois ao quadrado, né?

(A): É...

(P): Que é igual a oito... Então, dois vezes, a potência de dois elevado ao quadrado dá?

(A): Quatro...

(P): Quatro que é igual a oito... Então duas vezes quatro oito que é igual a oito. Então, o conjunto solução dessa equação, eu tenho duas situações. Com o x ao quadrado, eu posso ter duas situações: mais dois e menos dois. Esse foi o valor da incógnita x que a gente achou...

(P): Essa é uma maneira da gente resolver pela potenciação...

Nessa revisão final, o professor negocia explicitamente que a resolução da equação incompleta $ax^2 + c = 0$ (tipo de tarefa) pode ser resolvida de várias formas. A primeira forma apontada por Davi é pelo “cálculo da potência” (palavras do professor). Sob a ótica das organizações matemáticas, Davi negocia, implicitamente, que o tipo de tarefa $ax^2 + c = 0$, pode ser resolvido pela técnica de “tentativa e erro”. Propõe ainda como regra de contrato passar o valor numérico para o segundo membro, para que possa ter a igualdade como fator de equivalência, e, assim, certificar o valor da raiz. A repetição na ação didática do professor cristaliza suas ações em forma de regra de contrato. Como já havíamos dito em alguns momentos, esse é, talvez, o momento em que o CD se aproxima mais da OD.

Para a organização didática, o professor negocia no recorte anterior o reencontro com o tipo de tarefa (primeiro momento didático), e esse, segundo Chevallard (2007), pode aparecer várias vezes na relação didática; após a primeira vez é considerado como reencontro com o tipo de tarefa. Imaginamos, que o contrato didático se encarrega de fazer o seu encontro ou reencontro com os alunos quantas vezes for necessário.

A atividade com esse tipo de tarefa, implicitamente, aponta também para outros momentos didáticos, tais como: a exploração do tipo de tarefa e elaboração da técnica relativa ao tipo de tarefa, o trabalho da técnica, a institucionalização e a avaliação.

Consideramos, também, que esse resumo representa uma última etapa de avaliação feita pelo professor durante toda a história da aula, que é retomar os conceitos em que ainda resta alguma dúvida ou que são os mais importantes, segundo Davi.

O quadro a seguir faz parte da negociação de Davi sobre as formas de resolução da equação do segundo grau.

Quadro 50: Registro Matemático de Davi
$2x^2 - 8 = 0$ $2x^2 = 8$ $x^2 = 8/2$ $x^2 = 4$ $x = \pm\sqrt{4}$ $x = \pm 2$ $S = \{+ 2, - 2\}$

Quadro 51: Recorte da transcrição da aula - Davi

(P): Essa aqui é a maneira de resolver pela equação. Aqui olha... dois x ao quadrado, menos oito igual a zero. Então vai ficar a mesma coisa, vou passar o valor que não tem x, o valor de c, para o outro lado. O valor de "b" não apresenta porque ele é igual a? zero...

(A): Zero...

(P): Então, venho aqui, que vai ser dois x ao quadrado que é igual a oito. Então, para resolver através do sistema extraindo a raiz quadrada. Então vai ficar x ao quadrado igual a oito dividido por?

(A): Dois...

(P): Dois. Então x ao quadrado é igual a oito dividido por dois dividido por quatro... Então, x é igual a mais ou menos raiz quadrada de quatro...

(A): Quatro...

(P): Então, x é igual a mais ou menos a raiz quadrada de quatro?

(A): Dois...

(P): Dois. Então nós temos duas soluções para essa equação: x linha dois e x duas linhas menos dois. Partimos daqui chegamos ao mesmo resultado por potência, partimos daqui chegamos ao mesmo resultado pela raiz...

Acima observamos a segunda técnica, apresentada pelo o professor aos alunos, com intuito de executar um tipo de tarefa T₂: $ax^2 + c = 0$, e, assim, determinar as raízes da equação. Vale lembrar que esse tipo de tarefa representa uma equação incompleta e foi resolvida pela técnica de tentativa e erro¹⁰⁸ no exemplo anterior.

No entanto, a proposta do professor é resolver cada equação por três tipos de técnicas diferentes. A técnica ora negociada para esse tipo de tarefa é a de transpor termos ou coeficientes, invertendo operações (técnica principal).

¹⁰⁸ A técnica de Tentativa e Erro pode em algum momento ter o mesmo sentido da propriedade fundamental da igualdade.

A regra de contrato estabelecida pelo professor na resolução desse tipo de tarefa é sempre transpor o termo “c” para o segundo membro, mudando o seu sinal e passar o termo “a” para dividir o “c”. Na sequência, extrai a raiz do resultado da divisão. O hábito de utilizar esse caminho, gradativamente, vai se cristalizando e fazendo parte da cultura da sala de aula.

A utilização das técnicas por parte de Davi, faz surgir, outro reencontro com o tipo de tarefa $ax^2 + c = 0$, a exploração do tipo de tarefa e o trabalho com a técnica, bem como a institucionalização da mesma.

O professor Davi no final da negociação faz uma relação entre as duas formas de resolver a equação (por “potência e extração de raiz”, segundo suas palavras) e a técnica de transpor termos ou coeficiente. Observe a conclusão de Davi: *“então nós temos duas soluções para essa equação... x linha, dois e x duas linhas, menos dois. Partimos daqui, chegamos ao mesmo resultado por potência, partimos daqui, chegamos ao mesmo resultado pela raiz (...)”*.

Então, até agora o professor apresenta duas regras implícitas: pelo processo de potenciação, você utiliza a técnica de tentativas e erros; se você escolher a resolução pelo processo da extração de raiz, você deverá seguir as técnicas de transposição de termos. Por último, surge a terceira técnica negociada para determinar o tipo de tarefa, a fórmula de Bhaskara. A fala do professor na próxima transcrição revela claramente que *“existem três maneiras de resolver a mesma equação (...)”*. O quadro abaixo apresenta essa negociação.

Quadro 52: Registro matemático de Davi	
	$2x^2 - 8 = 0$
$a = 2$	$x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 2(-8)}}{2 \cdot 2} \rightarrow x = \frac{0 \pm \sqrt{0 + 64}}{4}$
$b = 0$	$x = \frac{0 \pm \sqrt{64}}{4}$
$c = -8$	$x = \frac{0 \pm 8}{4}$
	$\nearrow X' = \frac{0+8}{4} = \frac{8}{4} = 2$ $\searrow X'' = \frac{0-8}{4} = \frac{-8}{4} = -2$
	$S = \{-2, 2\}$

Quadro 53: Recorte da transcrição da aula - Davi

(P): Aí você diz, professor a gente poderia resolver isso aqui usando a fórmula de Bhaskara? Pode. Existem três maneiras de resolver a mesma equação, vamos tentar agora resolver pela fórmula de Bhaskara.

(A): Eita... vai dar uma conta tão grande...

(P): Será que vai?

(A): Vai sim...

(P): Temos a equação, dois x ao quadrado menos oito igual a zero... pela fórmula de Bhaskara a gente vai pegar aqui o valor de a, de b e de c... né verdade?

(Als): É...

(P): Quanto é que vale a?

(Als): Dois...

(P): Dois. Quanto é que vale b?

(Als): Zero...

(P): Zero. Quanto é que vale c?

(Als): Menos oito...

(P): Menos oito. A formulazinha de Bhaskara vocês já sabem qual é? x é igual a menos b, mais ou menos raiz quadrado de b ao quadrado menos quatro ac sobre dois a...

(A1): b ao quadrado menos quatro vezes a e vezes c...

(P): Então, essa é a formulazinha conhecida de Bhaskara e vocês já resolveram com ela... A mesma coisa a gente vai resolver por três procedimentos diferentes e depois eu vou mostrar um contra exemplo...

(A2): Tá vendo que é difícil...

(P): Tem alguma coisa complicado aqui?

(A2): Não... Tudo é *contra* de se fazer...

(P): Não, o contra eu vou mostrar o porquê... vou mostrar o porquê. Aqui olha, x é igual a quem? Quanto é o valor de b?

(Als): Zero...

(P): Zero né...

(A): Porque não bota o zero?

(P): Porque o zero nem é mais e nem é menos. Então, mais ou menos raiz quadrada de quanto? Zero ao quadrado menos quatro, quem é o valor de a?

(...)

(A1): Dá quanto?

(P): Oito. Dividido por quatro... lembram que vocês disseram que daqui sai duas equações? Porque um é mais e um é menos? Então vai ser quem? Oito sobre quatro e x duas linhas vai ser menos oito sobre quatro. Aqui vai dar quanto... oito dividido por quatro, dois... e aqui vai dar quanto?

(Als): Menos dois...

(P): Menos oito dividido por quatro, menos dois. Tivemos os três resultados nas três equações, tá vendo?

(A1): Tá vendo aquele é mais simples...

(P): Pois é, por isso a gente mostrar duas, três maneiras diferentes...

(A2): Eu não aprendo nenhuma...

Observe no recorte que o professor questionando os alunos sobre se seria possível resolver a equação (tipo de tarefa) utilizando a fórmula de Bhaskara (técnica). Ao mesmo tempo em que questiona, afirma que é possível e aponta que existem três maneiras de resolver a mesma equação.

Essa técnica, fórmula de Bhaskara, na realidade, representa um desfecho da negociação, em que apresenta como primeira a técnica de tentativa e erro, a segunda,

a de transpor termos ou coeficiente, invertendo operações e finaliza com a técnica fórmula de Bhaskara.

Após esse primeiro momento, em que o professor apresenta Bhaskara como a terceira técnica a ser usada, surge, por parte dos alunos, uma expectativa negativa em relação a essa opção, eles dizem que a “conta vai ser grande”. Essa atitude dos alunos é ignorada pelo professor, pois o mesmo dá sequência a aula sem fazer referência a esse fato.

Igualmente a relação que existe entre as regras e as técnicas, apresentadas anteriormente, é possível perceber que as regras que emergem na relação didática se caracterizam como um passo a passo, em que os alunos devem seguir até obter o valor das raízes. Por outro lado, podemos observar que elas dão certo ritmo à resolução. Nesse caso específico de Bhaskara é como se as regras fossem o coração da técnica.

O professor segue com a aula e fala que vai apresentar um “*contraexemplo*” da última equação que estava sendo resolvida. Esse termo, “contra” incomoda o aluno que de forma simultânea fala, “*tudo é contra de se fazer*”. Esse momento está na iminência de ocorrer uma ruptura de contrato. No entanto, o professor percebe e, rapidamente, reorganiza a negociação. Esse tomada de posição do professor faz com que não ocorra a ruptura de contrato. Veja a fala de Davi, “*não, o contra eu vou mostrar o porquê... vou mostrar o porquê... aqui olha, x é igual a quem? Quanto é o valor de b?*”.

A apresentação da terceira técnica, faz surgir um reencontro com o tipo de tarefa (primeiro momento didático). Além disso, associado ao momento anterior, implicitamente, o professor se preocupa com: a exploração do tipo de tarefa e, a elaboração da técnica relativo a esse tipo de tarefa, bem com o trabalho com a técnica “fórmula de Bhaskara”. Essa preocupação pode revelar o desejo do professor em fazer o aluno utilizar ela com mais frequência na resolução dos tipos de tarefas que faltam um termo da equação do segundo grau.

Após discutir a equação incompleta com o termo $b = 0$, propõe a resolução de outra equação incompleta, agora com o termo “ $c = 0$ ” e $a \neq 0$ ($ax^2 + bx = 0$). Ele fala que vai usar um exemplo parecido com o anterior, $2x^2 - 8x = 0$, em que o valor do coeficiente é o mesmo, oito. Observe o quadro com a resolução e transcrição do professor e alunos.

Quadro 54: Recorte da transcrição da aula - Davi

(P): (...) posso resolver isso pelo processo de escolha de um número, que multiplicado por ele mesmo dê oito, né? *Dois x ao quadrado igual a oito x, processo da potenciação.*

Quadro 55: Registro matemático de Davi	
	$8.0^2 - 8.0 = 0$
	$2x^2 - 8x = 0$
	$2x^2 = 8x$
	$2.2^2 = 8.2$
	$2.4 = 16$
$X = 0$	$8 = 16$
	$2x^2 - 8x = 0$
$X = 0$ ←	$2x(x - 4) = 0$
	$X - 4 = 0$
	$X = 4$
	$S = \{0, 4\}$

(P): *Quem seria o número pelo processo da potenciação?*

(A1): *Dá substituição?*

(P): *Dá substituição do x, exatamente...*

(Als): *Dois...*

(P): *Quanto?*

(Als): *Dois...*

(P): *Se eu tenho um produto aqui eu já posso dizer que uma das soluções... x é igual a zero, certo? Se x aqui for igual a zero aqui? Aqui vai dar quanto? Zero. Se eu pegar aqui, olha, duas vezes zero ao quadrado, vezes oito, vezes zero é igual a quanto: Tá certo isso aí? Dois vezes, zero elevado a zero, zero, igual a oito vezes zero é zero.*

(Als): *Zero...*

(P): *Então, eu já tenho uma das soluções que é zero. E a outra você disseram que era quanto?*

(Als): *Dois...*

(P): *Então... eu pego aqui dois vezes dois ao quadrado que é igual a quanto?*

(Als): *Oito...*

(P): *Oito vezes dois... dois vezes quatro, será que vai dar mesmo? Igual a oito vezes dois... Como vocês disseram aí, oito vezes dois?*

(Als): *Dezesseis...*

(P): *Quatro vezes dois? Oito...*

(Als): *Oito...*

(P): *Oito é igual a dezesseis? Não potencializou... não foi? Mas, existe uma situação aqui, que vocês já conhecem, vocês já trabalharam aqui, dizendo assim olha... x menos oito igual a zero. Eu pego o fator comum e coloco em evidência. Quem está comum aqui e aqui nos números. Vou fazer a fatoração, quem está comum daqui para aqui?*

(Als): *O zero...*

(P): *Dois está comum está? Tá porque dois é dividido por dois e dividido por oito... né verdade?*

(Als): *É...*

(P): *Coloca dois em evidencia... x está aqui e x está aqui. Sim ou não? Então eu coloco dois x em evidência. Indica que eu vou pegar agora, vou dividir este dois x por toda a equação, vou fazer assim... dois x ao quadrado dividido por dois x, dá quanto? Resta quanto?*

(Als): *x...*

(P): *Resta x, perfeito! Menos oito x dividido por 2x, resta quanto?*

(Als): *Quatro...*

(P): Que é igual a zero. Para que isso tudinho seja zero a gente já viu um processo que esse x aqui ele é igual a zero...

(Als): Há é aquele que o senhor fazia é?

(P): Isso é aquele... e agora eu vou pegar o parêntese, aqui olha, x menos quatro que igual a zero... quanto vai ser x agora? X é igual a? quatro...

(Als): Quatro...

(P): Ok...

(Als): Ok...

(P): Agora você diz... Se eu pegar o quatro e jogar na potenciação, será que vai dar certo?

(Als): Vai...

(P): Vai, com certeza vai dar certo. Bom, resolvendo esse aí através do processo da fatoração. Mas, a gente pode resolver pelo processo da potenciação. Ele não encontrou porque dois era pouco, mas, se usar o quatro vai dar certo. Eu tenho duas soluções para essa questão, qual é as duas soluções? É zero e quatro...

(Als): Zero e quatro...

O professor continua a mesma negociação, resolvendo a equação incompleta, utilizando as três formas: potenciação (tentativa e erro), fatoração (fatorar expressões, colocando o fator comum em evidência) e por último, a fórmula de Bhaskara.

Na negociação da resolução pela técnica de tentativa e erro, surge uma ruptura de contrato, por parte de Davi no final da resolução, na técnica de tentativa e erro. O professor propõe um valor para ser substituído na equação. É possível perceber uma diferença numérica entre o primeiro membro e o segundo membro, ou seja, o valor não é solução da equação. Observe que o caminho utilizado por Davi é pelo processo de “potenciação” (palavras de Davi), em que é necessário passar o valor $8x$ para o segundo membro. Ao passar o valor, implicitamente, está considerando importante utilizar a equivalência entre os termos para identificar a raiz. Ao questionar os alunos sobre o valor que deveria substituir na equação, eles apontam o “dois”. No entanto, o professor ignora, naquele momento, e apresenta o zero como o primeiro valor a ser substituído na equação.

Além disso, faz todo processo matemático e confirma o zero com uma das raízes. Na sequência, substitui o valor dois (o apresentado pelos alunos) na equação e observa que o primeiro membro fica diferente do segundo membro. Rapidamente apaga o quadro, mostrando que ficou incomodado com a situação final e apresenta a técnica da fatoração para resolver a equação.

Observe o momento em que o professor, nesse sentido, rompe com o contrato vigente e renegocia outra técnica para solucionar a equação: “(P): Oito é igual a dezesseis? Não potencializou... não foi? Mas, existe uma situação aqui,

que vocês já conhecem, vocês já trabalharam aqui, dizendo assim olha... x menos oito igual a zero. Eu pego o fator comum e coloco em evidência. Quem está comum aqui e aqui nos números. Vou fazer a fatoração, quem está comum daqui para aqui?”.

Assim, Davi abandona a primeira negociação sobre a técnica de tentativa e erro, sem propor nenhum outro valor para substituir na equação e inicia uma outra, agora com a técnica de fatorar expressões, colocando em evidência o fator comum, bem como igualando os termos do produto a zero. Após resolver a equação utilizando essas técnicas, o professor repete todo o caminho utilizado pela resolução, dando ênfase as etapas da resolução. Essa atitude por ser entendida como uma institucionalização. É o momento de colocar para os alunos o que de fato deve ser incorporado como saber.

No final da resolução, o professor aponta para mais uma regra de contrato, que diz respeito à verificação como forma de certificar a sua resposta, bem como uma forma dos alunos autoavaliarem a sua resposta.

Essas atitudes do professor na relação didática; que fazem parte do cotidiano da aula, gradativamente, vão sendo cristalizadas. Quero dizer, vão se tornando regras que os alunos vão utilizando sem nenhum questionamento ou pensamento matemático.

Como já havíamos dito, em vários momentos, o surgimento, mesmo no final da aula, da equação incompleta $2x^2 - 8x = 0$ caracteriza o reencontro com o tipo de tarefa ($T_3: ax^2 + bx = 0$). A partir do reencontro, surge, implicitamente, outros momentos da organização didática que estão envolvidos: a exploração do tipo de tarefa e elaboração da técnica, bem como o trabalho da técnica. A última negociação é a técnica utilizada para resolver o tipo de tarefa ($T_3: ax^2 + bx = 0$): a “fórmula de Bhaskara”.

As negociações em torno dessa técnica revelam substituições dos coeficientes a e b, bem como manipulação de valores e sinais. Na resolução, o professor apresenta uma expectativa positiva, em comparação com a outra técnica, observe: “*vamos montar agora na forma de Bhaskara... é mais fácil que isso, né (...)*”. O desejo do professor é mostrar aos alunos que a fórmula de Bhaskara é a mais fácil das técnicas apresentadas e pode ser utilizada na resolução de todas as equações, tanto as completas como as incompletas (todos os tipos de tarefas). Nesse sentido, interpretando o pensamento do professor, a fórmula de Bhaskara, seria uma espécie

de “curinga” aquela que pode ser utilizada em todas as situações que dizem respeito às resoluções das equações do segundo grau.

Para finalizar, o professor Davi apresenta uma equação na forma $ax^2 + bx + c = 0$ e resolve apenas pela técnica fórmula de Bhaskara. Devemos lembrar que essa técnica foi a única apresentada por Davi para determinar as raízes da equação do segundo grau na forma completa.

Podemos pensar em uma regra implícita na apresentação das resoluções anteriores, que o professor Davi aponta que o fato de existir tipos de tarefas diferentes não implica dizer que as técnicas também têm que ser diferentes. O que observamos no resumo é que os tipos de tarefas ($T_1: ax^2 + bx + c = 0$; $T_2: ax^2 + c = 0$ e $T_3: ax^2 + bx = 0$) podem ser executados tanto por técnicas diferentes, como por técnicas iguais (fórmula de Bhaskara).

Após apresentar a análise das aulas do professor Davi sobre o contrato didático e as organizações matemáticas e didáticas, vamos iniciar, no tópico seguinte, a análise das aulas do professor Lucas.

6.2.2 Análise das Relações Contratuais nas Organizações Matemáticas e Didáticas na Sala de Aula do Professor Lucas

Iniciaremos nesse tópico a análise das relações entre o contrato didático, organizações matemáticas e didáticas nas aulas do professor Lucas. Uma primeira colocação do professor foi lembrar aos alunos que “hoje foi o dia marcado para filmagem das aulas, início da pesquisa do professor Fernando, mas vocês não devem se preocupar, porque a aula será igual às outras”. No entanto, ele pede para os alunos cooperarem, diminuindo as conversas paralelas, prestando atenção e participando da aula como sempre fizeram. Logo depois, anunciou a introdução do conteúdo a ser trabalhado, “equação do segundo grau a uma incógnita”.

É possível perceber que o professor Lucas, mantém uma boa relação com os alunos; no entanto, não valoriza conversas paralelas em nenhum aspecto, pois em pouco tempo que inicia a aula, ele parte logo para a primeira negociação.

Essa negociação faz referência explícita à equação do segundo grau e propõe aos alunos que as duas primeiras aulas façam parte da introdução do conceito. O recorte a seguir esclarece o que estamos dizendo.

Quadro 56: Recorte da transcrição da aula - Lucas

(P): A gente *vai tentar trazer o conceito, apresentar ele (...). Para poder falar de equação e equação do segundo grau, eu vou propor o seguinte para gente. Vamos lembrar um pouquinho do que vimos no ano passado. Não é? Sobre equações (...)* Por exemplo, *equação do primeiro grau, como é que aparece a definição de equação do primeiro grau, toda equação que se pode escrever na forma, aí aparece aquela estrutura algébrica $ax + b = 0$, aí vem com a e b pertencentes aos reais.* Então foi a partir desse momento que vocês começaram a estudar a equação, a estrutura dela. A estrutura algébrica. Então, a gente tem que voltar um pouquinho para falar de equação do segundo grau. Volto um pouquinho para lembrar a definição de alguns conceitos desses...

É possível perceber, nesse recorte, que Lucas procura negociar com os alunos, embora só exista o seu turno de fala, a importância de retomar alguns conceitos de equação do primeiro grau para poder apresentar a equação do segundo grau. O ato de retomar esses conceitos pode acontecer porque, para Lucas, existe uma relação entre as equações do primeiro grau e segundo grau, existem conceitos comuns entre as equações. Observe na fala de Lucas o destaque para essa importância: “a gente tem que voltar um pouquinho para falar de equação do segundo grau”.

O professor segue negociando e apresenta a definição de equação do primeiro grau com a estrutura algébrica $ax + b = 0$ (forma canônica). É possível inferir que iniciar com a equação do primeiro grau, para depois introduzir a equação do segundo grau, aponta para uma regra implícita de contrato: o ensino das equações do segundo grau deve acontecer não a partir de uma ruptura com os conceitos da equação do primeiro grau, mas através de uma continuidade desses conceitos. De forma semelhante, é necessário primeiro ter acesso aos tipos de tarefas das equações do primeiro grau para depois avançar na direção das equações do segundo grau.

Acreditamos que, implicitamente, Lucas entende que existem conceitos (técnicas e tecnologias) importantes da equação do primeiro grau que podem ajudar no entendimento das equações do segundo grau. Veja a afirmação do professor “*vamos lembrar um pouquinho do que a gente viu o ano passado (...), a gente tem que voltar um pouquinho para depois falar de equação do segundo grau. Volto um pouquinho para lembrar a definição de alguns conceitos desses (...)*”.

É possível dizer também que a equação do primeiro grau, que pode ser representada a partir de tipo de tarefa, mantém uma relação importante com a equação do segundo grau, que também pode ser expressa em tipos de tarefas, embora diferentes.

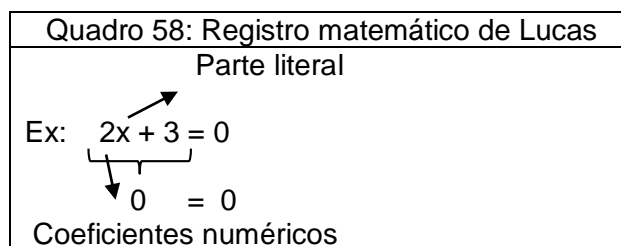
Outro aspecto que consideramos importante nesse início de aula diz respeito à negociação do professor, que logo no seu primeiro turno de fala constitui um ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica e ao tipo de tarefa que pretende trabalhar. O professor trata de conceitos importantes de equação, como verificar “*equação do primeiro grau, como é que aparece a definição de equação do primeiro grau, toda equação que se pode escrever na forma, aí aparece aquela estrutura algébrica $ax + b = 0$, aí vem com a e b pertencentes aos reais*”.

Essa escolha de Lucas em trabalhar o ambiente tecnológico-teórico logo no início da aula, remete-nos à discussão de Chevallard (2007), quando propõe que o ambiente tecnológico-teórico (terceiro momento didático) é utilizado em muitas ocasiões em sala de aula como o primeiro momento da OD. Essa escolha, por parte de Lucas pode estar relacionada a uma questão de economia da “didática global”, ou seja, ao escolher esse caminho, o professor tem preocupações em transmitir informações e em atender ao maior número de alunos possível.

No recorte abaixo, a negociação entre o professor e os alunos começa a ser mais dialogada, os alunos começam a se envolver mais com a situação, e, assim, tornam-se mais ativos na relação didática.

Quadro 57: Recorte da transcrição da aula - Lucas

(P): Eu vou começar com a perguntinha clássica. *O que é uma equação?* Vocês lembram disso?
 (A1): Eu não lembro não...
 (P): Quem lembra, *o que é uma equação?* Vocês devem ter lembrando quando o professor falou de equação...
 (A2): Ah! Eu só me lembro da incógnita...
 (P): Lembra de quê?
 (A2): Da incógnita...
 (P): Da incógnita... já é uma coisa interessante. *O que seria incógnita?* Essa seria a próxima pergunta da gente. O professor quando falou de equação para vocês ele deve ter mostrado outros nomes, *tipo sentença. Ou não falou disso?*
 (A1): Não...
 (P): Quando ele foi falar de equação, ele falou de sentença, falou de expressão, deve ter falado de expressão algébrica, expressão literal, lembram disso? Agora esses termos não significam a mesma coisa... Equação ela é bem mais específica... Tá bom. Alguém lembra ou não? Já viram que B (aluna) lembrou que existe a incógnita...
 (A2): É o valor a ser encontrado...
 (...)



(P): Por exemplo os números, que vêm antes das letras, se chama (sic) de quê? Quem lembra?

(A2): São os coeficientes...

(P): Olha aí, está começando a lembrar! São os coeficientes. Coeficientes o quê?... Os coeficientes numéricos. Certo? Tudo bem? A parte da letra, não é... interessante ela aqui ainda não assume o nome de incógnita, apesar de B (aluna) lembrar do termo. Aqui ela é apenas o quê? A parte que a gente chama o quê?

(A): Literal...

(P): Isso, muito bem... A parte literal, então, a gente começa por aí para chegar a equação do segundo grau, o caminho é o mesmo, a gente tem que relembrar o que é uma expressão, nesse caso aqui seria uma sentença, mais o que está faltando para isso aqui ser uma equação?

(A): A igualdade dos termos...

(P): Como é? A igualdade. Tá vendo vocês lembram isso aí! Para isso aqui ter o sentido de equação. Aí nós temos que ter uma igualdade aqui. Então isso aqui vai ter que ser igual. Por exemplo, vamos botar isso aqui igual a zero... É uma igualdade. E aí agora nessa forma que está aqui estruturada, aí essa parte literal agora já tem, a gente denomina ela de outra forma, por exemplo, ela pode assumir o termo de incógnita... o que seria a incógnita? Incógnita é o quê? O que é uma incógnita?

(A): O valor a ser encontrado...

O professor Lucas, no recorte anterior a esse, já apontava para necessidade de cuidar da passagem da equação do primeiro grau para a equação do segundo grau. No entanto, no recorte acima a negociação fica mais evidente. Ainda sobre o esse recorte e o registro do professor, observamos, na constituição do ambiente tecnológico-teórico, um desfecho da negociação anterior a essa, em que o professor negocia de forma dialogada a definição de equação e incógnita. Observe o que ele fala: “o que é equação?” Podemos dizer que os conceitos que estão ligados à definição de equação vão surgindo gradativamente durante a aula.

Em outro momento o professor pergunta aos alunos: “(P): Quem lembra, o que é uma equação? (...) Como resposta o aluno diz: “Ah eu só me lembro da incógnita...”. Embora o aluno não tenha respondido, especificamente, o questionamento do professor, faz referência a um elemento importante da equação. Assim, Lucas, ao perceber a reação dos alunos, concretizando sua expectativa, parte para outros questionamentos, com intuito de fazer os alunos considerarem outros conceitos de equação que são necessários, na sua visão, para o ensino das equações do segundo grau.

Nesse contexto, podemos inferir que o professor, diante das várias respostas dos alunos, procura, em algum momento, “institucionalizar” os saberes que ele considera que são saeres de referência para o estudo das equações. Por outro lado, os questionamentos e a relação dialogada parece ser uma das características contratuais do professor para colocar os alunos na situação de estudante.

Sobre a institucionalização, Chevallard (2007) fala que ela tem por objetivo “*incorporar conceitos*” que são importantes e que vão ser utilizados no estudo em questão. No caso do professor Lucas ele procura aqueles que considera importantes para o estudo da equação do segundo grau.

Para chegar ao conceito de equação, o professor promove um diálogo sobre expressão algébrica, expressão literal, coeficientes, incógnita e a igualdade. Por fim, de forma explícita, fala que “*a gente começa por aí para chegar a equação do segundo grau, o caminho é o mesmo, a gente tem que lembrar o que é uma expressão, nesse caso aqui seria uma sentença. Mas o que está faltando para isso aqui ser uma equação?*”. Diante do questionamento o aluno responde: “*a igualdade dos termos*”. Entendemos que esse conjunto de conceitos, negociados pelo professor, vai, de certa maneira, manter uma relação estreita com a organização matemática, especialmente com as técnicas utilizadas para resolver a equação do segundo grau.

Do ponto de vista da relação do contrato didático com as organizações didáticas, podemos dizer que toda a introdução que vem sendo negociada por Lucas, procura constituir um ambiente tecnológico-teórico. Entendemos que vários elementos desse ambiente são colocados à disposição dos alunos, com intuito de justificar as suas escolhas futuras. Assim, pouco a pouco, o professor vai preparando os alunos para o encontro com os tipos de tarefas e as técnicas relacionadas ao ensino das equações do segundo grau. Sobre essa situação, Chevallard (2007, 1999) considera que a constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo ao bloco prático-técnico, mantém uma relação estreita com cada um dos outros momentos.

Outro aspecto que reforça o que estamos falando diz respeito à negociação com os alunos sobre os princípios aditivo e multiplicativo na resolução da equação do primeiro grau. O registro abaixo ajuda a esclarecer o que estamos falando.

Quadro 59: Registro matemático de Lucas	
Parte literal	
\uparrow Ex: $2x + 3 = 0$	$\left. \begin{array}{l} 2x + 3 = 0 \\ 2x = -3 \end{array} \right\} \text{Princípio aditivo}$
\downarrow Coeficientes numéricos	$x = \frac{-3}{2} \rightarrow \text{Princípio multiplicativo}$
$2.1 + 3 = 0$ $2 + 3 = 0$ 5 diferente de zero	

O professor negocia com os alunos a resolução da equação do primeiro grau, através das técnicas de tentativa e erro e pela técnica de transpor termos ou coeficientes. No entanto, ao apresentar a resolução pela técnica de transpor termos, de forma explícita faz referência a elementos tecnológicos (princípio aditivo e multiplicativo) ligados a ela, com intuito de justificar as ações matemáticas que fazem parte da resolução. O que estamos observando acima pode ser semelhante ao que propõe Chevallard (1999) quando aponta que o professor baseia-se em um discurso racional sobre a técnica, assegurando que a técnica permite que se cumpra bem a tarefa.

Ao continuar a negociação, em outra fala, o professor diz aos alunos que o resultado de $2x = -3$ surgiu da adição do 3 em ambos os membros, atendendo ao princípio da equivalência. Lucas conclui dizendo que *“é usando esse princípio que vou adicionar e subtrair. Qual é o valor que eu utilizo, com adição ou subtração, para o três sumir daqui?”*. Essa atitude do professor, de utilizar argumentos tecnológicos, parece fazer parte do seu contrato, e tem como característica ser mais duradouro que outros na relação didática. Possivelmente, o professor em resoluções futuras pode lembrar esses princípios que foram negociado.

Para justificar suas ações sobre o princípio da igualdade, Lucas fala que *“lembrando que aqui está seguindo a seguinte regra, o que eu utilizo nesse lado eu tenho que fazer no outro lado também. Tá entendendo, princípio da igualdade, o que eu faço de um lado faço no outro também. Porque se não, não fica igual. É como utilizar uma balança”*. Podemos observar que toda essa negociação culmina com a metáfora da balança. Implicitamente, essas informações estão ligadas às técnicas que devem ser utilizadas para resolver o tipo de tarefa.

Observe a transcrição da fala do professor sobre a negociação anterior.

Quadro 60: Recorte da transcrição da aula - Lucas

(P): (...) Até aqui eu tenho quase certeza que o professor passou isso para vocês. *Mas, daqui para frente não tenho tanta certeza. Desse passo para esse aqui aconteceu uma operação nos dois termos da igualdade. Aqui eu só passei o três para o outro lado, mas, na equação não funciona bem assim, tá certo?* A equação exige um *princípio*, foi o que vocês falaram, para dizer que a equação precisava da igualdade. Então a equação precisa desse *princípio*, *princípio da igualdade*. E esse princípio da igualdade, ele traz para gente outros princípios também... por exemplo aqui aconteceu um princípio, princípio o quê? Aditivo. Tá vendo o que aconteceu aí, o que seria isso? E daqui para cá, aconteceu o quê? Acontece o que, outro princípio, lembrando que eles fazem parte da igualdade. O princípio multiplicativo... tá certo...

Essas negociações talvez tenham sido motivadas pela posição contrária do professor à manipulação descontextualizada de valores que fazem parte da equação. Observe a transcrição da fala de Lucas: *“isso aqui é mais para vocês terem consciência de como funciona a equação (...) não é só pegar um número e passar para o outro lado e mudar o sinal... Não é só isso que acontece... Apesar da gente fazer isso de forma prática, mais tem isso aqui por traz”*.

Após esse momento, Lucas dá início a outra negociação sobre o grau da equação. E de forma explícita chama atenção dos alunos, dizendo que é necessário olhar não apenas para incógnita da equação, mas, sobretudo, para o expoente que se encontra nas incógnitas.

Quadro 61: Recorte da transcrição da aula - Lucas

(A1): Através das incógnitas?

(P): Vamos por parte, *eu tenho que olhar para as incógnitas, mas eu devo olhar também para quem?*

(Als): *Os expoentes...*

(P): Então, para graduar uma equação a gente vai *olhar para incógnita e o expoente dela...* tá certo... por exemplo, se estiver lá um expoente dois, dizemos que aquele monômio é do segundo grau, se tiver três, terceiro grau. Então, uma equação do segundo grau ela vai ter um expoente dois. Isso aqui podia ser uma equação do segundo grau? Dois x ao quadrado mais três é igual a zero.

Nesse diálogo apresenta uma equação do segundo grau na forma incompleta, como exemplo para identificar o grau. Sob o ponto de vista das organizações matemáticas, essa equação seria um tipo de tarefa T₂: $ax^2 + c = 0$. Por outro lado, se olharmos para as informações relacionadas às organizações didáticas, podemos dizer que esse é o primeiro encontro propriamente dito com o tipo de tarefa. O que faz acontecer esse encontro, “prematuramente”, sem nenhum tipo de resolução é o entorno matemático e didático promovido pela ação didática do professor. Por outro lado, Brousseau (1986) lembra que na sala de aula o professor não tem controle sob suas ações, porque elas são estabelecidas pelas relações contratuais. De forma dinâmica, temos um conjunto de elementos interagindo entre si, uns com os outros.

Um pouco mais adiante, Lucas faz uma comparação entre as equações do primeiro grau na forma incompleta e a equação do segundo grau, para mostrar a semelhança e a diferença entre elas, tanto pela falta de um termo, quanto pelas diferenças no grau do expoente. Essa negociação conduz ao registro formal das duas equações, a equação do primeiro grau ($ax + b = 0$) e a equação do segundo grau (ax^2

+ $bx + c = 0$). Esse registro aponta para o primeiro encontro com o tipo de tarefa que representa a equação do segundo grau na forma completa.

Até esse momento, as relações contratuais que emergem na relação didática apontam sempre que Lucas utiliza argumentos tecnológicos-teóricos para balizar seu diálogo com os alunos. E esses argumentos são apresentados de forma dinâmica entre e nas equações. Outro elemento contratual, que consideramos mais duradouro, diz respeito à passagem da equação do primeiro grau para equação do segundo grau, uma vez que surgiu no início da aula através de conceitos comuns entre as equações e foi até o final da segunda aula. Dando andamento à aula, o professor propõe a resolução de um problema matemático que recai numa equação do segundo grau, conforme transcrição a seguir:

Quadro 62: Recorte da transcrição da aula - Lucas

(P): Agora, vamos entender um pouquinho qual é o contexto que a gente usa equação do segundo grau. Essa aqui eu quero que vocês peguem o caderno e escrevam...

Registro¹ do Professor Lucas

Problema:
O desenho abaixo, seria a planta parcial de um escritório. As duas salas quadradas e o corredor retangular, têm, juntos 40 m² de área. Cada sala tem x metros de lado e o corredor tem 1 metro de largura. Qual é a medida x de cada sala?

Investigação:
De acordo com a figura e os dados do problema temos:

- a área de cada sala $\rightarrow x^2$, (as duas: $x^2 + x^2 = 2x^2$)
- a área do corredor $\rightarrow 1 \cdot 2x = 2x$
- a expressão que descreve o problema $\rightarrow 2x^2 + 2x = 40$

Essa opção em trabalhar equações do segundo grau a partir de um problema com contexto matemático, dá indícios, que o professor Lucas pretende estabelecer uma relação didática em que os alunos se aproximem mais das discussões relativas à equação do segundo grau e se tornem mais ativos na atividade. Percebe-se que, inicialmente, o professor explica as informações do problema com detalhes aos alunos e, logo após, começa a negociar a sua resolução. A transcrição a seguir aponta para os detalhes finais da negociação.

Quadro 63: Recorte da transcrição da aula - Lucas

(P): (...) sem se preocupar em encontrar o valor para x , tá certo? É só uma leitura mesmo... por exemplo, quando eu perguntei para você como se calculava a área, vocês me disseram, professor a gente pega o lado e multiplica um pelo outro... Usando essas informações, como é que eu poderia encontrar a área de cada sala?

(A1s): x ao quadrado...

(P): x ao quadrado? Porque?

(A1s): Porque é x vezes x ...

(P): Então, aqui é a área da sala. Pode ser representado por x^2 . Deixa eu ver se vocês estão afiados mesmo, vocês percebem no desenho que nós temos quantas salas?

(A1s): Duas salas...

(P): Aí vocês já responderam para mim que a área de cada sala é representado por x^2 , se eu perguntasse para vocês agora meninos, qual é a área das duas salas juntas?

(A1): Dois x ao quadrado...

(P): Dois x ao quadrado, porque, x ao quadrado mais x ao quadrado. Ou seja, x ao quadrado é igual a um, eu vou colocar essa informação e vocês podem colocar aí também. A área de cada um é x^2 , se vocês estiveram considerando a área das duas. Vou até colocar assim. Certo... Olhando essa primeira parte aí, essa primeira identificação que a gente faz. Nós fizemos é... nós conseguimos construir um dos termos da equação, vocês concordam comigo? Sim ou não? Lembram da conversa anterior nossa dos termos da equação? Essa aí seria qual termo? Representa qual coeficiente? Lembra que tem o coeficiente "a" o "b" e o "c"... esse seria qual desses? O "a", ou "c"...

(A): Inaudível....

(P): Não rapaz eu estou falando desse...

(A2): Seria o "a"...

(P): Porque seria o "a"...

(A2): Por causa da incógnita e por causa do grau...

(...)

(P): Você pensou assim... Se eu completar aqui... (...) Que dizer que essa medida aqui do corredor é x mais x , dois x , concordam? Então, x mais x da dois x . Mas, nós não estamos fazendo o perímetro nós estamos fazendo a área... É necessário pegar um lado e multiplicar pelo outro, e descobre que é quanto? Dois x , ou seja, a largura é um metro e o comprimento é dois x . E como é que fica isso, fica um vezes dois x que é igual a dois x . Entenderam gente até aí? E por fim dava para resolver essa? Esse último ponto. O que é que ele pede?

(A2): É dois ao quadrado, mais dois x ...

(P): Dois ao quadrado?

(A): x ao quadrado mais dois x é igual a quarenta...

(P): Dois x ao quadrado mais dois x ...

(A1): Mais vai faltar o termo c ...

Essa transcrição revela um detalhe interessante, em que o professor utiliza um diálogo questionador com seus alunos. Como podemos observar, em vários momentos, ao fazer uma pergunta aos alunos, ele não se satisfaz com as respostas mais diretas e sempre solicita que justifiquem. Observe o diálogo: (...) *"usando essas informações, como é que eu poderia encontrar a área de cada sala? (A): x ao quadrado... (P): x ao quadrado? Porque? (A): Porque é x vezes x ... (P): Então, aqui é a área da sala... pode ser representado por x ao quadrado... deixa eu ver se vocês estão afiados mesmo, vocês percebem no desenho que nós temos quantas salas?"*.

Essa transcrição aponta que Lucas procura conduzir sua aula intercalando perguntas – respostas – novas perguntas (para que o aluno esclareça) – justificativas (alunos). Vale destacar que esse diálogo, implicitamente, trata de elementos que fazem parte de um tipo de tarefa, bem como, visa construir esse tipo de tarefa.

Outra característica do contrato adotado por Lucas é a retomada das informações anteriores que considera importante para que os alunos possam se envolver em sua proposta de atividade. Como no turno de fala que segue: *“nós conseguimos construir um dos termos da equação, vocês concordam comigo? Sim ou não? Lembram da conversa anterior nossa dos termos da equação? Essa aí seria qual termo? Representa qual coeficiente? Lembra que tem o coeficiente “a” o “b” e o “c”. Esse seria qual desses? O “a”, ou “c”.*

Esse contexto de negociação faz surgir uma equação do segundo grau na forma completa ($ax^2 + bx = c$). Essa equação, sob o ponto de vista das organizações matemáticas, seria um subtipo de tarefa. Esse momento também pode se caracterizar como o primeiro encontro propriamente dito com o tipo de tarefa ou subtipo de tarefa (organização didática). Para Otero (2011), as organizações matemáticas e didáticas são inseparáveis no trabalho do professor, e só é possível colocar em prática a atividade matemática através da atividade didática.

Por outro lado, Joannert e Borght (2002) destacam que o contrato didático é indispensável ao funcionamento da relação didática. Essa noção, permite a interação singular (um professor e seu implícito) e uma personalidade plural (uma aula com seu costume) a propósito de um objeto de ensino e aprendizagem.

Após esse momento, o professor retoma as explicações sobre os conceitos de equação do segundo grau. É possível perceber que o seu trabalho envolve a construção de um ambiente tecnológico-teórico (terceiro momento didático). Nesse sentido, faz considerações sobre a resolução anterior, dizendo que as equações desse tipo são chamadas de equações do segundo grau a uma incógnita. Essas equações apresentam-se na forma de $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c, são números reais e $a \neq 0$. Além disso, os números a, b e c, são chamados de coeficientes da equação, em que “a” é sempre o coeficiente do termo x^2 , “b” é sempre o coeficiente do termo x, e o “c” é o coeficiente que não apresenta a parte literal.

A partir de agora Lucas procura negociar com os alunos o estudo das equações do segundo grau na forma incompleta.

Quadro 64: Recorte da transcrição da aula - Lucas

(P): (...) a equação do 2º grau em sua forma o quê? Em sua forma reduzida tá certo? Vejam, o que é isso aí? Por que nós vamos pegar algumas equações do 2º grau que, de cara, você não vai perceber, ou então, não vai está tão clara que ela é equação do 2º grau.... Depois que você faz uns ajustes nela, é que você vai reconhecer que ela volta pra aquela forma que a gente já aprendeu ontem, que forma?

(Al): a ao quadrado, mais bx, mais c, igual a zero.

(P): ax ao quadrado mais bx mais c que é igual a zero. Então, quando ela estiver nessa forma, nessa estrutura aqui é que você vai, então, poder dizer que ela é uma equação do 2º grau... O que eu estou tentando dizer pra vocês é que, vocês vão pegar algumas equações que são do 2º grau, mas que da forma que ela está distribuída nos membros você não consegue identificar, logo de cara, que ela é uma equação do 2º grau... *Você tem que fazer alguns ajustes*, aí esses ajustes usando aqueles princípios que nós vimos ontem, o princípio da igualdade, ou seja, resolvendo a equação na prática, ela termina sendo... é, *reduzida a essa forma aqui* e aí entra a parte de reconhecimento, você vai identificar se ela é do 2º grau, se é completa, se é incompleta, todas aquelas premissas que a gente viu ontem.... Vamos ver um exemplo de uma equação do 2º do grau, que é do 2º grau, mas não está nessa forma aqui...

Uma primeira questão que consideramos relevante é a escolha de Lucas em iniciar as negociações sobre equação do segundo grau pela sua forma completa (tipos de tarefas $ax^2 + bx + c = 0$) ou forma “reduzida” (palavras de Lucas).

Nesse mesmo contexto, o professor destaca a necessidade de estudar equações em que, na sua estrutura inicial, não é possível identificar se são completas ou incompletas; no entanto, ao aplicar algumas “técnicas” é possível classificá-las. Veja o trecho do recorte: *“nós vamos pegar algumas equações do 2º grau que de cara você não vai perceber, ou então, não vai está tão claro que ela é equação do 2º grau. Depois que você faz uns ajustes nela, é que você vai reconhecer que ela volta pra aquela forma que a gente já aprendeu ontem, que forma?”*.

O professor conduz a relação negociando implicitamente com os alunos que algumas equações não se encontram na sua forma canônica e, para estas, é necessário aplicar algumas técnicas matemáticas (transpor termos ou coeficientes; desenvolver ou reduzir expressões, entre outras) para ser possível identificá-las, como podemos ver no recorte adiante. No entanto, sabemos que isso só é possível a partir da ação didática do professor, o que caracteriza uma organização didática.

Assim, o primeiro exemplo escolhido pelo professor para negociar a classificação e resolução da equação do segundo grau é um subtipo de tarefa, que ao ser desenvolvida transforma-se em uma equação na forma completa.

Quadro 65: Registro matemático de Lucas	
	$3x^2 - 6x = x - 3$
	$3x^2 - 6x - x = -3$
	$3x^2 - 7x = -3$
	$3x^2 - 7x + 3 = 0$
$a = 3$	} Completa
$b = -7$	
$c = 3$	

O quadro abaixo apresenta um diálogo entre o professor e seus alunos na resolução do problema:

Quadro 66: Recorte da transcrição da aula - Lucas

(P): Então, vamos ver alguns exemplos. O primeiro exemplo eu vou colocar simples, depois eu coloco um mais “chapado” aqui. Olha essa forma aqui, essa equação aqui. Por conta desse dois aqui, dá até pra gente desconfiar que é uma Equação do 2º grau. Mas ela não está nessa forma aqui, então a ideia seria o seguinte, que você pegasse essa equação do jeito que está aqui, fazendo as adequações necessárias pra escrever.

(A1): Passar o x pra o outro lado e igualar a zero.

(P): Pronto vamos ver aqui, passar o x pra esse lado é?

(A1): É...

(P): Mas na realidade quando eu passo esse x pra esse lado B (aluna), eu tô fazendo o que?

(A1): Somando o simétrico dele...

(P): Somando o simétrico dele aonde?

(A1): Dos dois lados...

(P): Dos dois lados... Então, três x ao quadrado menos seis x menos x igual a menos 3... Não é assim? Ai continuando, isso aqui vai ficar o quê? Três x ao quadrado menos sete x igual a menos três, pronto cheguei aqui. O que é que tá faltando pra isso ficar parecido com isso aqui?

(A1): Passa o três e iguala a zero.

(P): Passa o três não é? Então nós temos três x ao quadrado menos sete x, trouxe o três pra cá e iguala a 0. Pronto, aí nessa forma dá pra gente identificar o coeficiente “a”, o coeficiente “b” e o coeficiente “c”. Sim?

Um primeiro aspecto que destacamos é o nível de dificuldade que o professor adota nas atividades. Explicitamente ele fala que o primeiro exemplo será mais simples e os outros exemplos serão mais “chapados”. Acreditamos que esse termo apresentado por Lucas está associado a um problema mais difícil. Nesse mesmo contexto, negocia implicitamente com seus alunos que existem algumas equações que parecem ser do segundo grau, uma vez que na atividade aparece o expoente dois. No entanto, Lucas alerta que seria necessário fazer algumas adequações na equação para poder classificá-la e poder dizer se ela é mesmo do primeiro grau, do segundo grau, completa ou incompleta.

A regra de contrato subjacente a essa negociação seria a de que nem toda equação pode ser de imediato identificada como do primeiro grau ou segundo grau, nem tampouco, completa ou incompleta. Existem situações em que é preciso submeter a equação a técnicas matemáticas (transpor termos ou coeficientes e desenvolver e reduzir) até chegar a forma canônica, para ser possível identificar sua classificação ou identificar o tipo de tarefa.

Outro destaque é que essa negociação permitiu também aos alunos terem acesso ao primeiro encontro com um subtipo de tarefa, bem como com um tipo de tarefa ($ax^2 + bx + c = 0$). Ainda a respeito das OD, embora essa resolução não proponha identificar as raízes da equação, é possível perceber o segundo momento didático atuando na situação, que é a exploração do tipo de tarefa (subtipo de tarefa) e a elaboração da técnica.

O ato de resolver (exploração) um tipo de tarefa, implica em utilizar uma técnica matemática. No entanto, segundo Chevallard (2003) o estudo de um problema particular não deve ter como único objetivo sua resolução, mas ser um meio em que se constitua uma determinada técnica. Assim, queremos reiterar que a elaboração da técnica está no coração da atividade matemática.

Vale destacar que as OM e OD caminham juntas e que a organização didática surge a partir do momento em que a organização matemática está sendo colocada em prática. Assim, a OD, descrita acima, está voltada para execução da OM, com seus tipos de tarefas, técnicas e tecnologias; essa execução acontece mediante os momentos didáticos da organização didática (BOSCH; GÁSCON, 2007).

Ainda no recorte, o professor procura negociar implicitamente com o seus alunos os elementos tecnológicos relacionados ao desenvolvimento e redução da equação do segundo grau. Observe a seguir: “(P): *Mas na realidade quando eu passo esse x pra esse lado B (aluna), eu tô fazendo o quê? (A1): Somando o simétrico dele... (P): Somando o simétrico dele aonde? (A1): Dos dois lados*”. No final da redução da equação o professor afirma que agora é possível identificar os seus coeficientes. Ou seja, implicitamente o professor negocia com os alunos que só é possível identificar a equação porque ela se encontra na sua forma canônica.

Após a resolução do primeiro exemplo e classificação, o professor propõe outros exemplos, repetindo sempre a mesma pergunta: “Será que essa equação aqui é do segundo grau, é completa ou incompleta?” Esses exemplos apresentam um subtipo de tarefa diferente do anterior. Assim, o contrato que emerge da relação

didática aponta para o primeiro encontro (reencontro) com o tipo de tarefa, para a exploração do tipo de tarefa e elaboração da técnica.

Por outro lado, os subtipos de tarefa apresentados aos alunos oferecem a oportunidade de serem trabalhadas técnicas semelhantes. É possível perceber também que o professor deseja mostrar aos alunos que todo subtipo de tarefa tem algo em comum, passa pela forma canônica e assim, é possível classificar a equação em completa ou incompleta. Por outro lado, Araújo (2010), corroborando com a ideia de Chevallard (1998), alerta que o objetivo deste momento é melhorar a técnica trabalhada, tornando-a mais econômica e eficiente.

Segue abaixo um exemplo dos subtipos de tarefas apresentados aos alunos.

Quadro 67: Registro matemático de Lucas
$\text{EX}_2: \frac{2}{x} - \frac{2}{x} = \frac{x}{x-4}$ $- 3x^2 + 8x - 16 = 0$

O professor apresenta o subtipo de tarefa aos alunos e solicita a resolução. No entanto, o aluno não aceita participar da atividade, possivelmente, porque ainda não tinha sido apresentado pelo professor um exemplo relacionado com frações. Nesse sentido, parece existir indícios, na relação didática, de uma reorganização contratual por parte de Lucas, pois o professor promove um diálogo com os alunos através de perguntas, para minimizar essa dificuldade, até chegar ao conceito de MMC. Embora não seja proposto um registro no quadro após esse diálogo, percebe-se que é dado um redirecionamento a resolução. Assim, após essa etapa o professor assume a resolução, negociando técnicas que promovem a redução do subtipo de tarefa ao tipo de tarefa (T_1) $ax^2 + bx + c = 0$.

Vale destacar que a resolução procura apenas classificar a equação em primeiro grau ou segundo grau e determinar se ela é completa ou incompleta. Diante desse fato, fica claro para os alunos que, estando a equação na estrutura de subtipo de tarefa, não é possível identificá-la. Essa regra de contrato vem sendo constituída no decorrer da aula através de exemplos.

A aula continua e Lucas dá início a mais uma resolução da equação do segundo grau, agora, na forma incompleta. A dinâmica para iniciar continua a mesma, utiliza questionamentos como regra de contrato para iniciar a resolução, observe: “Quais são

as equações incompletas?” Essa pergunta, implicitamente, pode estar relacionada a quais os tipos de tarefa existe nas equações incompletas? “Quais são os termos que podem não pertencer na equação, para que ele seja incompleta?” Após esses questionamentos, o professor aponta para um aspecto importante no que diz respeito à validade da equação do segundo grau. Pergunta aos alunos se o termo “a” pode não pertencer a equação do segundo grau. Entendemos que Lucas quer questionar aos alunos se é possível uma equação do segundo grau sem o termo “a”. Observe o diálogo abaixo. Essa discussão caminha para uma relação com o ambiente tecnológico-teórico.

Quadro 68: Recorte da transcrição da aula – Lucas

(P): Vamos partir agora pra resolução, tá certo? Bom, vamos começar resolvendo as Equações do 2º grau a partir das equações incompletas, tá certo? Quais são mesmo as equações incompletas? Quais são os termos que podem não aparecer na equação? O termo “a”?

(A): Não, só não pode aparecer o termo “b” e o termo “c”...

(P): O “b” pode ser zero?

(A): Pode.

(P): E o “c”?

(A): Também.

(P): Então as equações incompletas são do tipo que falta o termo “b” ou falta o “c”. A primeira incompleta vai ser desse tipo aqui, ax ao quadrado mais bx que é igual a zero... Qual é o termo que falta nessa?

(A): O “c”.

Como podemos observar, o quadro acima deixa claro que Lucas mais uma vez utiliza questionamentos para dar início às negociações. Dentro dessa discussão, faz a opção de retomar alguns aspectos tecnológicos sobre as equações para embasar a sua discussão e, assim, o diálogo segue e ele relaciona as equações completas e incompletas a partir de seus termos.

Após discutir a relação entre as equações, o professor escolhe para trabalhar com os alunos a equação incompleta. Isso indica, em termos da organização didática, o primeiro encontro propriamente dito com o tipo de tarefa T_3 : $ax^2 + bx = 0$. Associado, ao primeiro momento didático, temos o segundo momento, a exploração do tipo de tarefa e elaboração da técnica relativas a esse tipo de tarefa. Quero dizer que o segundo momento ocorre na medida em que são apresentados os tipos de tarefas ou subtipos de tarefa. Para Bosch e Gascón (1999), um tipo de tarefa demanda a criação

de uma técnica, ou seja, a técnica diz respeito à maneira de fazer ou realizar as tarefas.

Para esclarecer a análise acima se faz necessário apresentar o registro matemático do professor de forma detalhada.

Quadro 69: Registro matemático de Lucas	
Ex ₁ : $x^2 - 9x = 0$ no conjunto dos Reais	
$a = 1$	$x^2 - 9x = 0$
$b = -9$	$x(x - 9) = 0$
$c = 0$	$x - 9 = 0$
	$x = 9$
	ou $x = 0$
$a \cdot b = 0$	$S = \{0, 9\}$
	Propriedade do produto "nulo"

Um primeiro aspecto, antes de apresentar a transcrição referente à resolução, é que pouco tempo antes de iniciar a resolução com os alunos, o professor justifica a escolha do exemplo, por ele ser descontextualizado. Lucas indica que “quando a gente começa a resolver as equações, a gente pode trabalhar em duas situações. A Primeira, ou você está trabalhando resolvendo uma equação, apenas pra trabalhar o conhecimento próprio da equação, ou seja, apenas pra trabalhar a própria matemática (...)”.

O professor aponta, implicitamente, que esse trabalho está relacionado ao trabalho da matemática em si mesma. A outra opção é um problema, que ele chama de contextualizado, como exemplo desse problema ele lembra aos alunos a aula anterior que tratou do problema da área das salas de um escritório.

A transcrição abaixo apresenta a resolução da equação do segundo grau $x^2 - 9x = 0$.

Quadro 70: Recorte da transcrição da aula - Lucas

(P): Já reconhecemos os coeficientes a, b e c. E agora pra resolver? Como é que resolve isso? Em outras palavras, qual é o valor que eu vou atribuir a incógnita pra resolver? *E o que significa resolver? Resolver significa o que aqui nessa equação? Resolver uma equação significa o quê?*

(A1): Encontrar o valor da raiz...

(P): Só isso? Não tem mais nada? Vão pensando ai...

Silêncio...

(P): *Então, a gente discutiu isso ontem. De ontem pra hoje, vocês já esqueceram? O que é resolver uma equação? É encontrar o valor da incógnita, que eu possa substituir aqui e a igualdade permaneça o quê?*

(Als): Igual...

(P): Verdadeira...

(...)

(A2): *É pra fazer por tentativa...*

(P): *Vai fazer por tentativas? Tentativas tipo assim, vai atribuindo valores... Mas e se a gente for encontrar o valor lá nos duzentos e pouco? A gente vai fazer duzentas tentativas?*

(A2): *A gente vai pulando...*

(P): *E se o que você pular for justamente o valor?*

(A2): *Ai você volta...*

(P): *Olha só, vou mostrar de novo aqui x e x nos dois termos.*

(A1): *Podia fazer x vezes x .*

(P): *Vamos lá... x vezes x , só x ? Assim?*

(A1): *x vezes x menos nove vezes x ...*

(Als): *Colocar em evidência...*

(P): *Isso! Colocar em evidência... Então coloquei em evidência e iguala isso aqui a zero...*

(A3): *E o x ao quadrado vai ficar onde?*

(P): *Olha aí a pergunta...*

(A3): *É que x vezes x é a mesma coisa que x ao quadrado...*

(P): *Aqui a gente vai está usando uma propriedade que a gente chama de distributiva. Distributiva da multiplicação em relação à adição ou subtração. Aqui x vezes x volta pra x ao quadrado e x vezes nove volta pra nove vezes x . Estamos no caminho certo, agora tá faltando só resolver. E agora?*

(Als): *Muda o sinal...*

(P): *Por que vai mudar o sinal? Vamos lembrar o nosso objetivo. O que temos que fazer é encontrar um valor pra x , mas será que é só um valor só ai? Não será mais que um valor? Já passou pela cabeça de vocês que pode não ser um só valor, mas mais de um valor? Dois, três.*

(A): *Não.*

(P): *Vamos pensar dessa forma. Eu tenho uma multiplicação.*

(A1): *Mas dentro do parêntese tem que dar zero.*

(P): *Dentro do parêntese tem que dar zero por quê?*

(A1): *Porque se multiplicar x por outro número não vai dar zero.*

(P): *Boa sacada... Pra poder o resultado dessa multiplicação ser zero, esse cara aqui vai ter que ser zero, concordam? Por exemplo, x vezes zero vai dar zero e assim a igualdade se mantém verdadeira... Mas só que, o que eu tenho dentro do parêntese? Dentro do parêntese eu tenho x menos nove. E assim x menos nove vai ter que ser quanto?*

(Als): *Zero...*

(P): *Isso...*

(Als): *x é igual a nove.*

(P): *Já achamos então que x vai ter que ser igual a nove. Vamos lá. Vou substituir nove aqui e vai dar zero não é? Substituo também x aqui e vai dar nove menos nove igual a zero. Então, beleza... x seria nove?*

(Als): *Seria...*

(P): *Mas haveria outra possibilidade ou acabou ai? E se a gente colocasse o x valendo zero também? Daria certo?*

(Als): *Sim.*

(P): *Mas de onde veio essa minha ideia de colocar x igual a zero?*

(A2): Sei não...

(P): Então vamos ver. *Esse caso aqui ele é importante pra gente, quando eu tenho multiplicação de um determinado termo por outro e isso dá zero. Quais são as possibilidades para que isso aconteça?*

(A1): Um dos dois tem que ser zero..

(P): *Ou os dois ser zero também... Então vejam, aqui eu estou considerando a possibilidade desse termo aqui ser zero e em relação ao outro. Aí entra essa historinha que acabei de contar. O outro termo também pode ser zero. Então ou um é zero, ou o outro é zero ou então ambos são zero. Se eu considero dessa forma, então as possibilidades são as seguintes: x é nove ou x é o que?*

(Als): Zero...

(P): Então eu encontrei o quê? Dois valores para x ... Tanto o nove serve quanto o zero também serve...

(P): Então como é que fica o meu conjunto solução? Então meu conjunto não tem só uma raiz, ele tem duas. Zero e...

(Als): Nove...

(...)

(P): Bom, aí vocês vão ter que estudar um pouquinho mais pra descobrir. Os principais passos pra resolver uma equação desse tipo aqui. É colocar o x em evidência e usar uma propriedade muito interessante. Isso que nós utilizamos aqui em relação aos zeros tem um nome, é *propriedade do produto nulo*. Que diz exatamente o que usamos aqui, *que na multiplicação quando o resultado é zero*. Ou um dos dois fatores é zero ou os dois fatores são zero. Então baseados nessa propriedade, nós resolvemos uma equação desse tipo, que não tem o termo “ c ” sem muitos problemas.

No primeiro destaque, o professor inicia a negociação com os alunos sobre o significado de resolver equação. Explicitamente, revela que o sentido de resolver a equação “é encontrar o valor da incógnita, que eu possa substituir aqui e a igualdade permanece, o quê? Verdadeira (...).

Um segundo destaque está no momento em que o professor procura estabelecer um caminho (técnica), uma maneira de fazer ou realizar o tipo de tarefa: “(A): É pra fazer por tentativa... (P): Vai fazer por tentativas? (P): Tentativas tipo assim, vai atribuindo valores... (P): Mas e se a gente for encontrar o valor lá nos duzentos e pouco? A gente vai fazer duzentas tentativas? (A): A gente vai pulando... (P): E se o que você pular for justamente o valor? (A): Ai você volta... (P): Olha só, vou mostrar de novo aqui x e x nos dois termos”. Essa negociação aponta para estabelecimento de uma técnica que dê conta da resolução do tipo de tarefa. É possível observar que o aluno levanta a discussão da técnica de tentativa e erro; no entanto, tal técnica não atende à expectativa de Lucas. Assim, ele contraargumenta dizendo que não seria possível para valores maiores. Esse diálogo sugere, implicitamente, que Lucas procura negociar com os alunos a proposição de uma generalização para resolução desse tipo de tarefa. Esse generalização busca as técnicas de “fatorar expressões colocando em evidência o fator comum e igualar os termos do produto a zero”.

Por outro lado, entendemos que a utilização sempre dessas técnicas, para resolver esse tipo de tarefa, aponta para indícios de uma aproximação de uma regra de contrato universal particular do professor. Essa regra de contrato sugere um passo a passo na resolução, que, gradativamente, vai se cristalizando, transformando esse passo a passo, numa espécie de núcleo duro do contrato na relação didática.

Um terceiro destaque aponta para o caminho da tecnologia, em que o professor procura um discurso racional sobre a técnica escolhida, ou seja, procura justificá-la, e, assim, ela possa cumprir bem a tarefa. A fala do professor esclarece melhor: “(P): Os principais passos pra resolver uma equação desse tipo aqui. É colocar o x em evidência e usar uma propriedade muito interessante. Isso que nós utilizamos aqui em relação aos zeros tem um nome, é propriedade do produto nulo”. Ele conclui dizendo que nos baseamos nessa propriedade justamente para resolver uma equação desse tipo, que não tem o termo “ c ”.

A negociação segue e outros elementos tecnológicos surgem de forma mais explícita; observe o diálogo entre o professor e o aluno: “(P): Então, coloquei em evidência e iguala isso aqui a zero... (A₁): E o x ao quadrado vai ficar onde? (P): Olha aí a pergunta... (A₂): É que x vezes x é a mesma coisa que x ao quadrado... (P): Aqui a gente está usando uma propriedade que a gente chama de distributiva. Distributiva da multiplicação em relação à adição ou subtração... (P): Aqui x vezes x volta pra x ao quadrado e x vezes nove volta pra nove vezes x ...”. É possível perceber que na negociação emergem dois elementos tecnológicos.

Após essa resolução, Lucas dá continuidade à aula, apresentando outro exemplo: “(P): Agora vou colocar uma pra ver se vocês respondem? Tá certo? (P): resolvam essa aqui... Ex₂: $x^2 = 3x$ ”. Sob o ponto de vista da OM, essa equação representa um subtipo de tarefa e sua resolução depende, inicialmente, da técnica (transpor termos ou coeficiente, invertendo operações); após a aplicação da técnica é possível observá-la na forma canônica.

A ação do professor aponta, implicitamente, que seu desejo é explorar o tipo de tarefa ($ax^2 + bx = 0$) e elaborar a técnica relativa a ele (segundo momento didático). É possível perceber, também, que as técnicas são comuns nos dois problemas, o que pode levar a crer que ele tem a intenção de trabalhar a técnica (quarto momento didático) com seus alunos. Com relação ainda ao trabalho com a técnica, observa-se que ele utiliza sempre a mesma dinâmica até esse momento: após resolver alguns exemplos, propõe a resolução de algumas questões (exercício) aos alunos.

De forma adicional, o professor propõe mais um subtipo de tarefa para discutir com os alunos: $(x - 2)^2 = 4 - x(x + 3)$. Esse subtipo traz uma característica diferente para o trabalho com o tipo de tarefa $ax^2 + bx = 0$. Nesse momento Lucas prioriza subtipo de tarefa diferente para discutir o tipo de tarefa $ax^2 + bx = 0$.

Contrapondo esses exemplos, o professor oferece três problemas matemáticos que ele chama de problemas contextualizados. Esses problemas, para serem resolvidos, precisam da interpretação do enunciado e um equacionamento por parte dos alunos.

Na etapa seguinte da aula, o professor Lucas apresenta aos alunos a resolução de exemplos com a equação faltando o termo “b”, ou seja, $ax^2 + c = 0$. Antes de iniciar, lembra aos alunos sobre a aula anterior, como resolveu as equações que faltavam o termo “c”. Essa retomada de informações sobre a resolução, mesmo que utilizando apenas sua fala, pode dar indícios de uma institucionalização de conceitos que são importantes.

O primeiro exemplo proposto por Lucas, diz assim, “Resolver a equação $x^2 - 49 = 0$, no conjunto dos IR”. Abaixo, apresentamos o registro da resolução, a transcrição e, logo em seguida, a análise. Observe que o diálogo do professor com os alunos segue através de questionamentos e respostas, igual a momentos anteriores. Algumas regras implícitas começam a ser explicitadas.

Quadro 71: Registro matemático de Lucas
$x^2 - 49 = 0$
$x^2 = 49$
$x = \sqrt{49}$
$x = 7$
$S = \{7, -7\}$

Quadro 72: Recorte da transcrição da aula - Lucas

(P): Alguém quer arriscar?

(A1): Passa o “c” para o outro lado...

(P): O “c” que você fala seria igual a menos quarenta e nove...

(A1): E tira a raiz quadrada...

(P): Tira a raiz quadrada? Então ficaria no caso x ao quadrado igual a 49...

(A1): x é igual à raiz quadrada de 49, e x é igual 7...

(P): Pronto? Terminou?

(A1): Não, tem que colocar o conjunto solução...

(P): Por que eu vou colocar o conjunto solução aqui nesse caso, alguém sabe?

(A1): (incompreensível)

(P): Eu não expliquei a diferença de quando a gente está resolvendo uma situação problema e de quando você está resolvendo apenas a equação? Lembram disso? Nesse caso você observa que aqui tá pedindo só pra resolver a equação. Não tem um contexto, não tem um problema envolvido, então nesses casos você segue direitinho o que pede pra ser feito. Resolver a equação e coloca o conjunto solução... *Conjunto solução, opa! Qual é o problema aqui? Conjunto solução geralmente nós temos o quê?*

(Als): Zero...

(P): *Nós tínhamos zero na outra não é? A gente até viu porque dava sempre zero. Essa aqui vai dá zero também?*

(A2): Não... É o simétrico.

(P): De onde foi que você tirou isso, que é o simétrico? Agora fiquei curioso. O que eu ia dizer antes, ia chamar a atenção de vocês que aqui tem que aparecer outro valor. Lembra que a gente já tinha falado que equação do 1º grau a gente observava que no conjunto solução aparecia uma raiz, na equação do 2º grau aparecia duas raízes, equação do 3º grau, três raízes. Lembra que a gente fez esse comentário? De repente apareceu aqui esse comentário de que vai ser o simétrico, será que vai ser o simétrico mesmo? Se for, mas por que o simétrico aparece? De onde? Por que a gente fez uma conta aqui e apareceu o sete, de onde vem o menos sete? Se for, eu ainda não estou dizendo que é...

(A2): Por que se você fizer menos sete ao quadrado vai dar positivo, porque menos com menos...

(P): Ah vai dar quarenta e nove também.

(Als) É..

No início da transcrição o professor negocia, implicitamente, com os alunos as técnicas necessárias para resolver o tipo de tarefa ($ax^2 + c = 0$). Essas regras negociadas tratam da transposição de termos ou coeficientes, invertendo operações e desenvolver ou reduzir expressões.

Um pouco mais adiante, no final da resolução, em que o aluno fala “x é igual à raiz quadrada de 49, e x é igual 7” e o professor pergunta “Pronto? Terminou?”, com intuito de fazer algumas considerações. No entanto, os alunos reclamam que ainda falta o conjunto solução, regra de contrato instituída em todas as resoluções. Essa atitude dos alunos faz o professor procurar uma reorganização contratual, em forma de questionamentos. Os questionamentos seguem na direção de comparações sobre situações problemas e resoluções de equações descontextualizadas. Esse direcionamento enfoca, em especial, as soluções. Na reorganização, Lucas, ao perceber que a solução dada estava incompleta e faltava nela o sinal de mais ou menos, reage negativamente, com indícios de uma ruptura de contrato que transparece mais adiante, observe: (P): *Conjunto solução, opa! Qual é o problema aqui? Conjunto solução geralmente nós temos o quê?* Os alunos falam que é necessário colocar o zero como solução. Essa atitude dos alunos é motivada pelo contrato anterior (resolução da equação $ax^2 + bx = 0$), em que a resolução da equação encontra, sempre, como solução, uma das raízes igual a zero.

Diante do exposto, algumas considerações são necessárias: a primeira, é que a falta da segunda solução do problema obrigou o professor a tentar uma reorganização contratual. A segunda consideração é que, mesmo o professor tentando fazer uma reorganização, ela evolui para uma ruptura de contrato por parte do aluno, pois eles não esperam a reorganização proposta pelo professor e aponta o zero como uma solução para o problema. No entanto, o zero faz parte do contrato anterior, da resolução da equação $ax^2 + bx = 0$. O professor, então, segue o caminho da renegociação, "(P): Nós tínhamos zero na outra não é? A gente até viu porque dava sempre zero. (P): Essa aqui vai dá zero também? (A): Não".

É necessário lembrar que esse é o primeiro encontro propriamente dito com o tipo de tarefa $ax^2 + c = 0$. E as técnicas utilizadas nessa resolução dizem respeito a transpor termos ou coeficientes, invertendo operações e desenvolver ou reduzir expressões. Vale lembrar que esse primeiro encontro permite o surgimento da exploração do tipo de tarefa e a elaboração da técnica relativo ao tipo de tarefa.

Ainda explorando o tipo de tarefa e elaborando a técnica, o professor trabalha essa técnica quando apresenta uma série de exemplos aos alunos. Esses exemplos são apresentados com a resolução da equação em si mesma.

Vale lembrar também, que as regras de contrato que surgem nos procedimentos de resolução, que tem características rígidas e que estão relacionados ao hábito do professor, aponta para uma espécie de núcleo duro do contrato na relação didática. Esse núcleo duro, corresponde a um caminho de resolução semelhante para esse tipo de tarefa, todas as vezes que solicitado.

Por outro lado, no ato da resolução, o professor promove questionamentos sobre a resolução e comparações com outros tipos de tarefas já apresentados. A resolução de exemplos contempla também alguns problemas matemáticos, em que solicita dos alunos uma interpretação do enunciado, bem como um equacionamento, ou seja, estabelecer uma equação a partir do enunciado.

Até esse momento, o professor Lucas apresentou aos alunos dois tipos de tarefas (T_2 : $ax^2 + c = 0$; $ax^2 + bx = 0$). Para cada tipo de tarefa foram apresentados, também, três exemplos que o professor tratou como uma resolução "sem contexto" e dois exemplos em forma de problema, com contexto. Essa dinâmica que faz parte do contrato didático adotado pelo professor aponta para a apresentação dos tipo de tarefas, exploração do tipo de tarefa e elaboração da técnica e o trabalho com a técnica.

A partir desse momento, passamos a discutir as negociações em torno da resolução da equação do segundo grau na forma completa. Nesse sentido, Lucas elege a técnica de completar quadrados para iniciar o estudo. Observe a transcrição abaixo:

Quadro 73: Recorte da transcrição da aula - Lucas

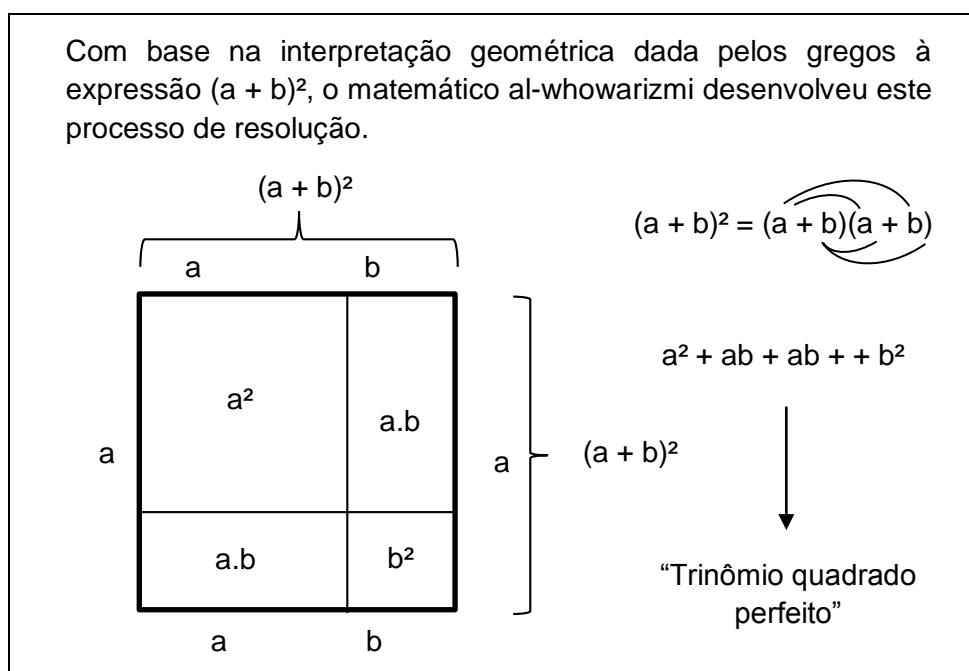
(P): Ai a gente vai começar com essa ideia aqui, *processo de completamento (sic) de quadrados*. Está certo? Na sequência do estudo da resolução de equação do 2º na forma completa, a sequência vai nos levar a *uma fórmula resolutive que alguns livros a chamam de fórmula de Bhaskara...* É a fórmula resolutive de uma equação do 2º grau... Mas, pra gente não chegar aqui e jogar essa fórmula, a gente vai ver um pouco no contexto de geometria aqui, um pouco desse processo de complemento de quadrados, que envolve um pouco do conhecimento de geometria e de áreas de quadrados e de retângulos. Para que a gente possa fixar um pouquinho essa ideia. Só que isso vai ajudar na dedução dessa fórmula, quando a gente for ver a fórmula. *E vai nos mostrar também que é possível resolver uma equação do segundo grau sem necessariamente ser sempre pela fórmula, porque a fórmula parece uma coisa mágica, só que nem todo problema que você conhecer a fórmula significa que você vai conseguir resolver a questão*. Então, um dos objetivos da gente começar dessa forma é esse, é você perceber que dá pra trabalhar também a resolução da equação completa sem necessariamente ser só pela fórmula. Apesar de que a gente vai ver a fórmula também.

Nesse recorte, o professor dá início ao estudo da equação do segundo grau na forma completa pelo processo de completar quadrados. Negocia com os alunos que vai utilizar o conhecimento de geometria e de áreas de quadrado e retângulos para estudar o processo de complemento de quadrados.

A utilização do conhecimento geométrico, segundo Lucas, é para mostrar que é possível resolver equações na forma completa sem, necessariamente, ter que utilizar uma fórmula (Bhaskara). Apresenta como ideia principal que existem duas formas de resolver o tipo de tarefa ($T_1: ax^2 + bx + c = 0$): as técnicas de “completar quadrados e fórmula de Bhaskara”. Veja em destaque as palavras de Lucas: “Então, um dos objetivos da gente começar dessa forma é esse, é você perceber que dá pra trabalhar também a resolução da equação completa sem necessariamente ser só pela fórmula. Apesar de que a gente vai ver a fórmula também”.

Para discutir o processo de resolução pelo caminho de completar quadrados, Lucas apresenta uma construção teórica. Observe a transcrição e registro matemático abaixo:

Quadro 74: Registro matemático de Lucas



Quadro 75: Recorte da transcrição da aula - Lucas

(P): Vamos tentar escrever isso aqui de forma genérica. Nós começamos com um quadrado de lado “a”, qual seria a área desse quadrado?

(Als): “a” ao quadrado...

(P): Aí, nesse quadrado, você vai colocar mais dois retângulos que vai ser propriamente daquele formato que M (aluna) fez. Qual vai ser a medida do lado desse retângulo?

(Als): “a”...

(P): Essa medidazinha a gente vai dizer que é o b... Eu quero agora a área desses dois retângulos...

(Als): ab...

(P): E aqui?

(Als): ab também.

(P): Eu quero que esse desenho se transforme em um quadrado, do que é que eu preciso?

(...)

(P): Completou o quadrado? Quanto é que mede esse lado?

(Als): a mais b...

(...)

(A1): a ao quadrado mais ab mais ba mais b ao quadrado...

(P): Organizando melhor esse polinômio vai ficar como?

(A1): a ao quadrado mais 2ab mais b ao quadrado...

(...)

(P): E onde está o b ao quadrado? Não foi o quadrado que a gente precisou completar?

Então a interpretação geométrica disso aqui seria essa forma de complementar um quadrado a partir de dois quadrados e dois retângulos... Então quando a gente está estudando isso no 8º ano, qual o nome disso? Quadrado da soma de dois termos... E a gente viu que também tem o quadrado da diferença de dois termos... Essa relação tem um nome, trinômio do quadrado perfeito. (...) A conclusão é que eu vou usar essa expressão do trinômio quadrado perfeito e vocês já sabem de onde ela aparece.

Nessa negociação, o professor dá início ao estudo da resolução da equação do segundo grau na forma completa, através de uma problematização em que valoriza

o “pensamento geométrico” (palavras de Lucas). Implicitamente, Lucas pretende chegar na obtenção do trinômio quadrado perfeito. Para isso, utiliza figuras geométricas com intuito de construir a ideia de completar quadrados. Após essa primeira parte, ele dá início a constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica e ao tipo de tarefa proposto.

A construção desse ambiente visa dar suporte à escolha da técnica adequada para resolução da equação do segundo grau na forma completa. Fazendo um paralelo com a análise da aula, apontamos as palavras de Chevallard (2007). Esse pesquisador entende que esse momento mantém uma relação estreita com cada um dos outros momentos, em especial com a técnica, que de forma dialética, pode lhe revestir de vestígios tecnológicos.

Com intuito de explorar o tipo de tarefa e elaboração da técnica e, em outros momentos, institucionalizar algumas regras sobre a obtenção do trinômio quadrado perfeito, Lucas apresenta um exemplo, como veremos adiante: “Faça a interpretação geométrica da expressão $x^2 + 6x$ ”.

Quadro 76: Recorte da transcrição da aula - Lucas

(P): Faça uma interpretação geométrica da expressão x ao quadrado mais seis x . A gente já viu que podemos interpretar geometricamente isso aqui não foi? Se você troca os coeficientes aqui, essas letras por números nós vamos ter as expressões.
 (P): Nesse caso aqui x ao quadrado mais seis x , isso pode ser representado geometricamente usando essa ideia aqui. Como seria essa interpretação, é isso que eu quero saber. Vou começar dando uma dica... x ao quadrado a gente já sabe que isso aqui é um quadrado...
 (A1): Começa fazendo o quadrado.
 (P): Mas o lado desse quadrado vai medir quanto?
 (A1s): x ...
 (P): Então, começo fazendo um quadrado de medida x ... Mas, por que é que vocês entendem que o lado é x ?
 (A1): Porque a área vai ser x^2 ...
 (P): A gente já sabe que essa medida é x , então essa medida aqui tem que ser quanto?
 (A2): Aqui vai ser x e aqui 6.
 (P): Então aqui vai ser 6 e aqui x ?

A negociação do professor com os alunos na transcrição anterior consiste em apresentar uma relação entre uma interpretação geométrica e o trinômio quadrado perfeito. O professor entende que os alunos, sabendo dessa transformação, podem utilizar o método de resolução, completar quadrados e, assim, será mais fácil determinar as raízes da equação do segundo grau.

Vale ressaltar que, após essas considerações, o professor promove a resolução de alguns exemplos, sempre pedindo no enunciado que os alunos

interpretem geometricamente a expressão matemática e obtenha o trinômio quadrado perfeito. Esses exemplos são resolvidos de forma dialogada com os alunos.

É possível perceber também que, além do encontro com o tipo de tarefa $x^2 + 6x = 0$ (primeiro momento didático), ou seja, com a organização matemática que está em jogo, o professor, ao resolver os exemplos mediante o contrato adotado, está mantendo relação com o segundo momento didático, a exploração do tipo de tarefa e elaboração da técnica. Além disso, mantém também relação com o quarto momento didático (o trabalho da técnica).

Reiteramos que o trabalho com a técnica, segundo Chevallard (1999), visa à melhoria da técnica, tornando-a mais eficaz e mais confiável. Isso exige, geralmente, um retoque da tecnologia ou mesmo da teoria, como faz Lucas.

O professor dá continuidade à aula e procura negociar a saída das construções geométricas para obter o trinômio quadrado perfeito (técnica matemática) em função de uma generalização. A transcrição abaixo aponta mais informações:

Quadro 77: Recorte da transcrição da aula - Lucas

(P): Isso já me daria o direito de dizer o seguinte: a *metade do coeficiente "b" seria o termo que a gente completa*? Será que seria isso? Supondo que isso seja verdade, será que só é isso? Observe que eu fiz... o que também? Uma coisa que sempre está acontecendo. Pra completar isso o que eu disse está faltando mais o quê? *A metade do coeficiente "b", o quê?*

(A): *Ao quadrado...*

(P): Será que seria isso sempre? Olha só que descoberta, se nós formos analisar isso sabe o que isso significa? Que a gente se livrou dos desenhos, eu não vou precisar toda vez fazer os desenhos. Mas, primeiro eu tenho que ver se isso vai funcionar, vamos fazer outra pra ver...

A generalização surge da necessidade do aluno nem sempre ter que interpretar geometricamente a expressão para definir o trinômio quadrado perfeito. Para isso, Lucas propõem algumas regras e as negocia, observe: "Será que seria isso sempre? Olha só que descoberta, se nós formos analisar isso sabe o que isso significa que a gente se livrou dos desenhos, eu não vou precisar toda vez fazer os desenhos". O professor está se referindo a um questionamento que um aluno fez sobre se o termo "b" ficava sempre a metade. A partir disso, Lucas faz outro questionamento, se estaria incompleto dizer a metade de "b". Assim, acrescenta ao pensamento dos alunos que seria a metade de "b" ao quadrado.

O professor procura, antes de resolver uma equação completa do segundo grau pelo método de completar quadrado, colocar para os alunos a seguinte situação:

“então, se alguém pedir para você resolver a equação do segundo grau pelo método completar quadrado... depois que você aprender a fórmula resolvente da equação, você só vai resolver a equação do segundo grau assim se realmente você quiser ou se for exigência do problema...”. O professor, nessa situação, procura deixar claro que o aluno pode resolver as equações utilizando um dos métodos apresentados (completar quadrados ou Bhaskara).

Abaixo apresentamos o registro matemático do professor na resolução da equação do segundo grau, pelo processo de completar quadrados. Após o registro, apresentamos a transcrição e análise.

Quadro 78: Registro matemático de Lucas										
<p>Resolução da equação:</p> <p>Ex₁: $x^2 + 6x + 8 = 0$</p> <p>$x^2 + 6x + 9 = -8 + 9$</p> <p>$(x^2 + 6x + 9) = 1$</p> <p>$(x + 3)^2 = 1 \rightarrow \sqrt{(x + 3)^2} = \pm\sqrt{1}$</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">$x + 3 = 1$</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px 10px;"></td> <td style="padding: 5px;">$x + 3 = -1$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$x = 1 - 3$</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px 10px;"></td> <td style="padding: 5px;">$x = -3 - 1$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$x = -2$</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px 10px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table> <p style="text-align: center; margin-top: 10px;">$S = \{-4, -2\}$</p>		$x + 3 = 1$		$x + 3 = -1$	$x = 1 - 3$		$x = -3 - 1$	$x = -2$		
$x + 3 = 1$		$x + 3 = -1$								
$x = 1 - 3$		$x = -3 - 1$								
$x = -2$										

Quadro 79: Recorte da transcrição da aula - Lucas

(P): (...) a equação é essa, x ao quadrado mais seis x mais oito igual a zero. (...) mas a ideia de completar quadrado continua valendo pra isso aí. Eu vou adicionar o quê? Eu vou adicionar a metade do coeficiente “b” elevado ao quadrado... O que é o princípio básico da equação?

(A): Inaudível...

(P): A gente começou essa aula... *eu mostrando a diferença a vocês de uma sentença, de uma expressão de uma equação.* Nessa ocasião o que foi que eu disse que diferenciava a equação das outras? A igualdade. Ah... mas o que a igualdade tem a ver com isso? Uma coisa simples: pra poder a igualdade se manter, o que faço de um lado tenho que fazer do outro... Então quer dizer aqui que eu tenho que adicionar a metade do coeficiente “b” ao quadrado, só que se eu faço isso desse lado do outro lado eu vou ter que fazer o quê? (...) Eu vou somar quem?

(Als): Nove...

(A1): Por que nove?

(P): Por que é a metade do coeficiente de “b” elevado ao quadrado... Então pelo princípio aditivo do outro lado eu tenho que fazer a mesma coisa, então ficou x ao quadrado mais seis x mais oito, mais nove igual a nove.

(...)

(P): Mas está faltando o que agora? Por que eu não estou só completando, eu estou resolvendo. Resolver uma equação é fazer o quê?

(Als): Encontrar o valor da incógnita...

(P): Pra eliminar esse expoente dois aqui, o que eu poderia fazer? Coloco a raiz, mas isso é uma equação, se eu coloco a raiz desse lado tenho que colocar no outro também... raiz quadrada de x mais três elevado ao quadrado igual a raiz de um. *A gente viu uma propriedade que quando o radicando tem o índice igual ao da raiz a gente faz o quê?*

(Als): Corta...

(...)

(P): Ai eu tenho que pensar o seguinte. Vocês lembram quando a gente viu nas últimas aulas que quando nós considerávamos a possibilidade de isso ser positivo e a possibilidade dela ser o que também?

(Als): Negativo.

(...)

(P): Então está aí as duas raízes. Como a ideia é só resolver a equação, o que está faltando pra terminar? *Se eu quisesse fazer o teste para saber se está certo eu substituíria os valores...* mas, vamos considerar que está correto, está faltando o quê?...

(Als): Conjunto solução...

(P): O conjunto solução, então a resposta vai ser o quê? Menos quatro e menos dois... pronto, resolvemos essa equação pelo método de completar quadrados....

No início do recorte, Lucas anuncia o problema e começa a sua resolução pela técnica de completar quadrados. No estabelecimento da técnica, algumas regras emergem da relação didática com mais clareza. Uma delas, diz respeito a *“adicionar a metade do coeficiente b elevado ao quadrado em ambos os membros”* (palavras de Lucas). Nessa regra o professor negocia também o significado da igualdade com os alunos. Destaque: “A igualdade. Ah... mas o que a igualdade tem a ver com isso? Uma coisa simples: pra poder a igualdade se manter, o que eu fazer de um lado tenho que fazer do outro”.

Lucas continua resolvendo a equação pelo processo de completar quadrados e outras regras vão surgindo. Podemos apontar que existe uma relação próxima com a tecnologia, observe: “(P): A gente viu uma propriedade que quando o radicando tem o índice igual ao da raiz a gente faz o quê? (A): Corta”.

No que diz respeito às organizações matemáticas, o professor negocia o tipo de tarefa $ax^2 + bx + c = 0$ e a técnica completar quadrados (tarefa-técnica). De forma implícita é discutido a tecnologia que são as operações inversas em \mathbb{R} e a radiciação.

Nas organizações didáticas, surge o reencontro com o tipo de tarefa em jogo. No entanto, é a primeira vez que se encontram o tipo de tarefa $ax^2 + bx + c = 0$ com a técnica de completar quadrados. Essa situação nos faz refletir sobre a possibilidade de uma regra implícita na resolução das equações completas. É possível existir um reencontro com o tipo de tarefa, no entanto a técnica se revela como se fosse a do primeiro encontro, propriamente dito, com os alunos. Além disso, existe o segundo

momento didático que é a exploração do tipo de tarefa e a elaboração da técnica, relativas ao tipo de tarefa. Nesse momento o professor negocia, implicitamente, com os alunos um recurso que pode servir como a avaliação da atividade. Veja a fala do professor: “(P): Se eu quisesse fazer o teste para saber se está certo eu substituíria os valores. Mas, vamos considerar que está correto, está faltando o quê?”. O professor aqui revela que, ao substituir a raiz na equação e observando a igualdade, é possível saber se ela faz parte do conjunto solução. Essa poderia ser mais uma regra de contrato anunciada (relação entre a avaliação e o contrato didático).

Após a negociação da técnica de completar quadrados, o professor Lucas inicia a discussão da fórmula resolutive da equação do segundo grau. Apresenta aos alunos um comparativo sobre o processo algébrico de completar quadrados e a dedução da fórmula de Bhaskara. A sua intenção é estabelecer um diálogo entre os dois métodos e esclarecer de onde surgiu a fórmula de Bhaskara.

Quadro 80: Registro matemático de Lucas	
Completar Quadrados	Dedução da Fórmula de Bhaskara
$x^2 + 4x + 12 = 0$ $x^2 + 4x = 12$ $x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 12 + \left(\frac{4}{2}\right)^2$ $x^2 + 4x + 4 = 12 + 4$ $(x + 2)^2 = 16$ $\sqrt{(x + 2)^2} = \pm\sqrt{16}$ $x + 2 = \pm 4$ $x = -2 \pm 4$ $x' = -2 + 4 = 2$ $x'' = -2 - 4 = -6$	$ax^2 + bx + c + 0 \quad (a \neq 0)$ $\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$ $x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$ $x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2$ $x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$ $x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ (\dots) $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Observe o recorte da transcrição.

Quadro 81: Recorte da transcrição da aula - Lucas

(P): Quando chega nesse momento, a gente fica até com calafrios. Aqui você pode ter duas reações, ou você vai desenvolver muito a resolução do segundo grau, vai ser sempre uma atitude reflexiva na hora de resolver, ou então vai se atrapalhar de vez agora, tem que ter muito cuidado. Porque quando a gente parte para essa prática só de decorar a fórmula e tem que aplicar de todo jeito, aí vocês vão ver que vão ter desacertos nas questões. Apesar da fórmula ser prática, de ter uma certa praticidade (...).

O diálogo do professor Lucas revela uma expectativa negativa em relação a utilização fórmula de Bhaskara, embora seja prática (palavras de Lucas). O professor acrescenta ainda que “por ser tão prática o aluno pode decorar todos os procedimentos e responder a equação de qualquer jeito”. Essa visão de Lucas coaduna com as dos documentos oficiais do Brasil e, em especial, com os documentos oficiais de Pernambuco.

Vale destacar ainda que o processo de resolução se constitui como “regras de contrato que passam despercebidas na relação didática” e sua utilização de forma mecânica tende a se cristalizar no decorrer da relação (BROUSSEAU, 1986). Por outro lado, a cristalização do contrato torna o “bojo” da resolução uma espécie de núcleo duro do contrato. Esse núcleo duro pode ser interpretado como um passo a passo a ser seguido em todas as situações dessa natureza.

Após comparar os dois procedimentos, o processo de completar quadrados e a fórmula de Bhaskara, o professor anuncia que vai resolver três exemplos com a fórmula de Bhaskara, o primeiro na forma completa ($x^2 - 5x + 8 = 0$) e outros dois na forma incompleta ($x^2 - 9 = 0$; $2x^2 - 5x = 0$). Implicitamente, a intenção do professor é mostrar aos alunos que a fórmula de Bhaskara é eficiente para resolver as equações incompletas também.

Com relação a primeira resolução Lucas fala que:

Quadro 82: Recorte da transcrição da aula - Lucas

(P): Aqui você tem que saber somente o quê? Quem é o coeficiente “a”, quem é o coeficiente “b” e quem é o coeficiente “c”. Tudo bem? É uma coisa que já não é tão difícil pra vocês identificarem já que a gente já trabalhou alguns exercícios que a gente tinha exatamente que identificar. *Uma vez que você identifica, substitui aqui nessa fórmula e aí resolve a equação.* Vamos ver um exemplo de cada uma, vamos ver um exemplo dela completa e incompleta pra ver que funciona pra qualquer situação.

As expectativas de Lucas sobre a resolução da equação do segundo grau pela técnica de Bhaskara se confirmam. Observe na transcrição, o professor afirma que

“uma vez que você identificou os coeficientes, substitui na fórmula e resolve”. É possível perceber que esse é um reencontro com o tipo de tarefa $T_1: ax^2 + bx + c = 0$ e a técnica utilizada na resolução foi a fórmula de Bhaskara.

Lucas conclui, assim, “você tem que saber somente o quê? Quem é o coeficiente a, b e c. Tudo bem?” Esse diálogo enseja um passo a passo para resolução. Já na resolução dos exemplos Lucas aponta que é necessário, em primeiro lugar lembrar a fórmula, depois identifica os coeficientes para poder aplicar na fórmula, na sequência resolve e determina o valor das raízes.

Com a conclusão da análise das aulas do professor Lucas, apresentaremos, no próximo tópico, uma síntese da análise da relação entre o contrato didático e as organizações matemáticas e didáticas no ensino das equações do segundo grau dos sujeitos envolvidos. Esperamos que essa síntese possa apresentar de forma mais clara os resultados da pesquisa.

6.2.3 Síntese da Análise da Relação entre o Contrato Didático e as Organizações Matemática e Didática dos Professores, Davi e Lucas.

Na análise das aulas de “Davi e Lucas”, nas quais nos debruçamos anteriormente, procuramos apresentar as principais negociações que emergiram das relações didáticas, entre o Contrato Didático (negociações, rupturas e renegociações), as Organizações Matemáticas (tipo de tarefas, técnicas e tecnologias) e as Organizações Didáticas (os seis momentos didáticos) no ensino da equação do segundo grau a uma incógnita.

Com as análises dos professores concluídas, pretendemos apresentar, nesse tópico, em forma de síntese, os principais resultados da pesquisa. A apresentação se divide em dois momentos: o primeiro momento da síntese apontará as organizações matemáticas que surgiram nas aulas de Davi e Lucas.

No segundo momento da síntese, o destaque será nas principais relações do Contrato Didático nas organizações matemáticas. Para Chevallard (1999) a organização matemática está relacionada à toda atividade matemática que é construída em sala de aula a partir de uma organização didática. Assim, elas se constituem como um par (OM, OD) “inseparáveis” (PARRA; OTERO, 2011). Nesse sentido, entendemos que, se faz necessário contemplar, na síntese, as organizações didáticas.

Reforçamos que a síntese toma como referência as praxeologias matemáticas pontuais classificadas no capítulo da álgebra. A classificação aponta quatro tipos de tarefas: a primeira T_1 : resolver a equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$; a segunda T_2 : resolver a equação do tipo $ax^2 + c = 0$; a terceira T_3 : resolver a equação do tipo $ax^2 + bx = 0$ e a quarta T_4 : resolver a equação do tipo $ax^2 = 0$. Acrescentamos, também, os subtipos de tarefas associados aos tipos de tarefas apresentados acima.

6.2.3.1 Síntese das Organizações Matemáticas das Aulas de Davi e Lucas

As organizações matemáticas apresentadas abaixo seguem a sequência de tipo de tarefa: T_1 , T_2 , T_3 e T_4 . A partir desses tipos de tarefa, apresentamos também as técnicas e tecnologias mobilizadas pelos professores durante a sua ação didática. Ainda sobre a construção das OM, destacamos que, durante as aulas, não observamos negociações relacionadas à teoria. Em decorrência desse fato, agrupamos em um mesmo campo as dimensões tecnológicas e teóricas.

- Tipo de Tarefa T_1 : $ax^2 + bx + c = 0$

Quadro 83: Organização Matemática de Davi e Lucas para T_1

Organização Matemática – OM		
Tipo de tarefa T_1 : $ax^2 + bx + c = 0$		
Professores	Davi	Lucas
Técnicas	τ_{TE} : Tentativa e erro; τ_{FB} : Fórmula de Bhaskara; τ_{DE} : Desenvolver ou reduzir expressões; τ_{TTC} : Transpondo termos ou coeficientes, invertendo operações.	τ_{CQ} : Completar quadrados; τ_{FB} : Fórmula de Bhaskara; τ_{DE} : Desenvolver ou reduzir expressões; τ_{TTC} : Transpondo termos ou coeficientes, invertendo operações.
Elementos tecnológicos	θ_{POI} : Propriedades das operações inversas em IR ou Leis de transposição de termos; θ_{PR} : Propriedade da radiciação.	θ_{POI} : Propriedades das operações inversas em IR ou Leis de transposição de termos; θ_{PR} : Propriedade da radiciação.

Fonte: Elaborado pelo autor da Tese

Devemos acrescentar, no estabelecimento das organizações matemáticas, nas aulas do professor Davi os subtipos de tarefas (T_{13} : $(x + a).(x + b) = 0$ e T_{11} : $ax^2 + bx$

+ $c = d$). Para realizar a tarefa T_{13} , o professor Davi mobilizou as técnicas: τ_{DRE} : Desenvolver ou reduzir expressões (auxiliar) e τ_{FB} : Fórmula de Bhaskara (principal). Com intuito de realizar o subtipo de tarefa T_{11} foram mobilizadas as técnicas: τ_{TTC} : Transpondo termos ou coeficientes; invertendo operações (auxiliar), τ_{DRE} : Desenvolver ou reduzir expressões (auxiliar) e τ_{FB} : Fórmula de Bhaskara (principal). Vale destacar que a execução das técnicas auxiliares possibilitam o surgimento do tipo de tarefa (forma canônica). Destacamos ainda, que esses subtipos de tarefas foram apresentados apenas no exercício final. Em nenhum momento foi colocado como resolução de exemplos pelo professor.

Já nas aulas do professor Lucas, em três ocasiões foram colocados à disposição dos alunos subtipos de tarefas. Em momentos diferentes o professor repete que as equações podem aparecer de outra forma e, quando isso acontece, é necessário utilizar outros mecanismos matemáticos para encontrar o conjunto solução. O termo apresentado por Lucas “outras formas”, nós entendemos como referentes a equações que se apresentam através de subtipos de tarefa, e o termo “outros mecanismos”, acreditamos estar ligado às técnicas matemáticas.

Outro detalhe que queremos destacar, é que o professor Lucas não utilizou nas aulas a técnica de tentativa e erro para resolução das equações, verbalmente foi dito em algumas ocasiões, apenas, que era possível resolver equações por essa técnica.

Ainda sobre as aulas do professor Lucas, identificamos a utilização de problemas em linguagem natural, que o professor nomeou como sendo problemas contextualizados. Um destaque sobre esses problemas, é que eles solicitavam uma transformação para linguagem algébrica (tipo de tarefa / subtipo de tarefas).

- Tipo de tarefa T_2 : $ax^2 + c = 0$

Quadro 84: Organização Matemática de Davi e Lucas para T_2

Organização Matemática – OM		
Tipo de tarefa T_2 : $ax^2 + c = 0$		
Professores	Davi	Lucas
Técnicas	τ_{TE} : Tentativa e erro; τ_{FB} : Fórmula de Bhaskara; τ_{DE} : Desenvolver ou reduzir expressões;	τ_{DE} : Desenvolver ou reduzir expressões; τ_{TTC} : Transpondo termos ou coeficientes, invertendo operações.

	τ_{TTC} : Transpondo termos ou coeficientes, invertendo operações.	
Elementos tecnológicos	θ_{POI} : Propriedades das operações inversas em IR ou Leis de transposição de termos; θ_{PR} : Propriedade da radiciação.	θ_{POI} : Propriedades das operações inversas em IR ou Leis de transposição de termos.

Fonte: Elaborado pelo autor da Tese

Na aula do professor Davi, acrescentamos que existiram momentos em que foram apresentados também subtipos de tarefa, tal como: $x^2 + 1 = 10$. A solução passa pela utilização das técnicas apontadas acima. Nas aulas do professor Lucas, por sua vez, identificamos subtipos de tarefas dessa natureza apenas nos exercícios que foram enviados para casa.

- Tipo de tarefa T_3 : $ax^2 + bx = 0$

Quadro 85: Organização Matemática de Davi e Lucas para T_3

Organização Matemática – OM		
Tipo de tarefa T_3 : $ax^2 + bx = 0$		
Professores	Davi	Lucas
Técnicas	τ_{TE} : Tentativa e erro; τ_{FB} : Fórmula de Bhaskara; τ_{FE} : Fatorar expressões, colocando em evidencia o fator comum; τ_{ITZ} : Igualando os termos do produto a zero; τ_{TTC} : Transpondo termos ou coeficientes, invertendo operações.	τ_{FE} : Fatorar expressões, colocando em evidencia o fator comum; τ_{ITZ} : Igualando os termos do produto a zero; τ_{TTC} : Transpondo termos ou coeficientes, invertendo operações.
Elementos tecnológicos	θ_{PDM} : Propriedade distributiva da multiplicação; θ_{PPN} : Propriedade do produto nulo; θ_{POI} : Propriedades das operações inversas em IR ou Leis de transposição de termos.	θ_{PDM} : Propriedade distributiva da multiplicação; θ_{PPN} : Propriedade do produto nulo; θ_{POI} : Propriedades das operações inversas em IR ou Leis de transposição de termos.

Fonte: Elaborado pelo autor da Tese

Em outros momentos, na aula do professor Davi, observamos na relação didática a negociação de subtipos de tarefa, tal como: $x^2 + x = 3x$ (quadro 32 e 33).

Após aplicar a técnica de transpor termos ou coeficiente a equação passa a ser um tipo de tarefa $ax^2 + bx = 0$.

Nas aulas do professor Lucas não foi discutido em sala com os alunos esse subtipo de tarefa. No entanto, no exercício foi possível observar algumas problemas matemáticos dessa natureza.

- Tipo de tarefa T_4 : $ax^2 = 0$

Quadro 86: Organização Matemática de Davi e Lucas para T_4

Organização Matemática – OM		
Tipo de tarefa T_4 : $ax^2 = 0$		
Professores	Davi	Lucas
Técnicas	τ_{FE} : Fatorar expressões, colocando em evidencia o fator comum; τ_{ITZ} : Igualando os termos do produto a zero; τ_{DR} : Desenvolver ou reduzir expressões.	Não utilizou nas aulas
Elementos tecnológicos	θ_{PDM} : Propriedade distributiva da multiplicação; θ_{PPN} : Propriedade do produto nulo.	Não utilizou nas aulas

Fonte: Elaborado pelo autor da Tese

Apresentamos nos quadros anteriores os tipos de tarefas, técnicas e elementos tecnológicos que foram discutidos pelos professores em suas ações didáticas. Além dos tipos de tarefas, apresentamos também, alguns subtipos de tarefa que surgiram nas relações didáticas. Vale ressaltar que os subtipos de tarefa que apareceram representam uma minoria, em relação aos tipos de tarefas.

Como já dito anteriormente, uma OD surge com a intenção de colocar em prática, ou de conduzir, uma OM. Assim, a dinâmica da OD faz com que exista uma articulação com os tipos de tarefas ou subtipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias que darão conta das atividades “mobilizadas para o estudo concreto, em uma instituição concreta” (CHEVALLARD, 1999, p. 238).

De um lado temos as OM com objetivo voltado para a realidade matemática envolvida (equação, função, geometria, etc.). Do outro lado, temos a OD com o olhar voltado em como colocar em prática (metodologia, concepções de aprendizagem,

etc.). Nesse contexto, as OM e OD surgem a partir da relação didática. Por outro lado, temos o contrato didático como seu “motor” e o promotor da sua dinâmica (CHEVALLARD, 2001).

Assim, partimos para a segunda parte da síntese: apresentar as relações contratuais no momento em que os professores estão colocando em prática as OM. Para isso, iremos olhar para as OD, em especial, para os seis momentos didáticos: o primeiro encontro propriamente dito com o tipo de tarefa; exploração do tipo de tarefa e elaboração da técnica; constituição do ambiente tecnológico-teórico; o trabalho da técnica; a institucionalização e a avaliação.

6.2.3.2 Os Momentos Didáticos na Relação com $T_1: ax^2 + bx + c = 0$, $T_2: ax^2 + c = 0$ e $T_3: ax^2 + bx = 0$.

Antes de iniciarmos a apresentação, devemos apontar que o ensino da equação do segundo grau, segundo a ação didática do professor, pode seguir o caminho de quatro tipos diferentes de primeiro encontro propriamente dito, que são considerados as formas canônicas: $ax^2 + bx + c = 0$; $ax^2 + c = 0$; $ax^2 + bx = 0$; $ax^2 = 0$, já mencionados anteriormente. Por outro lado, esses primeiros encontros podem aparecer mediante subtipos de tarefa, que através das técnicas podem ser reduzidos a uma das formas anunciadas.

- *Aulas de Davi*

Para Chevallard (2007), por mais que pareça paradoxal, o primeiro encontro pode acontecer várias vezes, em função dos ambientes matemáticos e didáticos. Entendemos que o fato de acontecer várias vezes esse encontro, pode estar relacionados ao contrato didático. Assim, existe situação que o primeiro encontro pode ser interpretado como um reencontro com o tipo de tarefa.

Para iniciar a síntese, tomamos como referência os quatro tipos de tarefa anunciados anteriormente. Nesse aspecto, apontamos que vários foram os momentos que houve o encontro ou reencontro nas aulas do professor Davi.

No que diz respeito ao primeiro encontro com o tipo de tarefa $ax^2 + bx + c = 0$, observamos nas aulas que ele coincidiu, também, com o primeiro encontro dos outros

três tipos de tarefas. As negociações¹⁰⁹ em torno desses encontros estão relacionadas ao conceito, o grau da equação. Acreditamos que existe uma característica importante na apresentação desse conceito, que é a possibilidade de utilizar, em seus exemplos, não apenas um tipo de tarefa, mas os quatro tipos de tarefas dialogando entre si. Somando-se a esse aspecto, temos o professor com opção metodológica em contemplar todos os tipos de tarefas de maneira conjunta.

Após as negociações com o grau da equação, o professor Davi, propõe o reencontro com o tipo de tarefa (T_1) $ax^2 + bx + c = 0$. Esse reencontro proporciona uma natureza contratual¹¹⁰ diferente, pois é a primeira vez que Davi utiliza a técnica de tentativa e erro e de transpor termos ou coeficientes, para determinar apenas uma das raízes da equação. Vale destacar que a utilização dessas técnicas, inicialmente, aconteceu nas equações do primeiro grau.

Foi observado, também, que o professor Davi contempla na sua aula o tipo de tarefa T_2 : $ax^2 + c = 0$. Nesse aspecto, surge o primeiro encontro, propriamente dito com o tipo de tarefa e reencontros. As negociações¹¹¹ em torno desse primeiro encontro fazem surgir uma ruptura de contrato. A ruptura implícita acontece quando o professor propõe a resolução da equação pela técnica de transposição de termos e o aluno utiliza a técnica de tentativa e erro. Além disso, regras contratuais que se confundem, ou têm características das técnicas matemáticas.

Ainda sobre a relação entre regras e técnicas, observamos que elas se confundem na relação didática, porque as duas estão ligadas intimamente ao ato de realizar a tarefa. No que dizem respeito às tecnologias, estas estão mais para vestígios tecnológicos, o que faz as técnicas ficarem mais potentes. Assim, as técnicas trabalhadas nessa situação, foram: transposição de termos ou coeficientes e desenvolver e reduzir expressões.

Ainda com relação às tecnologias¹¹², foi observado que sua utilização pelo professor acontece na maioria dos casos no implícito. Nesse sentido, entendemos que a sua função nas aulas de Davi, além de “justificar a tarefa e a técnica”, foi também “expor porque a técnica funcionava bem” (CHEVALLARD, 2007). Nesse aspecto, o bloco tarefa-técnica aparecia com vestígio de tecnologia. Essa relação entre a

¹⁰⁹ Podemos encontrar essas negociações nas páginas 203 e 204 da tese (quadro 17 e 18).

¹¹⁰ Podemos encontrar essas negociações nas páginas 207, 208 e 209 da tese (quadro 22 e 23).

¹¹¹ Podemos encontrar essas negociações nas páginas 214, 215 e 216 da tese (quadro 27, 28 e 29).

¹¹² Podemos encontrar essa discussão na página 220 da Tese (quadro 33).

tecnologia e o bloco tarefa-técnica foi percebido também com os outros tipos de tarefas.

O primeiro encontro com o tipo de tarefa T_3 : $ax^2 + bx = 0$, surge a partir da negociação¹¹³ de um subtipo de tarefa ($x^2 + x = 3x$). Dessa forma, a ação didática do professor solicita a técnica de desenvolver e reduzir para que o subtipo de tarefa possa ser transformado no tipo de tarefa (T_3). Além dessa técnica, outras foram negociadas, tais como tentativa e erro; fatorar expressões, colocando em evidência o fator comum; igualando os termos do produto a zero e transpondo termos ou coeficiente.

Vale destacar que observamos, de forma geral, a existência de uma negociação¹¹⁴ implícita que aponta para a passagem da equação do primeiro grau à equação do segundo grau. Essa constatação ficou mais forte em virtude de um conjunto de elementos tecnológicos que fazem parte, de forma comum, das duas equações. Além disso, as técnicas utilizadas eram as mesmas até o momento em que o professor solicita dos alunos duas raízes com solução para a equação.

Próximo ao fim de todas as aulas¹¹⁵ (filmagem), apareceram outros reencontros, em que todos os tipos de tarefas passam a ser executadas por uma única técnica, a “fórmula de Bhaskara”. Esse aspecto, consideramos importante marcar, sob o ponto de vista contratual, como o hábito do professor. Ele valoriza essa técnica, dizendo que ele contempla, em termos de resolução (realizar a tarefa), todos os tipos de tarefa, T_1 , T_2 e T_3 , da equação do segundo grau.

Implicitamente, o professor para querer que os alunos percebem que a fórmula de Bhaskara, seria a mais completa técnica, pois resolve todos os tipos de tarefas. Sendo assim, observamos que o professor opta em utilizar essa técnica na resolução de três tipos de tarefas ($ax^2 + bx + c = 0$; $ax^2 + c = 0$; $ax^2 + bx = 0$). A regra implícita a que estamos nos referindo seria, possivelmente: “caso não conseguisse utilizar outras técnicas para resolver as equações incompletas, poder utilizar a técnica ‘coringa’, que seria a fórmula de Bhaskara”. Na utilização da técnica, surgem outras regras relacionadas a sua manipulação, com característica mais rígidas, como se existissem na relação didática um núcleo duro do contrato. Esse núcleo duro¹¹⁶ aponta para uma resolução mais descontextualizada, com uma série de passo a passo, que não pode

¹¹³ Podemos encontrar essa negociação nas páginas 218, 219 e 220.

¹¹⁴ Podemos encontrar, inicialmente, de forma mais explícita na página 198 e, no decorrer das análises inferimos também essa passagem.

¹¹⁵ Pode os encontrar essa discussão a partir da página 235 à 237 (quadro 50, 51 e 52).

¹¹⁶ Podemos encontrar essa discussão na página 221. Em outro momento, nas páginas 233 e 260.

ser modificada, como se essa regra pudesse aparecer toda vez que esse tipo de tarefa fosse aparecer.

Ainda sobre a realização do tipo de tarefa $ax^2 + bx + c = 0$, é possível dizer que ela pode ser cumprida por mais de uma técnica: a primeira, por tentativa e erro (mesmo que parcialmente) e a segunda, em que determina o conjunto solução de forma completa, a fórmula de Bhaskara.

No que diz respeito à exploração do tipo de tarefa e elaboração das técnicas (segundo momento didático)¹¹⁷, podemos acrescentar que ela ocorre na medida em que são apresentados os tipos de tarefas. De forma geral, aconteceu com os três tipos de tarefas T_1 , T_2 e T_3 . Além disso, esse momento também se repete tantas vezes quanto for a quantidade de tipos de tarefas, assim como o primeiro momento.

É possível perceber que a constituição do ambiente tecnológico-teórico para os três tipos de tarefas aparece em diferentes aspectos e momentos, às vezes com enfoque mais geral e em outros momentos de forma mais específica a cada tipo de tarefa. A criação desse ambiente acontece como se existisse a necessidade de primeiro colocar à disposição dos alunos as questões teóricas, para depois adentrar com as práticas. A impressão nossa é de que essa dinâmica vai se cristalizando no decorrer da aula e da realização das tarefas. Mesmo diante desse fato, podemos acrescentar que a ênfase maior da constituição desse ambiente aconteceu antes da realização das tarefas T_2 e T_3 e antes da realização da tarefa T_1 : $ax^2 + bx + c = 0$, em que se discutem demonstrações relativas à aplicação da técnica.

Por outro lado, existe por parte do professor, no início da aula, um tratamento comum dos principais elementos conceituais para as equações do primeiro grau e as equações do segundo grau. Vale ressaltar também, em relação a outros momentos, que o início da aula foi o momento de maior destaque da criação do ambiente tecnológico-teórico. Segundo Chevallard (1999) é justamente nesse momento que deveria acontecer a primeira etapa do momento de didático.

Acrescentamos ainda, que as relações contratuais permitem o surgimento de elementos tecnológicos, em sua maioria implícitos, tanto no ato da resolução dos tipos de tarefas, quanto fora da resolução, no contexto expositivo, por parte do professor. Esse momento não é visível pelas demonstrações matemáticas, mas sim, pelas as explicações verbais.

¹¹⁷ Podemos encontrar essas informações nas páginas 219, 220, 221, 231 e 232, entre outros momentos.

O contrato didático que emerge da relação didática, aponta que o *momento do trabalho da técnica* pelo professor, acontece logo após a apresentação do tipo de tarefa com os exercícios em sala de aula, bem como com aqueles exercícios destinados a fazer em casa, embora, esporadicamente, aconteça também nos exemplos, quando o professor solicita aos alunos a resolução. Essa forma de trabalhar a técnica por parte do professor, que faz parte do seu hábito, diz respeito ao contrato que ele estabelece em sala de aula.

Vale destacar que a técnica de tentativa e erro foi apresentada como um meio de realizar todo e qualquer tipo de tarefa da equação do segundo grau. No entanto, é deixada de lado em detrimento de outras técnicas que parecem ser consideradas por Davi como mais potentes e eficientes. Dentre as mais potentes e que o professor mantém uma relação mais próxima, destacamos a fórmula de Bhaskara. Sobre essa técnica, identificamos que ela foi utilizada nos tipos de tarefas (T_1 , T_2 e T_3). Vale destacar, que isso só acontece no final de todas as aulas, em momento que o professor intitula de “resumo geral”.

Esse aspecto nos faz lembrar o que Chevallard (1999) fala, quando uma “maneira de fazer” tem êxito somente sobre uma parte de um tipo de tarefa T , essa técnica será “substituída” por outra que dê conta, se não sobre toda a tarefa T , ao menos sobre parte dela. Bessa de Menezes (2010) corrobora dizendo que essa afirmação de Chevallard aponta para existência de uma técnica melhor que a outra.

O *momento da institucionalização* aconteceu, especialmente, logo após os alunos finalizarem a resolução dos exemplos relacionados ao tipo de tarefa. Nesse momento, o professor retoma aspectos da resolução que ele acha importante para os alunos, ou seja, aquelas informações que justamente os alunos devem ter como aprendizagem. Mesmo o aluno tendo êxito no exemplo, o professor utiliza a institucionalização. Como afirma Chevallard (1999), a institucionalização está relacionada à certificação das técnicas; é preciso o professor apontar aos alunos certas impressões que lhes garantam o caminho correto.

Essa maneira de trabalhar do professor vai se consolidando perante todos os tipos de tarefas e técnicas. As negociações contratuais, que fazem parte desse momento, revelam que o professor seleciona os detalhes principais da resolução e alertam aos alunos para que eles possam utilizar em outro momento.

Segundo Chevallard (2007), o momento da avaliação, normalmente, vem articulado com o momento da institucionalização, pois seria nesse momento que as

técnicas que foram elaboradas no momento de institucionalização seriam medidas quanto à sua validade.

Sobre esse aspecto, é possível perceber também uma relação forte entre a avaliação¹¹⁸ e a institucionalização, pois o professor, ao retomar problemas, corretos ou incorretos, enfatizava os momentos em que os alunos sentiam dificuldades, com intuito de corrigir atitudes dos alunos que não favoreciam a aprendizagem. O professor procura, então, “separar” o que é “bom” do que é “ruim”, o saber que o professor seria de referenciado saber que não seria de referência.

- *Aulas de Lucas*

A aula de Lucas começa com a dinâmica de questionar¹¹⁹ e aguardar o posicionamento dos alunos, ou seja, as respostas por parte dos alunos. Essa dinâmica parece fazer parte da cultura, do hábito do professor em sua aula, pois, em alguns momentos, quando o aluno se recusava a participar e ficava em silêncio, o professor insistia para que eles se posicionassem. Esses fatos começam a surgir logo na introdução ao estudo das equações. Existem indícios de que esses questionamentos pretendiam levantar informações que o professor considerava importante para os alunos sobre o tema.

Em outro momento o professor estabelece com os alunos um diálogo sobre as equações do primeiro grau. É possível relacionar esse diálogo à metodologia de perguntas e respostas. O intuito maior na apresentação da equação parecia ser o de preparar o aluno para o primeiro encontro com a equação do segundo grau.

Entre um diálogo e outro, é possível perceber a intenção do professor em associar elementos tecnológicos¹²⁰ com a sua ação didática. Tal intenção foi uma das marcas em toda a aula. Um momento mais visível disso aconteceu no início da aula, em que ele potencializa a constituição do ambiente tecnológico-teórico. Em sua fala, explicitamente ele procura promover essa discussão. Assim, faz referência à sentença, expressão, expressão algébrica, expressão literal e, por fim, fala que a equação é algo bem mais específico. Continua o diálogo com os alunos e faz referência também à noção de incógnita e de igualdade.

¹¹⁸ Podemos observar essa discussão nas páginas 214, 215 e 216.

¹¹⁹ Podemos observar essa discussão nas páginas 244, 245, 246, a partir do quadro 57.

¹²⁰ Podemos observar essa discussão nas páginas 244, 245, 246 e 247.

Destacamos também, na organização didática, o primeiro encontro propriamente dito com o tipo de tarefa $ax^2 + bx + c = 0$, $ax^2 + c = 0$ e $ax^2 + bx = 0$. Esses primeiros encontros aconteceram a partir da negociação do conceito “grau da equação”. É possível perceber que a negociação desse conceito tem um “tempo de validade¹²¹” muito curto na relação didática. Isso se confirma, porque ele aparece e sai de cena rapidamente, como se o professor tivesse a expectativa de que essa seria uma questão menos importante no estudo da equação do segundo grau. Observa-se, também, que não existe, a partir da apresentação e tratamento dado a esse conceito, qualquer tipo de resolução de equação em termos de identificar suas raízes.

As negociações sobre o grau da equação seguem e Lucas apresenta uma nova discussão, com alguns conceitos comparativos entre a equação completa e incompleta, discussão essa que se baseia nas equações do primeiro grau e do segundo grau. Esse primeiro encontro com as equações revela indícios, de que o professor Lucas utiliza, constantemente, argumentos com elementos tecnológicos como forma de balizar as suas negociações. Situação dessa natureza é percebida nas resoluções de equações do primeiro grau e, posteriormente, com as equações do segundo grau. Um exemplo do que estamos falando, aconteceu quando o professor negocia com os alunos o princípio aditivo e multiplicativo na resolução de alguns exemplos¹²².

Outro fato importante, diz respeito ao surgimento da técnica, transposição de termos ou coeficientes, que começa a ser negociada com mais ênfase e destaque na equação do primeiro grau. O professor Lucas, implicitamente, apresenta essas técnicas como uma ajuda na resolução de equações do segundo grau. Alguns indícios começam a surgir sobre essa negociação, que diz respeito a um tempo de validade mais longo de negociação, mais duradouro, relacionado à passagem da equação do primeiro grau para a equação do segundo grau. Além disso, foi possível observar nessa passagem que o professor valoriza a apresentação dos elementos tecnológicos que fazem parte das duas equações.

Os outros encontros com o tipo de tarefa (T_2 : $ax^2 + c = 0$ e T_3 : $ax^2 + bx = 0$) acontecem de forma semelhante ao tipo de tarefa T_1 . Nesses encontros as negociações por parte do professor revelam, em alguns momentos, uma relação

¹²¹ Um conceito que sai de cena rapidamente na relação didática. Podemos encontrar essa discussão nas páginas 247, 248 e 249.

¹²² Podemos observar essa discussão nas páginas 247 e 248.

explícita com elementos tecnológicos. Em outros, a sua fala justifica a utilização das técnicas.

Devemos lembrar, sobre o primeiro encontro com o tipo de tarefa, que não se pode pensar que o primeiro encontro existe apenas em um único momento na relação didática. Porque o próprio entorno matemático e didático, promove novos encontros, ou seja, reencontros. Os reencontros se potencializa ou existe, porque a relação didática é permeada pelos os fenômenos didáticos, em especial, o contrato didático.

Já no segundo momento didático, a exploração do tipo de tarefa e elaboração da técnica, de forma geral, aconteceu sempre que o primeiro encontro entra em cena na relação didática. Assim, tanto no primeiro encontro como no reencontro, foi possível perceber a exploração do tipo de tarefa e elaboração da técnica.

Ainda sobre os primeiros encontros com os tipos de tarefas ($T_2: ax^2 + c = 0$ e $T_3: ax^2 + bx = 0$), observamos que existiam, na apresentação por parte do professor, uma semelhança entre eles. Na sua ação didática o professor apresentava, em primeiro lugar, alguns elementos tecnológicos, para depois apresentar exemplos de tipos de tarefas.

Sobre o primeiro encontro com o tipo de tarefa, Chevallard (2007) aponta que ele não pode se caracterizar como um único na relação didática. Destaca que, pelo entorno matemático e didático, pode existir a necessidade de um novo encontro, o que caracterizaria um reencontro. Essa situação se potencializa ou existe, porque a relação didática é permeada pelos os fenômenos didáticos, em especial, o contrato didático (JONNAERT; BORGHT, 2002).

Já no segundo momento didático, à exploração do tipo de tarefa e elaboração da técnica, de forma geral, aconteceu sempre que o primeiro encontro entra em cena na relação didática. Assim, tanto no primeiro encontro como no reencontro, foi possível perceber a exploração do tipo de tarefa e elaboração da técnica.

Ainda sobre o segundo momento, podemos dizer que o professor explora na sua ação didática, as atividades (tipos de tarefas¹²³ e subtipos de tarefas) e elaboram a técnica de forma dialogada. Apontamos ainda que os tipos de tarefas e subtipos de tarefas, são explorados e trabalhados em sala de aula na grande maioria através de exemplos sem contexto (anunciado). Por outro lado, as técnicas, que dizem respeito à maneira de fazer ou realizar o tipo de tarefa se confunde com a própria regra

¹²³ Não observamos em nenhum momento negociações em torno do tipo de tarefa $ax^2 = 0$.

contatual. Assim, podemos refletir também que a cristalização dessa regra pode torná-la um núcleo duro¹²⁴ do contrato didático na relação didática.

Podemos dizer ainda, a partir das análises, que existem indícios que as regras contratuais emergem na relação didática com maior frequência no momento em que o professor coloca à disposição dos alunos os tipos de tarefas e técnicas; esses são considerados, por Chevallard (2007), como o bloco *prático-técnico, em que se identifica, de forma genérica, como saber-fazer*.

A constituição do ambiente tecnológico-teórico, terceiro momento didático, aconteceu de forma mais forte e visível no início da aula¹²⁵, a partir da negociações da definição de equação. Nesse aspecto, o professor dar a entender que antes de apresentar a equação do segundo grau é necessário revisar a equação do primeiro grau. Então, segue as negociações e, implicitamente, aponta conceitos comuns as duas equações, tais como: grau da equação, incógnitas e coeficientes.

Os elementos tecnológicos¹²⁶ negociados foram o princípio aditivo, princípio multiplicativo e a propriedade distributiva¹²⁷. Apontamos como destaque o momento em que o professor apresenta aos alunos o desenvolvimento do processo trinômio quadrado perfeito, esse, estava associado ao tipo de tarefa $ax^2 + bx + c = 0$. Segundo o professor, o desenvolvimento do trinômio é a base para resolver problemas de equação do segundo grau com a técnica de completar quadrados.

O momento do trabalho com a técnica, que pode ser considerado o trabalho com a organização matemática, aconteceu quando o professor Lucas, coloca os alunos para participarem¹²⁸ no quadro com resolução de exemplos relacionados aos tipos de tarefas. Embora o professor não deixe explícito a sua vontade, o trabalho com a técnica acontece, na medida que os alunos vão resolvendo esses exemplos. Por outro lado, o professor negocia também com os alunos o trabalho da técnica, na resolução de exercícios, tanto em sala de aula como para casa (atividades para casa). Esse exercício acontece de forma particular à cada tipo de tarefa.

Nesse momento, é possível observar que o trabalho da técnica mantém relação com outros momentos, especialmente, com o momento da institucionalização e da avaliação.

¹²⁴ Podemos encontrar nas páginas 260 e 263 discussões sobre núcleo duro do contrato.

¹²⁵ Podemos observar essa discussão nas páginas 243 e 244.

¹²⁶ Podemos observar essa discussão nas páginas 247, 248 etc.

¹²⁷ Podemos observar essa negociação nas páginas 259 e 260.

¹²⁸ Os alunos participaram em poucos momentos no quadro.

As negociações que surgem no momento da institucionalização, acontecem mediante a ação didática do professor, quando ele está resolvendo a equação no quadro e explicando aos alunos. Por outro lado, acontece também quando os alunos participam no quadro resolvendo as equações.

As regras de contrato associada a esse momento se encontram numa relação próxima com as técnicas matemáticas apresentadas por Lucas, que por sua vez, refletem um passo a passo (regras contratuais) na resolução da equação do segundo grau, tanto na forma completa (T_1) como na forma incompleta (T_2 e T_3).

Vale lembrar que a institucionalização visa incorporar os saberes que de fato são importantes para o aluno. Nesse caso, em que estamos refletindo, o que é importante na visão de Lucas são os alunos se apropriarem do passo a passo da resolução e as manipulações. Além disso, o professor na institucionalização costuma apresentar detalhes da atividade que são importantes para resolução da equação.

O momento da avaliação (sexto momento), normalmente, vem articulado com o momento de institucionalização, pois seria nesse momento que as técnicas que foram elaboradas no processo seriam medidas quanto à sua validade.

No caso das aulas do professor Lucas, a avaliação pode acontecer também associada à institucionalização, quando, imediatamente após uma participação (de qualquer natureza) do aluno no quadro, o professor procurava institucionalizar as ações que são consideradas importantes, ao mesmo tempo que chama a atenção para os erros cometidos no percurso da institucionalização das técnicas.

A nossa análise aponta para uma avaliação clássica, em que as preocupações estão voltadas para a organização da matemática construída ou em vias de construção, algo semelhante a uma avaliação da organização matemática em si mesma.

Assim, com esses dados apresentados em forma de síntese, esperamos ter contribuído para esclarecer, de forma particular, alguns questionamentos iniciais da pesquisa sobre as OM e OD. Além disso, esperamos ter contribuído também para apontar elementos sobre os questionamentos da relação entre as organizações e o contrato didático.

Sabemos que as organizações praxeológicas são constituídas de forma dialética entre “organização matemática e organização didática” e são expressas através de pares (OM, OD). Assim, à medida que surgem as OM com suas características, seus tipos de tarefas, técnicas e tecnologias, facultam o surgimento

das OD, com seus momentos didáticos. É possível perceber que as organizações mantêm entre si uma certa dependência (HIGUERAS; GÁRCIA, 2011). E essa inter-relação entre as organização é balizada pelo fenômeno contrato didático. Nesse sentido, vale repetir as palavras de Chavellard (2001) que o contrato didático é, sem dúvida, considerado a pedra de toque de todo o sistema didático.

7 Retornando à Tese

Esta tese procurou investigar a relação entre o contrato didático (negociações, rupturas e renegociações) e as organizações matemáticas (tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias) e didáticas (momentos didáticos) no ensino da equação do segundo grau a uma incógnita.

Para responder a questão acima, buscamos caracterizar, no ensino de equações do segundo grau de dois professores, as organizações matemáticas, seus tipos de tarefas, as técnicas, as tecnologias e as teorias, bem como identificar as organizações didáticas, com os seis momentos didáticos. Por fim, não com menor importância, procuramos identificar, na relação didática, as negociações, as rupturas e as renegociações no ensino de equação do segundo grau.

Com intuito de consolidar a investigação foi necessário eleger dois campos teóricos: o primeiro é considerado um dos principais elementos da teoria das situações didáticas, o contrato didático. Essa noção desempenha o papel central na análise e na construção de situações para o ensino e aprendizagem da matemática (BROUSSEAU, 1996). O segundo, ancoramo-nos na teoria antropológica do didático, em especial nas organizações matemáticas e didáticas, reconhecidas como potentes ferramentas que permitem modelizar e analisar com maior detalhe as práticas escolares (CHEVALLARD, 1996).

Além do que foi dito, acrescentamos as preocupações de Brousseau (2007) que aponta para necessidade de pesquisar como as praxeologias (tipo de tarefa, técnicas, tecnológicas e teorias) assim associadas apresentam os traços das intenções didáticas. Esse questionamento de Brousseau (2007) reforça as nossas preocupações.

Após a escolha dos campos teóricos, com devidas justificativas, é fundamental definir também a escolha do campo de saber em que eles serão investigados. Assim, escolhemos no campo algébrico a equação do segundo grau a uma incógnita.

A nossa motivação em pesquisar a álgebra surgiu, entre outras questões, pelas informações encontradas no SAEB, que revelam dificuldades dos estudantes,

especificamente no descritor que trata da resolução de equação do segundo grau, em que 55% dos alunos não obtiveram êxito (BRASIL, 2011). Além disso, segundo os dados do SAEPE, apenas 21,4% dos alunos do 9º ano do ensino fundamental conseguem identificar uma equação do segundo grau expressa por problema (CÂMARA DOS SANTOS; RAMOS DE ALMEIDA, 2014).

Os sujeitos envolvidos na pesquisa foram dois professores do 9º ano do ensino fundamental e seus alunos. Escolhemos o 9º ano, por considerarmos que é justamente nele que o conteúdo de equação do segundo grau é iniciado. E, sobre a escolha dos sujeitos, por entender que eles possibilitam apontar mais elementos que fazem parte da relação que o contrato didático mantém com as organizações matemáticas e didáticas. Além disso, os dois sujeitos permitem também apontar as relações entre si.

Para responder aos objetivos da pesquisa, foi necessário colocar em prática algumas etapas: a primeira, uma análise, a priori, das organizações matemáticas sobre o ensino da equação do segundo grau a uma incógnita; a segunda, a coleta dos dados dos dois professores através de videografia; a terceira, a transcrição dos recortes para análise; a quarta, a quinta e a sexta, dizem respeito à análise dinâmica dos recortes. Vale ressaltar que a análise está balizada pelos critérios previamente construídos e que se encontram na metodologia.

Com as etapas concluídas, foi possível responder aos objetivos formulados na tese. Assim, apresentamos no próximo tópico, os principais resultados da pesquisa.

7.1 Os Principais Resultados da Pesquisa

Antes de apresentarmos os principais resultados da nossa pesquisa, queríamos destacar que ainda existe, um amplo espaço para pesquisas e reflexões que podem contribuir para a compreensão dos fenômenos: contrato didático, organizações matemáticas e organizações didáticas. Por outro lado, acreditamos que o nosso estudo trouxe contribuições relevantes para o debate sobre o tema. Essas contribuições se caracterizam como “mais uma pedra” sobre a construção teórica e de pesquisa dessa relação.

Escolhemos dois professores como sujeitos da pesquisa, Davi e Lucas. Filmamos as aulas do primeiro sujeito, por um período de um mês (vinte e três aulas) e o segundo por um período de quinze dias (nove aulas). Ambos, começamos a

filmagem quando o professor iniciou o estudo da equação do segundo grau e encerramos quando o professor finalizou as resoluções das equações do segundo grau na forma completa e/ou incompleta.

A partir de agora, os desdobramentos desse tópico, seguem de forma dinâmica com os principais resultados do professor Davi, do professor Lucas e os resultados que aproximam e distanciam esses sujeitos, em relação aos fenômenos investigados.

Um primeiro aspecto que devemos destacar sobre as aulas do professor Davi diz respeito a existência dos tipos de tarefas $T_1: ax^2 + bx + c = 0$, $T_2: ax^2 + c = 0$, $T_3: ax^2 + bx = 0$ e $T_4: ax^2 = 0$, na sua intervenção didática. A partir da proposição desses tipos de tarefas surgiram também, embora em momentos raros, subtipos de tarefa sendo negociados com os alunos, e esses, quando o professor desenvolve e o reduz, passam a ser considerados, um tipo de tarefa. Nesse caso, apresentamos uma divergência entre os sujeitos, pois nas aulas do professor Lucas foram contemplados, apenas os três primeiros tipos de tarefas: T_1 , T_2 e T_3 . Por outro lado, as negociações com subtipos de tarefa foram mais frequentes que as de Davi.

Dentre as técnicas negociadas em sala de aula pelo professor Davi, a que nos chamou mais atenção foi a técnica de tentativa e erro. Embora não tenha sido utilizada de maneira frequente entre os tipos de tarefa, ela apareceu em momentos de destaque, inclusive foi negociada no fechamento das atividades, em que o professor intitulou de “revisão”. Vale destacar ainda que na apresentação de todos os tipos de tarefas da equação do segundo grau, essa técnica tinha sempre o privilégio de ser a primeira. Tal caminho adotado pelo professor revela, no nosso entendimento, a relação entre o contrato didático e às técnicas a serem utilizadas para cada tipo de tarefa.

Com o professor Lucas o caminho foi distinto, pois, nas suas aulas, em nenhum momento foi por ele utilizada como registro matemático a técnica de tentativa e erro. No entanto, foi possível observar, no trabalho didático citações através da sua fala sobre essa técnica.

No que diz respeito às tecnologias, observamos que não existiram negociações explícitas a seu respeito nas aulas do professor Davi. Mas, implicitamente, as negociações entre o professor e seus alunos possibilitaram que as tecnologias transformassem às técnicas, tornando-as técnicas mais potentes, técnicas com vestígios tecnológicos. Nas aulas de Lucas, o contrato adotado partia de questionamentos do professor, para em alguns momentos fazer os alunos refletirem

sobre a situação matemática e suas respostas. Nesse contexto, as resoluções apontavam regras explícitas de contrato, mantendo relação com as tecnológicas. Foi perceptível, em vários momentos, o uso que o professor fazia de termos como: princípio aditivo, princípio multiplicativo, propriedade distributiva, etc. Esse uso apareceu, inclusive, em tipo de tarefa diferentes.

Outro elemento que queremos destacar, que foi observado nas aulas dos dois sujeitos, aponta para negociações implícitas, que geraram regras contratuais também implícitas e, eventualmente, explícitas, entre o professor (Davi ou Lucas) e seus alunos, no que diz respeito à “passagem da equação do primeiro grau para a equação do segundo grau”. Essa negociação dos dois sujeitos, se revelam mais duradouras que outras negociações, ou seja, os professores iniciam explicando as questões sobre as equações do primeiro grau na introdução e, gradativamente, depois de algumas aulas vão surgindo as equações do segundo grau. Além disso, essa passagem parece revelar, também, que é possível existir outras regras atuando ao mesmo tempo na negociação. Quero dizer, ao mesmo tempo em que o professor estabelece como regra de contrato a passagem, outras regras como as técnicas de resolução da equação incompleta podem atuar ao mesmo tempo.

Do ponto de vista, das aulas do professor Davi, essa constatação surge pela utilização de técnicas (tentativa e erro e transpor termos ou coeficientes) idênticas tanto no tipo de tarefa da equação do primeiro grau, como no tipo de tarefa na equação do segundo grau. Outra constatação se deu no momento em que o professor apresentou uma constituição do ambiente tecnológico-teórico comum (terceiro momento da OD) das duas equações.

Já nas aulas do professor Lucas, a constatação surgiu de forma explícita na constituição do ambiente tecnológico-teórico, como pode ser observado em sua fala “o estudo da equação do primeiro grau deve servir de suporte para o estudo da equação do segundo grau”. A constatação parece se revelar ainda mais quando o professor na sua aula utiliza, em alguns momentos, o mesmo ambiente tecnológico-teórico para as duas equações.

Conforme Parra e Otero (2011) existem aspectos inseparáveis na ação didática do professor; entre esses, o pesquisador aponta as organizações matemáticas e didáticas. Por sua vez, Chevallard (2007) afirma que essa relação conduz a um “isomorfismo didático-matemático”. Assim, é possível dizer que toda a atividade matemática é construída na sala de aula a partir de uma organização didática.

Para Brousseau (1996b), o contrato didático é o motor de toda a relação didática, é através dele que ela se mantém viva. Com as afirmações de Brousseau (ibidem) e Chevallard (ibidem), podemos dizer que o surgimento do bloco prático-técnico (tipo de tarefa e técnica), designado na linguagem corrente como saber-fazer, nas aulas do professor Davi, foi construído a partir de (OM, OD), se mantém e são permeadas por várias relações contratuais.

Chevallard (2007) propõe que as OD são constituídas por seis momentos didáticos, e esses aparecem na relação didática não de forma sequenciada e rígida, e, sim, de forma aleatória. Essa afirmação foi corroborada pelo nosso estudo.

Outro aspecto comum às aulas dos professores (Davi e Lucas) diz respeito aos momentos didáticos. É possível perceber que todos eles foram contemplados de forma não sequenciada, não individual (mais de um momento atua, ao mesmo tempo na relação didática) e não controlado. Nesse aspecto, apontamos o contrato didático como o causador dessas características, pois, o papel do contrato, entre outros, é o de constituir uma relação didática dinâmica, não estática, em que suas cláusulas são modificadas no decorrer da relação (BROUSSEAU, 2008).

Nas aulas de Davi, no que diz respeito à relação do contrato didático e à constituição do ambiente tecnológico-teórico é possível perceber que, na maioria das vezes, antes do primeiro encontro com o tipo de tarefa ($ax^2 + c = 0$; $ax^2 + bx = 0$ e $ax^2 + bx + c = 0$), o professor propõe uma discussão teórica sobre o tipo de tarefa a ser apresentado.

Já nas aulas do professor Lucas, em alguns momentos é observado uma tentativa em mudar a ordem de apresentação na atividade. O professor apresenta uma situação problemática, possivelmente com intuito de discutir os conceitos a ela relacionados. Essa opção do professor não acontece na apresentação de todos os tipos de tarefas.

Mais um aspecto observado na pesquisa, e que pode ser relacionado aos dois sujeitos, se refere à relação que existe entre as regras contratuais, as técnicas (OM) e a elaboração da técnica e trabalho da técnica (OD). Essas inter-relações acontecem de forma simultânea e dinâmica, potencializado, no nosso entendimento, pela própria natureza do contrato didático. As regras contratuais, em algumas situações, cristalizam os movimentos das incógnitas e coeficientes numéricos entre o primeiro membro e segundo membro. No entanto, como observamos nas aulas, o papel da técnica (exemplo, transpor termos ou coeficientes) é semelhante à cristalização do

contrato, que diz respeito, a forma costumeira, o hábito do professor de resolver a equação pelo mesmo procedimento matemático. Esse aspecto, é considerado como o ponto mais claro de encontro entre o contrato, às organizações matemáticas e as didáticas. Essa situação existe em todas as técnicas aplicadas nos tipos de tarefa (bloco técnico-prático). Por ser uma situação particular a cada sujeito e comum entre eles, podemos inferir a existência de um núcleo duro do contrato na relação didática.

Chamamos atenção para uma última observação sobre as aulas do professor Davi, que diz respeito, à relação entre a ruptura de contrato e a reorganização contratual (termo adotado na nossa pesquisa).

Para discutir essa relação é necessário lembrar que as rupturas de contrato acontecem numa relação didática, quando uma das partes (professor ou aluno) não atua de forma esperada pela outra parte. Assim, vai existir um questionamento, uma “contradição que uma das partes pode viver em um determinado momento da relação”, e isso direciona o professor a uma renegociação (JONNAERT; BORGHT, 2002).

À respeito das rupturas, Brousseau (1996b) propõe que a aprendizagem vai repousar, não sobre o funcionamento do contrato, mas sobre suas rupturas. O pesquisador aponta ainda que rupturas são necessárias para permitirem que os parceiros (professor e alunos) modifiquem permanentemente as suas relações com o saber e nos permitem também ter acesso, pelo menos em parte, às regras implícitas, anteriormente negociadas em uma relação didática.

No entanto, observamos na aula do professor Davi que os questionamentos e contradições, em alguns momentos, não foram suficientes para que o contrato didático se rompesse, embora passasse essa impressão. Dessa forma, entendemos que existiu o que intitulamos de “*reorganização contratual*” na relação didática. Essa situação acontece no momento em que o contrato está prestes a ser rompido e, como se existisse um sistema de defesa do próprio contrato, isso não acontece, há apenas uma desestabilização momentânea (uma ruptura branda) na relação didática e o professor segue com sua negociação.

A reorganização, que aqui utilizamos, aparece como uma alternativa à ideia de renegociação, já discutida na literatura (BROUSSEAU, 1996). Enquanto que a renegociação pressupõe que houve uma ruptura do contrato pelo fato dele não ter sido aceito pelo(s) aluno(s), a reorganização sugere que embora não tenha havido uma ruptura no sentido estrito (pela não aceitação daquilo que foi negociado), torna-

se necessário “mudar as coisas de lugar”, reorientar, antecipar algo que viria mais tarde.

7.2 Pesquisas Futuras

Várias foram as possibilidades de estabelecer os caminhos para seguir com a nossa tese, alguns desses foram se tornando inviáveis, porque teríamos outras demandas teóricas e também de tempo. Assim, nos parágrafos seguintes apontamos para algumas questões que ficaram em aberto, possibilitando futuras pesquisas.

A primeira, diz respeito à relação entre a conformidade¹²⁹ e não-conformidade que o sujeito (professor e aluno) mantém com a instituição livro didático, considerando as relações contratuais que emergem na relação didática. Entendemos, que todo o funcionamento do sistema didático depende do estabelecimento de um contrato didático, e o sujeito, para se adequar a sua relação pessoal $R(X, O)$, tem que se colocar conforme a relação institucional $R_I(O)$. Assim, de um lado temos o professor com a proposta de fazer o aluno ser um bom sujeito institucional, entrar no contrato institucional, do outro lado temos um contrato didático emergindo da relação didática e fazendo, a mesma, ficar dinâmica.

Uma segunda questão que consideramos necessário aprofundar nas pesquisas, e que encontramos fortes indícios na análise dos dois sujeitos, diz respeito ao comportamento do contrato didático, com suas negociações, rupturas e renegociação ou apenas reorganização, na passagem da equação do primeiro grau para equação do segundo grau na relação didática.

Uma terceira questão, para futuras pesquisas, está relacionada à relação que existe entre o contrato didático e o *topos* do professor e dos alunos. O *topos*, diz respeito à toda a situação que envolve a tarefa proposta pelo professor e que sugere uma solução para o exercício pertence ao *topos*¹³⁰ do aluno.

¹²⁹ Indicamos para futuras pesquisa, porque, encontramos indícios nas nossas análises que os sujeitos mantinham uma relação estreita com a “instituição livro didático”. Em vários momentos percebemos que as atividades oferecidas aos alunos tinham a mesma ideia defendida pelo livro didático adotado pelo escola. Assim, achamos prudente investigações futuras sobre o contrato didático, o contrato institucional, a conformidade e não-conformidade do sujeito com o livro didático.

¹³⁰ No segundo capítulo referente ao contrato didático existe mais informações sobre esse termo.

Essa situação nos faz lembrar o fenômeno “contrato didático”. Assim, acreditamos que existe uma relação forte do contrato didático com o *topos* do professor e do aluno, que não foi possível contemplar na nossa investigação.

Por fim, apontamos a necessidade de um maior aprofundamento nas pesquisas sobre a relação que existe entre o contrato institucional e o contrato didático, pois essa tese encontrou dificuldade em encontrar, tanto na literatura nacional quanto na internacional, pesquisas ou escritos que permitissem aprofundar nessa relação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMOULOUD, S. AG. **Fundamentos da Didática da Matemática** / Saddo Ag Almouloud.- Curitiba: Ed. UFPR. 2007.
- ANDRÉ, R. C. M. **Investigando a Transição da Linguagem Natural para a Linguagem Algébrica**: o equacionamento de enunciados de problemas à luz dos registros de representação semiótica. Dissertação de Mestrado, UFPE, 2007.
- ANDRÉ, M. E. D.A.. **Etnografia da Prática Escolar** / Marli Eiza Dalmozo Afonso de André – Campinas, SP: Papirus, 2007a.
- ANDRADE, V. L. V. X.. **Os Conceitos de Medidas de Tendências Central e de Dispersão na Formação Estatística no Ensino Médio no Brasil e na França**. Abordagem Exploratória no Quadro da Teoria Antropológica do Didático e da Teoria dos Campos Conceituais. Tese de Doutorado. Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2013.
- ANDRINI, A.. **Praticando Matemática**. / Álvaro Andrini, Maria José Vasconcelos. – 3. Ed. Renovada. – São Paulo: Editora do Brasil, 2012.
- ARAÚJO, A. J. **O ensino de álgebra no Brasil e na França**: estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático. 2009. 290f. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.
- ALMEIDA, F. E. L.. **O Contrato Didático na Passagem da Linguagem Natural para a Linguagem Algébrica e na Resolução da Equação na 7º Série do Ensino Fundamental**. Dissertação de Mestrado, UFRPE, 2009.
- ALMEIDA, F. E. L.; BRITO LIMA, A. P. A.. **O Contrato Didático na Passagem da Linguagem Natural para a Linguagem Algébrica e na Resolução da Equação na 7º Série do Ensino Fundamental**. [In] Zetetiké / Universidade Estadual de Campinas, V. 21, n. 39, 2013.
- BESSA DE MENEZES, M.. **Praxeologia do Professor e do Aluno: uma análise das diferenças no ensino de equações do segundo grau**. Tese de Doutorado, UFPE, 2010.
- BESSOT, Annie.. **Une Introduction à la théorie des situations didactiques**. Master “Mathématiques, Informatiques” de Grenoble 2003-2004. N° 91. Oct. 2003.
- _____. **Une Étude du Contrat Didactique a Propos de la Racine Carrée**. DidaTech, Université Joseph Fourier, Grenoble, Le Thi Hoai an de Hanoi 1, Vietnan, 2004.
- BROUSSEAU, G.. **Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques**, Recherches en didactique des mathématiques, v. 7/2, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1986.
- _____. **Théorisation des phénomènes d’enseignement des Mathématiques**. Thèse d’état. Université de Bordeaux 1, 1986a.
- _____. **Les “effets” du “contrat didactique. 2^{ème} école d’été de didactique des mathématiques**. Olivet, 1983.

_____. **Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage mathématiques.** Troisième École d'été de didactique des Mathématiques. Orléans, 1984.

_____. **Le contrat didactique: le milieu.** *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.9, 3, 1988. p. 309-336.

_____. **Fundamentos e Métodos da Didática da Matemática.** In: Didáctica das Matemáticas /Brun, J... [et al]; Direção: Jean Brun. Trad: Maria José Figueredo, Lisboa: Instituto Piaget, 1996b.

_____. **Os diferentes papéis do professor.** In: Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas / Cecilia Parra [et. al.]; Porto Alegre: Arte médicas, 1996a.

_____. **Théories des situations didactiques,** Conférence de Montreal, 1997. http://math.unipa.it/~grim/brousseau_montreal_03.pdf

_____. **Théorie des Situations Didactiques.** La Pensée Sauvage, Grenoble, 1998.

_____. **Entre la théorie anthropologique du didactique et la théorie des situations didactiques en mathématiques. Questions et perspectives.** In: Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) / Luiza Ruiz Higuera... et. al.; Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007.

_____. **Introdução ao Estudo da Teoria das Situações Didáticas: Conteúdos e Metodos de Ensino / Guy Brousseau; Apresentação de Benedito Antonio da Silva; Consultoria Técnica de José Carlos Miguel; [Tradução Camila Boga].**— São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, G.; PÈRES, J.. **Le Cas Gaël.** Bordeaux: Université de Bordeaux I, Irem, 1981.

BOSCH, M.; GASCÓN, J.. **Organiser l'étude. 2. Theories & Empiries.** In J.-L. Dorier et al. (Eds.), Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques. Grenoble, France: La Pensée sauvage, 2002a.

_____. **Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria.** In: M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89-113). Santander: SEIEM, 2009.

_____. **25 años de transposición didáctica.** In: Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) / L. Ruiz-Higuera... et. al.; Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007b.

_____. **La miséria del "generalismo pedagógico" ante el problema de la formación del profesorado.** Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) / L. Ruiz-Higuera... et. al.; Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007a.

_____. **Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria.** In: M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89-113). Santander: SEIEM, 2009.

BARROS, J. P. P.. **Constituição de “Sentidos” e “Subjetividades”**: aproximações entre Vygostky e Bakhtin. [In] ECOS – Estudos Contemporâneos da Subjetividade. Vol. 1, nº 2, 2012.

BOYER, C. B.. **História da Matemática**. 2º edição – tradução: Elza F. Gomide, Editora: Editora Edgard Blücher, 1996.

BRITO MENEZES, A.P.A.. **Contrato Didático e Transposição Didática**: Inter-Relações entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação á Álgebra na 6º Série do Ensino Fundamental. Tese de Doutorado, UFPE, 2006.

BRITO LIMA, A.P.A.; ALMEIDA, F.E.L.. **O Contrato Didático na Sala de Aula de Matemática**: Negociações na Introdução a Álgebra na 7ª Série do Ensino Fundamental. [In] Pesquisas em Fenômenos Didáticos: Alguns Cenários /Org. Anna Paula Avelar de Brito Lima ... [et. al.]. – Recife: EDUFRPE, 2010.

BRUN, J.. **Didáctica das Matemáticas** /Brun, J...[et al]; Direção: Jean Brun. Trad: Maria José Figueredo, Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

BITTAR, M.. **Uma proposta para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica de professores de Matemática**. EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v. 6, p. 1-20, 2015.

BOOTH, L.. **Dificuldades das Crianças que se Iniciam em Álgebra**. In: As Ideias da Álgebra / Organizadores F. Coxford. Alberto P. Shulte: traduzido por Hygino H. Domingues, - São Paulo: Atual, 1995.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental,- Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p.

BORDET, D.. **Transposition didactique: une tentative d'èclaircissement**. [In] DEES, nº 110, dezembro, 1997.

CARAÇA, B. de J.. **Conceitos Fundamentais da Álgebra**. 3ª Ed. Lisboa: Gravidia – Publicações, 2000.

CÂMARA DOS SANTOS, M.. **La rapport au savoir de l'eiseignant de mathématique em situation didactique**: une appoche par l'analyse de son discours. Tese de Doutorado, Université Paris-X, 1995.

_____. **Algumas Concepções Sobre O Ensino-Aprendizagem de Matemática**. Educação Matemática Educação, Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Ano.9, N°12, 2002.

_____. **Desenvolvimento do Pensamento Algebrico**: o que estamos fazendo em nossas salas de aulas? X ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvados – BA, 2010.

CALADO, J. J. G.. **Compêndio de Álgebra**. 2ª Ed. Lisboa: Livraria Popular de Francisco Franco, 1956.

CUNHA, A. J. da. **Elementos da Álgebra**. 12ª Ed. Lisboa: Livraria Antônio Maria Pereira, 1914.

CHARNAY, R.. **Aprendendo (com) a Resolução de Problemas**. [In] Didáctica da Matemática: Reflexões Psicopedagogicas / cecília parra, irma sariz... [et al]; trad. juan acuña liorens. porto alegre: artes medicas, 1996.

CHEVALLARD, Y.. **Conceitos Fundamentais da Didática: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica.** In: Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas / Cecilia Parra [et. al.]; Porto Alegre: Arte Médicas, 1996.

_____. **La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné,** Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985.

_____. **El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico.** Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol 19, nº 2, 1999.

_____. **Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques.** In : Maury, S. & Caillot, M. (éds), Rapport au savoir et didactiques, Éditions Fabert, Paris, 2003, p. 81-104.

_____. **Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique.** In: Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) / L. Ruiz-Higueras... et. al.; Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007.

_____. **La transposición didáctica: del saber sábio al saber enseñado.** Buenos Aires: Aique, 1991.

_____. **Aspectos problemáticos de la formación docente.** XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación em didáctica de las matemáticas, Huesca, 2001. [Http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm](http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm)

_____. **Organiser l'řtude. Structures & fonctions.** Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Éds), Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques (pp. 3-22). Grenoble, France: La Pensée sauvage, 2002.

_____. **Improvisaciones cruzadas sobre lo didáctico, lo antropológico y el oficio de investigador en TAD.** Universidad de provenza, 2011. http://www.chevallard.free.fr/spip/spip/IMGpdf/YC_2001_-_Osca.pdf

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J.. **Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem.** Trad. Dayse... Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

CRUZ, E. S.. **A noção de variável em livros didáticos de ensino fundamental: um estudo sob a ótica da organização praxeológica.** Mestrado em Educação Matemática, PUC – SP, 2005.

D'AMORE, B.. **Elementos de Didática da Matemática** / Bruno D'Amore; [tradução Maria Cristina Bonomi] São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

_____. **Epistemologia, Didática da Matemática e Práticas de Ensino.** Trad. Giovanni Giuseppe Nicosia e Jeanine Soares, Revista: Bolema, Rio Claro (SP), Ano 20, nº 28, 2007a. pp.179 a 205.

DELGADO, T. A. S.. **Lo Matemático En El Diseño y Analisis de Organizaciones Didácticas: Los Sistemas de Numeración y La Medida de Magnitudes.** Memorial para optar al grado de Doctor, ISBN: 978-84-669-2891-5, Madrid, 2006.

D'AMBROZIO, U.. **Educação Matemática: da teoria à prática.** – 14° ed – Campinas SP: Papirus, 1996.

- DA ROCHA FALCÃO, J.T. **A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas.** In: Schliemann, A.D. e outros. Estudos em Psicologia da Educação Matemática. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1997. p. 85- 107.
- FILOY; ROJANO. **From an arithmetical to an algebraic thought.** Proceedings of the Sixth Annual Meeting of PME-NA (pp. 51-56). Madison: University of Wisconsin, 1984.
- FIORENTINI, D. **Investigação em Educação Matemática: Percursos Teóricos e Metodológicos /** Dario Fiorentini, Sérgio Lorenzato. - 8. Ed. Rev. – Campinas-Sp: Autores Associados, 2009.
- GASCÓN, J.. **La revolución brousseauiana como razón de ser del grupo Didáctica de las Matemáticas como Disciplinas Científica.** AIEM. Avances de Investigación em Educacion Matemática - recebido em el 9 de Noviembre de 2012; aceptado el 1 Febrero de 2013) – Nº 3, 2013.
- GÁLVEZ, G.. **A didática da matemática.** [In] Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas / Cecilia Parra... [et. al.]; Porto Alegre: Arte médicas, 1996.
- GODINO, J. D.; FONT, V; CONTRERAS, A.; WILHELMI, M. R.. **Articulación de marcos teóricos em didáctica de las matemáticas.** In: Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) / L. Ruiz-Higueras... et. al.; Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007.
- GUELLI, O. **Equação: o idioma da álgebra.** Contando História da Matemática. Ed. 11. São Paulo: editora ática, 2005.
- GUELLI, O. **História da Equação do 2º grau.** Contando História da Matemática. Ed. 11. São Paulo: Editora Ática, 2004.
- GIOVANNI, J. R.. **A Conquista da Matemática /** Giovanni, Castrucci, Giovanni Jr.. – Ed. Renov. – São Paulo: FTD, 2007.
- HIGUERAS, L. R.; GARCÍA, F. J.. **Análisis de Las Praxeologias Didácticas: Implicaciones en La Formación de Maestros.** Aportaciones de La Teoría Antropológica de Lo Didáctico: un Panorama de La Tad. Org. Mariana Bosch, Josep Gascón, Michèle Artaud, Chevallard, et. al.. Bellaterra (Barcelona), Firt Edition: November, 2011.
- HENRY, M.. **Didactique des Mathématiques: sensibilizations à la didactique em vue de la formation initiale dès enseignants de mathématiques.** Laboratoire de Mathématiques – IREM, Besaçon, 1991.
- JONNAERT, P.; BORHT, C.. **Criar Condições Para Aprender: O Sócio Construtivismo na Formação de Professores/**Philippe Jonnaert e Cécile Vander Borght; Trad. Fátima Murad. – Porto Alegre: Artmed Editora, 2002.
- JONNAERT, P.. **Dévolution versus contre-dévolution! Un tandem incontournable pour le contrat didactique.** In: RAISKY, Claude... Au-delà des didactiques, le didactique:débats autour de concepts fédérateur. Belgium: De Boeck & Larcier S.A. 1996.
- _____. **À Propos Du Contrat Didactique!** In: Cahiers de Recherche en Éducation. Vol. 1, Nº 2, Pp. 195-234. Éditions du Crp, Sherbrooke, 1994.

- KIERAN, C.. **Duas abordagens diferentes entre os participantes em álgebra.** In: As Ideias da Álgebra. Organizadores: F. Coxford. Alberto P. Shulte: traduzido por Hygino H. Domingues, - São Paulo: Atual, 1995.
- LOCHHEAD, J.; MESTRE, J. P.. **Das Palavras à Álgebra: corrigindo concepções erradas.** In: As ideias da álgebra. Organizadores: F. Coxford. Alberto P. Shulte: Traduzido Por Hygino H. Domingues, - São Paulo: Atual, 1995.
- LINS, R.C. E GIMENEZ, J.. **Perspectiva em Aritmética e Álgebra para o Século XXI.** Campinas, SP: Papyrus, 1997.
- LINS LESSA, M.M.. **Aprender álgebra em sala de aula: contribuição de uma seqüência didática.** Tese de Doutorado não-publicada. Recife: UFPE, 2005.
- LEE, L.. **An Initiation Into Algebraic Culture Through Generalization Activities.** In: Bednarz, N.; Kieran, C. & Lee, L. (Eds.). Approaches to Algebra: Perspectives of Research and Teaching. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1995. P. 87-106.
- LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A.. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas.** São Paulo, E.P.U., 1986. 99p.
- LOCHHEAD, J.; MESTRE, J. P. **Das Palavras à Álgebra: corrigindo concepções erradas / as idéias da álgebra.** Organizadores: F. Coxford. Alberto P. Shulte: Traduzido por Hygino H. Domingues, - São Paulo: Atual, 1995.
- MARGOLINAS, C.. **Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'analyse de situations d'enseignement.** In: R. Noirfalise (Eds) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques conférence, Actes de l'Université d'Été, La Rochelle, Juillet 1998, ed. IREM Clermont-Ferrand, 1998. pp. 3-16
- MENEZES, D. L. de. **Abecedário da Álgebra.** 2ª Ed. São Paulo: Livraria Nobel, 1969.
- MIGUEL, A.. **História na Educação Matemática: propostas e desafios / Antônio Miguel, Maria Ângela Miorim. – 1 ed., 1 reimp. – Belo Horizonte: Autêntica, 2004. 200 p.**
- PARRA, V. E.; OTERO, M. R.. **Praxeologias Didácticas em la Universidad y el fenómeno del “encierro”:** un estudio de caso relativo al limite y continuidad de funciones. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico: un panorama de la TAD. Org. Mariana Bosch, Josep Gascón, Michèle Artaud, Chevallard, et. al.. Bellaterra (Barcelona), Firt edition: November, 2011.
- PERNAMBUCO. **Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco: Matemática.** Secretária de Educação, Recife: SE, 2008.
- _____. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco: Matemática.** Secretária de Educação, Recife: SE, 2012.
- PONTE, J. P. **As equações nos manuais escolares.** Revista Brasileira de História da Matemática, 2004. P. 149-170.
- PONTE, J. P. et. al.. **Equações do 2º grau do fim do século XIX ao início do século XXI: uma análise de sete manuais.** Revista: Quadrante, vol. XXI, nº 1, 2007.

RAMOS DE ALMEIDA, J.. **Níveis de Desenvolvimento do Pensamento Algébrico:** em busca de um modelo para os problemas de partilha de quantidade. XII ENEM: Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016.

RAMOS DE ALMEIDA, J.; CÂMARA DOS SANTOS. M.. **Pensamento Algébrico e Formação Inicial de Professores de Matemática.** [In] em teia: Revista em Educação Matemática e Tecnologia Iberoamericana – vol. 5, nº 2, 2014.

ROSSINI, R.. **Saberes Docentes sobre o Tema de Função:** uma investigação das praxeologias. Tese de Doutorado em Educação Matemática, Puc - SP, 2006.

RODRÍGUEZ, E.; BOSCH, M.; GASCÓN, J.. **Los Recorridos de Estudio e Investigación en la Reformulación Didáctica del Problema de la Metacognición.** In: Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Tad) / L. Ruiz-Higueras... et. al.; Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas** / Tatiana Roque. – Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SARRAZY, B.. **Le contrat didactique.** Revue française de pédagogie. nº 112, 1995. p. 85-118.

_____. **Questions à la théorie anthropologique du didactique du point de vue de la théorie des situations et de L'anthropologie wittgensteinienne.** In: Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) / L. Ruiz-Higueras... et. al.; Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007.

SCHUBAUER-LEONI, M.L.. **Le contrat didactique dans une approche psychosociale des situations d'enseignement.** Interactions Didactiques, 1988. p. 63-75.

SESSA, C.. **Iniciação ao Estudo da Álgebra:** origens e perspectivas / Carmen Sessa; Tradução Damian Kraus. – São Paulo: Edições SM, 2009.

SILVA, B. A. **Contrato Didático / Educação Matemática uma Nova Introdução** / Anna Franchi... et al; org. Silvia Dias Alcântara Machado – 3. ed. Revista. – São Paulo: EDUC, 2008.

SILVA, M. J. F.. **Investigando Saberes de Professores do Ensino Fundamental com Enfoque em Números Fracionários para Quinta Série.** Tese de Doutorado, PUC – SP, 2005.

TRAJANO, A.. **Álgebra Elementar.** 19ª Ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1943.

USISKIN, Z.. **Concepções sobre a álgebra da escola média e utilização das variáveis.** In: As Idéias da Álgebra. Organizadores: F. Coxford. Alberto P. Shulte: traduzido por Hygino H. Domingues, - São Paulo: Atual, 1995.

VERGNAUD, G.; CORTES, A.. **Introducing Algebra to "Low-level" Eighth and Nineth graders.** Proceedings of the Xth International Conference of Psychology of Mathematics Education, London, 1986. p. 319-324.