

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO – UFRPE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

A UTILIZAÇÃO DE JOGOS CONCRETOS NA
APRENDIZAGEM DE INDUÇÃO FINITA NO ENSINO
SUPERIOR

RAFAEL JOSÉ ALVES DO REGO BARROS

RECIFE - 2011

RAFAEL JOSÉ ALVES DO REGO BARROS

**A UTILIZAÇÃO DE JOGOS CONCRETOS NA
APRENDIZAGEM DE INDUÇÃO FINITA NO ENSINO
SUPERIOR**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, (PPGEC), da Universidade Federal Rural Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Mestrando: Rafael José Alves do Rego Barros

Orientadora: Josinalva Estacio Menezes, Dra.

RECIFE - 2011

Ficha Catalográfica

B586u BARROS, Rafael José Alves do
 A Utilização de Jogos Concretos na Aprendizagem de Indução Finita no
 Ensino Superior de Recife / Rafael José Alves do Rego Barros
 -- 2011.
 100 f.: il.

 Orientador (a): Josinalva Estácio Menezes.
 Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) –
 Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Educação,
 Recife, 2011.
 Inclui apêndice e referências.

 1. Jogos Matemáticos 2. Indução Finita 3. Teoria da Aprendizagem
 Significativa 4. Ensino Superior
 Menezes, Josinalva
 Estácio, Orientadora II. Título

CDD 370.71

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO – UFRPE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

A UTILIZAÇÃO DE JOGOS CONCRETOS NA
APRENDIZAGEM DE INDUÇÃO FINITA NO ENSINO
SUPERIOR

RAFAEL JOSÉ ALVES DO REGO BARROS

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora composta pelos seguintes professores:

Josinalva Estacio Menezes, Dra
Presidente – UnB – (Orientadora)

Filomena Maria Gonçalves da Silva Cordeiro Moita, Dra
Examinadora Externa – UEPB

Ross Aves do Nascimento, Dr
2º Examinador – UFRPE

Zélia Maria Soares Jófili, Dra
3ª Examinadora – UFRPE

Dissertação aprovada no dia 19/12/2011, no Departamento de Educação da UFRPE

DEDICATÓRIAS:

À minha adorável esposa Kívia Pimentel, por estar sempre ao meu lado, incentivando-me em todos os momentos desta etapa da minha vida, sempre me proporcionando muito amor e carinho nas horas em que mais precisei.

À minha mãe Profa. Patrícia Alves Rosembaum, por toda dedicação que teve em todas as etapas da minha vida, principalmente em minha formação inicial, proporcionando-me sempre do melhor, dentro de suas condições, sendo uma das principais responsáveis pelo meu sucesso acadêmico.

Ao meu pai Fernando José Oliveira do Rêgo Barros, por ter sempre confiado no meu potencial, e ter participado da minha caminhada sempre com grandes palavras de incentivo.

Ao meu avô Dr. José do Rêgo Barros, que sempre foi uma referência intelectual e pessoal, um grande homem de que tenho muito orgulho de ser neto.

Em especial ao meu padrasto Prof. Me. Simão Rosembaum, por ter sido a minha principal referência intelectual e profissional, com participação fundamental na minha formação básica e superior com inúmeras cobranças positivas, explorando o máximo da minha capacidade intelectual, pessoa em quem sempre me espelhei e de quem sempre busco me aproximar.

AGRADECIMENTOS:

À professora Dr. Josinalva Estacio Menezes (Jô), por sua competência e dedicação, mesmo à distância me orientando perfeitamente com grandes contribuições, e tendo participado de minha formação desde a graduação, me orientado em Programa de Iniciação Científica (PIC), Monografia de Especialização, agora Dissertação de Mestrado, ou seja, a principal responsável pela minha formação acadêmica, a quem serei sempre grato e que sempre terá minha admiração.

Aos integrantes da banca examinadora, Prof. Ross Alves, Profa. Filomena Moita e Profa. Zélia Jófili, pelas importantes contribuições que deram a este trabalho.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências e aos colegas de turma, que tornaram possível a conclusão deste trabalho.

Ao meu grande amigo Prof. Cristiano Gaudêncio que me iniciou na vida acadêmica.

Ao Chefe do Departamento do Curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Formação de Professores de Goiana, Prof. Aguinaldo Araújo, pelo grande incentivo durante o desenvolvimento da pesquisa.

Aos colegas da Faculdade de Formação de Professores de Goiana, desde a presidência, direção, professores, secretários, entre outros, por compartilharem comigo conhecimentos, alegrias, angústias e vitórias.

Aos alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da FFPG, entrada 2009.2 Participantes da Pesquisa no 1º semestre de 2010, cursando no momento a disciplina de Teoria dos Números, um muito obrigado pela participação e empenho de todos.

Ao Departamento de Matemática da UFRPE, por sempre organizar meus horários de aula de acordo com os horários das aulas do Mestrado.

Ao LCAPE, por ter me cedido alguns Jogos Matemáticos para minhas aplicações.

2.5. Etapas da pesquisa	53
3. RESULTADOS	55
3.1. Análise das respostas ao questionário anterior às atividades	56
3.2. Análise das Respostas do Pré-Teste e Pós-Teste	63
3.3. Análise das respostas ao questionário de aprendizagem	77
CONCLUSÃO	84
Referências Bibliográficas	88
APÊNDICES.....	91
Apêndice A: Modelo do questionário sobre aprendizado com Jogos aplicado aos alunos antes da aplicação dos Jogos	92
Apêndice B: Modelo do Pré-Teste	93
Apêndice C: A atividade realizada em sala de aula com a torre de Hanói.....	94
Apêndice D: A atividade realizada em sala de aula com o salto de rã.....	96
Apêndice E: Modelo do Pós-Teste	97
Apêndice F: Modelo do questionário sobre aprendizado com Jogos aplicado aos alunos depois da aplicação dos Jogos	98
Apêndice G: Fotos das Aplicações dos Jogos	99

RESUMO

Nesta pesquisa analisamos a contribuição do uso de jogos matemáticos na aprendizagem do primeiro princípio de indução finita em alunos de graduação em matemática. Para esse estudo, partimos das dificuldades encontradas no aprendizado de alguns conteúdos matemáticos em nível superior, inclusive indução finita. Por isso, consideramos pertinente a realização desta pesquisa em jogos, uma vez que já era uma realidade que vinha dando resultados positivos em alunos da educação básica, e também, nas possibilidades de uso de uma ferramenta importante para auxiliar professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem no nível superior. O aporte teórico foi direcionado a uma reflexão sobre a teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel e a indução finita. A pesquisa foi desenvolvida segundo as concepções da metodologia exploratória e descritiva, tendo como campo de pesquisa a Faculdade de Formação de Professores de Goiana; 15 alunos do 4º período da Licenciatura em Matemática que estavam cursando a disciplina de teoria dos números. Fizemos uma comparação entre os resultados obtidos antes e após as atividades realizadas com jogos. Os jogos utilizados foram: torre de Hanói, salto de rã e anéis chineses. Seus resultados mostraram uma melhora no desempenho dos alunos após a utilização dos jogos. A maioria, após o fim da pesquisa, respondeu que é possível, achando mais fácil e interessante, aprender no ensino superior com a utilização de jogos matemáticos.

Palavras- Chaves: Jogos Matemáticos, Indução Finita, Teoria da Aprendizagem Significativa e Ensino Superior.

ABSTRACT

In this study we analyze the contribution of the use of games in mathematical learning of the first principle of finite induction of undergraduates in mathematics. For this study, we found difficulties in learning some higher-level mathematical content, including finite induction. Therefore, we consider this research relevant to gaming, since it was a reality that had been yielding positive results in students of basic education, and also the possibilities of using an important tool to help teachers and students in the teaching process and learning in higher education. The theoretical approach was taken to a reflection on the learning theory of David Ausubel meaningful and finite induction. The research was carried out according to the concepts of the methodology exploratory and descriptive, with the field of research the Faculty of Teacher Education Goiana, 15 students of the 4th period of the degree in mathematics who were attending the course in number theory. We did a comparison between the results obtained before and after activities with games. The games were: Tower of Hanoi, leap frog and Chinese rings. Their results showed an improvement in student performance after the use of games. Most, after the end of the study, said it's possible, finding it easier and interesting learning in higher education with the use of mathematical games.

Key Words: Mathematical Games, Finite Induction Theory of Meaningful Learning and Higher Education.

INTRODUÇÃO

INTRODUÇÃO

As dificuldades dos alunos em aprender provas e demonstrações matemáticas constituem-se numa realidade muito presente em nossas escolas, principalmente pelo fato do professor quase não mostrá-las em sala de aula. Isso vem se refletindo no Ensino Superior, inclusive naqueles alunos que escolhem como formação profissional a área de licenciatura em matemática. Segundo Garrinca, “*a prova rigorosa é tida como elemento fundamentalmente importante para a formação de professores*” (GARNICA, 2002, p.74).

O que podemos notar nas discussões acerca do ensino superior é que as metodologias utilizadas para o ensino das demonstrações não parecem prestar muito auxílio na superação dessas dificuldades. Neste sentido, debates e pesquisas acerca de busca de alternativas para melhorar esse quadro têm emergido nas últimas décadas, enfocando as novas tendências para o ensino de matemática em todos os níveis de ensino.

Neste contexto uma das áreas que mostra mais dificuldade de aprendizagem é a álgebra e nela, um dos conteúdos mais críticos corresponde à indução finita. No curso de Licenciatura em Matemática ela é ensinada nos primeiros períodos, e é pré-requisito de várias outras disciplinas, daí considerarmos a necessidade de olhá-la com mais atenção.

Hoje em dia, vemos muitas pesquisas voltadas para a utilização de jogos matemáticos em turmas de Ensino Fundamental e Médio. Um fato que constatamos nas mesmas é que esse trabalho vem ajudando bastante o desenvolvimento intelectual dos alunos e sendo realizado com sucesso, como é mostrado nos trabalhos apresentados em eventos como os Encontros Nacionais de Educação Matemática – ENEM – e os SIPEM – Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Sendo assim, quisemos estender essas pesquisas para o Ensino Superior, verificando se as aplicações de jogos na

introdução de alguns conceitos matemáticos podem ou não contribuir para um melhor desempenho dos alunos.

Uma sugestão para atividades no ensino superior é a utilização de jogos concretos em atividades contextualizadas na compreensão de ideias matemáticas no ensino superior. Isso pode contribuir de modo significativo com a formação destes alunos, pois pode facilitar o seu aprendizado e, ao jogar, eles podem obter prazer em conseguir atingir o objetivo final, descobrindo as estratégias¹ de vitória e desenvolvendo o seu raciocínio (MENEZES, et al, 2008).

Devemos destacar também que o problema matemático precisa ter sentido e significado para o aluno, diante dos conhecimentos que ele já possui, pois ao resolver um problema através de jogos, ele pode verificar através de suas estratégias que conteúdos matemáticos foram mobilizados por eles.

Muito ouvimos falar e falamos em vincular teoria à prática. Utilizar jogos como recurso didático é uma possibilidade para concretizar tal ideia. Estes elementos podem ser usados na classe como um prolongamento da prática habitual da aula. São recursos interessantes e eficientes, que auxiliam os alunos: “Jogar não é estudar nem trabalhar, porque jogando, o aluno aprende, sobretudo, a conhecer e compreender o mundo social que o rodeia” (MOURA, 1996, p.34).

Até dentre os matemáticos, vemos depoimentos e ideias que incentivam fortemente os jogos no ensino, tais como os respeitadíssimos Leibniz na matemática e Miguel de Guzmán na educação matemática, conforme lemos a seguir:

Não há homens mais inteligentes do que aqueles que são capazes de inventar jogos. É aí que o seu espírito se manifesta mais livremente. Seria desejável que existisse um curso inteiro de jogos tratados matematicamente. (GOTTFRIED WOLLHELM VONLEIBNIZ: carta a De Montmort, 29 de julho de 1715).

¹ Estratégia: Arte de aplicar os meios disponíveis ou explorar condições favoráveis com vista a objetivos específicos. Esta definição está disponível no minidicionário da língua portuguesa Aurélio, 8ª edição, na página 321.

“O jogo e a beleza estão na origem da Matemática. Se os matemáticos de todos os tempos passaram tão bem jogando e contemplando o jogo e a ciência, por que não aprender e comunicar através do jogo e da beleza?” (MIGUEL DE GUZMAN, 1986, prefácio).

A partir dessas reflexões, surgiu o seguinte questionamento: Qual a contribuição do uso de jogos concretos na aprendizagem do primeiro princípio da indução finita?

Devido a esses problemas e dificuldades encontradas no aprendizado de alguns conteúdos matemáticos em nível superior, inclusive indução finita, consideramos pertinente realizar esta pesquisa em jogos, uma vez que já era uma realidade que vinha dando resultados positivos em alunos de Ensino Fundamental e Médio.

A partir dessas considerações passamos a descrever os objetivos. Portanto, estabelecemos como objetivo geral, analisar a contribuição do uso de jogos na aprendizagem do primeiro princípio de indução finita em alunos de graduação em matemática. Especificamente, pretendemos identificar a opinião de estudantes do ensino superior sobre a contribuição de jogos para aprendizagem de matemática no ensino superior; utilizar jogos no ensino de matemática em instituições de ensino superior; identificar o interesse dos estudantes em utilizar jogos no ensino de matemática na futura prática docente.

Na busca do alcance destes objetivos, propomos a seguinte estruturação para o nosso trabalho:

No primeiro capítulo, apresentamos a fundamentação teórica, discutindo os jogos matemáticos em sala de aula, passando por uma breve explanação sobre a indução finita; faremos também uma breve discussão sobre a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, finalizando com a revisão da literatura.

No segundo capítulo, apresentaremos a metodologia. Nele, explicitaremos o campo de pesquisa, descreveremos os participantes e apresentaremos os instrumentos de coleta e as formas de análise dos dados.

O capítulo seguinte é dedicado à coleta, análise e discussão dos dados.

Apresentaremos, então, as conclusões e possíveis encaminhamentos para futuros trabalhos, seguidas das referências bibliográficas e os apêndices referentes ao material elaborado.

1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo discutiremos as ideias que embasaram nosso trabalho, no tocante aos jogos no contexto do ensino-aprendizagem, como também apresentaremos a descrição dos jogos que utilizaremos em nossa pesquisa empírica.

1.1 O USO DE JOGOS MATEMÁTICOS EM SALA DE AULA

O uso dos jogos matemáticos em sala de aula tem sido adotado por alguns professores do Ensino Básico na disciplina de matemática, porém no Ensino Superior essa prática não é muito presente. Pesquisadores concordam que os jogos, quando bem utilizados, podem se constituir numa ferramenta muito rica no processo de ensino-aprendizagem, pois tira um pouco o aluno da abstração com situações-problemas que para serem resolvidas geralmente precisam mobilizar muitos conceitos matemáticos. (MENEZES, 1996).

Segundo Maria da Glória Lopes, psicopedagoga, que tem realizado alguns trabalhos com jogos:

É fácil e eficiente aprender por meio de jogos, e isso é válido para todas as idades, desde o maternal até sua fase adulta. O jogo em si possui componentes do cotidiano e o envolvimento desperta o interesse do aprendiz, que se torna sujeito ativo do processo, e a confecção dos próprios jogos é ainda muito mais emocionante do que apenas jogar (LOPES, 2000, p.23-25).

Essa ideia é reforçada por Borin (1996):

Outro motivo para a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la.

Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam Matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem. (p.9).

No ensino superior, Menezes (2008) defende a possibilidade de contribuição dos jogos na aprendizagem de alguns conteúdos de ensino superior como a indução, as sequências e as funções, entre outros. Os jogos matemáticos são ferramentas que podem dar um bom auxílio no processo de aprendizagem, pois através deles podemos explorar de forma concreta, e sairmos um pouco da abstração. A autora ainda considera que atividades com jogos contribuem para minimizar os efeitos de um ensino árido, uma relação seca com a matemática e, portanto, maior aproximação e mais afetividade: alunos que gostam de jogar em geral se saem melhor no jogo (IBIDEM, 1996).

No curso de Licenciatura em Matemática há muitas disciplinas cujos conteúdos são bastante abstratos, desvinculados de situações reais e sendo ministradas sem aplicabilidade prática, fazendo com que o aluno tenha certa dificuldade em entendê-los. Com o auxílio dos jogos pedagógicos a compreensão será facilitada e serão desenvolvidos o raciocínio lógico, a socialização, a criatividade, a iniciativa e a intuição do aluno. Ainda segundo Menezes:

O que caracteriza o jogo pedagógico é sua finalidade básica, ou seja, a aprendizagem. O professor pode, então, lançar mão do mecanismo da intervenção pedagógica, para dirigir essa utilização do jogo junto aos alunos, com o objetivo de buscar minimização das dificuldades dos alunos, tanto quanto a participação dos mesmos no jogo, quanto à aprendizagem dos conteúdos a eles relacionados, bem como orientá-los para o estudo dos conteúdos ministrados. (MENEZES, 2008, p.33).

O licenciando, quando joga, tem a possibilidade de buscar relacionar a estratégia de vitória a um conceito matemático aprendido anteriormente para buscar a solução do jogo.

Os jogos utilizados em sala de aula são classificados por Brenelli em três tipos:

- jogos estratégicos, onde são trabalhadas as habilidades que compõem o raciocínio lógico. Com eles, os alunos lêem as regras e buscam caminhos para atingirem o objetivo final, utilizando estratégias para isso;

- jogos de treinamento, os quais são utilizados quando o professor percebe que alguns alunos precisam de reforço num determinado conteúdo e quer substituir as cansativas listas de exercícios. Neles, quase sempre o fator sorte exerce um papel preponderante e interfere nos resultados finais;
- jogos geométricos, que têm como objetivo desenvolver a habilidade de observação e o pensamento lógico. Com eles conseguimos trabalhar figuras geométricas, semelhança de figuras, ângulos e polígonos. (BRENELLI, 1996, p.56).

Foi uma das pretensões desta pesquisa verificar se o uso dos jogos matemáticos em sala de aula também pode ocorrer no ensino superior. Nesse sentido, vamos utilizá-los para abordar o conteúdo de indução finita em disciplinas de álgebra moderna. Nossos jogos se enquadram no primeiro tipo da classificação do autor supracitado.

Rêgo (1998) alerta para alguns cuidados relativos ao uso de jogos no ensino:

- Propor atividades, mas estar aberto a sugestões e modificações das mesmas ao longo de sua realização (vale lembrar que modificações realizadas nas regras de um jogo já conhecido podem levar à criação de novos e interessantes jogos). O professor precisa estar atento e aberto a novas abordagens ou descobertas, mesmo que em certo momento determinadas observações lhes pareçam sem sentido;
- Realizar uma escolha responsável e crítica do material;
- Planejar com antecedência as atividades, procurando conhecer bem o material a ser utilizado, para que o mesmo possa ser explorado de forma eficiente, usando de bom senso para adequá-lo às necessidades da turma. (p. 19).

Os jogos escolhidos para nossa pesquisa remetem ao estudo da indução finita. Assim, para efeito de melhor compreensão de nossas ideias, passamos a discutir brevemente este conteúdo e seu ensino.

1.2. O ENSINO DE INDUÇÃO FINITA

A indução finita é uma das maneiras de se desenvolver uma demonstração matemática. Existem outras formas, e o estudante que quiser prosseguir em sua formação na área das ciências exatas, em particular em matemática, precisará estar familiarizado com estas ideias.

Além da prova por indução finita, Savioli (2007) classifica os tipos de demonstrações matemáticas como:

- Prova por construção ou demonstração direta: a partir de algumas hipóteses é possível chegar, por dedução, à tese;
- Prova por absurdo: nega-se a tese e, a partir das hipóteses configuradas, chega-se a um absurdo. Como exemplo tem-se a prova que Euclides fez para a existência de infinitos números primos;
- Prova utilizando-se a contra-positiva: nega-se a tese e chega-se a uma negação da hipótese. Como exemplo tem-se a prova de que para um inteiro n qualquer, se n^2 é par, então n é par;
- Prova de existência: constroi-se um objeto matemático. Como exemplo, tem-se a prova da existência do máximo divisor comum de dois ou mais números inteiros;
- Prova de unicidade: conclui-se que um objeto é único. Como exemplo, tem-se a questão da unicidade do elemento neutro para a adição nos inteiros;

- Prova por contra-exemplo: exibe-se um caso particular no qual a propriedade não vale. Como exemplo, tem-se a prova de que nem todo número primo é ímpar.

Para Hanna (2000), as provas possuem 8 funções que são:

1. Verificar (relacionado com a verdade de uma afirmação);
2. Explicar (fornecendo 'pistas' do porque é verdade);
3. Sistematizar (organizar os vários resultados em um sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas);
4. Descobrir (a descoberta ou a invenção de novos resultados);
5. Comunicar (a transmissão do conhecimento matemático);
6. Construir (uma teoria empírica);
7. Explorar (o significado de uma definição ou as consequências de uma afirmação);
8. Incorporar (um fato bem conhecido em um contexto diferente e, portanto vê-lo sob outro ponto de vista).

No curso de licenciatura em matemática, o conceito de indução é ensinado nos períodos iniciais, geralmente nos primeiros contatos com as disciplinas de álgebra moderna, dando ênfase a técnicas de transformações algébricas dissociadas de situações reais. De acordo com Silva:

Na indução finita é possível notar que na realização de uma experiência matemática os estudantes podem descobrir proposições por meio de construções empíricas, a partir daí verificar a veracidade de tal proposição. Para isso o estudante deve apresentar argumentos explicando porque se trata de uma afirmação verdadeira. Assim, continuando a experiência matemática, organizar os resultados

encontrados em um sistema dedutivo, explorar novas possibilidades com relação a essa nova afirmação, investigar sob outros aspectos a experiência realizada e por fim comunicar os resultados encontrados. (SILVA, 2010, p. 32).

Na Matemática a indução finita é uma das várias técnicas de demonstração, também denominada indução matemática.

A ideia de indução é o primeiro contato formal do aluno com a ideia do infinito, por isso sua importância dentro da matemática, conforme argumenta Hefez:

É preciso ter clareza que a Indução Matemática é diferente da indução empírica das ciências naturais, em que é comum, após um certo número, necessariamente finito, de experimentos, enunciar leis gerais que governam o fenômeno em estudo. Essas leis são tidas como verdades, até prova em contrário. Na matemática, não há lugar para afirmações verdadeiras até prova em contrário. A Prova por Indução Matemática trata de estabelecer que determinada sentença aberta sobre os naturais é sempre verdadeira. (HEFEZ, 2009, p.8).

Ainda sobre indução finita, Lima (2009) afirma que:

O Princípio da Indução é um eficiente instrumento para a demonstração de fatos referentes aos números naturais. Por isso deve-se adquirir prática em sua utilização. Por outro lado, é importante também conhecer seu significado e sua posição dentro do arcabouço da Matemática. Entender o Princípio da Indução é praticamente o mesmo que entender os números naturais (p. 1).

Para fixarmos ideias, apresentamos a definição encontrada em Iezzi (2006) sobre indução finita:

Seja $p(n)$ uma função proposicional cujo universo só é o conjunto dos inteiros maiores que ou iguais a um inteiro dado a . Suponhamos que consiga provar o seguinte:

- i) $P(a)$ é verdadeira.
- ii) Se $r \geq a$ e $p(r)$ é verdadeira, então $p(r + 1)$ também é verdadeira.

Então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

Vejamos como usar esse método para mostrar a validade, para todo natural $n \geq 1$, da fórmula: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

Observe que $P(1)$ é verdadeira, já que a fórmula é trivialmente válida para $n = 1$. Suponha agora que, para algum n natural, $P(n)$ seja verdadeira; ou seja, que:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Queremos provar que $P(n+1)$ é verdadeira. Somando $2n+1$, que é o próximo número ímpar após $2n - 1$, a ambos os lados da igualdade acima, obtemos a igualdade também verdadeira:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

Isso mostra que $P(n+1)$ é verdadeira, toda vez que $P(n)$ é verdadeira. Pelo teorema, a fórmula é válida para todo número natural n (p. 31).

Segundo Hefez (2009), essa demonstração acima foi feita pela primeira vez em 1575 e foi realizada por Francisco Maurolycos (1494-1575). De acordo com Polya (1975):

A indução é o processo de descoberta de leis gerais pela observação de casos particulares. É utilizada em todas as áreas das ciências, inclusive na matemática. A indução matemática é utilizada exclusivamente na Matemática, para demonstrar teoremas de um certo tipo. É de lamentar que estes nomes estejam relacionados, pois há muito pouca conexão lógica entre os dois processos. Há, no entanto uma conexão prática, pois muitas vezes utilizamos ambos conjuntamente. (p 91).

O nosso interesse foi usar jogos matemáticos cuja estratégia de vitória pudesse ser provada com base nos procedimentos da indução finita, como proposta pedagógica no ensino-aprendizagem de tal conteúdo, a fim de refletir sobre suas aplicações matemáticas, e levando o aluno a refletir sobre algumas questões como: Qual a real importância do ensino de indução na Matemática? Claro que a resposta à questão não é o foco do nosso trabalho, mas apresentamos aqui como exemplo de um dos aspectos que o mesmo pode favorecer no aluno.

Ainda considerando os jogos inseridos no contexto da aprendizagem, fomos buscar um aporte teórico acerca da aprendizagem apoiada no uso de materiais auxiliares, o que nos levou à Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel. Assim, passaremos a explicitar os elementos principais da referida teoria e sua contribuição para a nossa pesquisa empírica.

1.3. REFLEXÃO SOBRE INDUÇÃO E A TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE AUSUBEL

A indução finita, como é vista normalmente nos cursos de graduação, em especial o curso de matemática, leva o aluno à ideia de algo puramente algébrico e sem

aplicabilidade. No entanto, problemas envolvendo jogos como, por exemplo, a torre de Hanói, o salto de rã e os anéis chineses podem ser abordados com o método da indução finita, como foi feito em nosso trabalho, com fins de analisar a contribuição dessas atividades para o aprendizado do conteúdo de indução finita no ensino superior. Vamos recorrer à Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel para desenvolver nossa pesquisa quando da aplicação dos jogos.

Para tratar então deste processo de aprendizagem, conforme explicamos antes, recorreremos à Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel (2003), a qual:

[...] consiste no facto de que novas ideias expressas de forma simbólica (a tarefa de aprendizagem) se relacionam àquilo que o aprendiz já sabe (a estrutura cognitiva deste numa determinada área de matérias), de forma não arbitrária e não literal, e que o produto desta interacção activa e integradora é o surgimento de um novo significado, que reflecte a natureza substantiva e denotativa deste produto interactivo. (p.71).

Ainda sobre a aprendizagem significativa:

[...] exige que os aprendizes manifestem um mecanismo de aprendizagem significativa (ou seja, uma disposição para relacionarem o novo material a ser apreendido, de forma não arbitrária e não literal, à própria estrutura de conhecimentos) e que o material que apreendem seja potencialmente significativo para os mesmos, nomeadamente relacional com as estruturas de conhecimentos particulares, numa base não arbitrária e não literal. (AUSUBEL, 2003, p. 72).

Ausubel distingue três tipos de aprendizagem significativa: representacional, de conceitos e proposicional.

A aprendizagem representacional refere-se aos significados de símbolos de símbolos ou palavras unitárias e a aprendizagem proposicional refere-se aos significados de ideias expressas por grupos de palavras combinados em proposições ou frases. (AUSUBEL, 2003, p. 84)

Na aprendizagem de conceitos é, de certa forma, uma aprendizagem representacional, pois conceitos são também representados por símbolos particulares, porém, são genéricos ou categóricos, representam abstrações dos atributos essenciais dos referentes, representam regularidades em eventos ou objetos.

Geralmente, os alunos apresentam dificuldades em interpretar problema que envolvam o conteúdo de indução pelo fato de, na maioria das vezes apenas operar com questões de “prove e demonstre”, como visto no tópico anterior. Por causa disto, lançaremos mão da teoria cognitivista de Ausubel para verificar se os alunos, após o uso dos jogos, conseguem relacionar o conceito de indução em uma situação problema. Esses conhecimentos prévios (indução finita), importantes para, a resolução dos problemas contextualizados, são para Ausubel os subsunçores.

Isso ocorre quando uma nova informação é ancorada nos conceitos relevantes já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz, ou ainda por acontecer interação entre saberes específicos, onde o saber pré-existente é definido por *subsunçor* (COLL, 2004)

Em vista disso, durante a pesquisa, buscaremos identificar se houve uma aprendizagem significativa dos alunos, quanto à mobilização do conceito de indução finita, enquanto *subsunçor*. Segundo Ausubel (1978), para que isso ocorra, é preciso que o conteúdo a ser ensinado faça algum sentido para o aprendiz.

Quando Ausubel (1978) usa o termo “ancoragem”, o mesmo tem o significado de explicitar que as ideias preexistentes têm de fornecer apoio às novas ideias recém aprendidas. Segundo o próprio autor:

O aprendizado significativo acontece quando uma informação nova é adquirida mediante um esforço deliberado por parte do aprendiz em ligar a informação nova com conceitos ou proposições relevantes pré-existentes em sua estrutura cognitiva (AUSUBEL et al., 1978, p. 159).

Ausubel também define aprendizagem mecânica como sendo a aprendizagem de novas informações com pouca ou nenhuma interação com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva. Segundo Moreira (1999):

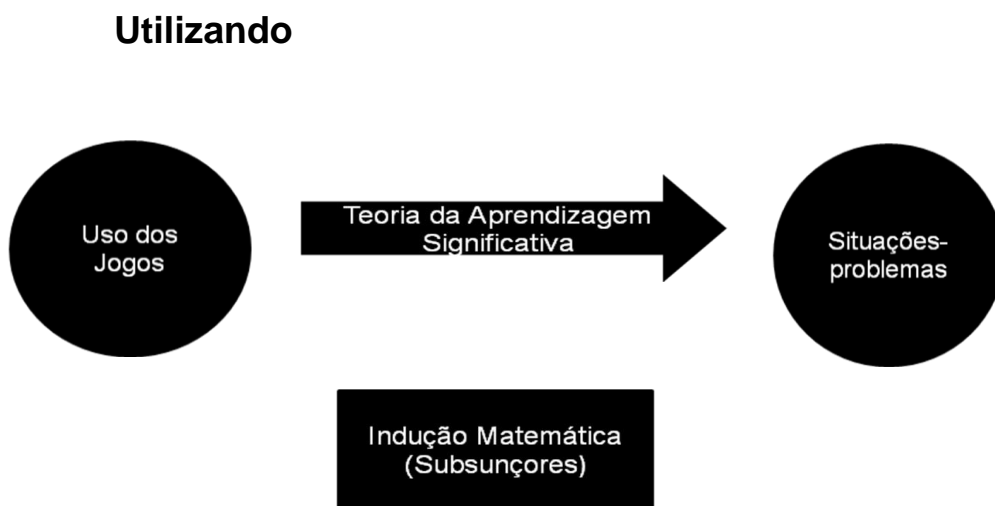
Ausubel não estabelece a distinção entre aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica como sendo uma dicotomia e sim como um contínuo. Da mesma forma, essa distinção não deve ser confundida com a distinção entre aprendizagem por descoberta e aprendizagem por recepção.

Segundo Ausubel, na aprendizagem por recepção, o que deve ser aprendido é apresentado ao aprendiz em sua forma final, enquanto na aprendizagem por descoberta o conteúdo principal a ser aprendido deve ser descoberto pelo aprendiz. (MOREIRA, 1999, p. 154).

Mais adiante temos uma ilustração da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel em nosso trabalho.

Como podemos observar no esquema mostrado, o trabalho com jogos aplicados ao ensino superior, cuja matematização e prova da estratégia de vitória pressupõe a aplicação do conteúdo indução finita, pode atuar como uma situação-problema correspondente a atingir o objetivo do jogo. Nesta, o conhecimento de indução finita pode atuar como um subsunçor para provar que a expressão matemática elaborada fornece a estratégia de vitória traduzida no número mínimo de movimentos necessário para vencer o jogo.

Figura 1: RELAÇÃO ENTRE O USO DE JOGOS E A TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA



Passamos a apresentar as pesquisas encontradas correlatas com o nosso tema escolhido.

1.4. REVISÃO DE LITERATURA

Dentre os trabalhos recentes sobre jogos matemáticos no ensino superior, podemos citar a dissertação de Ferreira (2008)². O objetivo foi investigar o efeito do uso de jogos como recurso metodológico para o ensino de Matemática na Educação Básica na formação inicial de alunos do 7º e do 8º períodos do curso de Licenciatura em Matemática à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. Em seu trabalho, utilizou jogos reais e virtuais em encontros distintos com diferentes enfoques e objetivos. Entre os jogos trabalhados destacam-se o P3, que se refere à análise combinatória, e o salto de rã, que possui aplicações no ensino fundamental, médio e superior. Segundo a autora, o trabalho foi bastante significativo visto que permitiu perceber avanços relevantes na maneira desses futuros professores e professoras conceberem o significado da atividade de matemática em sala de aula.

O artigo de Savioli (2007)³, objetivou apresentar aos alunos a indução finita de uma maneira reflexiva e sendo assim, optou por utilizar a investigação matemática numa prática em sala de aula. A ideia foi levar o aluno a ter uma experiência matemática, buscando a sua reflexão na utilização de algumas fórmulas matemáticas, inclusive de geometria plana.

Destacamos também a dissertação de Silva 2010⁴, do programa de pós-graduação em Ensino de Ciências da UEL, orientando de Savioli, o seu trabalho teve como objetivo verificar, por meio de uma sequência didática que trabalha com a indução finita via axiomas de Peano, se os estudantes compreenderiam a diferença entre o método de indução empírica e o de indução finita. Bem como a

² Essa dissertação foi defendida em 2008 pelo PPGECC da UFRPE, intitulada “Concepções de licenciandos de matemática sobre a utilização de jogos no ensino básico como uma ferramenta para o ensino aprendizagem”.

³ A autora, Professora Dra. Ângela Marta Pereira das Dores Savioli, do programa de pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL), publicou o artigo na Revista Bolema em 2007, nº 20, PP. 41 a 51 cujo título era “Uma Reflexão sobre a Indução Finita: relato de uma Experiência”.

⁴ Essa dissertação foi defendida em 2010 pelo Programa de pós-graduação em Ensino das Ciências da UEL, por Eduardo Machado da Silva, intitulada “Compreensão de Estudantes de um Curso de Matemática a Respeito do Conceito de Indução Finita”.

indução finita como uma demonstração formal, em sua pesquisa trabalhou com alunos da Licenciatura em Matemática e utilizou a Engenharia Didática.

A dissertação de Santos Jr. (2010)⁵ cujo objetivo foi investigar quais conteúdos teóricos de matemática os alunos mobilizam em atividades com os jogos salto de rã e troca-peças e se relacionavam a indução finita como conteúdo matemático no contexto do jogo quanto ao estabelecimento do número mínimo de jogadas relativo à estratégia de vitória.

Destacamos também a dissertação de Santos (1979), um pouco mais antiga, mas com uma grande contribuição na Educação Matemática. Ele criou um jogo de cartas para ensinar conteúdos de Análise Real em uma turma de licenciatura em matemática. Como resultado, o rendimento dos alunos melhorou visto que a disciplina de análise real é considerada pelos alunos um dos pontos críticos, ao lado de Cálculo I, dos Cursos de Licenciatura em Matemática.

Por fim a dissertação de Menezes (1996)⁶, cujo objetivo foi observar e descrever as interações entre aluno(s) e jogo(s) matemático(s) em ambientes extraclasse, mais precisamente, de laboratórios de ensino de matemática. Para o jogo do Nim, foi pesquisado pela autora os conceitos presentes nesse jogo, como são mobilizados durante o jogo, e se ocorre uma descoberta da estratégia de vitória.

Estes trabalhos destacam a pertinência de pesquisas sobre o tema, mas acreditamos que são ainda em número pequeno considerando a sua importância nos cursos de graduação na área das ciências exatas, o que torna válida nossa pesquisa.

⁵ Essa dissertação foi defendida em 2010 pelo PPGE da UFRPE, por Valdir Bezerra de Santos Júnior intitulada "A Mobilização de Conteúdos Matemáticos em Atividades Práticas em Contexto de Jogo com Licenciandos de Matemática".

⁶ Essa dissertação foi defendida em 1996, por Josinalva Estacio Menezes intitulada "A Utilização Jogo-Alunos em Ambiente extra-classe: O jogo do Nim".

1.5 DESCRIÇÃO DOS JOGOS

Os jogos que vão ser utilizados na pesquisa são: torre de Hanói, salto de rã e anéis chineses. Com esses três jogos poderemos relacionar o conceito de indução finita, explorando significativamente o conteúdo de indução finita visto na disciplina de teoria dos números. Passaremos a descrever cada jogo.

1.5.1. TORRE DE HANÓI

Sendo estes jogos profundamente discutidos e pesquisados no Laboratório Científico de Aprendizagem Pesquisa e Ensino (LACAPE), situado no Departamento de Educação da UFRPE, as descrições aqui apresentadas foram retiradas dos arquivos deste laboratório.

Figura 2: TORRE DE HANÓI



1.5.1.1. BREVE HISTÓRICO E LENDA

Segundo uma lenda, a Torre de Brahma, encontra-se no centro do mundo, sob a cúpula de um templo situado em Benares, na Índia. Neste centro, há uma placa de latão onde estão fixados três pinos de diamante, em um dos quais ao criar o mundo, Brahma colocou 64 discos de ouro, apoiados um sobre o outro, e de diâmetros decrescentes a partir da base. Segundo as imutáveis leis de Brahma, os sacerdotes do templo estão incumbidos da tarefa de transferir a pilha de discos para um dos outros dois pinos trabalhando dia e noite sem cessar, sendo que devem mover um disco por vez e nunca pôr um disco maior sobre outro menor que ele. A vida decorrerá durante essa tarefa, após o fim da qual o templo, a torre e os sacerdotes serão transformados em pó, e o mundo desaparecerá com o estrondo de um trovão.

No Ocidente, atribui-se a criação do jogo e da lenda da Torre de Hanói, ou Torre de Brahma, ao matemático francês EDOUARD LUCAS, já mencionado neste trabalho como um dos precursores das recreações matemáticas, em 1883. O jogo teria sido comercializado como brinquedo sob a autoria do Prof. Claus do colégio LI-SOU STIAN (anagramas de LUCAS e SAINT LOUIS, respectivamente. Este último era o nome do colégio onde Lucas lecionava). Enquanto brinquedo, eram usados oito discos, segundo as mesmas regras descritas na lenda.

1.5.1.2. COMPOSIÇÃO DO JOGO

Estrutura: Uma base sobre a qual estarão apoiados três pinos de mesma altura enfileirados ou numa circunferência imaginária dispostos segundo arcos de 120° . Sete discos com furo central para serem encaixadas nos pinos. Ao conjunto de sete discos será dado o nome de torre.

Objetivo: Transportar a torre, com o menor número de movimentos possível, para um dos outros dois pinos, o qual pode ser previamente determinado ou não.

Regras: 1) É possível mover apenas uma peça de cada vez;
2) Uma peça maior jamais poderá ficar sobre uma menor.

1.5.1.3. IMPLICAÇÕES PEDAGÓGICAS

Esse jogo tem sido utilizado com variantes, tanto a forma do brinquedo quanto no número de peças, tendo em conta os vários níveis escolares, a partir da pré-escola. A partir da quarta série, com as duas regras básicas, podem-se fazer explorações interessantes para descobrir a estratégia ótima. No segundo grau, podemos usá-la para desenvolver noções ligadas ao princípio da indução finita.

Ao propor tal jogo a uma criança, formado com todas as peças, devemos pensar na possibilidade de desistência após alguns minutos de tentativas, pela grande quantidade de movimentos exigidos. Neste caso, torna-se necessário uma intervenção do professor na condução do jogo ao objetivo desejado. Assim, poderemos sugerir a construção inicial com um número mais reduzido de peças, permitindo que a pessoa desafiada possa descobrir no caso simples uma forma sistemática de efetuar as transferências e poder generalizar para um número qualquer de peças.

Esta metodologia, segundo Machado (1992), leva a uma consciência na realização que enriquece o significado do jogo por clarear a razão dos movimentos.

A Torre de Hanói é uma fonte muito rica de problemas, que vão desde os iniciais, ligados ao desafio proposto de transferir as peças de um pino para outro, até aqueles que derivam de outras questões mais elaboradas. Uma lista parcial desses problemas é fornecida a seguir:

- i) É possível chegar ao objetivo desejado?
- ii) Se é possível atingir o objetivo, qual o procedimento mais econômico, ou seja, com o menor número de movimentos?
- iii) Existe uma regra simples, um algoritmo fácil de executar, que permita efetuar os movimentos sucessivos dessa estratégia mais econômica?
- iv) Existe alguma relação matemática entre o número n de peças da torre e o número mínimo $A(n)$ necessário para efetuar a sua transferência do pino de origem para o pino final? Existe uma função matemática $A(n)$, da variável n ?
- v) Esse número mínimo $A(n)$ é o mesmo quando tomamos com o pino final qualquer dos dois que se encontram vazios no início do jogo?

- vi) Cresce muito esse número mínimo de movimentos, com a quantidade de peças do jogo? Em termos matemáticos, $A(n)$ cresce muito com a variável n ?
- vii) Como varia a estratégia mais econômica quando mudamos o número de peças?
- viii) O que acontece com o jogo se supusermos quatro pinos ao invés de três?

Fazendo uma contagem do número mínimo de movimentos para transferir a torre de um pino para outro qualquer, temos o quadro, com a conjectura mostrada a seguir.

Quadro 1
Número Mínimo de Movimentos em Função do Número de Peças

Número de Peças	Número Mínimo de Movimentos
N	$A(n)$
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
...	...
n	

A hipótese acima pode ser testada com $n = 7$, sendo verdadeira também neste caso.

Lima (1991) sugere que neste ponto surge uma boa oportunidade para a indagação sobre a natureza da prova matemática. Sabemos que, de fato, a verificação de que a fórmula acima vale para casos particulares não se constitui

numa demonstração matemática de sua validade, embora tenha uma forte dose de plausibilidade.

Uma demonstração da validade da fórmula acima requer a obtenção de uma fórmula de recorrência, que, muitas vezes, é descoberta pelos que tentam resolver o desafio antes mesmo de perceberem a fórmula $A(n) = 2^n - 1$. Tal fórmula de recorrência é dada por :

$$A(n) = 2 A(n-1) + 1.$$

Essa fórmula é verdadeira na Torre de Hanói porque, para remover a maior das peças do jogo do pino inicial, é necessário que, acima dela, nesse pino, não haja mais nenhuma das demais e que, no pino de chegada, também não existam peças depositadas. Conclui-se daí que as $n - 1$ peças restantes devem estar no terceiro pino, para onde foram transportadas com $A(n-1)$ movimentos. Para completar a transferência total é preciso, então levar a maior peça para o pino de chegada (1 movimento) mais outros tantos $A(n-1)$ para trazer as $n - 1$ peças restantes do terceiro pino para o pino final, perfazendo, assim o total $A(n-1) + 1 + A(n-1)$, que é o especificado acima.

De posse da fórmula de recorrência utilizamos o método de indução matemática para obtermos uma demonstração rigorosa da fórmula $A(n) = 2^n - 1$, para todo número natural n .

Os cálculos feitos para a torre de Brahma, onde $n = 64$ mostram ser necessários 18.446.744.073.709.551.615 movimentos para executar a tarefa imputada aos sacerdotes; então, se cada disco levasse um segundo para ser movido, seriam necessários seis bilhões de séculos para completar a tarefa! Nas espirituosas palavras de Machado, "como as estimativas para a existência de vida na terra não passam de uns poucos milhões de anos, a profecia contida no mito que deu origem ao jogo não deve preocupar a nenhum mortal." (MACHADO, 1992, p.47).

Analisando sua estrutura à luz da teoria dos jogos, temos que a Torre de Hanói de n peças:

- é um jogo de um só jogador;
- tem seis tipos de jogada, e, de cada vez uma peça poderá ser transferida para um ou outro dos dois outros pinos;
- tem dois objetivos, que são montar a torre em cada um dos outros dois pinos, ou um objetivo, se o pino for previamente escolhido;
- tem uma posição de vitória, que é a torre montada no pino escolhido, ou duas se não houver escolha do mesmo;
- é um jogo de estratégia pura, pois depende apenas da lógica, e não do acaso;
- não admite posição de empate;
- tem cardinalidade finita, pois o número de posições possíveis em cada jogada não ultrapassa o número de pinos;
- é um jogo de informação completa, pois a cada instante o jogador sabe o que pode fazer;
- é parcial e determinístico.

1.5.2. O SALTO DE RÃ

Segundo Menezes et al (2008), para jogar este jogo, é necessário um tabuleiro com um número ímpar de casas e um número par de peças. As peças estão divididas em dois grupos, sendo que cada um tem a mesma quantidade, mas com

características diferentes, distribuídas como na figura mais adiante. O referido jogo requer um só jogador.

Figura 2: TABULEIRO DO SALTO DE RÃ



O objetivo do jogo é trocar os grupos de peças de lugar. O jogo também pode ser montado com peças de duas cores diferentes.

As regras do jogo são as seguintes:

- Os movimentos feitos pelas peças serão denominados como *passos* e *pulos*.
- Um *passo* é o movimento onde uma peça ocupa uma casa vazia à frente
- Um *pulo* é o movimento onde uma peça “pula” por cima de uma peça vizinha do outro grupo, ocupado a casa após ela.
- Não é permitido saltar por cima de duas peças ou mais, como também saltar para trás.

No momento em que o aluno descobre uma fórmula que lhe permita calcular o mínimo de movimentos necessários para vencer o jogo, é preciso saber se ela é válida. Para isso utiliza-se a prova por indução onde o aluno vai ter certeza que o que ele encontrou tem validade sempre para qualquer número de peças contidas no jogo.

1.5.2.1. IMPLICAÇÕES PEDAGÓGICAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

O *Salto de rã* é um jogo rico, que pode ser aplicado nos três níveis de ensino. No ensino fundamental, desde os anos iniciais, os alunos mobilizam contagem, sequência de formação de jogadas e preenchimento de tabelas com os valores do número de movimentos obtidos a partir do número de peças em cada um dos dois grupos.

Com esses valores, podemos construir pares de elementos de uma função discreta, onde pode ser investigada a lei de formação da sequência relativa à quantidade de jogadas em cada quantidade de peças por grupo. Estabelecida esta lei, é possível prová-la, usando indução finita sobre o número de peças por grupo. Este conteúdo é do âmbito do ensino médio ou superior. As atividades serão sugeridas mais adiante.

Além de possibilitar a abordagem ou aplicação de alguns conteúdos, o salto de rã permite mobilizar algumas habilidades mentais, como atenção, concentração, estabelecimento de planos de ação, estratégias e raciocínio lógico. Finalmente, de acordo com os objetivos de ensino, o professor decide o melhor momento a ser aplicado junto aos alunos.

1.5.2.2. ESTRATÉGIA DE VITÓRIA – SOLUÇÃO

Para facilitar a compreensão da estratégia de vitória, serão utilizados dois grupos de n peças, de cores branca e preta, com um tabuleiro de $2n+1$ casas. (ver na figura anterior).

Na primeira jogada tem-se apenas uma opção, que é dar um *passo* com qualquer das duas fileiras de peças, com a primeira peça, supondo que o jogo foi iniciado com um passo com as peças brancas.

Na segunda jogada, são duas as opções de movimento: ou saltar com uma peça preta ou dar outro passo com uma peça branca. No último caso, isto é, se for dado um passo com a próxima branca para junto da anterior, levará o jogo a um impasse: como a peça preta não poderá saltar sobre duas brancas, a jogada possível será mexer a terceira branca para junto das duas primeiras. Sucessivamente, todas as peças brancas darão um passo sem poder mover nenhuma preta, o que levará à condição de jogo perdido. Portanto, a primeira opção é a possível.

Para a próxima jogada, se mover uma peça da cor contrária à última movida, qualquer movimento seguinte agrupará duas peças de mesma cor, levando a novo impasse; assim, a peça a ser movida deverá ser da mesma cor. Todas as peças da outra cor que puderem darão pulos. Esse raciocínio vai continuar até que todas as n peças de um grupo possam dar pulos. Para o restante do jogo, procede-se assim:

Para a próxima jogada, a única opção possível é que a peça de cor contrária dê um passo e as outras, de mesma cor, após ela dêem pulos. Esse raciocínio vai continuar levando o jogo à posição requerida no objetivo.

1.5.2.3. A MATEMÁTICA DO JOGO

Observando a sequência de jogadas que foi descrita na estratégia, observa-se que a peça branca, dando um passo, a preta dará um pulo; a próxima peça de mesma cor dando um passo, duas peças de cor contrária darão pulos; segue-se este raciocínio sendo que, após uma peça dar um passo, as peças de cor contrária darão um pulo a mais que no caso anterior. Assim, indicando um passo por P_a e um pulo por P_u , o número de jogadas será:

- **Movimentação I**

$$1Pa + 1Pu + 1Pa + 2Pu + \dots + 1Pa + nPu = n Pa + (1 + 2 + \dots + n) Pu$$

Para a contagem de movimentos no restante do jogo, quando a única peça que pode se mover dá um passo, as outras (n-1) de mesma cor dão pulos; apenas uma peça de cor contrária dará um passo e as outras de sua cor darão pulos, de modo que o número de movimentos será:

- **Movimentação II**

$$1Pa + (n-1) Pu + 1Pa + (n-2)Pu + \dots + 1Pa + 1Pu + 1Pa = nPa + [(n-1) + (n-2) + \dots + 1]Pu.$$

- **(Movimentação I) + (Movimentação II)**

Somando os movimentos, teremos um total de:

$$2nPa + \{ (1 + 2 + \dots + n) + [(n-1) + (n-2) + \dots + 1] \} Pu.$$

Ora, a soma

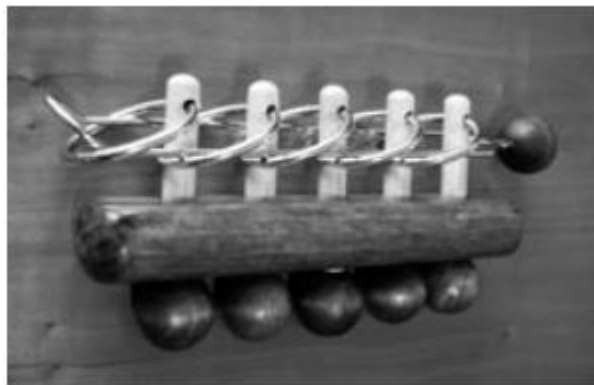
$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{(n-1) \cdot n}{2}$$

dará n^2 . Assim, como um passo ou um pulo são considerados movimentos, o número mínimo de movimentos do jogo será obtido somando o número de passos com o número de pulos, o que dará $2n + n^2$, para um número de n peças.

Observemos que aumentando em uma unidade o número de peças de cada grupo, aumentará $1Pa + (n+1)Pu$ na primeira parte do jogo e, no restante, aumentará $1Pa + nPu$, totalizando um aumento de $2Pa + (2n+1)Pu$ ou $(2n+3)$ movimentos.

1.5.3. ANEIS CHINESES

Figura 4: ANEIS CHINESES



Este jogo corresponde a uma estrutura formada por barras de madeira, bolas e anéis, de acordo com a figura 4. Segundo Silva (2007):

O objetivo dos anéis chineses é retirar a estrutura de metal presa pelos anéis. O exemplo na figura é composto por cinco anéis, apesar de existirem variações com diferentes números de anéis. Cada anel restringe a mobilidade dos restantes, o que exige a elaboração de uma estratégia não trivial para resolver o *puzzle*. (SILVA, 2007, p. 34)

Vamos considerar o primeiro anel como o que fica mais a esquerda e o segundo anel o que vem logo após e assim por diante. O primeiro anel pode soltar-se ou prende-se em qualquer momento, mas os outros anéis só soltam ou prendem se o imediatamente a esquerda estiver preso e os restantes soltos.

Vejamos uma situação em que pode-se soltar o quinto anel:

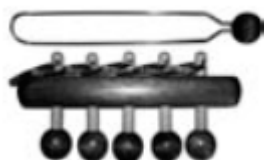
Figura 5: ESTRATÉGIA PARA RETIRAR O 5º ANEL



Observamos que são possíveis dois estados para os anéis no jogo, ou estão presos, ou estão soltos à estrutura metálica que queremos soltar. Para soltar esta

estrutura metálica (objetivo do jogo), precisamos primeiramente soltar o último anel da esquerda para direita. Para soltá-lo, precisamos deixar o 4º anel preso e o restante solto; para soltar o 3º anel precisamos deixar o segundo preso e o primeiro solto. Quando soltar o 5º anel, o nosso objetivo passa a ser o 4º anel; daí precisamos que o 3º anel esteja preso e os outros soltos, ao soltar o 4º anel, iremos para o 3º anel, onde deixaremos o segundo anel preso e o primeiro solto; para soltar o 2º anel deixaremos o primeiro preso, e ao soltar o 1º anel, tendo todos os outros já soltos, finalizamos o nosso procedimento como na figura 6.

Figura 6: SOLUÇÃO DO PROBLEMA



Veremos que o método de resolução é o mesmo para qualquer número de anéis que prendem a estrutura. Já o número mínimo de movimentos necessário para resolver o problema cresce rapidamente com o número inicial de anéis. Com cinco anéis são precisos, pelo menos, 21 movimentos.

Segundo Silva (2007):

A resolução é um conjunto de sub-resoluções progressivamente mais simples, em que cada sub-resolução é similar ao problema principal. Este fato indica-nos uma estrutura recursiva na resolução dos anéis chineses parecida com a fórmula de recorrência vista na *Torre de Hanói*. (SILVA, 2007, p. 38)

Para resolvermos este problema com a quantidade mínima de movimentos, consideraremos M_n , com o menor número de movimentos para resolver o problema em um jogo contendo n anéis. Segundo Silva (2007):

Fazendo as contas para alguns valores de n :

$$M_1 = 1$$

$$M_2 = 2$$

$$M_3 = 5$$

$$M_4 = 10$$

$$M_5 = 21 \leftarrow \text{o nosso puzzle com cinco aneis}$$

$$M_6 = 42$$

$$M_7 = 85$$

$$M_8 = 170$$

$$M_9 = 341$$

Facilmente observamos que o número de movimentos necessários para resolver cada *puzzle* cresce depressa. Por exemplo, para vinte aneis são necessários 699.050 movimentos e para trinta aneis seriam precisos 715.827.882 movimentos!

Existem formas de tratar estas expressões chegando ao termo geral:

$$M_n \text{ (com } n \text{ par)} = \frac{2^{n+1} - 2}{3}$$

$$M_n \text{ (com } n \text{ ímpar)} = \frac{2^{n+1} - 1}{3}$$

(SILVA, 2007, p. 40).

É encontrado também por Silva (2007), que “ $M_n = M_{n-1} + 1 + 2M_{n-2} + 1$ ”. Ao encontrar estas fórmulas podemos prová-la usando o primeiro princípio da indução finita.

2. METODOLOGIA

2. METODOLOGIA

Nossa pesquisa teve uma natureza de investigação exploratória e descritiva, segundo os pressupostos teórico-metodológicos de Bogdan e Biklen (1994).

Assim, a pesquisa foi desenvolvida com aplicação de questionários e realização de atividades contextualizadas com jogos matemáticos junto a alunos de nível superior.

Tomamos como base a pesquisa exploratória que é assim caracterizada:

[...] têm como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses. Pode-se dizer que estas pesquisas têm como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou descoberta de intuições. Seu planejamento é, portanto, bastante flexível, de modo que possibilite a consideração dos mais variados aspectos relativos ao fato estudado. (GIL, 2007, p. 41)

Ainda sobre a pesquisa exploratória “[...] é um tipo de estudo que constitui um primeiro passo para realização de uma pesquisa mais aprofundada”. (OLIVEIRA, 2008, p. 65).

Nossa pesquisa também é descritiva porque recolhemos os dados a partir das falas dos alunos e respostas a atividades (BOGDAN E BIKLEN, 1994).

A razão de termos optado por este tipo de pesquisa é a oportunidade de tanto obtermos resultados a partir de nossas perspectivas, quanto da visão dos sujeitos. Além disso, sendo a área por nós escolhida pouco pesquisada e discutida, podemos considerar em nossa análise o maior número de elementos possível, de modo a obter uma análise mais abrangente e objetiva.

2.1. SUJEITOS DA PESQUISA

O campo de pesquisa foi a Faculdade de Formação de Professores de Goiana – FFPG no semestre 2011.1 e os participantes foram os alunos da disciplina de

teoria dos números do curso de Licenciatura em Matemática. Inicialmente, todos os alunos matriculados na referida disciplina foram convidados, tendo sido selecionados para análise apenas os 15 alunos que participaram de todas as etapas. Estes alunos possuem idades entre 19 e 30 anos aproximadamente, alunos do sexo masculino e feminino, a maioria foram alunos de oriundos de escolas públicas. Este local foi escolhido porque temos acesso a esta instituição de Ensino devido a ter tido vínculo com a mesma e uma boa relação com a instituição. Além disso, os alunos do curso são de vários municípios do entorno de Goiana, portanto, serão profissionais egressos que vão atender a boa parte do estado.

2.2. INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

Os dados coletados foram as respostas aos questionários o pré-teste e o pós-teste, conforme a descrição que segue.

O primeiro instrumento de coleta de dados foi o questionário (Modelo no Apêndice A). Este instrumento teve como objetivo verificar se os alunos já participaram de atividades com jogos em sala e suas opiniões sobre o uso desse recurso.

O segundo instrumento (Modelo no Apêndice B) foi o Pré-teste e foi dado aos alunos depois de terem visto o conteúdo de indução sem nenhum auxílio pedagógico. Esse Pré-teste contou com seis questões, sendo duas questões prontas de aplicação de fórmula e, nas outras quatro, o aluno precisaria desenvolver a fórmula a partir de uma interpretação de um problema.

O terceiro instrumento (Modelo no Apêndice E) foi o Pós-teste e foi dado aos alunos após a atividade realizada com os três jogos: torre de Hanói, salto de rã e anéis chineses. O Pós-teste é composto de questões e segue o mesmo parâmetro do Pré-teste. Assim sendo, analisamos os dois instrumentos comparativamente.

O quarto instrumento (Modelo no Apêndice F) foi aplicado com o objetivo saber a opinião dos alunos em relação à aplicação dos jogos, inclusive com algumas perguntas iguais ao primeiro questionário para analisar e comparar as respostas dadas antes e depois das aplicações.

Tanto no Pré-teste quanto no Pós-teste, fizemos uma comparação de desempenhos, levando em conta as médias, e o coeficiente de variação e analisamos se houve alguma evolução depois das aplicações. Fizemos também uma análise no que diz respeito às questões de aplicação de fórmula e as questões de desenvolvimento da fórmula para analisar os desempenhos no pré-teste e pós-teste em relação a essas duas realidades, ou seja, saber se com as aplicações em tipo de questão houve melhora ou não depois dos jogos.

Passamos a descrever cada instrumento no próximo tópico.

2.2.1. QUESTIONÁRIO ANTERIOR ÀS ATIVIDADES

Este primeiro instrumento de coleta de dados foi elaborado e aplicado visando saber das possíveis familiaridades dos alunos com o jogo e o que pensavam a respeito. Passamos a detalhá-lo.

A primeira questão teve o seguinte enunciado: “*Você Gosta de Jogos? Geralmente ganha ou Perde?*”

Com essa questão objetiva, buscávamos identificar os que gostavam de jogos ou não, para verificar futuramente sua influência no resultado, bem como levar em consideração na escolha da amostra, caso houvesse necessidade. Segundo Menezes (1996), alunos que gostam de jogar, tendem a ganhar, ao contrário dos que não gostam, pois gostar de jogar está atrelado ao interesse em aprender, portanto, em sair-se bem.

Na segunda questão, indagamos: “*Já teve aulas com jogos?*” Nesta questão buscamos especificamente saber quantos alunos já tinham tido este tipo de

atividade. A razão é que, já tendo participado em atividades com jogos em sala de aula, os alunos estariam mais aptos a realizar uma atividade mais adequada aos objetivos da pesquisa, sem precisar de uma etapa de preparação quanto à lidar com os jogos, para atuar na mesma.

Nas duas perguntas seguintes, buscamos a justificativa para cada uma das possibilidades antagônicas de resposta: “03. *Se a resposta foi não. Gostaria de ter tido?*” E “04. *Se a resposta foi sim. O que achou?*” Quanto à análise da questão, buscamos categorizar as questões em cada aspecto a que remeteu a resposta, visando investigar possíveis influências nos resultados.

A quinta questão teve o seguinte enunciado: “*Você acha que pode aprender com jogos no Ensino Superior? Por quê?*” Fizemos esta questão pela possibilidade dela nos permitir saber as pré-concepções dos participantes acerca da aprendizagem com jogos neste nível de ensino.

Passando à sexta questão, indagamos: “*Você acha que na disciplina de Álgebra no Ensino Superior cabe o uso de jogos? Por que?*” Assim, buscamos ideias mais específicas dos alunos acerca da inserção de jogos na disciplina em foco. Consideramos interessante, também, verificar a postura dos alunos com respeito a associar jogos, ensino superior e álgebra.

Fizemos a seguir uma questão voltada para um futuro próximo, quando o aluno já seria profissional egresso: “*Você pretende usar Jogos na sua Prática Pedagógica?*” Autores como Bordenave (1977) colocam situações em que, quando professor, um dos aspectos que será considerado para desenvolver a prática, é recorrer à memória de quando estudante, como atuavam os professores que tivemos, influenciando, portanto, na nossa prática, pois acabamos incorporando aspectos daqueles na mesma.

2.2.2 PRÉ-TESTE

O pré-teste foi elaborado com o intuito de verificar o desempenho dos alunos em resolução de problemas sobre indução finita antes da atividade com jogos. Foi composto de seis questões, sendo duas contextualizadas, de aplicação prática. Passamos à descrição.

A primeira questão teve o seguinte enunciado

“Observe:

$$2 + 4 = 6$$

$$2 + 4 + 6 = 12$$

$$2 + 4 + 6 + 8 = 20$$

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$$

...

Encontre uma fórmula matemática para calcular a soma dos n primeiros números naturais e prove por indução que ela é verdadeira”

Esta questão é uma questão contextualizada, que requer conhecimentos anteriores sobre quadrado perfeito, números pares, progressão aritmética. Nesta questão buscamos saber se os alunos conseguem interpretar uma situação problema e usar indução finita.

A segunda questão teve o seguinte enunciado: *“Prove por indução que $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = (n/2) \cdot (3n - 1)$, $\forall n \geq 1$.”*

Com esta questão, buscamos saber quantos alunos sabiam resolver uma questão direta sobre indução, na qual se prova uma igualdade matemática. Não há situação-problema ou outro tipo de aplicação prática.

Na terceira questão, pedimos: *“Prove por indução*

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1, \quad \forall n \geq 0.$$

Como podemos observar, esta é outra questão de aplicação direta do princípio de indução, de modo que visamos verificar qual o desempenho do aluno na resolução da mesma.

Na quarta questão temos o seguinte enunciado:

“Observe:

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

...

Mostre que a soma de números naturais ímpares é sempre um quadrado perfeito”.

Esta questão é uma questão contextualizada, que requer conhecimentos anteriores sobre quadrado perfeito, números ímpares e progressão aritmética. Nesta questão buscamos saber se os alunos conseguem interpretar uma situação problema e usar indução finita do mesmo modo que a primeira questão.

O enunciado da quinta questão foi o que segue: *“Mostre que a soma de três números naturais consecutivos é sempre um múltiplo de 3”.*

Nesta questão tivemos uma questão contextualizada, a qual requer a transição da linguagem corrente para a linguagem matemática do enunciado, e depois a demonstração por indução.

Na última questão, solicitamos dos alunos *“Demonstrar que a soma dos cubos de três números naturais sucessivas é divisível por 9”.*

Nesta questão, também temos uma aplicação da indução semelhantemente à anterior, acrescida do conhecimento de números sucessivos e divisibilidade. Em matemática, corresponde a mais uma questão contextualizada, onde buscamos

verificar, também, o desempenho do aluno nesta questão antes das atividades com jogos.

Após a aplicação do pré-teste, fizemos um conjunto de atividades com os jogos já citados associados à indução finita. Buscando verificar os reflexos das mesmas na aprendizagem do conteúdo, aplicamos o pós-teste. Passamos a apresentar o enunciado das questões do mesmo.

2.2.3. ATIVIDADES COM JOGOS

Após a aplicação do pré-teste, aplicamos atividades com os jogos descritos na fundamentação teórica. Como já explicado, são jogos cuja estratégia de vitória consiste em encontrar a seqüência de um número mínimo de movimentos necessários para atingir o objetivo. Esse número, que depende da quantidade de peças, pode ser provado por indução finita. Assim sendo, a indução finita é um conteúdo que perpassa a dinâmica das atividades.

Os alunos participaram de três sessões de jogo, correspondendo a uma atividade para cada um, com duração de duas horas/aula cada. As atividades aconteceram em uma sala de aula e desenvolveram-se da seguinte maneira: primeiramente, cada aluno recebeu um jogo, e ficou jogando livremente durante meia hora. Depois, houve dois tipos de procedimento:

Para a torre de Hanói e o salto de rã, entregamos uma folha de atividades para serem realizadas, respondendo a questionamentos feitos a eles. Esta etapa buscava direcionar a mobilização de habilidades mentais e de conceitos matemáticos com vistas à descoberta da estratégia de vitória. A última etapa para os três jogos consistiu na discussão com o grande grupo acerca da estratégia de vitória e a prova de que a fórmula para o cálculo do número mínimo de jogadas necessárias ao alcance do objetivo do jogo era a apresentada. O modelo das atividades referentes à torre de Hanói e salto de rã encontram-se nos apêndices C e D.

Não aplicamos nenhuma folha de atividades na sessão do jogo dos anéis porque, a essa altura, queríamos que os próprios participantes elaborassem uma atividade que os ajudasse a encontrar a estratégia de vitória. As sessões não foram feitas para que o aluno necessariamente descobrisse a indução no jogo, mas de associar o conteúdo à estratégia de vitória.

Pela forma da elaboração desta etapa, não objetivamos fazer observações para análise posterior, mas dar ao aluno a experiência de atividades contextualizadas que pudessem mobilizar o conteúdo em questão visando, mais adiante, o efeito dessas atividades no seu desempenho no pós-teste.

2.2.4. PÓS-TESTE

O pós-teste foi o instrumento que elaboramos para verificar eventuais diferenças de desempenhos dos alunos em problemas sobre indução finita em relação ao desempenho no pré-teste. Desse modo, buscamos elaborar questões com graus de dificuldade semelhantes e em situações também semelhantes. Apresentamos, a seguir, o enunciado das questões.

A primeira questão foi: “Prove por indução que $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n \cdot (3n - 1)}{2}$, $\forall n \geq 1$ ”.

Podemos observar que esta questão tem o enunciado igual ao da primeira do pré-teste: é dada uma série e uma fórmula para o seu resultado, e pede-se que a prove por indução. As respostas dos alunos permitirão verificarmos se eventuais diferenças de desempenho ocorrerão após as atividades com jogos.

O enunciado da segunda questão foi o seguinte: “Prove por indução que $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n \geq 1$ ”.

Podemos observar neste caso uma questão semelhante à terceira questão do pré-teste e com os mesmos objetivos da questão anterior.

Na terceira questão temos:

“Observe:

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

...

Mostre que a soma de números naturais ímpares é sempre um quadrado perfeito.

Como podemos observar, esta questão é igual à quarta questão do pré-teste, uma questão contextualizada cujo objetivo é verificar se houve uma melhora por partes dos alunos no entendimento da mesma.

Na quarta questão, pedimos: *“Mostre que a soma de três números naturais consecutivos é sempre um múltiplo de 3”*.

Esta já é uma questão contextualizada, e igual à quinta questão do pré-teste.

Verificaremos se, após as atividades com jogos, ocorreu ou não diferença de desempenho.

Na quinta questão temos o seguinte enunciado:

Complete a tabela e mostre que o número de diagonais de um polígono é sempre

$$d_n = \frac{n(n-3)}{2}, \forall n \geq 3.$$

<i>Polígono</i>	<i>N</i>	<i>Número de diagonais</i> <i>(d_n)</i>	<i>Acréscimo</i>
<i>Triângulo</i>	3	0	
<i>Quadrado</i>	4	2	
<i>Pentágono</i>	5	5	
<i>Hexágono</i>	6	9	
<i>Heptágono</i>	7	14	
<i>Octógono</i>	8	20	
...	
<i>Polígono de n</i> <i>lados</i>	<i>n</i>	$\frac{n(n-3)}{2}$	

Esta questão é uma questão contextualizada que visa analisar o desempenho dos alunos neste tipo questão após a utilização dos jogos.

Na sexta questão, solicitamos dos alunos o seguinte:

“Observe:

$$2 + 4 = 6$$

$$2 + 4 + 6 = 12$$

$$2 + 4 + 6 + 8 = 20$$

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$$

...

Encontre uma fórmula matemática para encontrar a soma dos n primeiros números naturais e prove por indução que ela é verdadeira”.

Esta questão é igual à primeira questão do pré-teste; também é uma questão contextualizada, que requer conhecimentos anteriores sobre quadrado perfeito e números pares, progressão aritmética, também requerendo transpor a linguagem cursiva para a linguagem matemática. Para esta questão ainda temos os mesmos propósitos que as anteriores.

2.2.4. Questionário de aprendizagem com jogos

Após a realização das atividades e aplicação do pré-teste, buscamos saber dos alunos suas próprias ideias sobre sua própria aprendizagem em álgebra após atividades com jogos. Para isso, aplicamos o questionário de aprendizagem com jogos, cujas questões passamos a apresentar. O questionário continha questões abertas, e declaramos aos alunos que buscassem justificar as respostas para que pudéssemos ter o máximo possível de suas impressões.

A primeira questão versou sobre suas impressões na aprendizagem com jogos. “*Você gostou de aprender Indução com Jogos?*” Nesta questão buscamos saber se o jogo foi uma atividade positiva para os alunos no que se refere ao aprendizado do conteúdo em foco.

Passando à segunda questão, indagamos: “*Você acha que pode aprender com jogos no Ensino Superior? Por quê?*” Aqui, buscamos a opinião dos alunos acerca de uma defesa de pesquisadores acerca do emprego de jogos para o ensino, dada e justificada por eles mesmos. Isso também nos permitiria, não só saber se os alunos consideram positivos os jogos na aprendizagem em geral, como também, implicitamente, se podem ser inseridos na álgebra em particular, na questão seguinte. “*Você acha que na disciplina de Álgebra no Ensino Superior cabe o uso de jogos? Por que?*”

Ainda na quarta questão, abrimos um espaço para que os alunos fizessem observações no contexto do tema, simplesmente escrevendo: “Observações:”

Completamos o questionário com a mesma pergunta final constante no questionário inicial: “*Você pretende usar Jogos na sua Prática Pedagógica?*” A razão de tal pergunta é que, uma vez que a pesquisa foi realizada em um curso de licenciatura, onde temos os profissionais em formação, gostaríamos de saber se a opinião deles acerca da inserção de jogos na prática teria alguma alteração.

Para analisar os dados coletados com estes instrumentos, vamos explicar os procedimentos no tópico seguinte.

2.3 Análise dos dados

Como já explicitamos antes, esta pesquisa trata-se de um estudo exploratório. Assim sendo, para analisar os dados, pretendemos observar as orientações metodológicas concernentes.

Os questionários vão ser analisados pergunta a pergunta. Desse modo, vamos buscar respostas semelhantes ou que remetam a um mesmo aspecto do contexto do tema da pesquisa para que sejam organizadas em categorias de análise. A partir daí, buscaremos fazer as interpretações à luz das ideias dos autores constantes na fundamentação teórica.

Já o pré-teste e o pós-teste passarão por uma análise quantitativa, observando o desempenho dos alunos antes e depois das atividades com jogos, buscando as possíveis causas das diferenças ou não de desempenho lançando o recurso aos testes feitos.

Para cada questão, analisaremos as respostas e organizaremos em três categorias: “Respondeu certo”, ‘respondeu errado” e “não respondeu”.

Organizaremos as categorias em quadros com a frequência de cada categoria por aluno, por questão. Faremos também quadros comparativos percentuais de pré-teste e de pós-teste. A partir de então, faremos as interpretações e as possíveis inferências.

2.4. Etapas da Pesquisa

A pesquisa teve as seguintes etapas:

Etapa 1: Foram explicados aos alunos os procedimentos da pesquisa e aplicado um questionário sobre a utilização de jogos em sala de aula, com o objetivo de saber o quantitativo de alunos que já utilizaram esta metodologia;

Etapa 2: Foi abordado o conteúdo do 1º princípio de indução finita usando método tradicional de ensino e resolvendo exercícios dos livros didáticos;

Etapa 3: Foi aplicado um pré-teste com questões do tipo “prove e demonstre” e a com questões contextualizadas;

Etapa 4: Foram mapeados os resultados obtidos, fazendo um levantamento quantitativo e qualitativo dos elementos observados. Os elementos analisados foram os seguintes:

- Notas;
- Quantidades de alunos que deram resposta às questões tradicionais;
- Quantidade de que conseguiram dar alguma resposta às questões tradicionais;
- Quantidades de alunos que deram alguma resposta às questões contextualizadas;
- Quantidades de alunos que conseguiram responder as questões tradicionais;

Etapa 5: Aplicação da primeira atividade contextualizada com jogos matemáticos usando o jogo torre de Hanói;

Etapa 6: Aplicação da segunda atividade contextualizada com jogos matemáticos usando o jogo “salto de rã”;

Etapa 7: Aplicação da terceira atividade contextualizada com jogos matemáticos usando o jogo anéis chineses.

Etapa 8: Aplicação de um pós-teste com questões prove e demonstre e a outra com questões contextualizadas;

Etapa 9: Foram mapeados os resultados obtidos, fazendo um levantamento quantitativo das mesmas variáveis da etapa 4;

Etapa 10: Foi aplicado outro questionário para saber a opinião dos alunos do uso de jogos no ensino superior;

Etapa 11: Foram comparados os desempenhos do pré-teste e pós-teste e analisadas as diversas variáveis citadas.

3. RESULTADOS

3. RESULTADOS

Neste capítulo nos ocuparemos de apresentar os resultados obtidos na pesquisa empírica. Para isso, analisaremos os quatro instrumentos de pesquisa elaborados, de acordo com as orientações metodológicas já explicitadas. Como já explicamos na metodologia, uma vez que o pré-teste e o pós-teste têm as questões elaboradas com graus de dificuldade semelhante, faremos uma análise comparativa dos dados obtidos nos dois instrumentos. Quanto aos questionários serão analisados separadamente. Iniciaremos pelo primeiro questionário

3.1. ANÁLISE DAS RESPOSTAS AO QUESTIONÁRIO ANTERIOR ÀS ATIVIDADES

Conforme já explicitamos no capítulo anterior, este primeiro instrumento de coleta de dados foi elaborado e aplicado visando identificar das possíveis familiaridades dos alunos com o jogo e o que pensavam a respeito. O mesmo contém questões que podem ser tratadas quantitativa ou qualitativamente. Assim sendo, quando possível, organizaremos os dados em tabelas para melhor visualização e interpretação dos resultados, o que virá a enriquecer nossa análise. Passamos à mesma.

Na primeira questão, indagamos: *“Já teve aulas com jogos?”*. Obtivemos os resultados expressos no quadro que segue:

Quadro 2
Respostas dos alunos à primeira pergunta do questionário

Resposta	Alunos	Total	Percentual %
Sim	A1, A2, A3, A5, A6, A7, A8, A10, A11, A12, A13, A15	12	80
Não	A4, A9, A14	03	20

Observamos aqui que doze dos alunos declarou que já teve aulas com jogos, correspondendo a 80%, para 20% dos que declararam não ter tido jogos em suas aulas, apenas três alunos.

Os dados mostrados apontam que o número de alunos que teve atividades com jogos em aula é quatro vezes maior do que os que não tiveram. Esse fato contribui para reforçar a ideia dos jogos como uma tendência no ensino da matemática (MENEZES, 1996).

Aqui, podemos ainda inferir que, considerando que os professores atuais têm mais contato em sua formação com estas tendências, podemos esperar uma maior inserção do mesmo no ensino-aprendizagem do que em décadas passadas. Acreditamos também que, dadas as constatações anteriores sobre a pouca ou nenhuma incidência de jogos no ensino superior, é mais provável que os alunos tenham tido estas atividades no ensino básico.

Consideramos ainda válido registrar dois comentários acrescentados por dois participantes desta pesquisa que responderam a esta pergunta:

“Sim, no segundo período tivemos algumas aulas com jogos, porém ministradas pelos próprios colegas.” (A6)

Neste caso, chamamos a atenção para o fato de o jogo ter sido aplicado em aulas ministradas por colegas, que tendo mais contato com o jogo, é maior a possibilidade de que estes usem, reforçando nossa constatação nos dados.

No outro comentário, observamos que, em um mínimo de onze anos no ensino básico (atualmente doze), além dos períodos no ensino superior, o aluno teve contato com os jogos apenas uma vez, reforçando a ideia dos que argumentam sobre pouca inserção dos mesmos na educação. Apresentamos a transcrição do comentário:

“Sim, uma única vez.” (A8)

As duas questões seguintes são complemento da primeira, ou seja, versam sobre as opiniões a respeito de atividades com jogos. A segunda questão teve o seguinte enunciado: “*Se a resposta foi “não”, gostaria de ter tido?*”

Expressamos os resultados no próximo quadro:

Quadro 3
RESPOSTAS DOS ALUNOS À SEGUNDA QUESTÃO

Resposta	Alunos	Total	Percentual %
Sim	A4, A9, A14	03	100
Não	-	00	00

Como podemos observar, todos os participantes que responderam não ter tido atividades com jogos, responderam afirmativamente à questão, o que sugere a ideia de que o jogo parece ser atrativo para estes alunos, embora não tenham experimentado a sua dinâmica. Um deles acrescentou um comentário bem interessante, que transcrevemos:

“Sim, acho bem interativo, desenvolve o raciocínio de forma espetacular a partir do momento que existe alguma relação com o nosso cotidiano.” (A14)

Esse comentário apontou uma visão positiva do aluno, mesmo sem ter tido experiência anterior com jogos.

Passando à terceira questão, indagamos a opinião dos alunos que responderam ter tido atividades com jogos. Obtivemos os seguintes dados, que agrupamos no quadro quatro, mostrado mais adiante.

As respostas transcritas no quadro apontam que nenhum deles apresentou opinião negativa sobre a experiência. Apenas um deles apresentou depoimento duvidoso. Isto porque pelo comentário feito, aparentemente, os jogos não foram aplicados de maneira adequada à situação. Assim sendo, os restantes onze respondentes apresentaram opinião positiva sobre a experiência.

Pelos comentários destes, podemos apontar que seis deles consideraram as atividades “interessante”, outros dois consideraram ‘proveitoso”, um considerou ainda “divertida’, e outro “bem legal”. As duas últimas categorias remetem ao aspecto descontraído que o jogo traz.

Quadro 4
RESPOSTAS DOS ALUNOS À TERCEIRA QUESTÃO

aluno	Comentário
A1.	Achei muito proveitoso, é uma aula diferenciada que faz com que o aluno saia da monotonia das provas.
A2.	É bem interessante, pois faz pensar mais.
A3.	Muito proveitoso, tendo em vista que é um facilitador.
A5.	Muito bom, pois aprendemos mais.
A6.	É bem interessante, pois temos que descobrir meios para entrar nos mesmos. É um desafio.
A7.	Muito interessante.
A8.	Interessantíssimo. Uma aula criativa e que inspira os alunos a expor seu interesse.
A10.	Achei muito interessante e que de certa forma podemos aprender matemática de uma maneira simples e fácil sem esforço.
A11.	Gostei bastante, pois acredito que as aulas dinâmicas ajudam os alunos a compreender melhor os conteúdos.
A12.	Achei interessante, pois os jogos tornam as aulas mais interativas.
A13.	Não foi ruim, porém, não eram jogos de nível alto, eram jogos bobos. Acredito que se pegar outros jogos como já fiz não consigo descobrir a estratégia.
A14.	Particpei da semana de matemática, mas não foi bem uma aula, mas foi legal.
A15.	Gostei muito é uma aula divertida e ao mesmo tempo uma aula que precisamos nos concentrar muito.

Aqui, consideramos válido destacar que estes aspectos são enfocados e estimulados por autores como Lopes (2000) e Borin (1996), que atrelam o jogo a uma boa organização anterior e adequação aos objetivos.

Passamos à questão seguinte, cujo enunciado apresentamos: “*Você acha que pode aprender com jogos no Ensino Superior? Por quê?*”

Expressamos os resultados no próximo quadro:

Quadro 5
RESPOSTAS DOS ALUNOS À QUARTA QUESTÃO

Resposta	Alunos	Total	Percentual %
Sim	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14 e A15	15	100
Não	-	00	00

Observamos aqui que 100% dos alunos acham que podem aprender com Jogos no Ensino Superior. Esse fato contribui para reforçar a ideia de que os Jogos podem se utilizados na aprendizagem de alguns conteúdos de ensino superior como indução, sequências e funções, entre outros, como defende Menezes (2008).

Destacamos algumas repostas interessantes:

“O jogo em si, ele já é interativo, acho também que não existe nível para se aprender jogo, principalmente quando é relacionado com o cotidiano”. (A14).

“Sim, porque nos jogos você interage com outros colegas, pela competitividade também que faz com que você queira entender melhor os assuntos que o envolvem”. (A12)

Este depoimento converge com as ideias de Lopes (2000), Borin (1996) e Menezes (2008), que atrelam o jogo a todos os níveis de ensino, desde o Ensino Fundamental, até o Ensino Superior e destacam também a interação entre os alunos quando se usa jogos em sala de aula.

“Acho que sim, só que pra saber o jogo temos que saber à base. Se não soubermos não adianta”. (A13)

“Vou fazer o possível para absorver os conteúdos já aprendidos”. (A7)

Observamos aqui que A13, apesar de achar que se aprende com jogos no Ensino Superior tem um pouco de dúvida sobre este aprendizado. Na opinião dela é

preciso ter uma base matemática para poder aprender, enfoque este dado por Ausubel (1978).

Passamos à questão seguinte, cujo enunciado apresentamos: “*Você acha que na disciplina de álgebra no Ensino Superior cabe o uso de jogos? Por quê?*”.

Expressamos os resultados no próximo quadro:

Quadro 6
RESPOSTAS DOS ALUNOS À QUINTA QUESTÃO

Resposta	Alunos	Total	Percentual %
Sim	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A12, A14 e A15	13	86,67
Talvez	A11 e A13.	02	13,33
Não	-	00	00

Observamos que 86,67% dos alunos acham que cabe o uso de jogos na disciplina de álgebra no Ensino Superior, assim como defende Menezes (2008). Esses alunos, em sua maioria destacam que se os jogos funcionam em outros e níveis, por isso tendem a funcionar em álgebra do Ensino Superior. Vemos também que 13,33% acham que talvez caiba a utilização dos jogos e nenhum aluno respondeu que não cabe a mesma, com isso, destacamos algumas respostas interessantes:

“Eu acho que sim, existem várias possibilidades de usar jogos em várias disciplinas, e na álgebra acho que não seria diferente”. (A8)

“Sim, porque os alunos prestam mais atenção e aprendem mais rápido”. (A2)

“Sim. Pois é a partir daí que aula ficará mais atrativa”. (A9)

Dentre os alunos que responderam “talvez”, destacamos a resposta a seguir:

“Pode até caber, mas com a dificuldade que estou sentindo não vai dar muito certo”. (A13).

Aqui, constatamos uma baixa auto-estima do aluno, no que concerne à sua própria capacidade de aprender, mostrando pouca motivação por parte do mesmo.

Passamos à última questão deste questionário, cujo enunciado apresentamos: *“Você pretende usar jogos na sua prática pedagógica? Por quê?”.*

Quadro 7

RESPOSTAS DOS ALUNOS À SEXTA QUESTÃO

Resposta	Alunos	Total	Percentual %
Sim	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13 e A14.	14	93,33
Talvez	A15	01	6,67
Não	-	00	00

Observamos que 93,33% dos alunos responderam que pretendem usar jogos na sua prática pedagógica e destacamos algumas das respostas.

“Sim. Porque acho que interação com os meus alunos será melhor”. (A2)

“Sim, porque pra mim a aula tem que causar o interesse dos alunos, então, quero ser um pouco diferente de alguns professores que acham que a teoria, “decoreba”, vale mais. Pretendo usar sempre”. (A8)

“Sim, para que o aluno possa vir através dos jogos a perder o medo da matemática e também com o objetivo de dinamizar as aulas e criar um incentivo para que eles estudem mais”. (A12)

“Sim, de acordo com a absorção pelos alunos. Acho que é até uma fórmula de estímulo”. (A13)

Podemos observar através das respostas que a maioria dos alunos enfatiza, o interesse, a interação e o estímulo, aspectos enfocados pelos autores Lopes (2000), Borin (1996) e Menezes (2008).

Observamos também que o aluno A8, possui uma visão equivocada sobre teoria; para ele teoria é decoreba, mas sabemos da importância da mesma para a formação dos conceitos matemáticos. Nesse caso, entendemos em sua colocação que em sua prática pedagógica usará jogos matemáticos frequentemente.

Destacamos a seguir a resposta de A15, que foi o único aluno a responder que ficou com dúvida sobre a utilização do jogo, representando 6,37% do total das respostas.

“Acho que sim, gosto muito de jogos”. (A15)

Ele tem dúvida sobre o uso de jogos matemáticos em sala de aula, porém gosta muito de jogos. Isso induz a pensar que provavelmente A15 usará jogos em sua prática pedagógica.

Em seguida, passamos à análise do pré-teste.

3.2. ANÁLISE DAS RESPOSTAS DO PRÉ-TESTE E DO PÓS-TESTE

Conforme mencionamos antes, estes instrumentos foram aplicados visando comparar o desempenho dos alunos antes e depois das atividades com jogos com respeito ao emprego da indução finita na resolução das questões.

Os dados foram tabulados e sistematizados a partir do desempenho geral, da média do grupo e do desempenho de cada participante questão a questão. Para

cada tabela, analisaremos os dados numéricos, fazendo as possíveis inferências e comparando com as ideias dos teóricos. Passaremos à análise.

Na primeira tabela, expressamos as notas dos participantes da pesquisa (alunos) no pré-teste e no pós-teste. Eis os dados:

Quadro 8:
NOTAS DOS ALUNOS NO PRÉ-TESTE E PÓS-TESTE

Alunos	Nota no Pré-teste	Nota no Pós-teste
A1	5,0	5,5
A2	4,0	4,0
A3	5,5	7,0
A4	0,0	2,0
A5	0,0	2,0
A6	4,0	4,0
A7	4,0	5,0
A8	0,0	2,0
A9	4,0	4,0
A10	0,0	4,0
A11	4,0	4,0
A12	5,5	8,5
A13	2,0	7,0
A14	0,0	2,0
A15	4,0	4,0

De acordo com os dados do quadro 8 acima, observamos, inicialmente, que dez dos quinze alunos tiveram nota maior no pós-teste em relação ao pré-teste. Isto corresponde a um percentual de 66,67%, o que é um indicador de resultado positivo para a atividade feita. Os restantes cinco alunos mantiveram a nota do pré-teste, de modo que nenhum deles teve nota menor no pós-teste.

Outro dado interessante é que, sendo sete a média na instituição à qual os alunos pertencem, nenhum deles obteve nota igual ou superior à média no pré-teste; no entanto, após a atividade com jogos, três deles tiveram nota igual ou superior à mesma, o que nos permite considerar a possibilidade da contribuição positiva das atividades citadas. Quanto a estes últimos, suas notas passaram de 5,5; 5,5 e 2,0

para 7,0; 8,5 e 7,0, correspondendo a um aumento percentual de 27,27%; 35,29% e 150%, respectivamente, e um aumento médio de 70,85%.

Isto nos permite citar Lopes (2000), Borin (1996) e Menezes (2008), em relação a sua defesa sobre a influência benéfica do jogo na aprendizagem.

Ainda com relação a estes dados, analisaremos a média e o coeficiente de variação entre os dois testes, após expressá-los na tabela dois.

Tabela 1

MÉDIA ARITMÉTICA E COEFICIENTE DE VARIAÇÃO DO PRÉ-TESTE E PÓS-TESTE

	<i>Média Aritmética</i>	<i>Coefficiente de variação</i>
Pré-teste	2,8	80,36%
Pós-teste	4,33	31,63%

Observando esta tabela, verificamos inicialmente que os alunos tiveram uma nota média de 2,8 no pré-teste e 4,33 no pós-teste. Isto corresponde um percentual de 66,67%. Esta constatação permite remeter novamente a Lopes (2000), Borin (1996) e Menezes (2008), que defendem o jogo como influenciador no desempenho escolar. No caso da nossa pesquisa, após atividades com jogos ligados a indução, o desempenho dos alunos enquanto grupo melhorou significativamente.

Passando agora o coeficiente de variação, verificamos que ele foi maior no pré-teste (80,36%) que no pós-teste (31,63%), respectivamente, significando que as notas do pós-teste foram mais homogêneas em torno da média, ou seja, a dispersão foi menor.

Vamos analisar agora detalhadamente as questões do pré-teste e pós-teste utilizando as seguintes subcategorias:

- Responderam Certo (totalmente certo);

- Responderam Errado (Parcialmente certo ou totalmente errado);
- Não Responderam (Deixaram em Branco);

Aqui consideramos que responder certo corresponde a concluir a demonstração por indução de determinada fórmula, dada ou estabelecida pelo aluno, enquanto que responder errado ou parcialmente certo corresponde a não estabelecer nenhuma fórmula ou estabelecer, mas não demonstrar que ela está correta, o que completaria a resposta.

A tabela 1 e o quadro 8 mostram que houve uma melhora significativa das notas. Apesar de baixas, a média aritmética aumentou quase 65% do pré-teste para o pós-teste e o coeficiente de variação mostra as notas do pós-teste foram muito mais homogêneas do que as do pré-teste, pois a variação em torno da média foi bem menor. Outra variável que chamou a atenção foi que não tivemos zero no pós-teste enquanto no pré-teste tivemos seis zeros, o que representa 40% das notas. Quanto às notas acima de sete, no pré-teste tivemos 0% enquanto que no pós-teste registramos 20%. Estes dados vem a corroborar com as ideias de Lopes (2000), Borin (1996) e Menezes (2008).

A primeira questão do pré-teste (apêndice B) e a sexta questão do pós-teste (apêndice E) são idênticas e estão relacionadas ao conteúdo de indução, porém, é necessário que o aluno tenha conhecimento de sequências numéricas, mas precisamente progressão aritmética (P.A.). A seguir, são mostrados os resultados obtidos.

Tabela 2
PERCENTUAIS DE ACERTOS E ERROS DAS QUESTÕES 1 DO PRÉ-TESTE E 6 DO PÓS-TESTE

Subcategoria	Porcentagem questão 1 (pré-teste)	Porcentagem Questão 6 (pós-teste)
Responderam Certo	0%	13,335%
Responderam Errado	26,67%	13,335%
Não Responderam	73,33%	73,33%

Nestes resultados os alunos, A2, A3, A4, A8, A9, A10, A11, A12, A13 e A15, não responderam a questão 1 do pré-teste, os alunos A6, A7 e A14 responderam errado porque não procederam por apresentar a fórmula com o uso das sequências e depois aplicar a indução, ou seja, não ligaram a informação nova (indução) com conceitos ou proposições relevantes (sequências) pré-existent em sua estrutura cognitiva, justificando o porque da não obtenção de êxito na resolução da questão por partes dos alunos, concordando com as ideias de Ausubel (1978). A5 respondeu errado, por ter usado inadequadamente os conceitos, utilizando a ideia de divisibilidade não relacionada a este problema. Nenhum aluno acertou a questão 1 do pré-teste.

Os alunos A3 e A13, conseguiram responder à questão 6 do pós-teste, pois mostraram ter conseguido relacionar com as estratégias aplicadas nos jogos o uso das sequências para resolução do problema de indução, conforme Ausubel (1978; 2003), mobilizando o conceito de indução finita e sequência numérica como um subsunçor.

Já A12 justificou a não resolução da questão 6 do pós-teste como sendo o fator tempo (lembrando que A12 tirou 8,5 no pós-teste, deixando apenas essa questão incompleta), Os alunos que não responderam a questão 6 do pós-teste foram: A1, A2, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11 e A15. E os alunos que responderam errado. A12, já justificado, e A14, que confundiu tudo achando que era uma questão de divisibilidade. Apresentamos a seguir a resolução da questão 6 do pós-teste por A3.

Figura 7: RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 6 DO PÓS-TESTE PELO ALUNO A3

6

$$2+4+6+8+10+\dots+2n = n(n+1)$$

$$2+4+6+8+10+\dots+2n+2(n+1) = (n+1)(n+1+1)$$

$$n(n+1)+2n+2 = (n+1)(n+2)$$

$$n^2+n+2n+2 = n^2+2n+n+2$$

$$n^2+3n+2 = n^2+3n+2$$

Logo, $2+4+6+8+10+\dots+2n = n(n+1)$ e verdade

Supondo que $P(n)$ e verdade, então temos para $P(n+1)$

$n=1$
 $2 = 1(1+1)$
 $2 = 1 \cdot 2$
 $2 = 2$
 $n=2$
 $2+4 = 2(2+1)$
 $6 = 2(2+1)$
 $6 = 6$

A segunda questão do pré-teste (apêndice B) e a primeira questão do pós-teste (apêndice E) são iguais e estão relacionadas à indução. É um tipo clássico de questão constante em livros didáticos de álgebra. Para resolvê-la, faz-se a pura aplicação do método, o mais trabalhado pelos professores no ensino superior e o que mais aparece nos livros didáticos, porém longe da realidade e aplicação deste conceito.

Abaixo são mostrados os resultados obtidos.

Tabela 3
PERCENTUAIS DE ACERTOS E ERROS DAS QUESTÕES 2 DO PRÉ-TESTE E 1 DO PÓS-TESTE

Subcategoria	Porcentagem questão 2 (pré-teste)	Porcentagem Questão 1 (pós-teste)
Responderam Certo	66,67%	73,34%
Responderam Errado	33,33%	13,33%
Não Responderam	0%	13,33%

Para esta questão, tivemos um percentual de acertos bastante satisfatório. Os alunos A1, A2, A3, A6, A7, A9, A11, A12, A13 e A15, conseguiram responder de forma certa a segunda questão do pré-teste, enquanto A4, A5, A8, A10 e A14 responderam errado. A10 por erro de cálculo, mostrando que entendeu o conceito, ou seja, falta de atenção; e, o restante dos alunos por não dar sequência à propriedade (ii) da demonstração. Nenhum aluno ficou sem responder essa questão.

No pós-teste, os alunos A1, A2, A3, A6, A7, A9, A10, A11, A12, A13, A14 e A15, acertaram a questão. Aqui, podemos observar que dois alunos a mais acertaram, quando comparados com o pré-teste. Os alunos A4 e A5 responderam errado, tendo cometido erros de cálculo elementares de expressões algébricas, tendo dessa vez entendido o conceito de indução, mas não tendo apresentado as habilidades necessárias para concluí-las. Por sua vez A8 deixou em branco, ou seja, não respondeu. Aqui podemos relacionar com as ideias de Lopes (2000), Borin (1996) e Menezes (2008), pois mesmo em uma questão clássica obteve-se melhora depois da utilização dos jogos matemático, servindo os mesmos como *subsunoçores* no momento em que relaciona as estratégias utilizadas nos jogos, conforme as ideias de Ausubel (1978; 2003) para melhora dos alunos.

Vamos verificar na figura 8 e 9 a evolução de A14 do pré-teste para o pós-teste:

Figura 8: RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 2 DO PRÉ-TESTE PELO ALUNO A14

$$\textcircled{2} \quad 1 + 4 + 7 + \dots + (3m-2) = \frac{m \cdot (3m-1)}{2}$$

$$m=1$$

$$1 = \frac{m \cdot (3m-1)}{2} \Rightarrow 1 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 1 - 1}{2} \Rightarrow 1 = \frac{2}{2} \Rightarrow \textcircled{1=1}$$

$$m=2$$

$$1+4 = \frac{m \cdot (3m-1)}{2} \Rightarrow 5 = \frac{2 \cdot (3 \cdot 2 - 1)}{2} \Rightarrow 5 = \frac{2 \cdot 5}{2} \Rightarrow \textcircled{5=5}$$

$$(m+1)(3m+1)[3(m+2)-1] = (m+1)(2m+1)[3(m+1)-1]$$

Figura 9: RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 1 DO PÓS-TESTE PELO ALUNO A14

$$1 - 1 + 4 + 7 + \dots + (3m-2) = m \cdot (3m-1) \quad m=1$$

$$1 = 1 \cdot \frac{(3 \cdot 1 - 1)}{2} \quad 1 + 4 = 2 \cdot \frac{(3 \cdot 2 - 1)}{2} \quad 1 + 4 + 7 = 3 \cdot \frac{(3 \cdot 3 - 1)}{2}$$

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \quad 5 = \frac{2 \cdot 5}{2} \quad 12 = \frac{3 \cdot 6}{2}$$

$$1 = \frac{2}{2} \quad 5 = 5 \quad 12 = 12 \quad \text{Verdadeira}$$

$$1 = 1$$

$$m \cdot (3m-1) + [3(m+1)-2] = (m+1) \cdot [3(m+1)-1]$$

$$m(3m-1) + 2(3m+1) = (m+1) \cdot (3m+2)$$

$$3m^2 + m + 6m + 2 = 3m^2 + 9m + 3m + 2$$

$$3m^2 + 5m + 2 = 3m^2 + 5m + 2$$

Logo $1 + 4 + 7 + \dots + (3m-2) = m \cdot (3m-1)$ é verdadeira para $k, m \geq 1$.

A terceira questão do pré-teste (apêndice B) e a segunda questão do pós-teste (apêndice E) são similares, mudando apenas os valores, e estão relacionadas à indução. É outro tipo clássico de questão do mesmo estilo das questões analisadas na tabela 4. Nestas questões a melhora foi significativa, do pré-teste para o pós-teste. Vejamos os resultados:

Tabela 5
PERCENTUAIS DE ACERTOS E ERROS DAS QUESTÕES 3 DO PRÉ-TESTE E 2 DO PÓS-TESTE

Subcategoria	Porcentagem questão 3 (pré-teste)	Porcentagem Questão 2 (pós-teste)
Responderam Certo	60%	93,33%
Responderam Errado	33,33%	6,67%
Não Responderam	6,67%	0%

Nesta situação temos que, os alunos A1, A2, A3, A6, A7, A9, A11, A12 e A15, conseguiram êxito na resolução da questão 3 do pré-teste, enquanto A4, A5, A10, A13 e A14, responderam errado. Com exceção de A14, não conseguiram desenvolver a propriedade (ii) de indução, que trata justamente da questão da demonstração, já A14 mostra claramente sua falta de atenção, errando novamente em cálculos. E A8 não respondeu.

Em relação à questão 2 do pós-teste, similar à 3 do pré-teste, com exceção de A14, todos conseguiram responder certo. A14 conseguiu resolver uma similar que foi a questão 1 do pós-teste, mas não conseguiu desenvolver a propriedade (ii) da indução na questão 2 do pós-teste. Aqui podemos perceber que A14 tem grande dificuldade na resolução de problemas algébricos. Mesmo assim, é notável a melhora dos alunos na resolução das questões clássicas de indução, pois nesta questão mais de 90% dos alunos resolveram corretamente. Novamente, podemos relacionar este fato com as ideias de Lopes (2000), Borin (1996) e Menezes (2008), quanto ao trabalho com jogos e Ausubel (1978 ;2003) em relação ao uso das estratégias dos jogos na resolução os problemas posteriores.

A quarta questão do pré-teste (apêndice B) e a terceira questão do pós-teste (apêndice E) são iguais. É necessário, para respondê-las, que o aluno tenha conhecimento de sequências numéricas, mas precisamente de progressão aritmética (P.A.). Abaixo são mostrados os resultados obtidos.

Tabela 6
PERCENTUAIS DE ACERTOS E ERROS DAS QUESTÕES 4 DO PRÉ-TESTE E 3 DO PÓS-TESTE

Subcategoria	Porcentagem questão 4 (pré-teste)	Porcentagem Questão 3 (pós-teste)
Responderam Certo	13,33%	20%
Responderam Errado	20%	13,33%
Não Responderam	66,67%	66,67%

Na tabela acima observamos que o resultado não foi bom nem no pré-teste e nem no pós-teste, mas houve uma pequena melhora depois da utilização dos jogos. No pré-teste os alunos A3 e A12 responderam certo, enquanto no pós-teste tivemos A3, A12 e A13, aumentando em 6,67% a quantidade de acertos, o aluno A13 comentou que os jogos ajudaram bastante sua compreensão nas questões, fazendo com ele melhorasse bastante seu desempenho de 2,0 (dois) para 7,0 (sete). Fica claro também que a utilização dos jogos não atrapalhou o

desempenho dos alunos, pois os mesmos que acertaram a questão no pré-teste, também o fizeram no pós-teste, consolidando as ideias de Lopes (2000), Borin (1996) e Menezes (2008) em relação a sua defesa sobre a influência benéfica do jogo na aprendizagem. Porém nesta questão também tivemos erros. Os alunos, A1, A2, A4, A5, A8, A9, A10, A11 e A15 não responderam nem no pré-teste e nem no pós-teste. A14 que respondeu errado no pré-teste não conseguindo desenvolver a propriedade (ii) da indução, ou seja, não conseguiu encontrar uma fórmula para desenvolvê-la, no pós-teste também não respondeu. A4 e A7 tentaram responder. A7 quase que conseguiu finalizar a questão 3 do pós-teste. Vamos comparar a resolução de A7 do pré-teste e do pós-teste na figura 10 e 11, mesmo ele não tendo respondido certo, evoluiu bastante depois da utilização do jogo, mobilizando o conceito de indução finita e sequência numérica como um subsunçor conforme Ausubel (1978; 2003), e errando apenas nos cálculos do desenvolvimento do item (ii) da demonstração.

Figura 10: RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 4 DO PRÉ-TESTE PELO ALUNO A7

$$\begin{aligned}
 & 1 + 3 + \dots + n(n+1) \\
 & n=1 \quad \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2 = 1 \\
 & P / n+1 \\
 & \frac{n(n-1)}{2} + n+2 = \frac{(n+1)(n+1-1)}{2} \\
 & \frac{n^2 - n + 2(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n - n + n + 1 - 1}{2} \\
 & n^2 - n + 2n + 2 = n^2 + n \dots
 \end{aligned}$$

Figura 11: RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 3 DO PÓS-TESTE PELO ALUNO A7

$1+3+5+\dots+(2n-2)=n^2, \forall n \geq 1$
 $1) P(n)=1$
 $2 \cdot 2 - 1 = 1^2$
 $1 = 1$
 Logo $P(n)=2$ é verdadeira, vamos provar $P(n+1)$.
 $2n-2 = n^2$
 $2n-2+(n+1) = (n+1)^2$
 $2n^2+2n-1 = n^2+2n+1$
 $n(n^2+2n-1) = n^2+2n+1$
 Logo $P(n+1)$ é verdadeira.

A quinta questão do pré-teste (apêndice B) e a quarta questão do pós-teste (apêndice E) são iguais e misturam divisibilidade com indução. No pré-teste foi dada uma dica no início para facilitar a compreensão. Esta dica não foi dada no pós-teste. Os resultados estão na tabela abaixo:

Tabela 7
 PERCENTUAIS DE ACERTOS E ERROS DAS QUESTÕES 5 DO PRÉ-TESTE E 4 DO PÓS-TESTE

Subcategoria	Porcentagem questão 5 (pré-teste)	Porcentagem Questão 4 (pós-teste)
Responderam Certo	6,67%	13,33%
Responderam Errado	20%	13,33%
Não Responderam	73,34%	73,34%

Novamente a melhoria foi pouco significativa, aumentando em 6,67% a quantidade de acertos, mas um fato foi marcante, A1 foi o único que acertou a quinta questão do pré-teste. Ele não usou o conceito de indução. A1 cursou esta disciplina no período anterior, e conseguiu resolver essa questão com conhecimentos ainda referentes ao que aprendeu sobre divisibilidade, indo de

encontro com Ausubel (1978; 2003). No pós-teste A1 usou a mesma resolução anterior e acertou novamente enquanto A12 usou claramente os conceitos aprendidos nas demonstrações das fórmulas de recorrência dos jogos concordando novamente com as ideias de Lopes (2000), Borin (1996) e Menezes (2008). Vamos visualizar nas figuras 12 e 13, as resoluções de A1 e A12 respectivamente:

Figura 12: RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 5 DO PRÉ-TESTE PELO ALUNO A1

04. Mostre que a soma de três números naturais consecutivos é sempre um múltiplo de 3.

$$x+1, x+2, x+3 \rightarrow x+1+x+2+x+3 = 3x+6 \rightarrow 3(x+2)$$

Figura 13: RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 4 DO PÓS-TESTE PELO ALUNO A12

04) ~~Mostre~~ mostre que a soma de três números naturais consecutivos é sempre um múltiplo de 3.

$f(n) = n + (n+1) + (n+2)$ (i) Supondo que $f(n)$ é verdade, $f(n+1)$ temos:

(i) $f_1 = 1 + (1+1) + (1+2)$ $f(m+1) = (m+1) + (m+2) + (m+3)$

$f_1 = 1+2+3$ $f(m+1) = 3m+3+3$

$f_1 = 6$ $f(m+1) = f(m)+3$

$f(m) = 3m+3$

Logo a soma dos ~~três~~ 3 números naturais consecutivos será sempre um múltiplo de 3 já que $f(m+1)$ possui duas parcelas divisíveis por 3.

A maioria não respondeu esta questão. A3, A6, A7 e A10, tentaram responder, mas erraram, pois não conseguiram desenvolver uma fórmula específica para o problema.

As questões 6 do pré-teste (Apêndice B) e 5 do pós-teste (Apêndice E) não são iguais, são similares, por isso vamos analisá-las separadamente.

A questão 6 do pré-teste também envolve divisibilidade com indução e também teve no início do teste uma “dica” para resolvê-la, porém o resultado não foi bom, foi idêntico ao resultado da questão 5 do pré-teste. Inclusive, o único que acertou foi A1, também sem a utilização da Indução. Vejamos os resultados expressos na tabela abaixo:

Tabela 8
 PERCENTUAIS DE ACERTOS E ERROS DA QUESTÃO 6 DO PRÉ-TESTE

Subcategoria	Porcentagem questão 6 (pré-teste)
Responderam Certo	6,67%
Responderam Errado	20%
Não Responderam	73,34%

Consideramos a questão 5 do pós-teste (apêndice E) interessante, pois era para demonstrar a fórmula da diagonal de um polígono com n lados usando indução, o resultado está exposto na tabela abaixo:

Tabela 9
 PERCENTUAIS DE ACERTOS E ERROS DAS QUESTÕES 5 DO PÓS-TESTE

Subcategoria	Porcentagem questão 5 (pós-teste)
Responderam Certo	6,67%
Responderam Errado	53,33%
Não Responderam	40%

Apenas A12 resolveu corretamente, mas houve um número grande de alunos que tentou resolver. Conseguiram completar a tabela que tinha na questão, mas não conseguiram desenvolver a fórmula necessária para a finalização da questão. Vejamos a resolução de A12:

Figura 14: RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 5 DO PÓS-TESTE PELO ALUNO A12

05. Complete a tabela e mostre que o número de diagonais de um polígono é sempre

$$d_n = \frac{n(n-3)}{2}, \forall n \geq 3.$$

Polígono	N° LADOS	Número de diagonais (d_n)	Acréscimo
Triângulo	3	0	2
Quadrado	4	2	3
Pentágono	5	5	4
Hexágono	6	9	5
Heptágono	7	14	6
Octógono	8	20	
...	
Polígono de n lados	n	$\frac{n(n-3)}{2}$	(n-1)

ii) supondo que $p(m)$ é verdadeiro $p(m+1)$ tem-se:

$$m_{(m+1)} = \frac{m(m-3)}{2} \quad \text{e} \quad m_{(m+1)} = \frac{m^2 - 2m + m - 2}{2}$$

$$m_{(m+1)} = \frac{(m+1)(m+1-3)}{2} \quad \text{e} \quad m_{(m+1)} = \frac{m^2 - m - 2}{2}$$

$$m_{(m+1)} = \frac{(m+1)(m-2)}{2}$$

O que podemos avaliar é que houve uma melhora significativa, se compararmos os alunos que acertaram pelo menos uma questão do pré-teste ou pós-teste, ou que acertaram pelo menos uma das duas questões clássicas. Verificamos que houve um aumento de 33,33% nos acertos. Nas quatro questões contextualizadas o aumento de acertos foi apenas de 6,67%, percentual que consideramos pequeno, porém é evidente que o uso dos jogos não atrapalhou no desenvolvimento dos alunos e ajudou a obter uma pequena melhora no aprendizado como já afirmavam Lopes (2000), Borin (1996) e Menezes (2008). Alguns alunos conseguiram relacionar estratégias dos jogos para resolução dos problemas do pós-teste, mostrando um significado para as questões, como afirmava Ausubel (1978). Essa pequena melhora no desempenho pode ser vista na tabela abaixo:

Tabela 10
 PERCENTUAIS DE ACERTOS E ERROS DE ALUNOS QUE ACERTARAM PELO
 MENOS UMA DAS QUESTÕES DO PRÉ-TESTE E DO PÓS-TESTE

Subcategoria	Porcentagem questão (pré-teste)	Porcentagem Questão (pós-teste)
Questões Contextualizadas	20%	26,67%
Questões Clássicas	66,67%	100%
Todas as Questões	66,67%	100%

3.4. Análise das respostas ao questionário de aprendizagem

Finalmente, apresentaremos a análise das respostas dos alunos ao questionário de aprendizagem. Neste tópico, verificaremos a postura dos alunos quanto à sua aprendizagem frente a atividades com jogos. Conforme explicitamos na metodologia, analisaremos questão por questão, agrupando por afinidade de aspecto referido, destacando respostas relevantes e também aquelas que merecem ser enfatizadas.

Aqui, destacamos que nem todos os alunos responderam a todas as questões, de modo que analisaremos as respostas obtidas, para categorização.

Na primeira questão, indagamos:

“01. Você Gostou de aprender indução com jogos?”

Dos quinze alunos participantes, apenas um não respondeu a esta pergunta. Nove deles responderam afirmativamente. As justificativas que apresentaram remeteram à atividade ter se tornado mais fácil de aprender (dois alunos), tornado as aulas mais interessantes e proveitosas (dois alunos) e ajudar a entender o conteúdo (um aluno).

Quanto a estas, reportamo-nos a Menezes (1996), quanto à sua ideia sobre o efeito positivo dos jogos, quando bem utilizados, enquanto ferramenta muito rica no processo de ensino-aprendizagem.

Já as justificativas não favoráveis às respostas afirmativas, referem-se a considerar o tempo pouco (um aluno) e considerar mais difícil na teoria (um aluno). Um deles não justificou sua resposta afirmativa. Destacamos uma resposta de cada categoria:

“Sim. Se tornou mais fácil de aprender, principalmente eu que estou pagando cadeira. Tinha muita dificuldade de aprender. Mas agora melhorou muito.” (A1)

“Sim adorei. Muito interessante.” (A8)

“Foi bom, pena que foi muito corrido e teve um jogo em que tive dificuldade” (A14)

“Sim, porém na teoria é um pouco mais complicado do que eu pensava.”

Quanto aos cinco alunos restantes que responderam negativamente, duas justificativas remeteram a não conseguirem aprender indução com facilidade, um declarou ter ficado com dúvidas. Destacamos uma resposta de cada uma das duas primeiras categorias:

“Não muito, não sei se foi pelo fato de achar complicado o assunto, o fato de descobrir as fórmulas.” (A13)

“Não, pois não consegui aprender indução com os jogos. Mas achei muito interessante os jogos.” (A11)

Aqui, comentamos uma resposta que nos chamou a atenção. Refere-se a um aluno que declarou “aprender muito pouco”, dissociando a resposta das atividades. Aqui, constatamos uma baixa auto-estima do aluno, no que concerne à sua própria capacidade de aprender, o que nos remete a considerar se, também

no nível superior, as alternativas metodológicas buscadas não deveriam incluir a motivação, mesmo neste nível.

Passando à segunda questão, indagamos: *“Você acha que pode aprender com jogos no Ensino Superior? Por quê?”*

Dos quinze alunos participantes, treze deles respondeu que se pode aprender com jogos no ensino superior, retomando-se as ideias de Menezes (2008) que defende a possibilidade de contribuição dos jogos na aprendizagem de alguns conteúdos de ensino superior como indução, sequências e funções, entre outros.

Dentre estas respostas destacamos as seguintes:

“Sim. Porque às vezes é difícil a gente aprender só com teorias e Exercícios”. (A1)

“Sim, basta ter paciência em aprender, pois com indução foi muito difícil”. (A5)

“Sim já que os jogos são dinâmicos, Envolve toda a turma e depois que apresentada a matemática por trás do jogo, temos acesso a um conhecimento enriquecedor”. (A12)

“Acho que pode ajudar a complementar o assunto”. (A13)

“Sim. Independente de superior ou fundamental é possível sempre aprender através de jogos”. (A15)

Ao observarmos as respostas podemos perceber pelas palavras de A5, que o jogo matemático aplicado no Ensino Superior não é fácil, mas pode facilitar o aprendizado.

O aluno A13 acredita na utilização dos jogos matemáticos como complementação do assunto.

Observando também a resposta de (A15), podemos remeter a Lopes (2000), Borin (1996) e Menezes (2008), que defendem o uso de jogos em todos os níveis, ensino fundamental, médio e superior respectivamente.

Obtivemos também uma resposta negativa sobre a utilização de jogos no Ensino Superior e uma resposta duvidosa. Destacamos abaixo as duas respostas:

“Não. Porque é melhor depois que já sabemos o assunto”. (A4)

“Depende do desenvolvimento na sala de aula, ou seja, no desenvolver do assunto”. (A2)

Nestas duas respostas podemos destacar as ideias de Ausubel (2003):

[...] não possuem confiança suficiente na capacidade de aprenderem de forma significativa; logo, acreditam que não têm alternativa para fugirem à aprendizagem por memorização. (Esta situação é muito familiar aos professores de matemática, devido a prevalência generalizada do “choque dos números” ou “ansiedade dos números”, em crianças em idade escolar, bem como em estudantes universitários). (p. 72).

Passando à terceira questão, indagamos: *“Você acha que na disciplina de álgebra no ensino superior cabe o uso de jogos? Por quê?”*.

Dos quinze alunos participantes, onze deles responderam que cabe o uso de jogos na disciplina de álgebra no ensino superior, ou seja, 73,33%. As justificativas favoráveis referem-se a melhorar o aprendizado (quatro), aplicação correta (quatro), tempo suficiente (um), outra forma de aprendizado (dois).

Essas afirmações são defendidas por Menezes (2008), afirmando que há possibilidades de contribuição dos jogos na aprendizagem de alguns conteúdos de ensino superior como indução, sequências e funções entre outros.

Vamos agora destacar algumas respostas interessantes dos alunos:

“Sim para tentar facilitar o nosso aprendizado”. (A1)

“Aprender com a prática é bem melhor e mais interessante de que ver apenas teorias”. (A6)

“Sim. Porque nos jogos todos os alunos participam, a maioria consegue desenvolver a lógica do jogo e depois entendê-la. Os alunos têm a capacidade de aplicá-la no assunto no qual o jogo aborda”. (A12)

“Sim, porque é um método prático e que ajuda os alunos a desenvolver outra maneira de utilizar seu intelectual”. (A15)

“Sim, desde que seja trabalhado com a resolução de questões, ou seja, mais questões do que demonstrações” (A7)

A resposta de A7 pode justificar as outras quatro repostas, duas duvidosas e duas negativas sobre a utilização do jogo na disciplina de álgebra, fazendo com que esses quatro alunos mudassem de opinião quanto à resposta do primeiro questionário, por causa do uso contínuo de demonstrações em todos os três jogos aplicados.

Vejamos as respostas dos dois alunos que mostraram dúvidas:

“Mais ou menos”. (A3)

“Na verdade não sei”. (A8)

Vale salientar que A3 foi um dos alunos que conseguiram melhor desempenho após a utilização dos jogos, no pós-teste, com nota 7,0, aumentando 1,5 pontos de sua nota do pré-teste

Temos também duas respostas negativas ao uso dos jogos em álgebra, vejamos:

“Não, porque na prova do vestibular não cai nada envolvendo jogos”. (A2)

“Não, porque a explicação junto com o exercício é sempre melhor”. (A4)

Aqui podemos perceber que A2 parece não ter levado em consideração o aprendizado e sim a prova do vestibular, já A4 como visto na questão anterior não aprendeu indução.

Vejamos o quadro com os resultados:

QUADRO 9
RESPOSTAS DOS ALUNOS À TERCEIRA QUESTÃO

Resposta	Alunos	Total	Percentual %
Sim	A1, A5, A6, A7, A9, A10, A12, A14 e A15	13	73,33
Talvez	A3 e A8	02	13,33
Não	A2 e A4	02	13,33

Passando à quarta questão, indagamos: *“Você pretende usar jogos na sua prática pedagógica?”*.

Dos quinze alunos participantes, todos eles responderam que utilizarão jogos na sua prática pedagógica, visto que houve uma melhora grande no desempenho final da turma com utilização dos jogos e ratificando as ideias de Lopes (2000), Borin (1998) e Menezes (2008), mas algumas respostas chamaram bastante atenção, as quais transcrevemos em seguida:

“Sim, quero que os alunos aprendam coisas diferentes, e a prática de jogos é muito interessante”. (A1)

“Se eu for ensinar sim, eu já tive essa experiência na sala de aula e foi muito bom e os alunos gostavam muito. A aula fica muito produtiva e os alunos ficam muito motivados”. (A12)

“Sim, pois com jogos o aluno aprende mais rápido e fica gostando da matemática”. (A14)

“Sim. Através dos jogos as pessoas que não gostam da matemática aprendem e descobrem que é mais fácil do que parece aprender matemática”. (A15)

Essas respostas se destacaram pelos aspectos positivos sobre a utilização de jogos. Tivemos também, cinco respostas “sim”, sem justificativas, e duas respostas “sim”, um pouco divergente das outras, vejamos:

“Sim, mas só no ensino fundamental I”. (A2)

Essa resposta de A2 já era esperada, pois ele justificou a não utilização dos jogos na álgebra do ensino superior, justificando que não cai no vestibular.

Outra resposta interessante foi a de A13, pois foi o aluno que teve a maior recuperação de notas, de 2,0 no pré-teste a 7,0 no pós-teste, após a aplicação dos jogos. Vejamos sua resposta:

“Sim, mas uns que não sejam tão complicados e acabe desanimando os alunos em vez de motivar”. (A13)

Isso mostra a importância da utilização do jogo, pois a atividade foi complicada, segundo A13, ele não se motivou, mas teve um desempenho após a aplicação do jogo de mais de 300% de melhora. Reportamo-nos novamente a Menezes (1996), quanto à sua ideia sobre o efeito positivo dos jogos, quando bem utilizados, enquanto ferramenta muito rica no processo de ensino-aprendizagem. Mesmo sem estar motivado o aluno obteve um aprendizado significativo, pois os jogos serviram como uma âncora para o aprendizado da indução, como temos nas ideias de Ausubel (1978).

CONCLUSÃO

CONCLUSÃO

Em nosso trabalho, primeiramente, investigamos o conhecimento dos alunos sobre o uso de Jogos Matemáticos em sala de aula através de um questionário e verificamos que a maioria já tinha tido contato com essa ferramenta, embora superficial. Mas já sinalizavam para uma crença no sentido de que poderiam aprender conteúdos de ensino superior com o uso de jogos. Apesar do contato com os jogos ter sido pouco, de acordo com as respostas dos alunos pesquisados, este mostrou-se benéfico, em vista dos depoimentos positivos acerca das atividades.

O objetivo desta pesquisa foi analisar a contribuição do uso de jogos na aprendizagem do primeiro princípio de indução finita em alunos de graduação em matemática. Após analisarmos as atividades realizadas pelos sujeitos participantes da pesquisa e a partir dos resultados obtidos acreditamos que atingimos nosso objetivo, pois tivemos melhoras significativas no desempenho dos participantes da mesma. Para citar alguns destaques, temos que A13, A12 e A3 tiveram seu desempenho melhorado de 2,0 (dois), 5,5 (cinco e meio) e 5,5 (cinco e meio) para 7,0 (sete), 8,5 (oito e meio), respectivamente, do pré-teste para o pós-teste. A13 declarou sua mudança de postura frente ao conteúdo após o jogo, revelado nas suas falas; A12 acertou quase todo o pós-teste, justificando que não respondeu tudo pelo fator tempo. Além disso, todos os outros alunos não reduziram nota, levando-nos a considerar ter havido uma contribuição importante no jogo para a melhora no desempenho dos alunos, ou seja, em nosso contexto tivemos êxito na aplicação dos jogos.

No decorrer da nossa pesquisa realizamos também aulas de indução finita sem o uso de jogos matemáticos, com resolução de exercícios contidos no livro didático, em seguida realizamos um pré-teste envolvendo o conceito de indução e verificamos um desempenho muito ruim por parte dos alunos, tanto nas questões mais tradicionais como nas questões contextualizadas, obtendo-se uma média de 2,8 pontos.

Em seguida foi feita uma atividade com jogos matemáticos, onde usamos três jogos: torre de Hanói, salto de rã e anéis chineses, jogos que em sua dinâmica trabalha o conteúdo de indução finita. Um fato interessante foi que alguns alunos acharam as atividades com jogo difíceis, desde na primeira aplicação, mostrando que mesmo sendo uma atividade dinâmica e interessante, os jogos matemáticos quando trabalhados conteúdos matemáticos tornam-se atividades que necessitam de bastante atenção por parte dos alunos, mudando um pouco o panorama de que jogos é apenas uma brincadeira. No entanto, reconheceram o jogo como auxiliar na sua compreensão do conteúdo em foco.

Após as aplicações dos jogos foi feito um pós-teste com questões de indução finita. Este compreendeu uma atividade onde buscamos verificar o desempenho dos alunos em atividades contextualizadas com jogos matemáticos referentes ao primeiro princípio da indução finita.

Logo depois comparamos o desempenho dos alunos na resolução de problemas contextualizados de Indução antes e depois da utilização dos jogos matemáticos em sala de aula e verificamos uma grande melhora por parte dos alunos tanto na resolução das questões, mostrando que nossa pesquisa evolui em relação as outras pesquisa nesta área, pois mostrou que o uso de jogos pode ser encarado como uma ferramenta para o aprendizado de indução finita no ensino superior.

Ainda realizamos um questionário final para analisarmos o que os alunos acham da utilização de jogos após a prática pedagógica, e podemos constatar que a grande maioria continuou com pensamento positivo sobre a utilização dos jogos, com exceção de pouquíssimos alunos que pensavam que uso de jogos iria resolver todos os problemas, fazendo com que o seu desempenho chegasse ao ápice, isto mostra mais uma importância de nosso trabalho, pois como trabalhamos com futuros professores, despertamos o interesse deles em usar jogos explorando a matemática vigente nos mesmos, isso contribui certamente para utilização futura dessa ferramenta por partes dos alunos em sua prática pedagógica futura.

Esses fatos posteriores permitem-nos considerar que respondemos nossa questão de pesquisa, pois houve uma melhora significativa no desempenho dos alunos, mostrando que os jogos podem contribuir para o aprendizado do conteúdo de indução finita. Em outras palavras, os resultados apresentados mostraram que, para os alunos pesquisados, os jogos atuaram como auxiliares na compreensão dos processos relacionados ao conteúdo indução finita em algumas situações-problema contextualizadas.

Avançamos na necessidade de aprofundar as pesquisas com jogos no ensino superior, seus efeitos na aprendizagem. Consideramos necessário, também, mais pesquisas sobre a matemática dos jogos e sugestões de atividades de ensino envolvendo jogos e a matemática subjacente aos mesmos, assim como o uso de outras ferramentas que auxiliem no aprendizado do aluno no ensino superior, principalmente em disciplinas de cálculos, onde já podemos utilizar software como o winplot e geometria analítica, onde podemos usar o geoplano.

Por fim esperamos que essa pesquisa contribua para uma reflexão sobre o conceito de indução finita, a fim de que esse tema, ao ser abordado, não seja trabalhado apenas como um processo mecânico, mas que se possa perceber que em diversas situações de demonstrações matemáticas esse conceito pode ser usado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AUSUBEL, D.P; NOVAK, J.D. & HANESIAN, H. **Educational Psychology: A Cognitive View**, Second Edition, New York: Holt, Rinehart and Winston, 1978.

AUSUBEL, D.P. **Aquisição e retenção de conhecimentos**. Lisboa: Plátano Edições Técnicas (2003). Tradução do original **The acquisition and retention of knowledge** (2000).

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BORDENAVE, Juan Diaz & PEREIRA, A. Martins. **Estratégias de ensino-aprendizagem**. 5º ed. Petrópolis: Vozes, 1977.

BORIN Júlia. **Jogos e Resoluções de Problemas: uma estratégia para as aulas de matemática**. IME –USP: 1996.

BRENELLI, R. P. **O jogo como espaço para jogar**. Campinas: Papirus, 1996.
COLL, César; MARTÍN, Elena & Cols. **Aprender Conteúdos e Desenvolver Capacidades**. Porto Alegre: Artmed editora, 2004.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. São Paulo: Atual, 2006.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Mini Aurélio: O dicionário da Língua Portuguesa**. 8. ed. Curitiba: Positivo: 2010.

FERREIRA, M. V. **Concepções de Licenciandos de Matemática sobre a Utilização de Jogos no Ensino Básico como uma Ferramenta para o Ensino Aprendizagem**. Dissertação de Mestrado. Recife: UFRPE, 2008

GARNICA, A. V. M. **As Demonstrações em Educação Matemática: em ensaio**. Bolema, Rio Claro (SP), Ano 15, nº. 18, 2002, pp 73 a 81.

HANNA, G. Proof, explanation and exploration: an overview. **Educational Studies in Mathematics**. 44: 5–23, 2000.

HEFEZ, Abramo. **Indução Matemática**. Programa de Iniciação Científica OBMEP, V-4. Rio de Janeiro. 2009.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4.ed. São Paulo: Atlas, 2007.

GUZMAN, M de. **Aventuras matemáticas**. Barcelona: Labor, 1986.

LIMA, Elon Lages. **O Princípio da Indução**. Disponível em: http://www.obm.org.br/opencms/revista_eureka/lista.html. Acesso em 05.10.2010.

LIMA, P, F. **Jogos: Uma Ponte para Matemática**. In: II ENEM. São Paulo: set/1991.

LOPES, Maria da Glória. **Jogos na Educação: criar, fazer, jogar**. São Paulo: Cortez, 2000. 3ª Ed.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Educação: Alegorias, Tecnologias e temas afins**. São Paulo: Cortez, 1992. 2ª edição.

MENEZES, J. E. **A interação jogo matemático-aluno em ambientes extra classe: o jogo do NIM**. Dissertação de mestrado. Recife: UFPE, 1996.

MENEZES, J. E. et al. **Conhecimento, interdisciplinaridade e atividades de ensino com jogos matemáticos: uma proposta metodológica**. Recife: UFRPE, 2008.

MOREIRA, M. A.. **Teoria de Aprendizagem**. São Paulo, EPU, 1999.

MOURA, M. O. A séria busca no jogo: do lúdico na matemática. In: KISHIMOTO, T. M. (org.). **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. São Paulo: Cortez, 1996.

OLIVEIRA, Maria Marly. **Como Fazer Pesquisa Qualitativa**. Petrópolis - RJ: Ed. Vozes, 2008. 2ª Ed.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1975.

REGO, Rogéria Gaudêncio do RÊGO, Rômulo Marinho do. **Matematicativa**. João Pessoa. Editora da UFPB, 1998.

SANTOS, Carlos Pereira. NETO, João Pedro. SILVA, Jorge Nuno. **Matemática Recreativa + Puzzles Aneis Chineses**. Edimpresa. 2007.

SANTOS, Ernestino Fisher Vieira dos. **O Efeito de uma técnica de Jogo sobre o rendimento da aprendizagem em matemática superior**. Dissertação de Mestrado. Porto Alegre: UFRGS, 1978.

SANTOS JR, Valdir Bezerra dos. **A Mobilização de Conteúdos Matemáticos em Atividades Práticas em Contexto de Jogo com Licenciandos em Matemática**. Dissertação de Mestrado. Recife: UFRPE, 2011.

SAVIOLI, A. M. P. D. **Uma Reflexão sobre a Indução Finita: relato de uma Experiência**. Bolema, Rio Claro (SP), Ano 20, nº. 27, 2007, pp 41 a 51.

SILVA, Eduardo Machado. **Compreensão de Estudantes de um Curso de Matemática a Respeito do Conceito de Indução Finita**. Dissertação de Mestrado. Londrina. UEL. 2010.

APÉNDICE

APÊNDICE A: Modelo do questionário sobre aprendizado com Jogos aplicado aos alunos antes da aplicação dos Jogos.

01. Você Gosta de Jogos? Geralmente ganha ou Perde?

02. Já teve aulas com jogos?

03. Se a resposta foi não. Gostaria de ter tido?

04. Se a resposta foi sim. O que achou?

05. Você acha que pode aprender com jogos no Ensino Superior? Por quê?

06. Você acha que na disciplina de Álgebra no Ensino Superior cabe o uso de jogos? Por que?

07. Você pretende usar Jogos na sua Prática Pedagógica?

APÊNDICE B: Modelo do Pré-Teste.

Pré -Teste sobre Indução

Dica: Um número N é divisível (ou múltiplo) por 9 quando é escrito da forma $N = 9q$, onde q é um número inteiro qualquer.

Exemplo: $27 = 9 \cdot 3$, logo 27 é divisível (múltiplo) de 9.

$36 = 9 \cdot 4$, logo 36 é divisível (múltiplo) de 9

01. Observe:

$$2 + 4 = 6$$

$$2 + 4 + 6 = 12$$

$$2 + 4 + 6 + 8 = 20$$

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$$

...

Encontre uma fórmula matemática para encontrar a soma dos n primeiros números naturais e prove por indução que ela é verdadeira"

02. Prove por indução que $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n \cdot (3n - 1)}{2}$, $\forall n \geq 1$

03. Prove por indução que $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, $\forall n \geq 0$.

04. Observe:

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

...

Mostre que a soma de números naturais ímpares é sempre um quadrado perfeito.

05. Mostre que a soma de três números naturais consecutivos é sempre um múltiplo de 3.

06. Demonstrar que a soma dos cubos de três números naturais sucessivas é divisível por 9.

APÊNDICE C: Atividade realizada em sala de aula para aplicação da torre de Hanói



FFPG- Faculdade de Formação de Professores de Goiana
Teoria dos Números
Prof. Rafael Barros

Aluno: _____

Data: 07/04/2011

A Torre de Hanói

Breve histórico e lenda

Segundo uma lenda, a Torre de Brahma, encontra-se no centro do mundo, sob a cúpula de um templo situado em Benares, na Índia. Neste centro, há uma placa de latão onde estão fixados três pinos de diamante, em um dos quais ao criar o mundo, Brahma colocou 64 discos de ouro, apoiados um sobre o outro, e de diâmetros decrescentes a partir da base. Segundo as imutáveis leis de Brahma, os sacerdotes do templo estão incumbidos da tarefa de transferir a pilha de discos para um dos outros dois pinos trabalhando dia e noite sem cessar, sendo que devem mover um disco por vez e nunca pôr um disco maior sobre outro menor que ele. A vida decorrerá durante essa tarefa, após o fim da qual o templo, a torre e os sacerdotes serão transformados em pó, e o mundo desaparecerá com o estrondo de um trovão.

No Ocidente, atribui-se a criação do jogo e da lenda da Torre de Hanoi, ou Torre de Brahma, ao matemático francês EDOUARD LUCAS, já mencionado neste trabalho como um dos precursores das recreações matemáticas, em 1883. O jogo teria sido comercializado como brinquedo sob a autoria do Prof. Claus do colégio LI-SOU STIAN (anagramas de LUCAS e SAINT LOUIS, respectivamente. Este último era o nome do colégio onde Lucas lecionava). Como brinquedo, eram usados oito discos, segundo as mesmas regras descritas na lenda.

Curiosidade: Os cálculos feitos para a torre de Brahma, onde $n = 64$, mostram ser necessários 18.446.744.073.709.551.615 movimentos para executar a tarefa imputada aos sacerdotes; então, se cada disco levasse um segundo para ser movido, são necessários seis bilhões de séculos para completar a tarefa! Escreveu o professor José Nilson Machado: "...como as estimativas para a existência de vida na terra não passam de uns poucos milhões de anos, a profecia contida no mito que deu origem ao jogo não deve preocupar a nenhum mortal."

Para jogar esse jogo, você precisa conhecê-lo.

Composição do jogo:

Estrutura : Uma base sobre a qual estarão apoiados três pinos de mesma altura enfileirados ou numa circunferência imaginária dispostos segundo arcos de 120° . Sete discos com furo central para serem encaixadas nos pinos. Ao conjunto de sete discos será dado o nome de torre.

Objetivo: Transportar a torre, com o menor número de movimentos possível, para um dos outros dois pinos, o qual pode ser previamente determinado ou não.

Regras: 1) Só deve mover apenas uma peça de cada vez;
2) Uma peça maior jamais poderá ficar sobre uma menor.

Atividade: Preencha a tabela mais abaixo. Para ajudar na sua tarefa, pense nas questões abaixo:

- i) É possível chegar ao objetivo desejado?
- ii) Se é possível atingir o objetivo, qual o procedimento mais econômico, ou seja, com o menor número de movimentos?
- iii) Existe alguma relação matemática entre o número n de peças da torre e o número mínimo $A(n)$ necessário para efetuar a sua transferência do pino de origem para o pino final? Existe uma função matemática $A(n)$, da variável n ? Em caso afirmativo, como seria uma fórmula para essa função?
- iv) Cresce muito esse número mínimo de movimentos, com a quantidade de peças do jogo? Em termos matemáticos, $A(n)$ cresce muito com a variável n ?
- v) Você pode encontrar uma relação matemática entre o número qualquer de peças da torre e o número de movimentos? Em caso afirmativo, qual seria uma fórmula?
- vi) Demonstre que essa fórmula é verdadeira para qualquer valor $n \geq 1$.

Número de Peças	Número Mínimo de Movimentos
N	$A(n)$
1	
2	
3	
4	
5	
6	
...	...
n	

APENDICE D: Atividade realizada em sala de aula para aplicação da torre de Hanói.



FFPG- Faculdade de Formação de Professores de Goiana Teoria dos Números Prof. Rafael Barros

Aluno: _____

Data: 14/04/2011

Salto de Rã

O objetivo do jogo é trocar os grupos de peças de lugar. O jogo também pode ser montado com peças de duas cores diferentes.

As regras do jogo são as seguintes:

- Os movimentos feitos pelas peças serão denominados como *passos* e *pulos*.
- Um *passo* é o movimento onde uma peça ocupa uma casa vazia à frente
- Um *pulo* é o movimento onde uma peça “pula” por cima de uma peça vizinha do outro grupo, ocupado a casa após ela.
- Não é permitido saltar por cima de duas peças ou mais, como também saltar para trás.

Atividade

Objetivo: Estabelecer lei de formação de seqüências ou definir função.

Conteúdo: Seqüências ou funções

1. Preencher a tabela com:

- o número de passos;
- o número de pulos;
- O número de movimentos;
- O acréscimo de movimentos em relação ao anterior.

Nº de pares de Peças	Nº de Passos	Nº de pulos	Nº de Movimentos	O acréscimo de Movimentos em relação ao anterior
1				-----
2				
3				
4				
...				
n				
n + 1				

2. É possível estabelecer uma fórmula matemática para, dado um número qualquer de peças por grupo, calcular o número total de passos, pulos, aumentos e movimentos?

3. Demonstre por Indução que a fórmula encontrada acima é verdadeira

APÊNDICE E: Modelo do Pós-Teste

Pós -Teste sobre Indução

01. Prove por indução que $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n \cdot (3n - 1)}{2}$, $\forall n \geq 1$

02. Prove por indução que $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n \geq 1$.

03. Observe:

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

...

Mostre que a soma de números naturais ímpares é sempre um quadrado perfeito.

04. Mostre que a soma de três números naturais consecutivos é sempre um múltiplo de 3.

05. Complete a tabela e mostre que o número de diagonais de um polígono é sempre

$$d_n = \frac{n(n-3)}{2}, \forall n \geq 3.$$

<i>Polígono</i>	<i>N</i>	<i>Número de diagonais (d_n)</i>	<i>Acréscimo</i>
Triângulo	3	0	
Quadrado	4	2	
Pentágono	5	5	
Hexágono	6	9	
Heptágono	7	14	
Octógono	8	20	
...	
Polígono de n lados	n	$\frac{n(n-3)}{2}$	

06. Observe:

$$2 + 4 = 6$$

$$2 + 4 + 6 = 12$$

$$2 + 4 + 6 + 8 = 20$$

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$$

...

Encontre uma fórmula matemática para encontrar a soma dos n primeiros números naturais e prove por indução que ela é verdadeira".

APÊNDICE F: Modelo do questionário sobre aprendizado com Jogos aplicado aos alunos depois da aplicação dos Jogos.

01. Você gostou de aprender Indução com Jogos?

02. Você acha que pode aprender com jogos no Ensino Superior? Por quê?

03. Você acha que na disciplina de Álgebra no Ensino Superior cabe o uso de jogos? Por que?

04. Você pretende usar Jogos na sua Prática Pedagógica?

APÊNDICE G: Fotos das Aplicações dos Jogos

Figura 15: FOTO DOS ALUNOS JOGANDO A TORRE DE HANÓI.



FIGURA 16: FOTO DOS ALUNOS JOGANDO O SALTO DE RÃ.



Figura 17: FOTO DOS ALUNOS JOGANDO OS ANEIS CHINESES.

