Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

SEQUÊNCIAS E SÉRIES: CONHECENDO E CONSTRUINDO ESTRATÉGIAS DE ABORDAGEM

Carlos Wilson Pimentel de Lacerda

Orientadora

Prof.ª Bárbara Costa da Silva

Recife-PE

Abril de 2014

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

SEQUÊNCIAS E SÉRIES: CONHECENDO E CONSTRUÍNDO ESTRATÉGIAS DE ABORDAGEM

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Carlos Wilson Pimentel de Lacerda

Recife-PE

Abril de 2014

Banca examinadora:

Prof.ª Bárbara Costa da Silva (Orientadora)

Prof.ª Tarciana Maria Santos da Silva

Prof.ª Maria Eulalia de Moraes Melo

Prof. Eudes Naziazeno Galvão

Dedico a Deus e à Virgem Maria, meus Pais, esposa e filhos e a todos os professores do PROFMAT.

"Deus criou os inteiros; todo o resto é obra dos homens."

Leopold Kroenecker

Agradecimentos

Agradeço ao Ministério da Educação, a CAPES e à Sociedade Brasileira de Matemática pela excelente oportunidade oferecida para formação dos professores a nível nacional, desde o processo seletivo às bolsas que mensalmente colaboraram para a minha permanência neste.

Também, agradeço à Universidade Federal Rural de Pernambuco que nos propiciou um conjunto qualificado de professores e um bom espaço para os nossos estudos. Aos meus professores: Maité, Rodrigo, Adriano, Bárbara, Anete, Márcia, Eulália, Paulo Santiago e Thiago DK só tenho a agradecer por tudo que vocês ofereceram.

Em particular quero agradecer a minha orientadora Prof.ª Bárbara que com muita competência ministrou suas aulas e me acompanhou no trabalho de conclusão e a fonte inspiradora deste que é a Prof.ª Eulália com a disciplina de Números Reais onde disse “acredito que um dia o ensino de séries e sequências será ministrado no ensino médio com qualidade.”

Por fim, agradeço ao meu companheiro de viagem Leonardo Moura que sempre estava ao meu lado dando força nos momentos difíceis da minha caminhada, a minha esposa Marijane Alves Andrade Pimentel, a minhas filhas Maria Clara e Maria Celeste, ao meu pai Severino Gomes de Lacerda e a minha mãe Lindalva Pimentel que sempre acreditaram na minha caminhada.

Resumo

O ensino de séries e sequências no ensino médio, superior e os problemas propostos nas olimpíadas de matemática do ensino médio, apresentam propostas bastante diversificadas. O ensino desse tópico é abordado de maneira mecânica enquanto que os problemas propostos nas olimpíadas exige um raciocínio lógico desenvolvido a partir do comportamento de diversas séries e sequências. Daí, faz-se necessário que o conhecimento tanto por parte do professor quanto do aluno, ambos do ensino médio, extrapole os limites tradicionalmente tratados na prática pedagógica do ensino de séries e sequências.

Desta maneira, é necessário ter o conhecimento do que significa a convergência de uma sequência, suas propriedades, testes de convergência que possam ser utilizados no ensino médio, comportamentos de diversas séries e sequências como a sequência de Fibonacci, a série harmônica, progressões aritméticas de diversas ordens, etc. Levando em conta o estágio matemático do aluno do ensino médio, o professor deve desenvolver no educando habilidades e aquisição de ferramentas que possibilitem este a resolver problemas que possam romper com a matemática da memorização.

Assim, o uso de jogos, a utilização da geometria para a compreensão da convergência entre outros, a utilização de diversos campos de conhecimentos onde possa ser utilizado o ensino de séries e sequências e a resolução de problemas de séries e sequências das olimpíadas de matemática são ferramentas necessárias para que o professor possa aprender a aprender e assim conduzir os seus alunos para emancipação do pensamento matemático.

Abstract

Teaching series and sequences in High School, in college and the proposed problems in the High School Mathematical Olympics, have very diverse proposals. The teaching of this topic is covered in a mechanical manner while the problems posed in the Olympics requires a logical reasoning developed from the behavior of several series and sequences. Hence, it is necessary that knowledge by the teacher and the student, both in high school, goes beyond the limits traditionally treated in the pedagogical practice of teaching sequences and series.

Thus, it is necessary to have knowledge of what the convergence of a sequence, its properties, convergence tests that can be used in high school, behavior of several series and sequences such as the Fibonacci sequence, the harmonic series, arithmetic progressions various orders, etc.. Taking into account the mathematical stage of high school student, the teacher should develop the student skills and acquiring tools that allow this to solve problems that may break with math memorization.

Thus, the use of games, the use of geometry to the understanding of convergence among others, the use of various knowledge fields where the teaching of series and sequences can be used and troubleshooting of series and sequences of math olympics are tools necessary for the teacher to learn how to learn and thus lead their students to emancipation of mathematical thinking.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

No contexto atual, o ensino de sequências no ensino médio predominantemente se restringe a progressões aritméticas e geométricas, donde essa de forma inequívoca usa a manipulação de fórmulas predeterminadas sem reflexão e aplicadas a exercícios ritualmente semelhantes entre si na sua maioria.

Assim, as dificuldades na resolução de problemas envolvendo sequências e séries que fogem das progressões aritméticas e geométricas são evidentes, principalmente nas olimpíadas de matemática (OBM e OBMEP), donde os mesmos recorrem muitas vezes à utilização de contagens e somas sem preocupação em generalizações e estratégias que possa levá-lo a conclusões mais sólidas.

É bom salientar que mesmo no ensino de progressões aritméticas e geométricas, a utilização de fórmula pré-definida é o centro das atenções do professor e consequentemente dos alunos. Embora que inicialmente os livros do ensino médio tratam de sequências em uma forma geral, estas não aprofundam a compreensão de problemas de sequências e séries que possibilitem a pesquisa e utilização de outras ferramentas matemáticas, como por exemplo, o uso da recorrência. Assim, as expressões de substituição de valores e a repetição de comportamento de sequências se transformam no carro chefe de estratégias mecanizadas e de pouco desenvolvimento matemático.

Daí, existe uma real necessidade de mudança no ensino de séries e sequências, na qual, pretendendo através desse trabalho, procurar aprofundar os tipos e comportamentos de sequências e séries que possam ser transpostos didaticamente no ensino médio de forma que os mesmos possam traçar estratégias, para generalização, resolução e soma dos termos das mesmas.

Dessa forma, demonstrar a necessidade de conhecer o conceito, comportamento da sequência, sua relação com a possibilidade de ser resolvida ou não a série através da sequência das suas somas parciais e resolução de problemas sem que o mesmo seja refém de fórmulas sem reflexão alguma é o carro chefe de uma matemática construtiva de interesse na construção do pensamento matemático.

Portanto, este trabalho procurará viabilizar uma nova proposta para o ensino de séries e sequências, onde no capítulo inicial traremos de conceitos e definições essenciais sobre sequências e séries que possibilite ao professor manusear tais ferramentas para poder transpor didaticamente tais definições e aplicações nos problemas propostos no ensino médio. No segundo capítulo, trataremos sobre as séries e sequências que possuem comportamentos especiais, nos quais o professor necessita de apropriar-se para que possa tratar em sala de aula e posteriormente servir de ferramenta na resolução de problemas. E finalizando, no terceiro capítulo, trataremos do ensino de séries e sequências no ensino médio voltado a resolução de problemas que dinamize o uso de diversas ferramentas pedagógicas e estimule articulações dos conceitos abordados nos capítulos anteriores com outros campos da matemática em uma perspectiva construtora e desafiadora para o estudante.

Capítulo 1

Sequências e séries númericas

Inicialmente, o que seria uma sequência de números reais (ou sucessão de números reais)? Tomemos os conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots\}$ e $B = \{2\}$ e observemos que o primeiro conjunto é infinito e o segundo conjunto é unitário (finito). Entretanto, é possível escrever sequências (a_n) e (b_n) em que o conjunto de seus termos sejam A e B respectivamente. Essas sequências $(a_n) = (2, 4, 6, 8, ..., 2n, \ldots)$ e $(b_n) = (2, 2, 2, 2, ...)$ são sequências infinitas de números, chamados de termos.

Podemos definir uma sequência como uma função (ou aplicação) de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$. Onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $f(n) = x_n$, o n-ésimo termo da sequência.

Portanto, podemos generalizar dizendo que qualquer sequência pode ser escrita da forma $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ onde a_n é o termo geral. Agora, entretanto, é importante salientar que uma sequência pode ter sua lei de associação definida por uma expressão analítica de uma ou mais sentenças, ou definida de forma indutiva ou por uma correspondência que não possa ser traduzida em termos de equações.

Exemplo 1.0.1 *A sequência (a_n) em que seus termos são 2^n se n for par e n se n for ímpar é um exemplo de uma sequência construída por duas sentenças analíticas.*

A sequência de Fibonacci: $y_{n+2} = y_n + y_{n+1}$, $y_1 = y_2 = 1$ *é um exemplo de uma sequência indutivamente definida.*

A sequência $a_n = p_n$ *onde* p_n *é o n-ésimo número primo é um exemplo de uma sequência bem definida mas que frequentemente não é fornecida por fórmulas.*

1.1 Sequência limitada

Uma sequência é dita limitada se existirem números reais b e c, tal que

$$b < a_n < c,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Caso contrário se ela não tiver uma dessas cotas, ela será ilimitada. Particularmente, caso uma sequência ilimitada tenha cota superior, ela será chamada de limitada superiormente. Da mesma forma, caso uma sequência seja ilimitada, mas tenha cota inferior, diremos que ela é limitada inferiormente.

Exemplo 1.1.1 *A sequência* $(2n)$ *não é limitada superiormente, entretanto é limitada inferiormente.*

A sequência $(-n)$ *é limitada superiormente, entretanto não é limitada inferiormente.*

A sequência $(n.(-1)^n)$ *é ilimitada, pois ela não possui cota inferior e superior.*

Já a sequência $((-1)^n)$ *é limitada pois por exemplo,* -2 *e* 2 *são cotas inferior e superior respectivamente.*

1.2 Subsequência

Seja (a_n) uma sequência. Consideremos uma sequência **estritamente crescente** (n_k) de números naturais

$$(n_k) = (n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k, \ldots).$$

Em seguida formando a sequência (a_{n_k}), obtida da sequência (a_n).

Assim foi construída uma nova sequência extraindo termos de (a_n), conservando a ordem em que os termos figuravam, sem alterar e nem repetir.

Assim, $(a_{n_k}) = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_k}, \ldots)$ é a nova sequência obtida. Chamada de uma **subsequência** da sequência (a_n).

Exemplo 1.2.1 *Se* $(a_n) = ((-2)^n) = (-2, 4, -8, 16, -32, 64, \ldots)$, *temos como exemplo de subsequência da sequência* (a_n),

$$(a_{2n}) = (4, 16, 64, \ldots)$$

que é a subsequência dos termos de ordem par.

1.3 Convergência de uma sequência

Observe a sequência

$$\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots \frac{n}{n+1}\right),$$

onde é fácil perceber que é limitada, já que esta sequência abrange apenas reais positivos e $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}, \ldots$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e, como $n < n+1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, teremos que $\frac{n}{n+1} \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora a priori, podemos então observar que todos os elementos dessa sequência pertencem ao conjunto $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ e como o seu comportamento aparentemente demonstra que esta cresce, podemos intuir que haja um limite, isto é, um número real pelo qual esta tende quando $n \to \infty$. Mas, como teremos certeza que esta tende para um determinado limite L? Como garantir que em algum momento não teremos algum termo que escapará do intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$?

Para responder tais perguntas precisamos da definição de limite e monotonicidade de uma sequência, já que anteriormente vimos a definição de uma sequência limitada.

Limite de uma sequência

Uma sequência (a_n) tende para um limite L, se e só se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}; n \geqslant N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$.

Isto significa, que para qualquer número real positivo maior que zero por menor que seja será sempre possível escolher um número natural $n \in \mathbb{N}$ de tal maneira que a módulo da diferença $|a_n - L|$ é menor que ε quando $n \geqslant N$.

Usualmente podemos escrever o limite de uma sequência pela expressão

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Interpretando geometricamente a definição de convergência, na reta real, desenhando o intervalo aberto de raio ε centrado em L conforme a figura 1.1,

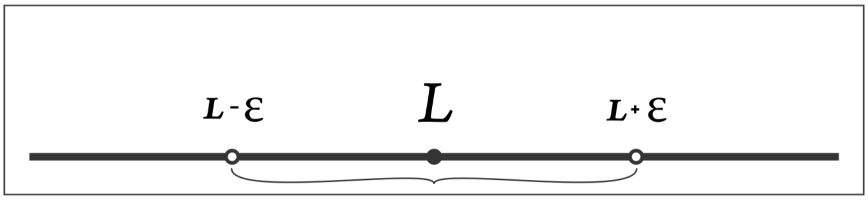

Figura 1.1: Intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

temos que a partir de $n \geqslant N$, todos os valores de a_n se concentrarão neste intervalo.

Agora, se tomarmos um $\frac{\epsilon}{2}$(conforme a figura 1.2), teremos que a partir de $n_1 \geqslant N_1$, todos os valores de a_{n_1} estarão no intervalo aberto $\left(L - \frac{\epsilon}{2}, L + \epsilon\right)$. E assim, sucessivamente.

Ou seja, podemos tomar ε suficiente pequeno como queiramos e mesmo assim, sempre será possível encontrar um natural N, tal que,

$$n \geqslant N \Rightarrow | a_n - L | < \varepsilon.$$

Geometricamente, podemos interpretar a noção de convergência no plano cartesiano. Pois, como toda sequência é uma aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, teremos que a

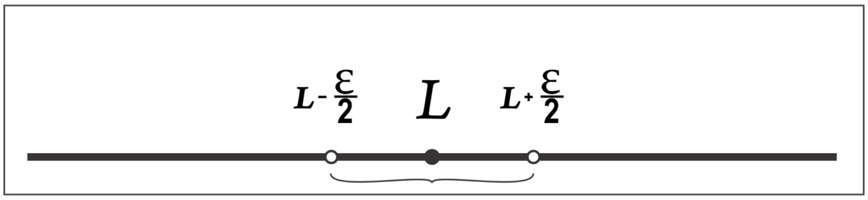

Figura 1.2: Intervalo $\left(L - \frac{\varepsilon}{2}, L + \frac{\varepsilon}{2}\right)$

partir de um certo N natural dependendo do ε tomado, uma configuração gráfica na qual exemplifico com o gráfico abaixo.

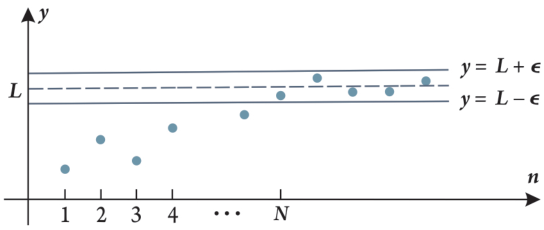

Figura 1.3: Convergência no plano cartesiano

É importante salientar que se a sequência tiver limite ela é convergente, caso contrário chamaremos a sequência de divergente.

Proposição 1.3.1 *Toda sequência convergente tem um único limite.*

Prova 1.3.1 *(Unicidade do Limite)*

Suponhamos que a sequência (a_n) *seja convergente e tenha dois limites,* L_1 *e* L_2.

Então, pela definição de convergência podemos escrever:

(1) Para todo $\varepsilon > 0$, *existe* $N_1 \in \mathbb{N}; n > N_1 \Rightarrow |a_n - L_1| < \varepsilon$

(2) Para todo $\varepsilon > 0$, *existe* $N_2 \in \mathbb{N}; n > N_2 \Rightarrow |a_n - L_2| < \varepsilon$

Ora, se L_1 *e* L_2 *são distintos, teremos* $|L_1 - L_2| > 0$.

Tomando então $\varepsilon = \frac{1}{2}|L_1 - L_2| > 0$ *teremos* $2\varepsilon = |L_1 - L_2| > 0$.

De acordo com as hipóteses de (1) e (2) existirão N_1 e N_2 tais que:

$$n > N_1 \Rightarrow |a_n - L_1| < \varepsilon$$

e

$$n > N_2 \Rightarrow |a_n - L_2| < \varepsilon.$$

Tomemos $N_3 = max(N_1, N_2)$. Teremos para $n > N_3$,

$|a_n - L_1| < \varepsilon$ *e* $|a_n - L_2| < \varepsilon$.

Portanto, como $|L_1 - L_2| = |L_1 - a_n + a_n - L_2| \leqslant |a_n - L_1| + |a_n - L_2|$, teremos que:

$$2\varepsilon = |L_1 - L_2| \leqslant |a_n - L_1| + |a_n - L_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

que é um absurdo pois chegamos à desigualdade de $2\varepsilon < 2\varepsilon$

Portanto, provamos que $L_1 = L_2$ e consequentemente a conclusão de que quando o limite existe, ele é único.

Proposição 1.3.2 *Se (a_n) converge para L então qualquer subsequência de (a_n) converge para L.*

Prova 1.3.2 *Seja (a_{n_k}) uma subsequência da sequência (a_n), escrevemos a hipótese que temos e a tese que queremos estabelecer.*

Hipótese: $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$; $n \geqslant N \Rightarrow | a_n - L | < \varepsilon$

Tese: $\forall\varepsilon > 0$, $\exists K \in \mathbb{N}$; $k \geqslant K \Rightarrow | a_{n_k} - L | < \varepsilon$

Começamos por observar que, como (n_k) é uma sequência estritamente crescente de números naturais, temos $n_k \geqslant k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Isto pode ser estabelecido por indução: temos, evidentemente, $n_1 \geqslant 1$. Se $n_k \geqslant k$, então, como $n_{k+1} > n_k$, vem $n_{k+1} > n_k \geqslant k$.

Então $n_{k+1} > k$ *e, portanto,* $n_{k+1} \geqslant k+1$.

Sendo dado agora, arbitrariamente, um $\varepsilon > 0$. *Por hipótese, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$n \geqslant N \Rightarrow \mid a_n - L \mid < \varepsilon.$$

Portanto, tomando $K = N$, *resulta* $k \geqslant K \Rightarrow n_k \geqslant k \geqslant K = N \Rightarrow \mid a_{n_k} - L \mid < \varepsilon$.

1.4 Monotonicidade de uma sequência

Uma sequência que é ou crescente ou decrescente é denominada monótona e uma sequência que é ou estritamente crescente ou estritamente decrescente é denominada estritamente monótona. Assim, seja (a_n) uma sequência, ela será denominada:

Estritamente crescente se, e só se, $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_n < ...$

Crescente se, e só se, $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant ... \leqslant a_n \leqslant ...$

Estritamente decrescente se, e só se, $a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_n > ...$

Decrescente se, e só se, $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant ... \geqslant a_n \geqslant ...$

Exemplo 1.4.1 *A sequência acima*

$$\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots\right)$$

é uma exemplo de uma sequência estritamente crescente.

Já a sequência $\left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots\right)$ *é um exemplo de uma sequência estritamente decrescente.*

1.5 Sequências limitadas e convergência

Proposição 1.5.1 *Toda sequência convergente é limitada.*

Prova 1.5.1 *Suponhamos que a sequência* (a_n) *seja convergente para* $L \in \mathbb{R}$.

Para provar que (a_n) *é limitada, devemos mostrar que existem* b *e* c *reais tais que* $b \leqslant a_n \leqslant c$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Fixando* $\varepsilon > 0$, *pela definição de convergência, existe* $N_1 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > N_1 \Rightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$, *logo todos os termos da sequência maiores que* N_1 *estarão dentro do intervalo* $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ *podendo estar fora deste intervalo apenas um número finito de termos* $a_1, a_2, ..., a_{(N_1-1)}$, *de ordem inferior a* N_1.

Definindo $c = max\{a_1, a_2, ..., a_N, L+\varepsilon\}$ *e* $b = min\{a_1, a_2, ..., a_N, L-\varepsilon\}$ *teremos então que* $b \leqslant a_n \leqslant c$ *para todo* $n \geqslant N$. *c.q.d.*

A recíproca da proposição acima não é verdadeira, já que a sequência cujo termo geral é $a_n = (-1)^n$ *é limitada, entretanto não é convergente.*

Teorema 1.5.1 *Toda sequência monótona é convergente se, e somente se, ela é limitada.*

Prova 1.5.2 *Para uma sequência ser convergente é necessário que ela seja limitada, provemos que uma sequência sendo monótona e limitada é condição suficiente para ser convergente. Suponhamos que uma sequência* (a_n) *é crescente e limitada (de forma análoga poderíamos supor que ela era decrescente). Como o conjunto* $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *com* $n \in \mathbb{N}$ *é não vazio e limitado, ele tem cota superior, logo vamos supor que* $\boldsymbol{a}$ *seja a menor das cotas superiores, ou seja, o supremo de* A*(A existência desse supremo é uma propriedade do conjunto dos reais).*

Vamos verificar que este número real $\boldsymbol{a}$ *é o limite* (a_n). *Seja dado* $\varepsilon > 0$. *Temos* $a - \varepsilon < a$ *e assim* $a - \varepsilon$ *não é cota superior do conjunto* A. *Portanto, existe um elemento* $a_{n_1} \in A$ *tal que* $a - \varepsilon < a_{n_1}$. *Então, vamos ter que para todo* $n > n_1$, *considerando que a sequência* (a_n) *é crescente, e que* $a - \varepsilon < a_{n_1} < a_n < a < a + \varepsilon$.

Provamos que para qualquer $\varepsilon > 0$ *dado, existe* $n > n_1 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|a_n - a| < \varepsilon$ *para todo* $n \geqslant N$. *Provamos que* (a_n) *converge para* a. *Caso a sequência fosse* *decrescente analogamente poderíamos proceder como no inicio da demonstração foi tratado, entretanto o limite de (a_n) seria a maior das cotas inferiores(ínfimo) do conjunto dos termos da sequência (a_n).*

Teorema 1.5.2 *(Teorema do Confronto para Sequências)*

Sejam $(a_n), (b_n)$ e (c_n) sequências tais que $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n, \forall n \in \mathbb{N}$, se as sequências (a_n) e (c_n) tiverem um limite comum L quando $n \to \infty$ então (b_n) também terá o limite L quando $n \to +\infty$.

Prova 1.5.3 *Basta verificar que se $lim_{n\to+\infty} a_n = lim_{n\to+\infty} c_n = L$, então, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $-\varepsilon \leqslant a_n - L \leqslant b_n - L \leqslant c_n - L \leqslant \varepsilon$ para todo $n \geqslant N$. Segue que $lim\ b_n = L$.*

1.6 Sequências definidas por indução

Consideremos uma sequência (a_n) indutivamente definida pelas relações de recorrência $a_1 = 4$ e $a_{n+1} = \frac{1}{2}.(a_n + 2), \forall n \geqslant 2$. Examinando um número finito de termos dessa sequência obteremos que $a_1 = 4; a_2 = 3; a_3 = 2,5; a_4 = 2,25; \ldots$, logo, $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$. Podemos intuir que essa sequência seja decrescente, entretanto, se faz necessário que provemos. Faremos a prova pelo método de indução.

Já sabemos pelos termos iniciais escritos anteriormente que $a_1 > a_2$.

Vamos mostrar que $a_n > a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} > a_{n+2}$.

Como a sequência é definida de forma que $a_{n+1} = \frac{1}{2}.(a_n + 2) = \frac{a_n}{2} + 1$.

Logo temos que $a_n > a_{n+1} \Rightarrow \frac{a_n}{2} + 1 > \frac{a_{n+1}}{2} + 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_{n+2}$. Portanto, provamos que (a_n) é decrescente.

Agora, provemos que (a_n) é limitada inferiormente.

Intuitivamente, iremos arriscar que $a_n \geqslant 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Temos que $a_1 = 4 > 2$. Suponhamos que $a_n \geqslant 2$, teremos que $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 \geqslant \frac{2}{2} + 1 = 2$. Desta forma, provamos que 2 é cota inferior, consequentemente, a nossa sucessão é limitada inferiormente.

Agora, como (a_n) é decrescente e limitada inferiormente, temos pelo Teorema 1.5.1 que a sequência é convergente e consequentemente pela unicidade do limite temos que se tomarmos duas subsequências (a_n) e (a_{n+1}), onde cada uma difere somente por um termo a mais que outra, temos que:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Como $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + 1, \forall n \in N$.

Segue-se que $L = \dfrac{L}{2} + 1 \Rightarrow L = 2$. Portanto, o limite da nossa sequência é $L = 2$.

1.7 Séries numéricas

Uma série infinita por definição é uma expressão escrita na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

onde os números $a_1, a_2, a_3, \ldots$ são chamados **termos** da série.

Uma série está associada a duas sequências. Uma é a **sequência dos termos** da série, onde $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ e a outra é a **sequência das somas parciais** da série, onde (S_n) é indutivamente determinada por $S_1 = a_1$ e
$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$.

Teremos $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.

Definição 1

Sendo (S_n) a sequência das somas parciais da série

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots,$$

se a sequência S_n convergir para um número real L, então dizemos que a série **converge** para L e consequentemente teremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

Se a sequência das somas parciais **divergir** dizemos que a série **diverge** e consequentemente a série não tem soma.

Definição 2

Se a série $\sum a_n$ é convergente, isto é, se a sequência das somas parciais (S_n) é convergente, então o número real $L = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum a_n$.

Exemplo 1.7.1 *A série* $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$ *é uma série divergente pois a sequência das somas parciais* $(S_n) = (1, 0, 1, 0, \ldots)$ *não é convergente*

Exemplo 1.7.2 *A série*

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$$

é convegente.

De fato, observemos que $\dfrac{1}{n.(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Ou seja, para todo natural* n *teremos* $S_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$.

Logo,

$S_n = \left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

Mas como $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, *teremos então que* $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$. *Portanto, temos que* $\sum \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$.

Teorema 1.7.1 *(Critério do termo geral para convergência de séries)*

Se a série $\sum a_n$ *é convergente, então a sequência* (a_n) *tende para zero.*

Prova 1.7.1 *Se a sequência das somas parciais* (S_n) *da série* $\sum a_n$ *é convergente então a sequência* (S_{n+1}) *também é convergente pois difere apenas pelo termos inicial. Ou seja,* $(S_n) = (S_1, S_2, S_3, \ldots)$ *e* $(S_{n+1}) = (S_2, S_3, S_4, \ldots)$*, onde,*

$$S_{n+1} - S_n = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) = a_{n+1}.$$

Agora, se (a_{n+1}) *converge para zero, então* (a_n) *também convergirá para zero. O que prova o teorema.*

Exemplo 1.7.3 *A série* $\sum \dfrac{n}{n+1}$ *é divergente.*

De fato, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 \neq 0$*. Portanto, pelo critério do termo geral essa série é divergente.*

Observação 1.7.1 *É importante salientar que se uma série é convergente então a sequência* (a_n) *converge para zero. Entretanto, isso não significa que toda série* $\sum a_n$ *onde* (a_n) *converge para zero seja convergente. Como exemplos temos as séries* $\sum \dfrac{1}{n}$ *e* $\sum \dfrac{1}{ln(n)}$ *em que para ambos os casos temos que a sequência* $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ *e* $\left(\dfrac{1}{ln(n)}\right)$ *converge para zero, entretanto, as séries* $\sum \dfrac{1}{n}$ *e* $\sum \dfrac{1}{ln(n)}$ *são divergentes. Veremos no próximo capítulo o comportamento da série* $\sum \dfrac{1}{n}$ *e mais adiante o teorema da comparação para séries que esclarecerá estas afirmações.*

1.8 Séries de termos positivos

Proposição 1.8.1 *Em toda série de termos não negativos* $\sum a_n$*, se a sequência das somas parciais dessa série for limitada, então a série é convergente.*

A prova desta proposição esta ligada diretamente ao Teorema 1.5.1 das sequências, em que toda a sequência que é monótona limita é convergente. Como os termos das séries são não negativos temos que sua sequência das somas parciais é crescente e como a mesma é limitada, consequentemente teremos que será convergente. Portanto a série $\sum a_n$ é convergente.

Teorema 1.8.1 *(Teorema da comparação):*

Seja (a_n) e (b_n) sequências onde $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo n natural.

(i)Se a série $\sum b_n$ converge, então a série $\sum a_n$ converge.

(ii)Se a série $\sum a_n$ diverge, então a série $\sum b_n$ diverge.

Prova 1.8.1 *Sejam as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ tais que (S_n) e (T_n) sejam respectivamente as sequências das somas parciais.*

Por hipótese temos que $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n \leqslant b_1 + b_2 + b_3 + \ldots b_n = T_n$, para todo n natural.

(i) Agora, suponhamos que a série $\sum b_n$ converge e seja L sua soma.

Como $S_n \leqslant T_n$ para todo natural então teremos que

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k = L.$$

Então a sequência (S_n) é limitada e monótona. Podemos concluir que $\sum a_n$ é convergente.

(ii) Para segunda proposição temos que se a série $\sum a_n$ diverge, então esta não possui cota superior, isto é, não existe um número real que delimite tal série. Mas como $S_n \leqslant T_n$ para todo natural n, segue que $\sum b_n$ também diverge.

Exemplo 1.8.1 *A série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente. De fato, tomando a série harmônica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

que iremos ver posteriormente que é divergente, é fácil perceber que $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ para todo n. Portanto, pelo teorema da comparação temos que a série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente.

Teorema 1.8.2 *(Teste da Razão)*

Seja $\sum a_k$ *uma série de termos positivos e suponha que* $\varphi = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$

(i)Se $\varphi < 1$, *a série converge.*

(ii) Se $\varphi > 1$, *ou* $\varphi = +\infty$, *a série diverge.*

(iii) Se $\varphi = 1$, *nada podemos concluir, a série pode convergir ou divergir, de modo que deve ser tentado outro teste.*

Prova 1.8.2 *Supondo* $lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \varphi \in \mathbb{R}$, *com* $\varphi \geqslant 0$ *já que a série é de termos positivos.*

Agora, escolhendo $\epsilon > 0$, *existirá* $n_1 \in \mathbb{N}$ *de modo que*

$$\varphi - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \varphi + \epsilon, \forall n \geqslant n_1.$$

Portanto, $(\varphi - \epsilon)\cdot a_n < a_{n+1} < (\varphi + \epsilon)\cdot a_n$ *para todo natural* $n \geqslant n_1$.

(i) Agora suponhamos que $\varphi < 1$ *e novamente tomemos* $\epsilon > 0$ *de modo que*

$$\varphi + \epsilon < 1.$$

Utilizando o lado direito da desigualdade teremos

$a_{n+1} < (\varphi + \epsilon)\cdot a_n \Rightarrow a_{n+2} < (\varphi + \epsilon)a_{n+1} < (\varphi + \epsilon)^2 a_n$

logo, $a_{n+3} < (\varphi + \epsilon)a_{n+2} < (\varphi + \epsilon)^2 a_{n+1} < (\varphi + \epsilon)^3 a_n$. *Prosseguindo indutivamente, temos*

$0 < a_{n+n_1} < (\varphi + \varepsilon)^n a_n$, *para todo n natural.*

Agora aplicando o teorema da comparação para $\sum(\varphi + \epsilon)^n a_n = a_n . \sum(\varphi + \epsilon)^n$, *onde há uma constante* a_n *multiplicando termo a termo uma série geométrica convergente(a qual iremos estudar no capítulo 2) de razão* $a = \varphi + \epsilon < 1$. *Logo podemos concluir* $\sum a_n$ *converge. Portanto,* $\varphi < 1 \Rightarrow \sum a_n$ *converge.*

(ii) Suponhamos agora que $\varphi > 1$. *Tomando* $\varepsilon = \varphi - 1$ *na primeira desigualdade,* $\epsilon > 0$ *e garantimos que existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \geqslant n_1$.

Então a sequência (a_n), do termo a_{n_1} em diante, é uma sequência crescente de números reais positivos. Portanto, não pode convergir para zero. Logo, pelo critério do termo geral, $\sum a_n$ é divergente. Assim, $\varphi > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge.

(iii) Para o caso $\varphi = 1$ não podemos concluir se uma série converge ou não, pois, por exemplo $\sum \frac{1}{n}$ diverge e $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, e, em ambos os casos, teremos $\varphi = 1$.

Teorema 1.8.3 *(Teste do quociente)*

Sejam as sequências $\sum a_n$ e $\sum b_n$ de termos positivos para $n \in \mathbb{N}$. Temos que

(i) Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$, então $\sum a_n$ converge se e só se, $\sum b_n$ converge.

(ii) Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, então:

Se $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ converge e se $\sum a_n$ diverge, então $\sum b_n$ diverge.

(iii) Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, então:

Se $\sum a_n$ converge, então $\sum b_n$ converge e se $\sum b_n$ diverge, então $\sum a_n$ diverge.

Prova 1.8.3 *Vamos para o primeiro caso em que se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon, \forall n \geqslant n_1$*

Então, escolhendo $\varepsilon = \frac{L}{2}$ e depois pondo $\frac{L}{2} = c$ e $\frac{3L}{2} = d$, teremos

$$0 < c \cdot b_n < a_n < d \cdot b_n, \forall n \geqslant n_1.$$

Agora, pelo Teorema da comparação podemos perceber que se $\sum a_n$ diverge, então $\sum a_n$ diverge, o que prova a primeira parte.

Agora analisemos a segunda afirmação:

Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, então fixado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$0 \leqslant \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon, \forall n \geqslant n_1$.

Portanto, $0 \leqslant a_n \leqslant \varepsilon . b_n$, $\forall n \geqslant n_1$.

Logo, pelo Teorema da comparação, fica provado as afirmações que se $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ converge e se $\sum a_n$ diverge, então $\sum b_n$ diverge.

Agora provemos a terceira afirmação.

Se $lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$, *então existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tal que* $1 \leqslant \dfrac{a_n}{b_n} \Rightarrow b_n \leqslant a_n, \forall n \geqslant n_1$.

Logo, utilizando o Teorema da comparação podemos perceber que se $\sum a_n$ *converge, então* $\sum b_n$ *converge e se* $\sum b_n$ *diverge, então* $\sum a_n$ *diverge. O que conclui a prova do Teorema.*

Teorema 1.8.4 *(Teste da Raiz)*

Seja $\sum a_k$ *uma série de termos positivos e suponha que*

$$\varphi = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} (a_k)^{1/k}$$

(i) Se $\varphi < 1$, *a série converge.*

(ii) Se $\varphi > 1$ *ou* $\varphi = +\infty$, *a série diverge.*

(iii) Se $\varphi = 1$, *a série pode convergir ou divergir.*

Prova 1.8.4 *Esta prova é análoga ao teste da razão, de forma que irei omití-la.*

Exemplo 1.8.2 *A série*

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{4k-5}{2k+1}\right)^k$$

diverge, pois

$$\varphi = \lim_{k\to\infty} (a_k)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \frac{4k-5}{2k+1} = 2 > 1.$$

Considerações

É importante salientar que existem vários outros testes de convergência para séries, como também várias propriedades de séries e sequências as quais não foram abordadas. Entretanto, o objetivo é de tratar propriedades e conceitos as quais elenco como possível ao professor, em sua prática pedagógica, transpor para o seu aluno do ensino médio, um conhecimento matemático abrangente do comportamento das sequências e séries para sua faixa de conhecimento.

Capítulo 2

Sequências e séries especiais

Algumas sequências e séries por apresentarem comportamentos especiais necessitam de um estudo particularmente detalhado na qual iremos abordar, pois estas, facilitarão na resoluções de diversos problemas que iremos abordar.

2.1 Progressão aritmética

2.1.1 Progressão aritmética de 1º ordem

Toda sequência $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, ...)$ onde a subtração de qualquer um dos termos, exceto o primeiro, com o seu antecessor seja uma mesma constante, diremos que esta, é uma progressão aritmética de 1º ordem ou simplesmente uma progressão aritmética (P.A), onde, $a_n - a_{n-1} = r$, para todo $n > 2$. O valor dessa constante é chamada de razão, embora que o nome razão seja tratado como o quociente de duas grandezas na proporcionalidade, já é habitual empregar este termo linguístico-matemático nas progressões aritméticas.

Portanto, para toda sequência aritmética de 1º ordem

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots),$$

pela definição acima, teremos

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ... = a_n - a_{n-1} = \ldots = r.$$

Proposição 2.1.1 *Para toda progressão aritmética* $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ *temos* $\dfrac{a_n + a_{n-2}}{2} = a_{n-1}$, *para* $n \geqslant 3$.

Prova 2.1.1 *De fato, para* $n = 3$ *temos que*

$$\frac{a_3 + a_1}{2} = \frac{a_1 + 2r + a_1}{2} = \frac{2a_1 + 2r}{2} = a_1 + r = a_2.$$

Agora, suponhamos que seja verdadeiro para um certo $k \in \mathbb{N}$, *com* $k \geqslant 3$, *e verifiquemos a veracidade da afirmação para* $k + 1$.

Para $k+1$ *temos* $\dfrac{a_{k+1} + a_{k-1}}{2} = \dfrac{a_k + r + a_k - r}{2} = a_k$. *Portanto, pelo princípio da indução finita,* $\dfrac{a_n + a_{n-2}}{2} = a_{n-1}$, *para todo* $n \geqslant 3$.

Explorando a definição de uma progressão aritmética (a_n) podemos perceber que para obter qualquer termo a_k, basta somar o termo a_{k-1} com a razão de maneira que podemos formar o conjunto de equações:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r$$

$$a_4 = a_3 + r$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = a_{n-1} + r$$

Onde obtemos

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

que é o termo geral da progressão aritmética.

Exercício 1 *Em uma progressão aritmética, o quinto termo vale* 30 *e o vigésimo termo vale* 50. *Quanto vale o oitavo termo dessa progressão?*

Solução 1 $a_{20} = a_5 + 15r$, *pois* $a_{20} = a_1 + 19r = (a_1 + 4r) + 15r = a_5 + 15r$. *Logo,* $50 = 30 + 15r \Rightarrow r = \frac{4}{3}$. *Logo,* $a_8 = a_5 + 3r = 30 + 3.\frac{4}{3} = 34$. *Portanto, o* 8^o *termo vale* 34.

Exercício 2 *Qual é a razão da progressão aritmética que se obtém inserindo* 10 *termos entre os números* 3 *e* 25*?*

Solução 2 *Inserindo* 10 *termos entre* 3 *e* 25*,teremos uma sequência onde* $a_1 = 3$ *e* $a_{12} = 25$. *Portanto,* $a_{12} = a_1 + 11r \Rightarrow 25 = 3 + 11r$. *Daí,* $r = 2$.

2.1.2 Soma dos termos de uma progressão aritmética

A soma dos n termos de uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, ...)$ é obtida através da fórmula

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

Prova 2.1.2 *Seja a sequência* $(a_n) = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *temos que a soma dos* n *termos dessa sequência é:*

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

que é equivalente a

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1,$$

onde somando termo a termo teremos:

$$2.S_n = (a_n + a_1) + (a_{n-1} + a_2) + ... + (a_2 + a_{n-1}) + (a_1 + a_n)$$

$$2 \cdot S_n = (a_n + a_1).n$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

como queríamos demonstrar.

Exercício 3 *Qual é o valor da soma dos* 100 *primeiros termos da progressão aritmética* $(1, 2, 3, ...)$*?*

Solução 3 *Trata-se da soma dos* 100 *primeiros números naturais onde* $a_1 = 1$ *e* $a_{100} = 100$*. Portanto,* $S_{100} = \dfrac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = 5050$*.*

Exercício 4 *Calcule a soma de todos os inteiros que divididos por* 11 *dão resto* 7 *e estão compreendidos entre* 200 *e* 400*.*

Solução 4 *Observe que o primeiro termo neste intervalo que satisfaz a pergunta é* 205*, pois pela divisão euclidiana temos* $205 = 18 \cdot 11 + 7$ *e o último termo neste intervalo é* $392 = 35 \cdot 11 + 7$*. Portanto, a nossa sequência é* $(205, 216, ..., 392)$*, onde utilizando a fórmula do termo geral* $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ *temos:* $392 = 205 + (n-1) \cdot 11$ *que equivale à*

$$392 - 205 = (n-1) \cdot 11 \Rightarrow 187 = (n-1) \cdot 11 \Rightarrow \frac{187}{11} = n - 1 \Rightarrow 17 + 1 = n \Rightarrow n = 18.$$

Logo, pela soma dos termos de uma P.A. temos

$$S_n = \frac{(205 + 392) \cdot 18}{2} \Rightarrow S_n = \frac{597 \cdot 18}{2} \Rightarrow S_n = 597 \cdot 9 = 5373.$$

Portanto, a soma dos termos pedido é 5373*.*

2.1.3 Progressão aritmética de ordem $k(k > 1)$

Por definição, uma sequência aritmética de ordem **k**$(k > 1)$, é uma sequência na qual as diferenças entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão aritmética de ordem **k-1**. Por exemplo, uma sequência possui ordem dois se e somente se, é possível através da subtração de um termo (exceto o primeiro) com o seu antecessor, obter uma progressão aritmética de 1^o ordem.

Exemplos 2.1.1 *A sequência* $(a_n) = (1, 2, 4, 7, 11, ...)$ *onde temos*

$$2 - 1 = 1, 4 - 2 = 2, 7 - 4 = 3, 11 - 7 = 4,$$

e assim sucessivamente, obtemos como resultado dessas subtrações uma sequência (b_n)*, tal que* $(b_n) = (1, 2, 3, 4, ...)$ *que é uma progressão aritmética de* 1^o *ordem (P.A). De forma análoga, se tivermos uma sequência* $(c_n) = (1, 3, 7, 14, 25, ...)$ *onde temos* $3-1 = 2, 7-3 = 4, 14-7 = 7, 25-14 = 11$*, obtermos como resultado dessas subtrações uma nova sequência* $(d_n) = (2, 4, 7, 11, ...)$ *em que se procedermos a subtração do termo com seu antecessor, teremos* $4 - 2 = 2, 7 - 4 = 3, 11 - 7 = 4$*, cuja sequência formada é* $(e_n) = (2, 3, 4, ...)$ *que é uma progressão aritmética de* 1^o *ordem. Poderemos concluir que a sequência* (c_n) *é uma progressão aritmética de* 3^o *ordem e a sequência* (d_n) *é uma progressão aritmética de* 2^o *ordem.*

Considerando, $(\triangle a_n)$ como a sequência obtida da subtração de cada um dos termos da sequência (a_n) com o seu antecessor, isto é, $\triangle a_n = a_{n+1} - a_n$, temos para sequência cujo termo geral é n^2,

$$\triangle a_n = a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2 \cdot n + 1 - n^2 = 2 \cdot n + 1.$$

Observe que tinhamos um polinômio na variável n de grau 2 na sequência cujo termo geral é n^2 e obtivemos um polinômio de grau 1 em $\triangle a_n$. Mas, isto não aconteceu por coincidência, por exemplo, os termos de uma progressão aritmética de 1º ordem é representada por um polinomio do 1º grau. Pois $a_n = a_1 + (n-1).r$ pode ser escrito como $a_n = n \cdot r + (a_1 - r)$ onde $n \cdot r$ é o termo dependente e $a_1 - r$ o termo independente de n e sua soma é representada por um polinômio do 2º grau, pois

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(a_1 + n \cdot r + a_1 - r) \cdot n}{2} = \frac{r \cdot n^2 + (2a_1 - r) \cdot n}{2},$$

que é um polinômio do 2º grau sem o seu termo independente.

Por sinal, todo polinômio do 2º grau sem o seu termo independente representa a soma dos termos de alguma progressão aritmética do 1º grau. Daí, temos abaixo o teorema que generaliza estes exemplos.

Teorema 2.1.1

$$1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p = \sum_{k=1}^{n} k^p$$

é um polinômio de grau $p+1$ *em* n *onde*

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + P(n^p).$$

Prova 2.1.3 *Procedendo por indução sobre* p *temos que para* $p = 1$*, o teorema foi provado anteriormente pois a soma dos termos da uma progressão aritmética de* 1^o *ordem* $1+2+3+\ldots n$ *é um polinômio do* 2^o *grau* $\dfrac{n^2+n}{2}$.

Agora, suponhamos que

$$\sum_{k=1}^{n} k^p$$

seja um polinômio de grau $p+1$ *em* n*, para todo* $p \in \{1, 2, \ldots, s\}$*. Mostraremos que essa afirmação é verdadeira para* $p = s+1$*, isto é, mostraremos que*

$$\sum_{k=1}^{n} k^{s+1}$$

é o polinômio de grau $s+2$ *em* n*.*

Observe que $(k+1)^{s+2} = k^{s+2} + (s+2)\cdot k^{s+1} + \left(\dfrac{(s+2)\cdot(s+1)}{2}\right)\cdot k^s + \ldots + 1$*, onde os termos que não foram escritos explicitamente formam um polinômio de grau* $s-1$ *em* k*.*

Temos então que,

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{s+2} = \sum_{k=1}^{n} k^{s+2} + (s+2)\cdot\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} + F(n),$$

onde $F(n)$ *é um polinômio de grau* $s+1$ *em* n*, pela hipótese da indução.*

Simplificando os termos comuns aos dois primeiros somatórios, obtemos

$$(k+1)^{s+2} = 1 + (s+2).\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} + F(n).$$

Daí,

$$\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} = \frac{(k+1)^{s+2} - 1 - F(n)}{s+2},$$

é um polinômio de grau $s+2$ em n e

$$\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} = \frac{n^{s+2}}{s+2} + P(n^{s+1}),$$

como queríamos demonstrar.

Exercício 5 *Determine a soma dos quadrados dos n primeiros números inteiros positivos.*

Solução 5 *Queremos calcular*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Pelo Teorema 2.1.1 temos que essa soma é um polinômio do terceiro grau em n, isto é,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = p(n) = an^3 + bn^2 + cn + d.$$

Onde, $p(1) = 1$, $p(2) = 1^2 + 2^2 = 5$, $p(3) = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$ e $p(4) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$. E consequentemente, obtemos o sistema de equações:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 5 \\ 27a + 9b + 3c + d = 14 \\ 64a + 16b + 4c + d = 30 \end{cases}$$

Em que resolvendo o sistema, encontramos

$$a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{6}, d = 0.$$

Portanto,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

2.2 Progressão Geométrica

Dado $a \in \mathbb{R}$, a sequência $(a_n) = (1, a, a^2, a^3, a^4, \ldots)$ é uma progressão geométrica de razão a se, somente se, qualquer um dos termos (com excessão do primeiro) quando dividido com o seu antecessor terá como resultado uma constante, que no caso acima, é o número real a.

Analisando indutivamente a sequência acima temos que

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 \cdot a$$

$$a_3 = a_2 \cdot a$$

$$a_4 = a_3 \cdot a$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot a$$

Recorrentemente obtemos $a_n = 1 \cdot a^{n-1}$. Agora, como $1 = a_1$ e tomando $a = q$, obtemos a fórmula do termo geral da P.G.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Exercício 6 *Qual é o número de termos de uma progressão geométrica de razão* 2 *que tem como primeiro termo o número* 4 *e o último termo o número* 1024*?*

Solução 6 *Temos* $a_1 = 4$, $a_n = 1024$ *e* $q = 2$, *logo substituindo diretamente na fórmula do termo geral da P.G. temos*

$$1024 = 4.2^{n-1} \Rightarrow 256 = 2^{n-1} \Rightarrow 2^8 = 2^{n-1} \Rightarrow n - 1 = 8 \Rightarrow n = 9.$$

Portanto, nossa sequência tem 9 termos.

2.2.1 Soma dos termos de uma Progressão Geométrica

Dada a progressão geométrica $(a_n) = (1, a, a^2, a^3, a^4, \ldots, a^{n-1}, \ldots)$ de razão a, queremos a soma,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a^{k-1} = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}.$$

Se tomarmos S_n e multiplicarmos por $-a = -q$ obteremos

$$-a \cdot S_n = -a - a^2 - \ldots - a^n$$

Somando, teremos

$$S_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n$$

$$-a \cdot S_n = -a - a^2 - \ldots - a^n - a^{n+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n(1 - a) = 1 - a^n$$

$$S_n = \frac{1 - a^n}{1 - a}.$$

É importante salientar que uma progressão geométrica pode ter como valor inicial qualquer valor $b \in R$, onde de maneira geral a progressão geométrica é uma sequência da forma $(a_n) = (b, ba, ba^2, ba^3, ba^4, \ldots)$. Neste caso $q = a$ e a razão, $b = a_1$ é o termo inicial e $S_n = \dfrac{a_1 - q^n}{1 - q}$ é a fórmula habitual.

2.2.2 Convergência e divergência de séries geométricas

Dada a sequência geométrica $(ba^{n-1}) = (b, ba, ba^2, \ldots)$, temos que a soma de todos os seus termos pode ser representada pela série

$$\sum_{k=1}^{\infty} ba^{k-1} = b + ba + ba^2 + ba^3 + \ldots + ba^n + \ldots (a \neq 0).$$

Aqui b é um número real qualquer e veremos que a sua convergência e divergência dependerá exclusivamente da razão $q = a$.

Teorema 2.2.1 *Uma série geométrica*

$$\sum_{k=1}^{\infty} ba^{k-1} = b + ba + ba^2 + ba^3 + \ldots + ba^n + \ldots (a \neq 0).$$

converge se $\mid a \mid < 1$ *e diverge se* $\mid a \mid \geqslant 1$*. Se a série convergir, então, a soma da série é*

$$\sum_{k=1}^{\infty} ba^{k-1} = \frac{b}{1-a}$$

.

Prova 2.2.1 *Tratemos primeiro do caso* $\mid a \mid = 1$*. Se* $a = 1$*, então a série é* $b + b + b + b + b + \ldots$

E portanto, a enésima soma parcial é $S_n = (n+1)b$ *e* $\lim_{n \to +\infty} (n+1)b = \pm\infty$ *(o sinal de ser positivo ou negativo depende do sinal de* b*). Isso prova a divergência.*

Se $b = -1$*, a série é* $b - b + b - b + \ldots$*. A sequência das somas parciais será* $b, 0, b, 0, b, \ldots$ *que diverge.*

Agora consideremos o caso $\mid a \mid \neq 1$*. A enésima soma parcial da série é* $S_n = b + ba + ba^2 + \ldots + ba^n$ *multiplicando ambos os lados por* a*, obtemos*

$$a \cdot S_n = ba + ba^2 + \ldots ba^{n+1}$$

onde subtraindo uma equação a outra teremos

$$S_n - aS_n = b - ba^{n+1} \Rightarrow S_n = \frac{b - ba^{n+1}}{1-a} = \frac{b}{1-a}(1 - a^{n+1}).$$

Se $| a |< 1$, *então* $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{n+1} = 0$ *de modo que* S_n *converge e portanto teremos*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b}{1-a}$$

Se $| a |> 1$ *então ou* $a > 1$ *ou* $a < -1$. *No caso* $a > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{n+1} = \infty$ *e, no caso* $a < -1$, a^{n+1} *oscila entre valores positivos e negativos de magnitude crescente, portanto* S_n *diverge em ambos os casos.*

2.3 Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci é a sequência indutivamente determinada por

$$a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,$$

consequentemente, $(a_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$.

A sequência de Fibonacci é uma sequência em que percebemos a sua divergência, entretanto, apresenta diversas particularidades importantes como por exemplo, para quaisquer dois termos consecutivos dessa sequência, temos que estes são sempre primos entre si.

Prova 2.3.1 *Por indução vamos provar que* $(u_{n+1}, u_n) = 1$ *(máximo dividor comum de* u_{n+1} *e* u_n *é igual a* 1*) para todo* $n \in \mathbb{N}$. *De fato, para* $n = 1$ *temos que* $(u_2, u_1) = (1, 1) = 1$. *Agora suponhamos que o resultado é valido para um certo* $k \in N$, *isto é,* $(u_{k+1}, u_k) = 1$.

Temos então que $(u_{k+2}, u_{k+1}) = (u_{k+2} - u_{k+1}, u_{k+1}) = (u_k, u_{k+1}) = 1$, *provando assim, pelo princípio da indução finita que* $(u_{n+1}, u_n) = 1$ *para todo* n *natural.*

Outro fato curioso da sequência de Fibonacci obtemos quando resolvemos a recorrência $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ na qual veremos no exercício abaixo.

Exercício 7 *Determine o número de Fibonacci* a_n, *sabendo que a sequência de Fibonacci é definida por* $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, *com* $a_0 = a_1 = 1$.

Solução 7 *Por definição, ver referência* [3], *a equação característica associada a recorrência* $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ *é equação formada pelos coeficientes da recorrência, onde teremos* $y^2 = y + 1$.

As raízes da equação caracteristica são $y_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *e* $y_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Então $a_n = c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Para determinarmos os valores das constantes c_1 *e* c_2 *utilizaremos* $a_0 = a_1 = 1$ *e substituindo em* n, *obtemos seguinte sistem:*

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Onde resolvendo o sistema acima obtemos $c_1 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$ *e* $c_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$.

Logo,

$$a_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

Como sugestão, sugiro a referência [3] *para um melhor aprofundamento sobre a resolução de recorrências, pois na resolução acima tratamos de técnicas e etapas não abordado nesse trabalho.*

O fato curioso que iremos comentar da solução dessa recorrência é que embora a solução da recorrência apareça números irracionais, sua solução para todo n natural é sempre um número natural que compreende a um termo da sequência de Fibonacci.

2.4 Séries Telescópicas

Etimologicamente, uma série é dita telescópica quando sucede que em sua soma parcial S_n, a soma de uma parcela de cada expressão entre parênteses, cancela uma parcela na próxima expressão entre parênteses, até que a soma toda colapse como um telescópio retrátil, restando apenas duas parcelas.

Exemplo 2.4.1 *A série*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

é um exemplo de uma série telescópica pois

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}\right)+...+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}$$

Exercício 8 *Determine se a série*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots$$

converge ou diverge. Se convergir, encontre sua soma.

Solução 8 *A enésima soma parcial da série é*

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}$$

Agora, utilizando o método de frações parciais, ver [9], *temos que*

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1},$$

onde obtemos

$$S_n=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

Como

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

concluimos que esta série é convergente e sua soma é 1.

2.5 Série Harmônica

O estudo da série harmônica tem uma grande relevância já que embora o limite do termo geral tenda a zero, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, esta diverge, como iremos ver.

Seja a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots,$$

estudemos a sequência de suas somas parciais, ou seja,

$$S_1 = 1, S_2 = 1 + \frac{1}{2}, S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \ldots.$$

É fácil perceber que como a série harmônica é uma série de termos positivos, a sua sequência de suas somas parciais é estritamente crescente

$$S_1 < S_2 < S_3 < S_4 < \ldots < S_n < \ldots$$

Estudemos a subsequência da sequência das somas somas parciais da série harmônica cujos termos são $S_2, S_4, S_8, S_{16}, S_{32}, \ldots$

Note que,

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \frac{1}{2} > \frac{3}{2}$$

$$S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = S_4 + \frac{1}{2} > \frac{4}{2}$$

$$S_{16} = S_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} >$$

$$S_8 + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) = S_8 + \frac{1}{2} > \frac{5}{2}$$

Prosseguindo desta forma podemos perceber que $S_{2^n} > \dfrac{n+1}{2}$, onde pelo teorema da comparação como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2} = \infty$, teremos que $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2^n} = \infty$

Mas como S_{2^n} é uma subsequência de S_n, temos $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ e concluimos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

diverge.

Esta série é de grande valia principalmente quando a utilizamos por exemplo, no teste da comparação entre séries para sabermos se determinada série diverge ou não. Vejamos o exemplo:

Exercício 9 *Verifique se a série*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{ln(k)}$$

é ou não divergente.

Solução 9 *Sabemos que*

$$1 > ln1, 2 > ln2, 3 > ln3, 4 > ln4, \ldots, \frac{1}{k} < \frac{1}{ln(k)},$$

para todo $k > 2$.

Consequentemente, como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

diverge, temos, pelo Teorema da comparação, que

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{ln(k)}$$

também diverge.

2.6 Outras séries de termos positivos

A série $\sum n \cdot (a^n)$ diverge se $\mid a \mid \geqslant 1$ pois pelo critério do termo geral temos que $\lim\limits_{n \to +\infty} n \cdot (a^n) \neq 0$.

Agora, se $\mid a \mid < 1$, temos

$$S_n = a + 2 \cdot a^2 + 3 \cdot a^3 + \ldots + n.a^n$$

$$S_n - a \cdot S_n = (a + 2 \cdot a^2 + 3 \cdot a^3 + \ldots + n \cdot a^n) - a \cdot (a + 2 \cdot a^2 + 3 \cdot a^3 + \ldots + n \cdot a^n)$$

$$S_n - a \cdot S_n = (a + 2 \cdot a^2 + 3.a^3 + \ldots + n \cdot a^n) - (a^2 + 2 \cdot a^3 + 3 \cdot a^4 + \ldots + n \cdot a^{n+1})$$

$$S_n - a \cdot S_n = a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^n - a \cdot a^{n+1} = t_n - n \cdot a^{n+1}$$

onde, $t_n = a + a^2 + \ldots + a^n$ que é a soma parcial dos termos de uma série geométrica de razão a.

Agora como estamos supondo $\mid a \mid < 1$. Teremos que $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = \dfrac{a}{a-1}$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} n.a^{n+1} = 0$. Portanto, teremos que

$$\lim_{n \to +\infty} (1-a)S_n = (1-a). \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a}{(1-a)^2}$$

converge.

Outras sequências e séries importantes que irei destacar que facilmente você poderá encontrar as demonstrações em [5]: a sequência (c_n),

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - ln(n)$$

é convergente, a série

$$\sum \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

convergente, cuja soma é irracional **e**, e, finalizando, a série

$$\sum \frac{1}{n^r}$$

que é convergente se $r > 1$ e divergente se $r \leqslant 1$.

Existem ainda várias outras sequências e séries de números reais positivos, entretanto, para o objetivo deste trabalho estas já oferecem um bom arcabouço para o uso de testes e análise de convergências e divergências de um grande número de séries e sequências de números reais positivos.

2.7 Séries Alternadas

Uma série é dita alternada quando os seus termos se alternam entre positivo e negativo. Como exemplo temos a série

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

A série alternada pode ser de uma das duas formas abaixo:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

onde, necessariamente, $a_n \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.7.1 *(Teste da Série Alternada)Uma série alternada de uma das duas formas anteriores converge se as duas condições a seguir são satisfeitas:*

(i) $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_4 \dots \geqslant a_k \geqslant \dots$

(ii) $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = 0$

Prova 2.7.1 *Seja a série*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$$

Temos que a sequência das somas parciais de índice par $(S_2, S_4, S_6, S_8, \ldots, S_{2n}, \ldots)$ *forma uma sequência crescente e limitada superiormente por* a_1*,e as somas parciais de índice ímpar* $(S_1, S_3, S_5, \ldots, S_{2n-1}, \ldots)$ *formam uma sequência decrescente limitada inferiormente por zero. Agora, como* $S_{2n-1} = S_{2n} - a_{2n}$*, temos que*

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} + \lim_{n\to+\infty} a_{2n}.$$

Mas como $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} = 0$ *(por hipótese) e* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = L$*, temos por consequência de* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n-1}$ *que* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n-1} = L + 0 = L$ *o que completa a demonstração.*

De forma análoga podemos provar este teorema para a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k,$$

Exercício 10 *Usando o teste da série alternada, mostre que a série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{3^k}$$

é convergente.

Solução 10 *Pelo teste da razão temos* $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{\dfrac{k+1}{3^{k+1}}}{\dfrac{k}{3^k}} = \dfrac{(k+1).3^k}{k.3^{k+1}} = \dfrac{k+1}{3k} < 1.$

Logo, $a_k > a_{k+1}$

Agora calculando o $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k}{3^k}$ *temos que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k/k}{3^k/k} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3^k/k} = 0.$

Portanto pelo Teorema do Teste da série alternada, esta série é convergente.

2.8 Convergência absoluta

Por definição, uma série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

é convergente absolutamente se a série de valores absolutos

$$\sum_{k=1}^{\infty} | a_k |=| a_1 | + | a_2 | + | a_3 | + \dots$$

convergir.

Exercício 11 *Verifique se a série* $-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \dots$ *converge absolutamente.*

Solução 11 *A série de valores absolutos é a série* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$ *que é uma série geométrica de razão* $\frac{1}{2}$ *ou seja, pelo que vimos no estudo das séries geométricas, temos uma série convergente. Portanto, a série* $-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \dots$ *converge absolutamente.*

Exercício 12 *Verifique se a série* $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \dots$ *converge absolutamente.*

Solução 12 *A série de valores absolutos é a série* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ *que é a série harmônica na qual vimos anteriormente que é divergente. Portanto, a série* $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \dots$ *não é absolutamente convergente.*

Pelo que observamos nos exercícios anteriores, nenhuma dessas séries é alternada, entretanto, é possível dizer se ela é convergente absolutamente ou não. Ou seja, em qualquer disposição de sinais negativos e positivos nestas séries, não alterará no tocante a ser absolutamente convergente ou não.

Resumindo, se uma série é absolutamente convergente, ela é sempre convergente.

2.9 Convergência condicional

Uma série mesmo sendo divergente pode ter uma disposição de sinais em seus termos capaz dessa convergir de maneira que podemos ter uma série convergente, que não é absolutamente convergente. A este tipo de série chamamos de série que converge condicionalmente.

Exemplo 2.9.1 *A série* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{k}+\ldots$ *é uma série divergente, entretanto, temos que*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots$$

é convergente onde

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}=ln2.$$

Capítulo 3

Problematizando o ensino de sequências e séries

Em contraponto ao ensino de séries e sequências do ensino médio voltado unicamente ao uso de fórmulas pré-determinadas, proponho neste, abordar estratégias e problemas que possibilitarão ao educador conduzir um processo de pensamento reflexivo, voltado a criação de estratégias múltiplas e diversificadas que procure conduzir o educando a fazer e refazer o seu pensamento, no crescimento pessoal de generalizar e enfrentar situações particulares.

3.1 Estudando séries e sequências em jogos

Os jogos matemáticos apresentam grande potencialidade para o ensino da matemática, e, trabalhar com jogos do cotidiano do educando disperta ainda mais o seu interesse para a aprendizagem de conteúdos atrelados a estes. Por isso, diante dos nossos estudos, trataremos aqui como exemplo o dominó.

Em linhas gerais, o dominó é um jogo composto de 28 peças das quais a face numerada é dividida em duas partes onde cada uma de suas partes possui de 0 a

6 pontos. Daí, explorando esta definição, perguntaríamos, se construíssemos um dominó em que cada uma de suas faces abrangesse valores de 0 a 9 pontos, quantas peças teria esse dominó?

Antes de pensarmos em responder quantas peças teríamos no dominó que abrangesse valores de 0 a 9 pontos, estudemos o dominó comercializado que possui 28 peças.

Um bom truque para compreendermos o dominó é dispor as peças do dominó segundo a figura 3.1.

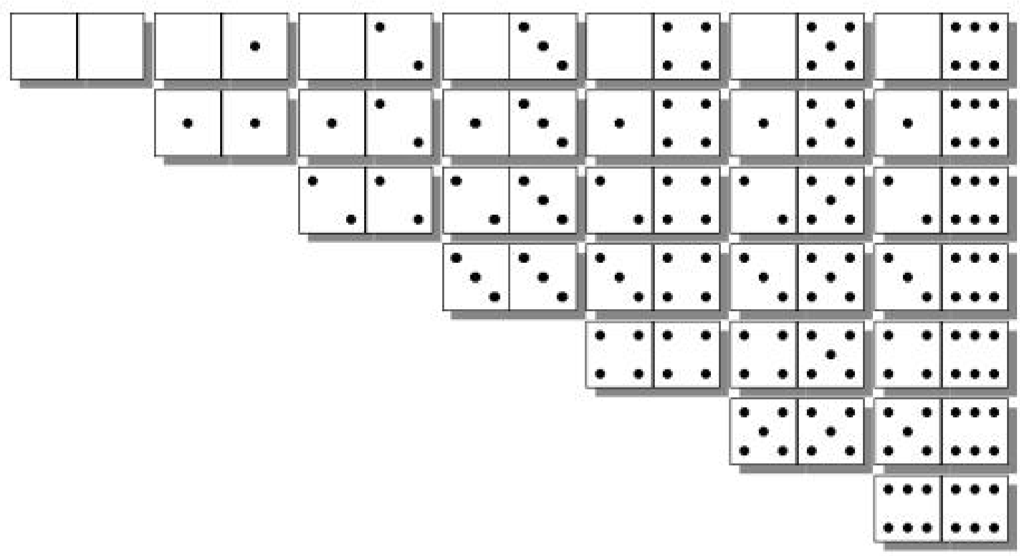

Figura 3.1: Dominó

Onde, uma fácil verificação a partir desta nos conduz a pensar que se tivessemos o dominó apenas com o valor 0, teríamos apenas uma peça, se tivermos o valor 0 e 1, teriamos 3 peças. Prosseguindo nossa análise é facil ver indutivamente que tratamos da soma dos termos da progressão aritmética de 1º ordem (P.A) $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$, onde, $S_7 = \dfrac{(1+7)\cdot 7}{2} = 28$. Desta maneira, um dominó que abrangesse valores de 0 a 9, tería que dispor as peças conforme a figura acima formando a sequência $(1, 2, \ldots, 9, 10)$, onde $S_{10} = \dfrac{(1+10)\cdot 10}{2} = 55$ peças.

Generalizando, se quisermos que os valores das faces abranja valores de 0 a n, teremos que $S_{n+1} = \dfrac{(1+n+1)\cdot(n+1)}{2} = \dfrac{(n+2)\cdot(n+1)}{2}$ peças.

3.2 Sequências e séries com palitos

A diversificação de recursos didáticos no processo ensino aprendizagem é de fundamental importância para dinamização e relação entre conceitos.

No ensino de séries e sequências, esses também apresenta real importância, principalmente quando podemos atrelar diversos campos de conceitos, como por exemplo a recorrência, o somatório e a generalização.

Agora, abordaremos exemplos de sequências construídas a partir de palitos de fósforo.

Exercício 13 *Seja uma sequência formada por palitos de fósforo conforme a figura abaixo, quantos palitos teremos que utilizar no* 10^o *termo dessa sequência de triângulos? Qual é o termo de ordem* n*?*

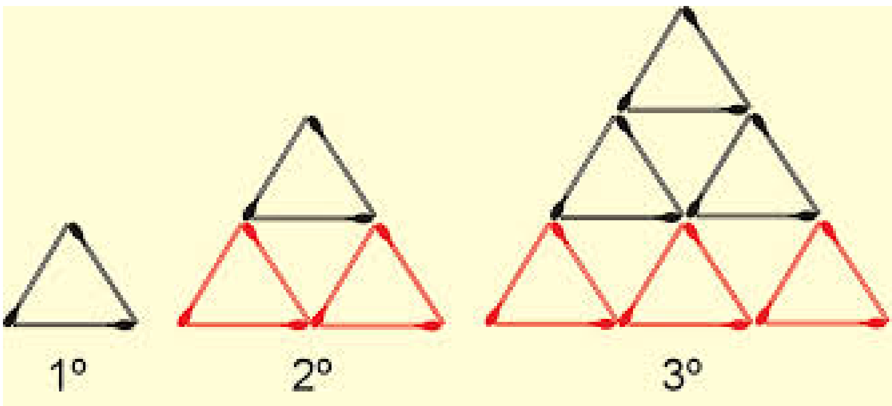

Figura 3.2: Sequência de triângulos

Solução 13 *Utilizando o raciocínio recorrente desta questão poderemos facilmente escrever que para a primeira pirâmide utilizamos* 3 *palitos, na segunda* *pirâmide utilizamos* $3+6$ *palitos, na terceira pirâmide* $3+6+9$ *palitos e para o* 4^o *termo temos* $3+6+9+12$ *e assim por diante, os outros termos sucessivamente conduzirão ao mesmo raciocínio, de forma que podemos escrever recorrentemente*

$$a_1 = 3 \Rightarrow a_1 = 1 \cdot 3$$

$$a_2 = a_1 + 6 \Rightarrow a_2 = a_1 + 2 \cdot 3$$

$$a_3 = a_2 + 9 \Rightarrow a_3 = a_2 + 3 \cdot 3$$

$$a_4 = a_3 + 12 \Rightarrow a_4 = a_3 + 4 \cdot 3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{10} = a_9 + 30 \Rightarrow a_{10} = a_9 + 10 \cdot 3$$

onde, telescopicamente resolvendo teremos $a_{10} = 165$. *Portanto, o nosso* 10^o *termo contém* 165 *palitos.*

Agora, generalizando para o termo de ordem n *teremos*

$$a_n = a_1 + 6 + 9 + 12 + ... = 3 + 6 + 9 + 12 + ... + 3n = \frac{(3+3n)\cdot n}{2},$$

pois trata-se da soma dos termos de uma progressão aritmética.

Exercício 14 *Qual seria a quantidade total de palitos necessários para formar o paralelogramo conforme a figura* 3.3, *em que cada um dos seus lados seja composto por* 8 *palitos?*

Solução 14 *Tomando a mesma ideia do exercício anterior, podemos observar que se o paralelogramo tiver cada um dos lados com um único palito precisamos de* 5 *palitos, para que cada um dos seus lados tenha* 2 *palitos precisamos de* $5 + 11$ *palitos(basta ver a figura), agora, para que cada um dos seus lados tenha* 3 *palitos, com um pouco de esforço verifiquemos que precisamos de* $5 + 11 + 17$. *Agora, indutivamente podemos ver que para formar um paralelogramo similar ao da figura*

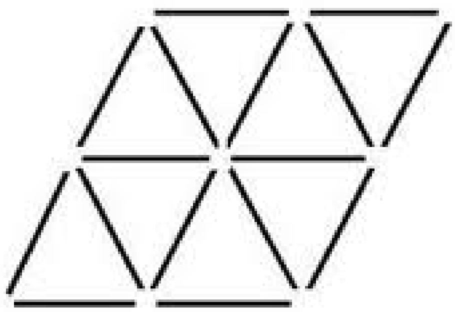

Figura 3.3: Paralelogramo formado por palitos

com 4 *palitos em cada um dos lados precisaremos de* 5+11+17+23. *Dessa maneira a partir desta análise podemos recorrentemente escrever essa sequência da seguinte forma:*

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = a_1 + 11$$

$$a_3 = a_2 + 17$$

$$a_4 = a_3 + 23$$

Onde na sequência $(b_n) = (11, 17, 23, \ldots)$ *(que é uma P.A de razão* 6*), teremos* $b_7 = 11 + 6.6 = 47$*, onde, telescopicamente teremos:*

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = a_1 + 11$$

$$a_3 = a_2 + 17$$

$$a_4 = a_3 + 23$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_8 = a_7 + 47 = 5 + 11 + 17 + 23 + \ldots + 47 = 5 + \frac{(11 + 47).7}{2} = 203.$$

É importante observar que mesmo se tratando de simples palitos, cada sequência com este recurso didático deve ser bem observada e construída, principalmente explorando o uso de recorrência e somação.

A compreensão e os conceitos explorados pelas sequências formadas por palitos ampliam as possibilidades do uso dessas estratégias para a resolução de outros problemas. Por exemplo, o castelo de cartas que é construído segundo a sequência formada na figura 3.4.

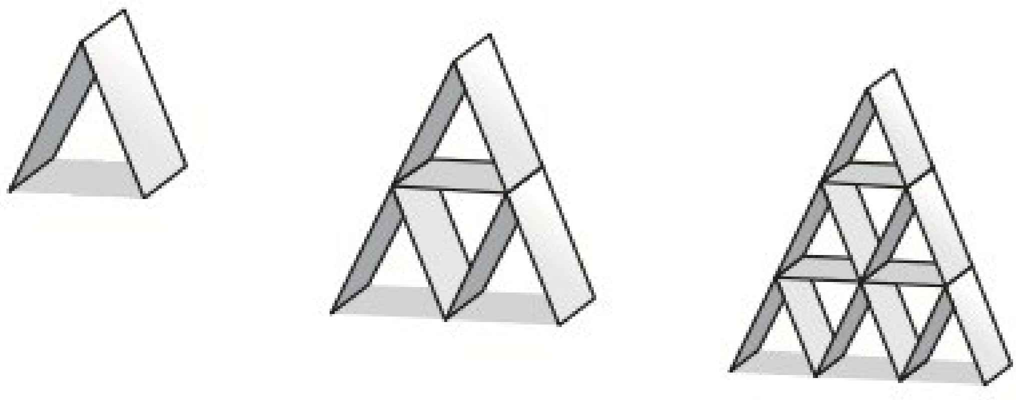

Figura 3.4: Castelo de cartas

Utilizando a mesma estratégia dos problemas anteriores com palitos, teremos:

$$a_1 = 2 = 1 \cdot 3 - 1$$

$$a_2 = a_1 + 5 = a_1 + 2 \cdot 3 - 1$$

$$a_3 = a_2 + 8 = a_2 + 3 \cdot 3 - 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = a_{n-1} + n \cdot 3 - 1$$

Onde, $a_n = 2 + 5 + 8 + 11 + \ldots + 3 \cdot n - 1 = \dfrac{(3 \cdot n + 1) \cdot n}{2}$.

3.3 A geometria no estudo de sequências e séries

Como foi dito anteriormente, o uso de recursos didáticos contribui e muito para aprendizagem, e, em muitas situações podemos fazer o processo contrário do anterior, isto é, utilizar o recurso geométrico para interpretar a sequência numérica. Assim, desta maneira iremos mostrar um exemplo típico de que isso é possível.

Exercício 15 *Seja a sequência* $(a_n) = (1, 3, 5, 7, ...)$ *determine a soma dos* n *termos dessa sequência.*

Solução 15 *Qualquer aluno do ensino médio que já tenha conhecimento de progressões iria tranquilamente utilizar a soma dos termos de uma P.A.. Entretanto, poderemos pensar na seguinte regularidade: para o* 1^o *termo teremos o número* 1*, para a soma do* 1^o *com o segundo termo teremos* $1+3$*, para a soma dos três primeiros termos temos* $1+3+5$*, e assim prosseguindo, podemos geometricamente ver a soma dos termos dessa sequência como na figura* 3.4.

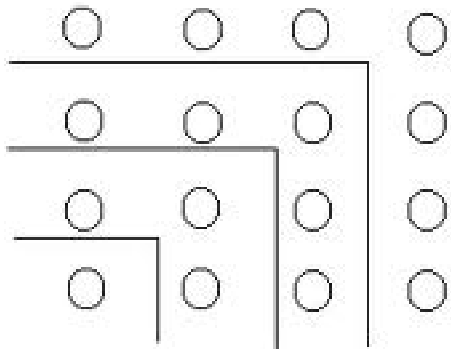

Figura 3.5: Sequência com bolinhas

Onde teremos para soma parcial $S_1 = 1$ *ponto, para* S_2 *um quadrado que contém* 4 *pontos,* S_3 *um quadrado que contém* 9 *pontos e indutivamente podemos provar* *que para S_n teremos n^2 pontos, isto é, a soma dos n primeiros termos da sequência $(a_n) = (1, 3, 5, 7, ...)$ é n^2.*

Os problemas com os recursos geométricos pode contribuir e muito para explorar diversas propriedades de uma sequência ou série, entretanto, faz-se necessário compreender o limite deste recurso e a impossibilidade de em muitos casos generalizar, por exemplo a convergência e a divergência, apenas por este caminho.

Por exemplo, observando a figura 3.5 formada por retângulos infinitamente desenhados conforme o desenho cujo valor em unidades de área esta no interior de cada retângulo. Você seria possível dizer se a soma da área de todos os retângulos é convergente ou divergente apenas na observação?

A sequência (A_n) das áreas dos retângulos que compõem a figura é

$$(A_n) = \left(10, 5, \frac{10}{4}, \frac{10}{8}, \ldots\right).$$

Podemos intuir que a série $\sum A_n$ formada por esses termos é convergente pois se trata de uma progressão geométrica de termos positivos cuja razão é menor que 1, ou seja, a série

$$10 + 5 + \frac{10}{4} + \frac{10}{8} + \ldots = \frac{10}{1 - \frac{1}{2}} = 20$$

que é uma série convergente.

É importante chamar a atenção que a figura final parece ter uma área infinita, já que é uma região não limitada. Mas mesmo assim, como mostramos, a área final converge.

Agora, observe a figura 3.6.

Inicialmente temos retângulos de área menor que a área dos primeiros retângulos da figura 3.5, onde visualizando a parte geométrica, você seria seduzido a dizer que esta área também é convergente. Mas, entretanto, a resposta é não, pois

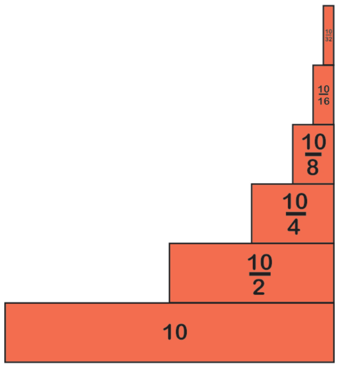

Figura 3.6: Sequência de retângulos 1

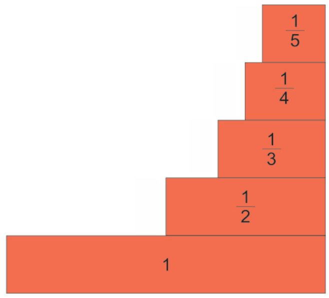

Figura 3.7: Sequência de retângulos 2

algebricamente teremos uma série harmônica na qual vimos anteriormente que é divergente.

De fato, a sequência das áreas de cada retângulo é $(B_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$. Mas como $\sum B_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ é a série harmônica, temos que a sequência das somas parciais das áreas dessa figura diverge, portanto a visualização geométrica pode nos intuir a posicionamentos matematicamente incorretos.

Agora, embora existam esses limites no campo geométrico, o caminho geométrico é o mais significativo no ensino médio para inserção de propriedades das sequências e séries vistas no ensino superior como convergência, limite e testes de convergência.

Como exemplo, estudemos o problema abaixo na qual iremos explorar as propriedades citadas acima.

Exercício 16 *Dada a figura abaixo onde o maior cubo tem aresta* 1 *unidade e sequencialmente cada cubo tem aresta cujo valor é a metade da aresta do cubo anterior. Considere a sequência das arestas, a sequência da área dos quadrados das faces frontais e a sequência do volume dos cubos. Verifique se as séries produzidas por essas sequências são séries convergentes.*

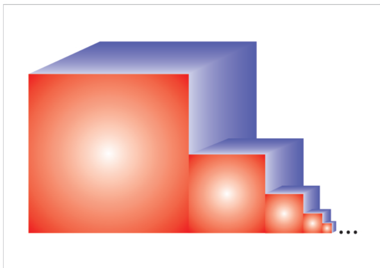

Figura 3.8: Sequência de cubos

Solução 16 *Seja* (L_n), (A_n) *e* (V_n) *respectivamente a sequência das arestas, áreas e volumes, onde temos*

$$(L_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right), (A_n) = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots\right)$$

e

$$(V_n) = \left(1, \frac{1}{8}, \frac{1}{64}, \frac{1}{512}, \dots\right).$$

Para (L_n) *percebemos que é uma sequência geométrica de razão* $\frac{1}{2}$ *onde, no segundo capítulo, vimos que esta converge para zero, como também, que a série* $\sum L_n$ *é convergente com soma* $L = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

Agora, utilizando o Teorema da comparação, perceberemos que as outras duas séries são também convergentes pois $L_n \geqslant A_n \geqslant V_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, sabemos que as três séries são convergentes. Consequentemente as sequências (L_n), (A_n) e (V_n) convergem para zero.

Investigando por outro caminho, temos que o termo geral de cada uma das sequências são respectivamente $L_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, $A_n = \frac{1}{4^{n-1}}$ e $V_n = \frac{1}{8^{n-1}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente como todas elas são progressões geométricas de razão respectivamente $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$, que são menores em módulo que 1, elas são convergentes. Calculando cada uma das soma com a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita obteremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{4}{3}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^{n-1}} = \frac{8}{7}.$$

Portanto, esse problema demonstra como podemos explorar e enriquecer um problema mostrando diversas maneiras e formas de visualizar e tomar a decisão de resolve-lo. Ou seja, o uso da geometria possibilita várias facetas no campo de conceitos matemáticos como também facilita a compreensão por parte do aluno.

3.4 Investigando o triângulo de Pascal

Uma atividade que possibilita envolver várias sequências e séries especiais é o triângulo de Pascal. Onde, iremos começar analisando a sequência formada pela soma dos termos das linhas.

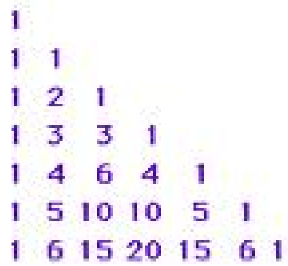

Figura 3.9: Triângulo de Pascal 1

Observe que na primeira linha temos $a_1 = 1$, para segunda linha $a_2 = 1+1 = 2$, para terceira $a_3 = 1 + 2 + 1 = 4$, para quarta $a_4 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8$ e assim, sucessivamente teremos a sequência $(1, 2, 4, 8, ...) = (2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots) = (2^{n-1})$. Essa generalização facilmente pode ser provada por indução.

Agora, analisando as sequências formadas pelas anti-diagonais do triângulo conforme a figura 3.9, é fácil perceber que a soma desses elementos forma a sequência de Fibonacci.

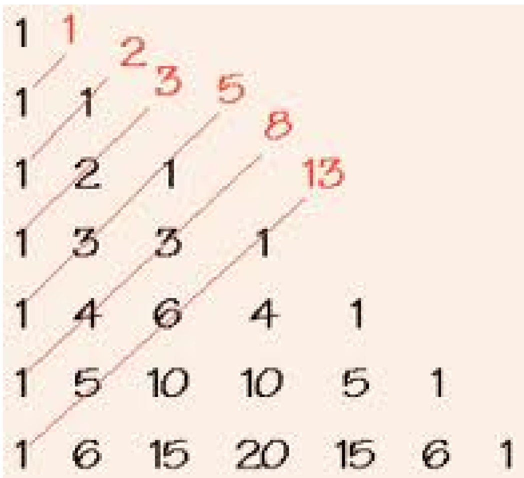

Figura 3.10: Triângulo de Pascal 2

Nossa investigação não fica por ai, se olharmos para o triângulo da figura 3.10, podemos extrair diversas progressões aritméticas de várias ordens onde a respectiva soma dos termos se encontra na outra linha. Analisaremos os casos abaixo:

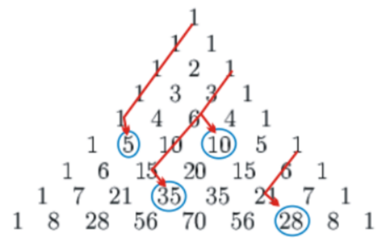

Figura 3.11: Triângulo de Pascal 3

Para a sequência $(1, 1, 1, 1, \ldots)$ observe como indicado, que a soma dos 5 primeiros termos está no 5º termo da diagonal abaixo. O mesmo acontece com a sequência $(1, 3, 6, 10, 15, \ldots)$ que como visto anteriormente é uma progressão aritmética de 2º ordem, em que a soma dos seus termos se encontra na diagonal abaixo com a mesma regra da situação anterior, onde, como exemplo indicado na figura, temos $1 + 3 + 6 = 10$ e $1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35$.

É importante que experimentos e análises do triângulo de Pascal feitas a partir da diagonalização da figura 3.11 proporcione que para toda diagonal assumida como uma sequência $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ ele terá abaixo a sequência das somas parciais da sequência (a_n). Isto é, teremos uma sequência

$$(b_n) = (a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots).$$

Portanto, se você explorar propriedades do triângulo de Pascal, fica mais fácil deduzir fórmulas para algumas somas. Por exemplo,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + \sum_{k=2}^{n} k^2 = 1 + \sum_{k=2}^{n} k + 2 \cdot \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \sum_{k=1}^{n} k + 2 \cdot \binom{n+1}{3}$$

$$= \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n-1)}{3} = \frac{3 \cdot n \cdot (n+1) + 2 \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n-1)}{6}$$

$$= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (3 + 2 \cdot (n-1))}{6} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)}{6}.$$

3.5 Problemas de séries e sequências na OBM

Entramos em um dos ápices do nosso trabalho que é associar os nossos estudos na mola mestre da matemática que é a resolução de problemas. Entretanto antes de tratarmos os problemas de olimpíadas, levanto o questionamento de se é possivel trabalhar questões da OBM no cotidiano escolar principalmente no ensino médio?

A resposta conduzida por este trabalho é sim, basta que o professor possa transpor didaticamente os conhecimentos essenciais das propriedades, características e classificações de séries e sequências tratados nos capítulos 1 e 2 desse trabalho.

Demonstraremos a partir dos problemas abaixo como devemos enxergar estes desafios propostos nas olímpiadas nos colocando com um olhar iventigador.

Exercício 17 *(OBM* 2013 - $1^o fase$*) Se x e y são inteiros positivos tais que*

$$x(x + 2 + 4 + 6 + \ldots + 4024) = 2013^y,$$

qual é o valor de y?

*a)*1

*b)*2

*c)*3

*d)*4

*e)*5

Solução 17 *Observando primeiro a soma dos números* $(x+2+4+6+\ldots+4024)$ *é fácil perceber que os números* $2, 4, 6, \ldots, 4024$*, forma uma progressão aritmética de razão* 2*, limitada com* 2012 *termos em que utilizando a soma dos termos de uma PA teremos* $S_{2012} = \frac{(2 + 4024)2012}{2} = \frac{4026 \cdot 2012}{2} = 2013 \cdot 2012$

Agora substituindo na equação esse resultado teremos $x(x+2013.2012) = 2013^y$. *Como* x *e* y *são inteiros, por divisibilidade teremos que*

$$2013 \div x(x + 2013 \cdot 2012)$$

ou seja, $2013 \div x^2$ *pois* $2013 \div x \cdot 2013 \cdot 2012$.

Agora não fica tão dificil de perceber que $x = 2013$ *onde substituindo na equação teremos* $2013 \cdot (2013 + 2012 \cdot 2013) = 2013^y \Rightarrow 2013^3 = 2013^y \Rightarrow y = 3$.

Embora que nesse problema recorremos a divisibilidade, a chave principal para resolução desse problema partiu do conhecimento de sequências.

Agora, no próximo problema da OBM, teremos que utilizar de forma sistematica os conhecimentos tratados nos capítulos anteriores.

Exercício 18 *(OBM - 2013 - 2ºfase) Observe que* $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. *Assim, podemos calcular a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots = 1.$$

Sabendo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6},$$

o valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{1 \cdot 2^2} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^2} + \ldots$$

é da forma $A - \dfrac{\pi^2}{B}$, *com* A *e* B *positivos. Determine o valor de* $A + B$.

Solução 18 *Observe que o problema já vem com duas grandes dicas para seguir.*

Desta forma,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}.$$

E, como

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)-1=\frac{\pi^2}{6}-1,$$

pois a diferença entre essas séries é apenas o primeiro termo, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}-\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)=1-\frac{\pi^2}{6}+1=2-\frac{\pi^2}{6}$$

Portanto, $A+B=2+6=8$

Os problemas das provas da OBM e OBMEP devem participar do dia a dia escolar. Desafiando os alunos, criando novas estratégias e possibilitando o desempacotamento do espírito matemático do aluno. De maneira alguma proponho a ideia de tranformar um problema da OBM como uma questão de avaliação de aprendizagem, como corriqueiramente é utilizado para julgar se o aluno sabe ou não tal conteúdo, mas para discussão e ampliação do conhecer matemática nas suas entrelinhas.

Para romper com a idéia tradicional de enxergar séries e sequências de forma isolada, não contextual e de grande pobreza matemática, faz-se necessário, a inclusão incondicional de ampliar os horizontes de investigação, de diversificação de séries e sequências e do uso da matemática do sentir, através da análise de convergência, limite, somação e generalização.

Daí, proponho mais do que questões da OBM e OBMEP. Proponho um olhar reflexivo, investigador e desafiador da matemática que podemos utilizar tanto no ensino médio como no superior para que o aluno desafiado seja capaz de buscar caminhos e romper fronteiras.

3.6 Considerações

Fundamentalmente a partir do que vimos nesse capítulo podemos fazer uma análise das n possibilidades de dar uma nova pedagogia para o ensino de séries e sequências sem que haja obstáculos ou possíveis desmotivações por parte do educando e do educador. Basta que o professor planeje, organize suas ideias e associe essas a conhecimentos que esteja fazendo parte de sua vivência, quer no campo social ou no campo científico.

Desta forma, concluímos que utilizar as sequências especiais como caracterizações de funções, explorar o triângulo de pascal ou utilizar figuras geométricas sequenciadas entre outras não está na impossibilidade de acontecer no dia a dia escolar.

Assim, basta que o professor explore, investigue e assuma o seu papel de pesquisador e mediador do conhecimento.

Conclusão

O estudo de séries e sequências rompendo com as ideias tradicionais de fórmulas e problemas pouco reflexivo, deve fazer parte do dia a dia escolar. Assim, analisar a convergência, verificar se uma sequêcia é limitada, se é monôtona ou não, entre outras propriedades não é distante do aluno que esta mergulhado em informações e novas ideias todos os dias.

Criar o espírito investigador com problemas que possibilite romper com os limites do livro didático, trazer problemas de olímpiadas e até transpor didaticamente problemas de livros de cálculo para o ensino médio deve estar presente no âmbito de suas atividades. Pois, o pior não é tratar o conceito de limite no ensino médio, mais sim limitar o seu conhecimento.

Matemática não deve ser repetida, enferrujada ou uma réplica, mais sim deve ser constantemente criada, dinamizada, investigada e intrigante, possibilitando a pesquisa e a inovação.

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, Woward. BIVENS,Irl. DAVIS, Stephen. *Cálculo II*, tradução Claus Ivo Doering. - 8 ed. - Porto Alegre: Bookman, 2007.

[2] HEFEZ, Abramo. *Elementos de Aritmética*; 2^o ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[3] LIMA, E. L. et al. *A matemática do Ensino médio*; Vol. 2 - Coleção do Professor de matemática - 9^o ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[4] MELO, Maria Eulalia de Moraes. VERA, Jorge Antônio Hinojosa. *Números Reais*; Editora Universitária da UFRPE, volume II, Recife, 2013.

[5] MELO, Maria Eulalia de Moraes. VERA, Jorge Antônio Hinojosa. *Números Reais*; Editora Universitária da UFRPE, volume III, Recife, 2013.

[6] MUNEM, Mustafa A. FOULIS, David J. *Cálculo volume 2* - Rio de Janeiro: LTC, 2011.

[7] Olimpíada Brasileira de Matemática 2^o fase nível 3 ano 2013

$< www.obm.org.br/opencms >$ Acesso em 28/12/2013.

[8] Olimpíada Brasileira de Matemática 1^o fase nível 3 ano 2013

$< www.obm.org.br/opencms >$ Acesso em 28/12/2013.

[9] ROGAWSKI, Jon. *Cálculo 1*; Tradução Claus Ivo Doering - Porto Alegre: Bookman, 2009.

[10] STEWART, James. *Cálculo volume 2*, tradução EZ2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[11] VALADARES, Eduardo de Campos. WAGNER, Eduardo. Adaptado do artigo RPM 39. *Revista do Professor de matemática*,volume 2. São Paulo, SP: SBM, 2009.