MARILENE ROSA DOS SANTOS

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO ÁREA DE PARALELOGRAMO: UM ESTUDO SOB A ÓTICA DO CONTRATO DIDÁTICO E DAS VARIÁVEIS DIDÁTICAS.

UFRPE
PERNAMBUCO
2005

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS
NÍVEL DE MESTRADO

MARILENE ROSA DOS SANTOS

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO ÁREA DE PARALELOGRAMO: UM ESTUDO SOB A ÓTICA DO CONTRATO DIDÁTICO E DAS VARIÁVEIS DIDÁTICAS.

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-graduação em Ensino das Ciências da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE EM ENSINO DAS CIÊNCIAS, sob orientação da Professora Doutora Paula Moreira Baltar Bellemain.

UFRPE
RECIFE
2005

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO ÁREA DE PARALELOGRAMO: UM ESTUDO SOB A ÓTICA DO CONTRATO DIDÁTICO E DAS VARIÁVEIS DIDÁTICAS.

MARILENE ROSA DOS SANTOS

Dissertação defendida e aprovada pela Banca Examinadora:

Orientadora:

____

Paula Moreira Baltar Bellemain, Drª

Examinador externo:

____

Profª Maria Auxiliadora Vilela Paiva, Drª

Examinador externo:

____

Profº Paulo Figueiredo Lima, Dr.

Examinador interno:

____

Profª Heloisa Flora Brasil Nóbrega Bastos, PhD.

RECIFE, 01 DE AGOSTO DE 2005

Ficha catalográfica
Setor de Processos Técnicos da Biblioteca Central – UFRPE

S237r Santos, Marilene Rosa dos
Resolução de problemas envolvendo área de paralelogramo: um estudo sob a ótica das variáveis didáticas e do contrato didático / Marilene Rosa dos Santos – 2005.
178 f. : il., tabs.

Orientador: Paula Moreira Baltar Bellemain
Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco. Departamento de Educação.
Inclui referências e anexos.

CDD 372.7

1. Livro didático
2. Paralelogramo
3. Área do paralelogramo
4. Educação matemática
5. Contrato didático
6. Variável didática

I. Bellemain, Paula Moreira Baltar
II. Título

Agradecimentos

A Deus,

Por permitir que eu esteja agradecendo, dando-me forças e determinação para continuar a jornada e por ter posto em meu caminho pessoas especiais, que participaram deste trabalho e o enriqueceram, cada um a seu modo, cada um a seu tempo.

Aos meus familiares,

Pelo amor expresso de várias formas: meu marido, Jorge Rafael, pela paciência, compreensão, cooperação e apoio irrestrito; minha filha, Ranielle, que apesar dos poucos anos de vida, demonstrou maturidade suficiente para compreender uma mudança em nossas vidas; a Selma que ajudou a cuidá-la; a minha mãe, Marluce, que sempre teve a preocupação em me propiciar condições para estudar; aos meus irmãos pelo incentivo e in memória a minha filha, que não tive oportunidade de amamentá-la, beijá-la e incentivá-la para o caminho do bem e do amor ao próximo.

A todos os professores do programa de Pós-graduação em Ensino das Ciências,

Pelos seus ensinamentos psicológicos, filosóficos, de teorias do conhecimento e de tópicos, que me foram úteis não só para esta pesquisa, mas também para a vida. Minha gratidão especial, a professora doutora Helaine Sivini, por tudo que me ensinou, por saber quando eu precisava de ajuda e quando podia fazer sozinha. Sempre me fez acreditar que eu seria capaz de realizar um bom trabalho.

A professora Drª Paula Baltar Bellemain,

Pela sugestão do tema para pesquisa, que veio ao encontro de minhas indagações. Pela orientação dedicada, incentivo, apoio constantes e amizade nos momentos difíceis.

Aos meus colegas de mestrado,

Pelos momentos de estudo e discussão, e em especial a Iraquitan, Marinalva, Weydson, Vladimir, Eduardo, Fátima, Geni, Sandra, Gilberto, Isabel, Suzane, Gisella e Gracivane, pelas valiosas sugestões, incentivo nos momentos mais difíceis e pela amizade adquirida.

Aos companheiros de profissão,
Que me incentivaram a ingressar, em particular a Almeri Freitas, e concluir o mestrado, em especial, a todos os professores da Escola Polivalente Maria do Carmo Pinto Ribeiro, da Prefeitura da Cidade do Paulista, a Joseane Brito, Laércio Gomes e Fernando que com competência fizeram a revisão do texto. A Marcos Honorato pelos socorros em informática, facilitando meu trabalho. A Gilson Soares e a Jorge Duarte por terem me ensinado a valorizar e gostar das grandezas geométricas. Á escola, ao professor e os alunos que participaram da pesquisa, os quais contribuíram significativamente com esse estudo.

Ao Grupo Pró-Grandeza,
Em especial ao professor Dr. Paulo Figueiredo Lima pelas contribuições teóricas que deram suporte aos nossos estudos.

Aos professores,

Heloisa Bastos, Paulo Figueiredo, Paula Baltar e Verônica Gitirana que participaram da qualificação e da pré-banca contribuindo significativamente para o nosso estudo. A professora Maria Auxiliadora Vilela Paiva pela participação na banca, pelos comentários e valiosas sugestões.

RESUMO

Esta pesquisa teve por objetivo investigar as possíveis relações entre a abordagem da área do paralelogramo em uma coleção de livros didáticos para as séries finais do ensino fundamental e os procedimentos utilizados pelos alunos de uma 8ª série na resolução de problemas relativos a esse tema. A fundamentação teórica está alicerçada no modelo de área como grandeza, proposto nos trabalhos de Douady & Perrin-Glorian e Bellemain & Lima e na Teoria das Situações Didáticas desenvolvida por Brousseau e seus seguidores, particularmente nas noções de contrato didático e variável didática. Os procedimentos metodológicos inspirados em Bessot & Le Thi Hoai, consistiram na análise de uma coleção de livros didáticos de Matemática, seguida da aplicação de um teste com alunos, usuários dos livros. Participaram desta pesquisa 21 alunos da 8ª série de uma escola pública da cidade do Recife. As atividades do teste foram elaboradas de forma que rompessem com algumas regras de contrato didático supostamente vigente e os valores das variáveis didáticas identificadas fossem ora aqueles predominantes na coleção de livros didáticos, ora valores não habituais. As análises dos resultados indicaram convergências e divergências, entre a abordagem dos livros e os procedimentos dos alunos referentes à área do paralelogramo. Por exemplo, tanto na coleção como nos procedimentos dos alunos, o lado tomado como base é geralmente o horizontal (mesmo quando não se trata do lado de maior comprimento). Os livros didáticos analisados focalizam inicialmente a medida de área e apenas em um momento posterior trabalham a invariância da área por decomposição e recomposição. Esta escolha diverge daquela indicada na revisão de literatura segundo a qual a associação precoce da superfície a um número favorece a confusão entre as grandezas comprimento e área. Contrariamente à nossa expectativa, nas atividades propostas a maioria dos alunos mostrou distinguir área e perímetro.

PALAVRAS-CHAVE: Livro didático, área do paralelogramo, contrato didático e variável didática.

ABSTRACT

This research had the objective to investigate the possible relation between the concept of parallelogram area in a didactic book collection for the last grades of elementary school and the procedures used by students of an 8th grade class in the solutions to the problems related to this theme. The theoretical fundation is based on the model of area as magnitude, as it is in the works of Douady & Perrin-Glorian and Bellemain & Lima and in Theory of didactic situations developed by Brousseau and his disciple, particulary by the notions of didactic contract and didactic variables.The methodological procedures inspired by Bessot & Le Thi Hoai, consisted on the analysis of a collection of didactic Mathematics books, followed by the application of a test with students, users of the books. Twenty-one students of an 8th grade class of a federal public elementary school took part in this research in the city of Recife. The activities proposed were made in order to look alike on the books, but breaking with some rules of the didactic contract suppose standing the value of the didactic variables identified it was, in the time predominant in the didactic book collection, in the time value not used. The analysis of results indicated convergence and divergence among the abordage of the books and procedures by the students about the parallelogram area. For example, in the collection like in the procedures of the students, the side like base is generally the horizontal side (also when it´s not aborded the greatest side). The didactic book analyzed for beginning the measure of area only in a posterior moment worked the constancy of the area for decomposition and composition. This choice is against that one indicated in literature revision by the premature association of the surface to a number help the confusion between the magnitude length and area. Contrary to our expectation, on the activities proposed to great part of the students showed to discolour area and perimeter.

KEY-WORDS: Didactic book, Parallelogram area, Didactic Contract and – Didactic variables.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

INTRODUÇÃO

O objeto de estudo desta pesquisa é o ensino e a aprendizagem do conceito de área e mais especificamente da área do paralelogramo.

Embora, na matemática escolar, geralmente considere-se área como um conteúdo do campo da geometria, consideraremos aqui, em consonância com os trabalhos de Douady & Perrin-Glorian (1989), como componente do campo das grandezas geométricas.

O campo das grandezas geométricas, por sua vez, está inserido, de uma forma geral, no estudo das grandezas e medidas, o qual nos Parâmetros Curriculares Nacionais é considerado um "*articulador entre diversos conteúdos matemáticos, por proporcionar um vasto campo de problemas que permitem consolidar e ampliar a noção de número e possibilitar a aplicação de noções geométricas".* (BRASIL,1997, p.85).

O conceito de área, em particular, tem um papel importante no currículo de Matemática da escola básica, por várias razões: sua aplicação no cotidiano e nas práticas profissionais como, por exemplo, estimar a medida da área de um terreno, pintar uma parede, colocar cerâmica no piso, etc.. Por permitir a articulação com outros conceitos da Matemática, tais como: fração, produtos notáveis etc. Por favorecer a conexão com outras disciplinas escolares como, por exemplo, Geografia, quando se estuda escala, Física, no estudo de pressão. Para que o conceito de área cumpra tais funções no currículo é necessária uma sólida construção conceitual.

Sabemos que durante muito tempo, o ensino do conceito de área foi marcado por um foco muito forte, no treino das conversões de unidades e na introdução de fórmulas sem que houvesse a atribuição do seu significado. E por isso, o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo área é permeado, por inúmeras dificuldades, já constatadas por avaliações de rede, sondagens e pesquisas, em diversos países. Na França, avaliações de rede, relatadas por Baltar[1] (1996, apud BELLEMAIN e LIMA, 2002), indicam que os alunos, no nível equivalente ao 2º e 3º ciclos do Ensino Fundamental brasileiro, têm, geralmente, aproveitamento inferior a 50% nas questões sobre os conceitos de área e perímetro.

No Brasil, especificamente no Estado de Pernambuco, avaliações de rede, realizadas pelo Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco – SAEPE (2003) sobre o desempenho dos alunos, revelaram as dificuldades conceituais no campo das grandezas geométricas e suas medidas, em especial área, cujos percentuais de acerto, na grande maioria dos descritores, são inferiores a 35%.

O papel do conceito de área no currículo da escola básica e as dificuldades conceituais de aprendizagem freqüentes justificam nossa escolha de tomá-lo como objeto de estudo.

Nosso interesse se volta, de maneira particular, para a área do paralelogramo. Por um lado, verifica-se a persistência de lacunas conceituais, em alunos, já apontadas por diversas pesquisas, tais como: calcular a área do paralelogramo fazendo o produto dos comprimentos dos lados, considerar o paralelogramo como retângulo deformado, etc. Por outro lado, não encontramos na literatura pesquisada, estudos que abordem, sob diferentes aspectos, esse tema.

Com o intuito de investigar os processos de ensino e aprendizagem da área do paralelogramo, surgiu esta pesquisa, que consiste em investigar possíveis relações entre a abordagem da área do paralelogramo em uma coleção de livros didáticos e os procedimentos que os alunos da 8ª série do Ensino Fundamental apresentavam na resolução de problemas, relativos a esse tema.

---

[1] BALTAR, P. M. Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surface planes: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège. 1996. Tese (Doutorado em Didática da Matemática). Université Joseph Fourier, Grenoble.

Assim, as questões que nortearam a pesquisa eram:

- Quais as regularidades na coleção de livros didáticos, quanto à área e à figura do paralelogramo?
- Quais os procedimentos dos alunos na resolução de problemas, envolvendo área de paralelogramo?
- Que relações podem ser observadas entre as regularidades na coleção de livros didáticos e os procedimentos dos alunos na resolução de problemas, envolvendo área de paralelogramo?

Procuramos aprofundar nossa compreensão dos erros cometidos pelos alunos por meio da análise de uma coleção de livros didáticos e da resolução de um teste por alunos de 8ª série. Na busca de resposta as nossas indagações utilizamos as noções de contrato didático e variável didática. Esses elementos teóricos são conceitos da Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1986) que, por sua vez, é uma teoria central da Didática da Matemática, a qual consideramos uma das linhas da Educação Matemática.

A noção de contrato didático permite investigar as supostas expectativas dos alunos em relação aos problemas propostos no livro didático e no teste. Consideramos o livro didático como um representante do ensino na divisão de tarefas: uma parte sob a responsabilidade de um professor e outra sob a responsabilidade do aluno, ambos hipotéticos e usuários desse livro.

A noção de variável didática contribui no sentido de identificar características de figuras e problemas no livro didático, que têm influência sobre as regras de resolução utilizadas pelo aluno. Para cada uma das variáveis didáticas focadas, evidenciamos valores predominantes e valores poucos freqüentes na coleção de livros didáticos analisada.

O texto que se segue estrutura-se em cinco capítulos.

No primeiro, apresentamos a **Revisão de literatura e Fundamentação teórica,** as quais conduziram à elaboração da problemática e conseqüentemente à explicitação dos objetivos da pesquisa. Inicialmente realizamos uma discussão sobre as relações entre a linha da Didática da Matemática francesa e da Educação Matemática como um campo mais amplo. Em seguida, debatemos a escolha que é feita na pesquisa de considerar as grandezas geométricas como fronteira entre os campos da geometria e das grandezas e medidas. Apresentamos ainda, estudos relativos à figura do paralelogramo, à área de superfícies planas e da área do paralelogramo. E finalmente, discutimos as noções de contrato didático e variável didática.

No segundo capítulo, abordamos os **procedimentos metodológicos**, que se inspiram naqueles utilizados por Bessot & Le Thi Hoai (1994). Analisamos uma coleção de livros didáticos de Matemática e aplicamos um teste com alunos de uma 8ª série do Ensino Fundamental usuários deste livro, de forma que as atividades propostas rompessem com algumas regras de contrato didático supostamente vigente e os valores das variáveis didáticas identificadas fossem ora aqueles predominantes na coleção de livros didáticos, ora valores não habituais.

O terceiro capítulo é dedicado à **análise dos livros didáticos**, por meio da qual identificamos regularidades, as quais levam à caracterização de um contrato didático relativo à área do paralelogramo, regendo as relações entre professor e alunos, ambos hipotéticos, usuários dos livros da coleção.

O quarto capítulo é reservado à análise a priori e análise de resultados das atividades do **teste**.

Nas considerações finais, tecemos comentários sobre a pesquisa e seus possíveis desdobramentos. Em seguida, apresentamos nossa bibliografia e os anexos.

REVISÃO DA LITERATURA, FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E PROBLEMÁTICA.

1- REVISÃO DA LITERATURA, FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E PROBLEMÁTICA.

Esta pesquisa se insere em uma perspectiva teórica chamada Educação Matemática, que segundo Pais (2001, p.10)

> É uma grande área de pesquisa educacional, cujo objeto de estudo é a compreensão, interpretação e descrição de fenômenos referentes ao ensino e à aprendizagem da matemática, nos diversos níveis da escolaridade, quer seja em sua dimensão teórica ou prática.

Entre as várias tendências da Educação Matemática, destacamos na nossa pesquisa, a Didática da Matemática, que teve sua origem segundo Gálvez (1999, p.26):

> a partir da atividade desenvolvida basicamente por matemáticos, nos Institutos de Investigação acerca do Ensino das Matemáticas (IREM), criados na França logo após a Reforma Educativa do final dos anos 60, com a qual se deu impulso ao ensino da “matemática moderna”.

Inicialmente, os IREM dedicaram-se à formação continuada de professores, produção de materiais de apoio para o trabalho docente e posteriormente à produção do conhecimento para subsidiar a prática do professor e buscar otimizar as relações entre ensino e aprendizagem. Para Chevallard et al. (2001, p.59), a:

> Didática da matemática é a ciência do estudo e da ajuda para o estudo da matemática. Seu objetivo é chegar a descrever e caracterizar os processos de estudo - ou processos didáticos - para propor explicações e respostas sólidas para as dificuldades com as quais se deparam todos aqueles (alunos, professores, pais, profissionais, etc.) que se vêem levados a estudar matemática ou a ajudar outros a estudá-la.

De acordo com o enfoque adotado na Didática da Matemática, professor e aluno encontram-se em sala de aula assumindo papéis específicos, guiados pela assimetria com relação ao saber em jogo: o professor tem por função ensinar determinado saber matemático e o papel do aluno é aprender esse saber.

São, assim, estabelecidos os três elementos centrais do sistema didático – o professor, o aluno e o saber matemático, objeto de aprendizagem, indicando que esses elementos devem ser fortemente integrados entre si e em constantes interações. Dessa forma, a Didática da Matemática defende o interesse de investigá-los em suas interrelações.

É característica da Didática da Matemática estudar os fenômenos relacionados com o ensino e a aprendizagem em Matemática, enfatizando a especificidade dos conteúdos envolvidos, no nosso caso, área do paralelogramo.

Como explicitado na introdução, o conceito de área está inserido no campo das grandezas geométricas. Segue-se então uma breve discussão da posição conceitual das grandezas geométricas com relação aos campos da geometria e das grandezas e medidas.

Com o intuito de situarmos mais precisamente nosso objeto de estudo, é feita a revisão de literatura referente à figura do paralelogramo, do conceito de área de superfícies planas e a área do paralelogramo. Nesse trabalho adota-se o modelo de área como grandeza proposto por Douady e Perrin Glorian (1989) e utilizado nos trabalhos de Bellemain e Lima (2002).

A fim de investigar os processos de ensino e aprendizagem da área do paralelogramo escolhemos os conceitos de contrato didático e variável didática, ambos elementos da Teoria das Situações Didáticas, a qual é o objeto da terceira parte desse capítulo.

Tomando por base todos esses componentes, podemos estabelecer os objetivos: geral e específicos da pesquisa.

1.1- Grandezas geométricas na fronteira entre os campos das grandezas e medidas e da geometria.

De forma geral, na Matemática escolar, considera-se área como um conteúdo do campo da geometria. Tal escolha encobre um aspecto central em nosso trabalho, que será detalhado adiante: a consideração da área como uma grandeza associada a figuras geométricas. Portanto, o conceito de área é aqui tomado como

componente do campo das grandezas geométricas. São também grandezas geométricas comprimento, volume e ângulo.
As grandezas geométricas estão inseridas, de uma forma mais ampla, no campo das grandezas e medidas, porém têm uma forte conexão com a geometria. De nosso ponto de vista, as grandezas geométricas fazem a fronteira entre os campos das grandezas e medidas e da geometria.

Além de favorecer a articulação com outros eixos da matemática, as grandezas geométricas possibilitam a exploração de uma abordagem que destaca a presença, utilidade social e a construção histórica do conhecimento matemático. Ao mesmo tempo, pesquisas anteriores revelam, de uma forma geral, a existência de lacunas conceituais relativas ao processo de ensino-aprendizagem dessas grandezas, especialmente no Ensino Fundamental, como destaca Lima (1995, p. 49),

> O ensino das grandezas geométricas faz parte de quase todo currículo escolar nos últimos cem anos. No entanto, sob o ponto de vista da didática desses conceitos, muitos problemas persistem, assegurando atualidade e importância à discussão sobre eles. Na verdade, tal discussão faz parte de uma reflexão mais ampla sobre o ensino do conceito de grandeza. Esse conceito, que permeia a formação escolar desde o seu inicio, é relativamente pouco investigado nos trabalhos em Educação Matemática.

Tanto o campo da geometria, como os das grandezas geométricas sofreram um abandono na matemática escolar nas últimas décadas (PAVANELLO, 1993; LORENZATO, 1995; PEREZ, 1995; CÂMARA DOS SANTOS & CÂMARA, 1999). Um dos indícios desse abandono é a posição predominante dos capítulos dedicados a esses temas no final do livro didático.

Observa-se mais recentemente uma tendência de resgate da importância desses campos para a formação dos alunos, mas persistem grandes lacunas herdadas das dificuldades intrínsecas ao tratamento dos conteúdos desses campos e amplificadas pelo descaso com que foram tratadas na escola durante um longo período.

Desde o final da década de 90, com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN propõe-se que os conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental sejam organizados em 4 grandes blocos: Espaço e Forma, Grandezas e Medidas, Números e Operações e Tratamento da Informação. A álgebra, no terceiro e quarto ciclo, está inserida no bloco Números e Operações. Preconiza-se nesse documento nacional de referência curricular, que os conteúdos sejam trabalhados de forma articulada, privilegiando as conexões intra-matemáticas, da matemática com outras disciplinas ou ainda com situações da vida cotidiana e das práticas sociais.

O bloco intitulado *Espaço e Forma* contempla o estudo das formas, as noções relativas à posição, estudo dos ângulos, localização de figuras e deslocamento no plano, sistemas de coordenadas, semelhança, transformações geométricas, etc. O bloco das *Grandezas e Medidas* inclui o estudo das grandezas físicas (tempo, temperatura, massa, etc.) e geométricas (comprimento, área e volume) e de suas medidas.

O campo das grandezas e medidas é reconhecido nos PCN como um espaço apropriado para a articulação com outros blocos do conhecimento, e em particular quando se trata de conteúdos relativos às grandezas geométricas, existem ricas possibilidades de interligações, proporcionando um vasto campo de problemas *"que permitem consolidar e ampliar a noção de número e possibilitar a aplicação de noções geométricas*" (BRASIL, 1998, p.85). Vale salientar que as grandezas geométricas são abordadas nos PCN em todos os ciclos do ensino fundamental.

Como já foi dito, o conteúdo que nos interessa mais diretamente – área – é situado nos PCN como um conteúdo do campo das grandezas e medidas. O mesmo ocorre com as grandezas geométricas comprimento e volume e com os conceitos de perímetro e capacidade associados. Apenas o conceito de ângulo, que do nosso ponto de vista também é grandeza[2] situa-se no bloco *Espaço e Forma.*

Nos PCN, o conceito da área de superfícies planas inicia-se no 2º ciclo do Ensino Fundamental. Focaliza-se no 3º ciclo o cálculo de área pela decomposição e/ou composição em figuras de áreas conhecidas, enquanto que, no 4º ciclo volta-se para a questão das fórmulas de áreas de figuras planas.

---

[2] Para um aprofundamento da noção de grandeza, o leitor poderá consultar Bellemain e Lima (2002)

1.2- Estudos anteriores sobre o ensino e a aprendizagem do paralelogramo, de área de superfícies planas e da área do paralelogramo.

Em observações assistemáticas constatamos que a figura do paralelogramo aparece muitas vezes, no livro didático brasileiro ou na própria abordagem do professor, com o lado de maior comprimento na posição horizontal, inclinação[3] para a direita e altura interna. Dessa forma, os alunos, por vezes, não o reconhecem em outra posição, em outra inclinação ou ainda apresentam dificuldades na resolução de problemas envolvendo área do paralelogramo, quando a figura é diferente da habitual.

Pesquisa realizada por Brito, Pirola e Lima (1997), em uma escola pública do Estado de São Paulo, com alunos de 1ª e 3ª séries do Ensino Médio, mostrou que poucos sujeitos conseguiram relacionar o atributo “lados paralelos” à figura do paralelogramo. Um fato que merece ser assinalado é que 46,7% dos estudantes da 3ª série do Ensino Médio não souberam definir esta figura. Supomos que uma das justificativas para isso acontecer é o fato do aluno não distinguir o desenho e a figura geométrica.

Para Capponi e Laborde (1994) o desenho é a representação gráfica de uma idéia, enquanto que a figura geométrica é um objeto geométrico descrito pelo texto que a define. Analisando a relação existente entre desenho e figura, afirmam que, no ensino da geometria, parece não existir diferença entre esses dois conceitos e ressaltam a complexidade dessa relação, alegando que a passagem de um para o outro depende da interpretação e do conhecimento prévio de quem o analisa.

Esses autores enfatizam que *“desenhos prototípicos de objetos geométricos constituíram-se ao longo do tempo, resultantes de influências ao mesmo tempo perceptivas e culturais”* (p.53). Apresentam um desenho prototípico de paralelogramo na França e explicitam no texto que a diagonal AC é perpendicular ao lado AD. Para maiores esclarecimentos, a seguir apresentamos uma figura com essas características:

---

[3] Tomaremos aqui, o termo inclinação de maneira coloquial, designando para que lado o paralelogramo está voltado, seja para a direita ou para a esquerda.

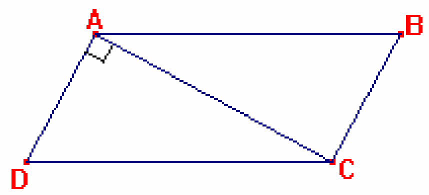


Figura 01: Exemplo de paralelogramo prototípico na França segundo nossa interpretação.

Observa-se que além da característica explicitada (perpendicularidade entre diagonal e lado), o desenho prototípico de um paralelogramo na França apresenta as características que apontamos anteriormente como freqüentes no ensino de Matemática no Brasil: o lado de maior comprimento encontra-se na posição horizontal e a inclinação do paralelogramo é para a direita.

Segundo Noirfalise (1990) as figuras prototípicas têm o papel de viabilizar resoluções de problemas, na medida que elas condensam informações. Por isso, não se pretende aqui abolir as figuras prototípicas. Entendemos que os protótipos podem contribuir no processo de ensino, no sentido de introduzir uma noção, auxiliar no resgate dos conhecimentos prévios como, por exemplo, usar a idéia de base como um modelo de chão, mas que precisa ser ampliada para que não gere problemas na aprendizagem.

Em relação à área de figuras planas, avaliações de rede realizadas no Brasil sobre o desempenho dos alunos, como por exemplo, as do Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco - SAEPE (2003), também revelam dificuldades conceituais dos alunos a respeito das grandezas geométricas, em especial área, como mostram os resultados gerais a seguir:

Tabela 1- Desempenho dos alunos a respeito do conceito de área – SAEPE (2003)

MODALIDADE	DESCRITOR CURRICULAR	PERCENTUAL DE ACERTO
4ª Série Ensino Fundamental	• Reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas.	47,5%
	• Comparar medida de grandezas utilizando unidades de medida (comprimento, tempo e área) convencionais, ou não.	44,1%
	• Resolver problemas envolvendo o cálculo e/ou comparação de áreas de figuras planas, desenhadas em malhas quadriculadas, ou não.	24,3%
8ª Série Ensino Fundamental	• Reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas.	33,8%
	▪ Resolver problemas envolvendo área de figuras planas.	19,1%
3ª Série do Ensino Médio	▪ Resolver problemas envolvendo o cálculo de área de figuras planas.	18,9%
	▪ Resolver problemas envolvendo a área total e/ou volume de um sólido.	15,2%

Também na França, avaliações de rede relatadas por Baltar (1996, apud BELLEMAIN & LIMA, 2002) indicam que os alunos, no nível equivalente ao 2º e 3º ciclos do Ensino Fundamental brasileiro, têm geralmente aproveitamento inferior a 50% nas questões sobre os conceitos de área e perímetro. Essa pesquisa revelou também que os erros mais freqüentes entre os alunos avaliados são: confusão entre área e perímetro, uso inadequado de unidades, utilização de fórmulas errôneas - ex: área do paralelogramo tomada como o produto dos comprimentos de seus lados.

Sobre a evolução do conceito de área, Lima (1995, p.49) considera que:

> *Comparar superfícies para avaliar qual delas ocupa mais lugar no plano é uma operação muito comum desde os tempos imemoriais. Para tornar mais*

> *precisa essa comparação, os homens desenvolveram o processo de medir a área de uma superfície. A palavra Geometria, como se sabe, é testemunha da importância que a operação de medir a terra tem na origem do conhecimento científico. Na medição de área atribuiu-se um número a cada superfície, ou seja, constrói-se uma função com valores numéricos, de modo que comparar superfícies reduz-se a comparar números. Nesse processo, uma etapa central é a escolha de uma superfície à qual se atribui o valor 1, ou seja, é a seleção de uma superfície unitária ou unidade de medida.*

Quanto à aprendizagem do conceito de área, um dos resultados importantes é a classificação das concepções de área em dois pólos, as concepções geométricas[4] e as concepções numéricas[5], proposta por Perrin-Glorian e Douady[6] (1988, apud BELLEMAIN e LIMA, 2002) e por Balacheff[7] (1988, apud BELLEMAIN e LIMA, 2002). Perrin-Glorian e Douady afirmam que alguns alunos desenvolvem uma concepção forma ou uma concepção número ou ambas, mas de forma isolada.

As concepções numéricas para Perrin-Glorian e Douady (1988, apud BELLEMAIN e LIMA, 2002) seriam aquelas, segundo as quais, o aluno só considera os aspectos pertinentes para o cálculo. Então, uma vez que ele considera que a área é um número ou que focaliza apenas o aspecto numérico, alguns erros associados a esta concepção podem ocorrer, como por exemplo: a omissão ou utilização inadequada das unidades de medida trabalhadas.

Para Balacheff (1988, apud BELLEMAIN e LIMA, 2002), as concepções geométricas caracterizam-se pela confusão entre área e superfície, perímetro e contorno. Então, um dos erros associados a essa concepção é, por exemplo, a confusão entre área e perímetro.

A partir da caracterização dessas concepções geométricas e numéricas e da identificação de erros decorrentes dessas concepções, Douady e Perrin-Glorian (1989) propõem que a abordagem do conceito de área enquanto grandeza favorece a construção das relações necessárias entre os aspectos geométricos e numéricos.

---

[4] Também indicadas pelo termo “concepção forma”
[5] Também indicadas pelo termo “concepção número”
[6] PERRIN-GLORIAN M.J., DOUADY R. Conceptions des élèves à propos d’aires de surfaces planes. In Laborde C. (org.) Actes du premier colloque Franco-Allemand de Didactique de Mathématiques et de l’informatique. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1988. p.161-172
[7] BALACHEFF, N. Processus de preuve chez des élèves de collège. 1988. Tese (doctorat d’état em Didactique dês Mathématiques). Université Joseph Fourier, Grenoble.

Além disso, elas preconizam que uma associação precoce da superfície a um número favorece o amálgama entre diferentes grandezas.
Compreendemos que a construção do conceito de área como grandeza articula-se, portanto, com a superação de concepções numéricas e geométricas, pelo menos, em nível local.

Na abordagem do conceito de área como grandeza, segundo essas pesquisadoras, devem-se distinguir três quadros[8]:

- Quadro geométrico: constituído por superfícies planas;
- Quadro numérico: consistindo nas medidas das superfícies planas, que pertencem ao conjunto R^+;
- Quadro das grandezas: ao qual pertence a área - constituído por classes de equivalência de superfícies de mesma medida.

Expressões compostas de um número e de uma unidade de medida são uma maneira de designar área como grandeza.

Segundo essas autoras, a compreensão dos alunos em relação à construção do conceito de área caracterizada acima é beneficiada pela abordagem de área como grandeza autônoma, pois favorece a conexão entre os quadros geométrico e numérico. Para tanto, é necessário que o aluno, antes de aprender a medir área, diferencie área e superfície, assim como área e número. Além disso, é preciso abordar, ainda nesse período, as diferenças entre área e perímetro.

Ainda sobre o conceito de área enquanto grandeza, concordamos com Bellemain e Lima (2002, p.29), quando afirmam que:

> A área de uma superfície plana aparece como um objeto matemático distinto da superfície plana, pois superfícies diferentes podem possuir a mesma área. Também se distingue do número que está associado a essa superfície quando se escolhe uma superfície unitária para medi-la, pois mudar a superfície unitária altera a medida de área, mas a área permanece a mesma.

[8] Para Douady (1986), um quadro é constituído por objetos da matemática, das relações entre esses objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais que o sujeito associa a um momento dado aos objetos e suas relações.

Por tudo isso, adotamos a mesma hipótese de estudo de Douady e Perrin-Glorian (1989, p.395), segundo a qual *"o desenvolvimento no ensino do conceito de área enquanto grandeza permite aos alunos estabelecer as relações necessárias entre os dois quadros (geométrico e numérico)".*

Quanto à fundamentação matemática, recorremos a Bellemain e Lima (2002, p.121), que apresentam, em consonância com a proposta de modelização de Douady e Perrin-Glorian (1989), uma estrutura matemática referente ao conceito de área de superfícies planas. Uma *superfície* é então um subconjunto limitado do plano euclidiano. Consideramos uma função f, dita *função área*, definida num conjunto *S* de superfícies, com valores em R_+, e que possua três propriedades julgadas apropriadas para caracterizarem a grandeza área:

- Positividade: $f(A)>0, \forall A \in S$
- Aditividade: $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$, se $A \cap B = \phi$
- Invariância por isometrias: Se uma figura plana A é transformada em outra B, de modo que a distância entre dois pontos quaisquer de A fica inalterada em B, então $f(A)= f(B)$

Adotadas as propriedades acima, toma-se, então, um quadrado U, como superfície unitária e f_U a função área tal que $f_U(U) = 1$. Então, estabelece-se, a medida de área da superfície A, na unidade de medida U, representada por $f_U(A)$.

Assim, a função área permite construir no conjunto das superfícies planas, as classes de equivalência das superfícies que têm a mesma área. Daí definirmos que:

- Duas superfícies têm a mesma área se pertencem à mesma classe de equivalência;
- Duas superfícies têm áreas diferentes se não pertencem à mesma classe de equivalência.

Em relação à grandeza comprimento, Bellemain e Lima (2004) propõem um modelo análogo, no qual se consideram como objetos geométricos, curvas - incluindo segmentos de reta e linhas poligonais. Estabelece-se uma função comprimento, que atribui números reais – as medidas – a curvas de um conjunto apropriado. Assim, o conceito de comprimento é definido como uma classe de equivalência de curvas que

‘têm a mesma medida’. Desse modo, o comprimento de uma curva fechada (seja ela poligonal ou não) é o que chamamos de perímetro.
Os PCN propõem que as atividades com áreas devem ser baseadas em procedimentos que favoreçam a compreensão das noções envolvidas. Alguns desses procedimentos contribuem para a construção do conceito de área como grandeza. Por exemplo, obter, pelo processo de decomposição e recomposição, figuras que tenham mesma área que uma figura inicial, para as quais se dispõe de meio de cálculo de área usando uma fórmula conhecida. Esse tipo de procedimento reforça a idéia que figuras distintas podem ter mesma área, favorecendo a distinção entre os quadros geométricos e das grandezas. Por outro lado, procedimentos de medida por contagem, estimativas e aproximações contribuem para a compreensão dos elementos envolvidos nas várias formas de medir área.

Voltando à reflexão sobre as dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos alunos, vamos retomar de maneira articulada três fontes de erros importantes, segundo as pesquisas anteriores à nossa, como mencionado anteriormente: confusão entre área e perímetro, uso de fórmulas errôneas e uso inadequado de unidades.

Segundo os PCN é bastante freqüente, nos trabalhos com grandezas e medidas, os alunos confundirem noções de área e de perímetro ou estabelecerem relações incorretas entre elas. Esse documento enfatiza ainda que, uma das possíveis razões para isso é que raramente os alunos são colocados ante situações-problema em que as duas noções estejam presentes simultaneamente.

Sobre essa confusão entre área e perímetro, Baltar (1996, citada em BELLEMAIN e LIMA, 2002, p.30) classifica a distinção entre área e perímetro sob, pelo menos, quatro pontos de vista distintos:

> • Topológico - segundo o qual os conceitos de área e de perímetro correspondem a objetos geométricos distintos, a área sendo associada à superfície e o perímetro a seu contorno;
> • Computacional - que corresponde à aquisição das fórmulas de área e perímetro de figuras usuais;
> • Variacional – que consiste na aceitação de que área e perímetro não variam necessariamente no mesmo sentido, de que superfícies de mesma área podem ter perímetros distintos e vice-versa.
> • Dimensional – evidenciando que uma superfície e seu contorno são objetos matemáticos de naturezas distintas no que diz respeito às

> dimensões, o que traz conseqüências imediatas sobre o uso das unidades adaptadas à expressão das medidas de área e perímetro.

Quanto à utilização das fórmulas para o cálculo de área, os Parâmetros Curriculares Nacionais alertam que:

> experiência tem mostrado que os alunos que aprendem mecanicamente fórmulas costumam empregá-las de forma também mecânica e acabam obtendo resultados sobre os quais não têm nenhum tipo de crítica e controle, além de as esquecerem rapidamente. (BRASIL, 1998, p. 131)

Focalizando mais especificamente a área do paralelogramo, percebemos nas pesquisas anteriores, referências importantes de dificuldades conceituais de aprendizagem relativas aos elementos mencionados acima, particularmente ao uso de fórmulas articulado com a distinção entre área e perímetro, tais como:

- Baltar (1996, apud BELLEMAIN e LIMA, 2002) apresenta alguns teoremas-em-ação[9] errados, mobilizados pelos alunos quanto à área do paralelogramo, tais como:
  * Dois paralelogramos de mesmos lados têm mesma área;
  * A área de um paralelogramo é o produto das medidas de seus lados;
  * Girar um lado do paralelogramo ao redor de um vértice conserva a área.

- Vinh Bang e Lunzer[10] (1965), Douady e Perrin-Glorian (1989) e Baltar (1996) *"observam que os alunos tendem a considerar o paralelogramo como retângulos deformados, confundindo conseqüentemente as variações de área e perímetro."* (BELLEMAIN e LIMA, 2002).

Diante do exposto, cabe mencionar que as dificuldades na dissociação entre área e perímetro dos paralelogramos existem e que as pesquisas mostram que elas são persistentes e reforçadas por teoremas-em-ação a respeito do conceito de área. Um dos fatores que explica essas lacunas é que existe um foco no aspecto numérico e da fórmula e numa forma mecânica e padronizada de se trabalhar o conceito de área do paralelogramo.

Ao mesmo tempo, a crítica pertinente à maneira como o ensino vem sendo estruturado, não parece suficiente para explicar as dificuldades dos alunos. Há

---

[9] Segundo Vergnaud (1998): um teorema-em-ação é uma proposição que se supõe verdadeira

[10] VINH BANG, LUNZER Conservations spatiales: Etude d'épistemologie génétique. Paris: PUF, 1965.

indícios de uma origem não apenas didática, mas também epistemológica para as lacunas, erros e dificuldades dos alunos relativas a esse conteúdo, uma vez que em contextos educacionais distintos, percebem-se semelhanças nítidas nos seus comportamentos.

No entanto, não encontramos na literatura pesquisada, estudos que analisassem, sob diferentes focos, a questão específica da área do paralelogramo e os erros associados a ele, o que despertou de maneira particular, o nosso interesse por esse tema. Focalizamos na nossa pesquisa os aspectos estático e didático do conceito, deixando os aspectos epistemológico e dinâmico para pesquisas posteriores.

Freqüentemente, o conceito é apresentado ao estudante de forma pronta e acabada, desvinculado de qualquer contexto. É o caso, por exemplo, do professor que ao ensinar a maneira de calcular a área do paralelogramo, apresenta verbalmente a fórmula: “*a área do paralelogramo é a base vezes a altura”.* Desse modo, deixa de valorizar a invariância da área com relação à escolha do lado tomado como base e de apresentar situações nas quais tal fórmula poderia ser aplicada. Neste caso, do aluno é exigido apenas o conhecimento e a aplicação, geralmente mecânica, da fórmula em exercícios artificiais.

Da mesma forma que, quando solicitado para calcular a área do paralelogramo, o aluno aplica simplesmente a fórmula da área, pois apenas são dados no enunciado e/ou na figura as medidas de comprimento de um lado e da altura relativa a esse lado. Para melhor ilustração, observe o exemplo a seguir:

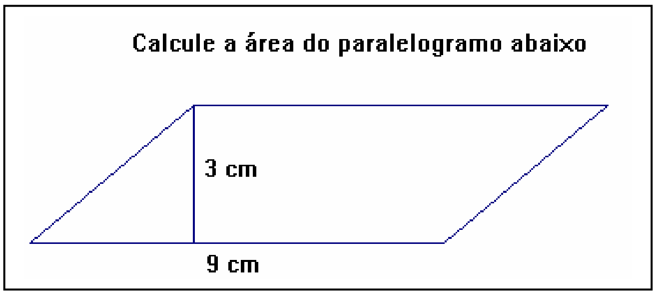


Figura 02: Exemplos de problemas envolvendo área de paralelogramo

Essa forma de apresentação do conceito se insere num processo de ensino-aprendizagem de Matemática, amplamente criticado, no qual as fórmulas e regras são trabalhadas sem compreensão e apenas baseadas no processo de repetição.

Retomando a frase: "a área do paralelogramo é *base* vezes a *altura*", nos questionamos que significado é atribuído aos termos base e altura? Nossa hipótese é a de que existe uma polissemia[11] entre esses termos, tanto na língua materna como na Matemática e que não são explorados suficientemente na escola.

Sabemos que a idéia de base na língua materna tem vários significados, entre eles aquele ligado a chão, piso, alicerce, inclusive na matemática, quando pensamos, por exemplo, na base de um cilindro.

Em relação à idéia de base e altura na Matemática, especificamente no paralelogramo, identificamos pelo menos, dois significados: base no sentido de se referir ao objeto geométrico, quando dizemos, por exemplo, "a base é este lado" ou à grandeza comprimento, ao falarmos "a base mede 3 cm". Desse modo, os conceitos de base e altura permeiam o quadro geométrico e o das grandezas. No entanto, não encontramos em pesquisas anteriores uma abordagem em que esse aspecto fosse enfatizado, discutindo os possíveis reflexos dessas questões na aprendizagem.

Como vimos anteriormente, existem diferentes usos para as palavras base e altura e essa diversidade de sentidos para as palavras poderá interferir na construção, pelo aluno, do conceito de área do paralelogramo.

Do ponto de vista do objeto geométrico, pode-se considerar base como sendo qualquer um dos lados do paralelogramo e a altura um segmento de reta perpendicular, em que uma das extremidades é um vértice e a outra se situa na reta suporte do lado oposto a ele.

[11] De acordo com o Novo Dicionário Aurélio, século XXI, em sua versão eletrônica 3.0 publicada pela Lexikon Informática e Editora Nova Fronteira, diz-se que há polissemia quando um termo é utilizado com várias significações.

Do ponto de vista das grandezas, base é o comprimento do lado escolhido e a altura é a distância entre os dois lados paralelos que são tomados como base.

Para isso, quando o lado tomado por base do paralelogramo é o de maior comprimento é possível traçar alturas interiores ao paralelogramo. Do mesmo modo que, se o lado tomado por base não for o de maior comprimento e dependendo da inclinação da figura, qualquer altura traçada cairá no exterior do paralelogramo. Podemos observar isto, na figura a seguir, em que o paralelogramo ABCD admite altura interior. No entanto, as alturas do paralelogramo ABEF cairão no exterior da figura:

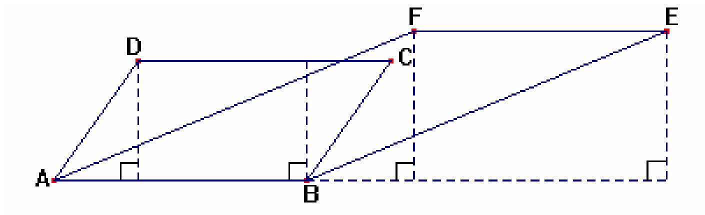


Figura 03: exemplos de paralelogramos com alturas interiores e exteriores

Quanto à fórmula da área do paralelogramo, sabemos que é dada pelo produto do comprimento de um dos lados pelo comprimento da altura relativa a ele.

Sendo assim, considere na figura a seguir, ABCD um paralelogramo, em que a e b são comprimentos dos lados AB e BC respectivamente. Da mesma forma, x e y são os respectivos comprimentos das alturas relativas a BC e AB. Os prolongamentos dos lados AB e BC interceptam respectivamente as alturas y e x nos pontos E e E1, determinando (pelo caso ângulo/ângulo/ângulo) triângulos semelhantes: BCE e ABE1. Sendo assim: $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$. Logo, x.b = a.y

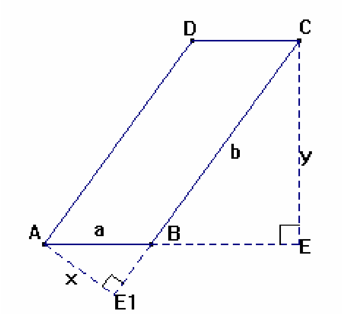


Figura 04: Invariância da área com relação à escolha da base

Portanto, a área de ABCD tanto pode ser dada pelo produto de x por b, como pelo produto de y por a. Podemos então concluir que a área do paralelogramo é invariante com relação à escolha do lado tomado como base.

Por tudo isso, neste estudo, um dos aspectos focalizados é identificar os erros cometidos pelos alunos pesquisados, a respeito de resolução de problemas envolvendo a área do paralelogramo.

Nosso foco não é saber quem errou ou quem acertou, simplesmente, mas sim desvelar o conhecimento do aluno a respeito do nosso objeto de estudo. Então, o erro nessa perspectiva tem um caráter de permitir compreender melhor o que nos propomos a estudar nesta pesquisa. Dessa forma, concordamos com Pinto (2000) em relação ao erro:

> *numa abordagem tradicional, o erro era observado pelo professor como indicador do mau desempenho do aluno, um sintoma visível do seu fracasso, assim como o acerto era o sinal mais evidente de seu sucesso (...). Enquanto que, "uma decorrência do princípio construtivista é o fato de o erro apresentar-se como uma oportunidade didática para o professor organizar melhor seu ensino, a fim de criar situações apropriadas para o aluno superar seus erros e apropriar-se dos conhecimentos necessários à sua atuação efetiva na sociedade.(p. 11)*

Portanto, entendemos que o conhecimento do erro pode ser, do ponto de vista do ensino, um meio para atuar de maneira mais pertinente no sentido de contribuir para a evolução do conhecimento dos alunos.

1.3– As noções de contrato didático e de variável didática.

Partindo da idéia de erro citada acima e com o intuito de compreender melhor o conhecimento dos alunos em relação à área do paralelogramo optamos por adotar a ótica das noções de contrato didático e variável didática.

Por um lado, o contrato didático é um modelo criado pelo pesquisador para investigar os direitos e deveres implícitos dos alunos e do professor, com relação aos objetos do saber matemático ensinado. Por outro, a variável didática é uma ferramenta importante na categorização dos problemas matemáticos a serem propostos aos alunos, na elaboração de problemas adaptados para desestabilizar regras de ação errôneas, na escolha de problemas que contribuam significativamente para a aprendizagem e na análise dos procedimentos de resolução mobilizados pelos alunos, inclusive nos erros cometidos. Ambas as noções estão inseridas na Teoria das Situações Didáticas, proposta por Guy Brousseau e seus seguidores.

Sabemos que no cotidiano da sala de aula há um conjunto de expectativas e regras, freqüentemente implícitas, que determinam papéis desempenhados pelo professor e pelos alunos no processo de ensino e aprendizagem.

Esse conjunto de regras ou comportamentos do professor em relação aos alunos, ou vice-versa, que condiciona o funcionamento da educação escolar, seja no contexto de sala de aula ou numa dimensão mais ampla, relativamente a um conhecimento específico, chama-se *contrato didático.*

O termo *didático* na França, onde surgiu à noção de contrato didático, está relacionado a conteúdos específicos e não à didática geral. No entanto, esta noção é fortemente confundida com a noção de contrato pedagógico.

É comum observarmos, professores listarem regras de disciplina e de convivência, combate à violência e outros elementos que não são específicos de um saber e intitularem de contrato didático. No entanto, estão se referindo, de uma forma geral, a contrato pedagógico, pois segundo Chevallard et al (2001, p.203) é ele *que regula as interações entre alunos e professores, as quais não dependem do conteúdo do estudo,* ou seja, regem os aspectos gerais que afetam o ambiente escolar não específico do saber a ser estudado. Como bem enfatiza Aquino (2000, p.74) o contrato pedagógico *é o delineamento das rotinas de trabalho e de convivência entre os parceiros, bem como suas justificativas nucleares.*

Outra particularidade do contrato didático em relação aos demais contratos é o fato de grande parte de suas regras ser implícita. Contudo, essas regras são muito importantes numa relação didática, sendo fundamental para a aprendizagem.

Segundo Brousseau (1986, p.51), o contrato didático consiste em um:

> conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor.Esse contrato é o conjunto de regras que determinam, uma pequena parte explicitamente, mas sobretudo implicitamente, o que cada parceiro da relação didática deverá gerir e aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro. Este sistema de obrigações recíprocas se assemelha a um contrato. O que nos interessa é o contrato didático, quer dizer a parte do contrato que é específica ao conteúdo: o conhecimento matemático visado.

Nesse sentido, contrato didático é um elemento teórico que se desenvolveu nos estudos franceses da Didática da Matemática, numa tentativa de explicar algumas das causas de fracassos no ensino - aprendizagem e conhecer melhor a relação professor-alunos em relação ao saber.

Então, o contrato didático existe no contexto de uma relação didática, a qual é constituída do conjunto de trocas entre os alunos e o professor relativas ao saber. Trata-se, portanto, de uma relação ternária, na qual nenhum dos três pólos do triângulo pode ser isolado dos outros dois. Observe na figura a seguir, proposta por Joshsua e Dupin (1993, p. 7), que todos os elementos estão em constantes interações e a relação professor-aluno é vista sob a ótica do saber.

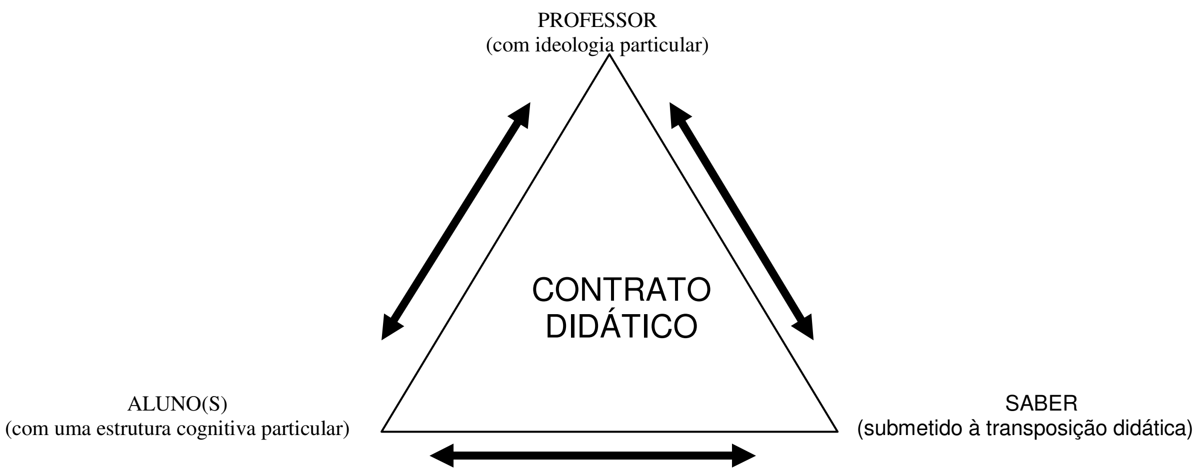


Figura 05- Triangulação da relação professor-aluno vista sob a ótica do saber

Embora acreditemos, baseadas nas teorias pedagógicas, que nas relações entre professor e aluno ambos ensinam e ambos aprendem, na perspectiva da Didática da Matemática focaliza-se o aspecto assimétrico, uma vez que professor e aluno têm posições diferentes em relação ao saber que está em jogo na aprendizagem.

Por outro lado, se a relação do aluno com o saber é de uma forma no início do processo de ensino-aprendizagem, ela deverá ter mudado ao final. Com essa mudança em sua relação com o saber e desenvolvendo a partir daí, novos conhecimentos, o contrato didático torna-se obsoleto. Para Jonnaert e Borght (2002, p.167):

> Se no início da atividade o professor detém as chaves do saber, o aluno, por sua vez, formula muitas questões a propósito desse saber. Contudo, ao final da aprendizagem, o aluno deve ter modificado essa relação com o saber, sem o que ele não terá aprendido. O contrato didático tem como principal função otimizar essas mudanças de relações com o saber. Mais do que isso, são essas relações com o saber que permitem diferenciar o contrato didático de qualquer outro envolvimento no qual a relação com o saber não é um objetivo.

Desta forma, podemos perceber que o contrato didático não é estático, uma vez que o estudante muda gradualmente sua relação com o saber. Jonnaert & Borght (2002, p.177) destacam ainda que a relação didática está inserida no tempo.

Almouloud (1996) evidencia algumas regras de contrato didático, freqüentes no ensino de Matemática, tais como:

- Na matemática, um problema resolve-se a partir de operações;
- Todos os dados necessários à resolução de um problema encontram-se no enunciado, raramente são apresentados dados inúteis;
- Há sempre uma resposta para uma questão matemática e o professor a conhece.

Exemplificando as regras de contrato didático acima, no processo de ensino e aprendizagem, Chevallard (1988, citado em Silva, 1999) analisa o entendimento de 97 alunos, entre 7 e 8 anos, quanto à resolução de um problema cujo enunciado apresenta dados sem uma relação lógica entre si.

Esse problema, conhecido como *A Idade do Capitão,* tem o seguinte enunciado: "Num navio há 26 carneiros e 10 cabras. Qual a idade do capitão?". Dos 97 alunos, 76 calcularam a idade do capitão, realizando operações numéricas com os números que aparecem no enunciado. O autor analisa as respostas dos alunos, deslocando a questão da logicidade para a questão do contrato didático e conclui que a lógica que rege o contrato didático é a de que um problema tem uma e uma só resposta e, para se chegar a ela, todos os dados propostos devem ser utilizados.

Conclui-se que, diante das respostas dos alunos, existem regras vigentes, ainda que implícitas, completamente internalizadas por eles. Regras essas que, quando aplicadas, levam a uma gama de erros dos alunos e a incoerências no estudo desses erros pelos professores.

Nessa primeira abordagem sobre o contrato didático, existem muitos elementos a observar. Relacionaremos abaixo o que Brousseau[12] (1988, apud ARRUDA et al., 2003), considera mais importante nesse jogo das relações entre professor-aluno-saber:

Divisão de responsabilidade - a relação didática não é controlada, exclusivamente pelo professor, pois a responsabilidade do aluno é levada em conta;

Conscientização do implícito - a relação didática funciona muito mais sobre as regras "não faladas", do que aquelas formuladas e explicitadas;

Relação com o saber - existe entre professor e aluno uma relação assimétrica com o saber em jogo.

Construção da comunicação didática - o contrato didático fixa o papel do conhecimento e da aprendizagem e é mediante a ele que se busca o que impede ou favorece o acesso dos alunos ao conhecimento e, ainda, o que bloqueia a entrada destes no processo da aprendizagem.

Uma das formas principais de evidência da existência do contrato didático é quando um dos elementos (professor ou aluno) transgride algumas de suas regras, em função do encaminhamento da prática pedagógica. Nesse momento, existe uma ruptura no contrato que em muitos casos, precisa ser renegociado, conduzindo a aprendizagens. Assim, o contrato didático tem um caráter dinâmico, pois através das transgressões e rupturas surgem novas regras.

A título de exemplo, extraímos os comentários de Almouloud (1996, p. 83) sobre a ruptura de contrato relativa ao ensino de Geometria, no nível equivalente às séries finais do Ensino Fundamental na França.

> O ensino de geometria no primeiro grau (caso da França):
> - Nas quinta e sexta séries: reconhecimento de figuras e de configurações, saber usar os instrumentos de desenho para

[12] BROUSSEAU, G **" Le contrat didactique: Le Milieu."** . RDM, Paris, v. 9, n. 3, p. 309-336, 1988

desenvolver as aptidões gráficas. As figuras são consideradas neste níveis como objetos geométricos concretos nos quais se pode agir diretamente, elas são significados dos termos utilizados para designa-los.

- Nas sétima e oitava séries: os alunos deverão dar outro estatuto para as figuras, aquele de representações de objetos ideais e abstratos. As figuras desenhadas tomam o estatuto de significando.

Como podemos observar, o que antes os alunos podiam fazer na 5ª e 6ª série, ou seja, tomarem medidas sobre a figura e conjecturarem em relação a ela, na 7ª e 8ª não podem mais, isto é, houve uma ruptura do contrato didático, para que eles avançassem em conhecimento. No entanto, muitos alunos têm dificuldade para adaptar-se a essa renegociação do contrato.

Vale ressaltar também que nesses elementos do contrato didático encontra-se também o processo de avaliação, pois geralmente o professor sinaliza o que parece importante do conteúdo e o que ele espera do aluno no instrumento de avaliação, sendo dessa forma um acesso a cláusulas de contrato didático.

Diversas pesquisas tentam explicar a estrutura e o funcionamento do contrato didático em situações de ensino-aprendizagem, como por exemplo:

Medeiros (1999) realizou uma pesquisa com alunos da 5ª série do Ensino Fundamental, com o objetivo de observar como a relação professor-aluno-conhecimento, inserida no sistema didático e observada à luz do contrato didático, podia ser alterada, em uma atividade com problemas abertos, comparando-as com problemas fechados. Os resultados apontam para mudanças no contrato didático durante a atividade com problemas abertos.

Na sua introdução no campo dos conceitos da didática, o contrato didático foi definido em termos de expectativas, direitos e deveres de professor e aluno. No entanto, alguns didatas escolheram não considerarem situações nas quais os alunos e professores bem especificados estivessem efetivamente juntos, ou seja, reduzir o contrato didático ao resultado da devolução. Eles buscaram nos livros didáticos, regras ou indícios de cláusulas de contrato didático.

Assim, a pesquisa realizada na França, por Bessot e Le Thi Hoai (1994), com alunos no nível equivalente ao 3º ciclo do Ensino Fundamental no Brasil, não se refere à realidade da sala de aula. Elas analisam os livros didáticos, identificando regras de contrato didático, e os procedimentos utilizados pelos alunos que usam esses livros, quando os problemas propostos rompem com o contrato didático em vigor, a respeito do conceito da raiz quadrada. Acreditamos ser interessante o estudo acima e nos propusemos a verificar se no caso da área do paralelogramo, o modelo teórico-metodológico dessa pesquisa ajudaria a compreender os erros que os alunos cometem.

Assim, a partir da análise da coleção de livros didáticos buscamos a divisão de responsabilidade entre professor e aluno (ambos hipotéticos e usuários do livro) quanto à resolução de problemas sobre área do paralelogramo. Em particular, verificarmos de quem é a responsabilidade sobre a escolha do lado tomado por base no cálculo de área.

Em seguida, verificarmos quais os procedimentos que os alunos utilizavam quando os problemas propostos em um teste ora estavam em consonância com as regularidades e regras identificadas, ora rompiam com as mesmas.

Outro elemento da Teoria das Situações Didáticas revelou-se útil em nossas análises: a noção de variável didática, que permite caracterizar classes de problemas associados a aspectos particulares, no nosso caso, área do paralelogramo.

Segundo Grenier (1988), as variáveis didáticas são características do problema que têm influência sobre as regras de resolução utilizadas pelo aluno, o que provoca uma mudança no status das respostas.

Vamos exemplificar com um breve estudo de variáveis didáticas potenciais, envolvidas em problemas relativos à medida de área de figuras planas no Ensino Fundamental.

Uma primeira variável potencial é o tipo de figura. Valores possíveis dessa variável são, por exemplo, retângulo, paralelogramo, círculo ou ainda figuras não usuais que podem ser decompostas em figuras para as quais dispomos de métodos para medir a área. Dependendo do tipo de figura, os procedimentos de resolução privilegiados podem ser diversos: cálculo usando uma fórmula, decomposição e adição das áreas de sub-figuras, decomposição e recomposição seguida do cálculo de área usando uma fórmula, entre outros. Os diferentes valores de variável "tipo de figura" conduzem ao favorecimento de distintos modos de resolução, envolvendo conhecimentos diversos.

Suponhamos que seja fixado o valor "retângulo" para a variável "tipo de figura" e que o retângulo seja desenhado junto ao enunciado da figura. Surgem então novas variáveis didáticas a serem consideradas, com seus respectivos valores: o suporte no qual é desenhado o retângulo (papel branco, papel quadriculado, papel pontilhado, etc.), as medidas de comprimento dos lados (inteiras, racionais, irracionais), as características das unidades de medida (as medidas de comprimento dos lados do retângulo são dadas em uma mesma unidade, ou há necessidade de fazer alguma conversão antes de calcular a área?) e assim por diante.

Com efeito, se o retângulo está desenhado na malha quadriculada, os seus lados têm medidas de comprimento inteiras e o quadradinho de malha é tomado como uma superfície unitária, os procedimentos de contagem da quantidade de unidades de área necessárias para ladrilhar o retângulo, ou ainda a multiplicação do número de linhas pelo número de colunas são favorecidos. O mesmo não ocorre se o retângulo for desenhado em papel branco, as medidas de comprimento de seus lados são irracionais e não há homogeneidade quanto às unidades de comprimento. Neste segundo caso, o procedimento privilegiado consiste em realizar as conversões de unidade necessárias e calcular a área, utilizando a fórmula A = b x h.

A identificação de variáveis didáticas é fortemente imbricada com o estudo das dificuldades que os alunos encontram na resolução dos problemas e das respostas corretas ou erradas que fornecem. Da mesma forma, os objetivos de aprendizagem de uma situação problema são intrinsecamente ligados aos valores das variáveis. É, portanto, necessário conhecê-las para otimizar as aprendizagens que estão realmente em jogo.

Então, em um processo de ensino poderemos fazer escolhas de valores de variáveis didáticas, para fortalecer o aparecimento de um determinado tipo de procedimento. Essas variáveis vão permitir organizar uma seqüência de situações para conduzir a aprendizagem visada.

Identificar variáveis didáticas e seus valores ajuda a construir situações didáticas pertinentes. Em cada momento, fixar os valores de certas variáveis contribui para fortalecer a mobilização de certos conhecimentos e desfavorecer a mobilização de outros, em função das aprendizagens visadas.

Então, ao escolher diversos valores para a variável didática, o professor enriquece o processo de ensino-aprendizagem, no sentido de fazer surgir vários conhecimentos relativos a um mesmo conteúdo.

Por outro lado, em um processo de diagnóstico é importante conhecer as variáveis didáticas e escolher valores para essas variáveis. Assim poderemos diferenciar o aluno que está raciocinando certo, sobre determinado conteúdo, daquele que está mobilizando uma concepção errônea, porém produzindo uma resposta correta. Desse modo, os valores dessas variáveis podem permitir a utilização de um conhecimento fora de seu domínio de validade, contribuindo para que o pesquisador compreenda mais profundamente como o aluno está pensando.

Nessa pesquisa, partimos do pressuposto que as concepções dos alunos têm uma validade em algum domínio, a questão é ver se as atividades do teste permitem sair desse domínio e verificar se o conhecimento do aluno é correto ou se é errôneo e está produzindo uma resposta correta,

Assim, a análise dos fenômenos relacionados ao ensino e à aprendizagem de Matemática exige um estudo mais cauteloso da relação professor, aluno e saber. Por isso, acreditamos que as noções de contrato didático e de variável didática conjuntamente podem indicar alguns caminhos para melhor compreender esse jogo de relações em torno do saber, em particular a área do paralelogramo.

Tomando a revisão da literatura relatada, definimos os seguintes objetivos para a pesquisa, expostos a seguir:

1.4- OBJETIVOS

- **GERAL**

Investigar possíveis relações entre a abordagem da área do paralelogramo em uma coleção de livros didáticos para as séries finais do Ensino Fundamental e os procedimentos utilizados pelos alunos de uma 8ª série na resolução de problemas relativos a esse tema.

- **ESPECÍFICOS**

  - Identificar regularidades na coleção de livros didáticos, relativas aos conteúdos área e paralelogramo, sob as óticas das noções de contrato didático e de variável didática;
  - Caracterizar os procedimentos, corretos e errôneos, utilizados pelos alunos na resolução de problemas, envolvendo área de paralelogramo, identificando indícios de concepções geométricas e numéricas, assim como a construção do conceito de área como grandeza.
  - Analisar as relações que podem ser observadas entre as regularidades na coleção de livros didáticos e os procedimentos dos alunos na resolução de problemas, envolvendo área de paralelogramo.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

2- PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Os procedimentos metodológicos desta pesquisa se inspiraram claramente no estudo realizado por Bessot e Le Thi Hoai (1994) a respeito da noção de raiz quadrada. Para tal, apoiamo-nos na hipótese adotada pela referida pesquisa, em que as interrelações entre o texto-aula do livro e os exercícios revelam, em parte, um contrato didático, uma vez que elas especificam o conjunto de ações legitimamente exigidas dos alunos pelo professor, que adota os livros didáticos e reconhecidos como tal pelos alunos, usuários do livro em relação ao conhecimento matemático em foco, no nosso caso, área do paralelogramo.

Desse modo, tivemos na nossa pesquisa dois instrumentos de coleta de dados: a análise documental de uma coleção de livros didáticos e a aplicação de um teste, versando sobre a área do paralelogramo. As escolhas da coleção a ser analisada e dos sujeitos da pesquisa são, portanto, intimamente interligadas.

Nos procedimentos metodológicos realizados por Bessot e Le Thi Hoai (1994), a escolha inicial foi pela coleção de livros didáticos e posteriormente pela turma que faz uso desse livro. No nosso caso, escolhemos a escola em função de sabermos que a mesma desenvolve um trabalho com geometria e grandezas e medidas desde a 5ª série. Assim, nossos sujeitos possuíam um conhecimento relativamente sólido da questão em foco. A partir dessa decisão, propusemo-nos a analisar a coleção de livros didáticos adotada na escola, mas consideramos que essa coleção é uma das melhores no mercado, atualmente.

No decorrer da apreciação do livro didático, na elaboração do teste e na análise dos resultados percebemos a necessidade de introduzir de maneira sistemática e explícita a noção de variável didática.

Essa noção funcionou, implicitamente, desde o início da pesquisa, uma vez que norteou a observação das regularidades, identificação de certas variáveis e de valores privilegiados no livro didático. Assim como, na elaboração e realização das primeiras análises a priori do teste. No entanto, ela foi tomando importância, no sentido de permitir um estudo, sistemático e explícito, que tornou útil do ponto de vista teórico, tanto para a pesquisa como para a construção de seqüências didáticas em pesquisas posteriores.

Embora a noção de variável didática tenha permeado a pesquisa, como dissemos anteriormente, de maneira implícita e assistemática desde o inicio da pesquisa, a sua introdução tardia levou em algumas categorias, à ausência de certos valores, que poderiam ter sido explorados no teste.

Nosso interesse era, portanto, identificar por meio da análise da coleção, regras de contrato didático potenciais e valores de variáveis didáticas privilegiadas na abordagem dos livros didáticos relativas à área do paralelogramo.

Partindo da caracterização acima, formulamos problemas, nos quais houvesse rupturas com as supostas regras de contrato didático estabelecidas e com os valores de variáveis didáticas privilegiadas nos livros da coleção. E finalmente, observamos os procedimentos dos alunos na resolução dos problemas assim constituídos, e em particular, os erros que eles cometem relativos à área do paralelogramo.

2.1 – Sujeitos

A pesquisa foi desenvolvida em uma escola pública da cidade do Recife, que oferece o Ensino Fundamental a partir da 5ª série e o Ensino Médio.

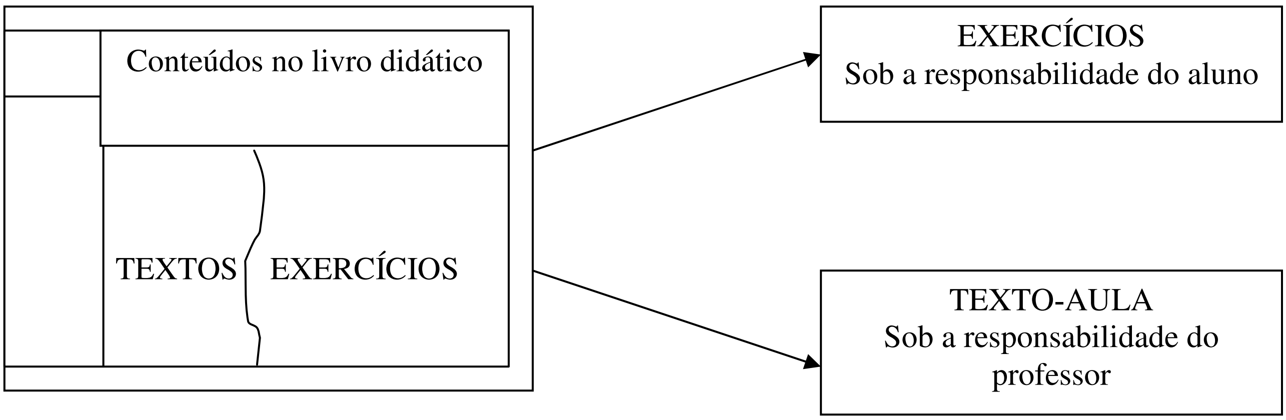
A escolha por essa escola justifica-se porque contrariamente às pesquisas descritas na introdução, os professores abordam conceitos de geometria e grandezas e medidas desde a 5ª série e, desta forma, os alunos teriam conhecimento suficiente para tratar o tema que é o foco da pesquisa. Além disso, por meio de entrevista realizada na escola constatamos que os professores utilizam nas suas aulas o livro didático adotado, embora não se limitem a ele.

Escolhemos uma 8ª série do Ensino Fundamental, composta por 27 alunos, com idades que variavam entre 14 e 17 anos. Também, por meio de entrevista realizada na escola constatamos que esses alunos estudam nessa instituição desde a 5ª série e que são usuários do livro didático a ser analisado, desde esse período. Além desses fatos, a escolha justifica-se, também, pelo fato de os alunos já terem estudado alguns tópicos de geometria e grandezas e medidas em séries anteriores, inclusive área de paralelogramo, o que possibilitaria provavelmente perceber procedimentos de resolução e possíveis regras de contratos didáticos vigentes em relação ao saber em foco.

Nossa hipótese é que o livro didático espelha razoavelmente um contrato didático hipotético entre professor e alunos em relação ao saber em foco. Então, é a partir da análise do livro didático que investigaremos o que está sob a responsabilidade do professor e do aluno, ambos hipotéticos, usuários da coleção adotada na escola. Verificando assim, as possíveis regras que regem a relação livro-aluno.

2.2 – A coleção analisada

A análise do livro didático permite ter acesso aos aspectos oficiais do objeto de ensino, no caso a área do paralelogramo, pois existem indicadores lingüísticos que dividem o texto do saber ensinado em: “texto-aula” sob a responsabilidade de um professor hipotético utilizador do livro e “exercício” sob a responsabilidade do aluno. Como podemos perceber no esquema a seguir:



Esquema 01: relativo à repartição de responsabilidade entre professor e aluno no livro didático.

Mesmo sem a presença física do professor, podemos identificar o que é hipoteticamente da responsabilidade dele, quando adota o livro didático, e o que é da responsabilidade do aluno que utiliza esse livro.

A coleção adotada na escola é **MATEMÁTICA,** cujos autores são Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, na sua 1ª edição em 2000. A referida coleção é uma das mais antenadas com a produção científica em Educação Matemática, hoje no mercado. No guia do Programa Nacional do Livro Didático de 1999 foi recomendada com distinção.

Optamos por analisar a coleção e não o livro específico da 8ª série, no qual o nosso objeto de estudo está inserido, pelo fato dos PCN abordarem o conceito de área desde a 5ª série e dos resultados preliminares da análise do livro didático apontarem para uma abordagem de conteúdos em forma espiral, de modo que os temas são apresentados para os alunos durante todo o Ensino Fundamental.

Para a análise dos livros da coleção foram tomados três focos: a figura do paralelogramo, a abordagem do conceito de área e a área do paralelogramo. Para tanto, os seguintes critérios de análise foram adotados:

- Freqüência e conexão com outros conteúdos: observamos a freqüência em que a figura do paralelogramo aparece nos livros da coleção e os conteúdos com os quais se conecta;

- Identificação de regularidades nas figuras do paralelogramo nos quatro volumes da coleção;

- Caracterização da abordagem do conceito de área ao longo da coleção;

- Caracterização da relação existente entre texto-aula e exercícios nos capítulos referentes à área do paralelogramo, a fim de identificarmos indícios de regularidades e regras de contrato didático, entre o professor e o aluno, ambos hipotéticos e usuários da coleção.

- Identificação das escolhas de valores de algumas variáveis didáticas relativas aos conteúdos de área e paralelogramo privilegiados na coleção.

Dividimos nossa análise em dois grandes blocos: o primeiro, que trata da figura do paralelogramo e o segundo, relativo aos problemas que envolvem a área dessa figura.

2.3 – Explicitação das variáveis didáticas focadas

2.3.1- A figura do paralelogramo[14]

Para a análise dos resultados dessa categoria adotamos três eixos importantes para o nosso objeto de estudo: a posição relativa dos lados do paralelogramo, a inclinação da figura e a orientação do lado de maior comprimento.

- Posição relativa dos lados do paralelogramo

Neste critério, analisamos se as figuras estavam desenhadas de forma que um dos lados estivesse na horizontal, vertical ou ambas na posição oblíqua, com o objetivo de verificarmos se o fato delas estarem em determinada posição influencia na idéia de base pelo aluno. Com efeito, se a figura está sempre na mesma posição, a tendência do aluno vai ser de reforçar uma idéia de base tipo “padrão” ou não vai construir um conhecimento importante que é a invariância da área em relação à escolha do lado tomado por base. Para maiores esclarecimentos, observe as figuras a seguir:

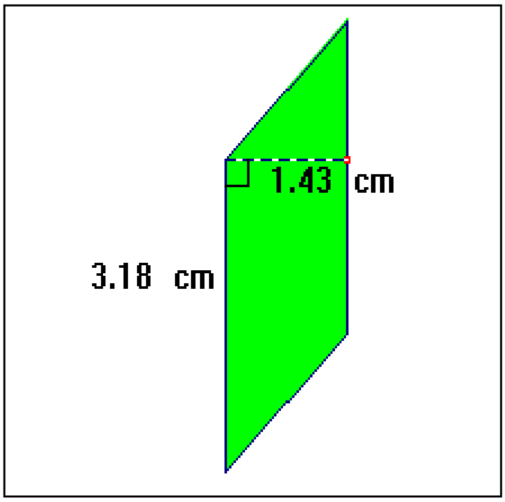


Figura 06a: um dos lados na posição vertical

[14] Consideramos os paralelogramos não-retângulos para essa análise.

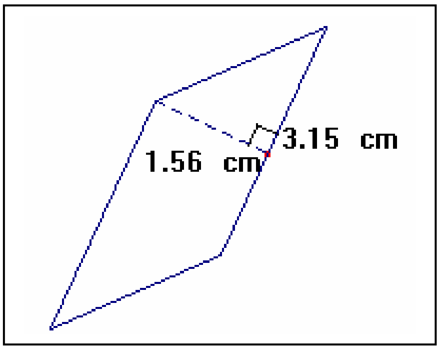


Figura 06b : ambos os lados na posição obliqua

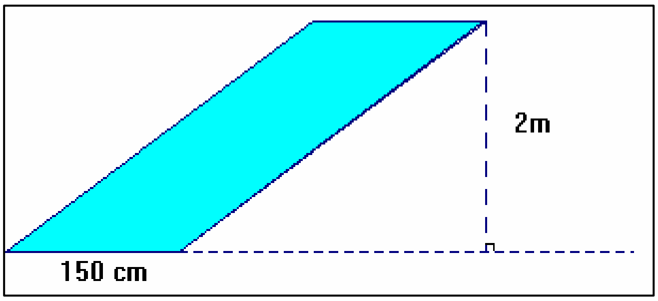


Figura 06c: um dos lados na posição horizontal

- Orientação do lado de maior comprimento[15]

Tomando como referência o paralelogramo que possui um dos lados na posição horizontal, verificamos também se ele era ou não o de maior comprimento, pois dependendo do tratamento dado à figura poderá induzir no aluno uma idéia de base, como sendo, por exemplo, o lado horizontal e de maior comprimento. Observe as figuras a seguir:

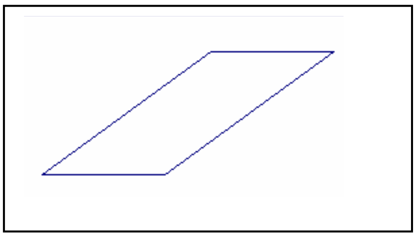


Figura 07a: Posição horizontal de menor comprimento

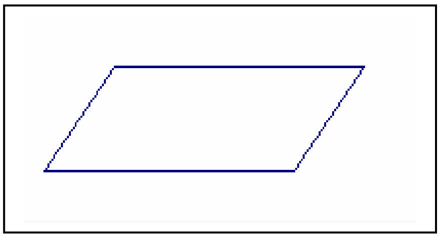
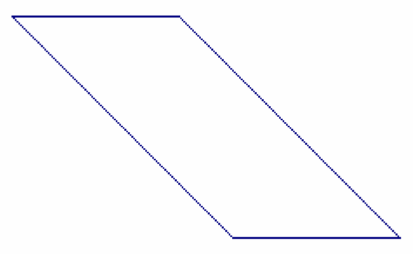


Figura 07b: Posição horizontal de maior comprimento

- Inclinação da figura

No mesmo sentido, observamos se os paralelogramos que possuíam um dos lados na posição horizontal estavam inclinados para a direita ou para a esquerda, pois se a figura do paralelogramo estiver sempre para uma determinada inclinação, o aluno poderá não reconhecê-la em outra. A seguir estão as possibilidades de inclinação da figura:

[15] Além dos paralelogramos não retângulos, também não consideramos para essa análise os losangos.



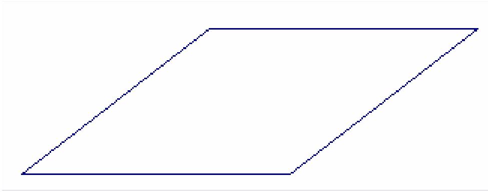


Figura 08b: inclinação do paralelogramo para a direita

Figura 08a: inclinação do paralelogramo para a esquerda

2.3.2- Problemas envolvendo área do paralelogramo

Quanto aos problemas que envolvem área do paralelogramo, dividimos nossa análise em: existência de figuras, natureza das soluções, dados fornecidos, posição do lado tomado como base, comprimento do lado tomado como base e posição da altura tomada.

- Existência de figura

Verificamos se nas questões, apresentadas nos livros dessa coleção, havia a presença ou ausência de figuras, com o intuito de verificarmos se a existência ou não de figura influencia na resolução do problema pelo aluno. Abaixo seguem exemplos de duas questões, em que na primeira há a presença da figura do paralelogramo e na segunda não:

1- Calcule a área do paralelogramo abaixo:

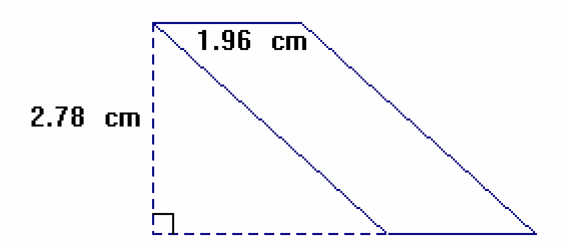


Figura 09: exemplo de atividade com a presença de figura

2- Seja um paralelogramo ABCD tal que o lado AB mede 6 dm e o lado BC mede 4 dm. Sabendo que a altura relativa ao lado AB mede 3 dm, é possível determinar o comprimento da altura relativa ao lado BC? Justifique sua resposta.

- Natureza das soluções

Observamos, também, se os problemas apresentados exigiam um procedimento numérico e/ou algébrico, como por exemplo, nas atividades 1 e 2, descritas no item anterior, ou não exigiam este tipo de procedimento, como na atividade a seguir:

1- Qual das figuras abaixo possui a maior área? Justifique a sua resposta

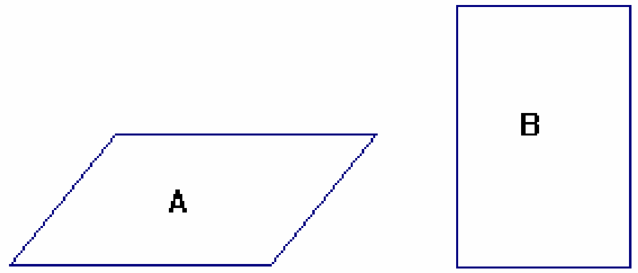


Figura 10: exemplo de atividade que não exige um procedimento numérico e/ou algébrico

- Dados fornecidos

Sabemos que uma das regras de contrato didático, em vigor no ensino, relativa à resolução de problema indica que a imensa maioria das questões trabalhadas em sala de aula fornece, apenas, os dados necessários e suficientes para resolver o problema. Tal prática leva a uma compreensão, por parte do aluno, que não lhe cabe selecionar os dados para resolver a questão, como é o caso, de forma mais geral, da idade do capitão, relatado na nossa fundamentação teórica.

Em relação à área do paralelogramo, a literatura mostra também que um dos erros freqüentes é aquele no qual o aluno realiza o produto dos comprimentos dos lados. E dessa forma, se no problema só são fornecidos os dados necessários e suficientes, o aluno não terá oportunidade de cometer o erro, para que ele seja invalidado.

Por tudo isso, observamos os dados fornecidos para a resolução dos problemas nos livros dessa coleção. A seguir apresentamos três atividades, a primeira com dados necessários e suficientes, a segunda de forma que o aluno precisa decidir que dados tomar para resolver a questão e a terceira não são fornecidos todos os dados imediatos.

1- Calcule a área do paralelogramo abaixo:

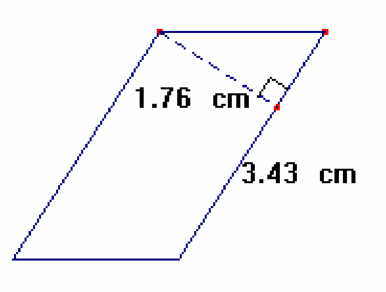


Figura 11: exemplo de atividade apresentando apenas os dados necessários para a sua resolução

2- Calcule a área do paralelogramo abaixo:

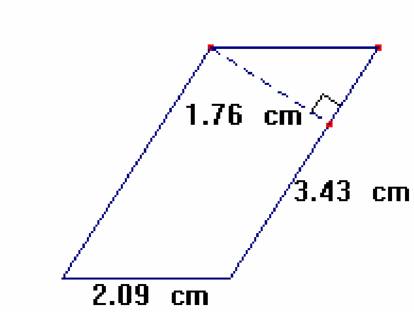


Figura 12: exemplo de atividade onde existem dados desnecessários para a resolução

3- Calcule a área do paralelogramo abaixo:

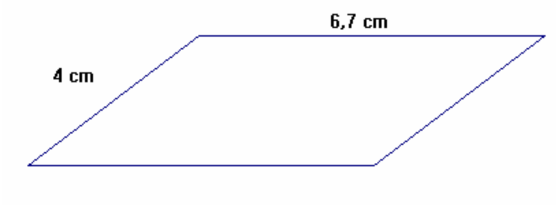


Figura 13: exemplo de atividade onde não são fornecidos os dados imediatos.

- Posição do lado tomado como base

Neste critério, tínhamos por objetivo verificar qual era a idéia de base que os livros dessa coleção abordavam. Para isso, observamos se nos problemas que envolviam área do paralelogramo, o lado tomado por base encontrava-se na posição horizontal, vertical ou oblíqua. Observe, a seguir, exemplos de atividades onde os lados tomados por base estão em diversas posições.

1- Calcule a área dos paralelogramos abaixo:

a)

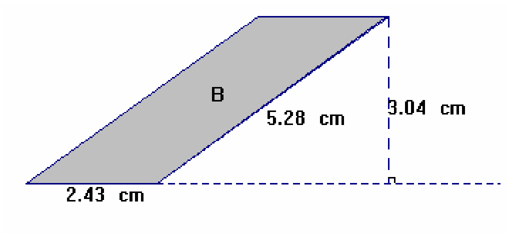


Figura 14a: O lado tomado por base está na posição horizontal

b)

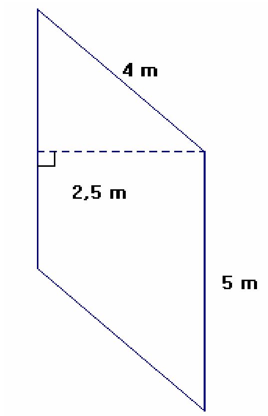


Figura 14b: O lado tomado por base está na posição vertical

c)

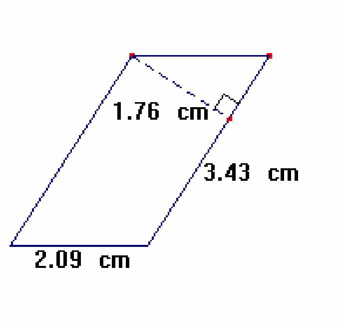


Figura 14c: O lado tomado por base está na posição oblíqua.

- Comprimento do lado tomado como base

Com o objetivo também de analisarmos a idéia de base que os livros dessa coleção abordavam, observamos se o lado tomado por base era o de maior comprimento, como podemos perceber nas figuras 14b e 14c acima ou o de menor comprimento, como na figura 14 a.

- Posição da altura traçada

E por último, tínhamos o intuito de verificarmos qual a idéia de altura que era abordada nos livros dessa coleção. Para tanto, observamos se as alturas tomadas eram exteriores ou interiores à figura do paralelogramo. Observe, a seguir, um exemplo de atividade, no qual a altura tomada está no interior do paralelogramo (item a) e no item b no exterior.

1- Calcule as áreas dos paralelogramos abaixo:

a)

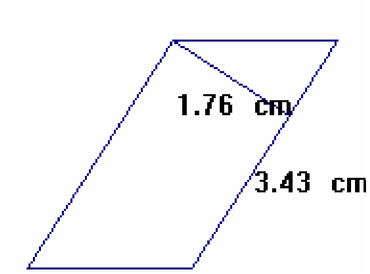


Figura 15a: exemplo de atividade, onde a altura tomada é interior ao paralelogramo.

b)

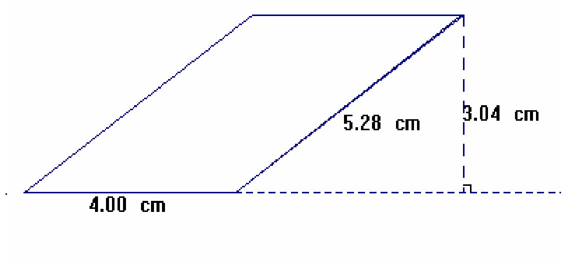


Figura 15b: exemplo de atividade, onde a altura tomada é exterior ao paralelogramo.

2.4- O teste

Aplicamos o teste a seguir, composto por 6 atividades, no entanto só analisamos cinco. Descartamos a Atividade 2, segundo sugestão da banca de qualificação do projeto, pois percebemos que a questão poderia gerar dúvidas por parte dos alunos, no que se refere à análise da perspectiva da figura, visto que a reprodução da questão não ficou de boa qualidade.

Atividade 1

Observe os paralelogramos abaixo:

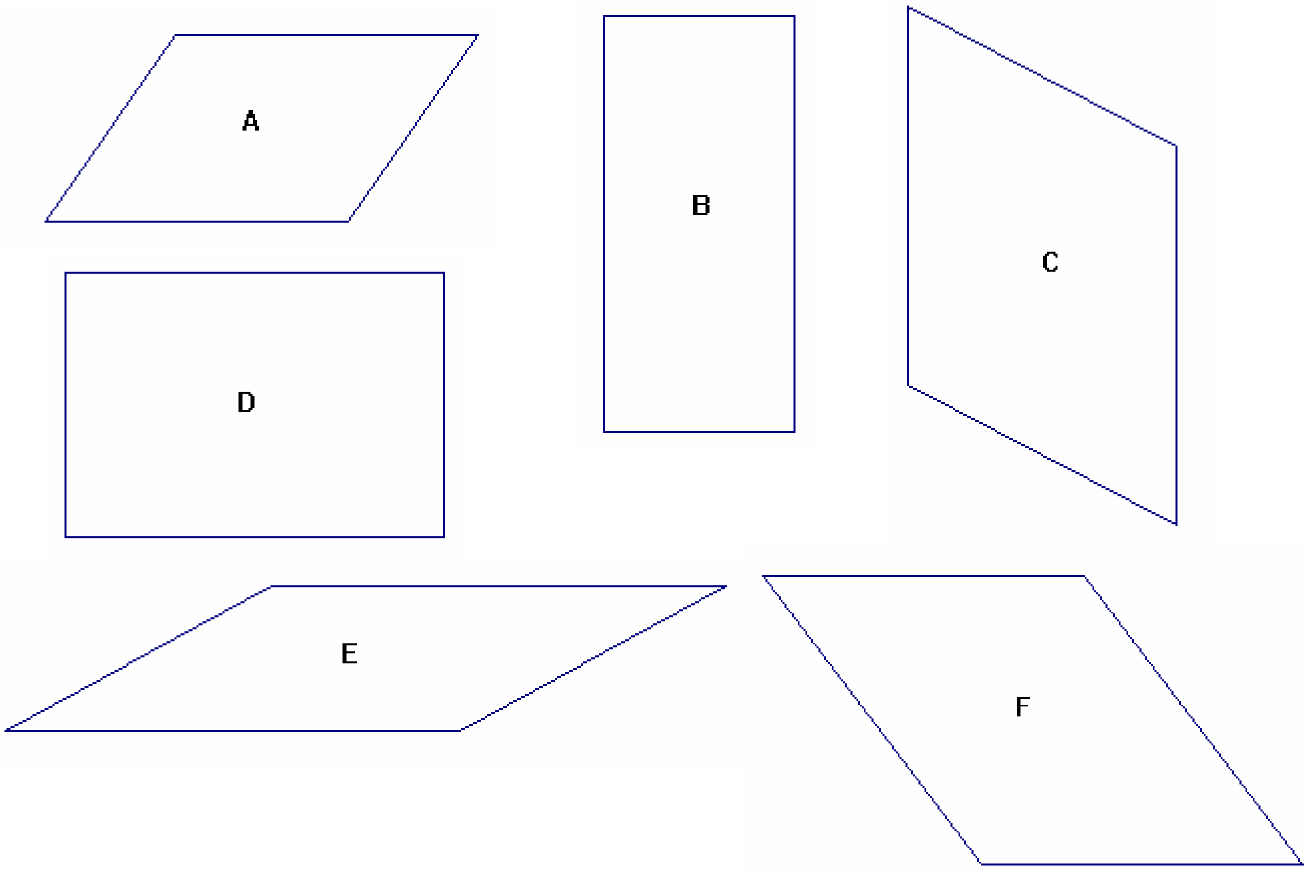


Figura 16: apresentação da atividade 1

a) Qual das figuras acima tem a menor área?____________________________

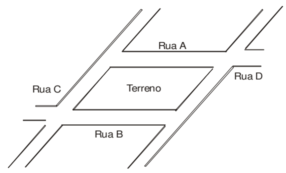
b) Quais das figuras acima têm a maior área? ___________________________

Justifique sua resposta

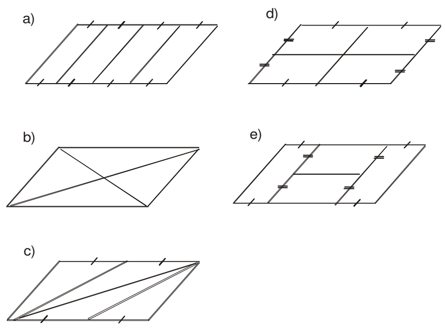
c) Entre elas há figuras que têm a mesma área? Justifique sua resposta.

Atividade 2 (Descartada, como relatada anteriormente)

Um terreno com o formato mostrado na figura foi herdado por quatro irmãos e deverá ser dividido em quatro lotes de mesma área.
Um dos irmãos fez algumas propostas de divisão para que fossem analisadas pelos demais herdeiros.
Nos esquemas abaixo, lados de mesmo comprimento têm símbolos iguais. Assinale as alternativas em que os quatro lotes possuem necessariamente mesma área.



As ruas A e B são paralelas
As ruas C e D são paralelas



JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA

Figura 17: apresentação da atividade 2

Atividade 3

Observe o paralelogramo abaixo:

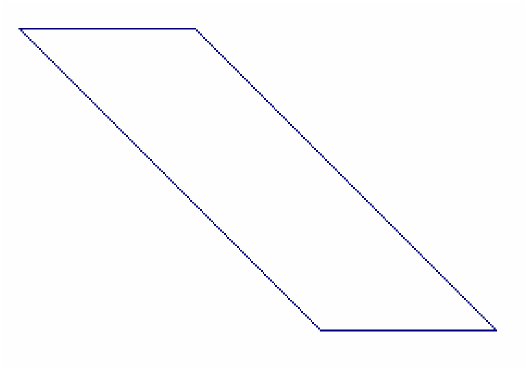


Figura 18: apresentação da atividade 3

a) Com uma régua, meça os comprimentos necessários para calcular a área do paralelogramo e registre os dados coletados na figura.
b) Qual a área aproximada do paralelogramo? Justifique sua resposta

Atividade 4

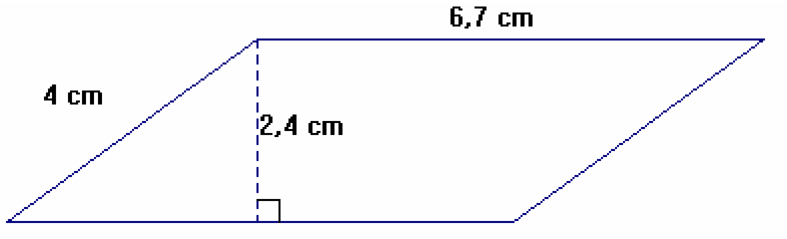


Figura 19: apresentação da atividade 4

a) Desenhe um retângulo, cuja área seja a mesma do paralelogramo acima. Justifique sua resposta.

c) Desenhe um retângulo, cujo perímetro seja o mesmo do paralelogramo acima. Justifique sua resposta

Atividade 5

Calcule a área dos paralelogramos abaixo:

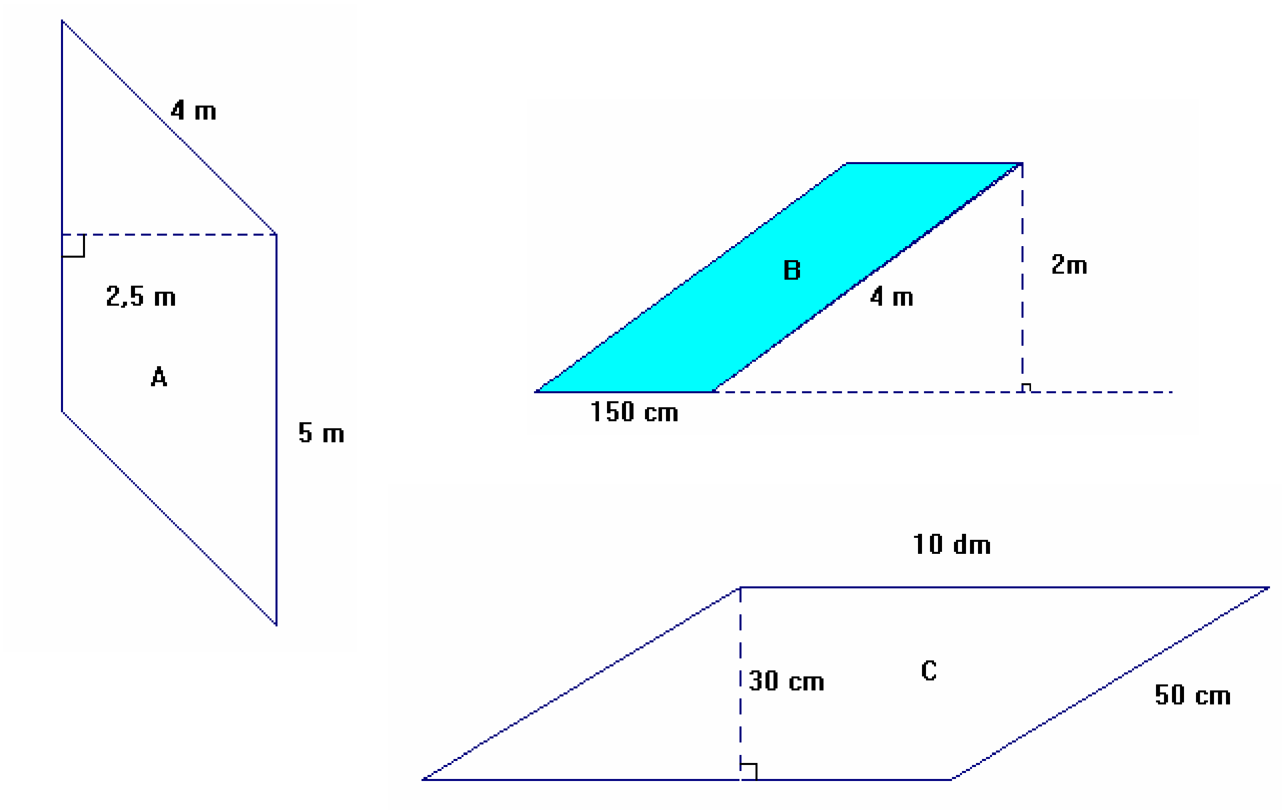


Figura 20: apresentação da atividade 5

Atividade 6

Seja um paralelogramo ABCD tal que o lado AB mede 6 dm e o lado BC mede 4 dm. Sabendo que a altura relativa ao lado AB mede 3 dm, é possível determinar o comprimento da altura relativa ao lado BC? Justifique sua resposta.

- **Condições de aplicação e caracterização do teste**

A duração de aplicação do teste foi planejada para 100 minutos. Fornecemos ao aluno um kit com os seguintes materiais: lápis grafite com borracha, tesoura, papel seda, papel quadriculado, cordão e régua. Disponibilizamos estes materiais no intuito de ampliar as possibilidades de procedimentos, sejam eles certos ou errados, na resolução dos problemas.

Para cada atividade do teste fizemos uma análise a priori, abordando os seguintes aspectos: justificativa das principais escolhas na elaboração da atividade: variáveis didáticas e seus valores e os procedimentos de resoluções esperados.

Embora, nesse momento da pesquisa, não tivéssemos usando de maneira explícita e sistemática a noção de variável didática, na medida que estávamos realizando a análise a priori, usamos implicitamente e intuitivamente essa noção. A análise de resultados está dividida em dois blocos: análise quantitativa e qualitativa.

Adotamos um código formado por dois signos: a letra maiúscula **A,** indicando aluno; associada a um número natural, para indicar a ordem do aluno, com o intuito de identificarmos cada protocolo. Assim teremos protocolos **A**01, **A**21 etc.

Na elaboração das atividades do teste foram feitas escolhas de valores de variáveis didáticas, citadas anteriormente a respeito da análise do livro didático: posição relativa dos lados do paralelogramo, inclinação da figura, orientação do lado de maior comprimento, existência da figura, natureza das soluções, dados fornecidos, posição do lado tomado por base, comprimento do lado tomado como base e posição da altura traçada.

Assim, elas foram dispostas em relação às atividades da seguinte maneira: nos quadros 1, 2 e 3 abaixo, estão as disposição das questões em relação à figura do paralelogramo e nos quadros 4, 5, 6, 7, 8 e 9 estão aquelas relativas aos problemas que envolvem área.

Como podemos perceber, no quadro abaixo estão as disposições das atividades do teste em relação à posição dos lados do paralelogramo. No entanto não formulamos nenhuma questão, onde a posição dos lados da figura fosse oblíqua. Esse fato justifica-se porque nosso marco teórico, como dito anteriormente, era apenas a noção de contrato didático e que variável didática foi introduzida tardiamente no trabalho como instrumento explícito e sistemático para responder as nossas indagações.

Posição dos lados do paralelogramo	Posição horizontal	Posição vertical	Posição obliqua
Atividade 1	X	X	
Atividade 3	X		
Atividade 4	X		
Atividade 5	X	X	
Atividade 6			

Quadro 01: disposição das atividades em relação à posição dos lados do paralelogramo

Quanto à inclinação do paralelogramo, elaboramos duas questões, como podemos perceber no quadro abaixo, em que a inclinação da figura está voltada para a esquerda. A atividade 6 não tem figura e por isso ela não é assinalada.

Inclinação do paralelogramo	Inclinação para direita	Inclinação para esquerda
Atividade 1	X	X
Atividade 3		X
Atividade 4	X	
Atividade 5	X	
Atividade 6		

Quadro 02: disposição das atividades em relação à inclinação do paralelogramo

Em relação à orientação do lado de maior comprimento, formulamos problemas nos quais os dois valores da variável didática aparecem. A atividade 6 não tem figura e por isso não é assinalada. Observe no quadro a seguir:

Orientação do lado de maior comprimento	Posição horizontal de menor comprimento	Posição horizontal de maior comprimento
Atividade 1	X	X
Atividade 3	X	
Atividade 4		X
Atividade 5	X	X
Atividade 6		

Quadro 03: disposição das atividades em relação à orientação do lado de maior comprimento

Em relação à existência de figura nos problemas que envolvem área do paralelogramo, elaboramos a atividade 6, em que há ausência de figuras. Observe o quadro a seguir:

Existência da figura	Ausência	Presença
Atividade 1		X
Atividade 3		X
Atividade 4		X
Atividade 5		X
Atividade 6	X	

Quadro 04: disposição das atividades em relação à existência da figura

Quanto à natureza das soluções, formulamos dois problemas que não exigiam procedimentos numéricos, ou seja, poderiam ser resolvidos sem a necessidade de utilizar o aspecto algébrico ou numérico. Nessas questões, iremos observar que tipo de procedimento o aluno mobiliza para resolver a questão. A seguir podemos perceber quais das atividades foram formuladas numericamente e quais não foram.

Natureza das Soluções	Há exigência de solução Numérica	Não há exigência de solução numérica
Atividade 1		X
Atividade 3	X	
Atividade 4		X
Atividade 5	X	
Atividade 6	X	

Quadro 05: disposição das atividades em relação à natureza das soluções

Em relação aos dados que são apresentados nos problemas sobre área do paralelogramo, podemos observar no quadro abaixo, que apenas uma de nossas atividades apresenta dados desnecessários para resolver a questão, em duas questões os dados são necessários e suficientes e, nas outras duas, não são apresentados todos os dados necessários para a resolução de problemas.

Dados dos problemas	Apresenta exclusivamente os dados necessários e suficientes	Apresenta dados desnecessários	Não são apresentados todos os dados necessários
Atividade 1			X
Atividade 3			X
Atividade 4	X		
Atividade 5		X	
Atividade 6	X		

Quadro 06: disposição das atividades em relação aos dados dos problemas

Quanto à posição do lado tomado como base, nas questões 4 e 5 determinamos um dos lados do paralelogramo como base, enquanto que nas demais questões, os alunos tiveram a oportunidade de escolher. A atividade 6 não tem figura. Mesmo assim, observamos o tratamento dado à idéia de base na resolução da questão pelo aluno. Para maiores esclarecimentos, observe o quadro a seguir:

Posição do lado tomado como base	Horizontal	Vertical	Oblíqua
Atividade 1			
Atividade 3			
Atividade 4	X		
Atividade 5	X	X	
Atividade 6			

Quadro 07: disposição das atividades em relação à posição do lado tomado como base

Em relação ao comprimento do lado tomado como base, nas atividades 4 e 5 determinamos esse comprimento. No entanto, nas demais questões, essa decisão era do aluno. A atividade 6 não tem figura, mesmo assim observamos o tratamento dado à idéia de base na resolução da questão. Observe o quadro a seguir:

Comprimento do lado tomado como base	Lado de maior comprimento	Lado de menor comprimento
Atividade 1		
Atividade 3		
Atividade 4	X	
Atividade 5	X	X
Atividade 6		

Quadro 08: disposição das atividades em relação ao comprimento do lado tomado como base

Quanto à posição da altura traçada, nas atividades 4 e 5, determinamos tanto alturas internas quanto externas. No entanto, nas demais questões, o aluno poderia traçá-las de acordo com as suas necessidades, inclusive na atividade 6, em que não há presença de figura, mas que ele precisava solucionar o problema. Para maiores esclarecimentos, observe o quadro a seguir:

Posição da altura traçada	Altura tomada no interior do paralelogramo	Altura tomada no exterior do paralelogramo
Atividade 1		
Atividade 3		
Atividade 4	X	
Atividade 5	X	X
Atividade 6		

Quadro 09: disposição das atividades em relação à posição da altura traçada

Além desses critérios que guiaram a elaboração do teste, durante a análise dos resultados observamos, também, outros elementos que se articulam com a nossa fundamentação teórica.

Com esse intuito, selecionamos dois blocos de categorização: o primeiro de razão quantitativa, que expressa o resultado de acertos e erros das questões e o segundo qualitativa, que trata de aspectos a serem observados nos procedimentos de resolução dos alunos.

Quanto aos procedimentos de resolução dos alunos, elaboramos algumas categorias que nortearam a análise:

- Utilização de procedimentos numéricos, algébricos e/ou geométricos.

A partir do que está exposto na nossa revisão de literatura, percebemos que os alunos podem resolver os problemas utilizando um tipo de procedimento ou combinações de procedimentos. O que ocorre geralmente é a utilização de fórmulas sem o suporte do aspecto geométrico e numérico, conduzindo a erro. Então, o que vamos observar é que tipo de procedimento o aluno utiliza diante de situações-problema, em que não se exige um determinado tipo de procedimento.

Dessa forma, mesmo sabendo que esses aspectos estão interligados, consideramos um procedimento numérico aquele em que, mesmo sem a exigência do procedimento, o aluno utiliza uma situação de medida implícita, contar o número de quadradinhos necessários para cobrir a superfície, ou o número obtido usando uma fórmula. Desta forma, o aluno mede as áreas para comparar as medidas obtidas e deduz a ordem das áreas da ordem dos números.

Quanto aos procedimentos geométricos, consideramos aquele em que o aluno utiliza processos de corte-colagem, composição ou decomposição de figuras, sejam eles através de desenhos ou na justificativa da questão, para a comparação ou cálculo de área das figuras.

Em relação aos procedimentos algébricos, consideramos o uso de qualquer tipo de fórmulas para o cálculo de área, sejam eles através da escrita ou na justificativa da questão.

- Indícios de concepções numéricas e geométricas

Nesta categoria observamos se os alunos utilizavam o material disponível para resolver os problemas sobre área do paralelogramo, pois dependendo do tipo de material utilizado, seja ele papel transparente, quadriculado, régua e/ou corte-colagem podem ser observados indícios de mobilização, de concepções numérica, geométrica ou de área enquanto grandeza.

- Idéia de base e altura

A partir de uma análise realizada nos livros didáticos da coleção, tentamos identificar se o conhecimento, a respeito da invariância da área com relação à escolha da base, estava construído nos alunos pesquisados. Por outro lado, se para o aluno a base é um lado específico, que idéia de base e altura era mobilizada na resolução dos problemas de área do paralelogramo.

A idéia então, era verificar se ao calcular a área os alunos tomavam por base o lado que se encontrava na posição horizontal, vertical ou oblíqua, ou se o lado tomado por base era o de maior ou de menor comprimento.

Dessa forma, poderíamos encontrar situações em que o lado tomado por base era o de maior comprimento e posicionado na horizontal e, desse modo, não conseguiríamos identificar que idéia de base estava sendo mobilizada pelo aluno. Sendo assim, propomos atividade na qual essa condição não é respeitada, ajudando-nos a perceber que idéia o aluno escolhe.

Sabemos que as idéias de base e altura, nos problemas que envolvem a área do paralelogramo, estão interligadas, pois consideramos base o lado perpendicular à altura. Sendo assim, observamos se a altura escolhida pelos alunos, seja para as questões de comparação ou para as de cálculo de área, era interna ou externa ao paralelogramo. Consideramos altura interna aquela cujo segmento de reta é perpendicular ao lado oposto a ele, passando no interior do paralelogramo e, externa, quando passa no exterior do paralelogramo. Nosso objetivo era verificar se o fato de tomar uma determinada altura influencia na resolução de problemas pelos alunos.

- Representações simbólicas

Nesta categoria, estão a representação gráfica e a inclinação da figura diante de questões, em que são exigidos o desenho (atividade 4) ou naquelas em que não é exigido, mas o aluno poderá fazê-lo (atividade 6).

Observamos se diante da atividade 4 os alunos criavam retângulos com a mesma dimensão dada ou não. Consideramos desenhos a representação gráfica de um objeto geométrico. Do mesmo modo, verificaremos se os alunos esboçarem o paralelogramo na atividade 6, se a inclinação é voltada para a direita ou para a esquerda.

- Uso de unidades de medida

Verificamos se após resolver as questões, aquelas cujas respostas exigem, os alunos usavam uma unidade de medida e se esta era adequada. Consideramos as unidades de medidas escritas ou através de símbolos. Da mesma forma que verificamos se os alunos, diante da questão 5 realizam ou não as conversões de unidades de medida necessárias para o cálculo de área.

ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

3- ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo, são analisados os dados relativos à coleção de livros didáticos utilizada pelos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental, tomando como referência a fundamentação teórica e os objetivos já expostos.

Essa coleção organiza seus conteúdos de maneira espiral. Uma das preocupações explícitas no manual pedagógico é a de não esgotar um determinado conteúdo numa série, respeitando a integração dos temas a serem estudados e estabelecendo o uso de uma abordagem voltada para a solução de problemas ao ensinar conceitos novos. Dessa forma, permite que o aluno veja o mesmo tópico com enfoques diferentes e novo aprofundamento.

Os livros dessa coleção organizam-se em capítulos, os quais são subdivididos em itens temáticos. Em cada item temático encontramos sistematicamente uma sessão de leitura, que aqui chamaremos de *texto*-aula, uma sessão intitulada *conversando sobre o texto,* outra de *exercícios* a serem realizados em sala de aula e outra de *exercícios para casa*. Observam-se, ainda, algumas sessões intituladas *ação* propondo atividades práticas.

Segundo o manual pedagógico *"cada item pode ser trabalhado em sala de aula seguindo um roteiro-padrão: 1- Leitura; 2- Conversando sobre o texto; 3- Ação (o professor promove a ação quando houver); 4- Exercícios; 5- Exercícios para casa"* (p.10). Porém, os autores explicitam que essa ordem não é rígida, admitindo que diversas modificações podem ser feitas no roteiro-padrão.

Podemos encontrar ao final de cada livro seções intituladas *supertestes e dicionário ilustrado*. Particularmente, na 8ª série encontra-se também o *vestibulinho*. Ao longo do texto, de vez em quando, os autores remetem os alunos ao *dicionário ilustrado*, que tem por objetivo, segundo o manual pedagógico, *"explicar os conceitos num nível adequado ao jovem aluno"* (p. 12)

Nos blocos de folhas especiais, que se localizam no final de cada livro, encontramos materiais que podem ser utilizados nas atividades propostas no livro do aluno, tais como: malha quadriculada, triangular, tabuleiro de jogos, jogos, etc.

No livro do professor, encontramos ainda o manual pedagógico, no qual se discutem os pressupostos que nortearam a elaboração da obra, os conteúdos a serem desenvolvidos, a avaliação. Sugerem-se ainda atividades a serem desenvolvidas com os alunos e a utilização de recursos didáticos. O manual pedagógico esclarece a proposta pedagógica, visando a colaborar com o professor na implementação e enriquecimento dela.

Quanto à postura do professor, o manual do pedagógico comenta que *"o principal recurso do professor é o constante diálogo sobre o conhecimento matemático com sua turma*" e ressalta que é por meio do diálogo, que *"o professor poderá encontrar novas abordagens dos conteúdos, reorientar sua programação e encontrar maneiras adequadas de ajudar cada aluno".* (p. 13)

Em relação à aprendizagem o manual pedagógico afirma que:

> Hoje sabemos que a aprendizagem não ocorre apenas quando se apresenta um conteúdo de forma organizada, nem mesmo quando os alunos repetem os modelos estudados. Ela somente se completa pela reflexão do aluno em face das várias situações que envolvem uma mesma idéia. (p.03)

- Seções dos itens temáticos sob a ótica do contrato didático

A parte relativa ao *texto-aula* não se limita a textos informativos. Abordam-se questionamentos para o aluno, informações, exemplos, apresentam-se ilustrações, histórias em quadrinhos, situações da vida cotidiana. Interpretamos como tendo o papel de problematizar as noções que estão sendo trabalhadas. Segundo o manual pedagógico esse texto-aula pode ser lido individualmente, em grupo ou junto com o professor.

Conversando sobre o texto é o momento que permite refletir sobre a leitura realizada anteriormente e discutir o tema que está sendo abordado.

Segundo o manual pedagógico:

> "Trata-se de um grupo de questões que surgem após o texto, que devem ser formuladas e respondidas oralmente. O conversando é uma inovação importante: incentiva a troca de idéias; promove a exposição e organização do pensamento de cada um; reforça o aprendizado". (p.11)

A seção *Ação* não aparece em todos os itens. Tem caráter variado podendo ser uma entrevista, dobradura, atividade de medida, a demonstração de uma fórmula, um jogo, etc. Tais atividades são promovidas pelo professor, mas sua realização é da responsabilidade do aluno.

Nas seções relativas aos *Exercícios*, a análise feita da coleção indica um nível de reflexão no trabalho do aluno, no sentido de resolver os exercícios, individual ou em grupo na própria sala de aula. Nesse momento tem a oportunidade de verificar as mais variadas soluções encontradas para o mesmo problema, além do mais, o professor pode colaborar, orientar e discutir as principais soluções. O manual pedagógico salienta que *"essa série de exercícios aborda novos conceitos e convida os alunos a descobertas, não usando apenas a fixação" (*p.11).

As análises feitas da coleção, quanto aos Exercícios para casa, designam um nível de aplicação no trabalho do aluno. É o momento de resolver as questões, sozinho e em casa, aprofundando o conhecimento estudado. Segundo o manual pedagógico *"aqui sem dúvida, é o momento em que os alunos, trabalhando individualmente, podem comprovar a interiorização dos conceitos e técnicas aprendidos em sala de aula"* (p.11).

O nosso objeto de estudo, área do paralelogramo, aparece explicitamente pela primeira vez no livro da 7ª série, no Capítulo 9 intitulado *Perímetros, áreas e volumes* e retorna no Capítulo 5 da 8ª série, com o título *Medidas*, no item *Calculando áreas e volumes*.

No entanto, os textos referentes ao conceito de área e à figura do paralelogramo, são trabalhados desde a 5ª série, pois a abordagem desta coleção, como já dissemos, é em espiral: os conteúdos não se esgotam numa determinada série, volta-se a eles várias vezes, mas com enfoques diferentes e novo aprofundamento.

Nesse sentido, embora tendo analisado de forma breve toda a coleção, demos mais atenção aos livros da 7ª e 8ª séries, nas quais a área do paralelogramo está mais presente.

Como já foi explicitado, adotamos três grandes focos que guiaram nossa pesquisa: o paralelogramo, a abordagem do conceito de área e a área do paralelogramo.

- O paralelogramo[16]

Com o objetivo de caracterizar a figura do paralelogramo, resolvemos observar inicialmente, com que freqüência a figura aparece nos livros da coleção estudada e com quais conteúdos se conecta. Em seguida, verificamos se elas estavam desenhadas de forma que a posição de um dos lados do paralelogramo estivesse na horizontal, vertical ou oblíqua. E finalmente, observamos se as figuras que possuíam um dos lados na posição horizontal estavam inclinadas para a direita ou para a esquerda.

Encontramos no dicionário ilustrado da 5ª a 8ª série, a definição de paralelogramo como sendo um *"quadrilátero que tem dois pares de lados paralelos"*. Além disso, percebemos que em todos os volumes, exceto no livro da 8ª série, é apresentada uma figura do paralelogramo, como veremos a seguir:

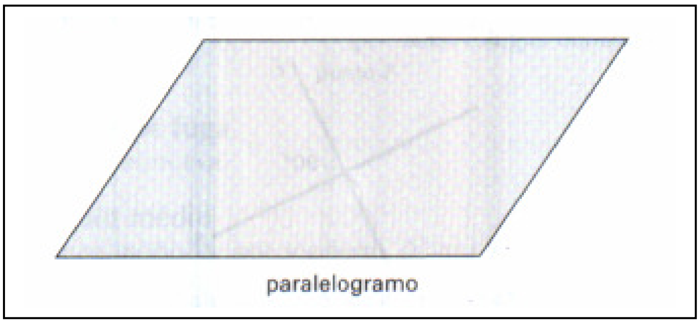


Figura 21: paralelogramo extraído do dicionário do livro didático na parte referente à palavra paralelogramo

Ainda no dicionário, no vocábulo Propriedade, em todas as séries, também aparece a figura do paralelogramo com as mesmas características da figura acima, ou seja,

[16] Consideramos para essa análise, somente os paralelogramos não-retângulos.

inclinação para a direita e seu lado de maior comprimento encontra-se na posição horizontal.

O paralelogramo é apresentado nessa coleção em todas as séries, mas em algumas, nas quais é objeto de estudo, a freqüência é maior, como podemos perceber na tabela a seguir:

Tabela 02: Freqüência da figura do paralelogramo na coleção analisada

	5ª série	6ª série	7ª série	8ª série
Número de vezes em que a figura do paralelogramo aparece na coleção adotada	19	10	31	14

A figura do paralelogramo é vista logo no primeiro capítulo da 5ª série, nos itens *giros, cantos e ângulos, mosaicos e polígonos e quadriláteros,* estendendo-se aos demais capítulos e séries.

No item *quadrilátero*, na parte referente ao texto-aula, os autores definem quadrilátero e apresentam exemplos da vida real em que aparecem as figuras do trapézio, paralelogramo, losango, quadrado e retângulo.

Em relação ao paralelogramo, o exemplo da vida real apresentado é a imagem, no chão, de uma janela de vidros retangulares atravessada pela luz solar. A figura do paralelogramo é apresentada nesse momento, com um dos lados na posição horizontal, o qual é o de maior comprimento, e sua inclinação é para a direita.

Destacamos o fato de os autores convidarem, em seguida, os alunos usuários do livro, a conhecerem as propriedades das figuras nos exercícios para sala de aula, Percebemos que essa abordagem contribui para que eles compreendam as propriedades dos quadriláteros ao invés apenas de decorá-las.

Ao longo de toda a coleção, a figura do paralelogramo é exibida articulada com diversos conteúdos, tais como: o estudo dos ângulos, polígonos, quadriláteros, paralelismo, medida, simetria, área, perímetro, semelhança, etc. (ver Anexo 1).

Na tabela a seguir[17], podemos verificar a síntese dos resultados relativos à posição da figura do paralelogramo na coleção analisada.

Tabela 03: Resultados relativos à posição da figura do paralelogramo na coleção analisada

Série	Total de figuras	Posição horizontal	Posição vertical	Posição oblíqua
5ª	19	15	02	02
6ª	10	07	01	02
7ª	31	29	01	01
8ª	14	11	0	03

Os dados apresentados na tabela acima indicam que há predominância das figuras, nas quais um dos lados do paralelogramo encontra-se na posição horizontal (pelo menos 70% das figuras, em cada série). Mas observa-se também, que existe uma preocupação por parte dos autores em explorar figuras em diversas posições, inclusive naquele em que ambos os lados do paralelogramo são oblíquos.

Tomando as figuras que apresentam um dos lados na posição horizontal, verificamos, em seguida, o comprimento dos lados e a inclinação da figura. Observe, na tabela a seguir, os resultados referentes ao comprimento e à posição:

Tabela 04: Resultados relativos à orientação do lado de maior comprimento na coleção analisada

Série	Total de figuras que apresentam um dos lados na posição horizontal	Lado na posição horizontal de maior comprimento	Lado na posição horizontal de menor comprimento
5ª	15	14	01
6ª	07	06	01
7ª	29	25	04
8ª	11	08	03

Como podemos perceber na tabela acima, em cada série, pelo menos 70% das figuras têm o lado horizontal como aquele de maior comprimento. Apesar disso, deve-se destacar a preocupação dos autores em posicionar paralelogramos, de tal maneira que o lado horizontal seja aquele de menor comprimento.

Com esses fatos, nos questionamos se o significado atribuído à palavra *base* na língua portuguesa (apoio, alicerce) não está sendo reforçado pela maneira como o

[17] Não consideramos para essa análise os retângulos e nem os losangos.

livro didático trata a figura, o que poderá provocar dificuldades nos alunos, na resolução de problemas envolvendo área do paralelogramo.

Quanto à inclinação da figura, apresentamos os resultados obtidos na tabela a seguir:

Tabela 05: Resultados relativos à inclinação da figura do paralelogramo na coleção analisada

Série	Total de figuras	Inclinação para a esquerda	Inclinação para a direita	Percentual de freqüência para a direita
5ª	15	0	15	100%
6ª	07	0	07	100%
7ª	29	3	26	89%
8ª	11	0	11	100%

Como podemos perceber na tabela acima, a inclinação do paralelogramo para a direita é o que prevalece nos livros dessa coleção. Fato que nos chamou atenção foi na 5ª, 6ª e 8ª série, todas as figuras se apresentarem com essa inclinação. Nos questionamos aqui, se, diante de uma atividade, em que essa condição seja desrespeitada, o aluno sentirá dificuldade ou até mesmo bloqueio de resolver o problema.

- A abordagem do conceito de área[18]

O objetivo neste ponto é caracterizar a abordagem do conceito de área, pois dependendo do enfoque do livro, em relação ao ensino do conceito de área, vai favorecer ou bloquear determinadas concepções: numéricas e geométricas, ou ainda, contribuir para a construção da idéia de área enquanto grandeza.

Para o estudo do conceito de área procuramos no dicionário ilustrado o significado da palavra área, com o intuito de perceber se o conceito abordado fortalecia determinadas concepções.

[18] Nesta pesquisa, só analisamos o conceito de área a partir da 5ª série, no entanto, ele é objeto de ensino desde a 3ª série do Ensino Fundamental e por isso, nós não temos informações sobre como foi abordado este conceito anteriormente.

Em todos os livros desta coleção, encontramos no dicionário ilustrado, a mesma definição para o conceito de área: *medida de uma superfície*.

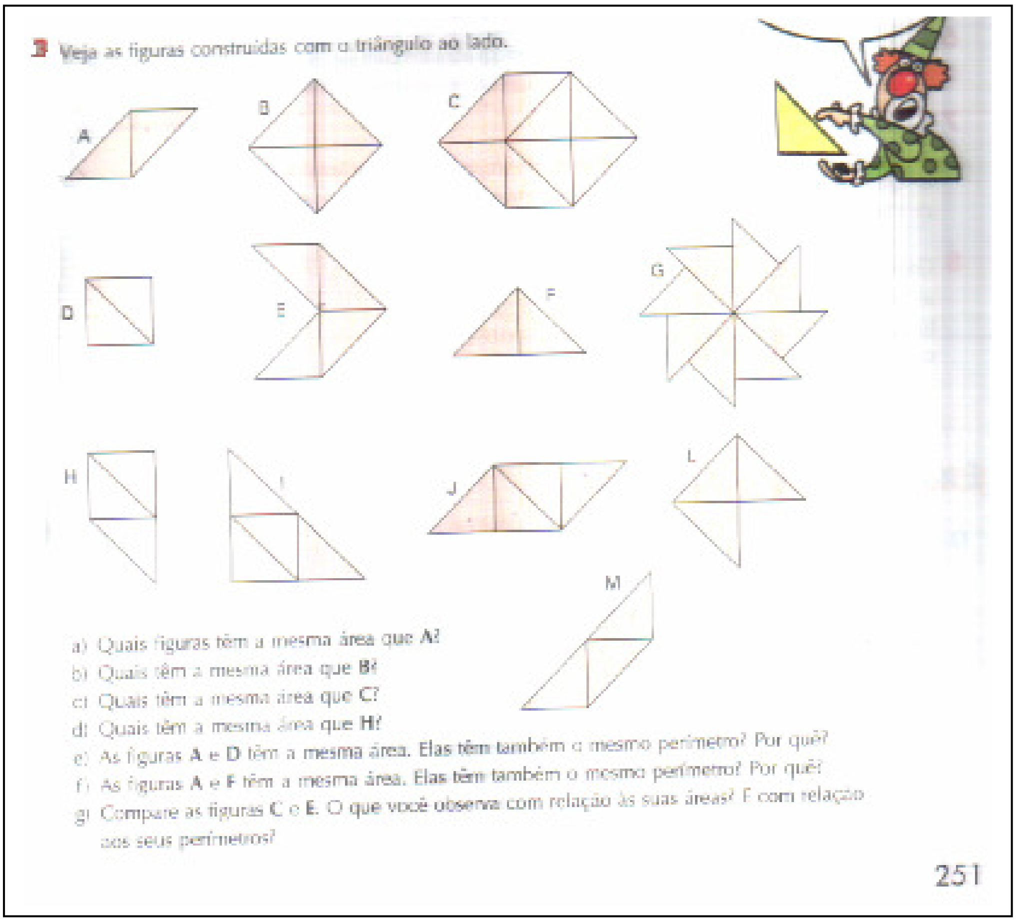
Ao observarmos o conceito de área, no livro da 5ª série, percebemos que os autores introduzem este tema com um problema de comparação de dois pátios, em que se espera que o aluno conte quantas lajotas há em cada pátio. Concluem afirmando que *"Aquele com mais lajotas é o mais espaçoso, ou seja, o de maior área. Usando a lajota como unidade de medida, a área de cada pátio é o número de lajotas que ele contém"* (p. 219). Em seguida, apresentam as unidades de medida de área convencionais mais usadas: quilômetro quadrado, metro quadrado e o centímetro quadrado.

Para deduzir a fórmula da área do retângulo, os autores partem da quantidade de unidades quadradas ($1cm^2$) que cabem em uma região medida, levando a generalização da fórmula, como sendo o produto do comprimento de um lado pelo outro. Logo após, apresenta a fórmula: $A = c \times l$, onde A representa a área do retângulo, c o comprimento e l a largura. Obtém-se ainda, a partir do retângulo, a fórmula da área do quadrado: $A = l^2$.

Percebemos que, mesmo os autores definindo o conceito de área como medida de superfície, prevalecendo o aspecto numérico, existem algumas características elogiáveis na abordagem do conceito de área na coleção. Primeiro, a situação inicial parte de um problema contextualizado, referente a aspecto da vida cotidiana. Segundo, porque essa situação é de comparação, embora seja numérica e, por fim, a situação não parte de usos de fórmulas, nem utiliza unidades convencionais. O que ao nosso ver é importante para o processo de ensino-aprendizagem.

Por outro lado, discordamos de algumas escolhas. O fato de partir de uma situação de comparação, a qual exige a necessidade de medir, fortalece o aspecto numérico. Da mesma forma que, quando se coloca a "*área de cada pátio é o número de lajotas que a contêm"*, reforça-se também a idéia de que é preciso efetivamente ladrilhar para poder comparar a área. Para Douady e Perrin-Glorian (1989) uma associação precoce da superfície a um número favorece o amálgama entre diferentes grandezas.

Constatamos que na 6ª série, os autores retomam e ampliam o conceito de área por meio do tangram[19] possibilitando a decomposição e composição de figuras. Como poderemos observar a seguir, nessa questão, é solicitado do aluno que identifique figuras de mesma área e compare áreas e perímetros de figuras construídas com exemplares de triângulos iguais a um modelo dado.



3 Veja as figuras construídas com o triângulo ao lado.

a) Quais figuras têm a mesma área que A?
b) Quais têm a mesma área que B?
c) Quais têm a mesma área que C?
d) Quais têm a mesma área que H?
e) As figuras A e D têm a mesma área. Elas têm também o mesmo perímetro? Por quê?
f) As figuras A e F têm a mesma área. Elas têm também o mesmo perímetro? Por quê?
g) Compare as figuras C e E. O que você observa com relação às suas áreas? E com relação aos seus perímetros?

251

Figura 22: exercício extraído do livro didático da 6ª série página251

Esse tipo de abordagem é interessante, pois fortalece a idéia de área enquanto grandeza - destacando que figuras diferentes podem ter mesma área.

Observamos ainda, figuras que têm mesma área e perímetros diferentes, mesmo perímetro e áreas diferentes e ainda, figuras que têm mesma área e mesmo

[19] O Tangram é um quebra-cabeça chinês, de origem milenar. Ao contrário de outros quebra-cabeças, ele é formado por apenas sete peças com as quais é possível criar e montar cerca de 1700 figuras entre animais, plantas, pessoas, objetos conhecidos, etc. As regras desse jogo consistem em usar as sete peças em qualquer montagem, colocando-as lado a lado sem sobreposição. (SOUZA & ET AL, 1995). No entanto, no uso didático ampliou-se essas regras, podendo ser construídas figuras, por exemplo, usando só os triângulos.

perímetro. Sendo assim, essa atividade proporciona, entre outras coisas, ao aluno verificar a dissociação entre área e perímetro e ajuda a invalidar as concepções geométricas.

A idéia de área também é ampliada na 7ª série. No item *idéias para o cálculo de área*, a parte referente a texto-aula apresenta recursos de decomposição e recomposição de figuras quaisquer, com o objetivo de formar retângulos, estabelecendo que se *"nenhum pedaço da figura foi inutilizado, a área do retângulo é igual à área da figura inicial"* (p. 187). Na parte *conversando sobre o texto*, os autores lançam duas perguntas sobre o conceito de área[20]: *"Que fórmula se usa para calcular a área de um retângulo? Explique essa fórmula e o seu porquê"*, e *"quais são as idéias que o texto apresenta para o cálculo de áreas?"*.

Na parte referente a *exercícios* e *exercícios para casa*, exigem-se dos alunos a utilização dos recursos que foram trabalhados no texto como, por exemplo, decomposição, recomposição e completamento de figuras para o cálculo de área. Acreditamos que a exploração desses recursos prepara os alunos para a compreensão das fórmulas. Também verificamos a dissociação entre área e perímetro e problemas envolvendo escalas.

No item *Fórmulas para o cálculo de áreas*, os autores focalizam as fórmulas das áreas do paralelogramo e triângulo através de deduções[21]. Chamam a atenção para a possibilidade de escolher um lado como base e tomar a sua altura correspondente, afirmando que *"Num quadrilátero ou num triângulo, depois de escolhermos o lado que será a base, a altura é a distância dos pontos mais distantes da base até ela" (p.196)*. Em seguida apresentam algumas figuras ilustrando o que pode ser base e altura.

[20] Como já foi explicitado, a fórmula de área do retângulo foi introduzida no livro da 5ª série
[21] A discussão sobre a fórmula de área do paralelogramo é foco da seção seguinte.

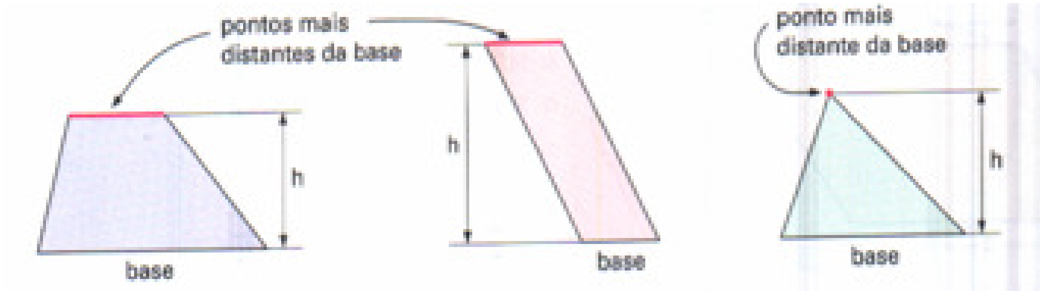


Figura 23: Exemplo de base e altura extraída do livro da 7ª série página 196

Como podemos perceber no texto, existe implicitamente a idéia de que qualquer lado pode ser tomado como base. Por outro lado, como sabemos, na língua materna, o termo base está ligado a chão e a escolha de posicionar todas as figuras com o lado tomado por base na horizontal não favorece a ampliação do significado de base.

No conversando sobre o texto, surge um grupo de questões refletindo sobre as idéias apresentadas no texto anterior. Observe-se:

- "Que outras fórmulas você conhece?".
- Que diz o texto a respeito das fórmulas? Explique com suas próprias palavras.
- Qual é a fórmula da área do paralelogramo? Explique o seu porquê.
- O que é altura do paralelogramo? Explique com suas palavras.
- Qual é a fórmula da área do triângulo? Por que é tão parecida com a fórmula da área do paralelogramo? Por que se divide por 2, na fórmula da área do triângulo?
- O que é altura do triângulo? Explique com suas palavras.
- O texto apresenta uma seqüência dedutiva, isto é, de uma propriedade se deduz outra e, dessa, deduz-se outra ainda. Quais são essas propriedades?" (p. 197)

Depois na *Ação* são deduzidas as fórmulas da área do trapézio e do losango, por meio de um processo de construção, e com recursos de decomposição, recomposição e completamento.

Finalizando a coleção, observa-se que as atividades exploradas no livro da 8ª série, quanto ao conceito de área, possibilitam aos alunos fazer decomposição e recomposição de figuras mais complexas, procurando transformá-las em outras mais simples de mesma área.

Para determinar áreas de figuras curvilíneas, os autores introduzem o conceito de área adotando um procedimento de cálculo aproximado por compensação, utilizando para isso, malha quadriculada.

O Capítulo 5 dessa série apresenta três itens: *Sistemas decimais e não-decimais*, *Calculando áreas e volumes* e, por último, *Perímetro e área do círculo*. Focalizamos nossa análise nos dois últimos itens.

No item *calculando áreas e volumes*, na parte referente ao texto-aula, os autores mostram alguns recursos para o cálculo de área, vistos em séries anteriores, como por exemplo, compensações, decomposição e recomposição e, em seguida, apresentam as fórmulas da área de algumas figuras básicas: trapézio, triângulo, losango, retângulo e o paralelogramo.

Para obter as fórmulas $p = 2\pi r$ e $A = \pi r^2$, os autores adotam uma abordagem mais complexa do que as utilizadas em séries anteriores. Buscam, a partir de polígonos regulares inscritos ou circunscritos, o perímetro e a área do círculo. O objetivo é mostrar que, quanto maior for a quantidade de lados do polígono regular, mais próximos ele estará do círculo e, conseqüentemente, seu perímetro e sua área também se aproximarão.

Segundo o manual pedagógico, "essa *abordagem contém idéias difíceis e não se deve esperar que seja inteiramente compreendida. Aliás, um currículo em espiral existe por isso mesmo: quase nada pode ser inteiramente compreendido em uma única experiência"* (p.38).

Observamos que, por um lado, alguns aspectos da abordagem do livro reforçam as concepções numéricas de área, tais como iniciar por ladrilhamento, abordar o ladrilhamento com figuras utilizando as peças do tangram em números inteiros de vezes, o próprio significado da palavra área no dicionário ilustrado ou a pouca ênfase na possibilidade de comparar sem medir.

Por outro lado, o fato de explorar e destacar a idéia da invariância da área por composição e decomposição de figuras, utilizar o tangram para mostrar que figuras de mesma área podem ter perímetros diferentes, contribuem para invalidar as concepções geométricas e para construir a noção de área como grandeza.

Outro aspecto que contribui para a construção da noção de área como grandeza é a exploração de uma leitura da fórmula, relacionada com os invariantes geométricos da figura, como é o caso da Figura 28 que será comentada adiante.

- Área do paralelogramo

A área do paralelogramo começa efetivamente a ser trabalhada na 7ª série, especificamente, no Capítulo 9, no item *idéias para o cálculo de áreas e volumes*, na parte referente a exercícios e amplia-se esse conteúdo nos itens que se seguem.

Destacamos o Exercício 4 da página 189, que pela primeira vez apresenta a figura do paralelogramo neste estudo e na distinção entre área e perímetro. Como poderemos observar a seguir:

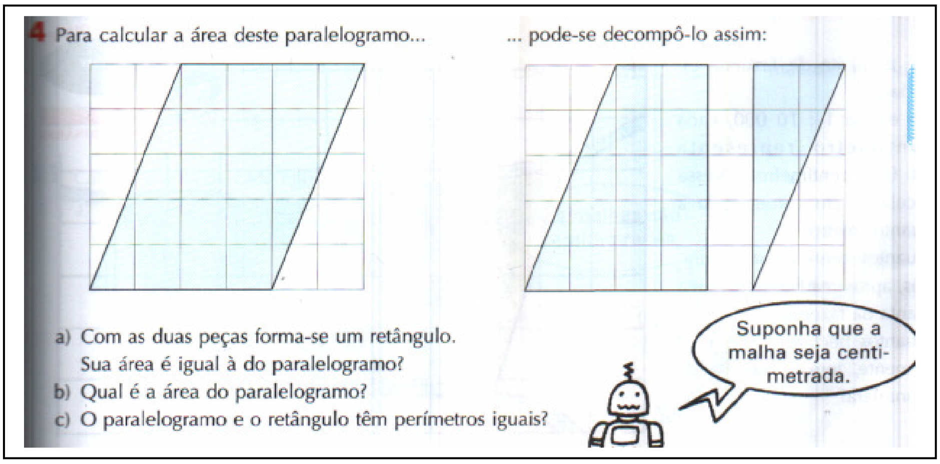


Figura 24: exercício extraído do livro didático da 7ª série página 189

Como podemos perceber na atividade acima, espera-se que os alunos observem a decomposição do paralelogramo e a recomposição da figura formando um retângulo, ajustado na malha centimetrada e depois verifiquem a quantidade de centímetros quadrados que a figura possui.

Em outra atividade (Questão 14, p. 192) pede-se para verificar a área na malha centimetrada, as medidas dos comprimentos dos lados e depois se espera que os alunos reflitam sobre o erro de uma pessoa ao multiplicar as medidas dos comprimentos dos lados de um paralelogramo para obter a área. Observe:

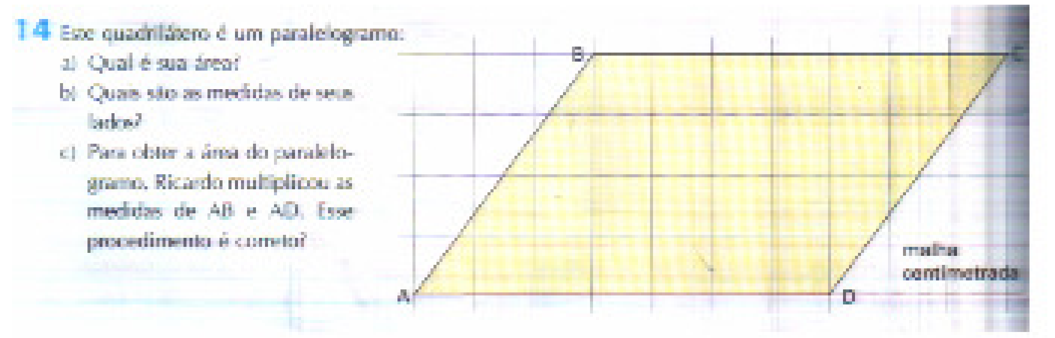


Figura 25: exercício extraído do livro didático da 7ª série página 192

Refletir sobre esse tipo de erro é muito importante, pois ele é um dos mais freqüentes entre os alunos, de acordo com pesquisas anteriores como, por exemplo, Baltar (1996).

No item "Fórmulas para o cálculo de áreas", na parte referente ao texto-aula, a fórmula de área do paralelogramo é deduzida através dos recursos de decomposição e recomposição, partindo da fórmula da área do retângulo, já vista em séries anteriores, chamando a atenção, também, para o conceito de altura[22]. (ver anexo 2)

Buscamos, no dicionário ilustrado, o significado para as palavras base e altura de uma figura. A definição atribuída à base *é o lado perpendicular à altura.* E altura *um segmento de reta desenhado a partir de um vértice perpendicularmente ao lado oposto a ele.* Essas definições apresentam vantagens para o ensino, na medida que não restringem a escolha do lado tomado como base e nem a possibilidade da altura ser interna ou externa.

Em relação aos exercícios para serem trabalhados em classe, em uma das questões é apresentada também uma situação, na qual é solicitado que se identifique nos

[22] Considerando que esse trabalho é desenvolvido em duas folhas optamos por reproduzi-lo em anexo

cadernos de dois alunos fictícios, o erro cometido por eles no cálculo da área. Observe a Questão 18 a seguir:

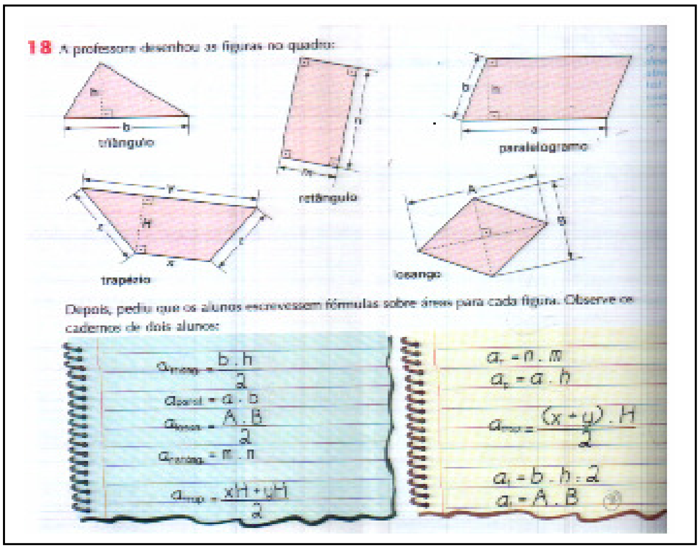


Figura 26: exercício extraído do livro didático da 7ª série página 200

Como podemos observar na questão anterior, em um dos cadernos, o erro consiste em multiplicar as medidas de comprimento dos lados do paralelogramo. Aqui novamente os autores expressam nitidamente a preocupação com esse tipo de erro.

Além dos autores chamarem a atenção para os erros, em outra atividade (Questão 20, p. 201) exploram também a importância de se tomar qualquer lado como base, desde que se tenha a altura correspondente. Observe:

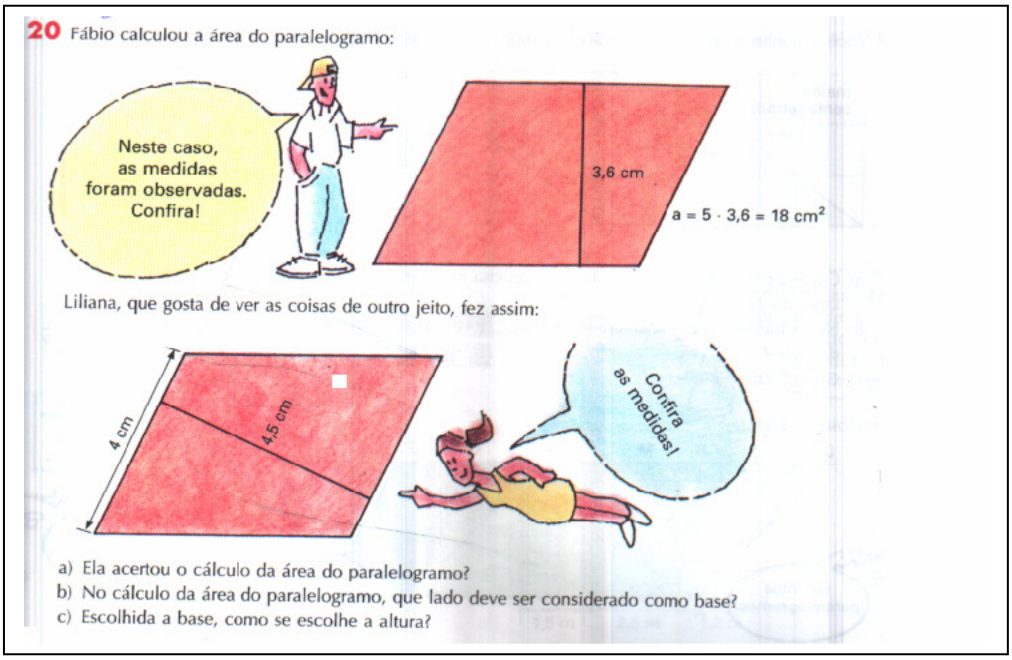


Figura 27: exercício extraído do livro didático da 7ª série página 201 questão 20

Com o objetivo de explicitar que paralelogramos de mesma base e altura têm a mesma área, os autores exploram a comparação de áreas sem medida, como podemos perceber na Questão 24 a seguir:

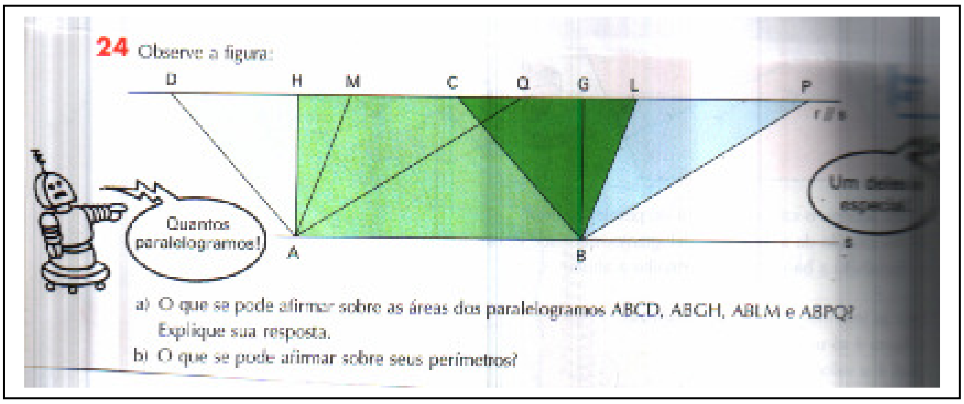


Figura 28: exercício extraído do livro didático da 7ª série página 202 questão 24

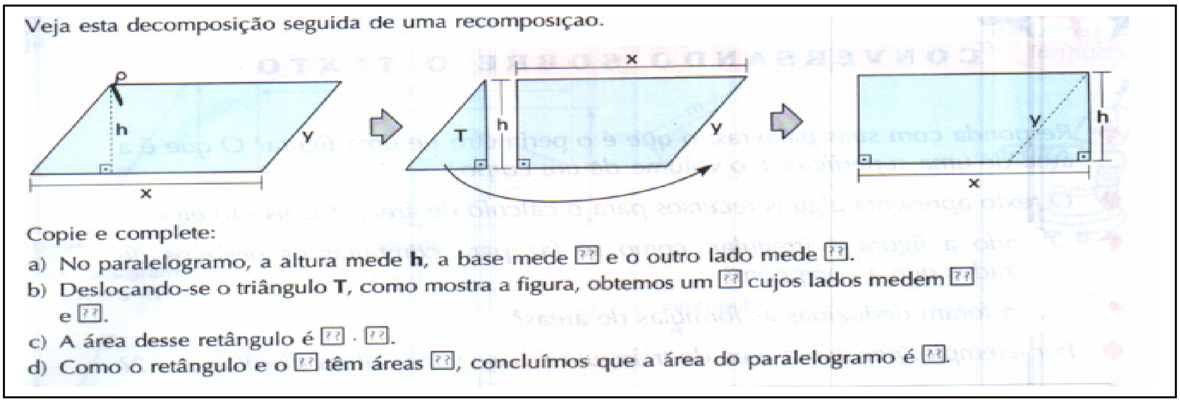
Como podemos observar, os autores trabalham a noção de grandeza através da interpretação da fórmula, mesmo que não tenha sido o ponto de partida, como é preconizado na pesquisa de Douady & Perrin-Glorian (1989).

Na parte dos *Exercícios para casa*, só encontramos uma atividade referente ao cálculo de área do paralelogramo, a qual apresenta a figura numa posição não convencional. Também são oferecidas as medidas dos comprimentos dos lados e uma das alturas do paralelogramo, de forma que os alunos precisam decidir que dados escolher para determinar a área. Como podemos observar a seguir:

Figura 29: exercício extraído do livro didático da 7ª série página 202 questão 25

Esse tipo de abordagem é muito importante para o ensino, pois contribui para que haja uma reflexão sobre o processo de escolha dos dados sobre a figura.

Com relação ao livro da 8ª série, na parte referente aos exercícios, das nove questões apresentadas, apenas uma explora a área do paralelogramo. Essa questão enfatiza o aspecto algébrico, pois, além de não apresentar dados numéricos, exige do aluno a dedução da fórmula. Os autores do livro dão um roteiro para auxiliá-los, o que contribui para a construção do significado da fórmula. Apesar disso, existe uma marca na linguagem que remete à unicidade da base e altura, observe:


Veja esta decomposição seguida de uma recomposiçao.

Copie e complete:

a) No paralelogramo, a altura mede **h**, a base mede ?? e o outro lado mede ??.
b) Deslocando-se o triângulo **T**, como mostra a figura, obtemos um ?? cujos lados medem ?? e ??.
c) A área desse retângulo é ?? · ??.
d) Como o retângulo e o ?? têm áreas ??, concluímos que a área do paralelogramo é ??.

Figura 30: exercício extraído do livro didático da 8ª série página 142

E finalmente, nos exercícios para casa, encontramos apenas uma atividade, que aborda o nosso objeto de estudo. É uma questão de aplicação direta da fórmula, em que é dada exclusivamente a medida do comprimento de um dos lados tomado por base e da altura correspondente. Observamos que, apesar de um dos lados do paralelogramo encontrar-se na posição horizontal, não é o de maior comprimento. Veja a seguir:

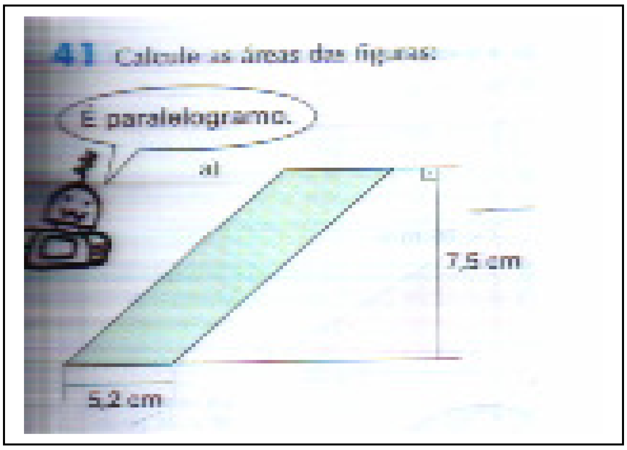


Figura 31: exercício extraído do livro didático da 8ª série página 145

Durante a análise do Capítulo 9 da 7ª série e do Capítulo 5 da 8ª série, podemos observar algumas regularidades no tratamento dado à área do paralelogramo. Constatamos que, em todos os problemas que envolvem cálculo de área do paralelogramo, existe a presença de figuras.

Sabemos que problemas com ausência de figuras, dependendo da maneira como são propostos e formulados podem ressaltar uma aplicação mecânica da fórmula, o que prejudica a aprendizagem. Por outro lado, nos indagamos se o fato de termos a inexistência de problemas nos quais não haja figura, poderá gerar alguma lacuna por parte dos alunos, no sentido de que, ao se defrontarem com um problema que não seja respeitada esta condição, sintam dificuldade de resolvê-lo.

Constatamos também que, embora a abordagem do livro explore diversos procedimentos, em relação à natureza das soluções, a ênfase maior é em problemas que requerem uma solução numérica. Como podemos perceber na Tabela 6 abaixo:

Tabela 06: Resultados relativos à natureza das soluções

Categoria	Série	Há exigência de solução numérica	Não há exigência de solução numérica
Natureza da solução	7ª	05	02
	8ª	02	01

Sabemos que esse tipo de abordagem pode contribuir para a passagem de concepções geométricas à construção de área enquanto grandeza, na medida em que figuras diferentes podem ter áreas iguais.

Se pensarmos em divisão de responsabilidade, entre professor e aluno (ambos hipotéticos) usuários do livro, podemos nos perguntar: o que se espera de um aluno, diante de um problema envolvendo área do paralelogramo? Que ele calcule ou não? Nos questionamos, se esse tipo de abordagem não cria uma expectativa no sentido de que, diante de um problema, por exemplo, de comparação de área sem medida, o aluno sinta a necessidade de calcular.

Em relação aos dados fornecidos para se resolver um problema envolvendo área do paralelogramo, percebemos que das 07 questões encontradas no livro da 7ª série, duas delas são atividades na malha quadriculada. Outra questão com três paralelogramos permite verificar que paralelogramos de mesma base e altura têm mesma área. Duas questões apresentam exclusivamente as medidas de comprimento de um dos lados e da altura relativa a esse lado.

Esse grupo de questões não contribui para a explicitação do erro que consiste em calcular a área multiplicando as medidas dos lados da figura e, assim, tal erro seja invalidado. Por outro lado, constatamos uma preocupação nítida dos autores em desestabilizar esse erro, como citado anteriormente, por exemplo, na Figura 27. E, finalmente, duas questões apresentam dados desnecessários para o cálculo de área: as medidas de comprimento dos lados e uma altura correspondente. De forma que o aluno precisa decidir que dados são necessários para resolver a questão.

No livro da 8ª série, aparecem três problemas envolvendo a área do paralelogramo, um deles apresenta exclusivamente as medidas de comprimento de um dos lados e da altura relativa a esse lado. Em outro, são fornecidos dados desnecessários para resolução da questão. E no *vestibulinho*, é proposta uma atividade na malha quadriculada.

Fato que merece também atenção especial é que, na imensa maioria dos problemas que envolvem o cálculo de área do paralelogramo (82% na 7ª série e 100% na 8ª série), o lado tomado por base é o que se encontra na posição horizontal.

Nos questionamos se esse tipo de abordagem está contribuindo suficientemente para o fortalecimento do conceito de invariância da área, em relação à escolha do lado tomado por base, uma vez que poderá levar o aluno a uma construção conceitual restrita.

Por outro lado, verificamos que, na 7ª série, 70% dos problemas que envolvem cálculos da área do paralelogramo, o lado tomado por base é o de maior comprimento. Enquanto na 8ª série esse percentual cai para 33%, o que acreditamos ser importante. Fato que nos chamou a atenção é que durante a análise dos livros da 7ª e 8ª séries, só encontramos uma figura de paralelogramo na qual é tomado como base o lado de menor comprimento e a altura estava no interior do paralelogramo.

Realizando uma análise mais transversal, chegamos à seguinte conclusão: dentre todos os problemas envolvendo área do paralelogramo na 7ª série (16), cerca de 80% deles (13) apresentam o lado tomado por base na posição horizontal. Além disso, em 12 desses paralelogramos (92%) o lado tomado por base na horizontal é o de maior comprimento.

Na 8ª série, todos os problemas envolvendo área do paralelogramo (03), apresentam o lado tomado por base na posição horizontal, no entanto, apenas um deles o lado tomado por base na horizontal é o de maior comprimento.

De uma forma geral, quanto à divisão de responsabilidade entre professor e aluno, não identificamos nada que fosse introduzido na parte texto-aula e que não fosse explorado nos exercícios. Por outro lado, há atividades que exigem do aluno conhecimentos que não estão de maneira explícita no texto-aula.

Vale salientar que, com esta análise, verificamos algumas regularidades no livro didático que correspondem a privilegiar certos valores das variáveis didáticas focadas em nossa pesquisa:

1- A posição do paralelogramo é de tal forma, que um dos lados encontra-se na horizontal;
2- No paralelogramo, o lado horizontal é o de maior comprimento;
3- A inclinação da figura do paralelogramo é para a direita;
4- Sempre existe a presença de figuras nos problemas sobre área do paralelogramo.

Assim, nossas análises nessa coleção mostram que o desenho prototípico do paralelogramo, tem o lado de maior comprimento posicionado na horizontal e a inclinação da figura é para direita, confirmando a hipótese feita na fundamentação teórica, a partir de observações assistemáticas.

A revisão de literatura mostrou que uma das regras de contrato didático, freqüentes na resolução de problemas de Matemática, é aquela segundo a qual todos os dados necessários à resolução de um problema encontram-se no enunciado e raramente são apresentados dados inúteis. Ou seja, é da responsabilidade do professor oferecer os dados do problema e não o aluno pesquisá-lo. Então, de maneira geral, com relação ao cálculo de área do paralelogramo, essa regra é confirmada quando são dadas exclusivamente as medidas de comprimento de um lado e da altura correspondente.

Constatamos que nos livros didáticos analisados existe nitidamente uma preocupação em não fortalecer essa regra nos problemas que envolvem área do paralelogramo. Pois, embora sejam dadas exclusivamente as medidas de comprimento de um lado e da altura correspondente há momentos em que essa regra é rompida, ora fornecendo dados desnecessários, ora não apresentando todos os dados numéricos necessários.

Majoritariamente temos, nos problemas que envolvem área do paralelogramo, as figuras sendo traçadas de forma que o lado de maior comprimento está posicionado na horizontal. Quando tais condições não são respeitadas simultaneamente surgem duas regras de contrato didático possíveis:

- Nos problemas que envolvem cálculo de área do paralelogramo, o lado tomado por base é o que se encontra na posição horizontal;
- Nos problemas que envolvem cálculo da área do paralelogramo, o lado tomado por base é o de maior comprimento.

No caso acima, o contrato está funcionando no sentido de que, na maioria das situações, o professor hipotético tem a atribuição de designar qual é o lado tomado como base e do aluno é exigida a realização do produto dos comprimentos dessa base pela altura relativa a ela. Inclusive nas atividades com malha quadriculada, embora não sejam dadas medidas, existe implicitamente a escolha de um dos lados como base, que é aquele que está traçado sobre o papel quadriculado, seja ele na vertical ou horizontal, e não o que está inclinado.

Quando essa regra é rompida, ou seja, quando o problema não fornece explicitamente o comprimento de um dos lados, ou fornece os comprimentos de ambos os lados e das alturas relativas aos mesmos, o aluno vai mobilizar uma idéia de base e altura. Acreditamos que para o aluno, a área do paralelogramo é o produto do comprimento de apenas um de seus lados pela altura relativa a ele, ou seja, fazemos a hipótese de que para o aluno não há invariância da área relativamente à escolha do lado tomado como base.

Além das regras citadas acima, também detectamos, na análise da coleção, que um problema envolvendo área de paralelogramo requer uma solução numérica e que nos cálculos de área do paralelogramo, a altura tomada é interna.

Apesar das observações feitas acima, nada impede que professor e aluno, ambos reais, estabeleçam entre si outras regras de contrato didático, uma vez que, a postura do professor, os exemplos de atividades, a interação entre eles, etc. podem alterar significativamente o que o livro didático propõe.

No próximo capítulo serão expostas a análise a priori e a análise de resultados do teste.

O TESTE

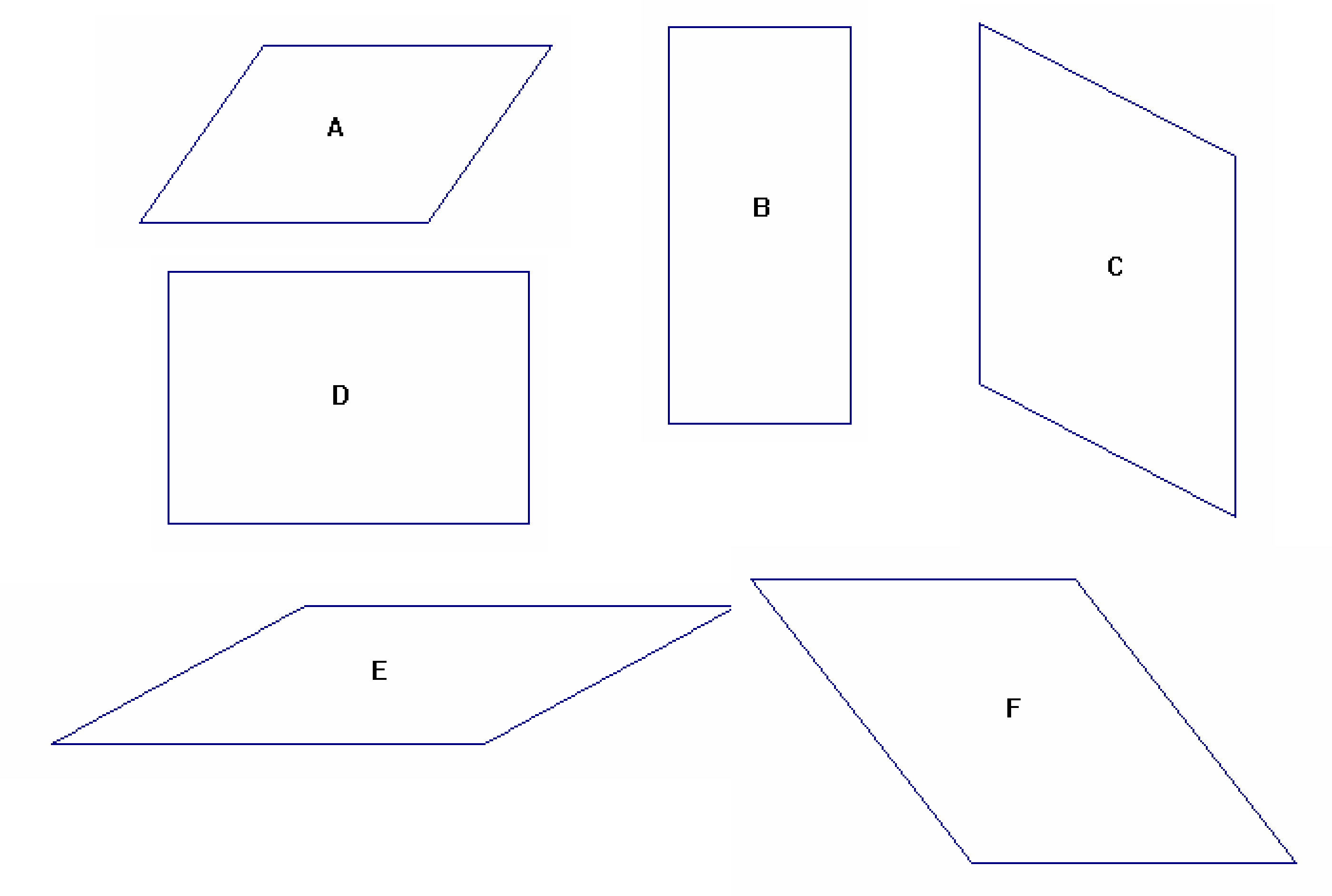
4- O TESTE

Neste capítulo, são apresentadas a análise a priori relativa ao teste aplicado com os alunos da 8ª série do Ensino Fundamental, tomando como referência os objetivos da pesquisa e a nossa fundamentação teórica e, em seguida, as análises quantitativa e qualitativa dos dados coletados.

4.1- Análise a priori das atividades propostas aos alunos da 8ª série

4.1.1 – Atividade 1

Observe os paralelogramos abaixo:



a) Qual das figuras acima têm a menor área?________________________

b) Quais das figuras acima têm a maior área? ________________________

c) Entre elas há figuras que têm a mesma área? Justifique sua resposta.

- **Justificativa das principais escolhas na elaboração da atividade: variáveis didáticas e seus valores.**

O interesse principal por esta atividade, justifica-se, de um lado, pelo fato de ela não ter dados numéricos, rompendo, desta forma, com a regra de contrato didático, segundo a qual um problema, envolvendo área de paralelogramo, requer sempre uma solução numérica. Embora a formulação do problema não exija, nem favoreça esse tipo de resolução, os materiais disponibilizados permitem que os alunos resolvam numericamente, como será argumentado em seguida.

A atividade aborda a comparação de áreas e, como os procedimentos favorecidos pela formulação, não são numéricos possibilita-se resolvê-la usando processos de composição e decomposição das figuras, utilizando para isto, procedimentos de sobreposição.

Ao elaborar essa atividade, desenhamos as figuras em papel branco, pois, ele favorece menos a mobilização de procedimentos numéricos do que no papel quadriculado ou pontilhado. Apesar de a atividade ser apresentada sem medidas, disponibilizamos régua graduada, permitindo assim, que o aluno obtenha dados numéricos e resolva numericamente a questão.

Disponibilizamos papel quadriculado para permitir observar se os alunos mobilizam procedimentos de comparação e decomposição articulados com a contagem de quadradinhos. Do mesmo modo, oferecemos papel transparente, que permite resolver a questão através do processo de inclusão, sobreposição e decomposição de figuras.

Por outro lado, se os alunos utilizarem uma resolução numérica, temos a possibilidade de investigar qual a idéia que os alunos têm de base e altura. Por isso, desenhamos as figuras em diversas posições e inclinações, com lado de maior comprimento na horizontal ou vertical. Para isso, as figuras B e D são retângulos, A e E são paralelogramos, de tal forma que o lado de maior comprimento está posicionado na horizontal; F também é um paralelogramo que possui um dos lados posicionado na horizontal, no entanto, não é o de maior comprimento, apresentando também, inclinação contrária as demais figuras; C é um paralelogramo que não tem nenhum lado posicionado na horizontal, provocando uma ruptura na regra de contrato didático, segundo a qual nos problemas que envolvem cálculos de área do paralelogramo, o lado tomado por base é o que se encontra na posição horizontal.

- **Procedimentos de resolução esperados**

As figuras foram construídas utilizando um software de geometria dinâmica e se caracterizam da seguinte forma:

- A figura A é um paralelogramo, cujo lado posicionado na horizontal mede 4 cm, o lado oblíquo mede 3 cm e a área mede 9,83 cm^2
- A figura B é um paralelogramo retângulo, cujo lado horizontal mede 2,5 cm, o lado vertical mede 5,5 cm e a área mede 13,75 cm^2.
- A figura C é um paralelogramo, cujo lado posicionado na vertical mede 5 cm, o lado obliquo mede 4 cm e a área mede 17,73 cm^2.
- A figura D é um paralelogramo retângulo, cujo lado horizontal mede 5 cm, o lado vertical mede 3,5 cm e a área mede 17,5 cm^2.
- A figura E é um paralelogramo, cujo lado posicionado na horizontal mede 6,0 cm, o lado oblíquo mede 4 cm e a área mede 11,44 cm^2.
- A figura F é um paralelogramo, cujo lado posicionado na horizontal mede 4,5 cm, o lado oblíquo mede 5 cm e a área mede 17,73 cm^2.

Portanto, temos as seguintes respostas corretas, de acordo com o software: as figuras C e F apresentam as maiores áreas, assim como possuem áreas iguais, A é a que possui menor área e observando ainda, a ordem crescente das áreas temos A, E, B, D, C e/ou F.

Como visto na nossa fundamentação teórica a respeito de contrato didático relativo à geometria na França, os alunos da 5ª e 6ª séries podem tomar medidas sobre a figura e conjecturar em relação a ela, no entanto, na 7ª e 8ª séries eles começam a raciocinar sobre figuras idealizadas.

Então, o primeiro procedimento esperado, é aquele em que nossos alunos seguem a mesma lógica do contrato didático na França, ou seja, raciocinam em termos da medida teórica. Desse modo, se recusam a resolver a atividade, pois podem esperar que sejam dadas informações suficientes, para eles decidirem quem é menor, maior ou igual em relação à área, considerando as figuras como representantes de objetos geométricos idealizados.

Caso os alunos não utilizem o kit de material disponível, eles poderão tentar usar as informações visuais como instrumento de comparação das áreas dos paralelogramos, empregando o processo de composição e decomposição de figuras por operações mentais. Visualmente, percebemos que a área da figura A é menor que todas as outras áreas, no entanto, esse procedimento não permite decidir sobre a maior e as que têm áreas iguais. Então, um dos procedimentos esperados é aquele no qual o aluno resolverá a questão usando procedimentos de corte-colagem, explicitando a equivalência de duas figuras, através da igualdade das áreas de retângulos e paralelogramos de mesma base e mesma altura.

Ao utilizar o kit de material, o aluno poderá comparar as áreas, desenhando os paralelogramos no papel transparente e, em seguida, sobrepondo para compará-los dois a dois, utilizando, para isto, um processo de inclusão e sobreposição. Durante este processo, o aluno poderá deduzir que a área da figura A é menor que as áreas das figuras B, C, D e F, porém não vai poder comparar com a área da figura E, podendo utilizar neste caso, a idéia de corte-colagem.

Outro procedimento esperado é aquele no qual o aluno resolverá a questão utilizando papel quadriculado, combinando com outros procedimentos, como por exemplo, decomposição, recomposição, compensação. Inicialmente fará o decalque dos paralelogramos no papel transparente, recorta-os, os sobrepõe sobre o papel quadriculado e, em seguida, contará o número de quadradinhos, comparando as áreas das figuras. Assim, a que tiver o maior número de quadradinhos terá maior área, da mesma forma que paralelogramos que tenham a mesma área apresentarão o mesmo número de quadradinhos.

Um outro procedimento também esperado é que, em cada figura, os alunos utilizem a régua para encontrar a medida dos comprimentos dos lados e suas alturas, ou seja, também manipulem os objetos que estão desenhados.

Sabemos que, do ponto de vista da medida teórica, existe a invariância da área com relação à escolha da base. No entanto, usando uma medição prática, podemos ter uma diferença aceitável, no cálculo da área em cada uma das figuras apresentadas, que pode chegar até 0,6 cm^2.

Se o aluno tem a noção de invariância da área de acordo com a escolha da base, não irá importar o lado tomado. No entanto, ele encontrará alguns entraves, se não tiver esse conhecimento construído, pois para ele a base do paralelogramo é um determinado lado, que pode ser o de maior comprimento ou que está posicionado na horizontal.

Se a base para o aluno é o lado que está posicionado na horizontal, ele terá a possibilidade de calcular a área das figuras A, B, D, E e F, porém não tem como calcular a área da figura C. O que nos leva a crer, que a tendência para o cálculo da área dessa figura, será tomar como base o lado de maior comprimento, embora não houvesse nada de errado, pensar que a base poderia ser o lado menor. Então, dependendo do lado tomado por base, poderemos observar nesse procedimento também, que conceito de altura ele mobiliza.

Contudo, dependendo da imprecisão do instrumento, régua, e do lado tomado por base, os resultados de medição aproximados para os cálculos de área são os seguintes:

$A_{(A)}$ = 3,3 cm X 3 cm = 9,9 cm^2 ou $A_{(A)}$ = 4 cm X 2,5 cm = 10 cm^2

$A_{(B)}$ = 2,5 cm X 5,5 cm = 13,75 cm^2

$A_{(C)}$ = 4 cm X 4,5 cm = 18 cm^2 ou $A_{(C)}$ = 5 cm X 3,5 = 17,5 cm^2

$A_{(D)}$ = 5 cm X 3,5 cm = 17,5 cm^2

$A_{(E)}$ = 6 cm X 2 cm = 12 cm^2 ou $A_{(E)}$ = 4 cm X 3 cm = 12 cm^2

$A_{(F)}$ = 4 cm X 4,5 cm = 18 cm^2 ou $A_{(F)}$ = 3,5 cm X 5 cm = 17,5 cm^2

Como o problema foi formulado de forma que o aluno resolva a questão sobre o desenho e não sobre a figura, consideraremos para os limites desse problema e para o que queremos investigar em relação à idéia de base e altura, as seguintes resoluções corretas:

* A figura que apresenta a menor área é a <u>figura A</u>

* As figuras que apresentam as maiores áreas, dependendo da escolha da base e da imprecisão do instrumento são as <u>figuras C e/ou F.</u>

* As figuras que possuem a mesma área, dependendo também da escolha da base e da imprecisão do instrumento, podem ser as <u>figuras C, D e F ou C e F.</u>

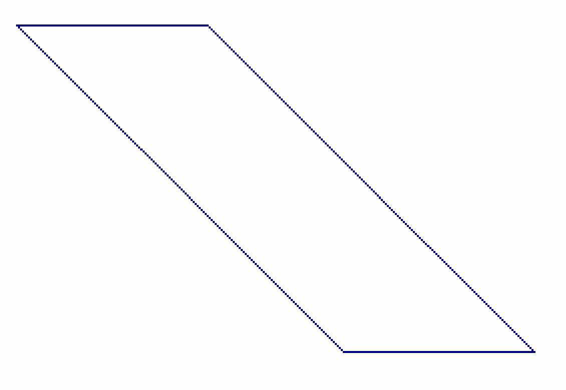
Quanto aos erros poderemos ter aquele, segundo o qual, o aluno mede os comprimentos dos lados dos paralelogramos com a régua, adiciona esses comprimentos e obtém uma ordenação nos números, na qual deduz uma ordenação de áreas. Assim, ele está utilizando fórmulas erradas para calcular a área ou não dissocia área e perímetro sob outros pontos de vistas, seja ele topológico, no qual o aluno não distingue interior e contorno, seja ele variacional, cujo procedimento é calcular o perímetro e acreditar que, se o perímetro é maior, então a área também será.

Outro erro possível, consiste em multiplicar os comprimentos dos lados do paralelogramo, considerando-os como retângulos deformados e em seguida comparar os números obtidos, para deduzir a ordem sobre as figuras. E ainda, podemos ter alunos que, após medirem os comprimentos dos lados com a régua, decidem a ordem das áreas dos paralelogramos a partir das ordenações dos comprimentos dos lados do paralelogramo. Estes procedimentos também foram observados em pesquisas anteriores, como a de Vinh Bang e Lunzer (1965), Douady e Perrin-Glorian (1989), Baltar (1996) e Bellemain e Lima(2002).

Em qualquer procedimento poderemos encontrar alunos resolvendo corretamente ou não a questão, mas não expressando as unidades de medidas trabalhadas, revelando assim, indícios de uma concepção numérica. E ainda, podemos ter alunos que expressam de forma inadequada as unidades de medida, destacando que possivelmente, para eles não há distinção entre comprimento e área.

4.1.2 – Atividade 3

Observe o paralelogramo abaixo:



a) Com uma régua, meça os comprimentos necessários para calcular a área do paralelogramo e registre os dados coletados na figura.

b) Qual a área aproximada do paralelogramo? Justifique sua resposta

- **Justificativa das principais escolhas na elaboração da atividade: variáveis didáticas e seus valores.**

Ao elaborar esta atividade escolhemos desenhar o paralelogramo numa posição não convencional, ou seja, o lado de menor comprimento posicionado na horizontal, e a inclinação da figura além de ser voltada para a esquerda é de tal forma que, se o lado tomado por base for o posicionado na horizontal, teremos as alturas no exterior do paralelogramo. Também não indicamos as medidas dos comprimentos dos lados.

Temos deste modo, como objetivos principais da atividade, verificar se os alunos escolhem corretamente os dados numéricos para a resolução da questão, se a mudança na inclinação da figura influencia na maneira como resolvem o problema e, ainda, quais as idéias de base e altura mobilizadas.

Dessa forma, o interesse principal por esta atividade, justifica-se, de um lado, pelo fato de a figura do paralelogramo encontrar-se de uma forma não convencional, ou seja, com um dos lados na posição horizontal e de maior comprimento, com inclinação para a direita.

Por outro lado, a atividade rompe com a regra de contrato didático mais geral no ensino da Matemática, não fortalecida no livro didático, mas que nos propusemos a observar nos procedimentos dos alunos, segundo a qual nos problemas que envolvem cálculo da área de um paralelogramo cabe ao professor dar as medidas de comprimento de um dos lados e da altura relativa a esse lado. Dessa forma, não é da responsabilidade do aluno pesquisar os dados.

Além do mais, após a verificação das medidas dos comprimentos dos lados, que lado irão tomar por base? O que está na posição horizontal e, assim, a altura relativa é exterior à figura ou o lado de maior comprimento? Desse modo, que altura é tomada? Interior ou exterior ao paralelogramo?

As medidas de comprimento dos lados e das alturas relativas a eles, em centímetros, são números decimais. Isto se justifica por sabermos que uma das fontes de erros no tratamento de problemas de área, envolvendo medidas decimais, é a manipulação de operações nesse conjunto numérico e, assim, poderemos observar, também, se os alunos manipulam corretamente com esses números.

Como foi dito explicitamente no enunciado da questão, os alunos deverão, de posse de uma régua, medir os comprimentos necessários para o cálculo de área e, em seguida, registrar esses dados na figura, pois com base nisso, poderemos possivelmente, identificar o que eles consideram como base e altura.

A figura do paralelogramo foi construída num software de geometria dinâmica. O lado posicionado na horizontal mede 2,5 cm, o lado oblíquo mede 6 cm e a área mede 10,75 cm^2

Contudo, devido à imprecisão que o material poderá apresentar, consideraremos como corretos também os resultados que apresentarem uma diferença de 0,5 cm na medida do comprimento tomado por base e/ou na altura relativa a essa base.

Sendo assim, considere x a medida, em centímetros, do lado de maior comprimento do paralelogramo; y a medida, em centímetros, do lado de menor comprimento; z a altura interna relativa ao lado de maior comprimento e t a altura relativa ao lado de menor comprimento, então os intervalos aceitáveis são:

$$\mathbf{5{,}5 \leq x \leq 6{,}5 \qquad 2 \leq y \leq 3}$$

$$\mathbf{1{,}3 \leq z \leq 2{,}3 \qquad 4 \leq t \leq 5}$$

E conseqüentemente, o intervalo aceito para as medidas de área em centímetros quadrados é $7{,}15 \leq A(cm^2) \leq 15$

- **Procedimentos de resolução esperados**

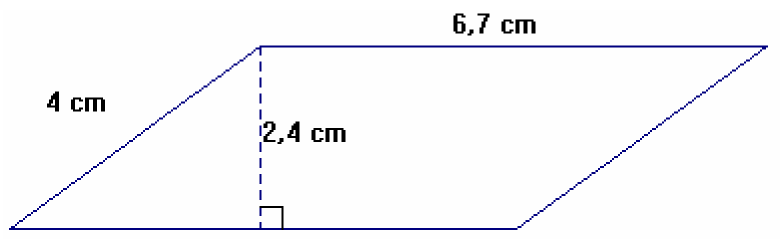
Se o aluno tem uma noção de paralelogramo muito restrita pela figura prototípica, ele poderá não reconhecer a figura. Caso contrário alguns procedimentos irão surgir.

Um dos procedimentos esperados é aquele no qual o aluno toma por base o lado do paralelogramo, cujo comprimento se encontra na posição horizontal, assim como a sua respectiva altura. Utiliza, em seguida, a fórmula da área do paralelogramo, encontrando como medida de área aproximada 11 cm^2. Outro procedimento esperado é aquele em que o aluno toma como base o lado de maior comprimento e encontra a altura relativa a este lado, aplica a fórmula obtendo como área aproximada 11,5 cm^2. Ambas as respostas são consideradas corretas devido à imprecisão do instrumento.

De acordo com a nossa fundamentação teórica, poderemos antecipar alguns erros: o primeiro de origem computacional, em que o aluno mede os comprimentos dos lados do paralelogramo e, em seguida, os soma, obtendo como resposta, a área de 17,4 cm^2. O segundo, que aparece na literatura como um dos erros freqüentes, a utilização de fórmulas erradas, no nosso caso, o aluno, após medir os comprimentos dos lados, os multiplica, realizando uma extensão indevida da fórmula da área do retângulo, encontrando a área aproximada de 15,5 cm^2.

Existe um erro que pode aparecer em qualquer procedimento, seja ele certo ou errado, no qual o aluno encontra os dados correspondentes e realiza o cálculo de área, porém não registra a unidade de área utilizada ou usa inadequadamente outra unidade, ou seja, trabalha com medidas de comprimentos em centímetros e a medida de área é dada em centímetros.

4.1.3– Atividade 4



a) **Desenhe um retângulo, cuja área seja a mesma do paralelogramo acima. Justifique sua resposta.**

b) **Desenhe um retângulo, cujo perímetro seja o mesmo do paralelogramo acima. Justifique sua resposta**

- **Justificativa das principais escolhas na elaboração da atividade: variáveis didáticas e seus valores.**

A escolha por esta atividade foi pelo fato de a questão trabalhar simultaneamente área e perímetro. Mesmo a atividade apresentando todos os dados necessários para a sua realização, o fato de desenhar um retângulo com a mesma área do paralelogramo, exige que o aluno decida, qual dos dados apresentados deve escolher para a realização da questão, assim como para desenhar um retângulo com o mesmo perímetro.

Sendo assim, o interesse por esta atividade justifica-se pelo fato que são apresentadas na atividade as medidas dos comprimentos dos lados e a medida da altura relativa a um dos lados. Rompemos com a regra de contrato didático na qual, nos problemas que envolvem cálculo da área de um paralelogramo são dadas exclusivamente as medidas de comprimento de um dos lados e da altura relativa a esse lado. Vale salientar que, se olharmos para o conjunto das atividades, não há ruptura de contrato, pois todos os dados são necessários para resolver pelo menos um dos itens da questão. No entanto, se tomarmos cada item separadamente há dados desnecessários.

Por outro lado, o aluno não precisa calcular a área e/ou perímetro para resolver a questão, rompendo também, desta forma, com a regra de contrato didático, segundo a qual um problema, envolvendo área de paralelogramo requer uma solução numérica.

- **Procedimentos de resolução esperados**

Um dos procedimentos esperados é aquele em que o aluno utiliza o papel transparente, em seguida, desconsidera as medidas apresentadas, desenha o paralelogramo, corta-o no segmento equivalente à altura e, por meio, da decomposição e recomposição produz um retângulo comparando com o paralelogramo, verificando assim, que ambas as figuras possuem a mesma área. Da mesma forma, para construir um retângulo com o mesmo perímetro do paralelogramo apresentado pode contornar a figura com cordão e, em seguida, montar uma figura retangular cujo perímetro tem o comprimento do cordão.

Outro procedimento é aquele no qual o aluno, para resolver o problema, desenha um retângulo com medidas de comprimento dos lados de 6,7 cm e 2,4 cm, obtendo desta forma, a mesma medida de área do paralelogramo apresentado. Do mesmo modo, desenhará um retângulo, cujas medidas de comprimento dos lados serão 6,7cm e 4 cm, que terá o mesmo perímetro do paralelogramo.

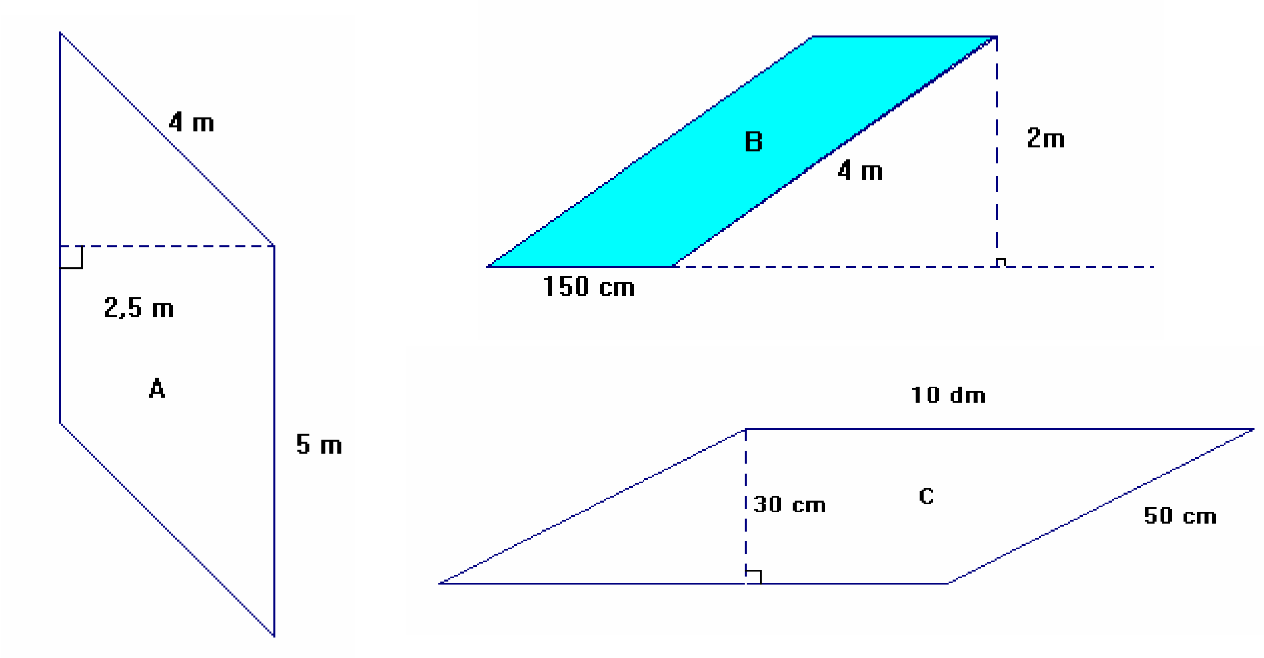
Um procedimento também esperado é aquele em que o aluno calcula a área e o perímetro do paralelogramo e, em seguida, encontra um retângulo com mesma área e depois outro, com o mesmo perímetro do paralelogramo, sem necessariamente, ter mesmas medidas de comprimento dos lados ou de base e altura.

Um procedimento errado esperado é aquele, no qual o aluno simplesmente desenha um retângulo com as medidas dos lados do paralelogramo, ou seja, 4 cm e 6,7 cm considerando que terá mesma área que o paralelogramo dado e repete o mesmo procedimento para o perímetro. Há diferentes origens possíveis para esse tipo de erro, um deles do ponto de vista variacional. Sendo assim, mobilizam um teorema-em-ação falso, pois para ele, figura de mesma área tem mesmo perímetro.

Outro erro consiste em confundir área e perímetro do ponto de vista topológico: no qual o aluno desenha o retângulo com lados medindo 4 cm e 6,7 cm para representar a área e um outro, com lados 2,4 cm e 6,7 cm para o perímetro, não confundindo dessa forma, área e perímetro.

4.1.4– Atividade 5

Calcule a área dos paralelogramos abaixo:



- **Justificativa das principais escolhas na elaboração da atividade: variáveis didáticas e seus valores.**

Ao elaborar esta atividade escolhemos desenhar os três paralelogramos, um com o lado de comprimento maior na vertical (figura A), outro na horizontal (figura C) e um outro na posição oblíqua (figura B). No entanto, em todos apresentamos a medida dos lados e uma altura correspondente a um dos lados. Em dois dos paralelogramos (figuras B e C), apresentamos também unidades de medidas diferentes, com o intuito de observamos a influência dos problemas relacionados com o uso de unidades.

Nenhuma das figuras foi desenhada em verdadeira grandeza. Tampouco estão desenhadas em escala. Logo, os alunos devem raciocinar sobre objetos idealizados e não sobre o desenho. Então, a possibilidade de eles raciocinarem sobre o desenho é desfavorecida pela característica da atividade.

O interesse por esta atividade justifica-se, pelo fato de a questão apresentar dados numéricos desnecessários, levando o aluno a decidir, qual a medida do lado que corresponde à altura apresentada, rompendo desta forma, com a regra de contrato didático, segundo a qual nos problemas que envolvem cálculo da área de um paralelogramo são dadas exclusivamente as medidas de comprimento de um dos lados e da altura relativa a esse lado.

Por outro lado, temos o interesse de investigar, se diante da figura que é apresentada a altura exterior ao paralelogramo (B) ou na qual, o lado tomado por base não está na posição horizontal (A), se alguns alunos sentem dificuldades ou, até mesmo bloqueio, no processo de resolução do problema.

- **Procedimentos de resoluções esperados**

Esperamos que nesta atividade os alunos encontrem como respostas as áreas abaixo, levando a crer que, independentemente dos dados desnecessários, a posição dos paralelogramos e as unidades de medidas diferentes apresentados nas figuras, o aluno resolve a questão corretamente:

Tabela 7 – Exposição das respostas de áreas corretas relativas à atividade 5

Figura	Medida de área em cm^2	Medida de área em m^2	Medida de área em dm^2
A	-	12,5	-
B	30000	3	-
C	3000	-	30

Quanto aos erros, temos aquele em que o uso da fórmula é inadequado, como citada nas pesquisas anteriores. O aluno poderá, diante da questão, realizar uma extensão indevida da fórmula da área do retângulo, isto é, em vez de fazer o produto do lado tomado por base pela altura relativa a esse lado, ele multiplica os comprimentos dos lados da figura.

Outros erros poderão acontecer relativos à produção de fórmulas tais como: o aluno determina as áreas dos paralelogramos, multiplicando todos os números encontrados na figura. Utiliza todos os dados apresentados na questão e, para determinar a área, multiplica a medida de comprimento tomado como base a sua altura correspondente e, em seguida, divide pela medida do outro comprimento do paralelogramo. Além do uso da fórmula ser inadequado, em ambos os erros, o aluno segue a lógica da regra de contrato mais geral no ensino da Matemática, segundo a qual para resolver um problema, é necessário utilizar todos os dados do enunciado.

Um erro também esperado é aquele, em que o aluno realiza o produto dos números, levando em consideração apenas o aspecto numérico da questão, por exemplo, 30 cm x 10 dm= 300. Nesse sentido, desconsidera que para multiplicar medidas é necessário que elas estejam na mesma unidade.

Outro erro esperado em todos os procedimentos é aquele, também relacionado com o aspecto numérico, no qual o aluno resolve a questão, mas não expressa a unidade de medida trabalhada. E ainda, poderemos encontrar procedimentos, em que ele utiliza uma unidade de medida para o cálculo de área e expressa o resultado em outra, por exemplo, trabalha com as medidas de unidades em cm e registra cm ou m^2.

4.1.5– Atividade 6

Seja um paralelogramo ABCD tal que o lado AB mede 6 dm e o lado BC mede 4 dm. Sabendo que a altura relativa ao lado AB mede 3 dm, é possível determinar o comprimento da altura relativa ao lado BC? Justifique sua resposta.

- **Justificativa das principais escolhas na elaboração da atividade: variáveis didáticas e seus valores.**

O interesse principal por esta atividade justifica-se, pelo fato de ela abordar a invariância da área com relação à escolha da base. Então, se o aluno responder corretamente a questão é porque ele tem esse conhecimento construído, caso contrário, iremos analisar o conjunto das outras questões para verificarmos que idéia de base ele possui.

Ao elaborar essa atividade escolhemos não desenhar a figura do paralelogramo, pois, durante a análise do livro didático, constatamos que todos os problemas envolvendo área de paralelogramo, apresentavam uma figura. Então, nosso objetivo é observar como o aluno reage a essa mudança de valor na variável didática, a existência de figuras.

A unidade de medida escolhida para esta questão é o decímetro pois, com essa unidade de medida, dificultaria o desenho por parte dos alunos, uma vez que ele não poderia desenhar na folha de papel ofício a figura em verdadeira grandeza.

Não é necessário o aluno desenhar a figura para responder a questão, no entanto, se ele desenhar a figura, usando alguma escala, para solucionar o problema, verificaremos também, se no desenho um dos lados é posicionado na horizontal e, neste caso, se o lado horizontal é o de maior comprimento. Verificaremos também se a altura traçada é interior ou exterior ao paralelogramo. Com isso, perceberemos se há um protótipo para o aluno.

Ao observar o enunciado da atividade, o aluno perceberá que as unidades de medidas são iguais, logo, não será necessário realizar nenhuma conversão.

- **Procedimentos de resolução esperados**

A partir dos dados expostos no problema, é possível determinar o comprimento da altura relativa ao outro lado, pois como a altura relativa ao lado AB mede 3 dm e o comprimento AB mede 6 dm, a área do paralelogramo é 18 dm^2. Então, para descobrirmos o comprimento da outra altura, basta saber que, se a área é 18 dm^2 e se a medida de comprimento do outro lado é 4 dm, então a altura relativa ao lado BC é de 4,5 dm (pois todas as medidas de comprimento são dadas em decímetros e 18 : 4 = 4,5).

Um procedimento esperado para esta atividade é aquele em que o aluno observa o enunciado da questão, desenha a figura numa escala menor, em seguida justifica que é possível encontrar a resposta e depois realiza os cálculos que determinam a altura relativa ao lado BC. Com esse procedimento, o aluno percebe a necessidade da presença da figura e, mesmo com as medidas de comprimento dadas em decímetros, utiliza a escala 1:10 e desenha a figura com os comprimentos em centímetros. Em seguida, observa a figura e responde corretamente a questão, percebendo também a invariância da área com relação à escolha da base.

Um procedimento errôneo esperado é aquele no qual, o aluno não desenha a figura do paralelogramo, não realiza nenhum cálculo e justifica que é impossível resolver o problema. Interpretamos que, nesse caso, a idéia da invariância da área de um paralelogramo com relação à escolha do lado tomado como base não está construída.

4.2- Análise de resultados das atividades aplicadas com os alunos da 8ª série

A análise dos resultados refere-se ao exame dos protocolos dos alunos de uma turma de 8ª série do Ensino Fundamental de uma escola pública da Cidade do Recife e divide-se em dois blocos. No primeiro, apresentamos uma análise quantitativa, na qual tecemos breves comentários sobre os índices de acertos, erros e ausência de resposta para cada questão do teste. No segundo, é realizada uma análise de natureza mais qualitativa, na qual são discutidos os procedimentos de resolução dos alunos diante das questões propostas, que envolvem área de paralelogramo.

A aplicação do teste, composto por seis atividades, teve duração de 100 minutos. No momento da sua aplicação, dos 27 alunos que compõem a turma, só compareceram 21 alunos. Após a distribuição dos testes e do kit de materiais, chamamos a atenção dos alunos quanto à importância de justificarem suas respostas para cada questão. Não houve problemas com o tempo, inclusive alguns alunos terminaram antes do tempo previsto.

Como já foi explicitado na metodologia, das seis atividades propostas no teste, só iremos analisar cinco, pois descartamos a Atividade 2, uma vez que percebemos que a questão poderia gerar dúvidas por parte dos alunos, no que se refere à análise da figura desenhada em perspectiva, devido à reprodução da questão que não ficou de boa qualidade.

4.2.1- Análise quantitativa dos testes

A tabela, a seguir, apresenta os erros, acertos e ausência de resposta por atividades. Relembremos os intervalos e margens de aceitação para definir certo ou errado, em cada questão:

- na Atividade 1, a menor área é a da figura A, as figuras que apresentam as maiores áreas, dependendo da escolha da base são as figuras C e/ou F e as que possuem a mesma área, C, D e F ou C e F.
- na Atividade 3 o intervalo aceito para área é $7{,}15 \leq A\ (cm^2) \leq 15$.
- na Atividade 4 consideramos corretos os resultados que caracterizavam o perímetro e a área através da escrita ou pelo desenho.
- na Atividade 5, a área da figura A é de 12,5 m^2; a área da figura B pode ser dada em metros quadrados (3 m^2) ou em centímetros quadrados (30000 cm^2) e a área da figura C é de 3000 cm^2 ou 30 dm^2
- na Atividade 6, consideramos corretos os procedimentos realizados com ou sem desenho, no qual intervinha a idéia de invariância da área de um paralelogramo com respeito à escolha do lado tomado como base.

De maneira global, consideramos corretas as respostas, nas quais o aluno realizava o cálculo de área corretamente, mesmo se não apresentava a unidade de área trabalhada. No entanto, consideramos erradas as respostas nas quais o aluno usa de forma inadequada as unidades, não percebendo, por exemplo, que comprimento e área, sendo grandezas de natureza distintas, também têm unidades de medidas diferentes.

Tabela 8: Resultados quantitativos do teste aplicado com 21 alunos de uma turma de 8ª série

CATEGORIAS	ATIVIDADES							
	1	2	3	4	5 fig. A	5 fig. B	5 fig. C	6
Não respondeu	-	-	-	01	02	04	02	03
Total de erros	06	-	06	04	07	06	08	12
Total de acertos	15	-	15	16	12	11	11	06
Percentual de acertos	**71,4%**	**-**	**71,4%**	**76,1%**	**57,1%**	**52,3%**	**52,3%**	**28,5%**

Observando a tabela acima, percebemos que, no conjunto das atividades, houve um índice baixo de ausência de respostas. Nas Questões 1 e 3 todos os alunos responderam, na Questão 4 apenas um aluno deixou de responder, nas Questões 5a e 5c dois alunos, na Questão 6 três alunos e tivemos a maior quantidade de ausência de respostas na Questão 5b. Interpretamos essa constatação como indício de que os alunos têm uma boa familiaridade com o conteúdo em foco na pesquisa.

Constatamos, também, que as Atividades 1, 3, 4 apresentam elevados índices de acertos, pois mais de 70% dos alunos acertaram. Por outro lado, a Atividade 5, em todos os seus itens, apresentou resultados inferiores a 60%. E, na Atividade 6, percebemos um índice de acertos muito baixo em relação às demais atividades.

Observamos que a Atividade 4, que é a única que aborda de maneira direta a dissociação entre área e perímetro, apresentou o maior índice de acerto, com aproximadamente 76%.

Realizando uma análise transversal por teste[23], dos 21 alunos pesquisados, em relação a acertos e erros, constatamos quatro blocos: o primeiro, formado por 4 alunos (cerca de 19%) que acertaram todas as questões; o segundo, composto de 5 alunos que acertaram todas as atividades, exceto a Questão 6; no terceiro agrupam-

[23] A tabela com acertos e erros por aluno encontra-se no Anexo 3.

se 3 alunos que erraram somente as duas últimas questões e finalmente o quarto bloco no qual constam 3 alunos (cerca de 14%) que erraram todas as questões[24]
Para um estudo mais minucioso desses acertos e erros, assim como dos procedimentos que os alunos utilizaram para resolver as questões, realizamos uma análise qualitativa.

4.2.2- Análise qualitativa

Nossa análise qualitativa toma como referência as categorias de análise descritas na metodologia, quanto aos procedimentos de resolução dos alunos e à análise a priori do teste.

Durante a observação detalhada dos protocolos dos sujeitos, percebemos que o único material utilizado, dentre aqueles fornecidos no Kit de material, foi a régua graduada. O uso desse instrumento de medida, como será detalhada nas análises específicas de cada uma das atividades, se conecta com um conjunto de indícios da força das concepções numéricas na resolução dos problemas envolvendo área do paralelogramo.

4.2.2.1- Análise qualitativa da Atividade 1

Analisando esta atividade percebemos que, embora os alunos pudessem resolvê-la por procedimento não-numérico, conforme análise a prior, todos eles resolveram (corretamente ou não) numericamente, e para isso usaram a régua graduada.

Dos 21 alunos pesquisados, 15 resolveram corretamente a Questão 1, da seguinte forma: escolheram um lado para ser tomado como base, mediram o comprimento desse lado e da altura relativa a ele, em seguida, aplicaram a fórmula de área e finalmente compararam as áreas das figuras. Veja a justificativa no protocolo **A**10 a seguir:

[24] Não conseguimos caracterizar um perfil para os demais alunos que responderam o teste.

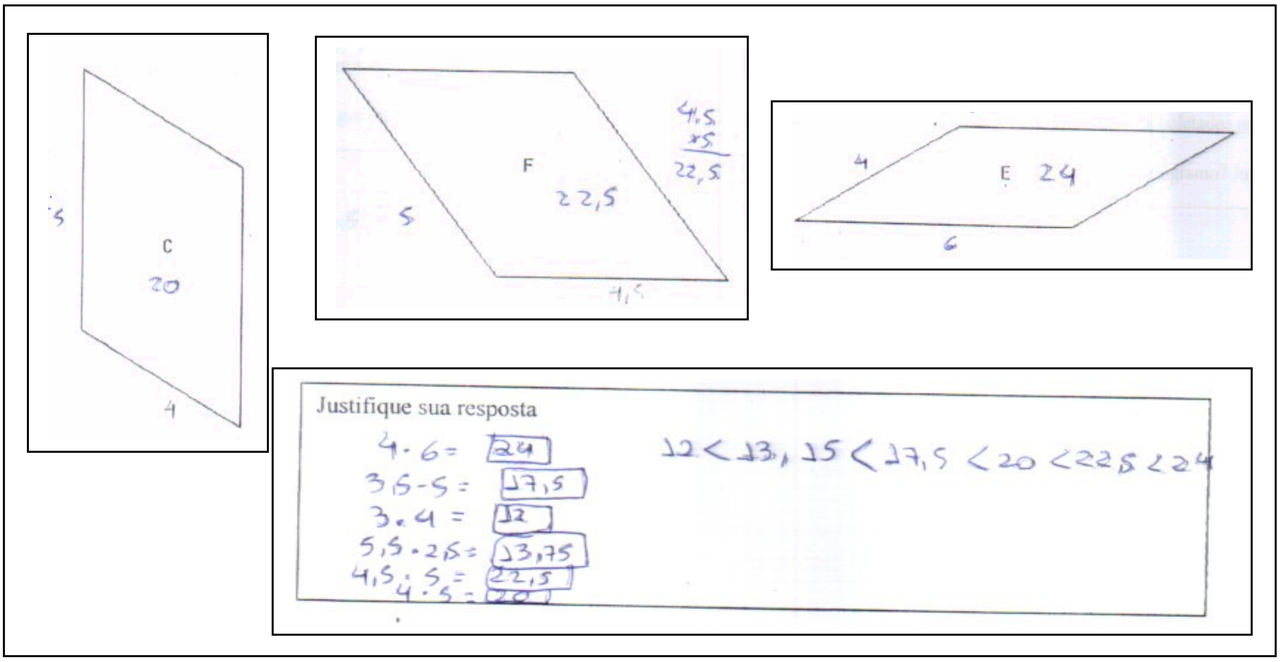
Justifique sua resposta

Mediu-se com a régua ~~[illegible]~~ a base e a altura de cada um dos paralelogramos. Multiplicando o valor da base e da altura de cada um tem-se a área. Os cálculos aparecem acima.

Figura 32: Análise do protocolo A10 em relação à atividade 1

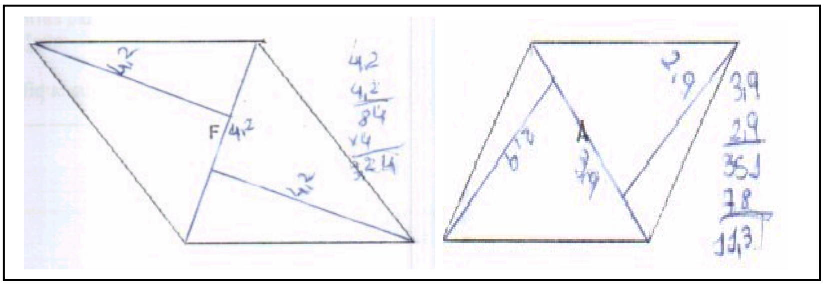
Como podemos perceber no protocolo anterior, existe uma marca na linguagem do aluno que remete à unicidade da base, ou seja, para ele o lado tomado por base não é qualquer um. Em todas as figuras possíveis, toma por base o lado que está posicionado na horizontal. Fato que merece destaque é que esse aluno faz parte do grupo que acerta todas as questões, mas erra a última, exatamente, a que trata da invariância da área com relação à escolha da base.

Constatamos que, o procedimento que conduz a erro mais utilizado (3 alunos) é aquele em que o aluno multiplica os comprimentos dos lados do paralelogramo, como destacado na análise a priori, o que reforça os resultados das pesquisas anteriores. Observe, a seguir, o cálculo de área de alguns paralelogramos do protocolo **A**20, assim como a sua justificativa:



Figuras 33: Análise do protocolo **A**20 em relação à atividade 1

Entre os procedimentos, existe um que não esperávamos. Observe alguns paralelogramos do protocolo A13 a seguir, em que o aluno encontra uma das diagonais dos paralelogramos e, em seguida, determina a altura relativa a esta diagonal e depois multiplica o valor da diagonal pela altura correspondente.



Figuras 34: Análise do protocolo A13 em relação à atividade 1

A análise dos testes mostrou que todos os alunos, de uma maneira explícita ou não, utilizaram fórmulas para comparar as áreas e que apenas 3 alunos, além disso, usaram processos de corte-colagem, composição ou decomposição de figuras, ou seja, três alunos recorreram a outros procedimentos para se chegar ao numérico.

O fato de os alunos buscarem dados numéricos nas figuras da Questão 1, que era uma atividade que envolvia comparação de áreas, usarem raramente processos de corte-colagem, composição e decomposição indicam indícios de uma concepção numérica de área.

Apesar da maioria dos alunos ter utilizado uma unidade de medida adequada para trabalhar com a área das figuras, existe ainda nesse grupo um índice elevado (43%) de alunos que não usam nenhuma unidade de medida, fato que nos chama atenção, pois, na ocasião em que o aluno utiliza a régua graduada para medir os segmentos, a unidade de comprimento mais conveniente seria o cm, o que parece ilustrar para nós, que o aspecto numérico está desconectado da noção de grandeza.

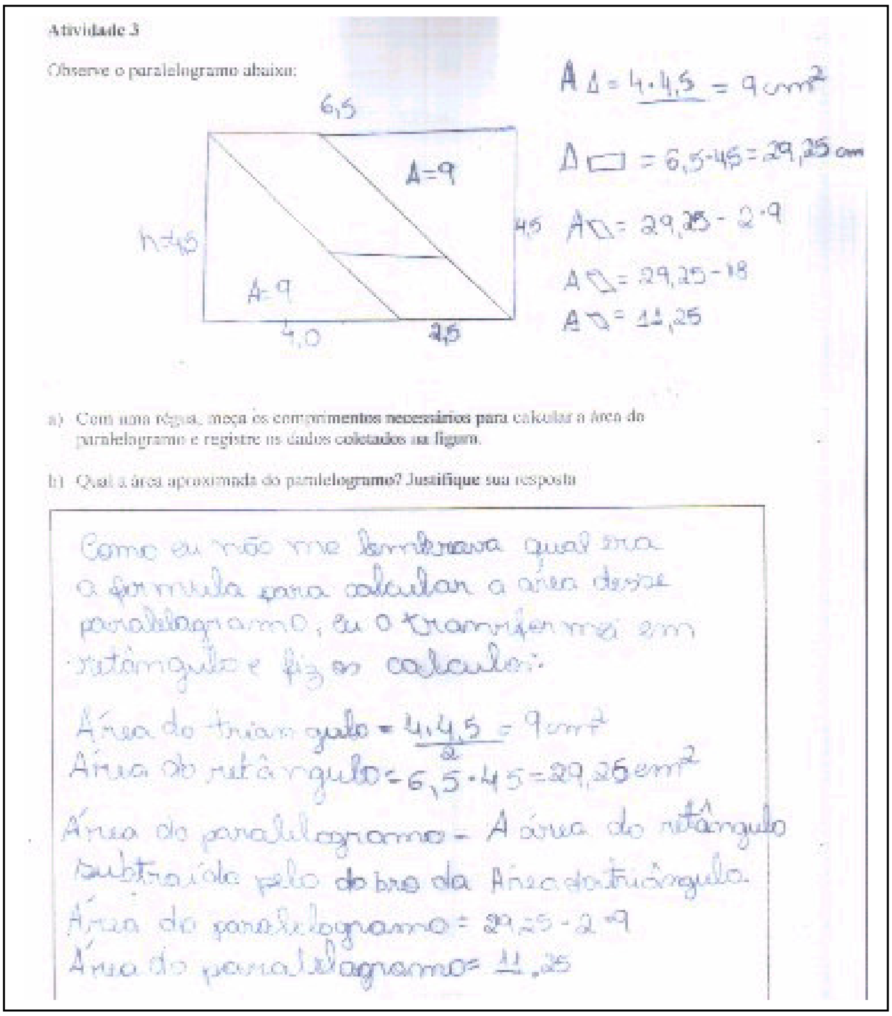
Constatamos que a idéia predominante de base é aquela que corresponde ao lado posicionado na horizontal. No entanto, se a mobilização dessa idéia não é possível, por causa da figura, mobiliza-se a idéia de base como o lado de maior comprimento. Da mesma forma, constatamos também que 62% dos alunos utilizaram a altura que estava no interior do paralelogramo.

4.2.2.2- Análise qualitativa da Atividade 3

Constatamos nesta atividade que, para a maioria dos alunos, a inclinação da figura parece não influenciar na resolução do problema, assim como a escolha dos dados numéricos para calcular a área do paralelogramo não parece provocar dificuldades expressivas.

Percebemos que vários procedimentos foram utilizados para determinar a área do paralelogramo. Entre os procedimentos mais utilizados, destacam-se aqueles em que os alunos medem os comprimentos dos lados, tomam um lado por base, determinam a sua respectiva altura e calculam a área. Assim temos 08 alunos que tomaram por base o lado que se encontra na posição horizontal e, nesse caso, a altura relativa era externa ao paralelogramo e 05 alunos tomaram por base o lado oblíquo, que é o de maior comprimento.

Fato que merece destaque é que dois alunos utilizaram o seguinte procedimento: formaram um retângulo que pode ser decomposto pelo paralelogramo apresentado na questão e dois triângulos retângulos congruentes, calcula a área do retângulo e subtrai as áreas dos triângulos retângulos. Este tipo de procedimento não é o mais econômico, mas revela a idéia de aditividade das áreas e o uso de propriedades geométricas, na medida que utiliza o processo de complementaridade da figura. Veja o procedimento de A08 a seguir:


Atividade 3

Observe o paralelogramo abaixo:

$A_\Delta = \frac{4 \cdot 4,5}{2} = 9 \text{ cm}^2$

$A = 6,5 \cdot 4,5 = 29,25$ cm

$A = 29,25 - 2 \cdot 9$

$A = 29,25 - 18$

$A = 11,25$

a) Com uma régua, meça os comprimentos necessários para calcular a área do paralelogramo e registre os dados coletados na figura.

b) Qual a área aproximada do paralelogramo? Justifique sua resposta

Como eu não me lembrava qual era a fórmula para calcular a área desse paralelogramo, eu o transformei em retângulo e fiz os calculos:

Área do triângulo $= \frac{4 \cdot 4,5}{2} = 9 \text{ cm}^2$

Área do retângulo $= 6,5 \cdot 4,5 = 29,25 \text{ cm}^2$

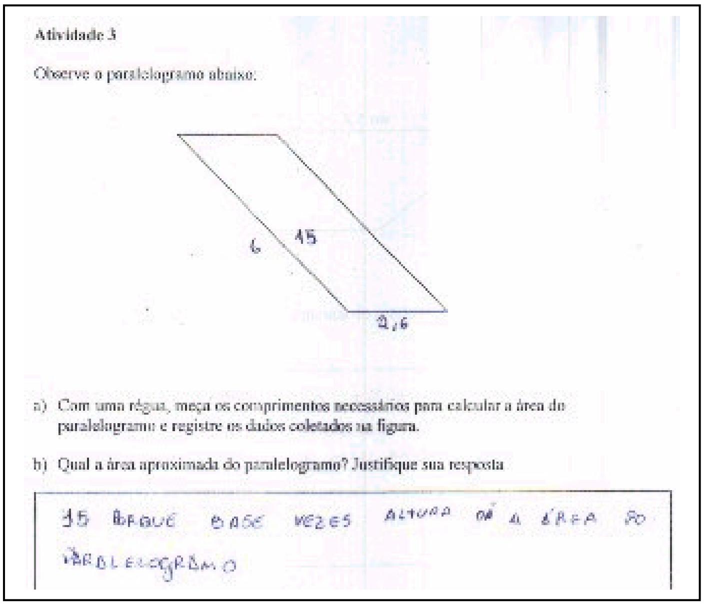
Área do paralelogramo = A área do retângulo subtraída pelo dobro da Área do triângulo.

Área do paralelogramo $= 29,25 - 2 \cdot 9$

Área do paralelogramo $= 11,25$

Figura 35: Análise do protocolo A08 em relação à atividade 3

Quanto aos erros cometidos, destaca-se, com cerca de 19% de utilização (04 alunos), aquele no qual os alunos, após medirem os comprimentos, multiplicam os comprimentos dos lados do paralelogramo, realizando uma extensão indevida da fórmula de área do retângulo.


Atividade 3

Observe o paralelogramo abaixo:

a) Com uma régua, meça os comprimentos necessários para calcular a área do paralelogramo e registre os dados coletados na figura.

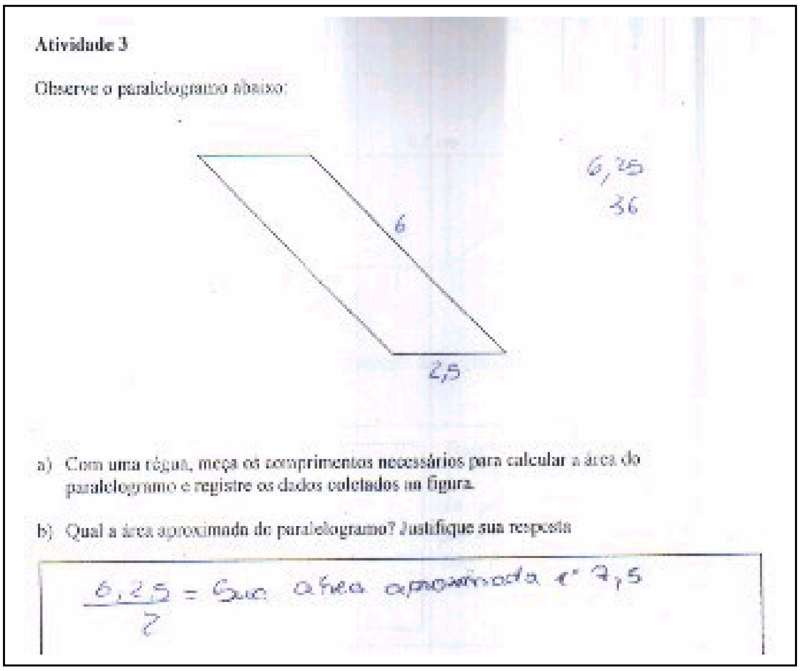
b) Qual a área aproximada do paralelogramo? Justifique sua resposta

15 PORQUE BASE VEZES ALTURA DÁ A ÁREA DO PARALELOGRAMO

Figura 36: Análise do protocolo A18 em relação à atividade 3

Como podemos perceber no protocolo anterior, este tipo de erro já identificado em pesquisas anteriores, novamente, é confirmado nesta questão, correspondendo à mobilização do teorema-em-ação, segundo o qual a área de um paralelogramo é dada pelo produto das medidas de seus lados.

Dois alunos utilizaram um procedimento não previsto na análise a priori: fizeram o produto dos comprimentos dos lados do paralelogramo e dividiram por 2. Trata-se de uma fórmula errônea, possivelmente inspirada pelas fórmulas de área de um retângulo e de um triângulo. Observe o protocolo **A**21 a seguir:



Atividade 3

Observe o paralelogramo abaixo:

6,25
36

6

2,5

a) Com uma régua, meça os comprimentos necessários para calcular a área do paralelogramo e registre os dados coletados na figura.

b) Qual a área aproximada do paralelogramo? Justifique sua resposta

$\frac{6,25}{2}$ = Sua área aproximada é 7,5

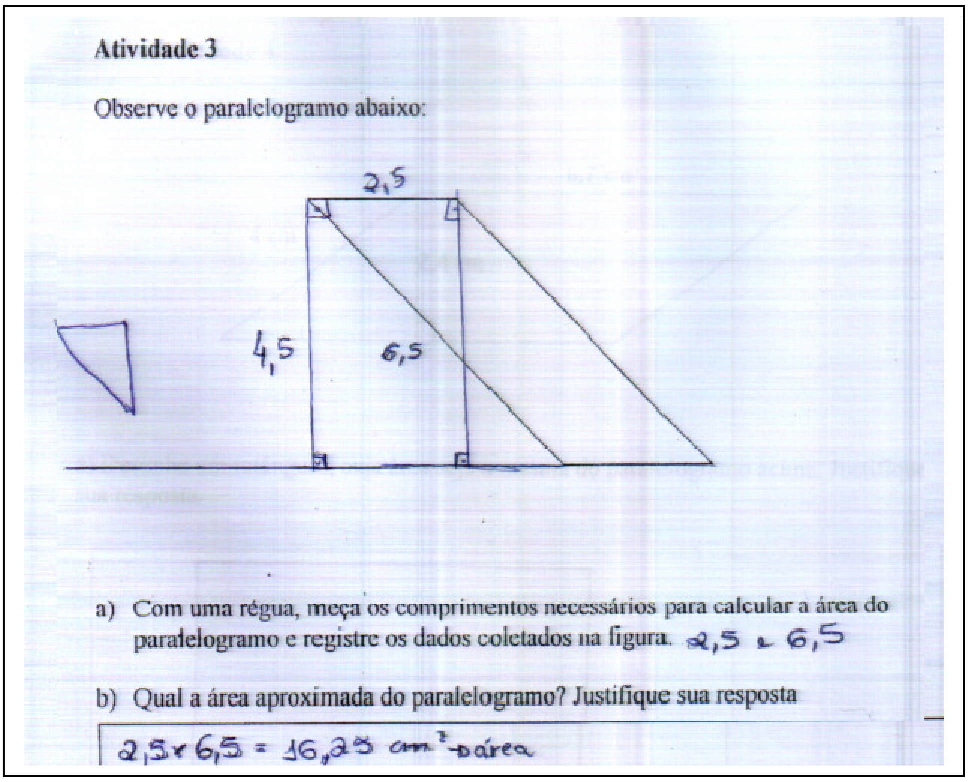
Figura 37: Análise do protocolo A21 em relação à atividade 3

Vale salientar, que essa atividade foi elaborada de forma que fosse privilegiada a natureza numérica da solução. Todos os alunos utilizaram um procedimento numérico, do mesmo modo, que usaram fórmulas para resolver a questão, seja direta ou indiretamente. No entanto, deve-se ressaltar a mobilização simultânea de conhecimentos do campo geométrico por 8 alunos que fizeram combinações de procedimentos, ou seja, usaram fórmulas, mas também processos de corte-colagem, composição ou decomposição de figura para calcular a área.

Quanto à escolha da base e da altura, percebemos que 12 alunos (57%) da turma tomaram por base o lado do paralelogramo que se encontrava na posição horizontal, e, neste caso, a altura correspondente era exterior ao paralelogramo, confirmando de certo modo, a regra de contrato didático, segundo a qual nos problemas que envolvem cálculos de área do paralelogramo, o lado tomado por base é o que se encontra na posição horizontal.

No entanto, 05 alunos, escolheram como base o lado de maior comprimento, tomando uma altura interior à figura, ou seja, confirmando a regra segundo a qual nos problemas que envolvem cálculos da área do paralelogramo, o lado tomado por base é o de maior comprimento.

Vale salientar que 04 alunos mobilizaram esses conceitos erradamente, pois existe a utilização implícita de uma fórmula que corresponde ao produto dos comprimentos dos lados. Caberia uma investigação mais profunda para verificar se o erro se situa na identificação dos elementos base e altura a figura ou na fórmula (produto dos comprimentos dos lados x produto dos comprimentos da base pela altura). Observe o protocolo A15 a seguir



Atividade 3

Observe o paralelogramo abaixo:

a) Com uma régua, meça os comprimentos necessários para calcular a área do paralelogramo e registre os dados coletados na figura. 2,5 e 6,5

b) Qual a área aproximada do paralelogramo? Justifique sua resposta

2,5x6,5 = 16,25 cm² → área

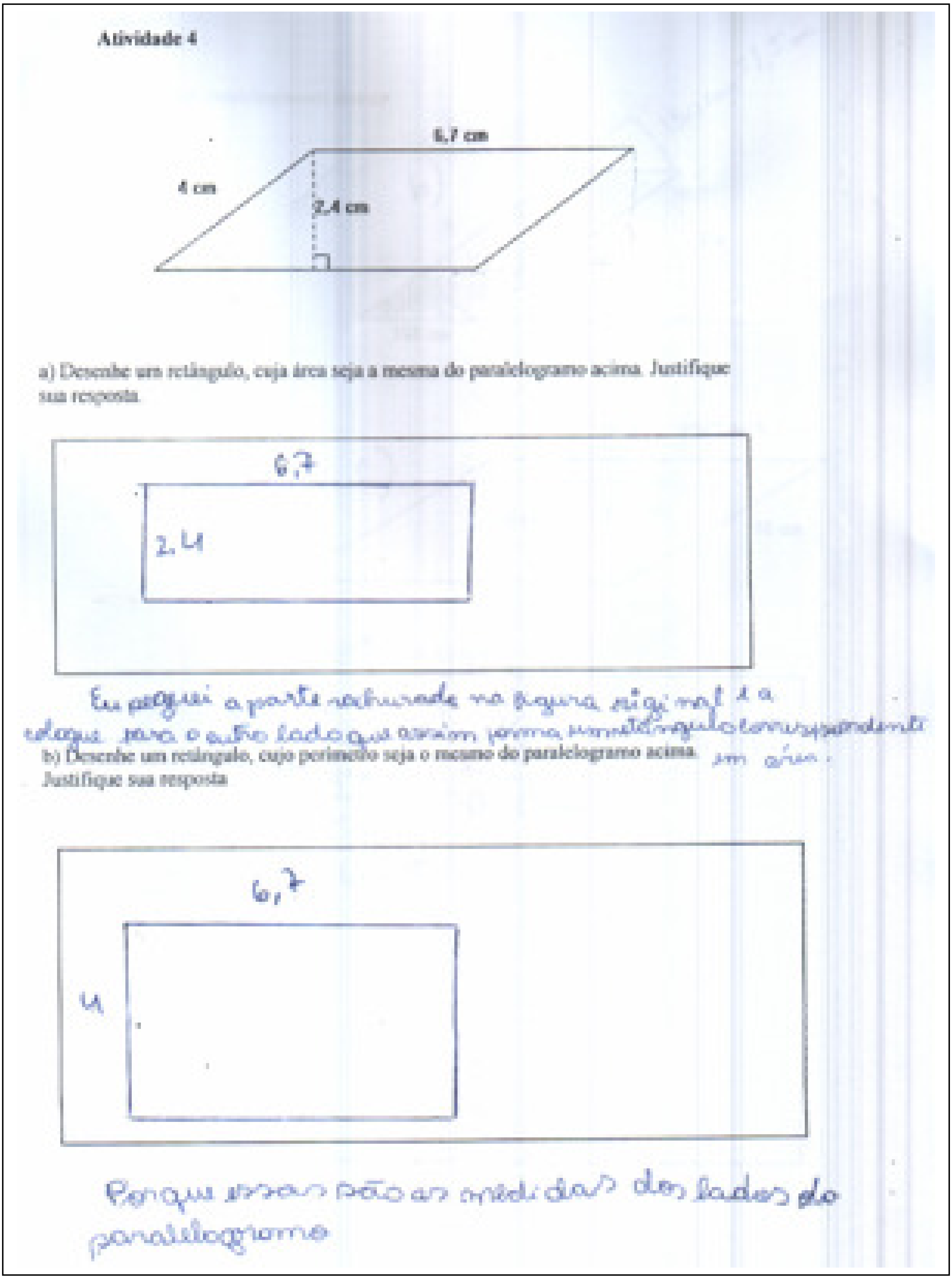
Figura 38: Análise do protocolo A15 em relação à atividade 3

Em relação ao uso de unidades de medida, constatamos, novamente, que quase a metade da turma (43% dos alunos) não usou nenhuma unidade de medida na resolução da questão, levando-nos a crer que o aspecto numérico está desconectado da noção de grandeza.

4.2.2.3- Análise qualitativa da Atividade 4

Como dito anteriormente na análise quantitativa, esta atividade teve índices elevados de acertos, indicando que, particularmente nesta atividade, a maioria dos alunos dissocia a área do perímetro.

O procedimento mais utilizado (14 alunos) foi aquele no qual eles percebem que não é necessário calcular a área e/ou perímetro para resolver a questão, bastando manipular com os dados. Observe o protocolo a seguir:



Atividade 4

a) Desenhe um retângulo, cuja área seja a mesma do paralelogramo acima. Justifique sua resposta.

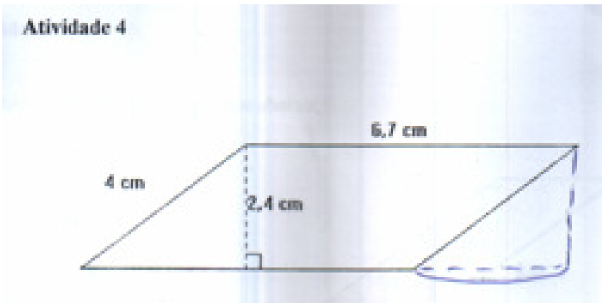
Eu peguei a parte rachurada na figura original e a coloquei para o outro lado que assim forma um retângulo correspondente em área.

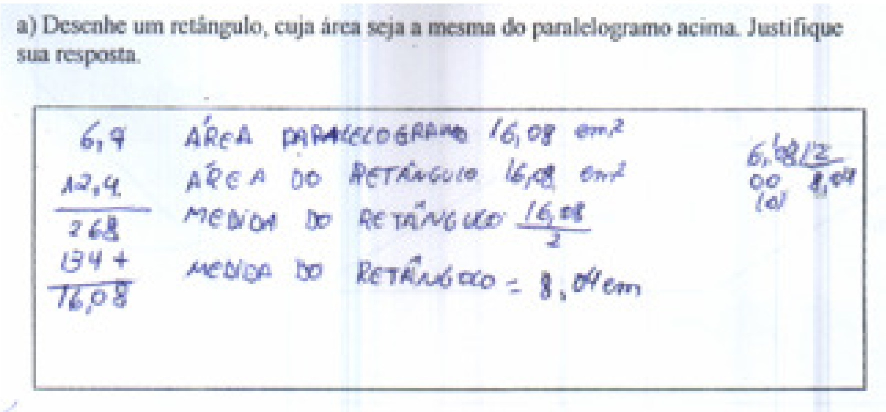
b) Desenhe um retângulo, cujo perímetro seja o mesmo do paralelogramo acima. Justifique sua resposta.

Porque essas são as medidas dos lados do paralelogramo

Figura 39: Análise do protocolo A-04 em relação à atividade 4

Durante a análise, encontramos alguns erros não esperados e que nos chamam a atenção, mas que não soubemos interpretar. Em ambos os casos, acreditamos que uma entrevista com esses alunos ajudaria a compreender o que eles fizeram. Observe os protocolos A17 e A15 a seguir:





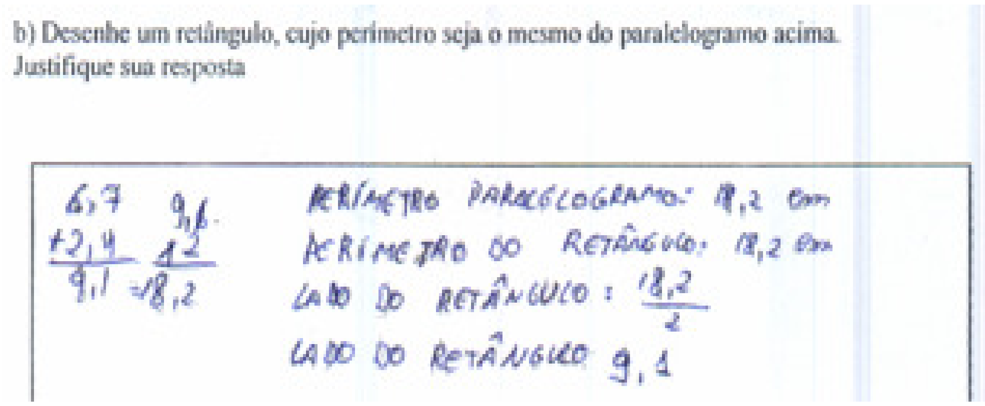
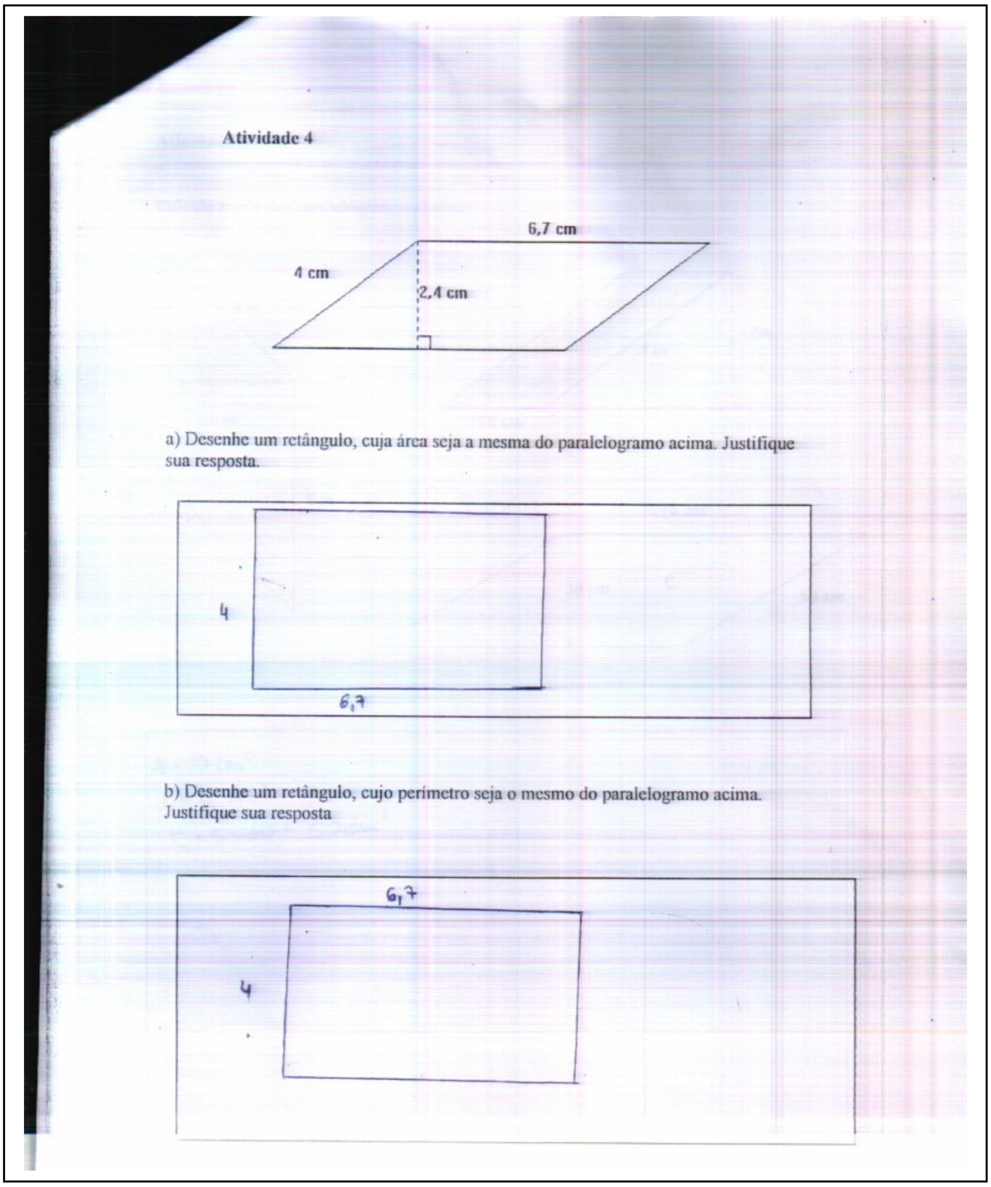


Figura 40: análise do protocolo A17 em relação à atividade 4

Em relação ao protocolo A15, encontramos um procedimento que mostra claramente a confusão entre área e perímetro. No entanto, não conseguimos identificar sob que ponto de vista (topológico, variacional). Observe:


Atividade 4

6,7 cm
4 cm
2,4 cm

a) Desenhe um retângulo, cuja área seja a mesma do paralelogramo acima. Justifique sua resposta.

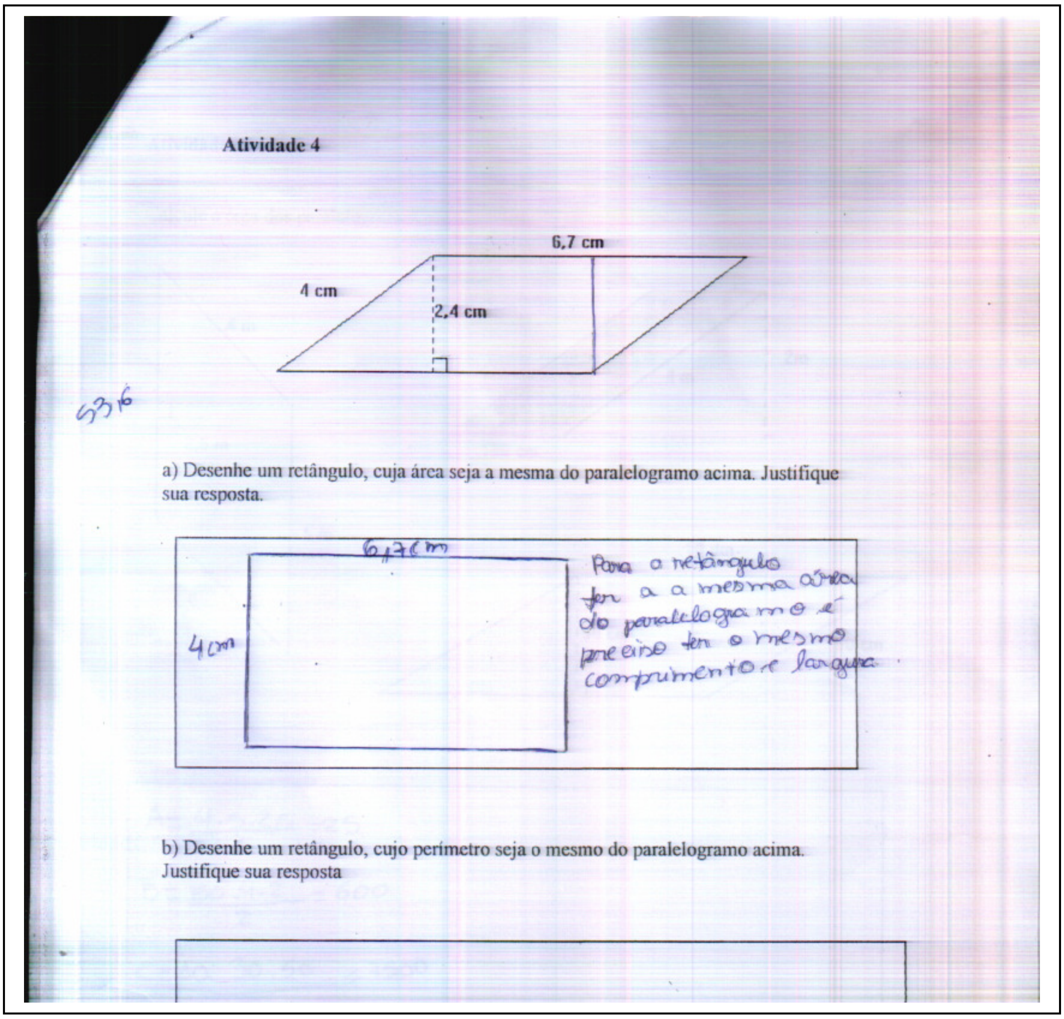
4
6,7

b) Desenhe um retângulo, cujo perímetro seja o mesmo do paralelogramo acima. Justifique sua resposta

6,7
4

Figura 41 : análise do protocolo A15 em relação à atividade 4

Encontramos um procedimento errado, em que o aluno desenha o retângulo com as medidas dos lados 4 cm e 6,7 cm representando aquele de mesma área e não responde o item b da questão. É possível que o aluno não dissocie área e perímetro. No entanto, esse tipo de procedimento pode estar relacionado a vários pontos de vista. Observe o protocolo A21a seguir:


Atividade 4

6,7 cm

4 cm

2,4 cm

a) Desenhe um retângulo, cuja área seja a mesma do paralelogramo acima. Justifique sua resposta.

6,7 cm

4cm

Para o retângulo ter a a mesma área do paralelogramo é preciso ter o mesmo comprimento e largura.

b) Desenhe um retângulo, cujo perímetro seja o mesmo do paralelogramo acima. Justifique sua resposta

Figura 42: análise do protocolo A21 em relação à atividade 4

Diante dessa questão, cerca de 30% da turma, ou seja, 06 alunos utilizaram procedimentos numéricos para resolver o problema, assim como, um baixo índice não deixa explícito o uso de fórmulas, porém 09 alunos (43%) utilizam procedimentos geométricos. Vale salientar que essa atividade foi elaborada de forma que os alunos não precisassem usar procedimentos numéricos.

Fatos que merecem destaques são que cerca de 14% da turma (03 alunos) simplesmente não desenham os retângulos solicitados, porém caracterizam (corretamente ou não) as figuras, como vimos no protocolo 40. Também 14% deles criaram corretamente retângulos que correspondem às condições solicitadas, mas cujos comprimentos dos lados são diferentes daqueles do paralelogramo. Mesmo utilizando procedimentos numéricos, os alunos são capazes de produzir figuras novas, ou seja, há um desprendimento da figura, como podemos observar, no protocolo **A**19 a seguir:

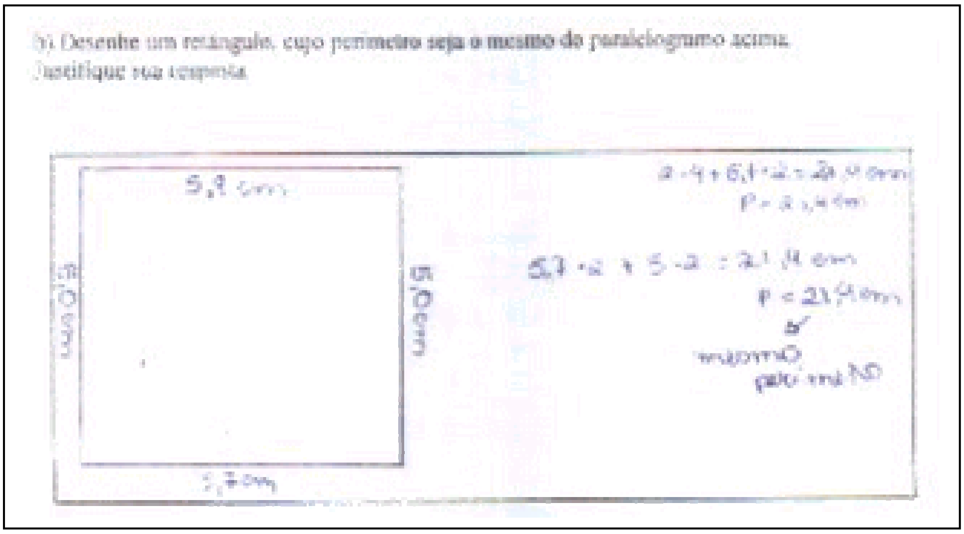


Figura 43: Análise do protocolo A19 em relação à atividade 4

Constatamos também que cerca de 57% da turma (12 alunos) não usa unidade de medida para expressar as dimensões do retângulo criado, o perímetro da figura ou a área.

4.2.2.4- Análise qualitativa da Atividade 5

Durante a análise da Atividade 5, constatamos que, mesmo com os paralelogramos em posições e inclinações diferentes, o procedimento de resolução que mais os alunos utilizaram foi aquele no qual, o aluno escolhe corretamente os dados para calcular a área das figuras, aplica a fórmula e, em seguida, apresenta o resultado, inclusive com as unidades de medida trabalhadas. Este fato aconteceu em todas as figuras, exceto na figura B, em que o índice de resolução foi inferior a 50%, ou seja, 9 alunos resolveram a questão por esse procedimento.

Esta atividade foi construída de forma que os procedimentos numéricos fossem privilegiados e de fato as soluções numéricas foram majoritariamente apresentadas pelos alunos.

Como visto na análise quantitativa, a figura A teve o maior índice de acerto nessa questão. Supomos que esse fato ocorreu porque não era necessário realizar mudanças de unidades, o lado tomado por base é aquele de maior comprimento, mesmo na posição vertical e a altura estava no interior do paralelogramo.

Constatamos, durante a análise, que nas figuras A e C, 16 alunos não deixam explícito o uso de fórmulas, mas se percebe que eles a utilizam para resolver as questões. No entanto, cerca de 90% deles (19) não utilizam e nem deixam explícito o uso de processos de composição, decomposição e corte-colagem de figuras.

Quanto à figura B, 4 alunos deixaram de responder essa questão. É possível que alguns fatores tenham contribuído para isso. Primeiro, pelo fato de a altura determinada estar no exterior da figura, segundo, porque o lado de menor comprimento está na posição horizontal e, por último, pela escolha da base, que é a de menor comprimento. Além disso, para o cálculo de área dessa figura seria necessário realizar mudanças de unidades. Por outro lado, a Atividade 3 apresentava praticamente os mesmos valores de variáveis didáticas e, no entanto, o índice de ausência de respostas foi zero. Por isso, não temos elementos conclusivos que interpretem coerentemente as razões que justifique esse índice.

Ainda na figura B, percebemos que o uso de processos de composição, decomposição e corte-colagem foi mais evidente em relação às outras figuras (4 alunos o utilizaram), porém os alunos que não deixam explícito o uso de fórmulas, mas se percebe que eles a utilizam para resolver as questões diminuiu para 13. Também percebemos combinação de procedimentos, como podemos observar na Figura 44, que será descrita a seguir.

Encontramos um procedimento correto de resolução, não previsto na análise a priori. O aluno calcula as áreas das figuras A e C de forma tradicional, no entanto, na figura

B, ele acrescenta no paralelogramo, um triângulo retângulo formando um trapézio-retângulo, conforme o protocolo a seguir.

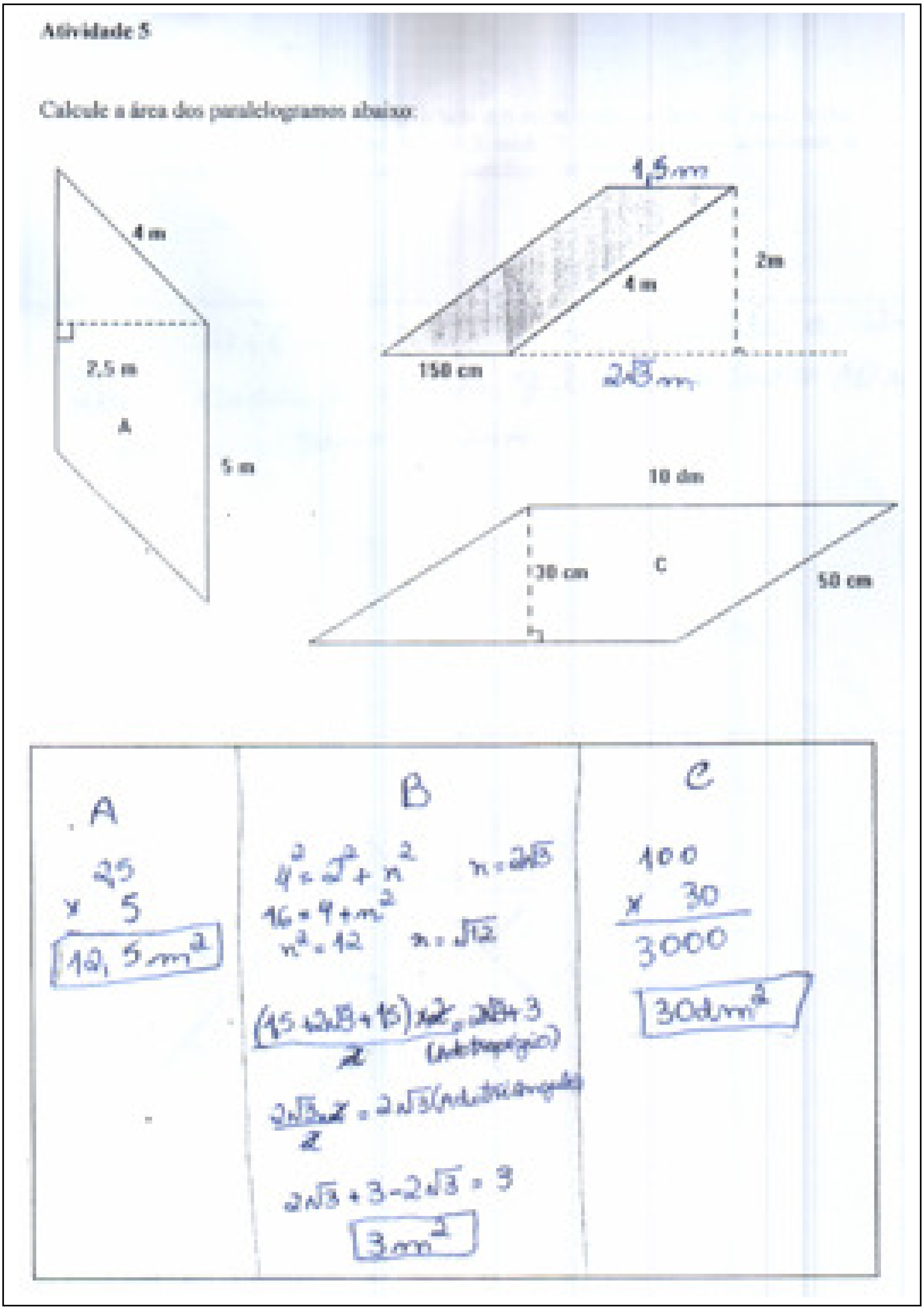


Figura 44: Análise do protocolo A07 em relação à atividade 5

Como podemos perceber no protocolo anterior, o aluno calcula o comprimento de um dos catetos do triângulo retângulo, por meio do Teorema de Pitágoras, em seguida calcula a área do trapézio-retângulo e subtrai a área do triângulo retângulo para determinar a área do paralelogramo proposto. Esse procedimento, também não é o mais econômico (como o citado na página 112 para a Figura 35) indicando implicitamente que não é permitido calcular a área do paralelogramo, quando o lado de menor comprimento está posicionado na horizontal.

Quanto aos erros, no cálculo de área das figuras A e C, os alunos utilizaram um procedimento no qual, após a resolução da questão, o aluno expressa de forma incorreta a unidade de medida trabalhada ou simplesmente a ignora. No entanto, para a figura B, o procedimento mais utilizado foi aquele em que os alunos realizavam a extensão indevida da fórmula de área do retângulo.

Entre os demais erros, destacamos um que foi comum às três figuras, ou seja, aquele em que o uso de fórmulas não é adequado, no primeiro, o aluno multiplica todos os dados apresentados nas figuras, independentemente de realizar ou não as mudanças de unidades necessárias e, em seguida, divide o produto encontrado por dois. No segundo utiliza todos os dados fornecidos na figura, isto é, realiza o produto, por exemplo, da medida de comprimento de um lado pela altura relativa a esse lado e, em seguida, divide pelo outro dado fornecido.

Em ambos os procedimentos, é possível, que esses alunos funcionem segundo a regra de contrato didático, na qual para resolver um problema é necessário utilizar todos os dados apresentados na questão. Veja os protocolos **A**21 e **A**18 a seguir:

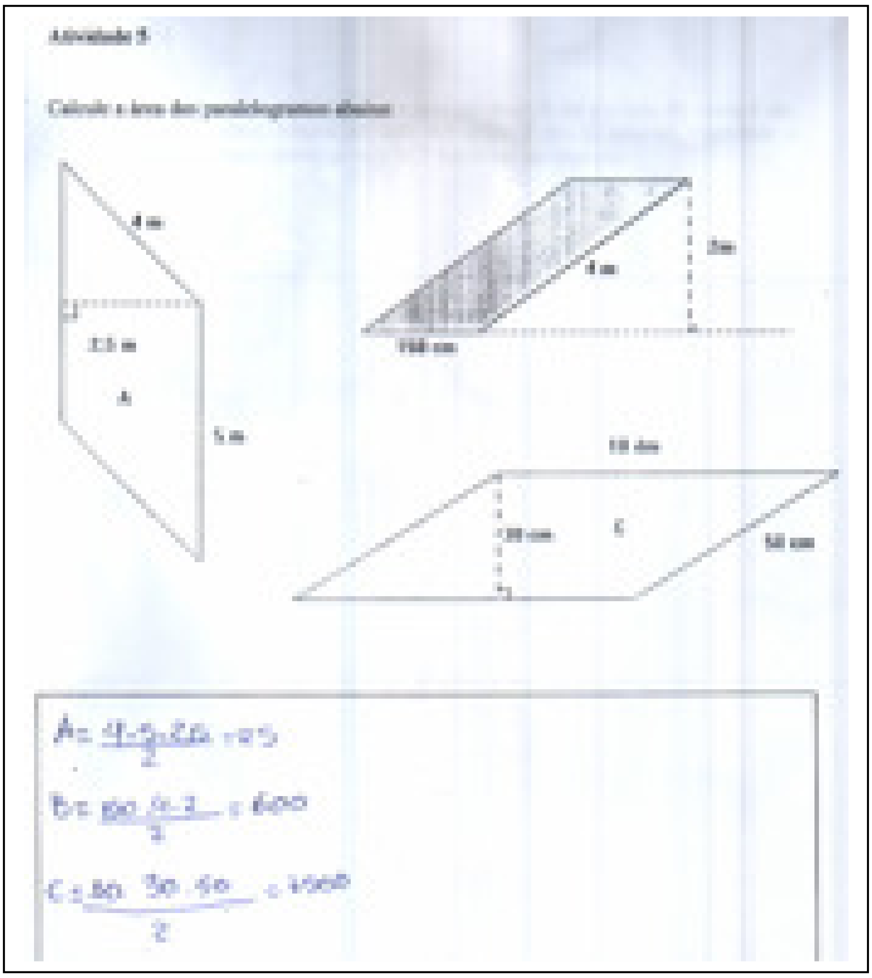


Figura 45: Análise do protocolo A21 em relação à atividade 5

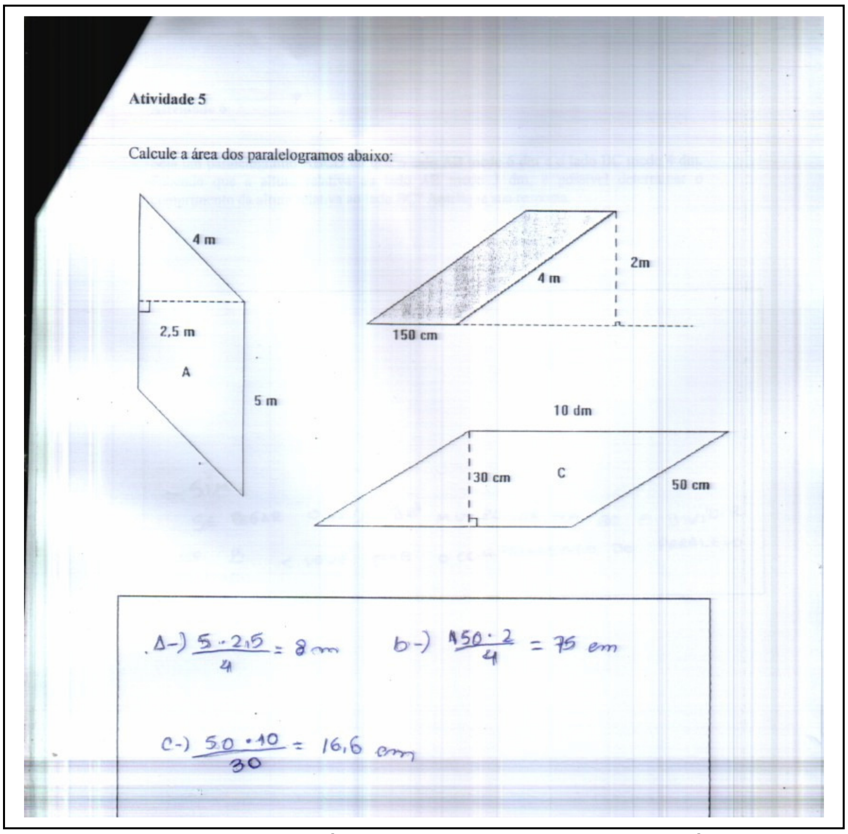


Figura 46: Análise do protocolo A18 em relação à atividade 5

Quanto às unidades de medida trabalhadas, na figura A não era exigida do aluno a conversão de unidades, mas apenas metade da turma expressou seus resultados usando a unidade de medida adequada para a área do paralelogramo. Nas figuras B e C, resultados superiores a 70% dos alunos, converteram as unidades de medidas, antes de calcular as áreas das figuras, porém no momento de expressar as respostas, do mesmo modo que a figura A, apenas a metade da turma usou a unidade de medida adequada para o cálculo de área.

Por outro lado, constatamos que alguns alunos usaram de maneira inadequada as unidades de medida. Sendo 33% da turma na figura A, 24% na figura B e 29% na figura C

4.2.2.5- Análise qualitativa da Atividade 6

Retomando a análise quantitativa referente a esta questão, temos: dos 21 alunos pesquisados, 3 não responderam o problema e 6 acertaram essa atividade. O que consideramos um baixo índice de acerto (28,5%).

Percebemos que, dos 18 alunos que tentaram resolver a questão, apenas 02 não esboçaram a figura do paralelogramo. Os demais (16) desenham a figura com um dos lados na posição horizontal. Fato interessante é que 12 deles, além de desenharem um dos lados na horizontal, também tomavam este lado como o de maior comprimento, com o intuito de determinar o comprimento da altura relativa ao lado BC. A inclinação para direita é predominante nos desenhos dos alunos (15).

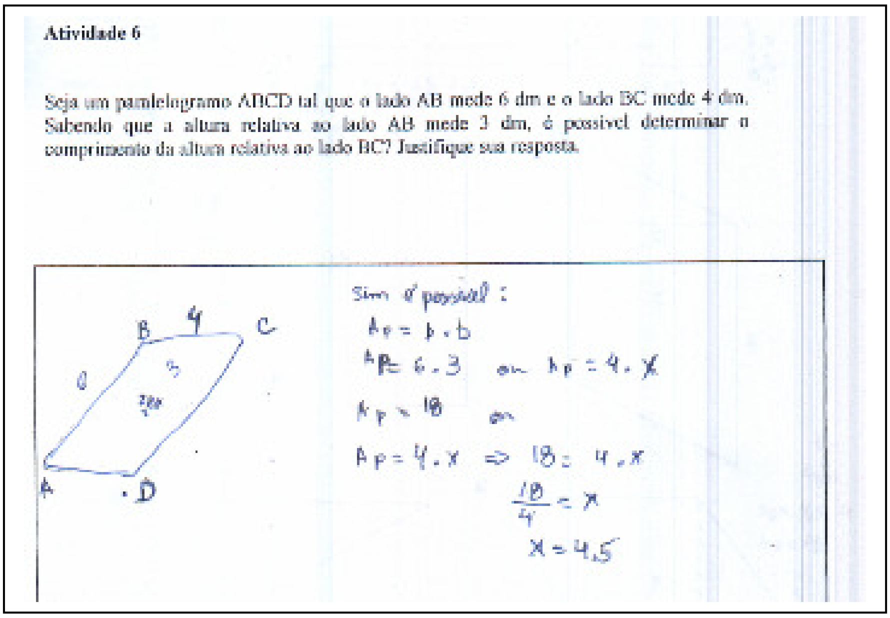
Da mesma forma, cerca de 67% da turma, ou seja, 14 alunos, traçaram a altura dada no problema no interior do paralelogramo e apenas um aluno traçou de forma que a altura estivesse no exterior da figura.

Em relação às unidades de medida trabalhadas, apenas 06 alunos usaram a unidade de medida adequada para expressar o comprimento da altura solicitada. Vale salientar que, nesta atividade, não era necessário realizar conversões de unidades.

A atividade foi elaborada de forma que a natureza da solução fosse numérica, e com isto, percebemos que cerca de 70% dos alunos que responderam a questão utilizaram procedimentos numéricos, mas também, encontramos procedimentos geométricos, como é o caso do protocolo A07, que será descrito em breve.

Podemos observar que o procedimento mais utilizado pelos alunos (5) que acertaram a questão, com 83% de acertos aproximadamente, é aquele que consiste em desenhar a figura numa escala menor e, em seguida, realizar os cálculos de área. Mesmo nesse grupo de aluno, não temos a garantia de que a invariância da área em relação à escolha da base esteja realmente construída. Visto que, desenharam e registraram as medidas sobre o desenho. Nesse caso, não temos informações que comprovem que eles articularam esses procedimentos, com a invariância da área com relação a escolha do lado tomado por base.

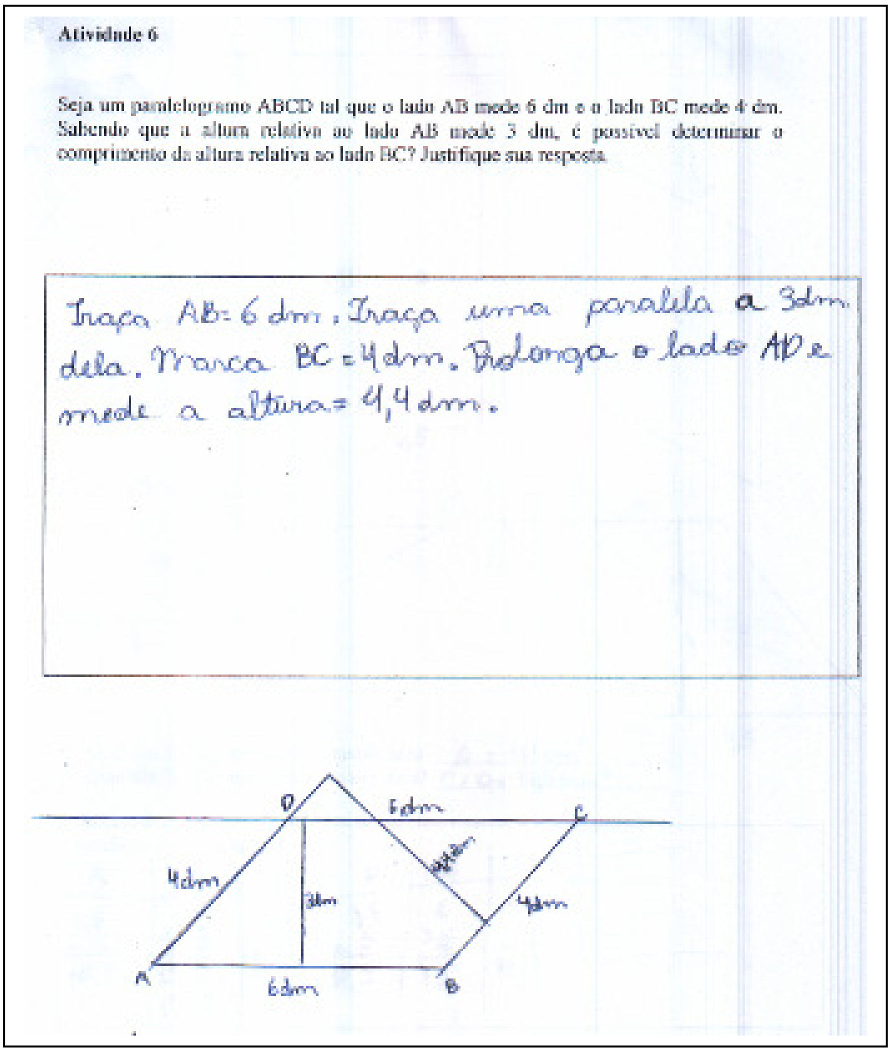
Quanto à utilização de fórmulas, 57% da turma, isto é, 12 alunos, não deixam explícito o uso. Dos seis alunos que acertaram a questão, quatro utilizaram explicitamente a fórmula, como podemos perceber no protocolo **A**09 abaixo:


Atividade 6

Seja um paralelogramo ABCD tal que o lado AB mede 6 dm e o lado BC mede 4 dm. Sabendo que a altura relativa ao lado AB mede 3 dm, é possível determinar o comprimento da altura relativa ao lado BC? Justifique sua resposta.

Figura 47: Análise do protocolo A 09 em relação à atividade 6

Constatamos um procedimento correto não esperado na análise a priori, em que diante do problema, o aluno utiliza a régua para encontrar a medida da altura, ou seja, desenha o paralelogramo na escala de 1:10. Assim, cada centímetro no papel corresponde a 10 centímetros no real e, em seguida, traça a altura relativa ao lado BC, determinando a sua medida através da régua, encontrando um valor aproximado de 4,4 cm. Observe este procedimento no protocolo **A**07 a seguir:



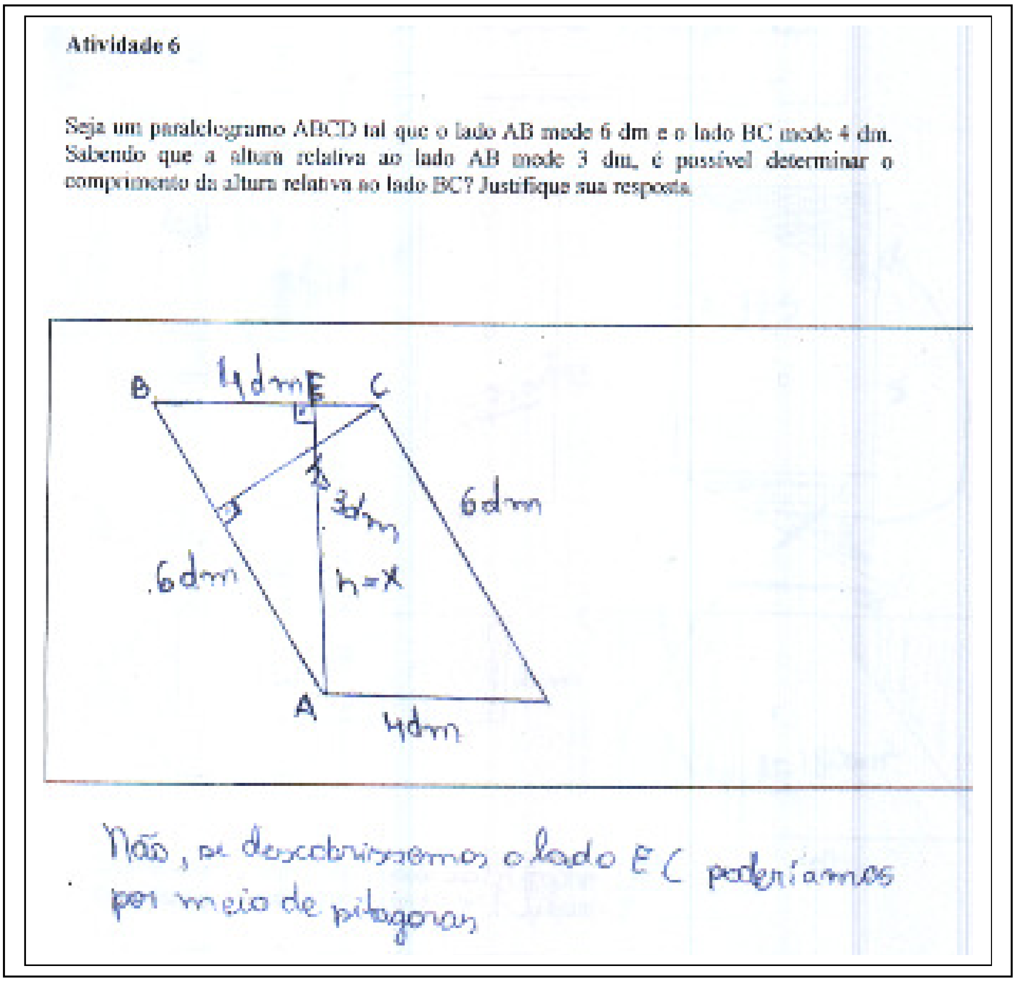
Atividade 6

Seja um paralelogramo ABCD tal que o lado AB mede 6 dm e o lado BC mede 4 dm. Sabendo que a altura relativa ao lado AB mede 3 dm, é possível determinar o comprimento da altura relativa ao lado BC? Justifique sua resposta.

Traça AB= 6 dm. Traça uma paralela a 3dm dela. Marca BC = 4dm. Prolonga o lado AD e mede a altura= 4,4dm.

Figura 48: Análise do protocolo A07em relação à atividade 6

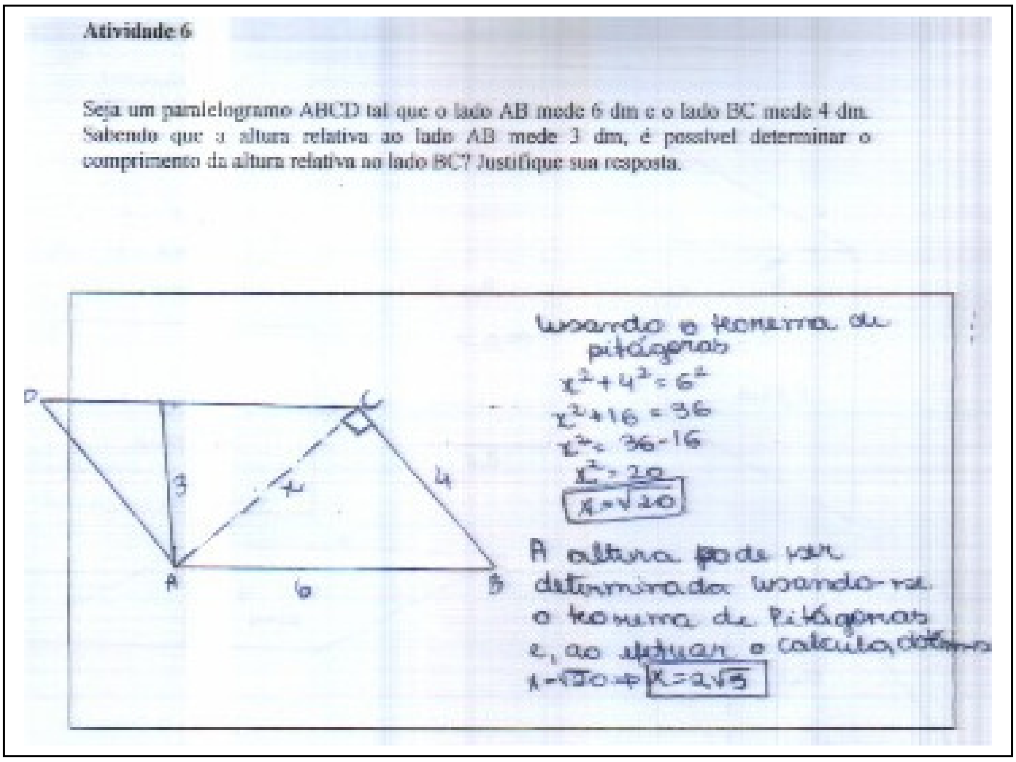
Quanto aos erros, destaca-se com índice de 43% aquele no qual, o aluno desenha a figura, sem se preocupar com a escala e, em seguida, justifica que com os dados apresentados é impossível encontrar a resposta ou então justifica de forma errada que é possível. Observe o protocolo **A**08 a seguir:


Atividade 6

Seja um paralelogramo ABCD tal que o lado AB mede 6 dm e o lado BC mede 4 dm. Sabendo que a altura relativa ao lado AB mede 3 dm, é possível determinar o comprimento da altura relativa ao lado BC? Justifique sua resposta.

Figura 49: Análise do protocolo A08 em relação à atividade 6

Encontramos um procedimento errado não esperado na análise a priori, em que o aluno esboça um desenho prototípico de um paralelogramo na França, com a diagonal AC perpendicular ao lado BC, como descrito por Capponi & Laborde (1994, p.53), relatada na nossa fundamentação teórica, e em seguida determina, através do Teorema de Pitágoras, a medida do comprimento da diagonal (altura relativa ao lado BC). O aluno encontrará como resposta um valor aproximado para a altura relativa ao lado BC. Podemos perceber isto, no protocolo A11 a seguir:



Atividade 6

Seja um paralelogramo ABCD tal que o lado AB mede 6 dm e o lado BC mede 4 dm. Sabendo que a altura relativa ao lado AB mede 3 dm, é possível determinar o comprimento da altura relativa ao lado BC? Justifique sua resposta.

Figura 50: Análise do protocolo A11 em relação à atividade 6

- Análise qualitativa transversal dos resultados obtidos nos protocolos

Em relação ao bloco de alunos que acertaram todas as atividades, percebemos que nas questões que eles podiam escolher o lado tomado por base, a decisão era tomar o lado que se encontrava na posição horizontal. Existe ainda nesse grupo, uma coerência com relação ao uso da fórmula e todos os alunos utilizam adequadamente as unidades de medida. Ao longo das atividades não confundem área e perímetro. É comum o uso de procedimentos numéricos e todos (4) desenham a figura na Atividade 6, com um dos lados na horizontal, sendo que a maioria deles (3) inclinam o paralelogramo para a direita.

Quanto ao grupo de alunos (5) que acertaram todas as questões, exceto a última, observamos também, que a escolha do lado tomado por base é aquela que se encontra na posição horizontal. Também existe uma coerência no uso de fórmulas e as unidades de medida trabalhadas ora são usadas adequadamente, ora não são expressas. A confusão entre área e perímetro, nesse grupo de aluno, parece não existir e procedimentos numéricos são predominantes.

Para o conjunto dos três alunos que acertaram as três primeiras questões, não existe uma escolha comum para o lado tomado como base, há alunos que tomam o lado na posição horizontal, outro de maior comprimento e um outro não conseguimos identificar. Há coerência em relação ao uso de fórmulas. Existem alunos que usam adequadamente as unidades de medida, outros não. Temos ainda, alunos que não expressam essas unidades. Nesse grupo, também os alunos dissociam área e perímetro e prevalecem entre eles procedimentos numéricos.

É predominante entre os alunos que erraram todas as questões, tomarem o lado que está posicionado na horizontal por base. Existe uma coerência no uso de fórmulas, mesmo errôneas, pois se a fórmula utilizada for o produto dos comprimentos dos lados, essa mesma será utilizada em todas as questões. No entanto, as unidades de medidas ora são utilizadas, ora são evitadas. Todos confundem área e perímetro e os procedimentos numéricos são fortemente usados.

Ademais, temos ainda um grupo (4) que não tem uma coerência em termos de acertos e erros, como nos blocos formados anteriormente, mas que para todas as questões, determinam as áreas dos paralelogramos realizando o produto dos comprimentos dos lados.

Considerações finais

Realizando uma retrospectiva, ainda que breve, do nosso trabalho, iniciamos este estudo partindo da revisão de literatura relativa ao conceito de área. As pesquisas anteriores evidenciaram dois tipos de concepções de área - geométrica e numérica. Adotamos a abordagem de área como uma grandeza, como uma alternativa que permite a superação dessas concepções.

Estudos diversos apontavam erros sobre a área do paralelogramo, no entanto, não encontramos na literatura algo específico sobre esse tema. Assim, propusemo-nos a evidenciar alguns aspectos que poderiam aprofundar a compreensão dos erros que os alunos cometiam, como por exemplo: uso de fórmulas erradas, confusão entre área e perímetro, utilização inadequada de unidades de medida etc.

Escolhemos, então, investigar a relação entre a abordagem da área do paralelogramo em uma coleção de livros didáticos para as séries finais do Ensino Fundamental e os procedimentos utilizados pelos alunos de uma 8ª série na resolução de problemas relativos a esse tema.

Portanto, as perguntas que nortearam esse trabalho foram: *Quais as regularidades na coleção de livros didáticos, quanto à área e à figura do paralelogramo? Quais os procedimentos dos alunos na resolução de problemas envolvendo área do paralelogramo? Que relações podem ser observadas entre as regularidades na coleção de livros didáticos e os procedimentos dos alunos na resolução de problemas, envolvendo área de paralelogramo?* Essas perguntas deram origem aos nossos objetivos, os quais sintetizaremos a seguir.

De modo específico, identificamos regularidades na coleção de livros didáticos, relativas aos conteúdos área e paralelogramos, através da noção de variável didática, que permitiu o surgimento das principais escolhas de valores para a elaboração do teste e da noção de contrato didático, que ajudou a esclarecer algumas expectativas em relação ao saber em jogo e a explicitar possíveis regras de contrato didático relativas ao tema.

Percebemos que, quanto à figura do paralelogramo, a coleção de livros didáticos apresenta algumas regularidades, tais como:

1- O paralelogramo é desenhado freqüentemente (índices superiores a 60% em todas as séries) de tal forma, que um dos lados encontra-se na posição horizontal.
2- No paralelogramo, o lado de maior comprimento encontra-se na posição horizontal (índices de freqüência superiores a 60% em todas as séries).
3- A inclinação da figura do paralelogramo é para a direita (índices de freqüência superiores a 89% em todas as séries).
4- Sempre existe a presença de figuras nos problemas sobre área do paralelogramo.

Assim, a figura prototípica do paralelogramo, que prevalece nos livros didáticos dessa coleção é aquela em que o lado de maior comprimento encontra-se na posição horizontal e a figura está inclinada para direita. Por outro lado, percebemos uma preocupação dos autores em romper com essas regularidades.

Quanto à abordagem do conceito de área percebemos alguns indícios de concepções numéricas, tais como: em todos os livros dessa coleção, na parte referente ao dicionário, encontramos a mesma definição para a área - medida *de uma superfície.* O conceito de área é abordado de início, por ladrilhamento, prevalecendo o aspecto numérico. Por outro lado, os autores trabalham processos de composição e decomposição, os quais contribuem para fortalecer a idéia de área enquanto grandeza, pois estabelecem uma relação entre o quadro geométrico e o das grandezas.

Ao caracterizarmos os procedimentos, corretos e errôneos, utilizados pelos alunos na resolução de problemas, constatamos que, de uma forma global, o erro mais comum para o cálculo de área do paralelogramo é aquele em que o aluno utiliza fórmulas erradas, podendo ser associado a um indício de concepção numérica. Também é indício dessa concepção, o fato dos alunos utilizarem a régua graduada na Atividade 1, omitir ou usar inadequadamente as unidades de medida, levando-nos a crer que para eles só interessa a pertinência do cálculo.

Quanto às relações que poderiam ser observadas entre as regularidades na coleção de livros didáticos e os procedimentos dos alunos na resolução de problemas, envolvendo área do paralelogramo, analisamos que o livro didático parece não contribuir suficientemente para a idéia de base como um lado qualquer, pois percebemos, muitas vezes, o uso de protótipos sem a sua devida ampliação e marcas de linguagem que remetem à unicidade da base e altura. Acreditamos que por isso, os índices de acertos foram baixos na Atividade 6, em que o conhecimento em jogo, era a invariância da área com relação à escolha do lado tomado como base.

De um modo geral, existe uma relação de convergência e divergência entre a abordagem do livro didático e os procedimentos dos alunos, como veremos a seguir:

Quanto à relação de convergência percebemos que tanto na coleção de livros didáticos como nos procedimentos dos alunos há indícios da importância do uso das figuras como suporte de representação. No livro didático todos os problemas relativos à área do paralelogramo apresentam figuras e os alunos mostram na resolução dos problemas propostos, especificamente na Atividade 6 (em que não há figura), a necessidade de desenhá-las para resolver o problema. Logo, o valor presença de figura é predominante na variável didática existência de figura.

Em relação à variável didática referente à posição dos lados do paralelogramo constatamos que o valor predominante é aquele em que um dos lados está posicionado na horizontal. Nos procedimentos dos alunos quando o problema não apresenta figura, eles desenham predominantemente com um dos lados na posição horizontal e freqüentemente o lado desenhado na horizontal é o de maior comprimento convergindo com os valores encontrados nos livros didáticos. Ou seja, os alunos possuem um protótipo de paralelogramo, embora, não se limite a ele.

O valor da variável didática predominante para a inclinação da figura é para direita, tanto no livro, quanto nos procedimentos dos alunos quando desenham a figura na atividade 6. Apesar disso, esse aspecto não parece provocar dificuldades na resolução de problemas pelos alunos.

A altura no interior do paralelogramo é predominante tanto nos livros didáticos como nos procedimentos dos alunos. Outra convergência é a escolha do lado tomado como base ser o lado posicionado na horizontal.

Percebemos que a escolha do lado tomado por base ser o de maior comprimento é secundária em relação à posição horizontal, tanto nos livros quanto nos procedimentos dos alunos.

O livro didático apresenta uma preocupação nítida em trabalhar a dissociação entre área e perímetro. E nos procedimentos dos alunos temos um índice elevado de alunos que nas atividades propostas não confundem área e perímetro. Esta é mais uma relação de convergência, que encontramos entre a abordagem do livro e os procedimentos dos alunos.

Também encontramos relação de divergência no sentido de o livro escolher trabalhar inicialmente área com medida e posteriormente com processos de composição e decomposição. De acordo com Douady e Perrin Glorian, a associação precoce da superfície a um número favorece a confusão entre as grandezas em jogo e o trabalho de área como grandeza deve ser anterior ao processo de medida. Então, esperávamos que os alunos pesquisados e usuários do livro didático apresentassem dificuldades relativas à dissociação entre comprimento e área. No entanto, eles distinguem nas atividades propostas essas duas grandezas.

Quanto às regras de contrato didático, percebemos que, algumas estão instaladas tanto no livro didático como nos procedimentos dos alunos, como por exemplo: *um problema, envolvendo área de paralelogramo requer uma solução numérica e nos problemas que envolvem cálculos da área do paralelogramo, o lado tomado por base é o que se encontra na posição horizontal.* Alguns comportamentos dos alunos podem ser interpretados como indícios de um funcionamento segundo essas regras de contrato didático. Diante de questões em que essas regras não são respeitadas, ou há um bloqueio, no sentido do aluno não resolver a questão, ou dificuldades de resolução do problema, como é confirmado nas Atividades 1 e 6 do teste proposto.

A Questão 6 é apresentada aos alunos, após uma seqüência de atividades relativas à área do paralelogramo. Pode-se formular uma regra de contrato didático mais geral no ensino da Matemática, *na qual quando o professor aplica um teste, logo após o estudo de um determinado conteúdo, o aluno deverá usar esse conhecimento para resolver as questões propostas.* A tendência do aluno seria, portanto, tentar resolver a questão, utilizando a fórmula de área do paralelogramo, que foi foco de todo o teste. No entanto este fato, na maioria dos casos, não aconteceu. Acreditamos que a idéia de área como produto de um lado específico pela altura relativa a ele é mais forte do que a tentativa de respeitar o contrato didático.

Na coleção de livros didáticos analisada, a possibilidade de o aluno realizar o produto dos comprimentos dos lados e, assim, o conhecimento ser invalidado é mínima, pois, por exemplo, das sete questões apresentadas no livro da 7ª série, em apenas duas existe a possibilidade de o aluno decidir que dados numéricos eram necessários para resolver a questão. Acreditamos que seja por isso também, que quase a metade da turma sentiu dificuldades em resolver a Questão 5, em todos os seus itens, na qual eles precisavam decidir que dados tomar para solucionar o problema.

Apesar disso, de uma maneira geral, percebemos que existe nitidamente uma preocupação, dos autores da coleção, de não fornecerem apenas os dados necessários para a resolução do problema relativos à área do paralelogramo. Visto que, em diversos momentos eles desestabilizam várias fontes de erros, inclusive: calcular a área do paralelogramo fazendo o produto dos comprimentos dos lados. No entanto, esse erro mostra-se persistente nos procedimentos dos alunos.

Assim também sugerimos a investigação de um estudo epistemológico a respeito da área do paralelogramo, pois o próprio fato de que a área do paralelogramo parece ser um aspecto problemático da construção do conceito, em diferentes contextos educacionais, aponta para uma possível origem epistemológica das dificuldades dos alunos. Acreditamos que esse aspecto deveria ser investigado, visto que se há essa origem ela está sendo reforçada, de uma certa forma, pela abordagem didática.

Encontramos limites no nosso instrumento de coleta de dados. Diante de alguns procedimentos de resoluções dos alunos, surgiu uma diversidade de interpretações possíveis, cujo esclarecimento teria sido beneficiado pela realização de uma entrevista. Tal recurso ajudaria a compreender melhor o procedimento do aluno, como por exemplo: a questão da presença ou ausência de figuras, a distinção entre área e perímetro sob diferentes pontos de vista ou a escolha da altura nos problemas que envolviam área do paralelogramo.

No entanto, acreditamos que, a construção mais sistemática das variáveis didáticas e seus valores, torna-se um subsídio importante para a elaboração de novos instrumentos metodológicos de coleta de dados. Considerando assim, escolhas ainda mais criteriosas e que permitam investigar dados que não pudemos considerar nessa pesquisa, pois não tínhamos esse marco teórico, no momento de nossas escolhas, que é o caso, por exemplo, da inexistência de paralelogramos no teste com ambos os lados na posição oblíqua.

Sugerimos que nas próximas pesquisas sejam verificadas novamente essas abordagens, de forma que seja considerado o aspecto dinâmico, pois um dos itens investigados em pesquisas anteriores, como por exemplo, Vinh Bang & Lunzer, era aquele relativo à deformação das figuras, em que o aluno vê o paralelogramo como um retângulo deformado, justificando a questão do produto dos comprimentos dos lados e seus efeitos sobre área e perímetro.

Sugerimos também, que seja investigada a construção do conceito de área proposta pelos autores dos livros didáticos, ou seja, trabalhar primeiro, o aspecto da medida de área e depois, com a questão de composição e decomposição, com intuito de analisar que elementos das respostas dos alunos reforçam a idéia de área enquanto grandeza.

Por outro lado, a idéia de base como lado horizontal não está apenas na escola, a própria língua materna relaciona a idéia de que base é chão, piso, solo e, estes, estão posicionados na horizontal. Nessa pesquisa não observamos esses aspectos, mas que seria interessante observar a influência dessas questões sobre a idéia de base.

Sabemos do trabalho laborioso que é organizar uma coleção de livro didático, com todas as orientações didáticas e conceituais, por isso, acreditamos que a escolha da coleção de livros didáticos foi pertinente, uma vez que ela busca invalidar as dificuldades e os erros apontados por diversas pesquisas. No entanto, esses erros persistem, mostrando o quanto eles estão enraizados em algo que vai além do didático.

Nas próximas pesquisas poderiam também, como sugestão, ser investigadas regras de contrato didático e valores de variáveis didáticas, relativas aos conteúdos área e paralelogramo, subjacentes à prática do professor.

Entendemos que é importante que os livros didáticos e o professor, em seu trabalho contínuo em sala de aula, explorem mais a produção de paralelogramos, fazendo variar outras condições, como por exemplo, posições e inclinações da figura, possibilitando inclusive, outros tipos de atividades que favoreçam a compreensão pelo aluno da invariância da área com relação à escolha do lado tomado por base.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A**. Didática da Matemática.** São Paulo: PUC, 1996.

ARRUDA, J.P; SOARES, M. & MORETTI, M. T**. (Re) Afirmando, (Re) Negociando e (Re) Criando Relações no Ambiente Escolar: a influência do contrato didático no ensino de matemática.** Ver. PEC, Curitiba, v.3, n.1, p.19-30, jul.2002- jul.2003.

AQUINO, J.G. **Do cotidiano escolar**: ensaios sobre a ética e seus avessos. São Paulo: Summus, 2000.

BELLEMAIN, P.; LIMA,P. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no ensino fundamental.** Natal**:** SBHMat, 2002

BESSOT, A ; LE THI HOAI, A. **Une étude du contrat didactique:** a propos de la racine carrée. Petit x, n 36, p. 39-60, 1993-1994

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental**. Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Brasília: MEC/ SEF, 1998.

BROUSSEAU, G. **Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques.** RDM, Paris, v. 7, n. 2, p.33-115, 1986

BUARQUE DE HOLANDA, A. **Novo dicionário Aurélio da Língua Portuguesa**: século XXI versão 3.0,1999.

CÂMARA DOS SANTOS, M.; CÂMARA, P. R. **Pequeno perfil de participantes dos programas de extensão da UFPE para professores de matemática**. Cadernos de Extensão da UFPE, n. 2 Recife: Editora Universitária, 1999.

CHEVALLARD, Y.;BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar matemáticas**: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.

DOUADY R.; PERRIN-GLORIAN M.J. **Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. Edcational Studies in Mathematics**. vol.20, n. 4, p. 387-424, 1989

DOUADY R. " **Jeux de cadres et dialectique outil-objet**". RDM, Paris, v. 7, n. 2, p.5-31, 1986.

GÁLVEZ, G. **A didática da matemática**. In: Parra, C et al (Org) Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

GRENIER, D. **Construction et etude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthognale en sixième.** 1988. Tese de Doutorado- l'Université Joseph Fourier, Greboble I, 1988

JOHSUA, S; DUPIN, J. **Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques**. Presses Universitaires de France- PUF, 1993.

JONNAERT, P.; BORGHT, C. V. **Criar condições para aprender:** o socioconstrutivismo na formação do professor. Porto Alegre: Artmed, 2002.

LABORDE, C. ; CAPPONI, B. **Aprender a ver e a manipular o objeto geométrico além do traçado no cabri-géometre.** Em Aberto, Brasília, ano 14, n. 62, abr./jun.1994.

LIMA, P.F. **Considerações sobre o Ensino do conceito de área**. In: SEMANA DE ESTUDOS EM PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1, 1995, Recife.Anais...Recife: UFPE, 1995

LORENZATO, S. **Porque não ensinar geometria?** In: Educação Matemática em Revista - SBEM, ano III, n.4 p. 3-13, 1º semestre. 1995

MEDEIROS, K. M**. O contrato didático e a resolução de problemas matemáticos em sala de aula**. 1999. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1999.

NOIRFALISE, R. **Figures prégnantes em géométrie**. In Repères IREM, n. 2, Pont-à-Mousson- França: Topiques Editions, 1990.

PAIS, L.C. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa.** Belo Horizonte: Autêntica,2001

PAVANELLO, R. M. **O abandono do Ensino da Geometria no Brasil**: causas e conseqüências. In Zetetiké, n.1, p.07-17, Unicamp, mar. 1993

PEREZ, G. **A realidade sobre o Ensino de Geometria no 1º e 2º graus, no Estado de São Paulo**. In: Educação Matemática em Revista – SBEM, ano III, n.4, p. 54-62, 1995.

PINTO, N.B. **O erro como estratégia didática:** estudo do erro no ensino da matemática elementar**.** Campinas, Papirus, 2000.

PIROLA N.A.; BRITO M.R.F. **A formação dos conceitos de triângulo e paralelogramo em alunos da escola elementar.** In: BRITO, M.R.F (Org.) Psicologia da Educação Matemática: teoria e pesquisa. Florianópolis: Insular, 2001.

SAEPE: **Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco**. Relatório 2002/ Secretaria de Educação e Cultura. Recife, PE, 2003.119p.

SOUZA et al. **A matemática das sete peças do tangram.** São Paulo: IME-USP, 1995.

SILVA, B.A **Contrato didático**. In: MACHADO, S. D.A (Org.) Educação Matemática: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

VERGNAUD, G. **A comprehensive theory of representation for mathematics education.** Journal of Mathematical Behavior, v. 17, n. 2, p. 167-181, 1998.

Livro didático analisado:

IMENES, L.M ; LELLIS M . **Matemática**. São Paulo: Scipione, 2000.(Coleção de 5ª a 8ª série).

ANEXO 1

5ª SÉRIE

Pág.	Quantidade de figuras do paralelogramo	Assunto abordado	Posição dos lados	Comprimento dos lados	Inclinação da figura	Presença ou ausência de figuras	Natureza das soluções	Dados fornecidos	Posição do lado tomado como base	Comprimento do lado tomado como base	Posição da altura traçada
35	01	ângulo	horizontal	maior	direita	presença					
46	01	polígonos	horizontal	maior	direita	presença					
49	02	ângulo	horizontal	maior	direita	presença					
52	01	quadrilátero	horizontal	maior	direita	presença					
53	01	paralelismo	obliqua	-	-	presença					
54	02	quadrilátero	horizontal	maior	direita	presença					
55	02	ângulo	horizontal	maior	direita	presença					
55	01	ângulo	obliqua	-	-	presença					
56	01	medida	horizontal	maior	direita	presença					
56	01	medida	horizontal	menor	direita	presença					
186	01	simetria	horizontal	maior	direita	presença					
187	01	simetria	horizontal	maior	direita	presença					
190	01	simetria	vertical	-	-	presença					
281	01	superteste	vertical	-	-	presença					
296	01	dicionário	horizontal	maior	direita	presença					
298	01	dicionário	horizontal	maior	direita	presença					

6ª SÉRIE

Pág.	Quantidade de figuras do paralelogramo	Assunto abordado	Posição dos lados	Comprimento dos lados	Inclinação da figura	Presença ou ausência de figuras	Natureza das soluções	Dados fornecidos	Posição do lado tomado como base	Comprimento do lado tomado como base	Posição da altura traçada
72	01	Polígonos	vertical	-	-	presença					
173	01		horizontal	maior	direita	presença					
251	02	Área e perímetro	horizontal	Maior/ menor	direita	presença					
253	01	Área e perímetro	horizontal	maior	direita	presença					
254	02	Área e perímetro	obliquas	-	-	presença					
279	01	Superteste	horizontal	maior	direita	presença					
296	01	Dicionário	horizontal	maior	direita	presença					
298	01	Dicionário	horizontal	maior	direita	presença					

7ª SÉRIE

Pág.	Quantidade de figuras do paralelogramo	Assunto abordado	Posição dos lados	Comprimento dos lados	Inclinação da figura	Presença ou ausência de figuras	Natureza das soluções	Dados fornecidos	Posição do lado tomado como base	Comprimento do lado tomado como base	Posição da altura traçada
66	01	ângulo	horizontal	maior	direita	presença					
74	01	simetria	horizontal	maior	direita	presença					
112	01	Paralelismo	horizontal	maior	direita	presença					
113	01	Paralelismo	horizontal	maior	direita	presença					
116	01	Paralelismo	horizontal	maior	direita	presença					
116	01	paralelismo	horizontal	menor	direita	presença					
133	01	Polígonos	vertical	-	-	presença					
134	01	Polígonos	horizontal	menor	direita	presença					
136	01	Polígonos	horizontal	maior	direita	presença					
189	01	Área/perímetro	horizontal	menor	direita	presença	SN	Quadriculado	-	-	-
192	01	Área	horizontal	maior	direita	presença	SN	Quadriculado	-	-	-
194	01	Área	horizontal	maior	direita	presença	conteúdo	-	horizontal	maior	interna
195	03	Área	horizontal	maior	direita	presença	conteúdo	-	horizontal	maior	interna
196	01	Área	horizontal	menor	esquerda	presença	Conteúdo	-	horizontal	menor	externa
197	01	Área	horizontal	maior	direita	presença	Conteúdo	-	horizontal	maior	interna
198	01	Dedução de fórmula	horizontal	maior	direita	presença	Conteúdo	-	-	-	-
200	02	Área	horizontal	maior	Direita / esquerda	presença	SN	1Desnecessário / 1necessário	horizontal	maior	interna
201	02	Área	horizontal	maior	direita	Presença	Comparação	necessário	Horizontal / obliqua	Maior/ menor	interna
202	03	Área e perímetro	horizontal	maior	2direita/ 1esquerda	Presença	SN	Não apresenta dados	horizontal	maior	3 internas 3 externas
202	01	Área/perímetro	obliqua	-	-	Presença	SN	desnecessário	obliqua	maior	externa
252	02	Semelhança	horizontal	maior	direita	Presença	Conteúdo	-	-	-	-
286	01	Dicionário	horizontal	maior	direita	Presença	Conteúdo	-	horizontal	maior	interna
303	01	Dicionário	horizontal	maior	direita	Presença	Conteúdo	-	-	-	-
306	01	Dicionário	horizontal	maior	direita	Presença	conteúdo	-	-	-	-

8ª SÉRIE

Pág.	Quantidade de figuras do paralelogramo	Assunto abordado	Posição dos lados	Comprimento dos lados	Inclinação da figura	Presença ou ausência de figuras	Natureza das soluções	Dados fornecidos	Posição do lado tomado como base	Comprimento do lado tomado como base	Posição da altura traçada
11	02	semelhança	horizontal	maior	direita	presença					
140	01	Áreas/volume	horizontal	menor	direita	presença	Conteúdo	necessário	horizontal	menor	externa
142	01	Áreas/volume	horizontal	maior	direita	presença	algébrica	desnecessário	horizontal	maior	interna
145	01	Áreas/volume	horizontal	menor	direita	presença	SN	necessário	horizontal	menor	externa
203	01	Paralelismo	obliqua	-	-	presença					
206	01	Paralelismo	obliqua	-	-	presença					
207	01	Paralelismo	obliqua	-	-	presença					
257	01	Simetrias	horizontal	maior	direita	presença					
258	01	Simetria	horizontal	maior	direita	presença					
259	01	Simetria	horizontal	menor	direita	presença					
290	01	Superteste	horizontal	maior	direita	presença					
301	01	Vestibulinho	horizontal	maior	direita	presença	SN	quadriculado			
341	01	Dicionário	horizontal	maior	direita	presença					

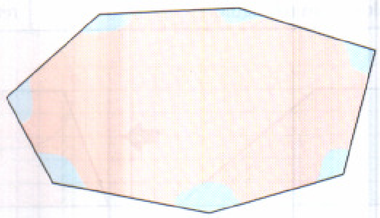
SN - Exige solução numérica
Conteúdo - apresentação do assunto

ANEXO 2

FÓRMULAS PARA O CÁLCULO DE ÁREAS

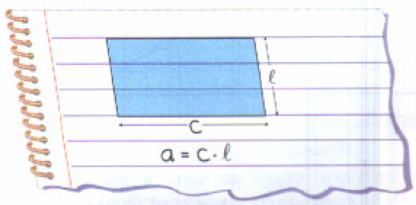
Você já conhece algumas fórmulas.

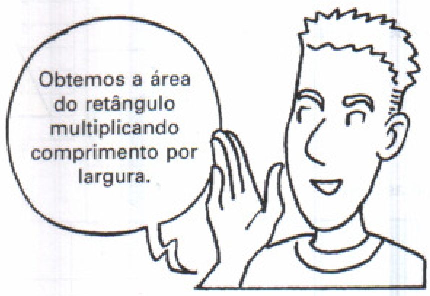
Como esta, que se usa para calcular a soma dos ângulos de um polígono de **n** lados:



$$s = (n - 2) \times 180^\circ$$

Conhece também a fórmula da área do retângulo.



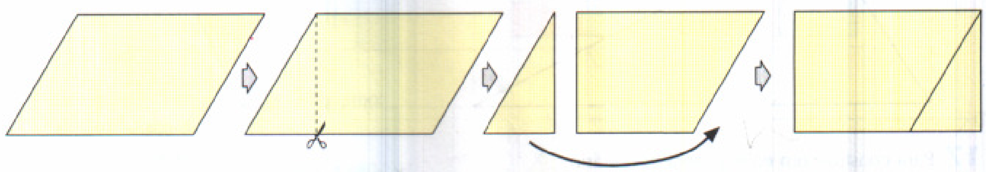


As fórmulas resumem resultados. Aplicando-as, podem-se resolver problemas mais rapidamente.

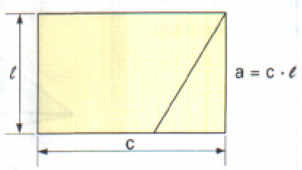
É importante saber usar fórmulas, entender o seu porquê, compreender como foram deduzidas. Isso também ajuda na resolução dos problemas.

Agora acompanhe a dedução de mais uma fórmula.

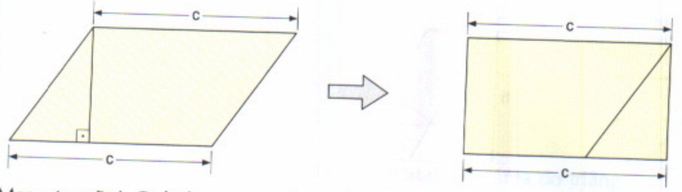
Já vimos como se calcula a área de um paralelogramo transformando-o num retângulo de mesma área:



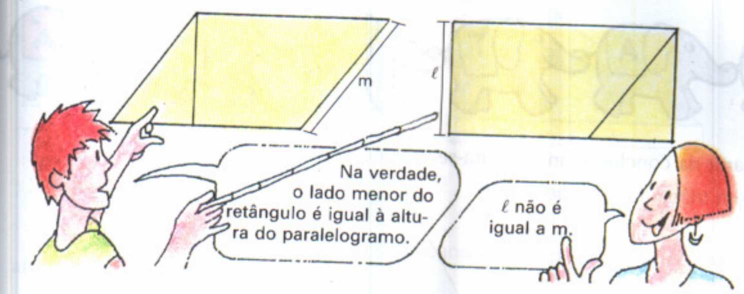
Essa idéia resolve o problema porque já sabemos calcular a área do retângulo:



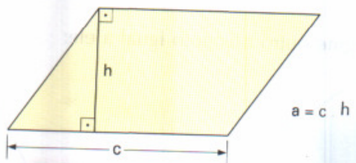
Agora observe: o comprimento **c** do retângulo é igual ao comprimento de um lado do paralelogramo.



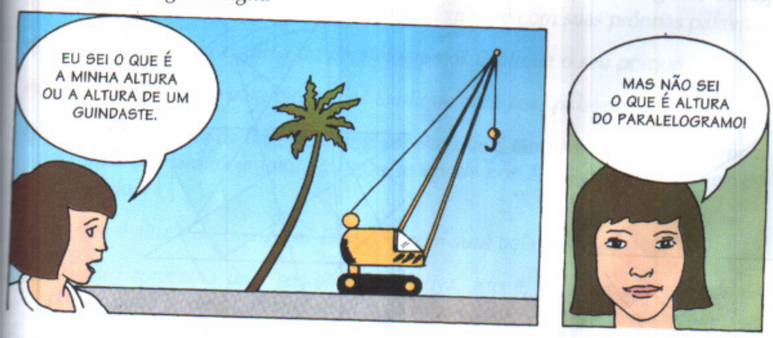
Mas atenção! O lado menor do retângulo **não** é igual ao lado menor do paralelogramo.



Conclusão: obtemos a área de um paralelogramo multiplicando o comprimento de sua base por sua altura:



É costume designar altura por **h**. Isso vem da língua francesa, na qual altura é *hauteur*, e do inglês *height*.



Anexo 3

ANÁLISE DOS RESULTADOS DE CADA TESTE- ACERTOS E ERROS - 21 ALUNOS DE UMA 8ª SÉRIE

ALUNO	*ATIV. 01*	*ATIV. 03*	*ATIV. 04*	*ATIV. 05*	*ATIV. 06*	*(%)PERCENTUAL.*
1	A	A	A	A	A	100
6	A	A	A	A	A	100
7	A	A	A	A	A	100
9	A	A	A	A	A	100
2	A	A	A	A	E	86
4	A	A	A	A	NR	86
10	A	A	A	A	E	86
11	A	A	A	A	E	86
14	A	A	A	A	E	86
3	A	A	A	C/E/E	E	57
8	A	A	A	NR/E/NR	E	43
12	A	A	A	E/E/E	E	43
15	E	E	E	E/E/E	E	0
20	E	E	NR	NR	NR	0
21	E	E	E	E/E/E	NR	0
13	E	A	A	E/NR/E	E	29
16	A	A	E	E/NR/E	E	29
18	E	E	A	E/E/E	E	14
17	A	E	E	A	E	57
5	E	E	A	A	A	71
19	A	A	A	E/NR/E	A	86

A	ACERTOS
E	ERROS
NR	NÃO RESPONDEU

Anexo 4

Normas para publicação da Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática

1- Os textos devem ser inéditos, e enviado unicamente em arquivo formato “DOC”, por via eletrônica para revista@sbem.com.br
2- O texto deverá conter título, seguido do(s) nome(s) do(s) autor(es) e da(s) respectiva(s) instituição(ões).
3- O texto deverá ser digitalizado em word para windows, formato A4, fonte Times New Roman, corpo 12, recuo 0, espaçamento 0, alinhamento justificado e entrelinhas 1,5
4- O texto não deverá superar 40 páginas para artigos, 20 páginas para relatos de experiência, 10 páginas para crônicas e 5 páginas para resenhas.
5- As citações literais, com mais de cinco linhas, deverão ser colocadas com parágrafo recuado de 4 cm, em itálico, seguidas do sobrenome do autor, em letras maiúscula, ano de publicação e página citada (tudo entre parênteses). As citações com menos de cinco linhas, em itálico, poderão ser incorporadas ao texto.
6- No final do trabalho, em ordem alfabética, serão incluídas as referências bibliográficas do texto, obedecendo às normas atuais da ABNT.