UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

MESTRADO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

UMA PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DE MATERIAL MANIPULATIVO NO APRENDIZADO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL.

RICARDO ANTONIO FAUSTINO DA SILVA BRAZ

Orientadora: Professora Drª Josinalva Estacio Menezes

Recife - 2007.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

MESTRADO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação e Mestrado em Ensino das Ciências da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino das Ciências.

RICARDO ANTONIO FAUSTINO DA SILVA BRAZ

Orientadora: Prof. Drª Josinalva Estacio Menezes

Recife - 2007.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

MESTRADO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

UMA PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DE MATERIAL MANIPULATIVO NO APRENDIZADO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Banca Examinadora:

Presidente

1º Examinador: John Andrew Fossa

2º Examinador: Marcelo Câmara dos Santos

3º Examinador: Anna Paula Brito de Avelar Menezes

Recife, 2007.

Se deres um passo a frente,
Não estarás mais no mesmo Lugar.
Ricardo Braz.

Dedicatória

À minha esposa Maria Cleide Azevedo Braz amiga e companheira do dia-a-dia,rquivos de programas\Mc bem como compreensão na construção deste trabalho.

À minha Filha Raissa Azevedo Braz por me dar motivo para buscar o meu crescimento profissional e pessoal.

Aos Meus Pais: Antonio Faustino da Silva Braz e Lindalva Ventura Nunes Braz por não precisar dizer que sempre me amaram e confiaram em meu sucesso caminhando ao lado da minha orientadora.

Agradecimentos

- À Deus que, na sua infinita bondade, concedeu-me irquivos de programas\ Mc esse trabalho;

- À professora Josinalva, pela orientação e postura crítica que, ao longo desse ano, me ajudou a continuar como pesquisador, num compromisso incansável com a qualidade da pesquisa;

- Aos professores e alunos objetos de investigação, pela disponibilidade, paciência e compreensão para que esse trabalho fosse realizado;

- Aos colegas de turma desse mestrado, pelo apoio e solidariedade;

- A todos os alunos e alunas do colégio Liceu de Artes e Ofícios, que me acolheram, não só permitindo, mas, principalmente, facilitando o meu trabalho, especialmente ao colega de trabalho o Professor José Dílson Cavalcanti.

Resumo

Neste trabalho temos como objetivo geral investigar o uso de material manipulativo no aprendizado da função exponencial, como proposta. Como orientação teórica, temos as pesquisas da professora Josinalva Estacio Menezes, os trabalhos do professor John Andrew Fossa e ainda as contribuições dos trabalhos de Brousseau e Lima, que serviram como apoio ao indicarem suas propostas metodológicas para possíveis superações de uso do referido recurso na sala de aula, como também apontaram literaturas que poderão propiciar novas investigações para inserção desses recursos, em particular do material emborrachado, o EVA, e da torre de Hanói, como ferramenta de ensino na sala de aula no Ensino da Matemática. Como metodologia, adotamos uma abordagem qualitativa contendo análise de dados quanrquivos de programas\Micros po de pesquisa o Colégio Liceu de Artes e Ofícios e como sujeitos 36 alunos da primeira série do ensino médio. Observamos que os alunos reagiram positivamente diante de novos recursos didáticos como, o jogo Torre de Hanói, utilizado na pesquisa. Verificamos umrquivos de programas\Micr alunos no desempenho do pós-teste, após as atividades. Concluímos, através das intervenções, que o trabalho com uma seqüência de atividades articuladas com material manipulativo favorece a aprendizagem de conceitos matemáticos.

Palavras-chave: Função Exponencial, Material Manipulativo, Seqüência de Atividades, Aprendizagem.

Abstract

In this work we have as general objective to investigate the use of manipulative material in the learning of the exponential function. As theoretical orientation we have the Professor Josinalva Estacio Menezes' researches, The Professor John Andrew Fossa's works and still of the theoretic contributions of Brousseau and Lima, that had served as support for taste methodological proposals for possible over comings about related resource in the classroom, as well as had pointed literatures that they will be able to propitiate new inquiries for insertion of these resources, in particular a type of rubberized material denominated EVA and the tower of Hanói, as tool in the classroom in Mathematics Teaching. As methodology, we adopt a qualitative boarding, contending analysis of quantitative data, For the research, we took as universe the Colégio Liceu de Artes e Ofícios and as citizens rqui vosde progr amas\ MI c class at high school. Awe observed that the pupils reacted positively to new didactic resources, as the game Tower of Hanoi, that we utilized in this research. We verify an improvement at the pupils in the performance, after to the activities. We conclude through the interventions that the work with a sequence of activities articulated with manipulative material favors the learning of mathematical concepts.
.

Words-key: Exponential, Material function Manipulative, Sequence of Activities, Learning.

Lista de Tabelas

Lista de figuras

Lista de Quadros

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Introdução

Quando na escola primária[1] a “professorinha” de matemática, não aquela citada por Paulo Freire, mas uma que requer um carinho especial nos mandava que confeccionássemos algum artefato tal como um aviãozinho para brincadeira na sala de aula, todos nós vibrávamos com a novidade. Ao que nos parece, as crianças vibram com atividades novas e que chamam a atenção para a oportunidade de dar asas à imaginação. Quantas brincadeiras mais podem ser desenvolvidas com uma folha de papel a ser dobrada! E isto nos despertou para a atividade que estamos propondo em nossa pesquisa, que descreveremos mais adiante.

Outra inquietação que nos despertou o interesse por esta pesquisa foi a relação do livro didático com os professores, estes acreditando “piamente” naquele como fonte de Literatura - única e exclusiva - sem outras perspectivas que permitam discordar, ou não, das intenções propostas pelos autores. Isso nos deixa carentes de alternativas metodológicas de ensino, principalmente no que diz respeito ao material de manipulação. Lembramos que, em nossa realidade, os livros didáticos podem ser a nossa fonte exclusiva do início ao fim do ano letivo, para contemplar o assunto a ser abordado em sala de aula. Sentimos a necessidade de buscar alternativas de superação destas dificuldades e nos posicionarmos frente a este desafio.

A partir dessas considerações, despertamos para verificar, de modo informal, com nossos colegas professores de matemática, em reuniões pedagógicas ou mesmo em discussões na sala dos professores, que livro didático adotavam e qual a opinião deles, sobre a contextualização nesses livros. De posse das informações que obtivemos com os professores e ainda considerando a nossa experiência como docente, tomamos a decisão de realizar uma pesquisa que viesse discutir a abordagem da contextualização nos livros didáticos mais utilizados por eles, que serviu como inspiração para esta dissertação de mestrado.

Em nosso trabalho elaboramos, desenvolvemos, experimentamos, e analisamos uma seqüência didática, visando contribuir para a construção do conceito de função

rquivos de programas\Micro

[1] Hoje primeiro e segundo ciclos do ensino fundamental.

exponencial através de dobraduras. Esta técnica é oriunda da cultura oriental e com características típicas chinesas e japonesas. Acompanhada pelo desenvolvimento da folha de papel, esta técnica de dobradura em papel foi aprimorando-se cada vez mais, incluindo sua inserção processo ensino-aprendizagem. Considerando a arte de dobrar papel um recurso a ser utilizado em sala de aula, desenvolvemos uma seqüência de atividades de trabalho em duplas, visando favorecer a relação ensino-aprendizagem (VYGOTSKY, 1993,1995). Esse foi outro fato que nos despertou para realizar o referido trabalho, na busca de oferecer alternativas metodológicas onde, por um lado, temos um ambiente de trabalho em grupo e, por outro, nos permite favorecer a aprendizagem.

No aspecto do Conhecimento Matemático, esta pesquisa teve como referencial a teoria das funções, a qual deve ser enfocada, levando-se em conta a concepção geral de função, assim como os seus tipos específicos, dentre os quais se encontram as funções exponenciais. A fim de salientar a função exponencial com suas características específicas, discutimos uma diferenciação da mesma que a caracteriza como uma família de funções. É de suma importância também delimitarmos as particularidades e os conceitos que são bastante específicos das funções exponenciais. Os elementos essenciais dessa formulação são as divisões em famílias, os gráficos, o domínio e a imagem, dentre outros conceitos abordados.

As funções matemáticas têm sua importância pelo uso em diversas áreas do Conhecimento. Apesar destas aplicações existirem, elas não aparecem explícitas, nem tampouco são utilizadas com sua formalidade pelos cidadãos. Portanto, essas quase sempre têm sido passadas despercebidas; nossos próprios alunos questionam freqüentemente sobre suas aplicações. Em nosso dia a dia, utilizamos funções matemáticas pela necessidade natural de estabelecer uma relação onde estivermos, sem que haja uma formalidade ou o aparecimento de fórmulas e definições matemáticas mais aplicadas, no sentido de uma fundamentação teórica apropriada.

No contexto da matemática, as aplicações são muitas, de modo que, não se resumindo a exemplos específicos que, da forma como são habitualmente vistos geralmente estão desarticulados ou descontextualizados no que concerne à realidade do aluno, podendo ser, ainda, típicas de situações que se repetem de acordo com determinadas atitudes.

As Funções têm como potencial a "transformação" de valores ou objetos, dentro de critérios estabelecidos pela relação. Neste contexto, tudo parte da necessidade de utilização por algumas situações típicas ou atípicas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), na primeira parte do capítulo "Caracterização da Área de Matemática" nas considerações preliminares, dentre outras coisas, relatam: "A Atividade matemática escolar não é 'olhar para as coisas prontas e definidas', mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade" (BRASIL, 1997, p.19).

Diante desse panorama, a nossa pesquisa tem como enfoque o desenvolvimento de uma seqüência didática, através do uso de material manipulativo, para o ensino do conceito da Função Exponencial, destinada a alunos da 1ª série do Ensino Médio. A referida seqüência foi desenvolvida com um grupo, composto por 36 alunos de uma escola de Ensino Médio da Rede Pública de Recife, num ambiente de sala de aula.

Propusemos com o uso de material manipulativo, articulado com as atividades, uma situação didática que favorecesse a discussão como estímulo, buscando despertar, nos alunos, interesses no conteúdo em foco, através das mesmas.

Esperávamos que esse despertar pudesse contribuir para incentivar a investigação e a tomada de decisão por parte dos alunos no desenvolvimento das atividades propostas.

1. A Problemática e a Delimitação do Problema

Do ponto de vista do conhecimento matemático, o conceito de Função Exponencial possui uma formulação específica de acordo com sua caracterização, bem como as partrquivos de progr amas\Mi canto aos pré-requisitos, ela necessita de conhecimentos sobre Potenciação, na formação inicial do conceito, relacionando-se com a Progressão Geométrica, a Progressão Aritmética, a Matemática Financeira, a Estatística, entre outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1997).

Esta relação da função exponencial com outras áreas faz com que ela assuma um papel de destaque na comunidade científica e nas relações com outras ciências. A introdução da mesma deve, a nosso ver, valorizar estas conexões com outras áreas do conhecimento, a fim de que o aluno possa articulá-la com seus conhecimentos prévios e com o cotidiano.

Na seqüência didática tratada aqui, buscamos introduzir a função exponencial a partir das propriedades da Potenciação.

Alémrquivos de programas\Micr os idéias referentes às dobraduras, como material manipulativo e, ainda como ferramenta no ensino das ciências, bem como suas relações com o ensino da matemática, desempenhando um papel importante na pesquisa empírica.

No cotidiano, deparamos-nos com situações em que elementos, em particular valores numéricos, estão dependendo de um outro elemento. Lidamos com situações em que, apesar da correspondência entre elementos (valores) que podem variar, existe uma lei de correspondência entre eles, a exemplo da multiplicação de bactérias em intervalos regulares de tempo.

Nestas situações, juntamente com outras que discutiremos no decorrer do texto, trataremos do contexto das funções matemáticas. Muitas vezes, esta correspondência pode ser expressa por uma lei. Temos, então, a aplicação do conceito de função intrínseco a estas situações.

De acordo com Caraça (1992), não devemos confundir a idéia de função com a idéia de expressão algébrica. Para ele, esta última é mais uma forma de estabelecer uma correspondência entre as duas variáveis matemáticas. Podemos afirmar, ainda, que uma igualdade como: $y = 2x^2$, com y igualado a uma expressão algébrica em x, apropriam-se de uma lei matemática, ligando as duas variáveis. Essa lei é definida pelarquivos de programas\Mcr *x* e *y*, e rquivos deprogramas\Mcr *y seja função de x*. Por um determinado instante a idéia de função pode ser confundida com a expressão que rege a função, para alguns professores de matemática e também para os alunos do ensino médio.

Esta confusão é natural, considerando a grande ênfase dada ao tratamento das funções, as quais podem ser expressas analiticamente. Uma introdução ao estudo das funções é feita já no ensino fundamental e ainda é dada sua continuidade no primeiro ano do ensino médio. Lima (1996), no capítulo de seu livro que explana conjuntos numéricos, traz a modelagem de funções sendo apresentada aos alunos como parte da exposição da função no plano cartesiano. Assim sendo, temos em *A* o conjunto de partida e em *B* o conjunto de chegada, essa relação permitindo a representação gráfica da função no plano cartesiano.

Nesta pesquisa, deter-nos-emos a investigar as funções que modelam fenômenos de crescimento ou decrescimento exponencial. Lima destaca a sua importância:

> As funções exponenciais são, juntamenrquivos deprogramas\Mc e as quadráticas, os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares. As funções afins ocorrem em praticamente todos os problemas durante os oitos anos da escola e, com menos exclusividade, porém ainda com grande destaque, nos três anos finais. Por sua vez, as funções quadráticas e exponenciais aparecem nesses três últimos anos, embora tenham, principalmente as últimas, importância considerável na universidade, bem como nas aplicações de Matemática em atividades científicas ou profissionais. (LIMA, 1996, V. 1, p. 179).

Para tratarmos de casos que envolvam a função exponencial de uma forma específica, mais uma vez destacamos que ocorrem aplicações na matemática financeira, na estatística, nas progressões aritméticas e geométricas, dentre outras aplicações; além disso, devemos destacar o comportamento que a Função Exponencial tem no plano cartesiano como uma progressão aritmética no eixo *x* e uma progressão geométrica no eixo *y*, destaque este que os livros didáticos pouco ou quase nunca mostram.

A partir dessas considerações, nossa questão de pesquisa é a seguinte: “O uso de uma seqüência com material manipulativo, contendo uma variável que cresça ou decresça exponencialmente, usado como recurso didático, pode favorecer ao aluno na compreensão da modelagem e do comportamento de uma função exponencial?”.

2. Objetivos

A partir das considerações anteriores, estabelecemos para nossa pesquisa os objetivos relacionados a seguir:

2.1 Geral

Proprquivos de programas\Micrqpara a introdução dos conceitos fundamentais ao aprendizado da função exponencial, utilizando material manipulativo para alunos da 1ª série do Ensino Médio.

2.2 Específicos

?? Analisar a abordagem sobre a função exponencial em livros didáticos.

?? Desenvolver uma seqüência didática, formada de três atividades, com dobraduras e a Torre de Hanói para a aplicação no estudo da função exponencial;

?? Identificar eventuais diferenças de desempenho de alunos após uma seqüência didática com dobraduras e a Torre de Hanói na aprendizagem da função exponencial em pré-teste e pós-teste.

3. Justificativa

Como ponto de partida para a nossa pesquisa, verificamos a necessidade de contextualização da função exponencial em livros didáticos. Tentando buscar uma resposta para essa nossa preocupação, efetivamos uma pesquisa em alguns livros didáticos, selecionados em trabalho com professores de matemática que estão em sala de aula. Essa formalização na seleção dos livros didáticos nos deixou um referencial para a amostra principal dos livros drquivos de programas\ Mi cr

Identificamos nos livros didáticos, em seus exercícios, que têm poucas questões contextualizadas; no máximo, tratam de articular questões de desafio que são meramente manipulativas, ou uma mera substituição de valores em fórmulas prontas.

Aqui, consideramos como questões contextualizadas aquelas correspondentes a exemplos de situações do cotidiano, e que necessariamente não façam parte do dia-a-dia de todos, mas retratem exemplos típicos de fatos fora da sala de aula. Para exemplificar, citamos o jogo do “Bicho”: a situação-problema da busca do estabelecimento de uma estratégia para acertar neste jogo envolve o crescimento exponencial. Nem todo mundo joga no jogo do bicho, conhece suas regras e procedimentos, embora corresponda a uma questão contextualizada, pois extrapola a sala de aula, e faz parte do cotidiano de muitas pessoas.

Assim sendo, esperamos que um trabalho como o que desenvolvemos possa contribuir junto aos nossos alunos e colegas professores no sentido de contribuir para o favorecimento da relação ensino-aprendizagem, no tocante ao referido conteúdo contribuindo, conseqüentemente, para a melhoria da interação aluno-aluno e aluno-professor.

Embora a compreensão das relações de crescimento e decrescimento exponencial seja importante para a formação do conceito da função exponencial, sabemos que não são apenas esses aspectos que constroem o conhecimento de todo o conteúdo. Assim, esperamos que as relações de crescimento e decrescimento exponencial possam ser identificadas pelos alunos na resolução da seqüência de atividades que pretendemos propor. Pretendemos lançar mão do uso das dobraduras e do material manipulativo para auxiliar na construção do aprendizado da Função Exponencial, recurso que poderá favorecer a relação ensino-aprendizagem em sala de aula, uma vez que a manipulação do material permite “enxergar” a sua matematização, ou interpretação matemática.

4. Estrutura do trabalho

Na primeira parte desse trabalho fizemos uma pesquisa, com nossos colegas professores de matemática, para sabermos quais são os livros didáticos utilizados atualmente em sala de aula, no que diz respeito à abordagem dos conteúdos em matemática e mais especificamente para o estudo da função exponencial.

Nesse momento, nossa preocupação foi como iríamos caracterizar nossa análise prévia, pois, para que pudéssemos fundamentá-la; precisávamos primeiro saber como estava sendo abordado nos livros didáticos, o conceito de função exponencial, de forma descontextualizada. Sendo o livro didático a principal fonte de consulta e de pesquisa para alguns professores de matemática, esse referencial serviu como ponto de partida no desenvolvimento de nosso trabalho.

Os livros didáticos que estão sendo adotados pelos professores de matemática, em sala de aula, serviram de base para a elaboração e o desenvolvimento da seqüência didática. Como proposta, observamos quais os conceitos a serem trabalhados e quais as habilidades que os alunos iriam mobilizar após a resolução da atividade proposta. Sendo assim, os livros nos deram esta orientação para que, em seguida estruturássemos na pesquisa empírica da atividade.

Como já dissemos antes, as aplicações de funções exponenciais não estão tão explicitas no cotidiano, nem para alguns professores de matemática, nem para os alunos.

Vivemos cercados de fatos exponenciais e não lhe damos importância ou às vezes não percebemos as aplicações imediatas, mesmo porque, nem sempre, é propósito dos matemáticos deduzirem aplicações no cotidiano para as abstrações da matemática. Apenas para exemplificar, os fatos explícitos do uso da função exponencial estão presentes em questões de crescimento populacional. Apresentaremos mais adiante, com detalhes, exemplos que abordam e contextualizam aplicações da função exponencial no cotidiano.

Almejamos que, levando ao cotidiano dos alunos exemplos do uso da função exponencial, tenhamos resultados melhores no aprendizado. Mais ainda, com um recurso didático manipulativo e de fácil acesso, poderemos estar contribuindo, não apenas para a aprendizagem de um conceito da matemática, mas para outras áreas do conhecimento.

Após isso, fizemos um recorte histórico na evolução do conceito de função desde os princípios algébricos, passando pelas aplicações em geometria, em astronomia e navegação.

Discutimos material manipulativo, dobraduras, e a torre de Hanói, como recursos didáticos associados à seqüência de atividades no intuito de validar nosso objetivo de crescimento e decrescimento exponencial.

Em seguida, apresentamos o desenho metodológico, crquivos de programas\Micros campo de pesquisa, sujeitos e instrumentos de coleta e de análise de dados.

Em nossa análise, procedemos de forma a verificar eventuais diferenças de desempenho dos alunos na apresentação dos conceitos envolvidos e registrar as habilidades a serem desenvolvidas por eles na resolução da seqüência de atividades.

Como instrumentos, utilizamos um pré-teste que, além de permitir investigar o conhecimento dos alunos, nossa intenção inicial, nos permitiu também, identificar algumas dificuldades didáticas, pois o registro dos alunos nesse momento foi muito pouco relacionado à resposta correta.

Fizemos uma análise comparativa entre as dificuldades apresentadas pelos alunos durante a resolução das atividades, na seqüência proposta, e a apresentação do conceito de Função, nos livros didáticos, apresentadas de forma descontextualizadas verificando também quais os conceitos envolvidos e as habilidades desenvolvidas pelos alunos durante a execução, da seqüência de atividades.

Na análise do Pós-teste, verificamos eventuais mudanças de desempenho dos alunos após a sequencia didática em comparação com o pré-teste; observamos uma reação efetiva no registro, das dificuldades didáticas, de forma sistematizada e voltada para a resposta correta.

Diante das informações e dos dados, apresentados pelos alunos, fizemos um estudo comparativo do desempenho dos mesmos na atividade, no que diz respeito ao conceito apresentado nos exercícios dos livros didáticos, de forma descontextualizada, ou de forma contextualizada, apresentada na seqüência de atividades. Sendo assim, ainda analisamos a relação dos conceitos prévios, apresentados pelos alunos, com os conceitos propostos, apresentados na seqüência de atividades.

Finalmente, fizemos uma discussão sobre os aspectos didáticos e os procedimentos que constituíram a atividade em sua construção e desenvolvimento.

Uma discussão dos resultados obtidos tornou-se pertinente na busca de mais uma possível alternativa metodológica, que venha contribuir para o aprendizado, não apenas da matemática, mais como de outras áreas do conhecimento.

Na conclusão, apresentamos uma proposta de futura pesquisa voltada para a construção de seqüências didáticas que dinamizem e articulem a busca pela inforquivos de programas\Micros rmação de conceito, pelo ensino por projetos.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1. Fundamentação Teórica: O Ensino da Função Exponencial

Neste capítulo discutiremos brevemente as idéias básicas sobre funções em geral, e função exponencial em particular, que embasarão nossa pesquisa empírica. Além disso, analisaremos três dos livros didáticos de matemática mais adotados na primeira série do ensino médio, por professores da Região Metropolitana do Recife; finalmente, discutiremos o uso material de manipulação no ensino de matemática, tais como as dobraduras e os jogos, em particular a Torre de Hanói.

1.1 Um recorte histórico na evolução do conceito de função

Segundo Rego (2000), de acordo com a História da Matemática, dentre os estudos de Kleiner (1989) e de Youschkevitch (1976) eles descrevem os diversos estágios da evolução do conceito de função, partindo da concepção de funcionalidade, presente nas tabelas formuladas por astrônomos babilônios ou em estudos geométricos acerca de determinação de áreas, nos gregos. Não havia nesta época, a noção geral de função de quantidades variáveis como hoje concebemos, mas idéias acerca de relações especiais, entre elementos específicos. Estes elementos eram, quase sempre, entes geométricos.

Nos estudos acima apresentados, Rego (2000) destaca que os teóricos contam a história da função matemática, partindo de uma idéia voltada para a concepção de funcionalidade destacada nas tabelas construídas pelos astrônomos babilônicos, ou em srquivos de programas\Microcsas, nas áreas geométricas, provocadas pelas divisões, que teriam os agricultores gregos, de fazer, após as enchentes do rio Nilo.

Ainda em seus estudos, Rego (2000), afirma que: Os trabalhos de Heráclito, Zenão de Eléa e Aristóteles, em especial o estudo de prquivos de programas\Micr quantidade e de qualidade deste último, compreenderam os primeiros textos relativos à idéia de “mudança”, embora ainda sem generalizações. Vale ressaltar que, na época correspondente a cerca de 20 séculos antes de Cristo até o século

XIV, as relações funcionais eram descritas, em sua maioria, verbalmente ou, quando muito, através de relações numéricas expressas em tabelas.

Os séculos XIV e XVI caracterizaram-se pelo estudo de casos de dependência de quanrqui vos deprogramas\Mlcições verbais, relações numéricas e gráficas sendo então, conscientes, a idéia de dependência entre as quantidades variáveis.

O uso de coordenadas para representarem variáveis já ocorria e aplicava-se, por exemplo, a pontos de curvas específicas e não a pontos arbitrários do plano.

BOYER (1974, P. 193) destaca que Nicole Oresme (1323 -1382), por volta do ano de 1360, sugeriu a representação gráfica dos diferentes graus de intensidade das variáveis velocidade e tempo, relacionados em um fenômeno.

As latitudes, correspondentes a variações na velocidade, eram dadas por segmentos de comprimentos distintos, dispostos verticalmente sobre uma linha horizontal. Nesta linha estavam distribuídas diferentes longitudes, a intervalos regulares, correspondentes a diferentes instantes de tempo. Oresme observou que as extremidades dos segmentos caiam todas sobre uma mesma reta, assinalando a propriedade de inclinação constante para o gráfico por ele traçado, descrevendo um movimento uniformemente acelerado (BOYER, 1974).

Após o século XVI, com a extensão do conceito de número, da evolução da álgebra simbólica e da trigonometria, desenvolveu-se uma idéia mais geral de função.

Em 1637, Descartes afirmou que uma equação em *x* e *y* erarquivos de programas\Micr uma relação de dependência entre quantidades variáveis, de modo a permitir calcular o valor de uma em correspondência com o valor da outra. Uma equação em *x* e *y* podia representar uma dependência funcional entre quantidades variáveis, permitindo-se determinar uma variável a partir da outra, dando um caráter mais amplo à idéia de função. Apresentou ainda o método das coordenadas para a representação gráfica de relações entre variáveis, em um modelo próximo ao que conhecemos hoje em dia, para função.

Em uma definição de Função, apresentada por Bernoulli a Euler, ele utiliza o termo *quantidade composta*, que teria sido substituído por *expressão analítica*, na definição apresentada por Euler, trinta anos depois, embora este não tenha explicitado o significado do termo, afirmando apenrquivos de programas\Micros quatro operações, raízes, exponenciais e logaritmos, derivadas e integrais.

Segundo Rego, a definição de função tornou-se independente da idéia de expressão analítica a partir da necessidade de serem estudadas diferentes classes de funções. Segundo Kleiner, Dirichlet afirmou, em 1837:

> y é uma função de uma variável x, definida no intervalo a < x < b, se para cada valor da variável x, nesse intervalo, corresponde um valor definido da variável y, sendo irrelevante o modo como esta correspondência é estabelecida. (KLEINER, 1989, p. 291. Apud REGO, 2000).

A definição apresentada por ele foi a primeira a restringir, explicitamente, o domínio de uma função a um intervalo, antes compreendida por todo o conjunto dos números reais. Apesar de próximo da concepção atual, os conceitos de conjunto e de números reais não estavam completamente estabelecidos. A riqueza da definição de Dirichlet repousou, sobretudo, em suas aplicações, tendo sido ele o primeiro a trabrquivos de programas\Mic a noção de função como correspondência arbitrária de variáveis.

Durante a segunda metade do século XIX, os matemáticos apresentaram um grande número de exemplos de funções no espírito da definição de Dirichlet, isto é, que podirquivos de programas\Microssões analíticas, termo que nos dois séculos anterquivos de programas\Mic

No início do século XX, porém, a definição de Dirichlet passou a ser questionada, em particular pela frase "... sendo irrelevante o modo como esta correspondência é estabelecida". Tal discussão foi acompanhada pelo desenvolvimento de antigos ramos da Matemática e pela criação de novos. (Rego, 2000, p.193)

Em 1939 uma definição de função, apresentada através da linguagem da Teoria dos Conjuntos, foi dada por Bourbaki:

> Sejam E e F dois conjuntos, que podem ou não ser distintos. Uma relação entre uma variável x, elemento do conjunto E, e uma variável y, elemento do conjunto F, é chamada uma relação funcional em y se, para cada x em E, existe um único y em F que está na relação dada com x. Damos o nome de função à operação que, de algum modo, associa a cada elemento x de E o elemento y de F, que está na relação dada com x; y é dito ser o valor da função relativo a x e a função é dita ser determinada pela relação funcional dada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função. (KLEINER, 1989, p. 299). (Apud, REGO, 2000).

No dia a dia, quando nos deparamos com situações em que elementos, em particular valores numéricos, estão dependendo de outros elementos, que também podem ser valores numéricos, lidamos com situações em que, apesar da correspondência entre elementos (valores) variarem, existe uma correspondência que os correlacionam. A estas situações nós trataremos por funções. Muitas das vezes, esta correspondência pode ser expressa por uma lei. Temos então uma aplicação do conceito de função intrínseco a estas situações. Matematicamente, as funções podem ser definidas, segundo Caraça (1952) da seguinte maneira:

> Encarando agora o conceito de função do ponto de vista propriamente matemático, pondo de parte a origem concreta do conceito, põe-se à questão seguinte: como se estabelece a correspondência da variável independente para a dependente? Por que maneiras podem determinar qual o valor b de y que corresponde ao valor a de x? Por outras palavras, como se define cada função particular y(x)? Como se dá, em cada caso, a lei da correspondência? (CARAÇA, 1952, p.129-130)

Sobre a definição analítica, Caraça considera:

> Consiste este modo de definição em dar um conjunto de operações de modo tal que, por meio delas, se possa fazer corresponder a cada valor a de x um valor b de y. Demos, por exemplo, a igualdade:
>
> $$y = 4{,}9\,x^2.$$

Voltamos a lembrar que, segundo este autor, não devemos confundir o conceito de função com uma expressão algébrica. Ainda de acordo com ele, esta é mais uma forma de estabelecer uma correspondência entre as duas variáveis matemáticas. Além disso, uma igualdade como: $y = 2x^2$, em que *y* igualado a uma expressão algébrica em *x*, apropria-se de uma lei matemática, ligando as duas variáveis. Essa lei é definida pela relação existente entre *x* e *y*, e rquivos de programas\ Mic*y* seja função de *x*, onde *y* é arquivos de programas\Micr*x* é a variável dependente.

O mesmo autor alerta ainda que não devamos confundir função com expressão analítica, muito embora as idéias sejam constantemente confundidas pela linguagem e escritas matemáticas. Considerando que uma expressão analítica é representada em uma equação algébrica.

Apesar de numa primeira introdução no ensino médio, trabalhar-se com as funções em geral, nos livros didáticos, os autores dedicam-se, no restante do primeiro ano do ensino médio, ao estudo de funções reais de variáveis reais, onde tanto A quanto B são subconjuntos do conjunto dos números reais, funçõerquivos de programas\Micro por expressões algébricas.

Estas funções podem ser divididas ou selecionadas de acordo como seu comportamento: afim, linear, quadrático, exponencial, etc. Para entendermos melhor, vamos discutir casos de relações que podem ser modeladas por diferentes famílias de funções. As funções com comportamento linear e mais geralmente as afins, denominadas erroneamente de funções de primeiro grau (LIMA et all, 2001), modelam fenômenos em que o crescimento é constante. Por exemplo, o cálculo do custo de certo alimento, por exemplo; um quilo de alimento custa um valor e *n* quilos é um múltiplo do valor do quilo.

Matematicamente falando, segundo Lima (2001, p, 98): “como saber se, numa determinada situação, o modelo matemático a ser adotado é uma função afim?” No exemplo dado por Lima (2001, p.99), a tarifa cobrada pelo taxista é resultado de uma função afim, pois dada uma função $f(x) = ax + b$ onde *x* é a distancia percorrida, $f(x)$ é o preço a pagar, b é a bandeirada e a é a taxa cobrada por quilômetro rodado. Mas nem todo problema é assim tão explícito.

Uma forma de representar uma função é através dos gráficos. Estes permitem uma visão mais global da relação. Com a representação gráfica, podemos classificar e analisar uma função.

Como já referimos antes, durante todo o ensino médio, detemo-nos a estudar as funções dentro de cada uma das famílias: afim, constante, quadrática, modulares, exponenciais, trigonométricas, logarítmicas e hiperbólicas. Cada função possui uma caracterização e propriedades que a classifica dentro de uma determinada família. Essa caracterização permite que alguns fenômenos possam ser modelados por uma função de uma determinada família. Portanto, cada uma das famílias de função tem sua importância.

Iniciamos, no ensino médio, o estudo das funções com a família das funções afins, para em seguida estudarmos as funções quadráticas e assim por diante. Sendo assim, teremos condições de aceitar boa parte das aplicações dos problemas que veremos nas atividades com as quais iremos nos deparar. Portanto, as situações que serão tratadas deverão envolver os conceitos, propriedades e gráficos dessas funções.

Com o propósito de nossa pesquisa, destacaremos os casos que envolvem as funções exponenciais. Segundo Lima (2005, p.33), existerquivos de pr ogramas\ Ml c r os uma função de tipo exponencial. E nesse caso ele justifica com o seguinte exemplo: “o emprego da função de tipo exponencial, $y = ba^t$, emrquivos de programas \Ml cros pelo corpo humano de substâncias nele administradas”.

Podemos citar um exemplo retirado da revista do professor de matemática, número 62, p. 08, cujo enunciado é o seguinte: (SYLVIA MANDEL)

“Crescimento exponencial? O que é isso?

Os impactos ambientais aumentaram muito a partir do séc. XVIII como conseqüência da revolução industrial e do avanço das tecnologias de exploração e transformação da natureza. Além disso, houve um crescimento exponencial da população do planeta, composto de pobres em sua maioria. 1” Numa aula de Geografia, os alunos de 8ª série leram esse trecho do livro didático e perguntaram o que era crescimento exponencial. A professora, Marina Precoppe, mostrou a eles que a partir de um casal com dois filhos, se cada filho tem 2 filhos, e cada um desses tem 2 filhos, o total de pessoas vai aumentando rapidamente. Durante o intervalo, comentou comigo o que havia feito. Minhas idéias começaram a fluir.

No dia seguinte, em vez de fazer o que estava previsto para a aula de Matemática da 8a série, completamos na lousa as tabelas:

x	2x
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

x	x^2
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

10	

[2]1 Sene, Eustáquio de. Espaço geográfico mundial e globalização.

O mesmo raciocínio se aplica para mostrar que f(nb,t) = nf(b,t) para qualquer número natural n. Pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, tem-se f(cb,t) = cf(b,t), seja qual for o número c > 0. Em particular, tem-se f(b,t) = bf(1,t).

O Teorema Fundamental da Proporcionalidade tem seu significado, sua relevância e sua demonstração apresentados nas páginas 92 e 98 do livro *A Matemática do Ensino Médio*, vol1. Para quaisquer b, s e t não-negativos, tem-se f(b, s + t) = f(f(b,s),t).

A fim de estabelecer a validade dessa propriedade, convém esclarecer o que ela significa. Consideremos o seguinte problema:

Tem-se uma salmoura na qual, antes de as torneiras se abrirem, a concentração de sal era de b gramas/litro. O número f(b, s + t), como sabemos, representa a concentração de sal existente quando for decorrido o tempo s + t após a abertura simultânea das duas torneiras. O número f(f(b, s), t) significa a concentração de sal, que existiria no tanque depois de decorrido o tempo t, supondo que, ao abrirem-se as torneiras, a concentração b, ao atingir o tempo s a concentração será f(b, s) e, a partir daí, deixando passar o tempo t, a concentração da mistura pode, indiferentemente, ser considerada como f(b,s + t) ou como f(f(b,s)t). Portanto, tem-se f(b, s + t) = f(f(b,s),t).

Nosso objetivo será atingido, portanto, ao demonstrarmos o teorema que se segue. Para prová-lo, faremos uso do teorema seguinte: Se a função decrescente ?: [0;+?) ? R^+ é tal que ?(s + t) = ?(s) ?(t) para quaisquer s, t, então existe um número positivo a (necessariamente menor do que 1) tal que ?(t) = a^t para todo t.

rquivos de programas\Micro

[2] Sene, Eustáquio de. Espaço geográfico mundial e globalização, 8a série, p. 184. São Paulo: Scipione, 2000.

Essa é uma caracterização da função exponencial. Sua demonstração não é difícil. Primeiro tomamos a = ? (1). Em seguida vemos que ?(2) = ?(1 + 1) = ?(1) ?(1) = a^2 e, mais geralmente, para todo n ? N tem-se ? (n) = ?(1+1+....+1) = ?(1)?(1) ... ?(1) = a.a ... a = a^n. Se r = p/q é um número racional positivo, quociente dos números naturais p, q, temos

$$?(r)^q = ?(r) \ldots ?(r) = ?(r + \ldots + r) = ?(qr) = ?(p) = a^p,$$

Logo, ?(r) = $\sqrt[q]{a^p}$? $a^{p/q}$? a^r. Vemos assim que, pondo a = ?(1), a função ? que admirqu i vos de pr ogramas\ Micros? (s + t) = ?(s) ?(t) é da forma ?(t) = a^t para todo t ? 0 racional. Levando em conta a monotonicidade de ?, qur qui vos de programas\ Micros mostra-se que se tem ainda ?(t) = a^t, mesmo quando t é irracional. (p.33-34).

No texto acima, o autor quis se referir a como reconhecer uma função de tipo exponencial, porém nos termos formais e contextualizados, exemplificando o consumo de uma caixa de água. Muito embora seja um bom exemplo, ele é discutido mais por professores, pois se encontra em um artigo que faz parte de uma revista voltada para professores de matemática e não para estudantes do ensino médio.

1.2 Potências - Conceitos e Propriedades.

A definição dada por IEZZI. (1998, p.1, vol.2) para a potenciação é a seguinte:

"Seja a um número natural. Potência de base a e expoente n é o número a^n tal que:

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^n = a^{n-1}\, a,\ ?\ n,\ n\ ?\ 1\text{"} \end{cases}$$

Dessa definição decorre que: (Iezzi,1998).

$a^1 = a^0 . a = 1 . a = a$

$a^2 = a^1 . a = a . a$

$a^3 = a^2$. *arquivos de programas\ Micro*

E de modo geral, para p natural e $p\ ?\ 2$, temos que a^n é um produto de p fatores iguais a a .

O princípio multiplicativo está presente na definição e este é uma das propriedades que iremos explorar, implicitamente, na atividade, o que poderá ou não ser observado pelos alunos. Considerando o valor numérico que a base da potência poderá assumir, ele pode estar entre zero e um, ou maior que um. Sendo assim, a potência apresentará comportamento gráfico distinto.

✍✍Propriedades

Se a ? R, b ? R, m ? N, n ? N, então valem as seguintes propriedades:

P1✍ $a^m . a^n = a^{m+n}$

P2✍ $a^m\ ?\ a^n = a^{m-n}$, $a\ ?\ 0$ e $m\ ?\ n$

P3✍ $(a . b)^n = a^n . b^n$

P4✍ $(a\ ?\ b)^n = (a^n\ ?\ b^n)$, $b\ ?\ 0$.

P5✍ $(a^m)^n = a^{m.n}$. *(IEZZI, 1998, V.2, p.3).*

Pretendemos contemplar apenas algumas propriedades que iremos destacar,

visarquivos de p r ogr amas\ Mcr tas rquivos de programas\Mc

Ao apresentarmos as propriedades da potenciação, estamos pretendendo fazer uma relação com a função exponencial. Para tanto, destacaremos, entre as propriedades acima citadas, as que relacionaremos em nossa proposta, sendo elas: *P1, P3 e P5.*

Apresentaremos algumas propriedades da função exponencial.

Seja a função exponencial $f(n) = a^n$, sendo a um número real e n um número inteiro.

?? Dada a propriedade *P1* citada anteriormente, temos que:

Se $f(m + n) = a^{m+n} = a^m * a^n$, como por definição $f(m) = a^m$ e $f(n) = a^n$,

então podemos dizer que:

$$f(m + n) = f(m) * f(n),$$

Concluímos dizendo que: Na função exponencial, a função soma de dois termos é igual ao produto da função dos termos.

?? Para a propriedade P3 citada anteriormente, temos que:

Se $(a*b)^n = a^n * b^n$, sendo $f(n) = (ab)^n = a^n * b^n$.

Sendo assim, dizemos que aqui estamos aplicando a propriedade distributiva da potenciação.

Exemrquivos de programas \ Micr

Sendo $f(3.4)^n$ para $n = 2 \Rightarrow f(2) = (3.4)^2 = 3^2 * 4^2 = 9*16 = 144$

$f(3)^2 * f(4)^2 = 9*16 = 144$.

Nestrquivos de programas\ Micro *a potência do produto das funções é igual ao produto das funções*.

?? A propriedade *P5* destaca a potência da potenciação.

Se tivermos $f(m) = a^m$, considere $b = a^m$ e n um outro número inteiro; assim sendo, teremos $f(n) = b^n$. Logo, como $b = a^m$, fica claro que $f(n) = (a^{m)n} = a^{m \cdot n}$.

Diremos que a propriedade *P5* retrata a potência da potência e transforma na potência da função.

Pretendemos verificar implicitamente essas propriedades nas atividades propostas, tratando das informações sem precisar identificá-las para os alunos.

1.3 Caracterização da Função Exponencial.

A função exponencial fica caracterizada no teorema que segue: Seja f: R✍R^+ uma função monótona injetiva, isto é, crescente ou decrescente.

As seguintes afirmações são verdadeiras:

(1) *$f(nx) = f(x)^n$ para todo n ? R;*

(2) *$f(x) = a^X$ para todo x ? R, onde a = f(1);*

(3) *f(x + y) = f(x) * f(y) para quaisquer x, y ? R. (LIMA, 2001, p. 183)*.

Há diversos casos de estudos e aplicações em função exponencial, tanto a nível fundamental e médio, quanto a nível superior. Como já vimos mais atrás (BRASIL, 1997), por exemplo, de casos como poupança, compra e venda, importação e exportação, crescimento e decrescimento populacional, epidemias, natalidade e mortalidade, pesquisas eleitorais, estamos trabalhando com funções que podem ser afim, quadráticas ou exponenciais.

Assim se caracteriza a função exponencial, segundo LIMA;

> As funções exponenciais são, juntamente com as funções afins e as quadráticas, os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares. As funções afins ocorrem em praticamente todos os problemas durante os oitos anos da escola e, com menos exclusividade, porém ainda com grande destaque, nos três anos finais. Por sua vez, as funções quadráticas e exponenciais aparecem nesses três últimos anos, embora tenham, principalmente as últimas, importância considerável na universidade, bem como nas aplicações de Matemática em atividades científicas ou profissionais. (LIMA, 2001, V. 1. p, 183).

Conforme as idéias acima citadas, acreditamos que os alunos do ensino médio devem ter maturidade cognitiva para reter estas informações e redirecioná-las, sob orientação dos professores de matemática.

Desse destaque, verificamos que a função exponencial toma um caráter mais aplicativo nas séries do ensino médio, onde os alunos têm um contato com o conceito e suas aplicações, de forma a dar significado ao aprendizado.

1.4. Funções Exponenciais e as Progressões Aritméticas e Geométricas:

Assim define Lima a função exponencial:

> Seja f:R✍R^+ uma função injetiva (isto é, crescente ou decrescente) que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, \ldots, x_n$,...numa progressão geométrica $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots, y_n = f(x_n)$. Se pusermos b = f(0) e a = f(1) / f(0) teremos $f(x) = ba^x$ para todo x ? R. (LIMA, 2001, p.186).

Um dos pré-requisitos para a formação do conceito da função exponencial é o conceito de potenciação acompanhado de suas propriedades. Em nossa proposta de pesquisa buscamos elaborar, desenvolver, experimentar e analisar uma seqüência de atividades que possibilite aos alunos identificar os conceitos de crescimento e decrescimento exponencial, pré-requisito para o aprendizado de função exponencial. Além disso, queremos identificar as propriedades intrínsecas ao conceito proposto na seqüência de atividades que partem de trabalho com material manipulativo.

Portanto, esta pesquisa tem como principal foco a análise de uma situação de ensino para alunos da primeira série do ensino médio sobre a função exponencial.

Quando o aluno, interagir com uma situação de ensino, em torno de material manipulativo, específico para a atividade, poderá intervir na formação do conhecimento de potenciação, pré-requisito para determinar à formação do conceito da função exponencial.

1.5 Uma análise da Abordagem no Ensino da Função Expor qui vosde progr amas\ Micros

Segundo LIMA (2001), alguns livros de ensino médio trazem, repetidamente, que a impressão de uma verificação superficial de dois ou três exemplos é razão suficiente para se tirar uma conclusão geral. Neste ponto, o referido autor trata dos casos de generalização por parte até mesmo de alguns professores que copiam dos autores de livro, pois estes professores parecem acreditar ser este o modelo a ser seguido. Dentre as razões, incluem-se a falta de uma biblioteca para uma pesquisa e as formas de seleção de conteúdo no momento de preparar o seu material didático para na sala de aula.

Enfim, a tendência é passar a transmitir para seus alunos um conceito, sem prová-lo como acontece com alguns professores de matemática do ensino fundamental e médio, pois os professores que lecionam nesses níveis de escolaridade temem, em parte, que as demonstrações de teoremas dificultem ainda mais a aprendizagem por se tratar de um conhecimento abstrato descontextualizado.

Em se tratando dos casos de função exponencial, os livros didáticos relacionam muito pouco ou quase nada as funções logarítmicas com as exponenciais. Eles as tratam uma como a inversa da outra, sem trabalhar as propriedades e inter-relacionar os conceitos, menos ainda as aplicações entre elas.

Os autores de livros didáticos nem sempre têm a preocupação em favorecer o estudo dessas funções com problemas reais, em cujos enunciados não ocorrem as palavras “exponenciais” e nem “logaritmo”. Os exemplos de aplicação já trazem no enunciado as fórmulas e se reduzem, portanto, a meros exercícios manipulativos.

A função exponencial e, portanto também, a logarítmica, ocupa um lugar de destaque no ensino por causa de sua enorme relevância nas aplicações, tanto na vida diária, como nas outras ciências e na própria matemática. Vejamos alguns exemplos:

1. A bula de um remédio especifica que a concentração plasmática de uma substância absorvida tem vida média de 8 horas no organismo de uma pessoa.

Depois de 24 horas da primeira dose, outra dose é administrada. Qual é a porcentagem da droga que ainda está no organismo 30 horas após a primeira dose?

2. Quantos algarismos decimais têm o número 2^{50}?

Temos no primeiro exemplo um problema do cotidiano de algumas pessoas, e no segundo exemplo um problema matemático manipulativo e em nenhum dos dois exemplos, se fala em função exponencial ou logarítmica. Questões desse tipo existem muitas e os livros deveriam trazer mais delas, para que os alunos ficassem mais motivados com o estudo das funções exponenciais e logarítmicas.

Por tratar de contextualizar os exercícios, os autores precisavam de um conhecimento diversas situações onde se pudesse aplicar o conteúdo, que se possibilitasse efetuar esses recortes. É preocupante o fato de muitos professores ainda terem os livros didáticos como fonte única e exclusiva para consulta e pesquisa, planejando suas aulas a partir deles.

Nos livros de ensino médio, grandes destaques são dados a equações exponenciais (embrqui vos de programas\ Mi cte à injetividade da função exponencial); não que estas tenham menos importância, mas por que não há um equilíbrio na ênfase aos assuntos abordados, e a inequações do mesmo tipo (que se traduzem na *monotonicidade* da mesma função).

Os autores dos livros didáticos pesquisados e analisados, em sua maioria, apresentam idéias para a aprendizagem de conceitos da matemática que são abordadas sob o viés das manipulações formais. Quando trazem, as poucas aplirqui vos de programas\Micros*Desafios*” e não são tratadas nos exercícios de forma geral.

As propriedades operatórias formais da exponenciação, como $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ e outras, são enunciadas sem justificativa, nem ao menos para *x* e *y* racionais. Isto reforça a impressão de que, em Matemática basta a declaração do livro para que os enunciados sejam verdadeiros. (LIMA, 2001, p.16).

Nesse aspecto, a análise foi feita individualmente autor por autor. A razão disso foi para que pudéssemos identificar os conceitos e os procedimentos envolvidos nos exercícios, que são valorizados por cada autor dos livros didáticos e sabermos como eles pretendiam que os alunos desenvolvam assim as habilidades específicas envolvidas nos exercícios propostos.

Verificamos que os autores trazem questões de diversas áreas, não somente questões de aplicações na matemática. Sendo assim, iremos organizá-las, a partir das informações dos livros, em um quadro de acordo com a contextualização, descontextualização, conceitos, procedimentos envolvidos e habilidades envolvidas a serem desenvolvidas pelos alunos comparando com as questões por cada autor. Para tanto, os professores devem estar informados dos conceitos a serem trabalhados, dos procedimentos envolvidos a serem desenvolvidos, de que forma poderão contextualizar e descontextualizar as ações em sala de aula.

Concordamos que o professor não deva aceitar o livro didático como recurso didático exclusivo para o planejamento de suas aulas, pois existem outros recursos, como fonte de consulta orientada. O uso da internet pode ser uma opção que pode favorecer na relação com a aprendizagem, dando sentido ao saber para os alunos.

A análise das atividades dos Livros Didáticos selecionados foi feita em termos das categorias de análise a seguir, categorias estas já previamente estabelecidas pelos autores:

?? Contextualizadas e Descontextualizadas;

?? Conceitos e Procedimentos Envolvidos;

?? Habilidades Envolvidas.

O quadro que segue apresenta uma distribuição dos dados dispostos por categorias que foram retiradas, na pesquisa, nos livros didáticos analisados. Verificamos o quantitativo e o percentual de cada questão de acordo com as categorias apresentadas.

Contextualizadas	**Dante**			**Bianchini/Paccola**			**Iezzi**		
	Questões	Quantidade	Percentual	Questões	Quantidade	Percentual	Questões	Quantidade	Percentual
Matemática	1,2,3,4,5,30, 33, 34,38,44,45, 50,51	13	13,40	5,6,7,22,23, 32,34,35,54,5 5	10	18,18	47,48,49,51,5 4,84	7	5,83
Outras Ciências	35,36,49,52	4	4,12	54,55	2	3,63	42 -54, 83,84	15	12,50
Matemática Financeira	37	1	1,03	55	1	1,81	47, D4	2	1,67
Papel Ilustrativo	3,5,35,36,49, 52	6	6,18	32,54,55	3	5,45	47,48,49, 54,84	5	4,16
Usa a Matemática em situações de Modelagem	35,36,37,49, 52	5	5,15	32,54,55	3	5,45	47,48,49, 54,84	5	4,16
Papel Manipulativo	1, 2 ,3,4,5,30, 33,34,44,45	10	10,30	5,6,7,22,23,32 , 34,35,54,55	10	18,18	42 – 46, 50 – 53, 83	10	8,33
Descontextualiza-das	1,2,3,4,5,30, 33,34,44,46	10	10,30	5,6,7,22,23,34 ,35	7	12,72	42 – 46, 50 – 53, 83	10	8,33
Conceitos e Procedimentos									
Lei Algébrica da Função Exponencial	1,2,5,34,35,3 6, 37,38,49,50, 51	11	11,34	5	1	1,81	47,49	2	1,67
Valor Numérico	2,5,7,30,34,3 5, 44,45,49,50, 52	11	11,34	22,23,32,54,5 5	5		46,47,50,51,5 3,TV8, TV13,TV20	8	6,67
Gráfico da Função Exponencial	3,5,8,34,36, 45,49,51	8	8,24	7,34,35	3	5,45	42 -47, 52,TV7,9,10,1 5	11	9,16
Crescimento e Decrescimento	34,38	2	2,06	6	1	1,81	50,51	2	1,67

Valor de Domínio	33,37	2	2,06		0		83,TV22	2	1,67
Função Inversa	34,37	2	2,06		0			0	
Porcentagem e Juros	37	1	1,03	55	1	1,81	47	1	0,83
Tabela	34	1	1,03		0		TV8	1	0,83
Interdisciplinar		0		54	1	1,81	47 – 49, 54,84,TV8, 13,20, 28 –30, D3,4	13	10,83
Habilidades Envolvidas									
Calcular o valor numérico a partir de uma fórmula dada	30,35,36,44	4	4,12	32,54,55	3	5,45	48,83,84, TV7,8,9,10,15 ,20	9	7,50
Pares ordenados no gráfico e correlacionar com sua lei	5,36	2	2,06	7,34,35	3	5,45	46,TV7,10, 15	4	3,33
Cálculo do valor numérico, com inversa a partir da algébrica	37	1	1,03		0		47,49,D3,D4	4	3,33
Construção do gráfico a partir da álgebra	3,34,51	3	3,09	7	1	1,81	42 – 45, 47,52, T9,15,29	9	7,50
	Total	97	100%	Total	55	100%	Total	120	100%

1.5.1 Primeiro livro didático: Matemática: Contextos e Aplicações de Dante

As 52 questões apresentadas no capítulo de função exponencial deste livro abordam os temas e quantidades de questões distribuídas no quadro acima.

Apresentando 35% do total de questões vistas no capitulo que se dedica à função exponencial, acreditamos que esse percentual de questões ainda seria insuficiente para o que esperamos no aprendizado desse conteúdo. Dentre as questões contextualizadas que citamos acima, das 13 questões, 10 são meramente manipulativas quando sabemos que esta não é mais uma forma de trabalhar com a matemática. Esse livro pouco trata relação da função exponencial com as progressões aritmética e geométrica, pois existe esta relação dos eixos do plano cartesiano onde podemos relacionar as progressões aritméticas no eixo X e as progressões geométricas no eixo Y.

Neste livro existe pouca ou quase nenhuma relação interdisciplinar e ainda há muita repetição de exercícios do mesmo tipo. Apresentamos a seguir um exemplo de uma questão trazida no livro didático.

Questão 37. Página 199.
"A Quantia de R$ 20.000,00 foi aplicada a uma taxa de 1% ao mês".

a) *Qual será o saldo no final de 3 meses?*

b) *Por quantos meses deve ser feita a aplicação para que o saldo seja de R$ 32.210,20?"*

Nessa questão, o autor apresenta um exemplo do cotidiano utilizado no estudo de função, sem ter que necessariamente apresentar a fórmula matemática que modela a questão.

Sendo assim, podemos favorecer o interesse dos alunos e ainda poderemos dessa forma dar sentido ao aprendizado de forma contextualizada, tentando influenciar a reflexão dos alunos para situações do cotidiano.

O capítulo de Função Exponencial começa com um exemplo concreto, referente ao lançamento de uma moeda ou, mais geralmente, de *n* moedas distintas, tendo-se, claro, 2^n resultados possíveis quanto a caras e a coroas. Consideramos que Dante poderia ter usado este exemplo para provar que um conjunto com *n* elementos tem 2^n subconjuntos. Mas, como exemplo de Função Exponencial, não é o melhor; no máximo, poderia ser usado para ilustrar o conceito de progressão geométrica. Uma forma de representação que consideramos mais adequada para a Função Exponencial seria a cultura de bactérias que dobra a população em cada hora. No exemplo das bactérias, o modelo matemático é $f(x) = b.2^x$, onde *b* é a população de bactérias existente no início da experiência e o *x* é o tempo decorrido.

Insistimos nesta idéia pelo fato de consideramos a importância de o ensino da Matemática apresentar um equilíbrio entre a conceituação teórica, as manipulações práticas e as aplicações do cotidiano, relações desse tipo devem favorecer a aprendizagem em situações sem a intenção de aprendizagem.

É imrquivos de programas\Mcr rque os estudantes que se depara com problemas que usam essas funções têm a possibilidade de observar que elas acompanham os dados da questão, mas nem sempre sabem de onde vêm nem por que são usadas. Tal é o caso do capítulo do referido livro em questão que trrquivos de programas\Mcr O exercício 37 é o único, dentre os 52 nele contidos, em que a função exponencial não aparece no enunciado. Passaremos, nesse momento, a analisar os próximos autores.

1.5.2 Segundo livro didático: Matemática Vol.1 Alfa. dos autores BIANCHINI ? PACHOLLA

Os autores trazem, em seu livro didático, no capítulo sobre a função exponencial 55 questões que envolvem as propriedades e o conceito da função exponencial.

No livro desses autores, apresentando 18% do total das questões no capitulo que trata do estudo da função exponencial, verificamos que, para o aprendizado dos conceitos e das propriedades fundamentais da função exponencial, não favorece o saber a ser ensinado, devido à margem de dificuldades que o aluno deve superar para atingir o objetivo de aprender o assunto sugerido. Há uma evidencia forte das questões manipulativas, substituição de valores em fórmulas prontas, fato que nos preocupa como educador, pois não promove a reflexão para os alunos, haja vista as necessidades em se contextualizar os exercícios com situações didáticas que envolvam o cotidiano.

A questão seguinte, sugerindo interdisciplinaridade, será analisada separadamente:

Questão 54 (UEBA) Uma população de bactérias no instante t é definida pela função $f(t) = C*4^{kt}$, em que t é dado em minutos. Se a população depois de 1 minuto era de 64 bactérias e depois de 3 minutos, de 256, conclui-se qrqui vos de programas\ Micros de:

a) 32 bactérias	*b) 16 bactérias*	*c) 8 bactérias*
d) 2 bactérias	*c) 1 bactéria.”*	

Um bom exemplo, porém ainda traz a fórmula pronta, o que tira o mecanismo de tomada de decisão por parte dos alunos. Poderíamos trabalhar sem apresentar a fórmula, mostrando uma distribuição de valores em forma de tabela para que os alunos analisassem e construíssem a fórmula ou até mesmo que determinassem o resultado sem expor a fórmula. Esse tipo de estereotipo dificulta o desenvolvimento de habilidades específicas. É o que observamos em sala de aula quando iniciamos o assunto de funções, onde esperamos dos alunos uma reação. Há entrega dos resultados quando os mesmos estão acostumados com resultados prontos ou quase prontos. As fórmulas rotulam o aprendizado de maneira que o aluno constrói um modelo de valores entrada, processamento em fórmula e saída de valores que são os resultados.

Vemos que a função exponencial, como é apresentada no capítulo 7 deste livro, principia com uma revisão adequada das definições e propriedades das potências de expoente racional. Em seguida, são apresentados exemplos de fenômenos que variam exponencialmente com o tempo para motivar a definição da função exponencial de base a. Para traçar o gráfico, calculam-se valores da função de alguns valores da variável x. Semelhantemente a quase todos os livros texto, não são feitos comentários sobre a maneira como se sabe que o gráfico tem realmente esta forma.

Usando-se somente os pontos da tabela, é impossível concluir que a forma do gráfico é a apresentada. Seria correto dizer ao leitor que mais tarde ele observará que o gráfico de qualquer função exponencial tem um dos dois aspectos mostrados no livro, dependendo da base, ser maior ou menor de que um.

Dessa questão, podemos dizer que a mesma tem o compromisso desafiador e motivador favorecendo a construção do conhecimento pelo aluno, pois traz uma proposta interessante para que o aluno perceba e saiba pesquisar, organizar e analisar os dados e que possa chegar ao resultado. Assim sendo, o aluno pode desenvolver uma autonomia em relação aos estudos e isto é de fundamental importância para o desenvolvimento do conhecimento e ainda para diminuir a distancia entre o saber e o aluno.

1.5.3 Terceiro livro didático: Matemática vol.1 Iezzi

Esse livro traz, no capítulo sobre a função exponencial, 84 exercícios propostos, 34 testes de vestibulares e 04 questões desafio, conforme citamos na tabela acima, que envolvem as propriedades e o conceito da função exponencial.

Este livro didático, apesar de apresentar 18% do total das questões em exercícios propostos, apresenta 23% do total em testes de vestibulares e 50% das questões de desafios. Estes percentuais nos indicam como estão sendo distribuídas as questões com relação às aplicações na função exponencial. Neste caso, temos uma apresentação do total geral de todas as questões em torno de 20% promovendo de aplicações exclusivas com função exponencial, sem incluir outras áreas do conhecimento. Acreditamos que os exercícios tendem mais à formalização e à abstração do que as situações reais para o que pretendemos como objetivo, que é o o aprendizado dos alunos, no estudo das funções exponenciais.

Vemos que capítulo sobre o assunto inicia-se com uma revisão de potências, que os alunos já conhecem do ensino fundamental. Entretanto, na definição inicial lemos: Sendo *a* um rqui vos de progr amas\ Mcr *n* um número inteiro temos $\boldsymbol{a^{-n} = 1/a^{n}}$**.** Isto é mesmo uma definição ou conseqüência de algum fato anterior? O verbo ter, na frase, leva a uma conclusão, não necessariamente elucidada pelo leitor.

O livro aborda as equações exponenciais antes de estudar a função exponencial, pois, nos capítulos anteriores, as equações e inequações aparecem depois do estudo das funções correspondentes de forma a utilizar suas propriedades. Desta forma, para a resolução das equações exponenciais o livro cita, sem justificativa, uma propriedade que decorre da *injetividade* da função exponencial. Porém, a função exponencial só virá depois e o fato de ser *injetiva* não será mencionado no texto. Logo, só resta aos alunos aceitar como verdade e seguir em frente.

Os exercícios do capítulo são meramente manipulativos, ou seja, substituição de valores em fórmulas prontas. Não há nenhum problema contextualizado e nenhuma relação com o mundo em que vivemos. Isso preocupa pelo fato de não modelar questões com o cotidiano dos alunos, algo que poderá drquivosde programas\M cr os pois o aluno estará relacionando o conceito com o cotidiano, na aprendizagem do conceito.

1.6 O Uso do Material Manipulativo no Ensino de Função.

O que temos observado é uma crescente tendência na utilização do material manipulativo, incluindo os jogos, fato que vem se desenvolvendo e tomando conta da sala de aula, dos artigos, monografias, de teses, e de diversas pesquisas na área. Considerando os resultados positivos da aplicação desse material em atividades de ensino de matemática, apresentados em encontros de divulgação científica, aumentamos nosso interesse no tema. O que vamos ver nesse tópico são as aplicações de jogos no ensino da matemática como mais uma ferramenta metodológica no aprendizado de conceito e suas aplicações, de forma contextualizada.

1.6.1 A Torre de Hanói: Um jogo matemático enquanto material didático para o aprendizado da Função Exponencial.

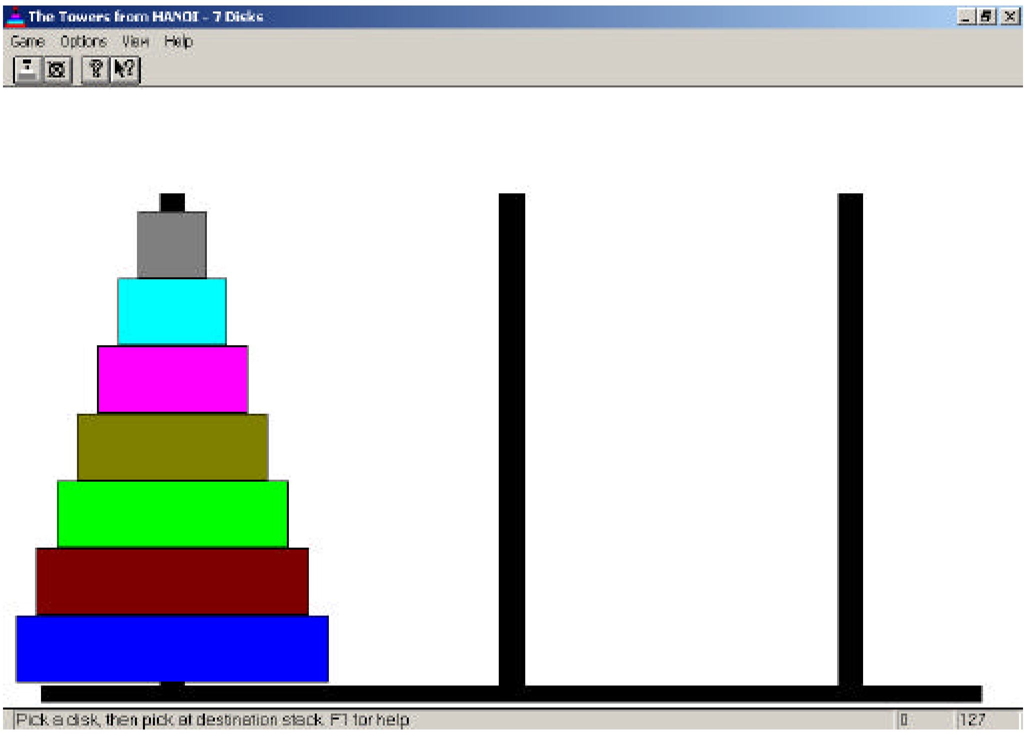


Figura 1: Modelo da Torre de Hanói.

A Torre de Hanói: Breve histórico e lenda

Segurquivos de programas\Micr Brahma, encontra-se nrquivos de programas\Micr cúpula de um templo situado em Benares, na Índia. Neste centro, há uma placa de latão onde estão fixados três pinos de diamante, em um dos quais ao criar o mundo, Brahma colocou 64 discos de ouro, apoiados uns sobrquivos de programas\ Micr os decrescentes a partir da base. Segundo as imutáveis leis de Brahma, os sacerdotes do templo estão incumbidos da tarefa de transferir a pilha de discos para um dos outros dois pinos trabalhando dia e noite sem cessar, sendo que devem mover um disco por vez e nunca pôr um disco maior sobre outro menor que ele. A vida decorrerá durante essa tarefa, após o fim da qual o templo, a torre e os sacerdotes serão transformados em pó, e o mundo desaparecerá com o estrondo de um trovão. No Ocidente, atribui-se a criação do jogo e da lenda da Torre de Hanói, ou Torre de Brahma, ao matemático francês Edouard Lucas. O jogo teria sido comercializado como brinquedo sob a autoria do Prof. Claus do colégio LI-SOU STIAN (anagramas de LUCAS e SAINT LOUIS, respectivamente. Este último era o nome do colégio onde Lucas lecionava). Como brinquedos, eram usados oito discos, segundo as mesmas regras descritas na lenda. Essa é a descrição inicial do jogo, para efeito de motivação.

1.6.1.1. Estrutura, Conceitos Matemáticos e Habilidades Mentais.

A torre de Hanói é um jogo que tem a seguinte estrutura: é um jogo de uma pessoa. Consiste de uma base retangular sobre a qual estão três pinos, e em um destes encaixadas sete peças de tamanhos diferentes (formando um conjunto chamado torre) dispostas do maior para o menor a partir da base. O objetivo do jogo é transportar, no menor número de movimentos possível (sendo um movimento o ato de tirar uma peça de um pino e colocar em outro), a torre de um pino para outro. Há duas regras: a primeira é que só pode ser transportada uma peça de cada vez e, a outra, é que uma peça maior não pode ficar sobre outra menor.

Quanto aos conteúdos subjacentes ao jogo, observamos contagem, função, progressão, paridade, conceito de diferenciação de áreas, conceito de indução finita.

Para as habilidades envolvidas, destacam-se os estabelecimentos de planos de estratégia, atenção e concentração.

1.6.1.2 Implicações Pedagógicas da Torre de Hanói para o aprer qui vos de pr ogramas\ Mi cr osal

Esse jogo tem sido utilizado com variantes, tanto no forma do brinquedo quanto no número de peças, tendo em conta os vários níveis escolares, a partir da pré-escola. A partir da quarta série, com as duas regras básicas, podem-se fazer explorações interessantes para descobrir a estratégia ótima. No segundo grau, podemos usá-la para desenvolver noções ligadas ao princípio da indução finita e das progressões geométricas. No terceiro grau, em álgebra abstrata, também pode ser usada para introduzir o princípio da indução finita.

Ao propor tal jogo, formado com todas as peças, a uma criança, devemos pensar na possibilidade de desistência após alguns minutos de tentativas, pela grande quantidade de movimentos exigidos. Neste caso, torna-se necessário uma intervenção do professor na condução do jogo ao objetivo desejado.

Assim, poderemos sugerir a construção inicial com um número mais reduzido de peças, permitindo que a pessoa desafiada possa descobrir no caso uma forma sistemática de efetuar as transferências e poder generalizar para um número qualquer de peças.

Fazendo uma contagem do número mínimo de movimentos para transferir a torre de um pino para outro qualquer, temos a tabela a seguir:

Número de Peças	Número Mínimo de Movimentos
N	*A(n)*
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
...	...
n	

Tabela 1: Relação entre número de peças da Torre de Hanói e o Número de movimentos.

Esta metodologia, segundo Machado (1992), leva a uma consciência na realização que enriquece o significado do jogo por clarear a razão dos movimentos.

A hipótese acima pode ser testada com $n = 7$, sendo verdadeira também neste caso.

A Torre de Hanói é uma fonte muito rica de problemas, que vão desde os iniciais, ligados ao desafio proposto de transferir as peças de um pino para outro, até aqueles que propõem questões mais elaboradas, a título de estratégias.

Lima (1991) sugere que neste ponto surge uma boa oportunidade para a indagação sobre a natureza da prova matemática. Sabemos que, de fato, a verificação de que a fórmula acima vale para casos particulares não se constitui numa demonstração matemática de sua validade, embora tenha uma forte dose de plausibilidade.

Na busca da estratégia ótima, pode-se buscar uma generalização para o número de movimentos da primeira peça do jogo (sendo esta a da base) até a última, a que fica no topo. Para a n-ésima peça, o número de movimentos e 2^{n-1}, de modo que estabelecemos uma relação desta generalização com a função exponencial. As quantidades dos movimentos de todas as peças formam uma progressão geométrica finita iniciando em 1, de razão 2, cuja soma ($1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1}$) corresponde à fórmula geral do número de movimentos mostrada a seguir.

Uma demonstração da validade da fórmula acima requer a obtenção de uma fórmula de recorrência, que, muitas vezes, é descoberta pelos que tentam resolver o desafio antes mesmo de perceberem a fórmula $A(n) = 2^n - 1$. Tal fórmula de recorrência é dada por :

$$A(n) = 2\,A(n-1) + 1.$$

Essa fórmula é verdadeira na Torre de Hanói porque, para remover a maior das peças do jogo do pino inicial, é necessário que, acima dela, nesse pino, não haja mais nenhuma das demais e que, no pino de chegada, também não existam peças depositadas. Conclui-se daí que as $n-1$ peças restantes devem estar no terceiro pino, para onde foram transportadas com $A(n-1)$ movimentos.

Para completar a transferência total é preciso, então levar a maior peça para o pino de chegada (1 movimento) mais outros tantos $A(n-1)$ para trazer as $n-1$ peças restantes do terceiro pino para o pino final, perquivos de programas\Mic $A(n-1) + 1 + A(n-1)$, que é o especificado acima.

De posse da fórmula de recorrência utilizamos o método de indução matemática para obtermos uma demonstração rigorosa da fórmula $A(n) = 2^n - 1$, para todo número natural *n.* Podemos observar nesta fórmula uma função composta, envolvendo a função exponencial.

Os cálculos feitos para a torre de Brahma, onde $n = 64$ *mostram* ser necessários 18.446.744.073.709.551.615 movimentos para executar a tarefa imputada aos sacerdotes; então, se cada disco levasse um segundo para ser movido, são necessários seis bilhões de séculos para completar a tarefa! Nas espirituosas palavras de machado: com as estimativas para a existência de vida na terra não passam de uns poucos milhões de anos, a profecia contida no mito que deu origem ao jogo não deve preocupar a nenhum mortal. (MACHADO, 1992, p.47).

Os jogos sempre foram recursos didáticos na relação de ensino e aprendizagem, em sala de aula. Contando com isso, vemos atualmente uma produção literária sobre este assunto em constante desenvolvimento.

Segundo Menezes (1996), em áreas do conhecimento como a Psicologia, a Biologia, a Psicopedagogia, a Psicanálise, a Pedagogia, entre outras, pesquisas têm mostrado que o jogo favorece o desenvolvimento geral da criança, enquanto que, entre muitas outras coisas, socializa e promove uma formação integral do indivíduo no sentido psicomotor.

Os Jogos na educação matemática, de uma forma geral, têm favorecido a aprendizagem enquanto promove ambientes descontraídos, harmoniosos, leve, bem ao gosto da criança no seu dia a dia.

Em particular, no ensino de matemática, o jogo ajuda a criança a tomar os primeiros contatos com a matemática sem a formalidade que requer uma linguagem toda especial, nem sempre fácil para a criança (IBIDEM).

Para auxiliar o trabalho dos professores, temos ainda publicações que orientam a utilização de jogos educativos em geral, ou matemáticos, em particular, dentro e fora da sala de aula, o que inclui a organização do material, na preparação do ambiente, coordenação dos trabalhos e avaliação dos resultados. Tomando como recurso didático o material manipulativo serve de bom referencial de aplicação por ser de fácil acesso aos alunos e aos professores.

Segundo Menezes (IBIDEM), na matemática, existiu sempre uma preocupação com a aplicação de jogos em sala de aula, como recurso didático e articulado com uma metodologia adequada. Pondo essa aplicação em sala de aula, percebemos nos olhares dos alunos o vislumbre que permitem os jogos.

TAHAN era um dos estudiosos e adeptos da utilização do jogo no ensino da matemática. Para ele, o jogo “faz com que o aluno sem aptidão para a matemática, passe a gostar dela”. (TAHAN, 1962, p.183). Para reforçar esta idéia, recorremos às palarqui vos de progr amas\M cd SANTOS, 1978, p. 1): “Assim, o poder de motivação e o poder de integração da técnica de jogos deveriam interessar positivamente ao ensino de matemática”.

No âmbito da Matemática, o jogo permite que o aluno utilize seus conhecimentos em experiências do cotidiano, em situações fora de sala de aula.

Como os modelos cognitivos, desenvolvidos pelos alunos relacionam as idéias para torná-las mais significativas, isso facilita a associação de conhecimentos anteriores e atuais, evitando a memorização, o que permite lidar com diversas áreas de inforquivos de programas\Micros

Segundo Menezes (1996), estamos ouvindo constantemente falar hoje em recuperar a qualidade da educação, resgatar o interesse e a motivação do aluno, a dignidade do prquivos de programas\Mic adequação do sistema educativo à realidade, o que não tem se mostrado uma tarefa simples. E esse problema não é apenas uma questão nacional, é também uma dificuldade apresentada nos Estados Unidos e na Europa. Afirma ela: “O jogo matemático tem sido também considerado elemento importante do ensino, enquanto permite colocar o pensamento do sujeito em ação, pois atuando nele externamente, permite ao aluno chegar a uma nova estrutura e forma de pensamento”. (MENEZES, 1996, p. 70).

Nessa concepção, o jogo adquire o caráter de recurso na relação ensino-aprendizagem; se a criança, colocada em situações em que, ao brincar, apreende a estrutura lógica do material, então, pode ser levada a apreender, também, dessa maneira, a estrutura matemática presente.

O jogo passa a ser, assim, uma seqüência-problema que dá significado para o aluno e que visa à construção de novos significados matemáticos, com o uso de material manipulativo.

1.6.2 Dobraduras: O Uso do Origami no Ensino da Função Exponencial

Afirmam alguns estudiosos que o Origami, trabalho correspondente à arte de dobrar papéis, é tão antigo quanto à existência da primeira folha de papel na China, obtida há aproximadamente 1800 anos pela maceração de cascas de árvores e restos de tecidos.

Quando o papel foi introduzido no Japão, entre os séculos VI e X, por monges budistas chineses, era acessível apenas à nobreza, por tratar-se de um produto de luxo, utilizado em festas religiosas e na confecção dos moldes de quimonos. Os japoneses transmitiam as figuras que criavam através da tradição oral, quando as formas eram passadas de pais para filhos. Como nenhum esquema de dobradura tinha sido registrado em livros até então, somente aquelas mais simples eram mantidas através do tempo.

As primeiras instruções escritas sobre Origami surgiram em 1797, com a publicação do livro “Senbazuru Orikata” (Como dobrar mil garças). Somente com a fabricação do papel em larga escala, o restante da população começou a aprimorar esta arte secular. No Japão, a partir do ano de 1876, passou a fazer parte integrante do currículo escolar.

A palavra “Origami” surgiu em 1880, a partir da união das palavras “ori” (dobrar) e “kami” (papel). Os árabes trouxeram o segredo da fabricação do papel para o norte da África e, no século VIII, os mouros levaram este segredo até a Espanha. A religião dos mouros proibia a criação de qualquer figura simbólica, como homens ou animais. Deste modo, as dobraduras em papel eram usadas apenas para confeccionar figuras geométricas e estudar os elementos presentes nas formas e dobras.

Vamos apresentar duas manifestações culturais ligadas ao Origami. O Tsuru (uma espécie de garça) faz parte de uma antiga tradição japonesa. Por acreditarem que essa ave possui mil vidas, quando alguém está com problemas de saúde é costume seusrquivos de programas\ Micros -se para dobrar mil tsurus de papel, dedicadas ao doente, expressando um forte desejo de restabelecimento. Outra tradição é que durante as festas de casamento no Japão, são queimadas cédulas imitando dinheiro e postas em envelopes vermelhos, ambos confeccionados em Origami, para trazer prosperidade ao casal. Temos ainda as várias figuras resultantes da *arte de dobrar* *papéis* possuindo diferentes significados simbólicos no Oriente. No Japão, o sapo reprrquivos de programas\Mi ade; a tartaruga, a longevidade; e o tsuru significa boa sorte, felicidade, saúde. Nas escolas primárias japonesas, o Origami era utilizado para desenvolver a coordenação motora da criança.

O crescimento do Origami no Ocidente teve inicio na década de 1950. Antes era praticado por poucas pessoas na Espanha, de maneira ocasional. Esta arte também passou por uma evolução criativa no Japão, havendo hoje várias centenas de livros de Origami impressos na língua japonesa, embora a linguagem simbólica utilizada para mostrar a seqüência de passos seja universal, assim como a linguagem Matemática.

Consideramos pertinente frisar que, ao introduzir o corte no papel no qual se faz as dobraduras, a arte passa de Origami para se chamar Kirigami. No Brasil, os textos que encontramos voltados para a escola como os de Aschenbach (1993) e Gênova (1991), passam a utilizar, tanto o corte, quanto a colagem, de modo que generalizou-se o termo *dobradura,* tratamos mais comumente.

Assim, buscamos no Origami, ou melhor, dizendo, nas drquivos de programas\Mic principal para a motivação de nossa pesquisa, pois sendo assim acreditamos que as dobraduras possam criar um ambiente favorável ao aprendizado inicial do conceito da Função Exponencial. Tratando a relação ensino aprendizagem de maneira diferenciada poderá favorecer na construção do conceito de forma acessível aos nossos alunos.

Identificamos, ainda nas dobraduras, uma vasta aplicação desde o seu desenvolvimento como ferramenta de utilização nas áreas da Educação.

Para estudiosos como Rego (2004) e Sá (1977), o Origami (ou dobradura) pode representar para o processo de ensino aprendizagem de matemática um importante recurso metodológico, através do quais os alunos ampliarão seus conhecimentos geométricos formais, adquiridos, inicialmente, por meio da observação do mundo de objerquivos de programas\Micro

Na realização das dobraduras, os alunos familiarizam-se crqui vos de pr ogramas\ Ml c formas; características do quadrado e de outros quadriláteros; movimentos de transformação e múltiplas linhas de simetria dentro de uma mesma figura. Noções de retas perpendiculares, retas paralelas, figuras planas e sólidas, congruência, bissetrizes de ângulos, relações entre áreas e proporcionalidade poderão ser introduzidas de maneira igualmente eficaz.

Através das dobraduras, os estudantes trabalham com a interpretação de esquemas, os quais seguem ao construir figuras planas ou espaciais; aprendem a usar os termos geométricos em um contexto; desenvolvem habilidades de concrquivos de programas\ Mlcrcooperação.

Outras áreas do ensino também poderão fazer bom uso das dobraduras para motivar o aluno, sendo que, no nosso caso, conduziremos para a função exponencial; cabendo ao professor selecionar adequadamente a dobradura a ser utilizada, de acordo com o nível de conhecimento do aluno e do conteúdo a ser trabalhado. Lembramos aqui que a função exponencial é apresentada nos livros como uma função real, definida em toda a reta, de modo que no caso do origami, iniciamos com uma função discreta, pois o domínio, representado pela quantidade de vezes que o papel é dobrado, corresponde ao conjunto dos números naturais. Nesse momento, um cuidado necessário, é não associar a função dessa forma ao gráfico contínuo no plano cartesiano.

Por rquivos de programas\Mlcções, das dobraduras apresentam formas que facilmente se adequarão aos objetivos almejados. Ao se familiarizar com as técnicas das dobraduras, o professor poderá avaliar o quanto essa técnica de origem oriental tem a contribuir como recurso didático para o processo de ensino aprendizagem da Matemática.

Esperamos que, as dobraduras possam nos dar subsídios para compor em uma seqüência didática onde, relaciona esta arte com o domínio do conteúdo por parte do professor, favoreçam a discussão de idéias que possam ajudar na aprendizagem.

Na relação ensino-aprendizagem, não só na matemática, como em outras ciências, torna-se imprescindível o controle sobre todas as variáveis que se apresentam envolvidos. Henry (1992), afirma que devemos questionar sobre a articulação das formas de aprendizagem e verificar a função das inúmeras variáveis envolvidas: variáveis de contexto, variáveis didáticas e variáveis constitutivas do saber.

Gálvr quivos de progr amas\McUma parte importante da análise de uma seqüência didática consiste na identificação das variáveis didáticas e no estudo, tanto teórico como experimental, de seus efeitos. (p.30).

Henry (1992) afirma que as variáveis didáticas são aquelas que estão sob o controle do professor e determinam a seqüência didática permitindo-lhe modificá-la, através de sua manipulação, bloqueando o uso de algumas estratégias e gerando condições para o surgimento e o estabelecimento de outras, subjacentes ao conhecimento que se quer ensinar. Sua manipulação permite ao professor se certificar de que a solução de uma seqüência problema, por exemplo, depende da aparição de certo conhr qui vos de programas\Mcr

Brousseau (1997) poderia afirmar que, a escolha adequada de certas variáveis didáticas provoca mudanças qualitativas nas estratégias pertinentes para a resolução da seqüência.

Sendo assim, Henry (1992) apresenta a seguinte classificação para as variáveis didáticas:

?? Relativas à seqüência didática: a seleção de atividades ou ainda as tradicionais aulas expositivas; as regras ou a resolução de problemas; as atividades em grupo ou individuais; o tempo; o programa para ser cumprido; dentre outras.

?? Relativas ao contrato didático: o contrato proposto entre professores e alunos; relações interpessoais; as expectativas criadas entre professores e alunos; as formas de avaliação do trabalho; dentre outras.

Criamos expectativas a respeito da resolução das atividades e em relação às ações provocadas pelos alunos mediante uma seqüência atípica. Tais expectativas são relativas à transposição didática: apresentação da noção estudada; adaptação de pré-requisitos; tratamento do erro; utilização de ferramentas específicas; objetivos do conhecimento proposto e aceito; dentre outros. De acordo com Bessa de Menezes (2004), não nos preocupamos com as colocações nrquivos de programas\Micro didárquivos de programas\Micro-nos à questão da transposição didática interna dos alunos.

Henry (1992) afirma que a essas variáveis didáticas podem-se acrescentar àquelas relativas ao saber e à sua elaboração pelos alunos:

?? Constituição histórica dos conceitos e dos instrumentos básicos da Matemática, contradições, rupturas e reestruturações.

?? Desenvolvimento e organização dos campos conceituais na Matemática contemporânea.

Relacionando as variáveis didáticas apresentadas com as variáveis presentes em nossa proposta, ressaltaremos que a relação entre os conhecimentos anteriores e a seqüência didática proposta deverá favorecer a adaptação do aluno neste novo desafio, bem como a interação com outros colegas e o professor. Estaremos, desta forma, tentando resgatar a história da matemática com um relato da origem do Origami, suas formas e curiosidades, com o intuito de estabelecer um limite de curiosidade no aluno e ainda como uma forma de motivação na introdução da aula. Acreditamos que o conhecimento proposto será aceito de acordo com a adaptação à seqüência didática.

Desta forma destacaremos que tanto os alunos quanto nós deveremos estar comprometidos com o processo de ensino aprendizagem em um conjunto de informações que levam a formação do conceito e construção do conhecimento. Iremos buscar a criação de um espaço no qual o aluno desenvolva os aspectos relacionados à construção do conhecimento através da seqüência didática para que possa favorecer em outras situações do cotidiano. Acreditamos que só assim ele terá motivação para aprender com o mundo e ser seletivo. Bem como desenvolver a sua própria autonomia.

No caso da matemática e em alguns pontos, deveremos ser específicos e efetuar um tratamento pedagógico voltado para a seqüêrquivos de programasMicro Deveríamos sempre que possível e necessário desenvolver uma atividade para todas ou quase todas as áreas do conhecimento, pois acreditamos que assim motivaríamos ainda mais os nossos alunos, muito embora saibam que não é apenas uma seqüência didática que pode mudar o rumo da relação ensino aprendizagem. Existe uma série de fatores que fazem parte da construção do conhecimento e não cabe tentarmos resolver todos quando no mais pretendemos auxiliar na construção do conhecimento da função exponencial. Temos a consciência de que o processo de construção do conhecimento matemático não se reduz a dar “boas respostas”, mas a elaborar “boas questões” (FREITAS, 1999, p.72).

Questões, que tratam do assunto e que podem ser observadas no cotidiano, podem servir de estímulos para quem está envolvido. Questões que traduzem a realidade dos fatos que fazem parte de nosso mundo. Por exemplo, verificando os índices de crescimento populacional de acordo com o levantamento feito nas pesquisas do censo realizado pelo Instituto Brasileiro de Pesquisa Estatística (IBGE), nos mostram que houve um crescimento populacional maior em determinada região em relação às demais. Se por hipótese questionarmos a veracidade das informações dadas pelo IBGE poderia criar uma questão referente a este assunto. Então podemos questionar: E se por acaso este levantamento tenha sido de alguma forma deixado dúvidas, ou se os pesquisadores manipularam estes valores? Os que poderíamos fazer para verificar se são verdadeiras essas informações? São questões como essas que podem servir de estímulo na hora de executar a atividade.

Formamos as nossas idéias através das informações que são passadas e que normalmente nos chamam atenção, dessa forma guardamos ela em local apropriado e ao nosso acesso. Esse tipo pode ser tido quando somos atraídos por algum desafio pedagógico que chamem atenção. Assim, acreditamos na construção do conhecimento formada com base e isto deve ser feito através de uma orientação adequada ao momento.

METODOLOGIA

2. Metodologia

Neste capítulo descreveremos a estrutura da nossa pesquisa empírica. Para a mesma, optamos por fazer uma abordagem qualitativa, contendo análise de dados quantitativos. Assim, passamos a descrever o campo da pesquisa, os sujeitos selecionados, os instrumentos de coleta de dados, as análises prévias e as formas de análise dos dados, justificando as escolhas à luz dos teóricos que orientarão as análises.

2.1 O Universo e a Amostra

Voltamos a lembrar que nosso trabalho enfoca a aprendizagem do conceito de função com o uso do material manipulativo. Uma vez que esse conteúdo costuma ser ministrado na 1ª série do ensino médio, buscamos selecionar, em uma escola públIrquivos de programas\Micros esquisa.

Optamos por esse segmento escolar por ser nele que, usualmente, se ensina o conteúdo em frquivos de programas\Micro-se num espaço aberto para pesquisas e investimentos em metodologias e técnicas de ensino. Portanto elegemos, para universo de nossa pesquisa, uma escola da Região Metropolitana do Recife, o Colégio Liceu de Artes e Ofícios. No contato com a escola, fomos recebidos pela direção, coordenação, corpo docente e discente. O colégio que escolhemos para nosso campo de pesquisa apresenta boas instalações e estrutura satisfatória. Nele, selecionamos os alunos de uma das turmas de 1ª série do ensino médio.

Esta turma foi selecionada por ser a que melhor refletia o trabalho da escola, em vista de ser aquela onde havia menos evasão e faltas de aula, de modo que os professores podiam, de fato, realizar seu trabalho. Assim, através da turma, poderíamos constatar o tipo de trabalho que era desenvolvido pelo corpo docente incluindo o conteúdo, o que significa que os alunos deveriam ter já estudado, junto ao professor, os conteúdos necessários para fazerem parte da pesquisa. Esta escolha foi feita pelo professor da turma juntamente conosco, na discussão sobre a intervenção.

2.2 Os Sujeitos

Para o desenvolvimento das atividades da pesquisa, selecionamos um grupo formado por 36 alunos da primeira série de uma turma do ensino médio, dentre os 45 alunos dessa turma. O referido grupo foi indicado em vista de, pelas razões expostas mais atrás, já ter tido acesso ao conhecimento de potência, englobando as definrqui vos de programas\ Ml c propriedades.

Nossos sujeitos, nesta pesquisa, foram organizados em duplas para o desenvolvimento das atividades, e trabalharam o tempo todo com essa formação. Optamos por essa modalidade de trabalho por considerarmos que a atividade em dupla favorece tanto a discussão e a socialização dos alunos enquanto futuros cidadãos (BRASIL, 1997), contribuindo para a construção do conhecimento nos mesmos.

Consideramos que esta formação, com um objetivo voltado para a resolução das atividades em uma seqüência didática, devem favorecer à tomada de decisões em equipe e, para que a equipe tome as decisões, existe a troca de idéias, a partir das quais novas concepções podem ser formadas.

As tomadas de decisões em grupo como tendências no mundo nos despertaram para identificarmos essa tendência entre os adolescentes, os que nos chamou atenção para verificar se essa conduta pode ser eficiente em sala de aula.

A formação do cidadão pode ser realizada, complementarmente, dentro e fora da sala de aula. Percebemos que as horas que os alunos passam fora dela contribuem para certas atitudes tomadas por eles. Trazendo os alunos essas vivências para a escola, e interagindo entre si, teremos que, aquelas poderão também intervir na forma como o aluno vai se rqui vos de programas\ Ml cr o

2.3 Os Instrumentos de Coleta de Dados

Para coletar os dados que foram obtidos a partir dos sujeitos, optamos por lançar mão de instrumentos que permitissem acessar, tanto dados quantitativos, quanto dados qualitativos. Como já explicamos anteriormente, consideramos que esse procedimento permitirá que façamos uma melhor leitura dos mesmos, de acordo com os objetivos estabelecidos, permitindo expressar melhor os resultados.

Em todos os momentos do trabalho efetivo, junto aos alunos, nossa postura foi de não intervir nas ações dos alunos e nas respostas, apenas observar, perguntar e registrar, pois tínhamos o objetivo de coletar as idéias dos alunos a respeito do crescimento e decrescimento exponencial sem que houvesse a nossa participação ou influência nos resultados. Para tanto, não intervimos nas respostas registradas pelos alunos no momento da atividade. As respostas foram dadas exclusivamente pelas duplas que formavam os grupos, bem como quaisquer decisões a respeito das respostas foram por eles tomadas.

Passamos a descrever cada um dos instrumentos.

2.3.1 O Pré-teste e o Pós-teste

Estes dois instrumentos estão sendo descritos juntos por que seguem o mesmo modelo (Vide apêndice A). No início da pesquisa, aplicamos uma atividade para os alunos resolverem, voltando a ela no final, para posterior comparação de desempenho. Nesse momento, tivemos como propósito uma coleta de informações que permitisse a analise de conceitos prévios dos alunos no que diz respeito ao crescimento exponencial. Esse serviu como o primeiro conjunto de dados para a discrquivos de programas\Mic

O Pré-teste (Pós-teste) consiste de uma questão sobre crescimento e decrescimento exponencial com a utilização de material manipulativo. Mais especificamente, EVA, comumente conhecido como emborrachado, os quais deverão cortar e empilhar os pedaços objetivando apontar, algumas propriedades referentes ao aumento da pilha e diminuição do tamanho de cada pedaço após cada corte, do ponto de vista do crescimento e decrescimento exponencial, respectivamente.

Para a atividade, os alunos deveriam lançar mão de um pedaço de EVA medindo 30cm x 30cmx 0,2cm, uma tesoura, uma régua e uma folha impressa com a questão, cujo enunciado é o que segue:

"*Desafio: Considere que uma folha de emborrachado tenha espessura de dois milímetros. Quantas vezes teríamos que recortar essa folha e empilhar (colocar um em cima do outro) os pedaços obtidos em cada corte ao meio, para que a altura da pilha tenha um valor numérico aproximado a quatro mil milímetros ou quatro metros* **?"**

No desafio proposto, esperávamos que os alunos identificassem o crescimento exponencial fazendo uma relação através do recorte e empilhamento, no que diz respeito à altura antes e depois, e o decrescimento exponencial pelo recorte das partes fazendo um comparativo entre a área dos recortes antes e depois.

Observando-se com cuidado os procedimentos adotados anteriormente, poderemos verificar a relação no crescimento e decrescimento exponencial, fato fundamental na construção do conceito de Função Exponencial, pois é uma propriedade característica desse tipo de função.

As concepções dos alunos a respeito do referido conceito podem favorecer a construção do conhecimento, quando associadas às propriedades que permeiam e aproximam o aluno do saber a ser aprendido proposto pelo conteúdo.

2.3.2 A Seqüência de Atividades.

A referida seqüência consistiu de um conjunto de três roteiros de atividades que os alunos deveriam desenvolver em momentos distintos, com a presença do pesquisador e o professor, visando coordenar as atividades.

Fossa (2001, p. 79) argumenta que:

> [...] atividades bem estruturadas e usadas com consciência e criatividade podem ser um instrumento poderoso na aquisição de crquivos de programas\Microsferirquivos de programas\Mic utilizar materiais a serem manipulados pelos próprios alunos, além de conter componentes lúdicos, orais e simbólicos. E, finalmente, deveriam ser seqüenciadas de maneira apropriada.

Assim considerando, elaboramos cada atividade no sentido de contribuir para a construção do conhecimento do aluno em relação ao conteúdo em foco. Passamos a descrever cada uma das atividades.

Na primeira atividade, os alunos deveriam lançar mão de um pedaço de EVA com as mesmas dimensões daquele usado no pré-teste, e trabalhar na perspectiva do crescimento/decrescimento exponencial. Segue o enunciado da atividade;

Atividade 1. *"Utilizando a Folha de E.V.A. com espessura de 2 mm (milímetros), preencha o quadro abaixo:*

Consrquivos de programas\Mões que efetuamos na folha de emborrachado e relacione com a espessura da pilha apresentada após o recorte e o empilhamento e a situação antes do recorte. Em seguida relacione a fração do pedaço recortado e o pedaço antes do recorte, preencha resultado no quadro.

Número de recortes	*Espessura da pilha total de pedaços recortados*	*Fração do pedaço em relação à folha inicial*
0	*2*	*1*
1		
2		
3		
4		
...		
...		
N		

Quadro 2. Crescimento e decrescimento exponencial no trabalho em atividades de corte e empilhamento com EVA

?? *Você consegue identificar alguma relação matemática nessa atividade? Em caso afirmativo, qual?*

Nessa atividade, os alunos deveriam preencher o quadro que relaciona o número de cortes no emborrachado e a espessura da pilha de pedaços recortados, montada após os recortes verificando a fração do pedaço da folha final em relação ao pedaço da folha inicial. O modelo da atividade encontra-se no apêndice B.

Os alunos distribuídos em dupla deveriam efetuar os recortes e fazer o empilhamento de modo a observarem no quadro, a noção de crescimento e decrescimento exponencial, permitindo assim a formação conceitual de forma dinâmica, julgada mais compatível com sua formulação matemática e um tanto eficiente para o aprendizado do conceito. Uma seqüência envolvendo material manipulativo com recorte em folha de emborrachado, permite uma situação de ação prática e motivadora para aplicação por tratar de um material didático de fácil acesso a todos.

Através do questionamento, tentamos verificar as idéias que os alunos possuíam em relação ao crescimento e decrescimento exponencial, bem como se eles conseguiriam relacionar a atividade ao conceito da função exponencial, que era o foco de nossa pesquisa.

Na segunda atividade, os alunos deveriam jogar um jogo intirqui vos de pr ogr amas\ Mr no qual eles precisavam identificar, na quantidade de movimentos de cada peça, e do conjunto de todas elas, um crescimento exponencial e uma relação entre o número de peças e o número mínimo de movimentos. Para isso, cada dupla recebeu um exemplar do jogo, com um roteiro impresso, com as atividades a serem feitas. O modelo do roteiro consta no apêndice C.

O referido roteiro era composto de três partes. A primeira parte descreve as informações básicas que compõem a estrutura do jogo, conforme a transcrição que segue:

“A Torre de Hanói – Como jogar”:

***Objetivo**: Transportar a torre, com o menor número de movimentos possível, para um dos outros dois pinos, o qual pode ser previamente determinado ou não.*

***Regras**: 1. Só deve mover apenrqui v os de programas\ M c*

2. Uma peça maior jamais poderá ficar sobre uma menor. "

Na segunda parte, o aluno deve tentar refletir sobre um conjunto de questionamentos que lhes requereriam usar o raciocínio lógico para escolherem as jogadas. Segue a transcrição das questões. A outra parte constava de dois quadros que deveriam ser preenchidos por eles.

"Reflita sobre as questões abaixo e em seguida preencha as tabelas mais adiante":

?? *É possível chegar ao objetivo desejado?*

?? *Se for possível atingir o objetivo, qual o procedimento mais eficaz, ou seja, qual o menor número de movimentos?*

?? *Existe uma regra simples, um algoritmo de execução, que permita efetuar os movimentos sucessivos dessa estratégia mais prática?*

?? *Existe alguma relação matemática entre o número n de peças da torre e o número mínimo A(n) necessário para efetuar a sua transferência do pino de origem para o pino final? Exisrqui v osde progr ama s\M c rA(n), da variável n?*

?? *Esse número mínimo A(n) é o mesmo quando tomamos com pino final qualquer dos dois que se encontram vazios no início do jogo?*

?? *Cresce esse número mínimo de movimentos, com a quantidade de peças do jogorqui vos d e pr ogr a mas\ M c A(n) cresce com a variável n?*

?? *Como seria a estratégia mais rápida quando mudamos o número de peças?"*

Na terceira parte, os alunos deveriam preencher dois quadros, sendo o primeiro com a contagem do número de movimentos de cada peça, e o outro com o número de movimentos necessários para transportar sub-torres com um, dois, três, etc., discos na perspectiva de uma lei de formação geral. Apresentamos a seguir o modelo do primeiro quadro:

Quadro 3**:** Número mínimo de movimentos das peças da Torre de Hanói, para transportar a mesma de um pino para outro, considerando a peça da Base.

Número de peças	Número Mínimo de Movimentos das peças
N	*A(n)*
1 (peça da base)	1
2	
3	
4	
5	
6	
...	...
N	

Aqui, podemos estabelecer uma função exponencial entre o número da peça a partir da base e o número mínimo de movimentos que a peça deverá sofrer:

$$f(n) = 2^n.$$

Isso não ocorre quando tentamos transportar as peças de um pino para outro, sem levarmos em consideração as questões anteriores, trabalhando os movimentos das peças da Torre de Hanói, em seus pinos, e verificar a passagem de um pino para o outro.

Passamos a mostrar o modelo do quadro 2, relacionando o número total de peças da torre com o total de movimentos:

Quadro 4: Número mínimo de movimentos dos discos da Torre de Hanói, para transportá-la de um pino para outro.

Número de Peças	Número Mínimo de Movimentos da torre
N	*A(n)*
1	1
2	3
3	
4	
5	
6	
...	...
N	

Dessa forma, esperamos que o aluno estabeleça uma relação entre a matemática e os movimentos das peças da Torre de Hanói com a Função Composta: o número mínir qui vos de programas\ Mlcrios para transportar uma torre de um pino para outro qualquer, segundo o número de discos *n*, é dado por:

$$g(n) = 2^n - 1 = f(n) - 1$$

Essa atividade, efetuada com a Torre de Hanói nos traz, implicitamente, a aplicação de conceitos fundamentais à caracterização da função exponencial estabelecida pelo crescimento e decrescimento exponencial, quando da observação e análise dos dados apresentados nos quadros, após o preenchimento. Chamamos a atenção para o fato de que não é diretamente identificada a relação exponencial no simples fato de jogar com a Torre de Hanói; se fizermos uma relação da peça da base da torre com os movimentos necessários à sua locomoção para outro pino, é que essa relação validará o conceito de crescimento exponencial.

Finalmente, a terceira atividade constou de três problemas impressos, onde a busca de solução requer fazer algumas considerações sobre crescimento exponencial, cujo roteiro encontra-se no apêndice D. A atividade 3 foi elaborada considerando as questões contextualizadas pelo cotidiano dos alunos, na tentativa de dar sentido ao saber a ser ensinado.

O enunciado da primeira questão é o seguinte:

1. *“Qual das opções você escolheria como financeiramente a mais vantajosa para comprquivo s de programas\ Micro*

    a. *R$1.000,00 pelo primeiro dente, R$2.000,00 pelo segundo, R$ 4.000,00 pelo terceiro dente e assim por diante.*

    b. *R$5.000,00 por cada dente. Por quê?”*

A resolução desse problema caracteriza-se pela busca do crescimento exponencial e trata de uma situação contextualizada e articulada com orquivos de programas\ Micr uma proposta em torno da compra de um cavalo da raça puro sangue. Nela, o valor do cavalo é obtido a partir da quantidade de dentes que o mesmo possui no ato da negociação. Esta relação com o valor de venda do cavalo e a quantidade de dentes, permite um crescimento exponencial como resultado para o preço final do animal.

Como observamos na primeira alternativa, existe uma relação de crescimento exponencial, fato que não acontece na segunda alternativa, pois o valor fixo para cada dente apresentado permite um resultado linear: basta multiplicar o preço de um dente pela quantidade total de dentes do cavalo.

Admitindo que a função exponencial caracteriza-se crquivos de programas\ Micros ponto de vista de sua formação gráfica, estamos em nossa pesquisa citando casos em que a função exponencial trata-se como uma função discreta, analisando intervalos de pontos.

Nessa atividade, o nosso foco era de permitir, a identificação, por parte dos alunos, do modelo de crescimento exponencial e não da relação com um modelo linear da função constante. Quando fizemos o questionamento, esperávamos uma ação típica de um crescimento exponencial e que, nesse caso, induziria os alunos a selecionarem, para a compra do animal, a opção que tornasse o preço final o menor possível fato que estaria sendo promovido na alternativa que fixava um valor para os dentes do cavalo. O que valoriza a resposta é o modo de sua resolução, que dessa forma nos permitiu uma análise mais elaborada das questões, pois a escrita indica as dificuldades didáticas que os alunos apresentam na construção do conceito.

Na segunda questão, escrita abaixo, apresentamos uma situação contextualizada que promove a ação de um pai com seus dois filhos na distribuição de suas mesadas da seguinte forma: o filho mais novo receberá a sua mesada em um crescimento exponencial, para isso os alunos deveriam perceber essa relação de crescimento exponencial. O enunciado é apresentado em seguida:

"2. Um pai resolve distribuir uma mesada para cada um dos dois filhos da seguinte forma":

c. O filho mais novo receberá R$1,00 no primeiro mês e dobra a cada mês em relação ao mês anterior;

d. O filho mais velho receberá R$ 150,00 por mês e com aumento do mesmo valor nos meses seguintes, ou seja, ele receberá a sua mesada mais R$150,00 por mês.

De acordo com essas condições qual o filho que receberá maior quantia após 12 meses? "Justifique."

A terceira questão versa sobre a compra de uma moto em prestações, onde o aluno deverá refletir e escolher dentre as alternativas de pagamento oferecidas, a mais vantajosa no sentido de pagar o menor valor total. Apresentamos o enunciado a seguir:

1. *'Na compra de uma moto, uma concessionária estava oferecendo as seguintes propostas aos clientes:*

   a. *O cliente levaria a moto e pagaria em 15 meses com parcelas iniciando com R$2,00 e dobrando a cada mês em relação ao mês anterior até o final do prazo.*

   b. *O cliente efetuaria os pagamentos mensais com parcelas fixas de R$200,00.*

   Com qual das opções de pagamento o cliente teria mais vantagens financeiras?"

Podemos observar, pelo enunciado das duas últimas questões, que as mesmas tratam de crescimento exponencial, de modo que a análise das mesmas quanto aos procedimentos esperados é semelhante, razão pelo qual não a apresentaremos novamente.

Como já explicamos anteriormente, após a seqüência de atividades que acabamos de drquivos de progr a mas\ Micr -teste para posterior verificação de eventual diferença de desempenho comparativamente à contribuição das atividades na aprendizagem dos conceitos enfocados na pesquisa. O tratamento dos dados foi feito de forma quantitativa e qualitativa, como veremos a seguir.

2.3.3 O Tratamento Quantitativo e Qualitativo dos Dados

Para as respostas dadas pelos alunos em cada um dos instrumentos de coleta de dados, procederemos a um tratamento quantitativo dos acertos e erros, da seguinte maneira:

Quadro 5: Distribuição quantitativa dos acertos e erros nas respostas dadas às questões dos instrumentos de coleta de dados.

	Acertos				Erros		
	A_1	A_2	A_3	A_4	E_1	E_2	E_3
Duplas	-	-	-	-	-	-	-
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
Total							
%							

Legenda:

A_1 – Certo sem raciocínio
A_2 – Cerrquivos de programas\Micro
A_3 – Certo com raciocínio incorreto
A_4 – Certo com raciocínio parcialmente correto

E_1 – Errado sem raciocínio
E_2 – Errrquivos de programas\Micr
E_3 – Errrquivos de programas\Micro

Inicialmente, para cada questão de cada instrumento, organizaremos os acertos e erros dos alunos, dupla a dupla, de acordo com as possibilidades de acertar ou errar a questão, justificando ou não a resposta, num quadro cujo modelo é mostrado a seguir:

Para compreendermos os elementos que compõem o quadro e a legenda, enumeramos as duplas de um a dezoito, visando preservar a identidade dos alunos. Quanto à legenda temos que *A_1 – certo sem raciocínio,* corrquivos de programas\Mic ter apresentado a resposta certa; *A_2 - certo com raciocínio correto*, significa que, alem de a dupla ter dado a resposta certa ainda fez corretamente os cálculos que chegaram a ela ou descreveu os referidos cálculos; *A_3 – certa com raciocínio incorreta* significa que a descrição ou os cálculos apresentadrquivos de programas\Mic certa e *A_4 – certo com raciocínio parcialmente correto*, corquivos de programas\Micro ou cálculos que levam até parte da resposta correta. No caso das questões erradas, as categorias *E_1, E_2* e *E_3* sãorquivos de programas\Micr

Acrescentamos que a penúltima linha do quadro apresentará o quantitativo das ocorrências em cada categoria da legenda e a última linha os percentuais equivalentes da linha anterior. Após o enquadramento das respostas faremos a discussão dos resultados quantitativos, tanto absolutos quanto percentuais, buscando fazer inferências na direção dos objetivos. Finalmente, buscaremos as possibilidades de interpretação desses resultados à luz das idéias dos teóricos que orientam esse trabalho.

Quanto aos dados qualitativos, estes correspondendo aos procedimentos utilizados para resolver os problemas e as justificativas apresentadas, procuraremos analisar os acertos e erros com as prováveis causas e as implicações nas idéias que embasaram a pesquisa.

2.4 Procedimentos Metodológicos

Voltamos a lembrar que nossa pesquisa foi feita com uma abordagem qualitativa contendo análise de dados quantitativos. Para o seu desenvolvimento, seguimos os passos que passamos a descrever:

?? Inicialmente, selecionamos uma escola para campo de pesquisa e, nela, contatamos a direção na intenção de executarmos as intervenções com os alunos da primeira série do ensino médio, fato que seria tratado na construção dos dados para que pudéssemos validar nossa hipótese de pesqrquivos de programas\Microde uma escola que estivesse aberta a pesquisa e a novas idéias metodológicas.

?? Em seguida, juntamente com o professor de matemática contatado, selecionamos uma turma no universo das apresentadas na escola. Essa escolha foi feita pelas razões que já explicamos mais atrás.

?? Elaboramos os instrumentos de coleta de dados que foram: o pré-teste, o pós-teste, e a seqüência de atividades, composta por três atividades. Esse instrumento foi baseado na pesquisa que fizemos nos livros didáticos, onde verificamos uma baixa freqüência de questões contextualizadas e articuladas com uma seqüência de atividades. A análise das questões dos livros didáticos citados em nossa pesquisa nos conduziu a elaboração da seqüência de atividades.

?? Na primeira intervenção aplicamos o pré-teste, uma questão denominada de desafio, formulada através de uma situação contextualizada com material manipulativo. Essa sessão teve uma duração de 18 minutos, desde o início até a entrega da última dupla. Os alunos estavam na sala de aula, onde normalmente eles já assistiam às aulas dos professores nos horários estabelecidos pela instituição. Como afirmamos anteriormente que os alunos trabalharam em dupla, e os professores não interferiram em nenhum momento da intervenção, para que existisse influencia nos resultados. Objetivamos uma fonte primária para análise.

?? O próximo passo foi o de aplicação seqüência de atividades numa nova sessão. Nesse momento, usamos a seqüência de atividades sendo cada uma entregue aos alunos à medida que eles iam encerrando a atividade anterior, sabendo que foi uma seqüência de três atividades. Em uma sessão eles executaram as três atividades, fato que foi presenciado por nós e que teve uma duração de 45 minutos. Além das folhas de atividades, os alunos recebem a folha de EVA, uma tesoura, uma régua, para o desenvolvimento da primeira atividade, e um exemplar da torre de Hanói, para desenvolver a segunda atividade, tendo que articular as atividades com o material manipulativo. Baseamos a análise dos dados escritos, pelos alunos, nas atividades, onde construímos a nossa discussão final a respeito dos resultados obtidos.

?? Após a seqüência de atividades aplicamos o pós-teste que é a retomada do pré-teste, para verificarmos eventualmente a diferença de desempenho dos alunos no processo de aprendizagem passada às atividades. No pós-teste não houve interferência dos professores e nem troca de informações entre os alunos.

?? Finalmente, catalogamos e sistematizamos os dados e realizamos a análise para apresentarmos os resultados. Os dados quantitativos referentes às respostas às questões foram organizados em tabelas e quadros para tratamento estatístico. As justificativas às questões, bem como os procedimentos descritos por eles como tendo sido utilizados para encontrar as respostas e seus comentários informais foram analisadas qualitativamente.

A partir das atividades realizadas, fizemos uma pré-análise referente aos possíveis resultados que obteríamos a partir dos dados, o que descreveremos no tópico seguinte.

Consrquivos de programas\Mo ntar que os alunos que foram sujeitos da pesquisa já haviam tido aulas sobre Potenciação e Função exponencial, bem como situações de crescimento e decrescimento exponencial.

2.5 Resultados Esperados

Neste momento iremos fazer diversas análises e teremos discussões a respeito dos resultados esperados por nós e registrados pelos alunos nas considerações em torno das atividades. Dessa forma trataremos de expor as concepções abordadas no desenvolvimento das atividades, tanto no que se refere à questão formal quanto informal, incluindo as colocações feitas pelos alunos nos momentos das intervenções.

Verificamos que, quando trabalhamos com uma seqüência de atividades utilizando o material manipulativo, os alunos devem socializar as informações, buscando validar a construção do conceito proposto.

Atitudes como essa, se tornam favoráveis à construção na formação do conceito, pois, caso contrário, os alunos não assumem a responsabilidade e o interesse pelo aprendizado. Os livros didáticos não trazem poucas propostas contextualizadas; em geral, satisfatórias, o propósito da contextualização ainda está na questão desafio.

Fossa acrescenta ainda que:

> [...] atividade fica completa no sentido de estar munida dos três tipos de representações dos conceitos nela desenvolvidos: uma representação física (os materiais manipulativos), uma representação oral (a discussão no grupo e, se for o caso, a apresentação dos resultados ao professor e/ou outros colegas), e uma representação simbólica (o registro por escrito). (Fossa, 2001. P.59).

Identificamos algumas possíveis dificuldades didáticas na formação do conceito, apresentadas na resolução das questões, através do que ficou registrado na atividade, tendo os alunos apresentados às idéias que eles possuem a respeito do conceito de crescimento e decrescimento exponencial.

Segundo Fossa a atividade é “[...] uma das maneiras mais eficazes de ensinar matemática. (...) um instrumento compreensivo de instrução”. (2001, p. 59).

Finarquivos de programas\Mc-teste que se faz do desafio inicial do pré-teste onde tentamos observar se o aluno seria capaz de atingir o objetivo inicial mesmo tendo passado pelas atividades que conduzem ao aprendizado da função exponencial.

2.5.1 Uma Proposta de Resolução do Desafio do Pré-teste e Pós-teste.

Uma proposta poderia ser elaborada através da hipótese de relacionar com fatos vistos anteriormente, pois é dessa forma que estudiosos da maturidade cognitiva, experiência, tratam as estruturas mentais que os alunos articulam no momento de buscar a resolução das questões.

Um exemplo de situação contextualizada pode ser o que segue: Considere que certa espécie de vegetal, *vitória régia*, consegue cobrir um lago inteiro em 30 dias. Sabendo que a cada dia ela cobre o dobro do dia anterior, e em certo dia cobriu a metade do lago, em quantos dias mais essa espécie cobrirá a outra metade do lago? Ou qual será o percentual do lago, em relação à área total do lago, coberto em 15 dias?

Questões desse tipo podem ser propostas em desafio ou em exemplos apresentado pelos professores em sala de aula, é o que esperamos.

O professor havia dito que os alunos não tinham essa habilidade naquele momento da intervenção, pois a eles não foram apresentados modelos parecidos ou que aproximassem a idéia do conceito de crescimento dessa forma.

Assim, na resolução do desafio, no pré-teste, eles estavam pouco familiarizados com exemplos do cotidiano, a eles só foram apresentados exercícios meramente manipulativos no ponto de vista da substituição de valores em fórmulas prontas.

Apenas no pós-teste, após passarem pelas atividades, alguns poderiam despertar para efetivar a relação entre as questões apresentadas. Buscamos identificar isso na análise dos dados feita no capítulo seguinte.

2.5.2 Conceitos, Procedimentos, Propriedades e Aplicações que Estão Sendo Explorados na Atividade.

Estaremos explorando o conceito de crescimento e decrescimento exponencial, nas atividades, para que possamos obter propriedades fundamentais a construção do conceito da função exponencial. Em seguida estaremos tratando os casos de propriedades de potência que destacamos na fundamentação matemática, através dos procedimentos estabelecidos na atividade proposta.

Com o desenvolvimento da referida atividade, esperamos que o aluno observe a relação entre os valores numéricos de crescimento e decrescimento exponencial esta relação é estabelecida e criada para favorecer a construção, a formação e o concrquivos de programas\ MIcros

Esperamos que os alunos articulem os conhecimentos anteriores e articule as dificuldades citadas na fundamentação matemática de função exponencial, presentes nas atividades. Sendo assim, pretendemos de alguma forma tratar os casos que envolvam a função exponencial. Com isso, pretendemos ainda mostrar as propriedades, bem como construir o conceito de forma objetiva, favorecendo a relarquivos de programas\ MI c

2.5.3 Qual o objetivo da Aprendizagem na Atividade?

Nesta atividade, temos como objetivo propor um método para o aprendizado dos conceitos de potenciação que é pré-requisito para a função exponencial, desenvolvemos uma seqüência de três atividades, através de um ambiente que venha favorecer a motivação e a formação do conceito da função exponencial através de uma atividade com material manipulativo.

Desenvolvemos um ambiente contendo uma seqüência de três atividades, um pré-teste e um pós-teste para em grupos formados com dois alunos, possibilite trabalhar a atividade e que contribua na construção do conhecimento, podendo o aluno verificar a importância do conceito introdutório ao estudo das funções exponenciais e tratá-lo de forma diferenciada, para que deste modo tenhamos uma motivação maior e relacionando os fatos com o cotidiano.

Almejamos uma resposta por parte dos alunos, quando da colocação das proprquivos de programas\Microsidade e que se aproximam ao conceito de função exponencial dado pelo teorema da caracterização da mesma.

2.5.4 Estratégias Esperadas por parte dos Alunos para Abordar o Problema.

Esperamos que os alunos percebam que a atividade está envolvendo o conhecimento de potenciação, associando, este conteúdo a cada configuração obtida pelos movimentos na dinâmica da atividade, como também perceber a aplicabilidade da atividade de forma motivadora e associativa com o assunto abordado.

Em arquivos de programas\Mica de movimentos nas atividades, os conceitos apresentados na construção do conhecimento da função exponencial, podem não ser identificados. Porém, para que estes aspectos sejam percebidos é necessária uma atenção direcionada e centrada na atividade.

O aluno busca resolver a atividade sem se preocupar com a folha de papel comum que lhe será dada, bem como não respeitar as regras e chegar à resolução final e, ainda assim, não saber o sentido da seqüência didática. Para tanto, ele poderá utilizar representações próprias, correspondendo a modelos mentais, que serão seus aliados na resolução da seqüência didática, bem como os esquemas atribuídos à situação criada e ao ambiente didático.

Ainda assim, o aluno tanto perceba os aspectos e as propriedades envolvidas na situação, quanto não perceber nada do que seria provável e chegar à resolução da atividade proposta.

Esperamos que os alunos sigam à risca todos os passos e procedimentos sugeridos na atividade e, ainda assim, não atingir os objetivos esperados, o conceito de potência. Poderiam seguir os atributos seletivos da atividade, e ainda assim, terem dificuldades em construir o conceito da função exponencial esperado, bem como acharem que essa atividade não construa de forma alguma e que também esteja desvinculada com os objetivos esperados no que fora proposto.

Que estes aspectos serviram para que façamos uma análise mais detalhada, a posteriori, destes dados e que sejam avaliados através de uma amostra formada por um evento sugerido da seqüência didática a qual estamos propondo.

Seria pretensioso de nossa parte propor os casos que checassem todos ou quase todos os aspectos para validar a seqüência didática proposta. Porém podemos identificar os aspectos abordados para tentar amenizar as dificuldades didáticas apresentadas.

Uma seqüência numérica de algarismos na forma crescente distribuída na primeira coluna do quadro poderia facilitar mais a atividade e o entendimento dos alunos na construção do conhecimento. E ainda estaria da mesma forma atingindo o objetivo da seqüência didática proposta. Nossa intenção é atentar o aluno na construção do conceito sem ter que seguir um estereótipo.

Esses procedimentos poderiam servir para reforçar a necessidade de situações didáticas com atividades propostas que relacionassem rquivos de programas\Micros atividades de ensino de matemática em sala de aula. Existem diversas pesquisas que articulam o uso de jogos educativos em sala de aula, podendo ser com uso do computador como ferramenta, bem como com material manipulativo.

No capítulo seguinte, passamos a apresentar os resultados.

RESULTADOS

3. Resultados

Neste capítulo discutiremos os resultados obtidos após a análise dos dados. Estes, de acordo com a sua natureza, ora foram organizados em quadros para análise dos valores absolutos e percentuais, ora foram categorizados e analisados de acordo com as idéias dos teóricos, discutidos no capítulo 1.

Consideraremos, nessa análise, os aspectos ressaltados, pelos alunos, na resolução da seqüência de atividades, e segundo os critérios que estabelecemos. Consideraremos, também, os conceitos apresentados, os procedimentos que podem ser desenvolvidos e as propriedades identificadas ou aplicadas, que podem ser geradas com as atividades.

Esses aspectos levantados nas atividades merecem uma atenção dos professores de matemática no momento da seleção das questões que irão abordar em sala de aula, para que contribuam, dessa forma, para a formação do conceito.

Alémrquivos de programas\M c consideraremos também, para a nossa análise, os comentários feitos pelos alunos no desenrolar das atividades e os fatos que consideramos relevantes da nossa própria observação enquanto presentes em toda a intervenção.

3.1 Conceitos, Procedimentos, Propriedarquivos de programas\Micros ser Identificadas ou Mobilizadas com a Atividade.

Durante o desenvolvimento da pesquisa empírica, observamos, para fins de análise, os erquivos de programas\ M cr

?? Conceitos: Potenciação e função exponencial;

?? Propriedades: crescimento exponencial, decrescimento exponencial;

- Procedimentos: na dinâmica das atividades, os alunos podem despertar para o estabelecimento de modelos, generalizarem resultados a partir do que constatam para o primeiro movimento, segundo movimento etc. e estabelecer fórmulas matemáticas obtidas pelo princípio da indução finita.

- Na atividade da Torre de Hanói, os alunos podem estabelecer uma relação matemática exponencial, correspondendo a uma função composta (contendo a função exponencial), função essa, discreta, que relaciona o número de peças com o número mínimo de movimentos a partir do crescimento exponencial. Nas demais atividades, os alunos podem estabelecer diretamente uma função exponencial discreta entre as variáveis consideradas nas mesmas, a partir do crescimento ou decrescimento exponencial.

- Com relação às raciocínios e comentários proferidos pelos alunos, consideramos que os mesmos estarão, provavelmente, atrelados às suas vivencias anteriores.

3.2 Resultados Obtidos nas Atividades e Testes

Neste tópico, procederemos à análise das resoluções feitas pelos alunos no pré-teste, nas três atividades que compõem a seqüência didática e no pós-teste, nessa ordem.

Voltamos a lembrar que, durante toda a intervenção, os alunos trabalharam em duplas, de modo que, para esta análise, organizaremos, para cada questão destes instrumentos, um quadro contendo os acertos e erros, dupla a dupla para, em seguida, fazermos as devidas considerações e inferências. Para preservar a identidade dos alunos, optamos por identificar as duplas, numericamente de 1 a 18.

Sentimos, nesse momento, uma dificuldade em registrar os fatos de forma sistematizada, pois os alunos declararam que não conseguem expressar as dificuldades didáticas por falta de exercitarem este tipo de atividade.

3.2.rquivosde programas\Micr os-teste

Conforme já explicamos na metodologia, o pré-testrquivos de programas\Micr entregue aos alunos juntamente o pedaço de EVA, na qual os alunos deveriam dobrar e empilhar os pedaços sistemativamente, contando-os e comparando sua área em relação ao pedaço original. A tabela de erros e acertos das duplas é mostrquivos de programas\Micr

Quadro 6: Distribuição dos resultados do **Pré-teste** relativos aos acertos e erros das duplas.

	Acertos				Erros		
	A_1	A_2	A_3	A_4	E_1	E_2	E_3
Duplas	-	-	-	-	-	-	-
1						X	
2						X	
3		X					
4					X		
5		X					
6					X		
7					X		
8						X	
9						X	
10					X		
11						X	
12						X	
13						X	
14					X		
15		X					
16						X	
17							X
18						X	
Total	0	3	0	0	5	9	1
%	0	16,67	0	0	27,78	50	5,56

Legenda:

A_1 – Certo sem raciocínio	E_1 – Errado sem raciocínio
A_2 – Cerrquivos de programas\Micro	E_2 – Errrquivos de programas\Micr
A_3 – Certo com raciocínio incorreto	E_3 – Errrquivos de programas\Micro
A_4 – Certo com raciocínio parcialmente correto	

Vemos que, a cada corte, enquanto que o tamanho de cada pedaço corresponde à metade do tamanho do anterior, o número de pedaços, logo a altura, dobra, mobilizando crescimento e decrescimento exponencial.

Analisando quantitativamente os dados obtidos no quadro 6, observamos que nenhuma dupla apresentou resolução ou resposta certa sem raciocínio para esta questão. Dentre as questões certas com raciocínio, três duplas apresentaram raciocínio correto, correspondendo a um percentual de 16,67%; não registramos a ocorrência de questões certas com raciocínio parcialmente correto ou incorreto. Este percentual de acertos, que consideramos baixo reflete, em nosso ver, a falta de habilidade dos alunos em lidar com atividades de natureza contextualizada, o que sugere que as questões por eles tratadas quando do estudo da função exponencial podem ter sido descontextualizadas, de acordo com o que constatamos em nossa pesquisa anterior (BRAZ, 2005) sendo estas tanto sugeridas pelos livros didáticos quanto pelos professores, que tomam como referencial teórico os mesmos.

Pelo que constatamos dos erros encontrados na resolução do mesmo pré-teste, verificamos que, para erros sem raciocínio (E_1), identificamos cinco ocorrências entre as duplas, correspondendo a um percentual de 27,78%; para erros com raciocínio errado (E_2) identificamos nove ocorrências, correspondendo a um percentual de 50% e, tendo uma dupla cometido erros com raciocínio correto (E_3), temos um percentual aproximado de 5,56%, totalizando um percentual de erros em torno de 83,34%. Como forma de validar o conteúdo no pré-teste que propomos, podemos observar que os percentuais encontrados sinalizam para a caracterização dos exercícios trazidos para sala de aula pelos professores bem como os encontrados nos livros didáticos.

Esse fato vem sugerir uma identificação com os aspectos que consideramos desfavoráveis nos livros didáticos com respeito à contextualização (BRASIL, 1997), vindo a reforçar a nossa preocupação com respeito a esse aspecto que está sendo tratado nesta pesquisa. Em seguida, discutiremos cada uma das atividades da seqüência desenvolvida junto às duplas.

3.2.2 Resultados Obtidos nas três Atividades da Seqüência Didática.

Para cada atividade da seqüência didática, as duplas receberam um pedaço de EVA e material impresso com as questões. Passamos a descrever cada uma.

Quadro 7: Distribuição dos resultados da **Atividade 1**, relativos aos acertos e erros das duplas.

	Acertos				Erros		
	A_1	A_2	A_3	A_4	E_1	E_2	E_3
Duplas							
1		X					
2		X					
3		X					
4		X					
5		X					
6		X					
7		X					
8		X					
9		X					
10		X					
11		X					
12		X					
13		X					
14		X					
15		X					
16					X		
17		X					
18		X					
Total	0	17	0	0	1	0	0
%	0	94,44	0	0	5,56	0	0

Legenda:

A_1 – Certo sem raciocínio

A_2 – Cerrquivos de programas\Micr
A_3 – Cerrquivos de programas\Micros
A_4 – Certo com raciocínio parcialmente correto
E_1 – Errado sem raciocínio
E_2 – Errrquivos de programas\Micr
E_3 – Errado com raciocínio correto

Na primeira atividade, as duplas deveriam dobrar o pedaço de EVA ao meio e recortar sucessivamente, registrando dois valores a cada corte: a quantidade de pedaços resultante e a área do pedaço em relação à área total, escrevendo em uma tabela (vide Apêndice B). A resolução é semelhante ao pré-teste e a distribuição dos acertos e erros pelas duplas a esta questão está rquivos de programas\Micros

Ao observamos o quadro 7, identificamos em sua distribuição que os acertos sem raciocínio apresentam um percentual acentuado em torno de 94,44%, contra apenas um erro sem raciocínio, correspondendo a 5,56% restantes. Consideramos que esse elevado número de acertos coloca em evidência o objetivo da nossa proposta de atividade contextualizada, o que contribui para o alcance do nosso objetivo de pesquisa. Quanto à questão errada sem raciocínio, que correspondeu a um percentual insignificante, terá sua análise qualitativa, caso tenhamos acesso aos procedimentos da dupla, mais adiante.

Na arquivos de programas\Micveriam responder a questionamentos que envolviam crescimento e decrescimento exponencial, além da modelagem de uma função exponencial discreta, tudo isso associado à dinâmica de um jogo chamado Torre de Hanói. Além de um exemplar da referida Torre construída em EVA, as duplas receberam um roteiro impresso contendo informações sobre a estrutura do jogo e a tarefa a desenvolver. O modelo da atividade encontra-se no Apêndice B. O quadro mais adiante expressa os resultados dos desempenhos das duplas.

Lembramos que essa atividade traz a Torre de Hanói como material manipulativo. No caso de nossos sujeitos, poucos alunos a conheciam e a grande maioria nunca tinha tido nenhum tipo de contato, muito menos ter jogado. Não podemos afirmar se esse fato influenciou ou não os resultados obtidos, uma vez que todos receberam as mesmas orientações e o pesquisador encontrava-se presente para fazer qualquer complementação e elucidar eventuais dúvidas das duplas.

Para o transporte da torre de um pino para outro, para cada movimento de uma peça, a de cima deve fazer dois movimentos (uma para sair de cima dela e outro para voltar). Assim, a partir da base, as peças se moverão uma, duas quatro, oito, etc., vezes. O número mínimo de movimentos $M(n)$ necessário para o transporte de uma torre com n peças é $M(n) = 2^n - 1$.

Quadro 8: Distribuição dos resultados da **Atividade 2** relativos aos acertos e erros das duplas.

	Acertos				Erros		
	A_1	A_2	A_3	A_4	E_1	E_2	E_3
Duplas							
1							X
2							X
3		X					
4						X	
5							X
6						X	
7						X	
8		X					
9							X
10		X					
11							X
12							X
13							X
14						X	
15						X	
16		X					
17							X
18							X
Total	0	4	0	0	0	5	9
%	0	22,22	0	0	0	27,78	50

Legenda:

A_1 – Certo sem raciocínio

A_2 – Certo com raciocínio correto
A_3 – Cerrquivos de programas\Micros
A_4 - Certo com raciocínio parcialmente correto
E_1 – Errado sem raciocínio
E_2 – Errrquivos de programas\Micr
E_3 – Errrquivos de programas\Micro

Nessa atividade pudemos constatar, na distribuição dos resultados no quadro, a ocorrquivos de programas\Micros $_2$), correspondendo a um percentual em torno de 22,22%, esse sendo o único tipo de acerto apresentado. Em relação aos erros com raciocínio errado (E_2), identificamos cinco ocorrências, correspondendo a um percentual em torno de 27,78%; já para as respostas erradas com raciocínio correto (E_3) identificamos metade das ocorrências, correspondendo a um percentual em torno de 50%.

Após a análise desses dados, podemos considerar se a não familiarização com os materiais manipulativos levam ou não os alunos ao distanciamento do seu contexto com o cotidiano dos jogos e das estratégias apresentadas nos mesmos. A terceira, e última atividade correspondeu a uma lista de três problemas. Em seguida, vemos o quadro dos resultados do primeiro problema.

No primeiro problema, correspondendo à compra de um cavalo puro sangue, cujo pagamento era feito dando-se uma quantia por cada dente, cada dupla deveria escolher uma opção entre duas, como sendo a mais vantajosa do ponto de vista financeiro. Na primeira opção, o primeiro dente custaria R$1. 000,00, o segundo R$ 2.000,00, dobrando-se para cada próximo dente, o valor anterior até o último dente. Na segunda opção, cada dente custaria R$ 5.000,00.

Observamos que, para a segunda opção, o valor do cavalo seria igual a R$ 5.000,00 multiplicados pelo número de dentes que possui o cavalo; para a primeira opção, o valor do cavalo deveria ser calculado pela soma R$ 1.000,00 $(1+2+4+...+2^{n-1})$, onde n é o número de dentes que o cavalo possui. Sabendo-se que um cavalo tem mais dentes que um ser humano (temos 32 dentes), fica claro que a primeira opção é a mais vantajosa para quem compra. Na primeira opção, temos um soma de valores que estão em crescimento exponencial.

Quadro 9: Distribuição dos resultados da **Atividade 3** relativos aos acertos e erros das duplas (primeira questão).

	Acertos				Erros		
	A_1	A_2	A_3	A_4	E_1	E_2	E_3
Duplas							
1		X					
2						X	
3							X
4							X
5		X					
6		X					
7		X					
8		X					
9		X					
10		X					
11							X
12		X					
13		X					
14	X						
15		X					
16		X					
17		X					
18		X					
Total	1	13	0	0	0	1	3
%	5,56	72,22	0	0	0	5,56	16,67

Legenda:

A_1 – Certo sem raciocínio
A_2 – Cerrquivos de programas\Micr
A_3 – Certo com raciocínio incorreto
A_4– Certo com raciocínio parcialmente correto
E_1 – Errado sem raciocínio
E_2 – Errrquivos de programas\Micr
E_3 – Errrquivos de programas\Micro

Identificamos, após o levantamento feito com os dados no quadro 9, que houve apenas um acerto sem raciocínio (A_1), correspondendo a um percentual em torno de 5,56%; os acertos com raciocínio correto (A_2), correspondente a treze acertos, apresentou um percentual em torno de 72,22%. Esses dados vão ajudando a tornar válido o nosso propósito de trabalhar com questões contextualizadas no conteúdo relativo a funções exponenciais, uma vez que os elementos envolvidos parecem contribuir para um desempenho favorável com relação à construção do conceito.

Constatamos ainda, com relação aos erros, que, nas questões que obtiveram resultado errado com raciocínio errado (E_2), orquivos de programas\Micro corresponde a um percentual em torno de 5,56% e três questões erradas com raciocínio correto (E_3), correspondendo a um percentual em torno de 16,67% do percentual totrquivos de programas\Micros

Passando à segunda questão, a mesma trata da distribuição de mesadas para dois filhos durante um ano, feita de maneiras diferentes. Ao filho mais novo caberá R$ 1,00 no primeiro mês, dobrando cada mês em relação ao anterior e, ao segundo filho, receberá uma mesada fixa de R$150,00. O problema indaga que filho receberá mais no tempo dado.

Podemos observar que, para o filho mais novo, o valor da mesada cresce exponencialmente ao passo que, a mesada do segundo filho é fixa sendo, portanto, o valor cumulativo maior, aquele referente ao filho mais novo. O quadro que segue mostra a distribuição dos acertos e erros das duplas a esse problema.

Identificamos nessa questão, analisando os dados, que os acertos sem raciocínio (A_1), foram realizados por duas duplas e representam um percentual em torno de 11,11%; as catorze questões de acertos com raciocínio correto (A_2) representam um percrquivos deprogramas\Micro

Passando aos erros cometidos, duas duplas incorreram em erros, sendo um deles com raciocínio errado (E_2), representando um percentual em torno de 5,56% e outro um erro com raciocínio correto (E_3), representam o mesmo percentual, totalizando aproximadamente 11,11% das respostas dadas à questão.

Quadro 10: Distribuição dos resultados da **Atividade 3** relativos aos acertos e erros das duplas (segunda questão).

	Acertos				Erros		
	A_1	A_2	A_3	A_4	E_1	E_2	E_3
Duplas							
1		X					
2		X					
3							X
4							X
5		X					
6		X					
7		X					
8						X	
9		X					
10		X					
11		X					
12	X						
13	X						
14		X					
15		X					
16		X					
17		X					
18		X					
Total	2	13	0	0	0	1	2
%	11,11	72,22	0	0	0	5,56	11,11

Legenda:

A_1 – Certo sem raciocínio
A_2 – Cerrqui v o s de programas\Micr
A_3 – Cerrqui v o s de programas \Micros
A_4– Certo com raciocínio parcialmente correto
E_1 – Errado sem raciocínio
E_2 – Errrquivos de programas\Micr
E_3 – Errrquivos de programas \Micro

Observamos mais uma vez que, o alto índice de acertos em relação ao número de errorqui vos deprogramas\Micros ra a compreensão e posterior resolução de problemas contextualizados, uma vez que, conforme vimos anteriormente, os alunos lidavam pouco com esse tipo de problema. Passaremos a analisar as respostas à terceira questão, cujos acertos e erros estão expressos na próxima tabela.

Essa terceira questão é da mesma natureza que as duas primeiras, as duplas deveriam escolher entre duas opções para comprar uma moto, a primeira delas tendo parcelas com crescimento exponencial e, a segunda, parcelas fixas. O número de parcelas a pagar faz com que o preço total seja menor, portanto mais vantajoso, na segunda opção. O raciocínio e os cálculos efetuados para resolver esta questão são feitos de forma análoga às questões anteriores desta atividade.

Quadro 11: Distribuição dos resultados da **Atividade 3** relacionado aos acertos e erros das duplas (terceira questão).

	Acertos				Erros		
	A_1	A_2	A_3	A_4	E_1	E_2	E_3
Duplas							
1		X					
2	X						
3							X
4						X	
5		X					
6		X					
7		X					
8		X					
9		X					
10		X					
11		X					
12	X						
13		X					
14		X					
15		X					
16		X					
17		X					
18		X					
Total	2	14	0	0	0	1	1
%	11,11	72,22	0	0	0	5,56	5,56

Legenda:

A_1 – Certo sem raciocínio

A_2 – Certo com raciocínio correto
A_3 – Certo com raciocínio incorreto
A_4– Certo com raciocínio parcialmente correto
E_1 – Errado sem raciocínio
E_2 – Errado com raciocínio errado
E_3 – Errado com raciocínio correto

Identificamos na análise do quadro 11 que dezesseis duplas acertaram na resposta a esta questão, sendo que duas delas sem raciocínio (A_1), as quais representam um percentual em torno de 11,11%; já as 16 questões de acertos com raciocínio correto (A_2), perfizeram um percentual em torno de 72,22%.

Por outro lado, das duas questões respondidas com respostas erradas, uma foi enquadrada na categoria "errada com raciocínio errado" (E_2), perfazendo um percentual de 5,56%, o mesmo percentual apresentado para a outra dupla na categoria "errada com raciocínio correto".

O quadro que segue mostra a distribuição dos erros e acertos das duplas para essa questão. Sendo destacados o total de respostas cada dupla, bem como o percentual de respostas dadas sob o total delas.

No próximo tópico, retomaremos a questão inicial para análise, proposta novamente tal e qual foi feito antes, em forma de pós-teste.

3.2.3 Resultados Obtidos no Pós-teste

Os resultados que obtivemos após o pós-teste, para análise, expressaram o avanço das duplas no conteúdo durante a resolução da seqüência de atividades e também do pré-teste, inicialmente.

Os resultados que obtivemos nesta fase refletem uma evolução significativa em relação ao pré-teste, embora tenham tido desempenho melhor ainda em algumas atividades da seqüência. O próximo quadro mostra a distribuição de acertos e erros dos sujeitos da pesquisa.

No Pós-teste identificamos, segundo o quadro 12, uma melhora, que representa a ocorrência de oito acertos com raciocínio correto. Isto representa um percentual de respostas certas com raciocínio correto de 44,44%, o que aponta uma evolução de aprendizagem que pode ter sido proporcionada pelo andamento seqüência de atividades. Observamos também uma ocorrência de acertos sem raciocínio, cujo percentual foi de 5,56%. Houve um equilíbrio percentual, entre as respostas para as questões: errado com raciocínio errado (E_2) e errado com raciocínio correto (E_3) em torno de 22,22% para cada tipo.

Quadro 12: Distribuição dos resultados do **Pós-teste** relacionados aos acertos e erros das duplas.

	Acertos				Erros		
	A_1	A_2	A_3	A_4	E_1	E_2	E_3
Duplas							
1		X					
2		X					
3		X					
4					X		
5		X					
6		X					
7		X					
8						X	
9						X	
10							X
11						X	
12						X	
13		X					
14							X
15		X					
16							X
17	X						
18							X
Total	1	8	0	0	1	4	4
%	5,56	44,44	0	0	5,56	22,22	22,22

Legenda:

A_1 – Certo sem raciocínio
A_2 – Certo com raciocínio correto
A_3 – Certo com raciocínio incorreto
A_4 – Certo com raciocínio parcialmente correto
E_1 – Errado sem raciocínio
E_2 – Errado com raciocínio errado
E_3 – Errado com raciocínio correto

Os resultados, tanto numéricos quanto percentuais, apontam uma melhoria de desempenho dos alunos relativamente às atividades relativas à função exponencial, a partir do trabalho feito com problemas contextualizados. O que podemos concluir, então, é que houve uma evolução na aprendizagem nas circunstâncias em que o mesmo foi desenvolvido.

A partir desse momento, discutiremos os raciocínios dados pelos alunos às respostas que apresentaram para as questões, juntamente com as observações que fizemos durante a pesquisa.

3.2.4 Resultados Obtidos na Observação e Comentários dos Alunos

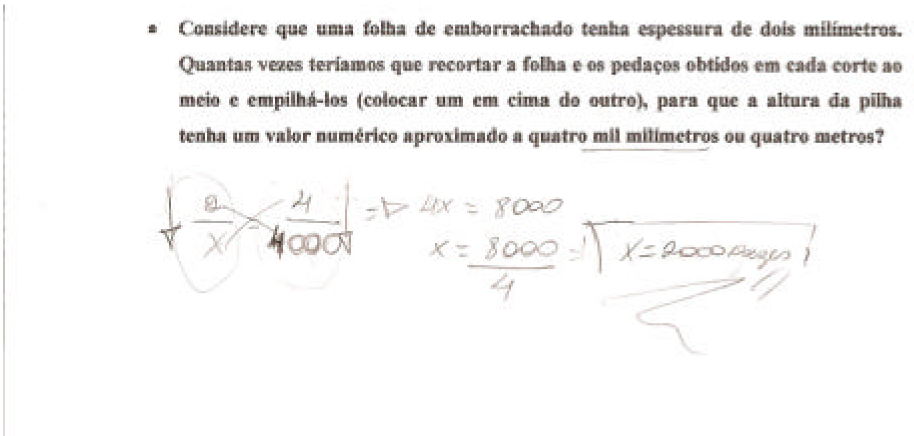
Esse tópico corresponde à análise dos resultados advindos do que consideramos dados qualitativos da pesquisa. Esses dados foram coletados em dois níveis: nossa observação acerca das atividades dos alunos e seus raciocínios, orais ou escritas para os diversos questionamentos subjacentes às atividades em dupla. Assim, apresentaremos, inicialmente, a análise do pré-teste; depois, análise do conjunto das três atividades e, finalmente, a análise do pós-teste.

De acordo com o quadro 6, vimos ocorrência de respostas inseridas nas categorias A_2, E_1, E_2 e E_3 da legenda.

As duplas que acertaram com raciocínio correto (A_2), utilizaram o princípio multiplicativo partindo de um e dobrando o resultado até que o dobro ultrapassa-se quatro mil, correspondendo ao valor dado em milímetros. O número de cortes correspondeu ao número de vezes que tiveram que dobrar o resultado encontrado. Destacamos a dupla três, que escreveu como resposta: “*tem que cortar dez vezes*”.

Para a categoria (E_1), onde a resposta estava errada sem raciocínio, as duplas responderam simplesmente o número de vezes que tinham que cortar. Para exemplificar, a dupla dez escreveu: "*tem que cortar mil vezes*". Uma vez que não havia nenhum esboço, esquema ou conta, não foi possível fazer nenhuma inferência a respeito de como a dupla chegou a esse resultado.

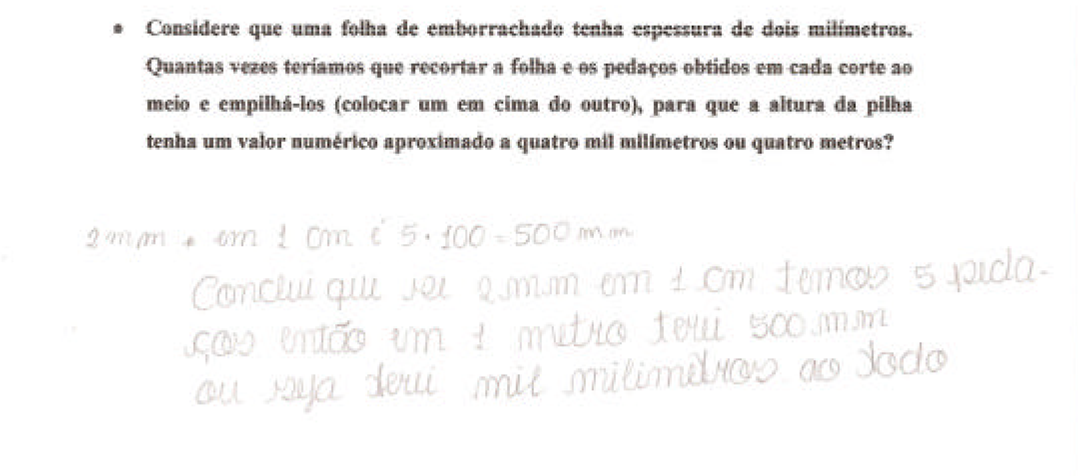
Com relação às duplas que erraram com raciocínio errado (E_2), estando em maioria, vimos que o raciocínio utilizado correspondeu a calcular uma regra de três ou fazer uma equação. Destacaremos um exemplo de cada:


- **Considere que uma folha de emborrachado tenha espessura de dois milímetros. Quantas vezes teríamos que recortar a folha e os pedaços obtidos em cada corte ao meio e empilhá-los (colocar um em cima do outro), para que a altura da pilha tenha um valor numérico aproximado a quatro mil milímetros ou quatro metros?**

$\frac{2}{x} = \frac{4}{4000} \Rightarrow 4x = 8000$

$x = \frac{8000}{4} \Rightarrow x = 2000$ vezes

Quanto à resposta dessa dupla, podemos observar que o número quatro mil aparecendo na regra de três deve corresponder ao valor da altura da pilha em milímetros; os números dois e quatro devem relacionar dois pedaços a quatro milímetros de altura. Portanto, seriam necessários dois mil pedaços de emborrachado empilhados para obter a altura solicitada, e não recortar duas mil vezes. Nessa linha de raciocínio, seria necessário calcular, ainda, quantos cortes dariam aproximadamente dois mil pedaços.

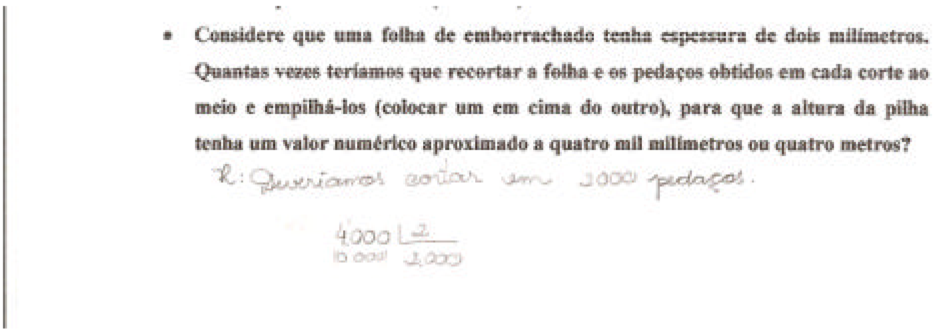


- **Considere que uma folha de emborrachado tenha espessura de dois milímetros. Quantas vezes teríamos que recortar a folha e os pedaços obtidos em cada corte ao meio e empilhá-los (colocar um em cima do outro), para que a altura da pilha tenha um valor numérico aproximado a quatro mil milímetros ou quatro metros?**

2 mm = em 1 cm é 5 · 100 = 500 mm

Conclui que se 2 mm em 1 cm temos 5 peda-
ços então em 1 metro terá 500 mm
ou seja terá mil milímetros ao todo

O raciocínio anterior está confuso, onde a dupla faz um raciocínio envolvendo conversão de unidades de medida de comprimento, embora não chegasse a conclusão alguma. Passando às duplas que erraram com raciocínio correto, resolveram o problema parcialmente e concluíram erradamente. Destacaremos inicialmente uma dupla que utilizou a operação de divisão.



- **Considere que uma folha de emborrachado tenha espessura de dois milímetros. Quantas vezes teríamos que recortar a folha e os pedaços obtidos em cada corte ao meio e empilhá-los (colocar um em cima do outro), para que a altura da pilha tenha um valor numérico aproximado a quatro mil milímetros ou quatro metros?**

R: Queríamos cortar em 2000 pedaços.

4000 | 2
0 000 2.000

Nesse caso, a dupla, simplesmente, calculou o número de pedaços necessários para obter a altura solicitada, mas não calculou o número de cortes necessários para aproximar do valor encontrado. Apresentamos a solução de outra dupla, que descreveu o raciocínio (dupla 18):

- **Considere que uma folha de emborrachado tenha espessura de dois milímetros. Quantas vezes teríamos que recortar a folha e os pedaços obtidos em cada corte ao meio e empilhá-los (colocar um em cima do outro), para que a altura da pilha tenha um valor numérico aproximado a quatro mil milímetros ou quatro metros?**

1000 vezes, porque a cada vez que você corta o emborrachado no meio ficam dois pedaços e são empilhados dois e cortados um isso até chegar a quatro metros.

Observemos que, pela resposta da dupla, a cada corte um pedaço empilhado passa a corresponder a dois, mas o número de pedaços necessários foi confundido com o número de cortes solicitado.

Pelas respostas dadas ao pré-teste, podemos observar que as duplas parecem ter noção de que cada pedaço dobrado e empilhado lhes dá o dobro da altura original; no entanto, não parecem generalizar para o acumulo das pilhas obtidas a partir do empilhamento dos pedaços da pilha anterior cujos pedaços foram cortados ao meio. Assim sendo, uma situação como esta que propomos no pré-teste, a qual consideramos contextualizada não parece ser familiar aos alunos, o que nos sinaliza para um necessidade de os alunos vivenciarem situações-problema contextualizadas no seu processo de ensino-aprendizagem.

Passaremos a discutir a seqüência de três atividades.

Muito embora nem todos os alunos identificassem uma relação matemática com a função exponencial na primeira atividade, eles fizeram diversas articulações verbais que permitiram identificar as funções. Citaremos duas delas.

Uma delas se referiu à primeira atividade, de recorte e empilhamento. Algumas duplas comentaram, durante a sua execução: "*Aqui tem crescimento exponencial*".

Assim, nem todos admitiram ter encontrado uma relação entre a atividade proposta com a função exponencial, mas elucidaram um pouco mais após a observação dos resultados constantes nas tabelas inclusas nas questões legitimando, assim, a nossa proposta da formação da tabela. Outro fato que levou as duplas à relação esperada está nos questionamentos apresentados nas atividades, correspondentes a alguns encaminhamentos de raciocínio para que as duplas pudessem formalizar os resultados que encontrassem.

Passando à segunda atividade, o que observamos ainda foi que, quando tratamos da relação matemática entre o número n de peças da torre e o número mínimo A(n) de movimentos necessários para efetuar a sua transferência do pino de origem para o pino final, os alunos comentaram: "*Aqui a gente tem uma função exponencial quando liga o número de movimentos ao número de peças*".

Nem todas as duplas fizeram comentários ou descreveram o seu raciocínio nas questões, limitando-se a preencher as tabelas.

Essa generalização foi difícil de ser alcançada, pela interpretação das duplas, em relação à dinâmica do jogo, pois, na discussão informal, eles conseguiram atingir o objetivo da relação proposta. Quando questionamos em seguida se o número mínimo A(n) é o mesmo quando tomamos como pino final qualquer dos dois que se encontram vazios no inicio do jogo os alunos responderam positivamente de imediato, pois identificaram essa relação próxima na atividade.

Em outro momento, quando questionamos a respeito da relação entre o crescimento do número de peças associado ao número mínimo de movimentos necessários para efetuarem a troca de pinos, obtivemos uma resposta positiva. Os alunos teceram comentários do tipo: "*O número de movimentos das peças formam uma progressão geométrica*". De fato, a progressão geométrica a que se referiram tinha um como primeiro elemento e razão dois. Outro fato nos deixou satisfeitos, em vista de termos obtido, nos resultados, evidências de uma relação próxima com a atividade e extraída das tabelas apresentadas.

Ainda na segunda atividade, a única que envolveu um jogo de estratégia, a Torre de Hanói, verificam que boa parte dos alunos verbalizou a possibilidade de chegarmos ao objetivo desejado, que era o de transportarmos a torre de um pino para outro qualquer, seguindo as regras fundamentais.

Apesar de terem de imediato admitido a possibilidade de atingir o objetivo proposto, nem todos conseguiram encontrar a estratégia ótima, que permite completar o transporte com o menor número de movimentos possível. Após a observação do quadro constante na atividade, alguns verificaram a relação e fizeram os passos mínimos necessários para atingir a resolução do problema. Algumas duplas comentaram: "*Aqui dá uma função exponencial: para n peças, o número de movimentos é* 2^n*-1".* Cabe aqui comentar que a função declarada por eles não é exponencial, mas uma função composta que contém uma exponencial.

Quando nos colocamos a respeito da regra mais simples, ou ainda, um algoritmo de execução para a obtenção do nosso objetivo proposto, que seria o mínimo de movimentos necessários para deslocar a torre de uma base para outra, os alunos, em sua maioria não tiveram a resposta. Alguns consolidaram essa etapa de identificação após a leitura e interpretação do quadro na relação com o jogo.

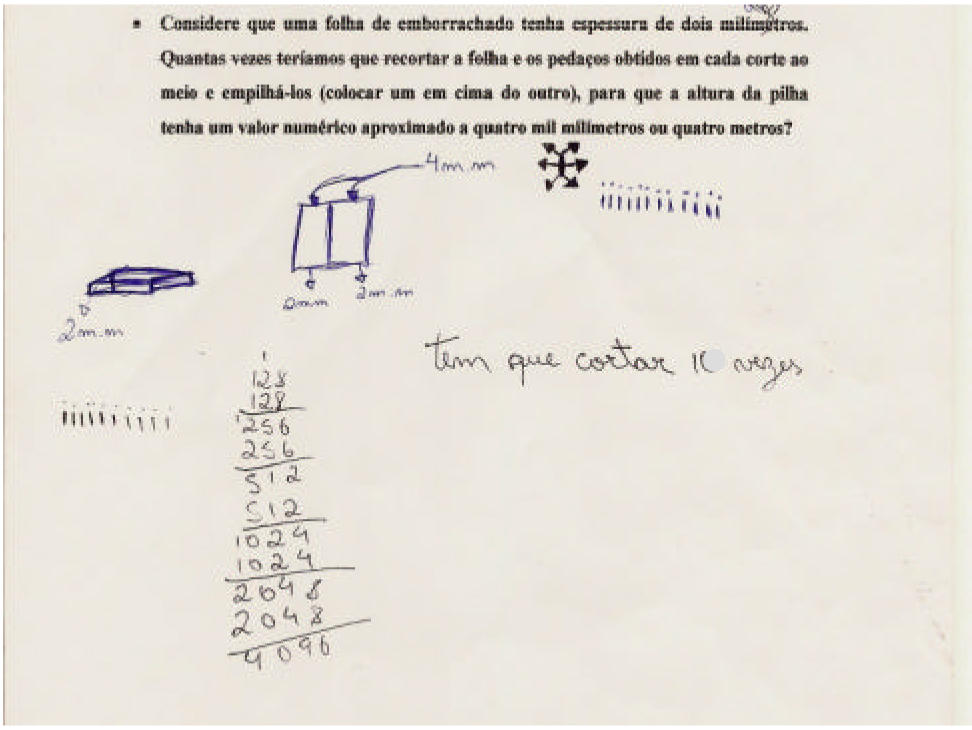
Em seguida, questionamos a respeito da relação entre o aumento do número de discos associados ao número mínimo de movimentos necessários para efetuar a passagem de um disco de um pino para outro. Tivemos uma resposta positiva, que mostrava uma compreensão desse aumento: "*Passando de uma para duas peças, aumenta dois movimentos; de dois para três, aumenta quatro; de três para quatro, aumenta oito; o aumento é sempre o dobro do anterior"*. Registramos aqui que os alunos expressaram esse raciocínio a partir da observação dos valores que preencheram no quadro 2 do apêndice C.

Quando propusemos os problemas, esperávamos uma resposta tipicamente associada a um crescimento exponencial e que, nesse caso, deveria induzir os alunos a selecionarem para as respostas nos mesmos, correspondentes à opção que tornasse o preço final o menor possível, ou a mais vantajosa, o que poderia estar sendo promovido nas alternativas onde o valor dobrava de um momento para outro. O que valoriza a resposta é o modo de sua resolução, permitindo-nos, dessa forma, uma análise mais elaborada e precisa das questões, pois a escrita indica os encaminhamentos que as duplas apresentam no desenvolvimento das atividades.

Passaremos nesse momento a comentar os pós-testes.

De acordo com o quadro 12, tivemos que a dupla 17 acertou a resposta ao problema colocando simplesmente o valor e mais nada: "*dez vezes*". Essa resposta correspondeu à categoria A_1.

Observamos oito acertos de duplas com raciocínio correto. Nele, os alunos calculavam a altura do empilhamento passo a passo, após cada corte, em seguida contavam às vezes que dobravam o valor encontrado, alguns fazendo algum esboço do recorte ou descrevendo o que iam fazer. Destacamos, por ser uma das mais completas, a resolução que mostramos a seguir, da dupla 13:



- **Considere que uma folha de emborrachado tenha espessura de dois milímetros. Quantas vezes teríamos que recortar a folha e os pedaços obtidos em cada corte ao meio e empilhá-los (colocar um em cima do outro), para que a altura da pilha tenha um valor numérico aproximado a quatro mil milímetros ou quatro metros?**

4mm.mm

2mm 2mm.mm

2mm.mm

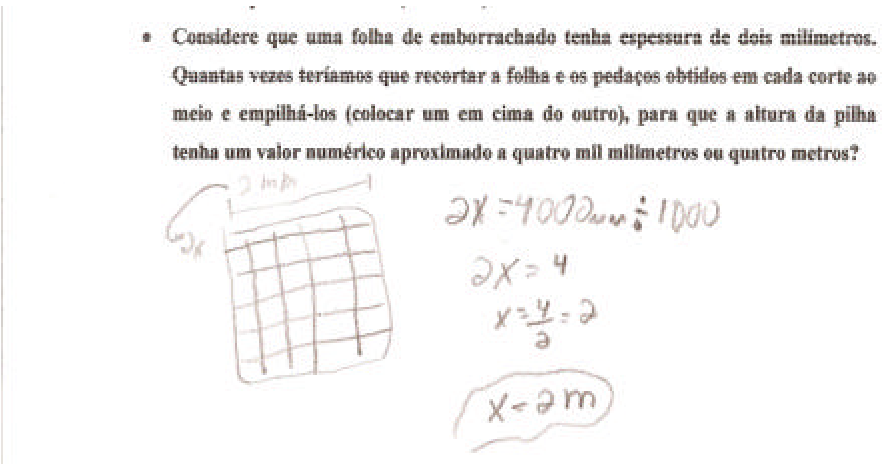
tem que cortar 10 vezes

128
128
256
256
512
512
1024
1024
2048
2048
4096

Podemos ver que três figuras na primeira linha. A primeira delas deve referir-se ao pedaço original de emborrachado com altura de dois milímetros; a segunda mostra a idéia de cortar cada pedaço ao meio, resultando em quatro milímetros de altura após o empilhamento. Não sabemos explicar (nem perguntamos à dupla, pois só vimos este documento após a sessão) o que significa a figura com seis setas. Logo, à direita da referida figura, vem um conjunto de doze traços verticais com pontos acima, que parecem sugerir a contagem do número de vezes que está fazendo o recorte e empilhamento dos pedaços. Abaixo e à esquerda vemos um conjunto de traços semelhantes e, logo à direita, somas sucessivas de duas parcelas, o que nos sugere corresponder às medidas obtidas após dobrar o valor anterior. Assim, todo esse raciocínio deve ter levado à resposta correta: “*tem que cortar 11 vezes*”.

Passando às respostas erradas, temos que as respostas enquadradas na categoria E_1 a dupla apresentou uma resposta correspondente a etapa da tarefa: “*divide-se a folha em dois mil pedaços*”. Quanto ao número de pedaços necessários para obter quatro metros, a resposta está correta, mais o problema pede o número de cortes.

Quanto aos erros com raciocínio errado E_2, as duplas usaram equação do primeiro grau, regra de três simples ou descreveu o raciocínio. Mostraremos três casos:



- **Considere que uma folha de emborrachado tenha espessura de dois milímetros. Quantas vezes teríamos que recortar a folha e os pedaços obtidos em cada corte ao meio e empilhá-los (colocar um em cima do outro), para que a altura da pilha tenha um valor numérico aproximado a quatro mil milímetros ou quatro metros?**

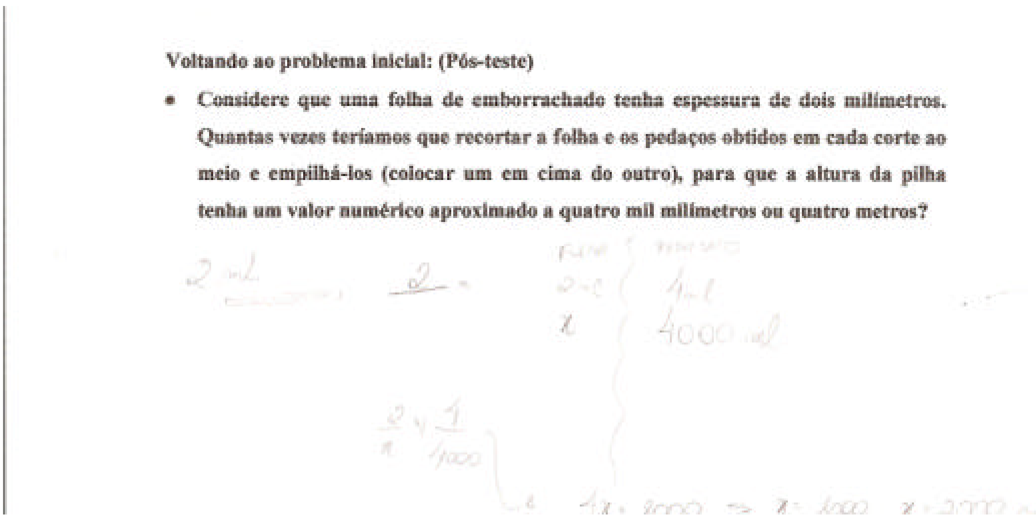
$2X = 4000mm \div 1000$

$2X = 4$

$x = \frac{4}{2} = 2$

$X = 2m$

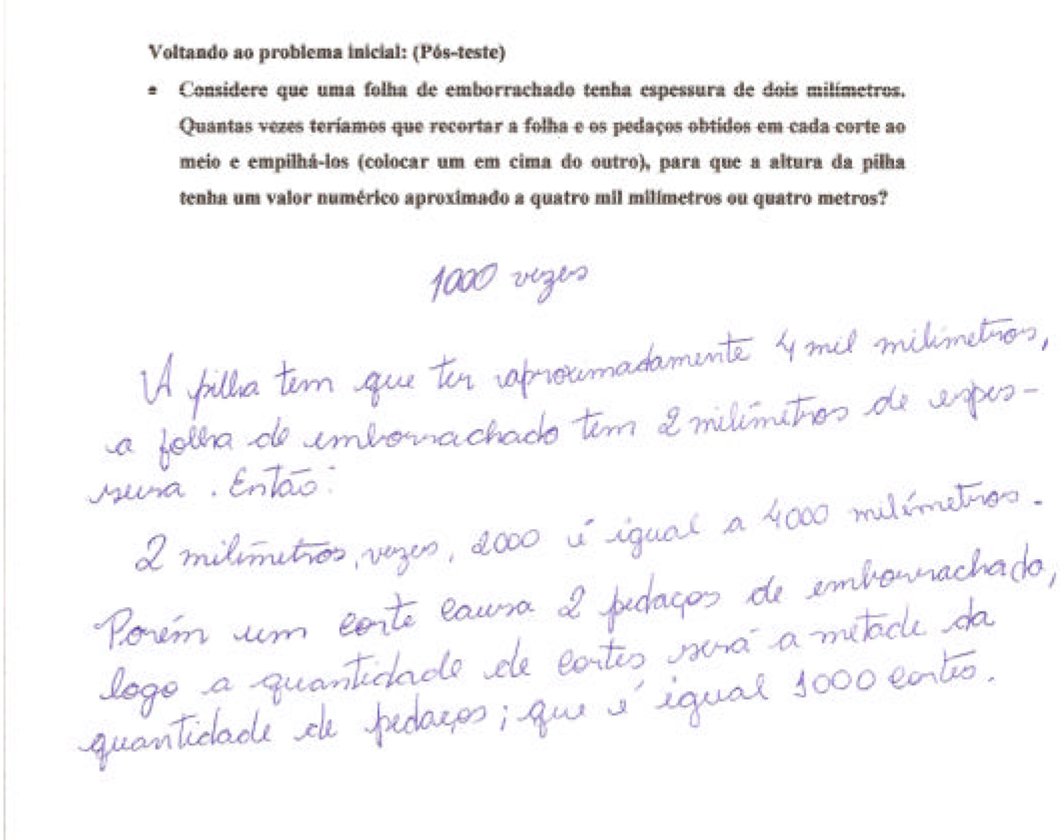
Na solução anterior vemos que, a dupla esboçou, no gráfico, a idéia de que precisaria cortar apenas em uma direção o emborrachado ao meio para obter a altura necessária de quatro milímetros, devendo dividir por mil para expressar o resultado em méritos. Outra dupla repetiu um dos raciocínios mostrado no pré-teste:



Voltando ao problema inicial: (Pós-teste)

- **Considere que uma folha de emborrachado tenha espessura de dois milímetros. Quantas vezes teríamos que recortar a folha e os pedaços obtidos em cada corte ao meio e empilhá-los (colocar um em cima do outro), para que a altura da pilha tenha um valor numérico aproximado a quatro mil milímetros ou quatro metros?**

A terceira resolução é descritiva onde a dupla raciocina corretamente sobre o número de pedaços necessários para a altura pedida; no entanto raciocina errado quanto ao número de cortes, conforme vemos a seguir:



Voltando ao problema inicial: (Pós-teste)

- **Considere que uma folha de emborrachado tenha espessura de dois milímetros. Quantas vezes teríamos que recortar a folha e os pedaços obtidos em cada corte ao meio e empilhá-los (colocar um em cima do outro), para que a altura da pilha tenha um valor numérico aproximado a quatro mil milímetros ou quatro metros?**

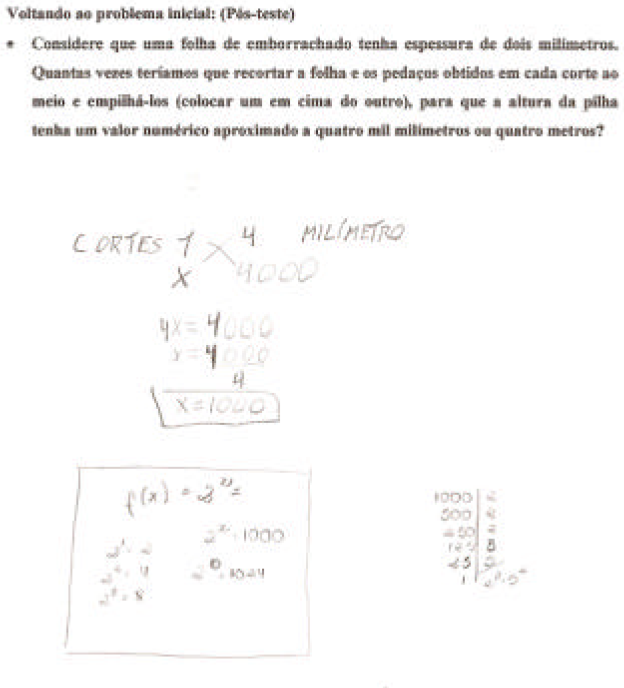
1000 vezes

A pilha tem que ter aproximadamente 4 mil milimetros, a folha de emborrachado tem 2 milimetros de espessura. Então:

2 milimetros, vezes, 2000 é igual a 4000 milimetros.

Porém um corte causa 2 pedaços de emborrachado, logo a quantidade de cortes será a metade da quantidade de pedaços; que é igual 1000 cortes.

Finalmente, quanto às respostas erradas com raciocínio correto (E_3), no problema a seguir a dupla associou o número de cortes a uma função exponencial, mais calculou o número de cortes usando regra de três:



Voltando ao problema inicial: (Pós-teste)

- **Considere que uma folha de emborrachado tenha espessura de dois milímetros. Quantas vezes teríamos que recortar a folha e os pedaços obtidos em cada corte ao meio e empilhá-los (colocar um em cima do outro), para que a altura da pilha tenha um valor numérico aproximado a quatro mil milímetros ou quatro metros?**

CORTES 1 — 4 MILÍMETRO

X — 4000

$4x = 4000$

$x = \frac{4000}{4}$

$\boxed{x = 1000}$

$f(x) = 2^x$

$2^x = 1000$

$2^{10} = 1024$

Os demais erros assemelharam-se aos do pré-teste, onde as duplas mobilizavam os conteúdos já citados.

Durante as sessões, após completar, observar e discutir com os colegas os resultados, os alunos se mostraram à vontade para dar as respostas. Identificamos a relação, que os alunos fizeram, com a idéia de crescimento exponencial. O que, de fato, eles apresentaram, foi uma concepção de crescimento associada ao que as atividades propiciaram em sala de aula nas intervenções.

Vale salientar aqui que os alunos teceram comentários favoráveis às atividades que realizamos na intervenção. Destacamos as seguintes: "*Com atividades desse tipo tivemos uma idéia melhor do crescimento e decrescimento exponencial*", essa referindo-se à associação entre a dinâmica da atividade e a sua matematização e "*Deveríamos ter mais problemas como esse que o senhor trouxe, porque facilitou a minha compreensão*", aqui referindo-se, provavelmente, às situações contextualizadas.

Assim, podemos concluir que a nossa intervenção contribuiu para ampliar a idéia, que os alunos tinham, de crescimento e de decrescimento, na relação exponencial.

CONCLUSÃO

Conclusão

Considerando que partimos da idéia que a aplicação de materiais manipulativos, como recurso didático em uma seqüência de atividades, pode favorecer a compreensão, tanto da modelagem quanto do comportamento de uma função exponencial e já que estamos tratando de um caso específico da função exponencial, trabalhamos com uma função discreta. Realizar esse trabalho foi gratificante, desafiador e motivador, pois tivemos que pesquisar uma teoria que articulasse a contextualização dos exercícios com uma seqüência de atividades.

Em nossa pesquisa, tivemos como o objetivo geral analisar uma seqüência didática para a introdução dos conceitos fundamentais ao aprendizado da função exponencial, utilizando material manipulativo para alunos da 1ª série do Ensino Médio, tendo ainda como objetivos específicos: analisar a abordagem sobre a função exponencial em livros didáticos; desenvolver uma seqüência didática, formada de três atividades, com dobraduras e a Torre de Hanói para a aplicação no estudo da função exponencial e identificar eventuais diferenças de desempenho de alunos após uma seqüência didática com dobraduras e a Torre de Hanói na aprendizagem da função exponencial em pré-teste e pós-teste.

Nossa inquietação inicial foi uma constatação da carência de problemas contextualizados no capítulo dedicado à função exponencial presente nos livros didáticos, basicamente a única fonte de pesquisa do professor.

Para o embasamento teórico, pesquisamos artigos, dissertações, teses, livros e trabalhos científicos publicados em eventos e congressos dos quais participamos, com o intuito de trocarmos idéias que pudessem contribuir na construção do nosso trabalho.

Verificamos que os livros didáticos trazem muito pouco da articulação da seqüência de atividades de forma contextualizada. Mapeamos alguns livros didáticos que tratam da função exponencial e constatamos que os mesmos não costumam abordar nos exercícios, propostos ou resolvidos, questões contextualizadas e em uma seqüência de atividades. Consideramos que a gestão desses exercícios deve ser feita através de recortes feitos por professores de matemática no uso de suas atribuições.

Observamos que estes livros trazem algumas deficiências didáticas que não são percebidas pelos autores, pois elas apresentam intenções e expectativas particulares, e ainda que os autores não identifiquem conceitos que considera de fundamental importância para o aprendizado da função exponencial.

Vimos que, segundo Braz (2005), os livros didáticos não trazem questões contextualizadas contendo situações do cotidiano, pois o que os autores propõem em seus livros são questões chamadas de desafio apenas do ponto de vista manipulativo, fato que poderia favorecer a aproximação conceitual na formação, quando nos livros didáticos poderiam ser propostas atividades construtivas em grupos formadas por duplas, tripla ou quartetos que pudessem discutir e validar o conceito. Teríamos dessa forma a institucionalização do conceito, o que deixaria de lado a metodologia da aula unilateral na qual estamos acostumados a ver.

Vale ressaltar que os jogos sempre foram bastante admirados por muitos curiosos e que tinham como objetivo o desenvolvimento de estratégias e de idéias, como um viés. Sendo assim, utilizamos dois materiais manipulativos, como recurso didático, que favoreceram a gestão da seqüência de atividades. O Origami é considerado em alguns países, como a arte de dobrar papel, e, quando efetuado algum tipo de recorte, passa a ser considerado kirigami. No Brasil, no âmbito escolar, utiliza-se a primeira nomenclatura para os dois termos, ou dobraduras. Na pesquisa, recorremos às dobraduras para os testes e a primeira atividade.

Em nossa metodologia, optamos pela abordagem qualitativa contendo análise de dados quantitativos. A nosso ver, um dos pontos positivos, nessa metodologia, foi poder observar e incluir, na nossa análise, a interação dos alunos entre eles e com o professor mediando e promovendo a discussão.

Obtivemos uma participação respostas das perguntas feitas aos alunos e, sempre que eles faziam alguma pergunta, respondíamos com outra pergunta concernente, ao invés de dar a resposta pronta. Assim sendo, o professor estaria mais na formulação de perguntas que pudessem ser um caminho para a resposta feita pelos alunos e não apenas entregar a resposta acabada.

Nas atividades da intervenção, usamos a técnica de recortar e empilhar uma folha de emborrachado para identificarmos uma propriedade necessária, porém não suficiente, à construção do conceito de função exponencial.

Em seguida trabalhamos com o jogo Torre de Hanói, onde validamos o crescimento e o decrescimento exponencial, em sua essência, bem como identificamos eventuais diferenças de desempenho de alunos após uma seqüência didática, sendo esse um dos nossos objetivos específicos.

Finalmente, promovemos a discussão de três problemas que consideramos contextualizados, como terceira atividade. Vale salientar que, em todas as atividades, estava presente a idéia de crescimento ou decrescimento exponencial.

Diante das informações coletadas nas intervenções, demos continuidade a nossa construção dos dados fazendo a análise dos dados, comparando o resultado do pré-teste e do pós-teste. Identificamos um crescimento significativo em termos absolutos e percentuais. Isso veio justificar a validade do desenvolvimento de questões contextualizadas e voltadas para o cotidiano dos alunos.

A tarefa de descrição dos dados registrados pelos alunos foi construtiva em toda a sua trajetória e sempre tivemos a preocupação de identificar a escrita, considerando que o aluno conhecia a respeito do assunto.

Constatamos nas duplas, a partir dos resultados obtidos, um crescimento satisfatório em relação à busca de solução para situações contextualizadas, pelo fato da relação com o cotidiano. Quando da aplicação das atividades, com a orientação sem interferência indutiva do professor, estabelece-se um ambiente em sala de aula que favorece a construção do conhecimento, o que se desencadeou quando os alunos assumiram a responsabilidade da situação e tentam a socialização do conhecimento com forma a garantir o aprendizado.

Identificamos esta atitude nas intervenções através dos debates e das discussões geradas no momento de validar a informação e cada validação é própria do aluno, pois depende dos modelos e das concepções que eles possuem e que poderão transformá-las em conceitos, reconstruindo os conceitos. Percebemos dessa forma a passagem da situação formal e didática para o momento da situação adidática, pois houve o retorno nosso para uma nova intervenção e os alunos fizeram este relato.

Diante do que obtivemos, consideramos que nossa questão de pesquisa foi afirmativamente respondida, e nossos objetivos foram atingidos.

A partir dos resultados que obtemos, avançamos sobre a necessidade de trabalhar, em sala de aula, com situações-problemas contextualizadas e lançando mão de material manipulativo, de forma a favorecer a reconstrução do saber a ser ensinado.

Finalmente, consideramos pertinente apresentar uma proposta de construção e gestão de um banco de seqüências de atividades interdisciplinares sobre o tema, onde o professor, em sala de aula poderia identificar as necessidades didáticas de seus alunos e selecionar qual a seqüência de atividades entregarem para o aluno desenvolver.

REFERÊNCIAS

Referências

ASCHENBACH, Maria Helena Costa Valente. **As dobraduras de Papelino**. São Paulo: Nobel, 1993.

BIANCHINI, E. PACHOLLA, H. Matemática**. v 1. alfa, São Paulo Moderna., 1996.**

BUCCHI, P. **Curso Prático Matemática.** V 01. p.236-237. São Paulo, Moderna, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria do Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.** Brasília: MEC/SEF, 1997. v 3.

BRAZ, Ricardo. Antonio. Faustino da Silva. Análise Sobre a Abordagem da Função Exponencial em Livros Didáticos Utilizados por Professores no Ensino Médio**. V Jornada de Ensino Pesquisa e Extensão, 2005, Recife.**

BROUSSEAU, G. **Les Obstacles Épistémologiques Et Les Problémes En Mathématiques**. In Recherches em Didactiques des Mathématiques. v 4, n 2, La Pensée Sauvage, 1983.

BOYER, C. B. 1906-1976., **História da Matemática**, Ed.2, São Paulo, Edgar,1996.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática,** Lisboa, Tipografia Matemática Ltda, São Paulo, 1952, p.130-131.

DANTE, L.R. Matemática: Contextos e Aplicações**. Vol.1 Ática. São Paulo, 2001.**

FOSSA, J A. **Ensaios Sobre a Educação Matemática**. Série Educação n.2, Belém: EDUEPA, 2001.

FREITAS, J. L. M. Situações Didáticas. Em **Educação Matemática: Uma Introdução** / Sílvia Dias Alcântara Machado ... et al. São Paulo : EDUC 1999.

GALVEZ, G. Didática da Matemática. In Parra. C. & Saiz. I. **Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

GÊNOVA, Carlos. **Origami: a divertida arte das dobraduras.** São Paulo: Nobel, 1991.

HENRY, M. Apresentação da Didática da Matemática. In **Notas de curso sobre Didática da Matemática.** PUC – São Paulo. Tradução: Profa.Lícia de Souza Leão Maia, 1992.

IEZZI, G. OSVALDO. **Fundamentos da Matemática Elementar**, vol.2. Atual. São Paulo. 1993.

________________ . **Fundamentos da Matemática Elementar**, vol 1. Atual. São Paulo. 1998.

________________ . **Matemática: Ciências e Aplicações**. Atual, São Paulo. 2001.

LIMA, E. L. **A Matemática do Ensino Médio**, v .1, Coleção do professor de matemática. SBM, Rio de Janeiro, 1996.

_________ . **Exame de Textos: Analise de Livros Didáticos de Matemática para o Ensino Médio**. Editora SBM. Rio de Janeiro. 2001.

_________ . **Como reconhecer uma função de tipo exponencial**, v 58, Revista do Professor de Matemática. SBM, Rio de janeiro, 2005.

LIMA, P. F. **Jogos: uma ponte para a matemática**. In: II ENEM. São Paulo: set/1991.

MACHADO, N. J. MACHADO, N.J. Matemática e educação: alegorias, tecnologias e temas afins**. São Paulo: Cortez, 1992.**

MENEZES, J. E. **A interação jogo matemático-alunos em atividades extra classe: o jogo do NIM**. Dissertação de Mestrado. Recife: UFPE, 1996.

REGO, R. G. **Tese de Doutorado**, UFRN, Rio Grande do Norte, 2000.

SANTOS, E. F. V. **O Efeito de uma Técnica de Jogo sobre o Rendimento da Aprendizagem em Matemática Superior.** Dissertação de Mestrado. Porto Alegre: UFRGS, 1978.

TAHAN, M. A. **A Didática da Matemática**, v. 1, São Paulo: Saraiva, 1969.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

Bibliografia Consultada

BARCO, L. **A Matemática não foi feita para chatear ninguém**. In: Superinteressante, Secção Dois mais dois,jun. São Paulo, 1991.

BROUSSEAU, G. **Theory Of Didactical Situations In Mathematics.** (Didactiques des Mathématiques, 1970-1990). Mathematics Education Library, vol. 19. Editado e traduzido por Balacheff, Nicolas et. al. Kluwer Academic Publishers, DORECHT / Boston / London, 1997.

BESSA DE MENEZES, Marcus. (2004) **Investigando o processo de transposição didática interna: o caso dos quadriláteros.** 184 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – UFPE-PE, Recife.

CARAÇA, B. J. **Fundamentos da Matemática**, São Paulo, 1954.

DOUADY, R. **A Universidade e a Didática da Matemática** : os IREM na França. Caderno da RPM, vol1, nº 1. São Paulo, SBM, 1990.

EVES, H., **Introdução à Historia da Matemática**, Ed.2, São Paulo, 1997.

IEZZI, G. OSVALDO et all. **Matemática**. Vol.1. Saraiva. 2001.

OLIVEIRA, Maria Marly de. Pesquisa Qualitativa. Recife: Bagaço, 2005.

APÊNDICE

Apêndice A

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS
LICEU DE ARTES E OFÍCIOS
PESQUISA COM O 1º ANO ___________ DO ENSINO MÉDIO

Pré-teste e Pós-teste.

?? Considere que uma folha de emborrachado tenha espessura de dois milímetros. Quantas vezes teríamos que recortar a folha e os pedaços obtidos em cada corte ao meio e empilhá-los (colocar um em cima do outro), para que a altura da pilha tenha um valor numérico aproximado a quatro mil milímetros ou quatro metros?

Apêndice B

Atividade 1: Utilizando a Folha de E.V.A. com espessura de 2 mm (milímetros), preencha o quadro abaixo:

Considere o número de recortes que efetuamos na folha de emborrachado e relacione com a espessura da pilha apresentada após o recorte e o empilhamento e a situação antes do recorte. Em seguida relacione a fração do pedaço recortado e o pedaço antes do recorte, preencha resultado no quadro.

Número de recortes	Espessura da pilha total de pedaços recortados	Fração do pedaço em relação à folha inicial
0	2	1
1		
2		
3		
4		
...		
...		
N		

?? Você consegue identificar alguma relação matemática nessa atividade? Em caso afirmativo, qual?

Apêndice C

Atividade 2: A Torre de Hanói – **Como jogar:**

Objetivo: Transportar a torre, com o menor número de movimentos possível, para um dos outros dois pinos, o qual pode ser previamente determinado ou não.

Regras: 1. Só deve mover apenas uma peça de cada vez;
2. Uma peça maior jamais poderá ficar sobre uma menor.

Reflita sobre as questões abaixo e em seguida preencha os quadros adiante:

?? É possível chegar ao objetivo desejado?

?? Se for possível atingir o objetivo, qual o procedimento mais eficaz, ou seja, qual o menor número de movimentos?

?? Existe uma regra simples, um algoritmo de execução, que permita efetuar os movimentos sucessivos dessa estratégia mais prática?

?? Existe alguma relação matemática entre o número *n* de peças da torre e o número mínimo *A(n)* necessário para efetuar a sua transferência do pino de origem para o pino final? Existe uma função matemática *A(n),* da variável *n?*

?? Esse número mínimo *A(n)* é o mesmo quando tomamos com pino final qualquer dos dois que se encontram vazios no início do jogo?

?? Cresce muito esse número mínimo de movimentos, com a quantidade de peças do jogo? Em termos matemáticos, *A(n)* cresce muito com a variável *n*?

?? Como seria a estratégia mais rápida quando mudamos o número de peças?

Quadro 1**: Número mínimo de movimentos dos discos da Torre de Hanói, para transportar a mesma de um pino para outro, considerando o disco da Base.**

Número da Peça	Número Mínimo de Movimentos da peça
N	*A(n)*
1 (peça da base)	1
2	
3	
4	
5	
6	
...	...
n	

Aqui, podemos estabelecer uma função exponencial: $f(n) = 2^n$

Quadro 2**: Número mínimo de movimentos dos discos da Torre de Hanói, para transportá-la de um pino para outro.**

Número de Peças	Número Mínimo de Movimentos da torre
N	*A(n)*
1	1
2	3
3	
4	
5	
6	
...	...
N	

Apêndice D

Atividade 3: Problemas

2. Qual das opções você escolheria como financeiramente a mais vantajosa para comprar um cavalo puro sangue:

    a. R$1.000,00 pelo primeiro dente, R$2.000,00 pelo segundo, R$ 4.000,00 pelo terceiro dente e assim por diante.

    b. R$5.000,00 por cada dente.

    Por quê?

3. Um pai resolve distribuir uma mesada para cada um dos dois filhos da seguinte forma:
    a. O filho mais novo receberá R$1,00 no primeiro mês e dobra a cada mês em relação ao mês anterior;

    b. O filho mais velho receberá R$ 150,00 por mês e com aumento do mesmo valor nos meses seguintes, ou seja, ele receberá a sua mesada mais R$150,00 por mês.

    c. De acordo com essas condições qual o filho que receberá maior quantia após 12 meses? Justifique.

4. Na compra de uma moto, uma concessionária estava oferecendo as seguintes propostas aos clientes:

    a. O cliente levaria a moto e pagaria em 15 meses com parcelas iniciando com R$2,00 e dobrando a cada mês em relação ao mês anterior até o final do prazo.

    b. O cliente efetuaria os pagamentos mensais com parcelas fixas de R$200,00.

    Com qual das opções de pagamento o cliente teria mais vantagens financeiras?