

**Universidade Federal Rural de Pernambuco**  
**Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**  
**PROFMAT**



**Grafos, a Fórmula de Euler e os Poliedros Regulares**

**ADRIANA PRISCILA DE BRITO**

**AGOSTO**  
**2014**

**Universidade Federal Rural de Pernambuco**  
**Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**  
**PROFMAT**

## **Grafos, a Fórmula de Euler e os Poliedros Regulares**

ADRIANA PRISCILA DE BRITO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, para a obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientador: **Prof. Dr. Thiago Dias**

**AGOSTO**  
**2014**

## **Resumo**

O presente trabalho tem como objetivo principal apresentar uma introdução à Teoria dos Grafos, fazendo a ligação entre alguns dos seus conceitos e a caracterização dos Poliedros Regulares. Será dada uma ênfase especial ao estudo dos Grafos Eulerianos, da Fórmula de Euler, dos Grafos Planares e dos Grafos Platônicos. Por fim, será apresentada uma proposta de sequência didática que tem como foco introduzir o conceito de grafo a alunos do ensino básico, fazendo ligações com os Poliedros Regulares.

**Palavras-chave:** grafos euleriano, fórmula de Euler, grafos planares e grafos platônicos.

## **Abstract**

This presentation provides an introduction to graph theory, making the connection between some of its concepts and the and characterization of Regular Polyhedra. Special emphasis will be given to the study of Eulerian graphs, Euler's Formula, Graphs and Planar Graphs Platonic. Finally, a proposed instructional sequence that focuses on introducing the concept of the graph elementary school students, making connections with the regular polyhedra is presented.

**Keywords:** Eulerian graphs, Euler's formula, Platonic graphs and planar graphs.

## ***Sumário***

<b><i>Resumo</i></b>	<b>2</b>
<b><i>Introdução</i></b>	<b>6</b>
<b><i>Definições Básicas</i></b>	<b>8</b>
1.1 Grafo Simples	8
1.2 Diagrama	8
1.3 Adjacência	9
1.4 Grau de um Vértice	9
1.5 Caminho	9
1.6 Caminho fechado	10
1.7 Grafo Nulo	11
1.8 Grafo Completo	11
1.9 Grafo Conexo	12
1.10 Subgrafo	12
1.11 Supergrafo	12
1.12 Grafos Isomorfos	13
1.13 Grafo Regular	13
<b><i>Grafos Eulerianos</i></b>	<b>14</b>
2.1 Multigrafo	14
2.2 Grafos Eulerianos	15
2.3 Trilho Euleriano	17
2.4 O Problema das Pontes de Königsberg	19
<b><i>Fórmula de Euler</i></b>	<b>20</b>
3.1 Grafo Planar	20
3.2 Faces de um grafo	20
3.3 Fórmula de Euler	21

<b><i>Grafos Platônicos</i></b>	<b>25</b>
<b>4.1 Grau de uma face</b>	<b>25</b>
<b>4.2 Grafos Platônicos</b>	<b>25</b>
<b>4.3 Planificação dos Poliedros Regulares</b>	<b>28</b>
4.3.1 Planificação do Tetraedro	30
4.3.2 Planificação do Hexaedro	31
4.3.3 Planificação do Octaedro	32
4.3.4 Planificação do Dodecaedro	32
4.3.5 Planificação do Icosaedro	33
<b><i>Planaridade</i></b>	<b>35</b>
<b>5.1 Grafo Bipartido</b>	<b>36</b>
<b>5.2 Grafos Homeomorfos</b>	<b>39</b>
<b>5.3 Teorema de Kuratowski</b>	<b>40</b>
<b><i>Sequência Didática</i></b>	<b>41</b>
<b><i>Anexos</i></b>	<b>48</b>
<b>Anexo 1 - Atividade Aula 1</b>	<b>48</b>
<b>Anexo 2 – Atividade Aula 2</b>	<b>49</b>
<b>Anexo 3 – Atividade Aula 3</b>	<b>50</b>
<b>Anexo 4 - Atividade Aula 4</b>	<b>52</b>
<b>Anexo 5 – Atividade Aula 5</b>	<b>54</b>
<b><i>Referências Bibliográficas</i></b>	<b>56</b>

## Introdução

A Teoria dos Grafos é uma das poucas áreas da matemática em que se tem uma data registrada como sendo o seu início: o primeiro documento referente a este assunto foi escrito pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707 - 1783), e apareceu no volume de publicações da Academia de Ciências de São Petersburgo, em 1736. Euler é uma das figuras mais impressionantes da história da ciência. Em 1727, quando ele tinha 20 anos, ele foi convidado para a academia russa. Ele já tinha estudado teologia, línguas orientais e medicina antes de se dedicar à matemática, física e astronomia.

Euler começou seu trabalho sobre Grafos buscando solucionar O Problema das Pontes de Königsberg. As várias partes da cidade de Königsberg (atual Kaliningrado, na Rússia), eram ligadas por sete pontes, que cruzavam o Rio Pregel. Num certo momento, durante os passeios dos moradores pela cidade, surgiu a pergunta: é possível, saindo de um ponto da cidade, percorrer estas sete pontes uma única vez, e voltar ao ponto inicial?

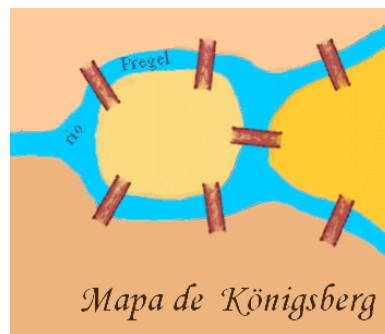


Ilustração das Pontes de Königsberg – Figura A

(Fonte: <http://ptmat.fc.ul.pt/~pduarte/tmf/Problemas/Images/konigsberg.gif>)

Esta pergunta ficou sem resposta até que Leonard Euler, em 1736, solucionou o problema, inaugurando um novo ramo da matemática: a Teoria dos Grafos.

Este Trabalho de Conclusão de Curso tem por objetivo principal introduzir alguns dos conceitos da Teoria dos Grafos de forma simples e objetiva.

Nos Capítulos de 1 a 3 iremos trabalhar algumas definições básicas cujo conhecimento é necessário para a compreensão do estudo dos grafos, iremos definir e classificar os principais grafos, e trabalhar alguns teoremas que foram frutos das descobertas de Euler.

No Capítulo 4 iremos definir o que são Grafos Platônicos, e aplicar alguns dos resultados estudados nos capítulos anteriores nos grafos que são fruto das Planificações dos Poliedros de Platão.

No Capítulo 5 iremos explorar um pouco mais o conceito de Planaridade, estudando alguns importantes teoremas que nos levam a ter um entendimento mais rigoroso deste conceito.

E, finalmente, no Capítulo 6, temos uma proposta de Sequência Didática, que pode ser aplicada a alunos do ensino básico, afim de: introduzir o conceito de Grafos, mostrar quão presentes os grafos estão no nosso dia a dia, apresentar os Poliedros Regulares, e trabalhar nestes a Fórmula de Euler.



# Capítulo 1

## Definições Básicas

Neste capítulo iremos definir *grafo* e introduzir alguns conceitos que servirão de base para os demais capítulos.

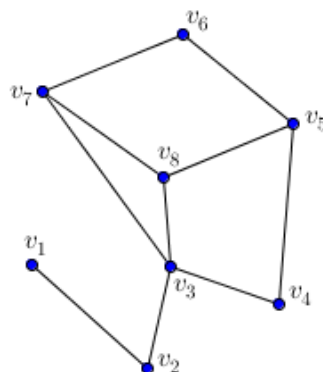
### 1.1 Grafo Simples

Um *Grafo Simples*  $G$  é definido por um par  $(V, E)$ , onde  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é um conjunto finito de elementos chamados *vértices*, e  $E$  é um conjunto cujos elementos são subconjuntos de  $V$  com dois elementos distintos. Os elementos de  $E$  chamados *arestas*.

### 1.2 Diagrama

Um *diagrama* é uma representação gráfica do grafo. Portanto, pode haver infinitos diagramas representando um mesmo grafo  $G$ .

Na Figura 1.1 temos um exemplo de um diagrama, onde  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ , e  $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_6, v_7), (v_7, v_8), (v_8, v_3), (v_3, v_2), (v_2, v_1)\}$ .



Grafo - Figura 1.1

### 1.3 Adjacência

Dois vértices são chamados de *adjacentes* quando são conectados por uma aresta. Na Figura 1.1, por exemplo, temos que  $v_1$  e  $v_2$  são adjacentes, pois estão ligados pela aresta  $E(v_1, v_2)$ .

Duas ou mais arestas são ditas adjacentes se são incidentes num mesmo vértice. As arestas  $E(v_8, v_3)$ ,  $E(v_8, v_5)$  e  $E(v_8, v_7)$ , da Figura 1.1, por exemplo, são arestas adjacentes, estando todas elas incidentes no vértice  $v_8$ .

### 1.4 Grau de um Vértice

O *grau de um vértice* é o número de arestas incidentes nele. Denotaremos o grau de um vértice  $v$  por  $r(v)$ . Na Figura 1.2, por exemplo, temos que  $r(v_1) = 3$  e  $r(v_5) = 4$ .

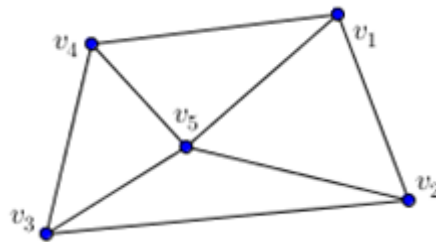
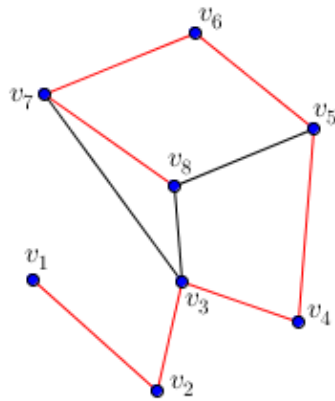


Figura 1.2

### 1.5 Caminho

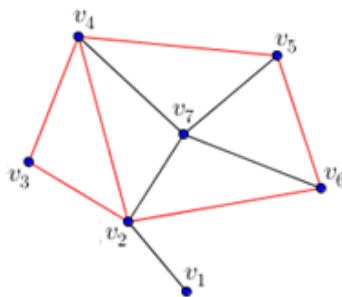
Um *caminho*, ou *cadeia*, é uma sucessão de vértices e arestas tal que cada aresta liga o vértice que a precede ao vértice que a segue, não repetindo arestas. O grafo que contém um único vértice, e nenhuma aresta, também é um caminho.



Caminho - Figura 1.3

Na Figura 1.3, por exemplo, temos que a sequência de vértices  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$  e  $v_8$ , juntamente com as arestas que fazem a conexão entre eles, nesta mesma ordem, é um exemplo de *caminho*.

Como num caminho não há problemas em repetir vértices, então a sequência de vértices  $v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_2$  e  $v_4$  da Figura 1.4 abaixo, juntamente com as arestas que fazem a conexão entre eles, nesta mesma ordem, é mais um exemplo de caminho.

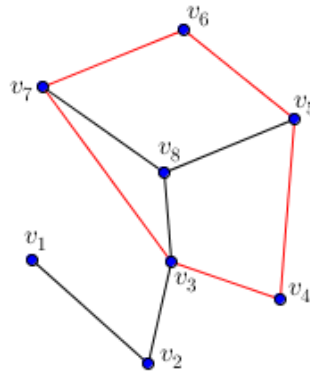


Caminho - Figura 1.4

## 1.6 Caminho fechado

Um caminho que possui o primeiro vértice igual ao último é chamado de *caminho fechado*. Um *caminho fechado* também é conhecido como *ciclo*.

Na Figura 1.5 abaixo, temos um exemplo de um caminho fechado: o caminho formado pela sequência de vértices  $v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$  e  $v_3$ , juntamente com as arestas que fazem a conexão entre eles.



Caminho fechado – Figura 1.5

### 1.7 Grafo Nulo

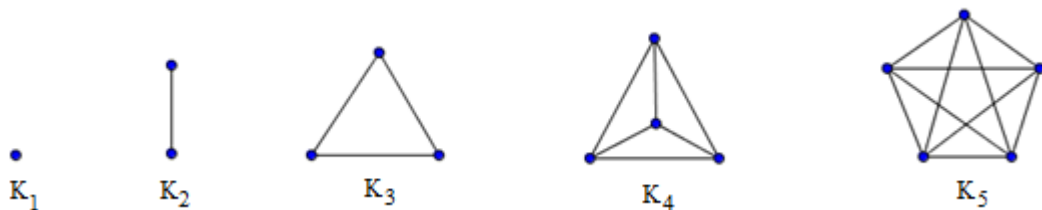
Um grafo  $G$  que possui um único vértice e não possui arestas é chamado de *grafo nulo*.



Grafo Nulo – Figura 1.6

### 1.8 Grafo Completo

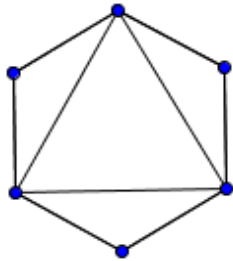
Um grafo  $G$  onde cada par de vértices é ligado por uma aresta é chamado *grafo completo*. Ou, em outras palavras, todos os seus vértices são adjacentes.



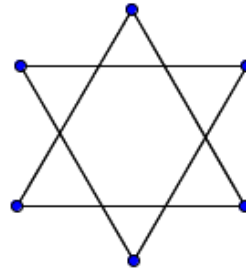
Exemplos de Grafos Completos – Figura 1.7

## 1.9 Grafo Conexo

Um grafo  $G$  é dito *conexo* quando dado qualquer par de vértices de  $G$ , é possível encontrar um caminho, ligando esses dois pontos. Quando isso não for possível, o grafo é dito não conexo, ou, desconexo.



Grafo Conexo – Figura 1.8



Grafo não conexo – Figura 1.9

## 1.10 Subgrafo

Um grafo  $G(V', E')$  é um *subgrafo* de  $H(V, E)$  se  $V'$  é um subconjunto de  $V$  e  $E'$  é um subconjunto de  $E$ . (Exemplo: Figura 1.10)

## 1.11 Supergrafo

Um grafo  $H$  é um *supergrafo* de  $G$  se  $G$  é subgrafo de  $H$ .

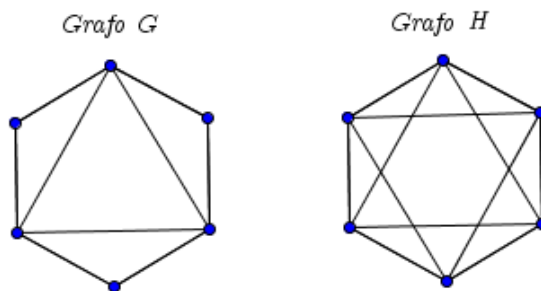
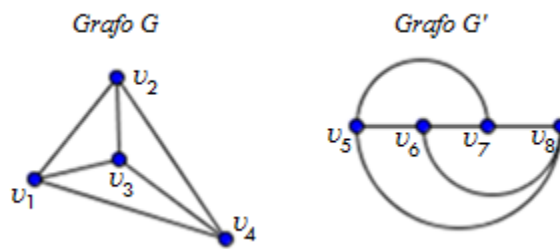


Figura 1.10

Na Figura 1.10 acima temos que o grafo  $G$  é um subgrafo do grafo  $H$ , e, portanto, o grafo  $H$  é um supergrafo do grafo  $G$ .

### 1.12 Grafos Isomorfos

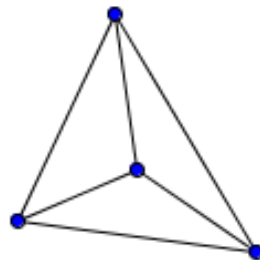
Dois grafos  $G(V, E)$  e  $G'(V', E')$  são *Grafos Isomorfos* se existe uma correspondência bijetiva entre  $V$  e  $V'$ , e entre  $E$  e  $E'$ , que conserva as relações de adjacência e incidência. Na Figura 1.11 abaixo temos o exemplo de dois *Grafos Isomorfos*.



Grafos Isomorfos – Figura 1.1

### 1.13 Grafo Regular

Um grafo é chamado de *Grafo Regular* se todos os seus vértices tem mesmo grau, ou seja, se em todos os vértices incide o mesmo número de arestas. Se o grau dos vértices for  $r$ , dizemos que o grafo é regular de grau  $r$ .



Exemplo de um grafo regular de grau 3 – Figura 1.12

Observe que todo grafo conexo regular de grau 2 é *Ciclo*.

## Capítulo 2

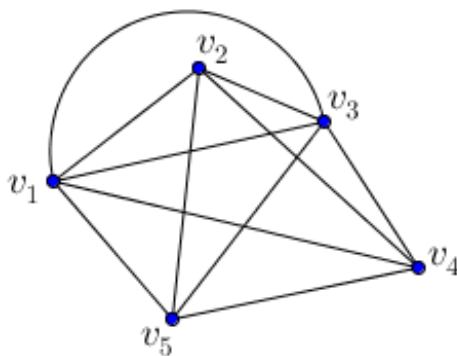
### Grafos Eulerianos

Neste capítulo iremos definir multigrafo e grafo euleriano, e iremos trabalhar com alguns teoremas relacionados com estas definições. Voltaremos também ao Problema das Pontes de Königsberg, mencionado na introdução deste trabalho, mostrando a solução deste problema através do conceito de grafo euleriano.

#### 2.1 Multigrafo

As arestas que possuem o mesmo par de vértices como seus extremos são chamadas de *arestas paralelas*. Um grafo  $G$  que possui duas ou mais arestas paralelas é chamado de *Multigrafo*.

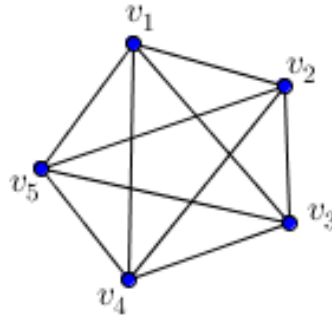
Na Figura 2.1 abaixo temos um exemplo de um *Multigrafo*, com um par de arestas paralelas cujos extremos são os vértices  $v_1$  e  $v_3$ .



Multigrafo - Figura 2.1

## 2.2 Grafos Eulerianos

O grafo que possui um ciclo que passa por todas as suas arestas sem repeti-las é chamado *Grafo Euleriano*. Este ciclo é chamado de *Ciclo Euleriano*.



Grafo Euleriano – Figura 2.2

No grafo da Figura 2.2, temos o ciclo formado pelos vértices  $v_1, v_4, v_2, v_5, v_3, v_1, v_5, v_4, v_3, v_2$  e  $v_1$ , juntamente com as arestas que fazem a conexão entre eles, exatamente nesta ordem. Como ele passa por todas as arestas do grafo, trata-se então de um *Ciclo Euleriano*. E, portanto, o grafo acima é um *Grafo Euleriano*.

**Teorema 2.1:** Um grafo  $G$  conexo é euleriano se, e somente se, cada vértice de  $G$  tem grau par.

**Demonstração:**

**Parte I:** *Um grafo  $G$  conexo é euleriano  $\Rightarrow$  cada vértice de  $G$  tem grau par.*

Vamos supor que o grafo  $G$  é euleriano, ou seja,  $G$  possui um Ciclo Euleriano  $c$ . Escolhemos um vértice  $v_1$  de  $G$  de maneira aleatória. Como  $G$  é conexo e possui um Ciclo Euleriano  $c$  (um caminho fechado que percorre todas as arestas), começamos a percorrer este ciclo através de uma das arestas ligadas a  $v_1$ , indo até o próximo vértice onde tal aresta incide. Como o caminho é fechado, após passar por todas as arestas, retornamos ao vértice  $v_1$ . Podemos observar que, como o ciclo é euleriano, ele passará por todas as arestas de  $G$  uma



única vez. Em todo vértice de  $G$  diferente de  $v_1$  por onde passarmos em cada visita iremos percorrer duas arestas que incidem neste vértice: uma para ir até ele, e outra para sair dele, o que nos leva a concluir que todos os vértices de  $G$ , diferentes de  $v_1$ , possuem grau par.

Além disso, como nosso ciclo é euleriano, e partimos de  $v_1$  utilizando uma aresta, devemos terminar de percorrer nosso ciclo por uma aresta diferente da inicial, mas que também incida em  $v_1$ , e assim  $v_1$  tem grau par.

Concluimos então que, se um grafo  $G$  conexo é euleriano, então cada vértice de  $G$  tem grau par. Agora provaremos a recíproca deste teorema.

**Parte II:** *Cada vértice de um grafo conexo  $G$  tem grau par  $\Rightarrow$  O grafo  $G$  é euleriano.*

Vamos supor que todos os vértices de  $G$  tenham grau par. Primeiro selecionaremos um vértice arbitrário  $v_1$  e partiremos deste vértice, percorrendo qualquer uma das arestas incidentes nele. Chegaremos então a outro vértice, deixando-o também por uma aresta incidente nele e que ainda não foi percorrida. Continuaremos esse procedimento até passarmos por todas as arestas. Fazendo isso, percorreremos cada aresta uma única vez, até chegarmos novamente no vértice  $v_1$ . Caso  $v_1$  ainda possua arestas não percorridas, repetiremos os passos anteriores até que, no vértice  $v_1$  não restem arestas não percorridas.

Uma vez que todos os vértices de  $G$  possuem grau par, então em cada vértice por onde passamos, cujo grau seja maior que 2, resta sempre um número par de arestas incidentes neste vértice que ainda não foram percorridas. Como  $v_1$  será o único vértice que restará com um número ímpar de arestas, pois utilizamos uma aresta apenas para começar a cadeia em  $v_1$ , então o ciclo só pode terminar em  $v_1$ . Portanto, temos um caminho fechado, ou, um ciclo.

É importante observar que o ciclo pode não incluir todas as arestas de  $G$ . Sendo este o caso, tome um vértice  $v_2$  deste ciclo  $c$  tal que  $v_2$  possua pelo menos uma aresta ainda não percorrida, e repita o mesmo procedimento usado no ciclo  $c$  para traçar um novo caminho  $d$ . Por construção, esse novo caminho também será fechado e percorrerá cada uma de suas arestas apenas uma vez, por utilizar o mesmo procedimento do ciclo  $c$ . Agora, como  $v_2$  é um

vértice do ciclo  $c$ , e existe um novo caminho fechado  $d$  começando e terminando nele, podemos começar um caminho  $f$  em  $v_1$  que engloba os caminhos  $c$  e  $d$ . Caso  $f$  não percorra todas as arestas de  $G$  podemos usar o procedimento do passo anterior utilizando um de seus vértices com arestas disponíveis, e assim como  $G$  possui um número finito de vértices e arestas, encontraremos um caminho fechado que passa exatamente uma vez por cada uma de suas arestas, ou seja, um ciclo euleriano, concluindo assim a demonstração.  $\square$

Do **Teorema 2.1** decorre imediatamente o seguinte fato: se um grafo tiver um vértice qualquer de grau ímpar, então, é impossível encontrar nele um ciclo euleriano.

### 2.3 Trilho Euleriano

É um caminho não-fechado que passa por todas as arestas, onde pode haver repetição de vértices, mas não de arestas.

**Teorema 2.2:** Um grafo  $G$  conexo terá trilho euleriano se, e somente se, ele tiver exatamente dois vértices com grau ímpar. Tal trilho começará num vértice de grau ímpar, e terminará no outro.

#### Demonstração:

**Parte I:** *Se um grafo  $G$  tem um trilho euleriano  $\Rightarrow$  ele terá dois vértices com grau ímpar.*

Seja  $G$  um grafo com um trilho euleriano. Então, partindo de um vértice  $v_1$  de grau ímpar de  $G$ , podemos percorrer todas as arestas de  $G$ , sem repeti-las, até chegarmos num vértice  $v_2$  de  $G$ , distinto de  $v_1$  (por não se tratar de um ciclo), que será o último vértice do trilho. Para sair de  $v_1$  precisamos apenas de uma aresta que tenha  $v_1$  como um dos seus extremos. Ao longo do caminho, se for necessário passar novamente por  $v_1$ , teremos que chegar e sair de  $v_1$ , sendo necessário, portanto, para que isso ocorra, um par de arestas distintas incidentes em  $v_1$ . E o mesmo ocorrerá todas as vezes que for necessário passar por

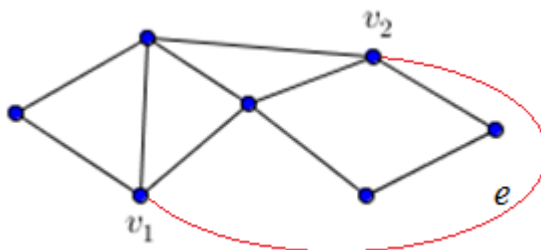
$v_1$ . Portanto, o número de arestas incidentes em  $v_1$  será dado por  $1 + 2n$ , sendo  $n$  o número de vezes que passamos por  $v_1$  ao longo do caminho. Portanto,  $v_1$  tem grau ímpar.

Sendo  $v_2$  o vértice onde o trilho termina, percorreremos uma aresta incidente em  $v_2$  para chegar até ele. Portanto,  $v_2$  terá ao menos uma aresta incidente nele. Mas, caso tenhamos passado por  $v_2$  ao longo do caminho, foi preciso haver um par de arestas distintas incidentes em  $v_2$ , uma para chegar e uma para sair de  $v_2$ , cada vez que passamos por este vértice. Portanto, o número de arestas incidentes em  $v_2$  será dado por  $1 + 2m$ , sendo  $m$  a quantidade de vezes que passamos por  $v_2$ . Concluimos então que  $v_2$  também tem grau ímpar.

Caso nosso grafo tenha mais de dois vértices, então, além dos vértices  $v_1$  e  $v_2$ , onde começamos e terminamos nosso trilho, há outros vértices por onde passamos ao longo do trilho, e cada um deles deverá ter, necessariamente, grau par, pois cada vez que passamos por cada um deles foi preciso utilizar um par de arestas distintas, uma aresta para chegarmos e outra para sairmos. Então, se passamos por um vértice  $k$  vezes, percorremos  $2k$  arestas, ou seja, sempre uma quantidade par de arestas. Portanto,  $v_1$  e  $v_2$  são os dois únicos vértices de grau ímpar do nosso grafo.

**Parte II:** *Se um grafo  $G$  conexo tem dois vértices com grau ímpar  $\Rightarrow$  ele tem um trilho euleriano.*

Consideremos um grafo  $G$  com dois vértices de grau ímpar,  $v_1$  e  $v_2$ . Adicionado ao grafo  $G$  uma aresta  $e$  incidente a  $v_1$  e  $v_2$  obteremos um grafo  $G'$  euleriano. Desse modo  $G'$  admite um ciclo euleriano  $P$  de modo que  $P$  termina em  $e$ . Removendo-se a aresta  $e$  do ciclo euleriano  $P$  obteremos então um trilho euleriano em  $G$ .

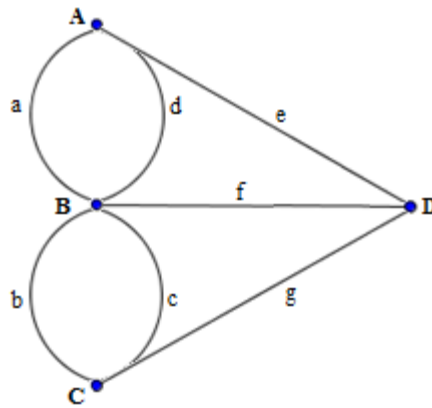


Grafo com dos vértices de grau ímpar - Figura 2.3

## 2.4 O Problema das Pontes de Königsberg

Na introdução deste trabalho falamos sobre o Problema das Pontes de Königsberg, que consistia em descobrir se seria possível, partindo de um ponto da cidade, percorrer as sete pontes que cruzavam o Rio Pregel, passando por cada uma delas uma única vez, e então retornar ao ponto inicial.

Observando o grafo abaixo, em que as arestas representam cada uma das sete pontes mencionadas acima, nosso problema pode ser reformulado da seguinte forma: É possível encontrar um Ciclo Euleriano que passe por todas as arestas do grafo abaixo? Ou seja: nosso grafo é um Grafo Euleriano?



Grafo das Pontes de Königsberg - Figura 2.4

Podemos ver que todos os 4 vértices do nosso grafo tem grau ímpar. Pelo **Teorema 2.1**, vemos então que nosso grafo não é euleriano, e, portanto, não é possível percorrer as sete pontes da forma desejada no problema.

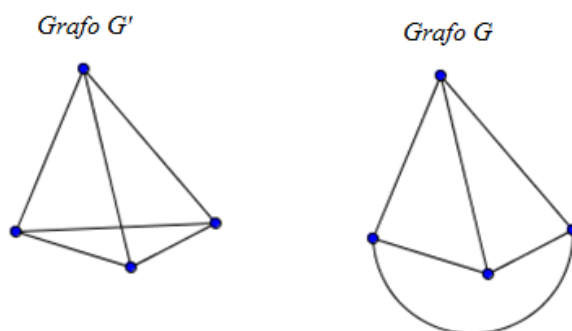
## Capítulo 3

### Fórmula de Euler

Leonard Euler percebeu que um grafo simples, planar e conexo, divide o plano em certo número de regiões, e que esse número de regiões tem uma relação com o número de vértices e de arestas de tal grafo. É esse fato que iremos trabalhar nos tópicos abaixo.

#### 3.1 Grafo Planar

Um grafo  $G'$  é *planar* quando é isomorfo a um grafo  $G$  que tenha sido traçado no plano sem cruzamento de arestas. Caso não haja um isomorfismo desse tipo o grafo é dito não planar.



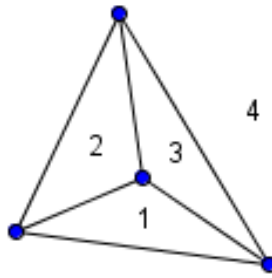
Grafo Planar – Figura 3.1

Na Figura 3.1 temos que o *Grafo  $G'$*  é planar, pois é isomorfo ao *Grafo  $G$* , que foi traçado no plano sem cruzamento de arestas.

#### 3.2 Faces de um grafo

Quando um grafo é planar ele divide o plano em regiões que são delimitadas por suas arestas. A essas regiões damos o nome de *faces*.

A região exterior ao grafo, que não é limitada por suas arestas, também é contada como uma face do grafo.



Grafo com 4 faces – Figura 3.2

### 3.3 Fórmula de Euler

Segundo Euler, dado um grafo  $G(V, E)$  planar e conexo, com  $v$  vértices,  $f$  faces (ou regiões) e  $e$  arestas, então:  $v + f - e = 2$ .

#### Demonstração 1:

Faremos a prova da Fórmula de Euler por indução sobre o número de arestas de  $G$ .

No grafo nulo (Figura 1.6), temos que  $v = 1$ ,  $e = 0$  e  $f = 1$ . Aplicando a Fórmula de Euler, teremos:

$$v + f - e = 1 + 1 - 0 = 2.$$

Portanto, para um grafo com 0 arestas ( $e = 0$ ), a Fórmula de Euler é válida.

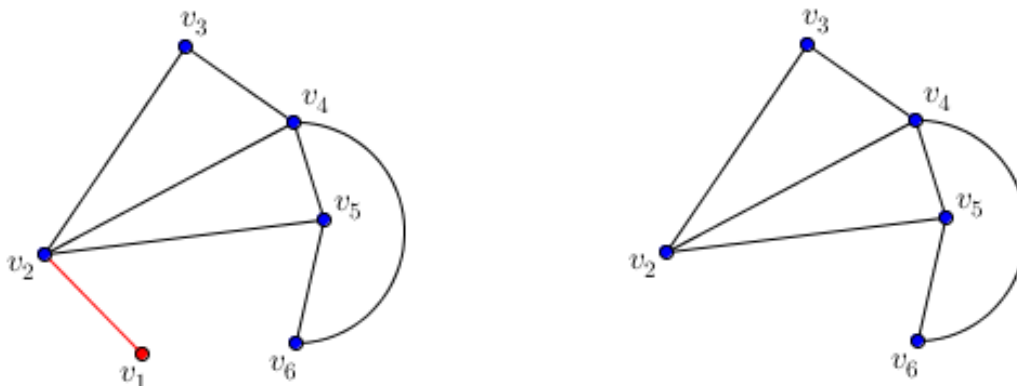
Consideremos agora, como *hipótese de indução*, que a Fórmula de Euler é válida para um grafo planar e conexo, com  $k$  arestas. Ou seja, para um grafo com  $k$  arestas, a seguinte afirmação é verdadeira:

$$v + f - k = 2 \text{ (Hipótese de indução)}$$

Vamos mostrar então que, para um grafo planar e conexo, com  $k + 1$  arestas, a Fórmula de Euler também é válida.

Para isso, iremos considerar dois casos:

**1º Caso:** Temos um grafo  $G$  com  $k + 1$  arestas e  $v + 1$  vértices, sendo que um dos vértices tem grau 1.



Grafo com 1 vértice e 1 aresta retirados - Figura 3.3

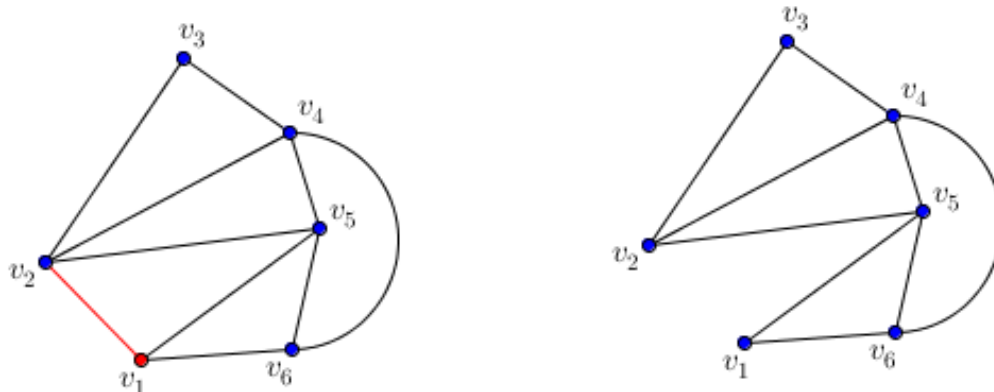
No grafo acima (Figura 3.3), temos que o vértice  $v_1$  tem grau 1. Se apagarmos do nosso grafo a aresta que conecta este vértice de grau 1 ao restante do grafo, eliminamos uma aresta e um vértice do grafo, e passamos agora a ter um novo grafo  $G'$ , com  $k$  arestas e  $v$  vértices. Pela hipótese de indução, temos que a Fórmula de Euler se aplica em  $G'$ .

Mas, é necessário que a Fórmula de Euler se aplique também ao nosso grafo  $G$  inicial. Temos então que:

$$(v + 1) + f - (k + 1) = v + f - k = 2.$$

Sendo esta última igualdade confirmada por nossa hipótese de indução.

**2º Caso:** Temos um grafo  $G$  com  $k + 1$  arestas, onde nenhum de seus vértices tem grau 1.



Grafo com retirada de uma aresta – Figura 3.4

Se apagarmos do nosso grafo  $G$  uma das arestas que faz fronteira com sua face externa, eliminamos uma aresta e diminuimos em 1 unidade a quantidade de faces do nosso grafo  $G$  (conforme o modelo da Figura 3.4, acima). Teremos então um novo grafo  $G'$  com  $k$  arestas, onde a Fórmula de Euler se aplica, conforme nossa hipótese de indução:

$$v + f - e = v + f - k = 2.$$

Mas, é necessário que a Fórmula de Euler se aplique também ao nosso grafo  $G$  inicial. Temos então que:

$$v + (f + 1) - (k + 1) = v + f - k = 2.$$

Sendo esta última igualdade confirmada por nossa hipótese de indução.

Portanto, a Fórmula de Euler é verdadeira para um grafo  $G$  planar e conexo, como queríamos demonstrar.  $\square$



## Demonstração 2:

É fácil verificar que a Fórmula de Euler é válida em um grafo  $G$  planar e conexo formado por um vértice e sem arestas (o grafo nulo, Figura 1.5), pois, neste caso, temos:  $v = 1$ ,  $e = 0$  e  $f = 1$ , e, portanto,  $v + f - e = 1 + 1 - 0 = 2$ .

Consideremos agora dois tipos de ampliações de um grafo conexo dado:

1º) Uma ampliação onde foi inserido um novo vértice, conectado ao grafo por uma nova aresta.

Note que se um grafo  $G$  for conexo, também será depois da ampliação sugerida acima. Além disso, o número  $v + f - e$  não se altera, pois nesse tipo de ampliação os valores de  $v$  e  $e$  aumentam em 1, e o valor de  $f$  fica invariável.

$$(v + 1) + f - (e + 1) = v + f - e = 2.$$

2º) Uma ampliação onde inserimos uma nova aresta, conectando dois vértice já dados.

No tipo de ampliação acima, à medida que aumentamos o número de arestas e de faces, o número de vértices permanece invariável.

$$v + (f + 1) - (e + 1) = v + f - e = 2.$$

Sabemos então que:

- ✓ a Fórmula de Euler é válida para o grafo nulo; e
- ✓ a Fórmula de Euler é válida para qualquer ampliação do grafo nulo, do tipo 1 ou 2, descritas acima.

Portanto, não é difícil observar que é possível obter qualquer grafo planar conexo, efetuando sucessivas vezes as ampliações 1º e 2º, sobre o grafo nulo, e a Fórmula de Euler será verdadeira para cada uma desses novos grafos, como vimos acima. Concluimos então que, para todo grafo planar e conexo a Fórmula de Euler é verdadeira. □

## Capítulo 4

### Grafos Platônicos

Neste capítulo iremos definir o que são Grafos Platônicos, e veremos a associação destes grafos com os poliedros regulares. Além disso, iremos analisar os grafos associados às planificações dos poliedros regulares, verificando nestes grafos os resultados encontrados nos capítulos 2 e 3 deste trabalho.

#### 4.1 Grau de uma face

O grau de uma face de um grafo é o número de arestas que limitam a região desta face.

#### 4.2 Grafos Platônicos

Chamamos de *Grafo Platônico* ao grafo que é conexo, planar, regular, e no qual todas as faces apresentam o mesmo grau, ou seja, o mesmo número de arestas delimitando sua região. Portanto, concluímos que o grafo nulo e os grafos cíclicos (grafos cujas arestas formam um polígono) são exemplos de grafos platônicos.

**Teorema:** Existem 5, e somente 5, grafos platônicos distintos do grafo nulo e dos grafos cíclicos.

#### Demonstração:

Seja  $G$  um grafo regular de grau  $r$ , onde cada face tem grau  $n$ .

Considere  $E(G)$  como o número total de arestas de  $G$ ,  $N(G)$  como a soma dos graus de todas as faces de  $G$ ,  $F(G)$  como o número total de faces de  $G$ , e  $V(G)$  como o total de vértices de  $G$ . Sendo  $r, n, E(G), N(G), F(G)$  e  $V(G) \in \mathbb{Z}$ , temos então que:

$$N(G) = 2 \cdot E(G) = r \cdot V(G) \Rightarrow \quad (4.1)$$

$$\Rightarrow E(G) = r \cdot \frac{V(G)}{2} \quad \text{e} \quad F(G) = \frac{N(G)}{n} = 2 \cdot \frac{E(G)}{n}. \quad (4.2)$$

Aplicando as afirmações acima na Fórmula de Euler, temos:

$$V(G) - E(G) + F(G) = 2 \Rightarrow \quad (4.3)$$

$$\Rightarrow V(G) - r \cdot \frac{V(G)}{2} + 2 \cdot \frac{E(G)}{n} = 2 \Rightarrow V(G) - r \cdot \frac{V(G)}{2} + r \cdot \frac{V(G)}{n} = 2 \Rightarrow \quad (4.4)$$

$$\Rightarrow V(G) \cdot \left(1 - \frac{r}{2} + \frac{r}{n}\right) = 2 \Rightarrow V(G) \cdot (2n - rn + 2r) = 4n \Rightarrow \quad (4.5)$$

$$\Rightarrow 2n - rn + 2r > 0 \Rightarrow -2n + rn - 2r + 4 < 4 \Rightarrow \quad (4.6)$$

$$\Rightarrow (n - 2)(r - 2) < 4 \Rightarrow r < \frac{4}{n-2} + 2 \quad (4.7)$$

Como  $r > 2$ , temos então que:

$$\Rightarrow n - 2 < 4 \Rightarrow n < 6. \quad (4.8)$$

Como o grafo  $G$  não é nulo, temos que  $r > 0$  e  $E(G) > 1$ . E como  $G$  também não é cíclico, temos que  $r > 2$  e  $n > 2$ .

A partir dessas informações e do resultado obtido acima, temos que:  $2 < n < 6$ . Portanto, os possíveis valores para  $n$  são: 3, 4 e 5. Analisaremos cada caso, fazendo uso da desigualdade  $r < \frac{4}{n-2} + 2$ , que fora obtida acima.

Para  $n = 3 \Rightarrow r < \frac{4}{3-2} + 2 \Rightarrow r < 4 + 2 = 6 \Rightarrow r < 6$ . Mas, como sabemos também que  $r > 2$ , concluímos que: **para  $n = 3$ , temos  $r = 3$ , ou  $r = 4$ , ou  $r = 5$ .**

Para  $n = 4 \Rightarrow r < \frac{4}{4-2} + 2 \Rightarrow r < 2 + 2 = 4 \Rightarrow r < 4$ . Mas, como sabemos também que  $r > 2$ , concluímos que: **para  $n = 4$ , temos  $r = 3$** .

Para  $n = 5 \Rightarrow r < \frac{4}{5-2} + 2 \Rightarrow r < \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3} \cong 3,3 \Rightarrow r < 3,3$ . Mas, como sabemos também que  $r > 2$ , concluímos que: **para  $n = 5$ , temos  $r = 3$** .

Portanto, além do grafo nulo e dos grafos cíclicos, existem apenas 5 *Grafos Platônicos*, que são aqueles caracterizados pelos valores obtidos acima para  $r$  e  $n$ .  $\square$

Das igualdades (4.2) temos que:

$$F(G) = 2 \cdot \frac{E(G)}{n} = \frac{2}{n} \cdot \frac{r \cdot V(G)}{2} = r \cdot \frac{V(G)}{n}. \quad (4.9)$$

E em (4.5), temos:

$$V(G) \cdot (2n - rn + 2r) = 4n \Rightarrow V(G) = \frac{4n}{2n - rn + 2r}. \quad (4.10)$$

Aplicando o resultado (4.9) na igualdade (4.8), obtemos uma expressão para  $F(G)$  em função de  $n$  e  $r$ , o que nos permitirá encontrar o número de faces de cada um dos 5 Grafos Platônicos encontrados acima. Da mesma forma, a expressão (4.9) nos permitirá encontrar o número de vértices de tais grafos. E, uma vez obtidos os números de faces e vértices de tais poliedros, aplicamos a Fórmula de Euler, e obtemos seus respectivos números de arestas.

Observe cada um desses passos abaixo:

$$F(G) = r \cdot \frac{V(G)}{n} = \frac{r}{n} \cdot \frac{4n}{2n - rn + 2r}. \quad (4.11)$$

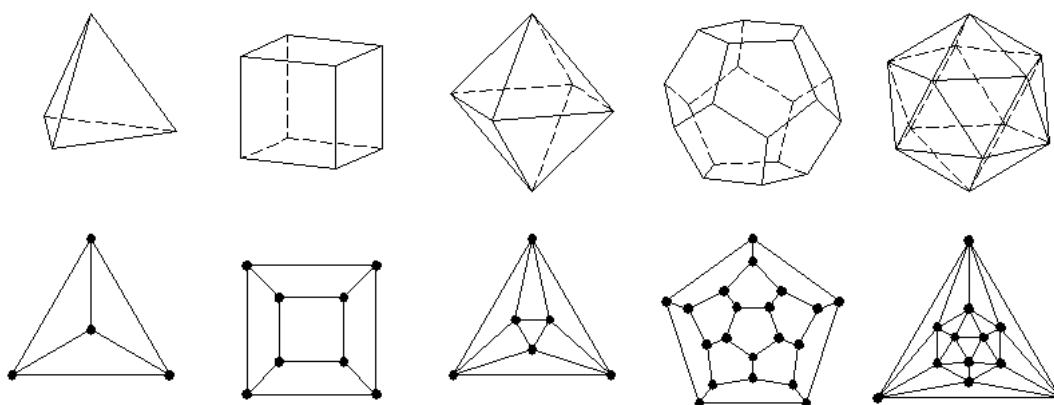
Com os resultados obtidos, construímos a tabela abaixo:

$n$	$r$	$V(G) = \frac{4n}{2n - rn + 2r}$	$F(G) = r \cdot \frac{V(G)}{n}$	$E(G) = F(G) + V(G) - 2$
3	3	4	4	6
3	4	8	6	12
3	5	20	12	30

4	3	6	8	12
5	3	12	20	30

Tabela 4.1

Diante dos resultados, vemos que esses dados descrevem exatamente os grafos associados aos Poliedros Regulares (Tetraedro, Hexaedro, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro), como podemos observar na Figura 4.1 abaixo.



Poliedros de Platão e os Grafos Platônicos associados - Figura 4.1

### 4.3 Planificação dos Poliedros Regulares

Planificar um poliedro consiste em colocar todas as suas faces sobre um plano, sem que haja alteração de suas medidas e formas. As planificações dos cinco Poliedros Regulares também são representações de grafos planares conexos, como podemos observar abaixo. Logo, a Fórmula de Euler também se aplica a cada um deles.

Note que a planificação de um Poliedro Regular e o Grafo Platônico associado a este mesmo Poliedro Regular são grafos distintos, com números de vértices, de arestas e de faces distintos, como podemos ver comparando-os na Tabela 4.2 abaixo:

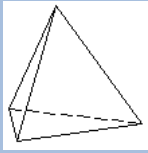
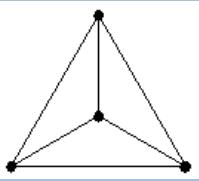
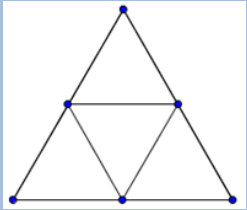
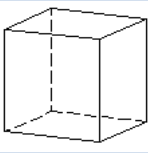
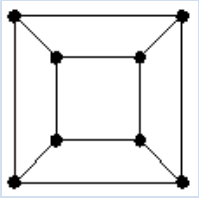
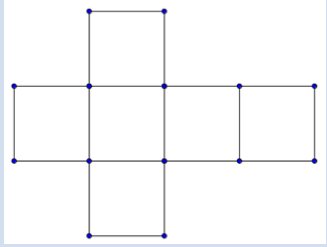
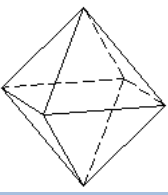
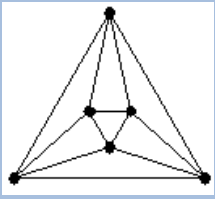
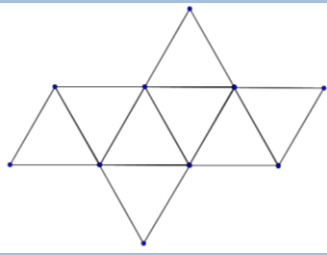
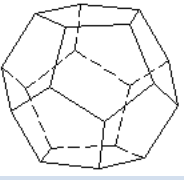
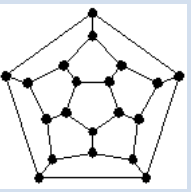
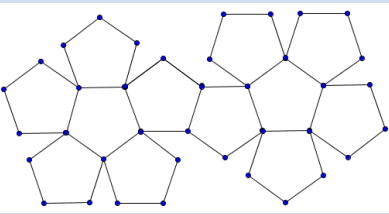
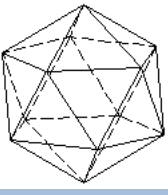
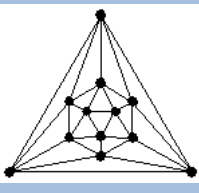
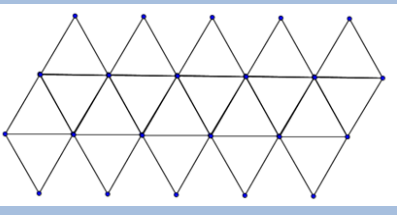
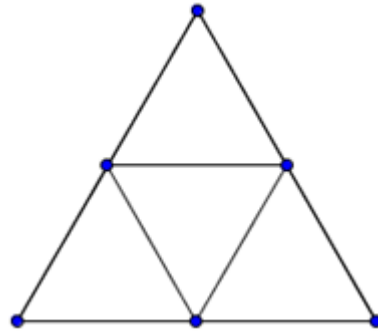
Poliedro	Grafo Platônico	Planificação
 <p data-bbox="432 477 549 510"><b>Tetraedro</b></p>		
 <p data-bbox="432 741 549 775"><b>Hexaedro</b></p>		
 <p data-bbox="432 1048 549 1081"><b>Octaedro</b></p>		
 <p data-bbox="424 1335 560 1368"><b>Dodecaedro</b></p>		
 <p data-bbox="432 1608 549 1641"><b>Icosaedro</b></p>		

Tabela 4.2

### 4.3.1 Planificação do Tetraedro

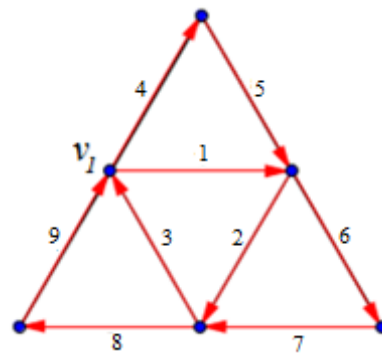


Planificação do Tetraedro Regular – Figura 4.2

O grafo associado à planificação do tetraedro regular, como podemos observar na figura acima, nosso grafo possui 6 vértices, 5 faces e 9 arestas. Logo, aplicando a Fórmula de Euler, temos:

$$v + f - e = 6 + 5 - 9 = 2.$$

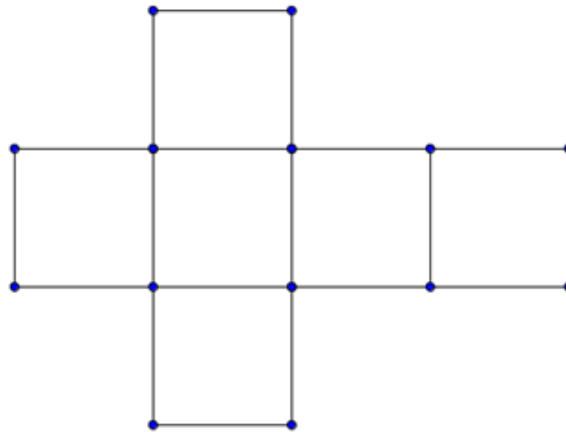
Podemos observar que todos os vértices do nosso grafo possui grau par, logo, pelo **Teorema 2.1**, trata-se de um Grafo Euleriano. Portanto, ele possui um ciclo que contém todas as suas arestas, um Ciclo Euleriano, como podemos ver na Figura 4.3, abaixo.



Ciclo Euleriano no Tetraedro Regular - Figura 4.3

O Ciclo tem início no vértice  $v_1$ , e percorre todas as arestas de acordo com a numeração, até voltar ao vértice inicial.

### 4.3.2 Planificação do Hexaedro

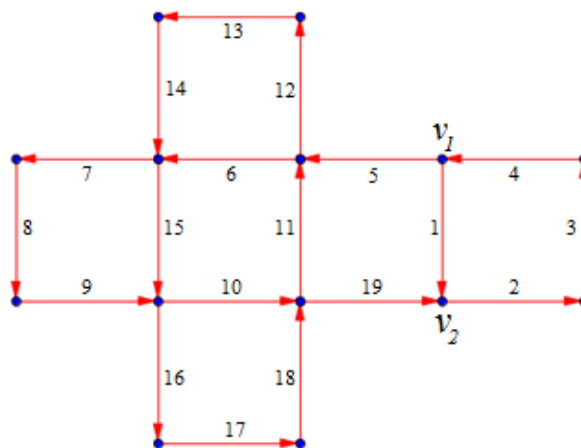


Planificação do Hexaedro Regular – Figura 4.4

O grafo associado à planificação do hexaedro regular, como podemos observar na figura acima, nosso grafo possui 14 vértices, 7 faces e 19 arestas. Logo, aplicando a Fórmula de Euler, temos:

$$v + f - e = 14 + 7 - 19 = 2.$$

Podemos observar que nosso grafo possui apenas dois vértices com grau ímpar, logo, pelo **Teorema 2.2**, é possível encontrar um Trilho Euleriano nele, como podemos ver na Figura 4.5, abaixo.

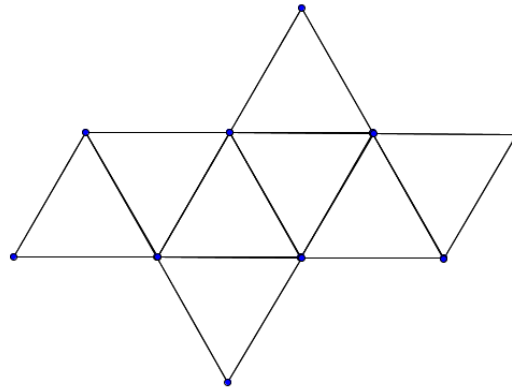


Trilho Euleriano no Hexaedro Regular – Figura 4.5

O Trilho tem início no vértice  $v_1$ , percorre todas as arestas de acordo com a numeração, e termina no vértice  $v_2$ , sendo  $v_1$  e  $v_2$  os dois vértices com grau ímpar.



### 4.3.3 Planificação do Octaedro



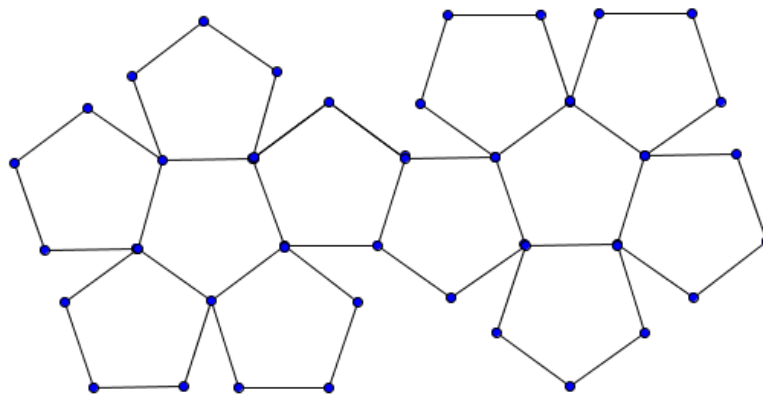
Planificação do Octaedro Regular – Figura 4.6

O grafo associado à planificação do octaedro regular, como podemos observar na figura acima, nosso grafo possui 10 vértices, 9 faces e 17 arestas. Logo, aplicando a Fórmula de Euler, temos:

$$v + f - e = 10 + 9 - 17 = 2.$$

Podemos observar que nosso grafo possui mais de dois vértices com grau ímpar, logo, pelo **Teorema 2.2**, não é possível encontrar um Trilho Euleriano nele.

### 4.3.4 Planificação do Dodecaedro

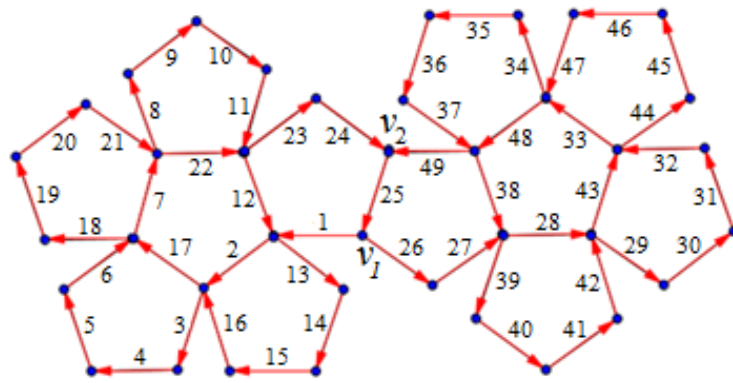


Planificação do Dodecaedro Regular – Figura 4.7

O grafo associado à planificação do dodecaedro regular, como podemos observar na figura acima, nosso grafo possui 38 vértices, 13 faces e 49 arestas. Logo, aplicando a Fórmula de Euler, temos:

$$v + f - e = 38 + 13 - 49 = 2.$$

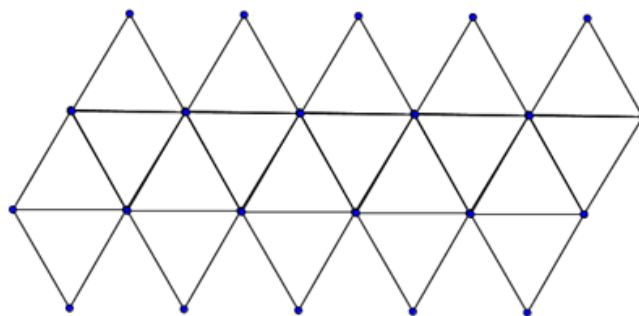
Podemos observar que nosso grafo possui apenas dois vértices com grau ímpar, logo, pelo **Teorema 2.2**, é possível encontrar um Trilho Euleriano nele, como podemos ver na Figura 4.8, abaixo.



Trilho Euleriano no Dodecaedro Regular – Figura 4.8

O Trilho tem início no vértice  $v_1$ , percorre todas as arestas de acordo com a numeração, e termina no vértice  $v_2$ , sendo  $v_1$  e  $v_2$  os dois vértices com grau ímpar.

### 4.3.5 Planificação do Icosaedro

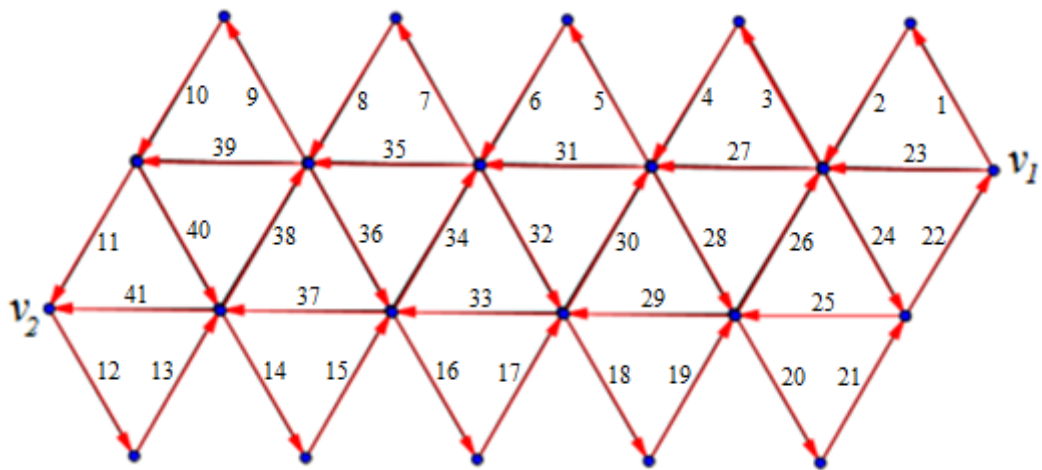


Planificação do Icosaedro Regular – Figura 4.9

O grafo associado à planificação do icosaedro regular, como podemos observar na figura acima, nosso grafo possui 22 vértices, 21 faces e 41 arestas. Logo, aplicando a Fórmula de Euler, temos:

$$v + f - e = 22 + 21 - 41 = 2.$$

Podemos observar que nosso grafo possui apenas dois vértices com grau ímpar, logo, pelo **Teorema 2.2**, é possível encontrar um Trilho Euleriano nele, como podemos ver na Figura 4.10, abaixo.



Trilho Euleriano no Icosaedro Regular – Figura 4.10

O Trilho tem início no vértice  $v_1$ , percorre todas as arestas de acordo com a numeração, e termina no vértice  $v_2$ , sendo  $v_1$  e  $v_2$  os dois vértices com grau ímpar.

Pudemos ver então que os grafos associados às planificações dos poliedros regulares podem ser usados como uma ferramenta para uma melhor fixação dos conceitos iniciais da teoria dos grafos.

## Capítulo 5

### Planaridade

No Capítulo 4 pudemos ver que um grafo é dito *Planar* quando é isomorfo a um grafo que tenha sido traçado em um plano sem cruzamento de arestas. Ou, em outras palavras, um grafo é Planar se ele puder ser desenhado no plano de tal forma que suas arestas só se encontrem nos vértices. Neste capítulo iremos estudar um pouco mais sobre esses grafos.

**Proposição 5.1:** Se  $G$  é um grafo conexo planar simples, com  $n \geq 3$  vértices e  $m$  arestas, então  $m \leq 3n - 6$ .

**Demonstração:** Note que, por se tratar de um grafo simples, ele não admite arestas cujos dois extremos sejam o mesmo vértice, e, portanto, cada face está limitada por, pelo menos, 3 arestas. E, além disso, cada aresta serve de limite para 2 regiões. Logo, sendo  $f$  o número de faces, temos que:

$$2m \geq 3f \Rightarrow f \leq \frac{2}{3}m \quad (5.1)$$

Aplicando a desigualdade (5.1) na Fórmula de Euler, temos que:

$$\begin{aligned} n - m + f = 2 &\Rightarrow f = 2 + m - n \Rightarrow 2 + m - n \leq \frac{2}{3}m \Rightarrow \\ &\Rightarrow 6 + 3m - 3n \leq 2m \Rightarrow m \leq 3n - 6, \end{aligned} \quad (5.2)$$

como queríamos demonstrar.  $\square$

**Proposição 5.2:** Se  $G$  é um grafo conexo planar simples, então  $G$  contém um vértice de grau no máximo 5, e portanto  $r(G) \leq 5$ .

**Demonstração:** Considere o grafo  $G$  com  $n$  vértices e  $m$  arestas. Como  $r(v) \leq n - 1$ , se  $n \leq 6$ , o resultado da proposição acima é imediato. Portanto, provaremos o caso em que  $n > 6$ .

Se o grau de todos os vértices de  $G$  é no mínimo 6, temos que:

$$\sum_{v \in V(G)} r(v) \geq 6n.$$

Como o grau de um vértice, por definição, é o número de arestas que incidem neste vértice, e cada aresta tem extremidades em dois vértices, temos que:

$$\sum_{v \in V(G)} r(v) = 2m.$$

Como consequência das expressões acima, temos:  $2m \geq 6n \Rightarrow m \geq 3n$ . Mas, pela Proposição 5.1,  $m \leq 3n - 6$ . Temos então:  $m \leq 3n - 6$  e  $m \geq 3n$ , o que é uma contradição. E, portanto,  $n \leq 6 \Rightarrow r(v) \leq n - 1 \leq 6 - 1 = 5 \Rightarrow r(v) \leq 5$ , como queríamos mostrar.  $\square$

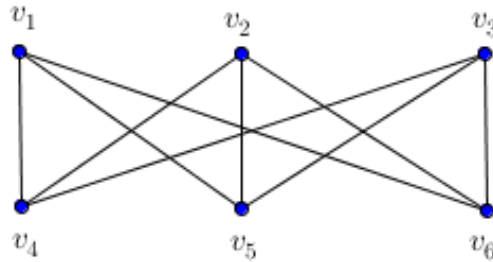
## 5.1 Grafo Bipartido

Chamamos de *Grafo Bipartido* ao grafo  $G$  em que o conjunto dos seus vértices admite uma partição  $\{V_1, V_2\}$  de tal maneira que toda aresta de  $G$  une um vértice de  $V_1$  a um vértice de  $V_2$ .

Um grafo bipartido  $G$ , com os conjuntos partição  $V_1$  e  $V_2$ , é chamado *Grafo Bipartido Completo* se todas as possíveis conexões de vértices de  $V_1$  com vértices de  $V_2$  pertencem ao conjunto  $A$ , definido da seguinte forma:

$$A = \{v_1 v_2 \mid v_1 \in V_1 \text{ e } v_2 \in V_2\}.$$

Denotamos esse tipo de grafo por  $K_{|V_1|,|V_2|}$ , onde  $| |$  denota a cardinalidade desses conjuntos.



Grafo Bipartido Completo – Figura 5.1

Por exemplo, o grafo bipartido da *Figura 5.1* é um *Grafo Bipartido Completo*, com  $|V_1| = |V_2| = 3$ , ou seja, é um grafo do tipo:  $K_{3,3}$ .

Uma ótima maneira de iniciar o estudo do grafo  $K_{3,3}$  é motivando a busca por uma solução para o Problema Água, Luz e Telefone, que consiste no seguinte:

**Problema Água, Luz e Telefone:** Numa rua há 3 casas, onde se deseja instalar as redes de água, esgoto e a rede elétrica, conforme ilustra a *Figura 5.2* abaixo. Pergunta: é possível fazer essas instalação sem que haja cruzamento entre essas reder? Comentaremos a solução deste problema mais adiante.

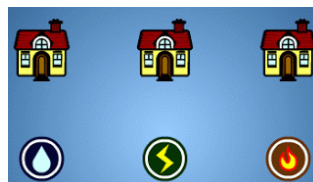


Figura 5.2

**Teorema 5.1:** O grafo  $K_{3,3}$  é não planar.

**Demonstração:** Vamos supor, por absurdo, que o grafo  $K_{3,3}$  seja um grafo planar. Sendo  $n$  o seu número de vértices e  $m$  o seu número de arestas, temos que  $n(K_{3,3}) = 6$  e  $m(K_{3,3}) = 9$ .

Sendo  $K_{3,3}$  um grafo conexo, podemos aplicar a Fórmula de Euler, e encontramos para  $f$  o valor:  $f = 5$ .

Como cada aresta do nosso grafo fará fronteira com no mínimo duas faces, temos que, ao somar os graus de todas as faces, cada aresta será contada no mínimo duas vezes, logo:

$$\sum_F r(F) \leq 2m = 18.$$

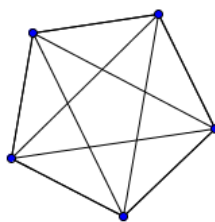
Como não há triângulos em grafos bipartidos, uma vez que um triângulo possui três vértices, e dois deles devem estar em um mesmo conjunto partição de  $G$ , então cada face de  $K_{3,3}$  tem no mínimo 4 arestas, e assim:

$$\sum_F r(F) \geq 4f = 20.$$

Portanto, temos:  $\sum_F r(F) \leq 18$  e  $\sum_F r(F) \geq 20$ , o que é um absurdo. Logo,  $K_{3,3}$  não é planar, como queríamos demonstrar.  $\square$

**Solução do Problema Água, Luz e Telefone:** Como o grafo  $K_{3,3}$  é uma ilustração do nosso problema, e vimos que ele é não planar, então, não é possível fazer as conexões desejadas no problemas sem que haja cruzamento de arestas.

**Teorema 5.2:** O grafo  $K_5$  é não planar.



Grafo  $K_5$  – Figura 5.3

**Demonstração:** Como podemos ver na Figura 5.3 acima, o grafo  $K_5$  possui  $n = 5$  vértices e  $m = 10$  arestas. Logo, temos que:

$$m \leq 3n - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9 < 10 = m.$$

Portanto, pela Proposição 5.1,  $K_5$  não é planar.  $\square$

**Teorema 5.3:** Todo subgrafo de um grafo planar é planar.

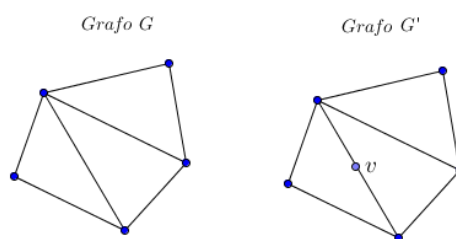
**Demonstração:** Seja  $G$  uma representação de um grafo planar qualquer, sem cruzamento de arestas. Por definição, todo subgrafo  $G'$  de  $G$  é obtido pela retirada de vértices e arestas de  $G$ . Mas, uma vez que  $G$  não possui cruzamento de arestas, ao remover algumas de suas arestas nós continuamos sem cruzamentos. Portanto, nosso novo grafo  $G'$  continuará sendo um grafo planar.  $\square$

**Proposição 5.3:** Todo supergrafo de um grafo não planar é não planar.

**Demonstração:** Seja  $G$  um grafo não planar, e seja  $H$  um supergrafo de  $G$ . Se  $H$  fosse um grafo planar,  $G$  também o seria como vimos no Teorema 5.3. Logo, sendo  $H$  não planar,  $G$  também é não planar.  $\square$

## 5.2 Grafos Homeomorfos

A adição de um vértice de grau 2 a uma aresta de um grafo  $G$  é chamada de *Expansão do Grafo  $G$* , ou *Subdivisão* de  $G$ . Na Figura 5.4 abaixo vemos que o grafo  $G'$  é uma expansão do grafo  $G$ , obtida pela adição do vértice  $v$ .



Expansão de um Grafo – Figura 5.4



Dizemos que um grafo  $G'$  é *homeomorfo* a um grafo  $G$  se  $G'$  puder ser obtido de  $G$  pela inserção de vértices em suas arestas. Ou seja, se  $G'$  for uma expansão de  $G$ .

**Teorema 5.4:** Toda expansão de  $K_{3,3}$  ou de  $K_5$  é não planar.

**Demonstração:** Considere o grafo  $G$  como uma expansão de  $K_{3,3}$  ou de  $K_5$ . Suponha, por contradição, que  $G$  seja planar. Logo, é possível representar  $G$  no plano sem cruzamento de arestas. O processo de retirarmos os vértices que foram adicionados ao  $K_{3,3}$  ou  $K_5$  para obtermos  $G$  não cria cruzamento de arestas. Portanto, se fizermos isso em  $G$ , teremos como resultando ainda um grafo plano. Mas, esse resultado na verdade é o nosso  $K_{3,3}$  ou  $K_5$  inicial, que não são planos, segundo os Teoremas 5.1 e 5.2. Temos então uma contradição. E, portanto, toda expansão de  $K_{3,3}$  ou de  $K_5$  é não planar.  $\square$

### 5.3 Teorema de Kuratowski

Todo grafo não planar tem um subgrafo homeomorfo ao grafo  $K_{3,3}$  ou ao  $K_5$ . (Uma demonstração desse teorema pode ser encontrada em [7])

## Capítulo 6

### Sequência Didática

Neste capítulo apresentamos uma proposta de sequência didática que pode ser utilizada para introduzir o conceito de grafo a alunos no ensino básico.

### Grafos, Poliedros Regulares e a Fórmula de Euler

O estudo dos *Grafos*, que é bastante explorado no ensino superior, além de ser bastante utilizado em outras áreas do conhecimento, como em redes de telecomunicação, desenvolvimento do fluxo de transportes, entre outros, também pode ser bastante explorado na matemática do ensino básico.

Embora não se veja a menção do termo *Grafo* nos livros didáticos do ensino básico, não é difícil encontrarmos situações problemas que podem ser claramente representadas por meio de grafos.

Acreditando que a abordagem deste tema pode contribuir para o desenvolvimento de habilidades e do raciocínio lógico dos estudantes, apresentamos a seguir uma proposta de sequência didática para a Introdução do Conceito de Grafos, a apresentação dos Poliedros Regulares, e a relação destes com a Fórmula de Euler, fazendo uso de material concreto, software matemático e vídeos introdutórios.

### Objetivo Geral:

Disponibilizar aos profissionais do ensino de matemática uma sequência didática que possa servir de apoio à introdução do estudo de grafos no ensino básico, tendo como foco também os Poliedros Regulares e a Fórmula de Euler.

## **Objetivos Específicos:**

- ✓ Introduzir conceitos elementares da Teoria dos Grafos através dos vídeos e das atividades propostas;
- ✓ Construir a noção intuitiva da relação existente entre os conceitos presentes na Teoria dos Grafos e diversas situações que nos deparamos no dia a dia, tendo o grafo como um recurso facilitador na exposição de situações;
- ✓ Introduzir o conceito de Poliedros Regulares, fazendo a relação de suas respectivas planificações com os grafos e suas propriedades;
- ✓ Apresentação da Fórmula de Euler e aplicação desta nas Planificações dos Poliedros Regulares e nos Grafos Platônicos.

## **Conteúdo**

- ✓ Introdução à Teoria dos Grafos;
- ✓ Poliedros Regulares;
- ✓ Fórmula de Euler;
- ✓ Resolução de Problemas.

## **Metodologia**

As aulas serão desenvolvidas por meio de apresentação de vídeos introdutórios, debates em grupos, resolução de atividades propostas, e manipulação de software matemático.

## **Avaliação**

A avaliação poderá ser feita de modo contínuo em todo o processo, por meio da observação da participação efetiva dos alunos em cada atividade proposta.

## Aula 1 (Duração de 2horas/aula)

### Um Pouco de História: Pontes de Königsberg

#### 1º. Apresentação do Vídeo: Pontes de Königsberg

(Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=RdN1JwTaUos>).

Descrição: O vídeo conta a história do Problema das Pontes de Königsberg, e descreve como Euler criou um diagrama para representar esse problema. A seguir, ele fala das soluções intermediárias encontradas por Euler, a partir da retirada ou da inclusão de novas pontes, e descreve algumas conclusões encontradas por Euler a partir de suas observações nesse processo de busca de soluções. O vídeo tem duração de 2 min 17 seg.

#### 2º. Discussão sobre o que os alunos aprenderam com o vídeo. Sugestão de perguntas para direcionar a discussão:

- a) Quem pode descrever qual era o problema das Pontes de Königsberg?
- b) O problema tinha solução?
- c) Qual estratégia Euler usou para encontrar soluções intermediárias?

#### 3º. Dividir a turma em pequenas equipes, e pedir que cada equipe resolva as questões do Anexo 1.

#### 4º. Pedir que os representantes de cada equipe apresentem as soluções e conclusões do seu grupo a toda a turma.

#### 5º. O professor encerra a aula fazendo seus comentários e correções (se for necessário) a respeito das soluções e conclusões de cada equipe.

## Aula 2 (Duração de 2horas/aula)

### **Grafos, seus Elementos e algumas de suas Aplicações**

- 1°. Fazer uma breve revisão oral do que fora visto na aula anterior.
  
- 2°. Apresentação do Vídeo: O que são grafos e algumas de suas aplicações  
(Disponível em: [https://www.youtube.com/watch?v=b\\_Pye\\_Saueo](https://www.youtube.com/watch?v=b_Pye_Saueo)).
  
- Descrição: O vídeo traz a definição de grafo através de duas situações do dia a dia onde os grafos estão presentes: na engenharia de trânsito e nas relações entre os personagens de uma novela. Também traz a ideia intuitiva de aresta e de grau de um vértice, além de definir, de maneira simples e direta, o que é um grafo completo. O vídeo tem duração de 10 min 8 seg.
  
- 3°. Discussão sobre o que os alunos aprenderam com o vídeo. Sugestões de perguntas para direcionar a discussão:
  - a) Quem pode descrever o que são grafos?
  - b) Eles estão presentes no nosso dia a dia. Cite uma situação do dia a dia que pode ser representada por meio de um grafo (distinta das situações vistas no vídeo).
  - c) Alguém lembra o que é um grafo completo?
  
- 4°. Descrever o que são: arestas, vértices, faces (regiões) e grau de um vértice.
  
- 5°. Dividir a turma em pequenas equipes, e pedir que cada equipe resolva as questões do Anexo 2.
  
- 6°. Pedir que os representantes de cada equipe apresentem as soluções e conclusões do seu grupo a toda a turma.
  
- 7°. O professor encerra a aula fazendo seus comentários e correções (se for necessário) a respeito das soluções e conclusões de cada equipe.

### **Aula 3 (Duração de 2horas/aula)**

#### **Os Poliedros Regulares e a Fórmula de Euler**

- 1°. Fazer uma breve revisão oral do que fora visto na aula anterior.
  
- 2°. Apresentação do Vídeo: Poliedros Regulares  
(Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=A3F3sqFxFjk>).
  
- Descrição: O vídeo apresenta os 5 Poliedros Regulares, e mostra inúmeras situações do nosso dia a dia onde eles estão presentes. O vídeo tem duração de 3 min 42 seg.
  
- 3°. Discussão sobre o que os alunos aprenderam com o vídeo. Sugestões de perguntas para direcionar a discussão:
  - a) Quantos tipos de poliedros apareceram no vídeo?
  - b) Alguém lembra o nome deles?
  - c) Além dos exemplos vistos no vídeo, quem lembra outras situações do dia a dia onde estes poliedros aparecem?
  
- 4°. Descrever para os alunos o que são Poliedros Regulares.
  
- 5°. Apresentar para os alunos a Fórmula de Euler, e pedir que eles verifiquem a aplicação desta fórmula em cada um dos 5 poliedros (Atividade do Anexo 3).
  
- 6°. Pedir que os representantes de cada equipe apresentem as soluções e conclusões do seu grupo a toda a turma.
  
- 7°. O professor encerra a aula fazendo seus comentários e correções (se for necessário) a respeito das soluções e conclusões de cada equipe.

<b>Aula 4 (Duração de 2horas/aula)</b>
--

### **Grafos e a Planificação dos Poliedros Regulares**

- 1°. Fazer uma breve revisão oral do que fora visto na aula anterior.
- 2°. Explicar aos alunos os conceitos de: Caminho, Caminho Fechado (Ciclo) e Trilho Euleriano.
- 3°. Entregar aos alunos as planificações dos Poliedros Regulares (Anexo 4), e pedir que eles tentem descobrir se há ciclos ou trilhos euleriano em cada um deles.
- 4°. Pedir que os representantes de cada equipe apresentem as soluções e conclusões do seu grupo a toda a turma.
- 5°. O professor encerra a aula fazendo seus comentários e correções (se for necessário) a respeito das soluções e conclusões de cada equipe, chamando a atenção para a relação entre os ciclos e trilhos encontrados e o número de vértices com grau ímpar.

## **Aula 5 (Duração de 2horas/aula)**

### **Grafos Platônicos**

1. Fazer uma breve revisão oral do que fora visto na aula anterior.
2. Descrever para os alunos o que são Grafos Platônicos.
3. Utilizar o software Poly 1.12 (disponível em: <http://poly-mac.soft112.com/>) para apresentar aos alunos os Grafos Platônicos associados a cada Poliedro Regular, conforme as figuras do Anexo 5.
4. Deixar os alunos explorarem um pouco o software, e fazerem suas próprias descobertas.
5. A partir das conclusões da Aula 4, sem fazer o caminho sobre as arestas, cada equipe deverá dizer em quais dos Grafos Platônicos é possível encontrar um ciclo ou trilho euleriano.
6. Pedir que os representantes de cada equipe apresentem as soluções e conclusões do seu grupo a toda a turma.
7. O professor encerra a aula fazendo seus comentários e correções (se for necessário) a respeito das soluções e conclusões de cada equipe.



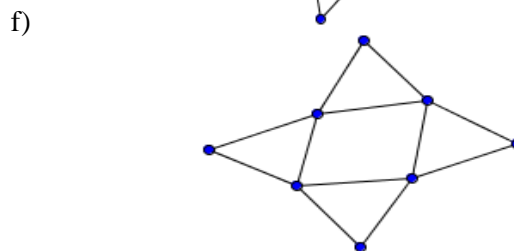
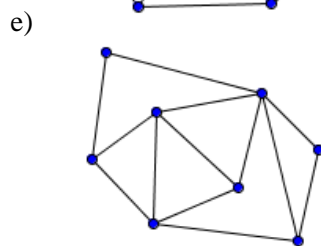
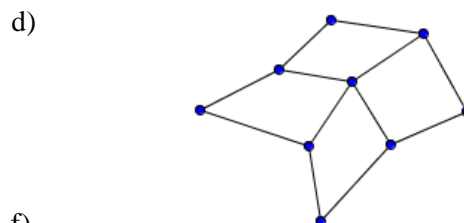
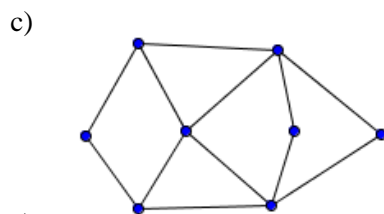
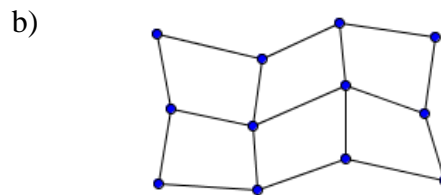
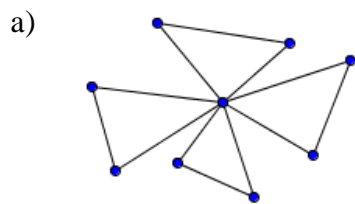
## Anexos

### Anexo 1 - Atividade Aula 1

#### Introdução ao Estudo dos Grafos

#### ATIVIDADE 1 - Pontes de Königsberg

1. Assim como Euler tentou fazer no problema das Pontes de Königsberg, verifique, em cada figura abaixo, se é possível encontrar um caminho por onde você irá percorrer todas as linhas da figura uma única vez, sem tirar o lápis do papel.



2. A partir dos resultados obtidos no ítem a, responda as questões abaixo:

- a) Nas figuras onde você encontrou o caminho que passa por todos os lados, o seu ponto de partida foi igual ao ponto de chegada? Você nota alguma semelhança entre os caminhos em que isso ocorreu? (Dica: Observe quantos lados se encontram em cada lado da figura.) E entre os caminhos onde isso não ocorreu, há algo em comum?
- b) Em quais figuras você não conseguiu trilhar um caminho que percorresse todos os lados? Há algo em comum entre essas figuras?

## Anexo 2 – Atividade Aula 2

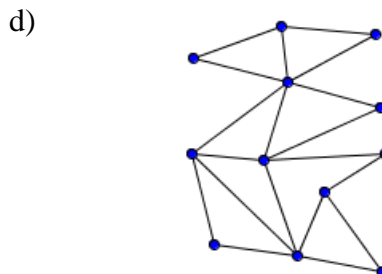
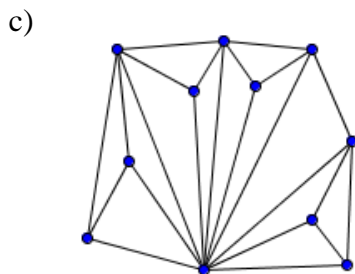
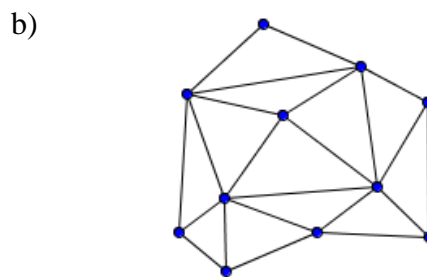
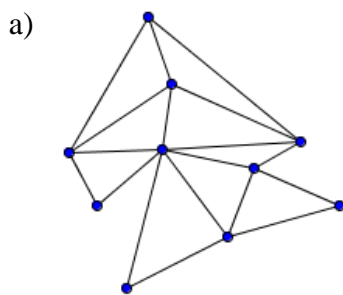
### Introdução ao Estudo dos Grafos

#### ATIVIDADE 2 - Grafos, seus elementos e algumas de suas aplicações

1. Construa um grafo que represente as seguintes relações:

José e Rute são pais de Joaquim, e Manoel e Estela são pais de Maria. Joaquim e Maria são casados, e pais de: Lucas, Miguel e Luiza. Luiza é casada com Pablo, e eles têm dois lindos filhos: Ana e Arthur. Ana é amiga de Bruna e de Camila, e Arthur é amigo de Marcos e de Cauã. Marcos e Cauã são irmãos, e Camila é amiga de Marcos.

2. Determine o número de arestas, vértices e faces dos grafos abaixo, e indique qual o vértice de maior grau, e o vértice de menor grau.

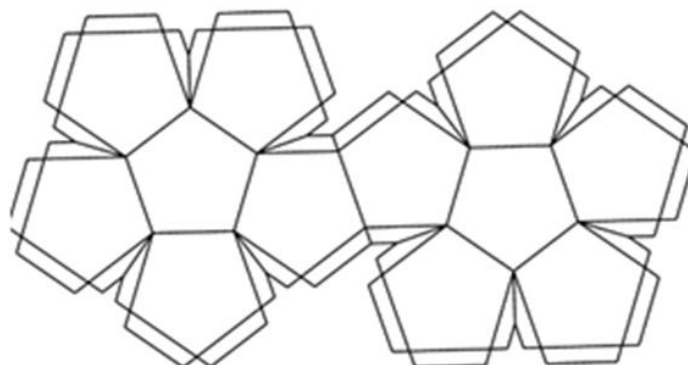
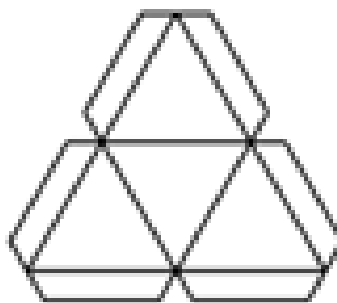


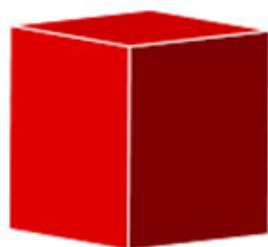
### Anexo 3 – Atividade Aula 3

#### Introdução ao Estudo dos Grafos

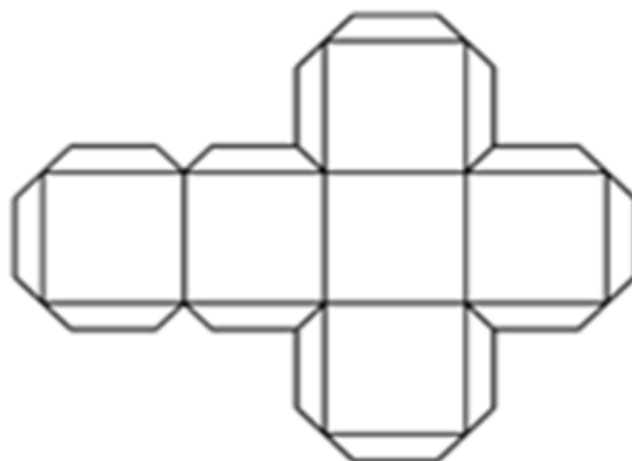
#### ATIVIDADE 3 – Os Poliedros Regulares e a Fórmula de Euler

1. Amplie, recorte e monte cada um dos 5 poliedros planificados abaixo, determine o número de vértices, arestas e faces de cada um, e veja se a Fórmula de Euler se aplica em cada um deles.

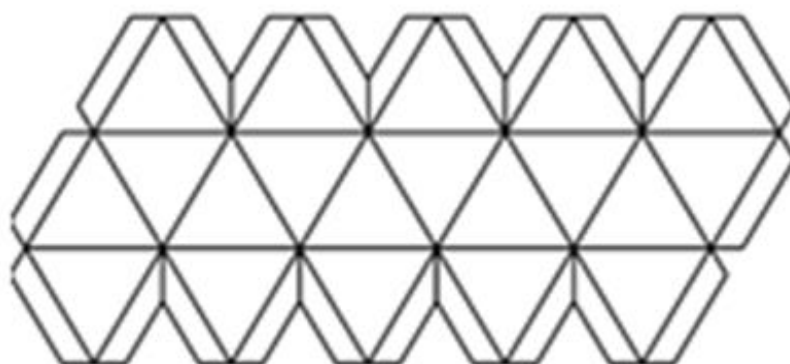




Cubo



Icosaedro



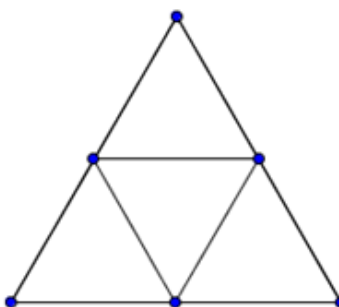
## Anexo 4 - Atividade Aula 4

### Introdução ao Estudo dos Grafos

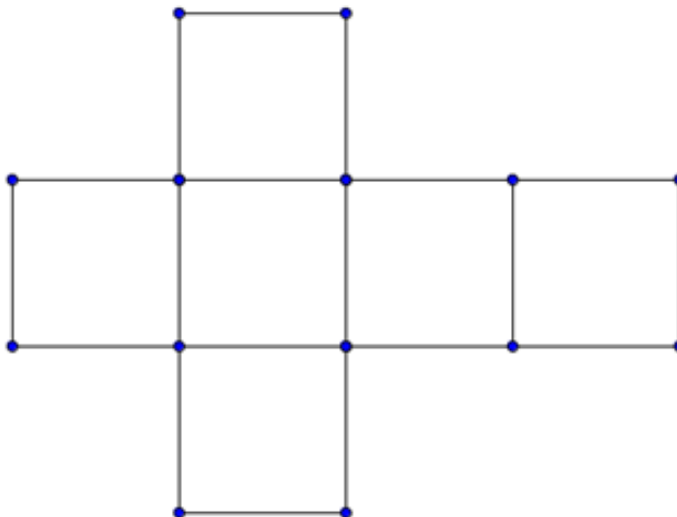
#### ATIVIDADE 4 – Grafos e a Planificação dos Poliedros Regulares

1. Os grafos abaixo foram construídos a partir das planificações dos poliedros regulares. Verifique em quais deles é possível encontrar ciclos ou trilhos euleriano.

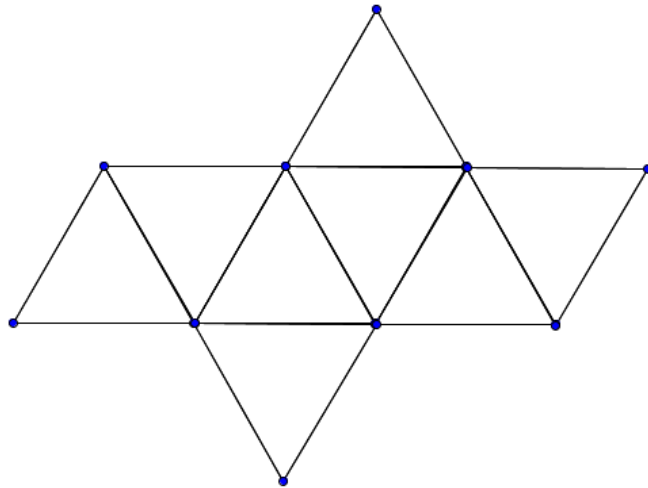
a) Tetraedro



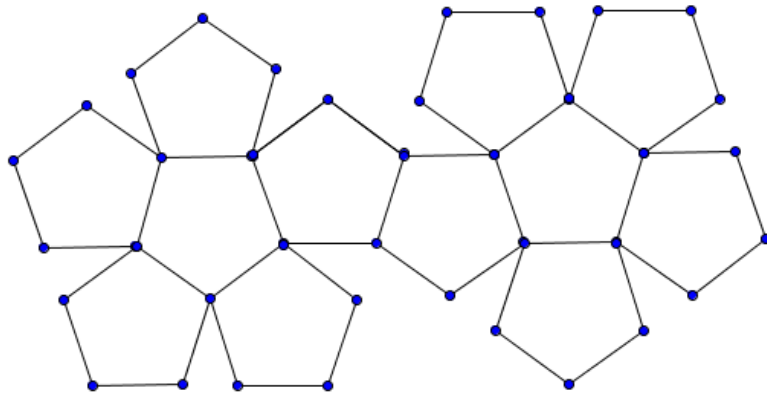
b) Hexaedro



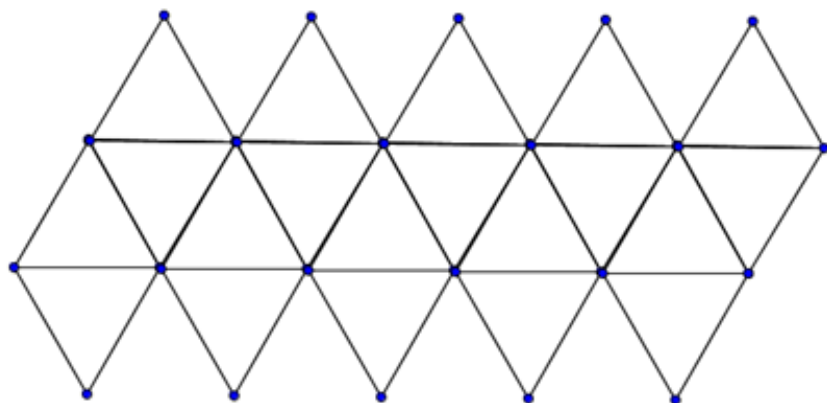
c) Octaedro



d) Dodecaedro



e) Icosaedro



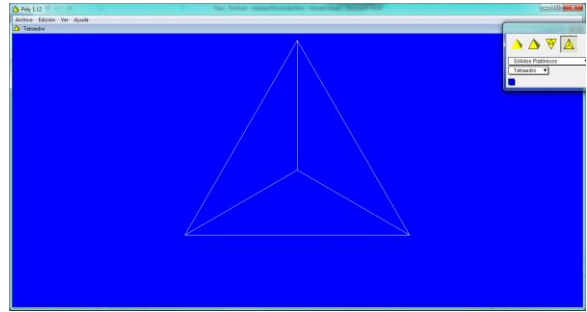
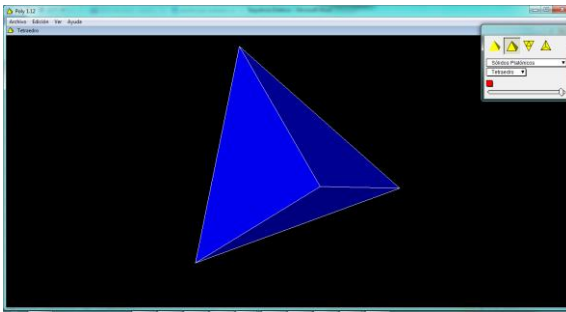
## Anexo 5 – Atividade Aula 5

### Introdução ao Estudo dos Grafos

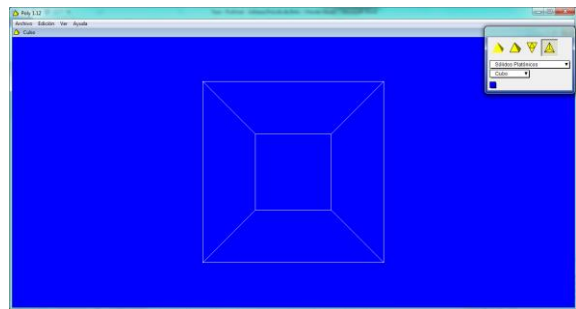
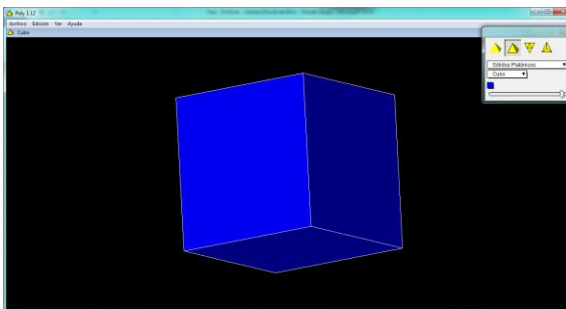
#### ATIVIDADE 5 – Grafos Platônicos

1. A partir das conclusões da aula anterior, sobre o que são ciclos e trilhos eulerianos, diga em quais dos grafos platônicos abaixo é possível encontrar um ciclo ou trilho euleriano, sem fazer o caminho sobre as arestas (ou seja, observando apenas o grau de cada vértice)

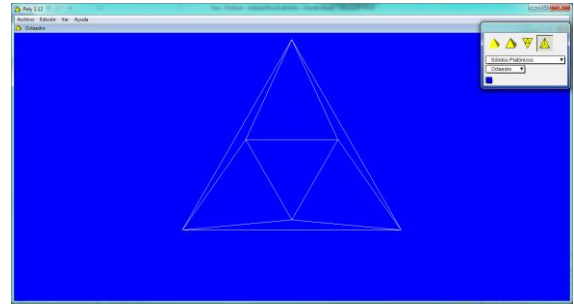
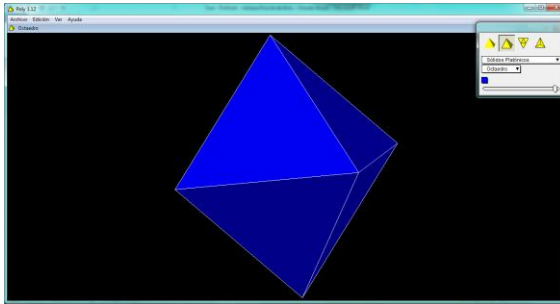
#### a) Grafo do Tetraedro



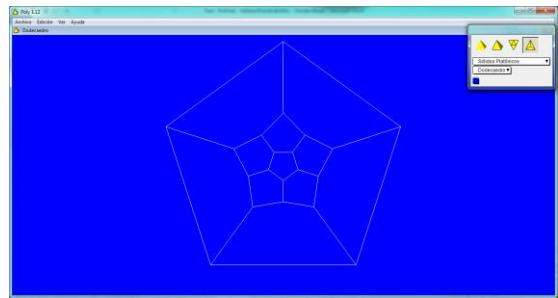
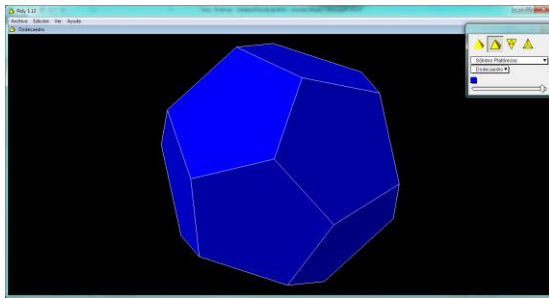
#### b) Grafo do Hexaedro (Cubo)



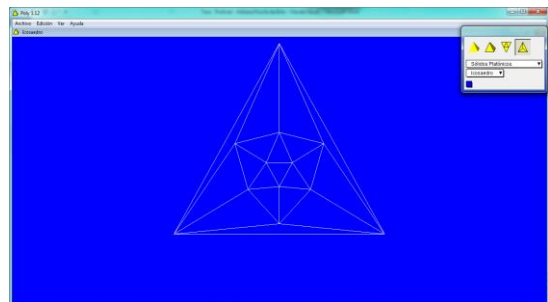
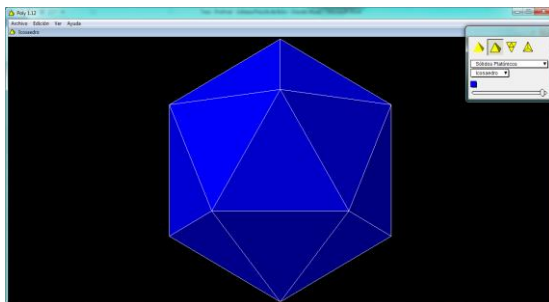
c) Grafo do Octaedro



d) Grafo do Dodecaedro



e) Grafo do Icosaedro





## Referências Bibliográficas

- [1] LUCCHESI, Cláudio Leonardo, Introdução a Teoria dos Grafos, IMPA, Rio de Janeiro.
- [2] FURTADO, Antônio Luz, Teoria dos grafos: algoritmos. Ed. da Universidade de São Paulo. São Paulo, 1973.
- [3] BOAVENTURA NETTO, Paulo, Teoria e Modelos de Grafos. Ed. Blücher. São Paulo, 1979.
- [4] SHINE, Carlos Yuzo, 21 Aulas de Matemática Olímpica, Coleção Olimpíadas de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2009.
- [5] LIMA, Elon Lages, CARVALHO, Paulo Cezar, WAGNER, Eduardo e MORGADO, Augusto César, A Matemática do Ensino Médio, Volume 2. Coleção do Professor de Matemática, SBM. Rio de Janeiro, 2006.
- [6] SANTOS, Wagner Ferreira, Teorema de geometrização para girassóis de grafos com valência mínima três, Dissertação de Mestrado, UFPE, 2008.
- [7] DIESTEL, Reinhard, Graph Theory. Mathematics Subject Classifications, 1991.
- [8] ORE, Oystein, Graphs and their uses, The Mathematical Association of America, 1990.
- [9] Teoria de Grafos, [http://www.mat.uc.pt/~mcag/FEA2003/Teoria\\_de\\_Grafos.doc](http://www.mat.uc.pt/~mcag/FEA2003/Teoria_de_Grafos.doc), Acessado em 22/07/2014, 16:47.
- [10] Teoria dos Grafos, <http://www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos/texto/TeoriaDosGrafos.pdf>, Acessado em 22/07/2014, 16:49.

[11] Introdução Teoria dos Grafos,

<http://brainstormdeti.wordpress.com/2010/07/26/introducao-teoria-dos-grafos-parte-1/>

Acessado em 22/07/2014, 16:53.

[12]

[http://www.uff.br/dalicensa/images/stories/caderno/volume6/GRAFOS\\_LIVROS\\_DIDATICOS\\_\\_E\\_\\_NOVOS\\_TEMPOS.pdf](http://www.uff.br/dalicensa/images/stories/caderno/volume6/GRAFOS_LIVROS_DIDATICOS__E__NOVOS_TEMPOS.pdf) . Acessado em 23/07/2014, 00:52.

[13] Uma Introdução à Teoria dos Grafos,

<http://www.gayatlacomulco.com/tutorials/matecomp/t31.htm>.

Acessado em 04/08/2014, 02:29.