

Leonardo Henrique Silva Fernandes

# **Limiarização de Retornos Para Quantificação de Riscos em Mercados Financeiros**

Recife -PE

Fevereiro de 2018



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO – UFRPE  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA

## **Limiarização de Retornos Para Quantificação de Riscos em Mercados Financeiros**

Tese julgada adequada para obtenção do título de Doutor em Biometria e Estatística Aplicada defendida e aprovada por unanimidade 28/02/2018 pela comissão examinadora.

Área de concentração: Biometria e Estatística Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Tiago Alessandro Espínola Ferreira

Coorientadores: Prof. Dr. Emerson Alexandre de Oliveira Lima e Prof. Dr. Paulo Salgado Gomes de Mattos Neto

Recife -PE

Fevereiro de 2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE  
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

F363L      Fernandes, Leonardo Henrique Silva  
              Limiarização de retornos para quantificação de riscos em  
              mercados financeiros / Leonardo Henrique Silva Fernandes. – 2018.  
              146 f. : il.

              Orientador: Tiago Alessandro Espínola Ferreira.  
              Coorientador: Emerson Alexandre Lima de Oliveira.  
              Tese (Doutorado) – Universidade Federal Rural de  
              Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Biometria e  
              Estatística Aplicada, Recife, BR-PE, 2018.  
              Inclui referências.

              1 Estimativa do risco 2. Índice de mercado acionário  
              3. Econofísica e eventos extremos I. Ferreira, Tiago Alessandro  
              Espínola, orient. II. Oliveira, Emerson Alexandre Lima de, coorient.  
              III. Título

CDD 519.5

Leonardo Henrique Silva Fernandes

## **Limiarização de Retornos Para Quantificação de Riscos em Mercados Financeiros**

Tese julgada adequada para obtenção do título de Doutor em Biometria e Estatística Aplicada defendida e aprovada por unanimidade 28/02/2018 pela comissão examinadora.

---

**Prof. Dr. Tiago Alessandro Espínola Ferreira**  
Orientador

---

**Prof. Dr. Moacyr Cunha Filho**  
Membro Interno

---

**Prof. Dr. Emerson Alexandre de Oliveira Lima**  
Membro Externo

---

**Prof. Dr. Francisco de Sousa Ramos**  
Membro Externo

---

**Prof. Dr. Pedro Hugo de Figueirêdo**  
Membro Externo

Recife -PE  
Fevereiro de 2018



*Devoto este trabalho ao meu bom Deus, por ter me dado o conforto nos momentos mais adversos. À minha família, pelas contínuas orações e por ser meu pilar de sustentação. Ao meu orientador, por ter guerreado incessantemente para livrar-me de todo mal ao longo desta trajetória.*

# Agradecimentos

À Santíssima Trindade por ter me dado energia, força, coragem e principalmente amparo nos momentos críticos.

Aos meus pais Cleyton Luiz Galamba Fernandes e Maria José Silva Fernandes, pelo amor, dedicação e repasse de valores morais. Por terem devotado suas vidas para que tivesse acesso a uma educação de qualidade e, conseqüentemente, a uma vida melhor e por terem, muitas vezes deixado seus sonhos de lado para realizarem os meus.

Ao meu filho, José Pedro Vieira Fernandes, por ser meu universo, grande amigo fiel e leal. Não importa se o momento é auspicioso ou sinistro ele foi, é e será meu estabilizador.

A meu amor, Arilâny Santos Parente, que foi o foco luminoso que me orientou e guiou-me durante momentos ausentes de luz. Durante esta trajetória, houve períodos turbulentos e ela carinhosamente me beijava e com suas palavras amenas e doces me acalmava. Em relação ao amor como sentimento, antes dela vivia no limbo e hoje estou em evolução para o nirvana.

Aos meus orientadores, Prof. Dr. Tiago Alessandro Espínola Ferreira e Prof. Dr. Emerson Alexandre de Oliveira Lima, por terem confiado em mim e dado a oportunidade de evoluir em termos acadêmicos e principalmente como ser humano. A dívida de gratidão que tenho como eles transcende o real e está além de minhas faculdades.

Ao Prof. Dr. Cícero Carlos Ramos de Brito e ao Prof. Dr. Paulo Renato Alves Firmino, pela disponibilidade e sugestões para melhoria deste trabalho.

Ao Prof. Breno da Costa Lira, pelo repasse de valores como resiliência e disciplina.

Aos amigos, Felipe Alberto, Fernando Henrique, Diego Tiago, Neilson Lima, Rodrigo Monteiro e Urbanno Leite, pelo coleguismo, camaradagem e questionamentos que colaboram efetivamente na construção de uma identidade híbrida, porém coesa e resiliente.

E a todas as pessoas que apesar de não ter citado os nomes, contribuíram direta ou indiretamente no decorrer deste trabalho.

*“Ainda que eu andasse pelo vale da sombra da morte, não temeria mal algum, porque tu  
estás comigo.”*

*(Bíblia Sagrada, Salmos 23, 4)*

*“Demore o tempo que for para decidir o que você quer da vida, e depois que decidir não  
recue ante nenhum pretexto, porque o mundo tentará te dissuadir.”*

*(Friedrich Nietzsche)*

# Resumo

Neste trabalho é proposta uma metodologia que quantifica o risco financeiro *a posteriori*. Para tanto, foram utilizadas séries temporais financeiras dos preços de fechamento de 12 representativos índices de mercado, com granularidade diária ao longo de 16 anos, indo de 02 de Janeiro de 1995 até 30 de Dezembro de 2010, com um total de 3691 observações. Através da obtenção das séries dos retornos, foi possível verificar o intervalo de variação da volatilidade dos índices de mercado acionários, na janela de tempo analisada, definindo-se um intervalo típico de flutuação. Nestas flutuações tanto existem perdas como ganhos, sendo as perdas reais definidas como o retorno abaixo de um certo limiar e os ganhos reais como os retornos acima deste mesmo limiar. Portanto, este limiar pode ser compreendido como o custo do mercado. Nesta visão, em tal limiar as perdas reais e os ganhos reais estão em paridade, ou seja, o lucro é zero e reflete o equilíbrio do processo. Desta forma, o risco instantâneo foi definido como a diferença entre perdas e ganhos reais para um dado valor de custo do mercado. Além disto, dadas as distribuições acumuladas das perdas e ganhos reais, foi desenvolvido uma forma funcional para o ajustes de tais distribuições. Assim, foi possível calcular o risco esperado para intervalos de custo do mercado.

**Palavras-chaves:** Estimativa do risco, índice de mercado acionário, econofísica, eventos extremos.

# Abstract

In this work is proposed a methodology which quantifies *a posteriori* the financial risk. Therefore, it was used financial time series of the daily closing prices of 12 representative stock market indices, with daily granularity over 16 years period January 02, 1995 to December 30, 2010. From the series of returns, it was possible to verify the range of market volatility in the time window analyzed, defining a typical fluctuation interval. In these fluctuations both losses and gains exist, the real losses being defined as the return below a certain threshold and the real gains as the returns above this same threshold. Therefore, this threshold can be understood as the market's cost. In this view, at such a threshold the real losses and the real gains are in equality, that is, the profit is zero and reflects the balance of the process. Thus, risk was defined as the difference between real losses and real gains for a given market cost value. In addition, given the cumulative distributions of real losses and real gains it was developed a functional form for the adjustments of such distributions. Thus, it was possible to calculate the expected risk for market cost intervals.

**Key-words:** Risk estimation, stock market indices, econophysics, extreme events.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – (a) mostra a série temporal com granularidade diária dos preços do índice de mercado acionário CAC 40 contemplando o período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010 e (b) mostra a série temporal com granularidade mensal da temperatura da superfície marítima do Nino 1+2 contemplando o período de vai de 02 de Janeiro de 1982 a 30 de Dezembro de 2010. . . . .	27
Figura 2 – (a) Retrata os retornos padronizados do DJIA, (b) Ilustra o ajuste da distribuição normal a frequência do retornos padronizados. É perceptível que a distribuição normal não ajustou bem o índice de mercado acionário, uma vez que eventos extremos fogem à normalidade, (c) Apresenta a cauda esquerda do histograma e (d) Contempla a cauda direita do histograma. . . . .	32
Figura 3 – A linha tracejada preta representa o custo do mercado para o DJIA. A região acima do custo do mercado limitada pela linha tracejada verde, que denota o retorno máximo, compreende os ganhos reais e a região abaixo do custo do mercado limitada pela linha tracejada vermelha denota as perdas reais. . . . .	39
Figura 4 – Mostra a fda da frequência dos ganhos reais dado o custo do mercado.	40
Figura 5 – Mostra a fda da frequência das perdas reais dado o custo do mercado. .	41
Figura 6 – Mostra o equilíbrio do processo de ganhos reais e perdas reais no mercado financeiro. . . . .	43
Figura 7 – Mostra as características peculiares da evolução temporal das séries dos preços de fechamento do CAC 40 e DJIA. . . . .	45
Figura 8 – As séries de retornos do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa e Nasdaq e S&P 500. . . . .	46
Figura 9 – A mediana para todas as séries de retornos padronizados é zero, os <i>outliers</i> são os pontos em vermelho que estão abaixo do limite inferior e acima do limite superior. A quantidade de <i>outliers</i> é um indicativo que eventos extremos nos índices de mercados investigados são mais recorrentes que eventos gaussianos . . . . .	48
Figura 10 – As observações acima da linha preta são os retornos positivos (ganhos) e as abaixo são os retornos negativos (perdas) . . . . .	49
Figura 11 – A frequência dos ganhos e perdas reais considerando os custos do mercado para cada janela temporal. . . . .	52

Figura 12 – A linha tracejada preta representa o custo do mercado. A região acima do custo do mercado limitada pela linha tracejada verde, que denota o retorno máximo, compreende os ganhos reais e a região abaixo do custo de mercado limitada pela linha tracejada vermelha denota as perdas reais. . . . .	54
Figura 13 – Os índices que estão no cluster em azul são os menos arriscados, enquanto que os que estão no cluster em vermelho são os mais arriscados.	55
Figura 14 – A frequência das perdas reais para um dado custo de mercado ajustadas a uma distribuição acumulada. . . . .	56
Figura 15 – Os índices que estão no cluster em azul são os menos arriscados, enquanto que os que estão no cluster em vermelho são os mais arriscados.	57
Figura 16 – A frequência das perdas reais para um dado custo de mercado ajustadas a uma distribuição acumulada. . . . .	58
Figura 17 – Risco instantâneo do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500. . . . .	60
Figura 18 – O cruzamento da curva da perda real com a curva do ganho real indica o ponto onde há paridade entre perda real e ganho real para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 é evidenciado no cruzamento entre as curvas das perdas reais em verde e as curvas do ganho real em preto. . . . .	62
Figura 19 – As séries de retornos do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa e Nasdaq e S&P 500 para as 8 janelas temporais de 2 anos. . . . .	66
Figura 20 – A evolução temporal para todas as séries se desenvolve ao redor de uma média constante sendo representada pela linha em negrito. As observações acima da linha preta são os retornos positivos (ganhos) e as abaixo são os retornos negativos (perdas) . . . . .	67
Figura 21 – A frequência dos ganhos e perdas reais dado os custos do mercado para cada janela temporal, contemplando 8 janelas temporais de 2 anos. . . . .	69
Figura 22 – A linha tracejada preta representa o custo do mercado. A região acima do custo do mercado limitada pela linha tracejada verde, que denota o retorno máximo, compreende os ganhos reais e a região abaixo do custo de mercado limitada pela linha tracejada vermelha denota as perdas reais. . . . .	71
Figura 23 – Os índices que estão no cluster em azul são os menos arriscados, enquanto que os que estão no cluster em vermelho são os mais arriscados.	72
Figura 24 – A frequência dos ganhos reais para um dado custo de mercado ajustadas a uma distribuição acumulada. . . . .	73
Figura 25 – Os índices que estão no cluster em azul são os menos arriscados, enquanto que os que estão no cluster em vermelho são os mais arriscados.	74

Figura 26 – A frequência das perdas reais para um dado custo de mercado ajustadas a uma distribuição acumulada. . . . .	75
Figura 27 – Risco instantâneo do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500. . . . .	77
Figura 28 – A junção da curva da perda real com a curva do ganho real indica o ponto onde há paridade entre perda real e ganho real para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 é evidenciado no cruzamento entre as curvas das perdas reais em verde e as curvas do ganho real em preto. . . . .	79
Figura 29 – As séries de retornos do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa e Nasdaq e S&P 500. . . . .	82
Figura 30 – A evolução temporal para todas as séries de retornos se desenvolve ao redor de uma média constante sendo representada pela linha em negrito. As observações acima da linha preta são os retornos positivos (ganhos) e as abaixo são os retornos negativos (perdas) . . . . .	83
Figura 31 – A frequência dos ganhos e perdas reais considerando os custos do mercado para cada janela temporal. . . . .	85
Figura 32 – A linha tracejada preta representa o custo do mercado. A região acima do custo do mercado limitada pela linha tracejada verde, que denota o retorno máximo, compreende os ganhos reais e a região abaixo do custo de mercado limitada pela linha tracejada vermelha denota as perdas reais. . . . .	87
Figura 33 – Os índices que estão no cluster em azul são os menos arriscados, enquanto que os que estão no cluster em vermelho são os mais arriscados. . . . .	88
Figura 34 – A frequência dos ganhos reais para um dado custo de mercado ajustadas a uma distribuição acumulada. . . . .	89
Figura 35 – Os índices que estão no cluster em azul são os menos arriscados, enquanto que os que estão no cluster em vermelho são os mais arriscados. . . . .	90
Figura 36 – A frequência das perdas reais para um dado custo de mercado ajustadas a uma distribuição acumulada. . . . .	91
Figura 37 – Risco instantâneo do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500. . . . .	93
Figura 38 – A junção da curva da perda real com a curva do ganho real indica o ponto onde há paridade entre perda real e ganho real para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 é evidenciado no cruzamento entre as curvas das perdas reais em verde e as curvas do ganho real em preto. . . . .	95
Figura 39 – As séries de retornos do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa e Nasdaq e S&P 500. . . . .	98



Figura 40 – A evolução temporal para todas as séries se desenvolve ao redor de uma média constante sendo representada pela linha em negrito. As observações acima da linha preta são os retornos positivos (ganhos) e as abaixo são os retornos negativos (perdas) . . . . .	99
Figura 41 – A frequência dos ganhos e perdas reais considerando os custos do mercado para cada janela temporal. . . . .	101
Figura 42 – A linha tracejada preta representa o custo do mercado. A região acima do custo do mercado limitada pela linha tracejada verde, que denota o retorno máximo, compreende os ganhos reais e a região abaixo do custo de mercado limitada pela linha tracejada vermelha denota as perdas reais. . . . .	103
Figura 43 – Os índices que estão no cluster em azul são os menos arriscados, enquanto que os que estão no cluster em vermelho são os mais arriscados.	104
Figura 44 – A frequência dos ganhos reais para um dado custo de mercado ajustadas a uma distribuição acumulada. . . . .	105
Figura 45 – Os índices que estão no cluster em azul são os menos arriscados, enquanto que os que estão no cluster em vermelho são os mais arriscados.	106
Figura 46 – A frequência das perdas reais para um dado custo de mercado ajustadas a uma distribuição acumulada. . . . .	107
Figura 47 – Risco instantâneo do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500. . . . .	109
Figura 48 – A junção da curva da perda real com a curva do ganho real indica o ponto onde há paridade entre perda real e ganho real para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 é evidenciado no cruzamento entre as curvas das perdas reais em verde e as curvas do ganho real em preto. . . . .	111
Figura 49 – As séries de retornos do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa e Nasdaq e S&P 500. . . . .	113
Figura 50 – A evolução temporal para todas as séries se desenvolve ao redor de uma média constante sendo representada pela linha em negrito. As observações acima da linha preta são os retornos positivos (ganhos) e as abaixo são os retornos negativos (perdas) . . . . .	114
Figura 51 – A frequência dos ganhos e perdas reais considerando os custos do mercado para cada janela temporal. . . . .	116
Figura 52 – A linha tracejada preta representa o custo do mercado. A região acima do custo do mercado limitada pela linha tracejada verde, que denota o retorno máximo, compreende os ganhos reais e a região abaixo do custo de mercado limitada pela linha tracejada vermelha denota as perdas reais. . . . .	117

Figura 53 – Os índices que estão no cluster em azul são os menos arriscados, enquanto que os que estão no cluster em vermelho são os mais arriscados.	118
Figura 54 – A frequência dos ganhos reais para um dado custo de mercado ajustadas a uma distribuição acumulada. . . . .	120
Figura 55 – Os índices que estão no cluster em azul são os menos arriscados, enquanto que os que estão no cluster em vermelho são os mais arriscados.	121
Figura 56 – A frequência das perdas reais para um dado custo de mercado ajustadas a uma distribuição acumulada. . . . .	123
Figura 57 – Risco instantâneo do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500. . . . .	125
Figura 58 – A junção da curva da perda real com a curva do ganho real indica o ponto onde há paridade entre perda real e ganho real para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 é evidenciado no cruzamento entre as curvas das perdas reais em verde e as curvas do ganho real em preto. . . . .	127
Figura 59 – Histograma dos retornos do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 e distribuição normal ajustando a frequência dos retornos para os mesmos índices. A linha vermelha delimita a região com as piores perdas ao longo de um horizonte temporal considerando um nível de confiança de 95% contemplando as piores perdas sofridas por estes índices sendo expresso nos quantis de 5% da parte inferior da cauda da distribuição dos retornos. . . . .	129

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Quantitativo referente aos índices de mercado de ações analisados, o código de cada índice e a composição dos índices de mercado de ações.	44
Tabela 2 – Estatísticas descritas para os retornos dos índices de mercados acionários.	47
Tabela 3 – Valores referentes à variação mínima, à variação máxima e ao custo do mercado para os índices acionários . . . . .	50
Tabela 4 – Estatísticas descritas para as perdas reais dos índices de mercados acionários. . . . .	50
Tabela 5 – Estatísticas descritas para os ganhos reais dos índices de mercados acionários. . . . .	51
Tabela 6 – Valores referentes as médias, desvio padrão, limite inferior e limite superior para a frequência dos ganhos e perdas reais considerando os custos do mercado para cada janela temporal. . . . .	53
Tabela 7 – Valores dos parâmetros da distribuição acumulada que ajustou a frequência dos ganhos reais para um dado custo do mercado. . . . .	56
Tabela 8 – Valores dos parâmetros da distribuição acumulada que ajustou a frequência das perdas reais para um dado custo do mercado para os índices estudados. . . . .	58
Tabela 9 – Valores de $C_i(j)$ em termos percentuais. . . . .	59
Tabela 10 – Valores do risco esperado para os índices de mercado acionários contemplando a região de alto risco $C_i(j) \geq C_i(j)^*$ e a de baixo risco $C_i(j) \leq C_i(j)^*$ . . . . .	61
Tabela 11 – Valores do $VaR$ e os respectivos $VaR$ médios e $CVaR$ médios para os índices de mercado acionários contemplando 16 janelas temporais de 1 ano e considerando um nível de confiança de 95%. . . . .	64
Tabela 12 – Comparativo entre os valores do $VaR$ e $CVaR$ com os valores da região de baixo risco e para cada índice investigado e suas respectivas variações percentuais. . . . .	65
Tabela 13 – Valores referentes à variação mínima, à variação máxima e ao custo do mercado para os índices acionários contemplando as 8 janelas temporais de 2 anos. . . . .	68
Tabela 14 – Valores referentes a média, desvio padrão, limites inferior e limite superior para para a frequência dos ganhos e perdas reais considerando os custos do mercado para cada janela temporal. . . . .	70
Tabela 15 – Valores dos parâmetros da distribuição acumulada que ajustou a frequência dos ganhos reais para um dado custo do mercado . . . . .	73

Tabela 16 – Valores das distribuição acumulada que ajustou a frequência das perdas reais para um dado custo do mercado para os índices estudados . . . . .	75
Tabela 17 – Valores de $C_i(j)$ em termos percentuais. . . . .	76
Tabela 18 – Valores do risco esperado para os índices de mercado acionários contemplando a região de alto risco $C_i(j) \geq C_i(j)^*$ e a de baixo risco $C_i(j) \leq C_i(j)^*$ . . . . .	78
Tabela 19 – Valores do $VaR$ e os respectivos $VaR$ médios e $CVaR$ médios para os índices de mercado acionários contemplando 8 janelas temporais de 2 anos e considerando um nível de confiança de 95%. . . . .	80
Tabela 20 – Comparativo entre os valores do $VaR$ e $CVaR$ com os valores da região de baixo risco e para cada índice investigado e suas respectivas variações percentuais. . . . .	81
Tabela 21 – Valores referentes à variação mínima, à variação máxima e ao custo do mercado para os índices acionários. . . . .	84
Tabela 22 – Valores referentes a média, desvio padrão, limite inferior e limite superior para a frequência dos ganhos e perdas reais considerando os custos do mercado para cada janela temporal. . . . .	86
Tabela 23 – Valores dos parâmetros da distribuição acumulada que ajustou a frequência dos ganhos reais para um dado custo do mercado. . . . .	89
Tabela 24 – Valores das distribuição acumulada que ajustou a frequência das perdas reais para um dado custo do mercado para os índices estudados. . . . .	91
Tabela 25 – Valores de $C_i(j)$ em termos percentuais. . . . .	92
Tabela 26 – Valores do risco esperado para os índices de mercado acionários contemplando a região de alto risco $C_i(j) \geq C_i(j)^*$ e a de baixo risco $C_i(j) \leq C_i(j)^*$ . . . . .	94
Tabela 27 – Valores do $VaR$ e os respectivos $VaR$ médios e $CVaR$ médios para os índices de mercado acionários contemplando 4 janelas temporais de 4 anos e considerando um nível de confiança de 95%. . . . .	96
Tabela 28 – Comparativo entre os valores do $VaR$ e $CVaR$ com os valores da região de baixo risco e para cada índice investigado e suas respectivas variações percentuais. . . . .	97
Tabela 29 – Valores referentes à variação mínima, à variação máxima e ao custo do mercado para os índices acionários. . . . .	100
Tabela 30 – Valores referente a média, desvio padrão, limite inferior e limite superior para a frequência dos ganhos e perdas reais considerando os custos do mercado para cada janela temporal. . . . .	102
Tabela 31 – Valores dos parâmetros da distribuição acumulada que ajustou a frequência dos ganhos reais para um dado custo do mercado. . . . .	105

Tabela 32 – Valores das distribuição acumulada que ajustou a frequência das perdas reais para um dado custo do mercado para os índices estudados. . . . .	107
Tabela 33 – Valores de $C_i(j)$ em termos percentuais. . . . .	108
Tabela 34 – Valores do risco esperado para os índices de mercado acionários contemplando a região de alto risco $C_i(j) \geq C_i(j)^*$ e a de baixo risco $C_i(j) \leq C_i(j)^*$ . . . . .	110
Tabela 35 – Valores do $VaR$ e os respectivos $VaR$ médios e $CVaR$ médios para os índices de mercado acionários contemplando 2 janelas temporais de 8 anos e considerando um nível de confiança de 95%. . . . .	112
Tabela 36 – Comparativo entre os valores do $VaR$ e $CVaR$ com os valores da região de baixo risco e para cada índice investigado e suas respectivas variações percentuais. . . . .	112
Tabela 37 – Valores referentes à variação mínima, à variação máxima e ao custo do mercado para os índices acionários. . . . .	115
Tabela 38 – Valores dos parâmetros da distribuição acumulada que ajustou a frequência dos ganhos reais para um dado custo do mercado. . . . .	119
Tabela 39 – Valores das distribuição acumulada que ajustou a frequência das perdas reais para um dado custo do mercado para os índices estudados. . . . .	122
Tabela 40 – Valores de $C_i(j)$ em termos percentuais. . . . .	124
Tabela 41 – Valores do risco esperado para os índices de mercado acionários contemplando a região de alto risco $C_i(j) \geq C_i(j)^*$ e a de baixo risco $C_i(j) \leq C_i(j)^*$ . . . . .	126
Tabela 42 – Comparativo entre os valores do $VaR$ , $CVaR$ e da região de baixo risco e para cada índice investigado e suas respectivas variações percentuais. . . . .	128
Tabela 43 – Quadro resumo que contempla a evolução temporal do risco financeiro quantificados através do $VaR$ , $CVaR$ e região baixo risco. A escala 1 representa as 16 Janelas temporais de 1 ano, a escala 2 aborda as 8 Janelas temporais de 2 anos, a escala 3 contempla as 4 Janelas de anos anos, a escala 4 denota as 2 Janelas temporais de 8 anos e a escala 5 representa 1 Janela temporal de 16 anos. . . . .	131

# Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

fdp	Função densidade de probabilidade
fda	Função distribuição acumulada
iid	Independente e identicamente distribuído
ITA	Interoccurrence Time Approach
Var	Variância
VaR	Value at Risk

# Lista de símbolos

$a$	Constante de ajuste do ganho real
$b$	Constante de ajuste da perda real
$A$	Constante normalização da q-exponencial
$\beta$	Parâmetro de forma da q-exponencial
$\delta_i(t)$	Desvio padrão da série de retorno do índice $i$ no tempo $t$
$C_i(j)$	Custo do mercado do índice $i$ no tempo $t$
$C_i(j)^*$	Custo do mercado do índice $i$ no tempo $t$ em termos percentuais
$\mu$	Função média
$\mu_i(t)$	Média condicional do índice $i$ no tempo $t$
$\varrho_i(t)$	Ganho real do índice $i$ no tempo $t$
$\vartheta_i(t)$	Perda real do índice $i$ no tempo $t$
$R_i(t)$	Valor da série de retorno do índice $i$ no tempo $t$
$r_i(t)$	Valor da série de retorno normalizado do índice $i$ no tempo $t$
$\lambda_i(t)$	Risco esperado do índice $i$ no tempo $t$
$q$	Parâmetro da q-exponencial que denota a entropia de Tsallis
$-Q$	Limiar negativo
$R_Q$	Tempo médio entre ocorrências
$\sigma^2$	Função variância
$\sigma_i(t)$	Variância condicional do índice $i$ no tempo $t$
$\tau_i$	Conjunto de intervalos temporais recorrentes
$P_Q(\tau)$	Distribuição dos tempos médios recorrentes entre perdas abaixo de um limiar negativo
$x_0$	Potencial químico do ganho real
$x'_0$	Potencial químico da perda real

$Z_t$	Série temporal
$\Delta Z(t)$	Processo de diferenciação de primeira ordem
$\Delta^2 Z(t)$	Processo de diferenciação de segunda ordem
$\Delta^n Z(t)$	Processo de diferenciação de n-ésima ordem
$Vmin_i(t)$	Valor da amplitude mínima do índice $i$ no tempo $t$
$Vmax_i(t)$	Valor da amplitude máxima do índice $i$ no tempo $t$



# Sumário

1	<b>INTRODUÇÃO</b>	21
1.1	Motivações e Justificativas	23
1.2	Objetivos	24
1.3	Estrutura da Tese	25
2	<b>REVISÃO DA LITERATURA</b>	26
2.1	Séries temporais	26
2.2	Análise da Volatilidade	29
2.3	<i>Value at Risk (VaR)</i>	30
2.4	<i>Conditional Value at Risk (CVaR)</i>	33
2.5	<i>Interoccurrence Time Approach (ITA)</i>	34
3	<b>MÉTODO PROPOSTO</b>	37
3.1	Introdução	37
3.2	Metodologia	38
3.3	Base de dados	43
4	<b>RESULTADOS EXPERIMENTAIS</b>	45
4.1	16 Janelas temporais de 1 ano	45
4.2	8 Janelas temporais de 2 anos	66
4.3	4 Janelas temporais de 4 anos	82
4.4	2 Janelas temporais de 8 anos	98
4.5	1 Janela temporal de 16 anos	113
5	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	132
5.1	Trabalhos futuros	134
	<b>REFERÊNCIAS</b>	135

# 1 Introdução

Um grande número de elementos que interagem de forma não linear (KWAPIEŃ; DROŹDŹ, 2012), caracterizados por um comportamento auto-organizado (HUANG, 2015), coletivo e emergente (PAN; SINHA, 2007) e a estrutura multifractal dos registros financeiros (REN; ZHOU, 2010) contribuem para que o mercado financeiro seja analisado como um sistema adaptativo complexo (SCHEFFER et al., 2012; PREIS; MOAT; STANLEY, 2013).

Ademais, as flutuações de preços inerentes à evolução temporal deste mercado exibem propriedades associadas à complexidade como: transição de fase (KIYONO; STRUZZIK; YAMAMOTO, 2006), volatilidade multifractal (BOUCHAUD; POTTERS; MEYER, 2000), leis de potências em retornos e volumes logarítmicos (GABAIX et al., 2003), e fenômenos de caudas pesadas (TAVARES; CURTO; TAVARES, 2008).

Estas propriedades atraíram (YANG; WANG; DENG, 2015; LU; WANG, 2016) o interesse de pesquisadores que vêm colaborando com o provimento de subsídios empíricos que contribuem efetivamente para promoção de uma percepção mais meticulosa e precisa sobre fenômenos sócio-econômicos.

Assim, na década de 90, houve a formalização de um novo ramo da Física denominado Econofísica (MANTEGNA; STANLEY, 1999; LILLO; FARMER; MANTEGNA, 2003). A Econofísica emergiu para apoiar a investigação dos mecanismos dinâmicos dos sistemas sócio-econômicos tendo por base a mecânica estatística, modelagem matemática e computacional para propiciar uma melhor compreensão dos complexos desafios sociais e problemas econômicos através da identificação de Leis Universais (STANLEY et al., 2006; SCHEFFER et al., 2009; LUDESCHER; TSALLIS; BUNDE, 2011).

Neste sentido, houve a proposição de métodos quantitativos que promoveram uma grande evolução na investigação e modelagem de sistemas econômicos e sociais bem como de suas propriedades estatísticas (BARABASI, 2005; BOGACHEV; EICHNER; BUNDE, 2007; PATZELT; PAWELZIK, 2013).

Modelos macroeconômicos com fundamentação microeconômica e associados a uma percepção Econofísica, foram propostos para analisar a fenomenologia inerente aos mecanismos básicos referentes a distribuição da renda e da riqueza (DRĂGULESCU; YAKOVENKO, 2001; CHATTERJEE; YARLAGADDA; CHAKRABARTI, 2007). Também foram investigados os efeitos da propensão a poupar (PATRIARCA et al., 2007; CHATTERJEE; CHAKRABARTI, 2007), o fluxo monetário (PATRIARCA; CHAKRABORTI; KASKI, 2004) e o crescimento econômico (MAKSIMOVIĆ; JOVIĆ; JOVANOVIĆ, 2017; SOKOLOV-MLADENOVIĆ; MILOVANČEVIĆ; MLADENOVIĆ, 2017).

Ao contemplar o mercado financeiro, esta gama de métodos quantitativos tem dado ênfase a tópicos relevantes como a previsibilidade de eventos extremos (BOGACHEV; BUNDE, 2011; FILIMONOV; SORNETTE, 2012), estimativa de risco (BOGACHEV; BUNDE, 2009; REN; ZHOU, 2010), simulação de mercado (RABERTO et al., 2001; FANCHIOTTI; CANAL; MARTINEZ, 2002), análise de séries temporais (FIRMINO; NETO; FERREIRA, 2014; FIRMINO; NETO; FERREIRA, 2015) e seleção de portfólio (PARANJAPE-VODITEL; DESHPANDE, 2013; LI; HOI, 2014).

Outro tema recorrente é a análise da volatilidade (MATIA; ASHKENAZY; STANLEY, 2003; YANG; WANG; DENG, 2015) e as técnicas mais recentes aplicadas à modelagem dela estão atreladas a sistemas complexos (PAN; SINHA, 2007; HUANG, 2015), conceitos de renormalização (MANDELBROT, 1999; ZAMPARO et al., 2013) e multifractalidade (AUSLOOS; IVANOVA, 2002; XIONG; SHANG, 2016).

Elevações repentinas da volatilidade decorrentes de eventos extremos promovem alterações rigorosas nos mecanismos dinâmicos das séries dos preços dos índices de mercado acionários, ações, derivativos e demais ativos financeiros (CONSTANTIN; SARMA, 2005; MU et al., 2010; MASTROMATTEO; TOTH; BOUCHAUD, 2014).

Portanto, os eventos extremos são elementos chave para compreender a dinâmica dos sistemas complexos (ALTMANN; KANTZ, 2005; BIONDO et al., 2013) e investigá-los pode ser o elo para promover um maior nível de conhecimento sobre a origem das crises no mercado financeiro que é um sistema que envolve elevada complexidade (KWAPIEŃ; DROŹDŹ, 2012).

Estas macro flutuações são caracterizadas por distribuições não gaussianas (GOPIKRISHNAN et al., 1999; CONT; BOUCHAUD, 2000; STANLEY; PLEROU; GABAIX, 2008) que podem surgir abruptamente, em questão de minutos, ou se desenvolver em escalas de tempo mais longas (BOTTA et al., 2015) e afetam a vida das pessoas em todo o mundo (FARMER; JOSHI, 2002; SORNETTE, 2009).

Elas promovem uma elevação do ruído e da tendência caótica (PEINKE; BÖTTCHER; BARTH, 2004) nas séries dos preços (DIEBOLD; HAHN; TAY, 1999; KRAWIECKI; HOLYST; HELBING, 2002) que implica em uma alta na frequência das volatilidades nas séries de retornos (REN; ZHOU, 2010; GONTIS et al., 2016) e que torna a estimativa do risco uma atividade ainda mais desafiadora (LUDESCHER; BUNDE, 2014).

Este trabalho investiga aspectos da fenomenologia inerente à dinâmica dos índices de mercados acionários como um sistema físico complexo e propõe um modelo que quantifica riscos financeiros que será devidamente formalizado no Capítulo 3.

## 1.1 Motivações e Justificativas

O sistema financeiro é constituído por um conjunto de instituições concentradas nos bancos, os não bancos e o mercado financeiro que é formado pelo mercado de títulos, monetário, acionário, cambial e os derivativos (ROUBINI; BILODEAU, 2008).

A principal função do sistema financeiro é intermediar a transferência de recursos excedentes dos agentes superavitários (poupadores) para os deficitários (mutuários) para suprir suas necessidades de consumo e investimento (ALLEN; GALE, 2000; ALLEN; SANTOMERO, 2001; KLEMKOSKY, 2013).

A partir da década de 90, em decorrência dos *crashes* sofridos por instituições financeiras, mais especificamente: *Metallgesellschaft* (1993), *Orange County* (1994), *Barings* (1994) e *Daiwa* (1995)(JORION, 1997), foi manifestada a real necessidade relacionada ao desenvolvimento e implementação de uma tecnologia que tivesse a capacidade de mensurar e gerenciar riscos financeiros.

Assim, o *Value at Risk* (*VaR*) (WIPLINGER, 2007) foi um modelo desenvolvido com base em técnicas estatísticas para suprir esta necessidade explícita. O *VaR* é a avaliação da pior perda de valor para um *portfolio* dadas as condições normais do mercado em um horizonte alvo, considerando um determinado nível de probabilidade (JORION, 1997; GONG; WENG, 2016).

O *VaR* tornou-se a medida de risco mais utilizada pelas instituições financeiras (CHEN et al., 2012; SPIERDIJK, 2016; HUANG; NORTH; ZEWOTIR, 2017), pois é um método desenvolvido com base na análise de quantis e de fácil compreensão (BELLES-SAMPERA; GUILLÉN; SANTOLINO, 2014).

Por exemplo, os requisitos de capital para as companhias de seguros que operam na União Europeia, tal como prescrito pela Diretiva Solvência II (ELING; SCHMEISER; SCHMIT, 2007; STEFFEN, 2008), baseiam-se no *VaR* de 99,5% da carteira de ativos e passivos mensurados em um horizonte temporal de um ano (SANDSTRÖM, 2016). De forma análoga, o *VaR* desempenha um papel nos enquadramentos da Basiléia II e III para os bancos. Para maiores detalhes ver (GORDY; HOWELLS, 2006; SLOVIK; COURNÈDE, 2011).

Todavia, o *VaR* não teve a capacidade de prever a Crise do *Subprime*. De acordo com *Federal Deposit Insurance Corporation* (FDIC), apenas nos EUA, em 2008, 380 instituições financeiras declaram falência e conseqüentemente, foi evidenciada uma crise econômica de magnitude mundial.

A economia convergiu em um ciclo retracionista devido a uma diminuição da oferta de capital, elevação dos custos de capital e redução das oportunidades de investimentos (LEVINE, 2005; PATRO; QI; SUN, 2013) o que acarretou em flutuações macroeconômicas

extremas (HERZOG, 2015; ACEMOGLU; AKCIGIT; KERR, 2016).

Os eventos catastróficos causados pela Crise do *Subprime* colocou em questionamento a capacidade do *VaR* e das demais medidas de riscos vigentes de prever com acuracidade (CHEN et al., 2012) flutuações inerentes ao mercado financeiro, principalmente quando este é atingido por eventos extremos (*crashes* e bolhas financeiras).

De fato, a má previsão dos métodos utilizados para gerenciar o risco colaborou na geração de turbulências ao mercado financeiro, uma vez que seus agentes tomavam decisões equivocadas (ŞENER; BARONYAN; MENGÜTÜRK, 2012).

Na realidade, a cerne problemática relacionada ao *VaR* é que ele não quantifica riscos financeiros, pois apenas fornece um limite aceitável para perda a um determinado nível de probabilidade estando o mercado em condições normais, ou seja, sem poder preditivo para estimar o risco quando ocorre a incidência de eventos extremos.

Destaca-se que os efeitos negativos gerados pelos eventos extremos não ficam restritos ao mercado financeiro (BAUR, 2012; GIGLIO; KELLY; PRUITT, 2016), pois como o setor financeiro exerce um papel fundamental para financiar o lado real da economia (LEVINE, 2005; DEMIRGÜÇ-KUNT; LEVINE, 2008) verifica-se a destruição de grande valor econômico (BATTISTON et al., 2012; BOTTA et al., 2015).

A metodologia mais usual para modelar eventos extremos é aplicar a teoria do valor extremo - por exemplo, ver discussões em (CHRISTOFFERSEN; DIEBOLD; SCHUERMANN, 1998; NEFTCI, 2000) para casos univariados, e (TAWN, 1990; POON; ROCKINGER; TAWN, 2004; JOE; XU, 2016) para casos multivariados, entre muitos outros.

Entretanto, modelos manejáveis para observações transversais e extremas dependentes são ainda escassos e as aplicações de modelos financeiros extremos para avaliações de riscos e avaliações de portfólio durante a recessão e o tempo de expansão ainda são uma tarefa difícil (ZHANG; HUANG, 2006).

## 1.2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo principal investigar a dinâmica do mercado financeiro segundo a ótica da Econofísica para propor um modelo que quantifique riscos financeiros *a posteriori* com a finalidade de garantir sistemas financeiros mais confiáveis e proteger o público em geral das instabilidades oriundas deste agregado econômico.

Para alcançar este objetivo principal foram delineados os seguintes objetivos secundários:

(i) Definir novos conceitos que estão diretamente relacionados ao custo do mercado, perda real e ganho real;

- (ii) Apresentar um quadro teórico que fornece explicações para modelar perda real e o ganho real do investidor dado o custo do mercado e contemplando eventos extremos;
- (iii) Propor uma nova medida de risco; e
- (iv) Comparar a medida de risco proposta com o *VaR* e com o *CVaR*.

### 1.3 Estrutura da Tese

Este trabalho está estruturado da seguinte maneira: o Capítulo 2 apresenta uma revisão da literatura; a Seção 2.1 contempla uma fundamentação teórica sobre séries temporais; a Seção 2.2 vislumbra a análise da volatilidade no mercado financeiro; a Seção 2.3 apresenta o *Value at Risk (VaR)*; a Seção 2.4 abrange a descrição do *Conditional Value at Risk (CVaR)* e a Seção 2.5 detalha a descrição da *Interoccurrence Time Approach (ITA)*. O Capítulo 3 abrange a devida descrição do método proposto; a Seção 3.1 introduz o modelo proposto; a Seção 3.2 descreve a metodologia e a Seção 3.3 a base de dados. O Capítulo 4 demonstra os resultados experimentais gerados pela aplicação empírica do método proposto e compara com o *Value at Risk (VaR)* e com o *Conditional Value at Risk (CVaR)*; a Seção 4.1 contempla os resultados relativos as 16 janelas temporais de 1 ano; a Seção 4.2 apresenta os resultados relativos as 8 janelas temporais de 2 anos; a Seção 4.3 demonstra os resultados relativos as 4 janelas temporais de 4 ano; a Seção 4.4 aprecia os resultados relativos as 2 janelas temporais de 8 anos e a Seção 4.5 contempla os resultados relativos a 1 janela temporal de 16 anos para os 12 índices. Por fim, o Capítulo 5 expõe as considerações finais sobre o modelo proposto e a Seção 5.1 apresenta as sugestões para trabalhos futuros.

## 2 Revisão da Literatura

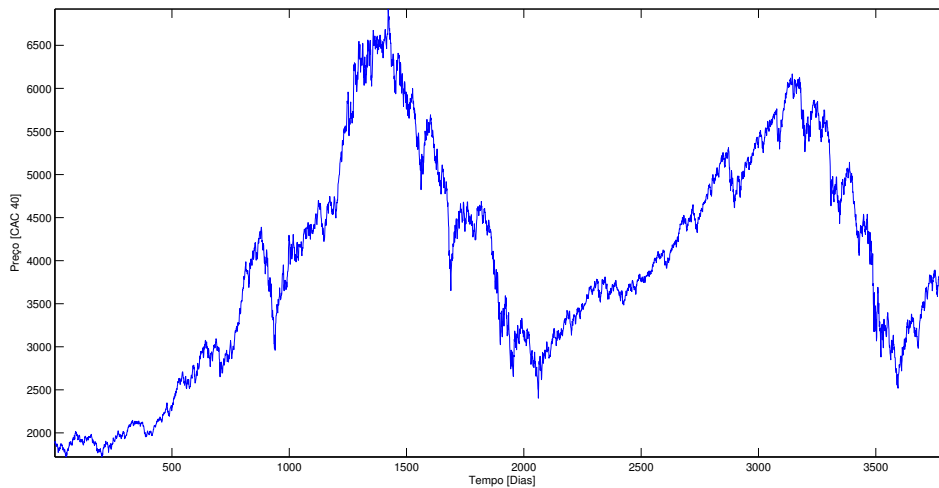
Este capítulo contempla uma fundamentação teórica a respeito dos métodos mais usuais para estimação do risco contemplando a dinâmica dos mercados financeiros disponíveis na literatura.

### 2.1 Séries temporais

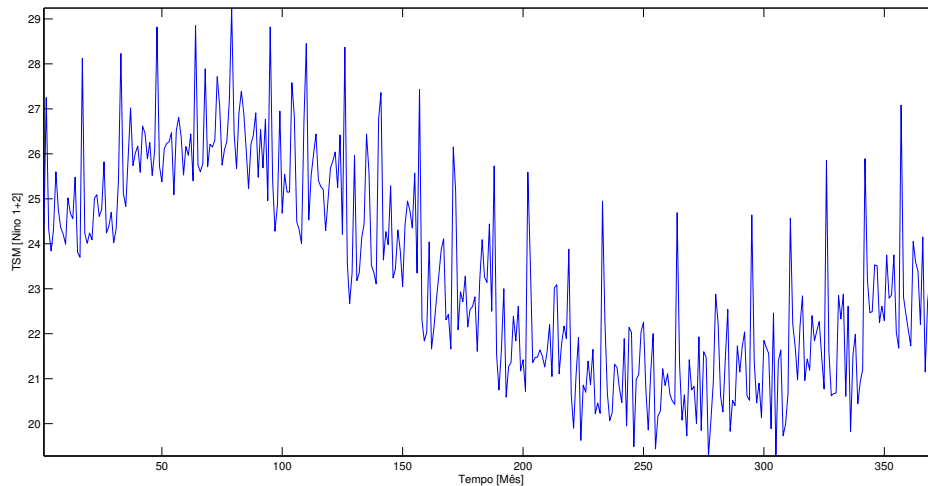
A complexa dinâmica de diversos sistemas do mundo real, tais como: sistema climático (GANOPOLSKI; RAHMSTORF, 2002; PIERINI, 2012), mercado financeiro (PREIS; PAUL; SCHNEIDER, 2008; NIU; WANG, 2015), sistema cardiovascular (RICHMAN; MOORMAN, 2000; COSTA; GOLDBERGER; PENG, 2002), eventos sísmicos (MANSOUR et al., 2009; MORALES-ESTEBAN et al., 2010; FLORIDO et al., 2015) e diversos sistemas de engenharia aplicados (PARK; IKEDA, 2009; MENCK et al., 2014) podem ser representados por medidas ao longo do domínio do tempo, ou seja, séries temporais.

Uma série temporal é uma sequência de observações ou eventos ordenados ao longo do tempo (BOX et al., 2015) e que, em decorrência de sua usual natureza estocástica, configura-se como uma eficiente fonte de dados para prever a evolução futura da série ou apenas descrever o comportamento da série (verificação da existência de tendências, ciclos e variações sazonais).

Desta forma, a análise de séries temporais tornou-se uma ferramenta poderosa para pesquisadores das mais diversas áreas (QIU et al., 2016; YE et al., 2017). No entanto, a análise de pontos ou observações em séries temporais é uma tarefa não trivial (KWAPIEŃ; DROŹDŹ, 2012). A Figura 1 retrata exemplos de séries temporais.



(a) CAC 40



(b) Nino 1+2

Figura 1 – (a) mostra a série temporal com granularidade diária dos preços do índice de mercado acionário CAC 40 contemplando o período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010 e (b) mostra a série temporal com granularidade mensal da temperatura da superfície marítima do Nino 1+2 contemplando o período de vai de 02 de Janeiro de 1982 a 30 de Dezembro de 2010.

A formalização matemática de uma série temporal é fornecida por,

$$Z_t = \{z_t \in \mathbb{R} | t = 1, 2, \dots, n\}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.1)$$

em que,  $Z_t$  representa um conjunto de observações de um determinado fenômeno organizadas em intervalos regulares de tempo,  $t$  representa o índice cronológico (o tempo) e  $n$  denota o número total de observações.



Ao estudar uma série temporal, uma suposição bastante usual é que a série é regida por um processo estocástico estacionário, ou seja, a evolução temporal da série se desenvolve ao redor de uma média constante, refletindo alguma forma de equilíbrio estável. (MORETTIN; TOLOI, 1987; GUJARATI, 2009).

Na prática, a grande maioria das séries temporais apresentam alguma forma de não estacionaridade, como exemplo: as séries temporais financeiras apresentam tendências, sendo o caso mais simples aquele em que a série flutua ao redor de uma reta com inclinação positiva ou negativa (tendência linear) (MORETTIN; TOLOI, 1987; TSAY, 2005; GUJARATI, 2009).

Uma série é considerada ser regida por um processo estocástico fortemente estacionário se todos os momentos estatísticos são constantes. Entretanto, quando apenas os momentos de primeira e segunda ordem são constantes é dito que a série é regida por um processo de segunda ordem ou fracamente estacionário, assim tem-se,

$$E[Z_t] = \mu \quad (2.2)$$

em que,  $\mu$  é a média de  $Z_t$ ,  $Z_t$  representa a variável aleatória no tempo  $t$

e

$$Var[Z_t] = \sigma^2 \quad (2.3)$$

em que,  $\sigma^2$  é a variância.

A maioria dos procedimentos estatísticos empregados na análise de séries temporais assumem a suposição que as séries são estacionárias. Para tanto, realiza-se uma transformação nos dados originais, caso as séries não apresentem a característica de estacionaridade (MORETTIN; TOLOI, 1987; TSAY, 2005). A transformação mais usual consiste em realizar diferenças sucessivas da série original para eliminar a sazonalidade e a tendência, para que ela possa se tornar uma série estacionária. A primeira diferença de  $Z_t$  é dada por,

$$\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1} \quad (2.4)$$

em que,  $Z_t$  é a observação atual no tempo  $t$  e  $Z_{t-1}$  é a observação anterior no tempo  $t - 1$ .

Então, a segunda diferença é,

$$\nabla^2 Z_t = \nabla [\nabla Z_t] = \nabla [Z_t - Z(t - 1)] \quad (2.5)$$

em que,  $\nabla^2 Z_t$  é a segunda diferença de  $Z(t)$ . Ou seja,

$$\nabla^2 Z_t = Z_t - 2Z(t - 1) + Z(t + 2) \quad (2.6)$$

De modo geral, a  $n$ -ésima diferença de  $Z(t)$  é,

$$\nabla^n Z_t = \nabla [\nabla^{n-1} Z_t] \quad (2.7)$$

em que,  $\nabla^n Z_t$  é a  $n$ -ésima diferença de  $Z(t)$ .

Embora teoricamente seja possível existir a necessidade de se aplicar uma quantidade arbitrária de diferenciações para tornar uma série não estacionária em estacionária, na prática é suficiente tomar uma ou duas diferenças.

Assim, caso não seja atingido o comportamento estacionário com duas diferenciações, muito provavelmente esta transformação de diferenças não irá conseguir estacionarizar a série, sendo necessário a aplicação de alguma transformação não linear, como as transformações de Box-Cox (BOX et al., 2015).

## 2.2 Análise da Volatilidade

A volatilidade é uma medida utilizada como uma representante utilizada para mensurar a flutuação inerente à complexa evolução temporal do mercado financeiro (WANG et al., 2009; CHABI-YO, 2012; CORTE; RAMADORAI; SARNO, 2016) que contempla muitos fatores de influência e muitos tipos de incertezas (YANG; WANG; DENG, 2015).

Todavia, a volatilidade é uma medida estatística de dispersão dos retornos de uma dada ação ou índice de mercado acionário em relação a um valor médio (MANTEGNA; STANLEY, 1999; LILLO; MANTEGNA, 2000; ASAI; MCALEER; MEDEIROS, 2012). Os modelos mais populares para mensurar a volatilidade estão baseados na estimação da variância condicional dadas as observações passadas dos retornos dos ativos financeiros, ao passo que a observação atual é negligenciada (BREITUNG; HAFNER, 2016).

Para compreender os modelos aplicados à análise da volatilidade em índices de mercados acionários ou ações, em uma perspectiva mais adequada (TSAY, 2005), vislumbra-se a média por,

$$\mu_i(t) = E(R_i(t)|F_i(t-1)) \quad (2.8)$$

em que,  $\mu_i(t)$  é a média condicional do índice ou ação  $i$  no tempo  $t$ ,  $R_i(t)$  é a série do retorno do índice ou ação  $i$  no tempo  $t$  e  $F_i(t-1)$  representa a observação do índice ou ação  $i$  no tempo  $t-1$ .

A variância por,

$$\sigma_i^2(t) = Var(R_i(t)|F_i(t-1)) \quad (2.9)$$

em que,  $\sigma_i^2(t)$  é a variância condicional do índice ou ação  $i$  no tempo  $t$ .

Visto que a dinâmica no mercado financeiro é regida pela interação entre o risco, retorno e incerteza. Investidores profissionais só realizarão seus investimentos quando definirem suas expectativas de retorno fornecidas pelo risco associado a esta operação assumindo um determinado nível de incerteza relacionado ao processo de tomada de decisão.

Entretanto, as decisões de investimento, por vezes, se desviam do padrão de racionalidade influenciada pela emoção e, quando isso acontece, há tendência de que os investidores aceitem riscos mais elevados (ODEAN, 1998; HIRSHLEIFER, 2001; KUHNEN; KNUTSON, 2011).

Inicialmente, a imprevisibilidade das motivações humanas (AKERLOF; SHILLER, 2009) foi definida como “espíritos de animais” (MAYNARD, 1936). Entretanto, este conceito passou por um processo de atenuação, agora denominado “exuberância irracional” (SHILLER, 2000) o qual é aplicado a uma possível causa das sobrevalorizações do mercado.

Estas sobrevalorizações do mercado estão relacionadas inclusive a questões fisiológicas, mais especificamente ao aumento de hormônios endógenos, uma vez que eles exercem forte influência para elevar o risco (SMITH et al., 2014). O cotidiano relacionado à operação no mercado financeiro é algo estressante o que propicia uma elevação da cortisona e testosterona, que respectivamente implicam em uma propensão maior em assumir riscos e uma elevação do otimismo em relação ao futuro dos preços (CUEVA et al., 2015).

Desta forma, a estimação do risco (BOTTA et al., 2015) é um grande desafio para o investidor (LUDESCHER; BUNDE, 2014), já que o mercado financeiro é um sistema que apresenta uma dinâmica complexa multifractal e com memória não linear (CALVET; FISHER, 2002; BOGACHEV; BUNDE, 2011; WANG et al., 2013).

Neste contexto, quantificar o risco com precisão pode promover fortes evidências empíricas em relação à dinâmica comportamental do mercado financeiro e contribuir para o desenvolvimento econômico sustentável, pois a subestimação do risco favorece o surgimento de eventos extremos como *crashes* e bolhas financeiras e a superestimação causa ineficiência na alocação de recursos financeiros (BORYSOV; BALATSKY, 2014).

## 2.3 Value at Risk (VaR)

Nas últimas 4 décadas, a quantidade de agentes e o volume negociado no mercado financeiro cresceram de forma exponencial, houve uma sofisticação dos produtos financeiros (KIM; LEE, 2016) e um aumento de negociações em alta frequência (LIU; TSE, 2015), consequentemente houve uma elevação do risco de mercado.

O risco de mercado pode ser compreendido como o risco associado a uma perda

em uma posição financeira induzido por flutuações nos preços dos ativos financeiros como: ações, títulos, taxas de câmbio, commodities e derivativos (KIM; LEE, 2016).

Além disto, a desregulamentação do mercado financeiro criou uma demanda para o desenvolvimento de novos indicadores que medissem o risco destes produtos financeiros de alta complexidade. Dada esta conjuntura, foi desenvolvido o *VaR*, que se configura como uma das medidas de risco padrão mais populares (EMBRECHTS; FREY; MCNEIL, 2005).

Na prática, o *VaR* é considerado uma medida de risco sofisticada quando traçado um paralelo com as abordagens clássicas baseadas na distribuição marginal dos retornos, pois ele considera o risco um processo estocástico (FRANCQ; ZAKOĀN, 2015).

O *VaR* é definido como a perda máxima de um *portfolio* em um horizonte de tempo, considerando um determinado nível de confiança (FERMANIAN; SCAILLET, 2005; FRANCQ; ZAKOĀN, 2015). Desta forma, o *VaR* refere-se ao limite inferior de um intervalo de confiança para uma média (condicional), isto é, o pior cenário num dia típico (CHANG et al., 2015).

Ele é expresso como o quantil da cauda de distribuição dos retornos, que é o instrumento financeiro que reflete a relação entre quantidade de dinheiro ganho ou perdido por um *portfolio* em um horizonte de tempo. Assim, para modelar a série de retornos padronizados denotado por  $r_t$ , pode ser empregue a decomposição a seguir:

$$P(r_t \leq VaR_t^\alpha | F_{t-1}) = \alpha \quad (2.10)$$

em que,  $r_t$  com  $t = 1, 2, \dots, T$  representa a série de retornos padronizados,  $\alpha$  é o nível de confiança e  $F_{t-1}$  denota a informação referente ao período  $t - 1$ . A Figura 2 mostra respectivamente a série de retornos padronizados e o ajuste da frequência dos retornos padronizados à distribuição normal do DJIA.

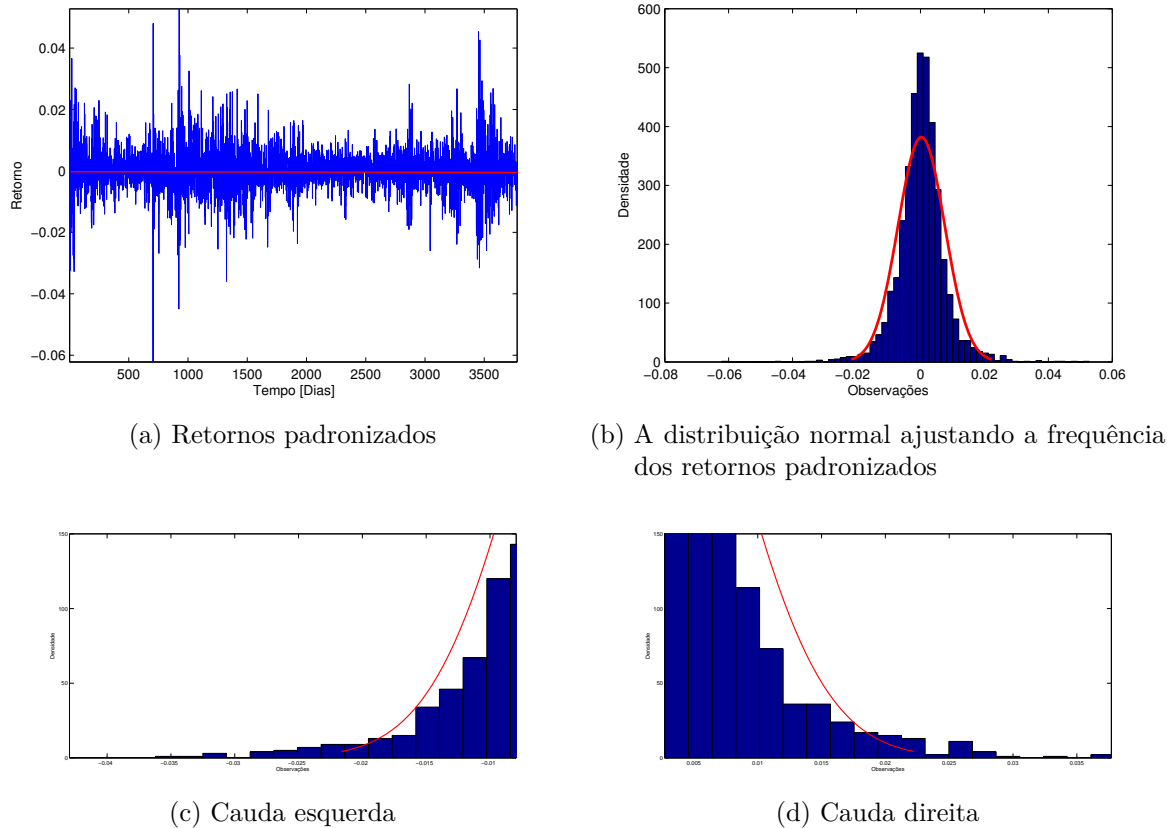


Figura 2 – (a) Retrata os retornos padronizados do DJIA, (b) Ilustra o ajuste da distribuição normal a frequência do retornos padronizados. É perceptível que a distribuição normal não ajustou bem o índice de mercado acionário, uma vez que eventos extremos fogem à normalidade, (c) Apresenta a cauda esquerda do histograma e (d) Contempla a cauda direita do histograma.

O  $VaR$  tornou-se a abordagem padrão adotada pelas instituições financeiras, não financeiras e pelos gestores de fundos de investimentos para mensurar o risco (GONZÁLEZ-RIVERA; LEE; MISHRA, 2004; SPIERDIJK, 2016), pois é um método desenvolvido com base na análise de quantis e de fácil compreensão (ŞENER; BARONYAN; MENGÜTÜRK, 2012).

Uma falha do  $VaR$  está diretamente relacionada ao fato deste modelo assumir a premissa que a distribuição dos retornos segue uma normal, porém movimentos extremos nos retornos financeiros emergem com mais frequência do que os modelos Gaussianos estimados ou seja, eles apresentam caudas pesadas (FAMA, 1965) e assimetria (AAS; HAFF, 2006).

## 2.4 Conditional Value at Risk (CVaR)

As deficiências do  $VaR$  como a falha de subaditividade (ARTZNER et al., 1999; YAMAI; YOSHIBA et al., 2002), isto é, a não captura de maneira efetiva da redução do risco ao adotar a estratégia de diversificação em uma carteira o que implica em divergência com o binômio risco x retorno.

O não fornecimento de nenhuma informação sobre a parte da cauda da distribuição além do  $VaR$  e o fato desta métrica não considerar eventos extremos (ROOTZEN; KLÜPPELBERG, 1999) implicou no desenvolvimento de um modelo mais robusto.

O *Conditional Value at Risk (CVaR)* utiliza simulação histórica e amostras empíricas de quantis ou o inverso de alguma distribuição marginal baseada em dados históricos para prever o  $VaR$  *a posteriori* (ROCKAFELLAR; URYASEV, 2002).

Neste sentido, o  $CVaR$  é definido como uma medida de risco coerente, pois considera  $\chi$  como um espaço linear de funções mensuráveis que definem as variáveis aleatórias que contemplam as perdas financeiras do espaço de probabilidade definido por  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  e  $\varphi \rightarrow \mathfrak{R}$ . Assim, as respectivas propriedades matemáticas são atendidas:

- i)  $\varphi$  deve ser monótona:  $X \leq Y \Rightarrow \varphi(Y) \leq \varphi(X), \forall X, Y \in \chi$ ;
- ii)  $\varphi$  deve ser relevante:  $X \geq 0$ , então  $\varphi(X) \leq 0, \forall X \in \chi$ ;
- iii)  $\varphi$  deve ser subaditiva:  $\varphi(X + Y) \leq \varphi(X) + \varphi(Y), \forall X \in \chi$  e  $\lambda > 0$ ;
- iv)  $\varphi$  deve ser homogênea positiva:  $\varphi(\lambda X) = \lambda \varphi(X), \forall X \in \chi$  e  $\lambda > 0$ ; e
- v)  $\varphi$  deve ser transladável:  $\varphi(X + a) = \varphi(X) + a, \forall X \in \chi$  e  $a \in \mathfrak{R}$ .

O  $CVaR$  é capaz de quantificar perigos além do  $VaR$  e, além disso, ele fornece atalhos de otimização que, por meio de técnicas de programação linear, tornam práticos muitos cálculos em larga escala que poderiam ficar fora do alcance do  $VaR$  (ROCKAFELLAR; URYASEV, 2000).

É considerável enfatizar que mesmo o  $CVaR$  corrigindo algumas falhas do  $VaR$  ele é calculado tendo por base a métrica de risco fornecida pelo  $VaR$ . Além disso, para as perdas de um *portfolio* regidas por uma distribuição normal o  $CVaR$  e o  $VaR$  são equivalentes para maiores detalhes (ROCKAFELLAR; URYASEV, 2000).

### Definição 1 $CVaR$ :

Seja  $\alpha - CVaR$  da perda associada a uma decisão  $x$  de valor  $\phi_\alpha(x) =$  média de  $\alpha$  da distribuição da cauda de  $z = f(x, y)$ , onde a distribuição em questão é uma com função de distribuição  $\Psi_\alpha(x, \cdot)$ , definida por:

$$\Psi_\alpha(x, \zeta) = \begin{cases} 0 & \zeta < \zeta_\alpha(x) \\ [\Psi(x, \zeta) - \alpha]/[1 - \alpha] & \zeta \geq \zeta_\alpha(x) \end{cases} \quad (2.11)$$

em que,  $\Psi_\alpha(x, \cdot)$  é uma função não decrescente, com  $\Psi_\alpha(x, \zeta) \rightarrow 1$  com  $\zeta \rightarrow \infty$ .

Entretanto, a avaliação do *CVaR* sofre da maldição de dimensionalidade (WANG; ZHAO, 2016) e é útil apenas para janelas temporais pequenas que contêm poucas ou quase nenhuma observações de alta frequência. Outra questão desafiadora do *CVaR* está diretamente associada a uma baixa taxa de convergência (LI; RACINE, 2007).

## 2.5 *Interoccurrence Time Approach (ITA)*

Eventos extremos podem ser compreendidos como características comportamentais peculiares dos sistemas dinâmicos complexos (MANSHOUR et al., 2016). Uma ferramenta poderosa que vem sendo utilizada para investigar a dinâmica estocástica deste fenômeno é a análise estatística dos intervalos recorrentes entre eventos extremos (REN; ZHOU, 2010; ALTMANN; KANTZ, 2005; BOGACHEV; BUNDE, 2008).

Neste sentido, a *Interoccurrence Time Approach (ITA)* é uma abordagem que vem sendo amplamente utilizada para analisar os intervalos de tempo recorrentes entre eventos extremos no mercado financeiro, pois ela permite estudar as propriedades estatísticas destes acontecimentos possibilitando utilizá-las para melhorar efetivamente a estimativa do risco (BOGACHEV; EICHNER; BUNDE, 2007; BOGACHEV; BUNDE, 2011; LUDESCHER; TSALLIS; BUNDE, 2011; LUDESCHER; BUNDE, 2014; TSALLIS, 2016; JIANG et al., 2016).

Esta abordagem apresenta a capacidade de refletir com eficácia a memória não-linear e a multifractalidade, características marcantes do mercado financeiro e que podem ser descritas por leis universais (LUDESCHER; TSALLIS; BUNDE, 2011; LUDESCHER; BUNDE, 2014; TSALLIS, 2016).

Para tanto, a *Interoccurrence Time Approach (ITA)* analisa as propriedades temporais de eventos extremos que envolve a introdução de um limiar denotado por  $Q$  no registro financeiro estudado (*e.g.*, seus retornos ou volatilidades) e analisa os intervalos temporais recorrentes entre eventos sucessivos abaixo (ou acima) deste limite (BOGACHEV; EICHNER; BUNDE, 2007; LUDESCHER; TSALLIS; BUNDE, 2011; LUDESCHER; BUNDE, 2014; SUO; WANG; LI, 2015; TSALLIS, 2016; JIANG et al., 2016; DENYS et al., 2016) para estimar o risco.

A dinâmica evolutiva do mercado financeiro pode ser caracterizada pela distribuição  $P_Q(\tau)$  dos intervalos temporais entre ocorrência  $\tau$ , entre as perdas diárias abaixo de um limiar negativo  $-Q$ , para um tempo médio fixo entre ocorrência  $R_Q$ . Para cada registro, há uma relação única entre  $Q$  e o tempo médio fixo entre ocorrências  $R_Q$  (LUDESCHER; TSALLIS; BUNDE, 2011; LUDESCHER; BUNDE, 2014; TSALLIS, 2016),

definido por,

$$\frac{1}{R_Q} = \int_{-\infty}^{-Q} D(r) dr, \quad (2.12)$$

em que,  $D(r)$  é a distribuição dos retornos.

A Eq. (2.12) reflete a taxa média da perda para um limiar  $Q$ .

Resultados empíricos obtidos pela aplicação da *ITA* na análise da dinâmica do mercado financeiro (LUDESCHER; TSALLIS; BUNDE, 2011; LUDESCHER; BUNDE, 2014; TSALLIS, 2016) mostram que para um intervalo de tempo médio fixo  $R_Q$  e um limiar negativo  $-Q$ , a distribuição  $P_Q(\tau)$  dos tempos entre ocorrências contemplando as perdas no mercado financeiro abaixo de  $-Q$  é descrita por uma  $q$ -exponencial.

Em decorrência da  $q$ -exponencial apresentar um decaimento através de uma lei de potência e caudas pesadas (BERCHER; VIGNAT, 2008; YAMADA; IGUCHI, 2008) ela está relacionada na literatura matemática como uma distribuição generalizada de Pareto ou Zipf-Mandebrot (TSALLIS et al., 2009; LUDESCHER; TSALLIS; BUNDE, 2011). A origem de  $q$ -exponencial está diretamente relacionada à mecânica estatística não extensiva (TSALLIS, 1988; TSALLIS et al., 2009), que extremiza a entropia, sendo uma possível generalização da entropia de *Boltzmann-Gibbs* (TSALLIS, 1988; TSALLIS et al., 2009; TSALLIS, 2009). A  $q$ -exponencial é dada por:

$$P_Q(\tau) = \frac{A}{[1 + (q - 1)\beta\tau]^{1/(q-1)}}, \quad (2.13)$$

em que,  $A$  é a constante de normalização,  $\beta$  e  $q$  são parâmetros que decaem levemente apenas em função de  $R_Q$ .

A função da distribuição dos tempos recorrentes  $P_Q(\tau)$  é uma técnica importante na estimativa de risco, uma vez que é diretamente relacionado à função de risco (*Hazard Function*) denotada por  $W_Q(t, \Delta t)$  para maiores informações ver (BOGACHEV; EICHNER; BUNDE, 2007; BOGACHEV; BUNDE, 2011; LUDESCHER; TSALLIS; BUNDE, 2011; LUDESCHER; BUNDE, 2014; TSALLIS, 2016).

A função risco é compreendida como a probabilidade de que pelo menos um evento abaixo de  $-Q$  ocorra no próximo intervalo de tempo  $\Delta t$  se o último evento tiver ocorrido há  $t$  dias. A função risco mostra a relação direta entre  $W_Q$  e  $P_Q\tau$  por:

$$W_Q(t, \Delta t) = \frac{\int_t^{t+\Delta t} P_Q(\tau) d\tau}{\int_t^{\infty} P_Q(\tau) d\tau}. \quad (2.14)$$

em que,  $W_Q(t, \Delta t)$  é a função risco utilizada como *proxy* para mensurar a probabilidade que um evento extremo com retorno abaixo do limiar negativo  $-Q$  ocorra no próximo intervalo de tempo  $\Delta t$  se o último evento ocorreu  $t$  passos atrás.



Desde que a fdp e a fda seguem uma  $q$ -exponencial, obtém-se a função de risco, ver (LUDESCHER; TSALLIS; BUNDE, 2011; LUDESCHER; BUNDE, 2014; TSALLIS, 2016) pelo emprego da Eq. 2.15.

$$W_Q(t, \Delta t) = \left(1 + \frac{\beta(q-1)\Delta t}{1 + \beta(q-1)t}\right)^{\frac{q-2}{q-1}}. \quad (2.15)$$

em que,  $W_Q(t, \Delta t)$  é a função risco,  $\beta$  e o parâmetro de forma e  $q$  é um parâmetro que denota a entropia de Tsallis obtido através de simulações.

A estimativa do risco fornecida pela (*Hazard Function*) foi utilizada para estimar o  $VaR$  que foi definido como a perda relativa abaixo de  $-Q$  que, em uma determinada unidade de tempo, só pode ser excedida com uma certa probabilidade remota denotada por  $p$ , para maiores informações ver (BOGACHEV; BUNDE, 2009; LUDESCHER; TSALLIS; BUNDE, 2011).

## 3 Método proposto

Este capítulo apresenta uma breve introdução do modelo proposto, formaliza uma metodologia fundamentada na modelagem da perda real e do ganho real do investidor dado o custo do mercado e contemplando eventos extremos e detalha a base de dados utilizadas neste trabalho.

### 3.1 Introdução

O mercado financeiro é um sistema econômico que apresenta alta similaridade com sistemas físicos, na medida que este agregado econômico é constituído por uma grande quantidade de agentes que apresentam uma dinâmica interativa não linear e complexa (MANTEGNA; STANLEY, 1999; YANG; WANG; DENG, 2015; LUX; ALFARANO, 2016).

Assim, teorias físicas que buscam explicar o comportamento de partículas vêm sendo utilizadas para analisar a complexidade inerente aos mecanismos dinâmicos de sistemas sócio-econômicos (PATRIARCA et al., 2007).

Neste sentido, problemas sócio-econômicos relacionados à distribuição de renda e da riqueza (DRĂGULESCU; YAKOVENKO, 2001; MOHANTY, 2006; SILVA; FIGUEIRÊDO, 2014), propensão a poupar (CHATTERJEE; CHAKRABARTI; MANNA, 2004; CHATTERJEE; CHAKRABARTI, 2007; PATRIARCA et al., 2007), fluxo monetário (CHATTERJEE; CHAKRABARTI; MANNA, 2003; PATRIARCA; CHAKRABORTI; KASKI, 2004) e o mercado financeiro (NETO et al., 2011; NETO et al., 2013) tem sido investigados.

Para analisar a dinâmica interativa entre os  $N$  agentes  $\{1, 2, \dots, N\}$  do mercado financeiro como partículas de um modelo de gás ideal (NETO et al., 2011; NETO et al., 2013), foram assumidas 2 possibilidades. A primeira é a hipótese do passeio aleatório, na qual não há interação entre as partículas. A segunda é a hipótese do passeio não aleatório (fracamente), na qual existe uma fraca interação entre partículas.

Considerando estas possibilidades, a volatilidade pode ser associada a energia termal do mercado (NETO et al., 2013), pois quando o mercado é assolado por eventos extremos há uma tendência para que ocorra uma alta na frequência na volatilidade nas séries dos retornos e se o mercado não for afligido por eventos extremos a tendência é que haja uma baixa na frequência na volatilidade das séries dos retorno. Portanto, baseado na abordagem do gás ideal a volatilidade é um indicador (termômetro) eficiente para quantificar o comportamento do mercado financeiro.

## 3.2 Metodologia

As séries de retornos representam as mudanças sofridas pelas séries dos preços (TAN et al., 2015) e apresentam um tempo de autocorrelação curto (GOPIKRISHNAN et al., 1999; LIU et al., 1999). Para obter a série de retorno, foram consideradas as séries dos preços de fechamento diário dos índices de mercados acionários e calculado a diferença logarítmica entre dois preços de fechamento para cada índice de mercado acionário fornecida por:

$$R_i(t) = \ln Z_i(t) - \ln Z_i(t - \Delta t), \quad (3.1)$$

para o  $i$ -ésimo mercado em que,  $\Delta t$  é o passo temporal, sendo aqui utilizado 1 dia,  $Z_i(t)$  é o valor do índice  $i$  no tempo  $t$  e  $Z_i(t - \Delta t)$  é o valor do índice  $i$  no tempo  $t - \Delta t = t - 1$  dia.

De forma geral, as séries de retorno  $R_i(t)$  apresentam diferentes escalas de desvio padrões, o que vem a dificultar a análise relativa entre os mesmos. Assim, para uniformizar o processo de análise, foi realizada a padronização de todas as séries de retornos estudadas, segundo a seguinte expressão,

$$r_i(t) = \frac{R_i(t)}{\delta_i(t)} \quad (3.2)$$

em que,  $\delta_i(t)$  é o desvio padrão de  $R_i(t)$ .

Tradicionalmente, o retorno positivo é definido como ganho e o negativo como perda (LUDESCHER; TSALLIS; BUNDE, 2011). Entretanto, uma distinção entre perda e perda real e ganho e ganho real deve ser formalizada.

Como todo mercado tem um custo inerente, ou seja, existe um custo dado que o dinheiro tem valor no tempo e estando parado se desvaloriza e não gera riqueza. Foi definido um custo do mercado denotado por  $C_i(j)$  para o índice  $i$  no tempo  $t$ . Na realidade, este custo do mercado representa o limiar que delinea a região de ganho e perda.

Desta forma, como parte do processo de análise proposto, é observada a quantidade de perdas e ganhos para diferentes valores de  $C_i(j)$ , sendo este variado na totalidade da amplitude de  $r_i(t)$ , de tal forma que um investidor terá perda real se o retorno obtido estiver abaixo deste custo do mercado e ganho real se estiver acima do custo do mercado. Assim, é possível definir

(i) Perda real:

$$r_i(t) < C_i(j) \quad (3.3)$$

e,

(ii) Ganho real:

$$r_i(t) \geq C_i(j) \quad (3.4)$$

em que, o sinal de igualdade deve ser entendido como o limiar de ganho.

Desta forma, é contado a quantidade de observações de  $r_i(t)$  que estejam acima de um dado  $C_i(j)$ , então tem-se a quantidade de vezes que houve os ganhos reais do processo. Ao passo que para obter as perdas reais é contado a quantidade de observações de  $r_i(t)$  que estejam abaixo de um dado  $C_i(j)$ . A Figura 3 exemplifica o custo do mercado para o DJIA, sendo este representado pela linha tracejada preta, o qual é possível verificar o ganho real (região entre as linhas tracejadas preta e verde) e a perda real (região entre as linhas tracejadas preta e vermelha).

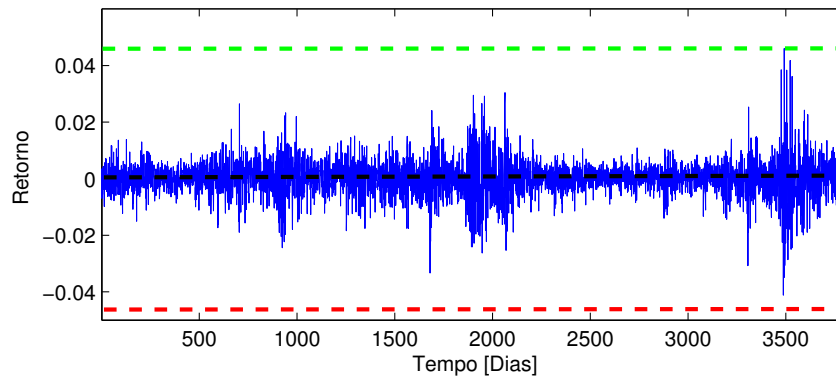


Figura 3 – A linha tracejada preta representa o custo do mercado para o DJIA. A região acima do custo do mercado limitada pela linha tracejada verde, que denota o retorno máximo, compreende os ganhos reais e a região abaixo do custo do mercado limitada pela linha tracejada vermelha denota as perdas reais.

Ao variar  $C_i(j)$  no intervalo entre os valores mínimo e máximo observados em  $r_i(t)$ , é esperado que a função distribuição acumulada (fda) da quantidade de ocorrências de ganhos reais em função do valor do custo do mercado  $C_i(j)$  tenha um comportamento típico exibido na Figura 4.

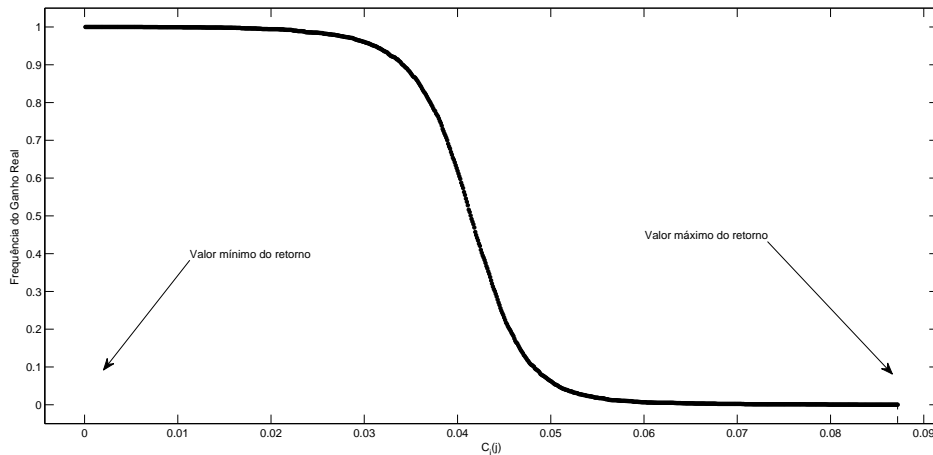


Figura 4 – Mostra a fda da frequência dos ganhos reais dado o custo do mercado.

Normalizando-se  $C_i(j)$  de tal forma que  $0 \leq C_i(j) \leq 1$ . Assim, é possível ajustar a distribuição do ganho real em relação ao custo do mercado por uma expressão do tipo,

$$\varrho_i(C_i(j)) = \frac{1}{e^{(C_i(j)-x_0)/a} + 1} \quad (3.5)$$

em que,  $\varrho_i(C_i(j))$  é a distribuição acumulada do ganho real,  $x_0$  denota o potencial químico do ganho real e mede a posição da inflexão, ou seja, quando as perdas reais se convertem em ganhos reais e  $a$  denota o produto da constante de Boltzmann e da temperatura dos ganhos reais que reflete a taxa com que a distribuição atinge valores aproximadamente constantes.

A forma funcional formalizada pela Eq. 3.5 foi utilizada em analogia a sistemas físicos quânticos constituído por  $N$  partículas idênticas de spin semi-inteiro (*férmions*) em equilíbrio a uma temperatura  $T$  (SALINAS, 1997; REIF, 2009).

A normalização realizada  $0 \leq C_i(j) \leq 1$  decorre da impossibilidade de não haver duas partículas no mesmo orbital e baseia-se no princípio da exclusão de Pauli. Assim, como  $\varrho_i(C_i(j))$  está entre 0 e 1, pode ser interpretado como a probabilidade de ganho a *posteriori*.

Especificamente, em termos econômicos o princípio da exclusão de Pauli, implica que um investidor ou agente não pode obter ganho real ou perda real em um mesmo instante de tempo. Desta forma, o ganho real e a perda real são fenômenos distintos e excludentes.

Dada a normalização do ganho real, é possível definir a perda real por,

$$\vartheta_i(C_i(j)) = 1 - \frac{1}{e^{(C_i(j)-x'_0)/b} + 1} \quad (3.6)$$

em que,  $\vartheta_i(C_i(j))$  é a distribuição acumulada da perda real,  $x'_0$  representa o potencial químico das perdas reais e  $b$  denota o produto da constante de Boltzmann e da temperatura das perdas reais.

A Figura 5 ilustra a perda real.

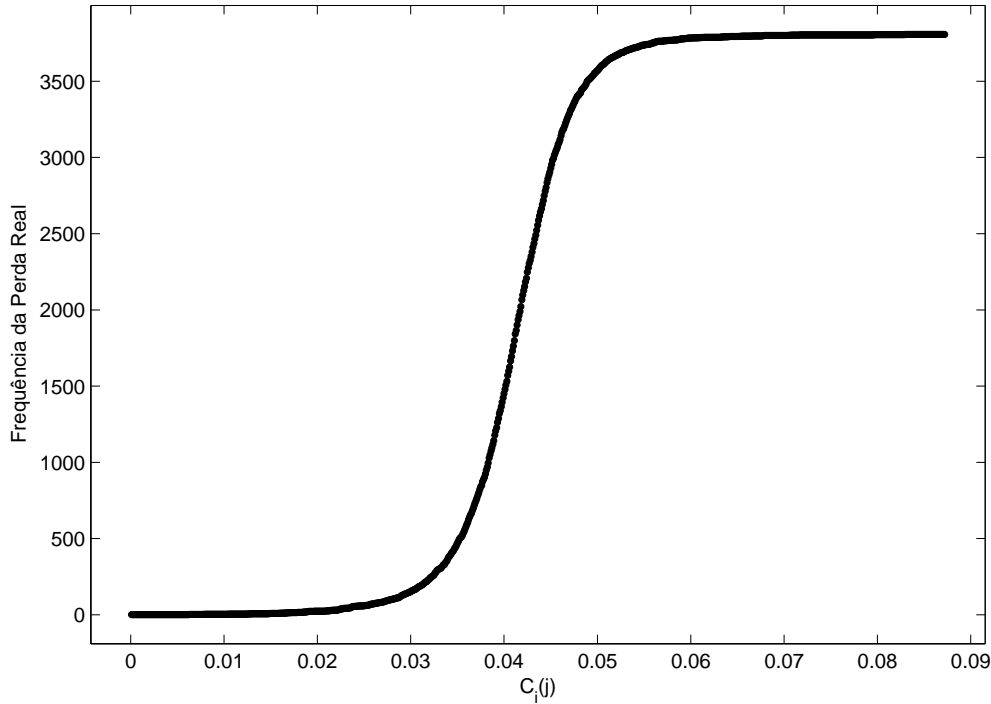


Figura 5 – Mostra a fda da frequência das perdas reais dado o custo do mercado.

Destaca-se que a existência de potenciais químicos distintos para a distribuição dos ganhos reais e das perdas reais está diretamente associado ao fato de que perdas e ganhos devem receber tratamento estatísticos distintos (KAHNEMAN; TVERSKY, 1979).

Os intervalos de confiança referentes a frequência dos ganhos e perdas reais considerando os custos do mercado  $C_i(j)$  para cada janela temporal foram estimados pelo emprego de uma t-Student,

$$\bar{x} \pm t \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (3.7)$$

em que,  $\bar{x}$  denota a média dos valores decimais de  $C_i(j)$ ,  $s$  é o desvio padrão dos valores decimais de  $C_i(j)$  e  $n$  o representa o número de observações da amostra.

Para converter os valores decimais de  $C_i(j)$  em termos percentuais aplica-se a Equação 3.8.

$$C_i(j)^* = \frac{C_i(j) - Vmin_i(t)}{Vmax_i(t) - Vmin_i(t)} * 100 \quad (3.8)$$

em que,  $C_i(j)^*$  é o custo do mercado do índice  $i$  para o tempo  $t$  em termos percentuais,  $Vmin_i(t)$  é o valor da amplitude mínima do índice  $i$  para o tempo  $t$  e  $Vmax_i(t)$  é o valor da amplitude máxima do índice  $i$  para o tempo  $t$ .

O ganho real esperado médio para a região de custo de mercado acima do ponto de equilíbrio pode ser interpretado como a probabilidade de ganho médio a *posteriori*. Assim, tem-se,

$$P(\varrho_i(t)|C_i(j) \geq C_i(j)^*) = \frac{\int_{C_i(j)^*}^B (\exp((C_i(j) - x_0)/a) + 1)^{-1} dc}{\int_A^B (\exp((C_i(j) - x_0)/a) + 1)^{-1} dc} \quad (3.9)$$

em que,  $P(\varrho_i(t)|C_i(j) \geq C_i(j)^*)$  pode ser lido como a probabilidade a *posteriori* de observar um ganho real para o custo de mercado maior ou igual a um certo valor  $C_i(j)^*$ ,  $\int_A^B (\exp((C_i(j) - x_0)/a) + 1)^{-1} dc$  é uma constante de normalização,  $A \equiv$  valor de amplitude mínima de  $r_i(t)$  e  $B \equiv$  valor de amplitude máxima de  $r_i(t)$ .

De forma equivalente, é possível escrever a probabilidade a *posteriori* de observar uma perda real para um custo do mercado maior que  $C_i(j)^*$ ,

$$P(\vartheta_i(C_i(j))|C_i(j) \geq C_i(j)^*) = \frac{\int_{C_i(\Delta t)^*}^B 1 - (\exp((C_i(j) - x'_0)/b) + 1)^{-1} dc}{\int_A^B 1 - (\exp((C_i(j) - x'_0)/b) + 1)^{-1} dc} \quad (3.10)$$

em que,  $P(\vartheta_i(\Delta t)|C_i(j) \geq C_i(j)^*)$  pode ser lido como a probabilidade a *posteriori* de observar uma perda real considerando que o custo do mercado será maior que um certo valor  $C_i(j)^*$ ,  $\int_A^B (\exp((C_i(j) - x'_0)/b) + 1)^{-1} dc$  é uma constante de normalização,  $A \equiv r_i(t)$  mínimo e  $B \equiv r_i(t)$  máximo.

É possível definir o risco instantâneo para um dado valor de custo do mercado pela simples subtração entre o valor da frequência das perdas reais e dos ganhos reais. Considerando que o risco de mercado pode ser compreendido como o risco associado a uma perda (KIM; LEE, 2016), o valor referente ao risco esperado, ou seja, a probabilidade de ocorrer uma observação que contemple uma perda real para um índice de mercado com custo maior ou igual a  $C_i(j)^*$ , pode ser formalizado pela Equação 3.10.

O equilíbrio do processo  $E_i(j)$  se dará no ponto em que o valor de  $C_i(j)^*$  reflita a igualdade entre o ganho real e a perda real, ou seja, lucro zero. A Figura 6 retrata o equilíbrio do processo.

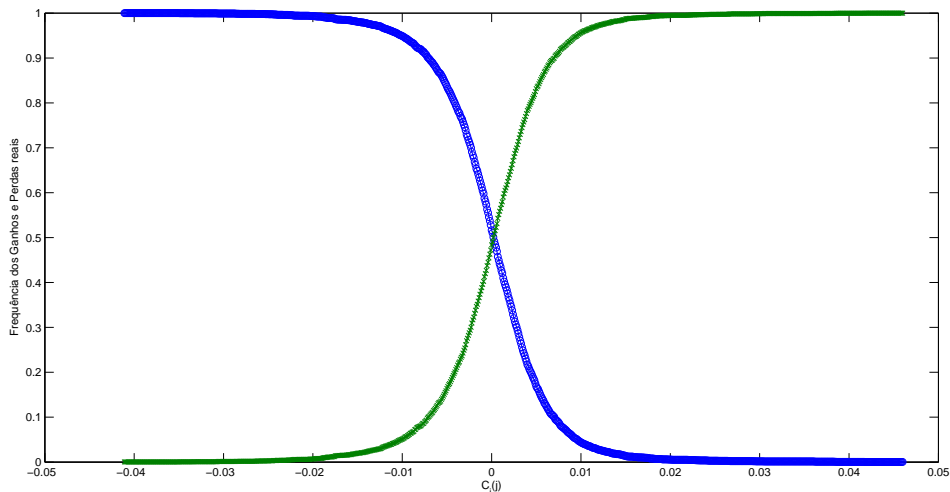


Figura 6 – Mostra o equilíbrio do processo de ganhos reais e perdas reais no mercado financeiro.

### 3.3 Base de dados

A base de dados utilizada nesta análise é formada por séries temporais financeiras referentes ao preço de fechamento de 12 representativos índices de mercado, com granularidade diária ao longo de 16 anos que tem início em 02 de Janeiro de 1995 e vai até 30 de Dezembro de 2010 com um total de 3691 observações.

Foi adotado a estratégia de caminhar no tempo para construir janelas temporais de 1, 2, 4, 8 e 16 anos o que possibilitou analisar o comportamento médio dos índices nas respectivas janelas temporais.

Ao longo deste período, verificou-se que o mercado financeiro foi afligido por 8 crises de magnitude global que impactaram a estabilidade econômica: a crise Asiática (1997), a crise da Rússia (1998), a crise Cambial Brasileira (1999), a Bolha da Internet (2000), o 11 de Setembro - terror (2001), a crise na Argentina (2001), a crise do *Subprime* (2007-2009) e a crise da Europa (2010). Os índices utilizados nesta análise foram obtidos via serviço público na internet em <https://finance.yahoo.com/> e são detalhados na Tabela 1.



Tabela 1 – Quantitativo referente aos índices de mercado de ações analisados, o código de cada índice e a composição dos índices de mercado de ações.

<b>i</b>	<b>Código do índice</b>	<b>Descrição</b>
1	CAC 40	40 maiores empresas de capital aberto da França
2	DAX 30	30 maiores empresas de capital aberto da Alemanha
3	DJIA	30 maiores empresas de capital aberto dos EUA
4	FTSE 100	100 maiores empresas de capital aberto dos UK
5	Hang Seng	50 maiores empresas de capital aberto de Hong Kong
6	IBEX 35	36 maiores empresas de capital aberto da Espanha
7	IBOV	60 maiores empresas de capital aberto do Brasil
8	IPC	30 maiores empresas de capital aberto do México
9	NASDAQ	100 maiores empresas de capital aberto do EUA
10	SMI	20 maiores empresas de capital aberto da Suíça
11	S&P 500	500 maiores empresas de capital aberto do EUA
12	STI	35 maiores empresas de capital aberto de Singapura

## 4 Resultados experimentais

Neste Capítulo são apresentados os resultados experimentais derivados da aplicação do método proposto e sua validação ocorre através da comparação entre os resultados proporcionados pela nova medida de risco proposta com os resultados das clássicas medidas de risco, mais especificamente o *VaR* e com o *CVaR*.

### 4.1 16 Janelas temporais de 1 ano

O mercado financeiro é considerado um sistema dinâmico e as variações inerentes as flutuações nas séries dos preços dos ativos financeiros (índices de mercado, ações, entre outros) (LU; WANG, 2016) exibem características como não linearidade, ruído e tendência caótica (DUARTE; MACHADO; DUARTE, 2010; XU; WANG, 2016). A Figura 7 retrata as características peculiares da evolução temporal das séries dos preços de fechamento do CAC 40 e DJIA para o período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplando 16 janelas temporais de 1 ano.

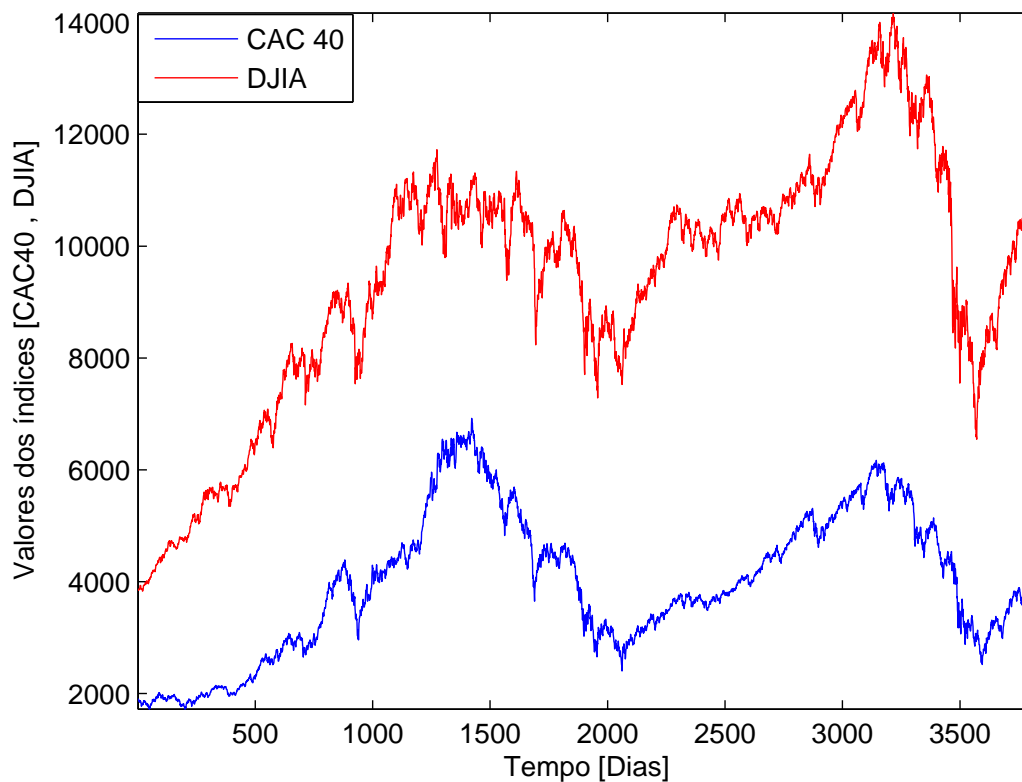
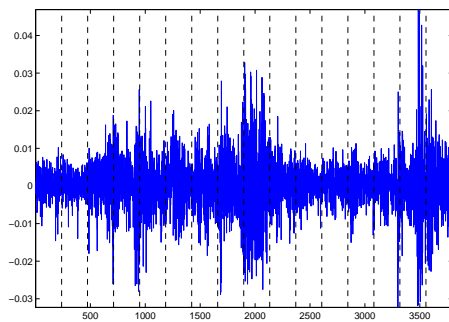
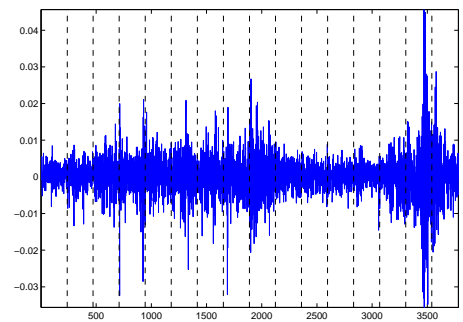


Figura 7 – Mostra as características peculiares da evolução temporal das séries dos preços de fechamento do CAC 40 e DJIA.

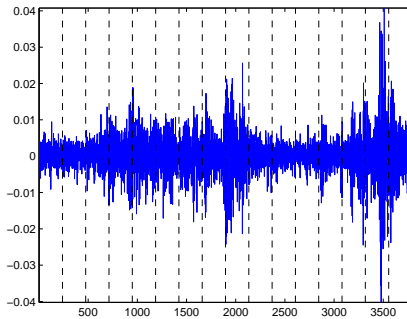
Estas flutuações podem surgir de forma abrupta, em questão de minutos ou se desenvolver em escalas de tempo mais longas (GOPIKRISHNAN et al., 1999; LIU et al., 1999; BOTTA et al., 2015) e geram mudanças nas séries dos preços que são representadas pelas séries de retornos (TAN et al., 2015). A Figura 8 retrata as séries de retornos diários do DAX 30, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para período que vai de 02 de Janeiro de 1995 até 30 de Dezembro de 2010, contemplando 16 janelas temporais de 1 ano. A tabela 2 contempla os valores das estatísticas descritivas para os retornos diários dos índices de mercado acionários investigados.



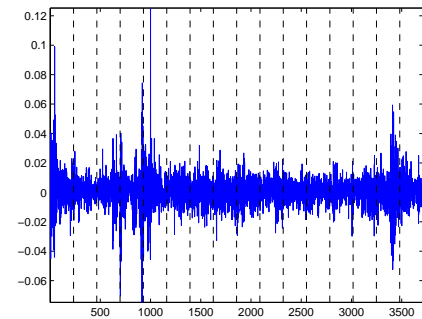
(a) DAX 30



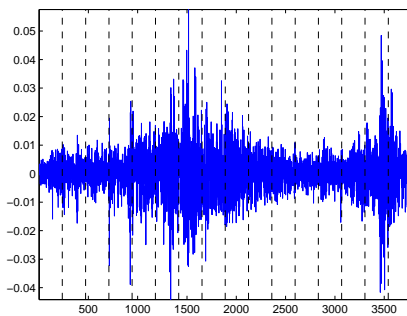
(b) DJIA



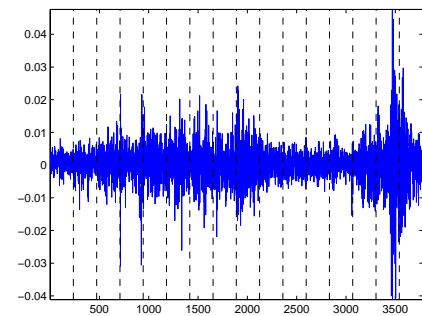
(c) FTSE 100



(d) Ibovespa



(e) Nasdaq



(f) S&amp;P 500

Figura 8 – As séries de retornos do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa e Nasdaq e S&P 500.

Tabela 2 – Estatísticas descritas para os retornos dos índices de mercados acionários.

i	Média	Mediana	Mínimo	Máximo	Desvio Padrão	Assimetria	Curtose
CAC 40	0,00009	0,00021	-0,04113	0,04601	0,00644	-0,02863	4,70473
DAX 30	0,00012	0,00039	-0,03228	0,04689	0,00680	-0,05182	4,14854
DJIA	0,00012	0,00022	-0,03561	0,04564	0,00528	-0,11849	7,86690
FTSE 100	0,00007	0,00023	-0,04024	0,04076	0,00534	-0,13679	6,18917
Hang Seng	0,00012	0,00019	-0,06399	0,07490	0,00783	0,11376	9,42407
Ibex 35	0,00016	0,00041	-0,04163	0,04394	0,00629	-0,13974	4,52670
Ibovespa	0,00033	0,00062	-0,07473	0,12522	0,01044	0,48036	12,01876
IPC	0,00030	0,00038	-0,06217	0,05278	0,00731	0,04788	5,65110
Nasdaq	0,00013	0,00056	-0,04416	0,05756	0,00760	-0,02693	4,69579
SMI	0,00011	0,00029	-0,03521	0,04685	0,00551	-0,03567	5,48433
S&P 500	0,00010	0,00030	-0,04113	0,04759	0,00557	-0,20127	8,17451
STI	0,00003	0,00003	-0,04002	0,05591	0,00616	-0,01819	7,23168

Para averiguar se as séries de retornos foram devidamente padronizadas, foi utilizado o gráfico Box plot (MCGILL; TUKEY; LARSEN, 1978), que é uma técnica não paramétrica aplicada para verificar a variação dos dados observados por meio de quartis. A base da caixa indica o quartil inferior, o topo da caixa indica o quartil superior, o segundo quartil é a mediana que representa 50% de todos os valores observados, concentrados em torno de uma tendência central, que dado a padronização realizada nos dados, deve ser zero, eliminando 25 % dos menores e maiores valores da amostra, ou seja,  $(75\% - 25\% = 50\%)$ ; os valores atípicos (*outliers*) são observados acima do limite superior e abaixo do limite inferior. A Figura 9 mostra o Box plot das séries de retornos padronizados para o período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplando 16 janelas temporais de 1 ano.

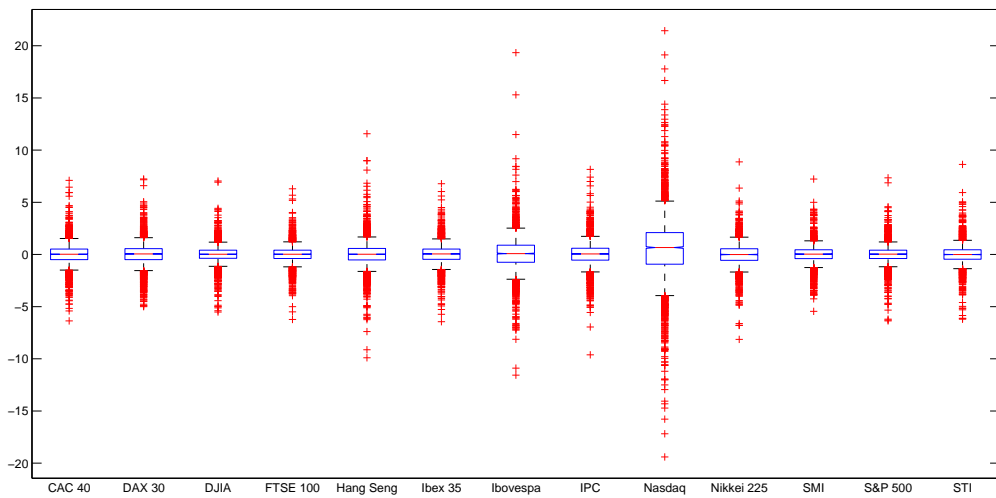


Figura 9 – A mediana para todas as séries de retornos padronizados é zero, os *outliers* são os pontos em vermelho que estão abaixo do limite inferior e acima do limite superior. A quantidade de *outliers* é um indicativo que eventos extremos nos índices de mercados investigados são mais recorrentes que eventos gaussianos

A percepção clássica econômica e financeira denomina os retornos negativos de perdas e o positivos de ganhos (LUDESCHER; TSALLIS; BUNDE, 2011). A Figura 10 ilustra as perdas e ganhos para os retornos padronizados para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para o período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplando 16 janelas temporais de 1 ano.

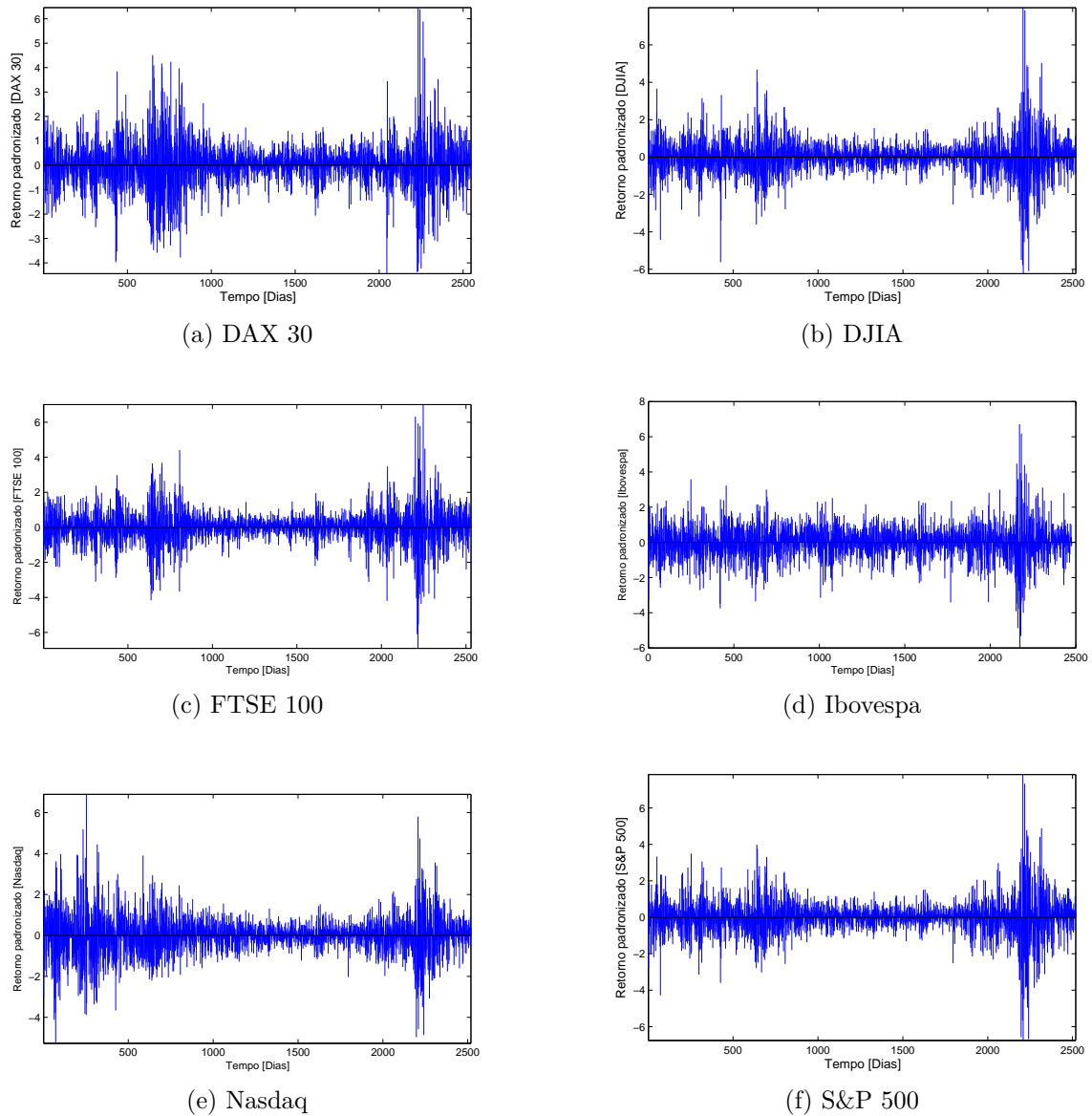


Figura 10 – As observações acima da linha preta são os retornos positivos (ganhos) e as abaixo são os retornos negativos (perdas)

Para fornecer uma alternativa atrelada ao conceito de perda real e ganho real em detrimento do entendimento clássico referente a perdas e ganhos, foi definido o custo do mercado para os índices estudados, sendo este variado na amplitude mínima e máxima de  $r_i(t)$ . A Tabela 3 apresenta os valores referentes a variação mínima, a variação máxima e ao custo do mercado para os índices acionários.

A perda real ocorre quando  $r_i(t) < C_i(j)$ . Esta situação reflete que houve efetiva destruição de riqueza para o agente, já que o retorno obtido sequer conseguiu atingir o custo do mercado. A tabela 4 apresenta os valores das estatísticas descritivas para os perdas reais sofridas pelos índices de mercado acionários.

Tabela 3 – Valores referentes à variação mínima, à variação máxima e ao custo do mercado para os índices acionários

i	V <sub>mín</sub>	V <sub>máx</sub>	$C_i(j)$
CAC 40	-6,38930	7,14690	0,02745
DAX 30	-4,74480	6,89210	0,03740
DJIA	-6,74350	8,64140	0,03717
FTSE 100	-7,52770	7,62500	0,02727
Hang Seng	-8,17420	9,56800	0,02368
Ibex 35	-6,61800	6,98510	0,04210
Ibovespa	-7,16000	11,99660	0,04563
IPC	-8,50320	7,21960	0,04103
Nasdaq	-5,81230	7,57640	0,03728
SMI	-6,38510	8,49550	0,03803
S&P 500	-7,38830	8,54900	0,03518
STI	-6,49330	9,07090	0,00887

Tabela 4 – Estatísticas descritas para as perdas reais dos índices de mercados acionários.

i	Média	Mediana	Mínimo	Máximo	Desvio Padrão	Assimetria	Curtose
CAC 40	0,52651	0,67139	0,00000	1,00000	0,45924	-0,09914	1,11143
DAX 30	0,59018	0,89593	0,00000	1,00000	0,44404	-0,35063	1,24581
DJIA	0,55972	0,87627	0,00000	1,00000	0,46214	-0,23334	1,13965
FTSE 100	0,50185	0,49830	0,00000	1,00000	0,46507	-0,00232	1,08587
Hang Seng	0,53792	0,82131	0,00000	1,00000	0,82131	-0,14863	1,09240
Ibex 35	0,51117	0,56053	0,00000	1,00000	0,46003	-0,03732	1,10123
Ibovespa	0,62398	0,98693	0,00000	1,00000	0,45626	-0,50503	1,33253
IPC	0,45599	0,18750	0,00000	1,00000	0,46388	0,17549	1,11675
Nasdaq	0,56395	0,86758	0,00000	1,00000	0,45525	-0,24732	1,16186
SMI	0,56904	0,56904	0,00000	1,00000	0,45919	-0,26978	1,16411
S&P 500	0,53468	0,78052	0,00000	1,00000	0,46618	-0,13288	1,09645
STI	0,58202	0,93467	0,00000	1,00000	0,45914	-0,32776	1,19331

Enquanto o ganho real ocorre quando  $r_i(t) > C_i(j)$ . Esta situação reflete que houve efetiva geração de riqueza para o agente, pois o retorno obtido superou o custo do mercado. A tabela 5 apresenta os valores das estatísticas descritivas para os ganhos reais obtidos pelos índices de mercado acionários.

Tabela 5 – Estatísticas descritas para os ganhos reais dos índices de mercados acionários.

i	Média	Mediana	Mínimo	Máximo	Desvio Padrão	Assimetria	Curtose
CAC 40	0,47363	0,32878	0,00026	1,00000	0,45912	0,09913	1,11142
DAX 30	0,40998	0,10430	0,00026	1,00000	0,44393	0,35062	1,24580
DJIA	0,44043	0,12394	0,00026	1,00000	0,46203	0,23334	1,13963
FTSE 100	0,49828	0,50185	0,00026	1,00000	0,46496	0,00232	1,08585
Hang Seng	0,46222	0,17892	0,00027	1,00000	0,46936	0,14863	1,09240
Ibex 35	0,48897	0,43963	0,00027	1,00000	0,45992	0,03731	1,10121
Ibovespa	0,37602	0,01307	0,00027	1,00000	0,45626	0,50503	1,33253
IPC	0,54401	0,81250	0,00026	1,00000	0,46388	-0,17549	1,11675
Nasdaq	0,43605	0,13242	0,00026	1,00000	0,45525	0,24732	1,16186
SMI	0,43111	0,10275	0,00026	1,00000	0,45908	0,26977	1,16409
S&P 500	0,46547	0,21968	0,00026	1,00000	0,46607	0,13288	1,09643
STI	0,41814	0,06556	0,00027	1,00000	0,45903	0,32775	1,19329

Foi utilizado a estratégia de caminhar no tempo para construir 16 janelas temporais de 1 ano o que tornou possível investigar o comportamento referente aos ganhos e perdas reais levando em consideração a região que contempla o custo médio do mercado para cada índice de mercado acionário estudado no decurso destas janelas temporais. A figura 11 apresenta a relação entre a quantidade de ganhos e perdas reais dado os custos do mercado para cada janela temporal, contemplando 16 janelas temporais de 1 ano.



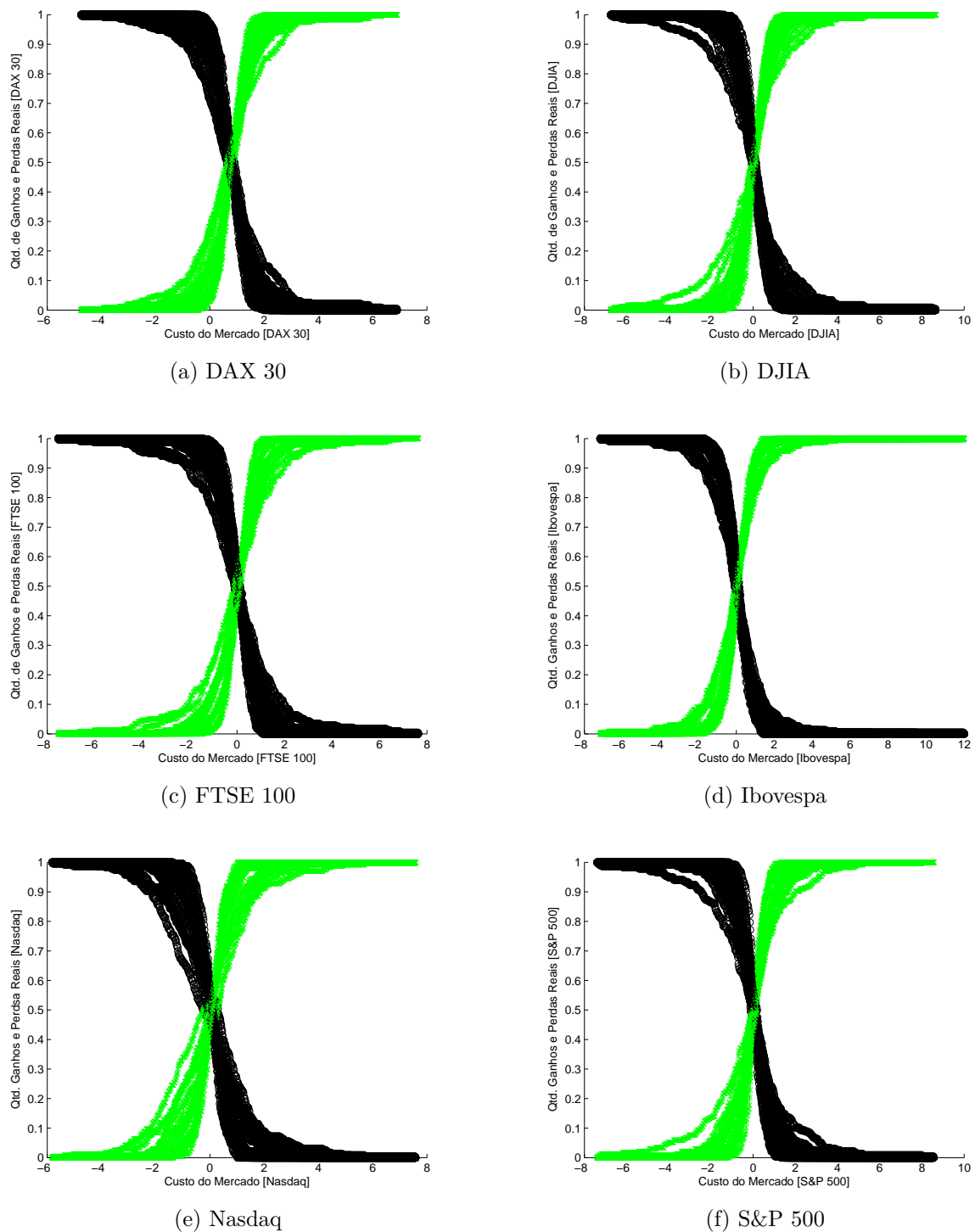


Figura 11 – A frequência dos ganhos e perdas reais considerando os custos do mercado para cada janela temporal.

Os intervalos de confiança referentes a frequência dos ganhos e perdas reais considerando os custos do mercado para cada janela temporal foram estimados pelo emprego de uma t-Student. A tabela 6 apresenta os valores das médias, desvio padrão, limite inferior e limite superior para a frequência dos ganhos e perdas reais considerando os custos do mercado para cada janela temporal.

Tabela 6 – Valores referentes as médias, desvio padrão, limite inferior e limite superior para a frequência dos ganhos e perdas reais considerando os custos do mercado para cada janela temporal.

i	Média	Desvio Padrão	Intervalo Inferior	Intervalo Superior
CAC 40	0,02212	0,08293	-0,02206	0,06631
DAX 30	0,03186	0,08262	-0,01217	0,07588
DJIA	0,03080	0,06763	-0,00524	0,06683
FTSE 100	0,02330	0,06120	-0,00931	0,05591
Hang Seng	0,01723	0,06857	-0,01931	0,05376
Ibex 35	0,03566	0,08037	-0,00717	0,07848
Ibovespa	0,03976	0,07145	0,00169	0,07783
IPC	0,03850	0,07262	-0,00019	0,07720
Nasdaq	0,02874	0,09810	-0,02353	0,08101
SMI	0,03187	0,08035	-0,01094	0,07469
S&P 500	0,02781	0,07364	-0,01143	0,06705
STI	0,00645	0,11103	-0,05272	0,06561

Dado o custo do mercado médio e definido a perda real e o ganho real médio e é possível delinear a região onde ocorre respectivamente cada um deles. A Figura 12 apresenta o custo do mercado que torna possível identificar a região onde ocorre ganhos e perdas reais para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 no período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplando 16 janelas temporais de 1 ano.

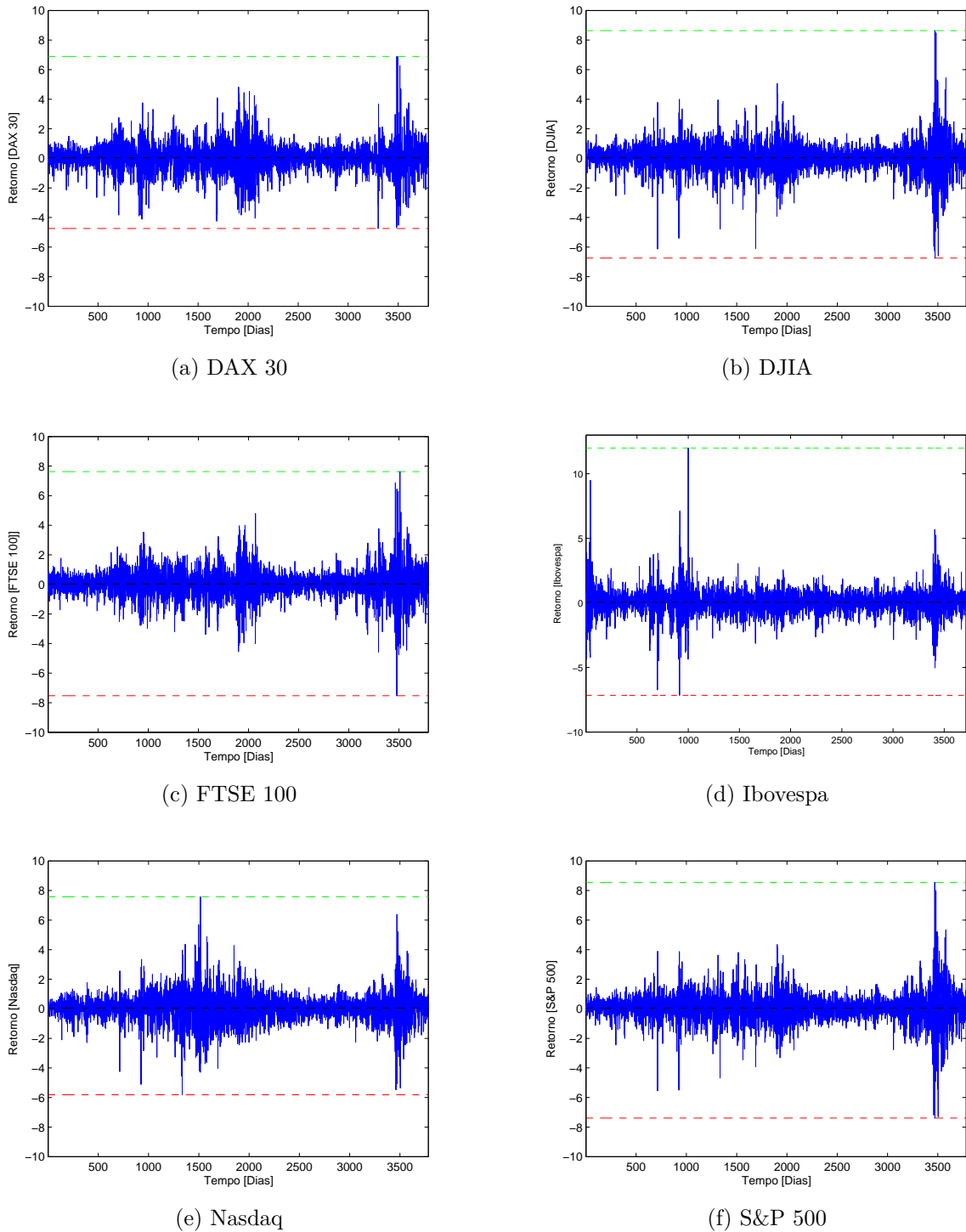


Figura 12 – A linha tracejada preta representa o custo do mercado. A região acima do custo do mercado limitada pela linha tracejada verde, que denota o retorno máximo, compreende os ganhos reais e a região abaixo do custo de mercado limitada pela linha tracejada vermelha denota as perdas reais.

A etapa seguinte consistiu em analisar a função distribuição acumulada (fda) da quantidade de ocorrências de ganhos reais em função do custo do mercado para cada índice acionário.

Para tanto,  $C_i(j)$  foram normalizados de tal forma que  $0 \leq C_i(j) \leq 1$  e isto possibilitou ajustar a quantidade de vezes que ocorreram os ganhos reais para um dado custo do mercado ajustados a uma distribuição acumulada formalizada na Eq. 3.5. A Figura 13 apresenta os *clusters* definidos a partir dos parâmetros da distribuição acumulada que ajustaram a frequência dos ganhos reais para um dado custo do mercado para os índices estudados e construídos pelo emprego da técnica *K-means* (HARTIGAN; WONG, 1979).

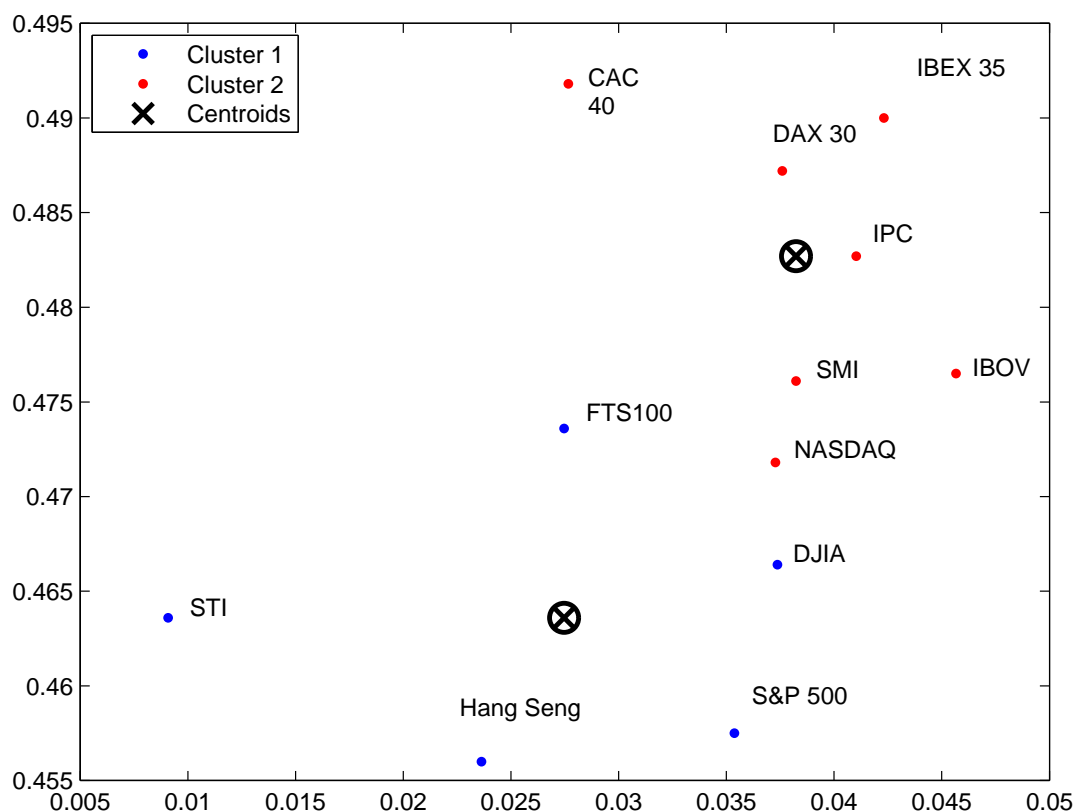


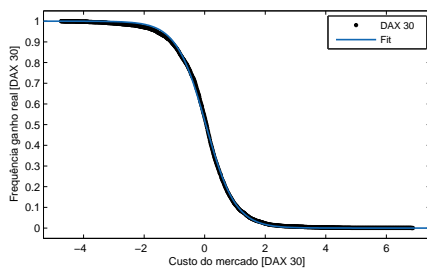
Figura 13 – Os índices que estão no cluster em azul são os menos arriscados, enquanto que os que estão no cluster em vermelho são os mais arriscados.

Os parâmetros da distribuição acumulada que ajustaram a frequência dos ganhos reais para um dado custo do mercado para os índices estudados são apresentados na Tabela 7.

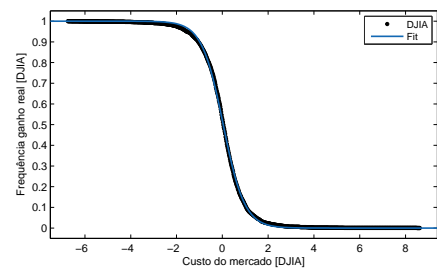
A Figura 14 mostra a frequência dos ganhos reais para um dado custo do mercado ajustadas a uma distribuição acumulada para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para o período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplando 16 janelas temporais de 1 ano.

Tabela 7 – Valores dos parâmetros da distribuição acumulada que ajustou a frequência dos ganhos reais para um dado custo do mercado.

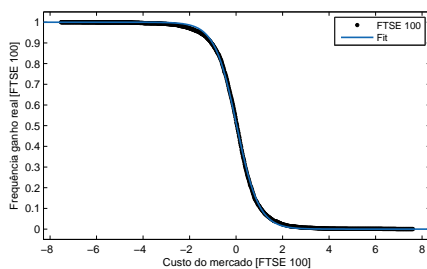
i	Parâmetros		SSE	R-square	Adj. R-square	RMSE
	a	$x_0$				
CAC 40	0,49180	0,02766	0,02580	0,99980	0,99980	0,00570
DAX 30	0,48720	0,03760	0,05770	0,99960	0,99960	0,00850
DJIA	0,46640	0,03737	0,03824	0,99980	0,99980	0,00692
FTSE 100	0,47360	0,02747	0,03647	0,99980	0,99980	0,00676
Hang Seng	0,45600	0,02363	0,05040	0,99970	0,99970	0,00790
Ibex 35	0,49000	0,04231	0,04156	0,99980	0,99980	0,00722
Ibovespa	0,47650	0,04566	0,02094	0,99990	0,99990	0,00512
IPC	0,48270	0,04103	0,02690	0,99980	0,99980	0,00581
Nasdaq	0,47180	0,03728	0,08235	0,99950	0,99950	0,01016
SMI	0,47610	0,03823	0,03520	0,99980	0,99980	0,00660
S&P 500	0,45750	0,03537	0,05034	0,99970	0,99970	0,00794
STI	0,46360	0,00908	0,03627	0,99980	0,99980	0,00674



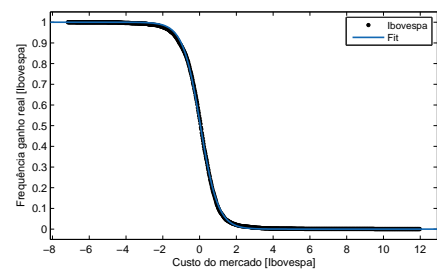
(a) DAX 30



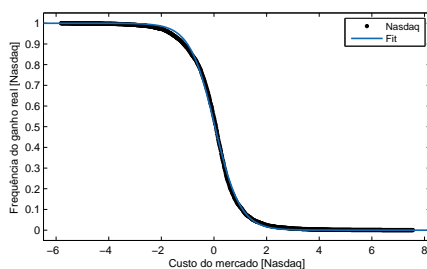
(b) DJIA



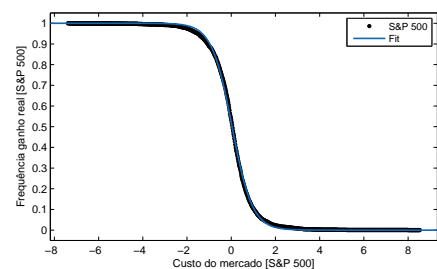
(c) FTSE 100



(d) Ibovespa



(e) Nasdaq



(f) S&P 500

Figura 14 – A frequência das perdas reais para um dado custo de mercado ajustadas a uma distribuição acumulada.

Com a normalização realizada no ganho real foi possível obter a quantidade de vezes que ocorreram as perdas reais para um dado custo do mercado ajustados a uma distribuição acumulada formalizada na Eq. 3.6. A Figura 15 apresenta os *clusters* definidos a partir dos parâmetros da distribuição acumulada que ajustaram a frequência das perdas reais para um dado custo do mercado para os índices estudados e construídos pelo emprego da técnica *K-means*.

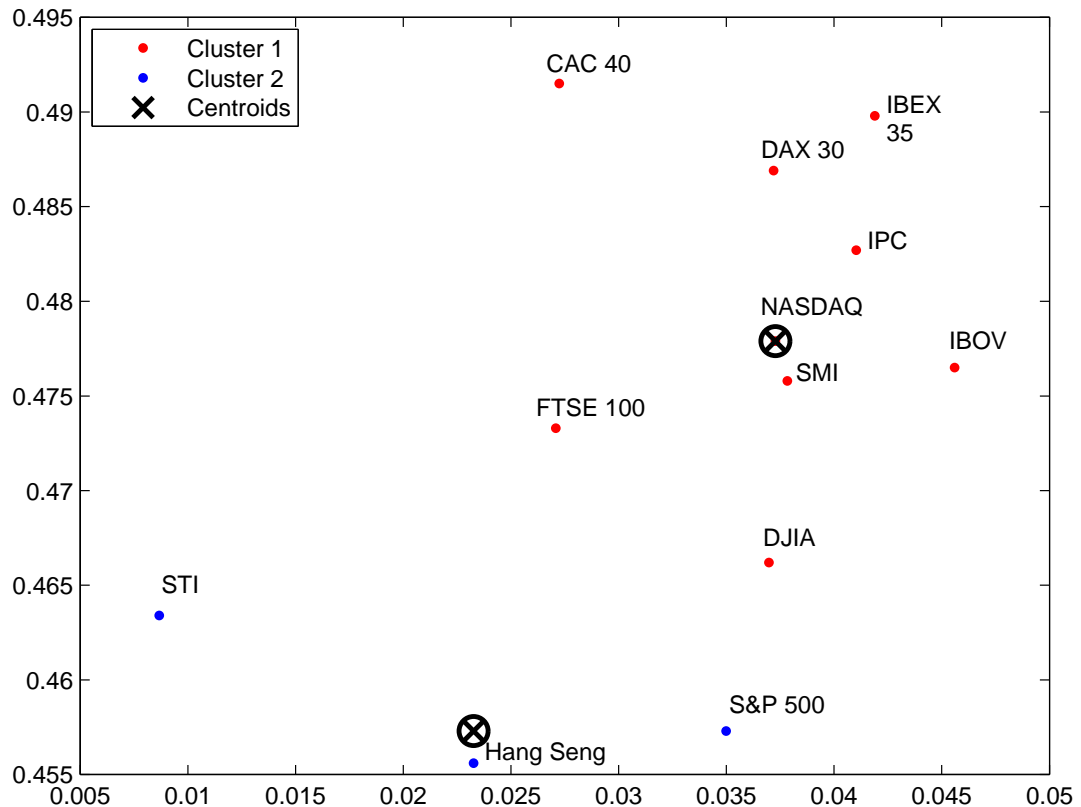


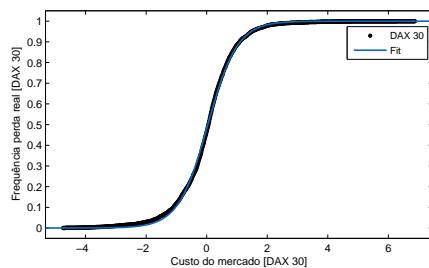
Figura 15 – Os índices que estão no cluster em azul são os menos arriscados, enquanto que os que estão no cluster em vermelho são os mais arriscados.

Os valores dos parâmetros da distribuição acumulada que ajustaram a frequência das perdas reais para um dado custo do mercado para os índices estudados são apresentados na Tabela 8.

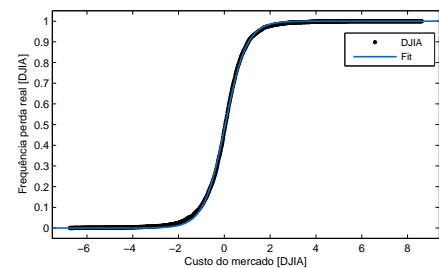
A Figura 16 mostra a frequência das perdas reais para um dado custo do mercado ajustadas a uma distribuição acumulada para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para o período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplando 16 janelas temporais de 1 ano.

Tabela 8 – Valores dos parâmetros da distribuição acumulada que ajustou a frequência das perdas reais para um dado custo do mercado para os índices estudados.

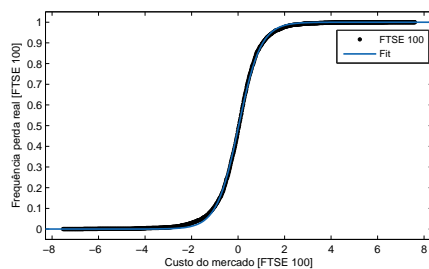
i	Parâmetros		SSE	R-square	Adj. R-square	RMSE
	b	$x'_0$				
CAC 40	0,49150	0,02724	0,02560	0,99980	0,99980	0,00570
DAX 30	0,48690	0,03719	0,05743	0,99960	0,99960	0,00850
DJIA	0,46620	0,03698	0,03790	0,99980	0,99980	0,00690
FTSE 100	0,47330	0,02708	0,03614	0,99980	0,99980	0,00670
Hang Seng	0,45560	0,02327	0,04990	0,99970	0,99970	0,00790
Ibex 35	0,48980	0,04189	0,04135	0,99980	0,99980	0,00720
Ibovespa	0,47650	0,04560	0,02094	0,99990	0,99990	0,00510
IPC	0,48270	0,04103	0,02690	0,99980	0,99980	0,00581
Nasdaq	0,47790	0,03728	0,08235	0,99950	0,99950	0,01020
SMI	0,47580	0,03783	0,03490	0,99980	0,99980	0,00660
S&P 500	0,45730	0,03499	0,05001	0,99970	0,99970	0,00792
STI	0,46340	0,00867	0,00357	0,99980	0,99980	0,00669



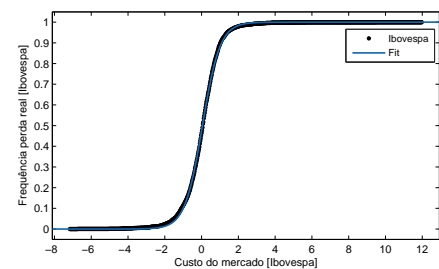
(a) DAX 30



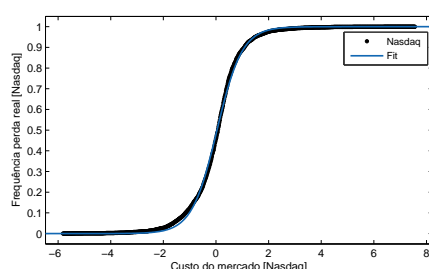
(b) DJIA



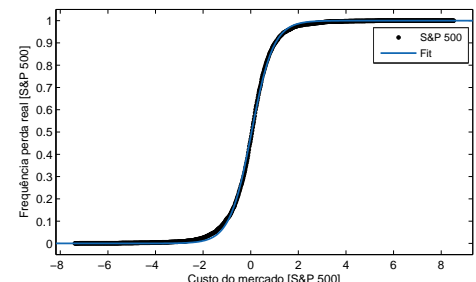
(c) FTSE 100



(d) Ibovespa



(e) Nasdaq



(f) S&P 500

Figura 16 – A frequência das perdas reais para um dado custo de mercado ajustadas a uma distribuição acumulada.

Para obter o valor de  $C_i(j)$  em termos percentuais foi aplicado a Eq. 3.5. A Tabela 9 apresenta os valores de  $C_i(j)$  em termos decimais e convertidos em termos percentuais representados por  $C_i(j)^*$ .

Tabela 9 – Valores de  $C_i(j)$  em termos percentuais.

i	$C_i(j)$	$C_i(j)^*$ (%)
CAC 40	0,02745	47,405
DAX 30	0,03740	41,100
DJIA	0,03717	44,074
FTSE 100	0,02727	49,859
Hang Seng	0,02368	46,206
Ibex 35	0,04210	48,960
Ibovespa	0,04563	47,614
IPC	0,04103	54,343
Nasdaq	0,03728	43,690
SMI	0,03803	43,164
S&P 500	0,03518	46,579
STI	0,00887	41,776

Para um dado valor de custo do mercado é possível obter o risco instantâneo para um índice de mercado através da simples subtração entre a frequência das perdas reais e dos ganhos reais. A Figura 17 mostra o risco instantâneo do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para o período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplando 16 janelas temporais de 1 ano.



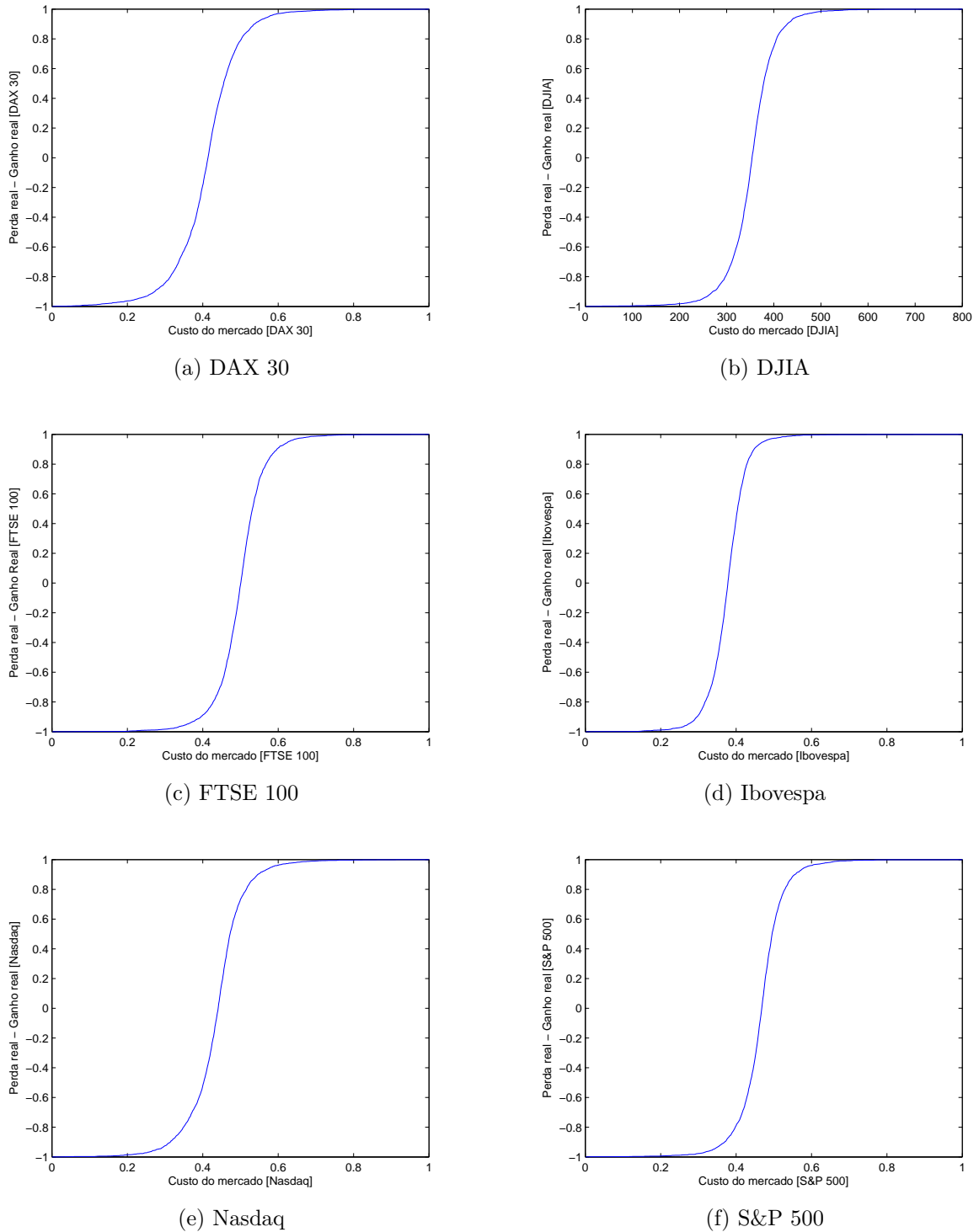


Figura 17 – Risco instantâneo do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500.

O risco esperado pode ser vislumbrado através de 2 regiões distintas. Para primeira região,  $P(\vartheta_i(C_i(j)) | C_i(j) \geq C_i(j)^*)$  implica que o risco esperado do mercado é alto, ou seja, caso  $C_i(j) \geq C_i(j)^*$ , a probabilidade de obter perda real é maior que a probabilidade de obter ganho real. Do contrário, se  $P(\vartheta_i(C_i(j)) | C_i(j) \leq C_i(j)^*)$  implica que o risco esperado

do mercado é baixo, isto é, caso  $C_i(j) \leq C_i(j)^*$ , a probabilidade de obter ganho real é maior que a probabilidade de obter perda real. A Tabela 10 apresenta estes resultados.

Tabela 10 – Valores do risco esperado para os índices de mercado acionários contemplando a região de alto risco  $C_i(j) \geq C_i(j)^*$  e a de baixo risco  $C_i(j) \leq C_i(j)^*$ .

i	$C_i(j)^*$ (%)	Região de Alto Risco	Região de Baixo Risco
CAC 40	47,405069	95,21	4,79
DAX 30	41,100	95,08	4,92
DJIA	44,073571	96,24	3,76
FTSE 100	49,858935	95,68	4,32
Hang Seng	46,205533	96,69	3,31
Ibex 35	48,96016	95,11	4,89
Ibovespa	47,614347	97,24	3,92
IPC	54,342929	95,34	4,66
Nasdaq	43,690426	95,61	4,39
SMI	43,164455	96,10	3,90
S&P 500	46,579282	96,28	3,72
STI	41,776461	96,45	3,55

Em qualquer agregado econômico (mercado de bens e serviços, de trabalho ou financeiro) o equilíbrio exige paridade entre demanda e oferta. Ao vislumbrar a dinâmica comportamental dos índices de mercado acionários estudados fundamentados nos conceitos de ganho e perda real, foi observado que há paridade entre perda e ganho real em  $C_i(j)^*$ .

Especificamente,  $C_i(j)^*$  representa o ponto em que a perda real equipara-se ao ganho real, neste ponto o lucro é zero e é exatamente onde ocorre o equilíbrio do processo denotado por  $E_i(t)$ . A Figura 18 mostra o ponto onde há paridade entre perda real média e ganho real médio para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para o período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplando 16 janelas temporais de 1 ano.

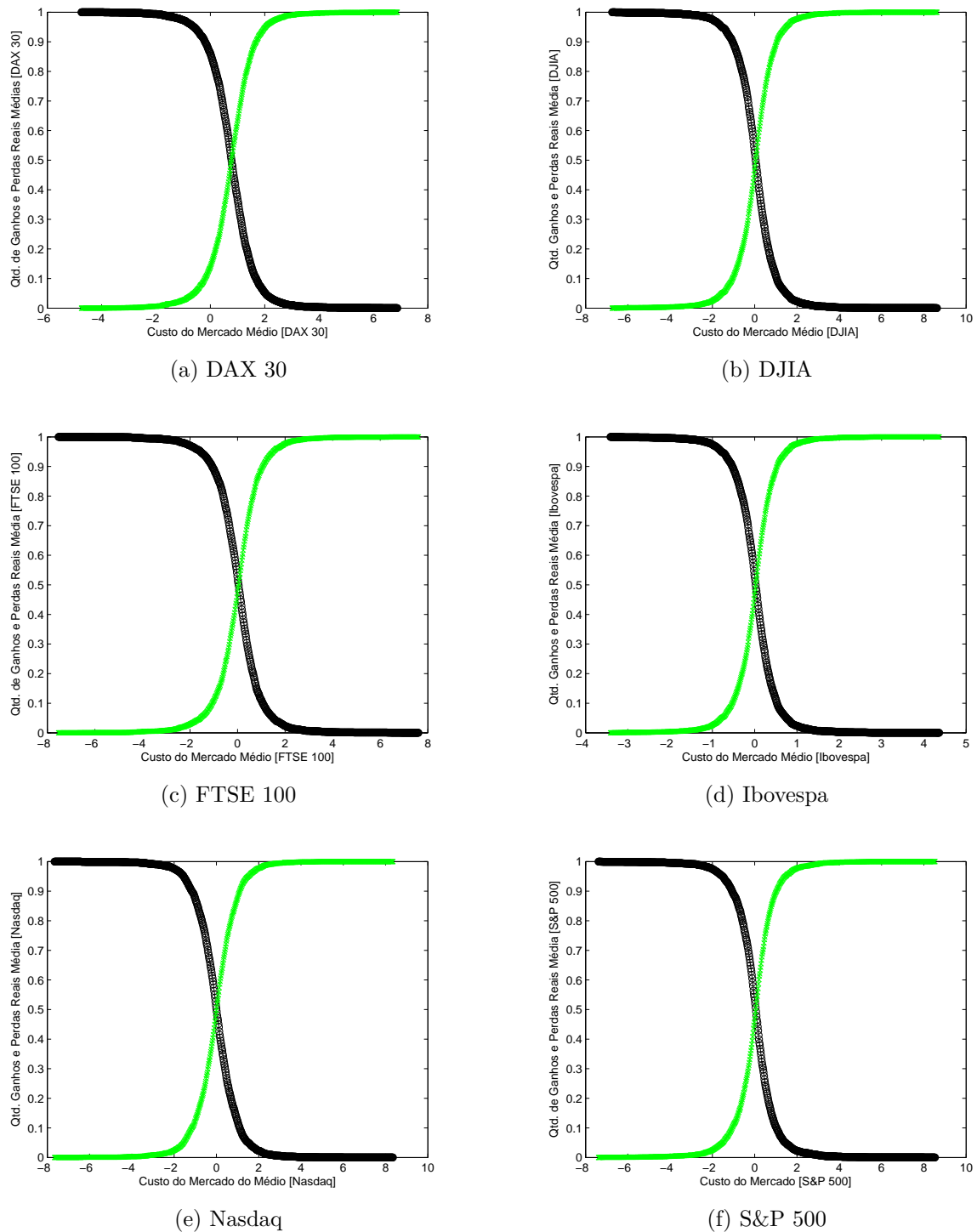


Figura 18 – O cruzamento da curva da perda real com a curva do ganho real indica o ponto onde há paridade entre perda real e ganho real para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 é evidenciado no cruzamento entre as curvas das perdas reais em verde e as curvas do ganho real em preto.

A etapa seguinte, consistiu em aplicar a Eq. 2.10 para gerar a perda máxima sofrida por cada índice de mercado acionário analisado, contemplando 16 janelas temporais de 1 anos e calcular a métrica do  $CVaR$  ambos considerando um nível de confiança de 95%. A

Tabela 11 apresenta estes resultados.

Tabela 11 – Valores do  $VaR$  e os respectivos  $VaR$  médios e  $CVaR$  médios para os índices de mercado acionários contemplando 16 janelas temporais de 1 ano e considerando um nível de confiança de 95%.

i	VaR (95%)																$\delta$ VaR	$\delta$ CVaR
CAC 40	1,97	1,21	2,06	2,54	2,20	2,17	2,13	3,17	3,82	1,64	1,13	1,27	1,55	1,93	3,37	2,53	2,17	2,46
DAX 30	1,32	1,24	2,05	2,92	2,55	2,48	2,26	2,99	4,89	2,06	1,33	1,48	1,48	1,71	3,14	2,70	2,29	2,64
DJIA	0,99	1,17	1,69	1,75	1,95	1,95	1,89	1,97	2,89	1,22	1,15	1,00	0,99	1,46	3,39	2,42	1,74	1,90
FTSE 100	1,09	0,92	1,37	1,85	2,24	2,08	1,84	2,28	3,26	1,31	0,89	0,94	1,30	2,33	3,41	2,21	1,83	2,08
Hang Seng	2,41	1,74	2,34	4,72	3,29	2,92	2,61	2,56	2,00	1,97	1,38	1,28	1,66	3,42	3,67	3,53	2,59	2,86
Ibex 35	1,58	1,33	2,29	2,95	2,50	2,03	2,56	2,96	3,61	1,43	1,05	1,14	1,67	1,71	3,50	2,41	2,17	2,45
Ibovespa	5,15	2,48	3,09	4,14	5,40	3,31	2,97	3,00	2,97	2,72	2,33	2,52	2,65	2,64	4,98	2,98	3,33	3,60
IPC	4,18	2,27	2,04	3,12	3,49	3,91	2,42	2,37	2,02	1,57	1,53	1,76	2,32	2,28	3,74	2,54	2,60	2,83
Nasdaq	1,46	1,56	1,77	2,03	2,96	3,58	5,13	3,21	3,47	2,06	1,44	1,31	1,62	1,85	4,22	2,97	2,54	2,93
SMI	1,08	1,08	1,86	2,16	2,05	1,57	1,53	2,27	3,11	1,37	1,06	1,12	1,40	1,65	3,29	1,86	1,78	2,04
S&P 500	0,94	1,22	1,57	1,89	2,17	2,18	2,29	1,95	2,90	1,24	1,23	0,99	1,12	1,65	4,07	2,56	1,87	2,04
STI	1,41	1,48	1,27	3,33	3,49	2,19	2,15	2,19	1,87	1,72	1,03	0,96	1,66	2,06	3,51	2,58	2,06	2,25

A validação do modelo proposto foi realizada através da comparação dos valores  $VaR$  e do  $CVaR$  com os resultados empíricos do método proposto. Especificamente, em relação ao  $VaR$ , os retornos foram ordenados em forma decrescente, foi assumido a premissa que eles seguem uma distribuição normal e considerado um nível de confiança de 95%. A Tabela 12 apresenta o comparativo entre os valores do  $VaR$ , do  $CVaR$  e da região de baixo risco bem como suas respectivas variações.

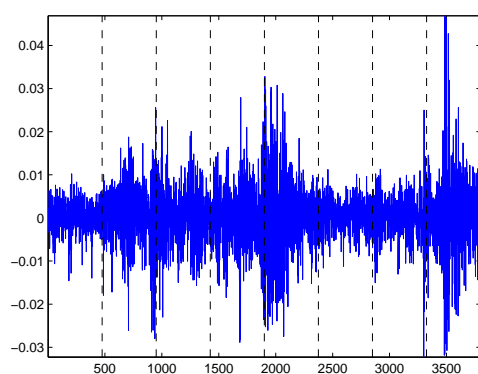
Tabela 12 – Comparativo entre os valores do  $VaR$  e  $CVaR$  com os valores da região de baixo risco e para cada índice investigado e suas respectivas variações percentuais.

i	$\delta VaR$ (95%)	$\Delta\%$	$\delta CVaR$ (95%)	$\Delta\%$	Risco Baixo
CAC 40	2,17	13,36	2,46	94,72	4,79
DAX 30	2,29	15,28	2,64	86,36	4,92
DJIA	1,74	9,20	1,90	97,89	3,76
FTSE 100	1,83	13,66	2,08	107,69	4,32
Hang Seng	2,59	10,42	2,86	15,73	3,31
Ibex 35	2,17	12,90	2,45	45,31	3,56
Ibovespa	3,33	8,11	3,60	8,89	3,92
IPC	2,60	8,85	2,83	64,66	4,66
Nasdaq	2,54	15,35	2,93	49,83	4,39
SMI	1,78	14,61	2,04	91,18	3,90
S&P 500	1,87	9,09	2,04	82,35	3,72
STI	2,06	9,22	2,25	57,33	3,54

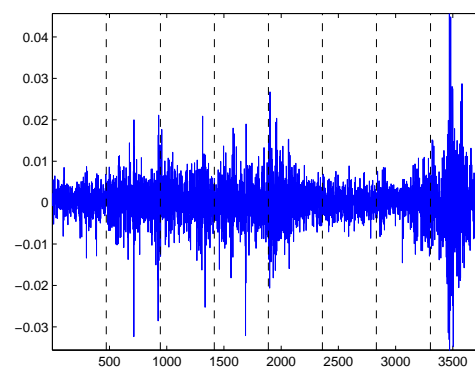
Ao comparar os valores do  $VaR$  e  $CVaR$  com os valores da região de baixo risco foi verificado que o  $VaR$  que é o modelo padrão adotado pelas instituições financeiras (GONZÁLEZ-RIVERA; LEE; MISHRA, 2004; SPIERDIJK, 2016) e o  $CVaR$  subestimam o risco, e isto pode ser um fator condicionante que favorece o surgimentos de eventos extremos (BORYSOV; BALATSKY, 2014).

## 4.2 8 Janelas temporais de 2 anos

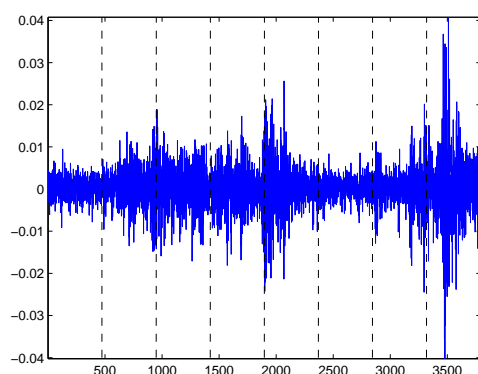
As séries de retornos foram calculadas pelo emprego da Eq. 3.1. A Figura 19 retrata as séries de retornos diários do DAX 30, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para período que vai de 02 de Janeiro de 1995 até 30 de Dezembro de 2010, contemplando 8 janelas temporais de 2 anos.



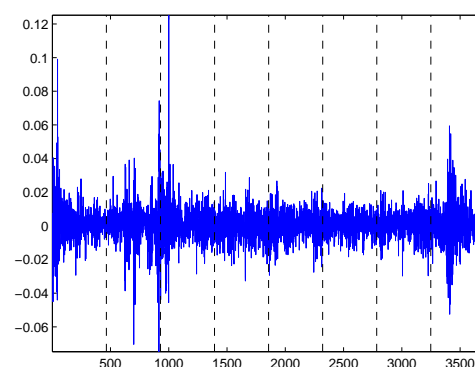
(a) DAX 30



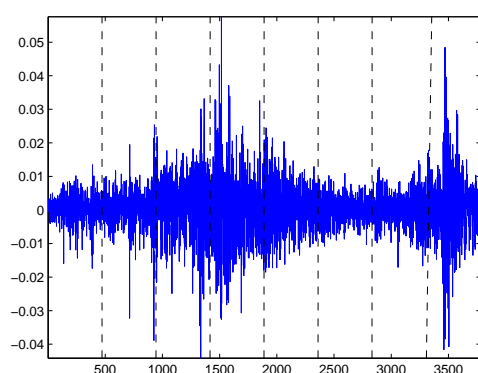
(b) DJIA



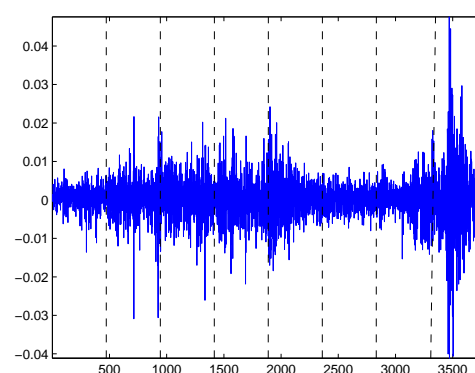
(c) FTSE 100



(d) Ibovespa



(e) Nasdaq



(f) S&amp;P 500

Figura 19 – As séries de retornos do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa e Nasdaq e S&P 500 para as 8 janelas temporais de 2 anos.

As séries de retornos denotadas por  $R_i(t)$  apresentavam escalas de desvios distintas. Assim, para uniformizar as séries de retornos com o intuito de facilitar o processo de análise foi utilizado a padronização sendo está realizada pelo emprego da Eq. 3.2 e que originaram as séries denotadas por  $r_i(t)$ . A Figura 20 retrata as séries de retornos diários padronizados do DAX 30, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para período que vai de 02 de Janeiro de 1995 até 30 de Dezembro de 2010, contemplando 8 janelas temporais de 2 anos.

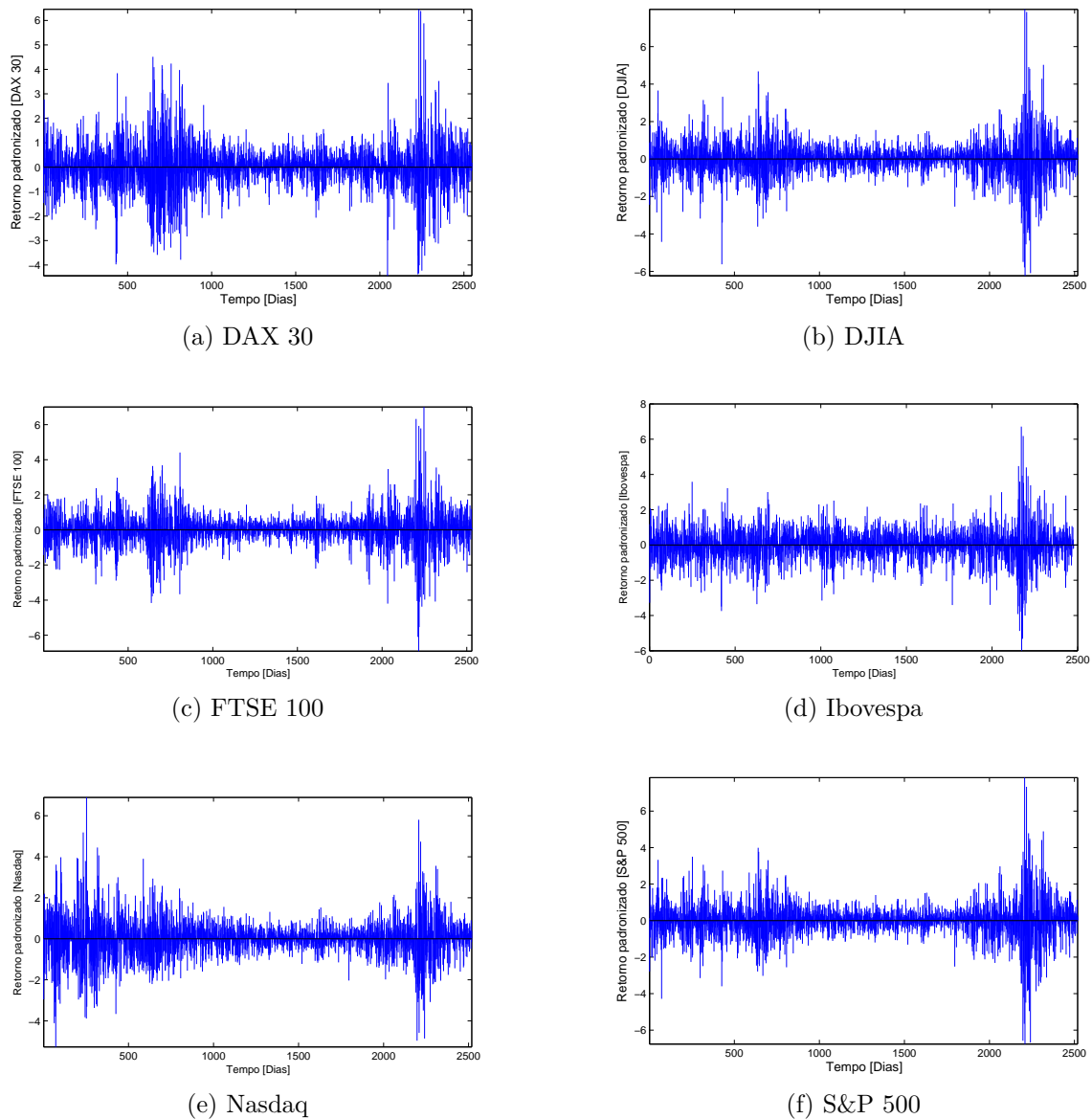


Figura 20 – A evolução temporal para todas as séries se desenvolve ao redor de uma média constante sendo representada pela linha em negrito. As observações acima da linha preta são os retornos positivos (ganhos) e as abaixo são os retornos negativos (perdas)

Foi definido o custo do mercado sendo este denotado por  $C_i(j)$  para o índice  $i$  no



tempo  $t$  e contado a quantidade de perdas e ganhos para diferentes valores de  $C_i(j)$  e sendo variado na totalidade da amplitude de  $r_i(t)$ .

Desta forma, a perda real ocorre quando  $r_i(t) < C_i(j)$ , enquanto que o ganho real sucede quando  $r_i(t) \geq C_i(j)$ . A tabela 13 contempla os valores referentes à variação mínima, à variação máxima e ao custo do mercado para os índices acionários considerando as 8 janelas temporais de 2 anos.

Tabela 13 – Valores referentes à variação mínima, à variação máxima e ao custo do mercado para os índices acionários contemplando as 8 janelas temporais de 2 anos.

<b>i</b>	<b>Vmín</b>	<b>Vmáx</b>	$C_i(j)$
CAC 40	-6,38927	7,14686	0,02746
DAX 30	-4,74484	6,89211	0,03730
DJIA	-6,74355	6,89211	0,03644
FTSE 100	-7,52770	7,62495	0,02728
Hang Seng	-8,17420	9,56800	0,02344
Ibex 35	-6,61799	6,98512	0,04196
Ibovespa	-7,16000	11,99661	0,04566
IPC	-8,50324	7,21964	0,04103
Nasdaq	-5,81232	7,57643	0,03745
SMI	-6,38510	8,49555	0,03833
S&P 500	-7,38833	8,54905	0,03505
STI	-6,49330	9,07094	0,00854

Foi adotado à estratégia de caminhar no tempo o que possibilitou a construção de 8 janelas temporais de 2 anos que levou a análise do comportamento referente aos ganhos e perdas reais levando em consideração a região que contempla o custo médio do mercado para cada índice de mercado acionário estudado no decurso destas janelas temporais. A Figura 21 apresenta à relação entre a quantidade de ganhos e perdas reais dado os custos do mercado para cada janela temporal, contemplando 8 janelas temporais de 2 anos.

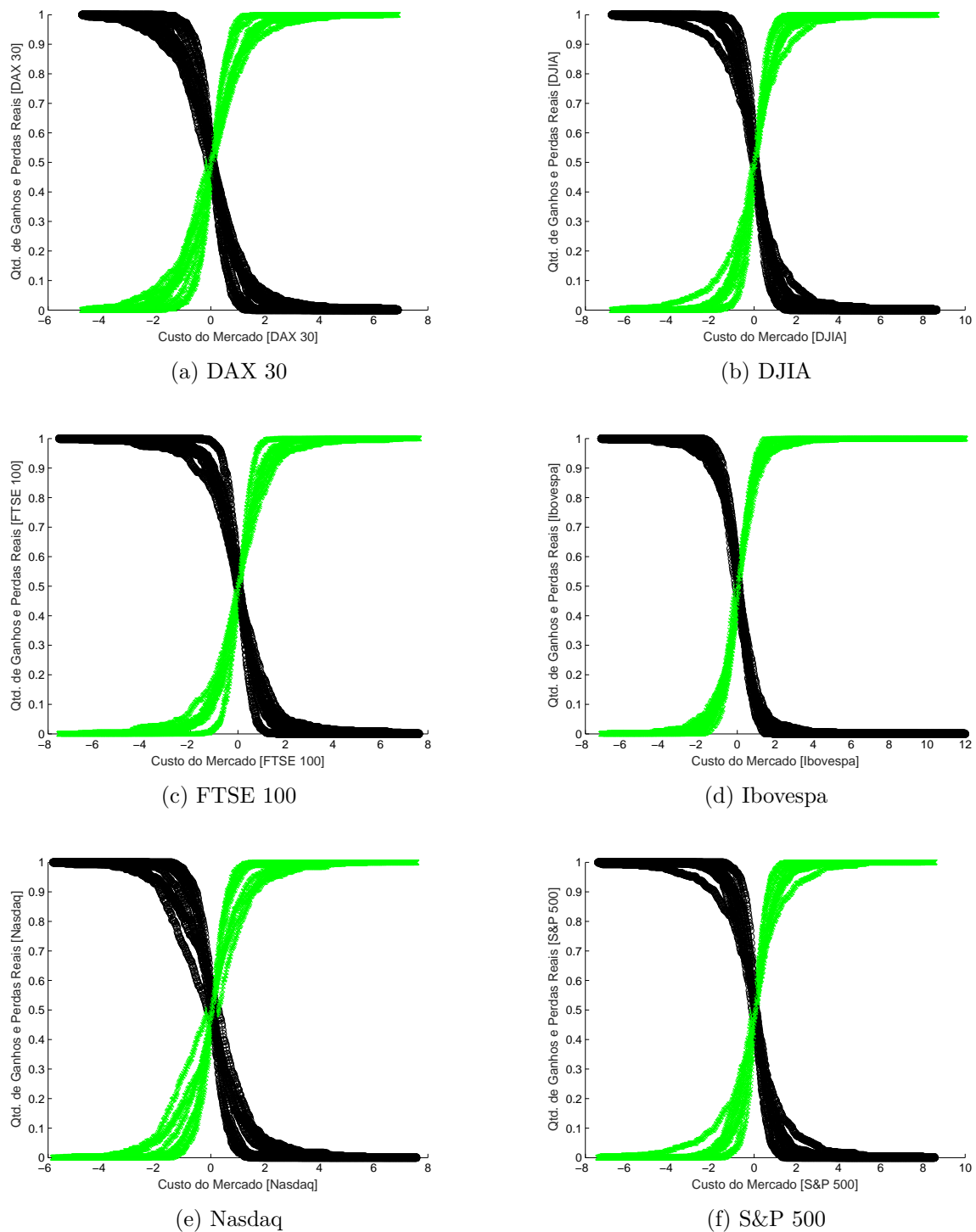


Figura 21 – A frequência dos ganhos e perdas reais dado os custos do mercado para cada janela temporal, contemplando 8 janelas temporais de 2 anos.

Os intervalos de confiança referentes a frequência dos ganhos e perdas reais considerando os custos do mercado para cada janela temporal foram estimados pelo emprego de uma t-Student. A tabela 14 apresenta os valores das médias, desvio padrão, limite inferior e limite superior para a frequência dos ganhos e perdas reais considerando os custos do mercado para cada janela temporal.

Tabela 14 – Valores referentes a média, desvio padrão, limites inferior e limite superior para para a frequência dos ganhos e perdas reais considerando os custos do mercado para cada janela temporal.

i	Média	Desvio Padrão	Intervalo Inferior	Intervalo Superior
CAC 40	0,02416	0,06235	-0,02796	0,07629
DAX 30	-0,08692	0,33540	-0,36732	0,19348
DJIA	0,03314	0,04354	-0,00326	0,06954
FTSE 100	0,02506	0,03977	-0,00819	0,05831
Hang Seng	0,01857	0,05085	-0,02395	0,06108
Ibex 35	0,03703	0,05717	-0,01076	0,08483
Ibovespa	0,04486	0,04269	0,00917	0,08055
IPC	0,04084	0,03927	0,00801	0,07366
Nasdaq	0,03251	0,08841	-0,04141	0,10642
SMI	0,03572	0,05600	-0,01109	0,08254
S&P 500	0,03066	0,05279	-0,01347	0,07479
STI	0,00765	0,07982	-0,05908	0,07438

Em função do custo do mercado médio foi definido o ganho real e a perda real, o que viabiliza delinear a região onde ocorre respectivamente cada um deles. A Figura 22 apresenta o custo do mercado que torna possível identificar a região onde ocorre ganhos e perdas reais para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500, contemplando 8 janelas temporais de 2 anos.

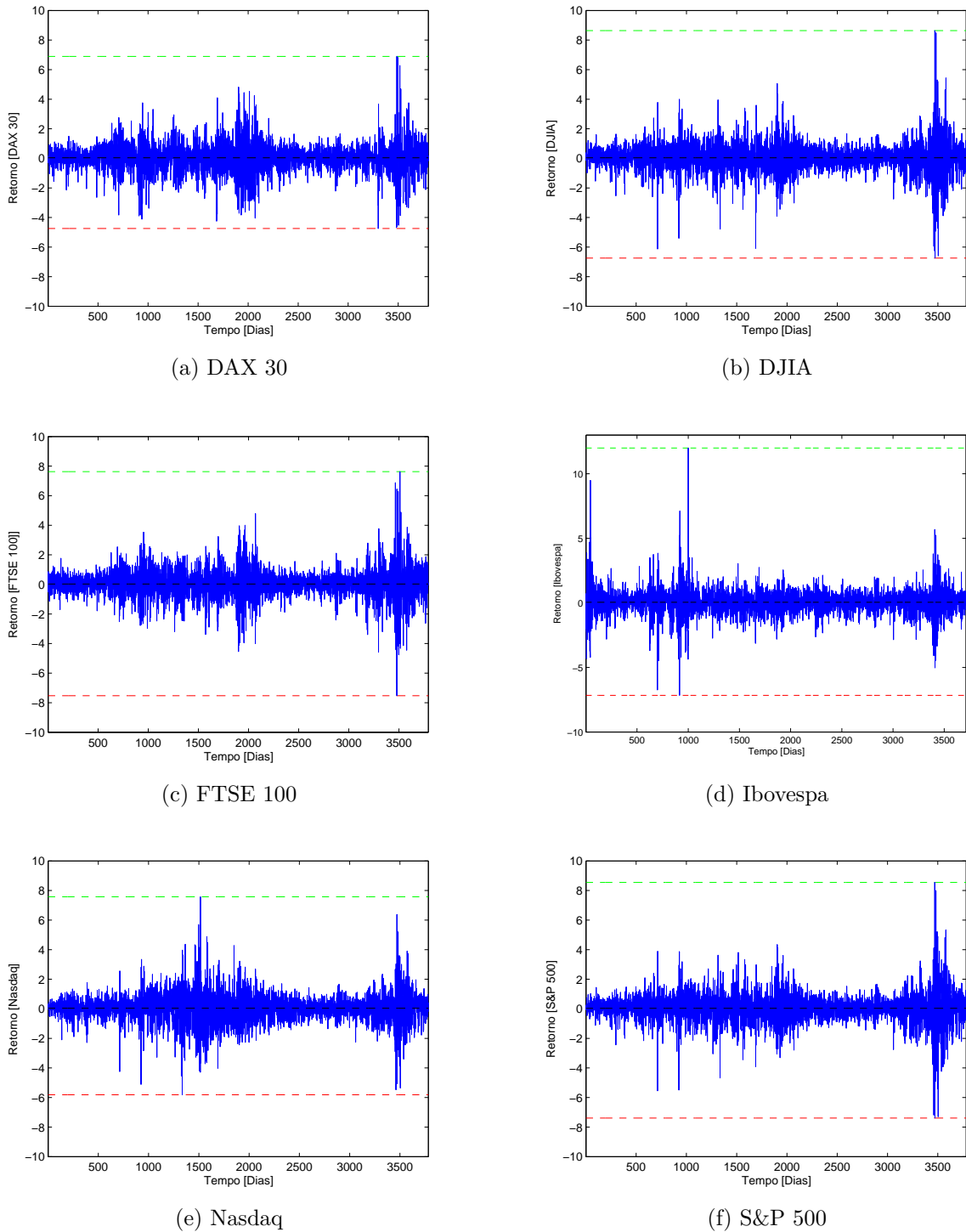


Figura 22 – A linha tracejada preta representa o custo do mercado. A região acima do custo do mercado limitada pela linha tracejada verde, que denota o retorno máximo, compreende os ganhos reais e a região abaixo do custo de mercado limitada pela linha tracejada vermelha denota as perdas reais.

Foi analisado função distribuição acumulada da quantidade de ocorrências dos ganhos reais em função do custo médio do mercado para cada índice acionário. Assim,  $C_i(j)$  foram normalizados de tal forma que  $0 \leq C_i(j) \leq 1$  o que tornou viável ajustar a quanti-

dade de vezes que ocorreram os ganhos reais para um dado custo do mercado ajustados a uma distribuição acumulada formalizada pela Equação 3.5. A Figura 23 apresenta os clusters definidos a partir dos parâmetros da distribuição acumulada que ajustaram a frequência dos ganhos reais para um dado custo do mercado para os índices estudados contemplando as 8 janelas temporais de 2 anos e construídos pelo emprego da técnica *K-means*.

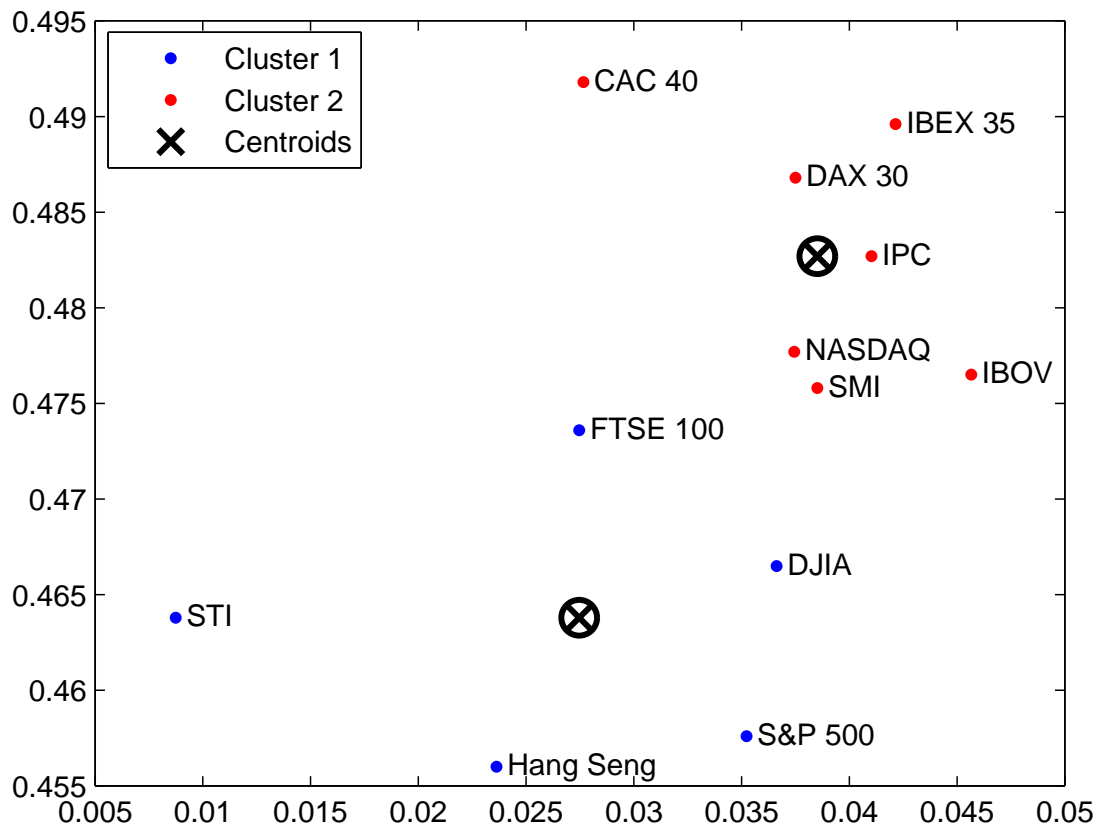


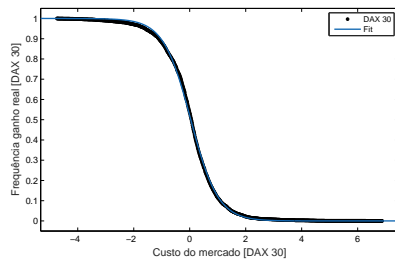
Figura 23 – Os índices que estão no cluster em azul são os menos arriscados, enquanto que os que estão no cluster em vermelho são os mais arriscados.

Os parâmetros referentes a distribuição acumulada que ajustaram a frequência dos ganhos reais para um dado custo do mercado para os índices investigados são apresentados na Tabela 15.

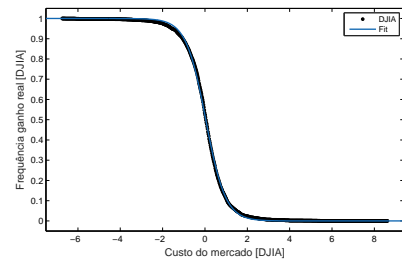
A Figura 24 mostra a frequência dos ganhos reais para um dado custo do mercado ajustadas a uma distribuição acumulada para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para o período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplando 8 janelas temporais de 2 anos.

Tabela 15 – Valores dos parâmetros da distribuição acumulada que ajustou a frequência dos ganhos reais para um dado custo do mercado

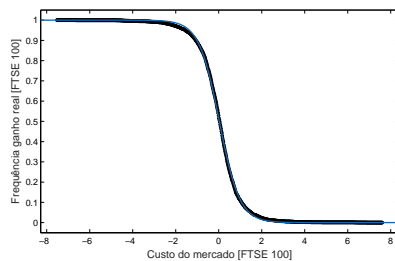
i	Parâmetros		SSE	R-square	Adj. R-square	RMSE
	a	$x_0$				
CAC 40	0,49180	0,02766	0,02580	0,99980	0,99980	0,00569
DAX 30	0,48680	0,03750	0,05805	0,99960	0,99960	0,00853
DJIA	0,46650	0,03663	0,03846	0,99980	0,99980	0,00694
FTSE 100	0,47360	0,02747	0,03647	0,99980	0,99980	0,00676
Hang Seng	0,45600	0,02363	0,05039	0,99970	0,99970	0,00795
Ibex 35	0,48960	0,04215	0,04177	0,99980	0,99980	0,00723
Ibovespa	0,47650	0,04566	0,02094	0,99990	0,99990	0,00512
IPC	0,48270	0,04103	0,02690	0,99980	0,99980	0,00581
Nasdaq	0,47770	0,03745	0,08154	0,99950	0,99950	0,01011
SMI	0,47580	0,03852	0,03516	0,99980	0,99980	0,00664
S&P 500	0,45760	0,03523	0,05047	0,99970	0,99970	0,00795
STI	0,46380	0,00874	0,03602	0,99980	0,99980	0,00672



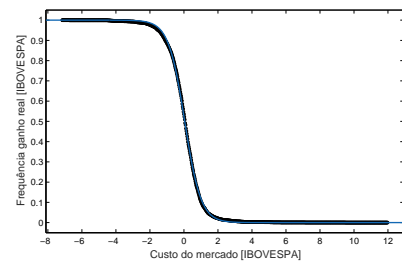
(a) DAX 30



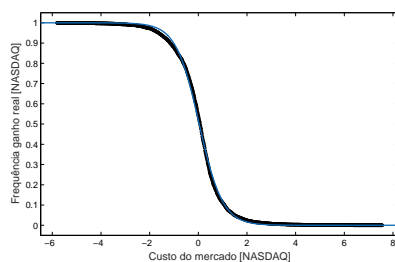
(b) DJIA



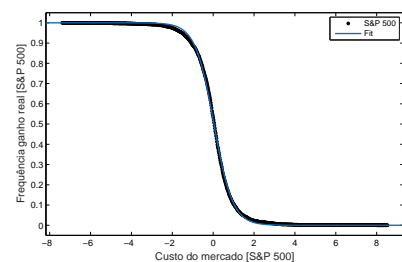
(c) FTSE 100



(d) Ibovespa



(e) Nasdaq



(f) S&amp;P 500

Figura 24 – A frequência dos ganhos reais para um dado custo de mercado ajustadas a uma distribuição acumulada.

Em decorrência da normalização efetuada no ganho real, foi viabilizado a obtenção da quantidade de vezes que ocorreram as perdas reais para um dado custo do mercado ajustados a uma distribuição acumulada formalizada pela Eq. 3.6. A Figura 25 apresenta os clusters definidos a partir dos parâmetros da distribuição acumulada que ajustaram a frequência das perdas reais para um dado custo do mercado para os índices estudados e construídos pelo emprego da técnica *K-means*.

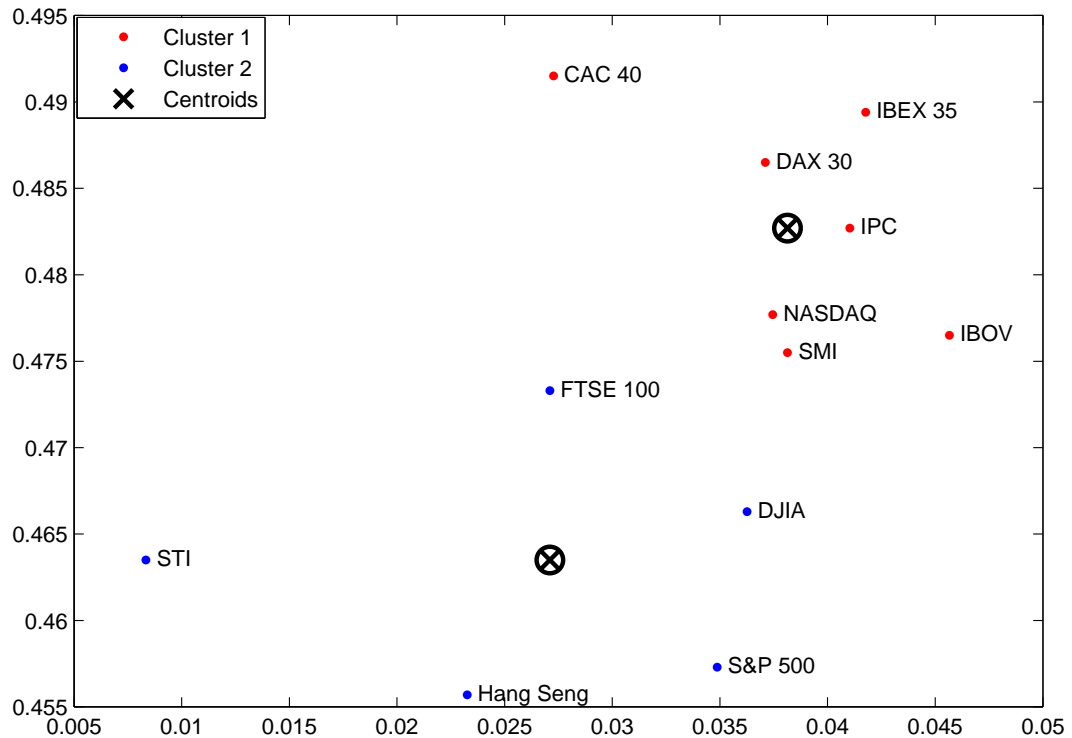


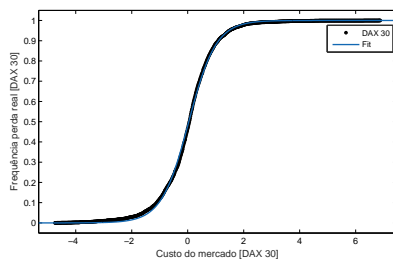
Figura 25 – Os índices que estão no cluster em azul são os menos arriscados, enquanto que os que estão no cluster em vermelho são os mais arriscados.

Os parâmetros referentes a distribuição acumulada que ajustaram a frequência das perdas reais para um dado custo do mercado para os índices investigados são apresentados na Tabela 16.

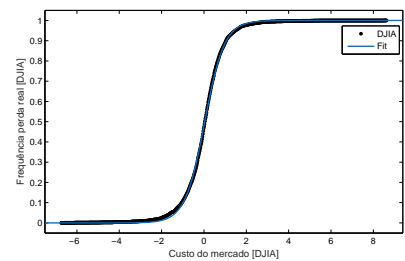
A Figura 26 mostra a frequência das perdas reais para um dado custo do mercado ajustadas a uma distribuição acumulada para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para o período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplando 8 janelas temporais de 2 anos.

Tabela 16 – Valores das distribuição acumulada que ajustou a frequência das perdas reais para um dado custo do mercado para os índices estudados

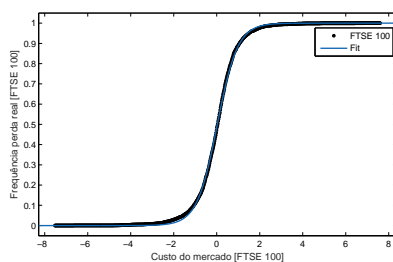
i	Parâmetros		SSE	R-square	Adj. R-square	RMSE
	b	$x'_0$				
CAC 40	0,49150	0,02727	0,02558	0,99980	0,99980	0,00566
DAX 30	0,48650	0,03711	0,05776	0,99960	0,99960	0,00851
DJIA	0,46630	0,03626	0,03812	0,99980	0,99980	0,00691
FTSE 100	0,47330	0,02710	0,03612	0,99980	0,99980	0,00673
Hang Seng	0,45570	0,02326	0,04994	0,99970	0,99970	0,00791
Ibex 35	0,48940	0,04177	0,04153	0,99980	0,99980	0,00721
Ibovespa	0,47650	0,04566	0,02094	0,99990	0,99990	0,00512
IPC	0,48270	0,04103	0,02690	0,99980	0,99980	0,00581
Nasdaq	0,47770	0,03745	0,08154	0,99950	0,9995	0,01011
SMI	0,47550	0,03814	0,03487	0,99980	0,99980	0,00661
S&P 500	0,45730	0,03487	0,05010	0,99970	0,99970	0,00792
STI	0,46350	0,00834	0,03547	0,99980	0,99980	0,00667



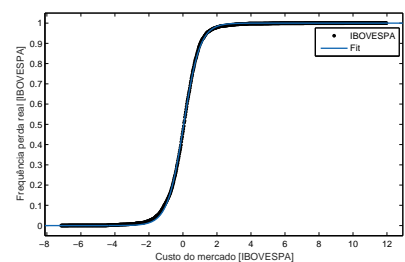
(a) DAX 30



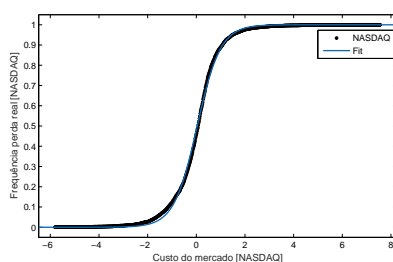
(b) DJIA



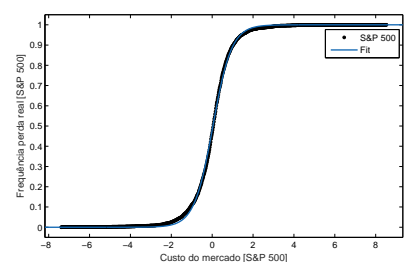
(c) FTSE 100



(d) Ibovespa



(e) Nasdaq



(f) S&P 500

Figura 26 – A frequência das perdas reais para um dado custo de mercado ajustadas a uma distribuição acumulada.



Para obter o valor de  $C_i(j)$  em termos percentuais foi aplicado a Eq. 3.5. A Tabela 17 apresenta os valores de  $C_i(j)$  em termos decimais e convertidos em termos percentuais representados por  $C_i(j)^*$ .

Tabela 17 – Valores de  $C_i(j)$  em termos percentuais.

<b>i</b>	$C_i(j)$	$C_i(j)^*$ (%)
CAC 40	0,02746	47,40452
DAX 30	0,03730	41,09449
DJIA	0,03644	49,72252
FTSE 100	0,02728	49,85917
Hang Seng	0,02344	46,20423
Ibex 35	0,04196	48,95905
Ibovespa	0,04566	47,61450
IPC	0,04103	54,34289
Nasdaq	0,03745	43,69169
SMI	0,03833	43,16632
S&P 500	0,03505	46,57841
STI	0,00854	41,77422

Ao vislumbrar um dado valor de custo de mercado é viável obter o risco instantâneo para um índice de mercado através de uma simples subtração entre a frequência das perdas reais e ganhos reais. A Figura 27 mostra o risco instantâneo do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para o período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplando 8 janelas temporais de 2 anos.

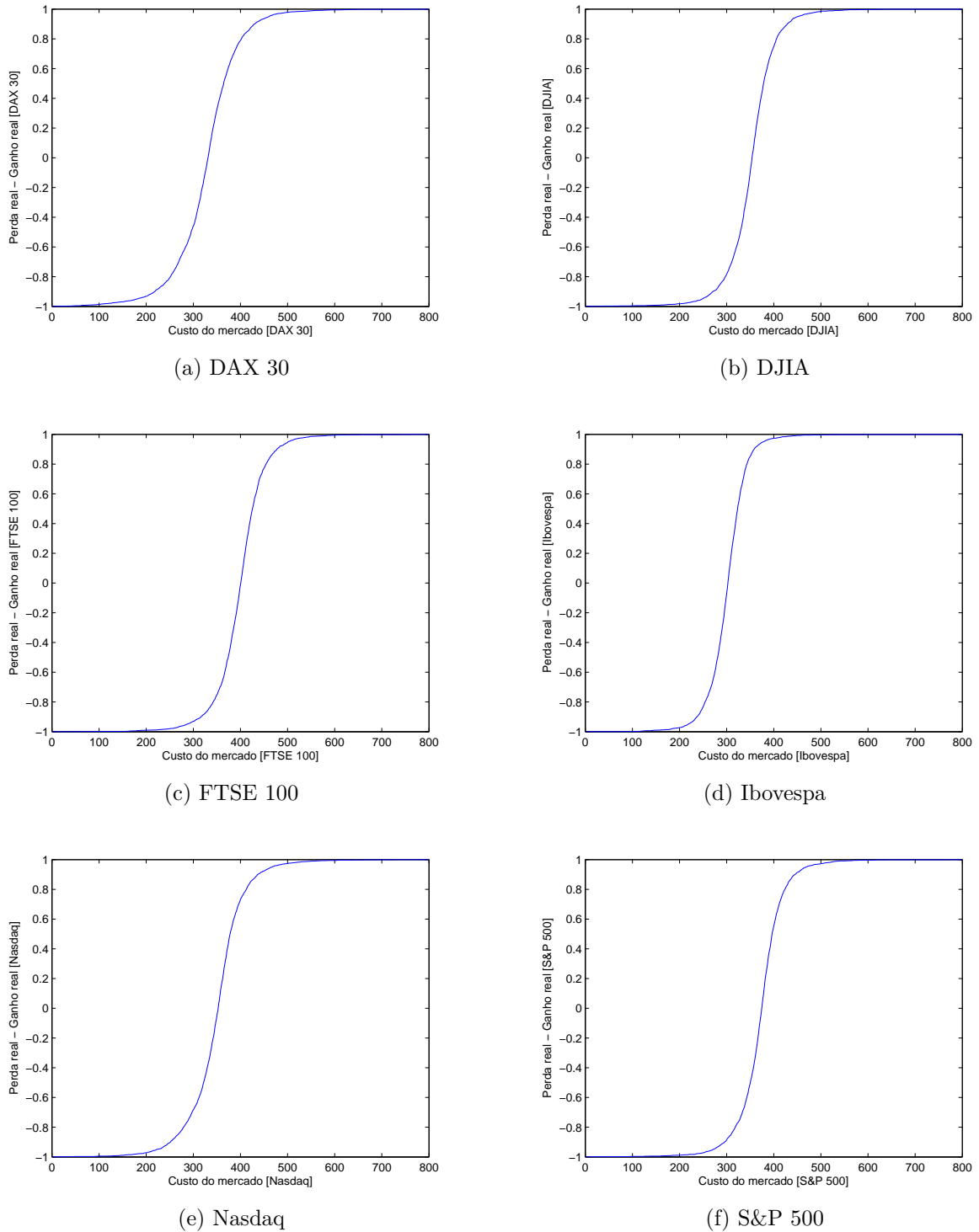


Figura 27 – Risco instantâneo do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500.

O risco esperado pode ser analisado através de 2 regiões distintas. Para primeira região,  $P(\vartheta_i(C_i(j)) | C_i(j) \geq C_i(j)^*)$  implica que o risco esperado do mercado é alto, ou seja, caso  $C_i(j) \geq C_i(j)^*$ , a probabilidade de obter perda real é maior que a probabilidade de obter ganho real. Do contrário, se  $P(\vartheta_i(C_i(j)) | C_i(j) \leq C_i(j)^*)$  implica que o risco esperado

do mercado é baixo, isto é, caso  $C_i(j) \leq C_i(j)^*$ , a probabilidade de obter ganho real é maior que a probabilidade de obter perda real. A Tabela 18 apresenta estes resultados.

Tabela 18 – Valores do risco esperado para os índices de mercado acionários contemplando a região de alto risco  $C_i(j) \geq C_i(j)^*$  e a de baixo risco  $C_i(j) \leq C_i(j)^*$ .

<b>i</b>	$C_i(j)^*$ (%)	<b>Risco Alto</b>	<b>Risco Baixo</b>
CAC 40	47,40452	95,21355	4,78645
DAX 30	41,09449	95,07971	4,92029
DJIA	49,72252	95,27798	4,72202
FTSE 100	49,85917	95,68093	4,31907
Hang Seng	46,20423	96,68972	3,31028
Ibex 35	48,95905	95,11301	4,88699
Ibovespa	47,61450	96,03633	3,96367
IPC	54,34289	95,33918	4,66082
Nasdaq	43,69169	95,60797	4,39203
SMI	43,16632	96,10181	3,89819
S&P 500	46,57841	96,27602	3,72398
STI	41,77422	96,45385	3,54615

Baseado nos fundamentos propostos de ganho e perda real, foi observado que a paridade ocorre em  $C_i(j)^*$ . Assim,  $C_i(j)^*$  o lucro é zero, pois nesse ponto a perda real equipara-se ao ganho real e é exatamente onde ocorre o equilíbrio do processo denotado por  $E_i(t)$ . A Figura 28 mostra o ponto onde há paridade entre perda real média e ganho real médio para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para o período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplando 8 janelas temporais de 2 anos.

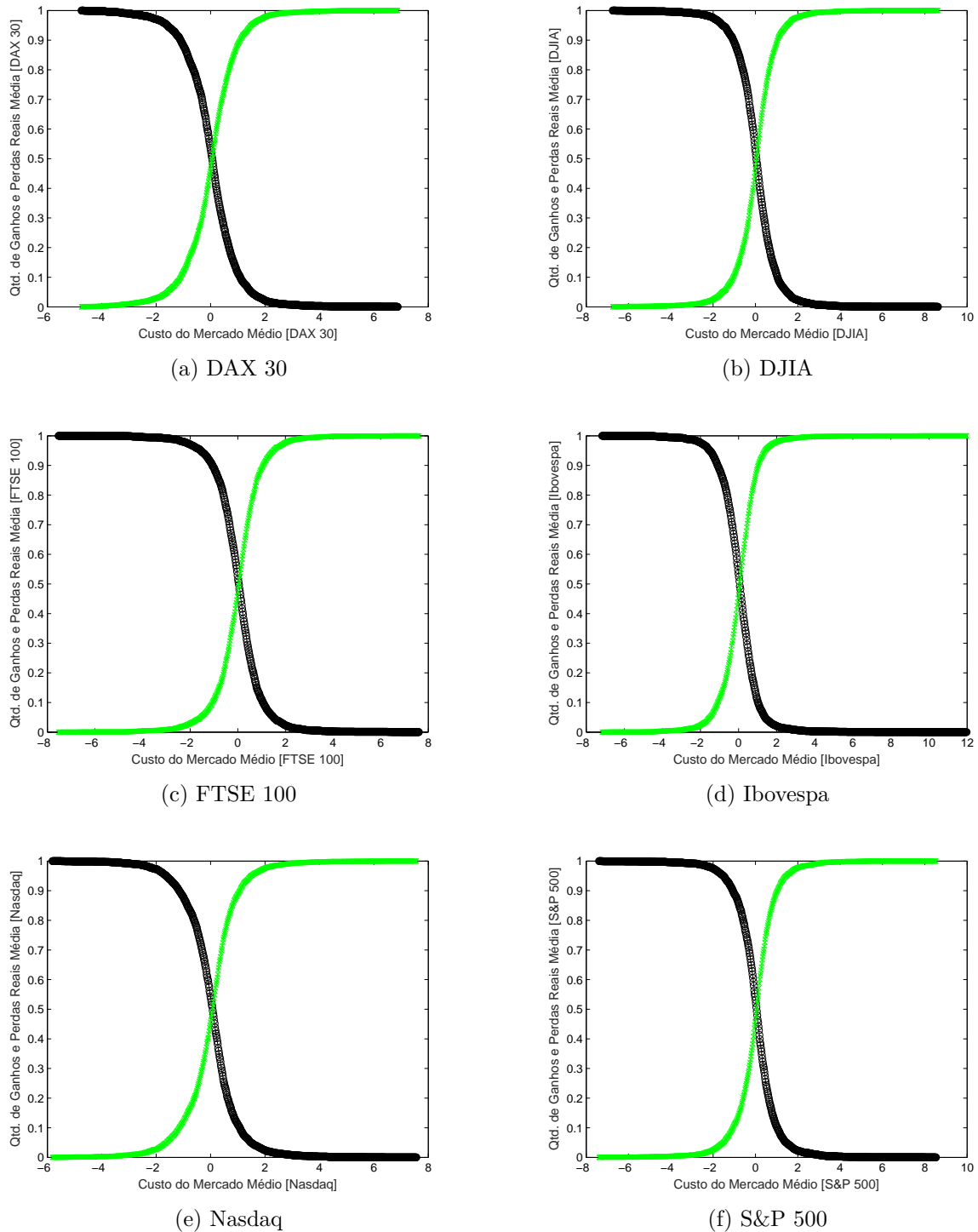


Figura 28 – A junção da curva da perda real com a curva do ganho real indica o ponto onde há paridade entre perda real e ganho real para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 é evidenciado no cruzamento entre as curvas das perdas reais em verde e as curvas do ganho real em preto.

A etapa seguinte, consistiu em aplicar a Eq. 2.10 para gerar a perda máxima sofrida por cada índice de mercado acionário analisado, contemplando 8 janelas temporais de 2 anos e calcular a métrica do  $CVaR$  ambos considerando um nível de confiança de 95%

considerando um nível de confiança de 95%. A Tabela 19 apresenta estes resultados.

Tabela 19 – Valores do  $VaR$  e os respectivos  $VaR$  médios e  $CVaR$  médios para os índices de mercado acionários contemplando 8 janelas temporais de 2 anos e considerando um nível de confiança de 95%.

i	VaR (95%)								$\delta$ VaR	$\delta$ CVaR
CAC 40	1,47	2,28	2,19	2,52	3,14	1,21	1,83	2,88	2,19	2,48
DAX 30	1,24	2,44	2,48	2,83	3,41	1,46	1,67	2,76	2,29	2,64
DJIA	1,12	1,72	1,95	1,89	2,05	1,10	1,34	3,00	1,77	1,93
FTSE 100	0,96	1,61	2,13	1,92	2,41	0,93	1,64	2,50	1,76	2,00
Hang Seng	2,00	3,99	3,11	2,57	2,02	1,33	2,57	3,57	2,64	2,92
Ibex 35	1,44	2,49	2,16	2,79	2,60	1,13	1,71	2,87	2,15	2,43
Ibovespa	3,87	3,63	4,09	3,00	2,92	2,52	2,65	4,18	3,36	3,65
IPC	3,57	2,59	3,66	2,37	1,78	1,65	2,28	3,08	2,62	2,85
Nasdaq	1,53	1,95	3,25	3,95	2,71	1,39	1,75	3,54	2,51	2,90
SMI	1,08	2,06	1,86	1,84	2,43	1,08	1,48	2,37	1,77	2,03
S&P 500	1,02	1,76	2,17	2,15	2,12	1,09	1,39	3,47	1,90	2,07
STI	1,48	2,65	2,97	2,19	1,84	1,00	1,77	3,29	2,15	2,34

Em seguida, foi realizada a comparação entre os valores médio do  $VaR$  e  $CVaR$  com os valores da região de baixo risco do modelo propostos. A Tabela 20 apresenta estes resultados.

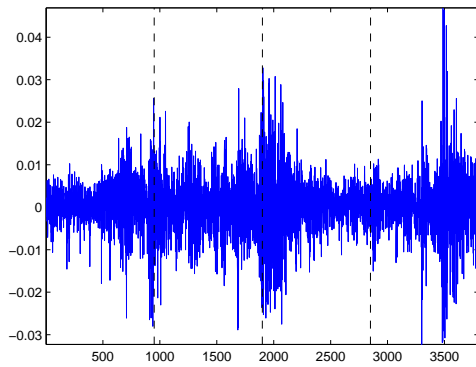
Tabela 20 – Comparativo entre os valores do  $VaR$  e  $CVaR$  com os valores da região de baixo risco e para cada índice investigado e suas respectivas variações percentuais.

i	$\delta VaR$ (95%)	$\Delta\%$	$\delta CVaR$ (95%)	$\Delta\%$	Risco Baixo
CAC 40	2,19	13,24	2,48	107,26	5,14
DAX 30	2,29	15,28	2,64	86,36	4,92
DJIA	1,77	9,04	1,93	94,30	3,75
FTSE 100	1,76	13,64	2,00	116,00	4,32
Hang Seng	2,64	10,61	2,92	13,36	3,31
Ibex 35	2,15	13,02	2,43	101,23	4,89
Ibovespa	3,36	8,63	3,65	8,49	3,96
IPC	2,62	8,78	2,85	64,56	4,69
Nasdaq	2,51	15,54	2,90	51,38	4,39
SMI	1,77	14,69	2,03	92,12	3,90
S&P 500	1,90	8,95	2,07	79,71	3,72
STI	2,15	8,84	2,34	51,28	3,54

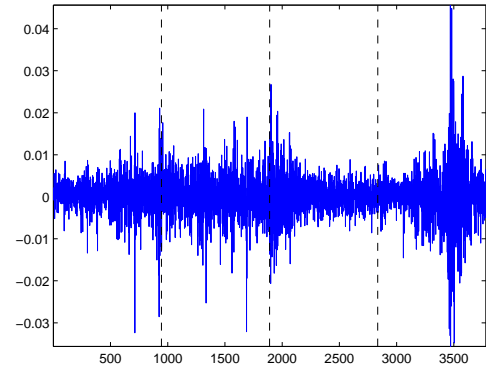
O comparativo entre os valores do  $VaR$  e  $CVaR$  com os valores da região de baixo risco permite verificar que o  $VaR$  que e o  $CVaR$  subestimam o risco para todos os índices analisados considerando as 8 janelas temporais de 2 anos.

### 4.3 4 Janelas temporais de 4 anos

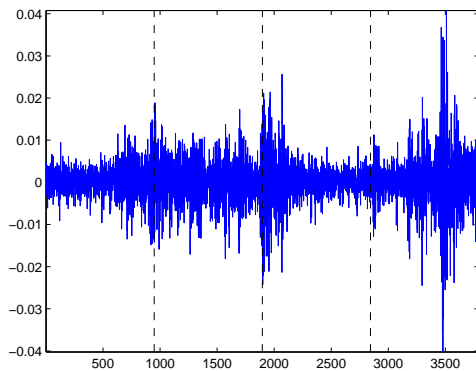
As séries de retornos foram calculadas pelo emprego da Eq. 3.1. A Figura 29 retrata as séries de retornos diários do DAX 30, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para período que vai de 02 de Janeiro de 1995 até 30 de Dezembro de 2010, contemplando 4 janelas temporais de 4 anos.



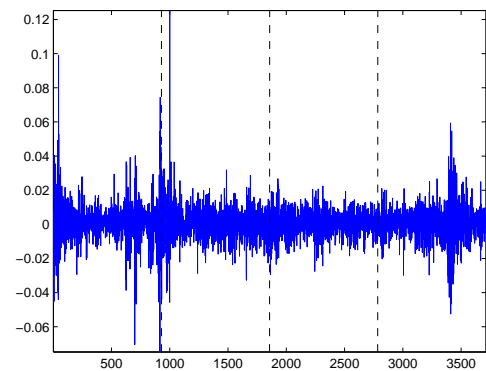
(a) DAX 30



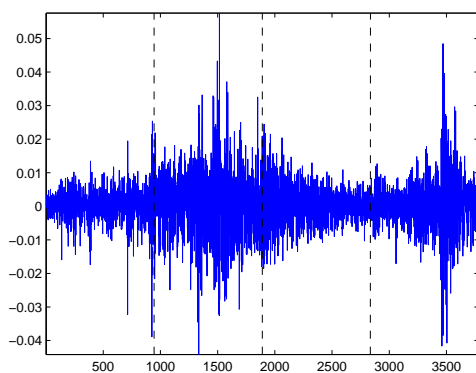
(b) DJIA



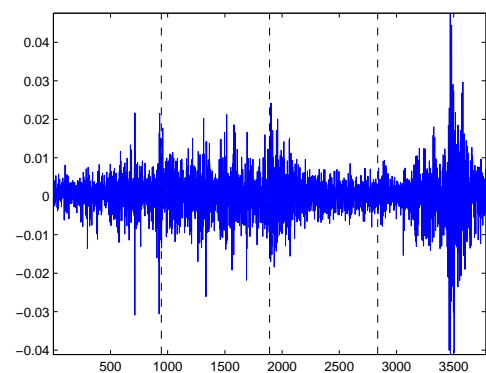
(c) FTSE 100



(d) Ibovespa



(e) Nasdaq



(f) S&amp;P 500

Figura 29 – As séries de retornos do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa e Nasdaq e S&P 500.

As séries de retornos denotadas por  $R_i(t)$  apresentavam escalas de desvios distintas. Assim, para uniformizar as séries de retornos com o intuito de facilitar o processo de análise foi utilizado a padronização sendo está realizada pelo emprego da Eq. 3.2 e que originaram as séries denotadas por  $r_i(t)$ . A Figura 30 retrata as séries de retornos diários padronizados do DAX 30, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para período que vai de 02 de Janeiro de 1995 até 30 de Dezembro de 2010, contemplando 4 janelas temporais de 4 anos.

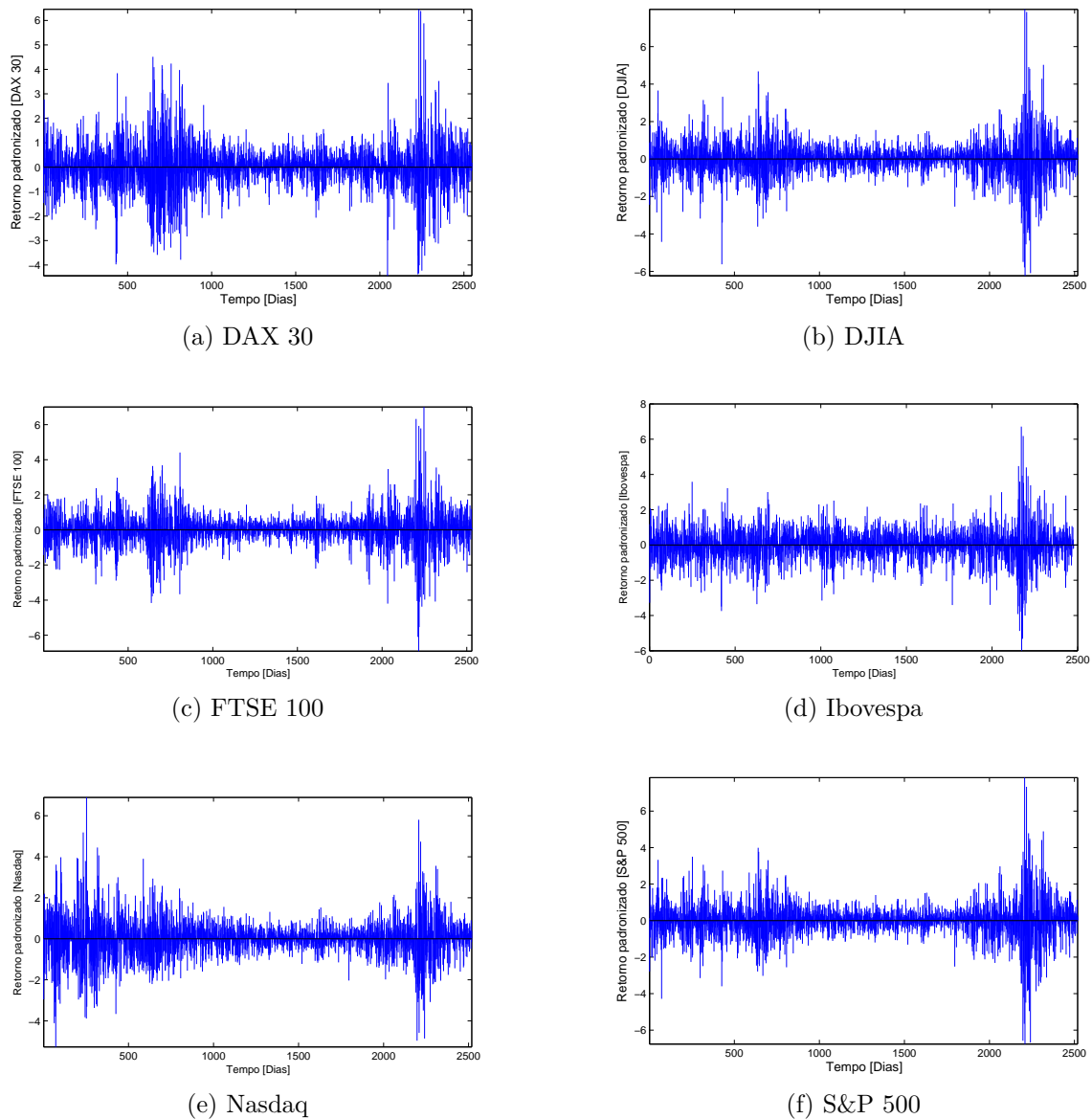


Figura 30 – A evolução temporal para todas as séries de retornos se desenvolve ao redor de uma média constante sendo representada pela linha em negrito. As observações acima da linha preta são os retornos positivos (ganhos) e as abaixo são os retornos negativos (perdas)

Foi definido o custo do mercado sendo este denotado por  $C_i(j)$  para o índice  $i$  no



tempo  $t$  e contado a quantidade de perdas e ganhos para diferentes valores de  $C_i(j)$  e sendo variado na totalidade da amplitude de  $r_i(t)$ .

Desta forma, a perda real ocorre quando  $r_i(t) < C_i(j)$ , enquanto que o ganho real sucede quando  $r_i(t) \geq C_i(j)$ . A tabela 21 contempla os valores referentes à variação mínima, à variação máxima e ao custo do mercado para os índices acionários considerando as 4 janelas temporais de 4 anos.

Tabela 21 – Valores referentes à variação mínima, à variação máxima e ao custo do mercado para os índices acionários.

<b>i</b>	<b>Vmín</b>	<b>Vmáx</b>	$C_i(j)$
CAC 40	-6,38927	7,14686	0,02747
DAX 30	-4,74484	6,89211	0,03730
DJIA	-6,74355	8,64135	0,03679
FTSE 100	-7,52770	7,62495	0,02728
Hang Seng	-8,17420	9,56800	0,02345
Ibex 35	-6,61799	6,98512	0,04196
Ibovespa	-7,16000	11,99661	0,04566
IPC	-8,50324	11,99661	0,04103
Nasdaq	-5,81232	7,57643	0,03745
SMI	-6,38510	8,49555	0,03786
S&P 500	-7,38833	8,54905	0,03500
STI	-6,49330	9,07094	0,009124

Foi adotado à estratégia de caminhar no tempo o que possibilitou a construção de 4 janelas temporais de 4 anos que levou a análise do comportamento referente aos ganhos e perdas reais levando em consideração a região que contempla o custo médio do mercado para cada índice de mercado acionário estudado no decurso destas janelas temporais. A Figura 31 apresenta a relação entre a quantidade de ganhos e perdas reais dado os custos do mercado para cada janela temporal.

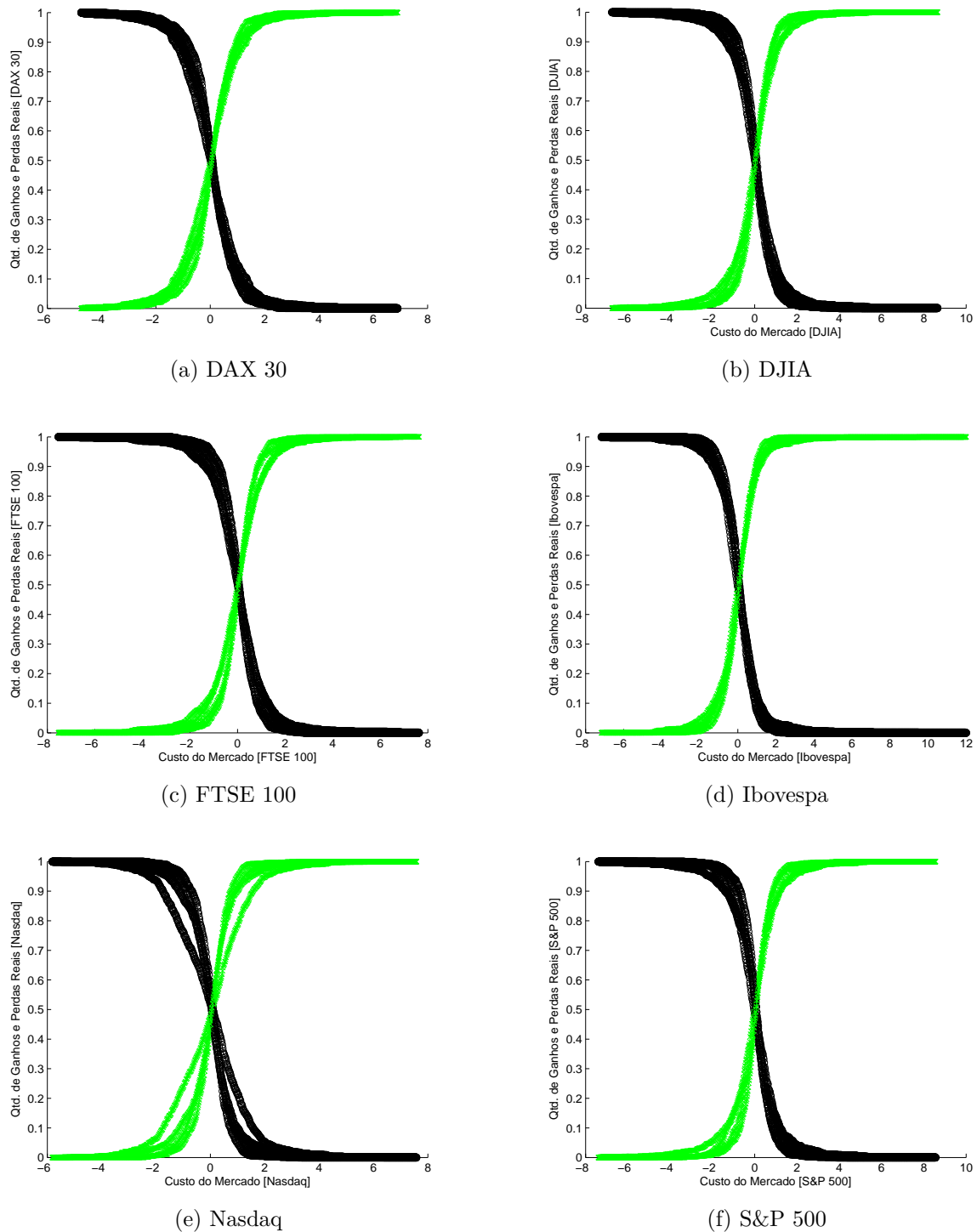


Figura 31 – A frequência dos ganhos e perdas reais considerando os custos do mercado para cada janela temporal.

Os intervalos de confiança referentes a frequência dos ganhos e perdas reais considerando os custos do mercado para cada janela temporal foram estimados pelo emprego de uma t-Student. A tabela 22 apresenta os valores das médias, desvio padrão, limite inferior e limite superior para a frequência dos ganhos e perdas reais considerando os custos do mercado para cada janela temporal.

Tabela 22 – Valores referentes a média, desvio padrão, limite inferior e limite superior para a frequência dos ganhos e perdas reais considerando os custos do mercado para cada janela temporal.

i	Média	Desvio Padrão	Intervalo Inferior	Intervalo Superior
CAC 40	0,02620	0,02213	-0,00901	0,06141
DAX 30	0,03570	0,03647	-0,02233	0,09373
DJIA	0,03542	0,03383	-0,01841	0,08926
FTSE 100	0,02550	0,02565	-0,01531	0,06632
Hang Seng	0,02192	0,01670	-0,00466	0,04850
Ibex 35	0,03915	0,04282	-0,02899	0,10729
Ibovespa	0,04493	0,02683	0,00223	0,08763
IPC	0,03983	0,03481	-0,01557	0,09522
Nasdaq	0,03272	0,03234	-0,01874	0,08417
SMI	0,03653	0,04142	-0,02938	0,10245
S&P 500	0,03187	0,03742	-0,02767	0,09141
STI	0,01020	0,04850	-0,06697	0,08737

Em função do custo do mercado médio foi definido o ganho real e a perda real, o que viabiliza delinear a região onde ocorre respectivamente cada um deles. A Figura 32 apresenta o custo do mercado que torna possível identificar a região onde ocorre ganhos e perdas reais para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 no período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplando 4 janelas temporais de 4 anos.

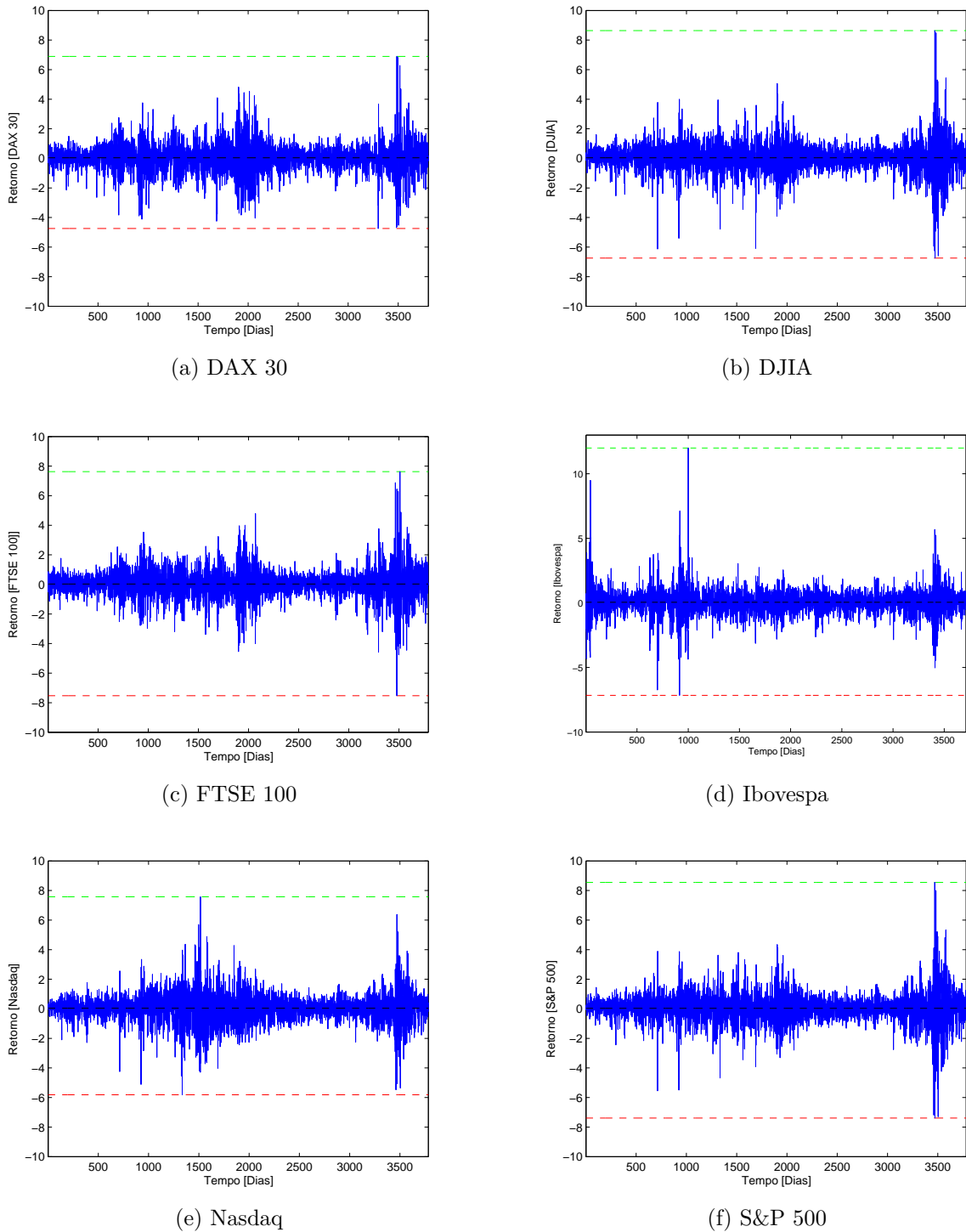


Figura 32 – A linha tracejada preta representa o custo do mercado. A região acima do custo do mercado limitada pela linha tracejada verde, que denota o retorno máximo, compreende os ganhos reais e a região abaixo do custo de mercado limitada pela linha tracejada vermelha denota as perdas reais.

Foi analisado função distribuição acumulada da quantidade de ocorrências dos ganhos reais em função do custo médio do mercado para cada índice acionário.

Assim,  $C_i(j)$  foram normalizados de tal forma que  $0 \leq C_i(j) \leq 1$  o que tornou

viável ajustar a quantidade de vezes que ocorreram os ganhos reais para um dado custo do mercado ajustados a uma distribuição acumulada formalizada pela Equação 3.5. A Figura 33 apresenta os clusters definidos a partir dos parâmetros da distribuição acumulada que ajustaram a frequência dos ganhos reais para um dado custo do mercado para os índices estudados contemplando as 4 janelas temporais de 4 anos e construídos pelo emprego da técnica *K-means*.

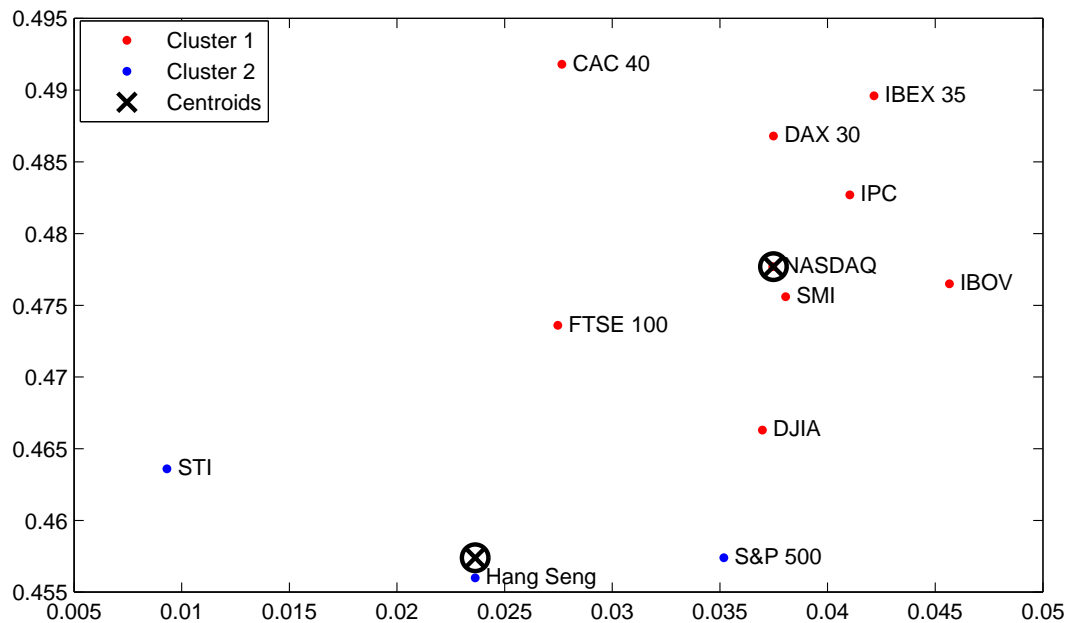


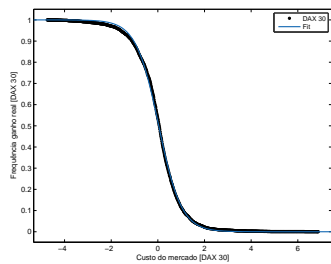
Figura 33 – Os índices que estão no cluster em azul são os menos arriscados, enquanto que os que estão no cluster em vermelho são os mais arriscados.

Os parâmetros referentes a distribuição acumulada que ajustaram a frequência dos ganhos reais para um dado custo do mercado para os índices investigados são apresentados na Tabela 23.

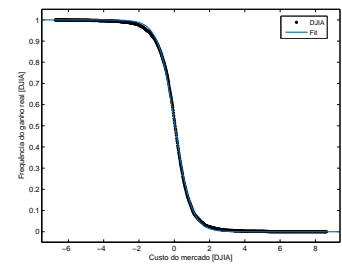
A Figura 34 mostra a frequência dos ganhos reais para um dado custo do mercado ajustadas a uma distribuição acumulada para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para o período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplando 4 janelas temporais de 4 anos.

Tabela 23 – Valores dos parâmetros da distribuição acumulada que ajustou a frequência dos ganhos reais para um dado custo do mercado.

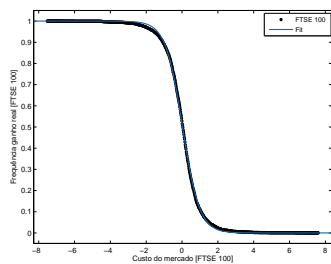
i	Parâmetros		SSE	R-square	Adj. R-square	RMSE
	a	$x_0$				
CAC 40	0.4918	0.02766	0.02583	0.9998	0.9998	0.005689
DAX 30	0.4868	0.03749	0.05805	0.9996	0.9996	0.008529
DJIA	0.4663	0.03697	0.03855	0.9998	0.9998	0.00695
FTSE 100	0.4736	0.02747	0.03647	0.9998	0.9998	0.00676
Hang Seng	0.456	0.02363	0.05039	0.9997	0.9997	0.007946
Ibex 35	0.4896	0.04216	0.04177	0.9998	0.9998	0.007234
Ibovespa	0.4765	0.04566	0.02094	0.9999	0.9999	0.005123
IPC	0.4827	0.04103	0.0269	0.9998	0.9998	0.005806
Nasdaq	0.4777	0.03745	0.08229	0.9995	0.9995	0.01015
SMI	0.4756	0.03805	0.03526	0.9998	0.9998	0.006648
S&P 500	0.4574	0.03518	0.05063	0.9997	0.9997	0.007965
STI	0.4636	0.009316	0.03602	0.9998	0.9998	0.006718



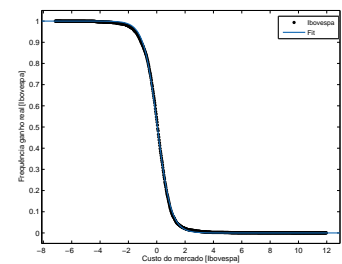
(a) DAX 30



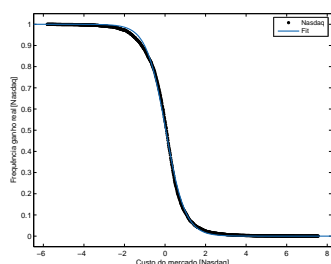
(b) DJIA



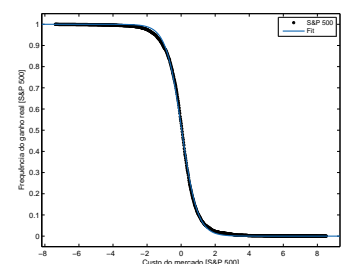
(c) FTSE 100



(d) Ibovespa



(e) Nasdaq



(f) S&P 500

Figura 34 – A frequência dos ganhos reais para um dado custo de mercado ajustadas a uma distribuição acumulada.

Em decorrência da normalização efetuada no ganho real, foi viabilizado a obtenção da quantidade de vezes que ocorreram as perdas reais para um dado custo do mercado ajustados a uma distribuição acumulada formalizada pela Eq. 3.6. A Figura 35 apresenta os clusters definidos a partir dos parâmetros da distribuição acumulada que ajustaram a frequência das perdas reais para um dado custo do mercado para os índices estudados e construídos pelo emprego da técnica *K-means*.

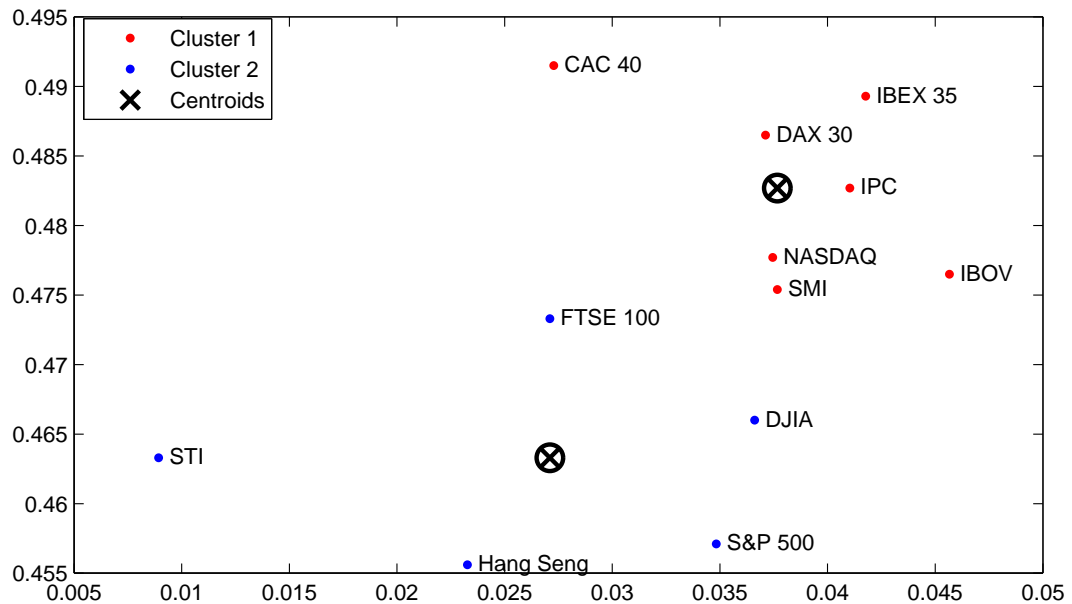


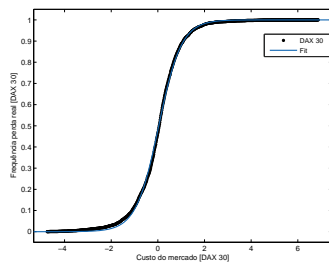
Figura 35 – Os índices que estão no cluster em azul são os menos arriscados, enquanto que os que estão no cluster em vermelho são os mais arriscados.

Os parâmetros referentes a distribuição acumulada que ajustaram a frequência das perdas reais para um dado custo do mercado para os índices investigados são apresentados na Tabela 24.

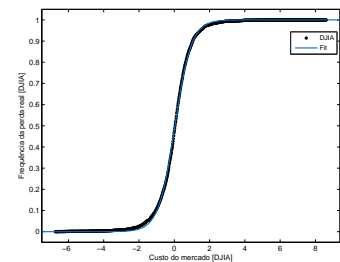
A Figura 36 mostra a frequência das perdas reais para um dado custo do mercado ajustadas a uma distribuição acumulada para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para o período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplando 4 janelas temporais de 4 anos.

Tabela 24 – Valores das distribuição acumulada que ajustou a frequência das perdas reais para um dado custo do mercado para os índices estudados.

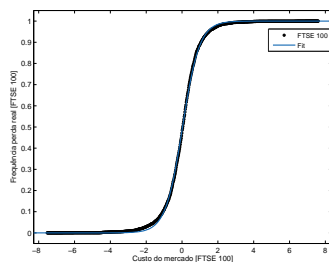
i	Parâmetros		SSE	R-square	Adj. R-square	RMSE
	b	$x'_0$				
CAC 40	0.4915	0.02728	0.02557	0.9998	0.9998	0.005661
DAX 30	0.4865	0.03712	0.05776	0.9996	0.9996	0.008508
DJIA	0.466	0.03661	0.03819	0.9998	0.9998	0.006918
FTSE 100	0.4733	0.0271	0.03611	0.9998	0.9998	0.006727
Hang Seng	0.4556	0.02327	0.04992	0.9997	0.9997	0.007909
Ibex 35	0.4893	0.04177	0.04153	0.9998	0.9998	0.007214
Ibovespa	0.4765	0.04566	0.02094	0.9999	0.9999	0.005123
IPC	0.4827	0.04103	0.0269	0.9998	0.9998	0.005806
Nasdaq	0.4777	0.03745	0.08229	0.9995	0.9995	0.01015
SMI	0.4754	0.03767	0.03496	0.9998	0.9998	0.006619
S&P 500	0.4571	0.03483	0.05024	0.9997	0.9997	0.007934
STI	0.4633	0.008932	0.03546	0.9998	0.9998	0.006666



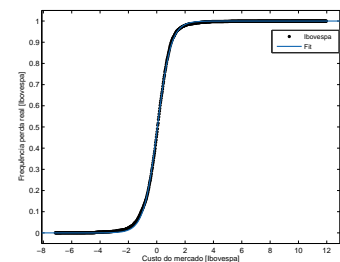
(a) DAX 30



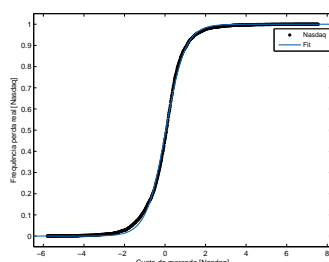
(b) DJIA



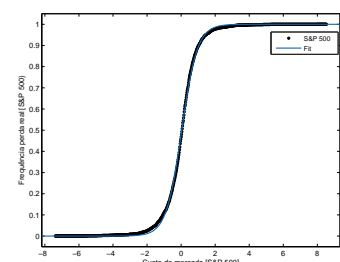
(c) FTSE 100



(d) Ibovespa



(e) Nasdaq



(f) S&P 500

Figura 36 – A frequência das perdas reais para um dado custo de mercado ajustadas a uma distribuição acumulada.



Para obter o valor de  $C_i(j)$  em termos percentuais foi aplicado a Eq. 3.5. A Tabela 25 apresenta os valores de  $C_i(j)$  em termos decimais e convertidos em termos percentuais representados por  $C_i(j)^*$ .

Tabela 25 – Valores de  $C_i(j)$  em termos percentuais.

<b>i</b>	$C_i(j)$	$C_i(j)^*$
CAC 40	0,02747	47,40456
DAX 30	0,03730	41,09449
DJIA	0,03679	44,07137
FTSE 100	0,02728	49,85917
Hang Seng	0,02345	46,20425
Ibex 35	0,04196	48,95909
Ibovespa	0,04566	37,61450
IPC	0,04103	41,67968
Nasdaq	0,03745	43,69169
SMI	0,03786	43,16317
S&P 500	0,03500	46,57813
STI	0,00912	41,77797

Ao vislumbrar um dado valor de custo de mercado é viável obter o risco instantâneo para um índice de mercado através de uma simples subtração entre a frequência das perdas reais e ganhos reais. A Figura 37 mostra o risco instantâneo do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para o período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplando 4 janelas temporais de 4 anos.

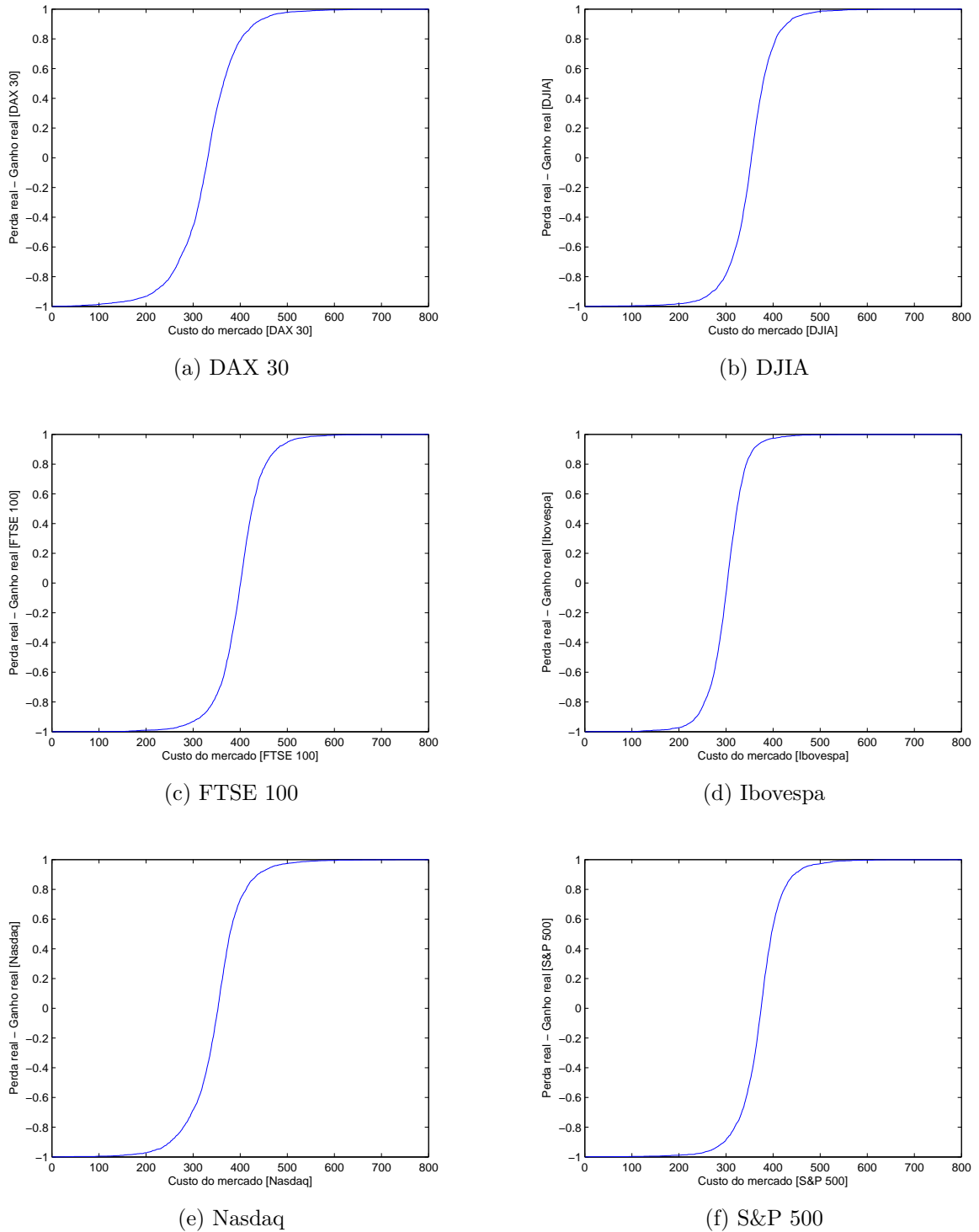


Figura 37 – Risco instantâneo do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500.

O risco esperado pode ser analisado através de 2 regiões distintas. Para primeira região,  $P(\vartheta_i(C_i(j)) | C_i(j) \geq C_i(j)^*)$  implica que o risco esperado do mercado é alto, ou seja, caso  $C_i(j) \geq C_i(j)^*$ , a probabilidade de obter perda real é maior que a probabilidade de obter ganho real. Do contrário, se  $P(\vartheta_i(C_i(j)) | C_i(j) \leq C_i(j)^*)$  implica que o risco esperado

do mercado é baixo, isto é, caso  $C_i(j) \leq C_i(j)^*$ , a probabilidade de obter ganho real é maior que a probabilidade de obter perda real. A Tabela 26 apresenta estes resultados.

Tabela 26 – Valores do risco esperado para os índices de mercado acionários contemplando a região de alto risco  $C_i(j) \geq C_i(j)^*$  e a de baixo risco  $C_i(j) \leq C_i(j)^*$ .

<b>i</b>	$C_i(j)$ (%)	<b>Risco Alto</b>	<b>Risco Baixo</b>
CAC 40	47,40456	95,40	4,60
DAX 30	41,09449	95,08	4,92
DJIA	44,07137	96,25	3,75
FTSE 100	49,85917	95,68	4,32
Hang Seng	46,20425	96,69	3,31
Ibex 35	48,95909	95,11	4,89
Ibovespa	37,61450	96,02	3,98
IPC	41,67968	95,34	4,66
Nasdaq	43,69169	95,61	4,39
SMI	43,16317	96,10	3,90
S&P 500	46,57813	96,28	3,72
STI	41,77797	96,46	3,54

Baseado nos fundamentos propostos de ganho e perda real, foi observado que a paridade ocorre em  $C_i(j)^*$ . Assim,  $C_i(j)^*$  o lucro é zero, pois nesse ponto a perda real equipara-se ao ganho real e é exatamente onde ocorre o equilíbrio do processo denotado por  $E_i(t)$ . A Figura 38 mostra o ponto onde há paridade entre perda real média e ganho real médio para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para o período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplando 4 janelas temporais de 4 anos.

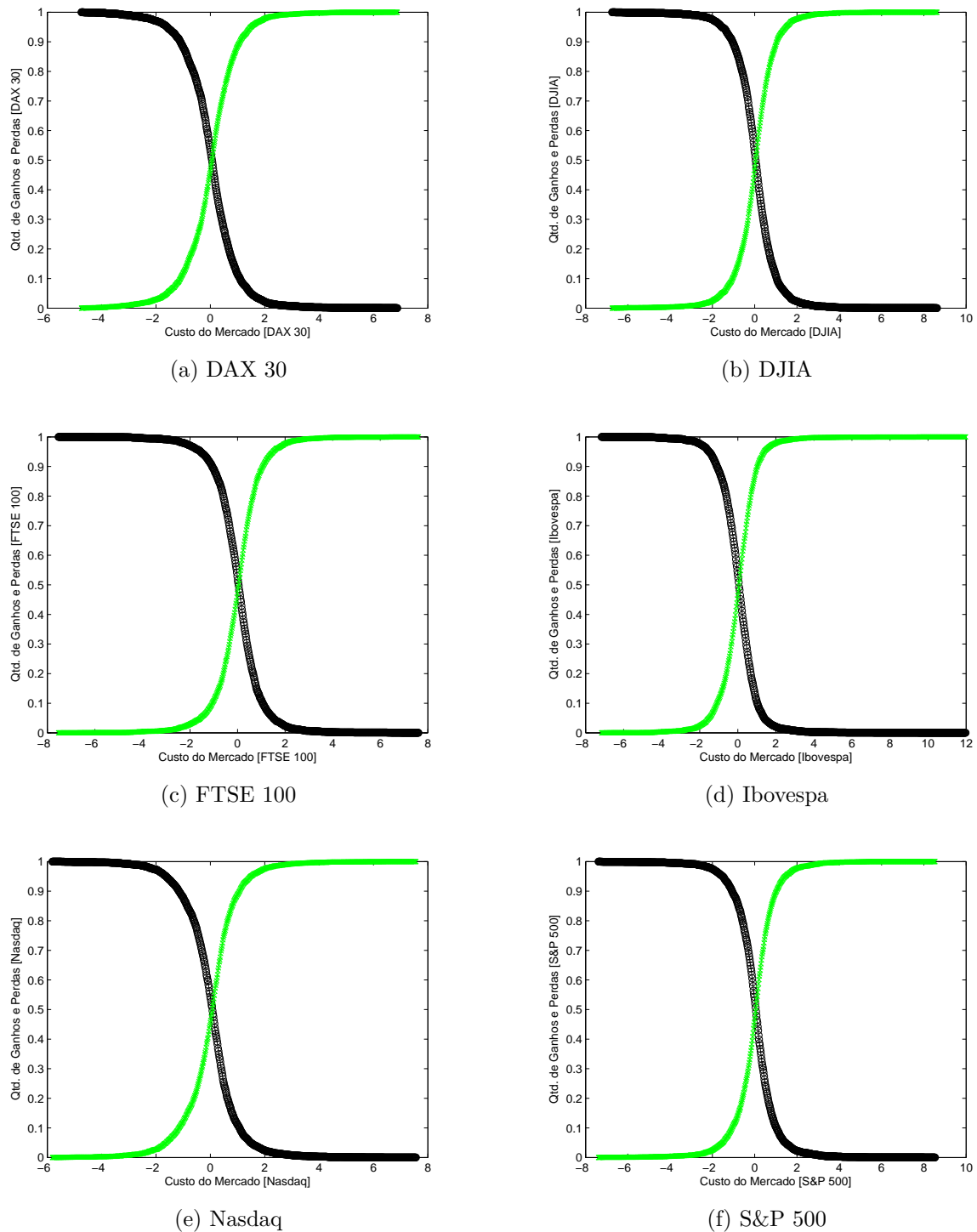


Figura 38 – A junção da curva da perda real com a curva do ganho real indica o ponto onde há paridade entre perda real e ganho real para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 é evidenciado no cruzamento entre as curvas das perdas reais em verde e as curvas do ganho real em preto.

A etapa seguinte, consistiu em aplicar a Eq. 2.10 para gerar a perda máxima sofrida por cada índice de mercado acionário analisado e calcular a métrica do  $CVaR$  considerando um nível de confiança de 95% e contemplando 4 janelas temporais de 4 anos

e . A Tabela 27 apresenta estes resultados.

Tabela 27 – Valores do  $VaR$  e os respectivos  $VaR$  médios e  $CVaR$  médios para os índices de mercado acionários contemplando 4 janelas temporais de 4 anos e considerando um nível de confiança de 95%.

i	VaR (95%)				$\delta$ VaR	$\delta$ CVaR
CAC 40	2,06	2,28	1,97	2,30	2,15	2,44
DAX 30	1,89	2,65	2,49	2,36	2,35	2,70
DJIA	1,39	1,95	1,53	2,21	1,77	1,93
FTSE 100	1,40	2,11	1,68	2,21	1,85	2,10
Hang Seng	2,53	2,83	1,68	3,15	2,55	2,82
Ibex 35	2,01	2,49	1,80	2,34	2,16	2,44
Ibovespa	3,80	3,62	2,73	3,19	3,34	3,78
IPC	3,05	3,16	1,76	2,50	2,62	2,85
Nasdaq	1,72	3,49	2,15	2,61	2,49	2,87
SMI	1,69	1,86	1,79	1,93	1,82	2,09
S&P 500	1,44	2,16	1,62	2,36	1,89	2,06
STI	1,68	2,55	1,50	2,44	2,04	2,22

Em seguida, foi realizada a comparação entre os valores médio do  $VaR$  e dos os valores médio do  $CVaR$  com a região de baixo risco do modelo propostos. A Tabela 28 apresenta estes resultados.

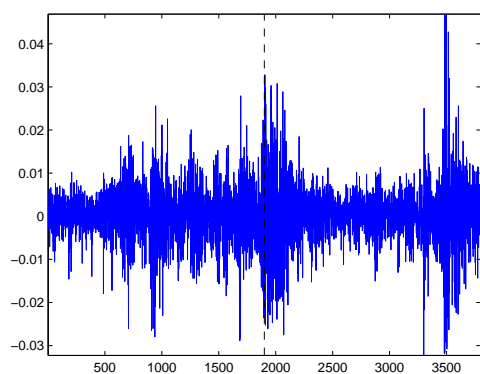
Tabela 28 – Comparativo entre os valores do  $VaR$  e  $CVaR$  com os valores da região de baixo risco e para cada índice investigado e suas respectivas variações percentuais.

i	$\delta VaR$ (95%)	$\Delta\%$	$\delta CVaR$ (95%)	$\Delta\%$	Risco Baixo
CAC 40	2,15	13,49	2,44	88,52	4,60
DAX 30	2,35	14,89	2,70	82,22	4,92
DJIA	1,77	9,04	1,93	94,30	3,75
FTSE 100	1,85	13,51	2,10	105,71	4,32
Hang Seng	2,55	10,59	2,82	17,38	3,31
Ibex 35	2,16	12,96	2,44	100,41	4,89
Ibovespa	3,34	13,17	3,78	5,29	3,98
IPC	2,62	8,78	2,85	63,51	4,66
Nasdaq	2,49	15,26	2,87	52,96	4,39
SMI	1,82	14,84	2,09	86,60	3,90
S&P 500	1,89	8,99	2,06	80,58	3,72
STI	2,04	8,82	2,22	59,46	3,54

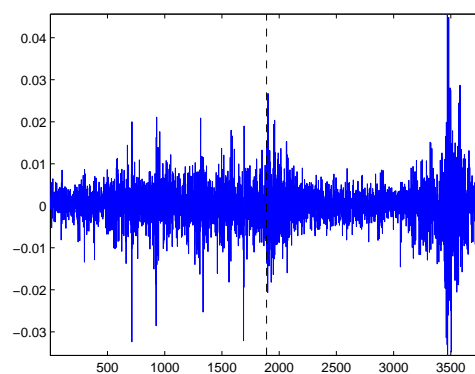
O comparativo entre os valores do  $VaR$  e  $CVaR$  com os valores da região de baixo risco permite verificar que o  $VaR$  que e o  $CVaR$  subestimam o risco para todos os índices analisados considerando as 4 janelas temporais de 4 anos.

## 4.4 2 Janelas temporais de 8 anos

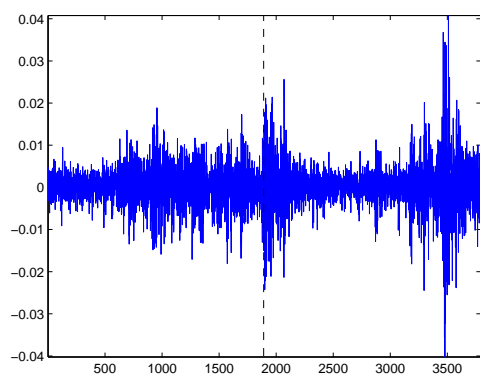
As séries de retornos foram calculadas pelo emprego da Eq. 3.1. A Figura 39 retrata as séries de retornos diários do DAX 30, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para período que vai de 02 de Janeiro de 1995 até 30 de Dezembro de 2010, contemplando 2 janelas temporais de 8 anos.



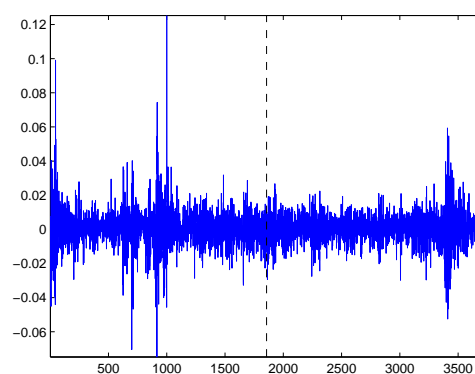
(a) DAX 30



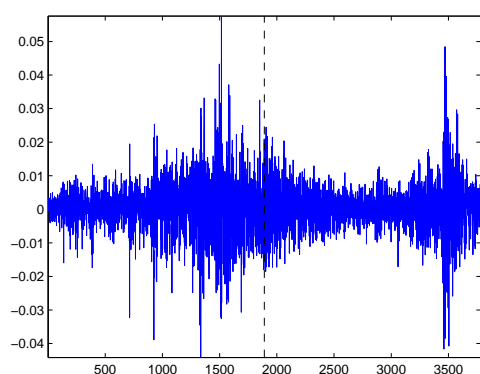
(b) DJIA



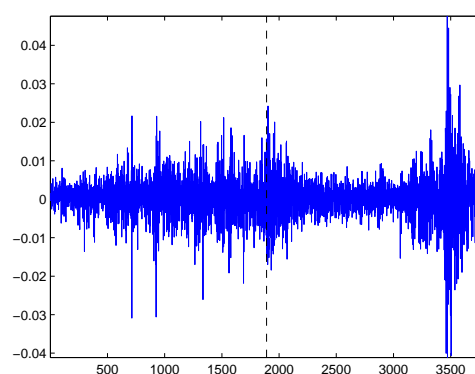
(c) FTSE 100



(d) Ibovespa



(e) Nasdaq



(f) S&amp;P 500

Figura 39 – As séries de retornos do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa e Nasdaq e S&P 500.

As séries de retornos denotadas por  $R_i(t)$  apresentavam escalas de desvios distintas. Assim, para uniformizar as séries de retornos com o intuito de facilitar o processo de análise foi utilizado a padronização sendo está realizada pelo emprego da Eq. 3.2 e que originaram as séries denotadas por  $r_i(t)$ . A Figura 40 retrata as séries de retornos diários padronizados do DAX 30, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para período que vai de 02 de Janeiro de 1995 até 30 de Dezembro de 2010, contemplando 2 janelas temporais de 8 anos.

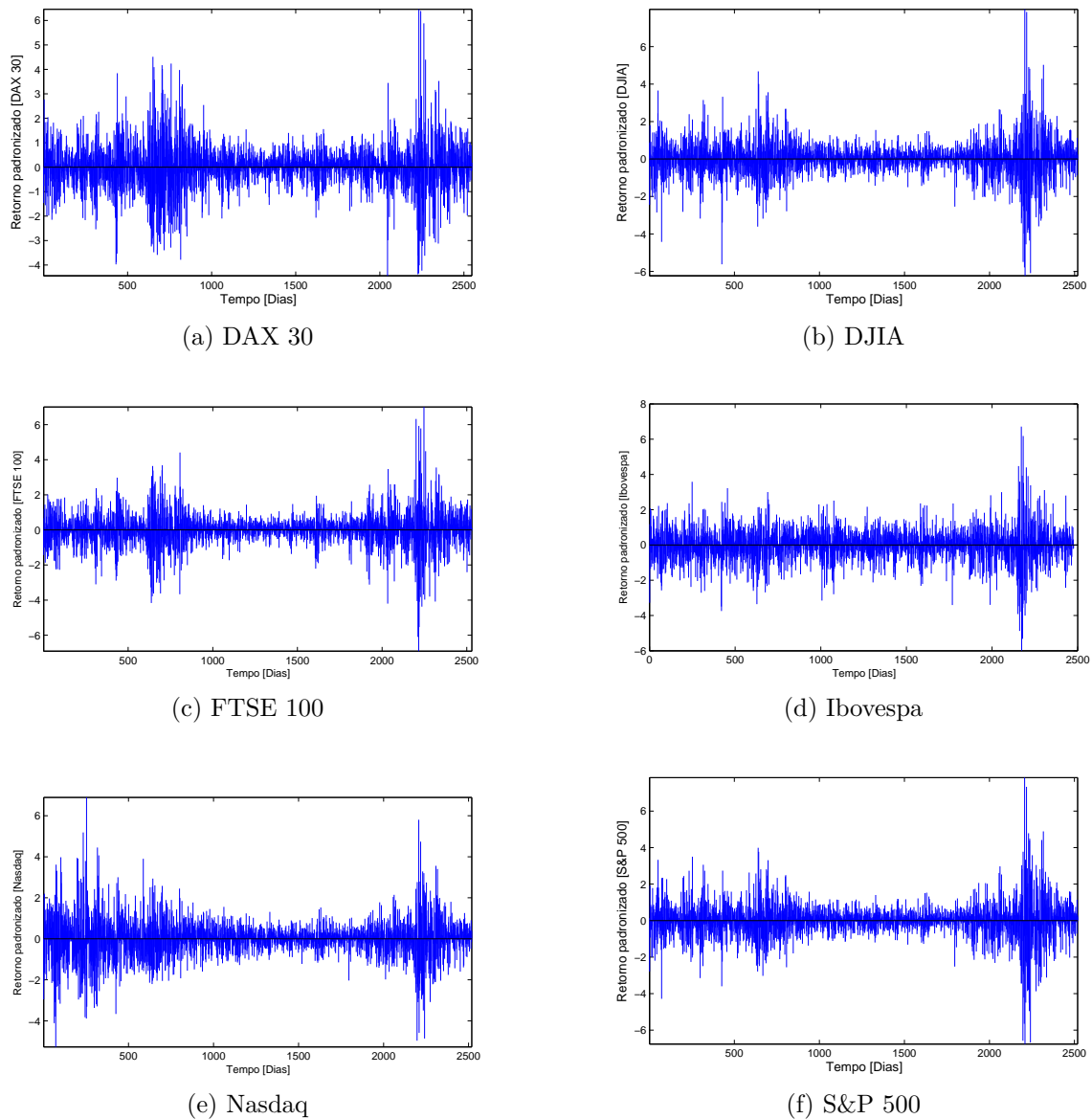


Figura 40 – A evolução temporal para todas as séries se desenvolve ao redor de uma média constante sendo representada pela linha em negrito. As observações acima da linha preta são os retornos positivos (ganhos) e as abaixo são os retornos negativos (perdas)

Foi definido o custo do mercado sendo este denotado por  $C_i(j)$  para o índice  $i$  no



tempo  $t$  e contado a quantidade de perdas e ganhos para diferentes valores de  $C_i(j)$  e sendo variado na totalidade da amplitude de  $r_i(t)$ .

Desta forma, a perda real ocorre quando  $r_i(t) < C_i(j)$ , enquanto que o ganho real sucede quando  $r_i(t) \geq C_i(j)$ . A tabela 29 contempla os valores referentes à variação mínima, à variação máxima e ao custo do mercado para os índices acionários considerando as 2 janelas temporais de 8 anos.

Tabela 29 – Valores referentes à variação mínima, à variação máxima e ao custo do mercado para os índices acionários.

<b>i</b>	<b>Vmín</b>	<b>Vmáx</b>	$C_i(j)$
CAC 40	-6,38927	7,14686	0,02747
DAX 30	-4,74484	6,89211	0,03731
DJIA	-6,74355	8,64135	0,03678
FTSE 100	-7,52770	7,62495	0,02729
Hang Seng	-8,17420	9,56800	0,02345
Ibex 35	-6,61799	6,98512	0,04248
Ibovespa	-7,16000	11,99661	0,045655
IPC	-8,50324	7,21964	0,04530
Nasdaq	-5,81232	7,57643	0,03691
SMI	-6,38510	8,49555	0,03772
S&P 500	-7,38833	8,54905	0,034375
STI	-6,49330	9,07094	0,00913

Foi adotado à estratégia de caminhar no tempo o que possibilitou a construção de 2 janelas temporais de 8 anos que levou a análise do comportamento referente aos ganhos e perdas reais levando em consideração a região que contempla o custo médio do mercado para cada índice de mercado acionário estudado no decurso destas janelas temporais. A Figura 41 apresenta a relação entre a quantidade de ganhos e perdas reais dado os custos do mercado para cada janela temporal.

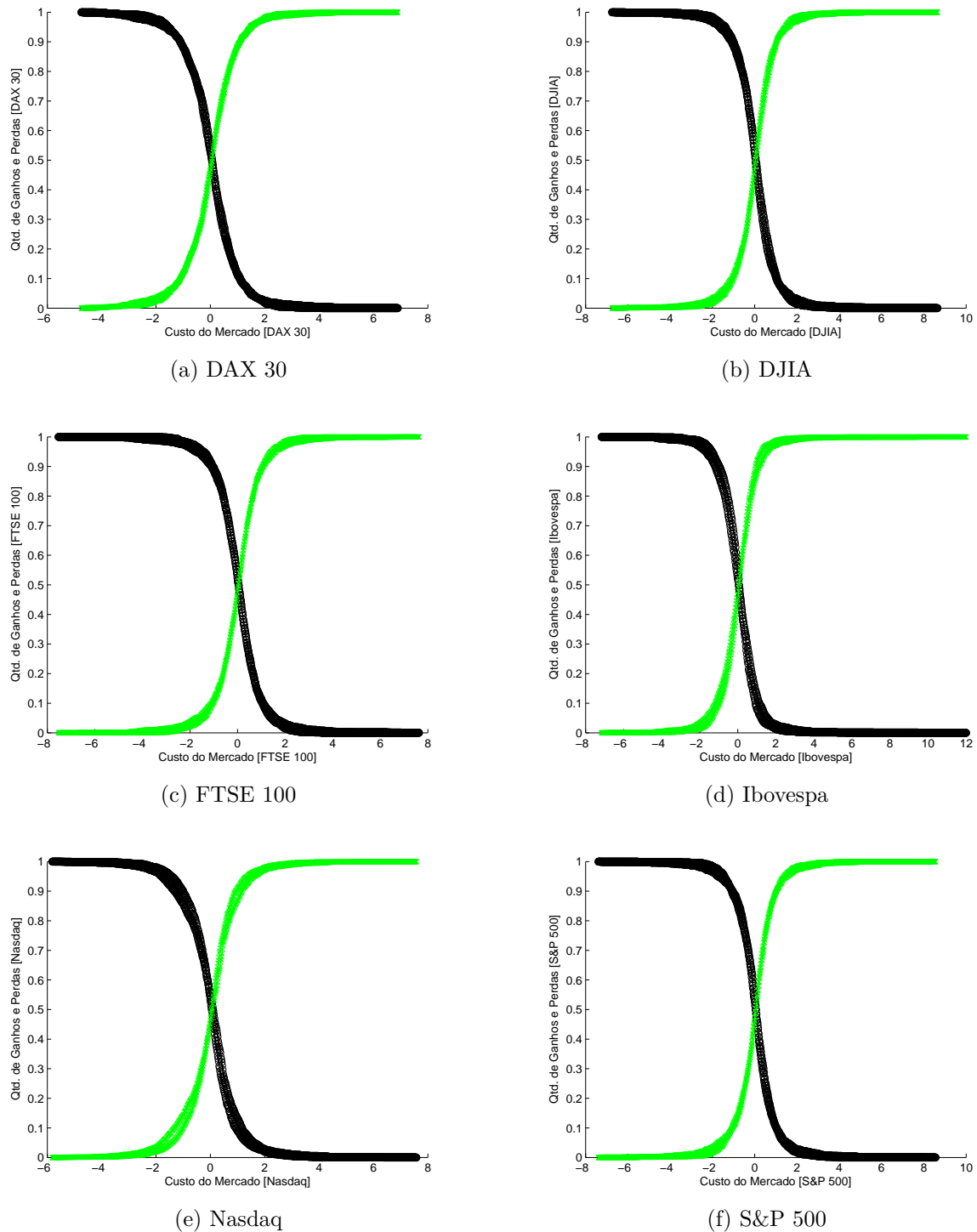


Figura 41 – A frequência dos ganhos e perdas reais considerando os custos do mercado para cada janela temporal.

Os intervalos de confiança referentes a frequência dos ganhos e perdas reais considerando os custos do mercado para cada janela temporal foram estimados pelo emprego de uma t-Student. A tabela 30 apresenta os valores das médias, desvio padrão, limite inferior e limite superior para a frequência dos ganhos e perdas reais considerando os custos do mercado para cada janela temporal.

Tabela 30 – Valores referente a média, desvio padrão, limite inferior e limite superior para a frequência dos ganhos e perdas reais considerando os custos do mercado para cada janela temporal.

i	Média	Desvio Padrão	Intervalo Inferior	Intervalo Superior
CAC 40	0,02768	0,01088	-0,07005	0,12542
DAX 30	0,03733	0,00073	0,03081	0,04385
DJIA	0,03686	0,02350	-0,17426	0,24799
FTSE 100	0,02722	0,00100	0,01820	0,03625
Hang Seng	0,02321	0,01952	-0,15216	0,19859
Ibex 35	0,04259	0,00333	0,01270	0,07248
Ibovespa	0,04527	0,02289	-0,16038	0,25093
IPC	0,04145	0,03683	-0,28941	0,37231
Nasdaq	0,03656	0,01299	-0,08011	0,15323
SMI	0,03758	0,01962	-0,13868	0,21384
S&P 500	0,03429	0,01008	-0,05628	0,12486
STI	0,00890	0,04067	-0,35652	0,37432

Em função do custo do mercado médio foi definido o ganho real e a perda real, o que viabiliza delinear a região onde ocorre respectivamente cada um deles. A Figura 42 apresenta o custo do mercado que torna possível identificar a região onde ocorre ganhos e perdas reais para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 no período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplando 2 janelas temporais de 8 anos.

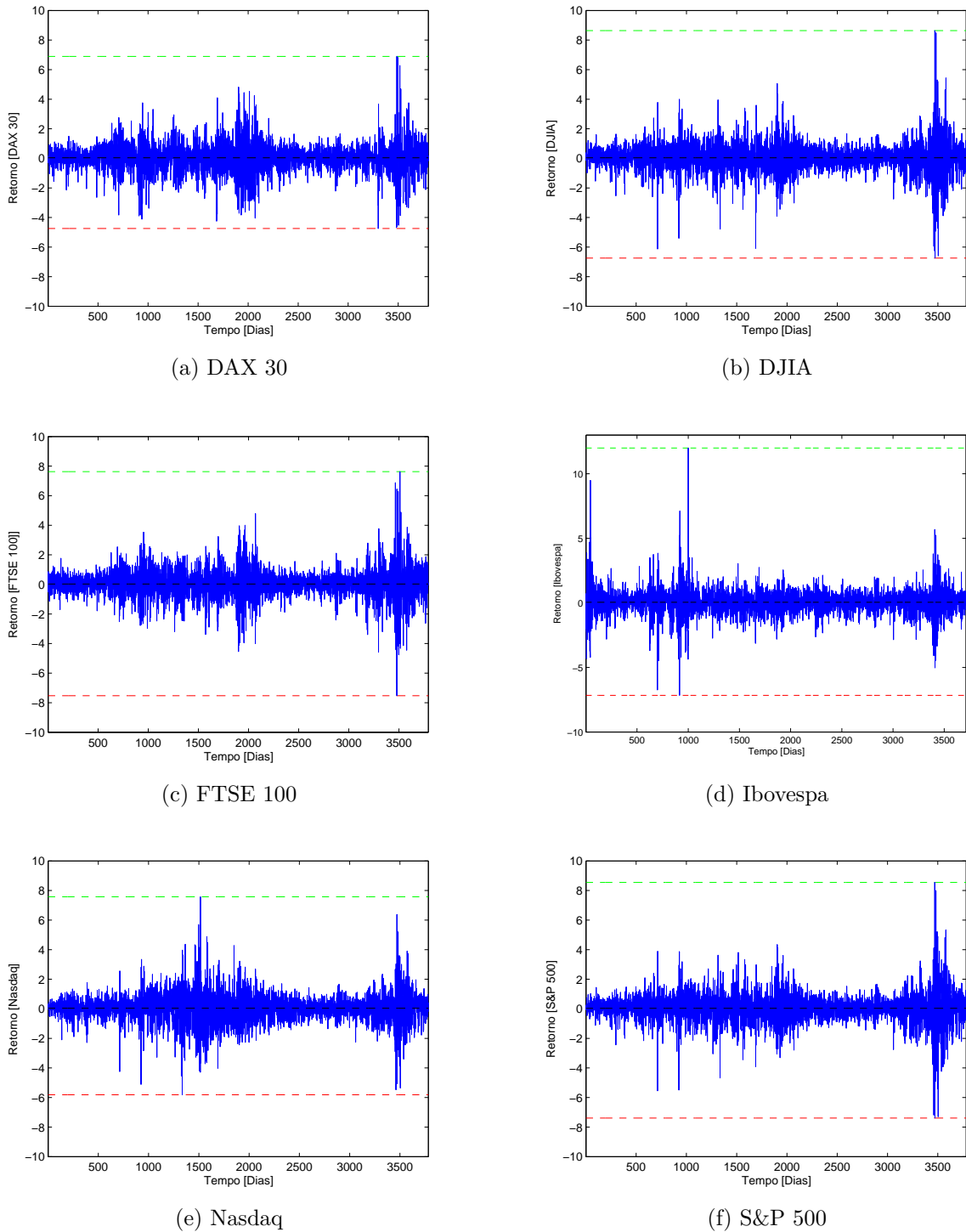


Figura 42 – A linha tracejada preta representa o custo do mercado. A região acima do custo do mercado limitada pela linha tracejada verde, que denota o retorno máximo, compreende os ganhos reais e a região abaixo do custo de mercado limitada pela linha tracejada vermelha denota as perdas reais.

Foi analisado função distribuição acumulada da quantidade de ocorrências dos ganhos reais em função do custo médio do mercado para cada índice acionário.

Assim,  $C_i(j)$  foram normalizados de tal forma que  $0 \leq C_i(j) \leq 1$  o que tornou

viável ajustar a quantidade de vezes que ocorreram os ganhos reais para um dado custo do mercado ajustados a uma distribuição acumulada formalizada pela Equação 3.5. A Figura 43 apresenta os clusters definidos a partir dos parâmetros da distribuição acumulada que ajustaram a frequência dos ganhos reais para um dado custo do mercado para os índices estudados contemplando as 2 janelas temporais de 8 anos e construídos pelo emprego da técnica *K-means*.

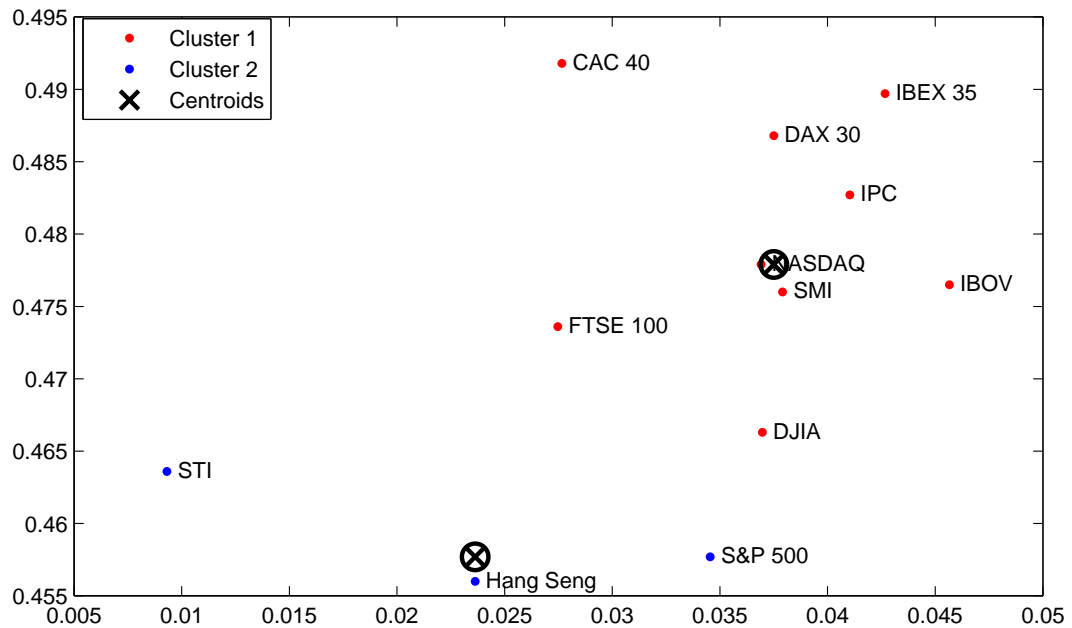


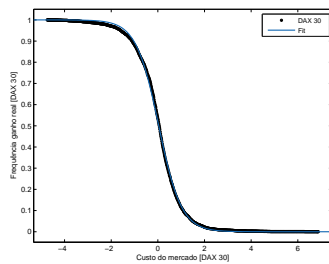
Figura 43 – Os índices que estão no cluster em azul são os menos arriscados, enquanto que os que estão no cluster em vermelho são os mais arriscados.

Os parâmetros referentes a distribuição acumulada que ajustaram a frequência dos ganhos reais para um dado custo do mercado para os índices investigados são apresentados na Tabela 31.

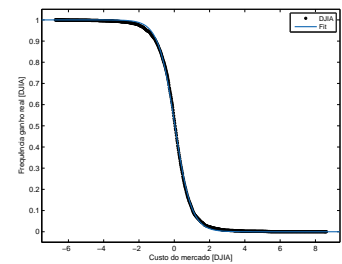
A Figura 44 mostra a frequência dos ganhos reais para um dado custo do mercado ajustadas a uma distribuição acumulada para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para o período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplando 2 janelas temporais de 8 anos.

Tabela 31 – Valores dos parâmetros da distribuição acumulada que ajustou a frequência dos ganhos reais para um dado custo do mercado.

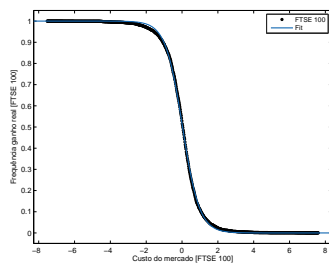
i	Parâmetros		SSE	R-square	Adj. R-square	RMSE
	a	$x_0$				
CAC 40	0.4918	0.02766	0.02583	0.9998	0.9998	0.005689
DAX 30	0.4868	0.0375	0.05805	0.9996	0.9996	0.008529
DJIA	0.4663	0.03697	0.03855	0.9998	0.9998	0.00695
FTSE 100	0.4736	0.02747	0.03647	0.9998	0.9998	0.00676
Hang Seng	0.456	0.02363	0.05039	0.9997	0.9997	0.007946
Ibex 35	0.4897	0.04267	0.04157	0.9998	0.9998	0.007218
Ibovespa	0.4765	0.04566	0.02094	0.9999	0.9999	0.005123
IPC	0.4827	0.04103	0.0269	0.9998	0.9998	0.005806
Nasdaq	0.4779	0.03691	0.08206	0.9995	0.9995	0.01014
SMI	0.476	0.03791	0.03568	0.9998	0.9998	0.006687
S&P 500	0.4577	0.03455	0.05089	0.9997	0.9997	0.007986
STI	0.4636	0.009316	0.03602	0.9998	0.9998	0.006718



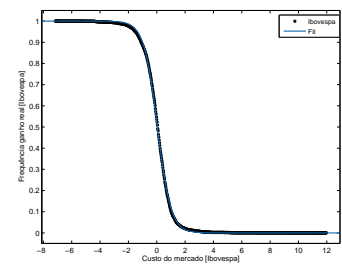
(a) DAX 30



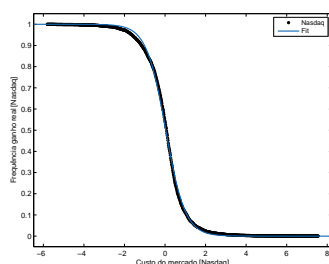
(b) DJIA



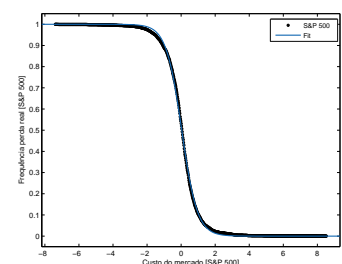
(c) FTSE 100



(d) Ibovespa



(e) Nasdaq



(f) S&P 500

Figura 44 – A frequência dos ganhos reais para um dado custo de mercado ajustadas a uma distribuição acumulada.

Em decorrência da normalização efetuada no ganho real, foi viabilizado a obtenção da quantidade de vezes que ocorreram as perdas reais para um dado custo do mercado ajustados a uma distribuição acumulada formalizada pela Eq. 3.6. A Figura 45 apresenta os clusters definidos a partir dos parâmetros da distribuição acumulada que ajustaram a frequência das perdas reais para um dado custo do mercado para os índices estudados e construídos pelo emprego da técnica *K-means*.

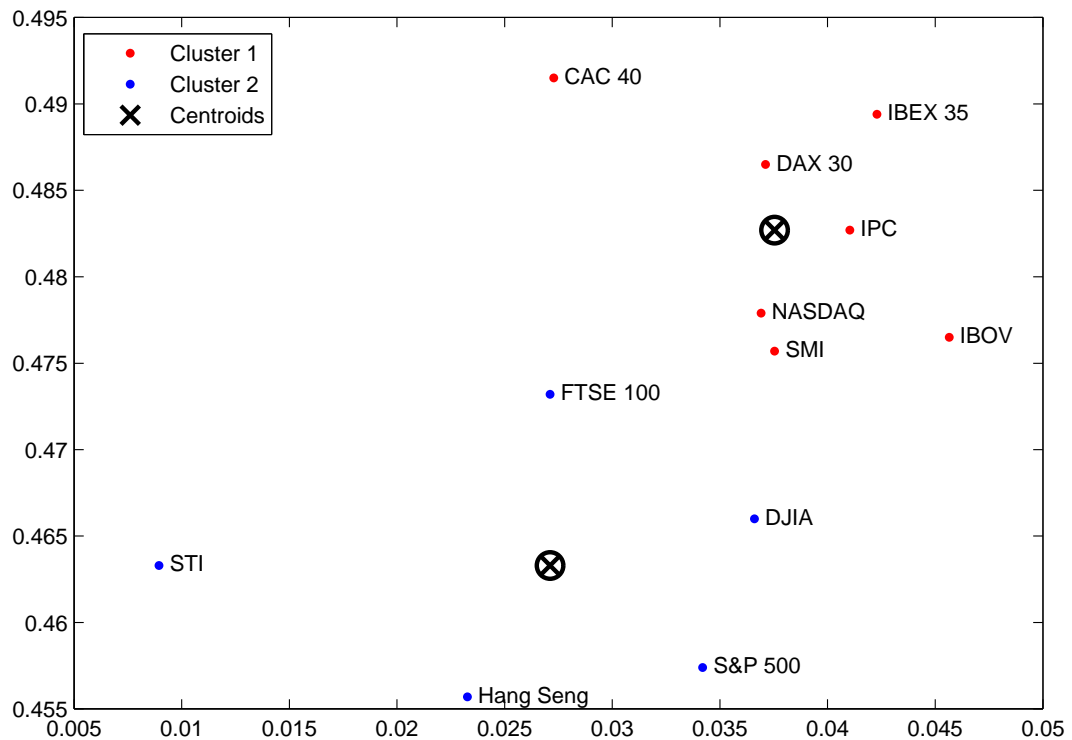


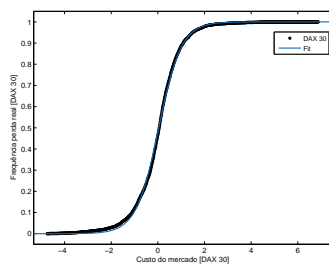
Figura 45 – Os índices que estão no cluster em azul são os menos arriscados, enquanto que os que estão no cluster em vermelho são os mais arriscados.

Os parâmetros referentes a distribuição acumulada que ajustaram a frequência das perdas reais para um dado custo do mercado para os índices investigados são apresentados na Tabela 32.

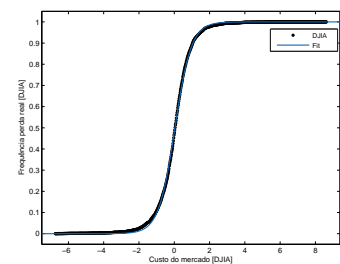
A Figura 46 mostra a frequência das perdas reais para um dado custo do mercado ajustadas a uma distribuição acumulada para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para o período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplando 2 janelas temporais de 8 anos.

Tabela 32 – Valores das distribuição acumulada que ajustou a frequência das perdas reais para um dado custo do mercado para os índices estudados.

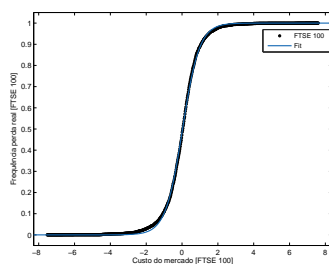
i	Parâmetros		SSE	R-square	Adj. R-square	RMSE
	b	$x'_0$				
CAC 40	0.4915	0.02728	0.02557	0.9998	0.9998	0.005661
DAX 30	0.4865	0.03712	0.05777	0.9996	0.9996	0.008508
DJIA	0.466	0.0366	0.03817	0.9998	0.9998	0.006917
FTSE 100	0.4732	0.02711	0.03611	0.9998	0.9998	0.006727
Hang Seng	0.4557	0.02327	0.04991	0.9997	0.9997	0.007908
Ibex 35	0.4894	0.04229	0.04134	0.9998	0.9998	0.007197
Ibovespa	0.4765	0.04565	0.02094	0.9999	0.9999	0.005123
IPC	0.4827	0.04103	0.0269	0.9998	0.9998	0.005806
Nasdaq	0.4779	0.03691	0.08206	0.9995	0.9995	0.01014
SMI	0.4757	0.03754	0.03538	0.9998	0.9998	0.006659
S&P 500	0.4574	0.0342	0.05048	0.9997	0.9997	0.007954
STI	0.4633	0.008945	0.03546	0.9998	0.9998	0.006666



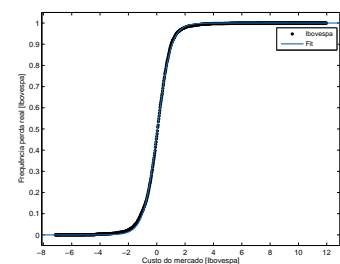
(a) DAX 30



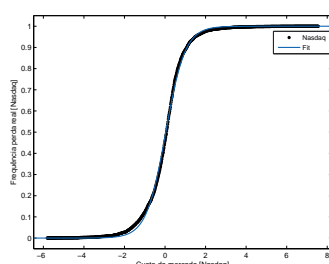
(b) DJIA



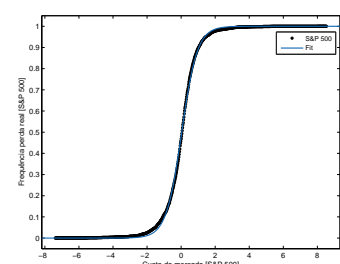
(c) FTSE 100



(d) Ibovespa



(e) Nasdaq



(f) S&P 500

Figura 46 – A frequência das perdas reais para um dado custo de mercado ajustadas a uma distribuição acumulada.



Para obter o valor de  $C_i(j)$  em termos percentuais foi aplicado a Eq. 3.5. A Tabela 33 apresenta os valores de  $C_i(j)$  em termos decimais e convertidos em termos percentuais representados por  $C_i(j)^*$ .

Tabela 33 – Valores de  $C_i(j)$  em termos percentuais.

<b>i</b>	$C_i(j)$	$C_i(j)^*$
CAC 40	0,02747	47,40456
DAX 30	0,03731	41,09453
DJIA	0,03678	44,07134
FTSE 100	0,02729	49,85920
Hang Seng	0,02345	46,20425
Ibex 35	0,04248	48,96287
Ibovespa	0,04566	37,61447
IPC	0,04530	54,37003
Nasdaq	0,03691	43,68765
SMI	0,03772	43,16226
S&P 500	0,03437	46,57418
STI	0,00913	41,77802

Ao vislumbrar um dado valor de custo de mercado é viável obter o risco instantâneo para um índice de mercado através de uma simples subtração entre a frequência das perdas reais e ganhos reais. A Figura 47 mostra o risco instantâneo do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para o período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplando 2 janelas temporais de 8 anos.

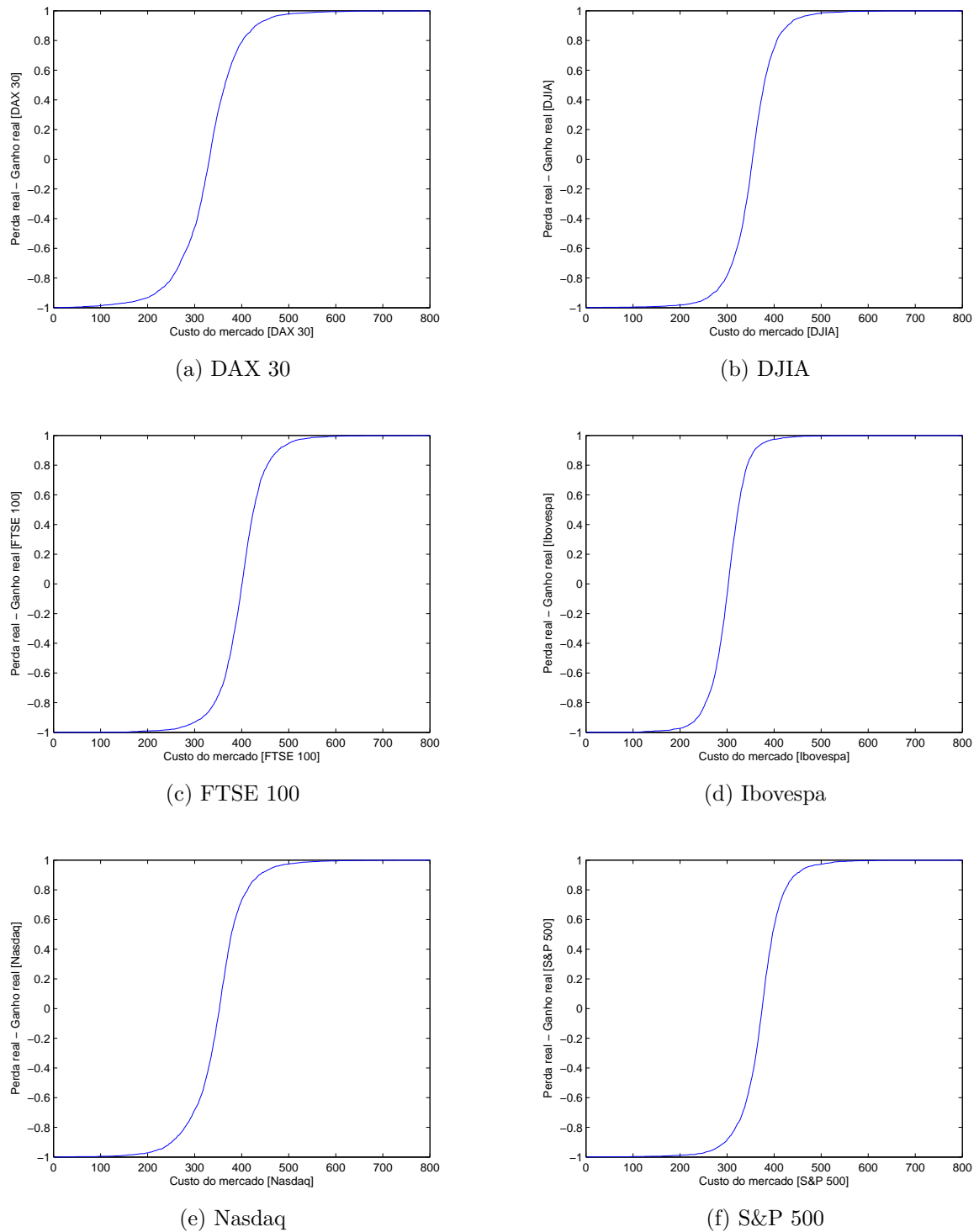


Figura 47 – Risco instantâneo do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500.

O risco esperado pode ser analisado através de 2 regiões distintas. Para primeira região,  $P(\vartheta_i(C_i(j)) | C_i(j) \geq C_i(j)^*)$  implica que o risco esperado do mercado é alto, ou seja, caso  $C_i(j) \geq C_i(j)^*$ , a probabilidade de obter perda real é maior que a probabilidade de obter ganho real. Do contrário, se  $P(\vartheta_i(C_i(j)) | C_i(j) \leq C_i(j)^*)$  implica que o risco esperado

do mercado é baixo, isto é, caso  $C_i(j) \leq C_i(j)^*$ , a probabilidade de obter ganho real é maior que a probabilidade de obter perda real. A Tabela 34 apresenta estes resultados.

Tabela 34 – Valores do risco esperado para os índices de mercado acionários contemplando a região de alto risco  $C_i(j) \geq C_i(j)^*$  e a de baixo risco  $C_i(j) \leq C_i(j)^*$ .

<b>i</b>	$C_i(j)$ (%)	<b>Risco Alto</b>	<b>Risco Baixo</b>
CAC 40	47,40	94,86	5,14
DAX 30	41,09	95,08	4,92
DJIA	44,07	96,25	3,75
FTSE 100	49,86	95,68	4,32
Hang Seng	46,20	96,69	3,31
Ibex 35	48,96	95,11	4,89
Ibovespa	37,61	96,09	3,91
IPC	54,37	95,31	4,69
Nasdaq	43,69	95,61	4,39
SMI	43,16	96,10	3,90
S&P 500	46,57	96,28	3,72
STI	41,77802	96,46	3,54

Baseado nos fundamentos propostos de ganho e perda real, foi observado que a paridade ocorre em  $C_i(j)^*$ . Assim,  $C_i(j)^*$  o lucro é zero, pois nesse ponto a perda real equipara-se ao ganho real e é exatamente onde ocorre o equilíbrio do processo denotado por  $E_i(t)$ . A Figura 48 mostra o ponto onde há paridade entre perda real média e ganho real médio para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para o período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplando 2 janelas temporais de 8 anos.

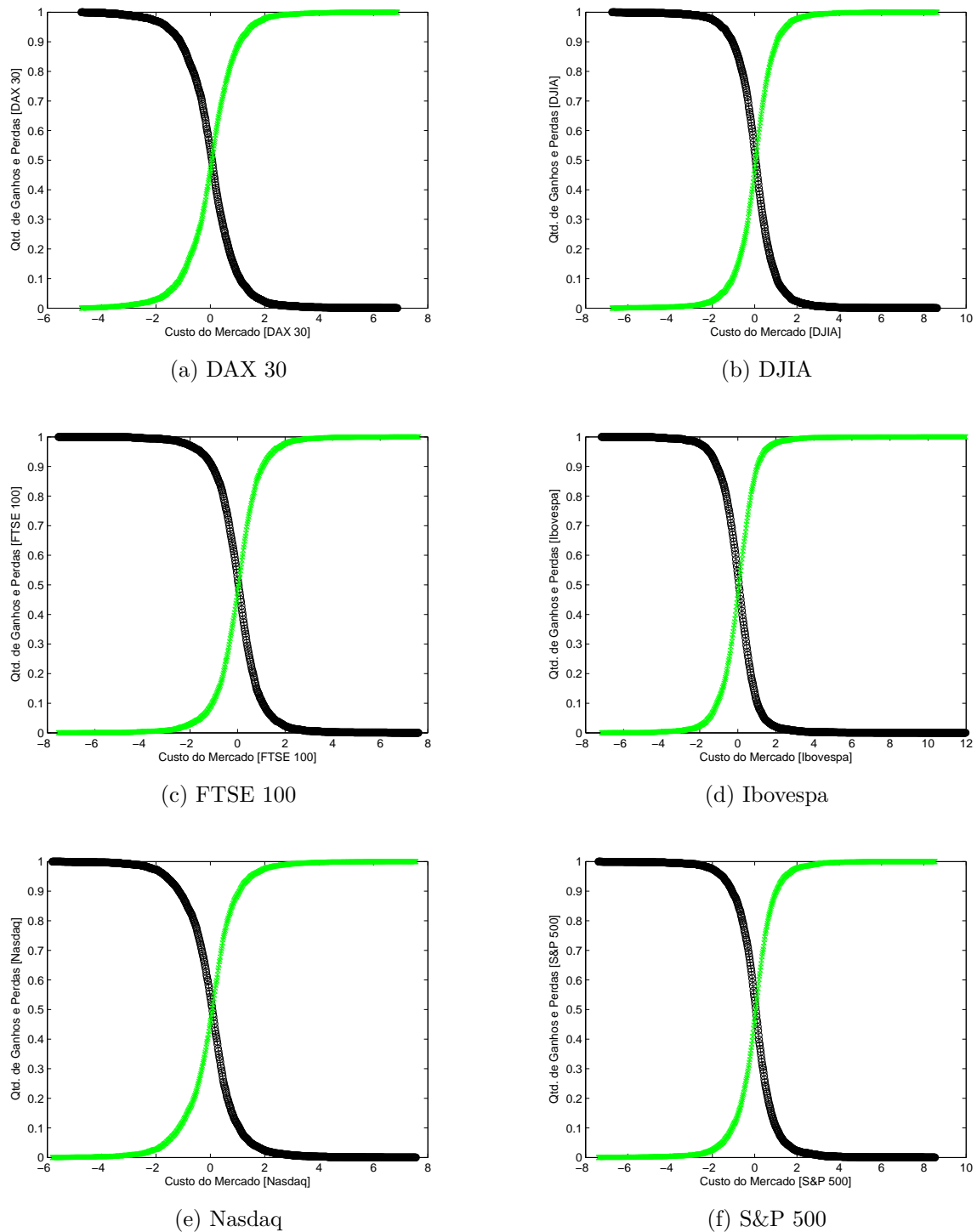


Figura 48 – A junção da curva da perda real com a curva do ganho real indica o ponto onde há paridade entre perda real e ganho real para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 é evidenciado no cruzamento entre as curvas das perdas reais em verde e as curvas do ganho real em preto.

A etapa seguinte, consistiu em aplicar a Eq. 2.10 para gerar a perda máxima sofrida por cada índice de mercado acionário analisado, contemplando 2 janelas temporais de 8 anos e considerando um nível de confiança de 95%. A Tabela 35 apresenta estes resultados.

Tabela 35 – Valores do  $VaR$  e os respectivos  $VaR$  médios e  $CVaR$  médios para os índices de mercado acionários contemplando 2 janelas temporais de 8 anos e considerando um nível de confiança de 95%.

i	VaR (95%)		$\delta$ VaR	$\delta$ CVaR
CAC 40	2,20	2,18	2,19	2,48
DAX 30	2,26	2,38	2,32	2,67
DJIA	1,74	1,94	1,84	2,01
FTSE 100	1,71	1,95	1,83	2,08
Hang Seng	2,76	2,44	2,60	2,87
Ibex 35	2,25	2,08	2,17	2,45
Ibovespa	3,70	2,92	3,31	3,58
IPC	3,15	2,11	2,63	2,86
Nasdaq	2,79	2,36	2,57	2,97
SMI	1,76	1,86	1,81	2,08
S&P 500	1,77	1,93	1,85	2,02
STI	2,26	1,89	2,07	2,25

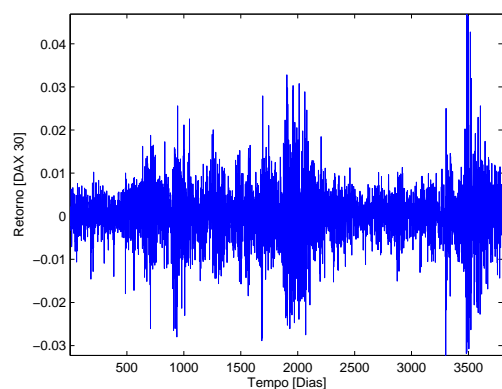
Em seguida, foi realizada a comparação entre os valores médio do  $VaR$  e dos os valores médio do  $CVaR$  com a região de baixo risco do modelo propostos. A Tabela 36 apresenta estes resultados.

Tabela 36 – Comparativo entre os valores do  $VaR$  e  $CVaR$  com os valores da região de baixo risco e para cada índice investigado e suas respectivas variações percentuais.

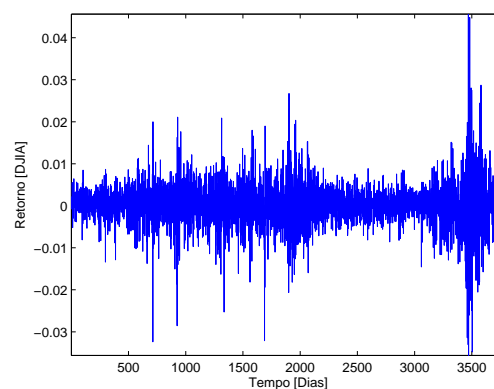
$i$	$\delta$ VaR (95%)	$\Delta\%$	$\delta$ CVaR (95%)	$\Delta\%$	Risco Baixo
CAC 40	2,19	13,24	2,48	93,15	4,79
DAX 30	2,32	15,09	2,67	84,27	4,92
DJIA	1,84	9,24	2,01	134,83	4,72
FTSE 100	1,83	13,66	2,08	107,69	4,32
Hang Seng	2,60	10,38	2,87	15,33	3,31
Ibex 35	2,17	12,9	2,45	99,59	4,89
Ibovespa	3,31	8,16	3,58	9,22	3,91
IPC	2,63	8,75	2,86	62,94	4,66
Nasdaq	2,57	15,56	2,97	47,81	4,39
SMI	1,81	14,92	2,08	87,5	3,90
S&P 500	1,85	9,19	2,02	84,16	3,72
STI	2,07	8,7	2,25	57,78	3,55

## 4.5 1 Janela temporal de 16 anos

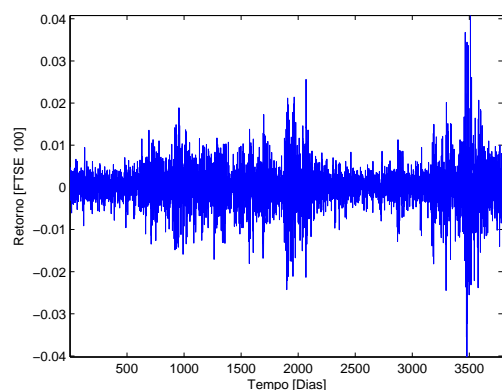
As séries de retornos foram calculadas pelo emprego da Eq. 3.1. A Figura 49 retrata as séries de retornos diários do DAX 30, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para período que vai de 02 de Janeiro de 1995 até 30 de Dezembro de 2010, sendo este horizonte de tempo, contemplado em 1 janela temporal de 16 anos.



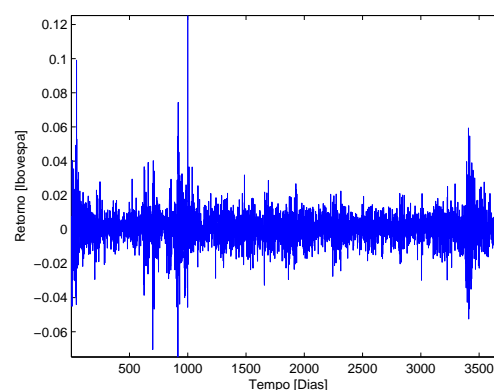
(a) DAX 30



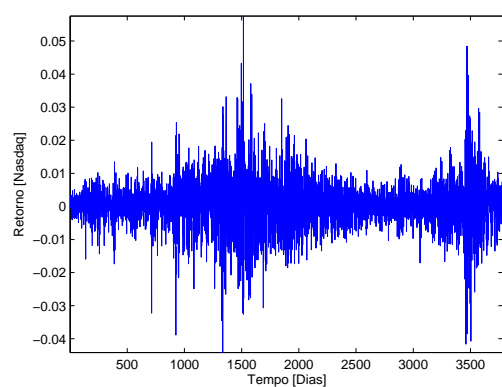
(b) DJIA



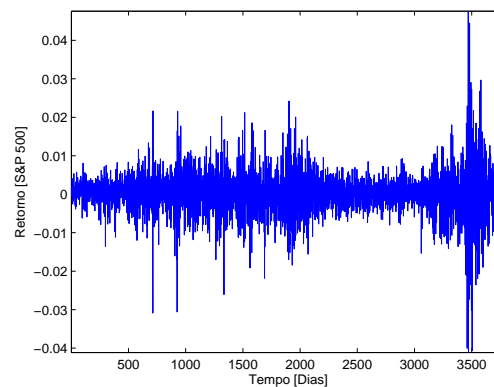
(c) FTSE 100



(d) Ibovespa



(e) Nasdaq



(f) S&amp;P 500

Figura 49 – As séries de retornos do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa e Nasdaq e S&P 500.

As séries de retornos denotadas por  $R_i(t)$  apresentavam escalas de desvios distintas. Assim, para uniformizar as séries de retornos com o intuito de facilitar o processo de análise foi utilizado a padronização sendo está realizada pelo emprego da Eq. 3.2 e que originaram as séries denotadas por  $r_i(t)$ . A Figura 50 retrata as séries de retornos diários padronizados do DAX 30, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para período que vai de 02 de Janeiro de 1995 até 30 de Dezembro de 2010, sendo este horizonte de tempo, contemplado em 1 janela temporal de 16 anos.

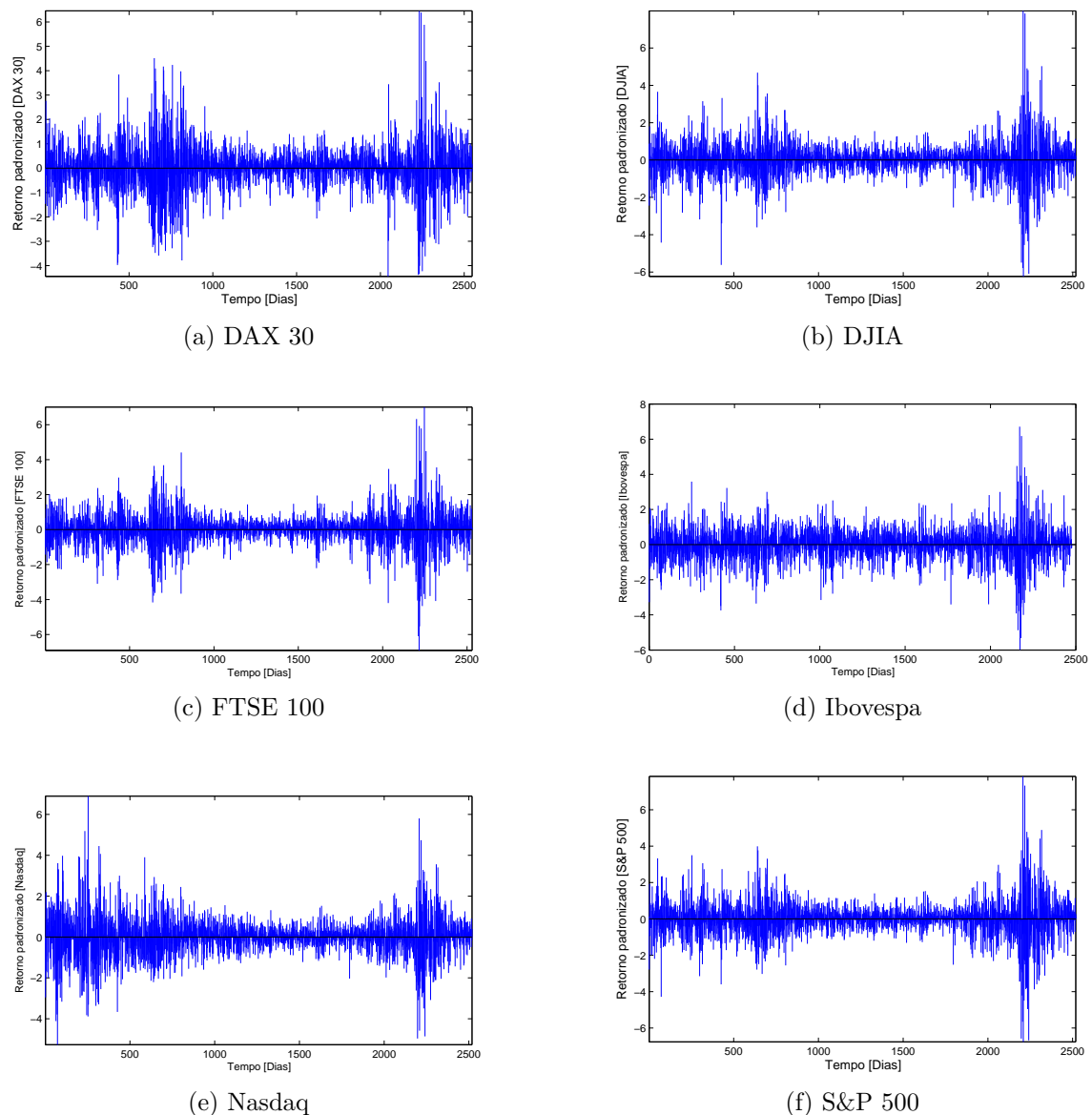


Figura 50 – A evolução temporal para todas as séries se desenvolve ao redor de uma média constante sendo representada pela linha em negrito. As observações acima da linha preta são os retornos positivos (ganhos) e as abaixo são os retornos negativos (perdas)

Foi definido o custo do mercado sendo este denotado por  $C_i(j)$  para o índice  $i$  no

tempo  $t$  e contado a quantidade de perdas e ganhos para diferentes valores de  $C_i(j)$  e sendo variado na totalidade da amplitude de  $r_i(t)$ .

Desta forma, a perda real ocorre quando  $r_i(t) < C_i(j)$ , enquanto que o ganho real sucede quando  $r_i(t) \geq C_i(j)$ . A tabela 37 contempla os valores referentes à variação mínima, à variação máxima e ao custo do mercado para os índices acionários considerando uma 1 janela temporal de 16 anos.

Tabela 37 – Valores referentes à variação mínima, à variação máxima e ao custo do mercado para os índices acionários.

<b>i</b>	<b>Vmín</b>	<b>Vmáx</b>	$C_i(j)$
CAC 40	-6,38927	7,14686	0,02747
DAX 30	-4,74484	6,89211	0,03692
DJIA	-6,74355	8,64135	0,03650
FTSE 100	-7,52770	7,62495	0,02691
Hang Seng	-8,17420	9,56800	0,02323
Ibex 35	-6,61799	9,56800	0,04248
Ibovespa	-7,16000	11,99661	0,045945
IPC	-8,50324	7,21964	0,04105
Nasdaq	-5,81232	7,57643	0,03691
SMI	-6,38510	8,49555	0,03734
S&P 500	-7,38833	8,54905	0,034375
STI	-6,49330	9,07094	0,00893

Foi adotado à estratégia de caminhar no tempo o que possibilitou a construção de 1 janela temporal de 16 anos que levou a análise do comportamento referente aos ganhos e perdas reais levando em consideração a região que contempla o custo médio do mercado para cada índice de mercado acionário estudado no decurso destas janelas temporais. A Figura 51 apresenta a relação entre a quantidade de ganhos e perdas reais dado os custos do mercado para cada janela temporal.



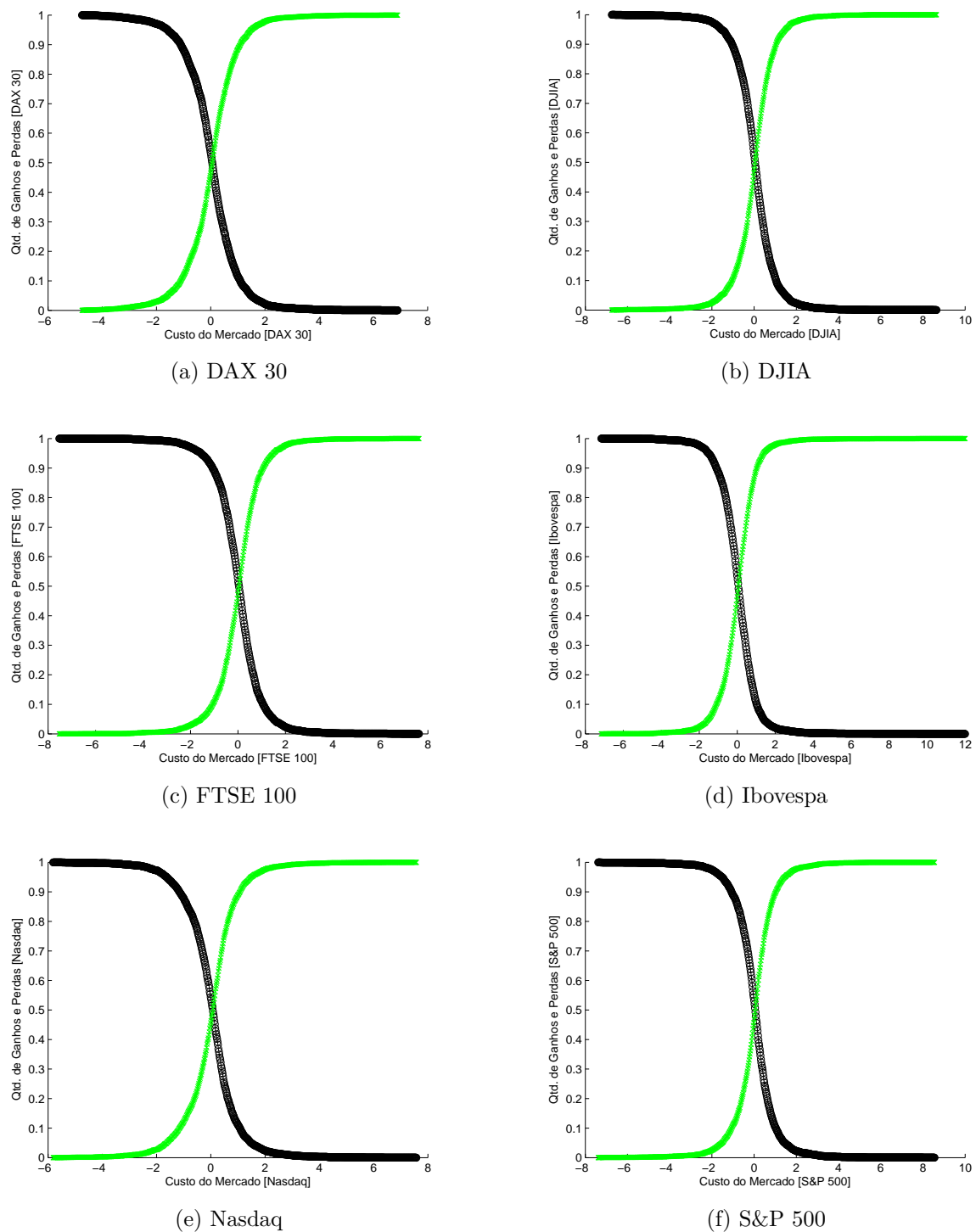
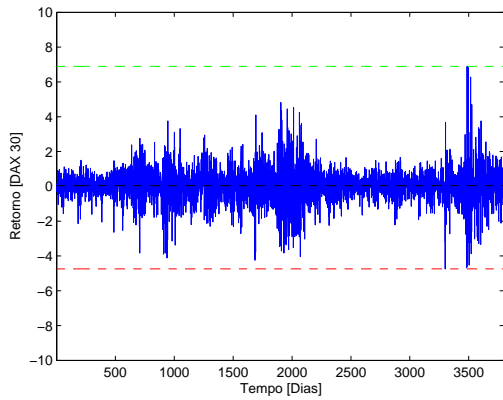


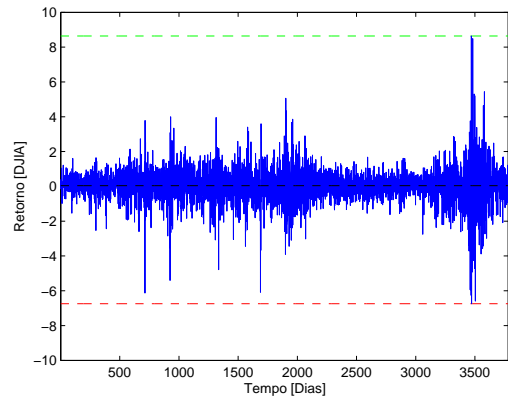
Figura 51 – A frequência dos ganhos e perdas reais considerando os custos do mercado para cada janela temporal.

Em função do custo do mercado médio foi definido o ganho real e a perda real, o que viabiliza delinear a região onde ocorre respectivamente cada um deles. A Figura 52 apresenta o custo do mercado que torna possível identificar a região onde ocorre ganhos e perdas reais para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 no período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplado em 1 janela

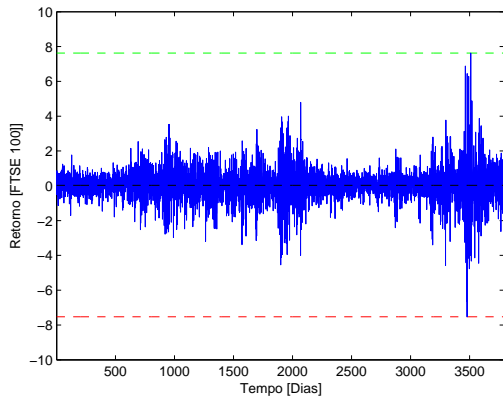
temporal de 16 anos.



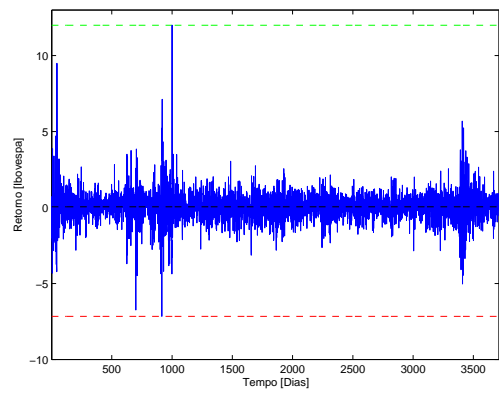
(a) DAX 30



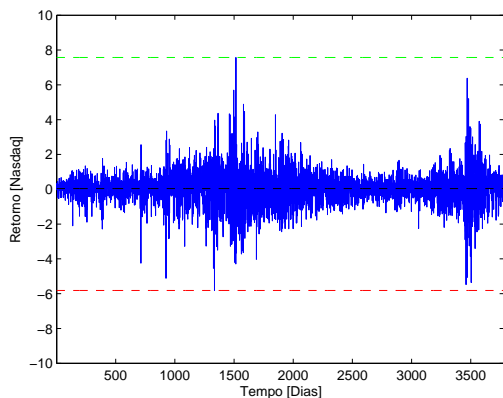
(b) DJIA



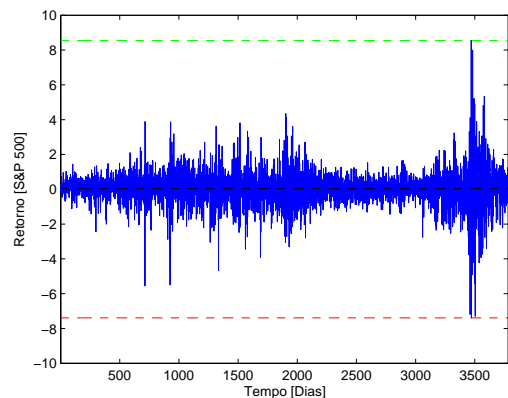
(c) FTSE 100



(d) Ibovespa



(e) Nasdaq



(f) S&P 500

Figura 52 – A linha tracejada preta representa o custo do mercado. A região acima do custo do mercado limitada pela linha tracejada verde, que denota o retorno máximo, compreende os ganhos reais e a região abaixo do custo de mercado limitada pela linha tracejada vermelha denota as perdas reais.

Foi analisado função distribuição acumulada da quantidade de ocorrências dos

ganhos reais em função do custo médio do mercado para cada índice acionário.

Assim,  $C_i(j)$  foram normalizados de tal forma que  $0 \leq C_i(j) \leq 1$  o que tornou viável ajustar a quantidade de vezes que ocorreram os ganhos reais para um dado custo do mercado ajustados a uma distribuição acumulada formalizada pela Equação 3.5. A Figura 53 apresenta os clusters definidos a partir dos parâmetros da distribuição acumulada que ajustaram a frequência dos ganhos reais para um dado custo do mercado para os índices estudados contemplando as 2 janelas temporais de 8 anos e construídos pelo emprego da técnica *K-means*.

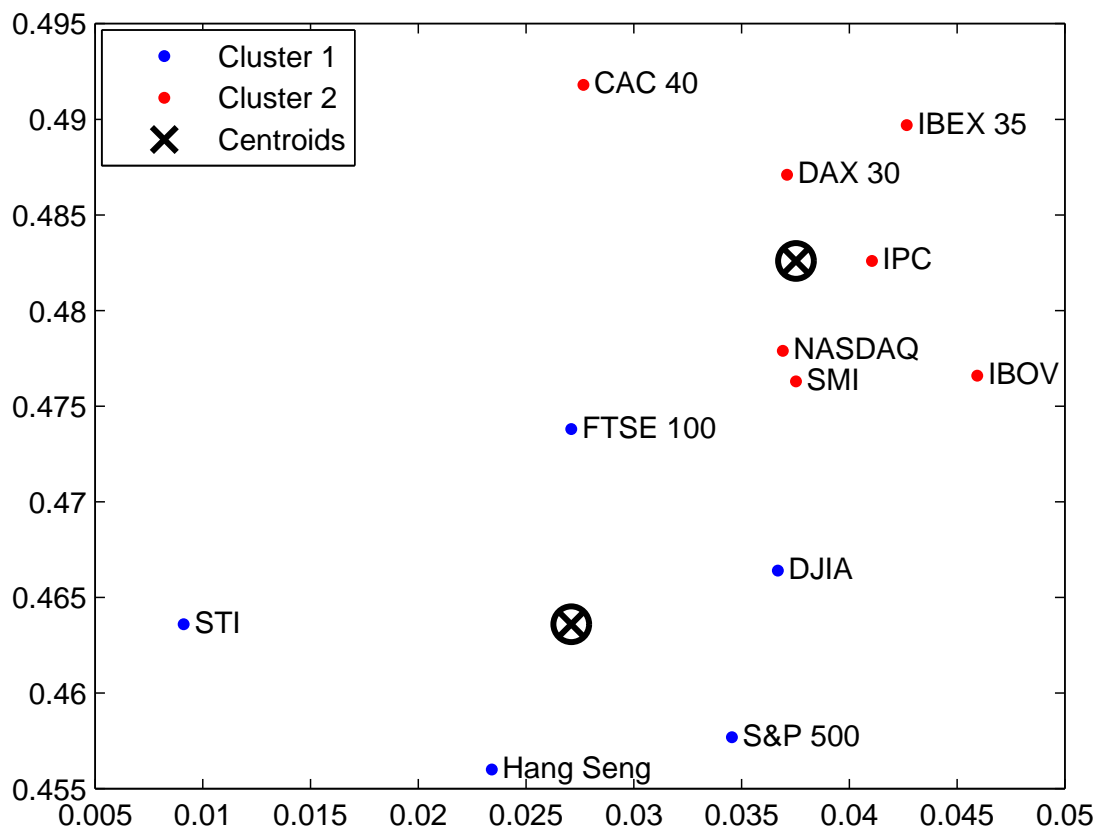


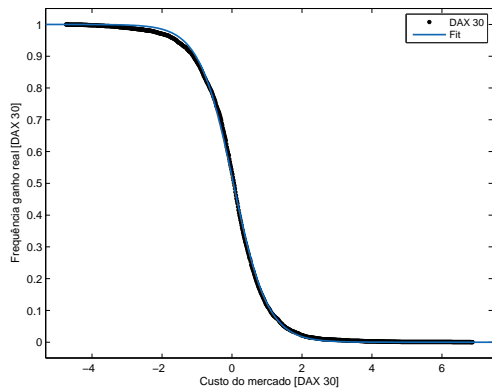
Figura 53 – Os índices que estão no cluster em azul são os menos arriscados, enquanto que os que estão no cluster em vermelho são os mais arriscados.

Os parâmetros referentes a distribuição acumulada que ajustaram a frequência dos ganhos reais para um dado custo do mercado para os índices investigados são apresentados na Tabela 38.

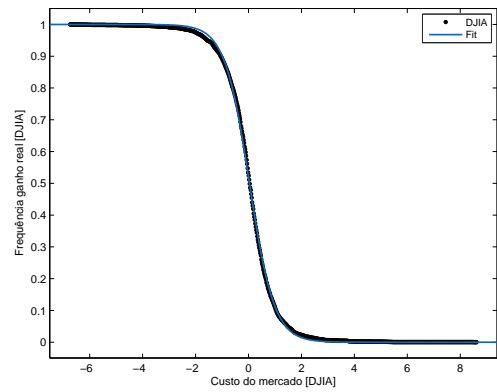
Tabela 38 – Valores dos parâmetros da distribuição acumulada que ajustou a frequência dos ganhos reais para um dado custo do mercado.

i	Parâmetros		SSE	R-square	Adj. R-square	RMSE
	a	$x_0$				
CAC 40	0.4918	0.02766	0.02583	0.9998	0.9998	0.005689
DAX 30	0.4871	0.03711	0.05888	0.9996	0.9996	0.00859
DJIA	0.4664	0.03668	0.0384	0.9998	0.9998	0.006937
FTSE 100	0.4738	0.0271	0.03682	0.9998	0.9998	0.006793
Hang Seng	0.456	0.02341	0.05021	0.9997	0.9997	0.007932
Ibex 35	0.4897	0.04267	0.04157	0.9998	0.9998	0.007218
Ibovespa	0.4766	0.04594	0.02091	0.9999	0.9999	0.005119
IPC	0.4826	0.04105	0.02697	0.9998	0.9998	0.005814
Nasdaq	0.4779	0.03691	0.08206	0.9995	0.9995	0.01014
SMI	0.4763	0.03752	0.03641	0.9998	0.9998	0.006755
S&P 500	0.4577	0.03455	0.05089	0.9997	0.9997	0.007986
STI	0.4636	0.009112	0.03592	0.9998	0.9998	0.006709

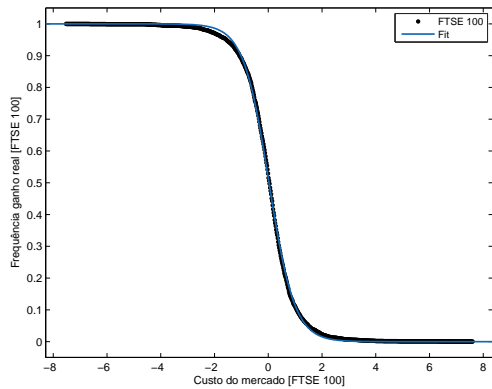
A Figura 54 mostra a frequência dos ganhos reais para um dado custo do mercado ajustadas a uma distribuição acumulada para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para o período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplado em 1 janela temporal de 16 anos.



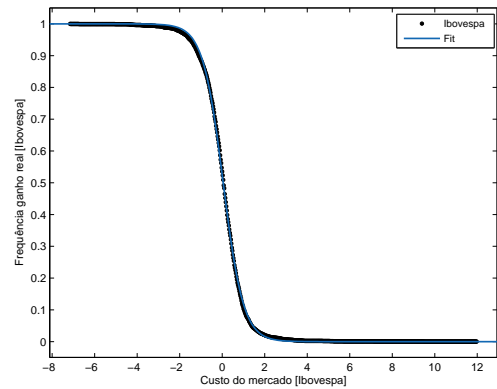
(a) DAX 30



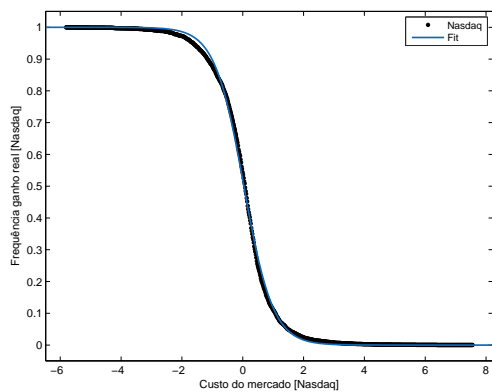
(b) DJIA



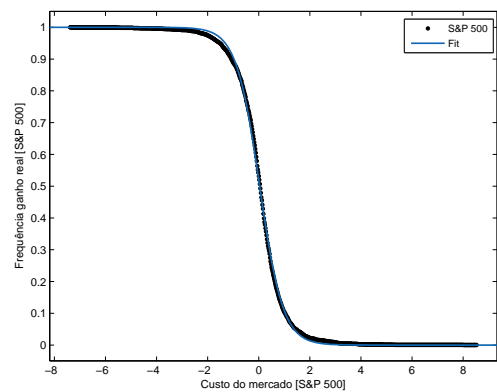
(c) FTSE 100



(d) Ibovespa



(e) Nasdaq



(f) S&P 500

Figura 54 – A frequência dos ganhos reais para um dado custo de mercado ajustadas a uma distribuição acumulada.

Em decorrência da normalização efetuada no ganho real, foi viabilizado a obtenção da quantidade de vezes que ocorreram as perdas reais para um dado custo do mercado ajustados a uma distribuição acumulada formalizada pela Eq. 3.6. A Figura 55 apresenta os clusters definidos a partir dos parâmetros da distribuição acumulada que ajustaram a

frequência das perdas reais para um dado custo do mercado para os índices estudados e construídos pelo emprego da técnica *K-means*.

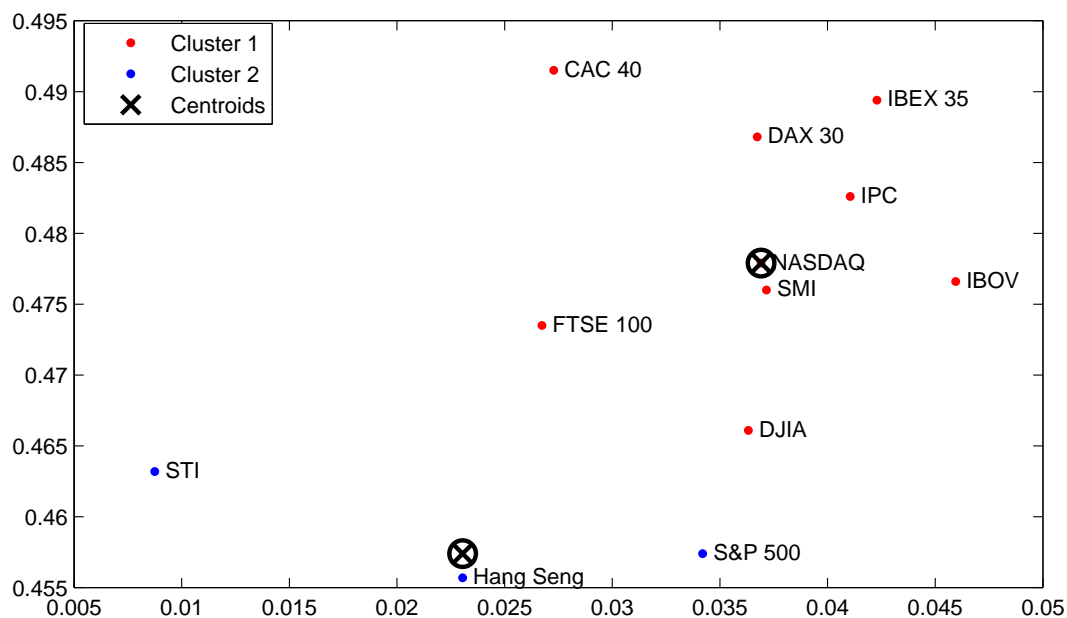


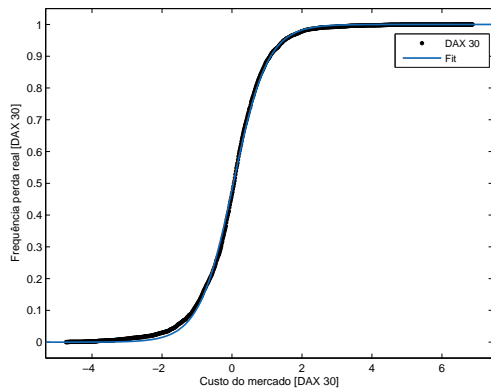
Figura 55 – Os índices que estão no cluster em azul são os menos arriscados, enquanto que os que estão no cluster em vermelho são os mais arriscados.

Os parâmetros referentes a distribuição acumulada que ajustaram a frequência das perdas reais para um dado custo do mercado para o índices investigados são apresentados na Tabela 39.

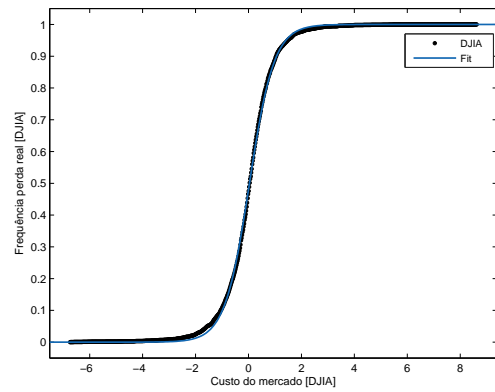
Tabela 39 – Valores das distribuição acumulada que ajustou a frequência das perdas reais para um dado custo do mercado para os índices estudados.

i	Parâmetros		SSE	R-square	Adj. R-square	RMSE
	b	$x_0$				
CAC 40	0.4915	0.02728	0.02556	0.9998	0.9998	0.00566
DAX 30	0.4868	0.03673	0.05859	0.9996	0.9996	0.008568
DJIA	0.4661	0.03632	0.03802	0.9998	0.9998	0.006902
FTSE 100	0.4735	0.02673	0.03646	0.9998	0.9998	0.006759
Hang Seng	0.4557	0.02305	0.04974	0.9997	0.9997	0.007895
Ibex 35	0.4894	0.04229	0.04133	0.9998	0.9998	0.007196
Ibovespa	0.4766	0.04595	0.02091	0.9999	0.9999	0.005119
IPC	0.4826	0.04105	0.02697	0.9998	0.9998	0.005814
Nasdaq	0.4779	0.03691	0.08206	0.9995	0.9995	0.01014
SMI	0.476	0.03716	0.03611	0.9998	0.9998	0.006727
S&P 500	0.4574	0.0342	0.05047	0.9997	0.9997	0.007953
STI	0.4632	0.008749	0.03536	0.9998	0.9998	0.006656

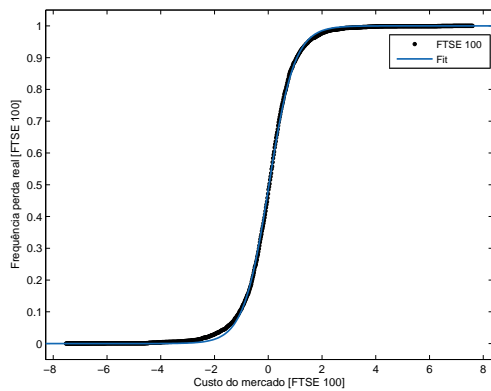
A Figura 56 mostra a frequência das perdas reais para um dado custo do mercado ajustadas a uma distribuição acumulada para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para o período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplando 1 janela temporal de 16 anos.



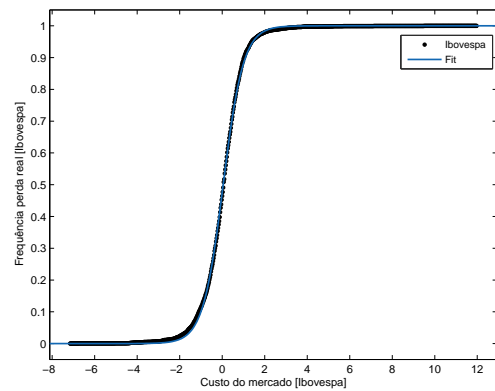
(a) DAX 30



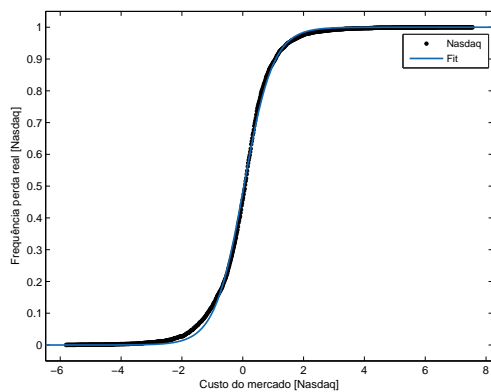
(b) DJIA



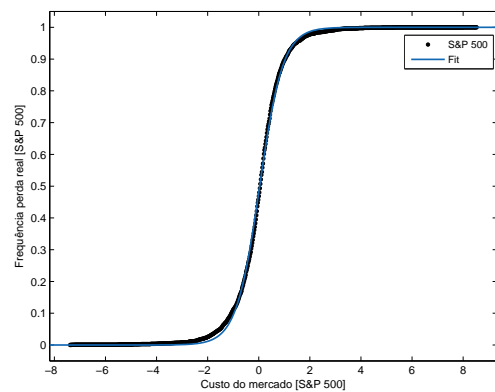
(c) FTSE 100



(d) Ibovespa



(e) Nasdaq



(f) S&P 500

Figura 56 – A frequência das perdas reais para um dado custo de mercado ajustadas a uma distribuição acumulada.

Para obter o valor de  $C_i(j)$  em termos percentuais foi aplicado a Eq. 3.5. A Tabela 40 apresenta os valores de  $C_i(j)$  em termos decimais e convertidos em termos percentuais representados por  $C_i(j)^*$ .

Ao vislumbrar um dado valor de custo de mercado é viável obter o risco instantâneo



Tabela 40 – Valores de  $C_i(j)$  em termos percentuais.

<b>i</b>	$C_i(j)$	$C_i(j)^*$
CAC 40	0,02747	47,40456
DAX 30	0,03692	41,09118
DJIA	0,03650	44,06949
FTSE 100	0,02691	49,85672
Hang Seng	0,02323	46,20301
Ibex 35	0,04248	41,14961
Ibovespa	0,04595	47,61599
IPC	0,04105	54,34302
Nasdaq	0,03691	43,68765
SMI	0,03734	43,15967
S&P 500	0,03437	46,57418
STI	0,00893	41,77673

para um índice de mercado através de uma simples subtração entre a frequência das perdas reais e ganhos reais. A Figura 57 mostra o risco instantâneo do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para o período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplado em 1 janela temporal de 16 anos.

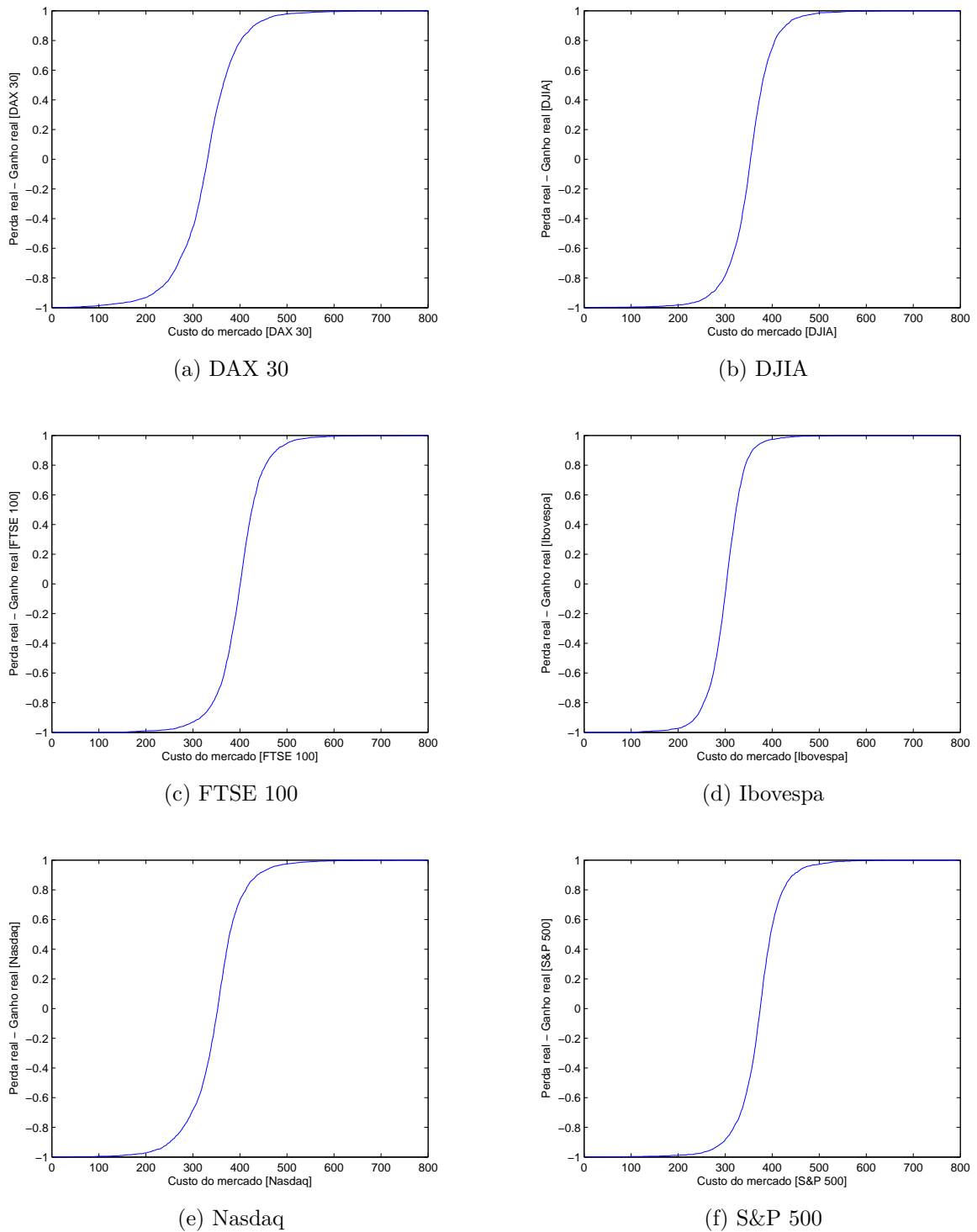


Figura 57 – Risco instantâneo do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500.

O risco esperado pode ser analisado através de 2 regiões distintas. Para primeira região,  $P(\vartheta_i(C_i(j)) | C_i(j) \geq C_i(j)^*)$  implica que o risco esperado do mercado é alto, ou seja, caso  $C_i(j) \geq C_i(j)^*$ , a probabilidade de obter perda real é maior que a probabilidade de obter ganho real. Do contrário, se  $P(\vartheta_i(C_i(j)) | C_i(j) \leq C_i(j)^*)$  implica que o risco esperado

do mercado é baixo, isto é, caso  $C_i(j) \leq C_i(j)^*$ , a probabilidade de obter ganho real é maior que a probabilidade de obter perda real. A Tabela 41 apresenta estes resultados.

Tabela 41 – Valores do risco esperado para os índices de mercado acionários contemplando a região de alto risco  $C_i(j) \geq C_i(j)^*$  e a de baixo risco  $C_i(j) \leq C_i(j)^*$ .

<b>i</b>	$C_i(j)(\%)$	<b>Risco Alto</b>	<b>Risco Baixo</b>
CAC 40	47,40	95,21	4,79
DAX 30	41,09	95,08	4,92
DJIA	44,07	96,24	3,76
FTSE 100	49,86	95,68	4,32
Hang Seng	46,20	96,69	3,31
Ibex 35	41,15	96,44	3,56
Ibovespa	37,62	96,04	3,96
IPC	54,34	95,34	4,66
Nasdaq	43,69	95,61	4,39
SMI	43,16	96,10	3,90
S&P 500	46,57	96,28	3,72
STI	41,77673	96,46	3,54

Baseado nos fundamentos propostos de ganho e perda real, foi observado que a paridade ocorre em  $C_i(j)^*$ . Assim,  $C_i(j)^*$  o lucro é zero, pois nesse ponto a perda real equipara-se ao ganho real e é exatamente onde ocorre o equilíbrio do processo denotado por  $E_i(t)$ . A Figura 58 mostra o ponto onde há paridade entre perda real média e ganho real médio para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 para o período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplado em 1 janela temporal de 16 anos.

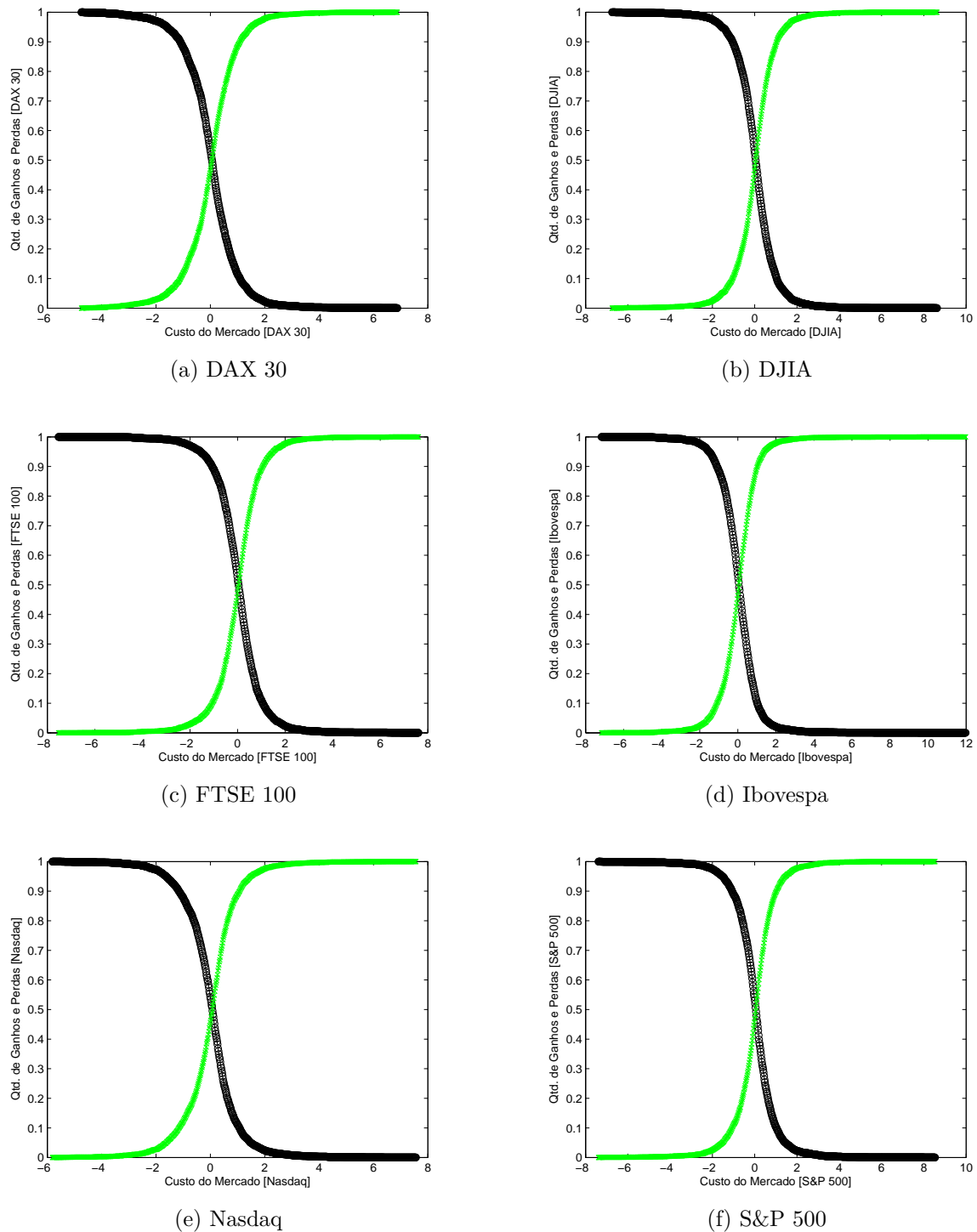


Figura 58 – A junção da curva da perda real com a curva do ganho real indica o ponto onde há paridade entre perda real e ganho real para o DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 é evidenciado no cruzamento entre as curvas das perdas reais em verde e as curvas do ganho real em preto.

A validação do modelo proposto foi realizada através da comparação dos resultados empíricos do método proposto com o  $VaR$ . Especificamente, em relação ao  $VaR$ , os retornos foram ordenados em forma decrescente, foi assumido a premissa que eles se-

guem uma distribuição normal e considerado um nível de confiança de 95%. A Tabela 42 apresenta o comparativo entre os valores da região de baixo risco e o  $VaR$ .

Tabela 42 – Comparativo entre os valores do  $VaR$ ,  $CVaR$  e da região de baixo risco e para cada índice investigado e suas respectivas variações percentuais.

i	$VaR$ (95%)	$\Delta\%$	$CVaR$ (95%)	$\Delta\%$	$C_i(j) \leq C_i(j)^*(\%)$
CAC 40	2,17	26,73	2,75	74,18	4,79
DAX 30	2,29	20,55	2,76	78,26	4,92
DJIA	1,74	15,82	2,02	86,58	3,76
FTSE 100	1,83	28,19	2,35	84,15	4,32
Hang Seng	2,59	25,98	3,263	1,44	3,31
Ibex 35	2,17	15,16	2,50	42,40	3,56
Ibovespa	3,33	18,55	3,94	0,51	3,96
IPC	2,60	18,95	3,09	50,68	4,66
Nasdaq	2,54	19,02	3,02	45,21	4,39
SMI	1,78	23,01	2,19	78,08	3,90
S&P 500	1,87	19,71	2,24	66,07	3,72
STI	2,06	22,11	2,52	40,48	3,54

Ao comparar os valores do  $VaR$  e do  $CVaR$  aos da região de baixo risco com o resultados pelas instituições financeiras (GONZÁLEZ-RIVERA; LEE; MISHRA, 2004; SPIERDIJK, 2016) foi verificado que tanto o  $VaR$  quanto o  $CVaR$  subestimam o risco, e isto é algo que favorece ao surgimentos de eventos extremos (BORYSOV; BALATSKY, 2014).

A Figura 59 apresenta o histograma dos retornos diários do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 bem como o histograma dos retornos diários para os mesmos índices ajustados a uma distribuição normal para o período que vai de 02 de Janeiro de 1995 a 30 de Dezembro de 2010, contemplando 1 janela temporal de 16 anos.

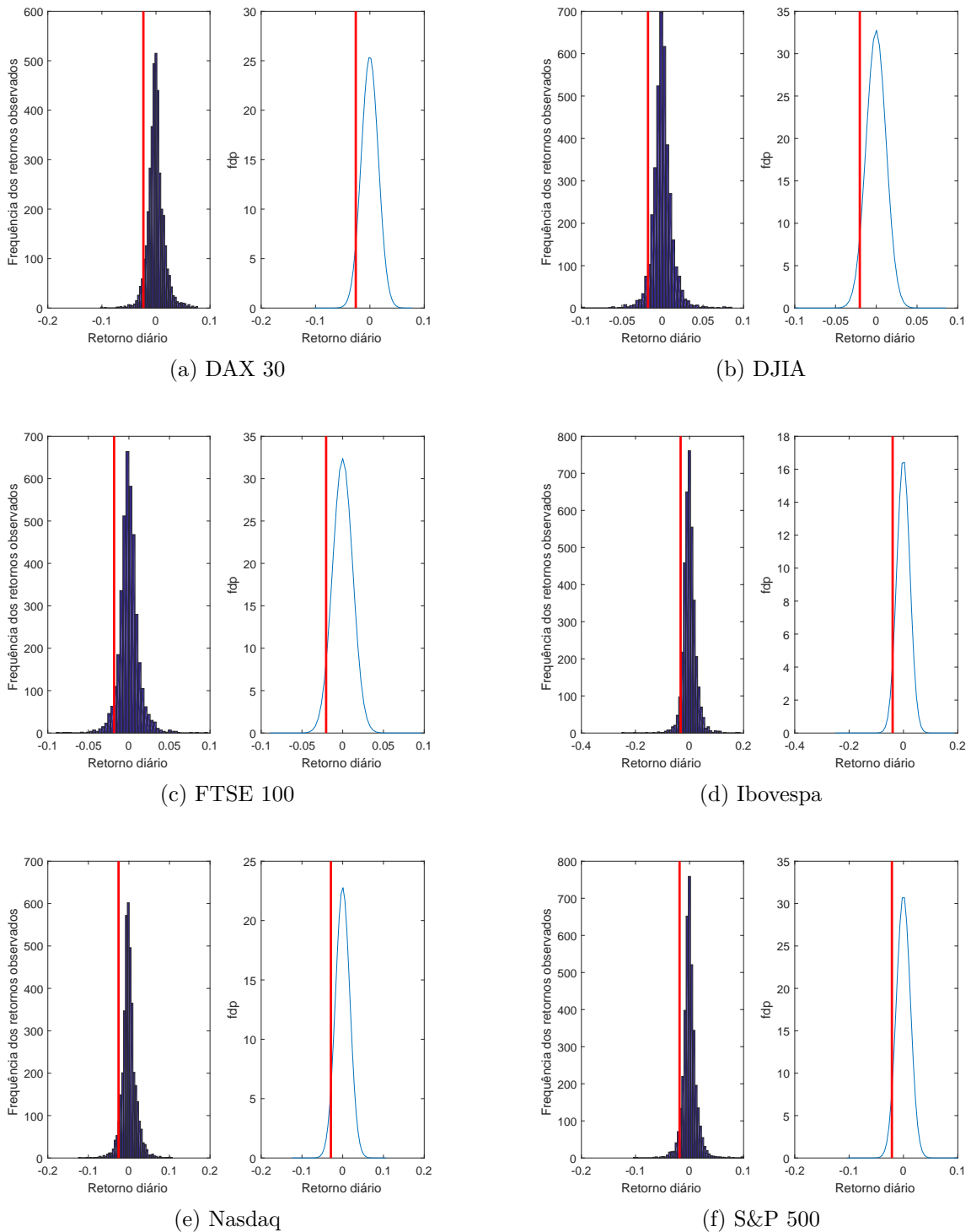


Figura 59 – Histograma dos retornos do DAX 30, DJIA, FTSE 100, Ibovespa, Nasdaq e S&P 500 e distribuição normal ajustando a frequência dos retornos para os mesmos índices. A linha vermelha delimita a região com as piores perdas ao longo de um horizonte temporal considerando um nível de confiança de 95% contemplando as piores perdas sofridas por estes índices sendo expresso nos quantis de 5% da parte inferior da cauda da distribuição dos retornos.

A evolução temporal do risco financeiro mensurados através do VaR, CVaR e

região baixo risco para todos os índices analisados contemplando as 5 janelas temporais distintas. A Tabela 43 apresenta o quadro resumo que contempla a evolução temporal do risco financeiro.

Tabela 43 – Quadro resumo que contempla a evolução temporal do risco financeiro quantificados através do VaR, CVaR e região baixo risco. A escala 1 representa as 16 Janelas temporais de 1 ano, a escala 2 aborda as 8 Janelas temporais de 2 anos, a escala 3 contempla as 4 Janelas de anos anos, a escala 4 denota as 2 Janelas temporais de 8 anos e a escala 5 representa 1 Janela temporal de 16 anos.

i	VaR					CVaR					Risco Baixo				
	Escala 1	Escala 2	Escala 3	Escala 4	Escala 5	Escala 1	Escala 2	Escala 3	Escala 4	Escala 5	Escala 1	Escala 2	Escala 3	Escala 4	Escala 5
CAC 40	2,17	2,19	2,15	2,19	2,17	2,46	2,48	2,44	2,48	2,75	4,79	5,14	4,6	4,79	4,79
DAX 30	2,29	2,29	2,35	2,32	2,29	2,64	2,64	2,7	2,67	2,76	4,92	4,92	4,92	4,92	4,92
DJIA	1,74	1,77	1,77	1,84	1,74	1,9	1,93	1,93	2,01	2,02	3,76	3,75	3,75	4,72	3,76
FTSE 100	1,83	1,76	1,85	1,83	1,83	2,08	2	2,1	2,08	2,35	4,32	4,32	4,32	4,32	4,32
HANGSENG	2,59	2,64	2,55	2,6	2,59	2,86	2,92	2,82	2,87	3,263	3,31	3,31	3,31	3,31	3,31
IBEX 35	2,17	2,15	2,16	2,17	2,17	2,45	2,43	2,44	2,45	2,5	3,56	4,89	4,89	4,89	3,56
IBOV	3,33	3,36	3,34	3,31	3,33	3,6	3,65	3,78	3,58	3,94	3,92	3,96	3,98	3,91	3,96
IPC	2,6	2,62	2,62	2,63	2,6	2,83	2,85	2,85	2,86	3,09	4,66	4,69	4,66	4,66	4,66
NASDAQ	2,54	2,51	2,49	2,57	2,54	2,93	2,9	2,87	2,97	3,02	4,39	4,39	4,39	4,39	4,39
SMI	1,78	1,77	1,82	1,81	1,78	2,04	2,03	2,09	2,08	2,19	3,9	3,9	3,9	3,9	3,9
S&P 500	1,87	1,9	1,89	1,85	1,87	2,04	2,07	2,06	2,02	2,24	3,72	3,72	3,72	3,72	3,72
STI	2,06	2,15	2,04	2,07	2,06	2,25	2,34	2,22	2,25	2,52	3,54	3,54	3,54	3,55	3,54



## 5 Considerações finais

A estabilidade econômica é um benefício intimamente relacionado com a constância dos preços no mercado financeiro. No entanto, a constância dos preços é algo muito difícil de ser atingido em decorrência da assimetria informacional, da aversão ao risco pelos investidores, da incerteza quanto à evolução futura dos preços e do grande número de agentes que interagem de forma não linear.

Ademais, quando o mercado financeiro é assolado por uma onda de choque ocasionada pela incidência de eventos extremos, a estimação do risco se torna uma atividade demasiadamente desafiadora e complexa, visto que há alta na frequência das volatilidades nas séries de retornos decorrentes das mudanças severas e repentinas sofridas pelas séries dos preços relativos aos índices de mercado acionários.

Neste trabalho, é proposto um método baseado na análise da dinâmica comportamental de índices de mercado acionários que quantifica riscos financeiros com a finalidade de garantir um sistema financeiro mais confiável e proteger o público em geral das instabilidades do mercado financeiro.

Para tanto, foram consideradas séries temporais financeiras referentes ao preço de fechamento de 12 representativos índices de mercado, com granularidade diária ao longo de 16 anos que tem início em 02 de Janeiro de 1995 e vai até 30 de Dezembro de 2010 com um total de 3691 observações.

As séries de retornos foram geradas, conforme apresentado no Capítulo 3, e a partir delas foi definido o custo do mercado para cada índice de acionário e sugerido a utilização dos conceitos de perda real e ganho real em detrimento de fundamentos clássicos relacionados a perda e ganho.

A análise da perda e do ganho real está diretamente associada ao custo do mercado. Portanto, o custo do mercado foi obtido sendo este variado no intervalo do valor mínimo observado até o valor máximo do retorno padronizado para cada índice investigado.

Assim, para um dado custo do mercado é realizada a contagem das observações acima dele, que são os ganhos reais, e das observações abaixo, que refletem as perdas reais, ou seja, o custo do mercado pode ser compreendido como a fronteira que delimita a região da perda real e do ganho real.

O ganho real foi normalizado de tal forma que ficasse compreendido entre 0 e 1, o que possibilitou ajustar a distribuição acumulada da frequência do ganho real em relação ao custo do mercado pelo emprego da Equação 3.5. Desta forma, o ganho real pode ser considerado como probabilidade de ganho *a posteriori*.

A normalização do ganho real também possibilitou ajustar a distribuição acumulada da frequência da perda real em relação ao custo do mercado pelo emprego da Equação 3.6. Assim, a perda real pode ser considerada como probabilidade de perda *a posteriori*.

São propostos conceitos relacionados ao ganho real e à perda real em detrimento dos clássicos conceitos de perda e ganho, de modo a propiciar um maior nível de conhecimento sobre a mecânica de funcionamento do mercado financeiro, pois perda e ganho são fenômenos que caracterizam a evolução temporal do mercado, enquanto a perda real e o ganho real delineados pelo custo do mercado, além de evidenciar esta evolução temporal, contemplam a destruição e agregação de riqueza ao agente.

O risco instantâneo para um dado custo do mercado foi obtido pela subtração entre a perda real e o ganho real. Já o risco esperado, que reflete a probabilidade de obter uma perda real considerando que o mercado terá um custo maior ou igual a  $C_i(j)^*$ , foi calculado pelo emprego da Equação 3.9.

Em decorrência disso, o risco esperado foi investigado através de 2 regiões distintas. A primeira, caso  $P(\vartheta_i(C_i(j))|C_i(j) \geq C_i(j)^*)$  implica que o risco esperado do mercado é alto, ou seja, a probabilidade de obter perda real é maior que a probabilidade de obter ganho real. Do contrário, se  $P(\vartheta_i(C_i(j))|C_i(j) \leq C_i(j)^*)$  implica que o risco esperado do mercado é baixo, isto é, a probabilidade de obter ganho real é maior que a probabilidade de obter perda real.

Ao comparar os valores referentes à região de baixo risco ao *VaR* e ao *CVaR* foi verificado que ambos os modelos subestimam o risco, o que implica em condições propícias para o surgimento de bolhas financeiras, pois há uma limitação da racionalidade dos agentes na medida em que estão assumindo, ainda que inconscientemente, um risco maior do que o esperado.

Como o mercado financeiro pode ser caracterizado como um sistema físico auto-organizado, a subestimação do risco pode ser um fator condicionante para propagar crises macroeconômicas, pois como há elevação da incerteza em relação a evolução futura dos preços e dado a existência de agentes assimetricamente informados, os demais agentes podem apresentar um comportamento similar ao dos agentes supostamente mais bem informados ou simplesmente tomar decisões similares as da grande maioria.

Neste sentido, um específico grupo de agentes denominados arbitradores podem criar artificialidades para influenciar a formação dos preços (subvalorizações e/ou sobrevalorizações) com o propósito de obter vantagens em relação aos demais agentes, uma vez que estes apresentam comportamento coletivo e emergente.

A subestimação do risco e as artificialidades decorrentes de manipulação humana provocam perturbações ao mercado financeiro associadas a intensas e persistentes flutuações nos preços dos ativos que reduzem o nível de confiança dos agentes em todo sistema

financeiro e que podem conduzir à aniquilação de grande valor econômico bem como propiciar taxas de crescimento mais baixas para as economias.

A quantidade total de oito eventos extremos (crises e bolhas financeiras) que ocorreram ao longo do período investigado que afligiram o mercado financeiro e perpassaram para o lado real da Economia, reduzindo bem estar social e que afetaram a vidas das pessoas em todo o mundo, são fortes indícios que a subestimação do risco pode implicar em desequilíbrios de ordem econômica a nível global.

A adoção dos fundamentos propostos, mais especificamente o custo do mercado, a perda real e o ganho real propiciam uma percepção alternativa de analisar o equilíbrio no mercado financeiros, pois a paridade entre a perda real e o ganho real dado um custo do mercado define o ponto onde ocorre o equilíbrio do processo.

A limitação do modelo proposto está no fato de que a quantificação do risco é baseada em informações *a posteriori*. Todavia, os resultados proporcionados por sua aplicação promovem inovações que devem ser consideradas como: a destruição e a agregação de riqueza ao agente delineado pelo custo do mercado, ganhos e perdas, em conformidade com a teoria econômica, recebem tratamento estatístico distintos, mais especificamente a distribuição acumulada dos ganhos reais e perdas reais são ajustadas através de duas formas funcionais derivadas a partir de uma distribuição Fermi-Dirac.

A quantificação do risco através da aplicação do modelo proposto contempla todos os eventos cronológicos ocorridos inclusive os extremos apresentando um custo computacional linear no tamanho da janela. Além disto, os resultados associados a quantificação do risco pela aplicação do modelo proposto fornecem evidências empíricas de que os modelos clássicos subestimam o risco.

Esta informação pode ser utilizada na formulação de políticas macroeconômicas relacionadas a regulação do mercado financeiro com o intuito de promover um maior nível de estabilidade econômica e que implicam em redução de bem estar econômico e social.

## 5.1 Trabalhos futuros

Como trabalhos futuros emerge a motivação de aplicar o modelo proposto para quantificar o risco financeiro em outros componentes do mercado financeiro como: ações, opções, títulos, câmbio, criptomoedas e derivativos.

Além disto, pretende-se desenvolver um sistema inteligente híbrido entre o modelo proposto e uma rede neural artificial do tipo *feedforward* para predizer o risco no mercado financeiro bem como reconhecer padrões associados a ocorrência de eventos extremos *a priori*.

## Referências

- AAS, K.; HAFF, I. H. The generalized hyperbolic skew student's-t-distribution. *Journal of financial econometrics*, Oxford University Press, v. 4, n. 2, p. 275–309, 2006. Citado na página 32.
- ACEMOGLU, D.; AKCIGIT, U.; KERR, W. Networks and the macroeconomy: An empirical exploration. *NBER Macroeconomics Annual*, University of Chicago Press Chicago, IL, v. 30, n. 1, p. 273–335, 2016. Citado na página 24.
- AKERLOF, G. A.; SHILLER, R. J. *Animal spirits: How human psychology drives the economy, and why it matters for global capitalism*. [S.l.]: Princeton University Press Princeton, 2009. Citado na página 30.
- ALLEN, F.; GALE, D. *Comparing financial systems*. [S.l.]: MIT press, 2000. Citado na página 23.
- ALLEN, F.; SANTOMERO, A. M. What do financial intermediaries do? *Journal of Banking & Finance*, Elsevier, v. 25, n. 2, p. 271–294, 2001. Citado na página 23.
- ALTMANN, E. G.; KANTZ, H. Recurrence time analysis, long-term correlations, and extreme events. *Physical Review E*, APS, v. 71, n. 5, p. 056106, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 34.
- ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J.-M.; HEATH, D. Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, Wiley Online Library, v. 9, n. 3, p. 203–228, 1999. Citado na página 33.
- ASAI, M.; MCALEER, M.; MEDEIROS, M. C. Modelling and forecasting noisy realized volatility. *Computational Statistics & Data Analysis*, Elsevier, v. 56, n. 1, p. 217–230, 2012. Citado na página 29.
- AUSLOOS, M.; IVANOVA, K. Multifractal nature of stock exchange prices. *Computer Physics Communications*, Elsevier, v. 147, n. 1-2, p. 582–585, 2002. Citado na página 22.
- BARABASI, A.-L. The origin of bursts and heavy tails in human dynamics. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 435, n. 7039, p. 207–211, 2005. Citado na página 21.
- BATTISTON, S.; PULIGA, M.; KAUSHIK, R.; TASCA, P.; CALDARELLI, G. Debtrank: Too central to fail? financial networks, the fed and systemic risk. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 2, p. 541, 2012. Citado na página 24.
- BAUR, D. G. Financial contagion and the real economy. *Journal of Banking & Finance*, Elsevier, v. 36, n. 10, p. 2680–2692, 2012. Citado na página 24.
- BELLES-SAMPERA, J.; GUILLÉN, M.; SANTOLINO, M. Beyond value-at-risk: Gluevar distortion risk measures. *Risk Analysis*, Wiley Online Library, v. 34, n. 1, p. 121–134, 2014. Citado na página 23.

- BERCHER, J.-F.; VIGNAT, C. A new look at q-exponential distributions via excess statistics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 387, n. 22, p. 5422–5432, 2008. Citado na página 35.
- BIONDO, A. E.; PLUCHINO, A.; RAPISARDA, A.; HELBING, D. Reducing financial avalanches by random investments. *Physical Review E*, APS, v. 88, n. 6, p. 062814, 2013. Citado na página 22.
- BOGACHEV, M. I.; BUNDE, A. Memory effects in the statistics of interoccurrence times between large returns in financial records. *Physical Review E*, APS, v. 78, n. 3, p. 036114, 2008. Citado na página 34.
- BOGACHEV, M. I.; BUNDE, A. Improved risk estimation in multifractal records: Application to the value at risk in finance. *Physical Review E*, APS, v. 80, n. 2, p. 026131, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 36.
- BOGACHEV, M. I.; BUNDE, A. On the predictability of extreme events in records with linear and nonlinear long-range memory: Efficiency and noise robustness. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 390, n. 12, p. 2240–2250, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 22, 30, 34 e 35.
- BOGACHEV, M. I.; EICHNER, J. F.; BUNDE, A. Effect of nonlinear correlations on the statistics of return intervals in multifractal data sets. *Physical review letters*, APS, v. 99, n. 24, p. 240601, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 21, 34 e 35.
- BORYSOV, S. S.; BALATSKY, A. V. Cross-correlation asymmetries and causal relationships between stock and market risk. *PloS one*, Public Library of Science, v. 9, n. 8, p. e105874, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 30, 65 e 128.
- BOTTA, F.; MOAT, H. S.; STANLEY, H. E.; PREIS, T. Quantifying stock return distributions in financial markets. *PloS one*, Public Library of Science, v. 10, n. 9, p. e0135600, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 22, 24, 30 e 46.
- BOUCHAUD, J.-P.; POTTERS, M.; MEYER, M. Apparent multifractality in financial time series. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, Springer, v. 13, n. 3, p. 595–599, 2000. Citado na página 21.
- BOX, G. E.; JENKINS, G. M.; REINSEL, G. C.; LJUNG, G. M. *Time series analysis: forecasting and control*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 29.
- BREITUNG, J.; HAFNER, C. M. A simple model for now-casting volatility series. *International Journal of Forecasting*, Elsevier, v. 32, n. 4, p. 1247–1255, 2016. Citado na página 29.
- CALVET, L.; FISHER, A. Multifractality in asset returns: theory and evidence. *Review of Economics and Statistics*, MIT Press, v. 84, n. 3, p. 381–406, 2002. Citado na página 30.
- CHABI-YO, F. Pricing kernels with stochastic skewness and volatility risk. *Management Science*, INFORMS, v. 58, n. 3, p. 624–640, 2012. Citado na página 29.

- CHANG, C.-L.; JIMÉNEZ-MARTÍN, J.-Á.; MAASOUMI, E.; PÉREZ-AMARAL, T. A stochastic dominance approach to financial risk management strategies. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 187, n. 2, p. 472–485, 2015. Citado na página 31.
- CHATTERJEE, A.; CHAKRABARTI, B. K. Ideal-gas-like market models with savings: Quenched and annealed cases. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 382, n. 1, p. 36–41, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 37.
- CHATTERJEE, A.; CHAKRABARTI, B. K.; MANNA, S. Money in gas-like markets: Gibbs and pareto laws. *Physica Scripta*, IOP Publishing, v. 2003, n. T106, p. 36, 2003. Citado na página 37.
- CHATTERJEE, A.; CHAKRABARTI, B. K.; MANNA, S. Pareto law in a kinetic model of market with random saving propensity. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 335, n. 1, p. 155–163, 2004. Citado na página 37.
- CHATTERJEE, A.; YARLAGADDA, S.; CHAKRABARTI, B. K. *Econophysics of wealth distributions: Econophys-Kolkata I*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007. Citado na página 21.
- CHEN, C. W.; GERLACH, R.; HWANG, B. B.; MCALEER, M. Forecasting value-at-risk using nonlinear regression quantiles and the intra-day range. *International Journal of Forecasting*, Elsevier, v. 28, n. 3, p. 557–574, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- CHRISTOFFERSEN, P.; DIEBOLD, F. X.; SCHUERMAN, T. Horizon problems and extreme events in financial risk management. 1998. Citado na página 24.
- CONSTANTIN, M.; SARMA, S. D. Volatility, persistence, and survival in financial markets. *Physical Review E*, APS, v. 72, n. 5, p. 051106, 2005. Citado na página 22.
- CONT, R.; BOUCHAUD, J.-P. Herd behavior and aggregate fluctuations in financial markets. *Macroeconomic dynamics*, Cambridge Univ Press, v. 4, n. 02, p. 170–196, 2000. Citado na página 22.
- CORTE, P. D.; RAMADORAI, T.; SARNO, L. Volatility risk premia and exchange rate predictability. *Journal of Financial Economics*, Elsevier, v. 120, n. 1, p. 21–40, 2016. Citado na página 29.
- COSTA, M.; GOLDBERGER, A. L.; PENG, C.-K. Multiscale entropy analysis of complex physiologic time series. *Physical review letters*, APS, v. 89, n. 6, p. 068102, 2002. Citado na página 26.
- CUEVA, C.; ROBERTS, R. E.; SPENCER, T.; RANI, N.; TEMPEST, M.; TOBLER, P. N.; HERBERT, J.; RUSTICHINI, A. Cortisol and testosterone increase financial risk taking and may destabilize markets. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 5, p. 11206, 2015. Citado na página 30.
- DEMIRGÜÇ-KUNT, A.; LEVINE, R. Finance, financial sector policies, and long-run growth. 2008. Citado na página 24.
- DENYS, M.; JAGIELSKI, M.; GUBIEC, T.; KUTNER, R.; STANLEY, H. Statistical collapse of excessive market losses. *Acta Physica Polonica A*, Institute of Physics, Polish Academy of Science, v. 129, n. 5, p. 913–916, 2016. Citado na página 34.

- DIEBOLD, F. X.; HAHN, J.; TAY, A. S. Multivariate density forecast evaluation and calibration in financial risk management: high-frequency returns on foreign exchange. *The Review of Economics and Statistics*, MIT Press, v. 81, n. 4, p. 661–673, 1999. Citado na página 22.
- DRĂGULESCU, A.; YAKOVENKO, V. M. Exponential and power-law probability distributions of wealth and income in the united kingdom and the united states. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 299, n. 1, p. 213–221, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 37.
- DUARTE, F. B.; MACHADO, J. T.; DUARTE, G. M. Dynamics of the dow jones and the nasdaq stock indexes. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 61, n. 4, p. 691–705, 2010. Citado na página 45.
- ELING, M.; SCHMEISER, H.; SCHMIT, J. T. The solvency ii process: Overview and critical analysis. *Risk management and insurance review*, Wiley Online Library, v. 10, n. 1, p. 69–85, 2007. Citado na página 23.
- EMBRECHTS, P.; FREY, R.; MCNEIL, A. Quantitative risk management. *Princeton Series in Finance*, Princeton, v. 10, 2005. Citado na página 31.
- FAMA, E. F. The behavior of stock-market prices. *The journal of Business*, JSTOR, v. 38, n. 1, p. 34–105, 1965. Citado na página 32.
- FANCHIOTTI, H.; CANAL, C. G.; MARTINEZ, N. Critical analysis of electronic simulation of financial market fluctuations. *Fractals*, World Scientific, v. 10, n. 04, p. 473–479, 2002. Citado na página 22.
- FARMER, J. D.; JOSHI, S. The price dynamics of common trading strategies. *Journal of Economic Behavior & Organization*, Elsevier, v. 49, n. 2, p. 149–171, 2002. Citado na página 22.
- FERMANIAN, J.-D.; SCAILLET, O. Sensitivity analysis of var and expected shortfall for portfolios under netting agreements. *Journal of Banking & Finance*, Elsevier, v. 29, n. 4, p. 927–958, 2005. Citado na página 31.
- FILIMONOV, V.; SORNETTE, D. Quantifying reflexivity in financial markets: Toward a prediction of flash crashes. *Physical Review E*, APS, v. 85, n. 5, p. 056108, 2012. Citado na página 22.
- FIRMINO, P. R. A.; NETO, P. S. de M.; FERREIRA, T. A. Correcting and combining time series forecasters. *Neural networks*, Elsevier, v. 50, p. 1–11, 2014. Citado na página 22.
- FIRMINO, P. R. A.; NETO, P. S. de M.; FERREIRA, T. A. Error modeling approach to improve time series forecasters. *Neurocomputing*, Elsevier, v. 153, p. 242–254, 2015. Citado na página 22.
- FLORIDO, E.; MARTÍNEZ-ÁLVAREZ, F.; MORALES-ESTEBAN, A.; REYES, J.; AZNARTE-MELLADO, J. Detecting precursory patterns to enhance earthquake prediction in chile. *Computers & Geosciences*, Elsevier, v. 76, p. 112–120, 2015. Citado na página 26.



- FRANCO, C.; ZAKOŠIAN, J.-M. Risk-parameter estimation in volatility models. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 184, n. 1, p. 158–173, 2015. Citado na página 31.
- GABAIX, X.; GOPIKRISHNAN, P.; PLEUROU, V.; STANLEY, H. E. A theory of power-law distributions in financial market fluctuations. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 423, n. 6937, p. 267–270, 2003. Citado na página 21.
- GANOPOLSKI, A.; RAHMSTORF, S. Abrupt glacial climate changes due to stochastic resonance. *Physical Review Letters*, APS, v. 88, n. 3, p. 038501, 2002. Citado na página 26.
- GIGLIO, S.; KELLY, B.; PRUITT, S. Systemic risk and the macroeconomy: An empirical evaluation. *Journal of Financial Economics*, Elsevier, v. 119, n. 3, p. 457–471, 2016. Citado na página 24.
- GONG, P.; WENG, Y. Value-at-risk forecasts by a spatiotemporal model in chinese stock market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 441, p. 173–191, 2016. Citado na página 23.
- GONTIS, V.; HAVLIN, S.; KONONOVICIUS, A.; PODOBNIK, B.; STANLEY, H. E. Stochastic model of financial markets reproducing scaling and memory in volatility return intervals. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 462, p. 1091–1102, 2016. Citado na página 22.
- GONZÁLEZ-RIVERA, G.; LEE, T.-H.; MISHRA, S. Forecasting volatility: A reality check based on option pricing, utility function, value-at-risk, and predictive likelihood. *International Journal of forecasting*, Elsevier, v. 20, n. 4, p. 629–645, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 32, 65 e 128.
- GOPIKRISHNAN, P.; PLEUROU, V.; AMARAL, L. A. N.; MEYER, M.; STANLEY, H. E. Scaling of the distribution of fluctuations of financial market indices. *Physical Review E*, APS, v. 60, n. 5, p. 5305, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 22, 38 e 46.
- GORDY, M. B.; HOWELLS, B. Procyclicality in basel ii: Can we treat the disease without killing the patient? *Journal of Financial Intermediation*, Elsevier, v. 15, n. 3, p. 395–417, 2006. Citado na página 23.
- GUJARATI, D. N. *Basic econometrics*. [S.l.]: Tata McGraw-Hill Education, 2009. Citado na página 28.
- HARTIGAN, J. A.; WONG, M. A. Algorithm as 136: A k-means clustering algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, JSTOR, v. 28, n. 1, p. 100–108, 1979. Citado na página 55.
- HERZOG, B. An econophysics model of financial bubbles. *Natural Science*, Scientific Research Publishing, v. 7, n. 01, p. 55, 2015. Citado na página 24.
- HIRSHLEIFER, D. Investor psychology and asset pricing. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 56, n. 4, p. 1533–1597, 2001. Citado na página 30.
- HUANG, C.-K.; NORTH, D.; ZEWOTIR, T. Exchangeability, extreme returns and value-at-risk forecasts. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 477, p. 204–216, 2017. Citado na página 23.



- HUANG, J. Experimental econophysics: Complexity, self-organization, and emergent properties. *Physics Reports*, Elsevier, v. 564, p. 1–55, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.
- JIANG, Z.-Q.; CANABARRO, A.; PODOBNIK, B.; STANLEY, H. E.; ZHOU, W.-X. Early warning of large volatilities based on recurrence interval analysis in chinese stock markets. *Quantitative Finance*, Taylor & Francis, v. 16, n. 11, p. 1713–1724, 2016. Citado na página 34.
- JOE, H.; XU, J. J. The estimation method of inference functions for margins for multivariate models. 2016. Citado na página 24.
- JORION, P. *Value at risk*. [S.l.]: McGraw-Hill, New York, 1997. Citado na página 23.
- KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica: Journal of the econometric society*, JSTOR, p. 263–291, 1979. Citado na página 41.
- KIM, M.; LEE, S. Nonlinear expectile regression with application to value-at-risk and expected shortfall estimation. *Computational Statistics & Data Analysis*, Elsevier, v. 94, p. 1–19, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 30, 31 e 42.
- KIYONO, K.; STRUZIK, Z. R.; YAMAMOTO, Y. Criticality and phase transition in stock-price fluctuations. *Physical review letters*, APS, v. 96, n. 6, p. 068701, 2006. Citado na página 21.
- KLEMKOSKY, R. C. Financial system fragility. *Business Horizons*, Elsevier, v. 56, n. 6, p. 675–683, 2013. Citado na página 23.
- KRAWIECKI, A.; HOŁYST, J.; HELBING, D. Volatility clustering and scaling for financial time series due to attractor bubbling. *Physical review letters*, APS, v. 89, n. 15, p. 158701, 2002. Citado na página 22.
- KUHNEN, C. M.; KNUTSON, B. The influence of affect on beliefs, preferences, and financial decisions. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Cambridge Univ Press, v. 46, n. 03, p. 605–626, 2011. Citado na página 30.
- KWAPIEŃ, J.; DROŹDŹ, S. Physical approach to complex systems. *Physics Reports*, Elsevier, v. 515, n. 3, p. 115–226, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 26.
- LEVINE, R. Finance and growth: theory and evidence. *Handbook of economic growth*, Elsevier, v. 1, p. 865–934, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- LI, B.; HOI, S. C. Online portfolio selection: A survey. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, ACM, v. 46, n. 3, p. 35, 2014. Citado na página 22.
- LI, Q.; RACINE, J. S. *Nonparametric econometrics: theory and practice*. [S.l.]: Princeton University Press, 2007. Citado na página 34.
- LILLO, F.; FARMER, J. D.; MANTEGNA, R. N. Econophysics: Master curve for price-impact function. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 421, n. 6919, p. 129–130, 2003. Citado na página 21.

- LILLO, F.; MANTEGNA, R. N. Variety and volatility in financial markets. *Physical Review E*, APS, v. 62, n. 5, p. 6126, 2000. Citado na página 29.
- LIU, S.; TSE, Y.-K. Intraday value-at-risk: An asymmetric autoregressive conditional duration approach. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 189, n. 2, p. 437–446, 2015. Citado na página 30.
- LIU, Y.; GOPIKRISHNAN, P.; STANLEY, H. E. et al. Statistical properties of the volatility of price fluctuations. *Physical review e*, APS, v. 60, n. 2, p. 1390, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 46.
- LU, Y.; WANG, J. Nonlinear dynamical complexity of agent-based stochastic financial interacting epidemic system. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 86, n. 3, p. 1823–1840, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 45.
- LUDESCHER, J.; BUNDE, A. Universal behavior of the interoccurrence times between losses in financial markets: Independence of the time resolution. *Physical Review E*, APS, v. 90, n. 6, p. 062809, 2014. Citado 5 vezes nas páginas 22, 30, 34, 35 e 36.
- LUDESCHER, J.; TSALLIS, C.; BUNDE, A. Universal behaviour of interoccurrence times between losses in financial markets: An analytical description. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 95, n. 6, p. 68002, 2011. Citado 6 vezes nas páginas 21, 34, 35, 36, 38 e 48.
- LUX, T.; ALFARANO, S. Financial power laws: Empirical evidence, models, and mechanisms. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 88, p. 3–18, 2016. Citado na página 37.
- MAKSIMOVIĆ, G.; JOVIĆ, S.; JOVANOVIĆ, R. Economic growth rate management by soft computing approach. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 465, p. 520–524, 2017. Citado na página 21.
- MANDELROT, B. B. Renormalization and fixed points in finance, since 1962. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 263, n. 1-4, p. 477–487, 1999. Citado na página 22.
- MANSHOUR, P.; ANVARI, M.; REINKE, N.; SAHIM, M.; TABAR, M. R. R. Interoccurrence time statistics in fully-developed turbulence. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 6, 2016. Citado na página 34.
- MANSHOUR, P.; SABERI, S.; SAHIMI, M.; PEINKE, J.; PACHECO, A. F.; TABAR, M. R. R. Turbulencelike behavior of seismic time series. *Physical review letters*, APS, v. 102, n. 1, p. 014101, 2009. Citado na página 26.
- MANTEGNA, R. N.; STANLEY, H. E. *Introduction to econophysics: correlations and complexity in finance*. [S.l.]: Cambridge university press, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 21, 29 e 37.
- MASTROMATTEO, I.; TOTH, B.; BOUCHAUD, J.-P. Anomalous impact in reaction-diffusion financial models. *Physical review letters*, APS, v. 113, n. 26, p. 268701, 2014. Citado na página 22.

- MATIA, K.; ASHKENAZY, Y.; STANLEY, H. E. Multifractal properties of price fluctuations of stocks and commodities. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 61, n. 3, p. 422, 2003. Citado na página 22.
- MAYNARD, K. by JOHN. The general theory of employment, interest, and money. 1936. Citado na página 30.
- MCGILL, R.; TUKEY, J. W.; LARSEN, W. A. Variations of box plots. *The American Statistician*, Taylor & Francis Group, v. 32, n. 1, p. 12–16, 1978. Citado na página 47.
- MENCK, P. J.; HEITZIG, J.; KURTHS, J.; SCHELLNHUBER, H. J. How dead ends undermine power grid stability. *Nature communications*, Nature Publishing Group, v. 5, 2014. Citado na página 26.
- MOHANTY, P. Generic features of the wealth distribution in ideal-gas-like markets. *Physical Review E*, APS, v. 74, n. 1, p. 011117, 2006. Citado na página 37.
- MORALES-ESTEBAN, A.; MARTÍNEZ-ÁLVAREZ, F.; TRONCOSO, A.; JUSTO, J.; RUBIO-ESCUADERO, C. Pattern recognition to forecast seismic time series. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 37, n. 12, p. 8333–8342, 2010. Citado na página 26.
- MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. d. C. Previsão de séries temporais. *São Paulo: Atual*, 1987. Citado na página 28.
- MU, G.-H.; ZHOU, W.-X.; CHEN, W.; KERTÉSZ, J. Order flow dynamics around extreme price changes on an emerging stock market. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 12, n. 7, p. 075037, 2010. Citado na página 22.
- NEFTCI, S. N. Value at risk calculations, extreme events, and tail estimation. *The Journal of Derivatives*, Institutional Investor Journals, v. 7, n. 3, p. 23–37, 2000. Citado na página 24.
- NETO, P. S. de M.; CAVALCANTI, G. D.; MADEIRO, F.; FERREIRA, T. A. An ideal gas approach to classify countries using financial indices. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 392, n. 1, p. 177–183, 2013. Citado na página 37.
- NETO, P. S. de M.; SILVA, D. A.; FERREIRA, T. A.; CAVALCANTI, G. D. Market volatility modeling for short time window. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 390, n. 20, p. 3444–3453, 2011. Citado na página 37.
- NIU, H.; WANG, J. Quantifying complexity of financial short-term time series by composite multiscale entropy measure. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 22, n. 1, p. 375–382, 2015. Citado na página 26.
- ODEAN, T. Volume, volatility, price, and profit when all traders are above average. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 53, n. 6, p. 1887–1934, 1998. Citado na página 30.
- PAN, R. K.; SINHA, S. Collective behavior of stock price movements in an emerging market. *Physical Review E*, APS, v. 76, n. 4, p. 046116, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.

- PARANJAPE-VODITEL, P.; DESHPANDE, U. A stock market portfolio recommender system based on association rule mining. *Applied Soft Computing*, Elsevier, v. 13, n. 2, p. 1055–1063, 2013. Citado na página 22.
- PARK, U. S.; IKEDA, M. Stability analysis and control design of lti discrete-time systems by the direct use of time series data. *Automatica*, Elsevier, v. 45, n. 5, p. 1265–1271, 2009. Citado na página 26.
- PATRIARCA, M.; CHAKRABORTI, A.; HEINSALU, E.; GERMANO, G. Relaxation in statistical many-agent economy models. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, Springer, v. 57, n. 2, p. 219–224, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 37.
- PATRIARCA, M.; CHAKRABORTI, A.; KASKI, K. Gibbs versus non-gibbs distributions in money dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 340, n. 1, p. 334–339, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 37.
- PATRO, D. K.; QI, M.; SUN, X. A simple indicator of systemic risk. *Journal of Financial Stability*, Elsevier, v. 9, n. 1, p. 105–116, 2013. Citado na página 23.
- PATZELT, F.; PAWELZIK, K. An inherent instability of efficient markets. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 3, 2013. Citado na página 21.
- PEINKE, J.; BÖTTCHER, F.; BARTH, S. Anomalous statistics in turbulence, financial markets and other complex systems. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 13, n. 7-8, p. 450–460, 2004. Citado na página 22.
- PIERINI, S. Stochastic tipping points in climate dynamics. *Physical Review E*, APS, v. 85, n. 2, p. 027101, 2012. Citado na página 26.
- POON, S.-H.; ROCKINGER, M.; TAWN, J. Extreme value dependence in financial markets: Diagnostics, models, and financial implications. *Review of financial studies*, Soc Financial Studies, v. 17, n. 2, p. 581–610, 2004. Citado na página 24.
- PREIS, T.; MOAT, H. S.; STANLEY, H. E. Quantifying trading behavior in financial markets using google trends. 2013. Citado na página 21.
- PREIS, T.; PAUL, W.; SCHNEIDER, J. J. Fluctuation patterns in high-frequency financial asset returns. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 82, n. 6, p. 68005, 2008. Citado na página 26.
- QIU, B.; WANG, Z.; TANG, Z.; CHEN, C.; FAN, Z.; LI, W. Automated cropping intensity extraction from isolines of wavelet spectra. *Computers and Electronics in Agriculture*, Elsevier, v. 125, p. 1–11, 2016. Citado na página 26.
- RABERTO, M.; CINCOTTI, S.; FOCARDI, S. M.; MARCHESI, M. Agent-based simulation of a financial market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 299, n. 1, p. 319–327, 2001. Citado na página 22.
- REIF, F. *Fundamentals of statistical and thermal physics*. [S.l.]: Waveland Press, 2009. Citado na página 40.

- REN, F.; ZHOU, W.-X. Recurrence interval analysis of high-frequency financial returns and its application to risk estimation. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 12, n. 7, p. 075030, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 34.
- RICHMAN, J. S.; MOORMAN, J. R. Physiological time-series analysis using approximate entropy and sample entropy. *American Journal of Physiology-Heart and Circulatory Physiology*, Am Physiological Soc, v. 278, n. 6, p. H2039–H2049, 2000. Citado na página 26.
- ROCKAFELLAR, R. T.; URYASEV, S. Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of risk*, v. 2, p. 21–42, 2000. Citado na página 33.
- ROCKAFELLAR, R. T.; URYASEV, S. Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of banking & finance*, Elsevier, v. 26, n. 7, p. 1443–1471, 2002. Citado na página 33.
- ROOTZEN, H.; KLÜPPELBERG, C. A single number can't hedge against economic catastrophes. *AMBIO-STOCKHOLM-*, Royal Swedish Academy of Sciences, v. 28, p. 550–555, 1999. Citado na página 33.
- ROUBINI, N.; BILODEAU, J. The financial development index: Assessing the world's financial systems. *The Financial Development Report*, p. 3–25, 2008. Citado na página 23.
- SALINAS, S. R. *Introdução a física estatística vol. 09*. [S.l.]: Edusp, 1997. Citado na página 40.
- SANDSTRÖM, A. *Handbook of solvency for actuaries and risk managers: theory and practice*. [S.l.]: CRC Press, 2016. Citado na página 23.
- SCHEFFER, M.; BASCOMPTE, J.; BROCK, W. A.; BROVKIN, V.; CARPENTER, S. R.; DAKOS, V.; HELD, H.; NES, E. H. V.; RIETKERK, M.; SUGIHARA, G. Early-warning signals for critical transitions. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 461, n. 7260, p. 53–59, 2009. Citado na página 21.
- SCHEFFER, M.; CARPENTER, S. R.; LENTON, T. M.; BASCOMPTE, J.; BROCK, W.; DAKOS, V.; KOPPEL, J. V. D.; LEEMPUT, I. A. V. D.; LEVIN, S. A.; NES, E. H. V. et al. Anticipating critical transitions. *science*, American Association for the Advancement of Science, v. 338, n. 6105, p. 344–348, 2012. Citado na página 21.
- ŞENER, E.; BARONYAN, S.; MENGÜTÜRK, L. A. Ranking the predictive performances of value-at-risk estimation methods. *International Journal of Forecasting*, Elsevier, v. 28, n. 4, p. 849–873, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 32.
- SHILLER, R. C. Irrational exuberance. *Philosophy & Public Policy Quarterly*, v. 20, n. 1, p. 18–23, 2000. Citado na página 30.
- SILVA, L. da; FIGUEIRÊDO, P. de. Income distribution: An adaptive heterogeneous model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 395, p. 275–282, 2014. Citado na página 37.
- SLOVIK, P.; COURNÈDE, B. Macroeconomic impact of basel iii. 2011. Citado na página 23.



- SMITH, A.; LOHRENZ, T.; KING, J.; MONTAGUE, P. R.; CAMERER, C. F. Irrational exuberance and neural crash warning signals during endogenous experimental market bubbles. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 111, n. 29, p. 10503–10508, 2014. Citado na página 30.
- SOKOLOV-MLADENović, S.; MILOVANČEVIĆ, M.; MLADENović, I. Evaluation of trade influence on economic growth rate by computational intelligence approach. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 465, p. 358–362, 2017. Citado na página 21.
- SORNETTE, D. *Why stock markets crash: critical events in complex financial systems*. [S.l.]: Princeton University Press, 2009. Citado na página 22.
- SPIERDIJK, L. Confidence intervals for arma–garch value-at-risk: The case of heavy tails and skewness. *Computational Statistics & Data Analysis*, Elsevier, v. 100, p. 545–559, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 23, 32, 65 e 128.
- STANLEY, H. E.; GABAIX, X.; GOPIKRISHNAN, P.; PLEUROU, V. Economic fluctuations and statistical physics: the puzzle of large fluctuations. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 44, n. 1-4, p. 329–340, 2006. Citado na página 21.
- STANLEY, H. E.; PLEUROU, V.; GABAIX, X. A statistical physics view of financial fluctuations: Evidence for scaling and universality. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 387, n. 15, p. 3967–3981, 2008. Citado na página 22.
- STEFFEN, T. Solvency ii and the work of ceiops. *The Geneva Papers on Risk and Insurance-Issues and Practice*, Springer, v. 33, n. 1, p. 60–65, 2008. Citado na página 23.
- SUO, Y.-Y.; WANG, D.-H.; LI, S.-P. Risk estimation of csi 300 index spot and futures in china from a new perspective. *Economic Modelling*, Elsevier, v. 49, p. 344–353, 2015. Citado na página 34.
- TAN, L.; ZHENG, B.; CHEN, J.-J.; JIANG, X.-F. How volatilities nonlocal in time affect the price dynamics in complex financial systems. *PloS one*, Public Library of Science, v. 10, n. 2, p. e0118399, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 46.
- TAVARES, A. B.; CURTO, J. D.; TAVARES, G. N. Modelling heavy tails and asymmetry using arch-type models with stable paretian distributions. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 51, n. 1, p. 231–243, 2008. Citado na página 21.
- TAWN, J. A. Modelling multivariate extreme value distributions. *Biometrika*, JSTOR, p. 245–253, 1990. Citado na página 24.
- TSALLIS, C. Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics. *Journal of statistical physics*, Springer, v. 52, n. 1, p. 479–487, 1988. Citado na página 35.
- TSALLIS, C. Nonadditive entropy and nonextensive statistical mechanics-an overview after 20 years. *Brazilian Journal of Physics*, SciELO Brasil, v. 39, n. 2A, p. 337–356, 2009. Citado na página 35.
- TSALLIS, C. Inter-occurrence times and universal laws in finance, earthquakes and genomes. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 88, p. 254–266, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 34, 35 e 36.

- TSALLIS, C. et al. *Introduction to nonextensive statistical mechanics*. [S.l.]: Springer, 2009. Citado na página 35.
- TSAY, R. S. *Analysis of financial time series*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2005. v. 543. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.
- WANG, C.-S.; ZHAO, Z. Conditional value-at-risk: Semiparametric estimation and inference. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 195, n. 1, p. 86–103, 2016. Citado na página 34.
- WANG, F.; LIAO, G.-p.; ZHOU, X.-y.; SHI, W. Multifractal detrended cross-correlation analysis for power markets. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 72, n. 1-2, p. 353–363, 2013. Citado na página 30.
- WANG, F.; YAMASAKI, K.; HAVLIN, S.; STANLEY, H. E. Multifactor analysis of multiscaling in volatility return intervals. *Physical Review E*, APS, v. 79, n. 1, p. 016103, 2009. Citado na página 29.
- WIPPLINGER, E. Philippe jorion: Value at risk-the new benchmark for managing financial risk. *Financial Markets and Portfolio Management*, Springer Science & Business Media, v. 21, n. 3, p. 397, 2007. Citado na página 23.
- XIONG, H.; SHANG, P. Weighted multifractal cross-correlation analysis based on shannon entropy. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 30, n. 1, p. 268–283, 2016. Citado na página 22.
- XU, K.; WANG, J. Nonlinear multiscale coupling analysis of financial time series based on composite complexity synchronization. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 86, n. 1, p. 441–458, 2016. Citado na página 45.
- YAMADA, H. S.; IGUCHI, K. q-exponential fitting for distributions of family names. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 387, n. 7, p. 1628–1636, 2008. Citado na página 35.
- YAMAI, Y.; YOSHIBA, T. et al. On the validity of value-at-risk: comparative analyses with expected shortfall. *Monetary and economic studies*, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, v. 20, n. 1, p. 57–85, 2002. Citado na página 33.
- YANG, G.; WANG, J.; DENG, W. Nonlinear analysis of volatility duration financial series model by stochastic interacting dynamic system. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 80, n. 1-2, p. 701–713, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 21, 22, 29 e 37.
- YE, B.; CHEN, J.; JU, C.; LI, H.; WANG, X. Distinguishing chaotic time series from noise: A random matrix approach. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 44, p. 284–291, 2017. Citado na página 26.
- ZAMPARO, M.; BALDOVIN, F.; CARAGLIO, M.; STELLA, A. L. Scaling symmetry, renormalization, and time series modeling: The case of financial assets dynamics. *Physical Review E*, APS, v. 88, n. 6, p. 062808, 2013. Citado na página 22.
- ZHANG, Z.; HUANG, J. Extremal financial risk models and portfolio evaluation. *Computational statistics & data analysis*, Elsevier, v. 51, n. 4, p. 2313–2338, 2006. Citado na página 24.