UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS
MESTRADO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

JULIENNE JANE BARBOSA DORNELAS

ANÁLISE DE UMA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA PARA A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO AFIM

Recife
2007

JULIENNE JANE BARBOSA DORNELAS

ANÁLISE DE UMA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA PARA A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO AFIM

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências - Nível de Mestrado da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino das Ciências.

ORIENTADOR
Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos

Recife
2007

FICHA CATALOGRÁFICA

D713a Dornelas, Julienne Jane Barbosa

Análise de uma seqüência didática para a aprendizagem do conceito de função afim / Julienne Jane Barbosa Dor - nelas. -- 2007.

181 f.: il.

Orientador: Marcelo Câmara dos Santos

Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) -- Universidade Federal Rural de Pernambuco. Departamento de Educação.

Inclui bibliografia.

CDD 372. 7

1. Educação matemática
2. Situação didática
3. Função afim
4. Dependência entre variáveis
5. Problemas de contexto realístico
6. Articulação entre registros

I. Câmara dos Santos, Marcelo
II. Título

JULIENNE JANE BARBOSA DORNELAS

ANÁLISE DE UMA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA PARA A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO AFIM

Dissertação defendida e aprovada em 19 de março de 2007 pela Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos
Orientador – UFPE

Prof. Dra. Verônica Gitirana Gomes Ferreira
Examinador Externo – UFPE

Prof. Dra. Josinalva Estacio Menezes
Examinador – UFRPE

Prof. Dra. Anna Paula de Avelar Brito Menezes
Examinador - UFRPE

Dedico esse trabalho a meu marido, João Claudino, e
às minhas filhas, Julianne e Jamile,
fontes inesgotáveis de amor e incentivo.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter-me dado inspiração e força no desenvolvimento deste trabalho, e pela compreensão de que sempre vale a pena concluir o que iniciamos.

Ao Professor Dr. Marcelo Câmara dos Santos, não só pela competência e sabedoria na orientação em mostrar o melhor caminho a seguir, mas pela amizade que demonstrou em todos os momentos de nossa jornada.

À Professora Dra. Verônica Gitirana Gomes Ferreira, que aceitou o convite de fazer parte da banca examinadora e pelas consideráveis sugestões que enriqueceram este trabalho.

À Professora Dra. Josinalva Estacio Menezes, pelas contribuições oferecidas para o meu ingresso no Programa, pela capacidade e sabedoria demonstradas durante todo o desenvolver do curso, pelas valiosas contribuições a este trabalho como participante da banca examinadora e pela pessoa doce e amiga que mostrou ser.

À Professora Dra. Anna Paula de Avelar Brito Menezes, pelas contribuições oferecidas para o meu ingresso no Programa, pela colaboração com sugestões enriquecedoras como participante da banca examinadora e pela amizade construída.

Aos Professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências e colegas de turma, que tornaram possível a conclusão deste trabalho.

Em especial, aos colegas de turma Fernanda, Jorge e Ruth, que gentilmente contribuíram com a realização da seqüência didática deste trabalho.

Ao Professor-mestre Paulo Roberto Câmara de Souza, pela amizade e pelas contribuições enriquecedoras ao projeto de pesquisa deste trabalho.

À direção e colegas professores da Escola Estadual Brigadeiro Eduardo Gomes, pelo incentivo e pelas contribuições, diretas ou indiretas, durante o desenvolvimento da pesquisa.

Aos alunos do 1º ano A, do Ensino Médio, da Escola Brigadeiro Eduardo Gomes, que colaboraram diretamente no desenvolvimento da seqüência didática deste trabalho.

À amiga, Josenilde Alves Matias, pela colaboração nas traduções de textos.

À Tamita, ex-aluna da Escola Brigadeiro Eduardo Gomes, que gentilmente fez a filmagem das sessões deste trabalho.

Aos amigos, Antônio Júnior, Elielda, Pablo e Larissa, pelas orientações na digitação deste trabalho.

À Dona Nina por cuidar tão bem da minha família durante o tempo de realização deste trabalho.

Ao meu marido, João Claudino de Lima Silva, pelo amor, carinho e paciência e, por ter sido um incentivador da conclusão deste Mestrado.

Aos meus pais, por terem acreditado em minhas possibilidades e pela preocupação que sempre tiveram em me propiciar condições para estudar.

Aos meus irmãos, Augusto, Marcos e Júlio, pelo auxílio e incentivo nos momentos adequados.

Às minhas filhas, Julianne e Jamile, que não só incentivaram, mas apoiaram sendo compreensivas, e companheiras durante a realização deste trabalho.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo principal investigar os efeitos de uma seqüência didática nas concepções de alunos do 1º ano do Ensino Médio em relação ao conceito de Função Afim, abordado a partir da resolução de problemas de contexto realístico. A seqüência didática composta de dois grupos de atividades foi elaborada com ênfase na compreensão da noção de variação entre grandezas lineares, privilegiando a articulação entre as representações em linguagem natural, gráfica, algébrica e tabular da Função Afim. De acordo com a literatura pesquisada, o estudo de situações que introduzam o conceito de função por meio de grandezas que variam, uma dependendo da outra, pode facilitar a construção do conceito de Função Afim. Fundamentamos a elaboração e a aplicação da seqüência em alguns princípios da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (1982), segundo a qual os fenômenos que regem o processo de ensino-aprendizagem envolvem três pólos: o professor, o aluno e o saber. Para este autor, a aprendizagem de um objeto matemático está diretamente ligada ao envolvimento do aluno na busca da solução de um problema, por intermédio de uma situação didática formulada pelo professor. A seqüência foi aplicada em uma turma do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública da cidade do Recife – PE. Os resultados obtidos nos levam a concluir que houve uma evolução nas concepções dos alunos, na apreensão do conceito de Função Afim, propiciado pela compreensão do relacionamento entre as variáveis dependente e independente e pelas devidas conexões entre as diferentes representações da função.

Palavras-chave: educação matemática, situação didática, função afim, dependência entre variáveis, problemas de contexto realístico, articulação entre registros.

ABSTRACT

The purpose of this research was to investigate the effect of the use of a sequence of activities related to the concept of the affine function in an authentic context of problem solution with students in the first year of secondary school. The sequence was composed of two groups of activities, designed to emphasize the understanding of the notion of variation among linear magnitudes, emphasizing the relationship between how these can represent the affine function in natural language, graphically, algebraically, and on a table. The literature researched indicates that the study of situations which introduce the concept of function by means of magnitudes which vary, one depending on the other, help to build the concept of the affine function. The design and application of the didactic sequence was based on Guy Brousseau's (1892) Theory of Didactical Situations in Mathematics. According to him the phenomena controlling the teaching-learning process involves three poles: the teacher, the student, and the knowledge. Learning about a mathematical object is directly linked to the student's involvement in the search for a solution to a problem by means of a teaching situation elaborated by the teacher. This sequence was used with a group for first year secondary students in a public school in the city of Recife, Pernambuco (Brazil). The results obtained led us to the conclusion that there was an improvement in the students' concepts related to the affine function, aided by the understanding of the relationship between the dependent and independent variables and by the connections between the different ways of representing the function.

Key words: mathematics education, didactic situation, função afim (affine function), variable dependency, real context problems, registry articulation.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

> [...] o objetivo do ensino da matemática, em formação inicial, não é nem formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhes serão eventualmente úteis muito mais tarde, e sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização (DUVAL, 2003, p. 11).

Ensinando Matemática em escolas do ensino fundamental e médio da rede pública estadual e da rede particular na Região Metropolitana do Recife-PE, desde 1990, temos constatado que a aprendizagem não ocorre apenas quando se apresenta um conteúdo de forma organizada e seqüenciada, nem mesmo quando os alunos repetem os modelos estudados. Nesse contexto, Imenes & Lellis (1997) discutem que a aprendizagem somente será efetiva pela reflexão do aluno diante das várias situações que envolvem uma idéia, estabelecendo relações entre o novo e o conhecido e dando significado à idéia investigada.

Nessa mesma direção, Carraher & Schliemann (1992) mencionam que "o trabalho de relacionar o conhecimento adquirido fora da escola com o conhecimento que a escola tem a obrigação de tentar desenvolver, deve constituir o objetivo sempre presente das atividades do educador" (p. 37). Porém, diante dessas constatações, e procurando desenvolver uma atitude ativa no aluno em busca do conhecimento, surge o problema: o que e como fazer para que o trabalho desenvolvido em sala de aula relacione o conhecimento abstrato e a realidade concreta do aluno?

Tal idéia se coaduna com a reflexão do educador Paulo Freire, gravada em vídeo e enviada para o Congresso Internacional de Educação Matemática, em 1996:

> Eu venho pensando muito que o passo decisivo que nos tornamos capazes de dar, mulheres e homens, foi exatamente o passo em que o suporte em que estávamos virou mundo e a vida que vivíamos virou existência, começou a virar existência. E que nessa passagem, nunca você diria uma fronteira geográfica para a história, mas nessa transição do suporte para o mundo é que se instala a história, é que começa a se instalar a cultura, a linguagem, a invenção da linguagem, o pensamento que não apenas se atenta no objeto que está sendo pensado, mas que já se enriquece da possibilidade de comunicar e comunicar-se. Eu acho que nesse momento a

> gente se transformou também em matemáticos. A vida que vira existência se matematiza. Para mim, e eu volto agora a esse ponto, eu acho que *uma preocupação fundamental, não apenas dos matemáticos mas de todos nós, sobretudo dos educadores*, a quem cabe certas decifrações do mundo, eu acho que uma das grandes preocupações deveria ser essa: *a de propor aos jovens, estudantes, alunos homens do campo, que antes e ao mesmo em que descobrem que 4 por 4 são 16, descobrem também que há uma forma matemática de estar no mundo* (FREIRE, 1996 apud D'AMBRÓSIO, 1999, p. 97) [Grifo nosso].

Com o olhar nessa realidade, concordamos com as palavras de Freire que reforçam a nossa argumentação: é possível promover o desenvolvimento pessoal dos educandos criando seqüências de ensino para uma aprendizagem significativa, rompendo com o distanciamento entre o sujeito e o objeto, relacionando-o a questões de ordem social, relativas à saúde, à economia, à política, aos avanços da tecnologia, à comunicação, às lutas éticas, às questões contemporâneas.

A identidade de concepções sinalizada pelos autores acima citados, toma mais corpo ainda se analisarmos um fragmento do livro "El fracasso de la matemática moderna" de Kline (1976 apud Pires, 2000) ensaiando uma possível reforma no ensino da Matemática:

> Ensinar Matemática como uma disciplina à parte é uma perversão, uma corrupção e uma distorção do verdadeiro conhecimento. Cada matéria representa uma aproximação do conhecimento e qualquer mescla ou superposição que seja conveniente e pedagogicamente útil é desejável e deve ser bem-vinda (p. 35).

Dessa forma, esperamos que os sujeitos dessa pesquisa aprendam a pensar a Matemática como uma ferramenta de aproximação entre aprendizado e ação, mas com uma nova perspectiva de abordagem didática que considere como eixos centrais os princípios de contextualização, de interdisciplinaridade, de não fragmentação do conhecimento, que vem caracterizando o currículo escolar, e o desenvolvimento de competências e habilidades, tendo como finalidade preparar o educando para a cidadania, o trabalho e a continuidade dos estudos.

Com isso não queremos dizer que os exercícios do tipo: calcule..., resolva..., determine... devam ser abolidos do ensino-aprendizagem de Matemática, pois propiciam o aprendizado de algoritmos e propriedades, porém não são suficientes para preparar os educandos para enfrentar os novos paradigmas do mundo contemporâneo.

Cândido (2000), ao preparar um curso para professores que visava tratar do estudo de função e função polinomial do 1º e 2º graus, optou por enfocar o conceito de função sob o ponto de vista “o que uma função faz” e só mais tarde tratar sobre “o que uma função é”. A autora desenvolveu nesse trabalho a resolução de problemas que propiciassem a aquisição dos conceitos de variação de grandezas e proporcionalidade, baseando-se na crença de que o aluno aprende refletindo e agindo sobre situações e objetos que lhes são oferecidos, estabelecendo conexões entre o que conhece e o que está sendo a ele apresentado.

Assim, podemos reconhecer que o modelo de ensino fragmentado, cuja tendência tem sido a de privilegiar o acesso a conhecimentos descontextualizados e desprovidos de significado para os alunos, não atende às expectativas de uma educação que garanta aos educandos aprendizagens essenciais à formação de cidadãos críticos e confiantes na própria capacidade para enfrentar desafios.

Ao cursarmos a disciplina Tópicos em Educação Matemática, no 1º semestre de 2001, do Programa de Mestrado do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), ministrada pelos professores Marcelo Câmara dos Santos e Paulo Figueiredo Lima, passamos a desenvolver uma formação mais aprofundada sobre os principais conceitos e teorias que articulam as pesquisas no campo da Educação Matemática. Estes estudos propiciaram o repensar da prática de ensino que até então desenvolvíamos, e a percepção de que a realização de atividades pedagógicas em sala de aula que possibilitem a participação efetiva dos alunos deve ser uma das preocupações de todos nós educadores.

Tomando como fundamento estas questões, e na expectativa de contribuir com um novo ensino de Matemática, no qual o processo de ensinar-aprender-avaliar seja um instrumento que propicie ao professor e ao aluno um ambiente escolar prazeroso e transformador, é que realizamos essa pesquisa, acreditando que estamos contribuindo para a superação de alguns problemas de aprendizagem inerentes aos conhecimentos matemáticos aqui estudados.

Nosso interesse se voltou à investigação dos efeitos de uma seqüência didática nas concepções de alunos do 1º ano do Ensino Médio em relação ao conceito de Função Afim. Este conceito foi abordado à luz da resolução de problemas; buscando elementos na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau. Discutiremos em nosso referencial teórico, nos Capítulos 1 e 2, uma forma de organizar situações de aprendizagem e as idéias centrais que fundamentaram a escolha das atividades desta pesquisa.

Mais especificamente buscamos identificar como o aluno realiza a conversão das informações entre os diferentes registros de função (linguagem natural, tabela, simbólico, gráfico); investigamos como se modifica a concepção de variação entre grandezas, em função das situações apresentadas e analisamos como as idéias de variável dependente e independente, associadas à função afim, são mobilizadas pelos sujeitos.

Em termos metodológicos, elaboramos, aplicamos e analisamos uma seqüência didática visando a construção do conceito de função afim que privilegiou o estudo das conexões entre as representações da linguagem natural, tabular, gráfica e algébrica, em problemas de contexto realístico. Enfatizamos essencialmente a idéia de variação, isto é, de grandezas que variam uma dependendo da outra, de forma que o aluno foi levado a analisar, argumentar, comparar e conseqüentemente construir o conhecimento esperado. É justamente essa idéia que torna as funções um instrumento matemático fundamental para outras áreas do conhecimento. Essa abordagem interdisciplinar e contextualizada propicia a construção do significado das funções, dando-lhe funcionalidade, contribuindo para o desenvolvimento cognitivo do aluno (ALONSO, 2004).

A importância do conceito de função, na Matemática, parece se revelar nas palavras de Simmons (1987), “O conceito mais importante em toda a Matemática é o de função. Não importa que ramo consideremos — Álgebra, Geometria, Teoria dos Números, Probabilidade ou outro qualquer — quase sempre se verifica que os objetos principais de investigação são funções” (p. 36). Nos diversos ramos da Matemática as funções podem ser utilizadas como modelos matemáticos que representem situações nas quais a dependência entre grandezas precisa ser expressa por variáveis e pelas relações entre essas variáveis.

A relevância do conceito de função na organização do currículo da Matemática foi destacada, já no início do século XX, por Christian Felix Klein (1849-1925) ao argumentar "que a noção de função devia estar presente em todo o ensino da Matemática, a nível secundário” (PONTE, 1990, p. 6).

Conforme o próprio Felix Klein (1927 apud Braga, 2003):

> Nós, os chamados reformadores, *queremos colocar o centro do ensino no conceito de função* como o conceito da Matemática dos dois últimos séculos que desempenha papel fundamental em todos os campos onde intervêm noções matemáticas (p. 54).

As idéias reformadoras do ensino da Matemática, do início do século XX, defendidas pela Comissão Internacional para o Ensino de Matemática criada durante o Quarto Congresso Internacional de Matemática, realizado em abril de 1908, em Roma, deram origem ao Primeiro Movimento Internacional para a Modernização do Ensino de Matemática. Tais idéias foram propostas e homologadas no Brasil “Na Portaria Ministerial nº. 19.890, de 30 de junho de 1931, em que são apresentados os programas do curso fundamental do ensino secundário e as respectivas instruções pedagógicas” (MIORIM, 1998, p. 94).

Tal portaria enfatizava a importância de introduzir os conceitos matemáticos por meio da resolução de problemas. Além disso, adotava a noção de função como idéia central do ensino da Matemática e unificadora na organização dos cursos elementares desta disciplina, por estabelecer uma estreita correlação entre as diferentes modalidades do pensamento matemático (aritmético, algébrico e geométrico).

Esses aspectos podem ser claramente percebidos no seguinte fragmento das instruções pedagógicas desse decreto:

> A *noção de função constituirá a idéia coordenadora do ensino.* Introduzida, a princípio, intuitivamente, será depois desenvolvida sob feição mais rigorosa, até ser estudada, na última série, sob ponto de vista geral e abstrato. Antes mesmo de formular qualquer definição e de usar a notação especial, *o professor não deixará, nas múltiplas ocasiões que se apresentarem, tanto em Álgebra como em Geometria, de chamar a atenção para a dependência de grandeza em relação a outra* ou como é determinada uma quantidade por um ou por varias outras.
> A representação gráfica e a discussão numérica devem acompanhar, constantemente, o estudo das funções e permitir, assim, uma estrita conexão entre os diversos ramos das matemáticas elementares.
> [...] Como recursos indispensáveis à resolução rápida dos problemas da vida prática, é necessário que o estudante perceba serem *tabelas, gráficos e fórmulas algébricas representações da mesma espécie de conexão entre quantidades* e verifique a possibilidade de se tomar qualquer desses meios como ponto de partida, conforme as circunstâncias (Decreto nº. 19.890, 1931 apud MIORIM, 1998, p. 97). [Grifo nosso].

Na perspectiva dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 1999, p. 215), o processo ensino/aprendizagem deve desenvolver a capacidade de comunicação, interpretação e intervenção, aperfeiçoando as seguintes competências e habilidades:

- Interpretar e utilizar diferentes formas de representação (tabelas, gráficos, expressões, ícones...).
- Identificar variáveis relevantes e selecionar os procedimentos necessários para a produção, análise e interpretação de resultados de processos e experimentos científicos e tecnológicos.
- Identificar, analisar e aplicar conhecimentos sobre valores de variáveis, representados em gráficos, diagramas ou expressões algébricas, realizando previsão de tendências, extrapolações e interpolações e interpretações.
- Analisar qualitativamente dados quantitativos representados gráfica ou algebricamente relacionados a contextos socioeconômicos, científicos ou cotidianos.

Podemos considerar que os conceitos matemáticos relacionados ao estudo da função afim podem contribuir no desenvolvimento das competências citadas, por envolverem habilidades de caráter gráfico, geométrico e algébrico. Além disso, o conceito de função é uma ferramenta fundamental na Matemática, pois existem muitos tópicos nos currículos do ensino fundamental e médio que estão relacionados ao ensino de funções e suas representações. Por exemplo, podemos relacionar as leis de formação das progressões aritméticas à função afim. Além disso, a articulação do pensamento funcional com o estudo da geometria analítica pode facilitar a compreensão das relações entre as representações gráfica e algébrica de sistemas de equações do primeiro grau.

Sendo assim, parece razoável considerar que, quanto antes se familiarize um estudante com o conceito de função e sua representação gráfica e algébrica, tanto melhor para a sua formação matemática.

Tais idéias são defendidas por Moura & Moretti (2003), Moreira (1990) e Loureiro & Oliveira (1990), ao considerarem que a idéia de função é poderosa por sua relevância social, que se deve ao fato de ser um instrumento de interação quantidade-qualidade na busca de regularidades dos fenômenos naturais ou sociais e por estabelecer ligações com áreas do conhecimento matemático habitualmente encaradas separadamente.

Vale, no entanto, reforçar que a importância do conceito de função não está apenas associada a questões subjacentes à própria matemática. Sua importância se revela, principalmente, no estudo e divulgação de informações em várias áreas do conhecimento, como Economia, Física, Química, Biologia, Geografia, Sociologia, entre outras. Por exemplo, a idéia de função aparece quando um botânico estuda o crescimento de uma planta ao longo de determinado período, ou quando um físico estuda a variação de temperatura de um corpo em função da quantidade de calor recebida.

Além disso, muitas grandezas presentes no dia-a-dia se relacionam de forma especial; por exemplo, o peso de um determinado produto, com o preço a ser pago em sua compra; o valor do salário de um trabalhador, com o valor do desconto da previdência social; o número de quilômetros rodados, com o valor a ser pago em uma corrida de táxi; o consumo de energia elétrica em uma residência, com o valor a ser pago na conta de energia no final de um mês. Assim, em nosso cotidiano, estamos sempre comparando e relacionando números e grandezas. Em alguns casos, traduzir a relação entre as grandezas utilizando uma expressão matemática ou um gráfico é fundamental.

Neste sentido nos questionamos sobre o papel da matemática e a relevância didática das funções na formação de nossos alunos, e nos perguntamos: o que fazer para que o aluno se aproprie do conceito de função, em especial, de Função Afim e reconheça a sua importância em sua vida?

Acreditamos que uma resposta para esta questão possa ser a resolução de problemas de contexto realístico, enfatizando o conceito de função, com o objetivo de que possam construir e interpretar tabelas e gráficos, sendo que as situações apresentadas devem sempre se reportar ao universo mais próximo do aluno.

Diante da constatação de que o pensamento funcional, ou seja, a quantificação da relação de dependência entre duas grandezas constitui um conhecimento básico no cotidiano, no aprendizado de outras ciências, bem como, considerando as dificuldades de aprendizagem dos alunos no estudo das funções e suas representações, e acatando a idéia de que a resolução de problemas de contexto realístico pode contribuir com a aprendizagem de conceitos matemáticos, colocamos como questão orientadora para nosso trabalho: *A aplicação de uma seqüência didática elaborada a partir de problemas de contexto realístico enfatizando a idéia de variação entre grandezas (uma dependendo da outra) e a articulação das diferentes representações de uma função, produzirá que efeitos didáticos na aprendizagem do conceito de função afim?*

Em nosso experimento percebemos, com relação ao aspecto da significação, que a formulação de um conjunto de seqüências didáticas a partir da modelização de fenômenos do cotidiano evita o distanciamento da idéia de função afim da realidade sócio-cultural dos sujeitos e, com relação ao aspecto de percepção, que a experimentação de problemas em sala de aula elaborados com ênfase na concepção variacional, a partir da análise de tabelas e gráficos, pode facilitar a construção do conceito de função afim.

Os PCNEM (BRASIL, 1999) trazem orientações referentes ao processo de transformação do ensino de função, que foram pertinentes para a elaboração da nossa seqüência de ensino:

> Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações-problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática (pp. 255-256).

Nossa pesquisa fundamenta-se nas palavras de Brousseau (1982 apud Gálvez, 1996, p. 32) ao afirmar que "é preciso criar situações didáticas que façam funcionar o saber, a partir dos saberes definidos culturalmente nos programas escolares". Esta formulação apóia-se na idéia de que o conhecimento é uma construção do sujeito, a partir da sua interação com os objetos (de conhecimento).

Nessa direção, Piaget (1975 apud Gálvez, 1996, p. 32), propõe que "o sujeito que aprende necessita construir por si mesmo seus conhecimentos por meio de um processo adaptativo", semelhante ao que realizaram os produtores originais dos conhecimentos que se quer ensinar. A partir dessas idéias, essa autora afirma que "Trata-se, então, de produzir uma gênese artificial dos conhecimentos, em que o saber apareça, para o aluno, como um meio de selecionar, antecipar, executar e controlar as estratégias que aplica à resolução do problema formulado pela situação didática" (p. 32).

O estudo fundamenta-se ainda, nas proposições de Gálvez (1996) ao ressaltar que:

> Trata-se de colocar os alunos diante de uma situação que evolua de forma tal, que o conhecimento que se quer que aprendam seja o único meio eficaz para controlar tal situação. A situação proporciona a significação do conhecimento para o aluno, na medida em que o converte em instrumento de controle dos resultados de sua atividade. O aluno constrói um conhecimento contextualizado, em contraste com a seqüenciação escolar habitual, em que a busca das aplicações dos conhecimentos antecede a sua apresentação descontextualizada (p. 33).

Neste contexto, podemos considerar que a prática pedagógica de cada professor pode contribuir para o sucesso ou fracasso do processo ensino-aprendizagem. O professor precisa buscar nas inovações pedagógicas, fundamentação teórica que lhe dê condições de escolha da metodologia a ser utilizada em suas aulas, das estratégias de ensino que efetivamente promovam a construção do saber pelos seus alunos. Ou ainda, o papel do professor é dar uma "nova cara" aos conteúdos programáticos determinados pelos livros didáticos (instrumento de trabalho mais acessível ao professor), contextualizando-os, prevalecendo nesse trabalho a intenção de estimular o aluno à pesquisa, à investigação, ao gosto pela resolução de problemas que valorizem a criatividade e admitam respostas pessoais, capacitando-o a enfrentar melhor os desafios do mundo contemporâneo.[1]

Essa dinâmica de produção e mobilização do saber escolar em diferentes situações em que o aluno se depara no seu cotidiano é abordada pela Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco – BCC-PE (PERNAMBUCO, 2005):

> [...] são os diferentes movimentos de contextualização e descontextualização que irão possibilitar ao aluno a construção do **significado** dos conhecimentos, permitindo que ele identifique e se identifique com as situações que lhe são apresentadas, seja em seu contexto escolar, seja no exercício de sua plena cidadania (p. 36).

Ainda segundo a BCC-PE, a contextualização do saber a ser ensinado aparece associada a um modelo de aprendizagem em que o conhecimento é introduzido na relação didática a partir de um problema a ser resolvido, e que funciona como ponte entre a informação abstrata e a realidade concreta do aluno.

A seqüência didática que elaboramos para este estudo não pôde, portanto, afastar-se desse ideal de interatividade entre o saber escolar e a realidade cotidiana do aluno, almejado pela BCC-PE.

Nessa perspectiva, desenvolvemos um conjunto de atividades articulando o conceito de Função Afim com o pensamento funcional, em particular, a noção de função foi introduzida por meio de problemas de contexto realístico elaborados de forma a permitir que o aluno desenvolvesse estratégias próprias de resolução, bem como, associasse a variação entre grandezas em diferentes representações (numérica, algébrica, gráfica).

---

[1] Isso remete ao conceito de Transposição Didática, estudado por Yves Chevallard.

Pretendíamos que as situações apresentadas nos permitissem identificar se a resolução de atividades, em que ocorrem relações entre grandezas variáveis, faria evoluir, ou não, as concepções dos alunos. Para tanto, os avanços cognitivos dos sujeitos foram observados através dos seguintes elementos de análise de dados:

- Identifica as grandezas que variam envolvidas em um problema de contexto realístico.
- Reconhece se a variação entre as grandezas envolvidas é uma relação de dependência ou não.
- Mobiliza as idéias de variável dependente e independente na compreensão do conceito de função afim.
- Converte corretamente um problema de contexto realístico da linguagem natural para a representação numérica por tabela.
- Traduz a relação entre as grandezas por meio de uma expressão algébrica (lei de formação) fazendo a conversão da representação por tabela para a linguagem simbólica.
- Traduz a relação entre as grandezas do problema da representação algébrica para a representação gráfica.

Levando-se em consideração tais categorias pretendíamos não apenas acumular dados e quantificá-los, mas, sobretudo, analisar as causas e os efeitos da realidade coletada.

Com esta pesquisa, acreditamos estar contribuindo com a busca de respostas à pergunta que tanto preocupa os educadores e, em especial, os professores de Matemática: o que e como fazer para que o descontentamento com a aprendizagem dessa disciplina seja minimizado? Assim pensamos, pois percebemos na literatura consultada que a resolução de problemas de contexto realístico, fundamento relevante deste trabalho, é uma estratégia de ensino-aprendizagem coerente com as características da Matemática, considerada "fonte de modelos para o estudo dos fenômenos da natureza e da cultura" (PERNAMBUCO, 2005, p. 129).

Para nós, é através do estudo e da divulgação de resultados de pesquisas, sobretudo em sala de aula, desenvolvidas a partir da aplicação de seqüências didáticas com enfoque na resolução de problemas do cotidiano, tendo o aluno como agente de sua aprendizagem, que se pode proporcionar a compreensão dos fenômenos didáticos da aprendizagem da matemática e, consequentemente, contribuir para a melhoria do seu ensino, em particular, no ensino-aprendizagem de Função Afim.

CAPÍTULO 1
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

> O conceito de função numérica associa duma forma natural três aspectos fundamentais da Matemática: (a) as representações analíticas, uma vez que entre as funções mais interessantes pelas suas propriedades se contam as que são dadas por uma expressão analítica simples (ou várias expressões analíticas simples); (b) as representações gráficas, por via da Geometria Analítica; e (c) a ligação com a realidade, uma vez que tudo o que pode ser contado ou medido pode ser representado por uma função (PONTE, 1990, p. 8).

1. Um breve histórico do conceito de função

No contexto da História da Matemática, as idéias primitivas do conceito de função aparecem na Idade Média, em estudos de problemas dinâmicos. Durante o século quatorze a quantificação da distância percorrida por um corpo em movimento uniformemente acelerado, foi uma questão investigada pelos filósofos escolásticos do Merton College em Oxford e um dos resultados deste estudo é hoje reconhecido nos compêndios de História da Matemática como regra de Merton.

A regra de Merton, ou Lei da Velocidade Média, enunciada pela primeira vez por William de Hentisbery, do Merton College, no início do século XIV (IEZZI et alli, 2004), expressa em termos de distância e tempo, diz essencialmente que: “se um corpo se move com movimento uniformemente acelerado, então a distância coberta será igual à que seria percorrida por outro corpo que se deslocasse com movimento uniforme durante o mesmo intervalo de tempo, com velocidade igual à do primeiro no ponto médio do intervalo de tempo” (BOYER, 1998, pp. 178-179). Em outras palavras, a velocidade média é igual à média aritmética entre as velocidades inicial e final. Paralelamente, outros intelectuais do Merton College começaram a explorar a idéia de representar a velocidade, bem como outras quantidades variáveis, por meio da Geometria.

O conceito de função ainda não estava institucionalizado, quando uma de suas mais importantes representações já se encontrava em fase de elaboração. Nicole Oresme (1323-1382) deu a primeira sugestão do que atualmente chamamos de representação gráfica de uma função ao expor seu método para representar geometricamente fenômenos de uma variável numa obra publicada em 1350. Ele traçou um gráfico velocidade-tempo para um corpo que se move com aceleração constante.

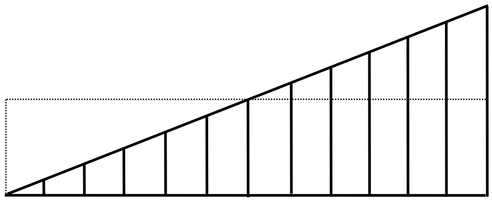


FIGURA 1 (BOYER, 1998, p. 181)

“Ao longo de uma reta horizontal ele marcou pontos representando instantes de tempo (ou longitudes), e para cada instante ele traçou, perpendicularmente à reta de longitudes, um segmento de reta (latitude) cujo comprimento representava a velocidade” (Figura 1). As extremidades dos segmentos velocidade descrevem uma linha reta que hoje denominamos de representação gráfica da função $v = a \cdot t$, sendo *a* uma constante. A figura de Oresme, além de confirmar geometricamente a regra de Merton, pois a velocidade no ponto médio do intervalo de tempo é a metade da velocidade final, é uma das primeiras aplicações do princípio fundamental de se poder representar uma função de uma variável como uma curva. “A figura era construída respeitando-se a proporcionalidade dos valores envolvidos. [...] as coordenadas atuais, abscissas e ordenadas, têm como antecessores as latitudes e longitudes de Oresme” (IEZZI et alli, 2004, p. 97).

As contribuições à formalização do conceito de função, assim como as notações que hoje são utilizadas, aparecem por volta dos séculos dezessete e dezoito. “Mas, para precisar mais nitidamente o conceito de função, era preciso que o simbolismo da álgebra linear viesse a se fundir com a idéia de variabilidade” (IEZZI et alli, 2004, p. 67). Foi René Descartes (1596-1650), o criador da Geometria

Analítica, quem primeiro associou as equações algébricas a lugares geométricos planos e fez a correspondência entre as variáveis envolvidas, a fim de poder esboçar o gráfico correspondente. Inclusive, a notação algébrica atual em que x, y e z,... indicam variáveis e *a*, *b* e *c* indicam parâmetros começou com Descartes em *La géométrie*, o famoso terceiro apêndice do seu "Discurso do Método para Bem Conduzir a Razão e Procurar a Verdade nas Ciências", publicado em 1637.

Segundo Eves (1997), “A palavra *função*, na sua forma latina equivalente, parece ter sido introduzida por Leibniz (1646-1717) em 1694, inicialmente para expressar qualquer quantidade associada a uma curva como, por exemplo, as coordenadas de um ponto da curva, a inclinação de uma curva e o raio de curvatura da curva” (p. 660). Introduziu igualmente a terminologia de ‘constante’, ‘variável’ e ‘parâmetro’, hoje tão usadas no campo da Álgebra, e as palavras ‘coordenadas’, ‘abscissa’ e ‘ordenada’, no campo da Geometria. .

Por volta de 1718, Johann Bernoulli (1667-1748) havia chegado a considerar uma função como uma expressão qualquer, formada de uma variável e algumas constantes. Johann Bernoulli também experimentou várias notações para uma função de *x*, das quais, a mais próxima da moderna foi ϕx (EVES, 1997; BOYER, 1998).

Um pouco depois de Bernoulli, em 1734, Euler (1707-1783), conhecido como o construtor de notação mais bem sucedido de todos os tempos, apresentou nos “*Comentários”* de S. Petersburgo, a famosa notação *f(x)* para uma função de *x*. Ele definia função de uma quantidade variável, no seu tratado *Introductio in anlyin infinitorum*, de 1748, como “qualquer expressão analítica formada daquela quantidade variável e de números ou quantidades constantes” (BOYER, 1998, p. 306). Essa definição não foi muito aceita pela comunidade científica da época, pelo fato de Euler não ter esclarecido sobre o termo “expressão analítica”. De acordo com Câmara (2001, p. 93), “essa contestação da definição de Euler, deixa transparecer a rigidez ao se definir formalmente um conceito, no campo das ciências, particularmente no contexto da ‘Matemática Pura’”. Mais precisamente, segundo Eves (1997), “[...] Euler considerou uma função como uma equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes. Esta última idéia corresponde ao conceito de função que a maioria dos alunos dos cursos elementares de matemática tem” (p. 661).

Apesar de pouco aceito pela comunidade científica da época, o conceito de função de Euler se destacou, até que Joseph Fourier (1768-1830) foi levado a considerar em suas pesquisas sobre propagação do calor nos objetos materiais, considerando a temperatura de um corpo como uma função de duas variáveis, o tempo e o espaço, as chamadas séries trigonométricas. Essas séries envolvem uma forma de relação mais geral entre variáveis do que as que já haviam sido estudadas anteriormente. Numa tentativa de dar uma definição de função, ampla o suficiente, a ponto de englobar essa forma de relação, Leujene Dirichlet (1805-1859), em 1837, inicia o processo de ampliação do conceito de função com a seguinte definição:

> Se uma variável y está relacionada com uma variável x de modo que, sempre que um valor numérico é atribuído a x, existe uma regra de acordo com a qual é determinado um valor único de y, então se diz que y é função da variável independente x (BOYER, 1998, p. 352).

Segundo Eves (1997), Dirichlet chegou ainda à seguinte formulação: “Os valores possíveis que *x* pode assumir constituem o *campo de definição* da função e os valores assumidos por *y* constituem o *campo de valores* da função” (p. 661). Tais proposições nos remetem aos modernos conceitos de domínio e imagem de uma função e acentuam a idéia de uma função como uma relação entre dois conjuntos de números, não implicando na obrigatoriedade de representar a relação entre as variáveis *x* e *y* através de uma expressão analítica.

De acordo com Eves (1997), “a teoria dos conjuntos, criada por George Cantor perto do final do século XIX, logo despertou um interesse generalizado muito grande e praticamente não há hoje nenhum campo da matemática que não tenha recebido seu impacto” (p. 659). Essa teoria propiciou ampliar o conceito de função, de maneira a abranger relações entre dois conjuntos de elementos quaisquer, sejam esses elementos números ou não. Na teoria dos conjuntos, uma função *f* é, por definição, um conjunto qualquer de pares ordenados de elementos, pares esses, sujeitos à condição seguinte: se $(a, b) \in f$, $(c, d) \in f$ e $a = c$, então $b = d$. O conjunto

A dos primeiros elementos dos pares ordenados chama-se *domínio* e o conjunto B de todos os segundos elementos dos pares se diz *imagem* da função. Assim, uma função é simplesmente um tipo particular de subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

O painel levantado nesse histórico evidencia, por um lado, as diferentes abordagens por que passou o conceito de *função*, e por outro lado sinaliza, de certa forma, o quanto será pertinente para um professor desenvolver nos alunos a capacidade de reconhecer a variação e a dependência entre grandezas e interpretar as diferentes representações de função.

Pretendemos que esse breve histórico propicie ao leitor uma idéia do dinamismo envolvido no surgimento do conceito de função, que tomamos por base para construção da nossa seqüência didática, contrariando uma possível visão estática dada a essa idéia quando introduzida em sala de aula ou nos livros didáticos por meio de definições diretas e formais, muitas vezes abandonando a noção de dependência.

2. O ensino–aprendizagem de função

Atualmente, a maioria dos estudantes tem os primeiros contatos com o conceito de função na última série do ensino fundamental e prosseguem com o seu estudo nos três anos do ensino médio. No que se refere à abordagem do ensino de função adotada pela maioria dos professores durante o ensino básico, Gomes Ferreira & Dehon (1999), discutem que:

> O conceito de função Matemática tem sido introduzido em nossas escolas de uma forma abstrata e descontextualizada, apesar de suas inúmeras aplicações no cotidiano. Sua introdução se dá, convencionalmente, após o estudo de relações binárias, de pares ordenados e de sistema cartesiano. Função é, finalmente, introduzida como um caso especial de relação binária. Posteriormente, algumas famílias de funções são exploradas. Cada família de funções é definida através de sua fórmula geral, seguida por um suporte gráfico. Desconsidera-se, assim, toda a utilidade de funções e o conhecimento intuitivo do aluno sobre função (p. 1).

As escolas brasileiras que trabalham o ensino de Matemática numa abordagem descontextualizada costumam apresentar aos estudantes uma aproximação da reconhecida definição de Dirichlet-Bourbaki: *dados dois conjuntos A e B, uma relação binária f é denominada função se, e somente se, para cada elemento a* $\in$ *A existe apenas um elemento b* $\in$ *B tal que f(a) = b* (GOMES FERREIRA 1997 apud CÂMARA, 2001, p. 95).

Nesse sentido vamos encontrar em Lima et alli (1996), que a definição de função como um subconjunto de produto cartesiano é uma definição que apresenta o inconveniente de ser formal, estática, e não transmitir a idéia intuitiva de função como correspondência, transformação, dependência (uma grandeza em função da outra) ou resultado de um movimento. Reforçando essa inconveniência, o autor aponta que os usuários da Matemática e os próprios matemáticos costumam pensar em função de modo dinâmico, em contraste com essa definição estática. Os próprios autores de livros didáticos e professores que apresentam essa definição, não a adotam depois, quando tratam de funções específicas como as logarítmicas, trigonométricas etc.

Ainda segundo esse autor, a definição de função como correspondência, é muito mais simples, mais intuitiva e mais compreensível pelos estudantes do que a primeira, que usa uma série de sub-conceitos, como par ordenado, produto cartesiano, relação binária etc, impondo a esse este estudo uma abordagem seqüenciada e desconectada da noção de dependência.

De acordo com Simmons (1987), "Originalmente, as únicas funções consideradas pelos matemáticos eram aquelas definidas por fórmulas. Isto levou à idéia intuitiva de que uma função 'faz alguma coisa' em cada número *x* de seu domínio para 'produzir' o número correspondente *y* = *f(x)*" (p. 37).

Mobilizando a noção intuitiva de função, este autor adota na maior parte do seu livro, Cálculo com Geometria Analítica, o conceito de função enfatizando a relação de correspondência entre variáveis dependentes em sua forma simbólica:

> Seja *D* um dado conjunto de números reais. Uma *função f* definida em *D* é uma regra, ou lei de correspondência, que atribui um único número real *y* a cada número *x* de *D*. O conjunto *D* dos valores permitidos para *x* chama-se *domínio* (ou *domínio de definição*) da função, e o conjunto dos valores correspondentes de *y* chama-se *imagem*. O número *y*, que é especificado para *x* pela função *f*, escreve-se usualmente *f(x)* – de modo que *y = f(x)* – e chama-se *valor de f em x*. Costuma-se chamar *x* de *variável independente*, porque ela é livre para assumir qualquer valor do domínio, e chamar *y* de variável dependente, porque seu valor numérico depende da escolha de *x* (p. 37).

Segundo Markovits, Eylon & Buckeimer (1995) as dificuldades apresentadas pelos estudantes com o estudo de funções são parcialmente devidas à complexidade do conceito de função, que na forma como é comumente abordada envolve muitos conceitos – domínio, contradomínio, conjunto imagem, regra de correspondência. "Assim, ou temos de ter a certeza de que esses conceitos foram compreendidos em todas as representações, antes de continuarmos a ensinar mais coisas sobre funções, ou temos de optar por deixar de lado alguns aspectos" (p. 59). Levando em consideração tal concepção decidimos enfatizar, em nossa investigação, a noção de variação entre grandezas para introduzir o estudo de função, privilegiando a conversão entre as diferentes representações de Função Afim.

Ainda reportando-nos às dificuldades de lidar com funções, apresentamos apenas algumas citadas por Gomes Ferreira & Dehon (1999, pp. 1-2):

- diferentes e múltiplas representações, tais como Cartesiana, Algébrica, Tabular, etc;
- grande dificuldade de conceitos, tais como: variável, taxa de variação, vértice, domínio, conjunto imagem, periodicidade, etc;
- O aprendizado de função envolve, fortemente, um trabalho com múltiplas representações, assim como, trabalhos intra-representações. Para saber funções nossos estudantes precisam não só aprender diferentes representações, mas também fazer conexões entre representações diferentes. Cada representação por sua vez tem suas, regras próprias, e cada conceito é percebido de forma diferente que nas outras representações.

Artigue & Dager (1999 apud Gomes Ferreira & Dehon, 1999) destacam a importância da exploração das diferentes representações na aprendizagem de um conceito matemático:

> Um conceito matemático não é um objeto monolítico. Um único conceito pode ser entendido de vários pontos de vista e pode ter várias representações diferentes; em matemática a pessoa precisa poder mover-se livremente entre estes pontos de vista e representações e adaptando-os às situações em que o conceito é usado (p. 2).

A consonância de posições entre os autores citados leva-nos a considerar que a compreensão de um objeto matemático, pelos estudantes, supõe a mobilização de seus diferentes registros e a ação de transitar entre eles, adequando-os às situações de aprendizagem que lhes forem apresentadas.

Para os estudiosos de Matemática e de outras áreas do conhecimento, as representações cartesianas são, especialmente, usadas como um meio que facilita a interpretação de informações, permitindo análises rápidas através da simples observação de um gráfico adaptado a uma situação. No entanto, estudos apontam que ao se trabalhar com gráficos de funções em sala de aula a compreensão dessa representação não é assim tão fácil (MARKOVITS, EYLON & BUCKEIMER, 1995).

No que se refere às dificuldades dos estudantes em lidar com o conceito de função, Markovits, Eylon & Buckeimer asseguram que os alunos não percebem, por exemplo, que "[...] na representação gráfica o eixo x 'representa' o domínio e o eixo y, o contradomínio, ao passo que os pontos do gráfico representam os pares (pré-imagem, imagem)" (1995, p. 56). Isto indica dificuldades em fazer a conexão entre os componentes da definição usual de função e os componentes da representação gráfica.

Essas autoras discutem ainda sobre a existência de uma dificuldade subsidiária intrínseca à forma gráfica, envolvendo o papel duplo dos pontos sobre os eixos: "são pontos do plano, com coordenadas (x, 0) ou (0,y), e como tais podem representar pares correspondentes a intersecções do gráfico com um dos eixos; e como tais podem representar pré-imagens ou imagens" (p. 56).

De acordo com Câmara (2001) “essa dificuldade é facilmente percebida em sala de aula, pois é necessário um certo ‘esforço’ para levar estudantes a entenderem que o coeficiente linear ‘b’ da função afim f(x) = ax + b é a ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo y, assim como fazer com que compreendam que a raiz da função é a abscissa do par ordenado onde a reta intercepta o eixo x” (p. 100).

A *função afim*, também reconhecida como função do 1º grau, é geralmente definida como aquela que tem como representação algébrica a expressão $f(x) = ax + b$, sendo a, b números reais com $a \neq 0$ e cuja representação cartesiana é uma reta. Mas, de acordo com Lima et alli (1996, p. 92), "função não tem grau; o que possui grau é polinômio". Sendo assim, quando $a \neq 0$, a expressão $f(x) = ax + b$ é um polinômio do primeiro grau. O mesmo acontece com a função quadrática que, comumente, é chamada de função do segundo grau. Ficamos atentas, durante a aplicação de nossa seqüência didática, a esta observação para não desenvolvermos vícios errados de nomenclatura nos alunos.

Segundo Lima (1997), o *modelo linear*, representado por funções do tipo y = f(x) = ax + b, é um dos modelos matemáticos mais empregados na resolução de problemas elementares em praticamente todo o Ensino Fundamental e, com menos incidência no Ensino Médio, porém com grande destaque.

Este autor considera que o caso mais simples do modelo linear ocorre quando se emprega a noção de proporcionalidade em situações que envolvem duas grandezas, *x* e *y*, que variam uma em função da outra.

> Diz-se que *y é proporcional a x* quando os valores de *y* dependem dos valores de *x*, de tal maneira que ao dobrar, triplicar ou, mais geralmente, tomar *n* vezes a grandeza *x*, o valor correspondente de *y* fica dobrado, triplicado ou, mais geralmente, multiplicado por *n*. nesse caso, a função $y = f(x)$ que modela o problema tem a propriedade $f(nx) = n \cdot f(x)$ para todo valor de *x* (LIMA, 1997, p. 17).

O estudo da função y = f(x) = ax + b, em livros didáticos, está muito vinculado às idéias da geometria analítica onde o número real *a* – coeficiente angular – aparece associado à tangente do ângulo que a reta faz com o eixo das abscissas, enquanto o número real *b* – coeficiente linear ou termo independente – relaciona-se com a ordenada do ponto onde a reta intercepta o eixo *y*. Com este enfoque, o estudo da função afim adquire um caráter estático e faz com que os alunos associem equações do tipo $y = 2x + 50$ simplesmente à figura de uma reta e não a uma relação entre grandezas que dependem uma da outra.

Salientamos ainda, que são poucos os autores de livros didáticos que fazem referência ao conceito de taxa de variação (derivada) de uma função afim e que procuram estudá-lo de forma dinâmica, em que é possível levar o aluno a perceber que na função $f(x) = 2x + 50$, o coeficiente 2 representa a velocidade (taxa de variação) de crescimento da grandeza representada pela variável dependente *y*, relativamente à grandeza representada pela variável independente *x*. Por exemplo, se *x* varia de 1 para 7, o *y* varia de 52 para 64, isto é, uma variação de 6 unidades na grandeza *x* corresponde a uma variação de 12 unidades na grandeza *y*; se *x* varia de 5 para 15, o *y* vai variar de 60 para 80, ou seja, um acréscimo de 10 unidades em *x* corresponde a um acréscimo de 20 unidades em *y*. Cada acréscimo na grandeza *x* corresponde a um acréscimo 2 vezes maior na grandeza *y*, ou seja, a velocidade de crescimento da grandeza *y* é igual a 2.

O número 50 da equação $y = 2x + 50$ é geralmente interpretado como ponto de interseção da reta com o eixo *y* e não como um valor inicial de uma relação entre grandezas como, por exemplo, a remuneração fixa de um vendedor de uma loja na relação entre o salário a ser recebido e o número de camisas vendidas semanalmente.

Foi refletindo sobre as dificuldades dos alunos ao estudar funções, tais como as que discutimos anteriormente, em particular, na construção e análise de gráficos quando no seu dia-a-dia se deparam com os mesmos, que optamos por fazer este estudo que se centraliza em função afim, suas representações gráfica, por tabela e algébrica. Vale ressaltar que nesta investigação consideramos relevante levar os estudantes a construir a idéia de função como uma relação de dependência entre duas grandezas que “variam”, uma em função da outra (taxa de variação) e, também, perceber a presença de tal conceito em situações do cotidiano.

Uma outra questão que também interfere na qualidade do estudo de função, que é uma forte característica dos livros didáticos, é a noção de monotonicidade. Na representação algébrica, as noções de crescente e decrescente da função afim $f(x) = ax + b$, são associadas ao sinal do coeficiente angular “a” da função: se $a > 0$ a função é crescente e se $a < 0$, é decrescente. Porém, conhecer estas características, apenas, não assegura aos alunos a identificação correta de uma função crescente ou decrescente quando estes analisam, por exemplo, a representação gráfica de uma função afim. Percebemos facilmente essa dificuldade em sala de aula, quando apresentamos exemplos de função afim do tipo $y = f(x) = 3x – 1$ e $y = f(x) = -2x + 3$ e solicitamos que os alunos avaliem o crescimento ou decrescimento dessas funções; exigindo-se que observem a relação existente entre a variação no domínio e a variação na imagem. Notamos que os sujeitos não percebem que no primeiro caso, quando aumentamos o valor de x, os correspondentes valores de y também aumentam, caracterizando uma função crescente; e que no segundo, quando aumentamos o valor de x, os correspondentes valores de y diminuem, caracterizando uma função decrescente.

E ainda, ao analisarem as mesmas funções quanto à sua monotonicidade, nos seus respectivos gráficos cartesianos, não percebem a relação entre a direção da linha reta com o coeficiente angular ‘a’ da função, no caso, 3 e -2, que confirma uma das estratégias possíveis de identificação de função crescente e função decrescente. Percebemos também que dificuldades como estas acarretam problemas na apreensão da idéia de estudo do sinal da função afim e na resolução de inequações do 1º grau.

Quanto às questões acima mencionadas, uma análise do livro didático utilizado pelos sujeitos desta pesquisa (Matemática: ciência e aplicações, volume 1, Gelson Iezzi et alli) permitiu observar que o conceito de Função Afim é introduzido de forma intuitiva a partir da resolução de um problema de contexto realístico em que uma pessoa pega um táxi que cobra R$ 3,20 pela bandeirada e R$ 1,20 por quilômetro rodado precisando deslocar-se por 18 km. Aplicando esses dados o aluno deverá responder “Quanto a pessoa pagará pela corrida?”, e ainda “Se a distância percorrida fosse de 30 km, qual seria o preço da corrida?”. Este tipo de apresentação do objeto numa linguagem coloquial parece possibilitar que os sujeitos façam as conexões entre a Matemática e o seu cotidiano relacionando o conhecimento adquirido fora da escola e o sistematizado dentro dela.

De posse dos resultados das questões, é apresentada a representação através de uma equação algébrica, no caso, $c(x) = 1{,}20 \cdot x + 3{,}20$, que é um exemplo de função polinomial do 1º grau ou função afim. Em seguida, define-se Função Afim como *qualquer função f de R em R dada por uma lei da forma* $f(x) = ax + b$*, em que a e b são números reais dados e* $a \neq 0$. Após esta definição, são feitas algumas considerações sobre gráfico, coeficientes da função afim, zero ou raiz da função e equação do 1º grau, crescimento e decrescimento, sinal e inequações. Para a apresentação desses conceitos o livro analisado reserva uma linguagem precisa e formal, com exemplos descontextualizados, não permitindo que os alunos façam as devidas conexões dos conteúdos vivenciados com situações do cotidiano. Tais conexões só serão exploradas posteriormente ao resolverem os exercícios propostos que incluem problemas de aplicação da Matemática.

As atividades, exercícios e problemas são retirados de exames vestibulares e das provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), recorrendo também a matérias de jornais e de revistas, como contexto, e não de forma a levar o aluno a estabelecer relações entre a linguagem coloquial usada nos problemas e a linguagem matemática.

O livro não estabelece relações entre as diferentes famílias de funções. As funções afim, quadrática, modular, exponencial e logarítmica são abordadas de forma isolada. Nem mesmo os exercícios de aplicação propiciam as ligações entre estas famílias de funções.

Resumindo, a análise do livro didático em questão nos faz perceber que seus autores adotam o seguinte esquema de apresentação do conteúdo:

Resolução de um problema aplicando a idéia de função (variação entre grandezas) para introduzir o conceito de função afim.

↓

Apresentação da forma algébrica que expressa a função do problema como um exemplo de função afim ou função polinomial do 1º grau.

↓

Definição formal de função afim e seus subconceitos com exemplos descontextualizados; desprovidos de significado para o aluno.

↓

Propõe a resolução de exercícios descontextualizados desconsiderando as idéias intuitivas dos alunos e também, exercícios com situações-problemas.

De acordo com Ávila (2006) um ensino que não possibilita integrar os diferentes tipos de funções, sendo estudadas em blocos separados e estanques, "[...] apresenta poucas chances de aplicações significativas. Melhor é fazer uma breve introdução ao conceito de função, de preferência com exemplos simples e concretos. Nada de despejar sobre o aluno toda aquela terminologia de função injetiva, sobrejetiva, bijetiva, contradomínio, etc" (p. 31).

Uma análise realizada por Gitirana & Angelin (2002) nos livros didáticos mais adotados por professores do Ensino Médio nas escolas do Recife apontou que, nos capítulos dedicados ao estudo de funções, há uma grande concentração de atividades em torno da representação algébrica, sendo escassa a exploração de atividades que modelam fórmulas a partir de problemas contextualizados ou de gráficos. Segundo estes autores, "Os problemas contextuais são, em geral, de suma importância, pois permitem ao estudante observar função como forma de descrever um padrão com comportamento específico" (p. 5).

Em tal estudo os autores apresentaram conclusões semelhantes às considerações levantadas por nós na análise do livro utilizado pelos sujeitos de nossa investigação:

> *As atividades onde o aluno precisa interpretar um contexto, passando por alguma outra representação aparecem como uma minoria*, mesmo em livros considerados mais recentes. Outro ponto que é colocado é a compartimentalização da exploração das funções em famílias*. Cada família de função é explorada em seu capítulo.* Dessa forma, em um problema de modelagem o aluno reconhece a família que deve usar pelo capítulo que está estudando. Em suma, *no capítulo de função afim só aparecem funções afim*, ou constante, no de função quadrática, todos os exercícios referem-se a função quadrática, etc (GITIRANA & ANGELIN, 2002, p. 11) [Grifo nosso].

Apesar de as oportunidades de se estabelecerem relações funcionais na resolução de problemas serem inúmeras, elas nem sempre são realizadas pelos livros didáticos e/ou professores – protagonistas do processo ensino-aprendizagem. Assim, nos parece ser possível considerar que as dificuldades de aprendizagem no estudo de função também podem ser conseqüência da abordagem adotada pelos livros didáticos por ainda apresentarem, com certa ênfase, os conteúdos dissociados de situações reais, não havendo, em geral, menção ou questionamentos quanto à variação e à relação de dependência das grandezas envolvidas.

3. O ensino de função de acordo com as propostas governamentais

A Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco (BCC-PE) resulta de projeto elaborado, conjuntamente, por várias instituições educacionais que atuam no Estado de Pernambuco: a União dos Dirigentes Municipais de Educação (UNDIME); a Secretaria Estadual de Educação (SEDUC); o Conselho Estadual de Educação (CEE); a Associação Municipalista de Pernambuco (AMUPE) e a Confederação Nacional dos Trabalhadores em Educação (CNTE). Este documento sugere que, ao se introduzir as primeiras noções sobre função, na segunda etapa do Ensino Fundamental, deva-se expressar a dependência entre uma grandeza em relação a outra, e afirma que:

> O estabelecimento de relações entre grandezas deve ser tomado como ponto de partida para o estudo da noção de **função**. O aprofundamento dessa noção deve ter sua origem em atividades ligadas a situações do cotidiano do aluno, evitando-se a sistematização precoce. Situações que envolvam a **proporcionalidade** também podem ser aprofundadas nesta fase. Em particular, a articulação de problemas envolvendo proporcionalidade com o estudo da **função linear** constitui-se em um tópico relevante (PERNAMBUCO, 2005, p. 115).

Por caracterizar-se como uma fase complementar do Ensino Básico o Ensino Médio deve oferecer condições de consolidar as aprendizagens iniciadas no Ensino Fundamental, priorizando conceitos que permitam realizar conexões entre os vários ramos da Matemática, as outras áreas do conhecimento e as questões sociais. Em relação ao ensino de função a BCC-PE (PERNAMBUCO, 2005) orienta que:

> As **funções** têm um papel central na formação do Ensino Médio, principalmente por seu papel de modelo matemático para o estudo das **variações entre grandezas** em fenômenos do mundo natural ou social. Este aspecto das funções deve ser priorizado, em lugar de uma abordagem essencialmente simbólica e de difícil compreensão por parte dos alunos. Em particular, a definição de função baseada na idéia de produto cartesiano de dois conjuntos aparece como bastante desaconselhável, tanto do ponto de vista matemático, como do ponto de vista didático (p. 121).

Achamos pertinente destacar a importância dada pela BCC-PE ao estudo da função afim e seus subconceitos como instrumento de interação e estruturação lógica do conhecimento matemático, no Ensino Médio:

> [...] Os conceitos de domínio, de imagem, de função composta e de função inversa, podem ser gradualmente construídos, desde que em situações significativas para o aluno e sem excessos de simbologia. Os conceitos de crescimento e decrescimento, e, em particular, o de **taxa de variação** de uma função merecem uma atenção especial, pela sua importância no estudo das funções como modelos matemáticos para os fenômenos em que ocorrem relações entre grandezas variáveis.
>
> A ligação entre a proporcionalidade e a **função linear** é um bom exemplo de conexão a ser retomado na presente etapa*. A função afim e as funções a ela associadas são, também, tópicos relevantes. Além disso, trabalhar com um ponto de vista funcional as seqüências numéricas tem sido bastante defendido. Em particular, as progressões aritméticas podem ser relacionadas à função afim. A articulação com a geometria analítica, neste momento, pode permitir um passo importante na direção de desenvolver o pensamento funcional. Essa conexão pode permitir a compreensão das relações entre as resoluções gráfica e algébrica de sistemas de equações do primeiro grau,* evitando-se, todavia, a excessiva manipulação simbólico-algébrica, normalmente privilegiada nesta etapa do ensino [...] [Grifo nosso] (PERNAMBUCO, 2005, p. 121).

Ao se referir à importância da aprendizagem do conceito de função, a partir do estudo de fenômenos do cotidiano representados graficamente, e à sua aplicação no âmbito da Matemática, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCNEM (BRASIL, 1999), afirmam que:

> [...] O ensino isolado desse tema *[funções]* não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As seqüências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que particulares funções. [...] Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente.
>
> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como Física, Geografia ou Economia (p. 255).

Destacamos algumas competências apresentadas nos PCNEM (BRASIL, 1999, p. 215) para serem trabalhadas no Ensino Médio, que também foram exploradas em nosso trabalho ao elaborarmos nossa seqüência didática e ao analisarmos os dados coletados nessa pesquisa:

- Interpretar e utilizar diferentes formas de representação (tabelas, gráficos, expressões, ícones...).
- Identificar variáveis relevantes e selecionar os procedimentos necessários para a produção, análise e interpretação de resultados de processos e experimentos científicos e tecnológicos.
- Identificar, analisar e aplicar conhecimentos sobre valores de variáveis, representados em gráficos, diagramas ou expressões algébricas, realizando previsão de tendências, extrapolações e interpolações e interpretações.
- Analisar qualitativamente dados quantitativos representados gráfica ou algebricamente relacionados a contextos socioeconômicos, científicos ou cotidianos.

De acordo com os PCN + Ensino Médio (BRASIL, 2002), que complementa as orientações educacionais dos PCNEM (BRASIL, 1999), o estudo de funções pode servir como um caminho de compreensão e aquisição da linguagem algébrica como uma linguagem das ciências. Isto porque podemos mobilizar a linguagem simbólica para expressar relações de dependência entre grandezas e modelar situações-problema do cotidiano e de várias áreas do conhecimento.

Na perspectiva das Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), e em concordância com os outros documentos já citados, o estudo de Funções pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações de variação entre duas grandezas em diferentes situações dentro e fora da Matemática. Tal procedimento permite que os alunos apresentem outros exemplos de relações funcionais, esbocem seus gráficos, registrando os tipos de crescimento e decrescimento (mais ou menos rápido), fazendo-se necessário o estudo de diferentes modelos de funções (linear, quadrática e exponencial).

Este levantamento das propostas governamentais de ensino do conceito de função representou elementos importantes para nossa pesquisa e foram pertinentes para a elaboração de nossa seqüência de ensino. Procuramos introduzir o estudo de função afim diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas lineares, o que possibilitou uma aprendizagem mais significativa para os alunos, a partir da contextualização dos saberes em jogo e mais efetiva, visto que oportunizamos que se movimentassem entre diferentes linguagens (natural, numérica, algébrica e gráfica).

CAPÍTULO 2
REFLEXÕES SOBRE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

> A didática da matemática é a ciência do estudo e da ajuda para o estudo da matemática. Seu objetivo é chegar a descrever e caracterizar os processos de estudo – ou processos didáticos – para propor explicações e respostas sólidas para as dificuldades com as quais se deparam todos aqueles (alunos, professores, pais, profissionais, etc.) que se vêm levados a estudar matemática ou a ajudar outros a estudá-la (CHEVALLARD, BOSCH & GASCÓN, 2001, p. 59).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), propostos pelo Ministério da Educação e Cultura, em 1999, organizaram a área de Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias, em torno de três grandes competências, como metas para concretizar a escolaridade básica para todos os brasileiros:

- Representação e comunicação: envolve leitura, interpretação e produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características desta área do conhecimento.
- Investigação e compreensão: marcada pela capacidade de enfrentamento de situações-problema, utilizando os conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências.
- Contextualização das ciências no âmbito sociocultural: análise crítica das idéias e recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas através do conhecimento científico.

Tal proposta poderá ser viabilizada no ambiente escolar, à medida que seu corpo docente repense sua prática pedagógica refletindo sobre o significado destas competências e procurando redirecionar seus objetivos, metas e ações para um trabalho que as tornem possíveis de serem concretizadas na sala de aula.

O desejo de harmonizar o ensino das estruturas matemáticas e o desenvolvimento da estrutura cognitiva dos alunos fez com que alguns autores defendessem a necessidade de que não se pode desenvolver bons frutos sobre uma teoria Matemática sob a forma axiomática, sem que o sujeito esteja bem familiarizado com a questão à qual ela se aplica, sendo primordial que o objeto seja trabalhado, em princípio, de forma experimental, isto é, fazendo constantemente apelo às suas idéias intuitivas.

Alguns pesquisadores em Didática da Matemática interessados em estudar os processos didáticos e os fenômenos que ocorrem na sala de aula e fora dela defendem a idéia "de que unicamente a partir de uma melhor compreensão desses processos é que poderão ser propostas ações e meios concretos para *melhorar o estudo da Matemática*" (CHEVALLARD, BOSCH & GASCÓN, 2001, p. 58).

No contexto da Didática da Matemática vêm-se progressivamente construindo modelos teóricos para estudar, analisar e prever o funcionamento dos diversos tipos de aprendizagem. São exemplos desses modelos: a teoria das situações didáticas e do contrato didático de Guy Brousseau e da transposição didática de Yves Chevallard. Tomar contato com esses modelos e participar dos debates em torno das questões que envolvem as pesquisas em Educação Matemática é fundamental para todos que se dedicam às pesquisas direcionadas ao estudo do ensino-aprendizagem da Matemática.

Ancorando-nos nessas idéias partimos do pressuposto de que a apropriação do conceito de *Função Afim*, pelo aluno, não pode limitar-se ao conhecimento formal de definições, exemplos, aplicação de fórmulas algébricas e construção de gráficos; é indispensável que o objeto estudado tenha significado para que, a partir da seqüência de ensino que foi colocada, o sujeito saiba mobilizar os saberes prévios para a solução de problemas, seja de contexto do cotidiano, seja de contexto científico.

Nesse contexto, Câmara dos Santos (1997) coloca que um dos principais pilares que sustentam os trabalhos que tratam dos fenômenos relativos ao ensino/ aprendizagem em Matemática, nos últimos vinte e cinco anos, caracteriza-se exatamente pela identificação, nesse processo, de três pólos que balizam o desenvolvimento dessas pesquisas: o *conhecimento*, o *professor* e o *aluno*. Essa situação, esquematizada por um diagrama triangular, em que cada um dos vértices seria representado por cada um dos pólos citados anteriormente, leva ao estabelecimento de três relações, representadas pelos respectivos lados do triângulo: relação aluno/professor, relação aluno/conhecimento e relação professor/conhecimento. (...) Os três subsistemas – o professor, o conhecimento e o aluno – constituem o que se chama *sistema didático*.

Assim, um sistema didático, segundo esse autor, pode ser observado através das relações que se movimentam entre três pólos: professor, aluno, conhecimento.

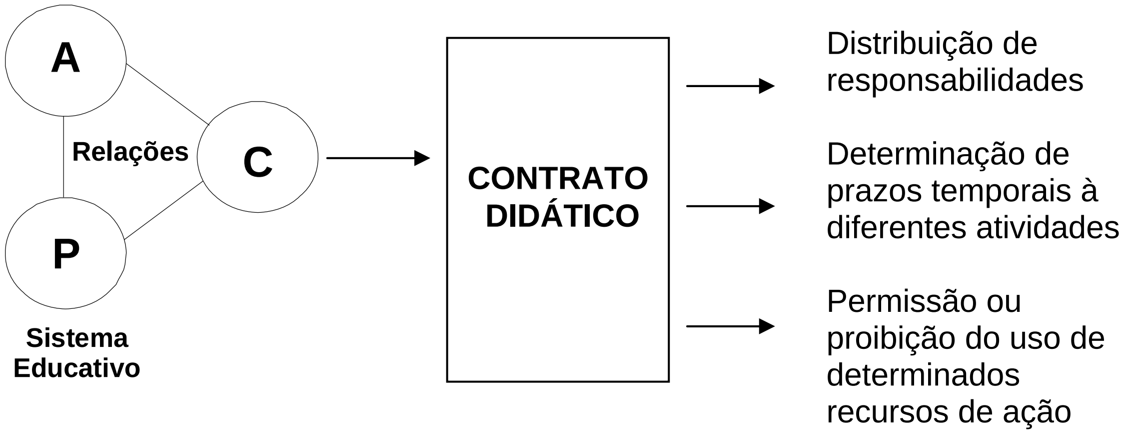


FIGURA 2: Situação didática (CÂMARA DOS SANTOS, 2001, p. 2).

O estudo da tríade conhecimento – professor – aluno que norteia os trabalhos que tratam dos fenômenos didáticos influencia o processo ensino-aprendizagem. A pesquisa destes fenômenos passa pelo estudo das situações didáticas, modelo teórico desenvolvido principalmente pelo professor e pesquisador Guy Brousseau (1982), com o qual pretendemos melhor compreender os fenômenos que envolvem a aprendizagem do conceito de Função Afim e seus subconceitos. Pretendemos, por exemplo, que os sujeitos aprendam estes conceitos transformando situações dadas em linguagem discursiva, em esquemas, tabelas, gráficos, fórmulas ou equações matemáticas, adaptando esse modelo teórico à nossa realidade educacional.

Encontramos na Teoria das Situações Didáticas, proposta por Guy Brousseau, um estudo sobre fatos que devem ser levados em conta ao se elaborar e apresentar aos alunos atividades direcionadas à aprendizagem de certos conteúdos matemáticos, visando realizar uma Educação Matemática mais significativa para o aprendiz.

Segundo Pais (2002) uma das idéias que propiciou a estruturação da teoria das situações didáticas por Brousseau foi a noção de aprendizagem por adaptação, "enfatizando uma aproximação como os chamados esquemas de assimilação e acomodação, que foram descritos inicialmente por Piaget. *Em uma tal aprendizagem, o aluno é desafiado a adaptar seus conhecimentos anteriores às condições de solução de um novo problema*" (p. 69) [Grifo nosso].

Uma aprendizagem nesses moldes torna obsoleto um jargão habitualmente escutado e difundido por corredores de escolas e instituições educacionais: o professor é aquele que ensina e o aluno é aquele que aprende. A diferença incorporada pela teoria das situações didáticas à relação aluno-saber-professor está na visão de que professor e aluno são parceiros nas ações de ensinar e aprender, isto é, o aluno deve ser motivado a assumir junto com o professor o papel de protagonistas no jogo didático.

Segundo definição dada por Brousseau (1982 apud Gálvez,1996):

> Situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explícita e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um determinado meio (que abrange eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (representado pelo professor) com a finalidade de conseguir que estes alunos apropriem-se de um saber constituído ou em vias de constituição (p. 28).

Devemos novamente refletir sobre a diferença entre uma *situação didática* e uma *situação de ensino* característica da prática "tradicional". Ambas determinam uma intenção de que o aluno aprenda algo, entretanto, a situação didática demanda que o professor atribua ao aluno maior responsabilidade sobre a sua aprendizagem.

Para Gálvez (1996), “a presença de um contexto escolar não é essencial na definição de uma situação didática; o que realmente é essencial é seu caráter intencional, o fato de haver sido construída com o propósito explícito de que alguém aprenda algo” (p. 28).

Diante destas afirmações, podemos considerar que um dos principais objetivos da Didática da Matemática é analisar como funcionam as situações didáticas no contexto da sala de aula, isto é, investigar como contribuem para a evolução da aprendizagem dos alunos, quando estes respondem positivamente ou negativamente à aprendizagem de um determinado objeto.

Gálvez (1996, pp. 29-30) discute ainda um outro aspecto que facilita a análise das situações didáticas, a sua classificação. Brousseau distingue, entre as situações que produz para seu estudo experimental, quatro fases, cuja seqüência nos processos didáticos que organiza consideramos importante citar aqui:

1. As situações de ação, nas quais se gera uma interação entre os alunos e o meio físico. Os alunos devem tomar as decisões que faltam para organizar sua atividade de resolução do problema formulado.
2. As situações de formulação, cujo objetivo é a comunicação de informações entre alunos. Para isto, devem modificar a linguagem que utilizam habitualmente, precisando-a e adequando-a às informações que devem comunicar.
3. As situações de validação, nas quais tenta-se convencer a um ou vários interlocutores da validade das afirmações que são feitas. Neste caso, os alunos devem elaborar provas para demonstrá-las. Não basta a comprovação empírica de que o que dizem é certo; é preciso explicar porque, necessariamente, deve ser assim.
4. As situações de institucionalização destinadas a estabelecer convenções sociais. Nestas situações busca-se que o conjunto de alunos de uma aula assuma o significado socialmente estabelecido de um saber que foi elaborado por eles mesmos em situações de ação, de formulação e de validação.

Para o nosso trabalho, procuramos elaborar um conjunto de atividades de contexto realístico que propiciassem aos sujeitos a passagem por cada uma das fases consideradas por Brousseau. Observamos que estas fases estão extremamente interligadas, devendo o professor estar especialmente preparado e atento para a passagem pelas situações de ação, de formulação e de validação. As situações de ação e formulação podem permitir que os sujeitos enveredem, inclusive, por um caminho equivocado, sendo necessário que sejam orientados a lançar mão das situações de validação, em que utilizarão mecanismos de prova das soluções encontradas.

É preciso ressaltar que essa categorização das situações didáticas de Brousseau se aplica tão somente quando associada à idéia de situação-problema, isto é, de “uma situação geradora de um problema, cujo conceito necessário à sua resolução seja aquele conceito que queremos que o aluno construa" (CÂMARA DOS SANTOS, 2002a, p. 40).

Câmara dos Santos (2002a) faz distinção entre problema fechado, problema aberto e situação-problema. Para esse autor o problema fechado “se caracteriza como um problema cujo enunciado, ou localização, já identifica, para o aluno, qual o ‘conteúdo’ que deverá ser utilizado para resolvê-lo” (p. 39).

Esse tipo de problema tolhe a criatividade natural do educando e aniquila seu interesse em fazer indagações quanto a outras possíveis soluções. Para conferir isso destacamos uma fala de Charnay (1996):

> Só há problema se o aluno percebe uma dificuldade: uma determinada situação que, “provoca problema” para um determinado aluno pode ser resolvida imediatamente por outro (e então não será percebida por este último como sendo um problema). Há então, uma idéia de obstáculo a ser superado. Por fim, o meio é um elemento do problema, particularmente as condições didáticas da resolução (organização da aula, intercâmbio, expectativas explicitas ou implícitas do professor) (p. 46).

Portanto, o problema precisa ser desafiador, não devendo ser resolvido por mecanismos padronizados sem que haja envolvimento ou interpretação; deve sim, possibilitar que o aluno transforme a linguagem usual em linguagem matemática. Recomenda-se que o professor atribua ao aluno uma responsabilidade maior na sua produção, no seu aprendizado.

Ainda segundo Câmara dos Santos (2002a) o problema aberto e a situação-problema “tomam por eixo central colocar o aluno, guardadas as devidas proporções, numa situação análoga àquela em que muitas vezes o matemático se vê ao exercer sua atividade; o aluno deve, então, diante desses problemas, ser capaz de realizar TENTATIVAS, estabelecer HIPÓTESES, TESTAR essas hipóteses e VALIDAR seus resultados, provando que são verdadeiros ou, em caso contrário, mostrando algum contra-exemplo” (p. 39). Essa forma do professor encaminhar a aprendizagem permite que o aluno desenvolva um “processo cientifico” de resolução de problemas, em oposição ao “processo mecanicista” de solução dos problemas fechados em que o aluno busca a resposta esperada pelo professor seguindo caminhos anteriormente traçados por este.

A idéia de Câmara dos Santos expressa essencialmente que o trabalho de levantar suposições para a solução da situação-problema e a validação dos resultados propiciará ao aluno lançar mão de conhecimentos prévios, e a tomada de consciência de que estes conhecimentos sendo insuficientes para chegar a resolver o problema possibilitarão que o conceito que o professor espera que seja aprendido, se torne uma das “ferramentas” mais adequadas para a resolução do problema. Porém, “Uma *análise a priori* do problema, torna-se necessária: *o que o aluno vai fazer diante desse problema?*” (CÂMARA DOS SANTOS, 2002a, p. 41).

Ao enfatizar a resolução de situações-problema esse autor propõe então que o ponto de partida para a aprendizagem de um conceito matemático não seja a sua definição, mas o problema. No processo de ensinar e aprender conceitos, teoremas e algoritmos matemáticos deve ser priorizado o contexto em que estão inseridos os conteúdos, ou seja, contextos em que os alunos necessitem desenvolver algum tipo de estratégia para resolver o problema proposto pelo professor sendo, o conceito que se deseja que construa a ferramenta necessária à sua solução.

Dessa maneira, a aplicação dos problemas que elaboramos em nosso projeto de pesquisa teve por objetivo suscitar a curiosidade, a criatividade e a discussão entre os alunos, a organização das conclusões, a validação dos resultados obtidos para que, só então, o conteúdo fosse sistematizado pelo professor.

Essa atividade nos permitiu reorganizar nossa relação com o saber a ensinar, neste caso, o conceito de função afim, distinguindo o objetivo imediato dos objetivos mais longínquos, construindo uma situação que efetivamente tem o conhecimento considerado como o mais apto para resolvê-la. Fizemos uma análise prévia das concepções dos alunos, reavaliando a relação professor-aluno, para que pudéssemos prever suas ações e as possíveis dificuldades que pudessem encontrar na busca da solução da situação proposta.

Gálvez (1996) ressalta que, "a finalidade da didática da matemática é o conhecimento dos fenômenos e processos relativos ao ensino da matemática para controlá-los, e através deste controle, otimizar a aprendizagem dos alunos" (p. 31).

Corroborando idéias já defendidas anteriormente a autora considera que:

> Todo conhecimento seja uma resposta, uma adaptação da humanidade diante de situações que tem enfrentado ou frente a problemas que tem formulado para si. Os conhecimentos que surgiram em contextos funcionais, como ferramentas ou instrumentos para a adaptação são transformados posteriormente com o propósito de relacioná-los a outros tipos de conhecimentos, de conservá-los e de transmiti-los, adotando a modalidade de objetos culturais. Um saber cultural que se encontre desligado de sua gênese constitui um produto descontextualizado e despersonalizado. É a partir desta modalidade que os conhecimentos ingressam nos programas escolares (p. 31).

Assim, podemos salientar que a forma como os sistemas de ensino organizam os currículos e as situações didáticas construídas para ensiná-los, isto é, como estabelecem o quê ensinar, porquê ensinar, para quem ensinar e como ensinar pode determinar o sucesso ou o fracasso do contrato didático estabelecido entre professor, aluno e saber.

Como já tem sido assinalado, no contexto das interações didáticas que visam o ensino e a aprendizagem de um dado saber, podemos falar da idéia de fenômenos didáticos e os processos relativos ao ensino da matemática para controlá-los e, assim, otimizar a aprendizagem dos alunos. Tais fenômenos se instituem quando é estabelecida uma relação didática que envolve professor, aluno e saber e foram estudados no âmbito da didática da matemática: o contrato didático e a transposição didática.

Cabe-nos aqui diferenciar dois fenômenos distintos que ocorrem na sala de aula, que podem ser confundidos entre os leitores mais desavisados: o contrato pedagógico e o contrato didático.

O contrato didático se manifesta quando do desejo que o aluno apreenda um determinado saber, e, sobretudo, "quando ele é transgredido por um dos elementos da relação didática" (HENRY, 1991, p. 2).

Segundo este autor, contratos didáticos mal-colocados ou mal-compreendidos podem originar mal-entendidos entre professor e aluno e esses descontentamentos podem resultar, até mesmo, em dificuldades de aprendizagem de um novo objeto.

O contrato pedagógico "pode ser associado a um '*contrato de cultura'* num determinado sistema educativo, segundo os termos de Nicolas Balacheff[2]" (HENRY, 1991, p. 2), ou seja, um contrato próprio a qualquer relação entre pessoas, em que um saber não está necessariamente inserido.

Segundo Brousseau (1986 apud Silva, 1999):

> Contrato didático é o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelo aluno e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor... Esse contrato é o conjunto de regras que determinam, uma pequena parte explicitamente, mas, sobretudo implicitamente, o que cada parceiro da relação didática deverá gerir e aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro (p. 43).

Quando recorremos ao aporte teórico de Brousseau, percebemos que o contrato didático estabelece as atribuições do professor e do aluno que devem atuar como parceiros da relação didática, responsáveis pelo sucesso ou fracasso desse contrato, olhando um ao outro de forma diferente da visão dada a estes, no ensino tradicional, em que o professor incorpora o papel de autoridade na relação professor-saber-aluno.

O contrato didático firmado entre um professor de Matemática, que respeita os novos paradigmas da sociedade contemporânea, e seus alunos, deve ter como base, principalmente, o respeito às idéias de ambos, o reconhecimento dos direitos e

[2]Nicolas Balacheff: "Le contrat et la coutume". In Atos do colóqio franco-alemão de Luminy. Grenoble. La Pensée Sauvage, 1987.

obrigações de cada um, como parceiros do jogo didático, além da compreensão de que as cláusulas desse contrato são renegociáveis, isto é, a cada novo conhecimento a ser construído um novo contrato se estabelece.

Assim, por exemplo, o contrato didático estabelecido numa aula de geometria ou de álgebra poderá ser diferente, dependendo da relação do professor com um ou outro conteúdo dessas áreas ao mostrar-se mais ou menos confortável em ensiná-los, propiciando o estabelecimento de regras explícitas e implícitas distintas com seus alunos.

Apresentaremos a seguir, um problema encontrado na literatura consultada, que se tornou famoso dentre aqueles que estudam os fenômenos didáticos (HENRY, 1991):

"Em um barco existem 26 carneiros e 10 cabras. Qual a idade do capitão?"

Esse problema originou uma pesquisa em didática no IREM de Grenoble. Foi proposto a 97 alunos de CE-1 e CE-2, que correspondem à nossa primeira e segunda séries do Ensino Fundamental I e intitula um livro de Stella Baruk[3] .

De acordo com a autora, dos 97 alunos a quem o problema foi proposto, 76 realizaram operações aritméticas com os números que se encontram no enunciado. Baruk explica que respostas absurdas a perguntas absurdas resultam de uma maneira de ensinar Matemática que transforma os alunos em autômatos.

Nessa mesma direção, ao discutir o contrato didático entre um professor de matemática e seus alunos Brito Menezes (2006) considera:

[3] Stella Baruk: “L’âge du capitaine”. Paris, Eds. Seuil, 1985.

> É comum o estabelecimento de um tipo de contrato didático em matemática, que traz como idéia subjacente à resolução de problemas aritméticos a de os números que aparecem nos problemas são aqueles que, uma vez utilizada uma das operações fundamentais (ou a combinação de mais de uma delas), será possível encontrar a resposta do problema (p. 35).

Para desenvolver as atividades da nossa pesquisa utilizamos uma seqüência didática constituída de um conjunto de problemas que propiciaram a construção do conceito de Função Afim (relação professor-saber). Nosso intuito era que os problemas fossem compreendidos pelos alunos, eles deveriam verdadeiramente querer resolvê-los (relação aluno-saber); as cláusulas do contrato didático entre professor e alunos (do primeiro ano do Ensino Médio) foram negociadas de acordo com o que cada um esperava do outro se levando em conta as responsabilidades de ambos (relação professor-aluno).

Uma análise prévia do problema permitiu a compreensão das variáveis didáticas que envolvem o saber a ensinar e assim prever as possíveis estratégias a que os alunos pudessem recorrer para solucionar os problemas, permitindo o controle da situação didática e dos seus resultados.

Neste tipo de situação didática é preciso quebrar “antigas” regras como a de que o professor deve ser o agente que determina os caminhos para a solução do problema, recebe, corrige e interpreta as respostas dos alunos, valida-as ou não, e enfim atribui-lhe um conceito.

As cláusulas do contrato didático entre professor, alunos e saber devem ser negociadas de forma que o trabalho com os alunos atinja o objetivo perseguido; a construção do saber a ensinar. O professor assume, então, o papel de mediador da aprendizagem, ao otimizar as condições de trabalho em sala de aula e propiciar a confrontação das opiniões e estratégias de resolução propostas, sem no entanto impedir o desenvolvimento da autonomia dos alunos.

As pesquisas em Didática da Matemática explicitaram alguns conceitos básicos. Dentre eles destacamos o conceito de *saber científico,* definido por Henry (1991) como “o conjunto de conhecimentos socialmente disponíveis, que foram objeto de publicações científicas ou de comunicações reconhecidas como válidas por toda uma comunidade”. No contexto do ensino, segundo Pais (1999, p. 15), Brousseau (1998) “faz uma distinção entre conhecimento e saber, colocando em evidência os aspectos da *utilidade* e remetendo a questão para análise das *situações didáticas* envolvidas em cada caso. Nessa análise, o saber aparece associado ao problema da validação do conhecimento, que, no caso da matemática, é a questão do raciocínio lógico-dedutivo”. Ainda na análise de Brousseau, “o conhecimento aparece vinculado mais ao aspecto experimental, envolvendo algum tipo de ação com a qual o sujeito tenha um contato mais pessoal” (Idem).

Comentando as palavras de Brousseau, podemos considerar que uma das prioridades, no que se refere aos procedimentos pedagógicos de uma instituição escolar, é a seleção dos conteúdos que constituem os programas escolares que tem como fonte original o saber científico. A busca da associação do saber científico com a realidade dos educandos deve ser um dos compromissos que a escola precisa assumir, em particular, é um compromisso dos professores ao criarem situações de aprendizagem que dêem significado ao saber ensinado.

Nesse contexto, a BCC-PE (PERNAMBUCO, 2005) orienta que “As funções têm um papel central na formação do Ensino Médio, principalmente por seu papel de modelo matemático para o estudo das variações entre grandezas em fenômenos do mundo natural ou social” (p. 121).

O estudo de funções a partir de um contexto, enfatizando a noção de dependência na variação entre duas grandezas evidencia a funcionalidade do conceito de Função Afim quando, por exemplo, relacionamos esse saber com algumas grandezas lineares presentes no dia-a-dia:

- O preço a pagar é função do número de pães que vou comprar.
- O valor a ser pago em uma corrida de táxi é função do número de quilômetros rodados.
- O valor do desconto do vale transporte é função do valor do meu salário.
- O consumo de combustível do meu automóvel é função do tempo de duração da viagem.

Essa relação íntima e profunda entre os conceitos matemáticos e a vida cotidiana se evidencia constantemente com a multidão de problemas matemáticos com os quais nos confrontamos diariamente. Acreditamos que, em sala de aula, o ideal seria articular os conceitos matemáticos com situações-problema que envolvessem os alunos e que contribuíssem para a construção do seu significado.

Nessa mesma direção, Biembengut & Hein (2002) acreditam que a adoção de modelos matemáticos no ensino, fazendo a conexão entre o que se aprendeu e o que se executou, torna “alunos e professores mais entusiastas com a possibilidade de transformar a escola, ainda que de forma lenta e gradual, para que ela venha a exercer o papel que lhe cabe na preparação do indivíduo para atuar no meio circundante” (p. 125). Para nós, à medida que o professor aproxima o saber a ensinar das realidades cognitiva e cotidiana do aluno, este poderá associá-lo a outros momentos de aprendizagem, relacionados à escola ou não, possibilitando-lhe compreender e emitir juízos de tais situações na busca de estratégias de resolução.

Para Brousseau (1996b) "O matemático não comunica seus resultados tal como os obteve, mais os reorganiza, lhes dá a forma mais geral possível; realiza uma 'didática prática' que consiste em dar ao saber uma forma comunicável, descontextualizada, despersonalizada, fora de um contexto temporal" (p. 48).

O autor salienta duas fases contraditórias do papel do professor:

> "[...] fazer viver o conhecimento, fazê-lo ser produzido por parte dos alunos como resposta razoável a uma situação familiar e, ainda transformar essa 'resposta razoável' em um 'fato cognitivo extraordinário', identificado, reconhecido a partir do exterior.
> Para o professor, é grande a tentação de pular estas duas fases e ensinar diretamente o saber como objeto cultural, evitando este duplo movimento. Neste caso, apresenta-se o saber e o aluno se apropria dele como puder" (1996b, pp. 48-49).

Notemos que o processo de ensinar-aprender não é apenas resolver, para os alunos, problemas no quadro, usando situações do cotidiano. Ou simplesmente comunicar conhecimentos. É também procurar instigá-los a desenvolver o raciocínio lógico e dedutivo em geral; é incitá-los a criar estratégias para representar situações dadas; é fazê-los converter o problema proposto em seu problema, de forma que se sintam responsáveis por sua resolução.

O que aqui queremos pontuar, e que retomaremos quando da análise dos resultados da presente pesquisa, é que tais idéias poderão ser viáveis se utilizarmos a Teoria das Situações Didáticas como uma ferramenta para a investigação do processo de ensino-aprendizagem de Função Afim em turmas do 1º ano do ensino médio, objetivando oportunizar aos alunos de se situarem como sujeitos atuantes no ambiente a que fazem parte.

Nesse contexto, nossa intenção é a de fazer com os alunos se apropriem do conceito de Função Afim, por meio de uma metodologia compatível com a concepção de que o aluno aprende refletindo, formulando hipóteses e criando estratégias de ação sobre as situações que lhe são apresentadas.

Para nós, a definição que *Função Afim é aquela que tem como representação algébrica* $f(x) = ax + b$*, sendo* a*,* b *números reais com* $a \neq 0$ *e cuja representação cartesiana é uma reta*, quando apresentada para os alunos fora de um contexto, não permite a reflexão sobre a importância fundamental da função polinomial do 1º grau em diversas disciplinas e profissões e sua utilização na resolução de problemas. Acreditamos que isso será possível se forem criadas seqüências de ensino que levem o aluno a reconhecer que esse conceito é dinâmico e intuitivo, uma vez que em nosso dia-a-dia estamos sempre comparando e relacionando números, grandezas e formas. Dessa maneira os alunos acompanharão o desenvolvimento dessas idéias, refletindo sobre o que os motiva para a construção do conhecimento matemático estudado indagando-se: há necessidade de estudar tal conteúdo?, há curiosidade em aprendê-lo?, há aplicabilidade no meu cotidiano?

O entendimento e a aplicação do conceito de Função Afim em situações diversas no âmbito das ciências, no trabalho e em outros contextos relevantes para a sua vida poderá propiciar a mudança de status deste conceito, passando de um saber científico para um conhecimento.

Essa trajetória de mudança de status do saber científico em saber ensinado é denominada por Yves Chevallard de Transposição Didática. Ressaltamos que as limitações e imposições das instituições de ensino denominadas por Chevallard de *noosfera*, ou ainda, *esfera onde se pensa o funcionamento didático*, também interferem nos resultados da relação professor-aluno-saber, uma vez que seu papel é definir os objetivos de ensino e o saber a ser ensinado, participando assim, da Transposição Didática definida por Chevallard (1991 apud Pais, 1999), como:

> Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os 'objetos de ensino'. O 'trabalho' que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática (p. 16).

Segundo Chevallard, essa Transposição Didática apresenta uma *fase externa*, em que o saber científico é moldado pela noosfera e transformado em saber a ensinar, e uma *fase interna*, na qual o saber a ensinar é transformado em saber ensinado pelo professor.

A transposição didática no interior da escola é um momento extremamente relevante para o processo de ensino-aprendizagem. Da escolha do saber a ensinar à sua inserção na sala de aula, existe todo um processo gerador de deformações, que termina no que chamamos de saber escolar. De acordo com a BCC-PE (PERNAMBUCO, 2005) a transposição didática interna é a fase em que cada professor:

> [...] vai transformar os conhecimentos que lhes foram designados para serem ensinados em objetos de conhecimento efetivamente ensinados. As escolhas efetuadas pelo professor é que determinam, de certa maneira, a qualidade das aprendizagens realizadas pelos alunos (p. 52).

Nessa direção, acrescentamos que o trabalho do professor envolve um importante desafio que consiste em fazer a transposição didática do saber a ensinar. Em nosso caso, elaboramos problemas de contexto realístico enfocando a idéia de função (relação de dependência entre duas grandezas), o conceito de função afim ponto principal da nossa pesquisa, propiciando conexões entre as diferentes representações de funções, fazendo-os funcionar como ferramentas que o aluno lançasse mão cada vez que precisasse resolver um problema, recontextualizando estes saberes.

Alguns autores têm defendido a idéia de que “Fazer matemática é resolver problemas!” (CHARNAY, 1996, p. 37). Para este autor, porém, a elaboração destes problemas não é realizada sem dificuldade, pois o que se ensina deve estar carregado de significado para o aluno.

Charnay (1996, p. 38), acrescenta ainda que a construção do significado de um conhecimento deve ser considerada em dois níveis:

- Um nível “externo”: qual é o campo de utilização deste conhecimento e quais são os limites deste campo?
- Um nível “interno”: como e por que funciona tal ferramenta? (por exemplo, como funciona um algoritmo e por que conduz ao resultado procurado?).

Este autor enfatiza que “a questão essencial do ensino da matemática é então: como fazer para que os conhecimentos ensinados tenham sentido para o aluno?” (p. 38).

Ele menciona ainda que: “o aluno deve ser capaz não só de repetir ou refazer, mas também de ressignificar em situações novas, de adaptar, de transferir seus conhecimentos para resolver problemas”. Ou seja, o aluno deverá ser capaz de aplicar os conhecimentos adquiridos na escola em situações do cotidiano diferentes daquelas vivenciadas em sala de aula.

Estas idéias se confirmam nas palavras de Brousseau (1996b):

> Se uma situação leva o aluno à solução como um trem em seus trilhos, qual é a sua liberdade de construir seu conhecimento? Nenhuma. A situação didática deve conduzir o aluno a fazer o que se busca, porém, ao mesmo tempo, não deve conduzi-lo. Isto porque se a resposta se deve exclusivamente às virtudes da situação, nada deve às ‘qualidades’ do aluno (p. 54).

A seqüência didática dessa investigação foi construída com o intuito de que os alunos reconhecessem as grandezas que se relacionam de forma linear, a relação de dependência entre as variáveis envolvidas, x e y, por exemplo, formassem os pares ordenados (x,y) escrevendo-os em uma tabela, traduzissem a relação entre essas grandezas por meio de uma expressão algébrica (ou lei de associação), usando-a para justificar ou fazer previsões sobre o comportamento das grandezas e transcrevessem a tabela em um gráfico cartesiano (conjunto de pontos obtidos a partir da representação dos pares ordenados nos eixos cartesianos) percebendo que é uma reta.

Na busca de possíveis esclarecimentos sobre as questões discutidas investigamos os efeitos de uma seqüência didática nas concepções de alunos do 1º ano do Ensino Médio em relação ao conceito de Função Afim, ancorando nossos estudos em idéias como as já mencionadas e outras que se inserem no contexto da Didática da Matemática.

CAPÍTULO 3
METODOLOGIA

> A concepção moderna do ensino solicita, pois, ao professor que provoque no aluno as adaptações desejadas, através de uma escolha judiciosa dos «problemas» que lhe propõe. Estes problemas, escolhidos de forma que o aluno possa aceitá-los, devem levá-lo a agir, a falar, a reflectir, a evoluir por si próprio. Entre o momento em que o aluno aceita o problema como seu e o momento em que produz a sua resposta, o professor recusa-se a intervir como proponente dos conhecimentos que pretende fazer surgir (BROSSEAU, 1996a, p. 49).

Este trabalho se originou com a constatação em nossa prática docente, da dificuldade apresentada pela maioria dos alunos do 1º ano do Ensino Médio em compreender o conceito de função afim e de variável dependente e independente. A evidência deste fato pôde ser constatada não apenas ao longo de nossa experiência de ensino com alunos do ensino médio, mas também em diversas pesquisas que envolvem esta questão. Decorrente disso, surgem dificuldades no estudo da função afim, nosso principal objeto de estudo, e de outras situações em que se faz necessária a aplicação destes conceitos.

Nosso interesse em desenvolver uma investigação sobre as causas de tais dificuldades, teve como elemento decisivo a leitura do texto de uma conferência pronunciada no Canadá, em 1988, pelo professor Guy Brousseau, sobre "Os diferentes papéis do professor", no qual considera que é papel do professor fazer viver o conhecimento, fazê-lo ser produzido pelos alunos como resposta razoável a uma situação que lhe seja familiar e, ainda, fazê-lo reconhecer no saber produzido seu caráter universal e culturalmente reutilizável.

Tal idéia nos levou a conjecturar que muitas das dificuldades, no aprendizado de Função Afim, ocorrem devido ao formalismo existente no seu estudo, sendo necessário resgatar o caráter dinâmico deste conceito, por meio de abordagens que proponham situações que dêem funcionalidade a esse saber.

As concepções que fundamentam nosso trabalho são provenientes da linha francesa da Didática da Matemática, que estuda a aquisição de conhecimentos matemáticos. Mais precisamente, nos apoiamos na Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau (1982), no que se refere ao processo de ensino-aprendizagem de Matemática que envolve o aluno, o professor e o conhecimento.

Com o intuito de verificar se a hipótese levantada em nossa pesquisa era verdadeira, formulamos e experimentamos uma seqüência didática que propiciou aos alunos situações de aprendizagem para a construção do conceito de função, em particular de função afim, como resposta ao estudo, confecção e interpretação de expressões algébricas, gráficos e tabelas, bem como, as articulações entre estas representações, com ênfase na concepção "variacional", isto é, no relacionamento entre as variáveis dependente e independente.

De modo mais específico, analisamos não apenas as técnicas utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de contexto realístico, mas também as diferentes estratégias, a interação entre os componentes dos grupos, a formulação das soluções, a validação das informações e a sistematização do saber elaborado por eles, bem como avaliamos os fenômenos didáticos ocorridos na conversão do gráfico de uma função afim para a expressão algébrica e vice-versa.

O trabalho em sala de aula foi realizado em grupos compostos por quatro e cinco alunos, utilizando a tipologia de situações didáticas para analisar as atividades da seqüência, são elas: as situações de *ação*, em que "fabricam" estratégias de resolução do problema, de *formulação*, em que fazem uso de uma linguagem para comunicar tais estratégias, de *validação*, em que discutem quanto à veracidade das afirmações formuladas e de *institucionalização*, em que o professor organiza os conhecimentos para que se tornem uma referência universal, não particularizada.

Tais situações proporcionam a geração de ricos conflitos sócio-cognitivos entre os alunos ao formularem e comunicarem entre si as estratégias de solução do problema e confrontarem suas diferentes opiniões. Tratou-se então de um processo dinâmico, em que os alunos se depararam com um desafio que teriam de ultrapassar acionando seus conhecimentos prévios. O trabalho em grupo otimizou a aprendizagem, pois inibiu eventuais desencorajamentos, diminuiu o medo de não conseguir resolver e impulsionou as discussões em busca da superação das dificuldades inerentes ao problema.

De acordo com Câmara dos Santos (2002b) "[...] as interações sociais entre os alunos podem facilitar de maneira importante a aprendizagem; em particular, podemos destacar o trabalho em grupos e a prática do 'debate cientifico' em sala de aula" (p. 15). Para este autor, os conflitos gerados pela situação de aprendizagem e/ou pelos debates permitem que os alunos construam novos conhecimentos, "após colocar em questão a antiga concepção" (p. 15).

A professora-pesquisadora assumiu o papel de mediadora; após a resolução dos problemas pelos grupos propiciamos a confrontação das respostas, formalizando a aprendizagem e sistematizando o objeto por um processo de análise e síntese das produções.

1. Sujeitos

A pesquisa foi realizada em uma Escola Estadual localizada na zona sul da cidade de Recife – PE; é de grande porte, apresentando aproximadamente 1800 alunos distribuídos em três turnos, havendo maior número de alunos matriculados pela manhã.

No período da manhã funciona com todas as séries do Ensino Fundamental II; à tarde e à noite, com todas as séries do Ensino Fundamental II e Médio. Para os padrões de escola estadual, esta possui uma boa estrutura física. É composta de 20 salas de aula ambiente, Núcleo de Estudo de Línguas (Espanhol, Francês e Inglês), laboratório de Biologia, laboratório de informática, biblioteca, central de tecnologia (CTE), sala dos professores, sala dos coordenadores, secretaria, diretoria, sala do Grêmio Estudantil, auditório, cozinha, sanitários e um pátio. Além da boa estrutura física a escola conta com recursos audiovisuais (aparelhos de TV, som, vídeo, DVD, retroprojetores, data-show, antena parabólica) e acesso à Internet. Possui ainda, um corpo docente de aproximadamente 70 professores, 1 psicóloga, 7 coordenadores de área, 2 coordenadores pedagógicos, 4 coordenadores de biblioteca e 3 coordenadores de CTE.

O Grêmio Estudantil, o Conselho Escolar e a Unidade Executora auxiliam a Direção no desenvolvimento dos projetos da Unidade Escolar e Secretaria de Educação funcionando, ainda, como mecanismos de interação e participação da comunidade.

Por ser uma escola situada em um bairro de fácil acesso e com boa infra-estrutura atende alunos que moram em diferentes pontos da cidade sendo, também de diferentes classes sociais. Trata-se, portanto, de um alunado bastante heterogêneo quanto aos aspectos sociais, culturais e econômicos.

Os sujeitos selecionados para esta investigação são alunos de uma turma do primeiro ano do ensino médio do turno da tarde, com idades variando dos 14, aos 17 anos. Este grupo apresenta rendimento escolar médio, alguns com um histórico de evasão escolar. Quanto à Matemática, são alunos que, em maioria, demonstraram boa habilidade na resolução das atividades e não tiveram contato formal com o conceito de Função Afim anteriormente. Isso eliminou possíveis influências da abordagem escolar durante o desenvolvimento das atividades da pesquisa.

A escolha da série surgiu do fato de, tradicionalmente, o conteúdo ser abordado com maior ênfase no 1º ano do ensino médio, conforme planejamentos escolares e a própria disposição dos autores de livros didáticos em direcioná-los a essa etapa do currículo escolar. E ainda, em virtude de termos percebido ao longo de nossa prática docente as dificuldades de aprendizagem do conceito de Função Afim quando os alunos do 1º ano do ensino médio se deparam com a resolução de atividades envolvendo a conversão do registro gráfico de uma função afim para o algébrico e vice-versa e a interpretação geométrica dos pontos (x,0) e (y,0). Diante dessas constatações surgiu o interesse de estudar os fenômenos didáticos que interferem no processo de ensino-aprendizagem desses conceitos buscando encontrar uma solução para minimizar tais dificuldades.

A escolha da escola se deveu ao fato de oferecer condições favoráveis ao desenvolvimento da pesquisa sem entraves por parte da instituição, uma vez que a professora-pesquisadora leciona na mesma, além de possuir sala ambiente de Matemática.

2. Instrumentos de coleta de dados

Foram utilizadas três formas de registro das atividades dos participantes da pesquisa: registro escrito, registro de áudio e vídeo com o uso de gravador, e por filmagem, em VHS.

2.1. Registro escrito

- Fichas de atividades elaboradas a partir da resolução de problemas de contexto realístico, elaborados pontuando-se conhecimentos sobre função afim e suas representações algébrica, tabular e gráfica e variação entre grandezas, de onde extraímos a síntese (análise e interpretação) escrita da intervenção.

2.2. Registro de áudio

- Gravação das discussões dos alunos visando obter subsídios para a análise dos avanços cognitivos dos grupos depois da aplicação da seqüência e dos conhecimentos prévios dos sujeitos em relação ao conceito de função afim, leitura e interpretação de tabelas e gráficos.

2.3. Registro de vídeo

- Filmagem: as atividades dos grupos foram filmadas em fitas de VHS a fim de que pudéssemos acompanhar possíveis ações exercidas pelos alunos, como por exemplo, solicitar a ajuda do professor na resolução dos problemas, impossíveis de serem adquiridas pelas outras formas de registro.

3. Procedimento experimental

O nosso trabalho foi desenvolvido em duas etapas:

3.1. Intervenção: elaboração e aplicação da seqüência didática sobre variação entre grandezas utilizando atividades de contexto realístico.

Elaboração e aplicação da seqüência didática construída a partir de atividades de contexto realístico envolvendo a conversão do registro gráfico de uma função afim para o algébrico e vice-versa, com ênfase na concepção “variacional”, em que os alunos construíram as tabelas referentes aos dados coletados nas atividades propostas e, em seguida, determinaram a relação de dependência das grandezas envolvidas, a lei de formação dessa relação, e esboçaram o seu gráfico.

Para tanto se fez necessário uma análise prévia de cada atividade da seqüência, levantando hipóteses, para que pudéssemos identificar as possíveis estratégias a serem desenvolvidas pelos alunos, protagonistas do “jogo”, cujo objetivo é a resolução de tais atividades; prever as suas dificuldades e os possíveis avanços em cada “jogada efetuada”; prever os conhecimentos que vão mobilizar em determinada estratégia e as ações do professor, a fim de que atingissem o objetivo esperado, uma vez que seu papel no “jogo” é o de mediador do trabalho dos alunos.

Antes de iniciar o desenvolvimento das atividades negociamos um contrato pedagógico procurando incluir o aluno no processo. Este contrato determinou o tempo necessário para a resolução dos problemas, a constituição dos grupos, os procedimentos durante a resolução das fichas de atividades; conforme o andamento dos grupos novas regras foram sendo necessárias.

A professora foi a própria pesquisadora, por sua familiaridade com a linguagem da seqüência didática evitando, durante a sessão, possíveis dificuldades para assumir o papel de professor-mediador. Acreditamos que se os alunos percebessem alguma insegurança por parte do professor ao trabalhar as atividades da seqüência didática certamente não daria àqueles a impressão de que são capazes de resolvê-las.

A professora-pesquisadora desenvolveu o conteúdo Funções de modo que os alunos compreendessem a importância da Matemática nas situações reais por que passam, mas, também, sua importância enquanto conhecimento historicamente acumulado pela humanidade ao longo do tempo. Isto é, a professora assumiu o papel de mediadora da relação ensino-aprendizagem; devendo ser entendida como aquela que conduziu a atividade, numa posição de partícipe. Procuramos, sempre que surgiu uma dúvida em um grupo, fazer com os alunos interagissem entre si, ampliando as discussões e chegando a um consenso, oferecendo-lhes instrumentos para que chegassem à solução do problema sem, no entanto, responder-lhes diretamente. Nosso intuito era o de incentivar a aprendizagem estimulando a cooperação aluno-aluno, relação tão importante quanto a interação professor-aluno.

3.2. Avaliação: análise dos possíveis efeitos da seqüência didática nas concepções prévias dos sujeitos sobre o conceito de função afim, leitura e interpretação de tabelas e gráficos.

Análise das produções dos grupos, com o objetivo de avaliar os avanços cognitivos dos alunos referentes aos conteúdos analisados na primeira etapa da pesquisa, representados nas categorias abaixo. E posterior comparação das hipóteses estabelecidas na análise prévia com os resultados dos efeitos da seqüência didática sobre o comportamento e os conhecimentos prévios dos sujeitos.

- Identifica as grandezas que variam envolvidas em um problema de contexto realístico.
- Reconhece se a variação entre as grandezas envolvidas é uma relação de dependência ou não.
- Mobiliza as idéias de variável dependente e independente na compreensão do conceito de função afim.
- Converte corretamente um problema de contexto realístico da linguagem natural para a representação numérica por tabela.
- Traduz a relação entre as grandezas por meio de uma expressão algébrica (lei de formação) fazendo a conversão da representação por tabela para a linguagem simbólica.

- Traduz a relação entre as grandezas do problema da representação algébrica para a representação gráfica.

4. A seqüência didática

Apresentaremos a seguir a seqüência didática elaborada por nós. Ela está fundamentada na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (1982), segundo a qual o conhecimento emerge de situações-problema. Constitui-se de duas atividades, com situações, que se referem à problemas de contexto realístico, elaboradas com questões envolvendo variação entre grandezas (uma dependendo da outra), a compreensão de variável dependente e independente, e a relação entre elas.

Para construir essa teorização Brousseau parte da concepção de que "'Saber Matemática' não é somente saber definições e teoremas para reconhecer o momento de utilizá-los e aplicá-los, é 'dedicar-se aos problemas' em um sentido amplo, que inclui encontrar boas perguntas assim como encontrar soluções" (CHEVALLARD, BOSCH & GASCÓN, 2001, p. 213). Tal idéia teve grande relevância ao elaborarmos nossa seqüência de ensino; procuramos criar situações que levassem os alunos a construir por si mesmos o saber em jogo na condição de que aparecesse como uma solução para o problema.

Nosso objetivo principal é levar os alunos a construírem o conceito de função afim por meio das idéias de componentes de variação da função, bem como, a dependência entre elas. Proporcionamos conversões entre os diferentes registros de função afim: do enunciado na linguagem natural para a tabela de valores, a seguir para a expressão algébrica e, posteriormente, para o gráfico, e vice-versa.

Permitimos aos alunos passarem por todas as fases da teoria das situações propostas por Brousseau: *ação*, em que produzem estratégias (um método) para a solução do problema, *formulação*, em que trocam informações em busca de dados para criar uma simbologia própria na busca da solução e *validação*, em que procuram mecanismos de prova dos resultados. Estas fases são comumente omitidas nas aulas em que o conhecimento é apresentado de forma já institucionalizada. Na aplicação da nossa seqüência, no momento da *institucionalização* ocorreu a intervenção da professora-pesquisadora visando universalizar o conhecimento, bem como a correção de possíveis distorções sofridas nas fases anteriores.

A seqüência foi trabalhada com cinco grupos de quatro e cinco alunos da 1ª série do Ensino Médio de uma escola da rede estadual em Recife. Nosso intuito era que os grupos utilizassem nas duas atividades apenas papel e lápis, instrumentos usados mais comumente em sala de aula. Quando elaboramos nossa seqüência de ensino nos programamos para aplicá-la em seis sessões, porém, respeitamos o ritmo desenvolvido pelos alunos e concluímos nossos trabalhos em oito sessões, com duração de 1 h e 40 min cada uma.

TABELA 1 – Quadro das sessões da seqüência didática

SESSÕES	ATIVIDADES	FOCO
Sessão 1 02/08/2006 4ª feira	Ficha de atividades 1, questões (a) e (b).	Registro da língua natural (texto), variação entre grandezas, variável dependente e independente e registro numérico.
Sessão 2 04/08/2006 6ª feira	Ficha de atividades 1, questões (c) e (d).	Registro da língua natural, variação entre grandezas, variável dependente e independente e registro numérico.
Sessão 3 09/08/2006 4ª feira	Ficha de atividades 1, questões (c) e (e).	Registro da língua natural, variação entre grandezas, variável dependente e independente e registro numérico na forma tabular.
Sessão 4 16/08/2006 4ª feira	Ficha de atividades 1, questão (f).	Registro da língua natural, variação entre grandezas, variável dependente e independente e registro numérico na forma tabular.
Sessão 5 18/08/2006 6ª feira	Ficha de atividades 1, questão (g).	Registro da língua natural, variação entre grandezas, variável dependente e independente e registro algébrico.
Sessão 6 25/08/2006 6ª feira	Ficha de atividades 2, questão (a).	Registro da língua natural (texto), registro numérico, registro algébrico, variação entre grandezas e variável dependente e independente.
Sessão 7 30/08/2006 4ª feira	Ficha de atividades 2, questões (b) e (c).	Registro da língua natural (texto), variação entre grandezas, variável dependente e independente, registro algébrico, registro numérico na representação tabular e registro gráfico.
Sessão 8 09/09/2006 6ª feira	Ficha de atividades 2, questão (c).	Registro gráfico, variação entre grandezas e variável dependente e independente.

4.1. Análise preliminar das atividades

4.1.1. Análise preliminar da ATIVIDADE 1

Escolhemos uma situação do cotidiano com a finalidade de propiciar aos alunos conversões entre os diferentes registros de representação de uma função afim: do registro em linguagem natural (texto), para o numérico, deste para o tabular, em seguida, para o algébrico e finalmente para o gráfico. Pretendemos investigar se, ao propiciarmos uma conversão do registro em linguagem natural para os demais citados, favorecemos uma melhor compreensão do conceito de Função Afim.

As questões dessa atividade foram elaboradas com base no texto:

> O salário base dos frentistas filiados ao Sindicato dos Trabalhadores do Comércio e Mineração de Derivados de Petróleo do Estado de Pernambuco é de R$ 300,00. Esses empregados têm seu trabalho realizado perigosamente, em razão dos produtos inflamáveis ou explosivos que manuseiam diariamente. Os frentistas realizam os trabalhos expostos aos agentes nocivos à integridade física, além do parâmetro de tolerância, com risco de vida acentuado. Assim, conforme artigo 193 da CLT terão direito em receber o adicional de periculosidade de 30% do salário base. No caso específico do Estado de Pernambuco esse valor é de R$ 100,00; ou seja, o salário fixo mensal é de R$ 400,00. Para incentivar o crescimento na venda de óleo lubrificante e aumentar o seu lucro, o proprietário de um Posto de Combustível da Região Metropolitana do Recife oferece aos seus frentistas uma comissão de R$ 0,50 por litro vendido deste produto.

Escolhemos uma situação que propicie aos alunos trabalharem com variação entre grandezas, a compreensão de variável dependente e independente, e a relação entre elas. Na situação considerada o aluno, relacionará as grandezas venda de litros de óleo lubrificante por um frentista e o valor correspondente ao seu salário no final do mês. Pretendemos que verifiquem a variação entre a grandeza salário final em função da quantidade de litros de óleo lubrificante vendido e encontrem a expressão analítica que representa esta relação com uma variável dependente e uma independente.

Apresentamos, a seguir, as questões que se referem à ATIVIDADE 1, sessão 1, seguidas das respectivas análises preliminares:

(a) Se em um mês um frentista vender 10 litros de óleo lubrificante, que salário receberá no fim do mês?

A situação deve estar bem compreendida pelos alunos que estão dispostos em grupos de 4 e 5 componentes. O professor fará a leitura do texto junto com os alunos, colocando questões para verificar se a situação está clara. Por exemplo, "O que o frentista deve fazer para ganhar mais?".

Ações:

1. A professora-pesquisadora apresenta o primeiro comando (a), de forma escrita, e os alunos deverão responder (situação de ação e formulação), também, por escrito.
2. Recolhemos as respostas dos grupos, questionando, sempre, como eles fizeram para determinar o salário, buscando identificar se os alunos estão conseguindo estabelecer a relação entre o número de litros de óleo vendidos e o salário ao final do mês. Observaremos como os alunos estão considerando o salário fixo. As propostas deverão ser validadas pelos próprios alunos, cabendo à professora tão somente lançar o comando e levantar os resultados.
3. Repetimos o processo com outros valores para o número de litros de óleo vendidos, sempre com valores que facilitem os cálculos, como, por exemplo, 20, 100 ou 200 litros, lançando os comandos verbais a seguir:

   (a_1) *Se em um mês ele vender 20 litros de óleo lubrificante, que salário receberá?*

(a_2) Se em um mês ele vender 100 litros de óleo lubrificante, que salário receberá?

(a_3) Se em um mês ele vender 200 litros de óleo lubrificante, que salário receberá?

Essa etapa tem uma dupla função, ela pode servir como uma nova situação, para os alunos que ainda não conseguiram se apropriar das idéias envolvidas, ou como uma situação em que mobilizarão os conhecimentos anteriores em novas situações, para aqueles alunos que já se apropriaram das idéias. Espera-se, ao final dessa situação, que os alunos já tenham consolidado que o salário é função do número de litros de óleo vendidos, e que o salário base funciona como um parâmetro fixo, ou seja, não variável.

4. A professora-pesquisadora apresenta o segundo comando (b), de forma escrita, e os alunos deverão responder, também, por escrito.

(b) Escreva um bilhete ao contador do posto de combustível, explicando como um frentista qualquer deve fazer para calcular o seu salário mensal.

5. Verificamos se os alunos têm clareza do que significa um contador, para que a falta de compreensão do enunciado não funcione como variável; se for o caso, explicaremos que é o encarregado de calcular os salários, descontando os dias de falta, calculando o valor a ser recolhido para o INSS, etc.
6. O papel do professor será o de observar que tipos de registros estão sendo utilizados (linguagem natural, simbólico, tabela, misto, etc.). O objetivo aqui é que o aluno se sirva de algum tipo de registro para comunicar algo (situação de ação e de formulação). O comando de explicar ao “contador”, que, a princípio, é uma pessoa fora do círculo de trabalho cotidiano, deve provocar a utilização de registros mais cuidadosos do que se fosse para um colega de trabalho do dia-a-dia.
7. Cada grupo deve apresentar sua resposta em transparências, para que as suas produções possam ser discutidas com o grupo classe (situação de comunicação). A professora deve colocar no retroprojetor cada uma das

produções provocando o debate, para que os alunos possam confrontar e validar suas respostas (situação de validação).

Esperamos que, ao final das discussões, os alunos tenham consolidado a relação salário recebido ao final do mês ⇨ quantidade de litros de óleo lubrificante vendidos (essa é uma questão a ser observada). Nesse momento, a professora pode institucionalizar (situação de institucionalização) a forma de calcular o salário, a partir de questões tipo “Como os grupos fizeram para calcular o salário?”; “O que se pode observar em comum aos grupos?”; etc, lançando os comandos verbais a seguir:

(b_1) Como vocês (os grupos) fizeram para calcular o salário do frentista?
(b_2) O que podemos observar em comum às respostas dos grupos?

Até este momento, acreditamos que o problema faça aparecer o conhecimento que desejamos que os alunos construam; sem que o professor conduza-os, dizendo exatamente o que espera deles, seguindo, portanto, o que preconiza a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau. Ou seja, esperamos que os alunos façam a conversão de registros: para tanto, a situação apresentada deve ser tal que essa conversão apareça, para o aluno, como necessária para a resolução do problema, e não cabe ao professor “dizer” que ele deve fazer a conversão.

Apresentamos, a seguir, as questões que se referem à ATIVIDADE 1, sessão 2, seguidas das respectivas análises preliminares:

(c) João, um dos frentistas do posto, precisa faturar R$ 600,00 em janeiro, para cobrir os cheques pré-datados que ele fez no Natal. Quantos litros de óleo lubrificante ele deve vender para conseguir esse salário?

Estando consolidada a relação salário recebido ao final do mês ⇨ quantidade de litros de óleo lubrificante vendidos, podemos partir para a relação quantidade de litros de óleo lubrificante vendidos ⇨ salário ao final do mês, para tanto o professor lançará o comando (c).

Ações:

1. A professora-pesquisadora apresenta o comando (c), de forma escrita, e os alunos deverão responder, também, por escrito.
2. O cenário é sempre o mesmo, após ser dado um tempo, cada grupo deverá elaborar uma solução (situação de ação e de formulação), que será apresentada, em transparência, ao grupo classe para a validação (situação de validação).
3. Durante as apresentações das produções, provocaremos questionamentos (situação de formulação) que levem os alunos a tomarem consciência das estratégias utilizadas, lançando o comando verbal a seguir:

(c_1) Como vocês (os grupos) determinaram a quantidade de litros de óleo lubrificante que deve ser vendida para que João receba o salário de 600 reais, no mês de janeiro?

Nesse momento, supomos que os alunos vão aplicar o conceito de proporcionalidade e estabelecer a estratégia de realizar tentativas, para chegar aos 600 reais, tais como: “se ele vender 10 litros, ganha 5 reais de óleo, mais os 400 fixo, dá 405 reais”; “se ele vender 100 litros, ganha 50 reais de óleo, mais os 400 fixo, dá 450 reais”; “se ele vender 200 litros, ganha 100 reais de óleo, mais os 400 fixo, dá 500 reais”; “então ele precisa vender 400 litros para ganhar 200 reais com a venda de óleo, mais os 400 fixo, dá os 600 reais que ele precisa”.

Acreditamos, ainda, que alguns grupos apliquem o conceito de operação inversa estabelecendo a estratégia de que para saber o número de litros de óleo lubrificante que João precisa vender para receber um salário mensal de R$ 600,00, deve subtrair deste valor o salário fixo de R$ 400,00, e dividir o resultado por R$ 0,50, concluindo que ele deve vender 400 litros de óleo.

Esperamos que nesse momento os alunos sejam capazes de generalizar as idéias trabalhadas anteriormente, aplicando-as ao cálculo do salário de um frentista sem que este valor seja especificado.

4. A professora-pesquisadora lança o comando (d) de forma escrita, e os alunos deverão responder, também, por escrito.

(d) Como no próximo mês, João ainda tem cheques pré-datados, precisará de um salário maior para cobri-los. Ele pede então, ao contador do posto, que lhe explique como calcular quantos litros de óleo lubrificante deve vender para receber o salário que precisa. Imagine que você seja o contador, e escreva um bilhete para João, explicando o que ele deve fazer.

Esperamos que os alunos trabalhem em linguagem natural com textos do tipo "para saber o número de litros de óleo que um frentista precisa vender, faça o salário que ele precisa receber, menos 400, e divida o resultado por 0.50". Supomos que a linguagem simbólica comece a aparecer, com expressões do tipo "(S - 400) : 0,5".

Confirmando-se a previsão, podemos pensar que os alunos já consolidaram a idéia de que 400 é um parâmetro, ou seja, ele não varia; o que fará variar o salário é o número de litros de óleo vendidos.

5. Cabe então, à professora, institucionalizar essa idéia, nesse momento, fazendo observações do tipo "Existe uma relação de dependência entre o salário de um frentista ao final do mês e o número de litros de óleo lubrificante por ele vendidos?", "O salário de um frentista ao final do mês depende do número de litros de óleo lubrificante vendidos?", ou ainda, "O salário de um frentista ao final do mês é função do número de litros de óleo lubrificante vendidos?".

Apresentamos, a seguir, as questões que se referem à ATIVIDADE 1, sessão 3, seguidas das respectivas análises preliminares:

(e) João contou aos colegas o pedido feito ao contador. Imediatamente, todos os outros frentistas, e são mais de 30 nesse posto, foram fazer o mesmo pedido informando ao contador quantos litros de óleo lubrificante cada um vendeu, até aquele momento. O contador quase enlouquece, e ficou pensando como fazer para atender a todos. Ajude-o, e invente uma maneira para que os frentistas do posto possam determinar, rapidamente, quanto será o salário dos mesmos, até aquele momento?

(f) Além disso, eles querem determinar quantos litros de óleo lubrificante cada um deverá vender para receber o salário que precisa. Como você poderá organizar estes dados de maneira que o contador possa explicar aos frentistas o salário a ser recebido por cada um deles?

Estando consolidada a idéia de que o salário ao final do mês de um frentista qualquer é função do número de litros de óleo lubrificante vendidos, acreditamos que podemos começar a provocar a mudança de registro (linguagem natural ⇨ gráfico ou tabela). Mas, não cabe à professora "dizer" que o aluno deve mudar de registro, cabe ao aluno "perceber" que é a mudança de registro que lhe permitirá resolver o problema (BROUSSEAU, 1982). Oportunizaremos a mudança de registro nas situações lançadas pelos comandos (e) e (f).

Ações:

1. A professora-pesquisadora apresenta os comandos (e) e (f), de forma escrita, e os alunos deverão responder, também, por escrito.

Supomos que os sujeitos vão propor a construção de uma tabela, relacionando o número de litros de óleo vendidos com o salário a ser recebido ao final do mês. Isso se confirmando, e sendo oficializado, verbalmente, para todo o grupo que essa seria a melhor solução, a professora pode solicitar que os grupos construam essa tabela. A professora não deve dizer para os alunos como eles deverão construir a tabela, ela deve deixar os alunos representarem do jeito que eles pensam.

No momento de socializar as tabelas produzidas, institucionalizaremos o processo de construção e interpretação da tabela. Para isso podem ser colocadas questões sobre a facilidade de leitura dos dados, o tipo de entrada (por salário ou por litros de óleo), os títulos, os valores máximos e mínimos apresentados na tabela, etc.

Não acreditamos que possa aparecer a solução do problema na forma de um gráfico, mas se isso acontecer, pode ser explorado pela professora. Inclusive, os alunos podem ser questionados sobre qual tipo de representação oferece, de forma mais fácil, as informações solicitadas (que nessa situação seria a tabela).

2. Durante a resolução das questões (e) e (f), pelos alunos, a professora provoca o surgimento do registro numérico na forma tabular lançando os comandos a seguir:

(e_1) De que maneira vocês (os grupos) organizaram os salários dos frentistas do posto para que o contador possa explicar aos frentistas?
(f_1) De que maneira vocês (os grupos) organizaram os dados referentes à quantidade de litros de óleo que deve ser vendida pelos frentistas do posto?
(f_2) Porque vocês consideraram que a tabela é o registro mais viável para organizar esses dados?
(f_3) Que informações essa tabela deve conter?
(f_4) Qual a informação que deve aparecer primeiro, na tabela, o salário final ou o número de litros de óleo vendidos pelos frentistas?
(f_5) Qual o valor máximo que a grandeza salário final pode assumir? E o valor mínimo?
(f_6) Que regularidades vocês podem observar nessa tabela? (Este comando será apresentado aos grupos através de transparência para motivar o debate e a institucionalização pelo professor do processo de construção e interpretação da tabela em questão).

3. Nesse momento, apresentaremos as conclusões a que os alunos chegaram, a partir dos comandos verbais acima, construindo uma tabela, no quadro, junto com os alunos, fazendo comparações com as produções dos grupos.

Acreditamos, também, que pode acontecer de algum grupo produzir um registro algébrico-simbólico, como uma fórmula. Em qualquer caso, a idéia de variação deve será explorada por nós, nos momentos de debate coletivo. O registro algébrico deve ser explorado se efetivamente os grupos concluírem que a tabela é o registro mais adequado para organizar os cálculos realizados pelo contador ao calcular os salários dos trinta frentistas. Principalmente, se expressões do tipo (S - 400) : 0,5 já tiverem surgido durante as discussões da questão (d) apresentada anteriormente.

Apresentamos, a seguir, a questão que se refere à ATIVIDADE 1, sessão 4, seguida da análise preliminar:

(g) De que maneira o contador do posto poderá apresentar aos frentistas uma outra solução que possa ser entendida e aplicada por eles sem que seja necessário recorrer ao próprio contador, a cada vez que precisarem aumentar a sua receita mensal, ou ao uso de tabelas ou de cálculos numéricos?

Ações:

1. A professora-pesquisadora apresenta o comando (g), o último da ATIVIDADE 1, de forma escrita, e os alunos deverão respondê-lo por escrito para, em seguida, comunicarem suas conclusões para o grupo classe em transparência.

Ao responderem esta questão acreditamos que os alunos confirmem a idéia de que o salário recebido pelos frentistas é função da quantidade de litros de óleo vendidos e nesse momento possam chegar a representar a situação através de uma expressão algébrica, do tipo S = 400 + 0,50 . L, confirmando a idéia de que 400 é um parâmetro, ou seja, ele não varia; o que fará variar o salário é o número de litros de óleo vendidos.

2. Nesse momento, apresentaremos as conclusões a que os grupos chegaram, registrando-as no quadro, à medida que os alunos forem comunicando suas respostas, fazendo comparações com as suas produções.

4.1.2. Análise preliminar da ATIVIDADE 2

Escolhemos uma situação do cotidiano com a finalidade de propiciar aos alunos a apreensão do conceito de Função Afim, a partir da compreensão do relacionamento entre as variáveis dependente e independente e pela articulação entre as diferentes representações das funções do problema (natural, numérica, algébrica e gráfica). O que diferencia essa atividade da anterior é que naquela os alunos devem articular os diferentes registros de apenas uma situação em cada questão, e nesta, devem articular os registros de duas situações concomitantemente, e no final da atividade, confirmar o relacionamento entre as variáveis em jogo, a partir da compreensão do significado dos gráficos.

As questões dessa atividade foram elaboradas com base no texto:

Sr. André, dono do posto em que João trabalha, precisa transportar óleo combustível do Porto de SUAPE para abastecer seus quatro estabelecimentos comerciais. Ele tem as opções de transportar sua carga por trem ou caminhão. Nos dois casos, ele tem um custo fixo para preparar a carga (embalagem) e um custo variável por quilômetro transportado, que depende do meio de transporte utilizado. Em caminhões, o custo da embalagem é mais baixo, R$ 100,00, pois basta cobrir a carga com plástico. Para transportar o óleo combustível por trem, o custo da embalagem é mais caro, R$ 120,00, pois a carga precisa ser colocada em suportes metálicos, para ser acomodada nos vagões. Para o transporte em caminhões, a empresa transportadora cobra R$ 0,80 por quilômetro transportado para cobrir as despesas com o frete, enquanto para o transporte ferroviário o custo é de R$ 0,40 por quilômetro transportado.

Apresentamos, a seguir, as questões que se referem à ATIVIDADE 2, sessão 5, seguidas das respectivas análises preliminares:

(a) Qual a forma mais barata de transportar o óleo combustível do Porto de SUAPE para os postos de gasolina do Sr. André?

Com esse comando estamos tentando levar os alunos a um registro algébrico, por isso optamos por não atribuir valores para a quilometragem, caso contrário eles poderiam trabalhar somente no domínio aritmético.

Ações:

1. A professora-pesquisadora apresenta o primeiro comando (a), de forma escrita, e os alunos deverão responder (situação de ação e formulação), também, por escrito.
2. A situação deve estar bem compreendida pelos alunos. Faremos a leitura do texto junto com os alunos, colocando questões para verificar se a situação está clara. Por exemplo, “O que vocês entendem por custo da embalagem?”, “E por custo variável por quilômetro rodado?”, “Vocês percebem que a quantidade de combustível transportado é a mesma tanto de caminhão quanto de trem?”

Esperamos que os grupos concluam que o que fará variar o custo do transporte é a quilometragem. Nesse momento, provavelmente aparecerá uma forte discussão, começando com coisas do tipo “por trem é mais barato” (função da quilometragem) ou “por caminhão é mais barato” (função da embalagem).

Acreditamos que os alunos construirão uma tabela para cada situação (custo do transporte por trem e por caminhão) e, a partir da comparação das tabelas, percebam que se a quilometragem for maior que 50 km o custo do transporte por trem é mais barato; se for menor que 50 km o custo do transporte por caminhão será o mais barato. Sendo também possível que alguns grupos estabeleçam a relação entre as grandezas, custo do transporte e quilometragem, escrevendo as respectivas expressões algébricas, porém supomos que o registro mais provável seja a representação tabular. Quando os alunos chegarem à conclusão que o transporte “mais barato” depende do estabelecimento de uma relação entre diferentes grandezas (custo do transporte e quilometragem), lançaremos o comando (b) por escrito.

3. A professora-pesquisadora lança o comando (b) de forma escrita, e os alunos deverão responder, também, por escrito.

(b) Escrevam um bilhete para o Sr. André ajudando-o a decidir qual a forma mais econômica de transportar o óleo combustível para os seus quatro postos de gasolina, por caminhão ou por trem?

Os bilhetes elaborados pelos alunos deverão ser apresentados em transparências, para que o grupo classe tenha acesso a todas as produções, possibilitando a validação das expressões algébricas encontradas e a discussão das justificativas que os levaram a decidir qual a forma mais econômica de transportar o combustível para os postos.

Uma vez que os grupos já tiveram a experiência, na Atividade 1, de ajudar o contador a calcular o salário dos trinta frentistas do posto onde João trabalha, já construíram uma tabela com esses dados e já representaram a situação através de uma expressão algébrica, supomos que os alunos mobilizarão estes conhecimentos para: realizar os cálculos numéricos para determinar o custo do transporte do combustível em função da quilometragem; construir as respectivas tabelas desses dados; escrever expressões do tipo, $T = 120 + 0{,}40.Q$ e $C = 100 + 0.80.Q$, correspondentes às situações apresentadas na ATIVIDADE 2; e após o comando (c), construir os diferentes gráficos referentes às situações apresentadas.

Apresentamos, a seguir, as questões que se referem à ATIVIDADE 2, sessão 6, seguida da análise preliminar:

(c) Sr. André precisa apresentar aos seus sócios, em transparência, as diferentes maneiras de transportar combustível para os seus quatro postos de gasolina para que decidam qual a forma mais econômica. Ele se enrolou todo ao tentar representar, através de uma tabela, os custos de todas as possíveis formas de transporte e pediu, novamente, a ajuda do contador da empresa para que ele inventasse uma maneira mais simples e prática de reunir todos esses resultados. Que idéia vocês dariam para o contador?

Supomos que os alunos vão propor a construção de uma tabela, e de posse dessa tabela e das leis de formação da função, que relacionam as grandezas custo do transporte e a quilometragem, os grupos, finalmente, construirão os gráficos dessa função. A partir do momento em que estabeleçam que o gráfico é a melhor solução, eles devem partir para a construção desse gráfico, de forma completamente livre, usando seus próprios registros. É no momento de debate coletivo que os elementos do gráfico serão discutidos, sempre na busca de obter mais facilmente as informações necessárias para a construção do gráfico.

No momento de apresentar as possíveis soluções, no debate coletivo, fazemos a hipótese de que vai aparecer algum palpite sobre a utilização de um gráfico. Caso isso aconteça, solicitaremos, então, “que eles construam esse gráfico”, e, a partir das produções, discutiremos os gráficos e institucionalizaremos os conhecimentos construídos. Caso não aconteça, acreditamos que deve ser pelo fato de eles ainda não terem chegado a uma situação “generalizada”. Nesse caso, como o experimento não pode ser prolongado indefinidamente, solicitaremos explicitamente que eles se sirvam do gráfico como meio de solução do problema e faremos, a partir deles, a institucionalização.

CAPÍTULO 4
ANÁLISE DOS RESULTADOS DA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

> Toda análise teórica deve ser submetida ao crivo de uma verificação experimental, da mesma forma que toda experiência deve ser submetida ao controle de uma posição racional, defendendo que razão e experiência formam dois pólos complementares do pensamento cientifico (PAIS, 2002, p. 12).

Analisamos neste capítulo, os resultados obtidos com o desenvolvimento de uma seqüência didática elaborada à luz da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau abordando o conteúdo Função Afim. Paralelamente descrevemos e analisamos a intervenção realizada em oito sessões e os fenômenos didáticos observados.

Esta seqüência é composta de dois grupos de atividades elaboradas a partir de problemas de contexto realístico e das conexões entre as representações em linguagem natural, gráfica, algébrica e tabular da Função Afim, com ênfase na concepção variacional. De acordo com a literatura pesquisada, o estudo de situações que introduzam o conceito de função por meio de grandezas que variam, uma dependendo da outra, pode facilitar a construção do conceito de Função Afim.

Ressaltamos que iniciamos nossos trabalhos com a participação de cinco grupos, porém dois deles apresentaram freqüência bastante irregular impossibilitando a análise precisa dos registros escritos das suas atividades; consequentemente, tiveram seus resultados parcialmente excluídos desta pesquisa. Salientamos ainda que os nomes que figuram na análise são fictícios visando preservar o anonimato dos alunos.

As atividades foram aplicadas durante o segundo semestre de dois mil e seis, seguindo o planejamento para a primeira série do Ensino Médio da escola escolhida. Até aquele momento haviam sido trabalhados, pelo professor de Matemática da turma, os seguintes conteúdos: Conjuntos Numéricos, Relações Métricas e Trigonométricas no Triângulo Retângulo. O conteúdo desenvolvido por nós – Função

Afim – ficou para o segundo semestre, sendo ministrado em quatro aulas semanais, duas às quartas e duas às sextas-feiras, totalizando 16 aulas.

Desenvolvemos a seqüência de ensino avançando no ritmo apresentado pela classe, precisando que reformulássemos nosso planejamento, retomando, quando se fez necessário, atividades já trabalhadas em sessões anteriores.

O trabalho realizado esteve permeado pela fundamentação teórica adotada. Oportunizamos que os grupos se envolvessem num processo de busca de estratégias de resolução dos problemas, confrontação de hipóteses, comunicação de soluções, devolução de informações e validação de resultados, cada aluno considerando o problema como seu (BROUSSEAU, 1996a). Ao final de cada sessão houve um momento de discussão entre aluno-aluno e professora-aluno, em seguida, fizemos as institucionalizações dos conhecimentos.

As produções dos alunos, escritas em transparências, foram projetadas com retroprojetor, oportunizando a busca de uma resposta-consenso possibilitando inseri-la no contexto matemático do saber escolar em jogo. Esse recurso dinamizou as aulas e enriqueceu os debates propiciando a confrontação de idéias e a validação das resoluções dos grupos.

Vale destacar que os alunos mostraram-se receptivos ao Contrato Didático negociado e à resolução das questões propostas nas oito sessões. Isto foi observado pelos seus próprios comentários.

Durante o desenvolvimento destas atividades, os alunos frequentemente nos interpelavam para saber se o que haviam escrito era compreensível e se estava correto, "quebrando" uma das cláusulas do nosso Contrato, que explicitaremos em breve. Tal fenômeno vem sendo observado e estudado por vários pesquisadores em todos os níveis educativos. Isto se evidencia nas palavras de Chevallard, Bosch & Gascón (2001) "[...] os alunos tendem a delegar ao professor a responsabilidade pela validade de suas respostas, como se não importasse a eles o fato de serem verdadeiras ou falsas; como se o único objetivo de sua atuação fosse responder às perguntas do professor [...]" (pp. 59-60).

Com o intuito de analisar os processos cognitivos ocorridos no ensino-aprendizagem de Função Afim, fizemos a coleta de dados a partir da observação em sala de aula, da avaliação dos registros escritos que recolhemos e das produções em transparências apresentadas pelos alunos.

As sessões dessa pesquisa foram registradas em áudio e vídeo com a finalidade de obter subsídios para estudar os fenômenos percebidos, e para uma análise mais detalhada das discussões do grande grupo e dos pequenos grupos de alunos ao mobilizarem conhecimentos prévios na resolução das atividades.

Colocaremos, agora, a síntese das aulas em que aplicamos nosso Projeto, em ordem cronológica, e a análise dos resultados das duas atividades da seqüência didática descritas no Capítulo III. Selecionamos as produções das atividades apresentadas pelos grupos, procurando contemplar o desempenho de todos aqueles que participaram das sessões.

1. Análise dos resultados da atividade 1

1.1. Análise dos resultados da atividade 1, questões (1a) e (1b): sessão 1.

A primeira sessão da seqüência se desenvolveu em 02 de agosto de 2006, com duração de duas aulas de 50 minutos cada, em que compareceram 20 alunos. Iniciamos nosso trabalho explicando aos alunos a finalidade dos encontros que iriam acontecer durante a realização da pesquisa e que os resultados das atividades desenvolvidas fariam parte de uma Dissertação de Mestrado.

Negociamos um contrato pedagógico e estabelecemos que eles desenvolveriam as atividades em grupos com quatro componentes, organizados de acordo com suas próprias escolhas e sem comunicação com a professora-pesquisadora. Cada grupo deveria discutir as questões, estabelecer estratégias de resolução e uma resposta consenso. Ressaltamos que a freqüência dos componentes dos grupos em todos os encontros seria de suma importância para o bom desenvolvimento dos nossos trabalhos.

Apesar das regras terem sido colocadas de maneira clara por nós, durante o desenvolver das atividades os alunos, ao encontrarem alguma dificuldade que não conseguiam sanar entre si, em geral, recorriam à professora-pesquisadora. Nestes momentos, foi novamente explicitada a renegociação do contrato tradicional, em que o professor dá aos alunos uma resposta direta referente às suas dúvidas, sendo-lhes comunicado da necessidade de adaptação às regras de trabalho propostas inicialmente.

Para o tipo de atividades que propomos, os alunos devem tomar para si a responsabilidade de manipular os dados do problema, levantar hipóteses, criar estratégias, comunicar e confrontar as soluções encontradas. Cabe ao professor institucionalizar esse novo saber, sistematizando-o após a sua construção pelos alunos. E pelo que pudemos perceber nessa primeira sessão os sujeitos não estavam acostumados a trabalhar dessa forma em sala de aula.

As questões dessa atividade foram elaboradas com base no texto abaixo, apresentado aos alunos em transparência:

O salário base dos frentistas filiados ao Sindicato dos Trabalhadores do Comércio e Mineração de Derivados de Petróleo do Estado de Pernambuco é de R$ 300,00. Esses empregados têm seu trabalho realizado perigosamente, em razão dos produtos inflamáveis ou explosivos que manuseiam diariamente. Os frentistas realizam os trabalhos expostos aos agentes nocivos à integridade física, além do parâmetro de tolerância, com risco de vida acentuado. Assim, conforme artigo 193 da CLT terão direito em receber o adicional de periculosidade de 30% do salário base. No caso específico do Estado de Pernambuco esse valor é de R$ 100,00; ou seja, o salário fixo mensal é de R$ 400,00. Para incentivar o crescimento na venda de óleo lubrificante e aumentar o seu lucro, o proprietário de um Posto de Combustível da Região Metropolitana do Recife oferece aos seus frentistas uma comissão de R$ 0,50 por litro vendido deste produto.

Durante a leitura e interpretação da situação pela professora e pelos alunos, estes puderam compreender o significado de alguns termos presentes no texto como: salário base, adicional de periculosidade, CLT, salário fixo e comissão. Em seguida, entregamos uma cópia do problema e da questão (1a) para ser resolvida sem a interferência da professora. A questão (1b) foi resolvida pelos grupos após uma discussão das respostas produzidas na questão (1a), com o propósito de que generalizassem as déias formuladas nesta primeira atividade.

(1a) Se em um mês um frentista vender 10 litros de óleo lubrificante, que salário receberá no fim do mês?

(1b) Escreva um bilhete ao contador do posto de combustível, explicando como um frentista qualquer deve fazer para calcular o seu salário mensal.

As questões (1a) e (1b) foram propostas com o objetivo principal de proporcionar aos alunos uma compreensão das variáveis dependente e independente e da dependência entre elas, e assim relacioná-las ao conceito de função. Mais especificamente, pretendíamos que os alunos verificassem a variação entre a grandeza salário final em função da quantidade de litros de óleo lubrificante vendidos e que o salário base funciona como um parâmetro fixo, ou seja, não variável. Para tanto, propiciamos conversões entre os registros do enunciado em linguagem natural para o registro numérico e vice-versa.

Para a resolução da questão (1a) o Grupo 1 usou apenas a operação de adição: efetuou a soma de dez parcelas iguais de R$ 0,50, totalizando uma comissão de R$ 5,00, que somada ao salário fixo de R$ 400,00 resultou em um salário mensal de R$ 405,00.

Já o Grupo 2 mobilizou as operações de adição e multiplicação: multiplicou a comissão de R$ 0,50 pelos 10 litros de óleo vendidos e somou o resultado com os R$ 400,00 fixos, chegando à resposta R$ 405,00 com facilidade.

O Grupo 3 utilizou as operações de adição e multiplicação: calculou a comissão, efetuando a multiplicação R$ 0,50 x 10 litros, resultando R$ 5,00 e o salário final, adicionando à comissão, o salário fixo de R$ 400,00, chegando à resposta R$ 405,00 com facilidade.

Esta atividade destacava cálculos matemáticos simples, portanto, facilmente solucionados pelos alunos. Confirmando nossas previsões, verificamos que ao responderem a questão (1a) todos os grupos perceberam a relação de dependência entre as grandezas salário mensal de um frentista e a quantidade de litros de óleo vendidos, e que o salário base funciona como um parâmetro fixo, ou seja, não variável.

Isto também pode ser constatado na discussão coordenada pela professora-pesquisadora após a resolução da questão (1a) pelos grupos:

Professora: Quem gostaria de explicar como calculou o salário do frentista da questão (1a)?

A professora lê a questão (1a), e novamente questiona a classe:

P.: Vocês responderam a questão (1a) calculando o salário do frentista ao final do mês se fossem vendidos dez litros de óleo lubrificante. Agora respondam: se ele [o frentista] vendesse vinte litros, no mês seguinte, qual seria o salário ao final do mês?
Aluno (A4 – Grupo 1): Dez reais.
A. (A2 – Grupo 3): Dez reais por mês é muito pouco.
P.: Ele falou que dez reais por mês é muito pouco. Ele [o frentista] vai receber só dez reais?
A. (A4): Não, quatrocentos e dez reais.
P.: Vocês concordam com os quatrocentos e dez reais? Por que quatrocentos e dez reais?
Alunas (A4 e A5 – Grupo 1): Um litro custa cinqüenta centavos, multiplica por vinte litros e depois soma com os quatrocentos reais.

O aluno A2 vai ao quadro para explicar como seu grupo respondeu a questão (1a):

A. (A2): Ele [o frentista] tem como salário fixo quatrocentos reais, e ele ganha por litro, de comissão, cinqüenta centavos. Se ele vendeu dez litros vai ganhar cinco reais e se vendeu vinte litros ele ganha dez reais.
P.: E como ele chega aos dez reais?
A. (A2): Fazendo uma conta.

P.: Qual a operação que ele deve fazer?
A. (A2): Uma multiplicação.

A professora agradece ao aluno e questiona a classe:

P.: Todos os grupos concordam com esta solução?
Alunos: Sim.

Resumindo, para a questão (1a) observamos respostas escritas coerentes com o enunciado do problema, sendo estas expressas em linguagem numérica. Nesse momento, os alunos aplicaram a idéia de proporcionalidade e estabeleceram a seguinte estratégia para chegar aos 405 reais: “se o frentista recebe R$ 0,50 na venda de 1 litro de óleo combustível, então se vender 10 litros receberá 5 reais de comissão, mais os 400 fixos, dá 405 reais”. Para esta questão, a maioria dos grupos registrou os cálculos: 0,50 x 10 = 5,00 e 400,00 + 5,00 = 405,00. Os alunos perceberam que existe uma relação de dependência entre as grandezas salário mensal de um frentista e a quantidade de litros de óleo vendidos, e que o salário base funciona como um parâmetro fixo, ou seja, não variável, tal como já era previsto na análise prévia. Isto foi observado tanto nas respostas escritas quanto nos comentários orais.

A professora distribui a questão (1b) e, a pedido do Grupo 4, explica o que é um contador e que os alunos devem registrar no bilhete solicitado como o contador deve calcular o salário mensal de um frentista qualquer. Acrescenta, ainda, que cada grupo apresentaria sua produção em transparência fazendo uma discussão das soluções para que, em seguida, chegassem a uma resposta consenso.

Alguns grupos apresentaram dificuldades em responder a questão (1b), porque acharam que a resposta necessitava do registro de algum cálculo numérico. Um dos objetivos desta atividade era levar os alunos à generalização das idéias trabalhadas na questão (1a). As dificuldades encontradas pelos alunos para uma resposta na linguagem natural podem ser atribuídas ao fato de estarem habituados a sempre efetuar operações para responder uma questão matemática.

Pudemos perceber, no contexto da sala de aula, que regras implícitas que regulam a relação aluno-saber-professor emergem, na aplicação de uma seqüência didática, quando ocorre uma ruptura de Contrato Didático. No caso da nossa pesquisa, a organização contratual exigida pela situação possibilitou a necessidade da explicitação de uma cláusula implícita, até aquele momento: *durante a resolução das atividades haverá questões cuja resolução não exigirá o uso de cálculos numéricos, mesmo sendo uma questão que faz parte de um problema de Matemática*. Este fato exemplifica o que Brousseau propôs sobre contrato didático como sendo as expectativas que professor e aluno têm em relação ao outro, e, particularmente, em relação ao saber, isto é, uma série de acordos explícitos, mas, sobretudo implícitos, negociados diante da tarefa que os une – a aprendizagem de um determinado conceito.

Após alguns esclarecimentos sobre a não necessidade de uma resposta com cálculos para a questão (1b), observamos que os grupos 1, 2, 4 e 5 apresentaram dificuldades em expressar sua resposta em linguagem natural. Apenas o Grupo 3 optou por responder a questão sem atribuir valores numéricos às grandezas salário mensal de um frentista qualquer e à quantidade de litros de óleo lubrificante vendidos, escrevendo o bilhete em linguagem natural.

Os grupos 1 e 2 não generalizaram o cálculo do salário mensal para todos os frentistas do posto, como esperávamos, e escreveram o bilhete solicitado na questão (1b), como o frentista da questão (1a) deveria calcular o salário ao final do mês ao vender 10 litros de óleo, mobilizando ainda o registro numérico. As dificuldades encontradas pelos alunos para uma resposta na linguagem natural podem ser atribuídas ao fato de estarem habituados a sempre efetuar operações aritméticas para responder uma questão matemática, e/ou pelo fato de que o registro numérico foi usado na questão (1a) influenciando a resolução da questão (1b). Este problema didático nos fez decidir pela inversão da ordem de resolução das questões (1c) e (1d) na sessão seguinte, e solicitar que os grupos resolvessem primeiro a questão (1d) para que mobilizassem o registro na linguagem natural antes do registro numérico.

Apenas o Grupo 3 generalizou o cálculo do salário mensal para todos os frentistas do posto, como esperávamos, mobilizando a linguagem natural, e escrevendo no bilhete solicitado: "O frentista deve multiplicar a quantidade de litros vendidos pela comissão que ele receberá por cada litro vendido que vale R$ 0,50 mais o seu salário que é R$ 400,00". Demonstrou facilidade em expressar um registro numérico em linguagem natural ao transpor uma situação particular para uma situação generalizada, percebendo claramente que o salário mensal de um frentista qualquer é função da quantidade de litros de óleo vendidos. Percebemos, tanto nesta quanto em outras atividades da seqüência, que este grupo possui facilidade para a generalização de situações, traduzindo uma situação da linguagem natural para a representação numérica e vice-versa.

Durante a apresentação da resolução da questão (1b), em transparências, houve uma discussão das produções dos grupos 4, 3 e 1, nessa ordem, entre professora e alunos. Tal discussão possibilitou que o grande grupo chegasse ao consenso de que para calcular o salário de um frentista no final do mês basta multiplicar a quantidade de litros de óleo lubrificante vendidos por R$ 0,50 (valor da comissão por cada litro de óleo vendido) e somar este resultado com R$ 400,00 (salário fixo). Com o final da aula as apresentações das produções dos grupos 2 e 5 tiveram que ser realizadas no encontro seguinte.

Destacamos a solução das questões (1a) e (1b) do Grupo 3, apresentada em transparência:

A. (*A2*)*:* Ele [o frentista] ganha de comissão cinqüenta centavos por litro, multiplicando por dez dá cinco reais, mais o salário fixo, dá quatrocentos e cinco reais por mês.

A.: O frentista deve multiplicar a quantidade de litros vendidos pela comissão que ele receberá por cada litro vendido, que vale cinqüenta centavos, mais o seu salário que é quatrocentos reais.

A seguir, a professora intervém e enfatiza o uso das operações de multiplicação (10 x 0,50 = 5,00) e adição (400,00 + 5,00 = 405,00) na solução do Grupo 3, propiciando a discussão e participação dos grupos nos debates. Tais discussões foram valiosas, na medida que os alunos puderam comparar suas estratégias de resolução do problema confrontando-as com as produções dos outros grupos.

O Grupo 2 entrega sua produção, em transparência, para ser apresentada pela professora, que novamente provoca uma discussão da solução da questão (1b). Em seguida, o Grupo 1, faz a sua apresentação que se assemelha à produção do Grupo 2; os dois grupos utilizam uma linguagem mista (natural e numérica) reportando-se ao cálculo do salário do frentista da questão (1a) ao final do mês.

A professora provoca uma discussão:

P.: Se o contador desejar calcular o salário de qualquer frentista ao final do mês sem que este lhe diga quantos litros vendeu, como vocês fariam para ajudá-lo? Qual a primeira operação que vocês realizariam para calcular o salário do frentista ao final do mês?
Alunos: Multiplicação. Devemos multiplicar pela comissão, cinqüenta centavos.
P.: E depois?
Alunos: Somar com o salário fixo.

Para a questão (1b), no registro escrito, observamos algumas respostas qualitativas, expressas em linguagem natural, e outras quantitativas, expressas em linguagem mista (natural e numérica).

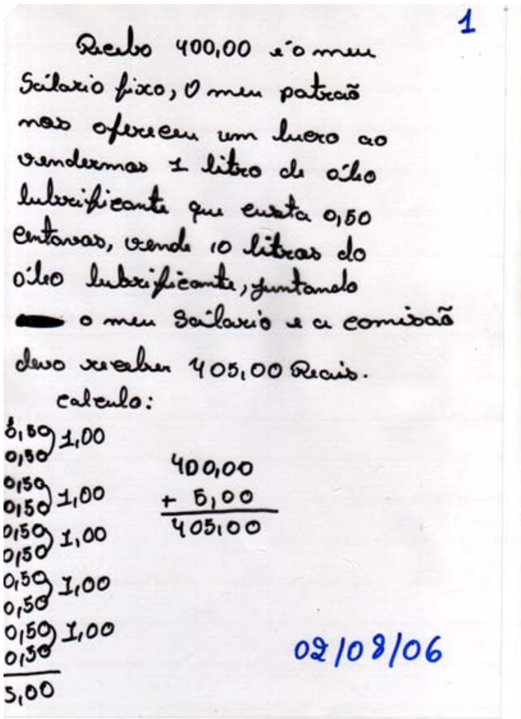
De acordo com Post, Behr & Lesh (1985), "[...] o raciocínio qualitativo é mais geral que o quantitativo, uma vez que as conclusões dizem respeito a toda uma classe de valores, e não a entidades específicas" (p. 91).

Ainda segundo estes autores, "[...] o raciocínio qualitativo é um meio importante de checar a viabilidade das respostas e uma maneira de estabelecer parâmetros amplos para as condições do problema" (p. 91).

Nesse sentido, acreditamos que as múltiplas comparações realizadas entre os valores quantitativos da questão (1a) propiciaram respostas qualitativas para a questão (1b), podendo ser consideradas como uma generalização da situação ali particularizada.

As diferentes estratégias mobilizadas nessa atividade nos permitem concluir que os alunos percebem que existe uma relação de dependência entre as grandezas salário mensal de um frentista e a quantidade de litros de óleo vendidos, e que o salário base funciona como um parâmetro não variável, tal como já era previsto. Isto também se verifica na discussão citada acima. Por outro lado, alguns grupos apresentaram dificuldades em generalizar as idéias trabalhadas na questão anterior, e consequentemente, não conseguiram escrever o bilhete solicitado.

Apresentamos as produções, em transparências, dos Grupos 1, 2 e 3, respectivamente, como exemplo de respostas para as questões (1a) e (1b):


1

Recebo 400,00 e o meu
Salario fixo, O meu patrão
nos ofereceu um lucro ao
vendermos 1 litro de oleo
lubrificante que custa 0,50
centavos, vendi 10 litros do
oleo lubrificante, juntando
o meu Salario e a comissão
devo receber 405,00 Reais.

calculo:

0,50 + 0,50 = 1,00
0,50 + 0,50 = 1,00
0,50 + 0,50 = 1,00
0,50 + 0,50 = 1,00
0,50 + 0,50 = 1,00
5,00

400,00
+ 5,00
405,00

02/08/06

FIGURA 3: Produção do Grupo 1 para as questões (1a) e (1b).

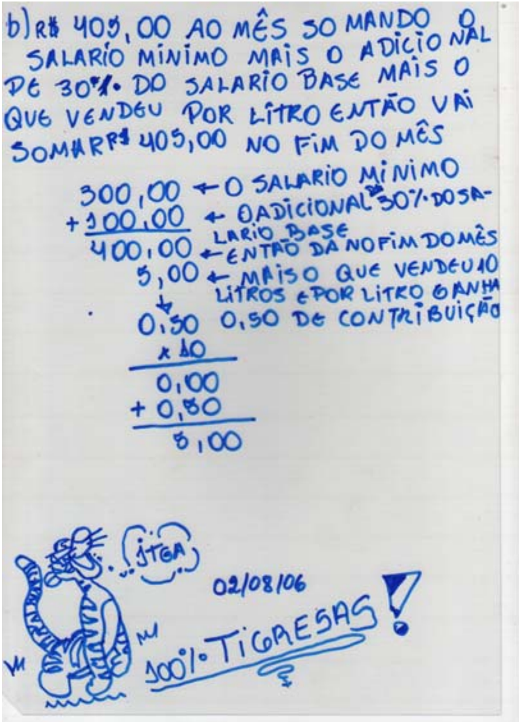


FIGURA 4: Produção do Grupo 2 para as questões (1a) e (1b).

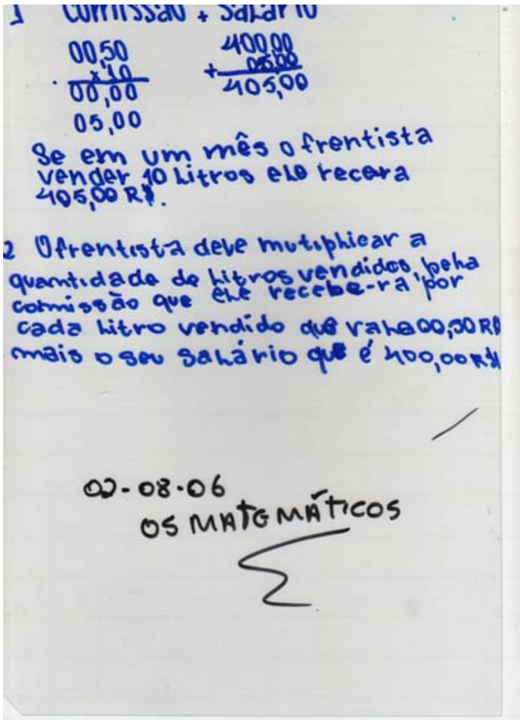


FIGURA 5: Produção do Grupo 3 para as questões (1a) e (1b).

1.2. Análise dos resultados da atividade 1, questão (1d): sessão 2.

A segunda sessão da seqüência se desenvolveu em 04 de agosto de 2006, com duração de duas aulas de 50 minutos cada, em que compareceram 22 alunos. Iniciamos nossos trabalhos com a leitura e interpretação do problema proposto e discussão das atividades da 1ª sessão pela professora e alunos.

Na segunda aula chegaram mais dois alunos, A1 e A3, que não haviam comparecido à aula anterior e, portanto, desconheciam a finalidade das atividades. Assim, a discussão da questão (1b) coordenada pela professora, esclareceu possíveis dúvidas dos grupos, assim como, os novos participantes da pesquisa tomaram conhecimento do problema e das atividades já desenvolvidas.

Discutimos as questões da primeira sessão na intenção de organizar os conhecimentos vivenciados, para que os alunos pudessem utilizá-los nas atividades seguintes ou em outras situações. Nossa intenção era que o conhecimento fosse socializado e universalizado; não particularizado. Em seguida, entregamos uma cópia do problema e das questões (1c) e (1d) para serem resolvidas sem a interferência da professora.

(1c) Este mês, João, um dos frentistas do posto, precisará de um salário maior para cobrir alguns cheques pré-datados. Ele pede então, ao contador do posto, que lhe explique como calcular quantos litros de óleo lubrificante deve vender para receber o salário que precisa. Imagine que você seja o contador, e escreva um bilhete para João, explicando o que ele deve fazer.

(1d) João precisa faturar R$ 600,00 em janeiro, para cobrir os cheques pré-datados que ele passou no Natal. Calcule quantos litros de óleo lubrificante ele deve vender para receber esse salário?

Entregamos as questões (1c) e (1d) aos alunos, nessa ordem, e em momentos diferentes, na intenção de que generalizassem a situação para, em seguida, particularizá-la.

Estando consolidada a relação salário recebido ao final do mês ⇨ quantidade de litros de óleo lubrificante vendidos, a partir da sistematização dos conhecimentos formulados na sessão anterior, pretendíamos com as questões (1c) e (1d) consolidar a relação quantidade de litros de óleo lubrificante vendidos ⇨ salário ao final do mês.

O objetivo principal destas questões era que os alunos generalizassem as idéias já trabalhadas, aplicando-as ao cálculo da quantidade de litros de óleo lubrificante vendidos por um frentista qualquer sendo conhecido o salário mensal que precisava receber, mobilizando a linguagem natural ao redigirem o bilhete solicitado, ou a linguagem simbólica de forma a expressar a situação algebricamente. Para tanto, observamos que estratégias lançaram mão: se mobilizaram a idéia de operação inversa (estabelecendo a estratégia de que para saber o número de litros de óleo lubrificante que João precisa vender para receber um salário mensal de R$ 600,00, devem subtrair deste valor o salário fixo de R$ 400,00, e dividir o resultado por R$ 0,50, concluindo que ele deve vender 400 litros de óleo) e/ou o conceito de proporcionalidade (estabelecendo a estratégia de realizar tentativas).

Percebemos certa dificuldade dos alunos ao responderem as questões na ordem proposta. Acreditamos que isso se deve ao fato de que o registro numérico é mais explorado na resolução de problemas, desde as séries iniciais do ensino fundamental, acarretando dificuldades quando os alunos são colocados diante de uma situação que não seja particular.

Este fenômeno pode ser percebido no recorte do diálogo entre professora e alunos:

Os alunos solicitam a ajuda da professora, alegando que o problema não apresenta o valor do salário mensal que o frentista precisava receber.

Professora: Para o frentista [da questão 1c] vender *qualquer* quantidade de litros de óleo lubrificante o que ele precisa saber primeiro?
Alunos: Quantos litros precisa vender.

Percebemos certa resistência na transposição da linguagem numérica para a linguagem natural, evidenciando certa dificuldade em fazer generalizações. Acreditamos que tal dificuldade é um efeito de contratos anteriores por estarem habituados a efetuar operações para responder a uma questão matemática.

Conforme discutido no Capítulo 2 de nosso trabalho, alguns autores (HENRY, 1991; CHEVALLARD, BOSCH & GASCÓN, 2001; BRITO MENEZES, 2006) defendem a idéia de que é uma regra implícita de contrato didático, que um problema em matemática se resolve fazendo operações aritméticas, a partir dos dados do enunciado do problema.

De modo análogo Post, Behr & Lesh (1995), propõem que alunos menos experientes, ao empreenderem a resolução de um problema, "[...] tendem a passar diretamente aos cálculos ou a uma fórmula, sem lançar mão de uma análise qualitativa prévia" (p. 91).

É possível que o maior acesso a situações de aprendizagem que privilegiavam o raciocínio quantitativo em detrimento do qualitativo, aliado à crença bastante difundida na sala de aula de que problemas em matemática são resolvidos com algoritmos predeterminados, possam ter acarretado dificuldades aos sujeitos desse estudo em mobilizar a linguagem natural ao redigirem o bilhete solicitado.

Após alguns esclarecimentos sobre a não necessidade de uma resposta com cálculos para a questão (1c), observamos que a maioria dos grupos ainda apresentou dificuldades em expressar sua resposta em linguagem natural. Diante do exposto, a professora-pesquisadora decide entregar a atividade (1d), para ser resolvida, juntamente, com a atividade (1c), na expectativa de que os grupos finalmente conseguissem resolvê-las. Nossa intenção era que, a partir de um caso particular, os alunos conseguissem, finalmente, generalizar a situação. Apesar das intervenções da professora explicando que o frentista deseja receber um salário qualquer, alguns grupos ainda optaram por responder a questão (1c) efetuando cálculos numéricos. Apenas dois grupos, o 2 e o 3, escreveram o bilhete solicitado utilizando a linguagem natural.

Citamos a discussão entre um aluno do Grupo 3 e a professora:

A. (A2): O valor que ele quer receber não é um valor especifico é qualquer valor acima de quatrocentos reais. Entendi já!

P.: Atenção grupos! A2 pensou o seguinte para facilitar a idéia de como responder a questão c: na questão d, o salário é seiscentos reais que ele [o frentista] quer receber. Para a questão c, você falou o quê?

A.: Na questão c é qualquer salário. Não precisa colocar seiscentos, quinhentos... O salário é qualquer valor acima de quatrocentos reais.

Percebemos nesse diálogo que o aluno conseguiu se desprender de um valor particular para o salário que o frentista precisa receber e generalizou a situação.

Para a resolução da questão (1d) o Grupo 1 usou apenas a operação de adição (550,00 + 50,00 = 600,00), chegando à resposta incorreta de que o frentista precisará vender 100 litros de óleo lubrificante para receber o salário de R$ 600,00, fazendo o raciocínio: R$ 0,50 x 100 = R$ 50,00, mobilizando a idéia de proporcionalidade. Analisando estes cálculos, percebemos que o salário fixo de R$ 400,00 foi desconsiderado e substituído por R$ 550,00, visto que a comissão de R$ 50,00 foi somada a este valor, e não, ao outro.

Acrescente-se aqui o fato de que este grupo reformulou a resolução apresentada na folha de respostas escrevendo, para a questão (1d), os cálculos 600,00 – 400,00 = 200,00 e 200,00 ÷ 0,50 = 400, após as discussões das produções, em transparências, dos outros grupos.

Acreditamos que aplicar seqüências de ensino que oportunizem a discussão, colocando-se questões, pedindo justificativas de respostas e, principalmente, provocando-se a validação coletiva de resultados torna a aprendizagem mais efetiva e significativa.

Essa nossa suposição pode ser confirmada por Brousseau (1996b), quando considera que o professor busca situações de aprendizagem apropriadas para fazer um conhecimento funcionar no aluno e, para tanto, "[...] é necessário que a resposta inicial que o aluno pensa frente à pergunta formulada não seja a que desejamos ensinar-lhe: se fosse necessário possuir o conhecimento a ser ensinado para poder responder, não se trataria de uma situação de aprendizagem" (p. 49).

Para a resolução da questão (1d) os grupos 2 e 3 utilizaram a operação de adição R$ 400,00 + R$ 200,00 = R$ 600,00, chegando à resposta correta de que o frentista precisará faturar R$ 200,00 e vender 400 litros de óleo lubrificante para receber o salário de R$ 600,00,

O Grupo 2 mobilizou o registro numérico com facilidade fazendo o raciocínio matemático, 200,00 ÷ 0,50 = 400 litros, aplicando a idéia de operação inversa (como havíamos previsto).

O Grupo 3 também mobilizou o registro numérico fazendo o raciocínio, 400 x 0,50 = R$ 200,00, aplicando intuitivamente a noção de proporcionalidade. Supomos que o grupo utilizou multiplicações do tipo: 0,50 x 1 = 0,50; 0,50 x 10 = 5,00; 0,50 x 100 = 50,00; 0,50 x 200 = 100,00;...; 0,50 x 400 = 200,00 para chegar aos quatrocentos litros e resolver a atividade. O raciocínio com proporções envolve a idéia de que duas grandezas ao serem comparadas tendem a variar simultaneamente, exigindo a capacidade de fazer inferências, comparações e interpretação dessas comparações, além de mobilizar o pensamento funcional, ponto relevante do nosso estudo.

Corroborando estas idéias citamos Post, Behr & Lesh (1995), ao considerarem que o raciocínio proporcional exige capacidade matemática e mental:

> Matematicamente, toda relação proporcional pode ser representada pela função $y = mx$, o tipo mais fundamental de equação linear. Essa equação representa uma relação simples, de natureza multiplicativa, entre termos dos pares (x, y), de números. [...] O raciocínio com proporções envolve o pensamento qualitativo: "Essa resposta tem sentido? Deveria ser maior ou menor?" Esse tipo de raciocínio requer uma comparação que não depende de valores específicos" (p. 90).

Dando continuidade à tarefa de mediar a socialização das produções, a professora solicita que um dos grupos apresente sua resolução para a questão (1d). Como nenhum deles se prontifica a fazê-lo, ela mesma inicia a apresentação da produção do Grupo 5. Este grupo calcula a quantidade de litros vendidos pelo frentista dividindo o salário de R$ 600,00 pela comissão, R$ 0,50, encontrando uma resposta incorreta. Percebemos que o grupo ainda não assimilou a idéia de que o salário base, R$ 400,00, é um parâmetro fixo que deve ser subtraído do salário que o frentista deseja receber no final do mês, não confirmando as previsões da nossa análise preliminar.

A professora questiona se todos os grupos encontraram a mesma solução. Então um aluno do Grupo 3 apresenta para a classe a sua produção:

A.(A2): Ele [o frentista] precisa vender quatrocentos litros, a gente chegou à conclusão. Porque quatrocentos litros vezes cinqüenta centavos, que é quanto ele vai ganhar por cada litro, vai dar duzentos reais, que é a comissão. Daí somamos os duzentos reais com o salário dele, fixo, que é quatrocentos reais. Duzentos com quatrocentos deu seiscentos reais, que é o valor que ele precisa ganhar.

A professora salienta a importância do trabalho em grupo, uma vez que os dois grupos contribuíram para a formulação de uma resposta-consenso. O Grupo 5 contribuiu com a idéia de "efetuar uma divisão pelo valor da comissão, R$ 0,50" e o Grupo 3 contribuiu com a idéia de "considerar que o salário base, R$ 400,00, funciona como um valor fixo e não participa do cálculo da quantidade de litros de óleo lubrificante".

A seguir, a professora apresenta a atividade (1d) do Grupo 2, que efetua uma adição, 400 + 200 = 600, seguida de uma divisão, 200 : 0,50 = 400, concluindo que "Ele tem que vender 400 litros de óleo lubrificante para ganhar R$ 200,00 reais a mais no seu salário". Escrevendo ainda a observação em linguagem natural: "Dividindo o valor que ele quer faturar, pelo valor que ele ganha em cada litro, vai se chegar à quantidade de litros que ele precisa vender". O grupo demonstrou facilidade para a generalização de situações, traduzindo uma situação da linguagem natural para a representação numérica e vice-versa.

A apresentação das produções propiciou que os alunos chegassem ao consenso de que para calcular quantos litros de óleo lubrificante o frentista deve vender para receber um salário qualquer no final do mês, basta subtrair o salário desejado do salário fixo e dividir este resultado pelo valor da comissão recebida por cada litro de óleo vendido, sistematizando o conhecimento. Isto pode ser confirmado na discussão que citamos a seguir:

Professora: Quem gostaria de explicar a questão (1d) no quadro?

A. (A2 – Grupo 3): É pra dizer do jeito que eu entendi!! Seiscentos reais é o valor que ele (o frentista) precisa faturar no fim do mês. Ele já recebe quatrocentos reais, o salário dele, fixo, é quatrocentos, que subtraímos dos seiscentos reais pra saber quanto ele precisa faturar no final do mês de comissão. Seiscentos menos quatrocentos, duzentos reais.

A. (A3 - Grupo 5): Daí ele [o frentista] pensou: o que eu vou fazer pra conseguir esses duzentos reais. Quantos litros de óleo vai ser preciso vender pra receber um total de duzentos reais?

A. (A2): Isso!!! Ele dividiu os duzentos reais por cinqüenta centavos pra saber quantos litros ele precisava vender pra receber os duzentos reais, aí ele viu que precisava vender quatrocentos litros de óleo.

Um aluno do Grupo 5 apresenta outra estratégia para calcular a quantidade de óleo que deve ser vendida para que o frentista receba R$ 200,00 de comissão:

A. (A3): Vou dar um exemplo: seiscentos litros de óleo, não chegou o valor. E foi diminuindo até chegar na quantidade ...

A professora pede que ele continue o raciocínio, mas o aluno não continuou por timidez. A professora completa o raciocínio com a ajuda do aluno:

P.: Ele pensou assim: João [o frentista] começou a jogar, trezentos litros de óleo, duzentos litros, cinqüenta litros até chegar aos quatrocentos litros. Essa seria uma outra maneira de calcular a quantidade de litros que deveria ser vendida.

Implicitamente o aluno citado mobiliza a idéia de proporcionalidade, como havíamos previsto. Supomos que utilizaria multiplicações do tipo 0,50 x 10; 0,50 x 20; 0,50 x 100; 0,50 x 200;...; 0,50 x 400 para resolver a atividade. Raciocínio análogo àquele citado anteriormente.

Destacamos algumas observações importantes nessa atividade. No aspecto didático, as discussões oportunizaram aos alunos o acesso a diferentes estratégias de resolução de um mesmo problema e à busca de respostas que lhes parecessem mais adequadas a partir de generalizações, algo aparentemente novo para eles. No aspecto cognitivo, para mobilizar tais estratégias, os alunos necessitaram recorrer à noção de dependência entre as variáveis envolvidas, de forma não sistematizada, bem como mobilizar as idéias de operação inversa e proporcionalidade, procedimentos trabalhados na 1ª sessão e previstos em nossa análise prévia.

Ao analisarmos os registros escritos da questão (1c) observamos algumas respostas qualitativas, expressas em linguagem natural e outras quantitativas, expressas em linguagem mista, utilizando registros nas linguagens natural e numérica. Os dados obtidos nos permitem concluir que os alunos não tinham intimidade com a conversão do registro da linguagem numérica para a linguagem natural. Uma análise a posteriori mais detalhada da questão (1c) será realizada no próximo item.

Para a questão (1d) observamos certa dificuldade de compreensão dos alunos em aplicar a operação inversa da adição e a inversa da multiplicação, apenas o Grupo 2 utilizou esta idéia, os outros mobilizaram a idéia de proporcionalidade.

Apresentamos as produções, em transparências, dos Grupos 1, 2 e 3, respectivamente, como exemplo de respostas para a questão (1d):

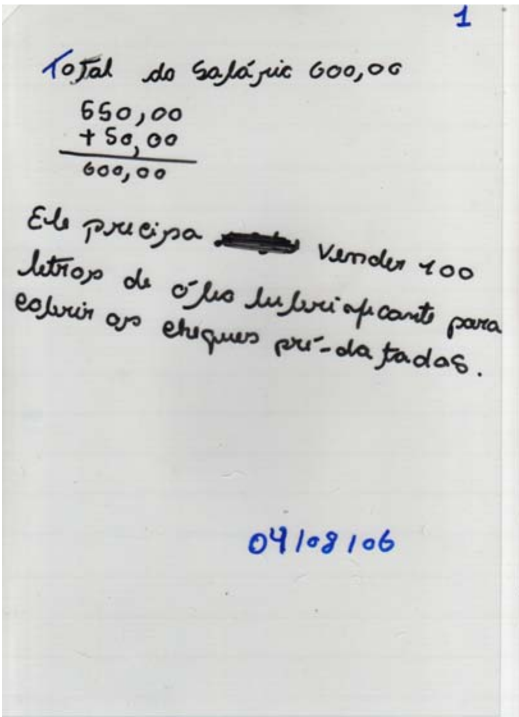
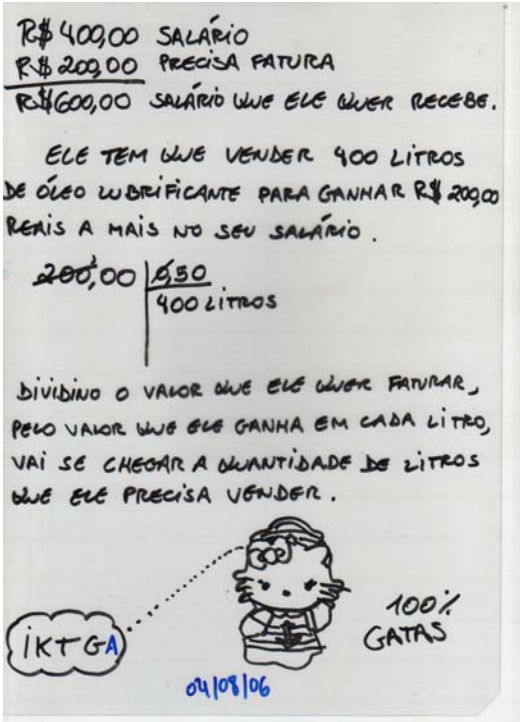


FIGURA 6: Produção do Grupo 1 para a questão (1d).

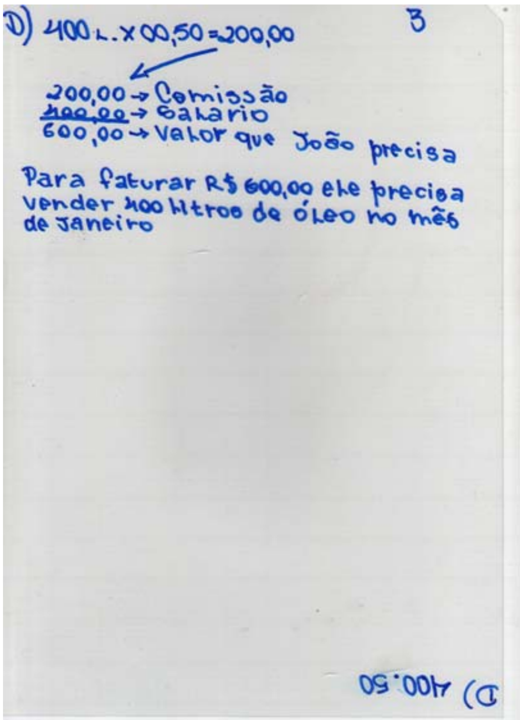

R$ 400,00 SALÁRIO
R$ 200,00 PRECISA FATURA
R$ 600,00 SALÁRIO QUE ELE QUER RECEBE.

ELE TEM QUE VENDER 400 LITROS DE ÓLEO LUBRIFICANTE PARA GANHAR R$ 200,00 REAIS A MAIS NO SEU SALÁRIO.

200,00 | 0,50
400 LITROS

DIVIDINO O VALOR QUE ELE QUER FATURAR, PELO VALOR QUE ELE GANHA EM CADA LITRO, VAI SE CHEGAR A QUANTIDADE DE LITROS QUE ELE PRECISA VENDER.

FIGURA 7: Produção do Grupo 2 para a questão (1d).


D) 400 L. x 00,50 = 200,00 3

200,00 → Comissão
400,00 → Salario
600,00 → Valor que João precisa

Para faturar R$ 600,00 ele precisa vender 400 litros de óleo no mês de Janeiro

FIGURA 8: Produção do Grupo 3 para a questão (1d).

1.3. Análise dos resultados da atividade 1, questão (1c) e (1e): sessão 3.

A terceira sessão da seqüência se desenvolveu em 09 de agosto de 2006, com duração de duas aulas de 50 minutos cada, em que compareceram 18 alunos. Iniciamos nossos trabalhos com a leitura, interpretação e discussão da questão (1c) proposta na 2ª sessão.

É importante ressaltar que o Grupo 4 tem apresentado freqüência bastante irregular impossibilitando a análise precisa dos registros das suas atividades, e tiveram seus resultados excluídos das próximas análises.

Lembramos que, com o término da aula anterior, não foi possível que todos os grupos concluíssem a questão (1c) e fizessem as apresentações de suas produções. Apenas os grupos 5, 3 e 2, apresentaram e discutiram as estratégias de resolução de suas atividades.

(1c) Este mês, João, um dos frentistas do posto, precisará de um salário maior para cobrir alguns cheques pré-datados. Ele pede então, ao contador do posto, que lhe explique como calcular quantos litros de óleo lubrificante deve vender para receber o salário que precisa. Imagine que você seja o contador, e escreva um bilhete para João, explicando o que ele deve fazer.

Um dos objetivos desta atividade é dar continuidade aos estudos do papel representado pelas grandezas do problema e o relacionamento entre elas, ou seja, a compreensão de que 400 é um parâmetro, ele não varia, e o que fará variar o salário é o número de litros de óleo vendidos. Além de generalizar as idéias trabalhadas na questão (1d) provocando a mudança do registro numérico para a linguagem natural e aplicar os conceitos de proporcionalidade e/ou de operação inversa ao redigir o bilhete solicitado no problema.

Promovemos um debate com o intuito de consolidar os conhecimentos institucionalizados nas sessões anteriores realizando o registro, no quadro, das informações comunicadas pelos alunos:

Professora: Quem lembra como é que nós devemos fazer o cálculo do salário do frentista?

A classe não se pronuncia, e a professora questiona:
Professora: Primeiro ele [o frentista] tem um salário fixo, não é isso? Quanto é o salário fixo?
Alunos: Quatrocentos reais.
P.: Ele recebe uma comissão de quanto?
A. (A3 – Grupo 5): Cinqüenta centavos.
P.: Cinqüenta centavos é a comissão pela venda de um litro de óleo. Como eu faço para calcular o salário de um frentista desse posto? Digamos que ele queira receber um salário qualquer e vendeu certa quantidade de litros de óleo lubrificante.
A. (A3): Pega a comissão de cinqüenta centavos e multiplica pelo número de litros de óleo vendidos.
P.: E depois, o que devo fazer?
A.: Somar com o salário.
P.: Somar com o salário...?
A.: Somar com o salário fixo.
P.: É importante que vocês captem bem esta idéia, porque vão utilizar mais lá na frente. Por isso estou revisando!

O papel da professora-pesquisadora era de organizar os saberes em jogo para que pudessem ser mobilizados em outras situações de aprendizagem. A finalidade desse debate era sistematizar as idéias trabalhadas na questão (1d), partindo de uma situação particular para que os alunos as generalizassem na questão (1c).

P.: Para chegar ao salário final, vocês chegaram a essa conclusão na aula anterior: multiplica-se o número de litros de óleo vendidos pelos cinqüenta centavos, que é o valor da comissão, e depois devo somar este resultado com o salário fixo.
P.: Agora a pergunta na questão (1c) é outra! Como calcular a quantidade de litros de óleo que João deve vender para receber um salário qualquer? Vejam na questão d, como vocês calcularam?
P.: Este grupo aqui [o Grupo 3], por exemplo, como calculou?

A professora lê para a classe a resposta da questão (1d) do Grupo 3 na tentativa de provocar uma discussão:

P.: Os seiscentos reais é o salário que ele quer receber. Ele [o frentista] primeiro tem que descobrir quanto precisa receber de comissão. A idéia foi pegar os seiscentos reais e fazer o quê?
A.: Subtrair.
P.: Subtrair de...
P.: Falem... Vamos lembrar o que dizia a questão d.
A. (A3): Ele precisa faturar seiscentos reais.

A professora lê para a classe o enunciado da questão (1d):

P.: João precisa faturar seiscentos reais em janeiro, para cobrir os cheques pré-datados que ele passou no Natal. Calcule quantos litros de óleo lubrificante ele deve vender para receber esse salário?

P.: O que vamos fazer com os seiscentos reais?

A. (A1 – Grupo 2): Subtrair.

P.: Subtrair!!! Certo! Foi o que nós vimos na aula anterior. Então, subtraio os 400 reais dos 600 reais que ele quer receber. Então, ele precisa faturar mais?

A. (A3): Duzentos.

P.: Se ele quer faturar duzentos reais, o que vocês têm que fazer para determinar quantos litros de óleo ele precisa vender?

A. (A3): Calcular quantos litros de óleo ele precisa vender.

P.: Calcular como?

A. (A3): Como???

P.: Como vocês fizeram aí nas suas atividades?

A. (A1): Dividindo.

P.: Dividindo!!! Vocês já esqueceram o que vimos na aula anterior? Dividimos os 200 reais de comissão que ele precisa receber por...?

A. (A1): Cinqüenta centavos.

P.: Vamos lembrar como calcular o resultado dessa divisão?

Nesse momento, a professora explica como efetuar uma divisão com números decimais. A divisão 200,00 : 0,50 é efetuada no quadro.

P.: Então, quantos litros ele precisa vender para receber os duzentos reais?

A.: Quatrocentos litros.

P.: O que foi que nós fizemos aqui? Primeiro nós,,,? Falem, por favor!!!

A.: Subtraímos.

P.: Vocês têm que captar bem essa idéia, porque vamos precisar mais adiante. Seiscentos reais eu subtraio de...?

A.: Quatrocentos.

P.: Depois que eu sei qual é a comissão que ele, realmente, precisa receber, uma vez que esses quatrocentos reais é salário fixo, eu tenho que dividir os duzentos reais por cinqüenta centavos para saber quantos cinqüenta centavos "têm" dentro dos duzentos. Agora com essa idéia respondam a questão (c): Como João deve calcular a quantidade de litros de óleo para receber um salário qualquer?

P.: Aqui [A professora se refere à questão (1d), resolvida no quadro.], eu estabeleci que o salário que João precisa receber é de seiscentos reais; e se fosse um salário qualquer? O que o frentista deveria fazer?

A. (A3): O mesmo!

P.: O mesmo! Mas, "o mesmo" o quê???? Podem falar não precisa ter medo...

A. (A3): O problema é que não tem o número de litros?

P.: Esqueçam o número. O salário é qualquer um? O que você tem que fazer com esse salário qualquer?

A. (A3): Vamos dar um exemplo: digamos que em um mês ele vende seiscentos litros de óleo.

P.: Não, sem pensar em exemplo! João quer resolver o problema de uma vez, sem ter que procurar o contador todas as vezes que quiser fazer os cálculos. Não é mais importante o frentista saber fazer [os cálculos] do que ficar sempre perguntando? O que

João precisa fazer com esse valor, que não importa qual seja, para determinar a quantidade de litros de óleo que precisa vender?

A. (A3): Deve calcular os cinqüenta centavos pelo valor dos litros de óleo [Acreditamos que o aluno está se referindo ao valor de um salário qualquer.].

P.: Antes de trabalhar com os cinqüenta centavos o que João precisa fazer?

A. (A4): É!! [Nesse momento uma das alunas concorda com a resposta do colega.]

P.: Antes de trabalhar com esses cinqüenta centavos, o que ele tem que fazer?

A. (A10 – Grupo 3): Subtrair.

P.: Por que vocês não falam?

A professora inicia a leitura da atividade do Grupo 3 para discuti-la com a classe: "João você precisa multiplicar a quantidade de litros de óleo...".

P.: Será que ele primeiro multiplica, se não sabe quantos litros são? Ele não sabe quantos litros de óleo precisa vender. Ele só sabe uma coisa: eu quero descobrir quantos litros eu tenho que vender para receber um salário qualquer. A primeira coisa que ele tem que fazer, qual é?

A. (A10): Subtrair.

P.: Subtrair. E ele vai subtrair que números?

A. (A10): Os quatrocentos reais.

A. (A1): Os quatrocentos reais, que é o salário fixo, do salário que ele precisa.

P.: Os quatrocentos reais, que é o salário fixo, daquele valor que ele quer receber.

A professora pede que os grupos escrevam as suas conclusões para a questão (1c).

P.: Alguns grupos não conseguiram concluir esta atividade. Eu vou recolher [A atividade (d), concluída na aula anterior.]. Não adianta a gente caminhar [avançar], sem todos caminharem juntos. Os grupos que concluíram a questão (c) escrevam na transparência para a apresentação.

Confirmando-se a previsão, podemos considerar que os alunos já consolidaram a idéia de que 400 é um parâmetro e também as relações salário recebido ao final do mês ⇨ quantidade de litros de óleo lubrificante vendidos e quantidade de litros de óleo lubrificante vendidos ⇨ salário ao final do mês. Nesse momento isto foi percebido, porém mais tarde os alunos apresentaram dificuldades em mobilizar a relação quantidade de litros de óleo lubrificante vendidos ⇨ salário ao final do mês. Talvez este fato requeira novas investigações.

Iniciam-se as apresentações das produções referentes à questão (1c) com o Grupo 5:

A. (A3): Como foi bem informado, ele não diz a quantidade [o salário no final do mês] que quer receber. Então o que deve fazer: ele vai subtrair os quatrocentos reais pelo valor que ele tem que receber e dividir por cinqüenta centavos.

P.: Ok! Qualquer frentista desse posto que deseje saber quantos litros de óleo deve vender para receber um salário qualquer deve primeiro, subtrair os quatrocentos reais, salário fixo, que a empresa paga ao frentista independente dele vender ou não óleo lubrificante, pelo valor que ele quer receber. Depois da subtração, deve dividir esse resultado por cinqüenta centavos que é o preço [da comissão] de cada litro de óleo.

O Grupo 5 respondeu a questão (1c) coerentemente. Percebemos que sua resposta foi reformulada durante as discussões chegando à generalização do cálculo da quantidade de litros de óleo lubrificante que um frentista do posto deve vender para receber um salário qualquer. Verificamos que o grupo percebe que o salário mensal de um frentista qualquer depende da quantidade de litros de óleo vendidos.

A. (A8 – Grupo 3): João precisará subtrair a quantidade de sua dívida com o salário fixo. E aí você saberá a quantidade de óleo que deverá vender para descobrir o salário que ele precisa ou um salário qualquer.

P.: Ele teria que fazer a subtração e efetuar a divisão. Ótimo!

Como era esperado, o Grupo 3 generalizou o cálculo da quantidade de litros de óleo lubrificante que um frentista do posto deve vender para receber um salário qualquer. Tem demonstrado em todas as atividades facilidade em expressar um registro numérico em linguagem natural e em transpor uma situação particular para uma situação generalizada. Nessa atividade, percebeu claramente que o salário mensal de um frentista qualquer é função da quantidade de litros de óleo vendidos.

A. (A1 – Grupo 2): Primeiro ele tem que subtrair o salário fixo dele de quatrocentos reais do salário que ele precisa ganhar, depois dividir pelos cinqüenta centavos para obter a quantidade de litros de óleo que ele precisa vender.

P.: Não é simples? Muito bem! Ótimo!

Como havíamos previsto, o Grupo 2 generalizou o cálculo da quantidade de litros de óleo lubrificante que um frentista do posto deve vender para receber um salário qualquer. Assim como o Grupo 3, possuem facilidade para a generalização de situações, traduzindo uma situação da linguagem natural para a representação numérica e vice-versa.

A. (A7 – Grupo 1): Ele deve calcular quanto ele precisa, para ver quantos litros de óleo lubrificante ele deve vender. Cinqüenta litros é o que ele precisa para conseguir o valor que deseja.

P.: Obrigada!

Contrariando as nossas previsões, o Grupo 1 não generalizou o cálculo da quantidade de litros a ser vendida pelo frentista do posto para receber um salário qualquer. Apresentou dificuldades em mobilizar a linguagem natural, escrevendo no bilhete que o frentista deveria vender 50 litros de óleo para conseguir cobrir os cheques pré-datados, mesmo desconhecendo o valor total desses cheques; não conseguiu, ainda, se desprender do registro numérico. Porém, este grupo demonstrou claramente, na redação do bilhete, que percebem que a quantidade de litros de óleo lubrificante vendidos faz variar o salário ao final do mês.

Ao término das apresentações realizamos um debate, em que foram discutidos os resultados dos alunos na busca da universalização dos conhecimentos.

Professora: O salário a receber no final do mês depende ou não da quantidade de litros de óleo vendidos?
Alunos: Depende. Não depende.
P.: Sim ou não?

Diante das dúvidas a professora reformula a pergunta:

P.: O salário que qualquer frentista desse posto vai receber ao final do mês depende ou não da quantidade de litros de óleo vendidos?

O aluno A9 (Grupo 3) balança a cabeça negativamente e a aluna A10 (do mesmo grupo) afirma:

A.: Depende [Iniciando uma breve discussão entre eles.].
Alunos: Depende. Não depende.
A. (A3 – Grupo 3): Depende por uma parte; se ele estiver precisando!?
P.: Mas a pergunta é: depende ou não?
A. (A3): Depende.

"Confusão geral". Nesse momento, os alunos são levados a falar, trocar informações, refletir, confrontar concepções, evoluir independentes da opinião da professora e validar suas afirmações.

Alunos: Depende.
A. (A4 – Grupo 1): Não!! Mas e como a gente sabe se ele vendeu ou não o óleo, e de qualquer jeito ele não vai ter que ganhar o salário fixo?

A aluna não percebeu, ainda, que o frentista precisa, naquele mês, receber um salário acima do salário base, para cobrir alguns cheques pré-datados. Esta informação está bem clara no enunciado da questão.

P.: Eu não estou falando em salário fixo.
A. (A3): Ah!!!! E se ele estiver devendo mais de quatrocentos reais? Ele vai ter que vender mais óleo. Então depende.

Nesse momento, o aluno A3 (Grupo 3) demonstra perceber que quanto mais litros de óleo lubrificante forem vendidos, maior será o salário ao final do mês e que 400 é um parâmetro.

A discussão continua:

*A. (*A9*):* Ah, então depende!
A. (A4): Depende.
P.: Estas conclusões estão ok! O salário que o frentista vai receber ao final do mês, eu não estou falando do salário fixo, este já é garantido, depende da quantidade de litros de óleo vendidos.
P.: Outra pergunta: quanto mais litros de óleo ele vender, menor ou maior é o salário?
Alunos: Maior é o salário.
P.: Então o salário ao final do mês depende da quantidade de litros de óleo vendidos. Vocês vão precisar disto, dessa idéia, mais adiante. Depender ou dependência significa que o salário depende da quantidade de litros de óleo vendidos. A palavra dependência pode ser substituída pela palavra função, assunto que nós estamos estudando.
P.: Entre vocês, quem trabalha? [A3 levanta a mão.] Somente A3 é independente, os outros dependem de quem?
A.: Dos pais, avós...
P.: Então vocês vivem em função de alguém. Viver em função significa depender [A professora faz uma analogia para que os alunos compreendam melhor o significado da palavra função]. Então a palavra dependência indica que existe uma função. Nessa atividade, quem depende de quem? Qual é a grandeza que depende da outra grandeza?

O aluno A3 responde à pergunta referindo a uma grandeza que não está relacionada à situação apresentada e a professora explica que deseja saber quais são as grandezas do problema:

P.: O salário final depende da quantidade de litros de óleo vendidos. O salário final e a quantidade de litros de óleo vendidos são chamados de grandezas. O que é uma grandeza? [O grupo-classe não responde.]
P.: É tudo que você pode medir. Por exemplo, você pode medir a sua altura, então altura é uma grandeza. Você pode medir a velocidade de um carro, através de um velocímetro, então velocidade é uma grandeza. Você pode determinar o salário final, pode calcular, então é uma grandeza. E a quantidade de litros de óleo que o frentista precisa vender também é uma grandeza. Nesse problema, nós temos duas grandezas: o salário

final que ele deseja receber, que depende da quantidade de litros de óleo vendidos. Ou seja, um salário qualquer que se deseja receber é uma função da quantidade de litros de óleo vendidos.

Nessa discussão procuramos introduzir a noção de função com ênfase na concepção variacional, isto é, no relacionamento entre as variáveis salário a receber no final do mês e quantidade de litros de óleo lubrificante vendidos.

Lembramos que o objetivo principal desse estudo é investigar os efeitos de uma seqüência didática nas concepções de alunos do 1º ano do Ensino Médio em relação ao conceito de Função Afim. O que nos levou a conjecturar que muitas das dificuldades no aprendizado de Função Afim, podem ocorrer devido ao formalismo existente no seu estudo, sendo necessário resgatar o caráter dinâmico deste conceito, por meio de abordagens que proponham situações que dêem funcionalidade a esse saber.

Para finalizar a discussão, a professora evidencia a funcionalidade do conceito de função quando relacionamos esse saber com algumas grandezas lineares presentes no dia-a-dia:

P.: Pensem nesse outro exemplo: existe uma relação de dependência entre o tempo e a velocidade de um carro. O tempo gasto depende da velocidade. Quanto maior a velocidade do seu carro, é claro que o tempo de deslocamento vai ser menor. Ficou compreendido que existe uma relação de dependência entre essas duas grandezas, a quantidade de litros de óleo vendidos e o salário qualquer?

O papel da professora-pesquisadora era de organizar os saberes em jogo para que pudessem ser utilizados em outras situações de aprendizagem. Com o intuito de formalizar a idéia de função a partir da compreensão das variáveis dependente e independente passamos a introduzir nos debates coletivos expressões do tipo *o salário que se deseja receber ao final do mês é uma função da quantidade de litros de óleo vendidos.* Enfatizando sempre o relacionamento entre as variáveis em jogo, e deste modo, dando significado ao conceito de função.

Em seguida, entregamos uma cópia da questão (1e) para ser resolvida pelos pequenos grupos.

(1e) João contou aos colegas o pedido feito ao contador. Imediatamente, todos os outros frentistas, e são mais de 30 nesse posto, foram fazer o mesmo pedido informando ao contador quantos litros de óleo lubrificante cada um vendeu, até aquele momento. O contador quase enlouquece, e ficou pensando como fazer para atender a todos. Ajude-o, e invente uma maneira para que os frentistas do posto possam determinar, rapidamente, quanto será o salário dos mesmos, até aquele momento?

A questão (1e) foi proposta com o objetivo principal de que os alunos propusessem a construção de uma tabela, como registro mais adequado para organizar os cálculos realizados pelo contador ao determinar os salários dos mais de trinta frentistas. Com isso poderão realizar uma nova conversão, ou seja, do registro em linguagem natural para o numérico, e deste para o tabular. Para tanto, os alunos necessitarão recorrer à noção de dependência entre as variáveis número de litros de óleo lubrificante vendidos e salário a ser recebido ao final do mês e à idéia de que 400 é um parâmetro, não variável e realizar a correspondência um a um entre elas, organizando os salários dos mais de trinta frentistas, ou de parte deles, o que é mais viável.

Após o término da leitura da questão (1e) a professora questiona:

P.: Como calcular o salário dos frentistas, e nesse posto são mais de trinta?
A. (A3): Tem que calcular os salários incluindo tudo em um valor só, não é?
P.: Não, sem pensar em valores. A questão não fala em valores, diz apenas que são trinta frentistas e que o contador ficou pensando como atender a todos. Os frentistas procuraram o contador informando quantos litros de óleo cada um vendeu e o contador pensou: Como eu vou calcular o salário de cada um dos frentistas? E informar a todos esses frentistas como registrar todos esses valores.
P.: Agora, discutam entre vocês.

Percebemos certa dificuldade dos alunos em compreender o enunciado do problema e representá-lo na forma tabular. Fez-se necessário a intervenção da professora instigando a discussão entre os pequenos grupos quanto à melhor maneira de registrar o salário dos mais de trinta frentistas do posto em função do número de litros de óleo vendidos.

Acreditamos que o fato do enunciado ter se referido a mais de trinta frentistas, uma quantidade relativamente grande, tenha dificultado a conversão da linguagem natural para a tabular. Os alunos teriam que relacionar as variáveis dependente e independente fazendo, por exemplo, as correspondências um a um de alguns frentistas e generalizar para todos os outros. No que se refere às dificuldades dos estudantes em lidar com o conceito de função, em particular, com a regra de correspondência entre as variáveis, Markovits, Eylon & Buckeimer (1995), observaram em suas pesquisas que "[...] em questões envolvendo mais de uma etapa os alunos ignoravam a regra de correspondência" (p. 58). Supomos que os sujeitos dessa pesquisa se prenderam aos possíveis cálculos numéricos dos salários dos frentistas, dificultando a generalização da relação de dependência entre as variáveis salário a ser recebido ao final do mês e número de litros de óleo lubrificante vendidos e salário a ser recebido ao final do mês.

As dificuldades encontradas pelos alunos para uma resposta no registro tabular, também podem ser atribuídas ao fato de o enunciado da questão não ser esclarecedor. Por isso lançamos verbalmente o comando (e_1): "De que maneira vocês (os grupos) organizaram os salários dos mais de trinta frentistas do posto para que o contador possa explicar aos frentistas?" e provocamos uma discussão entre os pequenos grupos. Nesse momento, o aluno A3 (Grupo 5) propôs a construção de uma tabela e todos concordaram que esta seria a melhor opção.

Diante da aquiescência do grupo-classe, a professora solicitou que os grupos construíssem essa tabela da forma que desejassem:

P.: Já que vocês concordaram com a escolha de A3; que modelo de tabela vocês indicariam para o contador. Como seria essa tabela?

Todos os grupos responderam a questão (1e) como esperávamos; as apresentações, em transparências, foram iniciadas pelo Grupo 2:

O Grupo 2 construiu uma tabela com quatro colunas, todas com seus respectivos títulos. Utilizaram como entrada, na 1ª coluna, os nomes dos frentistas; na 2ª, as quantidades de litros de óleo lubrificante vendidos registradas em ordem decrescente; na 3ª coluna, o valor da comissão e; como saída, na 4ª coluna, os salários a receber ao final do mês.

Os valores máximo e mínimo apresentados na tabela foram, respectivamente, 20 litros ⇨ R$ 10,00 ⇨ R$ 410,00; e 10 litros ⇨ R$ 5,00 ⇨ R$ 405,00. Mesmo tendo apresentado, a principio, dificuldades em mobilizar a linguagem numérica tabular, após a discussão no pequeno grupo, o Grupo 2 construiu a tabela como previmos na análise preliminar. Perceberam, claramente, a relação de dependência quantidade de litros de óleo lubrificante vendidos ⇨ salário ao final do mês e que 400 é um parâmetro, não variável.

O Grupo 5 construiu uma tabela com oito colunas, todas com seus respectivos títulos. Utilizaram como entrada, na 1ª coluna, os nomes dos frentistas, seguidos da quantidade de litros de óleo lubrificante vendidos distribuídos em cinco colunas, uma para cada dia da semana, na 7ª coluna, o somatório destes valores; e como saída, na 8ª coluna, os salários a receber ao final do mês.

Os valores mínimo e máximo da tabela foram, respectivamente, 31 litros ⇨ R$ 415,50; e 106 litros ⇨ R$ 57,00. O cálculo correto para este último valor seria: 106 x 0,50 = 53,00 e 400,00 + 53,00 = 453,00. A escolha de valores muito altos para a quantidade de litros de óleo vendidos a serem multiplicados pelos R$ 0,50 pode ter dificultado o preenchimento correto da tabela. O grupo apresentou, a princípio, dificuldades em mobilizar a linguagem numérica tabular; porém, após discutir entre si construiu a tabela com os dados esperados. Perceberam, claramente, a relação de dependência quantidade de litros de óleo lubrificante vendidos ⇨ salário ao final do mês e que 400 é um parâmetro, não variável.

O Grupo 3 construiu uma tabela com três colunas, todas com seus respectivos títulos. Utilizaram como entrada, na 1ª coluna, os nomes dos frentistas registrados em ordem alfabética; na 2ª, as quantidades de litros de óleo lubrificante vendidas e; como saída, na 3ª coluna, os salários a receber ao final do mês.

Os valores mínimo e máximo da tabela foram, respectivamente, 20 litros ⇨ R$ 410,00; e 40 litros ⇨ R$ 480,00, usaram o símbolo de reticências indicando que estas variáveis podem assumir quaisquer valores. O grupo apresentou, a principio, dificuldades em mobilizar a linguagem numérica tabular, porém após as discussões, no pequeno grupo, construiu a tabela com os dados já esperados. Perceberam, claramente, a relação de dependência quantidade de litros de óleo lubrificante vendidos ⇨ salário ao final do mês e que 400 é um parâmetro, não variável.

E o Grupo 1 construiu uma tabela com três colunas, algumas com títulos, outras não. Utilizaram como entrada, na 1ª coluna, as quantidades de litros de óleo lubrificantes vendidos registradas em ordem crescente; na 2ª coluna, o valor da comissão e; como saída, na 3ª coluna, o salário ao final do mês.

Os valores mínimo e máximo da tabela foram, respectivamente, 5 litros ⇨ R$ 2,50 ⇨ R$ 402,50; e 400 litros ⇨ R$ 200,00 ⇨ R$ 600,00. O grupo apresentou, a princípio, dificuldades em mobilizar a linguagem numérica tabular, porém após a discutir entre si, construiu a tabela com os dados já esperados. Perceberam, claramente, a relação de dependência quantidade de litros de óleo lubrificante vendidos ⇨ salário ao final do mês e que 400 é um parâmetro, não variável.

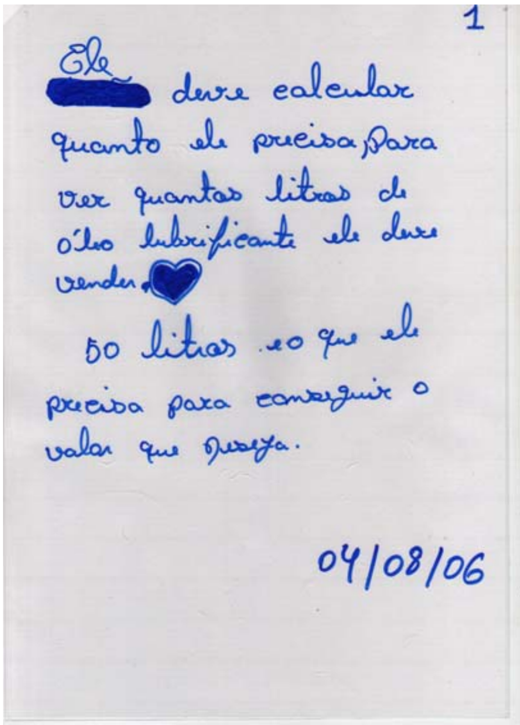
Conforme havíamos previsto, todos os grupos estabeleceram a relação de correspondência entre os valores das variáveis do problema, ou seja, cada valor atribuído à grandeza número de litros de óleo lubrificante vendidos está associado a um único valor para a grandeza salário a receber no final do mês. A partir da constatação do relacionamento entre as variáveis e a dependência entre elas, identificaram os cálculos que deveriam ser feitos para construir a tabela corretamente.

A apresentação e discussão das produções dos alunos, mediada pela professora, propiciou que apresentassem suas respostas em linguagem natural levando-os ao consenso de que na tabela construída deveria constar *a quantidade de litros de óleo lubrificante vendida por um frentista qualquer, o valor da comissão e o salário ao final do mês*, nessa ordem, confirmando as nossas expectativas.

Ao contrário do que cogitamos na análise preliminar, os alunos não apresentaram um registro algébrico-simbólico da função. Nas próximas atividades haverá oportunidade para o surgimento deste registro. As produções dos grupos referentes à questão (1e) apontam que o objetivo inicialmente proposto foi atingido, ou seja, relacionar as variáveis número de litros de óleo vendidos e salário a ser recebido ao final do mês e estabelecer o registro tabular da função previamente estabelecida, que era a nossa proposta mais provável.

É importante observar que os grupos 1, 2, 3 e 5, que foram mais precisos nas respostas desta questão, também o foram nas anteriores. Demonstraram mais exatidão nos cálculos numéricos, maior facilidade na generalização de conceitos e idéias e na interpretação dos enunciados dos problemas e maior facilidade na mobilização de conhecimentos prévios. Por exemplo, o Grupo 2, respondeu na questão (1d) que João, um dos frentistas do posto que deseja receber um salário final de R$ 600,00, deveria "vender 400 litros de óleo lubrificante para ganhar R$ 200,00 a mais no seu salário" e generalizou essa idéia respondendo na questão (1c) que para este frentista calcular um salário qualquer deve "subtrair o salário fixo de R$ 400,00 do salário que precisa ganhar, depois dividir pelos R$ 0,50 para obter a quantidade de litros de óleo que ele precisa vender". O Grupo 3, respondeu na questão (1a) que "Se em mês o frentista vender 10 litros ele receberá R$ 405,00" e generalizou essa idéia respondendo na questão (1b) que para um frentista qualquer calcular o seu salário mensal "[...] deve multiplicar a quantidade de litros vendidos, pela comissão que ele receberá por cada litro vendido que vale R$ 0,50 e somar o seu salário fixo que é R$ 400,00".

Apresentamos as produções, em transparências, dos Grupos 1, 2, 3 e 5, respectivamente, como exemplo de respostas para as questões (1c) e (1e):



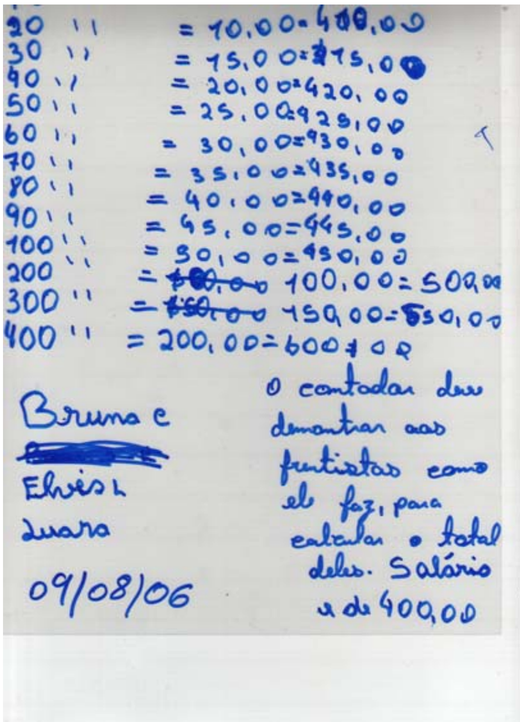
1

Ele [redacted] deve calcular quanto ele precisa para ver quantos litros de óleo lubrificante ele deve vender.

50 litros é o que ele precisa para conseguir o valor que deseja.

04/08/06

FIGURA 9: Produção do Grupo 1 para a questão (1c).



20 '' = 10,00 = 410,00
30 '' = 15,00 = 415,00
40 '' = 20,00 = 420,00
50 '' = 25,00 = 425,00
60 '' = 30,00 = 430,00
70 '' = 35,00 = 435,00
80 '' = 40,00 = 440,00
90 '' = 45,00 = 445,00
100 '' = 50,00 = 450,00
200 '' = ~~100,00~~ 100,00 = 500,00
300 '' = ~~150,00~~ 150,00 = 550,00
400 '' = 200,00 = 600,00

O contador deve demonstrar aos frentistas como ele faz, para calcular o total deles. Salário é de 400,00

Bruno e
[redacted]
Elvis e
Luara

09/08/06

FIGURA 10: Produção do Grupo 1 para a questão (1e).

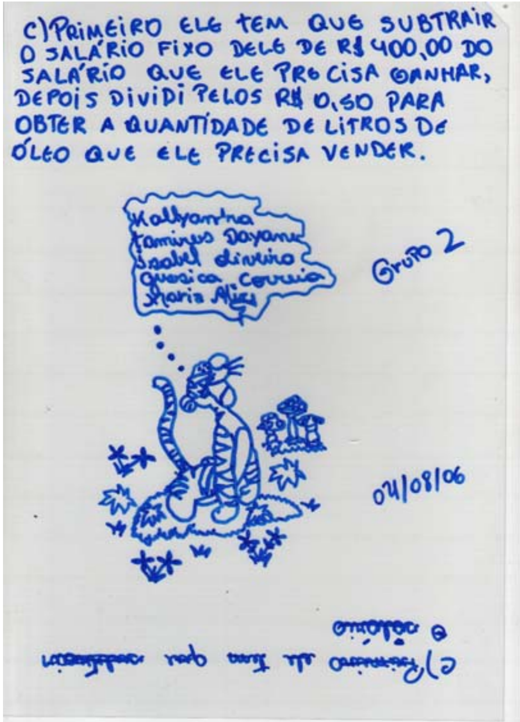
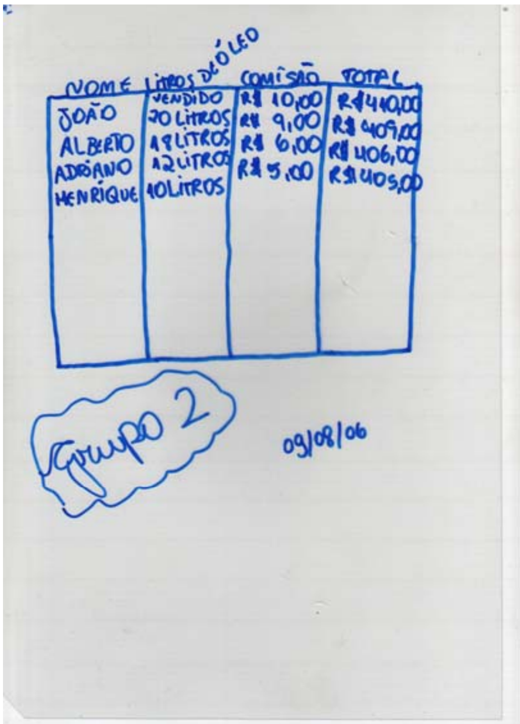
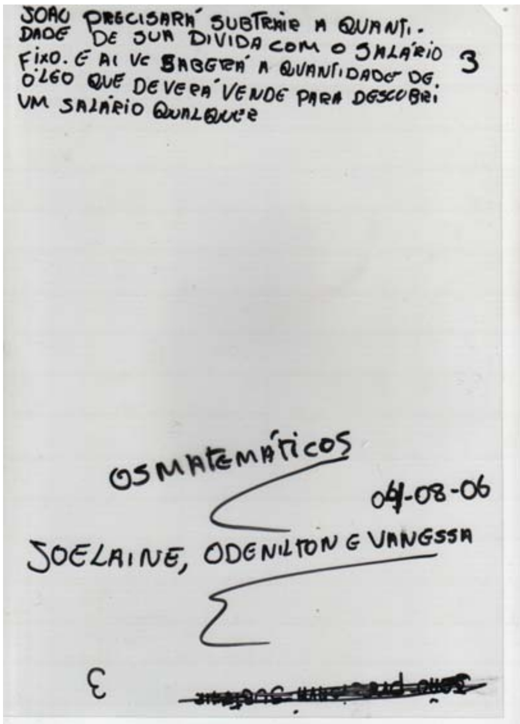


FIGURA 11: Produção do Grupo 2 para a questão (1c).



NOME	LITROS DE ÓLEO VENDIDO	COMISÃO	TOTAL
JOÃO	20 LITROS	R$ 10,00	R$ 410,00
ALBERTO	18 LITROS	R$ 9,00	R$ 409,00
ADRIANO	12 LITROS	R$ 6,00	R$ 406,00
HENRIQUE	10 LITROS	R$ 5,00	R$ 405,00

FIGURA 12: Produção do Grupo 2 para a questão (1e).



JOÃO PRECISARÁ SUBTRAIR A QUANTI-DADE DE SUA DIVIDA COM O SALÁRIO FIXO. E AI VC SABERÁ A QUANTIDADE DE ÓLEO QUE DEVERÁ VENDE PARA DESCOBRI UM SALÁRIO QUALQUER 3

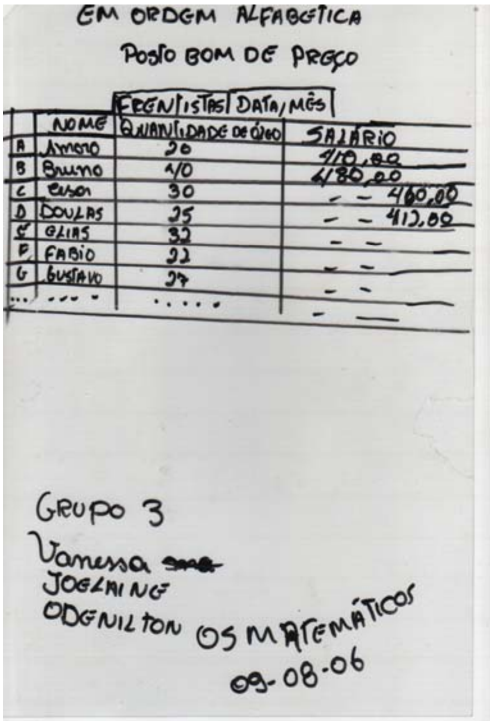
OS MATEMÁTICOS

04-08-06

JOELAINE, ODENILTON E VANESSA

E

FIGURA 13: Produção do Grupo 3 para a questão (1c).



EM ORDEM ALFABÉTICA

POSTO BOM DE PREÇO

FRENTISTAS | DATA/MÊS

	NOME	QUANTIDADE DE ÓLEO	SALÁRIO
A	Antonio	20	410,00
B	Bruno	40	480,00
C	Elson	30	- - 460,00
D	DOULAS	25	- - 412,00
E	ELIAS	32	- -
F	FABIO	22	- -
G	GUSTAVO	27	- -
...	...	.....	- -

GRUPO 3

Vanessa

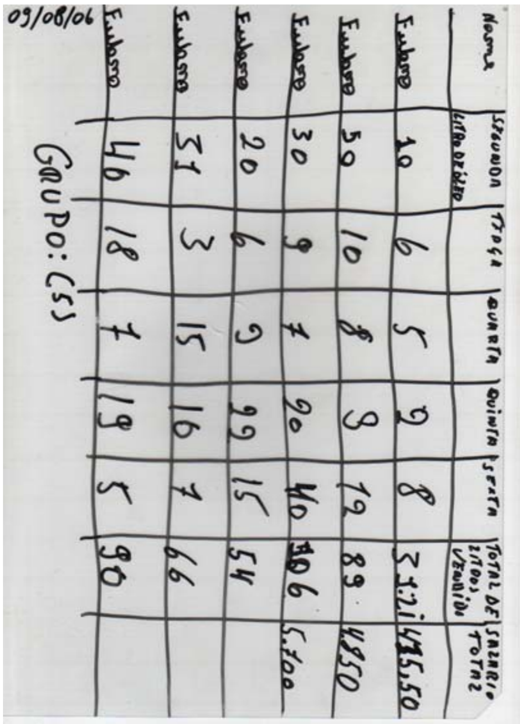
JOELAINE

ODENILTON OS MATEMÁTICOS

09-08-06

FIGURA 14: Produção do Grupo 3 para a questão (1e).

FIGURA 15: Produção do Grupo 5 para a questão (1c).



09/08/06

NOME	SEGUNDA LITRO DE ÓLEO	TERÇA	QUARTA	QUINTA	SEXTA	TOTAL DE LITROS VENDIDOS	SALÁRIO TOTAL
Fulano	10	6	5	2	8	31:21	475,50
Fulano	59	10	8	9	12	89	4850
Fulano	30	9	7	20	40	106	5.700
Fulano	20	6	9	22	15	54	
Fulano	31	3	15	16	7	66	
Fulano	46	18	7	19	5	90	

GRUPO: C5S

FIGURA 16: Produção do Grupo 5 para a questão (1e).

1.4. Análise dos resultados da atividade 1, questão (1f): sessão 4.

A quarta sessão da seqüência se desenvolveu em 16 de agosto de 2006, com duração de duas aulas de 50 minutos cada, em que compareceram 11 alunos.

(1f) Além disso, eles querem determinar quantos litros de óleo lubrificante cada um deverá vender para receber o salário que precisa. Como você poderá organizar estes dados de maneira que o contador possa explicar aos frentistas o salário a ser recebido por cada um deles?

Esta atividade tinha por objetivo levar os alunos a proporem a construção de uma tabela que relacionasse o salário a ser recebido ao final do mês pelos mais de trinta frentistas do posto com os respectivos valores das quantidades de litros de óleo vendidos, fazendo uma nova leitura da tabela da questão anterior. Com isso puderam realizar a conversão do registro em linguagem natural para o numérico, e deste para o tabular.

Para tanto, os alunos necessitariam recorrer à noção de dependência entre as variáveis quantidade de litros de óleo lubrificante vendidos e salário a ser recebido ao final do mês, que o salário base é invariável e à idéia de operação inversa, já trabalhadas em atividades anteriores.

Iniciamos nossos trabalhos com a leitura e discussão da questão (1e) resolvida na 3ª sessão.

Professora: Por que a tabela foi escolhida como a melhor opção para representar a relação do salário final dos mais de trinta frentistas, na questão (1e)? Pensem sobre isto e façam uma discussão entre vocês.

Nesse momento, os pequenos grupos recebem suas produções para discutirem sobre o questionamento da professora.

A.: (A9 - Grupo 3): A tabela é a representação mais fácil de ser observada. Lá tem todos os dados dos frentistas e é uma coisa simples observar esses dados em uma tabela.
P.: Quais são os dados que essa tabela precisa conter para que ela, realmente, traga as informações que o problema pede?

Alunos: O nome dos frentistas, a quantidade de litros de óleo vendidos e o salário no final do mês.

Construímos, no quadro, uma tabela de acordo com as informações comunicadas pelos alunos com o intuito de institucionalizar conhecimentos já trabalhados fazendo comparações com as produções dos grupos.

P.: Por que devemos escrever primeiro a quantidade de litros de óleo vendidos e depois o salário final?

A. (A9): Porque para calcular o salário final precisa saber a quantidade de litros vendidos.

A. (A1 - *Grupo 2*): Porque para descobrir o salário final precisa saber da quantidade de litros de óleo vendidos e multiplicar pela comissão de cinqüenta centavos.

P.: Atribuam um valor para a quantidade de litros de óleo vendidos por João, um dos frentistas desse posto?

A. (A1): Quarenta litros.

P.: Se ele vender quarenta litros de óleo como podemos calcular o salário ao final do mês?

A. (A1): Multiplicando os quarenta litros pelos cinqüenta centavos.

P.: Então se ele vender quarenta litros de óleo vai receber vinte reais. O que faço para calcular o salário ao final do mês?

A. (A1): Somar o salário fixo como os vinte reais. Por que a senhora não coloca na tabela uma coluna a mais pra saber quanto ele recebeu a mais de comissão?

P.: Vamos fazer isso? E o salário quanto vai ser?

A. (A4 – Grupo 1): Quatrocentos e vinte.

Nome dos frentistas	Quant. de litros de óleo vendidos	Comissão (em R$)	Salário no final do mês
João	40	20,00	420,00

P.: Nós podemos acrescentar, ou retirar, mais alguma informação nessa tabela?

Alunos: Não.

P.: Então esta é a melhor representação para a resposta da questão e. Agora eu vou colocar mais um valor para a quantidade de litros de óleo vendidos por um frentista. Por exemplo, Antônio fez a venda de vinte litros de óleo, qual será a comissão?

Alunos: Dez reais.

P.: Por que dez reais?

A. (A4): Por que ele vendeu vinte litros.

P.: Por que não quinhentos reais ou vinte e cinco reais?

Pretendíamos com este debate explorar a noção de proporcionalidade associando-a ao cálculo da comissão e a de variação entre grandezas. Particularmente, esperávamos que os alunos percebessem que dobrando a quantidade de litros de óleo a comissão também dobraria, ou dividindo a quantidade de litros de óleo por dois, a comissão seria reduzida à metade e assim sucessivamente.

A. (A4): Por causa do valor da comissão de cinqüenta centavos.
P.: E o valor do salário final?
Alunos: Quatrocentos e dez.

Acrescentamos mais uma linha à tabela com os valores comunicados pelos alunos:

Nome dos frentistas	Quant. de litros de óleo vendidos	Comissão (em R$)	Salário no final do mês
João	40	20,00	420,00
Antônio	20	10	410,00

P.: Que regularidades vocês observam nessa tabela? O que está acontecendo com estes valores? Vamos colocar um outro valor para a quantidade de litros de óleo. Por exemplo, José vende dez litros de óleo qual será o valor da sua comissão?
A. (A4 e A9): Cinco reais.
P.: Por que é tão fácil calcular esses cinco reais?
A. (A9): Porque é par.
P.: Por que é tão fácil calcular esses cinco reais?
A. (A4): Porque é a metade.
A. (A9): Porque é a metade do de cima [Antônio].
P.: Qual é o salário final?
Alunos: Quatrocentos e cinco.

Nome dos frentistas	Quant. de litros de óleo vendidos	Comissão (em R$)	Salário no final do mês
João	40	20,00	420,00
Antônio	20	10,00	410,00
José	10	5,00	405,00

P.: Que regularidades vocês observam nessa tabela? O que está acontecendo com estes valores?
A. (A7 – Grupo 1): Que além dos quatrocentos reais, dependendo da quantidade de litros de óleo ele ganha mais.
P.: Segundo A7, quanto mais ele vender litros de óleo, maior será o seu salário. Na tabela, se os valores da quantidade de litros de óleo diminuem, o que acontece com a comissão?
A. (A7): Diminui.
P.: E o salário no final do mês?

A. (A7): Diminui.
P.: Então existe aí uma relação de dependência. O salário final depende...
A. (A7): Da quantidade de litros de óleo vendidos.

Como pretendíamos, os alunos perceberam que existe uma regularidade nos valores da tabela e que a quantidade de litros de óleo vendidos faz variar o salário a receber ao final do mês. Tais idéias serão utilizadas na resolução da questão (1f).

Após o debate entregamos uma cópia da questão (1f) para ser resolvida sem a interferência da professora.

Possibilitamos que os alunos dos pequenos grupos confrontassem as possíveis soluções relativas à atividade. Os grupos 1 e 3 verbalizaram a idéia de que uma das possíveis estratégias seria de atribuir valores para a variável salário a receber no final do mês para, em seguida, determinar a quantidade de litros de óleo lubrificante que cada frentista deverá vender.

A professora socializa a estratégia dos grupos citados e explica que tal idéia é viável, porém os alunos deveriam generalizar os resultados encontrados para o cálculo da quantidade de litros de óleo lubrificante que cada frentista deverá vender supondo que eles recebam um salário qualquer ao final do mês.

Temos percebido, nos momentos de comunicar suas estratégias de resolução das atividades dessa seqüência, que os alunos, quando colocados numa situação de generalização entre duas grandezas que variam uma dependendo da outra, fazem a opção de atribuir valores numéricos para uma das variáveis, seja ela dependente ou independente, para, em seguida, determinar os valores da outra variável, e a partir daí generalizar os resultados encontrados.

Tal comportamento foi confirmado quando solicitamos aos grupos que resolvessem a questão (1c) generalizando a situação proposta para, em seguida, particularizá-la na questão (1d). Pretendíamos com estas questões consolidar a relação quantidade de litros de óleo lubrificante vendidos ⇨ salário ao final do mês. Observamos que a maioria dos grupos apresentou dificuldades em fazer abstrações. Diante desse comportamento, decidimos entregar a atividade (1d), que oferecia aos alunos dados concretos, para ser resolvida, juntamente, com a atividade (1c). Nosso intuito, invertendo a ordem de resolução das questões, era propiciar que os alunos fizessem inferências e comparações e, a partir de um caso particular, generalizassem a situação. Dessa forma os alunos conseguiram atingir o objetivo esperado.

Três grupos responderam a questão (1f) como esperávamos:

A relação quantidade de litros de óleo lubrificante vendidos ⇨ salário ao final do mês foi confirmada pelos grupos 2 e 3, ao responderem em linguagem natural que era preciso aplicar a subtração (propriedade inversa da adição) e a divisão (propriedade inversa da multiplicação) para que o contador possa calcular quantos litros de óleo lubrificante cada frentista, deve vender para receber o salário que precisa.

Os grupos 2 e 3 construíram as tabelas com quatro colunas, todas com títulos. Utilizaram como entrada, na 1ª coluna, os nomes dos frentistas; na 2ª, o valor do salário que o frentista precisa receber ao final do mês subtraído do salário fixo; na 3ª coluna, o resultado da coluna anterior dividido pela comissão de R$ 0,50 e; como saída, na 4ª coluna, a quantidade de litros de óleo lubrificantes vendidos registrados em ordem crescente.

Os valores mínimo e máximo apresentados na tabela do Grupo 2 foram, respectivamente, R$ 500,00 - R$ 400,00 = R$ 100,00 ⇨ R$ 100,00 : R$ 0,50 = 200 ⇨ 200 litros, e R$ 700,00 - R$ 400,00 = R$ 300,00 ⇨ R$ 300,00 : R$ 0,50 = 600 ⇨ 600 litros.

O valor apresentado na tabela do Grupo 3 foi R$ 550,00 - R$ 400,00 = R$ 150,00 ⇨ R$ 150,00 : R$ 0,50 = 300 ⇨ 300 litros. Outros valores não foram estabelecidos, usaram o símbolo de reticências indicando que esta variável pode assumir qualquer valor.

O Grupo 5 construiu a tabela com cinco colunas, todas com títulos. Utilizaram como entrada, na 1ª coluna, os nomes dos frentistas; na 2ª, o valor do salário que o frentista precisa receber ao final do mês; na 3ª coluna, o resultado da coluna anterior subtraído do salário fixo; na 4ª, o resultado da coluna anterior dividido pela comissão de R$ 0,50 e; como saída, na 5ª coluna, a quantidade de litros de óleo lubrificante vendidos registrados.

Os valores mínimo e máximo apresentados na tabela do Grupo 5 foram, respectivamente, R$ 430,00 ⇨ R$ 30,00 ⇨ R$ 30,00 : R$ 0,50 ⇨ 60 litros, e R$ 405,00 ⇨ R$ 15,00 ⇨ R$ 15,00 : R$ 0,50 ⇨ 10 litros.

Conforme havíamos previsto, a maioria dos grupos estabeleceu a relação de correspondência entre os valores das variáveis do problema, ou seja, cada valor atribuído à grandeza número de litros de óleo lubrificante vendidos está associado a um único valor para a grandeza salário a receber no final do mês. A partir da constatação do relacionamento entre as variáveis e a dependência entre elas, identificaram que deveriam aplicar a operação inversa da adição (a subtração) e da multiplicação (a divisão) para determinar quantos litros de óleo lubrificante cada um dos mais de trinta frentistas deveria vender para receber o salário que precisa, e assim construir a tabela corretamente.

Apesar do Grupo 1 ter construído a tabela da questão (1e) corretamente, e reafirmar, tanto nos debates quanto nos registros escritos, que compreendem a variação entre as grandezas envolvidas, apresentou dificuldades em relação à conversão do registro da linguagem natural para a tabular na questão (1f).

Contrariando nossas expectativas, os alunos desse grupo não conseguiram construir a tabela que relacionava o salário que os mais de trinta frentistas precisavam receber ao final do mês, com a quantidade de litros de óleo vendidos. E possível que tal dificuldade se deva ao fato de não terem consolidado a noção de operação inversa quando aplicada ao cálculo da quantidade de litros de óleo lubrificante, idéia trabalhada nas questões (1c) e (1d).

A causa deste fenômeno nos parece clara: para achar a quantidade de litros de óleo lubrificante o aluno deve *subtrair o salário fixo, R$ 400,00, do salário que o frentista deseja receber ao final do mês e dividir este resultado pelo valor da* *comissão de RS 0,50 paga por litro vendido deste produto*. Ou seja, os algoritmos mobilizados para determinar valores pertencentes ao domínio de uma função são mais complexos que aqueles mobilizados no cálculo dos elementos do conjunto imagem. Pois, no primeiro caso os alunos precisam aplicar a noção de operação inversa da adição e multiplicação na resolução de uma equação e no segundo, basta determinar o valor numérico de uma expressão algébrica.

Corroborando nossa afirmação citamos Markovits, Eylon & Buckeimer (1995), "[...] para achar as pré-imagens, o aluno tem de resolver uma equação, ao passo que as imagens se acham diretamente por substituição" (p. 64).

A discussão das produções dos alunos, mediada pela professora, propiciou que apresentassem suas respostas em linguagem natural, levando-os ao consenso de que na tabela construída deveria constar os nomes dos frentistas como entrada; o salário que o frentista precisa receber ao final do mês, na 2ª coluna; esse valor subtraído do salário fixo, na 3ª; e o quociente dessa diferença pelo valor da comissão, como saída, que corresponde à quantidade de litros de óleo lubrificante a ser vendida por cada frentista, dispostos nessa ordem, confirmando as nossas expectativas.

Decidimos registrar no quadro a resposta-consenso do grupo-classe construindo a tabela e escrevendo os valores atribuídos pelos alunos:

Nome dos frentistas	Salário no final do mês	Comissão (em R$)	Quantidade de litros de óleo vendidos
João	415,00	15,00	30

Como o grupo-classe efetivamente concluiu que a tabela era o registro mais adequado para organizar os cálculos realizados pelo contador, decidimos questioná-los quanto ao conhecimento de uma outra forma de representação do problema proposto. Nesse momento, a aluna A1 sugere representar a situação através de uma *fórmula*.

Cogitamos, em nossa análise preliminar, a possibilidade de acontecer de algum grupo produzir um registro algébrico-simbólico, como uma fórmula, para a questão (1f). Nessa sessão, o registro algébrico foi explorado em um debate coletivo em que os grupos expressaram em linguagem natural como o contador calcularia a quantidade de litros de óleo lubrificante que os frentistas precisariam vender para receber o salário que precisa.

Decidimos escrever no quadro as conclusões dos alunos fazendo o seguinte registro:

$$\left(\boxed{\text{Salário do frentista no final do mês}} \ \text{subtrair} \ \underbrace{\boxed{\text{R\$ 400,00}}}_{\text{Salário fixo}} \right) : \ 0{,}50 = \boxed{\text{Quantidade de litros de óleo vendidos}}$$

A partir do esquema elaborado proporcionamos um debate entre aluno-aluno e professora-aluno:

P.: A tabela é uma maneira de representar o problema, essa expressão, também, é uma outra maneira. Agora vamos tentar criar uma fórmula para representar o que está escrito na expressão. Para criar uma fórmula vocês precisam de quê?

A. (A1- Grupo 2): De letras para representar o que está escrito.

P.: Exatamente isso! Em Matemática essas letras do nosso alfabeto representam as grandezas do problema e são chamadas de...?

O grupo-classe se mantém em silêncio diante do questionamento. A professora então responde:

P.: Variáveis. Pensem em uma variável que nós poderíamos utilizar para representar o salário a receber no final do mês?

A. (A3 - Grupo 5): S.

P.: Então, o salário a receber ao final do mês pode ser representado pela letra S.

P.: Como eu represento a operação de subtração?

Alunos: Pelo sinal de menos.

P.: Uma representação para o salário fixo?

A. (A4 e A3): F.

P.: A comissão de cinqüenta centavos já está escrita. E uma variável para representar a quantidade de litros de óleo vendidos?

Alunos: V.

P.: Como vamos escrever a fórmula pensada por A1?
Alunos: S menos F, entre parênteses, dividido por cinqüenta centavos é igual à quantidade de litros de óleo vendidos.

Percebemos maior participação dos alunos dos grupos 1, 2 e 5, nesse debate; responderam corretamente os questionamentos em linguagem natural e participaram da conversão da situação do registro da linguagem natural para o algébrico. Alguns alunos encontraram dificuldades em responder em língua natural, mas terão oportunidade de realizar a conversão desse registro para o registro algébrico na questão (1g), quando faremos uma análise a posteriori mais detalhada.

As conclusões dos alunos resultaram no seguinte registro algébrico-simbólico para a situação:

$$(S - F) : 0{,}50 = V$$

P.: Essa expressão, ou essa fórmula, representa a situação apresentada no problema. Ou seja, a quantidade de litros de óleo vendidos é igual ao salário a receber ao final do mês subtraído do salário fixo, dividido pela comissão de cinqüenta centavos.
P.: Outra pergunta: Se eu quiser saber, qual é o salário ao final do mês se conhecer a quantidade de litros de óleo vendidos, representando a situação descrita na outra tabela [questão (1e)]? Como escreveríamos uma fórmula que representasse esse cálculo?
P.: Como faremos o cálculo do salário ao final do mês?
A. (A1): Tem que multiplicar a quantidade de litros de óleo vendidos por cinqüenta centavos....
P.: E depois?
A. (A4 e A1): Somar com o salário fixo.

Essa discussão resultou no registro:

Salário do frentista no final do mês	=	Multiplicar a quantidade de litros de óleo vendidos por R$ 0,50	somar	Salário fixo

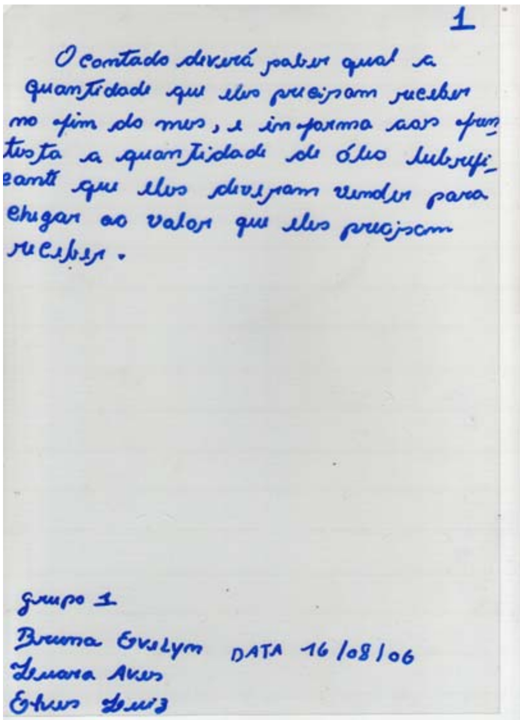
P.: Todos concordam? Como representaremos essa expressão utilizando variáveis?
Alunos: S é igual a quantidade de litros de óleo vendidos (V) multiplicado por cinqüenta centavos, e somar com o salário fixo (F).
P.: Mas, qual é o valor do salário fixo?
Alunos: Quatrocentos reais.

As conclusões dos alunos resultaram no seguinte registro algébrico-simbólico para a situação:

$$S = 0{,}50 \,.\, V + 400{,}00$$

Ao final da sessão, discutimos com o grupo-classe as respostas apresentadas por eles e procuramos enfatizar o papel das variáveis dependente e independente. Explicamos que as fórmulas encontradas são maneiras de representar as situações estudas nas atividades anteriores, e particularmente, a expressão S = 0,50 . V + 400,00 é uma representação da relação de dependência entre o salário a ser recebido ao final do mês e a quantidade de litros de óleo vendidos. Além disso, neste momento de diálogo, institucionalizamos a idéia de que uma situação que envolve grandezas que variam, uma dependendo da outra, pode ser representada por mais de um registro: a representação tabular e a representação através de uma fórmula, por exemplo.

Apresentamos as produções, em transparências, dos Grupos 1, 2, 3 e 5, respectivamente, como exemplo de respostas para a questão (1f):


1

O contado deverá saber qual a quantidade que eles precisam receber no fim do mes, e informa aos frentista a quantidade de óleo lubrificante que eles deveram vender para chegar ao valor que eles precisam receber.

Grupo 1
Bruna Evelyn DATA 16/08/06

FIGURA 17: Produção do Grupo 1 para a questão (1f).

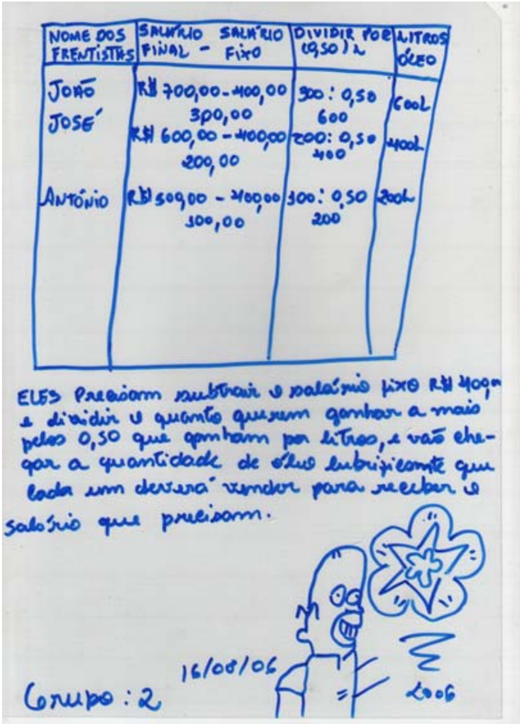


FIGURA 18: Produção do Grupo 2 para a questão (1f).

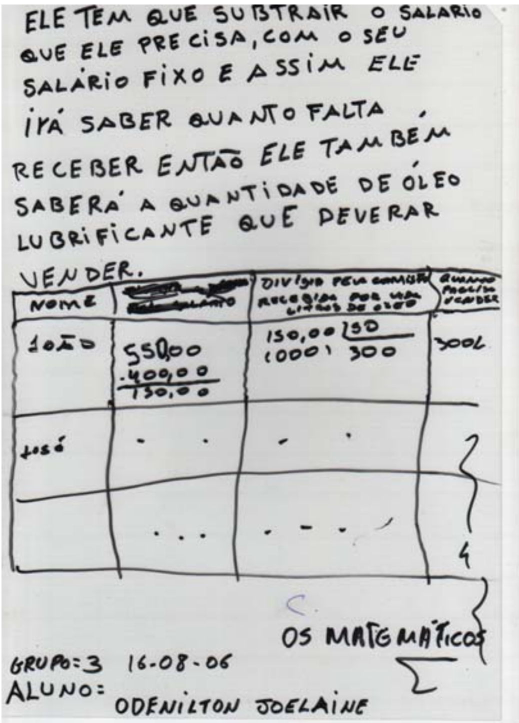
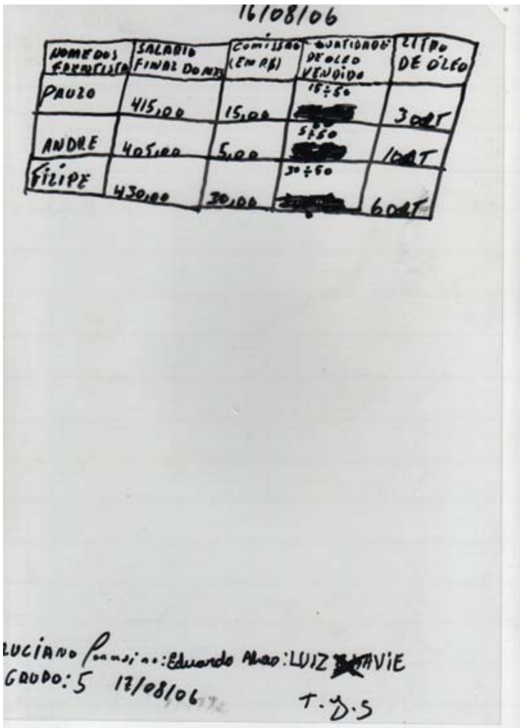


FIGURA 19: Produção do Grupo 3 para a questão (1f).



16/08/06

NOME DOS FRENTISTA	SALARIO FINAL DO MES	COMISSÃO (EM R$)	QUANTIDADE DE OLEO VENDIDO	LITRO DE ÓLEO
PAULO	415,00	15,00	15÷50 [redacted]	30LT
ANDRE	405,00	5,00	5÷50 [redacted]	10LT
FILIPE	430,00	30,00	30÷50 [redacted]	60LT

GRUPO: 5 17/08/06

T.D.S

FIGURA 20: Produção do Grupo 5 para a questão (1f).

1.5. Análise dos resultados da atividade 1, questão (1g): sessão 5.

A quinta sessão da seqüência se desenvolveu em 18 de agosto de 2006, com duração de duas aulas de 50 minutos cada, em que compareceram 12 alunos. Acreditamos que essa baixa freqüência se deva ao fato deste dia ser uma sexta-feira, e a freqüência neste dia da semana, normalmente, é baixa na escola escolhida.

Iniciamos nossos trabalhos entregando uma cópia do problema e da questão (1g), última atividade referente ao problema proposto na 1ª sessão.

(1g) De que maneira o contador do posto poderá apresentar aos frentistas uma outra solução que possa ser entendida e aplicada por eles sem que seja necessário recorrer ao próprio contador, a cada vez que precisarem aumentar a sua receita mensal, ou ao uso de tabelas ou de cálculos numéricos?

A questão (1g) foi proposta com o objetivo principal de que os alunos reafirmassem a relação entre as variáveis dependente e independente, relacionando-as ao conceito de função e que o salário base (R$ 400,00) funciona como um parâmetro fixo, portanto o que fará variar o salário mensal (S) é o número de litros de óleo lubrificante vendidos (L) e assim, realizassem a conversão do registro natural para o algébrico, escrevendo uma fórmula do tipo S = 400 + 0,50 . L.

Salientamos que tais idéias já foram trabalhadas na sessão anterior, em um debate coletivo, porém alguns grupos ainda apresentaram dificuldades em realizar a conversão da linguagem natural para algébrica.

Aqui retomamos um fenômeno didático já ocorrido em outras atividades dessa seqüência. Os alunos, pertencentes aos grupos 1 e 5, demoraram um tempo maior buscando uma solução para o problema e expressaram oralmente a necessidade de ajuda da professora. Acreditamos que tal atitude pode ser resultado de contratos didáticos firmados em outras situações de aprendizagem.

Corroborando nossa afirmação citamos Brito Menezes (2006), quando discute idéias defendidas por Schubauer-Leoni (1988):

> "[...] os indivíduos entram na relação didática com os 'hábitos' construídos a partir de outros contratos que já vivenciaram. Esses hábitos, ainda segundo esta autora, constituem certas *disposições duráveis* e talvez possamos pensar que são tais disposições que estão na base das expectativas e da adaptação ao contrato, bem como, igualmente, à sua inadaptação" (p. 25).

Para uma melhor compreensão por parte dos alunos fizemos alguns esclarecimentos sobre a não necessidade de uma resposta com cálculos numéricos ou construção de tabelas e solicitamos que discutissem mais no pequeno grupo.

Observamos que alguns grupos ainda apresentavam dificuldades em expressar algebricamente a relação entre as variáveis do problema. Não estavam conseguindo criar uma estratégia para produzir um registro algébrico-simbólico próprio, fazendo-se necessário proporcionar uma discussão coletiva.

Promovemos uma discussão relativa à atividade da sessão anterior no intuito de organizar os conhecimentos vivenciados, para que os alunos pudessem utilizá-los na resolução da questão (1g). Aquela atividade exigiu que os alunos mobilizassem o registro tabular, a partir da noção de dependência entre as variáveis do problema e a idéia de que o salário base do frentista é um parâmetro fixo. Buscávamos adaptar seus conhecimentos às condições de solução do novo problema (BROUSSEAU, 1996b), expressando algebricamente a relação matemática percebida, e assim, formalizar um pré-registro discutido no final da sessão anterior.

P.: Na aula anterior decidimos que além de representar o problema do cálculo do salário de cada frentista com uma tabela poderíamos também usar uma...?
A. (A1 – Grupo 2): Fórmula.
P.: Agora, eu gostaria que vocês representassem a maneira, a forma de calcular o salário dos frentistas sem o uso de tabelas ou cálculos numéricos. Qual é esta outra maneira?
A. (A9 – Grupo 3): A fórmula.
P.: A fórmula. Nós chegamos a essa conclusão. Agora, pensem como será essa fórmula?

Destacamos a produção de uma aluna do Grupo 2, que solicita nossa ajuda. Ao atendê-la, observamos que elaborou um esquema bem estruturado do cálculo da quantidade de litros de óleo vendidos por um frentista para receber um salário qualquer no final do mês, fazendo corretamente a conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica, como previmos em nossa análise preliminar. Entretanto, a aluna questiona a professora como deveria escrever a expressão que representa o cálculo do salário que o frentista deseja receber ao final do mês em função da quantidade de litros de óleo vendidos. Solicitamos a aluna que discutisse com seu grupo que estratégias poderiam ser mobilizadas para resolver o problema.

Registramos abaixo a expressão algébrica elaborada pela aluna.

(O valor que ele quer ganhar   subtrai   Valor fixo R$ 400,00) : 0,50 = Quantidade de litros de óleo

Fórmula = (V – F) : 0,50 = L

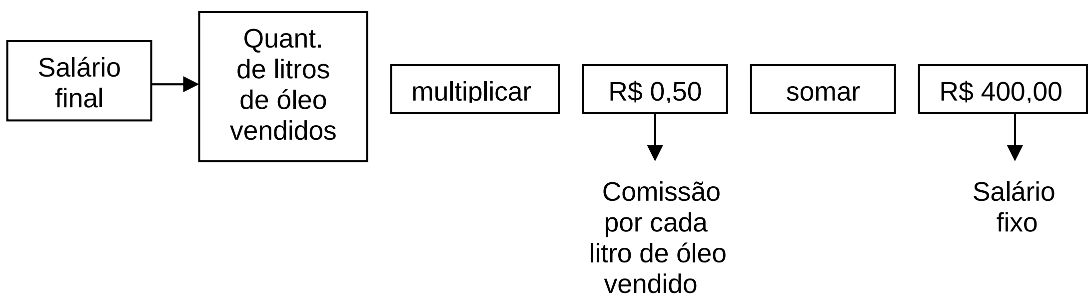
Achamos conveniente intervir, novamente, visto que os grupos 1 e 5 estavam sentindo dificuldades em avançar na resolução da atividade. Passamos, então, a registrar no quadro as conclusões dos alunos à medida que comunicavam suas concepções em relação aos conceitos em jogo.

P.: Como devo calcular o salário dos frentistas ao final do mês?
A. (A1): Multiplicar a quantidade de litros de óleo vendidos por cinqüenta centavos.
P.: O que estes cinqüenta centavos representam?
A. (A1): A comissão.
P.: A comissão por cada litro de óleo vendido. Depois o que preciso fazer?
A. (A1): Somar com o salário fixo.
P.: Quanto é o salário fixo?
A. (A8 – Grupo 3): Quatrocentos reais.
P.: O que determinamos com estes cálculos?
A. (A1): O salário no final do mês.
P.: Estas foram as conclusões a que chegamos diante de todas as atividades realizadas. Agora vocês devem representar essas idéias de uma outra maneira, que não seja através de uma tabela ou só de cálculos.
A. (A6 – Grupo 1): Usando letras e sinais.
P.: Exatamente utilizando letras e sinais como falou A6. Agora pensem como vão fazer isto!

Percebemos nessa discussão que os alunos verbalizaram todos os conceitos e procedimentos necessários para uma correta representação da função em questão, porém alguns apresentaram dificuldades em expressar suas concepções na forma escrita. Mais adiante, voltaremos a explicitar tal dificuldade.

Vale observar que o Grupo 2 (A1 e A11) e o Grupo 3 (A8, A9 e A10) estavam desenvolvendo um raciocínio semelhante ao esperado por nós em nossa análise preliminar. Acreditamos que se tivéssemos disponibilizado mais tempo para que concluíssem a atividade poderiam fazê-lo de maneira satisfatória. Porém os outros grupos verbalizaram dificuldades em compreender o enunciado do problema e, consequentemente, em mobiliar o registro algébrico.

Apresentamos os registros escritos no quadro, conforme os alunos verbalizavam suas concepções, na tentativa de que expressassem algebricamente o problema proposto:



Contrariando as nossas expectativas, alguns grupos não apresentaram com facilidade um registro algébrico-simbólico da função. Pelo esquema apresentado acima, observa-se que os alunos precisariam desenvolver vários procedimentos cognitivos entrelaçados entre si e acionar diversos conceitos matemáticos para expressar algebricamente a relação funcional das grandezas em jogo.

Citamos a seguir apenas alguns:

- Acionar conceitos estudados em outras situações de aprendizagem: princípio multiplicativo e aditivo com números decimais.
- Mobilizar conceitos já sistematizados em outras atividades dessa seqüência: grandezas, variação, variável dependente e independente, dependência (função), parâmetro, correspondência, proporcionalidade.
- Processar mentalmente várias informações e selecioná-las, fazendo as escolhas necessárias à solução do problema.
- Ter alguma habilidade para compreender e resolver problemas, mobilizando o pensamento funcional.

No que se refere às dificuldades dos estudantes em lidar com o conceito de função, em particular com a regra de correspondência entre as variáveis, Markovits, Eylon & Buckeimer (1995), consideram que "[...] os alunos têm dificuldade com tarefas que envolvem muitos passos [como as descritas acima], ignorando um ou mais. Que passos eles ignoram, depende da maneira como se formula o problema" (p. 57). Além disso, observaram em suas pesquisas que "[...] em questões envolvendo mais de uma etapa os alunos ignoravam a regra de correspondência" (p. 58). .

É possível que as dificuldades de conversão do registro natural para o algébrico, possam ainda estar relacionadas ao fato de não estarem habituados a realizar este tipo de conversão na resolução de problemas. É mais comum, no estudo de funções os alunos já conhecerem a expressão algébrica para, em seguida, de modo relativamente mecânico, trabalhar com ela.

Outros autores ao pesquisarem a dificuldade dos alunos em traduzir um problema contextualizado em símbolos algébricos, consideram que eles "Podem até ter facilidade na manipulação de equações, mas ainda assim ser incapazes de equacionar adequadamente enunciados de problemas" (SIMON & STIMPSON, 1995, p. 156).

Estes autores salientam ainda que "Embora se pedisse aos alunos que resolvessem o problema usando equações algébricas, [...]. Esses mesmos alunos eram capazes, geralmente, de resolver o problema por métodos aritméticos informais, como alguma forma organizada de supor e testar" (p. 156), porém eram incapazes de criar um modelo algébrico-simbólico.

Para nós os sujeitos dessa pesquisa apresentaram dificuldades semelhantes às descritas pelos autores citados. Verificamos que durante a discussão da resolução da atividade, os grupos 1, 2 e 3 confirmaram a compreensão da relação de dependência entre as grandezas salário mensal de um frentista e a quantidade de litros de óleo vendidos e que o salário base é um parâmetro fixo, que não varia. Apresentaram facilidade em mobilizar o registro numérico ao resolverem os problemas apresentados, porém apresentaram dificuldades em expressar algebricamente a função, apesar de reconhecerem a relação entre as variáveis dependente e independente.

Apresentamos as produções dos Grupos 1, 2, 3 e 5, respectivamente, como exemplo de respostas para as questões (1g), após a discussão no grande grupo e nos pequenos grupos:

O Grupo 1 mobilizou as linguagens natural e algébrica representando a função matemática com a expressão:

0,50 x Quantidade de LV + SF p/ dar o S final, onde: LV corresponde a Quantidade de litros vendidos, e S final ao Salário final.

Conforme havíamos previsto, os alunos confirmaram a idéia de que 400 é um parâmetro, ou seja, ele não varia; o que fará variar o salário é o número de litros de óleo vendidos escrevendo uma fórmula compatível com o problema.

Os grupos 2, 3 e 5 mobilizaram a linguagem algébrica representando a função matemática com as expressões, respectivamente:

(L . 0,50) + F = S, onde: L corresponde a quantidade de litros de óleo vendidos, F ao salário fixo e S ao Salário final.

Q . (0,50) + S = SF, onde: Q corresponde a quantidade de litros de óleo vendidos, S ao salário fixo e SF ao Salário final.

Q . (0,50) + S = F, onde: Q corresponde a quantidade de litros de óleo vendidos, S ao salário fixo e F ao Salário final.

Como esperávamos, os alunos realizaram a conversão entre os registros em linguagem natural e linguagem algébrica de maneira correta, também confirmaram a idéia de que 400 é um parâmetro e a compreensão da relação de dependência entre as grandezas salário mensal de um frentista e a quantidade de litros de óleo vendidos. Observamos que estes grupos escreveram expressões algébricas semelhantes à esperada por nós na análise prévia.

Vale destacar que houve uma tendência, em todos os grupos, de representar primeiro a variável independente na conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica, contrariamente ao trabalho normalmente desenvolvido em sala de aula. Acreditamos que isso se deve ao fato de que os alunos mobilizam a linguagem algébrica a partir da transcrição dos cálculos numéricos realizados na resolução de uma situação particularizada. Por exemplo, o salário ao final do mês de um frentista que vender 10 litros de óleo lubrificante é calculado resolvendo-se a expressão numérica (10 x 0,50) + 400,00 = 405,00, que pode ser generalizada para o cálculo do salário final de qualquer frentista a partir da expressão algébrica: (Q x 0,50) + 400,00 = S, em que a variável Q representa a variável independente e S, a variável dependente.

Ressaltamos que o Grupo 5 utilizou os cálculos abaixo como uma confirmação da veracidade da fórmula encontrada:

$$Q \,.\, (0{,}50) + S = F$$
$$200 \,.\, 0{,}50 + 400 =$$
$$100 + 400 =$$
$$500$$

Um tal recurso sugere-nos a tentativa de validação da expressão estabelecida.

Nessa sessão identificamos as fases de uma situação didática, que podem ser assim resumidas:

- Situação de ação: em que os alunos vão fabricar estratégias de resolução do problema. Por exemplo, fazendo tentativas; atribuindo valores para a variável independente e, assim, determinando os valores correspondentes da variável dependente.

- Situação de formulação: em que os alunos vão fazer uso de uma linguagem própria, expressando suas concepções em relação aos conceitos e procedimentos de resolução da atividade, de maneira que todos do pequeno grupo compreendam. Por exemplo, expressando verbalmente as idéias de variação entre grandezas e de invariabilidade do salário base, e uma possível fórmula para a função para em seguida, formalizá-la.

- Situação de validação: em que os alunos vão discutir sobre a veracidade das afirmações formuladas nas fases anteriores, propondo e acionando mecanismos de provas. Por exemplo, durante os debates com o grande grupo, os pequenos grupos puderam comunicar, comparar, fazer inferências para enfim, chegar uma resposta consenso. Esta fase, também pode ser percebida na produção do Grupo 5, ao atribuírem o valor de 200 litros para a variável Q (quantidade de litros de óleo lubrificante vendidos), verificando que valor de F (salário final) será R$ 400,00.

- Situação de institucionalização: em que o professor vai organizar o novo conhecimento. Nesse caso, o papel do professor é importante, pois é a partir das discussões por ele mediadas que o conhecimento se tornará universal. Por exemplo, ao término da atividade realizamos uma discussão dos métodos de resolução apresentados, dos conceitos acionados, das expressões algébricas encontradas, até chegarmos a uma resposta-consenso, para que pudessem ser utilizados nas atividades seguintes, ou mesmo em outras situações. Esta tem sido a nossa prática em todas as sessões desse estudo.

A professora faz a leitura da questão (1g) e inicia o debate coletivo. Nesse momento de discussão, procuramos desenvolver as fases discutidas no parágrafo anterior, comparando os procedimentos de resolução da atividade de cada grupo, discutindo sobre a veracidade das afirmações formuladas e, só então, sistematizamos os saberes construídos (BROUSSEAU, 1982).

P.: Nesta atividade vocês criaram uma outra representação dessa relação entre as duas variáveis do problema, o salário recebido ao final do mês e a quantidade de litros de óleo vendidos. Eu gostaria que vocês não alterassem as suas respostas durante as apresentações, porque no final das discussões chegaremos a uma conclusão do grupo.

Iniciam-se as apresentações das produções dos grupos com uma aluna do Grupo 3:

A. (A8): Ele tem que ter a quantidade de litros de óleo vendidos para multiplicar por cinqüenta centavos, depois somar como o salário fixo que é quatrocentos reais. No final eles terão o salário que desejam. A fórmula é: quantidade [de litros de óleo vendidos] multiplicada por cinqüenta [centavos] somado com o salário [fixo] é igual ao salário final.

P.: Quais foram as variáveis que o grupo de A8 utilizou na sua fórmula?

O grupo-classe não se pronuncia e a professora questiona:

P.: Eles utilizaram as variáveis SF para representar ...?

Alunos: O salário final.

P.: Utilizaram a variável Q para representar ...?

Alunos: A quantidade de litros de óleo.

A. (A1 – Grupo 2): Nós colocamos em cima o que a gente precisa fazer e embaixo, as letras que estão significando. No caso, a quantidade de litros de óleo representamos pela letra F, depois o sinal de multiplicação e os cinqüenta centavos mais o salário fixo, quatrocentos reais, representado pela letra F que é igual ao salário final, S. Quando a gente não tiver a quantidade de litros de óleo nós pensamos em outra fórmula: salário final (S) menos o salário fixo (quatrocentos reais) divido pelos cinqüenta centavos que é igual a quantidade de litros de óleo (L).

P.: Esse grupo pensou em duas fórmulas já discutidas na aula anterior: como calcular a quantidade de litros de óleo e como calcular o salário final. Muito bem!

A. (A5 – Grupo 1): A comissão por cada litro de óleo vendido é cinqüenta centavos, multiplicamos pela quantidade de litros de óleo vendidos (LV) mais o salário fixo, que é quatrocentos reais, para dar o salário final. As letras, SF são o salário fixo, os sinais + e x, e os números 400,00 e 0,50.

P.: Muito bem! Vocês tiveram a mesma idéia do outro grupo. Calcularam a comissão somaram com o salário fixo para calcular o salário final.

A professora apresenta para a turma a produção do Grupo 5:

P.: O grupo escreveu um titulo para a sua produção: representação de teoria algébrica. A palavra algébrica é derivada da palavra Álgebra. A Álgebra é a parte da Matemática que para representar uma situação, um problema, utiliza números e variáveis. Nesse problema, eles utilizaram as variáveis Q, a quantidade de óleo vendido; a variável S, o salário fixo e a variável F, o salário final. E como eles representaram a situação do problema?

Professora e alunos: A quantidade de litros de óleo vendidos multiplicado por cinqüenta centavos, que corresponde à comissão, somado com o salário fixo é igual ao salário final.

P.: O grupo deu um exemplo de aplicação da fórmula: se um frentista vende duzentos litros de óleo multiplicando pelos cinqüenta centavos recebe cem reais de comissão, mais os quatrocentos reais fixos, ele passa a receber naquele mês, quinhentos reais. Excelente! Parabéns!

A apresentação e a discussão das produções dos alunos propiciaram que apresentassem suas respostas em linguagem natural, levando-os ao consenso de que a expressão algébrica mais adequada para representar a situação proposta deveria apresentar *a quantidade de litros de óleo lubrificante vendida por cada frentista, multiplicada com o valor da comissão de R$ 0,50, que somada ao salário fixo, resulta no salário ao final do mês*, confirmando as nossas expectativas.

Apresentamos as produções, em transparências, dos Grupos 1, 2, 3 e 5, respectivamente, como exemplo de respostas para a questão (1g):

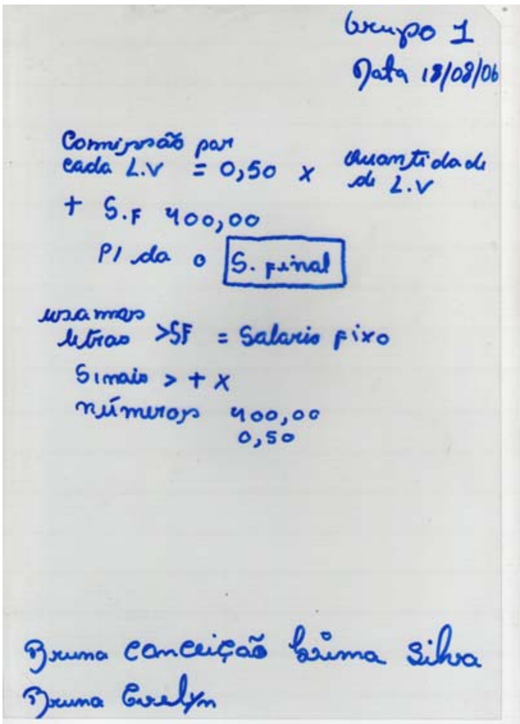


FIGURA 21: Produção do Grupo 1 para a questão (1g).

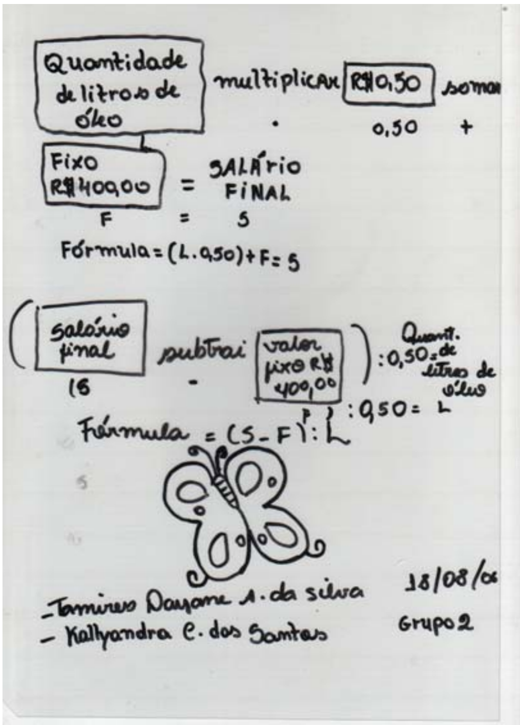
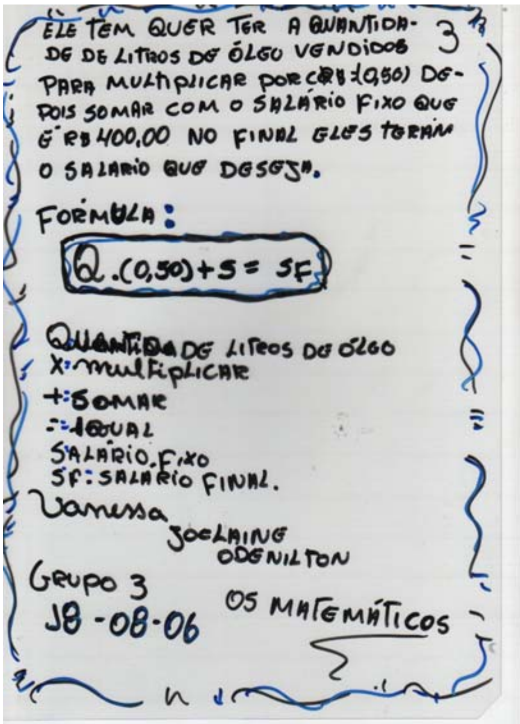


FIGURA 22: Produção do Grupo 2 para a questão (1g).



ELE TEM QUER TER A QUANTIDA-
DE DE LITROS DE ÓLEO VENDIDOS 3
PARA MULTIPLICAR POR R$ (0,50) DE-
POIS SOMAR COM O SALÁRIO FIXO QUE
É R$ 400,00 NO FINAL ELES TERÃO
O SALARIO QUE DESEJA.

FORMULA:

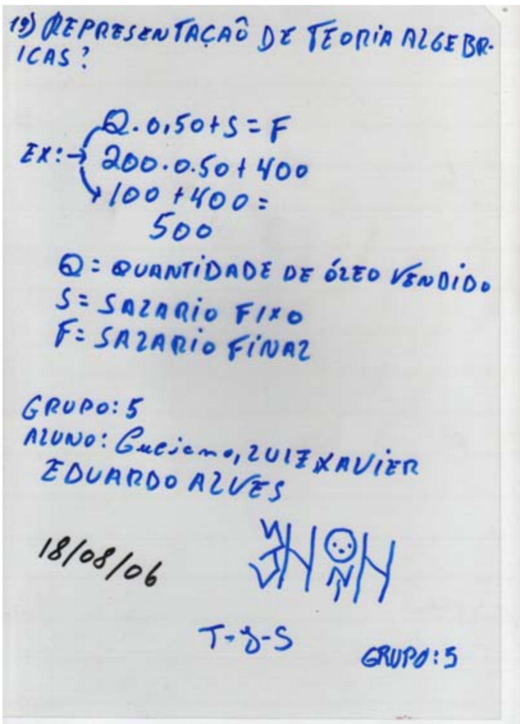
$\boxed{Q.(0,50)+S = SF}$

QUANTIDADE DE LITROS DO ÓLEO
X: multiplicar
+: SOMAR
=: IGUAL
SALARIO FIXO
SF: SALARIO FINAL.

Vanessa
JOELAINE
ODENILTON

Grupo 3
18-08-06
OS MATEMÁTICOS

FIGURA 23: Produção do Grupo 3 para a questão (1g).



1g) REPRESENTAÇÃO DE TEORIA ALGEBR-
ICAS?

Q.0,50+S=F
EX: 200.0.50+400
100+400=
500

Q: QUANTIDADE DE ÓLEO VENDIDO
S: SALARIO FIXO
F: SALARIO FINAL

GRUPO: 5
ALUNO: Gueiemo, LUIZ XAVIER
EDUARDO ALVES

18/08/06

T-G-S
GRUPO: 5

FIGURA 24: Produção do Grupo 5 para a questão (1g).

2. Análise dos resultados da atividade 2

2.1. Análise dos resultados da atividade 2, questão (2a): sessão 6.

A sexta sessão da seqüência se desenvolveu em 25 de agosto de 2006, com duração de duas aulas de 50 minutos cada, em que compareceram 18 alunos.

As questões dessa atividade foram elaboradas com base no texto a seguir:

> Sr. André, dono do posto em que João trabalha, precisa transportar óleo combustível do Porto de SUAPE para abastecer seus quatro estabelecimentos comerciais. Ele tem as opções de transportar sua carga por trem ou caminhão. Nos dois casos, ele tem um custo fixo para preparar a carga (embalagem) e um custo variável por quilômetro transportado, que depende do meio de transporte utilizado. Em caminhões, o custo da embalagem é mais baixo, R$ 100,00, pois basta cobrir a carga com plástico. Para transportar o óleo combustível por trem, o custo da embalagem é mais caro, R$ 120,00, pois a carga precisa ser colocada em suportes metálicos, para ser acomodada nos vagões. Para o transporte em caminhões, a empresa transportadora cobra R$ 0,80 por quilômetro transportado para cobrir as despesas com o frete, enquanto para o transporte ferroviário o custo é de R$ 0,40 por quilômetro transportado.

Iniciamos nossos trabalhos entregando uma cópia do problema aos alunos para que fizessem uma primeira leitura nos pequenos grupos, para que, em seguida, realizássemos uma discussão coletiva.

Durante a leitura e interpretação da situação pela professora e pelos alunos, estes puderam compreender o significado de alguns termos presentes no texto como: custo da embalagem, custo fixo, custo variável por quilômetro transportado, suportes metálicos.

Em seguida, entregamos uma cópia da questão (2a) para ser resolvida sem a interferência da professora.

(2a) Qual a forma mais barata de transportar o óleo combustível do Porto de SUAPE para os postos de gasolina do Sr. André?

A questão (2a) foi proposta com o objetivo principal de que os alunos verificassem a relação entre as grandezas custo do transporte por trem ou caminhão, relacionando-as ao conceito de função, compreendendo que os custos das embalagens (R$ 120,00 e R$ 100,00) funcionam como parâmetros fixos, portanto o que fará variar o custo do transporte é a quilometragem e assim, realizassem a conversão do registro natural para o numérico e deste para o tabular. Esperávamos que os alunos desenvolvessem uma estratégia própria de comparação entre as grandezas custo do transporte por trem e caminhão para decidir "Qual a forma mais barata de transportar o óleo combustível do Porto de SUAPE para os postos de gasolina do Sr. André?".

Mais especificamente, pretendíamos que os alunos realizassem a conversão da linguagem natural para o registro tabular de cada situação (custo do transporte por trem e por caminhão) e, a partir da comparação das tabelas, percebessem que se a quilometragem for maior que 50 km o custo do transporte por trem é mais barato; se for menor que 50 km o custo do transporte por caminhão será o mais barato. Isto pode ajudar à conversão para a linguagem gráfica na próxima atividade.

Supúnhamos que alguns grupos poderiam mobilizar o registro algébrico, estabelecendo a relação entre as grandezas custo do transporte por trem (T) e por caminhão (C), com a grandeza quilometragem (Q), escrevendo uma fórmula para cada situação, do tipo: $T = 120 + 0{,}40.Q$ e $C = 100 + 0.80.Q$. Porém acreditamos que o registro mais provável seja a representação tabular.

Optamos por não atribuir valores para a quilometragem na questão (2a), caso contrário eles poderiam trabalhar somente no domínio aritmético dificultando a conversão da linguagem natural para a algébrica. Pretendíamos que os grupos acionassem as noções de variação e dependência entre grandezas, de parâmetro, de conversão entre as diferentes representações de uma função e generalizassem essas idéias, já trabalhadas nas atividades anteriores, para atingir o objetivo esperado nessa sessão.

Após o término da leitura do problema e da questão (2a), alguns alunos manifestaram suas posições, a saber:

- De trem é mais barato.
- Quanto é a distância?
- A gente pode considerar qualquer distância.
- De trem é mais barato, porque o valor da quilometragem é mais barato.

Estes posicionamentos indicam que os alunos perceberam que o custo do transporte é função da quilometragem e do custo da embalagem.

Enquanto circulávamos pela sala era possível perceber que os alunos estavam atentos à resolução da atividade. Os grupos mostraram-se realmente motivados e podíamos ouvi-los socializando dúvidas, discutindo a questão e confrontando estratégias de resolução do problema. Provavelmente isto se deva ao fato de estarem se adaptando ao trabalho em grupo e tomaram consciência de suas responsabilidades diante do contrato negociado. Verificamos que os alunos trabalharam do início ao fim da aula, porém os grupos 4 e 5 têm apresentado um histórico escolar com evasões e muitas faltas em nossas atividades e assim, também, possuem muita dificuldade nos conteúdos matemáticos, especialmente em operar com números racionais na forma decimal.

Alguns alunos nos perguntaram qual a distância dos postos de gasolina para o Porto de SUAPE? Respondemos que atribuíssem distâncias diferentes para os quatro postos:

P.: Senhor André tem quatro postos. A distância de cada posto para o Porto de SUAPE, claro, que é diferente. Considerem, por exemplo, que ele tem um posto aqui em Boa Viagem, um em Olinda, outro em Camaragibe...
A. (A4 – Grupo 1): Mas assim complica, também!
P.: Ele pode ter um posto junto do outro???

A. (A4 – Grupo 1): Não! Pode ser de dez, cinco... quilômetros?
P.: Claro que pode. Faça assim! São quatro postos em distâncias diferentes.

Apresentamos as respostas dos Grupos 1, 2, 3 e 4 como exemplo de estratégias de resolução da questão (2a):

Esperávamos que os grupos atribuíssem valores quaisquer para a grandeza quilometragem e quando comparassem os resultados obtidos para os custos de transporte do óleo combustível por trem e por caminhão, percebessem que se a quilometragem for maior que 50 km o custo do transporte por trem é mais barato; se for menor que 50 km o custo do transporte por caminhão será o mais barato.

Contrariando as nossas previsões, os grupos 1, 2 e 3 concluíram que o custo do transporte do óleo combustível do Porto de SUAPE para os quatro postos de gasolina do Sr. André será mais barato se for realizado por trem.

O Grupo 1 justificou sua escolha atribuindo quatro valores arbitrários para a variável independente (quilometragem), determinando os, respectivos, valores para a variável dependente (custo do transporte).

Realizaram os seguintes cálculos referentes ao custo do transporte por trem: 10 km ⇨ 4,00; 12 km ⇨ 4,80; 14 km ⇨ 5,60; 18 km ⇨ 7,20; porém, efetuaram as adições; 4,00 + 4,80 + 5,60 + 7,20 = 21,60, realizando um único cálculo para o custo do transporte de trem, 120,00 + 21,60 = 141,60. Tais procedimentos sugerem que tiveram a concepção errada de que estariam determinando o custo do transporte de óleo combustível por trem para os quatro exemplos dados. Isto pode ser afirmado, pois escreveram em sua atividade: "Ele rodou 56 km para chegar ao último posto.". Percebemos que, por engano, escreveram 56 km em lugar de 54 km, pois 10 km + 12 km + 14 km + 18 km = 54 km.

Os alunos desse grupo, não compreenderam o enunciado do problema e não perceberam que realizando este somatório estariam determinando o cálculo do transporte de óleo combustível por trem para um único posto que diste 54 km do Porto de SUAPE, pois 10 km + 12 km + 14 km + 18 km = 54 km, e 54 x R$ 0,40 + R$ 120,00 = R$ 141,60. Assim como, 54 x R$ 0,80 + 100 = R$ 143,20.

Apresentamos um recorte do diálogo entre duas componentes do Grupo 1, que justifica o motivo pelo qual registraram apenas o cálculo do custo do transporte por trem em sua atividade, caracterizando a pouca compreensão do problema:

A. (A6): O problema pergunta: qual a forma mais barata? É preciso colocar os dois cálculos para ela [a professora] saber por que foi que a gente escolheu o trem.
A. (A4): Então, qual é a forma mais barata? Se a agente escolher o caminhão coloca o cálculo do caminhão, se escolher o trem coloca o cálculo do trem.
A. (A6): Não é pra colocar as duas, não?!
A. (A4): Não, é só pra colocar uma! [A aluna lê para a colega o enunciado do problema.] Qual a forma mais barata de transportar o óleo combustível do Porto de SUAPE para os postos de gasolina do Sr. André? É pra escolher uma só! Ela deu duas opções, de trem e de caminhão. Qual a mais barata? E qual a que gasta mais?

Ao assistirmos a filmagem desta sessão verificamos que o Grupo 1 efetuou os cálculos referentes ao custo do transporte do óleo combustível por caminhão em uma folha de caderno e não nos entregou. Embora tenhamos solicitado que as respostas de todas as atividades deste estudo deveriam ser registradas apenas na folha entregue por nós.

Supomos que para o cálculo do custo do transporte do óleo combustível por caminhão o Grupo 1 deve ter atribuído os mesmos valores para a grandeza quilometragem utilizados para concluir que a forma mais barata de transporte do óleo combustível seria por trem: 10 km ⇨ R$ 8,00; 12 km ⇨ R$ 9,60; 14 km ⇨ R$ 11,20; 18 km ⇨ R$ 14,40; em seguida, efetuaram as adições, 8,00 + 9,60 + 11,20 + 14,40 = 43,20 e 100,00 + 43,20 = 143,20.

Supomos ainda que, ao compararem os resultados dos custos de transporte (considerando o somatório dos fretes por trem, R$ 21,60 e por caminhão, R$ 43,20), verificaram que o custo do transporte por trem (R$ 141,60) foi menor que por caminhão (R$ 143,20).

O Grupo 2 justificou sua escolha atribuindo quatro valores arbitrários para a variável independente (quilometragem): 50 km, 20 km, 40 km e 10 km. Porém, adicionaram estes valores e consideraram que a quilometragem a ser percorrida seria de 120 km. Tal procedimento também sugere que tiveram a concepção errada de que estariam determinando o custo do transporte de óleo combustível para os quatro exemplos dados.

Realizaram os seguintes cálculos referentes ao custo do transporte por caminhão para o percurso de 120 km: 120 x 0,80 = 96,00 e 96,00 + 100,00 = 196,00. E por trem: 120 x 0,40 = 48,00 e 48,00 + 120,00 = 168,00.

Ao compararem estes resultados (considerando um único valor para a quilometragem, 120 km) concluíram que o custo do transporte por trem (R$ 168,00) foi menor que por caminhão (R$ 196,00).

O Grupo 3 justificou sua escolha atribuindo, unicamente, o valor de 200 km para a variável independente (quilometragem). Realizaram os seguintes cálculos referentes ao custo do transporte por caminhão: "Embalagem + Frete; Caminhão = E 100,00 + F 200 km x 0,80 = R$ 260,00. E por trem: Trem = E 120,00 + F 200 km x 0,40 = R$ 200,00".

Ao compararem estes resultados (considerando um único valor para a quilometragem, 200 km) concluíram que o custo do transporte por trem (R$ 200,00) foi menor que por caminhão (R$ 260,00).

O Grupo 4 concluiu que o custo do transporte do óleo combustível será mais barato se for realizado por caminhão. Justificou essa escolha atribuindo quatro valores arbitrários para a variável independente (quilometragem), determinando os, respectivos, valores para a variável dependente (custo do transporte).

Realizaram os seguintes cálculos referentes ao custo do transporte do óleo combustível por caminhão e por trem, respectivamente: "10 quilômetros ele gasta 100 + 0,80 = 100.080; 20 quilômetros ele gasta 100 + 0.160 = 101.0.60; 30 quilômetros ele gasta 100 + 0.320 = 103.0.20; 40 quilômetros ele gasta 100 + 0.640 = 106.0.40. Se ele fosse de trem por quilômetro ele gastava muito mais: 10 quilômetros ele gasta 120 + 0,40 = 120.040; 20 quilômetros ele gasta 120 + 0.80 = 120.0.80; 30 quilômetros ele gasta 120 + 0.160 = 121.0.60; 40 quilômetros ele gasta 120 + 0.320 = 123.0.20".

Percebemos que este grupo tem bastante dificuldade em operar com números racionais na forma decimal. Ao compararem, um a um, os resultados encontrados para o custo do transporte por caminhão e por trem concluíram que o primeiro é mais barato que o segundo.

As produções dos grupos 1, 2, 3 e 4 apontam que o objetivo inicialmente proposto foi atingido parcialmente. Confirmando as nossas previsões, os alunos relacionaram as grandezas custo do transporte e quilometragem, atribuindo valores arbitrários para a variável independente. Perceberam claramente, que os custos das embalagens (R$ 120,00 e R$ 100,00) funcionam como parâmetros fixos, portanto o que fará variar o custo do transporte é a quilometragem. Com os procedimentos realizados, ocorreu a conversão do registro em linguagem natural da função para o registro numérico, que também era a nossa proposta. Porém, contrariando nossas expectativas, não ocorreu a conversão do registro numérico para o tabular.

No caso dos grupos 1, 2 e 3, acreditamos que isso se deve ao fato de terem optado pela estratégia de atribuir apenas um valor para a variável independente (54 km, 120 km e 200 km, respectivamente). Consequentemente, não perceberam a necessidade de compararem alguns possíveis resultados dos custos de transporte do óleo combustível por trem e por caminhão. A falta deste procedimento, isto é, da *comparação dos custos*, não permitiu a conversão do registro numérico para o tabular e a constatação de que se a quilometragem for maior que 50 km o custo do transporte por trem é mais barato e se for menor que 50 km o custo do transporte por caminhão será o mais barato.

Supomos que o Grupo 4 não organizou os dados encontrados em uma tabela, pelo fato dos seus componentes não terem compreendido o enunciado do problema e por não estarem sendo assíduos às sessões desta pesquisa. No início desta sessão destacamos o desempenho e a freqüência irregulares desse grupo nesse estudo.

Os grupos não expressaram as relações algébricas que representam o custo do transporte por trem e por caminhão em função da quilometragem, como foi cogitado. Mas, o Grupo 3 apresentou duas relações que se assemelham às expressões algébricas esperadas:

Fórmula = Embalagem + Frete

Caminhão = E 100,00 + F 200 km x 0,80 = R$ 260,0

Trem = E 120,00 + F 200 km x 0,40 = R$ 200,00

Como havíamos previsto, o Grupo 5 escreveu uma expressão algébrica para a situação relacionando as variáveis dependente e independente, demonstrando que compreendem que os custos das embalagens (R$ 120,00 e R$ 100,00) funcionam como parâmetros fixos, portanto o que fará variar o custo do transporte é a quilometragem.

Salientamos que um aluno do Grupo 5, tomou para si a responsabilidade de conduzir as discussões das possíveis estratégias de resolução das atividades deste estudo, assim como de respondê-las. Verificamos nos registros de sua atividade, que este aluno substituiu, por engano, na fórmula encontrada, o custo da embalagem do transporte por caminhão (R$ 100,00) e o custo por quilômetro rodado de trem (R$ 0,40), porém efetuou os cálculos corretamente.

A seguir, apresentamos a fórmula expressa pelo grupo, em que nomearam: km ⇨ Quilômetro, V ⇨ Valor por quilômetro percorrido e C ⇨ Custo variável:

(km . V) = + C =

(8 . 0,40) = + 100

6,40 + 100 =

R$ 106,40

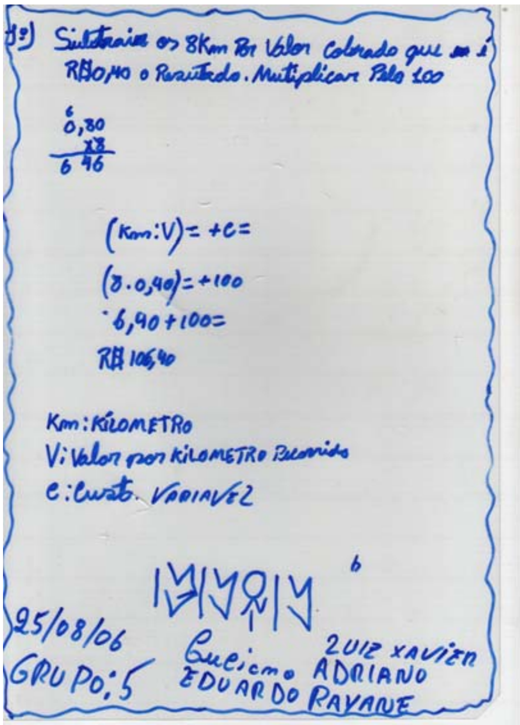


FIGURA 25: Produção do Grupo 5 para a questão (2a).

Ao final da sessão, não discutimos com o grupo-classe as respostas encontradas devido ao término do horário de aula. Combinamos que na sessão seguinte os grupos apresentariam suas produções e faríamos as discussões dos resultados para chegarmos a uma resposta-consenso.

2.2. Análise dos resultados da atividade 2, questão (2b): sessão 7.

A sétima sessão da seqüência se desenvolveu em 30 de agosto de 2006, com duração de duas aulas de 50 minutos cada, em que compareceram 17 alunos. Vale ressaltar que todos os componentes do Grupo 5 faltaram às atividades desta sessão.

Iniciamos nossos trabalhos com a leitura do problema e da questão (2a) resolvida na 6ª sessão. Em princípio, nesta sessão, predominou uma situação de formulação em que cada grupo explicitou suas concepções em relação aos conceitos mobilizados e estratégias estabelecidas, de maneira que o grupo-classe compreendesse os cálculos numéricos utilizados para determinar o custo do transporte do óleo combustível em função da quilometragem.

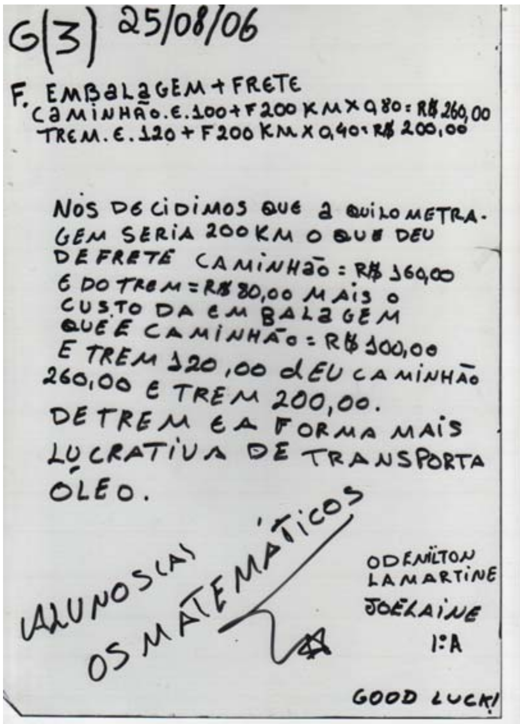
Professora: Qual dos grupos gostaria de começar a apresentação da sua produção?

Uma aluna do Grupo 3 inicia as apresentações:

A. (A8): A fórmula tem a Embalagem mais o Frete. Nós decidimos que a quilometragem seria duzentos quilômetros. O que deu de frete de caminhão, cento e sessenta reais, e de trem, que deu oitenta reais; mais o custo da embalagem que de caminhão é igual a cem reais e de trem, cento e vinte reais. Deu um custo de duzentos e sessenta reais de caminhão, e de trem, duzentos reais. De trem é a forma mais lucrativa de transportar o óleo.

P.: A idéia deles foi fazer os cálculos usando duzentos quilômetros. O frete mais a embalagem vai dar uma fórmula, esse F significa Fórmula, é isso?

A. (A2): A fórmula é o frete mais a embalagem.


G(3) 25/08/06

F. EMBALAGEM + FRETE
CAMINHÃO. E. 100 + F 200 KM X 0,80 = R$ 260,00
TREM. E. 120 + F 200 KM X 0,40 = R$ 200,00

NÓS DECIDIMOS QUE A QUILOMETRA-
GEM SERIA 200 KM O QUE DEU
DE FRETE CAMINHÃO = R$ 160,00
E DO TREM = R$ 80,00 MAIS O
CUSTO DA EMBALAGEM
QUE É CAMINHÃO = R$ 100,00
E TREM 120,00 DEU CAMINHÃO
260,00 E TREM 200,00.
DE TREM É A FORMA MAIS
LUCRATIVA DE TRANSPORTA
ÓLEO.

ALUNOS(AS)
OS MATEMÁTICOS

ODENILTON
LAMARTINE
JOELAINE
1ºA

GOOD LUCK!

FIGURA 26: Produção do Grupo 3 para a questão (2a).

Explicamos para o grupo-classe que o Grupo 3 concluiu que *se* for atribuído o valor de 200 quilômetros para a quilometragem o custo do transporte por trem (R$ 200,00) é mais barato do que por caminhão (R$ 260,00). Além disso, a fórmula que expressa a situação será estabelecida a partir da adição, preço pago pela quilometragem rodada (frete) mais o custo da embalagem.

P.: Então, se a quilometragem for igual a duzentos quilômetros será mais econômico para o Sr. André fazer o transporte do óleo por trem. Mas existe este "se" nesta afirmação! E se a distância for menor do que duzentos quilômetros ou se for maior?

A. (A2): É a mesma coisa. De trem vai ser sempre mais barato.

P.: Nós podemos afirmar que é a mesma coisa sem provar que é a mesma coisa? A idéia do grupo está ótima! Mas, o que podemos afirmar com estes cálculos é que para calcular o valor do custo do transporte, temos que multiplicar o preço pago por cada quilômetro pela quilometragem, e depois somar com a embalagem.

Nosso intuito era que após a confrontação das produções de cada grupo e a discussão quanto à veracidade das afirmações formuladas (situação de validação), o grupo-classe concluísse que se a quilometragem for maior que 50 km o custo do transporte por trem é mais barato e se for menor que 50 km o custo do transporte por caminhão será o mais barato. Visto que os grupos 1, 2 e 3 concluíram que o custo do transporte por trem é mais barato e o Grupo 4 concluiu que o custo do transporte por caminhão será o mais barato.

A. (A1 – Grupo 2): Nós tivemos praticamente a mesma idéia deles. A gente deu o valor de cento e vinte quilômetros para a quilometragem, depois multiplicou pelos oitenta centavos, pagos a cada quilometro. Apesar de você pensar que de caminhão vai sair mais em conta por causa do valor fixo, só que a cada quilômetro é o dobro do valor do trem. Por isso o transporte de trem é mais barato mesmo a embalagem do caminhão sendo mais barata.

P.: A idéia foi a mesma! No fim das apresentações vamos chegar a uma conclusão.

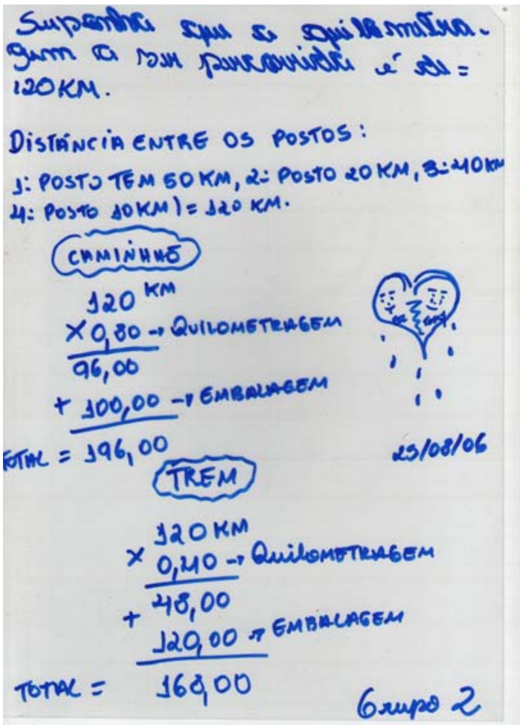


FIGURA 27: Produção do Grupo 2 para a questão (2a).

Enfatizamos que, de acordo com os resultados do Grupo 2, *se* for atribuído o valor de cento e vinte quilômetros para a grandeza quilometragem será mais barato o transporte do óleo combustível por trem.

A. (A7 – Grupo 1): Será mais barato se usar o transporte de trem. Seu André tem quatro postos. Com dez quilômetros ele chega ao primeiro posto e gasta cento e vinte e quatro reais, com doze quilômetros ele chega ao segundo posto e gasta cento e vinte e quatro reais e oitenta centavos, com catorze quilômetros ele chega ao terceiro posto e gasta cento e vinte e cinco reais e sessenta centavos e com dezoito quilômetros ele chega ao quarto posto e gasta cento e vinte e sete reais e sessenta centavos. Então, do Porto de SUAPE até os quatro postos ele vai gastar, cento e vinte reais mais vinte e um reais e sessenta centavos de frete que vai dar cento e quarenta reais e sessenta centavos.

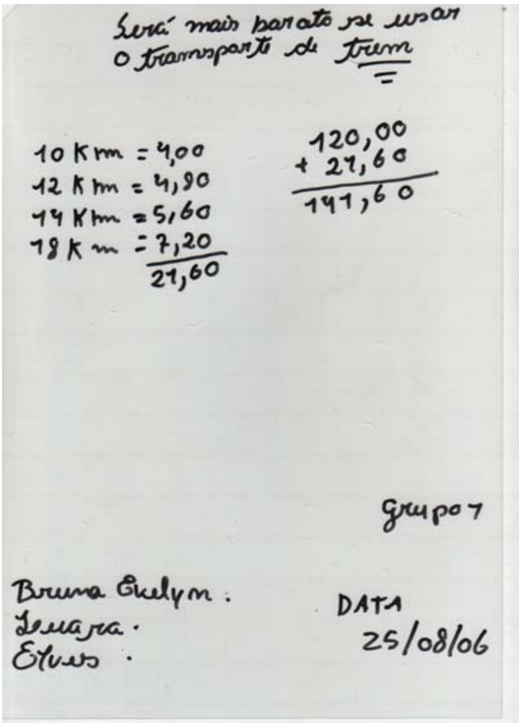


FIGURA 28: Produção do Grupo 1 para a questão (2a).

Enquanto explicava os cálculos realizados por seu grupo, o aluno percebe que o custo da embalagem (R$ 120,00) deveria ter sido somado ao custo por quilômetro rodado para cada um dos valores atribuídos à variável quilometragem.

A. (A4 – Grupo 1): Em cima do valor do frete que é oitenta centavos somando tudo dá vinte e um reais e sessenta centavos.

P.: Vejamos se compreendi como vocês pensaram! Sr. André tem quatro postos. Digamos que um dos postos esteja a dez quilômetros do Porto de SUAPE de trem ele gasta quatro reais só com o transporte mais o valor da embalagem!? Vocês consideraram que ele fará uma viagem só?

Uma componente do Grupo 1 explica que consideraram quatro distâncias, porém a entrega do óleo combustível seria realizada em uma única viagem e conseqüentemente o Sr. André pagaria o custo da embalagem apenas nessa viagem. Percebemos nas explicações dos alunos desse grupo e nos procedimentos realizados que a compreensão do problema foi parcial. As dificuldades encontradas pelos alunos em realizar a conversão do registro natural para o numérico e deste para o tabular podem ser atribuídas ao fato de o enunciado da questão não ser esclarecedor, mas isso deve ser melhor investigado.

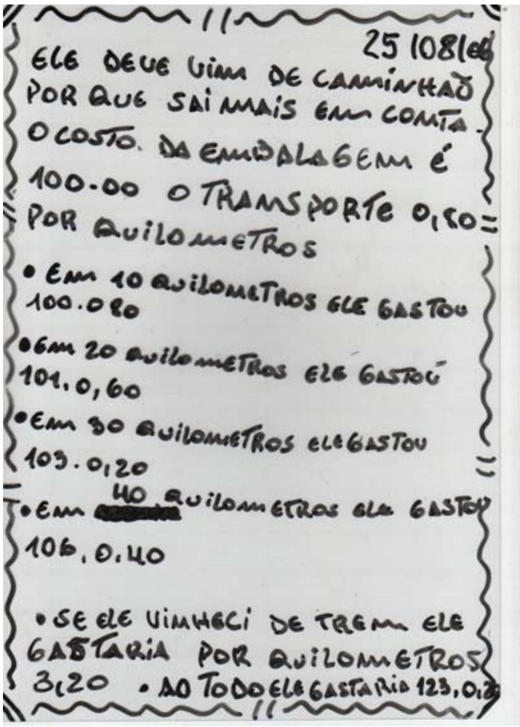
Percebemos que consideraram uma única viagem em que o último posto dista 54 km (10 km + 12 km + 14 km + 18 km = 54 km) do Porto de SUAPE. Como já foi dito na análise da sessão anterior, os grupos 1, 2 e 3 atribuíram apenas um valor para a variável quilometragem, consequentemente, tal procedimento não permitiu que fizessem uma comparação de valores referentes ao custo do transporte por trem e por caminhão e, consequentemente, não mobilizaram o registro tabular da função.

Questionamos o grupo quanto ao custo do transporte de combustível por caminhão em função da quilometragem para que pudessem comparar com o custo do transporte por trem.

P.: Vocês devem ter feito esses cálculos, mas não registraram na transparência.
A. (A4 – Grupo 1): Foi!!
P.: Por isso eu peço que toda produção deve ser registrada para que na apresentação vocês possam fazer a comparação.

O Grupo 4 não quis fazer a apresentação da sua produção. Então, a professora lê a resposta dos alunos, fazendo as devidas correções nas operações com números decimais:

P.: Sr. André deve levar a carga de caminhão, porque sai mais em conta o custo da embalagem, que é cem reais, e o transporte é oitenta centavos por quilômetro. Nós precisamos rever os cálculos: em dez quilômetros ele gasta cento e oito reais, porque dez quilômetros multiplicados por oitenta centavos é igual a oito reais, que somados aos cem reais dá cento e oito reais. Em vinte quilômetros o custo é cento e dezesseis reais, porque vinte quilômetros vezes oitenta centavos, dezesseis reais, mais cem reais dá cento e desses reais; em trinta quilômetros o custo é cento e vinte e quatro reais, porque trinta quilômetros vezes oitenta centavos, vinte e quatro reais, mais cem reais dá cento e vinte e quatro reais.



25/08/ee
ELE DEVE VIAM DE CAMINHÃO
POR QUE SAI MAIS EM CONTA
O COSTO DA EMBALAGEM É
100.00 O TRANSPORTE 0,80
POR QUILOMETROS
• EM 10 QUILOMETROS ELE GASTOU
100.080
• EM 20 QUILOMETROS ELE GASTOU
101.0,60
• EM 30 QUILOMETROS ELE GASTOU
103.0,20
• EM 40 QUILOMETROS ELE GASTOU
106.0.40
• SE ELE VIMHECI DE TREM ELE
GASTARIA POR QUILOMETROS
3,20 • AO TODO ELE GASTARIA 123,0,2

FIGURA 29: Produção do Grupo 4 para a questão (2a).

P.: Todos os grupos tiveram a mesma idéia para a realização dos cálculos. Agora vamos reunir todas estas idéias. Tem um grupo dizendo que a melhor forma de transporte é de caminhão e os outros grupos dizendo que é de trem. Sr. André precisa saber se a melhor opção e por trem ou caminhão? Agora eu estou em dúvida se o trem é a melhor opção para fazer o transporte do óleo combustível ou o caminhão?

Procuramos estimular a discussão registrando no quadro as informações verbalizadas pelos alunos:

P.: Qual o custo da embalagem se ele optar pelo transporte por caminhão?
Alunos: Cento e vinte reais.
P.: Ok, cento e vinte reais!!!
Alunos: Professora, por caminhão são cem reais.
P.: O que vocês disserem eu escrevo. Não vou ficar respondendo, se liguem! Qual o custo da embalagem se ele optar pelo transporte por trem?
Alunos: Cento e vinte.
P.: Qual o valor pago por quilômetro transportado de caminhão?
Alunos: Oitenta centavos.
P.: E se o Sr. André optar pelo transporte por trem, qual o valor por quilômetro transportado?
Alunos: Quarenta centavos.
P.: Como vocês calcularam o custo final do transporte de óleo combustível se for feito por caminhão?
Alunos: Multiplicando a quilometragem vezes os oitenta centavos e depois somar com os cem reais.
P.: Como vocês calcularam o custo final do transporte de óleo combustível se for feito por trem?

Alunos: Multiplicando a quilometragem vezes os quarenta centavos mais cento e vinte reais, que é fixo.

P.: O Grupo 3 pensou em lançar o valor de duzentos quilômetros para a quilometragem e o Grupo 2 pensou em cento e vinte quilômetros. Os grupos 1 e 4 atribuíram valores diferentes para a quilometragem: dez quilômetros, doze quilômetros, vinte quilômetros, e foram aumentando estes valores. Como podemos registrar estes valores? Qual a melhor maneira de fazer o registro de vários valores?

A. (A1): Através de uma tabela.

A. (A4): Através de uma fórmula.

P.: Como seria esta fórmula? Como seria uma fórmula no caso do transporte por caminhão?

A. (A1): Representar a quilometragem por K.

Alunos: Km, professora.

P.: Km vezes...

Alunos: Km vezes oitenta centavos entre parênteses mais cem reais.

P.: E o custo final, vamos representar por qual variável?

Alunos: F.

P.: Como seria uma fórmula no caso do transporte por trem?

Alunos: Km multiplicado por quarenta centavos entre parênteses mais cento e vinte reais.

Apresentamos os registros escritos no quadro do custo do transporte de óleo combustível por caminhão, conforme os alunos verbalizavam suas concepções:

Custo final do transporte de óleo combustível de litros = Quilometragem x 0,80 + R$ 100,00

F km

Custo final do transporte de óleo combustível de litros = Quilometragem x 0,40 + R$ 120,00

F km

P.: Como podemos escrever a fórmula para representar o custo do transporte por caminhão?

Alunos: F = (Km x 0,80) + 100,00

P.: Como podemos escrever a fórmula se o Sr. André optar pelo transporte de trem?

Alunos: F = (Km x 0,40) + 120,00

P.: Todos entenderam essas fórmulas? A quilometragem faz variar o custo final do transporte por trem ou caminhão. Daí, vem a idéia de vocês lançar valores para...

Alunos: Os quilômetros.

P.: Lançar valores para a grandeza quilometragem, para os quilômetros que foram rodados para chegar aos postos do Sr. André. O primeiro valor que os grupos 4 e 1 pensaram foi dez quilômetros.

Nesse momento, aplicamos as fórmulas encontradas para o cálculo do custo do transporte de óleo combustível por trem e por caminhão atribuindo para a grandeza quilometragem o valor de 10 km, fazendo os registros no quadro. Nosso intuito era que os alunos comparassem esses resultados e percebessem que, neste caso, a melhor opção para o transporte de óleo combustível seria por caminhão.

P.: Para dez quilômetros, qual é a conclusão?
Alunos: O transporte de caminhão é mais barato.
P.: O Grupo 4 chegou a essa conclusão. Os outros grupos concluíram que o transporte por trem é mais barato. Vamos ver se a melhor opção de transporte é o trem ou o caminhão?
A. (A1): Depende de quantos quilômetros ele vai percorrer.
P.: Depende de quantos quilômetros, ou depende da quilometragem. O grupo 4 estava certo. E se o posto estivesse a duzentos quilômetros do Porto de SUAPE o que acontece?
Alunos: De trem
P.: Por trem é mais barato. O que devemos fazer para descobrir...

Uma aluna do Grupo 2 responde nosso questionamento antes mesmo de podermos concluí-lo:

A. (A1): A partir de quantos quilômetros vai ser mais vantagem de trem ou de caminhão.
P.: Muito bem! A1 teve a idéia de lançarmos valores para descobrir a partir de quantos quilômetros é mais vantajoso fazer o transporte de trem ou de caminhão. Então, atribuam um outro valor para a quilometragem.
Alunos: Doze, dezessete, vinte.
P.: Vinte. Se a quilometragem for vinte quilômetros qual o custo do transporte?

Aplicamos as fórmulas encontradas para o cálculo do custo do transporte de óleo combustível por trem e por caminhão atribuindo para a grandeza quilometragem o valor de 20 km. Nosso intuito era que os alunos comparassem esses resultados e percebessem que, neste caso, a melhor opção para o transporte de óleo combustível ainda seria por caminhão.

P.: Então, por trem o custo...
Alunos: É mais caro.
P.: Outro valor??
A. (A2): Trinta quilômetros.

P.: O Grupo 2 já verificou que se a quilometragem for igual a cento e vinte quilômetros é mais barato o transporte por trem. Então nós devemos lançar valores menores que cento e vinte.

Aplicamos as fórmulas encontradas para o cálculo do custo do transporte de óleo combustível por trem e por caminhão atribuindo para a grandeza quilometragem o valor de 30 km. Os alunos compararam esses resultados e perceberam que, neste caso, a melhor opção para o transporte de óleo combustível ainda seria por caminhão.

P.: Outro valor para a quilometragem??
A. (A2): Cinqüenta quilômetros.

Aplicamos as fórmulas encontradas para o cálculo do custo do transporte de óleo combustível por trem e por caminhão atribuindo para a grandeza quilometragem o valor de 50 km.

A. (A1): Vai dar o mesmo.
A. (A2): Então, é o mesmo. Palmas para A2, que disse cinqüenta.
P.: Então, o que nós podemos concluir?
A. (A2): A partir de cinqüenta e um o valor [por caminhão] já é maior.
P.: Vamos lançar mais um valor pra poder comprovar. Como disse A2, vamos colocar cinqüenta e um quilômetros.

Aplicamos as fórmulas encontradas para o cálculo do custo do transporte de óleo combustível por trem e por caminhão atribuindo para a grandeza quilometragem o valor de 51 km. Os alunos compararam esses resultados e perceberam que para valores maiores que 50 km a melhor opção para o transporte de óleo combustível seria por trem.

P.: Pensem uma resposta que será a resposta da classe. Diante de todos esses cálculos o quê podemos responder para o Sr. André?
A. (A2): Que a partir de cinqüenta e um quilômetros o trem é mais barato.
P.: É só para valores acima de cinqüenta e um quilômetros?
A. (A1): Acima de cinqüenta.
P.: Para valores menores que cinqüenta quilômetros o transporte de caminhão é mais barato. Se a quilometragem for igual a cinqüenta o custo será o mesmo e para valores maiores que cinqüenta quilômetros o transporte de trem é mais barato. Fica como aprendizado: nós só podemos fazer alguma afirmação se fizermos alguns testes, algumas comparações.

Ao concluirmos esta atividade, discutimos com o grupo-classe as respostas apresentadas por ele e procuramos destacar que uma das representações para a situação apresentada seriam as expressões algébricas encontradas. Além disso, enfatizamos que uma função é a relação de dependência entre duas variáveis.

Na situação estudada os alunos verificaram que a variável dependente é o custo do transporte do óleo combustível e a variável independente é a quilometragem.

P.: Quais são as grandezas que estão variando nesse problema?
Alunos: A quilometragem e o custo.
P.: Pergunta: é o custo que depende da quilometragem ou é a quilometragem que depende do custo?
Alunos: O custo depende da quilometragem.
P.: Muito bem! Todos concordam?

Apesar da maioria dos grupos não conseguir mobilizar o registro tabular ou realizar rigorosamente a conversão da linguagem natural para a algébrica sem a ajuda da professora, percebemos que o papel das variáveis dependente e independente foi compreendido tanto na situação apresentada em linguagem natural quanto nos registros algébricos encontrados.

Ao finalizarmos as discussões das produções dos alunos, entregamos a questão (2b) para que resolvessem nos pequenos grupos.

(2b) Escrevam um bilhete para o Sr. André ajudando-o a decidir qual a forma mais econômica de transportar o óleo combustível para os seus quatro postos de gasolina, por caminhão ou por trem?

O objetivo principal desta atividade era propiciar que os alunos expressassem em linguagem natural as conclusões a que chegaram a partir das discussões das produções da questão (2a). Isto é, esperamos que expressassem em linguagem natural o custo do transporte do combustível em função da quilometragem e que se a quilometragem for maior que 50 km o custo do transporte por trem é mais barato; se for menor que 50 km o custo do transporte por caminhão será o mais barato.

Como já haviam feito as discussões correspondentes à atividade (2a) os alunos responderam a esta questão com facilidade. Realizaram as articulações entre os registros em linguagem algébrica e natural, confirmando o relacionamento e dependências entre as variáveis custo do transporte do combustível e quilometragem.

Achamos pertinente apresentar os registros dos Grupos 1, 2 e 3, para a questão (2b), respectivamente:

> Sr. André dependendo da km se for menos que 50 será mais barato transportar de caminhão. E se a km for mais que 50 será mais barato transportar de trem.

> Depende de quantos quilômetros ele vai transportar. Se for menos de 50 km é mais em conta caminhão, se for mais de 50 km sai mais em conta trem.
>
> F = (km . 0,80) + 100,00 Caminhão
>
> F = (km . 0,40) + 120,00 Trem
>
> | Caminhão | Trem |
> |---|---|
> | F = (40 . 0,80) + 100,00 | F = (40 . 0,4) + 12,00 |
> | F = 32 + 100,00 | F = 16 + 120,00 |
> | F = 132,00 | F = 136,00 |
> | | |
> | F = (50 . 0,80) + 100,00 | F = (50 . 0,4) + 12,00 |
> | F = 40,00 + 100,00 | F = 20,00 + 120,00 |
> | F = 140,00 | F = 140,00 |

> Sr. André a forma mais econômica de transportar o óleo combustível é que a partir de 51 km é transportar de trem, e abaixo de 51 km a forma mais econômica é de caminhão.

Percebemos nos registros escritos do Grupo 3 que trocaram o valor da quilometragem, apagando o valor 50 km e substituindo por 51 km. Acreditamos que isto se deve ao fato de não terem percebido que a variável quilometragem pode assumir valores decimais, por exemplo, valores entre 50 e 51, ou seja, que a função está definida para o conjunto R_{+}, Conjunto dos Números Reais Não-negativos. É possível que tal dificuldade tenha surgido pelo fato de termos atribuído valores inteiros para a variável quilometragem em todos os cálculos realizados na questão (2a).

As respostas da questão (2b) apresentaram um novo elemento que achamos pertinente ressaltar: os alunos não apresentaram na atividade 2, pelo menos até o momento, tantas dificuldades em comparar os diferentes registros de uma função como foi verificado na atividade 1. Uma vez que os grupos já tiveram a experiência de *transitar entre os diferentes registros de uma função*, supomos que os alunos mobilizaram estes conhecimentos para escrever com certa facilidade o bilhete solicitado no problema em linguagem natural. Utilizaram os cálculos numéricos apenas para justificar o conteúdo do bilhete.

Tal suposição pode ser confirmada nos estudos de autores que investigaram o uso de *representações múltiplas* na aprendizagem de um conceito matemático e consideram que a compreensão de um objeto, pelos estudantes, supõe a mobilização de seus diferentes registros e a ação de *mover-se livres* entre eles, adequando-os às situações de aprendizagem que lhes forem apresentadas (Artigue e Dager, 1999; Gomes Ferreira e Dehon, 1999).

Após a conclusão da questão (2b) entregamos a questão (2c) para ser respondida pelos pequenos grupos. Salientamos que o Grupo 4 não se dispôs a responder esta atividade.

(2c) Sr. André precisa apresentar aos seus sócios, em transparência, as diferentes maneiras de transportar combustível para os seus quatro postos de gasolina para que decidam qual a forma mais econômica. Ele se enrolou todo ao tentar representar, através de uma tabela, os custos de todas as possíveis formas de transporte e pediu, novamente, a ajuda do contador da empresa para que ele inventasse uma maneira mais simples e prática de reunir todos esses resultados. Que idéia vocês dariam para o contador?

O objetivo principal desta atividade era proporcionar que os alunos representassem graficamente as leis de formação, que relacionam as grandezas custo do transporte de óleo combustível por trem e por caminhão em função da quilometragem, reconhecendo que os pontos correspondentes aos pares de números que satisfazem a estas leis, estão alinhados. Para tanto, propiciamos a conversão do registro tabular para o algébrico e deste para o gráfico.

Após as discussões nos pequenos-grupos e resolução da atividade as apresentações das produções são iniciadas por uma aluna do Grupo 1:

A. (A5): O transporte sendo de caminhão ou de trem a representação mais simples que achamos é a fórmula. A representação mais fácil é a fórmula: F = km x C + R, quilometragem vezes centavos mais reais.

P.: O Grupo 1 concluiu que a forma mais fácil e prática de apresentar todos os resultados é através da fórmula. Se o Sr. André apresentar para os outros sócios apenas a fórmula é suficiente para que eles decidirem se vão transportar o óleo combustível de trem ou de caminhão?

A.: Não tem que apresentar os cálculos.

P.: Vamos reunir todas as idéias de vocês para chegarmos a uma conclusão.

A. (A2 – Grupo 3): A forma para ajudar o Sr. André é com as fórmulas: para o caminhão, F = (km x 0,80 + 100,00), quilômetro vezes o preço do frete mais o valor da embalagem, cem reais, que é fixo; e para o trem, F = (km x 0,60 + 120,00), quilômetros vezes o preço do frete mais o valor da embalagem, cento e vinte reais, que é fixo. Esta é uma forma de calcular sem usar a tabela.

P.: Este grupo apresentou duas fórmulas. A pergunta agora é: Se os outros sócios do Sr. André olharem e entenderem essas fórmulas serão suficientes para decidirem se o transporte mais barato é por trem ou caminhão?

Alunos: Eu acho que sim!

P.: Então qual a forma mais barata por trem ou por caminhão?

A. (A2): Depende da distância, da quilometragem.

P.: Então essa idéia deveria estar representada.

A. (A2): Na outra questão a gente colocou porque ficava mais barato dependendo da quilometragem.

P.: Então precisamos dar uma "recheada" nessa resposta e acrescentar mais alguns dados para que possamos chegar a uma conclusão se o transporte mais barato é por caminhão ou por trem. Só com a fórmula ainda não é suficiente.

Contrariando as nossas previsões os grupos 1 e 3 não mobilizaram o registro gráfico para representar as grandezas custo do transporte de óleo combustível por trem e por caminhão em função da quilometragem. Optaram apenas pelo registro algébrico para representar a relação de dependência entre as variáveis dependente e independente, considerando que a maneira mais simples para o Sr. André apresentar aos seus sócios a forma mais econômica de transportar óleo combustível para seus postos de gasolina seria através de uma fórmula.

Retomamos as discussões apresentando a produção do Grupo 2:

P.: O Grupo 2 criou duas formas de representar todos os dados do problema: a primeira, novamente, a idéia da fórmula, ou seja, através de uma expressão algébrica. O transporte por caminhão foi representado pela fórmula: "custo final a ser pago pelo transporte é igual aos quilômetros percorridos multiplicados por oitenta centavos mais os cem reais". Se o transporte for feito por trem a fórmula será: "custo final é igual aos quilômetros percorridos multiplicados por quarenta centavos mais os cento e vinte reais". O grupo concluiu escrevendo: "Já foi comprovado que até cinqüenta quilômetros sai mais em conta o transporte por caminhão".

Nosso intuito era que ao final do debate o grupo-classe concluísse que a representação gráfica da função seria a forma mais simples de apresentar, para os sócios do Sr. André, os custos de todas as possíveis formas de transporte do óleo combustível.

P.: Digamos que esta foi a transparência que o contador apresentou para o Sr. André. Novamente, pergunto a vocês: Como podemos justificar para o Sr. André que para uma quilometragem até cinqüenta quilômetros o transporte mais barato seria o caminhão e para uma quilometragem acima de cinqüenta quilômetros o transporte mais barato seria o trem? Não adianta apenas apresentar esta informação é preciso mostrar o porquê. Este grupo está concluindo uma outra representação complementando esta resolução.

A. (A1): Aqui [No eixo vertical de cada gráfico que representa a situação.] já vai estar a embalagem junto com o preço dos quilômetros que eles percorreram e embaixo [No eixo horizontal do gráfico.] os quilômetros. Dá para perceber que a partir de cinqüenta quilômetros o transporte de trem já é mais em conta do que por caminhão.

P.: Vejam que a partir destes gráficos, quando forem apresentados aos sócios do Sr. André, eles vão observar tanto os valores para calcular o custo do transporte por caminhão quanto por trem. Se um posto de gasolina estiver a dez quilômetros do Porto de SUAPE o custo do transporte por caminhão será de cento e oito reais. Se o transporte for de trem para esta mesma quilometragem o custo será de cento e vinte e quatro reais. Ou seja, o transporte por caminhão é mais vantajoso. Se a quilometragem for de vinte quilômetros o custo por caminhão será de cento e dezesseis reais; se o transporte for por trem, cento e vinte e oito reais. Então com estes gráficos os sócios poderão fazer uma comparação. Poderão observar uma tendência do que está acontecendo com o custo do transporte. E assim observar que até cinqüenta quilômetros o transporte de caminhão é mais vantajoso e acima de cinqüenta quilômetros o transporte de trem é mais vantajoso.

P.: Observem ao redor de vocês. Nesse trabalho realizado por vocês, no início do ano, foram utilizadas algumas representações para expor os resultados de uma pesquisa: a tabela e os gráficos de colunas. Que outro tipo de gráfico vocês poderiam usar para representar a situação do nosso problema?

A. (A1): Aquele assim... Eu esqueci o nome. Aquele que tem uma linhazinha.

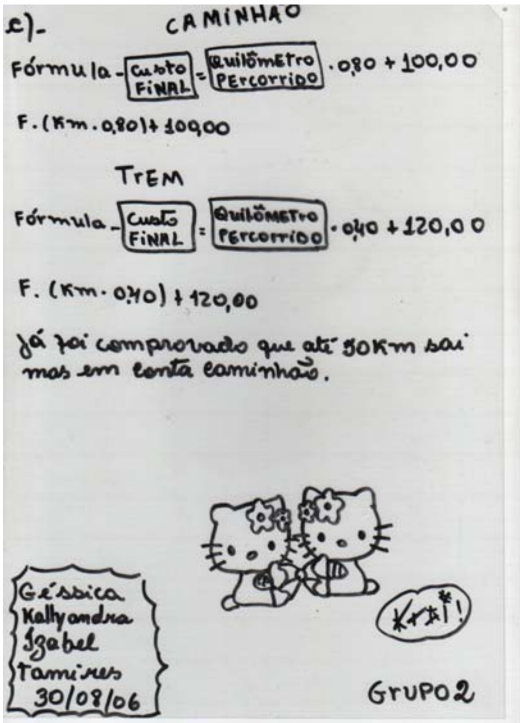
A. (A2): Aquele que tem escala.

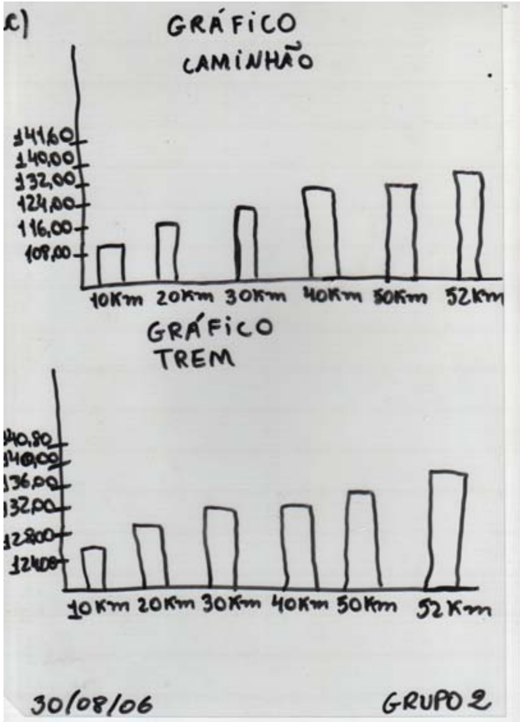
P.: Gráfico de linhas ou de segmentos.

A. (A1): Eu pensei nele, mas ia demorar muito. Tem que ter regras...!?

P.: Por uma questão de horário, nós faremos uma discussão das diferentes maneiras de representar a situação desse problema na próxima sexta-feira.

Apresentamos a seguir as produções do Grupo 2:





FIGURAS 30 e 31: Produções do Grupo 2 para a questão (2c).

Como podemos observar, o Grupo 2 mobilizou a linguagem algébrica e a linguagem gráfica para representar as grandezas custo do transporte de óleo combustível por trem e por caminhão em função da quilometragem. Expressaram algebricamente as duas situações escrevendo as mesmas fórmulas apresentadas por eles na questão (1b): F = (km . 0,40) + 120,00, para o custo do transporte por trem e F = (km . 0,80) + 100,00, para o custo do transporte por caminhão. Além disso, construíram dois gráficos de colunas relacionando os valores por eles atribuídos à variável independente com os valores da variável dependente, determinados a partir da substituição nas fórmulas encontradas.

Acreditamos que a escolha de representar uma solução da questão (2c) na forma de um gráfico de colunas se deva ao fato de terem realizado, no primeiro semestre, uma pesquisa em que organizaram a tabulação dos dados estatísticos levantados e construírem os gráficos de setores e de colunas referentes às informações coletadas.

Apesar de não conseguirem esboçar os gráficos cartesianos que representam as leis de formação descritas, fazendo uma comparação entre os pontos pertencentes às retas; os componentes do Grupo 2 expressaram nos gráficos de colunas construídos, relações pertinentes à nossa investigação, que indicamos a seguir:

- Perceberam a variação entre as grandezas custo do transporte de óleo combustível por trem e por caminhão e quilometragem.
- Identificaram a variável dependente e independente.
- Compreenderam que os custos das embalagens (R$ 120,00 e R$ 100,00) funcionam como parâmetros fixos, portanto o que fará variar o custo do transporte é a quilometragem.
- Perceberam que um aumento na grandeza quilometragem acarreta em um aumento no custo do transporte, visto que as colunas do gráfico crescem à medida que a quilometragem aumenta.

Além disso, percebemos nos gráficos por eles construídos alguns componentes característicos do gráfico cartesiano de uma função:

- O gráfico está "assentado" sobre dois eixos coordenados, sendo um vertical (eixo das ordenadas) e outro horizontal (eixo das abscissas).
- Os valores atribuídos à variável independente estão representados no eixo das abscissas, e os valores encontrados para a variável dependente estão representados no eixo das ordenadas.

No próximo encontro solicitaremos que os grupos representem os custos referentes às duas formas de transporte do óleo combustível, por trem e por caminhão, através de um gráfico linear e, a partir das produções, institucionalizaremos os conhecimentos construídos.

2.3. Análise dos resultados da atividade 2, questão (2c): sessão 8.

A última sessão dessa seqüência se desenvolveu em 01 de setembro de 2006, com duração de duas aulas de 50 minutos cada, em que compareceram 20 alunos. Vale ressaltar, que os dois componentes do Grupo 5 presentes a esta sessão não participaram da resolução da atividade por terem chegado atrasados.

Iniciamos nossos trabalhos com a discussão da questão (2c) resolvida na 7ª sessão. Cada grupo pôde expressar suas concepções em relação aos conceitos mobilizados e estratégias estabelecidas, de maneira que o grupo-classe compreendesse as estratégias utilizadas para representar o custo do transporte do óleo combustível em função da quilometragem em linguagem algébrica e gráfica.

Lembramos que, na aula anterior, todos os grupos concordaram que uma das possíveis soluções para o problema seria através das expressões algébricas referentes ao custo do transporte do óleo combustível por trem e por caminhão.

Pretendíamos com as discussões das produções da questão (2c) que também percebessem que as expressões encontradas não eram suficientes para que o Sr. André apresentasse aos seus sócios qual seria a maneira mais econômica de transportar o óleo combustível de um posto qualquer até o Porto de SUAPE e, consequentemente, verificassem que a melhor opção seria a representação gráfica.

P.: O Grupo 2 também pensou em representar estas duas situações através de um gráfico. Qual a vantagem do gráfico?

Diante do silêncio dos alunos explicamos que a representação gráfica possibilitaria ao Sr. André apresentar para os seus sócios a variação do custo do transporte de óleo combustível por trem e por caminhão em função da quilometragem a partir de valores expressos no gráfico. Dessa forma ele poderia fazer uma comparação das duas situações. Porém, a opção mais adequada para representar estas situações não seria o gráfico de colunas, pois ele é mais utilizado com dados apresentados em porcentagem. A representação mais adequada para mostrar a variação entre grandezas durante certo tempo, é o gráfico de linhas. O gráfico de linhas é utilizado em situações que sugerem continuidade; ele expressa uma tendência de crescimento ou decrescimento das variáveis nele apresentadas.

P.: Agora eu vou distribuir a atividade e vocês vão construir um gráfico, não de colunas, mas um gráfico de linhas utilizando a idéia de variação entre as grandezas custo a ser pago pelo transporte e quilometragem.

Destacamos as produções dos grupos 2 e 3 para a resolução da questão (2c):

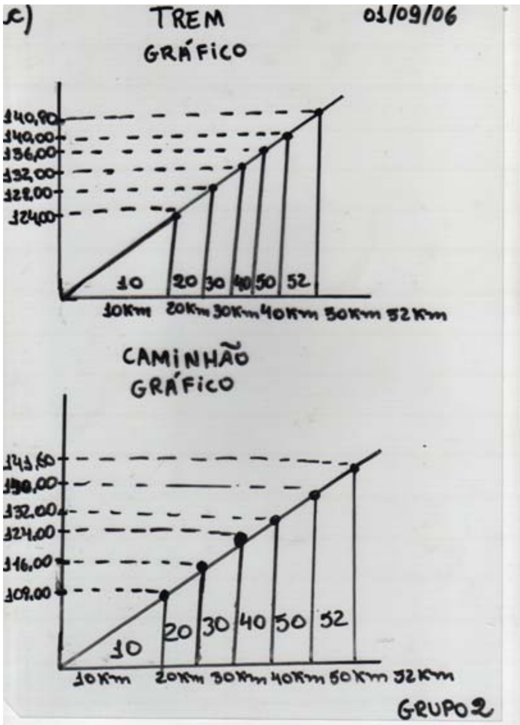


FIGURA 32: Produção do Grupo 2 para a questão (2c).

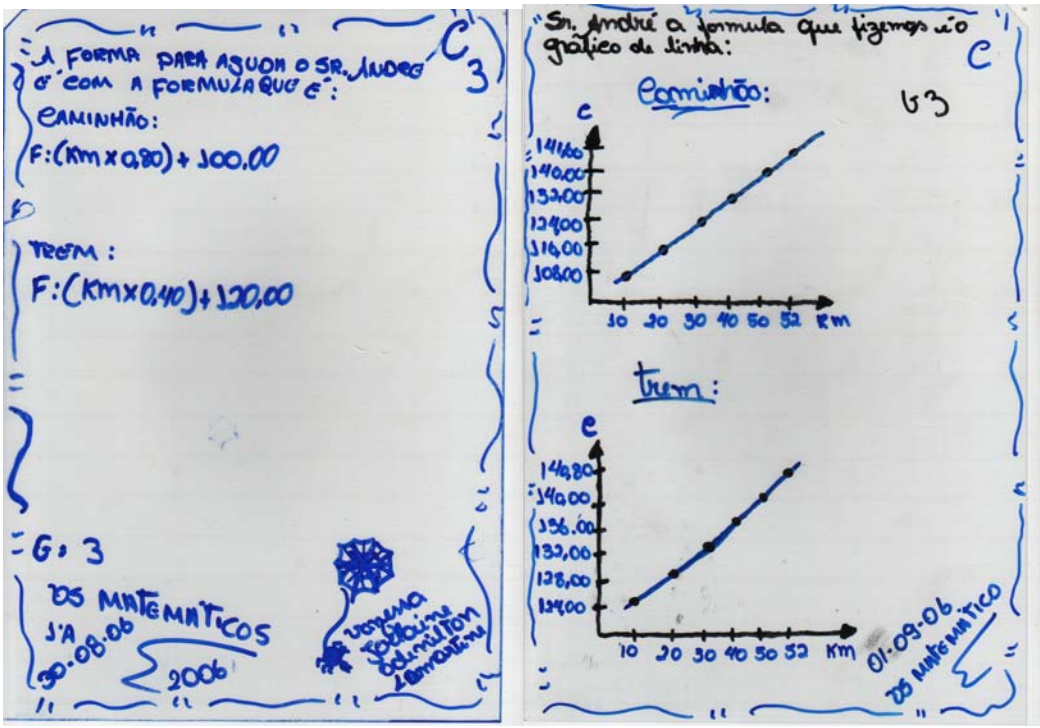
A. (A1): O gráfico de linhas dá para perceber o crescimento, dá para você visualizar melhor o crescimento a cada dez quilômetros, como eu coloquei aqui, tanto de trem como de caminhão. Aí se percebe que quando chega a cinqüenta quilômetros tanto de trem quanto de caminhão dá o mesmo percentual. Então a partir de cinqüenta quilômetros ele vai poder escolher se ele vai querer transportar o óleo de trem ou de caminhão.

P.: A partir de cinqüenta é melhor transportar de ...?

A.: Trem.

P.: Observem que a partir do gráfico de linhas vocês percebem o crescimento, como falou A1, o crescimento das grandezas quilometragem e custo do transporte. Se a quilometragem for menor que cinqüenta quilômetros é mais vantajoso fazer o transporte por caminhão, e se a quilometragem for maior que cinqüenta quilômetros é mais vantajoso o transporte por trem.

Em seguida, um aluno apresenta a produção do Grupo 3:



FIGURAS 33 e 34: Produções do Grupo 3 para a questão (2c).

A. (A2): Aqui está o custo e aqui a quilometragem. Daí vai aumentando, em dez quilômetros dá cento e oito reais de caminhão, já de trem dá cento e vinte e quatro. Quando chegar em cinqüenta quilômetros vai dar o mesmo preço, o mesmo custo, e quando passa de cinqüenta o trem é mais barato. Então, depois de cinqüenta o trem é mais econômico e abaixo de cinqüenta o caminhão e mais econômico.

Salientamos que o Grupo 3 nos solicitou papel quadriculado para representar graficamente a situação, alegando que os quadrinhos do papel facilitariam a construção do gráfico. Os gráficos construídos no papel quadriculado foram semelhantes àqueles construídos na transparência.

Podemos observar nas apresentações das produções dos grupos 2 e 3 que estão consolidadas as idéias de que a quilometragem fará variar o custo do transporte e que os custos das embalagens funcionam como parâmetros fixos. Dessa forma, mobilizaram conceitos, que consideramos relevantes para nossa investigação, já estudados na atividade 1 e aprofundados na atividade 2.

Os dois grupos marcaram os pontos no plano cartesiano e os uniram. A representação gráfica das funções por eles apresentadas são retas não-paralelas aos eixos coordenados (vertical e horizontal), portanto, reconhecem que os pontos, correspondentes aos pares de números que satisfazem às leis de formação das funções, estão alinhados, como previmos em nossa análise preliminar.

Vale destacar que houve uma tendência em todos os grupos em não considerar os pares ordenados (0, 100) e (0, 120) como possíveis pontos dos gráficos cartesianos referentes ao custo do transporte de óleo combustível por caminhão e por trem, respectivamente. Conseqüentemente, não perceberam que estes pares são os pontos de intersecção com o eixo vertical destes gráficos.

Segundo Markovits, Eylon & Buckeimer (1995), "Muitos alunos não fazem a conexão entre os componentes da definição verbal de função e os componentes da representação gráfica visual" (p. 56). Para estas autoras existe uma dificuldade própria da representação gráfica de uma função, envolvendo o papel duplo dos pontos situados nos eixos: são pontos do plano, com coordenadas (x, 0) ou (0,y), e como tais podem representar pares correspondentes a intersecções do gráfico com um dos eixos; e como tais podem representar pré-imagens ou imagens.

Baseando-nos na citação acima podemos considerar que a dificuldade apresentada, pelos sujeitos em localizar os pares (0, 100) e (0, 120) no eixo das ordenadas dos gráficos se deva ao fato de não reconhecerem que podem existir pares ordenados cuja abscissa é nula.

Ao analisarmos as representações gráficas do Grupo 2 verificamos que consideraram o par (0,0) como o ponto de "partida" em ambos os gráficos cartesianos. Acreditamos que cometeram este erro por ignorarem que para localizarem pares ordenados no plano cartesiano é necessário verificar se o segundo elemento do par é imagem do primeiro pela função. No caso das funções do problema, não testaram que $0,80 \times 0 + 100 \neq 0$ e $0,40 \times 0 + 120 \neq 0$.

Corroborando nossa afirmação citamos Markovits, Eylon & Buckeimer (1995):

> Para identificar pares (pré-imagem, imagem) também são necessárias três operações semelhantes: verificar (1) se o primeiro número pertence ao domínio, (2) se o segundo pertence ao contradomínio e (3) se o segundo número é imagem do primeiro pela função dada. Poucos alunos desenvolvem os três passos corretamente (p. 57).

Os grupos 2 e 3 confirmaram a relação entre as variáveis dependente e independente, porém construíram gráficos que não atendiam às especificidades do problema. Por exemplo, não representaram os pares (custo da embalagem, quilometragem) em um plano cartesiano, e o Grupo 2 não considerou os custos das embalagens no cálculo do custo do transporte por trem e por caminhão.

Com o intuito de socializar os resultados da atividade decidimos fazer a institucionalização dos conceitos consolidados e discutir as estratégias utilizadas para concluir a tarefa. A discussão permitiu que aqueles que compreenderam o significado das diferentes representações de uma função também se manifestassem.

Iniciamos o debate registrando no quadro as expressões algébricas referentes ao custo do transporte de óleo combustível por caminhão (C) e por trem (T) em função da quilometragem (km): C = km . 0,80 + 100,00 e T = km . 0,40 + 120,00. A conversão da representação algébrica para a representação gráfica foi realizada a partir da estratégia lançada pelos próprios alunos de atribuir valores para a variável independente e encontrar os pontos que deveriam ser marcados no plano cartesiano.

Os valores escolhidos pelos alunos para a variável quilometragem foram 10 km, 20 km, 30 km, 50 km e 52 km que representamos no eixo horizontal, cujos valores correspondentes ao custo do transporte representamos no eixo vertical. Salientamos que os pontos do plano são a representação gráfica dos pares 10 km ⇨ R$ 108,00; 20 km ⇨ R$ 116,00; 30 km ⇨ R$ 124,00; 50 km ⇨ R$ 140,00 e 52 km ⇨ R$ 141,60 referentes ao gráfico do custo do transporte de óleo combustível por caminhão. De maneira análoga fizemos a correspondência entre os valores atribuídos à grandeza quilometragem com o custo do transporte de óleo combustível por trem. Nesse caso, enfatizamos que os pontos do plano são a representação gráfica dos pares 10 km ⇨ R$ 124,00; 20 km ⇨ R$ 128,00; 30 km ⇨ R$ 132,00; 50 km ⇨ R$ 140,00 e 52 km ⇨ R$ 140,80.

Nosso objetivo era que ocorresse a compreensão da dependência das variáveis ponto a ponto, e que os alunos verificassem que as coordenadas de qualquer ponto pertencente à curva que representa a função, satisfazem a correspondente expressão algébrica. Apoiados nessas idéias explicamos que podemos representar infinitos pontos alinhados e se unirmos alguns destes pontos teremos a figura de uma reta. Diante do exposto concluímos que o gráfico é a melhor representação das situações do problema, pois apresenta todas as informações referentes à variação da grandeza custo do transporte de óleo combustível em função da quilometragem.

Finalizamos nossas atividades discutindo alguns subconceitos de função, em especial, de Função Afim, a partir de um problema de contexto realístico, enfatizando a concepção de variação entre grandezas expressa pela lei de formação $y = 0{,}20.x + 500$. Sistematizamos de maneira formal alguns conceitos matemáticos referentes ao estudo da Função Afim relacionando-os às idéias trabalhadas em nossa seqüência, que citamos a seguir:

- A expressão matemática $y = 0{,}20 \cdot x + 500$ define uma função polinomial do 1º grau ou função afim. A partir da comparação dessa fórmula com aquelas formalizadas na seqüência didática desta pesquisa foi caracterizada a função polinomial do 1º grau como aquela descrita pela lei $y = a\,x + b$, com **a** e **b** reais e **a** não nulo.
- As variáveis das funções afins apresentam uma dependência traduzida pela expressão algébrica, sendo a variável *x* a independente e *y* a dependente.
- Na expressão algébrica o coeficiente de *x* é denominado coeficiente angular e o termo independente de *x* ou termo constante é denominado coeficiente linear.
- Podemos representar graficamente uma função afim por uma reta utilizando para isso um sistema de coordenadas cartesianas.

- As coordenadas de cada ponto da reta verificam a mesma dependência expressa na representação algébrica.
- Uma mesma função apresenta diferentes representações, por exemplo, a tabela, a expressão algébrica e o gráfico.

CAPÍTULO 5
CONSIDERAÇÕES FINAIS

> [...] se a escola descuida-se e se mantém estática ou com movimento vagaroso em comparação com a velocidade externa, origina-se um afastamento ou divórcio entre a escola e a realidade ambiental, que faz com que os alunos se sintam pouco atraídos pelas atividades de aula e busquem adquirir por outros meios os conhecimentos que consideram necessários para compreender à sua maneira o mundo externo, que percebem diretamente ou através dos meios massivos de comunicação (SANTALÓ, 1996, p. 11).

Esta pesquisa teve como objetivo investigar os efeitos de uma seqüência didática nas concepções de alunos do 1º ano do Ensino Médio em relação ao conceito de Função Afim. Estudamos o processo de aquisição/construção do conceito de função, focando a Função Afim, enfatizando a concepção de variação entre grandezas, a partir da conversão das informações entre os seus diferentes registros (linguagem natural, tabela, simbólico, gráfico).

Investigamos as concepções dos alunos quanto aos conceitos de função e de Função Afim, tanto por meio de nossas observações em sala de aula, como pelos diversos estudos existentes em Educação Matemática. Baseamos a análise dos dados em Markovits, Eylon & Buckeimer (1995), que em suas pesquisas, investigaram como os alunos têm aprendido o conceito de função assim como as dificuldades em sua aprendizagem. Para elaborar e aplicar a seqüência didática nos apoiamos na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, no que se refere ao processo de ensino-aprendizagem que envolve o professor, o aluno e o saber matemático. Consideramos muito importante, na elaboração da nossa seqüência e nos direcionamentos de sua aplicação, o que é dito por Brousseau "A situação didática deve conduzir o aluno a fazer o que se busca, porém, ao mesmo tempo, não deve conduzi-lo. Isto porque se a resposta se deve exclusivamente às virtudes da situação, nada deve às 'qualidades' do aluno" (1996b, p. 54).

No último dia dos nossos trabalhos, enquanto transcreviam a resolução de uma questão para a transparência, um aluno nos perguntou: *Professora, no próximo ano, se puder, a senhora vai ensinar a gente?* Respondemos: *Com certeza. Nas* *minhas aulas, procuraremos sempre que possível trabalhar as atividades em grupo.* Acreditamos que a espontaneidade desse questionamento se deva ao dinamismo do trabalho desenvolvido por eles na aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Os alunos viram-se diante de atividades, em que todos precisavam estar juntos responsabilizando-se com a sua resolução e com o seu próprio desenvolvimento cognitivo.

Nosso objetivo era investigar os efeitos de uma seqüência didática nas concepções de alunos do 1º ano do Ensino Médio em relação ao conceito de Função Afim, abordado a partir da resolução de problemas de contexto realístico. Os resultados das atividades e os relatos das discussões das produções dos alunos no grande grupo, apresentados na análise a posteriori, revelam que a seqüência didática aplicada e a metodologia adotada foram adequadas aos objetivos propostos. A confrontação, a comunicação e a validação de concepções nos pequenos grupos e a socialização de suas produções, apresentando-as em transparências, propiciavam outra sessão de confrontações, comunicações e validações das estratégias e resultados encontrados, além de um aprimoramento do espírito critico dos alunos.

Uma tal aprendizagem, está relacionada com o que Brousseau chama de *devolução do problema*, proporcionando uma mudança de atitude diante da responsabilidade na apreensão do saber matemático. Consequentemente, permitiu um avanço significativo nas concepções sobre função afim e no conceito de função, no sentido de que propiciou uma melhor compreensão das variáveis da função, bem como o relacionamento entre elas. Observamos isso quando, no desenvolver das atividades, os alunos eram solicitados a converter uma situação em linguagem natural para a linguagem algébrica, e ao observarem o que ocorria com as grandezas expressaram a variável dependente em função da variável independente. E ainda, ao serem solicitados a traduzir a uma função da linguagem simbólica para a gráfica verificaram que os valores associados a qualquer ponto pertencente à curva que representa a função satisfazem à correspondente expressão algébrica.

Dentre os aspectos positivos no desenvolvimento deste trabalho destacamos que os alunos puderam transitar de um registro para o outro, de maneira diferente daquela habitualmente trabalhada em sala de aula, em que, de modo mecânico, constroem uma tabela substituindo valores do domínio da função na lei de formação, encontrando as imagens correspondentes e, por fim, esboçam o seu gráfico. Desta forma, perceberam que uma tabela, uma expressão algébrica ou gráfico de uma situação do cotidiano são diferentes formas de representar uma função.

Concluímos que introduzir o estudo de função afim a partir de problemas de contexto realístico, com ênfase na concepção variacional, possibilita a identificação das variáveis e o relacionamento entre elas, bem como a articulação entre os diferentes registros de representação da função (linguagem natural, numérica, algébrica e gráfica).

Quando eram solicitados a escrever um bilhete como resposta a uma questão da seqüência, mobilizando a linguagem natural, alguns grupos apresentaram dificuldades em fazê-lo. Alguns optaram por responder tais atividades em língua natural aliada a relações numéricas. As respostas apresentadas por alguns grupos necessitavam de mais clareza e rigor. Acreditamos que não estavam habituados a atividades em que suas respostas deveriam ser apresentadas em linguagem natural. Tal atitude nos parece resultado de contratos didáticos firmados em situações de aprendizagem anteriores, em que "um bom problema de Matemática" requer "um bom algoritmo" como solução.

Outro efeito de contrato didático que queremos destacar é que, principalmente nas primeiras sessões dessa pesquisa, os alunos ao encontrarem alguma dificuldade que não conseguiam sanar nos pequenos grupos solicitavam a ajuda da professora. Porém, percebemos que a renegociação das cláusulas do contrato "tradicional" propiciou a incorporação de novas regras na relação professor-saber-aluno; e os sujeitos desta pesquisa passaram a se responsabilizar mais pela construção do saber em jogo.

Verificamos que os grupos optavam em articular diretamente os cálculos numéricos com os registros algébrico e/ou gráfico em algumas questões que poderiam também mobilizar o registro tabular. Acreditamos que este procedimento tenha dificultado a representação gráfica da função; apenas dois dos cinco grupos conseguiram realizar de maneira satisfatória a conversão para o registro gráfico. Já percebíamos este fenômeno em nossa prática docente e confirmamos na literatura consultada relacionada ao ensino-aprendizagem de funções. Entretanto, todos os grupos apresentaram uma evolução crescente na compreensão do conceito de função. Acreditamos que este fato se deve ao trabalho desenvolvido, enfatizando a compreensão das variáveis dependente e independente, assim como a articulação entre os diferentes registros de funções.

Verificamos em nossa investigação que os alunos apresentaram dificuldades em realizar a conversão do registro natural para o tabular. Tais dificuldades podem ser atribuídas ao fato de o enunciado do problema proposto não ser esclarecedor, mas esta hipótese merece ser mais bem investigada.

Houve momentos em que precisamos socializar entre os grupos, as estratégias de resolução acionadas por eles. Os debates coletivos, realizados após a conclusão de cada atividade, proporcionaram a superação de eventuais dúvidas ou dificuldades e as institucionalizações dos conceitos trabalhados, e representaram um recurso didático relevante para o bom desempenho dos grupos. Verificamos aqui um resultado importante desta investigação: a discussão das produções no grande grupo e a reflexão da validade dos resultados encontrados por eles provocaram avanços cognitivos significativos na compreensão dos conceitos trabalhados.

Podemos dizer, de um modo geral, que os grupos mais assíduos às sessões de nossa pesquisa, apresentaram um desempenho que apontou para um crescimento na compreensão do conceito de Função Afim. Desta maneira, acreditamos que a nossa hipótese foi validada. Ou seja, a aplicação de uma seqüência didática elaborada a partir do estudo de problemas de contexto realístico, apresentados em linguagem natural, que permita a articulação deste registro com os demais e a compreensão da relação entre as varáveis dependente e independente por parte dos alunos, tem papel fundamental na apreensão do conceito de Função Afim.

Acrescentamos que continuamos em contato com os sujeitos dessa pesquisa, que estão cursando o segundo ano do ensino médio, em turmas que lecionamos

Matemática. Desse modo, poderemos observar se eles apresentam um desempenho distinto dos demais, no que se refere a mobilizar o conceito de função diante de outras situações que lhe forem apresentadas, mas isso fica como proposta para outra investigação.

Sugerimos para futuras pesquisas que, ao planejar seqüências didáticas que envolvam a concepção variacional, devemos explorar a interpretação dos pontos de intersecção dos gráficos construídos com os eixos coordenados e assim, favorecer o estabelecimento de conexões mais profundas entre os registros gráfico e algébrico. Além disso, que sejam desenvolvidas investigações a cerca da compreensão das noções de domínio e imagem de função para que os alunos percebam que uma função não depende apenas da relação de dependência entre duas variáveis, mas também dos valores para os quais está definida.

Ressaltamos a satisfação em realizar esta investigação como pesquisadora e como educadora. Entendemos que nosso trabalho rompeu com o distanciamento entre os alunos e o objeto estudado, proporcionando-lhes uma aprendizagem mais significativa e contemplou situações de aprendizagem convenientemente articuladas com o quadro teórico levantado. Com isso, acreditamos ter contribuído, com propostas teóricas e práticas para o desenvolvimento das pesquisas em Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ALONSO, Élen Patrícia. **Uma abordagem político-social para o ensino de funções no ensino médio.** 2004. 239 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru.

ÁVILA, Geraldo. Limites e derivadas no ensino médio? **Revista do Professor de Matemática**, Revista da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Rio de Janeiro, n. 60, p. 30-38, 2º quadrimestre, 2006.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino.** São Paulo: Contexto, 2002.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1998.

BRAGA, Ciro. **O processo inicial de disciplinarização de função na matemática do ensino secundário brasileiro.** 2003. 165 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio.** Brasília: MEC/Semtec, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN + ensino médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Departamento de Políticas de Ensino Médio. **Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais** – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2006.

BRITO MENEZES, Anna Paula de Avelar. **Contrato didático e transposição didática**: inter-relações entre os fenômenos didáticos na iniciação à álgebra na 6ª série do ensino fundamental. 2006. 410 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e métodos da didáctica da matemática. In: BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996(a).

BROUSSEAU, Guy. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (Org.). **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996(b).

CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. O professor e o tempo. **Revista Tópicos Educacionais**, Editora Universitária, Recife, v. 15, n. 1/2, p. 105-116, 1997.

CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. **A didática da matemática:** notas de aula. Recife: Centro de Educação – UFPE, 2001. Apostila.

CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. Um exemplo de situação-problema: o problema do bilhar. **Revista do Professor de Matemática**, Revista da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Rio de Janeiro, n. 50, p. 38-45, 3º quadrimestre, 2002(a).

CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. Algumas concepções sobre o ensino-aprendizagem de matemática. **Educação Matemática em Revista**, Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), São Paulo, n. 12, p. 11-15, Ano 3, 2002(b).

CÂMARA, Paulo Roberto. **Informática e educação matemática**: uma exploração de conceitos e relações com novas tecnologias. 2001. 165 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa.

CÂNDIDO, Suzana Laino. Uma experiência sobre o ensino e a aprendizagem de funções. **Educação Matemática em Revista**, Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), São Paulo, n. 8, p. 47-56, Ano 7, jun. 2000.

CARRAHER, David Willian; SCHLIEMANN, Ana Lúcia Dias. **Dividir para conquistar.** Guia do Professor. Sunburst Communications, Pleasantville, USA, 1992.

CHARNAY, Roland. Aprendendo (com) a resolução de problemas. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (Org.). **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. **Estudar matemáticas**: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** 2.ed. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 1997.

GÁLVEZ, Grécia. A didática da matemática. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (Org.). **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

GITIRANA, Verônica; ANGELIN, Breno. Abordagem de funções: uma análise de livros didáticos para o ensino médio. **Anais eletrônicos do V EPEM - Encontro Pernambucano de Educação Matemática**, Recife, 2002.

GOMES FERREIRA, Verônica Gitirana; DEHON, João. **Explorando função com um micromundo dinâmico**: uma investigação em sala de aula. Artigo não publicado, submetido à ANPED, 1999.

HENRY, Michel. **Didactique de mathématiques. Une présentation de la didactique em vue de la formation des enseignants.** Tradução de Marcelo Câmara dos Santos e Izabella A. F. G. de Oliveira. Recife: UFPE, 1991.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze. **Matemática**: ciência e aplicações. 1ª série: ensino médio. 2. ed. São Paulo: Atual, 2004.

IMENES, Luiz Márcio Pereira; LELLIS, Marcelo Cestari. **Matemática.** Ensino fundamental**.** São Paulo: Scipione, 1997.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A matemática do ensino médio.** Coleção do Professor de Matemática, v. 1. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

LIMA, Elon Lages. Crescimento linear e crescimento exponencial. **Revista do Professor de Matemática**, Revista da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Rio de Janeiro, n. 33, p. 16-25, 1º quadrimestre, 1997.

LOUREIRO, Cristina; OLIVEIRA, Maria José Correia de. Funções “escondidas”. **Educação e matemática**, Revista da Associação de Professores de Matemática (APM), Lisboa, n. 16, p. 9-10, 4º trimestre, dez. 1990.

MARKOVITS, Zvia; EYLON, Bat Sheva; BRUCHEIMER, Maxim. Dificuldades dos alunos com o conceito de função. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (Org.). **As idéias da álgebra.** São Paulo: Atual, 1995.

MIORIM, Maria Ângela. **Introdução à história da educação matemática.** São Paulo: Atual, 1998.

MOREIRA, Leonor. Na peugada de Galileu. **Educação e matemática**, Revista da Associação de Professores de Matemática (APM), Lisboa, n. 15, p.1, 3º trimestre, 1990.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de; MORETTI, Vanessa Dias. Investigando a aprendizagem do conceito de função a partir dos conhecimentos prévios e das interações sociais. **Ciência & Educação**, Escrituras, São Paulo, v. 9, n. 1, p. 67-82, abr. 2003.

PAIS, Luiz Carlos. Transposição didática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PERNAMBUCO, UNDIME-PE/SEDUC-PE. **Base curricular comum para as redes públicas de ensino de Pernambuco.** Recife, 2005.

PIRES, Célia Maria Carolino. **Currículos de matemática:** da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

PONTE, João Pedro da. O conceito de função no currículo de Matemática. **Educação e matemática**, Revista da Associação de Professores de Matemática (APM), Lisboa, n. 15, p. 3-9, 3º trimestre, 1990.

POST, Thomas R.; BEHR, Merlyn J.; LESH, Richard. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções de pré-álgebra. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (Org.). **As idéias da álgebra.** São Paulo: Atual, 1995.

SANTALÓ, Luis A. Matemática para não-matemáticos. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (Org.). **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

SILVA, Benedito Antônio da. Contrato didático. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

SIMON, Martin A.; STIMPSON, Virginia C. Desenvolvimento da representação algébrica através de diagramas. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (Org.). **As idéias da álgebra.** São Paulo: Atual, 1995.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica.** V. 1. São Paulo: Mac Graw-Hill do Brasil, 1987.