UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS
MESTRADO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

CONCEPÇÕES DE ALUNOS DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO SOBRE O SIGNIFICADO DO SÍMBOLO “=” EM CONTEXTOS ARITMÉTICOS E ALGÉBRICOS

JOSÉ DILSON BESERRA CAVALCANTI

Recife
2008

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS
MESTRADO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

CONCEPÇÕES DE ALUNOS DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO SOBRE O SIGNIFICADO DO SÍMBOLO "=" EM CONTEXTOS ARITMÉTICOS E ALGÉBRICOS

José Dílson Beserra Cavalcanti

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora composta pelos seguintes professores:

Prof.: Dr. Marcelo Câmara dos Santos (Presidente)
Instituição: UFPE

Profa. Dra. Anna Paula de Avelar Brito Menezes (Examinadora Interna)
Instituição: UFRPE

Profa. Dra. Mônica Maria Lins Lessa (Examinadora Interna)
Instituição: UFRPE

Profa. Dra. Marilena Bittar (Examinadora Externa)
Instituição: UFMS

Profa. Dra. Iranete Lima (Examinadora Externa)
Instituição: UFPE

Dissertação aprovada com distinção no dia 29 de fevereiro de 2008 – UFRPE

À meus pais
Genecy e Madalena

Aos meus irmãos
Sebastião, Karla, Thiago e Izaías.

À minha esposa e minha filha
Danielle e Clara Giovanna.

À minha avó
Josefa Bezerra do Espírito Santo.

À meus avós
Otacílio de Abreu Cavalcanti e
Antonia Alves Cavalcanti (paternos) e
Izaías Estalião Bezerra (materno) (*in memoriam*).

AGRADECIMENTOS

A conclusão desta etapa marca um momento muito importante em minha vida profissional. A realização de um sonho, a superação de tantos obstáculos e principalmente, o final de um ciclo com a abertura de novos horizontes. Reconheço que tudo o que consegui construir em minha trajetória profissional não é mérito apenas meu, e, assim, agradeço primeiramente à Deus pelo dom da vida, por todas as oportunidades que surgiram em minha vida e pela força e perseverança que senti em todos os períodos de dificuldades. Também agradeço e reconheço a todas as pessoas (pais, irmãos, amigos, esposa, filha, amigos, etc., com quem convivi até o momento. Peço a Deus que abençoe a todas estas pessoas.

Meus mais sinceros agradecimentos...

...ao meu professor e orientador, Dr. Marcelo Câmara dos Santos, por ter atendido meu pedido; por ter sido um profissional competente em suas orientações, sabendo melhor do que ninguém escutar, discutir e questionar com inteligência, humildade e responsabilidade; e, principalmente por ter sido uma pessoa tão acessível, atenciosa, compreensiva e amiga. Sempre acreditei que escolhi o melhor orientador para meus estudos e hoje, com a conclusão deste trabalho, sinto-me orgulhoso em poder dizer que sou muito grato por tudo que aprendi;

...aos diretores e equipe administrativa das escolas Sizenando Silveira e Liceu de Artes e Ofício pelo acolhimento; aos alunos que participaram desta pesquisa com tanta boa vontade e aos professores Ledevande Martins, Marli e Cristiane por todo a ajuda que prestaram;

...a todos os meus professores, em especial, Maria do Socorro Oliveira (Ensino Fundamental I); Ledevande Martins (7ª e 8ª séries); Helena Ferreira (Ensino Fundamental II e Médio) e Antonio Maciel (Ensino Médio); Maria Helena, Paulo Neves e Juscelino (AESA); Marcelo Câmara do Santos (Especialização e Mestrado); Abraão Juvêncio (Especialização); Alex Sandro Gomes (Especialização); Paula Baltar

(Especialização); Anna Paula B. Menezes (Especialização e Mestrado); Edênia, Zélia Jófili, Josinalva Menezes, Marcelo Carneiro Leão, Romildo, Heloísa Bastos, e Rosane (Mestrado);

...aos amigos e colegas com quem estudei na Educação Básica e no Ensino Superior representados por Wirander, Nadja e Rosário;

...aos colegas da Especialização em Avaliação Educacional em Matemática representados por Marleide e Cláudia;

...aos colegas da turma 2006 do Mestrado em Ensino das Ciências representados por Ricardo Bráz e Neves;

...aos colegas do grupo de Pesquisa Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática que tanto contribuíram para as discussões sobre a Álgebra Escolar, em especial, a Marcelo Câmara, a Anna Paula pela idéia de discutir concepções dos alunos sobre o sinal de igualdade, a Abraão pelas discussões calorosas que sempre tivemos e que me ajudaram tanto a refletir e, principalmente, à Iranete Lima pela colaboração e orientação no capítulo das Concepções;

...aos ilustríssimos professores Dr. Marcelo Câmara dos Santos-UFPE (Presidente), Dra. Marilena Bittar-UFMS (Examinadora Externa), Dra. Iranete Lima (Examinadora Externa), Dra. Anna Paula Avelar de Brito Menezes (Examinadora Interna) e Dra. Maria Mônica Lins Lessa (Examinadora Interna) pela disponibilidade e pelas contribuições inestimáveis para o presente trabalho;

...aos pesquisadores Dr. José Luiz Magalhães de Freitas, Dra. Marilena Bittar e Dr. Luiz Carlos Pais da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul; Dra. Jana Trgalova da Université Joseph Fourier, Grenoble – França; Dr. Jean-Claude Régnier da Université Lumière Lyon2 e Nadja Maria Acioly-Régnier do Institut Universitaire de Formation Des Maitres, França, pelos momentos de discussões que contribuíram para minha formação profissional;

...às pastorinhas, em especial, Irmã Fátima e Irmã Marli pelas conversas, discussões, e conselhos;

...por último, e de maneira muito especial, agradeço à minha família. Meus pais Professora Maria Madalena Bezerra e Genecy de Abreu Cavalcanti que me apoiaram e ajudaram a chegar até onde estou; aos meus irmãos Sebastião, Karla, Thiago e Izaías que me ajudaram lendo, pesquisando, corrigindo, imprimindo, etc.; à minha esposa Danielle e à minha filha Clara pelos abraços e sorrisos que ajudaram a tornar mais suave a jornada e a minha avó Josefa Bezerra do Espírito Santo pelos sábios conselhos.

Mantenham-me distante da sabedoria que não chora, da
Filosofia que não ri e da grandeza que não
se curva diante das crianças.
Kahlil Gibran.

RESUMO

A finalidade da presente pesquisa foi investigar as concepções dos alunos do 3º ano do Ensino Médio acerca dos significados do símbolo "=" em contextos aritméticos e algébricos. Optamos em empregar o termo concepção fundamentado nos estudos que foram analisados nos capítulos 1 e 2. O símbolo "=", por sua vez, é utilizado em todos os níveis do ensino de Matemática de maneira bastante versátil, de tal modo que, em alguns casos, as qualidades do símbolo "=", dependendo do contexto em que está inserido, nem sempre são compatíveis com a noção de igualdade. A literatura tem investigado, principalmente, a interpretação dos alunos sobre o significado do símbolo "=" em expressões correspondentes aos contextos das operações aritméticas, das igualdades aritméticas e das equações. Elaboramos dois instrumentos de investigação constituídos, cada um, de quatro itens, nos quais o símbolo "=" estava inserido, respectivamente, em expressões correspondentes aos contextos das operações aritméticas, das igualdades aritméticas, das equações e das funções. No instrumento 1, as expressões apresentavam a estrutura operação antes do "=", enquanto que, no instrumento 2, as expressões apresentavam a estrutura operação depois do "=". Também ressaltamos que apenas duas concepções dos alunos sobre o significado do símbolo "=" são generalizadamente reconhecidas na literatura: a operacional e a relacional. Em nosso estudo, conseguimos definir cinco concepções a priori (a operacional, a igualdade relacional, a equivalência em igualdade condicional, a funcional e a relacional nome-símbolo) e duas a posteriori (a símbolo separador e a operacional sintático). Os resultados que encontramos permitiram evidenciar um desencontro entre as concepções dos alunos e o significado do símbolo "=" no contexto no qual ele está inserido. Em outras palavras, a maior parte dos alunos que participaram da pesquisa apresentou concepções não compatíveis com o significado do símbolo "=" no contexto em que estava inserido. Nossos resultados também indicaram que houve uma tendência maior dos alunos em demonstrarem a concepção operacional e a concepção relacional nome-símbolo. Lembramos que a concepção operacional é associada às características particulares do símbolo "=" no contexto das operações aritméticas, enquanto que a concepção relacional nome-símbolo não é associada a nenhum contexto em particular, mas remete à relação entre o nome igualdade e o símbolo "=". Por último, ressaltamos que as concepções operacional e igualdade relacional, particularmente de natureza aritmética, foram identificadas nas respostas referentes aos contextos algébricos das equações e funções, enquanto que as concepções equivalência em igualdade condicional, funcional e operacional sintático, não foram identificadas nas respostas referentes aos contextos aritméticos das operações e igualdades.

Palavras-chave: Concepções, Sinal de Igualdade, Contextos Aritméticos e Algébricos, Álgebra, Educação Matemática.

ABSTRACT

The goal of the present research was investigate the pupils 'conceptions of the 3rd High School year about the symbol "=" in arithmetic and algebraic contexts. We have chosen to use the term conception establised in the analyzed studies in chapters1 and 2. The symbol "=" is used in all teaching Mathematics levels in versatile way, so that in some cases, the qualities of the symbol "=", depending the context that it is inserted, neither always they are compatible to the equality notion. Literature has been investigating, mainly, the interpretation of the pupils about the meaning of the symbol "=" in expressions corresponding to the arithmetic operations, of arithmetic equalities and equations. We have elaborated two investigate ways produced, each one, from four items, that the symbol "=" was inserted, respectively, into expressions corresponding to the arithmetic operations contexts, of arithmetic equalities, of equations and functions. Way 1, the expressions presented the structure operation before "=", while the way 2, the expressions presented operation structure after "=". We jut out as well that only two pupils' conceptions about the equality sign are generously recognized in Literature: the operational and relational. During our study, we got to define five conceptions *a priory* (operational, equality relational, equivalence in conditional equality, functional and name – symbol relational) and two *a posteriory* (separator symbol and syntactic operational). The found results showed a discordance between the pupils conceptions and the meaning of "=" symbol in the context that it is inserted. Our results also indicated there was a major tendency of students showing the operational conception and the relational conception name-symbol. It is important to realize that the operational conception is associated to own characteristics of the "=" symbol in the arithmetic operations, while that the relational conception name-symbol isn't associated to any context in particular, but it send to relation between the equality name and the "=" symbol. Finally, we jut out that the operational conceptions and equality relational were found in answers refer to the algebraic context of equations and function, while that equivalence conceptions in conditional equality, functional and syntactic operational, they weren't found in answers refer to the arithmetic contexts of operations and equalities.

Key-words: Conceptions, Equality Sign, Arithmetic and Algebraic Contexts, Algebra, Mathematics Education

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

INTRODUÇÃO

INTRODUÇÃO

O “=” é um dos símbolos mais utilizados na Matemática e em outras Ciências, como a Física, por exemplo. No ensino de Matemática, a versatilidade com que ele é empregado e principalmente sua presença em todos os níveis de ensino confirmam a relevância deste símbolo. O significado mais comum e popular desse símbolo é afirmar que uma coisa *é igual* à outra, daí o nome sinal de igualdade. Entretanto, alguns questionamentos envolvendo o sentido e a maneira como o símbolo “=” é utilizado na Matemática e, particularmente no ensino de Matemática, levou-nos a refletir sobre a possibilidade de realizarmos nossa pesquisa com o olhar voltado para este símbolo.

O primeiro a utilizar o símbolo “=” como sinal de igualdade foi o inglês Robert Recorde, em 1557. Entretanto, este símbolo incorporou, ao longo dos tempos, uma diversidade de utilizações que, em alguns casos, as qualidades do símbolo “=”, dependendo do contexto no qual está inserido, nem sempre são compatíveis com a noção de igualdade. Desta maneira, se levarmos em consideração os currículos tradicionais e a prática usual do ensino de Matemática na Educação Básica, podemos argumentar que existe certa linearidade na organização dos conteúdos que fazem uso do símbolo “=” no seu processo de ensino-aprendizagem.

Por exemplo, o símbolo “=” é freqüentemente introduzido logo cedo, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, e uma das primeiras utilizações desse símbolo na escola é no contexto das operações aritméticas, em expressões do tipo “3 + 4 =”. O símbolo “=” não parece, nesta expressão, estar designando uma igualdade, pois um de seus lados não é dado. Conseqüentemente, em situações deste tipo, o símbolo “=” é freqüentemente utilizado como um comando para calcular e, em seguida, colocar a resposta/resultado do cálculo, adquirindo assim, status semelhante a um operador.

Em seguida, o “=” é inserido no contexto das igualdades aritméticas (ex.: 3 + 4 = 7) e, neste contexto, diferentemente do anterior, não há lado faltando, nem tampouco o “=” indica que é para calcular. Na verdade, o significado do símbolo “=” numa igualdade do tipo “3 + 4 = 7” indica uma relação de igualdade que engloba as idéias de identidade única de significado, ao nível do número representado, e equivalência entre as diferentes representações simbólicas deste número, como define Vergnaud (1994). Em outros termos, o “=” como símbolo relacional implica em uma comparação entre os lados de uma igualdade e pode ser entendido como “é o mesmo que”.

Convém ressaltar que é na Aritmética, nos contextos das operações e das igualdades, que os alunos encontram as primeiras utilizações do símbolo “=” e, por um longo período, aproximadamente até o 7º ano, estas utilizações são praticamente as únicas. A linguagem aritmética, por sua vez, obedece a certas regras nas quais a expressão “7 + 5 =” é admissível, enquanto que “7 + = 5” não é (FREUDENTHAL, 1983). Estas regras envolvem diretamente a utilização do símbolo “=” e, juntamente com a instrução habitual que, comumente, apresenta aos alunos o “=” sempre depois da operação, conduzem os alunos a compreenderem o significado deste símbolo no sentido de anunciar simplesmente o resultado de um cálculo (ex.: “e a resposta é”). Assim, Brousseau, Davis e Werner (1986) afirmam que as crianças mais jovens sentem-se confortáveis com a tarefa “3 + 2 =” e também com a igualdade “3 + 2 = 5”, mas não são dispostos a aceitarem expressões como, por exemplo, “5 = 3 + 2” e “3 + 2 = 3 + 2”.

A partir do 7º ano, por meio dos estudos envolvendo o contexto das equações, considera-se que os alunos estão sendo introduzidos no ensino de Álgebra. Se na Aritmética o discurso e o raciocínio tratam a igualdade como um procedimento (FREUDENTHAL, 1983; BROUSSEAU e ANTIBI, 2000) é comum compreender o “=” como o símbolo que mostra o lugar do resultado. Nessa direção, Freudenthal (1983) levanta o questionamento sobre o que significaria o resultado numa expressão como “7 + □ = 12”. Considerando que uma equação pode ser definida como uma igualdade condicional (TAYLOR, 1910)[1], é possível entender a expressão “7 + □ = 12” como similar à equação “7 + x = 12”. Nesta perspectiva, argumentamos que a idéia de que o “=” mostra o lugar do resultado não é compatível com o contexto das equações, pois, em “7 + x = 12”, o resultado é 5 e não 12. Assim, o símbolo “=” numa equação como “7 + x = 12” ao invés de indicar o resultado, na verdade denota uma relação de equivalência em igualdade condicional que permite, para certos propósitos, substituir um item por outro (GATTEGNO, 1974) e resolver, então, a equação, determinando-se o valor da incógnita.

---

[1] Para Taylor (1910), uma igualdade pode ser distinguida em condicional e incondicional que ele denomina de equação e identidade, respectivamente.

No ensino de Matemática brasileiro, o símbolo "=" passa a ser utilizado no contexto das funções geralmente a partir do nono ano. Uma expressão tal como "y = 3x + 5" pode ser entendida como um exemplo de função afim. Nessa expressão, o símbolo "=" não está indicando o lugar do resultado, como no contexto das operações aritméticas; não representa uma relação de igualdade, como no contexto das igualdades aritméticas; também não corresponde à uma relação de equivalência, como no contexto das equações, pois, não é possível, por meio da utilização das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva, determinar o valor das variáveis x e y. Deste modo, o símbolo "=" numa expressão como "y = 3x +5", indica uma relação com características particulares que implica na idéia de dependência causal entre as variáveis dependente e independente, ou seja, indica que o valor de y depende, ou está em função de x.

Então, o que queríamos demonstrar até o momento, é que o símbolo "=" tem seu significado modificado ao longo da Educação Básica, em razão do contexto no qual está inserido. No entanto, é possível que este fato não seja elucidado na sala de aula. Brousseau e Antibi (2000), por exemplo, levantam a hipótese de que é possível que, no decorrer da vida escolar de um aluno, não seja realizado nenhum estudo explícito sobre os significados do sinal de igualdade. Os autores acrescentam, ainda, que os próprios professores podem não ter verdadeira consciência destes significados. Dessa maneira, entendemos que estas considerações sinalizam a abertura para diversas possibilidades de pesquisas sobre o sinal de igualdade.

Por exemplo, poderiam ser realizados estudos investigando como este símbolo é introduzido e abordado nas diferentes expressões nas quais ele é utilizado (e.g. operações, igualdades, identidades, equações, funções, fórmulas); como os livros didáticos tratam os significados do sinal de igualdade; como os professores e/ou os alunos compreendem este símbolo; qual a importância de compreender bem as características do significado do símbolo "=" na expressão em que ele está inserido; se existem dificuldades e erros comuns que podem remeter à compreensão do significado do sinal de igualdade; se a não compreensão dos aspectos que permeiam o símbolo "=" pode gerar dificuldades e encaminhar os alunos a cometerem erros.

Outros estudos poderiam ser realizados com a finalidade de utilizar modelos teóricos, tais como, Concepções, Transposição Didática, Contrato Didático, Relação ao Saber, para nortear a investigação do funcionamento dos aspectos que permeiam o sinal de igualdade enquanto objeto matemático que é colocado no âmbito das aulas de Matemática, em todos os níveis do Ensino Básico, e até mesmo no ensino Superior. Por último, ressaltamos que também poderiam ser realizados estudos com a finalidade de investigar os aspectos de continuidades e rupturas envolvendo os significados do sinal de igualdade em Aritmética e Álgebra.

Em nossa pesquisa bibliográfica, evidenciamos que o sinal de igualdade vem sendo investigado há mais de trinta anos no cenário internacional das pesquisas em Educação Matemática, enquanto que, no cenário nacional, não conseguimos encontrar pesquisas que tenham, especificamente, utilizado o sinal de igualdade como objeto de pesquisa.

Percebemos também que, mesmo as possibilidades de investigação sobre o sinal de igualdade sendo bastante amplas, encontramos, basicamente, apenas dois focos de investigação: um engloba o estudo das compreensões dos alunos ou concepções sobre o significado do sinal de igualdade (e.g. BEHR, ERLWANGER e NICHOLS, 1976; 1980; SHOECRAFT, 1989; CAMICI *et. all.,* 2002; FREIMAN e LEE, 2004; McNEIL e ALIBALI, 2005; KNUTH *et. all.,* 2006; OKSUZ, 2007; CAVALCANTI e CÂMARA DOS SANTOS, 2007a; 2007b) e o outro engloba estudos experimentais acerca de como fornecer condições para que o aluno compreenda adequadamente a noção de igualdade e o significado do símbolo “=”, superando ou evitando, assim, concepções errôneas (e.g. DENMARK, BARCO & VORAN, 1976; KIERAN, 1981; SÁENZ-LUDLOW e WALGAMUTH, 1998; MOLINA, 2006; JONES e PRATT, 2005; THEIS, 2003).

Na década de setenta, Behr, Erlwanger e Nichols (1976) realizaram entrevistas com crianças de seis a doze anos de idade com o objetivo de verificar se estas crianças consideravam o “=” como símbolo operacional ou relacional. Eles utilizaram expressões de ação do tipo $a + b = \square$ e $\square = a + b$ e expressões de não ação como $3 = 3$ (sem sinais de operação) e $2 + 1 = 1 + 2$ (com sinais de operação em ambos os lados da igualdade. Behr, Erlwanger e Nichols (ibid.) concluíram, então, que os alunos consideram o “=” como um sinal de fazer algo, e que há uma forte tendência em não aceitar expressões nas quais não há sinais de operação precedendo-o.

Nesta mesma década, Denmark, Barco e Voran (1976) desenvolveram um estudo experimental com alunos da 1ª série no qual o foco era o conceito de igualdade. Estes autores organizaram atividades centradas na idéia de equilíbrio de balanças de dois pratos. Os autores verificaram que a primeira concepção do sinal de igualdade não foi relacional, mas sim operacional. Outro ponto evidenciado, foi que os alunos, ao final do estudo, adquiriram certa flexibilidade na aceitação do uso do “=” como símbolo relacional em uma variedade de situações, como, por exemplo, 3 = 3, 3 + 2 = 4 + 1, 5 = 4 + 1, porém, em algumas ocasiões, prevalecia ainda uma concepção operacional.

Baroody e Ginsburg (1983) avaliaram a compreensão do sinal de igualdade de três grupos de alunos da primeira, segunda e terceira série da escola primária, que haviam recebido instrução baseada num currículo matemático denominado Wynroth, que define o sinal de igualdade como uma expressão de equivalência numérica, ou seja, como ‘o mesmo número que’. Após o período de desenvolvimento do currículo (aproximadamente sete meses), Baroody e Ginsburg (ibid.) entrevistaram os alunos individualmente sobre a veracidade ou não de sentenças numéricas de ação e de não ação, e se a forma das sentenças lhes era familiares ou não. Mesmo os resultados demonstrando que a instrução obteve certo êxito, no que diz respeito ao desenvolvimento da compreensão do sinal de igualdade como símbolo relacional, estes autores afirmam que, psicologicamente, o símbolo “=” não foi facilmente separado da visão operacional.

Saenz-Ludlow e Walgamuth (1998) também analisaram a interpretação de igualdade e do sinal de igualdade de uma turma de alunos da 3ª série que participaram de um ensino experimental baseado no sócio-construtivismo. Elas verificaram que os alunos inicialmente interpretaram o “=” como um comando para a realização de uma operação aritmética, e que foi menos natural para eles interpretá-lo como um símbolo relacional para comparar duas quantidades.

Theis (2003) realizou um estudo com a finalidade de descrever o processo de compreensão do sinal de igualdade de três alunos do primeiro ano do ensino fundamental I. No pré-teste ele verificou que era generalizada a interpretação do sinal de igualdade como símbolo operacional. Suas conclusões também confirmam a tendência que vem sendo demonstrada em relação à persistência dos alunos em recorrerem à uma interpretação operacional do sinal de igualdade. Nesse sentido, ele realça que as crianças são muito reticentes, de início, em aceitar outro significado do sinal de igualdade diferente daquele que construíram anteriormente.

Elucidamos que as pesquisas de Denmark, Barco e Voran (1976), Behr, Erlwanger e Nichols (1980), Baroody e Ginsburg (1983), Saenz-Ludlow e Walgamuth (1998), Theis (2003) são centradas numa problemática que envolve a interpretação dos alunos acerca do significado do símbolo "=" no âmbito das séries iniciais, isto é, particularmente nos contextos aritméticos. Em síntese, estes estudos têm relatado que o símbolo "=" é interpretado, pelas crianças das séries iniciais, primeiramente como um *sinal de fazer algo* antes que como um *símbolo relacional* (DENMARK, BARCO & VORAN, 1976; BEHR, ERLWANGER e NICHOLS, 1976; 1980; GINSBURG, 1977; SAENZ-LUDLOW e WALGAMUTH, 1998; THEIS, 2003).

Acreditamos que o que vem justificando as pesquisas sobre o sinal de igualdade é o fato de que é possível que as concepções dos alunos não sejam sempre compatíveis com os significados do símbolo "=" no contexto no qual está inserido, e isto acaba configurando-se como uma dificuldade que pode levá-los ao erro. Nesse sentido, as reformas curriculares NCTM (2000) e PERNAMBUCO (2006), entre outras, que vêm sendo realizadas nos últimos anos, defendem que algumas idéias algébricas, ou o pensamento algébrico, deve ser desenvolvido logo nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Esta atenção ao estudo da Álgebra desde cedo pode ser entendida como uma conseqüência das dificuldades e erros recorrentes que têm sido evidenciados pelas pesquisas realizadas na problemática da Álgebra escolar nas últimas décadas.

Algumas das dificuldades dos alunos que se iniciam em Álgebra correspondem à interpretação de símbolos como + e "=" (BOOTH, 1995). Particularmente, o estudo da Álgebra, no que diz respeito ao sinal de igualdade, requer dos alunos uma compreensão bidirecional reconhecendo que este símbolo indica uma relação de equivalência. Em outras palavras, deve haver uma ampliação do significado do "=" uma vez que sua interpretação como símbolo operacional, quando utilizada em outros contextos, pode conduzir o aluno a escrever expressões inaceitáveis como "4 + 3 = 7 x 3 = 21" (BROUSSEAU e ANTIBI, 2000); escrever a solução de um problema contendo duas operações (23 + 31 = 54 e 54 – 14 = 40) sobre uma única linha (23 + 31 = 54 – 14 = 40) (VERGNAUD, CORTES e FAVRE-ARTIGUE, 1987); colocar 12 ou 17 na □ referente à expressão 8 + 4 = □ + 5 (FALKNER, LEVI e CARPENTER, 1999), etc.

Segundo Brousseau e Antibi (2000), este significado operacional do símbolo "=", freqüentemente caracterizado por sua utilização na Aritmética das séries iniciais para anunciar simplesmente o resultado de um cálculo, conduz a uma interpretação bastante afastada da que se espera mais tarde em Álgebra. Booth (1995) também ressalta que a idéia de que o sinal de igualdade possa ser visto como indicador de uma relação de equivalência, ao invés de um símbolo operacional, pode não ser percebida de imediato pelo aluno. No entanto, esta autora destaca que esta idéia é realmente necessária para a compreensão algébrica, sendo necessário também acentuar seu valor bidirecional.

Compreendemos que tais considerações justificam as pesquisas que investigaram as concepções dos alunos das séries do Ensino Fundamental II sobre o significado do símbolo "=". Kieran (1981), por exemplo, verificou que, no contexto das equações, alunos de doze a catorze anos consideram o sinal de igualdade como um símbolo unidirecional que precede uma resposta numérica. Tal fato também foi anteriormente constatado pelos estudos de Wagner (1977 *apud* BOOTH, 1995) com alunos de dezessete anos de idade.

Demonty e Vlassis (1999) analisaram os resultados de uma prova de matemática que foi aplicada no início do primeiro ano do ensino secundário (na Bélgica). A prova, por sua vez, envolvia diversos domínios matemáticos implicados na aprendizagem da Álgebra e foi destinada a avaliar as aquisições pré-algébricas de uma população de 1083 sujeitos. Entre outros aspectos investigados, os autores verificaram que o sinal de igualdade é considerado numa perspectiva operacional como o "começo do resultado".

Knuth *et all* (2006) realizaram um estudo com 177 alunos da 6ª à 8ª séries com a finalidade de investigar, entre outras coisas, a compreensão do sinal de igualdade na igualdade aritmética 3 + 4 = 7. No geral, os resultados obtidos demonstraram que a maior parte dos alunos compreendeu o significado do "=" como um símbolo operacional. Apenas na 7ª série é que o percentual de alunos que compreendem o "=" como um símbolo operacional foi menor que o percentual de alunos que compreendeu o "=" como um símbolo relacional.

Cavalcanti e Câmara dos Santos (2007b) solicitaram que alunos da 6ª série analisassem e respondessem qual o significado do símbolo "=" em quatro expressões diferentes, sendo duas igualdades aritméticas, 14 + 8 = 22 e 22 = 13 + 9, e duas equações, 2x = 14 + 8 e 13 – 9 = 2x. No geral, os autores verificaram que a maior parte dos alunos compreendeu o "=" como símbolo relacional e não como operacional, como outras pesquisas relataram. Contudo, Cavalcanti e Câmara dos Santos (ibid.) também esclarecem que a diferença entre os percentuais de respostas categorizadas como operacional e relacional foi, de certo modo, bastante próximo.

Uma hipótese para estes resultados encontrados por Cavalcanti e Câmara dos Santos (op. cit.) pode ser encontrada em McNeil e Alibali (2005). Estas autoras conduziram um estudo para analisar como a compreensão do sinal de igualdade modifica-se em função da experiência em Matemática e da variação de contextos. Os participantes desta pesquisa foram alunos com diferentes níveis de experiência matemática (55 alunos de 1ª à 6ª série, 25 da 7ª série, 35 da graduação em Psicologia e 12 da pós-graduação em Física). McNeil e Alibali (ibid.) solicitaram que os participantes examinassem o símbolo "=" em um dos três seguintes contextos: (a) sinal de igualdade sozinho "="; (b) em um problema de adição "4 + 8 + 5 + 4 = __ ou (c) em um problema de equivalência "4 + 8 + 5 = 4 + __".

Segundo McNeil e Alibali (op. cit.), algumas conclusões apontam que "o modo de modificação do conhecimento nos alunos interpretando o sinal de igualdade depende do contexto no qual o conhecimento é elicitado" (p. 301). Em outros termos, o contexto influenciou as interpretações dos alunos sobre o sinal de igualdade. Particularmente, isto foi mais observado com os alunos de 7ª série, para quem a interpretação relacional estava apenas começando a emergir, com o estudo das equações.

Em linhas gerais, as décadas de pesquisas sobre o sinal de igualdade tornaram reconhecida a necessidade de que o "=" seja adequadamente compreendido pelos alunos, principalmente aqueles que estão iniciando os estudos em Álgebra. A hipótese subjacente é que a idéia de que o sinal de igualdade seja compreendido como indicador de uma relação de equivalência em vez de um símbolo operacional, é imprescindível para o desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno. No entanto, como Kieran (1981) e Booth (1995) enfatizaram, a idéia do "=" como sinal de fazer algo persiste por todo o Ensino Fundamental.

Concordamos que a interpretação do "=" como indicador de equivalência é relevante para os alunos aprenderem Álgebra. Contudo, consideramos que apenas isto não é suficiente, pois, acreditamos que, no contexto das funções, uma outra interpretação do símbolo "=" seria mais adequada, no caso, como indicador de uma relação dinâmica que implica em uma dependência entre variáveis.

Além do mais, acreditamos que as concepções dos alunos sobre o significado do símbolo "=" deveriam ser apoiadas no contexto no qual este símbolo está inserido. Nesse sentido, após analisarmos criteriosamente os estudos já realizados acerca das concepções dos alunos sobre o significado do símbolo "=", achamos que alguns aspectos ainda poderiam ser investigados nesta direção.

Por exemplo, as pesquisas que investigaram as concepções dos alunos sobre o significado do símbolo "=" abordaram apenas o contexto das operações aritméticas, das igualdades aritméticas e das equações. Não encontramos nenhum estudo que tenha verificado a concepção dos alunos sobre o significado do "=" no contexto das funções. Outro aspecto que verificamos é que apenas duas concepções dos alunos sobre o significado do símbolo "=" são generalizadamente reconhecidas e discutidas, no caso, uma operacional e outra relacional. Também não encontramos estudos realizados, especificamente, sobre as concepções de alunos do Ensino Médio sobre os significados do símbolo "=".

Deste modo, esclarecemos que o foco da nossa pesquisa insere-se na problemática dos estudos acerca das concepções dos alunos sobre o significado do símbolo "=". Como não encontramos estudos especificadamente com alunos do Ensino Médio, escolhemos este nível para realizarmos nossa pesquisa. Baseado no que discutimos sobre a utilização do símbolo "=" na Educação Básica, acreditamos que quatro contextos, dois aritméticos (operações e igualdades) e dois algébricos (equações e funções) envolvem significados distintos deste símbolo e que deveriam ser compreendidos pelos alunos.

Dados estes esclarecimentos, escolhemos como problema de pesquisa, as concepções dos alunos do 3º ano do Ensino Médio sobre o significado do símbolo "=" em contextos aritméticos e algébricos. Para conseguirmos atingir este objetivo, escolhemos quatro contextos, sendo dois aritméticos (operações e igualdades) e dois contextos algébricos (equações e funções). Assim, buscamos identificar alguns aspectos específicos tais como, as concepções dos alunos sobre o significado do símbolo "=" no contexto das operações aritméticas, das igualdades aritméticas, das equações e das funções. Ressaltamos ainda, que também procuramos identificar se as estruturas das expressões (operação antes do "=" ou operação depois do "=") influenciavam estas concepções.

A organização da presente pesquisa foi estrutura nos seguintes capítulos: *quadro teórico das concepções; quadro teórico do sinal de igualdade; metodologia de investigação; análise dos dados e discussão dos resultados, e considerações finais*. Com o intuito de facilitar a compreensão da pesquisa que realizamos, descreveremos sucintamente, cada um dos respectivos capítulos que a constitui.

O primeiro capítulo corresponde ao quadro teórico das Concepções, primeira parte da fundamentação teórica de nossa investigação. Neste capítulo, realizamos um estudo sobre as utilizações do termo concepção, o termo concepção como uma noção teórica em Educação Matemática e, por fim, apresentamos como procederá a utilização deste termo na presente pesquisa.

O segundo capítulo corresponde ao quadro teórico do Sinal de Igualdade. Neste quadro teórico, realizamos um estudo sobre a história do sinal de igualdade, conceitos matemáticos associados ao sinal de igualdade, significados do sinal de igualdade, os significados do sinal de igualdade na perspectiva dos alunos (concepções), e por último, concluímos este quadro teórico com algumas considerações gerais sobre o sinal de igualdade.

O terceiro capítulo corresponde à nossa metodologia de investigação. Neste capítulo, realizamos uma contextualização, articulando nossa problemática com nosso quadro teórico. Em seguida, descrevemos nossas categorias de análise e o método que vamos utilizar na concretização de nosso estudo.

O quarto capítulo é a análise dos dados e discussão dos resultados. Neste capítulo, categorizamos os dados obtidos na aplicação dos instrumentos de investigação e discutimos os resultados encontrados à luz dos aportes teóricos do capítulo referente à fundamentação teórica.

O quinto e último capítulo concerne às considerações finais. Neste capítulo, apresentamos um resumo do nosso estudo, enfatizamos os principais resultados obtidos na análise dos dados e indicamos algumas reflexões para futuras pesquisas, que podem esclarecer aspectos que não contemplamos e aprofundar a discussão sobre problemáticas envolvendo o sinal de igualdade.

CAPÍTULO 1
CONCEPÇÕES

CAPÍTULO 1
QUADRO TEÓRICO DAS CONCEPÇÕES

Nosso objeto de pesquisa se insere na problemática do estudo das concepções dos alunos acerca do sinal de igualdade. Para dar conta desta investigação, consideramos relevante a escolha de um quadro teórico que permita uma discussão sobre o significado do termo “concepção”. Dessa maneira, realizamos um estudo acerca da utilização deste termo nas pesquisas em Educação Matemática com a finalidade de esclarecer como ele foi utilizado na presente pesquisa.

1.1 Utilizações do termo concepção

Nas investigações em Didática das Ciências Físicas, por exemplo, no período de 1980 a 1990, é comum encontrarmos uma pluralidade de termos como, representações, concepções, misconceptions[2], estrutura alternativa, raciocínio espontâneo, modelo espontâneo, dando a entender sentidos muitos próximos uns dos outros (TIBERGHIEN, 2005 *apud* LIMA 2006).

O termo concepção é utilizado de maneira bastante diversificada em muitas pesquisas em Educação Matemática. Dossey (1992) utiliza, em um mesmo estudo, o termo concepção com sentidos diferentes, sem, contudo, defini-lo formalmente. Por exemplo, entre outros tipos de uso do termo concepção, o autor discute *concepções da Matemática*, relacionando a natureza da Matemática aos trabalhos de Aristóteles, Platão, Kant, Descartes, dos estudiosos dos séculos XIX e XX, e, das *visões modernas*. Em seguida aborda as concepções de professores de Matemática apontando que estas podem influenciar bastante a maneira que a Matemática é caracterizada no ensino na sala de aula.

---

[2] Desse ponto em diante utilizaremos a tradução para o português, como: concepção errônea;

Câmara dos Santos (2002) discute três concepções sobre o ensino-aprendizagem de Matemática: (1) a *concepção baldista* que parte da idéia de que, “no momento de entrar em contato com um novo objeto de conhecimento matemático, a cabeça do aluno se apresenta como um balde vazio” (p. 11) que deve ser preenchido pelo conhecimento ensinado pelo professor. (2) a *concepção escadinha*, como modelo representativo da pedagogia por objetivos e instrução programada, apoiada na linha behaviorista de pesquisas em psicologia. (3) a *concepção sócio-construtivista*, fundamentada nos trabalhos em psicologia genética e social e em Didática da Matemática. Na verdade, a escolha do termo concepção aqui utilizada parece ser pragmática, como mostra a citação abaixo:

> *O presente texto tem por objetivo colocar em evidência algumas concepções mais freqüentes sobre o que significa ensinar e/ou aprender em matemática, a concepção baldista, a concepção escadinha e a concepção sócio-construtivista. Pelo seu caráter didático, o texto apresenta, sem dúvida, um aspecto caricatural dos três modelos. Conseqüentemente, não pretendemos aqui tratar de “teorias da aprendizagem”, que encontrariam lugar em estudos mais aprofundados e mais amplos; por esse motivo preferimos utilizar o termo “concepção”, ao invés de “teoria” (*CÂMARA DOS SANTOS, 2002, p. 11*).*

As concepções de ensino-aprendizagem de Matemática, as quais este autor às vezes chama de modelos, remetem à teorias de aprendizagem, que, pelo caráter didático do texto, não seria adequado tratar sem um devido aprofundamento. Câmara dos Santos (ibid.) justifica, assim, a utilização do termo concepção, ao invés do termo teoria.

Usiskin (1995) empregou o termo concepção para distinguir a natureza da Álgebra da Escola Média do ponto de vista dos contextos matemáticos nos quais as variáveis[3] aparecem. Esse autor afirma que há uma relação intrínseca entre as finalidades do ensino da Álgebra, as concepções acerca dessa matéria e a utilização de variáveis:

> **As finalidades da álgebra** *são determinadas por, ou relacionam-se com*, **concepções** *diferentes* **da álgebra** *que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos* **usos das variáveis** (USISKIN, 1995. p. 13).

---

[3] Usiskin (1995) explica que, na Álgebra da Escola Média, as letras são comumente chamadas de variáveis. Assim, a palavra variável é usada de maneira ampla e engloba os sentidos das letras na Álgebra da Escola Média.

Podemos argumentar que, em Usiskin (1995), o termo concepção parece remeter à natureza e estrutura da Álgebra Escolar do Ensino Médio. Dependendo dessa natureza, que é determinada pelos diversos usos das variáveis, têm-se diferentes concepções. Nessa direção o autor define quatro concepções: Álgebra como aritmética generalizada; Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas; Álgebra como estudo de relações entre grandezas e Álgebra como estudo das estruturas.

Fiorentini, Miorin e Miguel (1993, *apud* CURY *et. al*. 2002) utilizam o termo concepção para duas finalidades: a caracterização da Álgebra enquanto ramo da Matemática e a caracterização do ensino de Álgebra no Brasil, numa perspectiva histórica.

1) Caracterização da Álgebra enquanto ramo da Matemática

No que concerne a esta utilização, os autores distinguem quatro tipos de concepções: *concepção processológica; concepção lingüístico-estilística; concepção lingüístico-sintático-semântico e concepção lingüístico-postulacional*.

- Na concepção processológica, a Álgebra é considerada como um conjunto de procedimentos, como, técnicas, artifícios, processos, métodos, etc., para resolução de determinados problemas.

- Na concepção lingüístico-estilística, a Álgebra é considerada como uma linguagem específica e artificialmente criada para expressar os procedimentos de resolução de problemas.

- A concepção lingüístico-sintático-semântico considera a Álgebra como uma linguagem específica e concisa, contudo o seu aspecto principal não reside propriamente em seu domínio estilístico, mas em sua dimensão sintático-semântica;

- Na concepção lingüístico-postulacional, a Álgebra é considerada como uma linguagem simbólica, mas imprime aos signos lingüísticos um grau de abstração e generalidade que lhes permite abarcar as estruturas comuns a todos os ramos da Matemática.

2) Caracterização do ensino de Álgebra no Brasil, numa perspectiva histórica

Com relação a esta utilização do termo concepção, Fiorentini, Miorin e Miguel (1993) analisaram elementos históricos e distinguiram três concepções de Educação Algébrica.

a) A concepção lingüístico-pragmática referente ao ensino baseado em técnicas que enfatiza o transformismo algébrico dissociado das situações reais. Esta concepção foi predominante durante o século XIX e estendeu-se até a metade do século XX.

b) A concepção fundamentalista-estrutural centrada nos estudos das propriedades estruturais das operações para justificar logicamente cada passagem usada no transformismo algébrico, mas procurando dar uma fundamentação aos vários campos da Matemática e predominante nas décadas de 1970 e 1980.

c) A concepção fundamentalista-analógica que surgiu após o fracasso da Matemática Moderna e é caracterizada pela recuperação do valor instrumental da Álgebra, mas fazendo uso de recursos analógicos, geométricos (uso da noção de área para ensinar produtos notáveis) ou físicos (uso da balança de dois pratos para ensinar resolução de equações).

Lins e Gimenez (1997) também utilizam concepção para falarem do ensino de Álgebra, apontando a existência de diversas *Concepções da Educação Algébrica*. Para caracterizar e distinguir tais concepções, eles se fundamentam na idéia de atividade algébrica[4]. Um fato interessante, é que estes autores apresentam um tópico como "As diversas concepções da educação algébrica" (p.105), mas quando vão discuti-las eles empregam os termos: tendências, abordagem e visão.

Por exemplo, eles utilizam a expressão "tendência letrista" para relatar a Concepção de Educação Algébrica (CEA) fundamentada no cálculo com letras (p. 105). Em seguida, a expressão "abordagens facilitadoras" é utilizada para mencionar a CEA fundamentada ainda numa linha letrista, mas, acrescida de outros elementos (pp. 107-108). Encontramos, ainda, a expressão "visão de educação algébrica" relatando a CEA Álgebra como Aritmética generalizada (p. 110).

---

[4] A atividade algébrica consiste no processo de produção de significados para a álgebra (LINS e GIMENEZ, 1997).

A exemplo de Lins e Gimenez (1997) que, para discutirem as CEA empregaram os termos tendência, abordagem e visão, podemos argumentar que é comum encontrarmos na literatura em Educação Matemática, diferentes termos teóricos, tais como, concepção, crenças, modelos, visão, opinião, etc., empregados simultaneamente sem que seja realizada uma distinção clara de seus significados.

Em seu trabalho, Molina (2005) apresenta resultados das pesquisas de Ruiz (1993) e Flores (1998) acerca da noção de concepção em Didática da Matemática. Para estes autores, o termo concepção tem sido abordado com sentidos próximos a outros termos relacionados, como por exemplo, crenças, modelo, representação, a 'definição de um conceito' e a 'imagem de um conceito'.

Cury (1994), pesquisando as concepções de Matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos[5], realiza um estudo teórico sobre os significados dos termos concepção e crenças. Nesse estudo, Cury (ibid) evidencia que alguns autores não diferenciam o termo concepção de outros. Ela afirma que Ernest (1991), por exemplo, não fez uma distinção clara entre os termos *concepção*, *crença, opinião* (ou ponto de vista, visão) e *modelo*[6].

Ernest (1991) *apud* Cury (1994), considerando que o conhecimento é um fator importante, contudo insuficiente para estabelecer as diferenças entre as práticas, faz as seguintes considerações:

> *Os componentes principais das crenças dos professores de matemática são: sua opinião ou concepção sobre a natureza da matemática; seu modelo ou opinião sobre a natureza do ensino de matemática; seu modelo ou opinião sobre o processo de aprendizagem de matemática* (ERNEST, 1991, p.250 *apud* CURY, 1994, p. 31).

Em seguida acrescenta:

> *A concepção do professor sobre a natureza da matemática é seu sistema de crenças relativamente à matemática como um todo. Tais pontos de vista formam a base da filosofia da matemática, embora as opiniões de alguns professores podem não ter sido elaboradas em filosofias completamente articuladas.(...) As concepções do professor sobre a natureza da matemática de forma alguma têm que ser opiniões conscientemente definidas; antes, elas*

---

[5] Tese de Doutorado.
[6] Em inglês, *conception*, *belief*, *view* e *model*, respectivamente.

> *podem ser filosofias implicitamente mantidas* (Ibid., p.250 *apud* CURY, 1994, p. 31).

Na primeira citação, o autor dá a entender que o termo *crenças* englobaria outros termos como, concepção, opinião e modelo, enquanto que na segunda, o autor parece indicar que as concepções é que englobam as crenças, de forma a tornar-se sinônimo de sistema de crenças (CURY, 1994).

Na literatura em Educação Matemática encontramos também diversos termos e expressões que parecem serem derivados do termo concepção, como, por exemplo, *preconception*[7], concepção errônea, concepções alternativas, concepções espontâneas, concepções ingênuas, todas se referindo a um mesmo objeto, isto é, ao conhecimento dos alunos, contudo, evidenciando aspectos particulares entre si.

Sierpinska (1989 *apud* LABRAÑA, 2001) usa o termo *concepção espontânea* para analisar aspectos intuitivos dos aprendizes a respeito de determinados conceitos matemáticos. Joshua (1989) denomina de concepções ingênuas dos estudantes as apreciações incorretas que são utilizadas como base ativa de raciocínios e práticas, e que muitas vezes tornam-se dificuldades a uma aprendizagem correta.

Encontramos também uma distinção entre as concepções iniciais, referida por Labraña (2001) como pré-concepção, que são prévias ao ato educativo concreto, e outras que são "derivadas do ato de ensino" e que podem ser subdivididas em: *concepções controladas-provocadas e incontroladas-interpretações pessoais derivadas do processo de ensino* (EL BOUAIZZAUI, 1988 *apud* LABRAÑA, 2001, p. 22). Dolores e Valero (2004), por sua vez, afirmam que:

> *as concepções dos estudantes, exteriorizadas por meio de diversas formas de representações lingüísticas, têm sido estudadas pelos investigadores em diversos campos e têm envolvido conceitos como os obstáculos epistemológicos (Bachelard, 1988; Sierpinska, 1992), os ontogenéticos e os obstáculos didáticos (Brousseau, 1997), as imagens conceituais (Tall e Vinner, 1981), as concepções espontâneas (Pozo, 1996; Farfán, 1997), as concepções pré-científicas, as concepções alternativas (Confrey, 1990; Mevarech e Kramarsky, 1997)* (DOLORES e VALERO, 2004, p. 48).

Kaldrimidou e Tzekaki (2005) realizaram um estudo acerca da utilização do termo concepção nas pesquisas e apontam que ele vem sendo utilizado para quatro finalidades:

---

[7] Pré-concepção;

A. O termo concepção é usado para se referir às múltiplas aproximações (expressões e sentidos) de um conceito matemático. Nessa categoria, incluem-se várias pesquisas que empregam concepção para discriminar entre diferentes aspectos de um conceito matemático, conforme sua definição e o contexto no qual ele aparece. Ela explica que um exemplo desta utilização pode ser encontrado no estudo de Selden e Selden (1992);
B. O termo concepção é utilizado para identificar a diferença entre o sentido que o estudante constrói sobre um conceito matemático e o próprio conceito. Concepção está relacionada, nesse caso, ao conhecimento do sujeito. Segundo as autoras, o estudo de Breidenbach *et. al*. (1992) pode ser citado como um exemplo deste uso do termo concepção;
C. O termo concepção é empregado relatando o conhecimento do sujeito, mas numa diferente perspectiva: expressando diferenças nas formas que uma pessoa concebe os elementos epistemológicos e estruturais da Matemática. Nesse caso, Kaldrimidou e Tzekaki (2005) indicam Sierpinska (1992) como exemplo da utilização do termo concepção nessa direção.
D. O termo concepção é empregado como sinônimo de palavras como idéias ou crenças, descrevendo assim, convicções dos estudantes e professores acerca da Matemática e de seu ensino. As autoras citam os estudos de Thompson (1992) e Borasi (1990) como exemplos dessa última utilização do termo concepção.

A análise de Kaldrimidou e Tzekaki (2005) permitiu esclarecer que o termo concepção foi utilizado na literatura com múltiplos sentidos, relatando, às vezes, elementos diferentes e opostos:

> *Sumarizando, pode-se argüir que, um estudo sistemático da literatura revela que os pesquisadores usam o termo "concepções" referindo a elementos diferentes e algumas vezes opostos: os conceitos matemáticos, mas também os elementos epistemológicos ou idéias mais gerais sobre a natureza da Matemática; conceitos específicos, mas também todos os conceitos matemáticos; o conteúdo de Matemática, mas também o conhecimento matemático; o conhecimento individual, mas também o conhecimento compartilhado entre grupos ou indivíduos* (KALDRIMIDOU e TZEKAKI, 2005, p. 4 / 1248).

Como conseqüência desses múltiplos usos e sentidos, Kaldrimidou e Tzekaki (2005) sugerem alguns questionamentos acerca da natureza das concepções, entre os quais, destacamos os seguintes:

- Elas são elementos do conhecimento conceitual e/ou dos processos de conceitualização (construções mentais individuais), ou são ferramentas na análise da aprendizagem (construção dos pesquisadores);
- Elas são integradas aos conceitos matemáticos específicos (por exemplo, funções, números, etc.) ou podem ser descrições de outros elementos matemáticos (por exemplo, definições, campos, regras).

Concordamos com as considerações atribuídas acima por Kaldrimidou e Tzekaki (2005). Contudo, acrescentamos uma breve síntese destacando alguns aspectos comuns nas pesquisas discutidas até o momento:

- A utilização de uma pluralidade de termos distintos para uma mesma finalidade, no caso, referente às concepções dos estudantes;
- A utilização de uma pluralidade de termos para relatar uma mesma finalidade sem distingui-los. Por exemplo: crenças, concepções, visão, etc, para discutir as convicções de professores e/ou alunos acerca da natureza da Matemática;
- A utilização do termo concepção para diferentes finalidades: o conhecimento dos alunos; as convicções dos alunos e professores acerca da Matemática e do ensino da Matemática; aspectos epistemológicos da Matemática, da Álgebra; aspectos do ensino-aprendizagem da Matemática e do ensino de Álgebra;
- A falta de definição formal do significado do termo concepção;
- Certa tendência em utilizar o termo concepção de maneira muito ampla.

Nesse sentido, Godino, Batanero e Font (2006) apontam que um dos principais problemas “meta-didáticos” que deve ser tratado nas pesquisas em Educação Matemática é relativo à falta de precisão das noções teóricas que vêm sendo utilizadas nessa área de conhecimento, particularmente as noções usadas para analisar os fenômenos cognitivos. Esses autores citam uma variedade de noções que são empregadas sem a devida atenção, precisão e depuração de significado: “conhecimentos, saberes, competências, *concepções*, conceitos, representações internas, conceito-imagem, esquemas, invariantes operatórios, significados, praxeologias, etc” (p. 2).

Na década de noventa, alguns estudos apontaram a necessidade de definir o que é concepção na pesquisa em Didática da Matemática. Artigue (1990), por exemplo, aborda a falta de formalização e de definição teórica do termo concepção. Ela afirma, que os autores que utilizaram esse termo, não perceberam a necessidade de apresentarem uma definição didática. Balacheff (1995), por sua vez, indica que o termo concepção é freqüentemente utilizado na literatura, porém, como um instrumento, sem ascender ao posto de objeto de estudo em si mesmo.

1.2 Concepção como noção teórica em educação matemática

No tópico anterior, apresentamos alguns contextos e utilizações do termo concepção nas pesquisas em Educação Matemática, demonstrando sua versatilidade e a tendência dos pesquisadores em utilizá-lo com um sentido amplo, ou como uma noção do senso comum, ficando evidente, assim, a necessidade de formalizar este termo como uma noção teórica. Entretanto, definir o termo concepção como um conceito teórico não parece ser uma tarefa simples. Por esta razão, apresentaremos algumas pesquisas que discutiram, de maneira mais aprofundada, o termo concepção no contexto da literatura em Educação Matemática.

A partir deste momento, os estudos que vamos discutir adotam abordagens diferentes dos até então apresentados e a palavra *concepção*, anteriormente utilizada no sentido de instrumento, sem definição teórica, adquire outra funcionalidade, atingindo assim, o status de objeto de estudo, ele mesmo. A apresentação dos numerosos estudos que de alguma forma apresentam uma definição do termo concepção pode ser feita de diferentes formas. Poderíamos, por exemplo, apresentá-los levando em consideração a ordem cronológica ou os contextos estudados, tais como, concepções de professor e concepções de alunos. Em nossa pesquisa, escolhemos apresentá-los em dois momentos: um tratando das concepções dos professores, e, outro das concepções dos alunos.

1.2.1 Concepção dos professores

Segundo Cury (1994), no contexto das concepções do professores sobre a Matemática, Thompson (1992) apresenta a seguinte definição:

> *A concepção de um professor sobre a natureza da matemática pode ser vista como as crenças conscientes ou subconscientes daquele professor, os conceitos, significados, regras, imagens mentais e preferências relacionadas com a disciplina. Essas crenças, conceitos, opiniões e preferências constituem os rudimentos de uma filosofia da matemática, embora para alguns professores elas podem não estar desenvolvidas e articuladas em uma filosofia coerente* (THOMPSON, 1992, p.132).

Na citação acima, a palavra concepção é definida de maneira muito ampla, parecendo incluir as crenças, conceitos, opiniões, preferências, e, ao mesmo tempo, relaciona a concepção do professor sobre a natureza da Matemática a um tipo de filosofia da Matemática.

Guimarães (1993) citado por Cury (1994) fez uma revisão das pesquisas sobre concepções, na qual encontrou uma variedade de termos utilizados pelos pesquisadores, tais como, concepções, crenças, convicções, perspectivas, pontos de vista, preferências e princípios, todos remetendo a sentidos próximos. Em seguida, apresenta sua maneira de definir concepção:

> *[...] um esquema teórico, mais ou menos consciente, mais ou menos explícito, mais ou menos consistente, que o professor possui, que lhe permite interpretar o que se lhe apresenta ao seu espírito, e que de alguma maneira o predispõe, e influencia a sua ação, em relação a isso* (GUIMARÃES, 1993, p.20).

Como podemos perceber, Guimarães (ibid) indica, em sua definição, a influência da concepção do professor em sua ação, ou, em outras palavras, em sua prática pedagógica.

Ponte (1992) explica que "as concepções têm uma natureza essencialmente cognitiva" (p. 1), atuando como uma espécie de filtro. Ele ainda aponta, também, a relação entre as concepções e a prática pedagógica do professor, discutindo que, se por um lado as concepções são indispensáveis, pois estruturam o sentido que damos às coisas, por outro elas atuam como elemento bloqueador em relação a novas realidades ou a certos problemas, limitando, assim, as nossas possibilidades de atuação e compreensão.

Em relação à formação das concepções, Ponte (ibid.) esclarece que elas são formadas em um processo que é simultaneamente, individual e social. Individual, como resultado da elaboração sobre a nossa experiência, e social, como resultado do confronto das nossas elaborações com as dos outros. Decorrente desse fato, as concepções que podemos ter sobre a Matemática "são influenciadas pelas experiências que nos habituamos a reconhecer como tal e também pelas representações sociais dominantes" (PONTE, 1992, p. 1).

No mesmo texto, Ponte (ibid.) discute algumas distinções em relação ao conhecimento, as crenças e as concepções. Sobre os conhecimentos, de um ponto de vista macro, estes podem ser: conhecimento científico, conhecimento profissional e conhecimento vulgar. Conforme o autor, as "diferenças entre estes diversos tipos de conhecimento traduzem-se apenas pela diferente articulação entre as crenças de base e os outros tipos de pensamento (baseados no raciocínio e na experiência)" (p. 8).

Dessa maneira, não há necessidade de distinguir, como incompatíveis, as crenças e o conhecimento. As crenças podem ser vistas, nesta perspectiva, como uma parte do conhecimento, relativamente pouco elaborada, ao invés de dois domínios disjuntos. Nas crenças predomina uma "elaboração mais ou menos fantasista e a falta de confrontação com a realidade empírica" (p. 8). Ponte (ibid) explica, também, que no conhecimento de natureza prática são predominantes os aspectos advindos das experiências, enquanto que no conhecimento de natureza teórica predomina a argumentação racional.

As concepções, por sua vez, são consideradas, nesse contexto, como o pano de fundo organizador dos conceitos, constituindo algo como "mini-teorias" (CONFREY, 1990, p. 20 *apud* PONTE, 1992), em outras palavras, quadros conceituais que desempenham um papel semelhante ao dos pressupostos teóricos gerais dos cientistas. Ponte (1992) ilustra, na figura 01, a relação entre concepções, conhecimento e crenças.

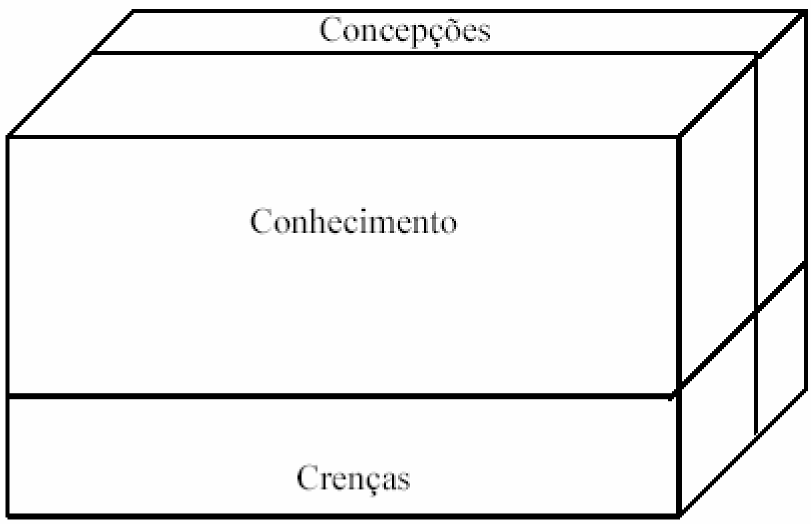


Figura 01: Concepções, conhecimento e crenças (PONTE, 1992, p. 3)

Em outro estudo, Ponte (1994) ressalta que o conhecimento diz respeito a uma ampla rede de conceitos, imagens e capacidades inteligentes que os seres humanos possuem. Nessa perspectiva, o autor afirma que as crenças e as concepções são consideradas como parte do conhecimento.

As crenças podem ser entendidas como as verdades pessoais e incontestáveis mantidas por todos, procedendo da experiência ou da fantasia, com um forte componente afetivo (PAJARES, 1992 *apud* PONTE, 1994). As crenças afirmam que algo é verdadeiro ou falso, tendo, portanto, uma natureza preposicional. As concepções, por sua vez, são como construções cognitivas, que podem ser consideradas estruturas implícitas da organização dos conceitos, de cunho essencialmente metafórico (PONTE, 1994).

1.2.2 Concepções de alunos sobre conceitos matemáticos

Para Margolinas (1993), o termo concepção é amplamente utilizado para fazer referência ao conhecimento dos alunos, como podemos perceber na citação abaixo:

> *A palavra mais utilizada na literatura didática, em todas as "escolas" é concepção, e ela intervém desde que o discurso se situe no nível das operações do pensamento do aprendiz, e de forma mais ampla, da aprendizagem* (MARGOLINAS, 1993, p. 101).

De fato, não podemos ignorar uma vasta quantidade de estudos que se dedicaram a tratar a noção de concepção de uma maneira teórica mais formalizada, principalmente, na perspectiva da Didática da Matemática. Mesmo assim, adiantamos que não existe uma definição consensual das concepções dos alunos acerca de conceitos matemáticos, também, neste domínio.

Um dos problemas referentes à falta de consenso sobre a utilização do termo concepção como noção teórica, ou mesmo em relação à sua formalização pode ser a concorrência com diversos outros termos teóricos, como, representação, modelo, conceito, etc., que são empregados para relatarem o conhecimento dos alunos. Sobre este problema de vocabulário, Margolinas (1993 *apud* LIMA, 2006), põe em evidência os termos utilizados nas diferentes teorias francesas para tratar do conhecimento dos alunos:

> *Gerard Vergnaud forjou o conceito de teorema em ação que "designa as propriedades das relações apreendidas e utilizadas sujeito em situação de solução de problema" [...]. Guy Brousseau utilizou antes a palavra "modelo implícito" (...). Yves Chevallard (...) introduziu o termo de "relação ao saber". [...]* (MARGOLINAS, 1993, p. 100).

Realizamos em seguida uma revisão de algumas discussões sobre a noção de concepção em estudos que investigaram as relações entre os alunos e os conceitos matemáticos particulares, como, a construção de conceitos, a compreensão dos alunos, ou, o sentido que os alunos atribuem a conceitos matemáticos. Entendemos, então, que as pesquisas sobre esta temática identificam-se com nossos objetivos e com as características de nossa pesquisa.

Iniciamos, assim, com as considerações de Godino, Batanero e Font (2006) sobre a utilização do termo concepção como parte integrante do modelo teórico de Enfoque Onto-Semiótico (EOS). Os autores explicam que "no EOS a noção de concepção é interpretada mediante o par (sistema de práticas pessoais, configuração cognitiva)". Nessa direção, apresentamos em seguida o significado do termo concepção proposto Godino, Batanero e Font (ibid.) na perspectiva deste modelo teórico.

> *Em termos semióticos, quando questionamo-nos sobre o significado de "concepção" de um sujeito sobre um objeto O (ou sustentada no âmbito de uma instituição), atribuímos como conteúdo "o sistema de práticas operativas e discursivas que esse sujeito manifesta, nas quais se coloca em jogo o referido objeto"* (GODINO, BATANERO e FONT, 2006. p. 18) .

Mudando o contexto teórico, encontramos nas pesquisas francesas em Didática da Matemática, diversos pesquisadores que discutiram a questão da definição do termo concepção como uma noção teórica. Os estudos de Brousseau (1988; 1997; 2000 e Brousseau e Antibi, 2000), por exemplo, apresentam várias considerações acerca das concepções. Segundo Brousseau e Antibe (2000), por exemplo, "uma das hipóteses fortes da Teoria das Situações e da Teoria dos Campos Conceituais é que elas postulam a existência de concepções [BROUSSEAU (1983, 1986, 1987), VERGNAUD (1990)]" (p. 18).

Deloustal-Jorrand (2001) desenvolvendo investigações sobre implicação e raciocínio matemático, utiliza a expressão *Conception Causale de l'implication* para se referir a todas as regras, práticas e saberes ligados à interpretação da expressão *A* *implica B*, isto é, por que A é a causa de B. Contudo, ela utiliza em seu trabalho a seguinte definição de concepção proposta por Brousseau na década de oitenta:

> *um conjunto de regras, de práticas, de saberes que permitem resolver uma classe de situações e de problemas de forma satisfatória, enquanto que existe outra classe de situações onde esta concepção fracassa, ou seja, que sugere respostas falsas, isto é, que os resultados sejam obtidos de maneira difícil e em condições desfavoráveis* (BROUSSEAU, 1986).

Em outro estudo, sobre a gênese experimental da noção de divisão como modelo de conhecimento numérico, Flückiger (2000) utiliza uma outra citação de Brousseau acerca de concepção:

> *Uma concepção permite tratar (reconhecer e resolver) uma subclasse de situações consideradas como comparáveis (identificadas) à ajuda dos mesmos esquemas, dos mesmos termos e com procedimentos aproximados, justificados por "raciocínios semelhantes" ou tratados com o auxílio de propriedades e de reconhecimentos logicamente e fortemente ligados* (BROUSSEAU, 1988, p. 54).

Na década de 90, num texto sobre a Teoria das Situações Didáticas, Brousseau (1997) aborda novamente o tema concepção. Ele indica que as concepções são determinadas por sua estrutura lógica interna, mas também pela freqüência e pela eficácia com a qual são mobilizadas. Nesse sentido, o autor destaca:

> *As concepções podem ser determinadas teoricamente como conjuntos de conhecimentos e de saberes freqüentemente solicitados juntos para resolver situações, empiricamente como modelos de respostas coerentes, dada por uma parte importante dos sujeitos sobre uma classe de situação* (p, 18).

Nesse sentido, Brousseau (ibid.) explica que algumas concepções adquiridas não desaparecem, prontamente, para dar lugar a uma concepção melhor, ou mais adequada. Assim, as concepções podem ser resistentes, provocando, conseqüentemente, erros e constituindo-se em obstáculos.

Um obstáculo, por sua vez, manifesta-se por erros. Os erros de um mesmo sujeito são vinculados, entre eles, por uma fonte comum que, conforme Brousseau (1997), refere-se a "uma maneira de conhecer, uma concepção característica, coerente e até mesmo correta, um *conhecimento* antigo e que teve êxito em um domínio de ações" (p. 19). Em outro artigo, Brousseau (2000) afirma que "a justificação dos erros pelo jogo de concepções aparece em Didática da Matemática em Salin (1976) e Brousseau (1976), que vêem ali a prova da existência de obstáculos epistemológicos em Matemática" (p. 19). Dessa maneira, vemos nos trabalhos de Brousseau, uma tendência a inter-relacionar obstáculos e concepções, tendência que é confirmada quando ele afirma que “um obstáculo será um conhecimento, uma concepção, não uma dificuldade ou falta de conhecimento” (BROUSSEAU, 1989, p. 43).

Por último, destacamos que Brousseau (2000) também parece chamar de concepções algo como o funcionamento dos conhecimentos. Enquanto os conhecimentos agrupam-se em teorias e conceitos, nos “saberes” das instituições superiores, os conhecimentos dos alunos, por sua vez, *“*agrupam-se em *concepções* que caracterizam uma maneira de compreender e utilizar uma noção matemática em certo campo de situações*”* (p. 16).

Artigue (1990) também realizou um amplo estudo sobre a utilização do termo concepção. Antes de apresentar sua acepção ao termo, a autora ressaltou que o termo “modelo” foi utilizado em algumas situações (DOUADY, 1980; BESSOT e RICHARD, 1977) com um sentido bem próximo do que se entendia por concepção. A autora também aponta para o fato de que Vinner e Tall (1981), para diferenciar o nível declarativo (definição do conceito) do procedimental (esquema conceitual), introduziram as noções de *conceito definição* e *conceito imagem*, respectivamente. A noção de *conceito imagem* também era muito próxima do significado de concepção.

Artigue (1990), então, coloca em evidência duas necessidades distintas, às quais responde a noção de concepção:

> *- colocar em evidência a pluralidade dos pontos de vista possíveis acerca de um mesmo objeto matemático, diferenciar as representações e modos de tratamento que lhe são associados, destacar a sua adaptação mais ou menos adequada à resolução de tal ou tal classe de problemas;*
>
> *- ajudar o pesquisador em didática a lutar contra a ilusão de transparência da comunicação didática veiculada pelos modelos empiristas da aprendizagem, permitindo-lhe diferenciar o saber que se quer ensinar e os conhecimentos realmente construídos pelo aluno* (ARTIGUE, 1990, p. 265).

Ressaltamos que estas duas necessidades realçadas por Artigue (ibid.) acerca da noção de concepção, permitem compreender o porquê de o termo concepção ser tão utilizado nas pesquisas em Didática da Matemática.

Anteriormente, Vergnaud *apud* Artigue (1990) estabeleceu uma relação próxima entre os termos conceito e concepção. Segundo Lima (2006), este autor utiliza o termo “concepção” para designar o objeto análogo do conceito, em um dado momento. Na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990), um conceito é definido pela tríade (S, I, *&*):

> ***S**: O conjunto das situações que dão sentido ao conceito (a referência);*
>
> ***I**: O conjunto dos invariantes sobre os quais se apóiam a operacionalização dos esquemas (o significado);*
>
> ***&**: O conjunto de formas de linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante)* (VERGNAUD, 1990, p. 145).

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) é uma teoria bastante consolidada nas pesquisas em Educação Matemática. De fato, ela é amplamente utilizada, em especial, para fundamentar a análise do conhecimento do aluno. No que diz respeito à utilização da noção de concepção, na perspectiva de Vergnaud, destacamos os estudos de Grenier (1988) e Tahri (1993). Grenier (1988), por exemplo, elucida que a noção de concepção, segundo Vergnaud, dá conta do estado dos conhecimentos de um aluno relativo a um conceito (matemático) e, "exprime-se em especial sob a forma de um conjunto de regras de ação levadas a efeito numa classe de situações-problema" (GRENIER, ibid., p. 2).

Uma questão importante levantada pelos pesquisadores em Didática em relação à noção de concepção, concerne o seu domínio de validade. De fato, uma concepção tem sempre um domínio de validade não vazio, isto é, existe um conjunto de situações problemas que ela permite resolver. Assim, segundo Grenier (op cit.) quanto maior o seu domínio de validade, mais estável será a concepção para o aluno.

Balacheff e Gaudin (2002), citando o estudo de Vinner (1983) sobre o conceito imagem de função dos alunos, apontam que ele identificou oito componentes das concepções dos estudantes sobre função, os quais relacionamos a seguir:

- A correspondência que constitui a função deve ser sistemática, deve ser estabelecida por uma regra, e, a própria regra deve ter as suas próprias regularidades;
- Uma função deve ser um termo algébrico;
- Uma função é identificada com uma das suas representações gráficas ou simbólicas;
- Uma função deve ser dada por uma regra;
- A função pode ter diferentes regras de correspondência para domínios disjuntos, contanto que esses domínios sejam domínios regulares (como intervalos);
- Uma regra da correspondência, que não seja uma regra algébrica, é uma função apenas se a comunidade matemática oficialmente anunciou-a como uma função;

- O gráfico de uma função deve ser regular e sistemático;
- Uma função é uma correspondência individual (um-a-um).

Conforme Balacheff e Gaudin (2002), esses componentes do conceito imagem de função, da maneira como estão apresentados, ainda não estão organizados em concepções, pois, faltam-lhes indicações sobre o "domínio de validade"[8] e sobre a maneira pela qual podem ser implementadas em uma situação de resolução de problema.

Balacheff e Gaudin (op. cit.) explicam que os métodos trivialmente utilizados para atribuir uma concepção ao aluno são apenas três:

- a análise de entrevistas ou questionários, nos quais, o aluno é questionado se existe, por exemplo, uma função correspondente a uma respectiva especificação dada (e.g. VINNER E DREYFUS, 1989);

- a modelagem de algumas situações (e.g. BREIDENBACH *et al.* 1992);

- a pergunta direta: *o que é função para você*? (VINNER e DREYFUS 1989).

A produção dos alunos é, assim, bastante difícil de analisar (BALACHEFF e GAUDIN, 2002).

Em Balacheff (1995), encontramos uma formalização para o termo concepção, no âmbito do modelo cK¢ *Concepção, Conhecimento* e *Conceito*, proposto para modelizar o estado de conhecimento do aluno sobre uma determinada noção, em um dado momento da sua aprendizagem. Segundo Lima (2007), uma concepção é definida, neste modelo, como "uma estrutura mental atribuída a um sujeito por um observador do seu comportamento e a *aprendizagem* é compreendida como a passagem de uma concepção a uma outra" (p. 5).

Uma *concepção C*, por sua vez, é caracterizada pelo quádruplo (P, R, L, Σ), sendo que *P* corresponde a um *conjunto de problemas* sobre o qual a concepção C é operatória, *R* é um *conjunto de operadores* que permitem o tratamento do problema, *L* é um *sistema de representação* que permite a representação dos problemas e dos

[8] Sobre este fato, Balacheff (2002) explica que observando os aspectos descritos acima, pode-se notar que vários deles estão relacionados a um sistema de representação, algébrico ou gráfico.

operadores e Σ é uma *estrutura de controle* que assegura a não contradição da concepção (LIMA, 2007).

Lima (2006) explica que a definição de concepção proposta por Balacheff (1995) é ancorada, por um lado, na Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau (1998), tendo em vista que leva em consideração a interação "sujeito<>meio". Por outro lado, esta definição se apóia na Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud (1990)[9].

A formalização de concepção no modelo cK¢ parece uma ampliação da tríade (S, I, &) que define a noção de conceito na TCC e, por conseguinte, a noção de concepção como análogo ao conceito. Em linhas gerais, uma das inovações que podemos identificar no modelo cK¢, corresponde às estruturas de controle (Σ), que têm a função de julgar a validade e a adequação da ação realizada pelo sujeito que resolve um problema. Enquanto na TCC o controle está inserido nos invariantes, no cK¢ as estruturas de controle (Σ) é um dos quatro conjuntos que definem uma concepção.

O esquema a seguir ilustra a relação estabelecida por Balacheff (1995) entre conceito, conhecimento e concepção no quadro teórico cK¢.

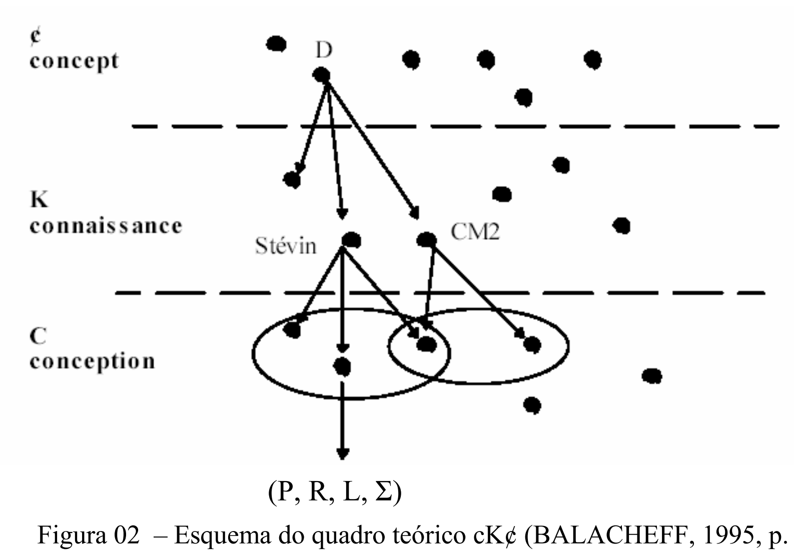


Figura 02 – Esquema do quadro teórico cK¢ (BALACHEFF, 1995, p. 30)

Particularmente, no que concerne às concepções, na perspectiva da modelização, Balacheff explica:

---

[9] Para obter mais informações sobre o modelo cK¢ proposto por Balacheff, consultar Lima (2006).

> *Propomos retornar ao conceito de concepção para resolver o problema de modelização posto pela coexistência num sujeito de estruturas mentais contraditórias, do ponto de vista de um observador das suas produções, e contudo, coerentes quando são colocadas no contexto das produções particulares no referencial do sujeito (em geral uma classe de situações ou de tarefas)*" (BALACHEFF, 1995, p. 19).

Segundo Lima (2007), o estudo acerca das concepções dos alunos na perspectiva da modelização de conhecimentos é reconhecidamente objeto de estudo tanto das Ciências Cognitivas quanto da Informática. No campo da Didática da Matemática esta problemática ainda é considerada uma interrogação. No entanto, vale ressaltar que esta interrogação vem sendo respondida, em parte, pelos resultados obtidos nos estudos de Lima (2006), Gaudin (2005) e Miyakawa (2005).

1.3 A utilização do termo concepção em nossa pesquisa

Segundo Maia (2002), em relação à análise científica do conhecimento, seja ele de senso comum ou escolar, é imprescindível que utilizemos um referencial que nos ajude na identificação de categorias deste ou daquele tipo de conhecimento. Por esta razão realizamos este estudo acerca do termo concepção.

Na primeira parte deste estudo demonstramos que o termo concepção vinha sendo freqüentemente utilizado, nas pesquisas em Educação Matemática, de maneira muito ampla e diversificada, junto a outros termos e sem uma definição teórica. Nesta segunda parte, apresentamos uma discussão centrada na finalidade de definir a noção de concepção, particularmente a noção de concepção de alunos.

A formalização de concepção proposta no modelo cK¢ por Balacheff (1995) nos parece bastante pertinente, tendo em vista a sua aplicabilidade na modelização de conhecimentos de alunos, como mostra os resultados de pesquisas recentemente realizadas (GAUDIN, 2005; MIYAKAWA, 2005; LIMA, 2006; 2007). Porém, em nossa pesquisa, não pretendemos investir numa tal modelização, e por este motivo, não adotaremos este modelo como quadro de referência.

A formalização proposta por Vergnaud *apud* Artigue (1990), estabelece a noção de concepção como objeto análogo ao conceito em um dado momento. Nessa direção, o estudo de concepções envolveria o estudo da tríade (S, I, &), na qual, S corresponde ao conjunto das situações, I ao conjunto dos invariantes e & diz respeito ao conjunto das representações. Esclarecemos que, em nosso estudo, não planejamos realizar o estudo desta tríade e, portanto, não utilizaremos o termo concepção nesta acepção.

Neste estudo, optamos por analisar as produções dos alunos, em termos de concepções, à luz dos estudos repertoriados neste quadro teórico e nos resultados das pesquisas que investigaram as compreensões dos alunos acerca do significado do símbolo “=”, que apresentaremos no capítulo subseqüente.

CAPÍTULO 2
SINAL DE IGUALDADE

CAPÍTULO 2

QUADRO TEÓRICO SOBRE O SINAL DE IGUALDADE

Na Matemática, pode-se dizer que unido a um conceito há um nome na língua natural, e, um símbolo para representá-lo. Essa conceitualização, nomeação, e simbolização da atividade dos matemáticos não aconteceu imediatamente, mas com o passar dos séculos, envolvendo diversas civilizações (SÁENZ-LUDLOW & WALGAMUTH, 1998). Por outro lado, o processo inverso de interpretar símbolos no âmbito dos conceitos matemáticos desafia, conforme Sáenz-Ludlow e Walgamuth (ibid.), todos os aprendizes.

Nessa perspectiva, os estudantes de Matemática são aculturados na Matemática da escola tendo que aceitar os símbolos convencionais já no lugar. Contudo, essa aceitação de um símbolo, em si mesmo, não é sempre acompanhada por seus respectivos significados, uma vez que, a interpretação dos símbolos matemáticos é acompanhada pela influência recíproca entre a língua natural e os sinais simbólicos.

Para matemáticos, a atividade de fazer de um símbolo um conceito matemático, bem como a atividade de interpretação desses símbolos, são processos reversíveis e auto-organizáveis. Já para os estudantes, o processo de interpretação dos símbolos transforma-se em uma atividade intelectual complexa. (SÁENZ-LUDLOW & WALGAMUTH, 1998).

O símbolo “=”, como qualquer outro símbolo matemático, pode ser entendido como uma representação de um conceito ou de uma idéia matemática (MOLINA, 2006). Atualmente, uma expressão que contenha o símbolo “=” é denominada genericamente de igualdade e, conseqüentemente, o símbolo “=” recebe o nome de *sinal de igual* ou *sinal de igualdade*. É importante ressaltar que a utilização do símbolo “=” como sinal de igualdade aconteceu pela primeira vez em 1557, no livro *The Whetstone of Witte*, de Robert Recorde, isto é, há 450 anos.

Como já dissemos, grande parte das situações que dão sentido ao símbolo “=” são aquelas em que o utilizamos para afirmar que uma coisa *é igual* à outra. No entanto, podemos argumentar que, em razão da versatilidade das utilizações do símbolo “=” em Matemática e no ensino de Matemática, nem sempre esse símbolo aparece denotando igualdade. Em outras palavras, ao longo das experiências escolares o “=” incorpora outras utilizações e significados provenientes dos diferentes contextos[10] em que aparece, e por outro lado, é possível que nem sempre estes significados[11] sejam identificados nas concepções dos alunos. Por esse motivo, a relação que existe entre o ensino de Matemática, os significados do símbolo “=” e as concepções dos alunos parece ser bastante complexa.

Devido a essa complexidade, resolvemos organizar nosso quadro teórico sobre o sinal de igualdade, em cinco tópicos: História do sinal de igualdade, conceitos matemáticos associados ao sinal de igualdade, significados do sinal de igualdade, os significados do sinal de igualdade na perspectiva dos alunos (concepções) e considerações gerais sobre o sinal de igualdade.

2.1 História do sinal de igualdade

É difícil pensarmos em Matemática sem o símbolo “=” representando a igualdade. Contudo, a História nos mostra fatos interessantes de encontros e desencontros entre o “=” e a igualdade. Se por um lado, a igualdade nem sempre foi representada pelo “=”, por outro, o símbolo “=” já teve diversos outros significados.

Antes de iniciarmos nosso estudo sobre a história do sinal de igualdade esclarecemos que, no desenvolvimento histórico da Álgebra, notam-se as seguintes periodizações: Álgebra retórica; Álgebra sincopada e Álgebra Simbólica. A primeira referente à utilização da linguagem vernácula da época paleobabilônica (entre 2000 e 1600 a.C.); a segunda representada também por esse tipo de linguagem, porém, com alguns termos técnicos escritos na forma de abreviaturas; a terceira relativa à

---

[10] O sinal de igualdade é utilizado em diversos contextos, entre os quais destacamos os aritméticos, das operações (ex. $3 + 4 =$) e igualdades aritméticas (ex. $3 + 4 = 7$), e os algébricos, das equações (ex. $x + 5 = 10$) e das funções (ex. $y = 3x + 5$).

[11] Como significado entendemos algo associado à utilização, ou finalidade do sinal de igualdade em alguma expressão que represente um dado contexto matemático.

substituição das palavras e abreviaturas por sinais simbólicos e pela introdução do uso sistemático de letras para representar valores desconhecidos (PUIG, 1998).

Em relação à maneira como a igualdade foi expressa ao longo dos tempos, podemos dizer que aconteceu algo semelhante. A igualdade já foi expressa retoricamente por palavras, tais como: *aequales, aequantur, esgale, faciunt, fera egale, phalam, ghelijck,* ou *gleich* (CAJORI, 1993; BOYER, 1974; CONTADOR, 2006); por abreviações como *aeq* para aequales ou aequantur, e, *pha* para phalam; e, por diferentes símbolos.

Cajori (1993) indica que podemos encontrar no papiro de Rhind[12], um símbolo semelhante a este  significando "it gives" (dá), classificando-o praticamente como uma marca para igualdade em uma equação linear. Na aritmética do manuscrito Bakhshālī[13], encontra-se, a contração *pha* (para phala) para indicar o resultado de uma operação, assim, "pha serve como um sinal de igualdade" (CAJORI, 1993, p. 79).

Conforme Cajori (ibid), vários matemáticos utilizaram, regularmente, símbolos como sinais de igualdade. Diofanto[14] utilizou um símbolo semelhante a este  ; O presente símbolo  foi utilizado por al-Qalasâdî[15]; Regiomontanus[16] utilizou um travessão horizontal ——, assim como foi utilizado, posteriormente na Itália, por Luca Pacioli, Ghaligai, e outros. Entretanto, Pacioli utiliza o travessão para vários propósitos, além do de expressar igualdade, e Ghaligai expressava a igualdade por travessões (—— —— ——); um único travessão (——) era utilizado também para separar fatores.

A repetição de um símbolo, simplesmente para preencher um intervalo, é encontrado muito tempo depois em conexão com o sinal de igualdade (=). "Assim, John Wallis, em sua Mathesis universalis ([Oxford, 1657], p. 104) escreve: 1 + 2 – 3 = = = 0" (CAJORI, 1993, p. 113). Já Hieronymo Cardan, por sua vez, deixava algumas

---

[12] Papiro egípcio datado de aproximadamente 1620 a.C., conhecido também como papiro de Ahmes.

[13] Manuscrito datado aproximadamente de 400 d.C., encontrado por um agricultor próximo da aldeia Bakhshālī, na Índia. The Bakhshālī Manuscript, Indian Antiquary, Vol. XVII (Bombay, 1988). (nota de CAJORI, 1993).

[14] Matemático e filósofo grego que viveu entre 150 e 300.

[15] Matemático árabe (1412-1486).

[16] Matemático e astrônomo alemão (1436 – 1476).

vezes, um espaço em branco no lugar onde colocamos, comumente, o sinal de igualdade (CAJORI, 1993).

O sinal de igualdade, como o conhecemos atualmente, pelo símbolo "=", só foi introduzido em 1557, pelo inglês Robert Recorde[17] em seu livro *The Whetstone of Witte*[18], que é considerado o primeiro tratado inglês sobre Álgebra.

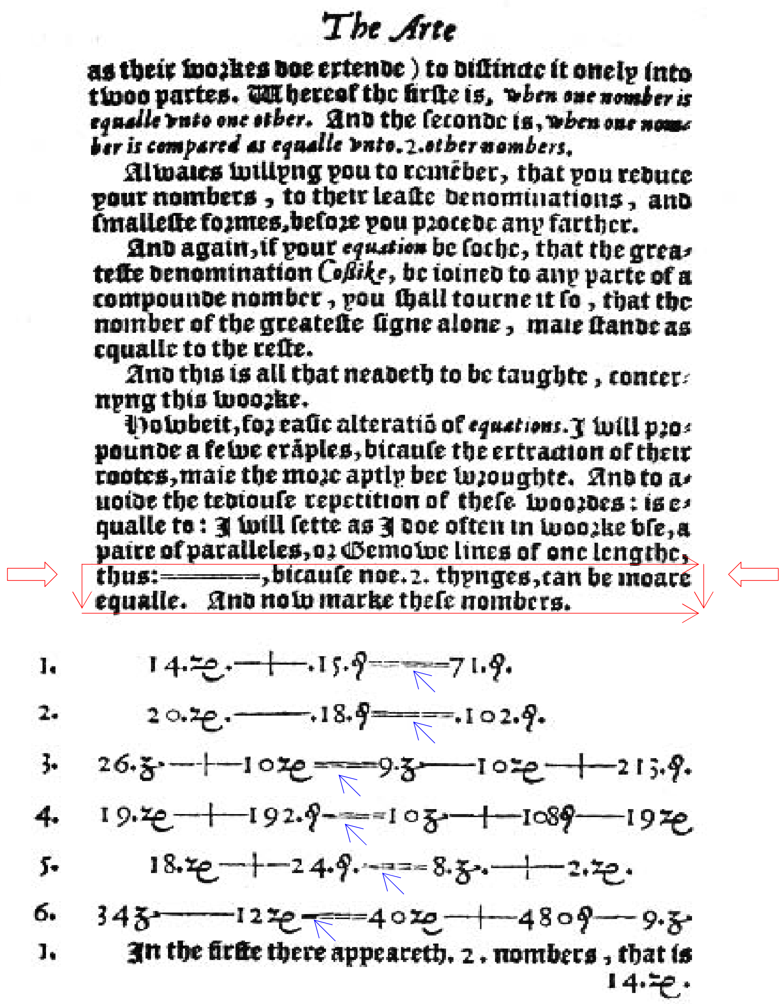
Figura 03 - Robert Recorde

Robert Recorde (1510-1558) foi um dos mais importantes matemáticos do século XVI. Também foi jurista e médico do rei Edward VI e da rainha Mary. Ele escreveu um livro de Medicina (bastante influente) e quatro de Matemática. O mais importante deles foi o livro *The Whetstone of Witte* (Pedra de afiar da inteligência) publicado em 1557 (GARBI, 2006), que é considerado o primeiro tratado inglês sobre Álgebra.

A figura 04, a seguir corresponde à página do livro de Recorde na qual aparece pela primeira vez, o símbolo moderno de igualdade. Observe que o símbolo "=" que utilizamos atualmente é uma versão ligeiramente menos longa do símbolo inventado por Recorde.

---

[17] Matemático e médico inglês (1510 to 1558).
[18] A pedra de afiar o conhecimento.



The Arte

as their workes doe extende) to distincte it onely into twoo partes. Whereof the firste is, *when one nomber is equalle unto one other.* And the seconde is, *when one nomber is compared as equalle unto .2. other nombers.*

Alwaies willyng you to remēber, that you reduce your nombers, to their leaste denominations, and smalleste formes, before you procede any farther.

And again, if your *equation* be soche, that the greateste denomination *Cossike*, be ioined to any parte of a compounde nomber, you shall tourne it so, that the nomber of the greateste signe alone, maie stande as equalle to the reste.

And this is all that neadeth to be taughte, concernyng this woorke.

Howbeit, for easie alteratiō of *equations*. I will propounde a fewe exāples, bicause the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to auoide the tediouse repetition of these woordes: is equalle to: I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: =======, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.

1. 14.ze.—+—.15.ϑ=====71.ϑ.
2. 20.ze.———.18.ϑ=====.102.ϑ.
3. 26.ʒ.—+—10ze=====9.ʒ.——10ze—+—213.ϑ.
4. 19.ze—+—192.ϑ=====10ʒ—+—108ϑ——19ze
5. 18.ze—+—24.ϑ.=====8.ʒ.—+—2.ze.
6. 34ʒ———12ze=====40ze—+—480ϑ——9.ʒ.

1. In the firste there appeareth. 2. nombers, that is 14.ze.

Figura 04 - Página do livro *The Whetstone of Witte* na qual aparece o símbolo “=” um pouco mais alongado

Cajori (1993) explica que nos livros impressos antes da introdução do símbolo de Recorde, a igualdade era expressa por algumas das palavras citadas anteriormente, ou pela forma abreviada *aeq*. Segundo Contador (2006), Recorde utilizou o símbolo “=” com o objetivo de substituir *aequales* (empregada desde 1500) ou sua forma abreviada *aequ* (empregada a partir de 1550).

Observando a figura acima, as setas indicam o símbolo “=” e o trecho em destaque corresponde à justificativa de Recorde ao escolher esse símbolo para igualdade: “*bicause noe .2. thynges, can be moare equalle* (Por que duas coisas não podem ser mais iguais).

As expressões que aparecem na figura 04, conforme Meavilla (2001), são traduzidas para o simbolismo moderno da seguinte maneira:

1. $14x + 15 = 71$
2. $20x - 18 = 102$
3. $26x^2 + 10x = 9x^2 -10 + 213$
4. $19x + 192 = 10x^2 + 108 - 19x$
5. $18x + 24 = 8x^2 + 2x$
6. $34x^2 - 12x = 40x + 408 + 9x^2$

Recorde introduziu o símbolo "=" como sinal de igualdade no capítulo dedicado à resolução de equações algébricas, com a finalidade de facilitar a manipulação que ocorre no processo de resolução das equações, evitando, assim, a repetição tediosa da expressão "*is equalle to*"[19].

O sinal de igualdade está associado, de certo modo, com a manipulação das equações, possibilitando assim trabalhar com a combinação de operações no decorrer do processo de resolução. Essas operações correspondem à adição e subtração dos termos homogêneos em ambos os lados da equação, à divisão e multiplicação de uma equação por uma incógnita (introduzida por Cardano), e, à adição e subtração de duas equações (introduzido por Cardano e aperfeiçoado por Peletier e Buteo) (HEEFFER, 2004; 2007). Dessa maneira, Heeffer (2004) afirma, então, que "o sinal de igualdade simboliza a equação algébrica" (p. 17).

Em outro estudo, Heeffer (2007) argumenta que o conceito de equação emergiu totalmente em 1560, aproximadamente. Este autor também afirma que os símbolos são introduzidos em conseqüência do pensamento simbólico. Dessa maneira, a invenção e utilização do símbolo de igualdade fornecem evidência histórica da introdução de um símbolo representando um conceito matemático recentemente emerso (HEEFFER, 2007).

A introdução do sinal de igualdade como símbolo de equação conclui o estágio básico do desenvolvimento em direção à Álgebra simbólica, como iniciado na Alemanha até ao fim do décimo quinto século (HEEFFER, 2007). Heeffer (ibid.) realça

---

[19] É igual a.

ainda, que "o tempo da introdução do sinal de igualdade, em 1557, coincide perfeitamente com as nossas análises conceituais dos manuais de Álgebra do décimo sexto século" (p. 18). Assim, este autor referiu-se ao sinal de igualdade como a jóia da coroa da Álgebra simbólica.

Um fato curioso é que, a propagação da utilização do símbolo "=" como sinal de igualdade, não aconteceu de maneira imediata, nem tão pouco, sem complicações. Foi apenas no século XVII, especificamente em 1631, que o símbolo de Recorde recebeu o reconhecimento mais geral na Inglaterra, sendo adotado com o símbolo para igualdade em três importantes trabalhos: *Artis Analyticae Práxis*, de Thomas Harriot's; *Clavis Mathematicae*, de William Oughtred's; e, *Trigonometria* de Richard Norwood's (CAJORI, 1993). Em relação ao período entre o aparecimento do símbolo "=" para igualdade (por Recorde) e seu reconhecimento por meio dos trabalhos supracitados, é importante ressaltar que alguns matemáticos não usaram nenhum símbolo, em particular, para expressar igualdade. Pelo que discutimos até o momento, podemos destacar que nem sempre a igualdade foi representada pelo símbolo "=".

Por outro lado, o símbolo "=" foi utilizado por outros matemáticos do continente europeu para outras finalidades que não correspondiam a um sentido compatível com o de sinal de igualdade. Em 1951, Francis Vieta utilizou o "=" para designar uma diferença aritmética. Já Descartes, em 1638, utilizou-o para designar o sentido de *mais ou menos*, hoje representado pelo símbolo "±". Johann Caramuel empregou o símbolo "=" como sinal de separação em frações decimais, como por exemplo, o que para nós hoje em dia se expressa como 102,857, ele expressava como 102=857. Georg H. Paricius, em 1706, fez uso dos símbolos, "=", : , e – , como símbolos gerais para separar números que ocorrem num processo de resolver problemas aritméticos. François Dulaurens, em 1667, e, Samuel Reyher, em 1698 usaram o "=" para designarem linhas paralelas. Dessa maneira, o símbolo "=" adquiriu cinco utilizações diferentes entre os escritores do continente europeu (CAJORI, 1993).

Uma possível razão para o símbolo "=" não se popularizar imediatamente, como sinal de igualdade, é o fato de ele ter assumido essas diferentes utilizações. Nesse sentido, Cajori (op. cit.) esclarece que o símbolo "=" esteve ameaçado de ser descartado completamente, como sinal de igualdade, em favorecimento de algum outro símbolo que não apresentasse tal desvantagem.

Voltando para o primeiro aspecto, diversidade de símbolos para igualdade, observamos que, mesmo depois de Recorde utilizar o símbolo “=” para igualdade, durante os séculos XVI e XVII não houve um consenso a propósito da utilização de um único símbolo para igualdade. Isto é, paralelamente, os matemáticos europeus utilizavam diferentes símbolos para igualdade (CAJORI, 1993).

Apresentamos em seguida um resumo no qual aparecem alguns dos símbolos utilizados por distintos matemáticos europeus no decorrer dos séculos XVI e XVII. Na França, em 1559, J. Buteo utilizou o símbolo “[” como sinal de igualdade. Na Alemanhã, em 1571, Willhelm Holzmann, também conhecido como Xylander, utilizou linhas paralelas “‖” verticais para representar igualdade, na versão da aritmética da obra de Diofanto. Já Leonard e Thomas Digges, em 1579, na Inglaterra, inventaram um novo símbolo para igualdade “⋲”, que parece ser uma variação do símbolo de Recorde.

No decorrer do século XVII, os matemáticos também inventaram diferentes símbolos para igualdade. Hérigone inventou, em 1634, o símbolo “**2|2**”, empregando-o em sua obra *Cursus mathematicus*. Hérigone também utilizou “**3|2**” e “**2|3**” no sentido de “maior que” e “menor que”, respectivamente. Apesar de esses símbolos apresentarem uma lógica atraente, Hérigone, ciente do potencial das possíveis confusões que estes ocasionariam, em outra parte do *Cursus mathematicus*, acaba utilizando o símbolo “⊔” para expressar igualdade.

O símbolo “ꝏ”, inventado por René Descartes em 1637, aparece em seu célebre trabalho *Géométrie* como sinal de igualdade. Ressaltamos que este símbolo teve uma grande repercussão em sua época. O símbolo “⊓”, que parece uma inversão do símbolo utilizado por Hérigone, foi utilizado por F. Dulaurens em 1667 na obra *Specimina mathematica*. Na obra *Mathesis biceps vetus et nova*, escrita por Johann Caramuel em 1670, a igualdade aparece representada pelo símbolo “Æ”, que indica uma possível associação das duas primeiras letras da palavra latina æqualis que, designa igualdade.

Na edição de 1679 do trabalho de Fermat, *Varia opera mathematica*, o símbolo “∞” parece sugerir o sentido de igualdade, contudo, ele não o utiliza em seus manuscritos, sendo que nas margens dessa obra aparece o símbolo "{" parecendo também denotar igualdade (CAJORI, 1993).

Como vimos, diversos símbolos concorreram com o símbolo "=" para representar igualdade. Mas, a grande rivalidade pela popularização de um símbolo para o posto de sinal de igualdade foi, na verdade, entre o símbolo "=" proposto por Recorde e o símbolo "ꝏ", utilizado por Descartes em 1637. Sobre o símbolo de igualdade de Descartes, alguns especulam que ele é uma inversão e alteração da combinação das primeiras letras da palavra *æqualis*. Uns mais pragmáticos sugerem que, em uma publicação astronômica, esse símbolo foi utilizado para representar a palavra Taurus (CAJORI, 1993).

Em Cajori (ibid, pp. 299-307), discute-se, de maneira pormenorizada, os aspectos sobre a competitividade dos símbolos para igualdade. Dessa maneira, adiantamos que "a vitória final do = sobre ꝏ parece dever-se, principalmente, à influência de Leibniz, durante o período crítico no fim do século XVII" (CAJORI, 1993, p. 306). O símbolo de Recorde é, assim, adotado universalmente. A situação que acabamos de discutir durou aproximadamente 150 anos.

Sintetizando, ressaltamos que os aspectos históricos que discutimos sobre o sinal de igualdade nos mostram fatos interessantes de encontros e desencontros entre o símbolo "=" e a igualdade. Se por um lado, a igualdade nem sempre foi representada pelo "=", por outro, o símbolo "=" já foi utilizado por diversos matemáticos europeus com finalidades diferentes das comumente associadas ao sinal de igualdade. Outro aspecto que destacamos diz respeito ao fato de que mesmo quando o sinal de igualdade foi representado por outros símbolos, até antes do "=" de Recorde, ele já era utilizado para indicar o resultado, além de indicar igualdade. Isto quer dizer que, historicamente, o sinal de igualdade, independente do símbolo que o representava, já serviu tanto num sentido relacional, designando igualdade, quanto num sentido operacional, indicando o resultado de uma operação.

Por último, realçamos a relevância que o símbolo "=" como sinal de igualdade, proposto inicialmente por Recorde, adquiriu no desenvolvimento da Matemática ao longo dos anos. Hoje em dia, é praticamente estranho pensarmos em Matemática sem o símbolo "=" representando a igualdade. Nesse sentido, lembramos que, em 2007, o símbolo "=" completou 450 anos de história como sinal de igualdade sendo que nesse período o “=” adquiriu status de um símbolo que é indispensável, quer seja para a Matemática, ou para o ensino de Matemática, quer seja para outras Ciências. Nesses termos, o símbolo “=” pode ser considerado como um dos principais símbolos matemáticos já inventados.

2.2 Conceitos matemáticos associados ao símbolo “=”

Como já mencionamos na introdução desse quadro teórico, genericamente, uma expressão que contenha o símbolo “=” é comumente chamada de igualdade, e, conseqüentemente, o símbolo “=” recebe o nome de *sinal de igual* ou *sinal de igualdade*. Então, por extensão, podemos dizer que uma utilização comum do símbolo “=” é designar igualdade. Contudo, Freudenthal (1983) explica que, em Matemática, por causa dos diversos âmbitos nos quais se podem considerar um objeto matemático, não existe uma única noção de igualdade, sendo a miúdo, uma questão de definição. Por exemplo, há ocasiões nas quais, coisas que não são iguais, como as expressões 2/3, 4/6, 6/9, etc., passam a ser iguais ao definir-se uma relação de equivalência que as agrupem em uma mesma classe de equivalência.

Considerando que, em Matemática e no ensino de Matemática podemos ter diversos tipos de igualdades, ou que o símbolo “=” é também utilizado para designar outros conceitos como identidade e equivalência, indicamos que não é suficiente restringirmos o significado do sinal de igualdade apenas ao conceito de igualdade. Por essa razão, consideramos tanto necessário quanto conveniente, discutir alguns aspectos relativos aos diferentes tipos de igualdades, uma vez que acreditamos que o estudo dos diferentes tipos de igualdades ajuda a contextualizar os significados do sinal de igualdade.

2.2.1 Igualdades e tipos de igualdades

Conforme a natureza dos elementos contidos numa igualdade, é possível obtermos diferentes tipos de igualdades (FREUDENTHAL, 1983; GODINO e FONT, 2003). Nessa direção, podemos encontrar na literatura diversos estudos tratando, por exemplo, de diferentes definições para igualdade; diferentes noções utilizadas, às vezes como objetos distintos, às vezes como sinônimos de igualdade (por exemplo, igualdade, equivalência e identidade); definições de conceitos matemáticos como casos particulares de igualdades, como acontecem, por exemplo, com o conceito de equação. Estas considerações são importantes por que designam diferentes atributos para o símbolo "=".

Wilhelmi, Godino e Lacasta (2007), por exemplo, explicam que dados dois números reais, **a** e **b**, não há uma forma única de responder a pergunta: *representam **a** e **b** o mesmo número*? As noções de igualdades entre dois números, **a = b**, podem, então, serem definidas segundo as relações específicas do domínio matemático de referência, a saber, "aritmética, álgebra, teoria das funções, R como um corpo ordenado, R como espaço métrico, R como espaço topológico, análise e cálculo numérico" (p. 3). Dessa maneira, os autores apresentam oito definições de igualdade:

1. Igualdade como equivalência - Definição aritmética;
2. Igualdade de ordem - Domínio R como um corpo ordenado;
3. Igualdade métrica - Domínio R como espaço métrico;
4. Igualdade conectiva - Domínio R como espaço topológico;
5. Igualdade algébrica - Definição algébrica;
6. Igualdade funcional - Teoria das funções;
7. Igualdade como processo de passagem ao infinito - Domínio da análise matemática;
8. Igualdade numérica - Domínio do cálculo.

Desse modo, os autores discutem as definições de igualdades acima, distinguindo cada uma delas como um emergente sistema de práticas matemáticas relativas a um determinado campo de problemas, que inclui objetos lingüísticos, noções e técnicas operatórias específicas.

No contexto das concepções de Álgebra da Escola Média, Usiskin (1995) utiliza em seu trabalho cinco igualdades, todas com os mesmos atributos, no sentido de que tratam de um produto de dois números que é igual a um terceiro.

$$A = b \, . \, h \qquad [1]$$

$$20 = 5x \qquad [2]$$

$$sen\, x = cos\, x\; tan\, x \qquad [3]$$

$$1 = n \, . \, (1/n) \qquad [4]$$

$$y = kx \qquad [5]$$

A primeira, Usiskin (1995) denominou de fórmula, a segunda de equação, a terceira de identidade, a quarta de propriedade, e, a última, de função. Em cada uma das cinco igualdades, é evidente a diferença respectiva à natureza da utilização das letras e do símbolo "=".

Godino e Font (2003) num ponto de vista semelhante, reconhecem que é possível obter diferentes tipos de igualdades, a depender da natureza dos elementos que constituem a expressão (no sentido de números, letras e um símbolo "="). Assim, eles distinguem no contexto da Álgebra, três tipos de igualdades. O primeiro tipo de igualdade refere-se às expressões nas quais aparecem variáveis (letras) e a expressão é verdadeira para qualquer valor assumido pelas variáveis. Nesse caso, a igualdade $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, por exemplo, é denominada de *identidade*. Diferentemente, no segundo tipo, as igualdades são verdadeiras apenas para certos valores das variáveis (letras), que na verdade são entendidas como incógnitas, tal como a + 3 = 7, ou 5 + x = 12, e as expressões são denominadas de *equação*. O terceiro tipo de igualdade é utilizado para expressar uma relação de dependência entre duas ou mais variável. De tal modo, a igualdade $e = 1/2gt^2$, é denominada de *fórmula*. Semelhantemente, Usiskin (1995), tal como mencionamos antes, denominou de fórmula a igualdade A = b x h.

Já para Taylor (1910), a igualdade é "a afirmação de que duas expressões denotam o mesmo número" (p. 135). Segundo este autor, o nome igualdade é preciso e descritivo, tal como são identidade e equação como nomes de uma igualdade incondicional e uma igualdade condicional, respectivamente. De outra forma, podemos dizer que Taylor (1910), distingue dois tipos de igualdades: igualdade condicional, denominada de equação, e igualdade incondicional, denominada de identidade.

Taylor (ibid.) apresenta algumas diferenças características entre identidades e equações. Por exemplo, os números, em uma equação, são classificados como conhecidos e desconhecidos. Numa identidade, os números não são classificados como conhecidos e desconhecidos. Uma equação é uma igualdade condicional, ou seja, mantém-se verdadeira apenas para um número limitado de valores das incógnitas. Uma identidade é uma igualdade incondicional, isto é, mantém-se verdadeira para todos os valores de suas letras, ou todos os valores entre certos limites. Uma equação é para ser resolvida, devendo-se encontrar os valores desconhecidos. Uma identidade é para ser comprovada mostrando que seus membros são expressões idênticas. Na resolução de equações utilizamos os princípios da equivalência. Na comprovação de uma identidade utilizamos os princípios das expressões idênticas. Por último, as equações são, principalmente, úteis na declaração e resolução de problemas. Identidades, por sua vez, são principalmente úteis na transformação e solução de equações (TAYLOR, ibid.).

2.2.2 Algumas relações entre igualdade, identidade e equivalência

Gattegno (1974), na citação abaixo, realiza uma distinção entre os termos igualdade, identidade e equivalência:

> *(...) identidade é uma espécie muito restritiva de relação concernente à semelhança real, a igualdade se refere a um atributo que não muda, e a equivalência se refere a uma relação mais ampla onde se aceita que para certos propósitos é possível substituir um item por outro* (p. 83).

Em seguida, Gattegno (op. cit.) afirma que a equivalência é a relação mais completa e flexível, sendo, portanto, a mais útil.

Molina (2006) também faz uma distinção dos termos igualdade, identidade e equivalência, para indicar as noções que ela utilizará em sua investigação. Assim ela apresenta as seguintes distinções:

> *- **Igualdade** ao modo gráfico de relacionar na escritura duas expressões ou representações que referem a um mesmo objeto matemático, escrevendo entre elas um sinal de igual, assim como a relação entre elas. No contexto da aritmética, ditas expressões são cadeias de números ligadas entre si por sinais operacionais.*
>
> *- **Equivalência** a toda relação que cumpra as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva. Em particular, a igualdade é uma relação de equivalência. Especialmente destacamos a relação de equivalência definida para as equações, afirmações ou fórmulas, considerando-se equivalentes quando são simultaneamente verdadeiras ou falsas para cada conjunto admissível de valores de certos parâmetros.*

> - ***Identidade*** *as expressões aritméticas ou algébricas que contém um sinal de igual e implica em ambos os membros o mesmo objeto, representado do mesmo modo* (p. 115).

Entendemos que a distinção proposta por Molina (2006) é compatível com a de Gattegno (1974), particularmente no que diz respeito à identidade como uma noção bastante restrita e à equivalência como uma relação mais ampla.

Prosseguindo, Baruk (1992) estabelece em seu dicionário de Matemática, a seguinte definição de igualdade:

> *Uma igualdade é uma afirmação de que os seus dois membros são expressões de um mesmo objeto, número, vetor, figura, etc. Se for possível, substituindo essas expressões por expressões equivalentes, transformar a igualdade em identidade, ela é verdadeira, se não, é falsa* (BARUK, 1992, p. 398).

Na definição proposta por Baruk (1992), podemos observar que a autora distingue os termos igualdade, identidade e equivalência, ficando evidente que as idéias de equivalência e identidade surgem como conseqüências do processo de definir a noção de igualdade.

Em diversos outros estudos não encontramos, também, uma distinção explícita dessas três noções, surgindo então, espécies de relações entre igualdade, identidade e equivalência.

No campo da Lógica, por exemplo, Frege explica que duas coisas são iguais se uma delas pode ser substituída por outra sem perda da verdade. Sobre a igualdade matemática, Frege esclarece que esta é uma forma de identidade, e não de igualdade, pois enuncia uma relação entre dois nomes para objetos, não entre os signos que os designam. Uma igualdade matemática é verdadeira quando os símbolos a ambos os lados do sinal de igualdade se referem ao mesmo número. Assim, conforme Frege, a igualdade matemática assinala identidade de significado (KENNY, 1997 *apud* MOLINA, 2006).

Fregoso (1977), ainda na perspectiva da Lógica, define a igualdade entre objetos como uma relação, identificando-a com a noção de identidade. Por exemplo: dados A e B dois entes, objetos ou idéias quaisquer, se diz que *A é igual a B*, denotando-se $A = B$, se toda propriedade que tenha A, tenha também B e, reciprocamente, toda propriedade que tenha B, tenha também A. Nesse caso também se diz que *A é idêntico a B* ou que *A é o mesmo que B*. Em caso contrário, deve-se escrever $A \neq B$, e se diz que A é distinto de B, A não é igual a B, ou, A é diferente de B (FREGOSO, 1977 *apud* MOLINA, 2006). Dessa maneira, podemos sugerir que as definições citadas por Kenny (1977) e Fregoso (1977), indicam uma relação bastante próxima entre as noções de igualdade e identidade.

Diferentemente, encontramos autores que ao definirem a noção de igualdade parecem relacioná-la diretamente com a noção de equivalência. Bouvier e George (2000), por exemplo, definem a igualdade, de maneira genérica, como uma relação binária que associa símbolos que representam um mesmo objeto matemático, sendo que esta relação, denotada com o símbolo "=", é reflexiva, simétrica e transitiva, isto é, uma relação de equivalência. Díaz (1990), Chávez e León (2003), no âmbito da Aritmética e García (1992), no domínio da Álgebra e Aritmética, também consideram a igualdade como a expressão de uma relação de equivalência que se representa pelo sinal de igualdade (MOLINA, 2006).

Encontramos também na literatura, identidades como tipos específicos de igualdades. Taylor (1910) denominou de identidade um tipo de igualdade identificada como incondicional. Já Fitting & Fitting (1990)[20] chamaram de identidade igualdades do tipo, $2 \cdot x = x + x$, e, $(5 + x) + y = 5 + (x + y)$, que são afirmadas para dar resultados verdadeiros sempre que as letras contidas nelas sejam substituídas por qualquer número que escolhamos. Usiskin (1995), por sua vez, também denominou de identidade a igualdade $\text{sen } x = \cos x \tan x$.

Outra relação bastante próxima entre as noções de identidade e igualdade é encontrada em Moreux (1923). Esse autor denominou de identidade a expressão *33 + 10 = 43*, justificando "por que é evidente que as quantidades separadas pelo sinal "=" são idênticas sob formas diferentes" (p. 9). Já equação, ele definiu como um caso particular de identidade. Na expressão $2x + 24 = 78$, por exemplo, para que a igualdade entre '$2x + 24$' e '78' seja verdadeira, há a condição de que '$\boldsymbol{x}$' tem que ser igual a 27. Moreux (1923) chama a igualdade $2x + 24 = 78$, de identidade condicional. Em outras palavras, uma identidade na condição de '$\boldsymbol{x}$' igual a 27, pois $(2 \times 27) + 24 = 78$. O autor explica que "é esta identidade condicional que se denomina equação" (ibid., p. 9). Moreaux (1923) assinala, ainda, que o sinal "=" separa dois membros da equação:

[20] http://comet.lehman.cuny.edu/fitting/bookspapers/pdf/unpubbooks/NumbersBook.pdf

Primeiro membro: $2x + 24$,

Segundo membro: 78

E, temos que os dois membros da equação são iguais, em razão da situação que acabamos de discutir. Na explicação de Moreaux (1923), uma equação é um caso particular de uma identidade.

Se compararmos as definições de equação propostas por Moreaux (1923) e Taylor (1910), a primeira impressão é a de que os termos identidade e igualdade estão sendo utilizados para uma mesma finalidade, que corresponde à qualificação de equação. Entretanto, esclarecemos que enquanto Moreaux (1923) não distingue, em suas considerações, os termos identidade e igualdade e estabelece equação como um tipo específico de identidade, Taylor (1910) distingue-os, estabelecendo que a identidade, assim como a equação, são tipos de igualdades.

Dessa maneira, concordamos com a afirmação de Molina (2006), na qual explica que, em razão da diversidade de relações que existem entre os termos igualdade, identidade e equivalência, em alguns casos, os termos igualdade e equivalência são utilizados pelos autores como sinônimos, em outros, igualdade e identidade é que são utilizados como sinônimos.

2.3 Significados do sinal de igualdade

É difícil olharmos para o símbolo “=” e não pensarmos imediatamente em igualdade. Entretanto, o sinal de igualdade apresenta diversos usos sofisticados na Matemática que fica até complicado compreender, ou mesmo aceitar o seu significado como igualdade. Dessa maneira, podemos argumentar que o símbolo “=” tem diversos significados a depender do contexto no qual aparece e da maneira como ele é utilizado.

As possibilidades de discutirmos os diferentes significados do sinal de igualdade nos contextos aritméticos e algébricos são bastante amplas. Por essa razão, optamos por escolher quatro contextos, dois aritméticos e dois algébricos, que consideramos chaves no ensino de Matemática da Educação Básica. Os contextos aritméticos são as operações e as igualdades, usualmente representadas por ‘3 + 4 =’ e ‘3 + 4 = 7’, respectivamente. Os contextos algébricos correspondem equações e funções, representadas comumente por expressões como x + 5 = 10 e y = 3x + 5, respectivamente.

Esclarecemos também, que vamos utilizar o termo significado do sinal de igualdade como algo correspondente às características particulares da utilização do símbolo “=” a depender do contexto no qual ele aparece, e, consequentemente, do conceito matemático que a expressão representa. Nestes termos, o significado do sinal de igualdade não se confunde, necessariamente, com as concepções dos alunos sobre o sinal de igualdade. Isto é, o símbolo “=” pode ter um determinado significado em uma expressão que representa um contexto particular e os alunos não reconhecê-lo, podendo apresentar então, outras concepções que não correspondem ao significado particular do sinal de igualdade naquela expressão. Por exemplo, a literatura demonstra que os alunos podem demonstrar uma concepção do significado do símbolo “=” como um *sinal de fazer algo* (símbolo operador) mesmo em situações que este símbolo está representando uma relação de igualdade ou de equivalência, como no caso das igualdades aritméticas e das equações.

2.3.1 O significado do símbolo “=” nas operações aritméticas

No senso comum, podemos dizer que o significado genérico do símbolo “=” é *igualdade*. Entretanto, o sinal de igualdade em Matemática e no ensino de Matemática, ao longo dos anos, parece que incorporou uma variedade de outros significados. A começar pela maneira que esse símbolo é introduzido nas atividades de Matemática, podemos dizer que seu significado não é bem designar igualdade.

Logo cedo, nas séries iniciais do Ensino Fundamental, as crianças começam a estudar a linguagem aritmética, na qual surge o símbolo “=”. Conforme Freudenthal (1983), a linguagem aritmética é tão formal que os problemas precisam obedecer a certas regras, tais como:

$$7 + 5 =$$

é admissível, enquanto que

$$7 + = 5$$

não é.

Considerando que o ensino de Matemática na primeira etapa do Ensino Fundamental é, quase sempre, centrado no estudo dos números e operações aritméticas, atividades utilizando o símbolo "=", como em 7 + 5 = e 7 – 5 = , por exemplo, são bastante comuns. Nesse sentido, o sinal de igualdade apresenta um significado operacional correspondendo a uma ação a ser realizada ou indicando o lugar no qual se deve colocar o resultado. De fato, é extensa a literatura que reconhece o significado operacional (eg. FREUDENTHAL, 1983; BROUSSEAU e ANTIBI, 2000; VERGNAUD, CORTES e FAVRE-ARTIGUE, 1987; KIERAN, 1981, MOLINA, 2006, CAVALCANTI e CÂMARA DOS SANTOS, 2007a; 2007b).

Brousseau e Antibi (2000) explicam que os primeiros usos do símbolo "=" são introduzidos nas séries iniciais e, é comum observar que tanto o raciocínio e o discurso tratam a igualdade como um procedimento, no qual "o símbolo '=' anuncia simplesmente o resultado de um cálculo" (p. 30).

Conforme Freudenthal (1983), em uma operação como 4 + 3 = , o símbolo "=" apresenta um aspecto assimétrico. Um lado é dado e o outro deve ser preenchido. As operações, por sua vez, são lidas, prioritariamente, como tarefas a serem executadas ou como perguntas. Por exemplo, as perguntas: quanto é 4 + 3 e quanto é 7 – 4? As tarefas: adicione 3 a 4, e, subtraia 4 de 7, muitas vezes são resumidas, ou representadas pelas operações 4 + 3 = e 7 – 4 =. Dependendo de como se lê, a entonação interrogativa sugere expectativas como:

– "após a tarefa: a execução,

– após a pergunta: a resposta" (FREUDENTHAL, ibid., p. 466).

Jones (2006) explica o significado operacional do sinal de igualdade por meio de uma analogia entre uma operação aritmética e um filme. Os números, por exemplo, são os *atores*, os operadores (+,–, x, ÷) correspondem ao *script*, e, o sinal de igualdade, representa o *diretor* que conduz a ação, ou, como Jones (ibid.) realça, grita: "Ação!".

De fato, em muitas das atividades envolvendo operações aritméticas o sinal de igualdade é utilizado como comando para executar algo, ou para indicar o local da resposta. A própria estrutura das operações que são comumente estudadas nas séries iniciais reforça essa característica. Os dois exemplos que apresentamos a seguir ilustram o significado operacional do "=", realçando sua utilização como um comando ou proposta para calcular algo, ou indicando o local onde se deve colocar a resposta.

1. Resolva as operações:

a) 3 + 4 =

b) 8 – 5 =

c) 10 ÷ 2 =

d) 2 x 6 =

2. Arme e efetue:

a) 2354 + 1658 = _____

b) 4562 – 2413 = _____

c) 68450 ÷ 2 = _____

d) 3 x 1257 = _____

O exemplo 1 ilustra uma atividade comum nos estudos iniciais das operações aritméticas, e, muitas vezes, corresponde também à introdução do símbolo "=". Nesse sentido, podemos dizer que, o próprio enunciado da questão, *resolva* as operações, implica um significado do símbolo "=" como um comando, ou melhor, que se deve resolver algo.

Depois de terem resolvido muitas atividades tais como a ilustrada no exemplo 1, os alunos vão resolver atividades como a apresentada no exemplo 2. Nesse tipo de atividade, o enunciado, arme e *efetue*, também sugere associar o "=" à idéia de resolver algo. Entretanto, é comum que o aluno seja orientado a armar, efetuar e depois voltar para o item *a*, por exemplo, e '*dar a resposta*', ou '*colocar o resultado*', no caso, 2354 + 1658 = __4012,__ em outras palavras, o "=" indica o lugar da resposta. Esse tipo de instrução prioriza um significado operacional do sinal de igualdade, que, como já mencionamos antes, tem um caráter assimétrico, no qual um lado é dado e o outro deve ser preenchido.

2.3.2 O significado do símbolo "=" em igualdades aritméticas

Dando continuidade ao que foi discutido no item anterior, esclarecemos que, o que estamos considerando como igualdade aritmética, corresponde à expressão análoga a uma operação aritmética com seu resultado. Por exemplo, as operações do exemplo 1 com seus respectivos resultados:

$3 + 4 = 7$

$8 - 5 = 3$

$10 \div 2 = 5$

$2 \times 6 = 12$

Nesse sentido, Molina (2005) afirma que, durante a aprendizagem da Aritmética, os estudantes encontram e manejam igualdades numéricas contendo as operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão. Contudo, estas igualdades correspondem, em sua maior parte, a igualdades de ação. Em outras palavras, igualdades que possuem ao menos um sinal de operação (+, –, x, ÷), e, as operações aparecem expressas em apenas um lado da igualdade, como por exemplo, a igualdade $3 + 4 = 7$. Conforme Molina (ibid), as igualdades que os estudantes comumente encontram nas séries iniciais apresentam a operação do lado esquerdo e o resultado do lado direito.

O símbolo "=", nessas igualdades aritméticas (de ação), não está necessariamente significando algo a ser realizado, pois já tem uma resposta, ou seja, não é dado um lado e o outro deve ser preenchido, como explica Freudenthal (1983) no que se refere às operações do tipo 3 + 4 =. Contudo, isso não garante que o "=" não apresente um significado operacional nas igualdades aritméticas.

De fato, se observamos à luz do significado operacional que discutimos no contexto das operações aritméticas, podemos pensar que o "=" indica que algo foi realizado. Com efeito, em 3 + 4 = 7, o sinal de igualdade não significa que uma ação deverá ser realizada como em 3 + 4 =, mas indica que os números 3 e 4 foram somados resultando no número 7.

A idéia de que o "=" indica o lugar do resultado, associado ao significado operacional, também é válida para as igualdades que apresentam a operação do lado direito do sinal de igualdade e o resultado do lado direito. Freudenthal (1973) indica, nesse sentido, que "a velha e natural interpretação de 2 + 7 = 9 é: considerando 2, adicionando 7, o resultado é 9" (p. 301). Contudo, Freudenthal (ibid.) relata que essa interpretação tem sido rejeitada. Assim, 2 + 7 é visto como um número, e, a expressão total é lida como uma afirmação pronunciando que dois números são iguais, isto é, o número representado por 2 + 7 é igual ao número representado por 9.

Em outro texto, Freudenthal (1983) indica que "o sinal de igualdade é entendido para significar uma identidade" (p. 465), em termos que os seus lados, esquerdo e direito, correspondem a nomes da mesma coisa. O autor ilustra sua posição demonstrando que os lados, esquerdo e direito do "=" correspondem à mesma coisa tanto em 7 + 5 = 12 quanto em 12 = 7 + 5. Isso ainda é válido para 7 + 5 = 5 + 7 ou também para 12 = 12.

No que se refere ao significado do sinal de igualdade para indicar identidade, acrescentamos que o *National Committee on Mathematical Requirements* (NCMR)[21] publicou na revista *The Mathematics Teacher*[22], em 1921, um relatório preliminar[23] sobre a utilização dos termos e símbolos na Matemática Elementar. Entre as considerações que o relatório apresenta sobre símbolos utilizados em Álgebra, destacamos a seguinte parte:

> *Com respeito à distinção entre os símbolos ≡ e = como representando respectivamente identidade e igualdade, o Comitê chama a atenção ao fato que, enquanto a distinção é geralmente reconhecida, o uso consistente dos símbolos é raramente visto na prática. O Comitê recomenda que o símbolo ≡*

---

[21] Comitê Nacional de Exigências Matemáticas;

[22] O Professor de Matemática;

[23] O primeiro esboço desse relatório foi preparado por um sub-comitê constituído por David Eugene Smith (presidente), W. W. Hart, H. E. Hawkes, E. R. Hedrick e H. E. Slaught. Ele foi revisado pelo Comitê Nacional em uma assembléia realizada nos dias 29 e 30 de dezembro de 1920.

> *não seja empregado em exames para o propósito de indicar identidade. O professor, contudo, pode usar ambos os símbolos se desejar* (NCMR, 1921, p. 115).

Ao que parece, desde a década de 1920, o símbolo "=" já era comumente utilizado, também, para representar identidade. Em outras palavras, mesmo existindo um símbolo específico para identidade, no caso, o símbolo ≡, observamos que o símbolo "=" também incorporou o significado de identidade.

Numa posição próxima à discutida por Freudenthal (1983), Hafstrom (1961), explica que, em Matemática, o símbolo "=" é utilizado como uma relação do tipo "é" ou "é igual a", que deve ser claramente entendida. Nesse sentido, no contexto dos números naturais, ele propõe a seguinte definição:

> *Se a e b são símbolos de números naturais, então escrevemos a = b se, e apenas se, a e b são símbolos do mesmo número natural. Se a e b são símbolos de números naturais diferentes, escrevemos um ≠ (HAFSTROM, 1961, p. 6).*

Dessa maneira, um número pode ser propriamente representado por qualquer um dos diversos símbolos. Por exemplo, 6 + 3, 4 + 5, e 0 + 9, todos simbolizam o mesmo número natural, assim como o símbolo 9. Conseqüentemente, quando escrevemos 4 + 5 = 9, estamos utilizando o símbolo de igualdade "=" da mesma forma que usamos quando escrevemos "Chicago = The windy City" (HAFSTROM, op. cit., p. 6), ou por exemplo, Recife = a Veneza brasileira. Em ambos os casos, o símbolo ou o nome à esquerda significa a mesma coisa que o símbolo ou nome à direita do sinal de igualdade.

Enquanto Freudenthal (1983) indicou que o sinal de igualdade significa identidade por causa da idéia de que ambos os lados da igualdade correspondem a mesma coisa, Hafstrom (1961) associou o símbolo "=" às propriedades Reflexiva, Simétrica e Transitiva:

1) a = a (Propriedade Reflexiva);
2) a = b, então, b = a (Propriedade Simétrica)
3) a = b e b = c, então, a = c (Propriedade Transitiva)

Conseqüentemente, Hafstrom (1961) explica que, por causa dessas três propriedades, podemos considerar o "=" como uma relação de equivalência. Hafstrom (1961) enfatiza, ainda, outras propriedades relacionadas à igualdade e, também ao "=".

O axioma da substituição, por exemplo, parte do princípio de que, se temos **a** = **b**, e uma função f(a) existe, então, f(a) = f(b). Esse autor explica que, na prática, ao utilizarmos as propriedades da igualdade (Reflexiva; Simétrica; e, Transitiva), invocamos esse ‘princípio da substituição’, no qual, temos:

- Se a = b, e f(a) = g(a), então, f(a) = g(b).

Em outras palavras, se **a = b**, então, **b** pode ser substituído no lugar de **a** em qualquer expressão sem modificar o valor dessa expressão. Contextualizando, a igualdade 7 + 5 = 12 é uma afirmação verdadeira. Temos também, 8 + 4 = 12. Então, podemos, pelo princípio da substituição, trocar 12 por 8 + 4, obtendo a afirmação, também verdadeira, 7 + 5 = 8 + 4 (HAFSTROM, 1961).

Se **a** = **b**, podemos, também, adicionar **c** em ambos os lados da igualdade, conservando-a como verdadeira, e temos, **a + c** = **b + c**. Assim, podemos dizer que, se 7 + 5 = 12 é uma afirmação verdadeira, então, adicionando 3 em ambos os lados, conservaremos a igualdade como verdadeira, e teremos, ‘7 + 5’ + 3 = ‘12’ + 3; se adicionarmos 5 nos dois membros da equação, ‘x + 3’ = ‘10’, teremos uma outra equação equivalente, pois, o valor da incógnita x não muda em, ‘x + 3’ + 5 = ‘10’ + 5. Do mesmo modo, poderíamos ter adicionado – 3 a ambos os membros, e chegaríamos a, x + 3 - 3 = 10 – 3, encontrando em seguida x = 7. Esse tipo de procedimento é bastante utilizado, por exemplo, na resolução de equações.

As considerações de Hafstrom (1961) assim como as de Freudenthal (1983), parecem remeter a idéia de *nome para um número*. Essa idéia foi defendida, desde a década de sessenta, pelo School Mathematics Study Group[24] (SMSG). Kieran (1981) explica que essa idéia foi adotada pela maioria dos livros textos atuais[25] de Matemática da Educação Elementar[26], supondo que, um jovem aprendiz, pode assimilar uma concepção de equivalência do sinal de igualdade. De acordo com Kieran (ibid.), “‘é outro nome para’ é uma relação de equivalência definida pelos pares de números ordenados [(a, b) R (c, d) se a + b = c + d]” (p. 319).

[24] Grupo de estudo Matemática Escolar.
[25] Considerar o os livros textos atuais referentes ao ano de 1981.
[26] Quando nos referirmos à Educação Elementar estaremos considerando o equivalente as cinco primeiras séries do Ensino Fundamental.

Vergnaud (1994), por sua vez, reconhece e distingue as posições de Freudenthal (1983), referente ao sentido do sinal de igualdade como identidade, e de Hafstrom (1961) e Kieran (1981) no que concerne ao sentido do sinal de igualdade como equivalência. Assim, Vergnaud (1994) explica que a relação de igualdade é uma relação simétrica, transitiva e reflexiva e, conseqüentemente, uma relação de equivalência, porém, tem uma particularidade suplementar de afirmar que o que está à direita do sinal de igualdade é a mesma coisa do que está à esquerda.

Em outras palavras, uma relação de igualdade não afirma somente uma equivalência, mas também uma identidade. Vergnaud (ibid.) elucida isso por meio da análise de um exemplo numérico. Na igualdade 3 + 4 = 7, as propriedades das relações de equivalência são verdadeiras e utilizáveis:

– simétrica $\quad 3 + 4 = 7 \Longrightarrow 7 = 3 + 4$

– transitiva $\quad \left.\begin{array}{l} 3 + 4 = 7 \\ 7 = 5 + 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow 3 + 4 = 5 + 2$

– reflexiva $\quad 7 = 7$

$\quad 3 + 4 = 3 + 4$

Ao mesmo tempo, dizer que na igualdade 3 + 4 = 7 trata-se do mesmo número à direita e esquerda do sinal de igualdade, significa que a expressão simbólica 3 + 4 representa o mesmo número que representa o símbolo 7 (VERGNAUD, 1994). Em outros termos, esclarece ainda esse autor, a igualdade pode ser entendida de duas maneiras:

- como uma identidade no nível do número representado,

- como uma equivalência entre as diferentes representações simbólicas deste número.

Por conseguinte, a relação de igualdade representa, ao mesmo tempo, a identidade única de significado e a equivalência dos diferentes significantes, ou seja, ela pode ser entendida nesses dois níveis (VERGNAUD, ibid.).

2.3.3 O significado do símbolo “=” nas equações

Freqüentemente, o conceito de equação é ensinado no sétimo ano do Ensino Fundamental, juntamente com a introdução de letras com a finalidade de representarem valores desconhecidos, recebendo assim, o nome de incógnitas. É comum também considerar que, o início dos estudos das equações, representa a transição da Aritmética para a Álgebra.

Dando seqüência com nossa discussão, voltamos à acepção indicada por Taylor (1910) que, partindo da noção de igualdade, caracteriza equação como uma igualdade condicional, isto é, verdadeira para certos valores desconhecidos. Dessa maneira, iniciamos com o questionamento de Freudenthal (1983) acerca do significado operacional do sinal de igualdade em operações como 7 + 5 = , no qual ele discute que, se o sinal de igualdade mostra o lugar do resultado, então, qual o sentido do resultado em 7 + ___ = 12?

Realmente, o resultado é 5, ao passo que, se depois do “=” vem o resultado, quem está ocupando o lugar do resultado é o número 12. A idéia de que o sinal de igualdade indica o lugar da resposta é válida num domínio de situações nas quais os números desconhecidos não estão imediatamente após o “=”. Por exemplo, se observarmos as expressões abaixo, podemos perceber que essa idéia é aceitável para a expressão *a*, pois o lado esquerdo pode ser entendido como uma questão[27] e o lado direito como o lugar da resposta, mas não para as demais expressões:

a) 3 + 4 = ____

b) ___ + 4 = 7

c) 3 + ____ = 7

d) 3 + 4 = 2 + ____

e) 3 + 4 = ____ + 5.

---

[27] Na acepção de Freudenthal (1983), como discutimos no contexto das operações aritméticas.

Essas expressões podem ser entendidas como exemplos de igualdades condicionais, pois, cada uma depende de certo número para ser verdadeira. Na expressão *a*, esse número é o 7, na *b* é o 3, na *c*, o número é 4, na *d* é o 5 e, na expressão *e*, o número desconhecido correspondente é o 2. Se substituirmos os espaços vazios (_) por letras, em particular pelo *x*, teremos assim, algumas representações algébricas prototípicas de equações:

a) 3 + 4 = x

b) x + 4 = 7

c) 3 + x = 7

d) 3 + 4 = 2 + x

e) 3 + 4 = x + 5.

Dessa forma, o significado operacional do sinal de igualdade tão utilizado no estudo da Aritmética das séries iniciais, não funciona adequadamente para o estudo das equações, uma vez que, não é comum que o lado esquerdo represente uma questão e o lado esquerdo o local da resposta. Brousseau e Antibi (2000) ratificam esse fato quando apontam que esse significado operacional, comumente caracterizado pela utilização do símbolo "=" nas séries iniciais para anunciar simplesmente o resultado de um cálculo, tem uma utilização bastante afastada da que se espera mais tarde em Álgebra.

Na verdade, esse impasse faz parte de um quadro mais amplo que envolve aspectos de ruptura e continuidades entre Aritmética e Álgebra. Diversos estudos têm investigado as relações que se estabelecem entre esses dois domínios matemáticos (GALLARDO e ROJANO, 1988; FILLOY e ROJANO, 1989; DA ROCHA FALCÃO, 1992; LINS e GIMENEZ, 1997; VERGNAUD, CORTES e FAVRE-ARTIGUE, 1987; HERSCOVICS e LINCHEVSKI, 1994; LINCHEVSKI e HERSCOVICS, 1996).

Gallardo e Rojano (1988) e Filloy e Rojano (1989) discutem a demarcação entre Aritmética e Álgebra em termos da utilização de incógnitas em ambos os lados da igualdade, ou, mais precisamente, da equação, surgindo o termo "*didactic cut*"[28]. Já Herscovics e Lichenvski (1994) e Lichenvski e Herscovics (1996) defendem essa

---

[28] Corte didático;

distinção em termos da falta de habilidade do estudante ao operar com ou sobre incógnitas, denominando essa falta de habilidade de "*cognitive gap"*[29]. A maioria das pesquisas que citamos no parágrafo anterior sugere o significado do sinal de igualdade, entre as rupturas e/ou diferenças mais evidentes entre Aritmética e Álgebra.

Se não há uma precisão consensual sobre o momento particular da demarcação entre Aritmética e Álgebra, podemos ao menos argumentar que a literatura apresenta certo consenso em considerar o conceito de equação como um marco importante para apontar uma possível demarcação. O conceito de equações também é, por conseguinte, tema central nas discussões acerca dos aspectos de rupturas entre Aritmética e Álgebra. Verdadeiramente, é ampla a literatura dos últimos trinta anos sobre o conceito de equação ou sobre o sinal de igualdade que reconhece, em linhas gerais, que existe no conceito de equações o aspecto de mudança de significado ou mesmo ruptura do significado operacional do sinal de igualdade, comumente associado ao campo aritmético (e.g. HERSCOVICS e KIERAN, 1980; KIERAN, 1981; 1992; FUSON, 1992; GODINO e FONT, 2003; WARREN e COOPER, 2005; GODFREY e THOMAS; 2004; McNEIL e ALIBALI, 2005; McNEIL *et. al.*, 2006;).

Rastreando o significado do sinal de igualdade no contexto das equações, podemos argumentar que este remete à própria finalidade de Recorde ao introduzir o símbolo "=" como sinal de igualdade. Como abordamos no tópico atinente à história do sinal de igualdade, a primeira utilização do símbolo "=" como sinal de igualdade surgiu num livro de Álgebra escrito por Robert Recorde em 1557. Mais especificamente, Recorde utilizou o símbolo "=" no capítulo referente à resolução de equações algébricas com o intento de facilitar o processo de transformação/simplificação das equações, evitando assim a tediosa repetição da expressão "*is equalles to*"[30] (RECORDE, 1557; HEEFFER, 2004; 2007).

Conforme Heeffer (2007), o processo de transformação e simplificação as equações envolvia as operações combinatórias que são possíveis em uma equação, quando se trata de sua resolução. Essas operações incluem: a adição ou subtração dos termos homogêneos dos dois lados da equação, a divisão ou multiplicação de uma equação por uma constante (introduzido por Cardano) e, a adição ou subtração de duas

---

[29] Lacuna cognitiva;
[30] É igual a.

equações (introduzido por Buteo). Heeffer (op. cit.) afirma, nesses termos, que o "sinal de igualdade simboliza a equação" (p. 17).

A perspectiva subjacente a essas considerações de Heeffer (2007) parece concordar com o sentido de equivalência proposto por Gattegno (1974), segundo o qual distingue equivalência como uma relação na qual é aceitável, para certos propósitos, a substituição de um item por outro. A equivalência assume, então, o principal significado do sinal de igualdade no contexto das equações. Nessa direção, o sinal de igualdade ao invés de apresentar uma característica unidirecional e assimétrica, deve apresentar uma característica bidirecional e simétrica; ao invés de apresentar uma utilização operacional, precisa ser utilizado como uma relação de equivalência.

2.3.4 O significado do símbolo "=" nas funções

O conceito de função, assim como o de equação, é um dos principais na Álgebra Escolar. Freqüentemente, ele é formalmente introduzido na 9º ano do Ensino Fundamental, e uma boa parte do primeiro do Ensino Médio é destinada ao ensino desse conceito.

Conforme Meira (1997), funções são comumente definidas como uma "*relação* especial entre dois conjuntos" (p. 63). De fato, Freudenthal (1983) reconhece que, uma relação *f*, por exemplo, "é uma função de A em B se para todo a $\in$ A existe exatamente um elemento b $\in$ B tal que a, b $\in$ *f*" (p. 497). Entretanto, o próprio Freudenthal (ibid.) demonstra uma perspectiva alternativa, na qual as funções são definidas em termos de uma *dependência causal entre variáveis*. Em outras palavras, as funções podem ser entendidas, como um ato que transforma cada elemento de A em um elemento de B (FREUDENTHAL, 1983; MEIRA, 1997).

A definição de função enquanto relação enfatiza a existência de correspondências entre conjuntos, sugerindo uma compreensão *estática* de funções. Já a outra definição de funções, apresenta, mais adequadamente, as propriedades dinâmicas da *dependência entre variáveis*, no sentido de que as transformações aplicadas na variável independente provocam mudanças na variável dependente (MEIRA, 1997).

No que diz respeito à representação da relação entre as variáveis dependente e independente, no conceito de função, Meira (ibid.) explica que, formalmente, consideram-se três sistemas simbólicos distintos. O primeiro corresponde a tabelas contendo listas de pares ordenados que satisfaçam a dependência; o segundo refere-se aos gráficos da função no plano cartesiano, ou diagramas de setas que estabelecem relações entre conjuntos; e o último, concerne às equações em duas variáveis, comumente representadas por y = ax + b, onde *a* indica uma constante de proporcionalidade e *b* uma constante aditiva.

Tomando como base a igualdade y = 3x + 5 como uma maneira de representar o conceito de função afim e considerando a idéia de que ambos os lados da igualdade representam a mesma coisa, podemos levantar o seguinte questionamento: é adequada, no contexto das funções, a afirmação de que y e 3x + 5 são nomes para a mesma coisa, ou para o mesmo número? De fato, Freudenthal (1983) e Hafstrom (1961) utilizaram a afirmação vernácula *nomes para a mesma coisa*, assim como o School Mathematics Study Group defendeu a idéia *nomes para o mesmo número* como qualidades associadas aos lados de uma igualdade.

É importante ressaltar que Freudenthal (1983), assim como Hafstrom (1961) utilizaram esta afirmação no âmbito das igualdades aritméticas, como por exemplo, 3 + 4 = 7 ou 3 + 4 = 5 + 2. Assim, Freudenthal (1983) também alertou que esta fórmula, nomes para a mesma coisa, não corresponde a diversas outras expressões contendo o símbolo "=". Por exemplo, se em x + 4 = 10, podemos dizer que 'x + 4' é a mesma coisa que '10', ou são nomes diferentes para a mesma coisa, estamos admitindo que '1 + 4' = '10'; '2 + 4' = '10', etc., em sua maior parte, afirmações falsas, com exceção para x = 6 que, satisfaz em 'x + 4' = '10', a fórmula 'nomes diferentes para a mesma coisa'. Essa afirmação vernácula é igualmente falsa para o conceito de função, uma vez que, é absurdo dizer que, em y = ax + b, temos 'y' e 'ax + b' como 'nomes diferentes para a mesma coisa'.

Ponte (2006), por sua vez, aponta que o símbolo "=" numa função, tal como y = k.x, não está indicando algo que seja para resolver ou calcular. Nesse sentido, nosso interesse no momento é discutir o significado do sinal de igualdade no contexto das funções, e, para tal, achamos conveniente observar, de maneira articulada, o uso do símbolo "=" e a idéia de dependência entre variáveis. As características particulares desta articulação sugerem, então, que o sinal de igualdade seja utilizado como um símbolo que indica uma relação funcional (GODINO e FONT, 2003; MOLINA, 2006) ou uma igualdade funcional (ROJANO, 2002). Nesse sentido, entendemos que o atributo mais adequado do símbolo “=” no contexto das funções é indicar uma relação dinâmica que implica na idéia de dependência causal entre as variáveis dependente e independente.

2.3.5 Outras utilizações e significados do sinal de igualdade

A literatura reconhece uma variedade de outros usos e significados do sinal de igualdade. Como o propósito de nossa pesquisa não depende necessariamente de uma discussão em profundidade desta questão, citaremos apenas alguns destes significados a título de ilustração.

Anglada (2000 *apud* MOLINA, 2006), identificou, a partir de um estudo em livros didáticos do terceiro ciclo da Educação Primária e primeiro ciclo da Educação Secundária da Espanha, vários usos do sinal de igualdade, entre os quais destacamos a utilização do sinal de igualdade para: relacionar duas expressões que representam um mesmo número como $\frac{1}{2} = 0{,}5$; conectar duas notações alternativas, como por exemplo em $\frac{7}{5} = 7 \div 5$; designar equivalência $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; conectar expressões verbais com sua tradução numérica, tal como, 20% de 4000 = 4000 x $\frac{20}{100}$; definir um objeto matemático, como em $5^0 = 1$; relacionar quantidades adjetivas por meio de unidades de medidas (ex.: 100 cm = 1 m); designar um objeto (ex.: área do retângulo = a.b), que Usiskin (1995), por exemplo, denominou de fórmula; associar a um objeto uma quantidade adjetiva (ex.: A = 30 m^2).

Molina (2006) reconhece outros significados do sinal de igualdade, entre eles, indicador de uma aproximação (ex.: $\frac{1}{3} = 0{,}333$), assinalação de um valor numérico (ex.: x = 4), significado impreciso como indicador de certa correspondência não necessariamente matemática (ex.: uma bicicleta = 35$; Tom = 13 anos ou idade de Tom = 13 anos). Outros exemplos desta utilização imprecisa do sinal de igualdade podem ser ilustrados nas figuras abaixo:

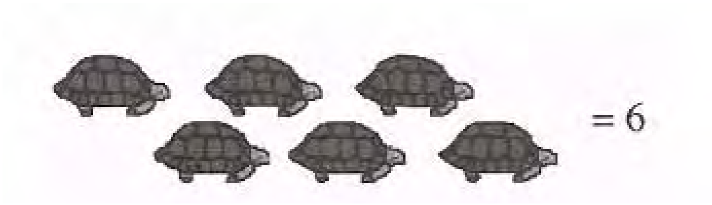


Figura 05 – uso impreciso do sinal de igualdade (CAPENTER, FRANKE e LEVI, 2003; MOLINA, 2006, p. 146)

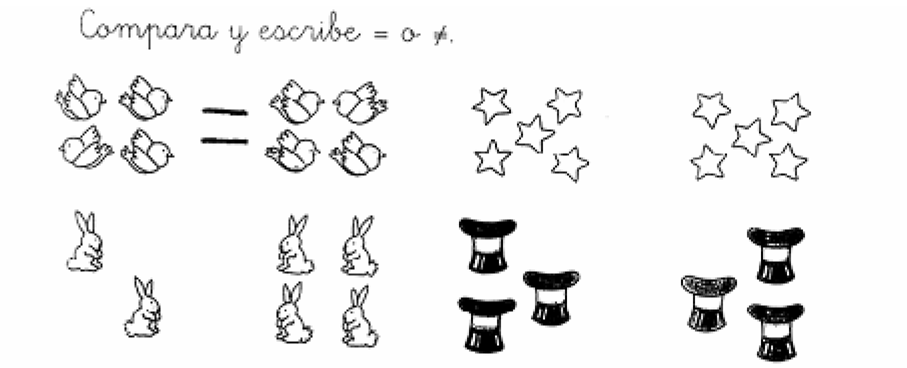


Figura 06 – uso do símbolo "=" em livro didático da Educação Primária (MOLINA, 2006, p. 147).

Freudenthal (1983) também reconhece outras utilizações do sinal de igualdade. Ele explica que, devido ao automatismo das regras associadas às transformações em Álgebra, o sinal de igualdade é utilizado de maneira assimétrica e unilateral voltado para uma redução, como por exemplo, em (a + b).(a – b) = . O autor discute, ainda, que este padrão, de buscar a redução, não acontece apenas em expressões algébricas, mas também, na ordem de resolução de equações. Isto fica evidente na seguinte seqüência de passos na resolução da equação $x^2 - 3x + 2 = 0$:

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

$$x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} + 2 - \frac{9}{4} = 0,$$

$(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4} = 0,$

$(x - \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4},$

$x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2},$

$x = \frac{4}{2}$ = 2 ou 1 (FREUDENTHAL, 1983, p. 482). O mesmo é válido para o problema de simplificar $a^2 - 3ab + 2b^2$, onde os vários passos são justificados por sinais de igualdade:

$a^2 - 3ab + 2b^2 =$

$= a^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}ab + (\frac{3}{2}b)^2 + 2b^2 - (\frac{3}{2}b)^2 =$

$= (a - \frac{3}{2}b)^2 - (\frac{1}{2}b)^2 =$

$= (a - \frac{3}{2}b + \frac{1}{2}b) \cdot (a - \frac{3}{2}b - \frac{1}{2}b) =$

$= (a - b) \cdot (a - 2b)$. Neste caso, como o que permanece igual em vários passos não é numérico, mas um valor considerado como verdadeiro, assim poderia ter sido utilizado, ao invés do "=", o símbolo $\Leftrightarrow$ (FREUDENTHAL, op. cit.). Nos dois exemplos, o símbolo "=" pode ser entendido também em termos de conectar (link entre os passos da resolução).

Por último, em relação a outros significados do sinal de igualdade, ainda podemos levantar a hipótese que, em razão da maneira como a Matemática é geralmente ensinada, o sinal de igualdade é utilizado como símbolo que serve para separar ou unir, por exemplo: em uma equação, a incógnita e seu valor (ex.: x = 2) ou o primeiro membro e o segundo membro (ex.: 2x + 2 = 10 + 8); em uma igualdade aritmética, a operação e seu resultado (ex.: 5 + 7 = 12); em uma função, a variável dependente, da variável independente (ex.: y = ax + b).

2.4 Os significados do sinal de igualdade na perspectiva dos alunos (concepções)

Nos tópicos anteriores, estudamos alguns aspectos históricos, matemáticos e didáticos que dizem respeito ao símbolo “=”. Neste tópico, o tema central corresponde aos significados do sinal de igualdade na perspectiva dos alunos. Dessa maneira, iniciamos ressaltando que nos últimos 30 anos, o interesse pelas concepções dos alunos sobre o sinal de igualdade é freqüentemente expresso em diversas pesquisas, tanto no campo da Aritmética quanto da Álgebra.

Analisando alguns aspectos destes estudos, é possível distinguirmos dois focos. Um referente ao estudo das concepções dos alunos sobre o significado do sinal de igualdade como objeto de estudo central (e.g. BEHR, ERLWANGER e NICHOLS, 1976; 1980; KIERAN, 1981; BAROODY e GINSBURG, 1983; SAENZ-LUDLOW e WALGAMUTH, 1998; JONES e PRATT, 2005; JONES, 2006; KNUTH *et. al.*, 2006; SEO e GINSBURG, 2003; CAMICI *et. al.* 2002; FREIMAN e LEE, 2004; THEIS, 2003; MOLINA, 2005; 2006; OKSUZ, 2007; CAVALCANTI e CÂMARA DOS SANTOS, 2007a; 2007b), e outro, referente a estudos diversos (concepções de equações, transição aritmética-álgebra, dificuldades da Álgebra Inicial (Early Álgebra), desenvolvimento do pensamento relacional, etc.) que fazem referência às concepções do sinal de igualdade (eg. GRUGEON, 2000; FARMAKI, KLAOUDATOS e VERIKIOS, 2005; WARREN e COOPER, 2005; MEDINA, 1999; MCNEIL, 2004; LINS LESSA, 1996; BRITO LIMA, 1996).

No presente tópico discutiremos, então, algumas pesquisas que investigaram os significados do sinal de igualdade na perspectiva dos alunos. Entendemos assim, que a compreensão dos alunos, ou sua interpretação sobre o significado do sinal de igualdade, são compatíveis ao que estamos considerando como concepções dos alunos sobre o sinal de igualdade.

Podemos argumentar que este interesse pelas concepções dos alunos sobre o sinal de igualdade justifica a hipótese de que nem sempre os alunos compreendem o significado do símbolo “=” de maneira satisfatória no contexto no qual ele aparece. A partir deste fato, várias pesquisas têm relatado, entre outras coisas, concepções errôneas sobre o significado do sinal de igualdade no campo aritmético, mas, sobretudo, no campo algébrico.

Reconhecemos o quanto é ampla a literatura sobre o sinal de igualdade na perspectiva dos alunos. Sendo assim, várias pesquisas foram realizadas nestes trinta anos em diversos países, com diferentes séries e finalidades. Assim, optamos por organizar o presente estudo sobre os significados do sinal de igualdade na perspectiva dos alunos em quatro partes: na primeira parte discutiremos os estudos realizados com alunos na etapa inicial do Ensino Fundamental (1º ao 5º ano); na segunda parte, àqueles referentes à segunda etapa do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano); na terceira etapa, vamos considerar outras pesquisas que investigaram o sinal de igualdade em séries tanto do Ensino Fundamental I quanto do II, de nível superior (pós-médio, como curso técnico ou graduação) e pós-graduação. Por fim, a quarta parte é uma breve síntese sobre as idéias principais que emergiram deste estudo.

2.4.1 Estudos com alunos nas séries do Ensino Fundamental I

Nas séries iniciais, o foco de ensino é a Aritmética. Os contextos nos quais os alunos comumente utilizam o símbolo “=” são as operações aritméticas (ex. 3 + 4 = __) e as igualdades aritméticas (ex. 3 + 4 = 7). Na década de setenta, especificamente em 1976, gostaríamos de ressaltar duas investigações sobre a compreensão de crianças jovens sobre o símbolo “=” e o conceito de igualdade. Uma das investigações foi realizada por Behr, Erlwanger e Nichols (1980) e a outra por Denmark, Barco e Voran (1976). Enquanto a investigação de Behr, Erlwanger e Nichols (1980) procurou diagnosticar como as crianças compreendiam o sinal de igualdade, a investigação de Denmark, Barco e Voran (1976) organizou um ensino experimental para auxiliar no desenvolvimento da compreensão do conceito de igualdade e do símbolo “=” como símbolo relacional.

Behr, Erlwanger e Nichols (1980) realizaram entrevistas com crianças de seis a doze anos de idade com a finalidade de investigar se estas crianças consideravam o sinal de igualdade em termos de operação ou de relação. Assim, os autores explicam que como um símbolo operador, o símbolo “=” seria um “sinal de fazer algo” (p. 15). Como símbolo relacional, o "=" implicaria em uma "comparação dos dois membros de uma sentença de igualdade" (p. 15).

Antes de falarmos sobre os resultados esclarecemos que, Behr, Erlwanger e Nichols (1980) realizam algumas distinções referentes às expressões contendo o símbolo "=". Num primeiro momento os autores informam que a maioria dos trabalhos das crianças com idades entre seis e sete anos é baseada em expressões numéricas abertas. Por exemplo, na aprendizagem dos fatos básicos da adição, espera-se que as crianças resolvam operações como 3 + 4 = □. Na mesma direção, Freudenthal (1983) esclarece que operações aritméticas, nas quais, um lado é dado e o outro deve ser preenchido, são compreendidas e lidas, prioritariamente, como tarefas a serem executadas ou como perguntas. Assim, a operação 3 + 4 = poderia ser entendida como uma tarefa tal como, adicione quatro a três, ou lida de maneira interrogativa como, quanto é 3 + 4?

Num segundo momento, Behr, Erlwanger e Nichols (1980) distinguem as expressões contendo o símbolo "=" como sentenças de ação ou não ação. As sentenças de ação são aquelas que apresentam sinais de operação apenas em um lado do sinal de igualdade como, por exemplo, as igualdades 2 + 3 = 5 e 5 = 2 + 3. As sentenças de não ação são aquelas que apresentam sinais de operação em ambos os lados do "=" ou não apresentam sinais de operação em nenhum dos lados da igualdade. Nesse sentido os autores explicam que sentenças sem sinal de operação (3 = 3) ou mais que um sinal de operação (3 + 1 = 1 + 2) não sugerem ação, mas antes requerem um julgamento do tipo, verdadeiro/falso.

Os resultados obtidos nas entrevistas demonstraram que as crianças consideram o "=" como um *sinal de fazer algo* (p. 15). Behr, Erlwanger e Nichols (1980) explicam que quando as crianças observaram operações aritméticas do tipo a + b = □, tal como 3 + 4 = □, percebiam-na como um estímulo ao cálculo no qual a resposta seria colocada na caixinha.

Em operações do tipo □ = a + b, tal como □ = 4 + 5 destacamos que alguns alunos reagiam afirmando que estava para trás (isto é, ao contrário) e acabavam re-escrevendo para 5 + 4 = □, ou □ + 4 = 5. Outros alunos, por exemplo, dadas as operações   = 1 + 2 e   = 3 + 5, escreveram 3 = 1 + 2 e 8 = 3 + 5. No entanto, a maior parte dos alunos invertiam a leitura para "dois mais um igual a três" e "cinco mais três igual a oito" (p. 14). Quando Behr, Erlwanger e Nichols (1980) questionaram as crianças sobre 3 = 5 ou 3 = 3, elas apresentaram respostas típicas, como a de Eve, de seis anos de idade, que não aceitou a igualdade 3 = 5 e modificou-a para 3 + 2 = 5, enquanto que para 3 = 3 ela modificou para 0 + 3 = 3. Shoecraft (1989) também reconhece que muitos alunos freqüentemente alteram expressões do tipo 8 = 3 + 5 para 3 + 5 = 8 e 6 = 6 para 6 + 0 = 6.

Em relação às igualdades com sinais de mais nos dois lados do símbolo "=", as reações nas respostas indicaram que as crianças esperam que depois do sinal de igualdade venha uma resposta. Por exemplo, quando o entrevistador apresentou a igualdade 2 + 3 = 3 + 2 a uma criança de seis anos de idade reagiu modificando para 2 + 3 = 5. Quando lhe colocaram a igualdade 1 + 5 = 5 + 1 ela mudou para 1 + 5 = 1 + 5 e depois para 1 + 5 = 1 + 5 =, afirmando que "uma resposta deverá ser escrita no lado direito do segundo sinal de igualdade" (BEHR, ERLWANGER e NICHOLS, ibid., p. 15).

Outros pesquisadores, entre eles, Denmark, Barco e Voran (1976), também observaram em suas pesquisas as dificuldades dos alunos em aceitarem o significado relacional do símbolo "=" em expressões com operações nos dois lados do sinal de igualdade. Segundo Denmark, Barco e Voran (1976), quando há operações dos dois lados da igualdade, freqüentemente os alunos consideram-nas como dois problemas separados. Na mesma direção, Shoecraft (1989) aponta que muitos dos alunos tendem a re-escrever a expressão 2 + 7 = 4 + 5 para 2 + 7 = 9, 4 + 5 = 9 e até para 2 + 7 + 4 + 5 = 18. Nesse caso, os alunos parecem sentir a necessidade de obter o esquema operação = resposta, no qual o sinal de igualdade é sempre seguido por uma resposta.

Em linhas gerais, as crianças não aceitaram igualdades de não ação modificando-as para igualdades de ação, considerando que depois do sinal de igualdade vem o resultado. Neste sentido, Behr, Erlwanger e Nichols (1980) concluíram que além das crianças considerarem o "=" como um *sinal de fazer algo*, existe uma forte tendência, verificada em todas as crianças, na qual o símbolo "=" é aceitável apenas nos casos em que um, ou mais, sinais de operações (+, − , x, ÷) o precede. Assim, as crianças aceitariam o símbolo "=" em expressões como, 3 + 4 =; 5 + 8 − 3 ÷ 2 =, mas não em expressões como 3 = 3 ou 7 = 3 + 4.

A não aceitação de mais de um número após o sinal de igualdade, como foi discutido no estudo Behr, Erlwanger e Nichols (1980), pode ser associada ao que Collis (1974) referiu como uma limitação em relação à *aceitação da falta de fechamento*. Segundo Collis (ibid.), as crianças com idades entre 6 e 10 anos de idade esperam que, por exemplo, dois números conectados por um sinal de operação (4 + 5) seja trocado por um terceiro número (9). Em outras palavras, estas crianças não aceitam uma igualdade como 4 + 5 = 6 + 3 e de tal maneira algumas até a reescreveram como 4 + 5 = 9, pois necessitam ver após o sinal de igualdade um único número como resultado da operação entre os números do lado esquerdo do "=". Na perspectiva deste autor, as crianças com idades entre dez e treze anos estariam em uma fase de transição para uma compreensão matemática mais abstrata e só após os treze anos de idade é que eles poderiam aceitar o sinal de igualdade como um símbolo de equivalência.

O estudo de Denmark, Barco e Voran (1976) consistiu num ensino experimental para um grupo de alunos da 1ª série, com foco no conceito de igualdade. Assim, os autores organizaram atividades nas quais utilizaram a idéia do equilíbrio das balanças para permitir que os alunos representassem e respondessem diferentes operações de adição e subtração. Esta experiência permitiu que os alunos adquirissem certa flexibilidade na aceitação do uso do "=" como símbolo relacional em uma variedade de situações, como por exemplo, 3 = 3, 3 + 2 = 4 + 1, 5 = 4 + 1, porém, em outras situações prevalecia ainda uma concepção operacional. Numa primeira análise, poderíamos discorrer que este estudo de Denmark, Barco e Voran (1976) contraria o estudo de Collis (1974), pois foi possível verificar que as crianças da 1ª série passaram a aceitar o "=" em expressões como 5 = 4 + 1, após dois meses de instrução.

No entanto, Denmark, Barco e Voran (1976) apontam que a primeira concepção do sinal de igualdade não foi relacional, mas sim operacional. Na verdade, Os autores ainda explicam que os dados obtidos na execução deste experimento não possibilitam argumentar conjecturas conclusivas de que, estudantes da primeira série após passarem por experiências de ensino nas quais encontre o símbolo "=" em diversos tipos de expressões, adquiram uma conceptualização da igualdade como uma relação de equivalência.

Baroody e Ginsburg (1983) também realizaram um estudo investigando os efeitos da instrução sobre a compreensão das crianças sobre o sinal de igualdade. Os autores explicam que uma igualdade do tipo 'a + b = c' pode representar uma combinação de dois números para obtenção de um terceiro. Analogamente, uma igualdade do tipo 'a = b + c' pode indicar uma decomposição de um número em dois números diferentes. Entretanto, Baroody e Ginsburg (idid.) explicam que psicologicamente, o símbolo "=" não é facilmente separado da visão operacional.

Neste estudo, Baroody e Ginsburg (ibid.) avaliaram a compreensão do sinal de igualdade de três grupos de alunos da primeira, segunda e terceira série da escola primária, que haviam recebido instrução baseada num currículo matemático denominado Wynroth. Neste currículo, o sinal de igualdade era definido como uma expressão de equivalência numérica, ou seja, no sentido de '*o mesmo número que*'.

Após o período de desenvolvimento do currículo (aproximadamente sete meses), Baroody e Ginsburg (1983) entrevistaram os alunos individualmente sobre a veracidade ou não de sentenças numéricas de ação e de não ação, assim como se a forma das sentenças lhes era familiares ou não. Os resultados demonstraram que a instrução obteve certo êxito no que diz respeito ao desenvolvimento da compreensão do sinal de igualdade como símbolo relacional. Outro ponto evidenciado é que, parte dos alunos que demonstraram tal compreensão do "=", em várias ocasiões fizeram isto de maneira incoerente, sendo observado maior coerência entre alunos da primeira série. Os autores explicam que a vantagem dos alunos da primeira série em relação aos alunos das demais séries, foi influenciada pelo ensino que os alunos da segunda e terceira série haviam recebido, por exemplo, nas séries anteriores ao período de instrução, pois nestas séries, o currículo não teria sido o mesmo.

Saenz-Ludlow e Walgamuth (1998) também analisaram a interpretação de igualdade e do sinal de igualdade de uma turma de alunos da 3ª série que participaram de um ensino experimental baseado no sócio-construtivismo. Elas verificaram que os alunos inicialmente interpretaram o "=" como um comando para a realização de uma operação aritmética e que foi menos natural para eles interpretá-lo como um símbolo relacional para comparar duas quantidades. Segundo estas pesquisadoras, as crianças têm dificuldades em desligarem-se de sua concepção inicial de operador, e ainda defendem seu ponto de vista de maneira insistente. O segundo corresponde aos numerosos regressos para a antiga concepção do sinal de igualdade ao longo de toda a seqüência. Por fim, o terceiro corresponde ao fato de que dois dos três participantes tiveram tendências a voltarem para uma concepção operacional do sinal de igualdade.

Mais recentemente, Theis (2003) realizou um estudo com a finalidade de descrever o processo de compreensão do sinal de igualdade de três alunos do primeiro ano do primário. Segundo este autor, durante o primeiro ano primário, a maior parte dos alunos tem dificuldades em compreender adequadamente o símbolo "=". Conseqüentemente, muitos alunos não reconhecem este símbolo como um indicador de uma relação de igualdade ou equivalência, mas sim como um operador após o qual é necessário que se escreva uma resposta. Este fato seria reforçado pela utilização predominante nos livros escolares, de expressões do tipo 'a + b = __'. Theis (ibid.) indica que duas dificuldades principais podem ser geradas por esse motivo: a primeira corresponde à não aceitação freqüente das igualdades não convencionais, e a segunda refere-se à falta de condições dos alunos para completarem corretamente expressões que não correspondem à estrutura 'a + b =__'.

Em linhas gerais Theis (2003) aplicou um pré-teste para recolher, inicialmente, dados referentes às compreensões de onze crianças sobre o "=" e, posteriormente, selecionar três participantes. Após a escolha dos três participantes foi realizado um ensino individualizado dentro de um quadro de experimentação didática. Theis (ibid.) esclarece que as atividades apoiaram-se no modelo de análise conceptual das relações de equivalência e igualdade de Bergeron e Herscovics (1988). Ainda, no que se refere à elaboração das atividades de ensino, Theis (2003) tentou estabelecer relações entre a escrita matemática e a representação concreta. No final, foi realizado um pós-teste semelhante ao pré-teste para verificar a extensão das aprendizagens realizadas pelos três participantes.

Entre os aspectos mais importantes constatados na pesquisa de Theis (2003) destacamos os referentes aos erros das crianças no início da aprendizagem do significado do sinal de igualdade e as possibilidades das crianças de primeiro ano correspondentes ao progresso de suas aprendizagens sobre o sinal de igualdade como uma relação de equivalência.

Com o pré-teste, foi verificado que a concepção operacional do sinal de igualdade foi generalizada. Tal constatação segundo Theis (op. cit.), não surpreendeu uma vez que todos os pesquisadores que investigaram o sinal de igualdade chegaram a conclusões similares. Além disso, o autor acrescenta que este fenômeno não se limita ao início das aprendizagens dos números e das operações, mas prolonga-se além da escola primária. De início, esta concepção exerceu grande influencia nos alunos quando estes foram trabalhar com expressões não convencionais. Com exceção da estrutura não convencional ‘a = a’, todos os alunos rejeitaram igualdades que não correspondessem à estrutura ‘a + b = c’. Dificuldades análogas já foram anteriormente demonstradas nos estudos que discutimos anteriormente.

No entanto, Theis (2003) verificou que certas crianças também aceitam o “=” como indicador de uma relação em estruturas do tipo ‘a = a’, semelhantemente ao que já foi evidenciado em outros estudos como os de Labinowicz (1985) e de Daneau *et. al.* (2000). Nesse sentido, Theis (2003) argumenta partindo da hipótese de que este fenômeno deve-se ao fato de que “a única ocasião que permite as crianças terem um ensino explícito do sinal = em Luxembourg[31] implica em tais estruturas” (p. 307). Assim, as crianças são levadas a comparar diferentes quantidades e a inserir os símbolos “<”, “>” ou “=” entre dois números, e é neste contexto que se fala explicitamente do significado do símbolo “=”. Em síntese, Theis (ibid.) descreve que as dificuldades das crianças situam-se principalmente ao nível da compreensão formal das relações de equivalência e de igualdade enquanto que a natureza dos erros corresponde essencialmente à linguagem matemática.

Quanto ao progresso da compreensão do sinal de igualdade como símbolo relacional pelos alunos de primeiro ano, Theis (2003) afirma que seus resultados são compatíveis e juntam-se aos dos estudos de Falkner, Levi e Carpenter (1999), de Carpenter e Levi (2000) bem como de Behr, Erlwanger e Nichols (1980). As conclusões destes estudos, por sua vez, sugerem que é possível, por meio de um ensino adequado do sinal de igualdade nas primeiras séries, que as crianças progridam para uma compreensão mais adequada deste símbolo. Mesmo assim, Theis (2003) afirma que para todos os participantes de sua pesquisa, este progresso não aconteceu facilmente, sugerindo, então, que “a aprendizagem do sinal = é um potente obstáculo cognitivo para alunos no primeiro ano dos estudos” (p. 308).

---

[31] Ville de Luxembourg - local da escola na qual o pesquisador realizou sua investigação.

No que diz respeito ao obstáculo cognitivo referente à aprendizagem do sinal de igualdade, Theis (op. cit.) aponta três fenômenos diferentes que sugeriram tal constatação. O primeiro corresponde ao fato de que as crianças são muito reticentes, de início, em aceitar outro significado do sinal de igualdade diferente daquele que construíram anteriormente. Lembramos que fenômeno semelhante também foi evidenciado por Saenz-Ludlow e Walgamuth (1998) e Baroody e Ginsburg (1983). O segundo corresponde à tendência das crianças em regressarem, ao longo de toda a sequencia, para a antiga concepção do "=". Por fim, o terceiro corresponde ao fato de que dois dos três participantes tiveram tendências a permanecerem com uma concepção operacional do sinal de igualdade.

Até o momento, a maior parte das pesquisas que discutimos sobre o significado do sinal de igualdade na perspectiva dos alunos, investigou aspectos associados às atividades aritméticas das séries iniciais. Outros estudos investigam, por exemplo, aspectos da transição Aritmética-Álgebra, como é o caso dos que defendem a proposta Early Álgebra, entre eles, Falkner, Levi e Carpenter (1999), Carpenter, Levi e Farnsworth (2000), NCTM (2000), Schiliemann, Carraher e Brizuela (2007), Molina, Castro e Ambrose (2006), Molina (2006). Esta proposta, por sua vez, consiste, essencialmente, em uma mudança curricular baseada no desenvolvimento do pensamento algébrico desde as séries iniciais. Entre os aspectos mais importantes destacados pelos pesquisadores para o desenvolvimento do pensamento algébrico, está a construção de uma concepção relacional para o sinal de igualdade.

Uma questão básica reconhecida pelos estudos inseridos no contexto Early Álgebra é a existência de concepções errôneas sobre o significado do sinal de igualdade. Tais concepções errôneas, por sua vez, são apontadas como dificuldades para a aprendizagem de conceitos algébricos, como por exemplo, o de equações, uma vez que seria imprescindível reconhecer o "=" como uma relação de equivalência. Dessa maneira, discutiremos a seguir, alguns estudos que evidenciaram concepções errôneas sobre o significado do sinal de igualdade.

Molina (2006) investigou o desenvolvimento do pensamento relacional e da compreensão do sinal de igualdade por alunos da terceira série. Conforme a autora, seu trabalho de investigação é um experimento de ensino transformativo e dirigido por uma conjectura, nos termos de Confrey e Lachance (2000). Em linhas gerais, Molina (2006) descreve sua investigação na problemática da proposta Early Álgebra.

Antes de discutirmos os resultados que ela encontrou sobre o sinal de igualdade, esclarecemos que a autora quando se refere às expressões contendo o símbolo "=" distingue igualdades e sentenças. Quanto às igualdades, elas podem ser abertas (ex. 5 + 7 = 3 +   ) e fechadas (ex. 5 + 7 = 3 + 9) e têm que ser proposições verdadeiras, enquanto que as sentenças podem ser proposições verdadeiras ou falsas (assim, 5 + 3 = 10 seria uma sentença falsa) e, ainda, podem ser classificadas como de ação e de não ação. Por ocasião, particularmente podemos dizer que toda sentença verdadeira é uma igualdade. Neste sentido, remetemos ao que discutimos anteriormente em Behr, Erlwanger e Nichols (1980) quando falamos em igualdades de ação e de não ação.

Quanto aos resultados obtidos correspondentes aos conhecimentos dos alunos sobre o símbolo "=", Molina (op. cit.) ressalta que foram identificados quatro significados associados ao sinal de igualdade: operador, expressão de uma ação, equivalência numérica e similitude numérica. Os dois primeiros significados apresentam um caráter operacional enquanto que os dois últimos apresentam um caráter relacional. Os três primeiros significados do sinal de igualdade coincidem com os que foram descritos na revisão bibliográfica que ela realizou, no entanto, o último significado, denominado pela autora de similitude numérica, foi adicional, isto é, não foi reconhecido em sua revisão bibliográfica.

Molina (2006) verificou que os alunos de sua pesquisa estavam fazendo uso de um significado operador nas seguintes situações:

1) Em igualdades abertas e sentenças de ação – quando aceitam e resolvem corretamente igualdades e sentenças contendo operações no lado esquerdo do "=" e não resolvem ou fazem de forma incorreta as que apresentam as operações no lado direito. Por exemplo, um aluno que reconhece 37 + 22 = 300 como uma sentença falsa, mas que não consegue resolver ou resolve incorretamente uma questão como □ = 25 – 12;

2) Em igualdades abertas de não ação – quando somam todos os termos da igualdade (ex. dá a resposta 26 para a igualdade 12 + 7 = 7 + □), ou ignoram um dos termos e somam os demais (ex. dá a resposta 12 em 8 + 4 = □ + 5; dá a resposta 19 em 12 + 7 = 7 + □);

3) Em sentenças de não ação verdadeiras e falsas – quando os alunos insistem em que o lado direito do "=" deve ter um único número correspondendo ao resultado da operação expressada no lado esquerdo. Assim uma igualdade 6 + 4 + 18 = 10 + 18 é considerada falsa, sendo justificada por um dos alunos como "(6 + 4 + 18 = 10 + 18): Falsa porque 6 + 4 + 18 = 118". Ainda nesta perspectiva, os alunos também insistem que um dos termos do lado direito seja o valor numérico do membro esquerdo. Por exemplo, 18 – 7 = 7 – 8 foi considera falsa "porque 18 – 7 não são 7", 53 + 41 = 54 + 40 também foi considerada falsa "porque 53 + 41 não são 40" (p. 438). Embora com menor freqüência, Molina (2006) também evidenciou que um aluno operou com todos os números sem deixar claro o modo pelo qual determina a veracidade ou falsidade da sentença 75 + 23 = 23 + 75. Tal aluno respondeu "verdadeira porque setenta e cinco mais vinte e três é igual a vinte três mais setenta e cinco e dão cento e noventa e um", calculando à parte, 75 +23 +23 + 75 = 191, mediante o algoritmo da soma (p. 438).

Por conseguinte, Molina (2006) verificou que os alunos utilizaram o símbolo "=" como um símbolo que indica a expressão de uma ação nas seguintes situações:

1) Resolveram corretamente igualdades e sentenças numéricas de ação (podendo cometer algum erro de cálculo). Em igualdades abertas de não ação o aluno coloca, por exemplo, a resposta 17 para a igualdade 14 + □ = 13 + 4. Ao operar com o lado direito da igualdade dá a resposta 12 para □ + 4 = 5 + 7, ignorando o 4 e somando 5 e 7. O uso do significado expressão de uma ação permite que os alunos resolvam corretamente igualdades e sentenças de ação, porém não igualdades ou sentenças de não ação, ao não interpretarem o sinal de igualdade como expressão de uma equivalência numérica, explica Molina (op. cit.). Quanto à diferença entre a ação dos alunos que manifestaram apenas o significado operador e os que manifestaram apenas o significado expressão de uma ação correspondem à:

> *...rejeição ou aceitação, por parte do aluno, de sentenças e igualdades de ação com as operações no membro direito e a consideração das igualdades ou sentenças unicamente da esquerda para a direita ou, também, da direita para a esquerda* (p. 438).

Entendemos que o significado de operador está especificamente ligado ao aspecto unidirecional no qual a operação ou cadeia de operações ficam no lado esquerdo do "=" e o resultado disposto no lado direito (ex. 4 x 5 = 20; 7 + 5 x 2 = 24). Já o significado expressão de uma ação pode ser entendido como um símbolo operador ou separador de uma operação ou cadeia de operações e seu resultado, contudo, aceitando-se que tanto as operações quanto o resultado disponham-se num lado ou outro do "=" (ex. 25 = 12 + 13; 12 + 13 = 25), diferentemente do significado operador que é unidirecional e aceita somente a ordem operação = resultado.

O significado *equivalência numérica*, por sua vez, foi reconhecido quando os alunos estavam utilizando o sinal de igualdade e resolvendo corretamente (podendo cometer alguns erros de cálculo) igualdades e sentenças numéricas de não ação, como por exemplo, indicando que 12 é a resposta para 12 + 7 = 7 + □. Molina (2006) explica que além de encontrar de maneira adequada o número que verifica a igualdade, as explicações dos alunos também confirmam a utilização do símbolo "=" em termos de uma equivalência numérica.

Por último, os alunos foram considerados como fazendo uso do significado similitude numérica quando estes abordaram sentenças de ação e de não ação, nas quais se repetiam termos ou apareciam expressões similares em algum sentido. Nesta direção, este significado foi reconhecido nas respostas dos alunos ao justificarem a veracidade ou falsidade de uma sentença, com base na mismidad[32] dos números ou na semelhança das expressões envolvidos sem, contudo, importarem-se com as operações que aparecem ou a posição dos números em relação ao sinal de igualdade. Na verdade, este significado baseia-se em aspectos estéticos das sentenças ou igualdades, não sendo logo de início identificado isoladamente nas respostas numéricas, mas sim a partir da análise das explicações dos alunos (MOLINA, 2006).

Exemplificando, um dos alunos considerou a igualdade 122 + 35 – 35 = 122 explicando "verdadeira porque cento e vinte e dois é igual a cento e vinte e dois e trinta e cinco é igual a trinta e cinco" e "verdadeira porque os números e as quantidades são iguais" (p. 442). Pode-se perceber que este aluno está levando em consideração a repetição de números, porém sem dar importância às operações que os relacionam, nem tampouco sua posição referente ao "=".

[32] Algo como idêntico; semelhança real.

2.4.2 Estudos com alunos nas séries do Ensino Fundamental II

Cavalcanti e Câmara dos Santos (2007b) solicitaram que quatorze alunos cursando a 6ª série do Ensino Fundamental analisassem e respondessem qual o significado do símbolo "=" em quatro expressões diferentes, sendo duas igualdades aritméticas, 14 + 8 = 22 e 22 = 13 + 9, e duas equações, 2x = 14 + 8 e 13 – 9 = 2x. As respostas dos alunos foram classificadas em operacional, relacional, outras e em branco/não responderam.

Os dados demonstraram que 40% dos sujeitos escreveram respostas associadas a uma concepção relacional do sinal de igualdade (ex. "*o lado esquerdo e direito tem o mesmo valor*", "*mesma coisa*") enquanto que 29% escreveram respostas associadas a uma concepção operacional (ex. "*mostrar a resposta; resposta da soma*", "*resultado*", "*resposta*".). Quanto ao restante do percentual, 13,5% não responderam e 17,5% escreveram outras respostas.

Cavalcanti e Câmara dos Santos (op. cit.) esclarecem que boa parte das respostas classificadas como outras se referiam ao símbolo "=" como "igual", "igual da equação", "igual da soma". Respostas deste tipo não deixavam claro se o aluno estava considerando o "=" como símbolo operacional nem relacional, mas antes sugeria uma outra noção, possivelmente associada apenas ao reconhecimento do nome do símbolo.

Knuth *et al.* (2006), por sua vez, realizaram uma pesquisa com 177 alunos da 6ª à 8ª séries com a finalidade de investigar, entre outras coisas, a compreensão do sinal de igualdade. Um dos itens desta pesquisa apresentava uma a igualdade 3 + 4 = 7 e uma seta apontando para o símbolo "=". Em seguida, os alunos tinham que responder três perguntas: (a) A flecha acima aponta para um símbolo. Qual o nome deste símbolo? (b) O que este símbolo significa? (c) O símbolo pode significar algo mais? Se sim, por favor, explique.

A categorização das respostas dos alunos da pesquisa de Knuth *et al.* (op. cit.) foi de maneira semelhante à realizada no estudo de Cavalcanti e Câmara dos Santos (2007b). Os resultados em linhas gerais, por conseguinte, revelaram que quase metade dos sujeitos interpretou o significado do símbolo "=" numa perspectiva operacional, enquanto que um pouco mais de um terço dos sujeitos interpretaram-no como símbolo relacional. Ressaltamos que Knuth *et al*. (2006) classificaram as respostas do tipo “significa igual”, “significa igual a”, assim como certas traduções diretas (ex. 3 + 4 = 7 - “três mais quatro igual a sete”) como outras respostas.

Comparando os resultados obtidos no item (a) do estudo de Cavalcanti e Câmara dos Santos (2007b), correspondente à compreensão dos alunos sobre o símbolo “=” na igualdade 14 + 8 = 22, com os provenientes dos estudos de Knuth *et al.* (2006), particularmente, advindos das respostas dos alunos da 6ª série, observamos, conforme tabela 01, que mesmo havendo certas diferenças percentuais entre os dois estudos, é alto o índice de alunos que interpretaram operacionalmente o símbolo “=”.

Knuth *et al*. (2006) Igualdade: 3 + 4 = 7 Alunos: 6ª Série		Cavalcanti e Câmara dos Santos (2007b) Igualdade: 14 + 8 = 22 Alunos: 6ª Série	
Tipos de respostas	%	Tipos de respostas	%
Operacional	**53**	Operacional	**43**
Relacional	**32**	Relacional	**43**
Outras	**15**	Outras	**7**
Não responderam	**0**	Não responderam	**7**

Tabela 01 – Comparação entre o estudo de Knuth *et al.* (2006) e o de Cavalcanti e Câmara dos Santos (2007b).

Estes resultados sugerem que na 6ª série há ainda uma forte tendência, evidenciada nos dois estudos supracitados por aproximadamente metade das respostas dos alunos, em interpretar o “=” em igualdades do tipo, “operação = resultado” como um símbolo operacional. Este fato confirma também, que a concepção operacional do sinal de igualdade reconhecida, pela maioria das pesquisas como conseqüência dos estudos aritméticos nas séries iniciais, persiste para as séries do Ensino Fundamental II.

Oksuz (2007) investigou a compreensão de igualdade e do sinal de igualdade de vinte e cinco alunos da 5ª série e vinte e cinco alunos da 6ª série de uma escola da zona urbana dos Estados Unidos. Neste estudo, ela elaborou seu instrumento com vários itens inspirados em outros já utilizados em diversas pesquisas anteriores. Os resultados confirmam algumas das conclusões de estudos como os de Behr, Erlwanger e Nichols (1980), Kieran (1981), Saenz-Ludlow e Walgamuth (1998) e Falkner, Levi e Carpenter (1999), como por exemplo, que vários alunos não conseguem ler igualdades do tipo 6 =

6 e que tendem a colocar a resposta diretamente depois do símbolo de igualdade. Entretanto, seus dados não permitiram confirmar outras conclusões como a de que os alunos geralmente consideram igualdades do tipo 6 + 2 = 5 + 3, como duas sentenças separadas 6 + 2 = 8 e 5 + 3 = 8.

Demonty e Vlassis (1999) analisaram os resultados provenientes da aplicação de uma prova de matemática aplicada no início do primeiro ano do ensino secundário (na Bélgica). A prova, por sua vez, envolvia diversos domínios matemáticos implicados na aprendizagem da Álgebra e foi destinada a avaliar as aquisições pré-algébricas de uma população de 1083 sujeitos. Os itens referiam-se essencialmente ao sinal de igualdade, ao sentido das letras e do simbolismo algébrico, a modelização e as noções de área e de perímetro. Conforme Demonty e Vlassis (ibid.), a análise dos resultados permitiu verificar que o sinal de igualdade é considerado numa perspectiva operacional como o "começo do resultado" (p. 17). Os autores ilustram esta afirmação com os resultados obtidos na seguinte questão:

Eu multipliquei o número 15 por 7, seguidamente retirei 3 do produto
Escreva em só um cálculo o que é descrito no enunciado acima

Na ocasião, 63% completaram a operação colocando o sinal de igualdade e o resultado, sendo que estas informações não figuram no enunciado. Demonty e Vlassis (1999) sugerem em relação à aprendizagem da Álgebra, faz-se necessário a intervenção de uma nova concepção para o sinal de igualdade, pois em uma equação, por exemplo, já não conveniente ver o segundo membro como a resposta do primeiro, nem tampouco o sinal de igualdade significa, como em alguns casos aritméticos, "dá o resultado" (p. 17).

Vergnaud, Cortes e Favre-Artigue (1987) também confirmam que o sinal de igualdade é utilizado de maneira inapropriada pela maior parte dos alunos no início do ensino secundário pois, para estes alunos, este símbolo conserva um significado de anúncio de um resultado que provém de um cálculo aritmético. Os autores explicam que a solução de um problema comportando duas operações tais como 23 + 31 = 54 e 54 – 14 = 40, é escrito freqüentemente em uma só linha como 23 + 31 = 54 – 14 = 40. Dessa maneira, "o sinal de igualdade traduz então uma relação que não é nem simétrica, nem transitiva" (p. 260).

2.4.3 Outros estudos[33]

Kieran (1981) realizou um estudo, analisando as últimas pesquisas que tinham sido realizadas naquela época, no qual discutiu as compreensões das noções de equivalência ou não equivalência do sinal de igualdade entre alunos de diferentes níveis de ensino. Neste artigo, ela sintetiza as principais conclusões, sobre o sinal de igualdade, de alguns estudos que já discutimos como os de Behr, Erlwanger e Nichols (1976) e Denmark, Barco e Voran (1976). Kieran (1981) também discute alguns resultados encontrados na investigação de Ginsburg (1977).

Conforme Kieran (1981), Ginsburg (1977) verificou que as crianças das séries iniciais do Ensino Fundamental interpretam + e "=" em termos de ações a serem executadas. Por exemplo, algumas crianças lêem 3 + 4 = □ como "três e quatro *fazem* oito" e □ = 3 + 4 lêem "espaço em branco é igual a três mais quatro" e então acrescentam que está ao contrário e modificam □ = 3 + 4 para 3 + 4 = □ (GINSBURG, 1977 *apud* KIERAN, 1981). Estas considerações provenientes do estudo de Ginsburg (ibid.) são semelhantes aos resultados encontrados por Behr, Erlwanger e Nichols (1980), que sugerem a existência de uma forte tendência entre as crianças em não aceitar expressões sem sinais de operação precedendo o símbolo "=".

Continuando, Kieran (1981) ressalta que os estudos de Herscovics e Kieran (1980) e Kieran (1979; 1980) utilizaram uma seqüência de ensino experimental envolvendo seis estudos de caso para a construção do sentido referente às equações algébricas não triviais. Conforme Kieran (1981), quando os sujeitos de 12 a 14 anos foram solicitados a falarem sobre o significado do sinal de igualdade e a escreverem exemplos utilizando-o, comumente descreveram o sinal de igualdade em termos de resultado e os exemplos envolviam uma operação do lado esquerdo e o resultado do lado direito.

[33] Vamos considerar as pesquisas que investigaram o sinal de igualdade em séries tanto do Ensino Fundamental I quanto do II, no Ensino Médio, Superior e na pós-graduação.

Kieran (1981) destaca ainda, a necessidade de ampliação das noções envolvendo o sinal de igualdade para incluir aspectos referentes às múltiplas operações sobre ambos os lados da igualdade. De fato, se esta ampliação não for previamente realizada, é possível que os alunos tragam com eles, para o estudo das equações algébricas, a idéia decorrente de uma concepção operacional, de que o resultado está sempre do lado direito do sinal de igualdade. Dessa maneira, equações como $5x + 10 = 25$ seriam adequadas em relação a esta idéia, enquanto que $5x + 10 = 2x - 8$, por exemplo, não seria.

Segundo Kieran (1981), a ampliação das noções envolvendo o sinal de igualdade foi realizada por meio da estrutura das igualdades aritméticas com operações em ambos os lados da igualdade, tais como 2 x 6 = 4 x 3 (mesma operação) e 2 x 6 = 10 + 2 (operações diferentes), que foram denominadas de “identidades aritméticas” (p. 321). Neste direção, a autora explica que o sinal de igualdade foi mais percebido como um símbolo relacional do que como um sinal de fazer algo. Conforme Kieran (ibid.), o significado relacional do sinal de igualdade estudado nas igualdades aritméticas e sua introdução nas equações algébricas, foram indispensáveis na construção de um significado adequado para o símbolo “=” em relação às equações não triviais.

Kieran (1981) também demonstra que alunos de nível superior quando realizam cálculos para encontrar a derivada de uma função, frequentemente parecem interpretar o sinal de igualdade apenas como um link conectando os passos da resolução, como podemos observar no protocolo abaixo, proveniente do estudo de Clement (1980).

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x^2+1} \\
&= (x^2+1)^{1/2} \\
&= \tfrac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}\, d_x\,(x^2+1) \\
&= \tfrac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}(2x) \\
&= x(x^2+1)^{-1/2} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}
$$

Figura 07 – utilização do sinal de igualdade como uma espécie de link (CLEMENT, 1980 *apud* KIERAN,1981).

Freudenthal (1983) também discutiu que em certas situações, particularmente em Álgebra, o sinal de igualdade pode ser utilizado em termos de conectar[34] os passos da redução de uma expressão algébrica ou a seqüência de passos na resolução de uma equação.

Voltando aos estudos de Kieran (1981), podemos dizer que ela reconhece que os alunos apresentam duas concepções principais sobre o significado do sinal de igualdade. Uma operacional na qual o sinal de igualdade é compreendido como sinal de fazer algo, e, uma relacional, construída nas igualdades aritméticas com operações em ambos os lados da igualdade e indispensável para a compreensão das equações não triviais. Estas duas concepções são, atualmente, amplamente reconhecidas na literatura sobre este assunto. Entretanto, a autora afirma que "a idéia de que o sinal de igualdade é um 'sinal de fazer algo' (um símbolo operador) persiste por toda a escola elementar e mesmo na junior high school[35]" (p. 317). Além destas duas concepções, ela levanta evidências de mais uma concepção correspondente ao fato dos alunos utilizarem o "=" para separar os passos de um cálculo.

Diversos estudos vêm confirmando que a concepção do sinal de igualdade como operador realmente persiste por diversas séries do ensino fundamental e até em séries mais adiantadas que já foram introduzidas ao estudo de Álgebra. Falkner, Levi e Carpenter (1999), por exemplo, participaram de um projeto, juntamente com um grupo de quinze professores, com o objetivo de definirem qual instrução algébrica seria adequada para jovens crianças. Para avaliarem a compreensão dos alunos sobre o significado do sinal de igualdade, alguns destes professores solicitaram, a princípio, que os alunos de 1ª à 6ª séries, resolvessem a seguinte questão:

$$8 + 4 = \square + 5$$

Todos os alunos da 6ª série escreveram respostas erradas indicando que o resultado seria 12 ou 17. A maior parte dos alunos das demais séries também indicou 12 ou 17 como resultado desta questão. Nesse sentido, Falkner, Levi e Carpenter (op. cit.) reconhecem que, assim como foi documentado nos estudos de Behr, Erlwanger e Nichols (1976), Erlwanger e Berlanger (1983) e Saenz-Ludlow e Walgamuth (1998), as

---

34 Exemplificamos melhor esta particularidade no tópico anterior, "outras utilizações do sinal de igualdade".

35 Equivalente às duas últimas séries do Ensino Fundamental II.

crianças em séries elementares comumente pensam que o significado do sinal de igualdade corresponde à execução do cálculo que o precede e que o número depois do sinal de igualdade é a resposta do cálculo. Em síntese, estas crianças geralmente não reconhecem o sinal de igualdade como um símbolo que exprime uma relação "é o mesmo que" (FALKNER, LEVI e CARPENTER, 1999, p. 233).

Camici *et al*. (2002) analisaram as respostas de mais de trezentos alunos, do ensino primário e secundário da Itália, referentes a uma questão bastante reconhecida na literatura sobre o sinal de igualdade. Eles solicitaram aos alunos que colocassem no quadradinho o número que verifica a igualdade 11 – 6 = □ – 11. O objetivo foi verificar se as respostas dos alunos indicavam interpretações especiais do sinal de igualdade. Assim como nos demais estudos, a resposta que teve maior freqüência, isto é 81,5%, foi a indicação do número proveniente do cálculo da operação antes do "=".

Segundo Camici *et al*. (op. cit.), a resposta 5 demonstra um comportamento procedimental[36], tipo "11 – 6 'fazem' 5 e isto deve ser escrito depois do sinal =" (p. 6). Assim, os autores denominaram este tipo de resposta como *procedimental*. A resposta correta, no caso 16, foi escrita apenas por 4,5% dos participantes e foi denominada de resposta *relacional*. As resposta 6 e – 6 foram indicadas por 2% e 4% dos sujeitos, respectivamente. Ambas foram incluídas no que os autores denominaram de resposta *simétrica*. A resposta do tipo simétrica parece ter sido inspirada na simetria dos números em relação ao sinal de igualdade sem, contudo, considerar a relação entre números e operações, como em 11 – 6 = 6 – 11 ou 11 – 6 = – 6 – 11. Camici *et al* (ibid.) analisaram as respostas 14 e 15, correspondentes a 1,5%, e consideraram como possíveis erros de cálculo, mas que na verdade poderiam sugerir uma resposta relacional. Nessa direção, os percentuais relativos foram: resposta procedimental (81,5%), resposta relacional (6%) e resposta simétrica (6%). O restante das respostas foi classificado como outras.

Mevarech e Yitschak (1983) realizaram um estudo com cento e cinqüenta alunos do collège[37] para investigar à maneira que estes alunos compreendem o sinal de igualdade. É importante ressaltar que a maior parte destes alunos já havia estudado no ensino secundário, geometria, álgebra e trigonometria. Os pesquisadores aplicaram um

[36] Procedurale
[37] Curso técnico equivalente à graduação.

teste constituído de questões de múltiplas escolhas, equações para resolver e questões abertas. A conclusão foi que 56% dos alunos consideraram o “=” como símbolo relacional e 44% consideraram como um estímulo à resposta, ou seja, como um operador.

McNeil e Alibali (2005) conduziram um estudo para analisar como a compreensão do sinal de igualdade modifica-se em função da experiência em matemática e da variação de contextos. Os participantes desta pesquisa, alunos com diferentes níveis de experiência matemática (55 alunos de 1ª à 6ª série, 25 da 7ª série, 35 da graduação em Psicologia e 12 da pós-graduação em Física[38]), foram solicitados a examinarem o símbolo “=” em um dos três seguintes contextos: (a) sinal de igualdade sozinho “=”; (b) em um problema de adição “4 + 8 + 5 + 4 = __ ou (c) em um problema de equivalência “4 + 8 + 5 = 4 + __”.

Todos os alunos de 1ª a 6ª séries interpretaram o sinal de igualdade como um símbolo operacional com o significado indicando a *resposta* ou o *total*, em todos os contextos. Os alunos da 7ª série interpretaram como um símbolo operacional nos contextos (a) e (b) e, como relacional no contexto (c). Segundo McNeil e Alibali (op. cit.), algumas conclusões apontam que “a maneira da modificação do conhecimento nos alunos interpretando o sinal de igualdade depende do contexto no qual o conhecimento é elicitado” (p. 301).

Em outros termos, o contexto influenciou as interpretações dos alunos sobre o sinal de igualdade. Particularmente, isto foi mais observado com os alunos de 7ª série pois, as idéias que emergiram recentemente, no que diz respeito à interpretação relacional, foram ativadas, justificam McNeil e Alibali (2005). Os alunos de graduação e pós-graduação, por sua vez, interpretaram o “=” como símbolo relacional em todos os contextos. Nessa direção, as autoras indicam que os dados fornecem evidências de que, com bastante experiência, a interpretação relacional pode substituir a operacional.

Outro fato que nos chamou a atenção, em especial, foi a classificação que McNeil e Alibali (op. cit.) utilizaram para categorizar as respostas dos alunos. Elas codificaram definições sobre o sinal de igualdade em três categorias: *visão operacional do sinal de igualdade* (ex. “a respostas”, “o total”, “adiciona todos os números”); *visão*

---

[38] Elementary school, Seventh-grade, Undergraduate e Graduate

relacional do sinal de igualdade (ex. “duas quantidades são a mesma”, “equivalente a”) e, *visão “não especificada” do sinal de igualdade* (ex. “igual”, “iguais”). Os alunos de 1ª à 6ª série e os estudantes da graduação escreveram respostas identificadas como visão não especificada do sinal de igualdade em todos os contextos. Os alunos da 7ª série escreveram respostas assim nos contextos (a) e (b) e os alunos de pós-graduação não escreveram respostas deste tipo.

2.5 Considerações gerais sobre o sinal de igualdade

Na construção deste quadro teórico acerca do sinal de igualdade, discutimos, inicialmente, alguns aspectos históricos envolvendo a noção de igualdade e o símbolo “=”. Em seguida, discutimos alguns conceitos matemáticos associados ao símbolo “=”. Um dos primeiros aspectos que evidenciamos, nesta perspectiva, foi à noção de igualdades e os diferentes tipos de igualdades. Ainda no âmbito dos conceitos matemáticos associados ao símbolo “=”, discutimos algumas relações estabelecidas entre as noções de igualdade, identidade e equivalência.

Por conseguinte, passamos a tratar dos principais significados do símbolo “=” em contextos aritméticos e algébricos. Nesta direção, para iniciarmos nosso estudo sobre estes significados, determinamos quatro contextos, dois aritméticos (operações aritméticas e igualdades aritméticas) e dois algébricos (equações e funções). Assim, discutimos as características e atributos do sinal de igualdade, bem como o significado respectivo deste símbolo em cada contexto. Além dos principais significados do símbolo “=” em Aritmética e Álgebra, também destacamos alguns outros significados que correspondem ao sinal de igualdade.

Por último, realizamos uma revisão dos estudos precedentes ao nosso, que pesquisaram os significados do sinal de igualdade na perspectiva dos alunos, isto é, os aspectos que envolvem as compreensões e concepções dos alunos sobre os significados do sinal de igualdade.

Para concluirmos este quadro teórico, gostaríamos de ressaltar que, Wilhelmi, Godino e Lacasta (2007), têm discutido que a prática matemática, para evitar que cada tipo de igualdade seja designado com um termo diferente, tem assumido um fenômeno de homonímia com relação à noção de igualdade. Dessa maneira mantém-se o nome igualdade e o símbolo "=" em todos os contextos nos quais é utilizado, aceitando, assim, o significado específico que se atribui à noção de igualdade, em cada um destes contextos.

Segundo Brousseau e Antibi (2000), o fato de não assinalar aos alunos que o símbolo "=" pode ter diferentes significados, depende da transposição didática[39]. Os autores esclarecem que isto pode ser explicado em termos de uma preocupação acerca da simplificação do ensino. Dessa maneira, alguém, por exemplo, "permite assim, que os alunos acreditem, implicitamente, que o sinal "=" tem sempre o mesmo status" (p. 31). Pode ser também que, durante o curso escolar de um aluno, nenhum estudo explícito seja realizado sobre os diferentes status do sinal de igualdade, explicam Brousseau e Antibi (ibid.). Estes autores apontam, ainda, que "mesmo os professores podem então, frequentemente, não terem verdadeira consciência das diferentes regras do sinal '='" (p. 31).

Estas considerações de Brousseau e Antibi (2000) e Wilhelmi, Godino e Lacasta (2007) parecem indicar que as concepções dos alunos podem assim, não corresponderem sempre de maneira compatível com os significados e regras do sinal de igualdade nos contextos no qual ele está sendo investigado. Dessa maneira, concluímos nosso quadro teórico sobre o sinal de igualdade, e ao mesmo tempo, nosso capítulo correspondente à Fundamentação Teórica.

---

[39] Esta noção foi introduzida por Michel Verret (1975), mas nos referimos ao sentido de Yves Chevallard (1985) que, em linhas gerais, trata da trajetória que o saber científico cumpre ao transformar-se em saber a ser ensinado (objeto de ensino) e, por conseguinte, em saber aprendido.

CAPÍTULO 3
METODOLOGIA

CAPÍTULO 3
METODOLOGIA

3.1 Introdução

Antes de descrevermos nossos instrumentos de investigação e o campo empírico, achamos apropriado apresentarmos uma breve contextualização articulando nosso objeto de estudo ao quadro teórico que fundamenta a presente pesquisa. Nessa direção, elucidamos que nosso objeto de estudo corresponde à investigação das concepções de um grupo de alunos sobre o significado do sinal de igualdade. Para a investigação desse objeto de estudo, faz-se imprescindível o esclarecimento de aspectos referentes à natureza das “concepções”, enquanto noção teórica associada a fenômenos cognitivos, e ao sinal de igualdade enquanto objeto matemático que tem ampla utilização no ensino da Matemática.

No que concerne à utilização do termo concepção nas pesquisas em Educação Matemática, oportunamente discutimos, no capítulo referente à Fundamentação Teórica, que este vem sendo utilizado praticamente como uma noção de senso comum. Não obstante, encontramos freqüentemente na literatura a utilização de uma pluralidade de termos, por exemplo, concepção, representação, esquemas, modelos, crenças, dando a entender sentidos muito próximos uns dos outros. Evidencia-se, desta maneira, uma espécie de imprecisão que, suscita a necessidade de um devido cuidado com a utilização de certas noções teóricas nas pesquisas em Educação Matemática, em particular as que investigam fenômenos didáticos.

Entretanto, o termo concepção, a partir da década de 80, vem recebendo certa atenção, deixando de ser utilizado apenas como uma noção de senso comum (ferramenta) e passando, em alguns casos, a objeto de estudo em si. Reconhecemos que diversos pesquisadores realizaram estudos e formalizaram definições teóricas para a noção do termo concepção. Balacheff (1995), por exemplo, definiu a noção de concepção no contexto da modelização de conhecimentos. Vergnaud *apud* Artigue

(1990), por sua vez, numa linha psicológica, formaliza a noção de concepção como análoga ao conceito matemático a um dado momento. Ao mesmo tempo esclarecemos que, atualmente, ainda não existe um consenso acerca da utilização de uma definição única nas pesquisas em Didática da Matemática. Nessa direção, como dissemos anteriormente, optamos por utilizar o termo concepção com base nos estudos repertoriados no quadro teórico que desenvolvemos nos capítulos 1 e 2.

Em relação ao sinal de igualdade, podemos argumentar que este objeto matemático é representado pelo símbolo "=" e pelos diversos contextos nos quais ele ganha significado (operações aritméticas, igualdades aritméticas, equações, funções, etc.). Ao mesmo passo, associam-se ao sinal de igualdade, diversos atributos (maneiras de ser utilizado) que permitem distinguir estes significados. Admitimos que seja possível encontrar uma variedade de situações nas quais podemos escrever diversas expressões utilizando o sinal de igualdade. Contudo, decidimos escolher apenas os quatro contextos supracitados para elaboração do instrumento de investigação. Compreendemos que estes quatro contextos assumem posições destacadas no período de estudo da Educação Básica.

O estudo das equações, no ensino de Matemática brasileiro é freqüentemente considerado como a introdução da Álgebra Escolar. Nesse sentido, as operações e as igualdades, tais como, $3 + 4 =$ e $3 + 4 = 7$, respectivamente, correspondem a contextos de natureza aritmética, enquanto que as equações e funções, tais como as respectivas expressões, $x + 5 = 12$ e $y = 3x + 5$, correspondem a contextos de natureza algébrica. As operações aritméticas, bem como as igualdades aritméticas são ensinadas desde cedo, podendo ser consideradas como a via de introdução do sinal de igualdade e, por extensão, de seus significados. É importante ressaltar que, comumente, estes contextos representam boa parte dos estudos de Matemática do Ensino Fundamental.

A partir do 7º ano, o sinal de igualdade é utilizado nas equações, sendo consensual, entre as pesquisas que investigam o ensino de equações e problemáticas associadas à compreensão dos significados do símbolo "=", a necessidade de ampliação de um significado operacional, para um significado referente a uma relação de equivalência. Ao final do Ensino Fundamental, o sinal de igualdade é também utilizado no contexto das funções. Mesmo não havendo relatos na literatura, podemos argumentar que, com o estudo das funções, seria também necessária uma outra ampliação em relação aos significados do sinal de igualdade.

3.2 Categorias de análise

A utilização do sinal de igualdade nas expressões que representam cada contexto é caracterizada, por sua vez, por diferentes atributos. Com base nessas características e em outros aspectos evidenciados na revisão da literatura, apresentamos, em seguida, as categorias de análise, definidas a priori, que nortearam a elaboração dos instrumentos de investigação.

A primeira categoria é *a concepção operacional*. Nesta concepção, o sinal de igualdade é utilizado como símbolo que indica uma ação a ser realizada ou o local onde se coloca o resultado. Essa utilização é comum no cálculo de operações aritméticas. Por exemplo, na operação aritmética 3 + 4 =, o sinal de igualdade indica, ao mesmo tempo, que a soma deve ser realizada e o local onde se deve colocar a resposta.

A utilização do "=" em operações aritméticas não sugere, necessariamente, uma igualdade, pois ele é assimétrico, ou em outras palavras, um lado é dado e o outro deve ser preenchido, como explica Freudenthal (1983). Outra possível característica das operações aritméticas que reforça este significado é a freqüente utilização dos sinais operatórios antes do sinal de igualdade (3 + 4 =; 5 + 9 + 8 +10 =; etc.).

A segunda categoria é a *concepção igualdade relacional*. Diferentemente da operação aritmética 3 + 4 =, o símbolo "=" na igualdade aritmética 3 + 4 = 7, não é assimétrico, pois os dois lados são dados, nem indica que se deve efetuar um cálculo. Em linhas gerais, podemos dizer que o "=" está representando uma relação de igualdade estabelecida entre os lados, esquerdo e direito, de uma igualdade aritmética. Vergnaud (1994) explica que uma relação de igualdade representa, ao mesmo tempo, uma identidade única de significado e uma equivalência dos diferentes significantes; em outras palavras, ela se interpreta a esses dois níveis.

Do ponto de vista dos alunos, Behr, Erlwanger e Nichols (ibid.) apontam que o símbolo "=" seria considerado um símbolo relacional se fosse compreendido como indicando uma comparação entre os dois membros de uma igualdade. Em nossa opinião, estas duas posições não são incompatíveis, e englobam a idéia de que os dois lados da igualdade têm o mesmo valor, ainda que os símbolos sejam diferentes.

A terceira categoria corresponde à *concepção equivalência numa igualdade condicional*. O sinal de igualdade nesta concepção refere-se a uma relação de equivalência em uma igualdade condicional, comumente denominada de equação. Uma relação de equivalência apresenta as propriedades simétrica transitiva e reflexiva, e conforme Gattegno (1974), esta relação permite que, para certos propósitos, um item seja substituído por outro.

A compreensão do significado de equivalência é particularmente, nestes termos, imprescindível na resolução das equações, pela razão de que esta relação permite manipular as expressões de um lado e outro do símbolo "=" sem que a igualdade se modifique, pois estas expressões são equivalentes. A distinção básica que realizamos entre esta concepção e a anterior, é que a concepção equivalência em igualdade condicional corresponde a um caso particular da concepção igualdade relacional, vinculado especificamente ao conceito de equivalência no contexto algébrico. Em outras palavras, é como se fosse uma concepção igualdade relacional, mas com uma ligação direta ao conceito de equivalência no contexto algébrico.

A quarta categoria é a *concepção funcional* e, por sua vez, faz referência ao significado do sinal de igualdade em expressões que representam o conceito de função. A idéia subjacente é que o significado do símbolo "=", numa função como $y = 3x + 5$, não é o mesmo que em $3 + 4 =$, $3 + 4 = 7$, $x + 5 = 12$, respectivamente, operação aritmética, igualdade aritmética e equação. De fato, o principal atributo do sinal de igualdade numa função como $y = 3x + 5$ é indicar uma dependência causal entre uma variável dependente (no caso, y) e uma variável independente (no caso, x).

A quinta categoria, diferentemente das demais, não faz referência ao significado do sinal de igualdade no contexto no qual ele está inserido. Na verdade, observamos que alguns estudos (ex. CAVALCANTI e CÂMARA DOS SANTOS, 2007b; KNUTH *et. al.,* 2006; McNEIL e ALIBALI, 2005) que investigaram questões semelhantes às que propomos em nossos instrumentos, verificaram que parte dos alunos escrevia tipos de respostas para o significado do símbolo "=", em uma determinada expressão, que não permitiam precisar qual concepção do sinal de igualdade (operacional ou relacional) estava subjacente nestas respostas.

Estas respostas corresponderam a certas traduções diretas da expressão (ex. 3 + 4 = 7 – significa “três mais quatro *igual a* sete”), e afirmações de que o significado do símbolo “=” em tal expressão significa, apenas, “igual”, “igualdade”. Cavalcanti e Câmara dos Santos (2007) e Knuth *et. al.* (2006) classificaram tais respostas como *outras*, enquanto que McNeil e Alibali (2005) classificaram-nas como uma *visão “não especificada” do sinal de igualdade”*.

Na presente pesquisa, também optamos em não classificar tais respostas como outras. No entanto, também não iremos utilizar a denominação de McNeil e Alibali (ibid.), pois consideramos que os alunos ao responderem que o significado do símbolo “=” é “igual”, “igualdade”, estão, na verdade, especificando sua visão sobre este símbolo que, ao nosso ver, corresponde a um tipo de relação que estamos chamando, neste momento, de *nome-símbolo*, que é muito forte no que diz respeito ao símbolo “=” e o nome igualdade.

Na verdade, em nossa opinião, é difícil olharmos para o símbolo “=” e não pensarmos em igualdade de maneira imediata e sem qualquer controle, sugerindo até que este tipo de associação acontece de maneira automática. Conseqüentemente, é provável que este tipo de reação espontânea ao significado do símbolo “=” ao invés de não permitir que identifiquemos a concepção dos alunos, possa na verdade apontar um outro tipo de concepção dos alunos sobre o sinal de igualdade, diferente daquelas que necessitam que seja identificada, nas respostas dos alunos, uma especificação da relação entre o significado do “=” e o contexto no qual ele aparece.

Sintetizando, podemos dizer que esta concepção dos alunos, que vamos denominar de *relacional nome-símbolo*, diferencia-se das demais concepções porque, ao contrário das outras concepções, a relacional nome-símbolo não se apóia em aspectos semânticos, no que diz respeito ao reconhecimento do significado do símbolo “=” em razão do contexto no qual está inserido. Entendemos assim, que estes tipos de respostas, que estamos discutindo na quinta categoria correspondem, particularmente, ao processo de relacionar espontaneamente o nome igualdade ao símbolo “=”, seja qual for o contexto no qual ele esteja inserido.

O quadro abaixo, sintetiza as categorias de análise, que definimos a priori[40], e ilustra as idéias básicas que foram utilizadas na elaboração dos instrumentos de investigação e as categorias de análise.

Contextos	Categorias de análise (a priori)	Expressões (exemplos)	Principal finalidade do símbolo "="	Principais características do símbolo "="
Operações aritméticas	Concepção Operacional	8 + 7 = 8 + 7 + 5 + 9 =	Indicar um cálculo a ser realizado, ou, o local do resultado.	Aspecto assimétrico (um lado é dado, o outro precisa ser preenchido/encontrado)
Igualdades aritméticas	Concepção Igualdade Relacional	6 + 5 = 11 5 + 7 = 4 + 8 15 = 7 + 8	Indicar que o que está no lado direito do "=" é igual, idêntico ou equivalente ao que está no lado esquerdo.	Relação de igualdade que inclui: identidade única de significado e equivalência dos diferentes significantes.
Equações	Concepção Equivalência em igualdade condicional	x + 5 = 14 5 + x = 4 + 8 5 = x + 8 (etc.)	Indicar que a expressão ou número que está no lado direito do "=" é equivalente a expressão ou número à esquerdo.	Indica uma relação de equivalência em igualdade condicional
Funções	Concepção Funcional	y = 2x + 3 2x + 3 = y	Indicar uma dependência causal entre variáveis	Relação de dependência entre a variável dependente e independente
Todos	Concepção Relacional Nome-Símbolo	Qualquer uma contendo um símbolo "="	Não tem finalidade específica	Não tem características específicas

Quadro 01 – Síntese com as principais idéias que fundamentaram a elaboração dos instrumentos de investigação

No próximo tópico, caracterizaremos os instrumentos de investigação apresentando uma breve análise preliminar de cada questão.

---

[40] Utilizamos a designação das categorias de análise como *a priori* apenas para indicar a temporalidade anterior à aplicação dos instrumentos. Não confundir, portanto, com a acepção deste termo no âmbito da idéia da Engenharia Didática.

3.3 Método

Já esclarecemos, em relação ao sinal de igualdade, os contextos que utilizamos para a elaboração dos instrumentos de investigação. Neste tópico vamos discutir o tipo de instrumento, bem como descrever cada um dos seus itens situando suas respectivas finalidades. Assim, antes de optar por *este* ou *aquele* método, refletimos bastante sobre nosso objeto de estudo e podemos argumentar que a investigação das concepções dos alunos não é uma tarefa simples.

Levando em consideração o tempo para realizar a pesquisa empírica, a organização e análise de dados e a redação desta dissertação, compreendemos que o método mais adequado a estas circunstâncias seria por meio da aplicação de questionários abertos. Nestes questionários, os alunos analisariam algumas situações e responderiam questões referentes ao significado do sinal de igualdade em uma determinada expressão representando um dado contexto (operações aritméticas, igualdades aritméticas, equações, funções).

Dessa maneira, elaboramos dois questionários que denominamos de instrumentos de investigação. Quanto à aplicação destes instrumentos, ressaltamos que eles foram distribuídos ao grupo de alunos de maneira que eles respondessem apenas um dos instrumentos. Isto é, cada aluno recebeu apenas um instrumento do tipo **1** ou um instrumento do tipo **2**. Assim, esclarecemos que eles não tiveram acesso ao outro tipo de instrumento. Antes de apresentarmos cada instrumento de pesquisa, esclarecemos que as questões não perguntavam aos alunos diretamente qual a sua concepção do sinal de igualdade, pois entendemos que o termo concepção não faria talvez tanto sentido. Assim, elaboramos questionamentos sobre como eles compreendiam determinada expressão e sobre como eles compreendiam o significado do símbolo “=” na respectiva expressão.

3.3.1 Instrumentos de investigação

Os dois instrumentos foram compostos, cada um, por quatro expressões que representam os quatro contextos que estamos discutindo ao longo deste capítulo. A variável que diferencia um instrumento do outro corresponde à presença de um símbolo de operação (no caso, o símbolo + de adição) antes ou depois da igualdade. Por exemplo, se no instrumento **1** a expressão correspondente a igualdade aritmética fosse 5 + 7 = 12 (símbolo operatório + antes do símbolo "="), no instrumento **2**, seria 12 = 5 + 7 (símbolo operatório + depois do sinal de igualdade).

Podemos dizer que a finalidade tanto do instrumento **1** quanto do instrumento **2**, em particular, é recolher dados referentes às concepções dos alunos sobre o sinal de igualdade em diferentes contextos. Entretanto, a finalidade dos dois instrumentos, a título de comparação, corresponde à obtenção de dados que possibilitem identificar se existe alguma diferença nas concepções dos alunos quando o sinal operatório precede (5 + 7 = 12) ou sucede o símbolo "=" (12 = 5 + 7).

Nos instrumentos **1** e **2**, apresentamos quatro expressões referentes a cada contexto, operação aritmética, igualdade aritmética, equação e função. O comando geral solicitava que os alunos observassem cada expressão e respondessem a dois questionamentos: 1) Como você explica esta expressão? 2) Qual o significado do símbolo "=" nesta expressão?

Achamos importante ressaltar que uma das influências para elaboração das questões dos instrumentos **1** e **2** foi uma das questões utilizadas por Knuth *et. all*. (2006) num estudo envolvendo a compreensão dos alunos sobre o sinal de igualdade. A questão, que apresentamos a seguir, questionava aos alunos, entre outras coisas, o significado do símbolo "=" em uma igualdade aritmética.

The following questions are about this statement:

$$3 + 4 \underset{\uparrow}{=} 7$$

(a) The arrow above points to a symbol. What is the name of the symbol?

(b) What does the symbol mean?

(c) Can the symbol mean anything else? If yes, please explain.

Figura 08 – (KNUTH *et. all*. 2006, p. 300)

3.3.1.1 Instrumento 1

O item **a**, conforme figura 09, corresponde a uma expressão representando uma igualdade aritmética. O objetivo deste item é identificar as concepções dos alunos sobre o significado do sinal de igualdade numa igualdade aritmética na qual o símbolo de operação + encontra-se no lado esquerdo do símbolo "=".

a) 14 + 8 = 22

1) Como você explica essa expressão?__________________________________

____

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão?________________________

____

Figura 09 - Item **a** do instrumento **1**

Na igualdade aritmética 14 + 8 = 12, o símbolo "=" representa uma relação de igualdade indicando que o que está no lado direito do "=" é igual, idêntico ou equivalente ao que está no lado esquerdo. Entretanto, por causa da operação 14 + 8 estar no lado esquerdo do sinal de igualdade, e o resultado 22 no lado direito, é possível que os alunos percebam o sinal de igualdade como um sinal que mostra o lugar da resposta, ou em outras palavras, indica o resultado.

O item **b**, conforme figura 10, apresenta uma expressão representando uma igualdade condicional, isto é, uma equação. O objetivo deste item é identificar a concepção dos alunos sobre o significado do sinal de igualdade em uma equação na qual o símbolo de operação + encontra-se no lado esquerdo do símbolo "=".

b) 15 + 9 = x

1) Como você explica essa expressão?__________________________________

____

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão?________________________

____

Figura 10 - Item **b** do instrumento **1**

O principal atributo do sinal de igualdade no contexto das equações é indicar uma relação de equivalência em uma igualdade condicional. A relação de equivalência é justificada como o significado mais pertinente por permitir, como já mencionamos antes, a substituição de itens e, consequentemente, a manipulação de incógnitas, a simplificação e resolução das equações. Semelhantemente ao item **a**, pode ser que os alunos percebam o sinal de igualdade como sinal que mostra o lugar do resultado.

O item **c**, conforme figura 11, diz respeito a uma expressão representando uma função. O objetivo deste item é identificar as concepções dos alunos sobre o significado do sinal de igualdade numa função na qual o símbolo de operação + encontra-se no lado esquerdo do símbolo "=".

c) 2x + 8 = y

1) Como você explica essa expressão?________________________________

____

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão?______________________

____

Figura 11 - Item **c** do instrumento **1**

O sinal de igualdade em uma função, por sua vez, está associado à dependência entre as variáveis dependente e independente. Argumentamos que, enquanto na equação o símbolo "=" é uma relação estática, na função, esta relação é dinâmica e mais complexa. Contudo, é também válida a possibilidade dos alunos perceberem o sinal de igualdade como um sinal que mostra o lugar da resposta.

O item **d**, conforme a figura 12, é o único no qual o símbolo "=" é assimétrico, isto é, um lado é dado e o outro deve ser preenchido. O fato de que um lado deve ser preenchido e que o símbolo de operação + vem antes do sinal de igualdade, não sugere um significado em termos de relação entre um lado e outro. Portanto, o significado do "=" está associado à realização de um cálculo, indicando que se deve resolver, ou indicando o local do resultado.

d) 10 + 5 =

1) Como você explica essa expressão?____________________________________

____

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão?_________________________

____

Figura 12 - Item **d** do instrumento **1**

A finalidade do item representado na figura 12 é identificar as concepções dos alunos sobre o sinal de igualdade em uma operação aritmética com o símbolo de operação + antes do "=". Em seguida, vamos descrever as questões do instrumento **2**.

3.3.1.2 Instrumento 2

As mesmas considerações relatadas para o instrumento **1**, são válidas para o instrumento **2** excetuando-se as que se referem ao símbolo de operação + preceder o símbolo "=". Em outras palavras, as expressões e os contextos são os mesmos modificando apenas a ordem a + b = ou a + b = c para = a + b ou c = a + b, na qual o símbolo operatório + fica sempre depois do sinal de igualdade. Entendemos que é dispensável descrever cada item, e, portanto, apenas apresentamo-los.

No item **a**, a expressão representa uma igualdade aritmética sendo formada pelos mesmos símbolos da expressão do item **a** do instrumento **1**, invertendo-se apenas os lados da igualdade, conforme ilustra a figura 13.

a) 22 = 14 + 8

1) Como você explica essa expressão?____________________________________

____

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão?_________________________

____

Figura 13 - Item **a** do instrumento **2**

No item **b**, a expressão corresponde a uma equação formulada a partir da inversão dos lados da equação apresentada no item **b** do instrumento **1**. A figura abaixo ilustra o item **b** do instrumento **2**.

b) 15 = x + 9

1) Como você explica essa expressão? ______________________________

____

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? ________________

____

Figura 14 - Item **b** do instrumento **2**

A expressão do item **c** representa uma função. Se considerarmos que y = ax + b é a maneira usual de representar as funções, podemos dizer que a expressão do item **c** do instrumento **1** é que foi formulada a partir da inversão dos lados da função ilustrada na figura abaixo.

c) y = 2x + 8

1) Como você explica essa expressão? ______________________________

____

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? ________________

Figura 15 - Item **c** do instrumento **2**

Por último, como podemos observar na figura abaixo, no item **d**, temos uma expressão, em termos, bem incomum, no sentido de que não é usualmente encontrada nas aulas de Matemática, tampouco nos livros didáticos.

d) = 10 + 5

1) Como você explica essa expressão? ______________________________

____

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? ________________

____

Figura 16 - Item **d** do instrumento **2**

A expressão representada na figura 16 corresponde a uma operação aritmética na qual, a operação encontra-se depois do sinal de igualdade, oposto ao item **d** do instrumento **1**, no qual a operação ficou, como de costume, antes do sinal de igualdade. É possível que a expressão = 10 + 5 não faça muito sentido em Matemática, pois não tem nada antes do símbolo "=" e, comumente, sempre que vemos o símbolo "=" em qualquer que seja a expressão, há também um número, expressão, incógnita ou variável antes deste símbolo. Contudo, lembramos que Freudenthal (1983) elucida que o símbolo "=", numa expressão como 3 + 4 =, tem um caráter assimétrico. Em outras palavras, um lado é dado e o "=" indica que o.outro lado deve ser encontrado. Neste sentido, acreditamos que, assim como em 3 + 4 =, na expressão = 10 + 5 podemos considerar que, na falta de um número ou expressão no lado esquerdo, o "=" também pode, de certo modo, sugerir que o outro lado seja encontrado.

3.4 A aplicação dos instrumentos e os participantes da pesquisa

Em qual série podemos aplicar estes questionários? Refletindo acerca deste questionamento, excluímos os alunos do Ensino Fundamental por que o conceito de função só é introduzido no último ano desta etapa da Educação Básica, e queríamos evitar a investigação de alunos que estivessem estudando, no momento, conteúdos correspondentes a um dos contextos. A razão de evitarmos a investigação das concepções dos alunos que estivessem estudando um dos contextos que fundamentaram a elaboração dos instrumentos, diz respeito a uma premissa básica correspondente ao *contrato didático*[41] que se estabelece entre o professor e os alunos em relação ao saber ensinado que, comumente, gera expectativas dos alunos em relação ao saber em jogo.

Podemos argumentar, assim, que a maneira linear na qual se organizam e lecionam os conteúdos em sala de aula sugere uma temporalidade destes conteúdos. Por

[41] Remetemos a acepção de Contrato Didático aos estudos de Brousseau (1986) no quadro da Didática da Matemática Francesa que, em linhas gerais, diz respeito às regras/cláusulas, em parte explicitas, mas, principalmente implícitas, que determinam o papel e a responsabilidades tanto do professor quanto do aluno, na gestão de um saber.

exemplo, agora é tempo de função[42], e tudo que se fala nas aulas de matemática neste período refere-se ao conteúdo função. Acreditamos que seja possível o estabelecimento de uma espécie de expectativa dos alunos em relação ao conteúdo que está sendo ensinado e que, conseqüentemente, as concepções dos alunos sejam influenciadas por esta expectativa.

Nestes termos, não se adequariam ao perfil dos sujeitos para a presente pesquisa, os alunos do Ensino Fundamental e os alunos do 1º ano do Ensino Médio, pois ainda estariam estudando o conceito de função. Assim, poderíamos escolher então, os alunos do 2º ou 3º ano do Ensino Médio. Por fim, optamos por aplicar nossos questionários aos alunos do 3º ano do Ensino Médio, pelo fato de que, em tese, já estudaram estes quatro contextos e não seriam influenciados pela expectativa do conteúdo matemático.

A quantidade de sujeitos participantes da pesquisa levou em consideração a articulação entre nosso objeto de pesquisa, a noção de concepção e os nossos instrumentos de investigação. Se tivéssemos como objetivo investigar o desenvolvimento das concepções individuais dos alunos sobre o significado do sinal de igualdade, poderíamos ter optado em trabalhar com um número pequeno de alunos, assim como fez Theis (2003) em sua pesquisa, na qual selecionou, entre onze alunos, apenas três para aprofundar seu estudo sobre a compreensão dos alunos do primeiro ano do primário sobre o sinal de igualdade.

Dessa maneira, lembramos que nosso objeto de pesquisa não corresponde ao estudo do desenvolvimento nem aos mecanismos correspondentes às concepções dos alunos. Em outras palavras, nossa pretensão foi investigar quais as concepções dos alunos sobre o significado do sinal de igualdade emergem quando estes analisam o símbolo “=” em diferentes contextos. Esclarecemos que as respostas à este questionamento não representarão uma generalização da concepções dos alunos sobre o sinal de igualdade, mas sim descreverão as concepções dos alunos no âmbito de um grupo que representa os alunos do 3º ano do Ensino Médio.

---

[42] Esta temporalização acontece, em sua maior parte, implicitamente, contudo, não é incomum o fato de, quando um aluno pergunta sobre um assunto diferente do que se está estudando, o professor intervir explicando que retomará ou falará sobre este assunto em outro momento, pois agora é aula de...funções, por exemplo.

Acrescentamos ainda que estudos como os de McNeil e Alibali (2005) e Knuth *et. al.*(2006) utilizaram questões semelhantes a algumas das que utilizamos em nossos instrumentos para investigarem a interpretação de grupos de mais de cem alunos sobre o significado do sinal de igualdade. Portanto, pensamos em aplicar nossos instrumentos de investigação em cinco turmas de alunos cursando o 3ª ano do Ensino Médio.

Em relação à aplicação dos instrumentos, visitamos duas escolas públicas da região metropolitana do Recife. Adiantamos que a opção por escola pública não teve nenhuma razão em especial, apenas observamos a facilidade de acesso aos sujeitos. Num primeiro momento, dirigimo-nos à direção destas escolas com ofícios de encaminhamento apropriadamente emitidos pelo Programa de Pós-graduação em Ensino das Ciências da Universidade Federal de Pernambuco. As direções das duas escolas foram muito gentis e acolhedoras, autorizando-nos a realização da nossa pesquisa. Em seguida, conversamos com os professores e combinamos os detalhes de horários para realização da pesquisa.

Os instrumentos foram distribuídos aos alunos aleatoriamente, de modo que cada aluno respondesse um instrumento tipo **1** ou um instrumento tipo **2**. Ao final, tínhamos distribuído cento e duas cópias do instrumento **1** e cento e três cópias do instrumento **2**. Como todos os alunos responderam, totalizamos, duzentos e cinco protocolos para análise dos dados. Ainda, é importante destacar que contamos com a colaboração de vários professores na organização das turmas e durante a aplicação dos instrumentos. Concluímos então, a descrição de nosso quadro metodológico, informando que participaram da presente pesquisa, duzentos e cinco alunos cursando o 3º ano do Ensino Médio, de duas escolas públicas da região metropolitana do Recife.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DOS DADOS E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DOS DADOS E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo apresentamos os dados coletados com os instrumentos que utilizamos na parte empírica deste estudo, e analisamos os resultados obtidos. Como foi ressaltado no capítulo anterior, utilizamos dois instrumentos de investigação. A elaboração dos instrumentos de investigação foi baseada no que foi discutido no quadro teórico do sinal de igualdade, de maneira que se articulasse e atendesse aos propósitos da acepção do termo concepção que optamos nesta pesquisa.

A hipótese subjacente à elaboração dos instrumentos é que as concepções dos alunos dependiam dos contextos em que o sinal de igualdade era expresso. Assim, esperávamos identificar, com a aplicação destes instrumentos, ao menos cinco concepções dos alunos sobre o sinal de igualdade que, definimos a priori, no capítulo anterior. São elas: a *operacional*, a *igualdade relacional*, a *equivalência em igualdade condicional*, a *funcional*, correspondentes aos contextos, operações aritméticas, igualdades aritmética, equações e funções, respectivamente, e a *relacional nome-símbolo* que não corresponde diretamente a nenhum dos contextos, mas por outro lado pode ser identificada em todos eles.

Numa primeira análise que realizamos, utilizamos como referência para organização dos dados provenientes da parte empírica, as cinco concepções supracitadas como categorias de análise. Contudo, após refletirmos bastante sobre a dificuldade de associarmos boa parte das respostas nestas categorias, percebemos que elas não seriam suficientes para representar as concepções dos alunos sobre o sinal de igualdade, pois ficava evidente a existência de outras concepções.

As concepções definidas a priori, com exceção da concepção relacional nome-símbolo, são associadas às características do símbolo "=" em um contexto particular. No entanto, várias das respostas dos alunos indicavam outras concepções que não se associavam, exclusivamente, às características do símbolo "=" em um contexto particular, nem se enquadravam como concepção relacional nome-símbolo. Nesse sentido, após uma revisão das respostas dos alunos que não correspondiam às categorias de concepções definidas a priori, pudemos avançar e distinguir mais duas categorias de concepções que denominamos de: *Concepção Símbolo Separador e Concepção Operacional Sintático*.

A concepção símbolo separador surgiu quando os alunos escreveram respostas que identificavam o significado do “=” como sinal de separar, ou indicar a separação, por exemplo, entre as letras e os números numa equação, os membros, uma incógnita e outra numa função. Em linhas gerais, podemos caracterizar esta concepção como a interpretação do sinal de igualdade em termos de separar ou unir, por exemplo: a incógnita e seu valor (ex.: $x = 2$); o primeiro membro e o segundo membro de uma equação (ex.: $2x + 2 = 10 + 8$); em uma igualdade, a operação e seu resultado (ex.: $5 + 7 = 12$); a variável dependente, da variável independente (ex.: $y = ax + b$).

Poderíamos cogitar também que, em casos mais particulares, tais como na redução de uma expressão algébrica, na resolução de uma equação, no cálculo da derivada de uma função, esta concepção poderia incluir a idéia correspondente à interpretação do sinal de igualdade apenas como um link entre os passos destes processos, assim como foi demonstrado nos estudos de Freudenthal (1983), Kieran (1981) e Clement (1980).

A concepção que denominamos de operacional sintático surgiu quando os alunos escreveram respostas que identificavam o símbolo “=” como um símbolo para mostrar o resultado da incógnita, ou para dar o valor de x, por exemplo. Assim, esclarecemos que o nome operacional sintático é baseado na idéia de operacional, porque sugere ação e resultado, e sintático, pela razão de que o resultado da incógnita, produto final da resolução de uma equação, envolve a utilização de regras sintáticas associadas à manipulação de incógnitas e determinação de seus valores. Por último, destacamos que as respostas correspondentes a esta concepção apareceram exclusivamente associadas aos contextos algébricos (equação e função).

Dessa maneira, as respostas dos alunos serão categorizadas em sete categorias de concepções, sendo que cinco foram definidas a priori e duas a posteriori, conforme discutimos acima. As respostas que não forem identificadas nestas categorias serão classificadas como *não identificadas*.

Quanto à discussão dos resultados obtidos na aplicação dos instrumentos 1 e 2, voltamos ao que foi explicado no capítulo da Metodologia, particularmente, no tópico correspondente aos instrumentos de pesquisa, e ratificamos que a finalidade principal de cada instrumento, em particular, foi recolher dados referentes às concepções dos alunos sobre o sinal de igualdade em diferentes contextos. Não obstante, destacamos que uma outra finalidade foi referente à articulação dos dois instrumentos, a título de comparação e cruzamento de dados, para identificar se existe alguma diferença nas concepções dos alunos quando o sinal operatório precede (a + b = c) ou sucede o símbolo "=" (c = a + b), ou em outras palavras, quando invertemos a estrutura da expressão.

A análise dos dados está organizada em duas partes. Na primeira parte, ao invés de discutirmos os resultados dos instrumentos 1 e 2 de maneira isolada, resolvemos analisar os itens aos pares correspondentes a cada contexto. Para exemplificarmos, vamos considerar a análise dos itens referentes ao contexto das operações aritméticas. Assim, vamos analisar, inicialmente, o item **d** do instrumento 1, e em seguida o item **d** do instrumento 2. Ao final da análise particular de cada item utilizado para investigar o contexto das operações aritméticas, realizaremos um cruzamento dos dados obtidos no item **d** do instrumento 1, com os dados obtidos no item **d** do instrumento 2. O propósito deste cruzamento dos dados é verificar se há diferenças nas concepções dos alunos sobre o símbolo "=" quando invertemos a estrutura da expressão. Concluiremos então, com uma discussão acerca dos resultados gerais, levando-se em conta os dados referentes à cada concepção no contexto das operações aritméticas. Em outras palavras, juntaremos os dados obtidos no item **d** do instrumento 1 com os obtidos no item **d** do instrumento 2. Dessa maneira, o que estamos considerando são os resultados obtidos no contexto das operações aritméticas, não se levando em consideração a forma da expressão. Esta seqüência de análise será a mesma em todos os contextos.

Na segunda parte da análise discutiremos, inicialmente, os resultados obtidos no em todos os contextos do instrumento 1, os resultados obtidos em todos os contextos do instrumento 2 e, em seguida, também realizaremos um cruzamento destes dados. Por último, concluiremos com a discussão dos dados gerais obtidos nos dois instrumentos, ressaltando os percentuais alcançados em relação à cada concepção.

Enquanto os quatro itens que constituem tanto o instrumento 1 quanto o 2 foram ordenados na seqüência: igualdades aritméticas, equações, funções e operações aritméticas, a ordem que vamos seguir na presente análise dos resultados será: operações aritméticas, igualdades aritméticas, equações e funções.

Para ilustrar as concepções dos alunos, apresentaremos figuras com recortes dos protocolos da pesquisa empírica. Os protocolos dos instrumentos 1 vão ser numerados de 1 a 102, enquanto que os do instrumento 2 serão numerados de 1 a 103. Os protocolos serão identificados por meio de um código correspondente à combinação do número do instrumento com o número do protocolo. Por exemplo, o protocolo 57 do instrumento 1 será identificado pelo código **instrumento1/57**. Dados estes esclarecimentos, iniciaremos com os resultados dos itens dos instrumentos 1 e 2 correspondentes ao contexto operações aritméticas.

4.1 Operações aritméticas

O sinal de igualdade, no contexto das operações aritméticas, tem uma característica bem particular, no sentido de que um lado é dado e o outro deve ser encontrado (FREUDENTHAL, 1983). Nessa direção, utilizamos dois itens, um em cada instrumento, modificando apenas a estrutura da expressão. Assim, o contexto das operações aritméticas foi representado, no instrumento 1, pela expressão "10 + 5 =" (item **d**). No instrumento 2, a expressão que representou o contexto das operações aritméticas foi "= 10 + 5" (também item **d**). Ressaltamos que, a expressão "10 + 5 =" pode ser considerada um exemplo prototípico das operações aritméticas. Por outro lado, a expressão "= 10 + 5" não é.

Podemos dizer que não é comum encontrarmos situações nas quais o símbolo "=" não é precedido por nenhum número, operação, letra, etc. Utilizamos, então, esta expressão, por que tínhamos como um dos objetivos, verificar se as concepções dos alunos sobre o significado do símbolo "=" nos diferentes contextos nos quais ele aparece, são influenciadas pela estrutura da expressão (operação antes do "=" ou operação depois do "="). Nesse sentido, entendemos que mesmo não sendo uma expressão trivial, o aspecto referente à idéia de que um lado é dado e o outro deve ser preenchido, também seria válido para esta expressão. Então, a hipótese subjacente é que se uma concepção operacional fosse orientada por este aspecto, em relação ao significado do símbolo "=" em "10 + 5 =", também seria em "= 10 + 5".

4.1.1 Item d do instrumento 1: “10 + 5 =”

No instrumento 1, o item correspondente ao contexto das operações aritméticas foi a expressão 10 + 5 =. Nesta expressão, apenas no lado esquerdo do sinal de igualdade aparece a soma 10 + 5. Conforme Freudenthal (1983) este símbolo, nesse caso, tem um caráter assimétrico, pois enquanto um lado é dado, subtende-se que o outro lado deve ser preenchido.

No ensino de Matemática é comum que, nas operações aritméticas, o sinal de igualdade seja sempre precedido pelos símbolos operacionais. Então, expressões na forma 10 + 5 = são modelos prototípicos das operações aritméticas. Nesse sentido, Brousseau e Antibi (2000) explicam que um dos primeiros usos do símbolo “=” é introduzido na escola primária (ensino fundamental I) tratando-o como um procedimento no qual sua função é anunciar o resultado de um cálculo.

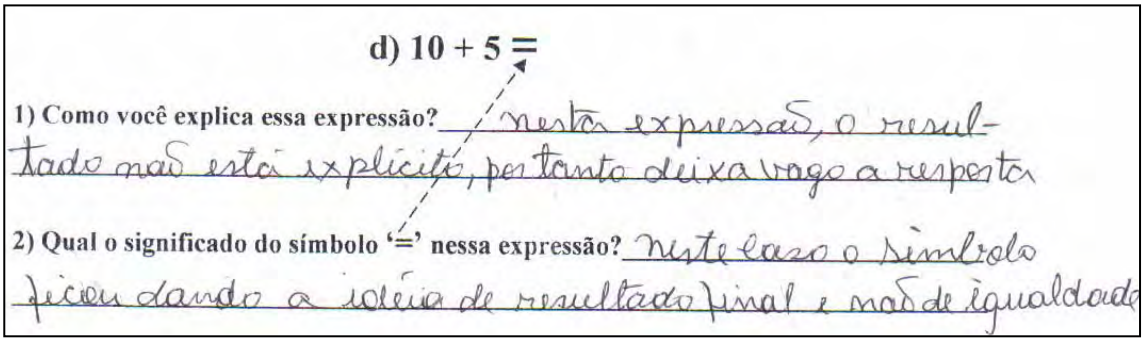
Em relação aos resultados, identificamos nas respostas dos alunos, três concepções, a operacional, a igualdade relacional, e a relacional nome-símbolo, conforme tabela abaixo.

Expressão / Concepções	Operação aritmética 10 + 5 =
Operacional	63,7%
Igualdade relacional	2,0%
Relacional nome-símbolo	23,5%
Não identificada	9,8%
Não respondeu	1,0%
Total	100%

Tabela 02 – Operação aritmética (instrumento 1)

A porcentagem de respostas não identificadas foi de 9,8% e o de respostas em branco foi de 1,0%. A maior parte dos alunos, isto é, quase dois terços, apresentaram uma concepção operacional do sinal de igualdade. Em relação ao nosso estudo, consideramos que os alunos vão ter uma concepção operacional do símbolo “=” quando suas respostas relacionarem-se com as idéias de mostrar a resposta, o resultado, ou que se deve calcular, resolver, dar o resultado do cálculo, por exemplo. Os protocolos

instrumento1/26 e **instrumento1/71** ilustram a idéia de *resultado* que corresponde à principal idéia da concepção operacional.



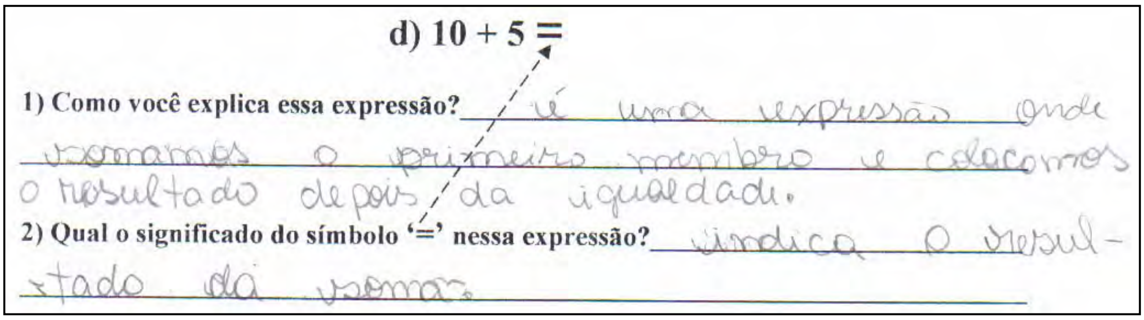
d) 10 + 5 =

1) Como você explica essa expressão? nesta expressaõ, o resul-tado naõ está explícito, portanto deixa vago a resposta

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? neste caso o símbolo ficou dando a idéia de resultado final e naõ de igualdade

Quadro 02 – Protocolo (**instrumento1/26**)

Como podemos observar no protocolo **instrumento1/26**, o aluno deixou claro que não interpretava o símbolo “=” em termos de igualdade, mas sim em termos de resultado final. A idéia de finalizar sugere a obtenção de um resultado, que por sua vez, decorre do cálculo da operação. Esta interpretação do significado do símbolo “=” demonstra assim, uma concepção operacional do sinal de igualdade.



d) 10 + 5 =

1) Como você explica essa expressão? é uma expressão onde somamos o primeiro membro e colocamos o resultado depois da igualdade.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? indica o resul-tado da soma.

Quadro 03 – Protocolo (**instrumento1/71**)

O significado do sinal de igualdade como símbolo operador é intrinsecamente ligado à idéia de que antes do “=” vem a operação que vai ser realizada e depois do “=” é o lugar onde colocamos o resultado. Esta idéia é bem evidenciada na interpretação do significado do símbolo “=” representada no protocolo acima.

Voltando à nossa revisão da literatura sobre o sinal de igualdade, podemos dizer que todas as pesquisas relatam ou reconhecem as idéias que estamos utilizando para classificar as respostas dos alunos como uma interpretação que remete à uma concepção operacional. O desenvolvimento deste tipo de concepção em relação ao sinal de igualdade no contexto das operações aritméticas do tipo 10 + 5 = __, pode ter várias razões, entre elas, as próprias características que envolvem a maneira de utilizar este símbolo em tal contexto.

Freudenthal (1983) indica que operações aritméticas deste tipo são semelhantes, lingüisticamente, à tarefas a serem executadas ou questões a serem respondidas. Assim, o sinal de igualdade em uma expressão como 3 + 4 =, corresponderia tanto a um comando de executar a tarefa, no sentido de *adicione* 4 à 3, quanto à questão interrogativa, *quanto é* 3 + 4"?

Vários pesquisadores têm demonstrado que algumas destas idéias são acionadas quando os alunos têm uma concepção operacional. Conforme Stacey e Macgregor (1997), as crianças que passam anos estudando questões como 12 x 3 =, 4 + 5 =, 100 – 98 =, acreditam que o símbolo "=" é como um comando para "execute isto agora" (p. 10). Diversos estudos (GINSBURG, 1977; BEHR, ERLWANGER e NICHOLS, 1980; KIERAN, 1981; SAENZ-LUDLOW e WALGAMUTH, 1998; THEIS, 2003) reconhecem que o sinal de igualdade é interpretado pelos alunos primeiramente como um *sinal de fazer algo* e não como um símbolo relacional.

Numa pesquisa realizada com alunos em diferentes níveis de experiência referentes à Matemática (1ª à 7ª série, graduação e pós-graduação), McNeil e Alibali (2005) evidenciaram que o grupo de alunos de 1ª à 7ª série apresentou, em relação ao significado do sinal de igualdade na operação de adição 4 + 8 + 5 + 4 = __, uma concepção operacional, interpretando o símbolo "=", nesta operação, em termos de "a resposta", "o total", "adiciona os números" (p. 293). Nesse sentido, ressaltamos que nossos resultados foram semelhantes.

Alguns pesquisadores apontam que os alunos, influenciados por uma concepção operacional, podem acabar escrevendo igualdades inaceitáveis, tais como, "4 + 3 = 7 x 3 = 21" (BROUSSEAU e ANTIBI, 2000, p. 30) ou escrevendo em uma só linha duas operações do tipo 23 + 31 = 54 e 54 – 14 = 40 como "23 + 31 = 54 – 14 = 40" (VERGNAUD, CORTES e FAVRE-ARTIGUE, 1987). O sinal de igualdade, nestas duas escritas, traduz uma relação que não é nem simétrica, nem transitiva, explicam os pesquisadores. Em outras palavras, uma concepção operacional às vezes pode conduzir os alunos a utilizarem apenas a idéia na qual o sinal de igualdade é considerado como um símbolo que anuncia o resultado da operação que vem antes dele, de modo que eles ignoram as propriedades simétrica e transitiva.

Outros pesquisadores classificaram a concepção operacional como concepção errônea quando esta leva os alunos a cometerem erros semelhantes. Falkner, Levi e Carpenter (1999) e Camici *et. al.* (2002), por exemplo, constataram que muitos dos alunos tanto do Ensino Fundamental I quanto do Ensino Fundamental II respondem erroneamente quando são solicitados a colocar no quadradinho o número que verifica a igualdade de uma expressão do tipo, $8 + 4 = \square + 5$. Em ambos os estudos, a maior parte dos alunos escreveu respostas que sugeriam a influência de uma concepção operacional, uma vez que o resultado encontrado era resultado da operação do primeiro membro. Considerando este exemplo, a maior parte escreveu o resultado de 8 + 4, no caso, 12.

Salientamos que as considerações que acabamos de retomar, referentes à nossa revisão da literatura, podem ser facilmente articuladas com as idéias representadas nos protocolos **instrumento1/71** e **instrumento1/26,** que por sua vez ilustram a interpretação do significado do símbolo "=", na operação 10 + 5 =, na perspectiva de uma concepção operacional.

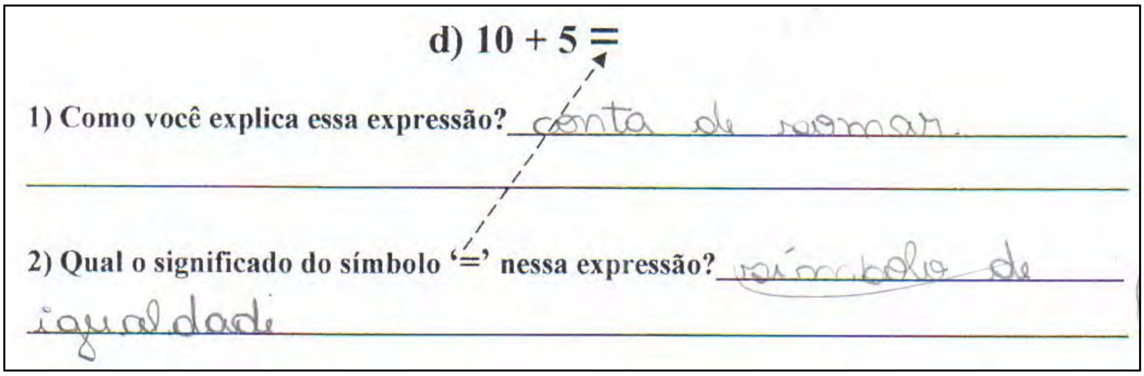
Dando seqüência à análise das outras concepções, verificamos que quase um quarto dos alunos apresentou a concepção que denominamos de *relacional nome-símbolo*. Esta concepção foi identificada quando os alunos escreveram respostas interpretando o símbolo "=" apenas como, *igual*, *igualdade*, *sinal ou símbolo de igualdade*.

Em nossa revisão da literatura, percebemos que alguns estudos (ex. KNUTH *et al* 2006; CAVALCANTI e CÂMARA DOS SANTOS, 2007b) que investigaram como os alunos interpretavam o símbolo "=" em determinadas expressões, classificavam respostas deste tipo como *outras*, pois suas categorias principais eram a operacional e a relacional. Um outro estudo (MCNEIL e ALIBALI, 2005), por sua vez, classificou respostas deste tipo como *visão "não especificada" do sinal de igualdade*[43], no sentido de que não é possível identificar o contexto nem a concepção (operacional ou relacional) do aluno sobre o sinal de igualdade, quando o aluno apenas escreve que o significado do símbolo "=" em determinado contexto é "igual" ou "igualdade".

---

43 Unspecified equal view of the equal sign (p. 292).

Por conseguinte, a resposta do aluno representada no protocolo **instrumento1/60** exemplifica esta característica da concepção relacional nome-símbolo.



d) 10 + 5 =

1) Como você explica essa expressão? conta de somar.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? símbolo de igualdade

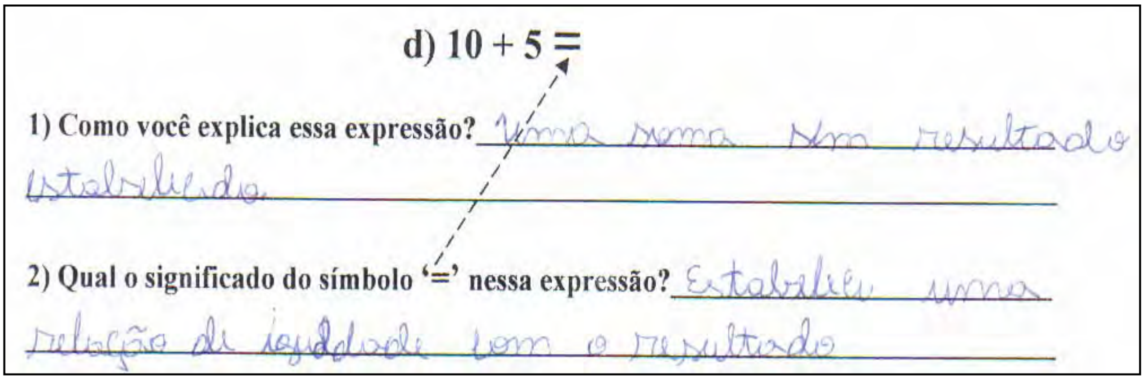
Quadro 04 – Protocolo (**instrumento1/60**)

Observando a resposta do aluno no que diz respeito à expressão 10 + 5 =, percebemos que ele identifica-a como uma conta de somar, já em relação ao significado do símbolo "=" nesta expressão, o aluno apenas escreve referindo-se a ele como símbolo de igualdade. Analisando esta resposta, mesmo estando escrito o termo igualdade, não há elementos suficientes para justificar que o aluno está interpretando o sinal de igualdade como símbolo relacional. Dessa maneira, como já discutimos antes, apenas podemos cogitar sobre a possibilidade deste aluno estar relacionando ao símbolo "=", o nome igualdade, sem, contudo, pensar nele em termos de relação.

Por último, os resultados demonstram que, mesmo não havendo nenhum número ou operação do outro lado do sinal de igualdade, condição necessária para que se estabeleça uma relação, 2,0% dos alunos apresentaram a concepção igualdade relacional. Isto é, a ausência de número ou operação, ou no caso, do resultado, no outro lado da igualdade, não impediu que o sinal de igualdade fosse considerado uma relação entre os dois lados da igualdade.

Segundo Behr, Erlwanger e Nichols (1980), o símbolo "=" seria considerado um símbolo relacional se fosse compreendido como indicando uma comparação entre os dois membros de uma igualdade. Vergnaud (1994), por sua vez, explica que uma relação de igualdade representa, ao mesmo tempo, uma identidade única de significado e uma equivalência dos diferentes significantes, em outras palavras, ela se interpreta a esses dois níveis.

Assim, entendemos que as concepções dos alunos correspondiam a uma concepção igualdade relacional se, em suas respostas conseguíssemos identificar idéias decorrentes das considerações dos autores supracitados, como por exemplo, que o sinal de igualdade indica que ambos, lado esquerdo e o direito, têm o "mesmo valor".



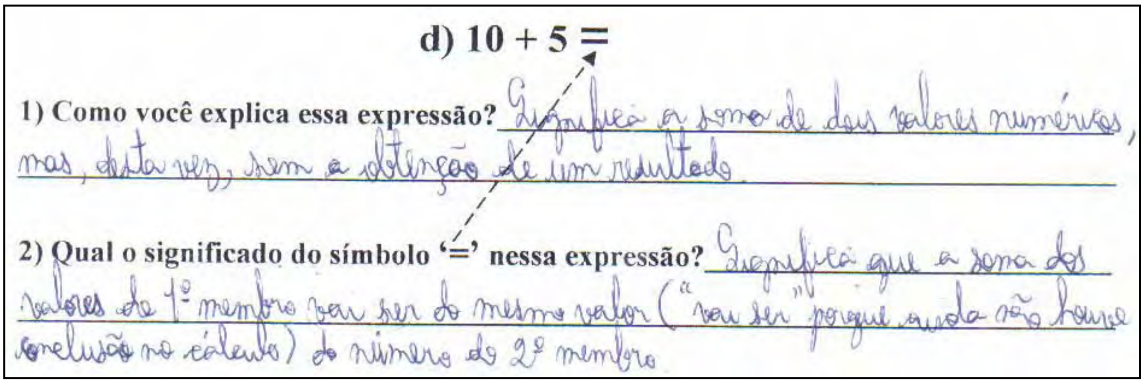
d) 10 + 5 =

1) Como você explica essa expressão? Uma soma sem resultado estabelecido

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? Estabelece uma relação de igualdade com o resultado

Quadro 05 – Protocolo (**instrumento1/98**)

No protocolo acima, entendemos que, mesmo o aluno admitindo que a expressão esteja sem resultado, ele escreve que o símbolo o significado do símbolo "=" é estabelecer uma relação de igualdade com o resultado. Podemos argumentar que, quando este aluno fala em resultado, não remete, necessariamente, a uma concepção operacional. Ele utiliza o termo resultado para referir-se a um dos lados da igualdade que estabelece relação com o outro, não no sentido de que o sinal de igualdade mostra ou leva ao resultado. Ressaltamos que este aluno também escreveu respostas relacionando os dois lados da igualdade em todos os itens do instrumento 1.



d) 10 + 5 =

1) Como você explica essa expressão? Significa a soma de dois valores numéricos, mas, desta vez, sem a obtenção de um resultado

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? Significa que a soma dos valores do 1º membro vai ser do mesmo valor ("vai ser" porque ainda não houve conclusão no cálculo) do número do 2º membro

Quadro 06 – Protocolo (**instrumento1/67**)

No protocolo **instrumento1/67**, a explicação do aluno foi semelhante à explicação escrita no protocolo **instrumento1/98**. Na resposta do aluno sobre o significado do símbolo "=", particularmente na parte que ele destaca "vai ser porque ainda não houve conclusão no cálculo", percebemos que "conclusão do cálculo" parece remeter ao número do segundo membro. Esta idéia encaminha-nos a pensar na concepção operacional. Contudo, mesmo o aluno pensando no segundo membro como conclusão do cálculo, a idéia que nos parece mais enfatizada no que concerne ao significado do sinal de igualdade, é a de que o primeiro e o segundo membro têm o mesmo valor. Por essa razão, entendemos que este aluno compreende o sinal de igualdade como símbolo relacional.

4.1.2 Item d do instrumento 2: "= 10 + 5"

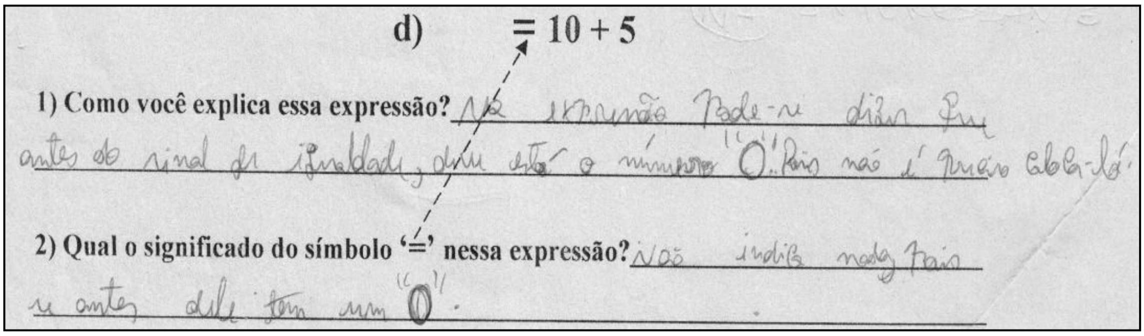
Neste item, apresentamos a expressão = 10 + 5, inversa da expressão 10 + 5 = , correspondente ao item **d** do instrumento 1. Se por um lado, a expressão 10 + 5 = é bastante comum para as crianças nas séries iniciais, podemos argumentar que a expressão = 10 + 5, não é. Na categorização dos dados, identificamos nas respostas dos alunos três concepções do sinal de igualdade, a operacional, a relacional nome-símbolo e a símbolo separador.

Expressão / Concepções	Operação aritmética = 10 + 5
Operacional	38,8%
Relacional Nome-símbolo	33,1%
Símbolo Separador	2,9%
Não identificada	20,4%
Não respondeu	4,8%
Total	100%

Tabela 03 – Operação aritmética (instrumento 2)

Os percentuais de Não respondeu e respostas Não identificadas foram de 4,8% e 20,4%, respectivamente. Ressaltamos que este item foi o que apresentou maior percentual de respostas Não identificadas. Em linhas gerais, considerando os percentuais de Não respondeu e Não identificadas, podemos conjeturar que aproximadamente um quarto dos sujeitos teve dificuldades em interpretar o significado do sinal de igualdade na expressão = 10 + 5.

Particularmente, alguns alunos demonstraram que, para eles, esta expressão era, de certo modo, absurda, como podemos observar na reposta de um dos alunos, ilustrada no protocolo abaixo.


d) = 10 + 5

1) Como você explica essa expressão? Na expressão pode-se dizer que antes do sinal de igualdade, deve estar o número "0". Pois não é preciso colocá-lo.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? Não indica nada pois se antes dele tem um "0".

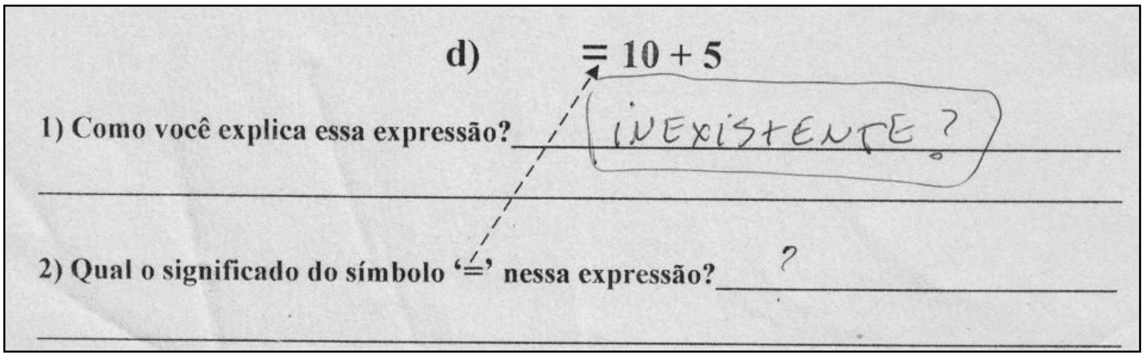
Quadro 07 – Protocolo (**instrumento2/58**)

Quando o aluno vai explicar a expressão = 10 + 5, ele escreve que "antes do sinal de igualdade, deve estar o número "0". Pois não é preciso colocá-lo". Esta explicação, juntamente com sua resposta sobre o significado do símbolo "=", na qual ele ressalta que "não indica nada pois se antes dele tem um 0", encaminha-nos a uma futura reflexão sobre a possibilidade desta expressão realmente ser ou não absurda.

Continuando, verificamos que a maior parte das respostas, isto é, aproximadamente 40%, indicam que os alunos estavam com uma concepção operacional. Como já tínhamos verificado na revisão da literatura que alguns pesquisadores, como por exemplo Ginsburg (1977) e Behr, Erlwanger e Nichols (1980), tinham utilizado expressões do tipo □ = a + b para investigarem a compreensão dos alunos sobre o sinal de igualdade, não percebemos a possibilidade de que nossos alunos pudessem ter tantas dificuldades ao interpretarem a expressão = 10 + 5 e o símbolo "=", nesta expressão.

De fato, não havíamos considerado, na análise preliminar dos instrumentos que realizamos na metodologia, que a ausência de número, operação ou mesmo da caixinha , no lado esquerdo do "=" pudesse levar os alunos a pensarem que esta ausência seria representada pelo 0. A caixinha realmente pode dar um sentido para o aluno, por que em certas ocasiões é comum o professor utilizá-la para indicar números ocultos (incógnitas) que devem ser descobertos e colocados dentro delas.

Por exemplo, em 3 + 4 = □, 3 + □ = 7 e □ + 4 = 7, os alunos podem ver estas caixinhas como um lugar para se colocar um número, e esta interpretação até pode ser aceitável em □ = 3 + 4. Particularmente, por causa da expectativa de que depois do "=" vem o resultado, os alunos até podem aceitar expressões do tipo 10 + 5 =, sem, contudo, interpretarem a ausência de termo após o "=" como associada ao 0. Realmente, verificamos que nenhum aluno, de nossa pesquisa fez esta associação no item **d** do instrumento 1. Isto é, a tendência maior é que os alunos associem esta ausência à indicação de uma tarefa, que corresponde a encontrar o resultado da operação 10 + 5 e não ao número 0. No entanto, esta ausência de número, de operação ou de uma caixinha , no lado esquerdo, provocou em alguns sujeitos de nossa pesquisa, dificuldades na compreensão da expressão = 10 + 5 e na interpretação do significado do símbolo "=" nesta expressão.


d) = 10 + 5

1) Como você explica essa expressão? INEXISTENTE ?

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? ?

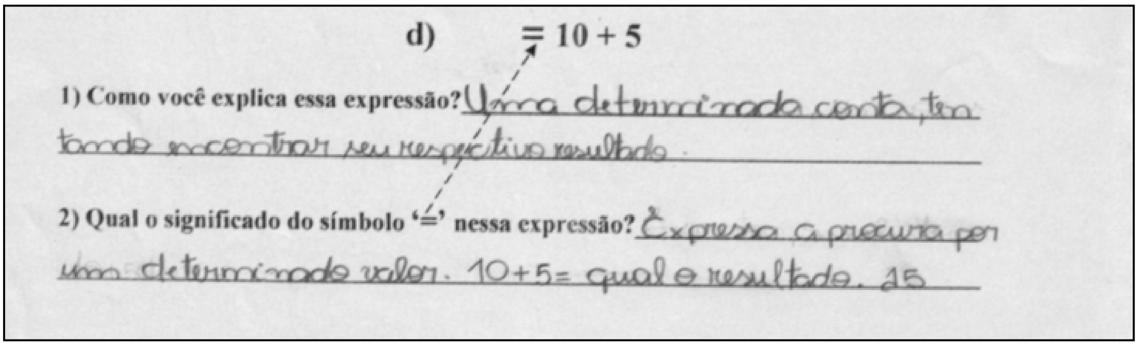
Quadro 08 – Protocolo (**instrumento2/47**)

O protocolo **instrumento2/47** ilustra que o aluno não aceitou a expressão = 10 + 5, nem reconheceu significado algum em relação ao símbolo "=" nesta expressão. Possivelmente esta reação deve-se ao fato de que, não havendo número, operação ou caixinha antes do sinal de igualdade, o aluno considera improvável a afirmação implícita "nada igual a zero".

Como já mencionamos, Ginsburg (1977) e Behr, Erlwanger e Nichols (1980) investigaram a compreensão de crianças com seis a doze anos sobre o sinal de igualdade em expressões do tipo □ = a + b, como por exemplo, □ = 3 + 4. Ambos os autores verificaram que crianças com idades entre seis e doze anos frequentemente reagiram argumentando que a expressão estava ao contrário e modificavam-nas para 3 + 4 = □. Essas reações, conforme os autores, demonstram que os alunos estão interpretando o sinal de igualdade como um símbolo operacional. Behr, Erlwanger e Nichols (1980) ressaltam, ainda, que as crianças com uma concepção operacional do sinal de igualdade demonstraram uma forte tendência em não aceitar expressões que não houvesse sinais de operação (+, -, x, ÷) precedendo o símbolo “=”.

Embora Ginsburg (1977) e Behr, Erlwanger e Nichols (1980) tenham utilizado em seus estudos expressões do tipo □ = a + b, que entendemos ser semelhante à expressão do item **d** do nosso instrumento de investigação 2, lembramos que a abordagem e os sujeitos das pesquisas deles foram diferentes da nossa abordagem e dos nossos sujeitos. Enquanto estes pesquisadores analisaram as reações dos alunos bem como o discurso deles, em nosso estudo nos apoiamos na análise das respostas correspondentes à interpretação do significado do símbolo “=” em expressões do tipo = a + b.

Mesmo assim, quando classificamos as respostas dos nossos sujeitos ao item **d** do instrumento 2 como concepção operacional também verificamos, em alguns casos, a re-escrita da expressão = 10 + 5 para 10 + 5 = como pode ser observado logo abaixo, no protocolo **instrumento2/36**.


d) = 10 + 5

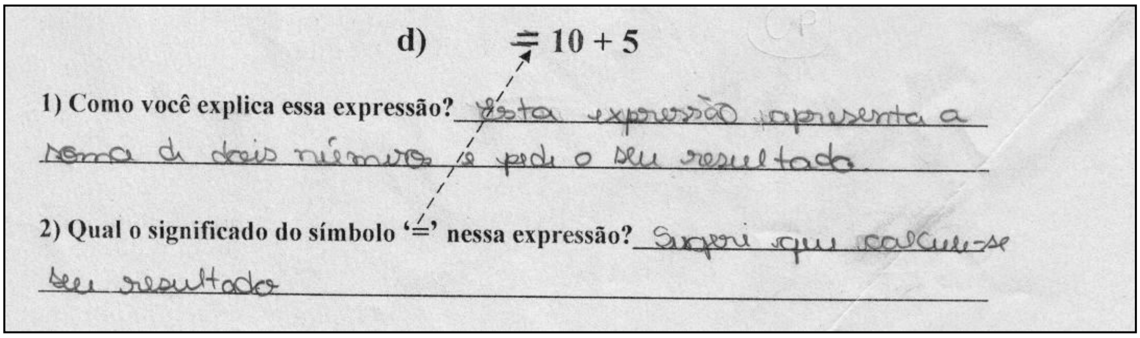
1) Como você explica essa expressão? Uma determinada conta, tendo encontrar seu respectivo resultado.

2) Qual o significado do símbolo ‘=’ nessa expressão? É expresso a procura por um determinado valor. 10+5= qual o resultado. 15

Quadro 09 – Protocolo (**instrumento2/36**)

Como podemos observar, este exemplo aponta que, mesmo entre alunos do 3º ano do Ensino Médio, existe a tendência de que antes do sinal de igualdade deve vir a operação, assim como foi evidenciado por Ginsburg (1977) e Behr, Erlwanger e Nichols (1980) com crianças de seis a doze anos.

Além desta reação demonstrando uma concepção operacional, observamos também que, tanto a explicação do aluno sobre a expressão = 10 + 5, quanto sua interpretação do símbolo “=”, nesta expressão, demonstram a idéia de que o sinal de igualdade indica a procura pelo resultado.


d) = 10 + 5

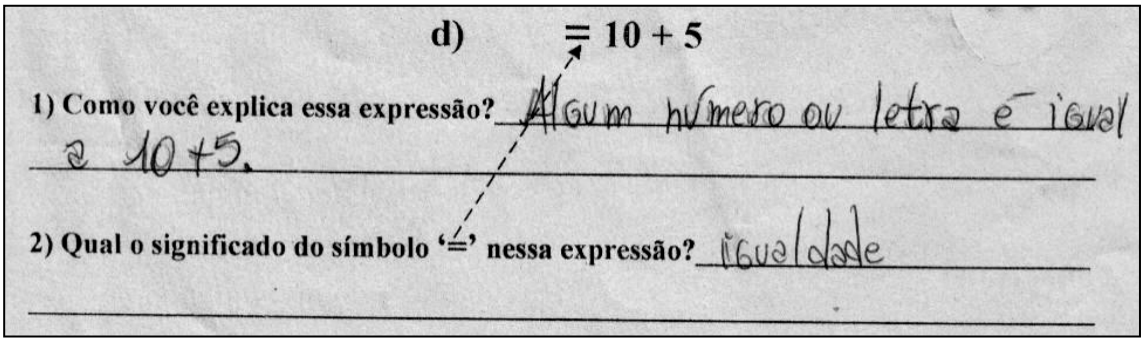
1) Como você explica essa expressão? Esta expressão apresenta a soma de dois números e pede o seu resultado

2) Qual o significado do símbolo ‘=’ nessa expressão? Sugere que calcule-se seu resultado

Quadro 10 – Protocolo (**instrumento2/58**)

No protocolo **instrumento2/58**, o aluno reconhece que a expressão representa uma soma na qual o resultado deve ser encontrado. Em relação ao sinal de igualdade, o aluno deixa claro que a função dele é calcular o resultado. Tais respostas, como já mencionamos antes, estão sendo classificadas, nesta pesquisa, como manifestações de uma concepção operacional.

A concepção relacional nome-símbolo foi identificada em um terço das respostas dos alunos ao item **d** do instrumento 2. Esta concepção, tal qual a definimos a priori, leva em consideração respostas do tipo “igual”, “igualdade”, no sentido de que estas respostas sugerem apenas um possível reconhecimento da relação entre o símbolo “=” e o nome igualdade.

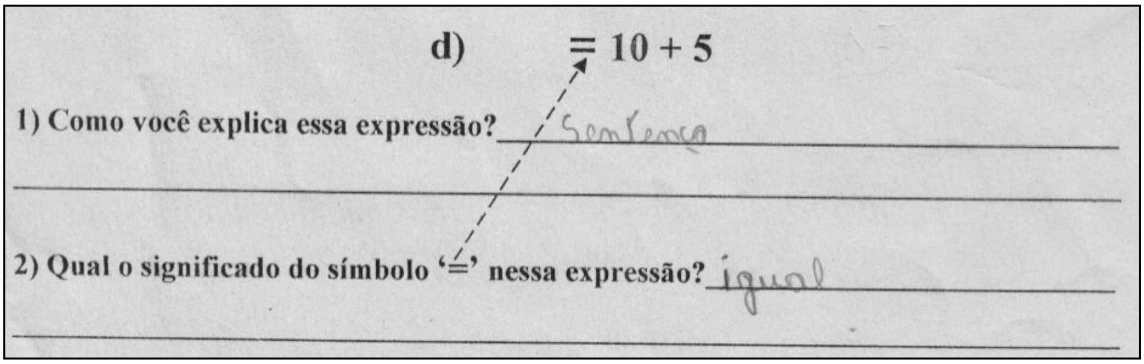

d) = 10 + 5

1) Como você explica essa expressão? Algum número ou letra é igual a 10+5.

2) Qual o significado do símbolo ‘=’ nessa expressão? igualdade

Quadro 11 – Protocolo (**instrumento2/1)**

As respostas do aluno representada no protocolo **instrumento2/1**, mostram que a explicação que ele dá à expressão = 10 + 5, confunde-se com uma leitura ou tradução da respectiva expressão. Quanto ao significado do símbolo “=” o aluno apenas escreve “igualdade”.



d) = 10 + 5

1) Como você explica essa expressão? Sentença

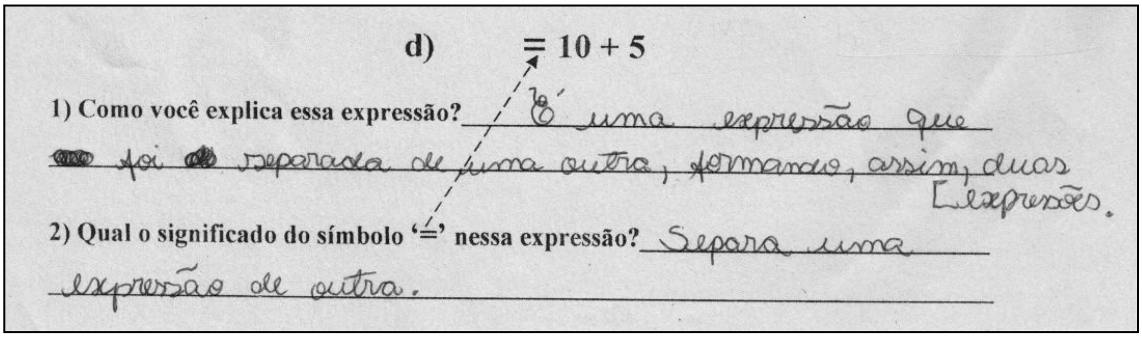
2) Qual o significado do símbolo ‘=’ nessa expressão? igual

Quadro 12 – Protocolo (**instrumento2/76)**

Na mesma direção, o protocolo **instrumento2/76** demonstra que a interpretação do aluno sobre o significado do sinal de igualdade, neste contexto, corresponde apenas ao nome do símbolo “=”. Assim, esses tipos de respostas não nos permite tirar outras conclusões, a não ser a de que o aluno parece simplesmente atribuir o nome igual ao símbolo “=”, quase que de maneira espontânea.

Por último, mesmo sendo representada por um pequeno percentual de 2,9% das respostas, identificamos também a concepção símbolo separador. Lembramos que a idéia correspondente à esta concepção é a de que o significado do símbolo “=” implica em “separar”, por exemplo, dois membros de uma igualdade.

No entanto, na expressão = 10 + 5 temos apenas um lado. Dessa maneira, poderíamos questionar: afinal, o que ele poderia estar separando se só um lado é dado?



d) = 10 + 5

1) Como você explica essa expressão? É uma expressão que foi separada de uma outra, formando, assim, duas expressões.

2) Qual o significado do símbolo ‘=’ nessa expressão? Separa uma expressão de outra.

Quadro 13 – Protocolo (**instrumento2/86**)

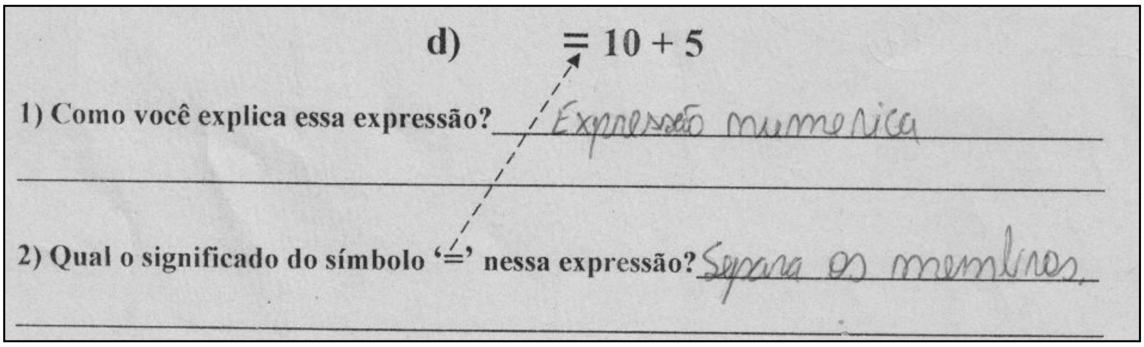
A resposta representada no protocolo **instrumento2/86** chamou-nos a atenção pelo fato de que o aluno não reconhece a expressão = 10 + 5 como uma operação aritmética, na qual um lado é dado para ser calculado, e o outro deve ser preenchido com o resultado, mas sim como uma das partes de uma outra expressão, *implícita*, composta de duas partes. Nessa direção, o aluno escreve que o significado do "=" é separar uma parte da outra.

Apenas com os elementos contidos neste protocolo não foi possível avançar nas razões que encaminharam o aluno a conceber = 10 + 5 como uma das partes de uma suposta expressão que foi separada, mas sugerimos algumas hipóteses. A primeira é que este aluno pode compreender que igualdades com operações nos dois lados do "=" (a + b = c + d), podem ser resolvidas separadamente. Na literatura, encontramos estudos (ex. DENMARK, BARCO e VORAN, 1976; BEHR, ERLWANGER e NICHOLS, 1980; SHOECRAFT, 1989) indicando que alunos jovens, com idades de seis a doze anos, às vezes, consideram igualdades deste tipo como se fossem dois problemas separados. Shoecraft (1989), por exemplo, discute que muitas crianças alteram a expressão 2 + 7 = 4 + 5 para 2 + 7 = 9 e 4 + 5 = 9 ou 2 + 7 + 4 + 5 = 18.

Nesse caso, os alunos parecem sentir a necessidade de modificar o esquema operação = operação" para "operação = resposta", no qual o sinal de igualdade é sempre precedido por uma operação e seguido por uma resposta, comumente, com um único número. Essa tendência foi interpretada em razão de uma concepção operacional (DENMARK, BARCO e VORAN, 1976; BEHR, ERLWANGER e NICHOLS, 1980; SHOECRAFT, 1989) ou possivelmente a uma limitação cognitiva correspondente à *aceitação da falta de fechamento*. Dessa maneira, entendemos que estas considerações não se aplicam, ou não são adequadas, para a resposta representada no protocolo **instrumento2/86**, pois o aluno demonstra não ter problemas em aceitar o fato de que depois do sinal de igualdade tenha uma operação. Poderíamos então pensar em uma segunda hipótese, na qual este aluno compreende o "=" como um símbolo relacional.

Se a não aceitação do esquema "operação = operação" e sua modificação para "operação = resultado" dão indícios de uma concepção operacional, a aceitação demonstraria que o aluno pode estar compreendendo o "=" como um símbolo que relaciona duas operações com o mesmo valor. Se por um lado fica claro que o aluno aceita o esquema "operação = operação", por outro os dados não permitem concluir que o “=” está sendo interpretado como uma relação de igualdade, no sentido de que ambos os lados, mesmo diferentes, representam o “mesmo valor”.

Como não há evidências claras de uma concepção igualdade relacional, podemos então justificar que a evidência maior é a de que este aluno esteja interpretando o símbolo “=” apenas como um separador, como ele bem escreve sobre o significado do sinal de igualdade.


d) = 10 + 5

1) Como você explica essa expressão? Expressão numerica

2) Qual o significado do símbolo ‘=’ nessa expressão? Separa os membros.

Quadro 14 – Protocolo (**instrumento2/71**)

Diferentemente da análise do protocolo **instrumento2/86** que sugeriu uma discussão sobre três possibilidades de concepções (operacional, igualdade relacional e símbolo separador) e, por eliminação, classificou-se como concepção símbolo separador, na resposta do aluno representada no protocolo **instrumento2/71**, uma discussão seria desnecessária, pois a escrita do aluno deixa bastante evidente sua concepção símbolo separador.

4.1.3 Operações aritméticas: cruzamento dos resultados nos instrumentos 1 e 2

Para verificarmos as concepções dos alunos acerca do sinal de igualdade no contexto das operações aritméticas, utilizamos um item do instrumento 1 e um item do instrumento 2, representados pelas expressões 10 + 5 = e sua forma invertida = 10 + 5, respectivamente. Após analisarmos estas duas questões de maneira isolada, apresentaremos, em seguida, algumas considerações articulando os resultados destes dois itens.

Antes de realizarmos quaisquer comparações entre os resultados obtidos nos instrumentos 1 com os obtidos no instrumento 2, esclarecemos que os alunos que responderam o instrumento 1, não responderam o instrumento 2 e vice-versa. Portanto, as comparações não devem ser entendidas da forma, aluno A teve uma concepção C quando analisou a expressão 10 + 5 =, e o mesmo aluno A teve uma concepção C1 quando analisou a expressão = 10 + 5. Portanto, nossa análise comparativa é relativa aos resultados obtidos no domínio do grupo de alunos do 3º ano que participou da pesquisa. Dados estes esclarecimentos, vamos prosseguir com as considerações provenientes dos resultados obtidos pelos dois itens (item **d** do instrumento 1 e 2).

Levando em consideração os resultados obtidos em ambos os instrumentos 1 (10 + 5 =) e 2 (= 10 + 5), verificamos que mais da metade das concepções dos alunos sobre o significado do sinal de igualdade nos contextos aritméticos corresponderam à concepção operacional e mais de um quarto à concepção relacional nome-símbolo.

Particularmente, comparando os resultados em ambos os instrumentos 1 e 2, a concepção operacional foi, aproximadamente 25%, mais identificada no item **d** do instrumento 1 (10 + 5 =), enquanto que, neste mesmo contexto, a concepção relacional nome-símbolo foi, aproximadamente 10%, mais identificada no item **d** instrumento 2 (= 10 + 5).

Podemos dizer que, no contexto das operações aritméticas, a maior tendência, no que diz respeito às concepções dos alunos do 3º ano do Ensino Médio que participaram desta pesquisa, foi referente a uma concepção operacional do sinal de igualdade. Esta tendência, por sua vez, foi mais evidente na expressão 10 + 5 =, quando o sinal de operação (+) encontrava-se antes do símbolo "=", do que na expressão = 10 + 5, com o sinal (+) após o símbolo "=".

4.1.4 Síntese dos resultados: operações aritméticas

Esta síntese corresponde à categorização da soma de todos os dados obtidos no instrumento 1 e 2, concernentes ao contexto das operações aritméticas. A tabela a seguir demonstra os percentuais respectivos às concepções definidas "a priori" e "a posteriori", bem como os percentuais relativos às não respondidas e não identificadas.

Concepções	**%**
Operacional	51,2%
Relacional nome-símbolo	28,3%
Símbolo separador	1,5%
Igualdade relacional	1,0%
Operacional sintático	0%
Equivalência em igualdade condicional	0%
Funcional	0%
Não identificada	15,1%
Não respondeu	2,9%
Total	100%

Tabela 04 – concepções no contexto das operações aritméticas

Como podemos observar na tabela 04, no contexto das operações aritméticas foram identificadas, nas respostas dos alunos, quatro concepções sobre o significado do sinal de igualdade, sendo elas, a operacional, a relacional nome-símbolo, a símbolo separador e a igualdade relacional. Mais da metade das respostas foi categorizada como concepção operacional e mais de um quarto como concepção relacional nome-símbolo.

Estes dados permitiram-nos argumentar que, no contexto das operações aritméticas, os alunos do 3º ano do Ensino Médio que participaram da pesquisa, tiveram maior tendência em compreender o sinal de igualdade de maneira operacional. Identificamos, nas concepções dos alunos, várias idéias já evidenciadas em outras pesquisas, como por exemplo, a de que sinal de igualdade indica a resposta, o resultado, precede o resultado, indica cálculo, o final da conta.

Outra tendência bastante evidente foi a de compreender o significado do sinal de igualdade apenas como igual, igualdade, símbolo de igualdade sem, contudo, demonstrar que o símbolo “=” estava sendo interpretado como símbolo relacional. As respostas destes tipos não estavam sendo categorizadas em outras pesquisas como concepções dos alunos sobre o sinal de igualdade.

Mesmo o significado do símbolo “=” não correspondendo, nas expressões que representaram o contexto das operações aritméticas, a uma relação de igualdade, nem estando visivelmente separando termo algum, identificamos respostas que demonstravam idéias correspondentes às concepções igualdade relacional e símbolo separador. Isto indica que características e significados do símbolo “=” referentes a outros contextos também foram mobilizados nas concepções dos alunos em relação ao significado do símbolo "=" no contexto das operações aritméticas. Por último, achamos importante ressaltar que, se tratando de alunos do 3º ano do Ensino Médio, esperávamos um percentual maior de respostas identificadas como concepção operacional.

4.2 Igualdades aritméticas

As características do símbolo "=" numa igualdade aritmética, conforme a discussão teórica desta pesquisa, corresponde à idéia de relação de igualdade que inclui: identidade única de significado e equivalência dos diferentes significantes (VERGNAUD, 1994). Segundo Behr, Erlwanger e Nichols (1980), o símbolo "=" como um símbolo relacional, neste contexto, sugere uma comparação entre os dois membros de uma igualdade. Dessa maneira, entendemos que o significado do símbolo "=" numa igualdade aritmética pode ser compreendido como indicando que o que está no lado direito do "=" é igual, idêntico ou equivalente ao que está no lado esquerdo.

4.2.1 Item a do instrumento 1: "14 + 8 = 22"

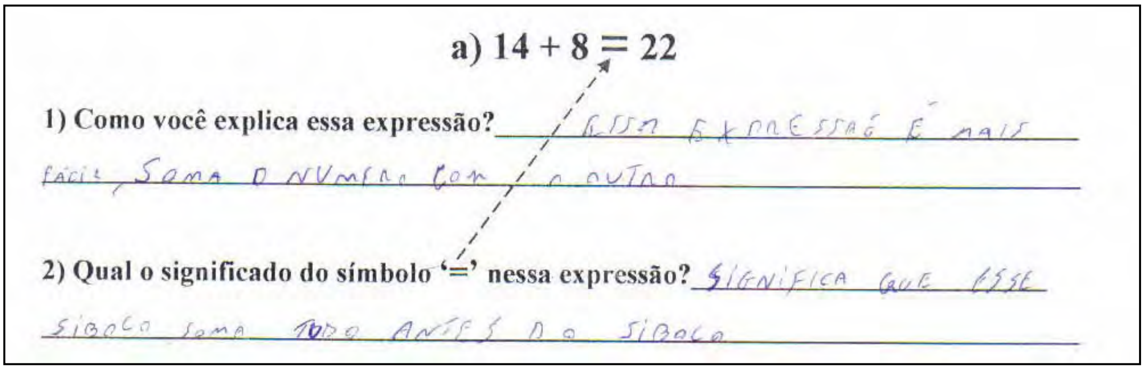
Tanto no instrumento 1 quanto no 2, o item referente ao contexto das igualdades aritméticas foi o item **a**. No instrumento 1, o contexto das igualdades aritméticas foi representado pela expressão 14 + 8 = 22. A tabela abaixo, demonstra os resultados obtidos com a análise das respostas dos alunos a este item.

Expressão / **Concepções**	**Igualdade aritmética 14 + 8 = 22**
Operacional	51,0%
Igualdade relacional	15,6%
Relacional nome-símbolo	30,4%
Separador	2,0%
Não identificada	1,0%
Não respondeu	0%
Total	100%

Tabela 05 – Igualdade aritmética (Instrumento 1)

Como podemos observar na tabela 05, todos os alunos responderam este item e apenas 1% das respostas não foram identificadas. Assim, identificamos quatro concepções dos alunos acerca do sinal de igualdade. São elas: a operacional com 51,0% das respostas, a igualdade relacional com a porcentagem de 15,6%, a relacional nome-símbolo com 30,4% e a separador com 2,0%.

Iniciando pela discussão dos resultados correspondentes à concepção operacional, esclarecemos que utilizamos os mesmos critérios para categorização das respostas dos itens referentes ao contexto das operações aritméticas. Em outras palavras, nos orientamos por idéias como, sinal para fazer algo, comando para executar a operação, sinal para mostrar a resposta ou resultado.

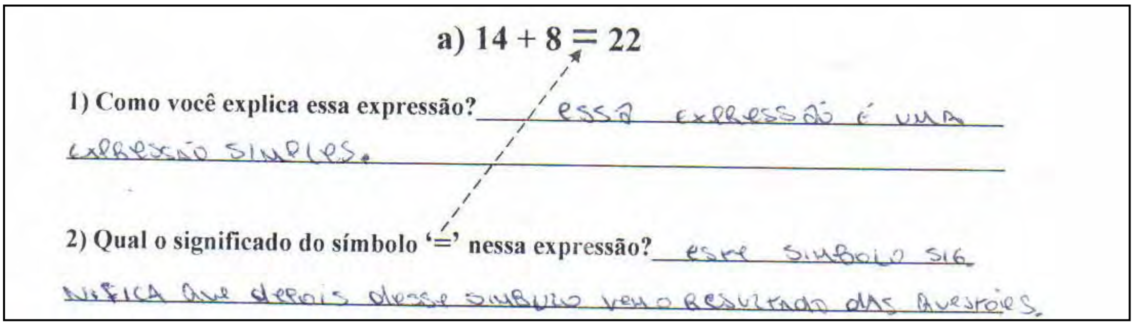

a) 14 + 8 = 22

1) Como você explica essa expressão? ESSA EXPRESSÃO É MAIS FÁCIL, SOMA O NUMERO COM O OUTRO

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? SIGNIFICA QUE ESSE SIBOLO SOMA TODO ANTES DO SIBOLO

Quadro 15 – Protocolo (**instrumento1/23**)

O protocolo **instrumento1/23** ilustra a concepção operacional e, particularmente, quando o aluno escreve que o "=" soma tudo antes dele, reconhecemos a idéia do sinal de igualdade como um comando para executar a operação.


a) 14 + 8 = 22

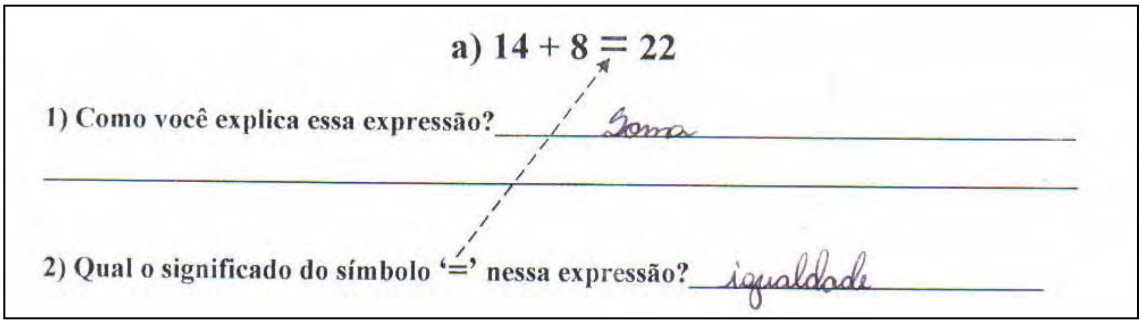
1) Como você explica essa expressão? essa expressão é uma expressão simples.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? este simbolo significa que depois desse simbulo vem o resultado das questões.

Quadro 16 – Protocolo (**instrumento1/36**)

Quando o aluno responde que depois do "=" vem o resultado das questões, conforme ilustrado no protocolo **instrumento1/36**, fica clara a idéia do sinal de igualdade como sinal para mostrar a resposta ou resultado.

Aproximadamente 30% das concepções dos alunos que responderam o instrumento 1 foram correspondentes à concepção relacional nome-símbolo. Os alunos, com esta concepção do sinal de igualdade, interpretam o símbolo "=" apenas como igual ou igualdade, sugerindo que podem estar apenas reconhecendo a relação entre este símbolo e o seu nome, conforme ilustra a figura abaixo.



a) 14 + 8 = 22

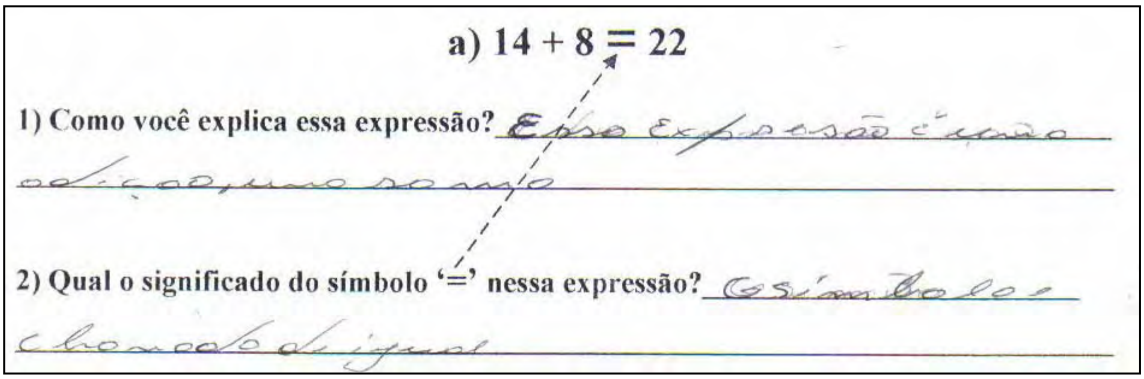
1) Como você explica essa expressão? Soma

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? igualdade

Quadro 17 – Protocolo (**instrumento1/79**)

Observando o protocolo acima, percebemos que o aluno não reconhece a expressão 14 + 8 = 22 como uma igualdade, mas sim como uma soma, provavelmente por causa do símbolo (+).

Em relação ao significado do símbolo "=", ele escreve apenas igualdade. Este aluno pode estar além de interpretando o "=" em razão do seu nome, igual, utilizando esta estratégia ao interpretar a igualdade em razão do sinal de operação (+) contido na expressão.



a) 14 + 8 = 22

1) Como você explica essa expressão? Essa Expressão é uma adição, uma soma

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? O símbolo é chamado de igual

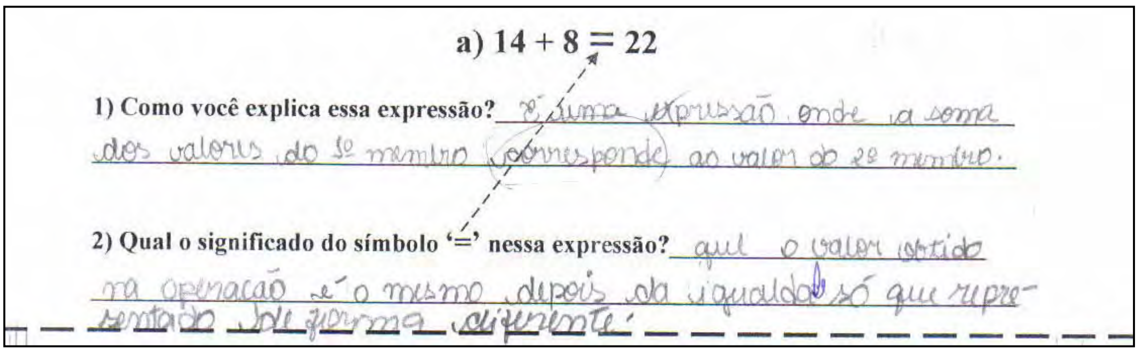
Quadro 18 – Protocolo (**instrumento1/54**)

Semelhantemente, acreditamos que na resposta representada no protocolo **instrumento1/54**, o aluno também interpreta a expressão como uma adição/soma, em razão do símbolo (+), não a reconhecendo como uma igualdade. Por conseguinte, a resposta deixa claro que, em relação ao significado símbolo “=” na igualdade 14 + 8 = 22, o aluno está considerando apenas o nome do símbolo “=”, no caso, igual. Tanto nas respostas representadas no protocolo **instrumento1/79**, quanto no **instrumento1/54**, as evidências apontam para o fato de que a concepção destes alunos é baseada na relação entre o símbolo “=” e o nome igual/igualdade. Por este motivo, classificamos as respostas deste tipo como concepção relacional nome-símbolo.

O percentual de alunos que interpretaram o significado do símbolo “=” na igualdade aritmética 14 + 8 = 22 como símbolo relacional foi de aproximadamente 16%. Para categorizarmos as respostas dos alunos como concepção igualdade relacional, fundamentamo-nos em Vergnaud (1994) e em Behr, Erlwanger e Nichols (1980).

Behr, Erlwanger e Nichols (ibid.) apontam que as crianças participantes de sua pesquisa considerariam o “=” como um símbolo relacional se compreendessem este símbolo como uma comparação entre os dois membros de uma igualdade. Já Vergnaud (ibid.), define uma relação de igualdade afirmando que ela representa, ao mesmo tempo, uma identidade única de significado e uma equivalência dos diferentes significantes.

Consideramos estas duas posições como compatíveis e, em nosso entendimento, englobam a idéia de que os dois lados da igualdade têm o mesmo valor, ainda que os símbolos sejam diferentes. Os protocolos **instrumento1/39** e **instrumento1/80** são exemplos desta idéia associada à concepção igualdade relacional.


a) 14 + 8 = 22

1) Como você explica essa expressão? é uma expressão onde a soma dos valores do 1º membro corresponde ao valor do 2º membro.

2) Qual o significado do símbolo ‘=’ nessa expressão? que o valor obtido na operacão é o mesmo depois da igualdade só que representado de forma diferente.

Quadro 19 – Protocolo (**instrumento1/80**)

A resposta do aluno explicando a expressão 14 + 8 = 22 e interpretando o significado do "=", no protocolo acima, demonstra que ele está considerando que os dois lados da igualdade, mesmo com representações diferentes, se referem ao mesmo valor, e quem indica esta relação de igualdade entre os dois lados é o sinal de igualdade. Compreendemos que a idéia contida nesta resposta se apóia em uma concepção igualdade relacional, pois estabelece uma comparação entre o valor da soma do primeiro membro e valor representado no segundo membro.

a) 14 + 8 = 22

1) Como você explica essa expressão? É uma forma clara, que expli-
ca a matemática em si, assim com 2 e 2 são 4.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? Que os números
de 1º membro são iguais ao do 2º, independente de sua forma.

Quadro 20 – Protocolo (**instrumento1/39**)

Tanto a resposta do aluno no protocolo **instrumento1/39**, quanto à do aluno representada no protocolo **instrumento1/80**, demonstram que os alunos não estão compreendendo o sinal de igualdade como um sinal para fazer algo, nem como um símbolo que indica o lugar da resposta, mas sim estão levando em consideração o fato de que o símbolo "=" representa uma relação estática entre os lados da igualdade. De fato, eles parecem perceber que mesmo sendo diferentes os números ou valores expressos nos dois lados da igualdade, o que é invariante é a relação estabelecida entre eles pelo símbolo "=", isto é, a igualdade.

Por último, identificamos em 2% dos alunos que responderam o instrumento 1, a concepção do sinal de igualdade como um símbolo separador.

a) 14 + 8 = 22

1) Como você explica essa expressão? Essa expressaõ significa um monte de números.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? O símbolo tem como sentido, separar os números.

Quadro 21 – Protocolo (**instrumento1/26**)

No protocolo anterior, o aluno explica a expressão 14 + 8 = 22 como um "monte de números", não a reconhecendo também como uma igualdade. Em relação ao significado do sinal de igualdade, ele escreveu que correspondia à separação dos números.

a) 14 + 8 = 22

1) Como você explica essa expressão? Uma expressão básica de uma adição

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? para indicar a separação dos números em uma adição.

Quadro 22 – Protocolo (**instrumento1/13**)

Na resposta do aluno, representada no protocolo **instrumento1/13**, podemos dizer que ele não está interpretando o significado do "=" como sinal para fazer algo, indicar a resposta, nem, tampouco, como sinal para expressar uma relação de igualdade entre os lados esquerdo (14 + 8) e direito (22). Igualmente entendemos que, nesta resposta, não há uma especificação da relação entre o significado do sinal de igualdade e o contexto no qual aparece, nem o reconhecimento da relação entre o símbolo "=" e o nome igualdade. Por esta razão, classificamos as respostas envolvendo a idéia de separar, por exemplo, os números em uma adição, como ilustrada nos protocolos **instrumento1/13** e **instrumento1/26**, como correspondentes à concepção símbolo separador.

4.2.2 Item a do instrumento 2: “22 = 14 + 8”

Neste item, o contexto das igualdades aritméticas foi representado pela expressão 22 = 14 + 8, isto é, a forma invertida da expressão 14 + 8 = 22, utilizada no item **a** do instrumento 1.

Se a operação aritmética = 10 + 5 não é considerada uma expressão comum no ensino de Matemática nas séries iniciais, conforme discutimos na análise do item **d** do instrumento 2, podemos dizer na mesma direção que o estudo de igualdades aritméticas representadas por expressões tais como, 22 = 14 + 8, também não é trivial. No que concerne aos resultados, identificamos as concepções, operacional, igualdade relacional, relacional nome-símbolo e símbolo separador, conforme os dados apresentados na tabela abaixo.

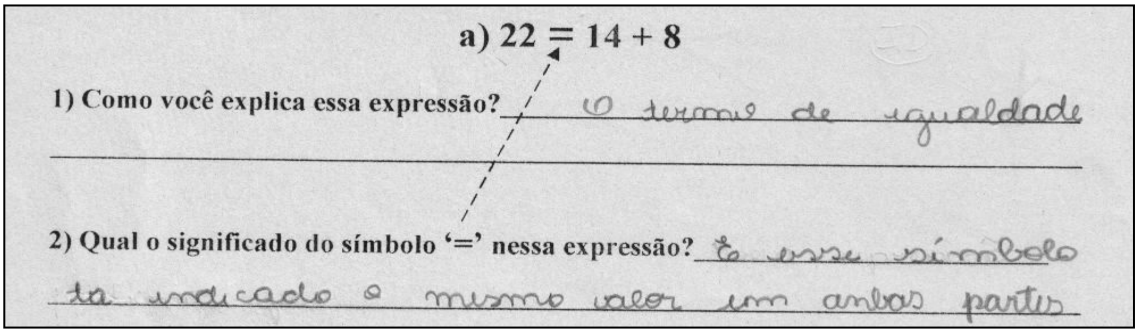
Expressão / **Concepções**	**Igualdade aritmética 22 = 14 + 8**
Operacional	25,2%
Igualdade relacional	34,0%
Relacional nome-símbolo	31,1%
Símbolo Separador	2,9%
Não identificada	5,8%
Não respondeu	1,0%
Total	100%

Tabela 06 – Igualdade aritmética (Instrumento 2)

A porcentagem de respostas não identificadas foi de 5,8% enquanto que a de alunos que não responderam foi de 1,0%. Desta vez, a maior parte das respostas não foi categorizada como concepção operacional, mas sim como concepções igualdade relacional e relacional nome símbolo.

Nos itens que já analisamos, discutimos os resultados iniciando pela concepção com maior percentual obtido na análise. Assim, vamos iniciar nossa discussão com os resultados referentes à concepção igualdade relacional, em seguida com os resultados da concepção nome-símbolo, concepção operacional e, por último, com os resultados correspondentes à concepção símbolo separador.

A concepção igualdade relacional é fundamentada nas idéias que discutimos acerca de Vergnaud (1994) e Behr, Erlwanger e Nichols (1980). Nesta direção, consideramos que um aluno tem uma concepção igualdade relacional quando considera o "=" como um sinal de relação entre membros da igualdade na qual, por exemplo, ambos os lados tem o mesmo valor ou, representam o mesmo número.

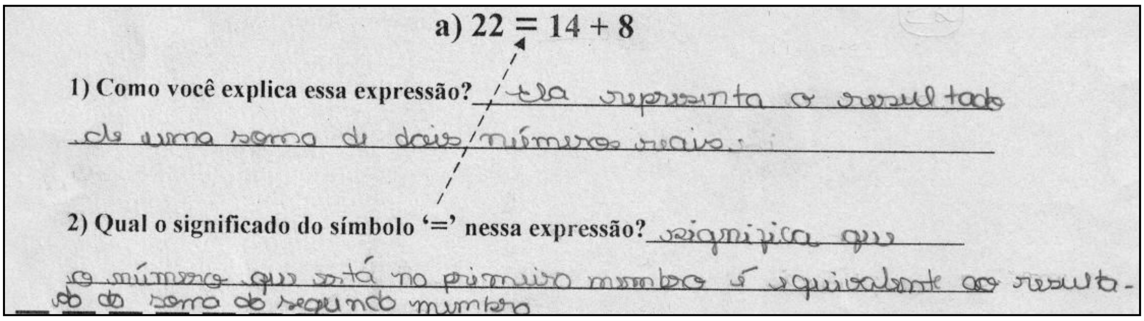

a) 22 = 14 + 8

1) Como você explica essa expressão? o termo de igualdade

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? é esse símbolo ta indicado o mesmo valor em ambas partes

Quadro 23 – Protocolo (**instrumento2/87**)

No protocolo acima, o aluno reconhece a expressão 22 = 14 + 8 como uma igualdade e, por conseguinte, considera o sinal de igualdade, neste contexto, como sinal que indica o mesmo valor em ambas as partes. Assim, compreendemos que o aluno está com uma concepção referente à igualdade relacional.


a) 22 = 14 + 8

1) Como você explica essa expressão? Ela representa o resultado de uma soma de dois números reais.

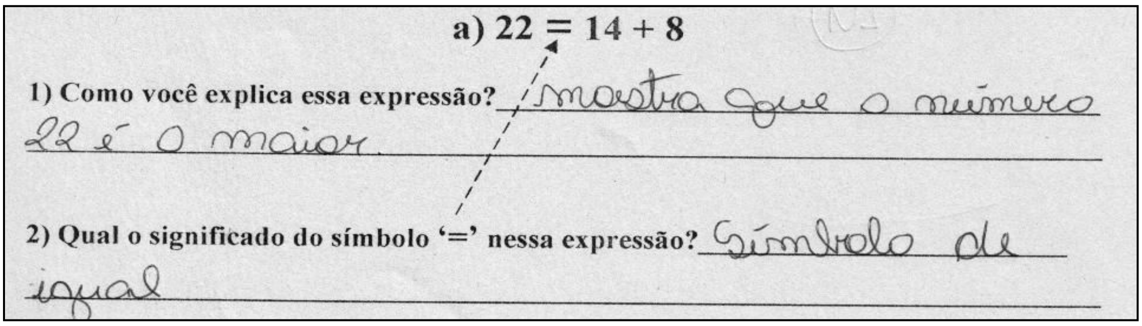
2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? significa que o número que está no primeiro membro é equivalente ao resulta-do da soma do segundo membro

Quadro 24 – Protocolo (**instrumento2/58)**

Analisando a resposta ilustrada no protocolo **instrumento2/58**, podemos ver que o aluno fala em resultado de uma soma de dois números, possivelmente levando em conta 22 como o resultado de 14 + 8. Em relação ao significado do sinal de igualdade, ele também fala em resultado, contudo, quando esse aluno escreve que o número que está no primeiro membro, no caso, 22, é equivalente ao *resultado* da soma do segundo membro, deixa subtendido que o resultado desta soma também é 22. Logo seu pensamento estaria discorrendo sobre uma possível identidade ou equivalência de conteúdo, valor, tal como 22 = 22.

Assim, destacamos que, mesmo este aluno utilizando a palavra resultado em sua resposta, não implica, necessariamente, em uma concepção operacional. Por outro lado, quando ele compara o número que está no primeiro membro com o resultado da soma do segundo membro em termos de equivalência está, em nosso entendimento, considerando o sinal de igualdade como uma relação correspondente à concepção igualdade relacional.

Em seqüência, na categorização dos dados, quase um terço das respostas corresponderam à concepção relacional nome-símbolo. Ao longo de toda a análise temos discutido que, quando os alunos escrevem que o significado do "=" é igual/igualdade, estamos reconhecendo que sua concepção está sendo guiada pelo reconhecimento da relação entre o símbolo "=" e o nome igual/igualdade. Cada protocolo analisado, por sua vez, vem confirmando que é bem específica a idéia referente à relação nome-símbolo, que neste trabalho designa a concepção relacional nome-símbolo.



a) 22 = 14 + 8

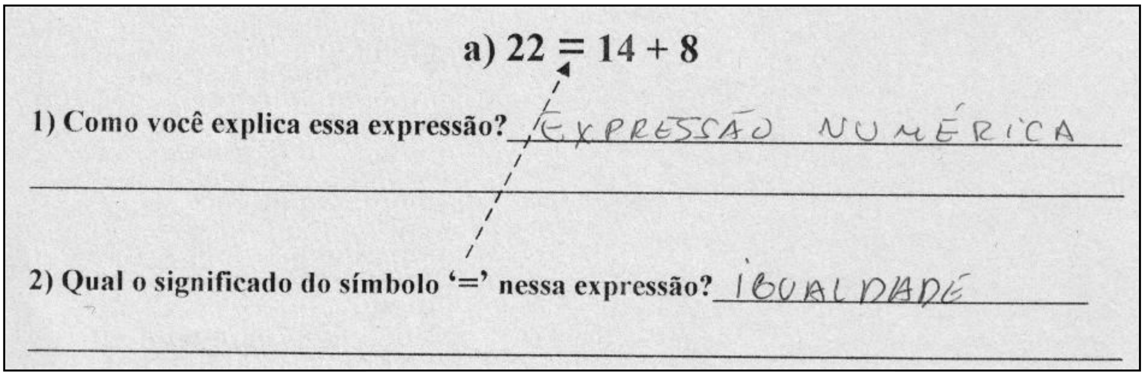
1) Como você explica essa expressão? mostra que o número 22 é o maior.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? Símbolo de igual

Quadro 25 – Protocolo (**instrumento2/22**)

Na figura acima, podemos argumentar que o aluno não percebeu a expressão 22 = 14 + 8 como uma igualdade. Com efeito, ao afirmar que o número 22 é o maior, é possível que ele tenha observado apenas os números da expressão, uma vez que, 22 é maior que 14 e 8.

Quanto ao significado do símbolo “=” em 22 = 14 + 8, o aluno apenas escreve símbolo de igual, isto é, parece identificar apenas o nome do símbolo, e dessa maneira, a concepção subjacente é a que denominamos de relacional nome-símbolo.


a) 22 = 14 + 8

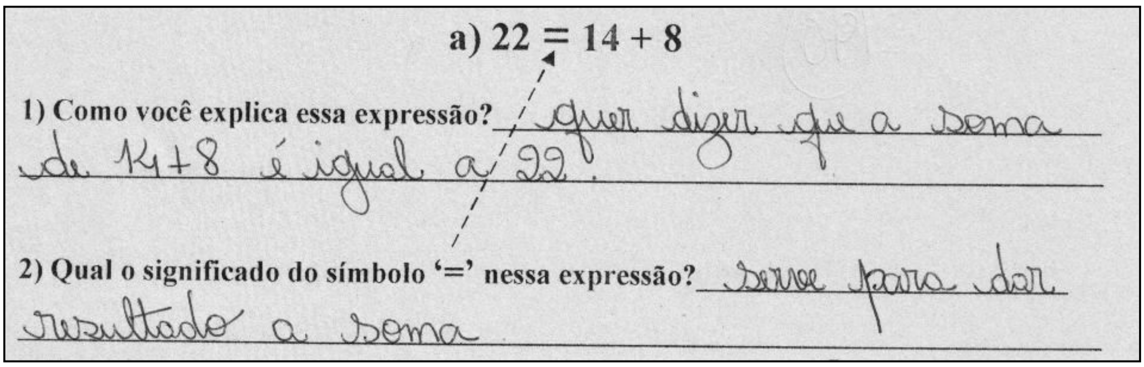
1) Como você explica essa expressão? EXPRESSÃO NUMÉRICA

2) Qual o significado do símbolo ‘=’ nessa expressão? IGUALDADE

Quadro 26 – Protocolo (**instrumento2/47**)

Na resposta representada no protocolo **instrumento2/47**, observamos que o aluno também não reconhece 22 = 14 + 8 como uma igualdade. Quanto ao significado do “=”, ele apenas escreve “igualdade”, indicando-nos uma concepção relacional nome-símbolo.

Por conseguinte, aproximadamente 25% dos sujeitos escreveram respostas indicando uma concepção operacional. Apresentamos em seguida, os protocolos ilustrando esta concepção, em relação ao contexto das igualdades aritméticas, representado pela expressão 22 = 14 + 8.


a) 22 = 14 + 8

1) Como você explica essa expressão? quer dizer que a soma de 14+8 é igual a 22.

2) Qual o significado do símbolo ‘=’ nessa expressão? serve para dar resultado a soma

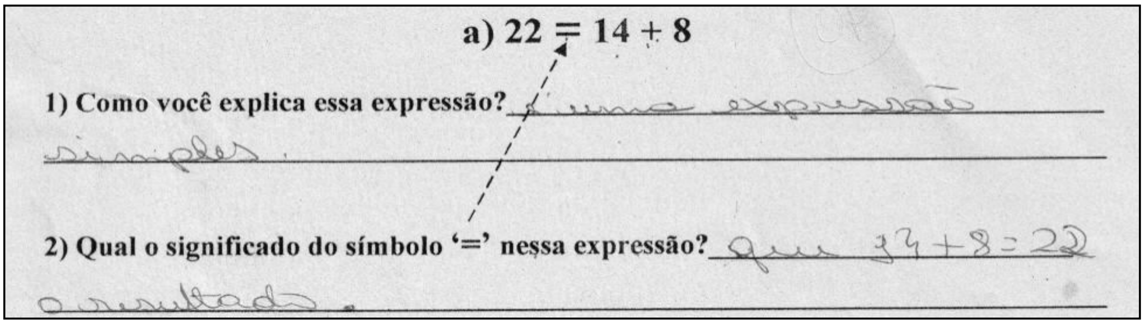
Quadro 27 – Protocolo (**instrumento2/17**)

Diversos estudos (DENMARK, BARCO e VORAN, 1976; GINSBURG, 1977; BEHR, ERLWANGER e NICHOLS, 1980; SHOECRAFT, 1989) demonstram que crianças jovens, com idades entre seis e doze anos, têm uma tendência em re-escrever expressões na forma “c = a + b” para “a + b = c”, em razão de uma concepção operacional do sinal de igualdade. Behr, Erlwanger e Nichols (1980), por exemplo, explicam que para os alunos aceitarem uma expressão contendo um símbolo “=”, parece que precisam ver antes dele sinais de operações (+, -, ÷, x) e depois dele um resultado.

Como podemos ver no protocolo acima, o aluno quando vai explicar a expressão 22 = 14 + 8, apenas reescreve-a na direção (operação = resultado). Este protocolo confirma assim, que a tendência de re-escrever expressões na forma “c = a + b” para “a + b = c”, também foi verificada com alunos do 3º ano do Ensino Médio.

Quanto ao significado do sinal de igualdade, o aluno responde que “serve para dar o resultado da soma”. Analisando as respectivas respostas referentes à expressão 22 = 14 + 8 e ao significado do símbolo “=” nesta expressão, podemos inferir que, para este aluno, 14 + 8 é igual a 22, 14 + 8 = 22 e 14 + 8 dá 22, teriam o mesmo sentido, isto é, em sua concepção, “é igual a”, “=” e “dá” teriam o mesmo atributo.

Este aspecto também foi evidenciado no estudo de Stacey e Macgregor (1997) quando verificaram que vários alunos compreendiam o sinal de igualdade como uma ação indicada do tipo *dar* ou *faz*. Por exemplo, o “=” em 3 + 5 = 8, é comumente lido como 3 mais 5 *dá* 8, ou 3 mais 5 *fazem* 8. Semelhantemente, observamos as respostas escritas no protocolo **instrumento2/16**, logo abaixo.


a) 22 = 14 + 8

1) Como você explica essa expressão? É uma expressão simples.

2) Qual o significado do símbolo ‘=’ nessa expressão? Que 14 + 8 = 22 o resultado.

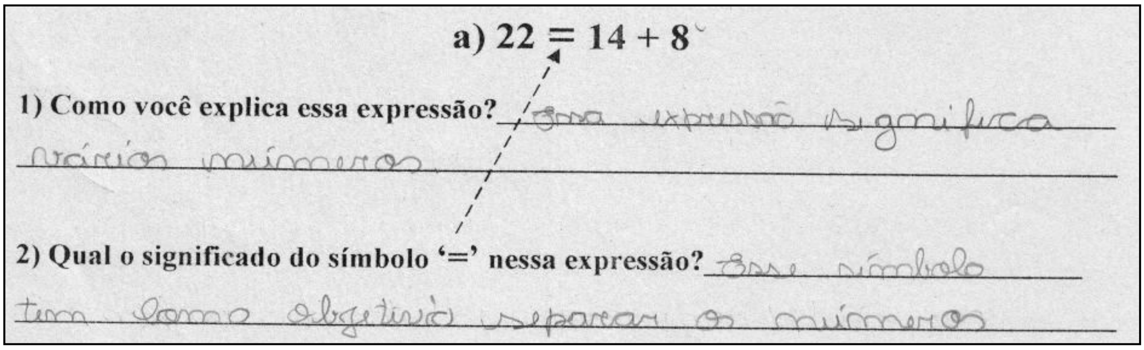
Quadro 28 – Protocolo (**instrumento2/16**)

Na mesma direção do que discutimos em relação à concepção operacional representada pelo protocolo **instrumento2/17**, observamos no protocolo **instrumento2/16** que, antes do aluno escrever que o significado do símbolo “=”

corresponde à idéia de resultado, ele reescreve a expressão 22 = 14 + 8 modificando-a para 14 + 8 = 22.

Admitimos que estes dados não sejam suficientes para fundamentar a afirmação de que alunos do 3º ano do Ensino Médio não aceitam igualdades nas quais não existam sinais de operações antes do sinal de igualdade. Contudo, permitem refletir sobre a possibilidade de que exista certa tendência, não em rejeitar igualdades sem sinais de operações antes do "=", mas ao menos, preferir ou considerar mais adequadas, igualdades nas quais encontrem um ou mais sinais de operações antes do sinal de igualdade.

Por último, demonstramos os protocolos que exemplificam as respostas dos alunos que correspondem a uma concepção relacional nome-símbolo, no contexto das igualdades aritméticas na forma c = a + b.



a) 22 = 14 + 8

1) Como você explica essa expressão? Essa expressão significa vários números.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? Esse símbolo tem como objetivo separar os números

Quadro 29 – Protocolo (**instrumento2/39**)

Como podemos observar, no protocolo **instrumento2/39** a expressão 22 = 14 + 8 não é reconhecida como uma igualdade. Também não encontramos nenhum elemento, que faça alusão a qualquer concepções que não seja a que definimos como símbolo separador.

4.2.3 Igualdades aritméticas: cruzamento dos resultados nos instrumentos 1 e 2

Para investigarmos a concepção dos alunos sobre o sinal de igualdade no contexto das igualdades aritméticas utilizamos dois itens, um no instrumento 1 e um no instrumento 2, com as respectivas expressões 14 + 8 = 22 e 22 = 14 + 8. Na análise comparativa dos resultados obtidos em relação a estas duas igualdades aritméticas, verificamos, em ambas, as mesmas concepções, isto é, a operacional, a igualdade relacional, a relacional nome-símbolo e a símbolo separador. Conseguimos identificar certa diferença nos percentuais destas concepções em função da forma (operação = resultado) (e resultado = operação). A maior diferença em função da forma da expressão, assim como na análise das operações aritméticas, foi referente aos resultados obtidos na categoria concepção operacional.

O percentual de respostas referentes à igualdade aritmética 14 + 8 = 22 (item **a** do instrumento 1) categorizado como concepção operacional foi de 51,0% enquanto que para a igualdade aritmética 22 = 14 + 8 (item **a** do instrumento 2) este percentual foi de 25,2%.

Em linhas gerais, os dados fornecem evidências de que o sinal de igualdade é mais compreendido como símbolo operador, no contexto das igualdades aritméticas, quando as expressões correspondem à forma (operação = resultado). Por outro lado, o percentual de respostas categorizadas como concepção igualdade relacional, em relação ao item **a** do instrumento 1, foi de aproximadamente 16%, enquanto que em relação ao item **a** do instrumento 2, foi de 34%. Podemos conjeturar que as igualdades na forma (resultado = operação) foram mais favoráveis a uma compreensão do "=" como símbolo relacional, do que as igualdades na forma (operação = resultado). Quanto às concepções relacional nome-símbolo e símbolo separador, os resultados demonstraram que quase não houve diferença em razão da forma da expressão (14 + 8 = 22 ou 22 = 14 + 8).

Por último, observamos ainda que o percentual de alunos que não responderam e que escreveram respostas não identificadas foi de 0% e 1,0% no item **a** do instrumento 1, e 1,0% e 5,8% no item **a** do instrumento 2. Dessa maneira, podemos pensar sobre a possibilidade de que estes alunos tiveram mais dificuldades em escrever sobre o significado do símbolo "=" em igualdade na forma (resultado = operação), do que em igualdades na forma (operação = igualdade). Uma provável razão para este fato é que igualdade como 22 = 14 + 8 são bem menos comuns no ensino de Matemática do que igualdades como 14 + 8 = 22.

4.2.4 Síntese dos resultados: igualdades aritméticas

O que vamos discutir neste tópico, concerne a uma síntese dos dados obtidos nos instrumentos 1 e 2, em relação ao contexto das igualdades aritméticas. Nesta síntese, não trataremos de questões como, há ou não diferenças nos resultados em razão da estrutura da expressão? Portanto, nossa questão aqui é analisar os resultados no que diz respeito ao contexto das igualdades aritméticas.

Concepções	**%**
Operacional	38,1%
Relacional nome-símbolo	30,7%
Igualdade relacional	24,9%
Símbolo separador	2,4%
Operacional sintático	0%
Equivalência em igualdade condicional	0%
Funcional	0%
Não identificada	3,4%
Não respondeu	0,5%
Total	100%

Tabela 07 – concepções no contexto das igualdades aritméticas

A tabela 07 apresenta os percentuais referentes às concepções operacional, relacional nome-símbolo, equivalência em igualdade condicional, funcional e igualdade relacional, definidas a priori e às concepções símbolo separador e operador sintático, definidas a posteriori. Também demonstra os resultados referentes às não respondidas e não identificadas.

No contexto das igualdades aritméticas foram identificadas quatro concepções: a operacional, a relacional nome-símbolo, a igualdade relacional e a símbolo separador. Os maiores percentuais, assim como no contexto das operações aritméticas, corresponderam às concepções operacional e relacional nome-símbolo, embora que, em menores proporções. Por outro lado, se apenas 1,0% das respostas referentes ao contexto das operações aritméticas foram respectivas à concepção igualdade relacional, no contexto das igualdades aritméticas, este percentual foi de aproximadamente 25%.

De acordo com a discussão que realizamos em nosso quadro teórico, o significado do símbolo “=” em uma igualdade aritmética corresponde a uma relação de igualdade, sugerindo uma comparação entre os dois membros de uma igualdade, de maneira que o que está no lado direito do “=” é igual, idêntico ou equivalente ao que está no lado esquerdo. Nesse sentido, uma concepção adequada em relação ao significado do símbolo “=” nas igualdades aritméticas, seria a concepção que denominamos de igualdade relacional. No entanto, apenas um quarto dos alunos interpretou este significado do símbolo “=”, demonstrando assim, a concepção igualdade relacional.

Podemos analisar que, a concepção relacional nome-símbolo não compreende características do símbolo “=” em um contexto particular. Esta concepção seria como uma concepção “genérica”, independente do contexto no qual o sinal de igualdade aparece. Assim, não é de se estranhar que 30,7% das respostas tenham sido categorizadas como concepção relacional nome-símbolo. Entretanto, a concepção operacional é baseada, principalmente, em aspectos referentes à utilização assimétrica do símbolo “=” no contexto das operações aritméticas.

Isto quer dizer que a ausência de um dos lados do sinal de igualdade, sugere, ao mesmo tempo, que ele seja encontrado; e o sinal de igualdade envolve, neste contexto, as idéias de cálculo (no caso, da operação de um lado para achar o outro lado), de mostrar que depois do “=” vem o resultado, a resposta. Por essa razão, esta concepção não seria adequada no contexto das igualdades aritméticas, por que não falta nenhum lado para ser encontrado.

Segundo Baroody e Ginsburg (1983), em um sentido estritamente matemático, “‘igual’ em 4 + 3 = 7 tem apenas um sentido relacional. Psicologicamente, existe outro sentido no qual o sinal de ‘igual’ não pode ser divorciado da visão operacional” (p. 200).

De fato, nossos resultados apontam que este aspecto “psicológico” em relação ao sinal de igualdade e a *visão operacional*, parecem não se limitarem aos alunos das séries iniciais, tendo sido identificado algo semelhante nas concepções dos alunos do 3º ano do Ensino Médio que participaram de nossa pesquisa.

4.3 Equações

O contexto das equações foi representado pelas expressões x + 9 = 15 e 15 = x + 9, correspondentes aos itens **b** do instrumento 1 e **b** do instrumento 2, respectivamente. Uma equação é comumente definida como uma igualdade condicional. Na resolução de uma equação, a utilização da idéia de equivalência é imprescindível, principalmente no que diz respeito à manipulação de incógnitas. Nesse sentido, ao elaborarmos os instrumentos de investigação, consideramos que o significado do símbolo "=" em uma equação correspondia a uma equivalência em igualdade condicional.

4.3.1 Item b do instrumento 1: "x + 9 = 15"

Na análise do item **b** do instrumento 1, identificamos seis concepções dos alunos sobre o sinal de igualdade. São elas: operacional, igualdade relacional, equivalência em igualdade condicional, operacional sintática, relacional nome-símbolo e símbolo separador.

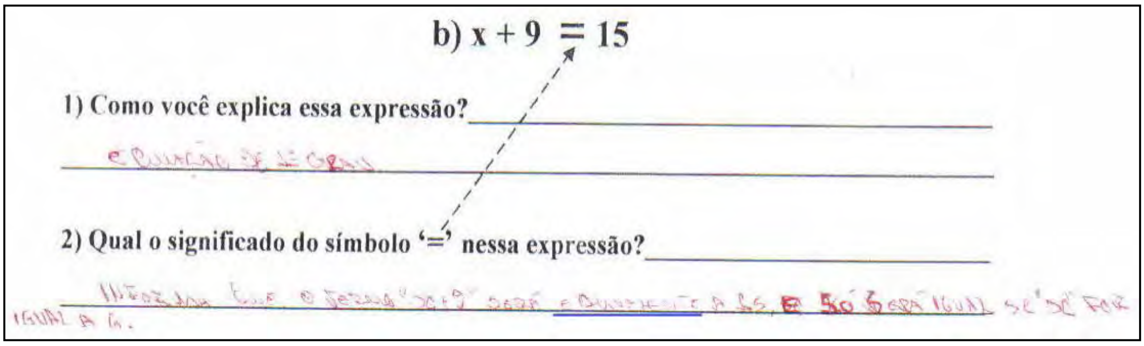
Dando continuação, apresentamos, logo em seguida, a tabela 08, que mostra os resultados correspondentes a cada concepção identificada na análise das respostas dos alunos. Além disso, também apresenta os percentuais referentes às respostas não identificadas e os percentuais correspondentes às respostas em branco.

Expressão / Concepções	Equação x + 9 = 15
Operacional	30,4%
Relacional nome-símbolo	29,4%
Operacional sintático	20,6%
Igualdade relacional	5,9%
Equivalência em igualdade condicional	2,0%
Símbolo separador	2,0%
Não identificada	8,7%
Não respondeu	1,0%
Total	100%

Tabela 08 – Equação (Instrumento 1)

A discussão dos resultados de cada concepção será realizada na seguinte ordem: concepção equivalência em igualdade condicional, concepção símbolo separador, concepção igualdade relacional, concepção relacional nome-símbolo, concepção operacional e concepção operacional sintático. Em nossa revisão da literatura, não encontramos referências sobre a concepção operacional sintático. Esta denominação, por sua vez, foi elaborada a partir da idéia de *resultado*, por isso o termo operacional, e de regras sintáticas, comumente presentes no estudo dos contextos algébricos e, por isso, o termo sintático. Em razão de, a concepção operacional sintático fazer referência a uma idéia que fundamenta outra concepção, no caso a operacional, decidimos abordar os resultados na ordem supracitada, para que fosse possível discutir por último os resultados concernentes às concepções operacional e operacional sintática e, assim, esclarecermos e distinguirmos uma concepção da outra.

O percentual de alunos que escreveu respostas categorizadas como não identificadas foi de 8,7% e o de alunos que não responderam foi de 1,0%. Em relação aos resultados das concepções identificadas, iniciamos com os referentes à concepção equivalência em igualdade condicional. Assim, como podemos observar na tabela 08, apenas 2% das respostas dos alunos foi categorizada como concepção equivalência em igualdade condicional, conforme ilustramos nos protocolos abaixo.


b) x + 9 = 15

1) Como você explica essa expressão?

EQUAÇÃO DE 1º GRAU

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão?

INFORMA QUE A FORMA "X+9" SERÁ EQUIVALENTE A 15, E SÓ SERÁ IGUAL SE "X" FOR IGUAL A 6.

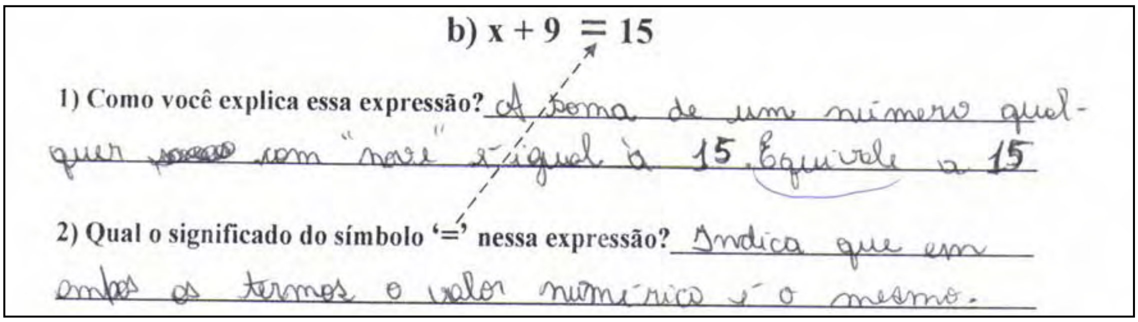
Quadro 30 – Protocolo (**instrumento1/82**)

No protocolo **instrumento1/82**, o aluno reconhece a expressão x + 9 = 15 como uma equação de 1º grau e, no que diz respeito ao significado do sinal de igualdade, ele escreveu: “informa que a forma “x + 9” será equivalente a 15, e só será igual se “x” for igual a 6”. Nas referências que analisamos em nossa revisão da literatura, a resposta deste aluno seria comumente categorizada da mesma maneira daquelas categorizadas como concepção igualdade relacional.

Na verdade, a maioria dos estudos que abordaram a relação entre os significados do sinal de igualdade e a compreensão destes significados pelos alunos reconhece, principalmente, duas concepções básicas: uma operacional e outra relacional, entendida de maneira ampla, incluindo o conceito de equivalência (e.g. BEHR, ERLWANGER e NICHOLS, 1976; 1980; KIERAN, 1981; MCNEIL e ALIBALI, 2005; KNUTH *et al.* 2006; CAVALCANTI e CÂMARA DOS SANTOS, 2007b). Estas duas concepções também são muito utilizadas para discutir aspectos de ruptura entre Aritmética e Álgebra, sendo comum considerar a concepção operacional ligada ao pensamento aritmético e a concepção relacional ao pensamento algébrico.

Na presente análise, nosso objetivo não é desvincular o conceito de equivalência da concepção igualdade relacional como se fossem duas coisas incompatíveis mas, por outro lado, consideramos a concepção equivalência em igualdade condicional um tipo particular da concepção igualdade relacional, com uma especificidade correspondente à uma vinculação direta ao conceito de equivalência nos contextos algébricos.

Nessa direção, tentamos realizar uma distinção entre respostas, como a ilustrada no protocolo **instrumento1/82**, na qual o aluno explicita uma concepção do sinal de igualdade intrinsecamente articulada com o conceito de equivalência no contexto algébrico, e respostas categorizadas como igualdade relacional, no sentido apenas de comparação entre os dois membros de uma igualdade. O próximo protocolo também demonstra a concepção equivalência em igualdade condicional.


b) x + 9 = 15

1) Como você explica essa expressão? A soma de um número qualquer com "nove" é igual à 15. Equivale a 15

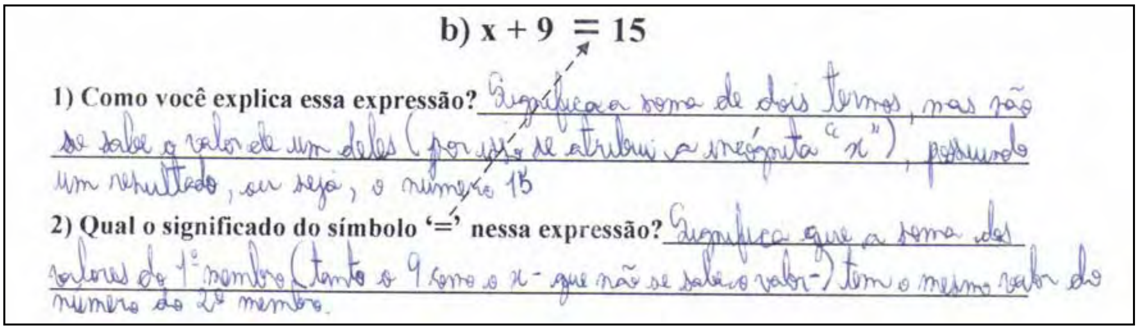
2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? Indica que em ambos os termos o valor numérico é o mesmo.

Quadro 31 – Protocolo (**instrumento1/74**)

Na resposta do aluno, ao explicar a expressão x + 9 = 15 no protocolo **instrumento1/74**, evidenciamos que quando ele se refere ao símbolo “=”, utiliza os termos “é igual” e “equivale”. Quanto ao significado do sinal de igualdade, ele escreve que indica o mesmo valor numérico em ambos os termos. Analisando esta resposta e levando em conta o que discutimos sobre a distinção das concepções igualdade relacional e equivalência em igualdade condicional, ponderamos que a concepção deste aluno poderia ter sido identificada como uma concepção igualdade relacional, pois faz uma comparação entre os dois termos da igualdade no sentido de que representam o mesmo valor numérico.

Entretanto, por ele relacionar o “=” aos termos “é igual” e “equivale”, entendemos que este aluno está demonstrando a concepção que definimos, a priori, de equivalência em igualdade condicional, pois vincula a idéia relacional na direção de comparação entre os lados do “=” com uma idéia referente, especificamente, ao conceito de equivalência.

As respostas categorizadas como concepção igualdade relacional, por sua vez, corresponderam ao percentual de 5,9%. Com os protocolos que apresentaremos em seguida, esperamos ilustrar melhor a diferença entre as respostas representadas nos protocolos **instrumento1/82** e **instrumento1/74** e categorizadas como concepção equivalência em igualdade condicional, e as respostas categorizadas como concepção igualdade relacional.


b) x + 9 = 15

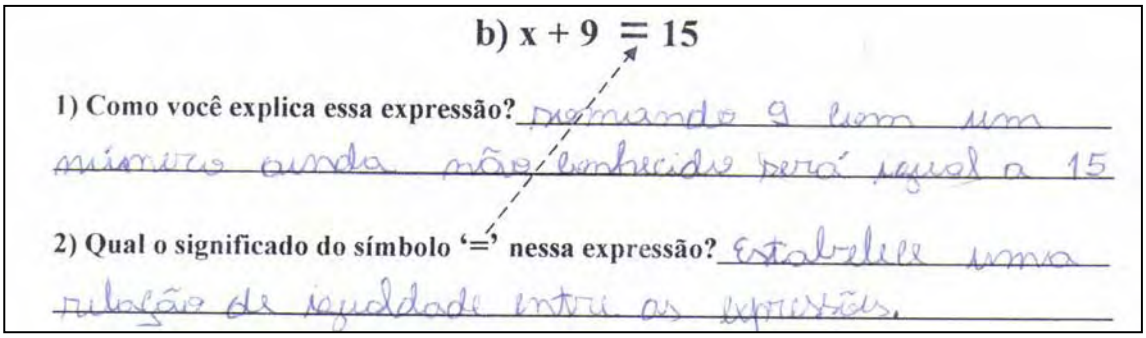
1) Como você explica essa expressão? Significa a soma de dois termos, mas não se sabe o valor de um deles (por isso se atribui a incógnita “x”), possuindo um resultado, ou seja, o número 15

2) Qual o significado do símbolo ‘=’ nessa expressão? Significa que a soma dos valores do 1º membro (tanto o 9 como o x - que não se sabe o valor -) tem o mesmo valor do número do 2º membro.

Quadro 32 – Protocolo (**instrumento1/67**)

Como podemos ver no protocolo **instrumento1/67**, o aluno considera a expressão x + 9 = 15 como uma soma de dois termos que tem um resultado. Contudo, quando ele vai falar sobre o significado do sinal de igualdade, nesta expressão, considera que o “=’ indica que a soma, que está no 1º membro, tem o mesmo valor do número que se encontra no 2º membro da igualdade. Entendemos que, mesmo que este aluno tenha utilizado o termo resultado em suas respostas, não está, necessariamente, compreendendo o “=” como um símbolo operacional.

Na verdade, quando o aluno escreve sobre o significado deste símbolo na expressão x + 9 = 15, podemos observar que ele considera que o “=” faz com que x + 9 tenha o mesmo valor de 15, e não que o resultado de x + 9 dá 15. Por esta razão, classificamos esta resposta como concepção igualdade relacional. Lembramos assim que uma das idéias fundamentais desta concepção é a compreensão do “=” como símbolo de uma relação de igualdade entre dois membros de uma igualdade, e não como símbolo para resolver uma operação.



b) x + 9 = 15

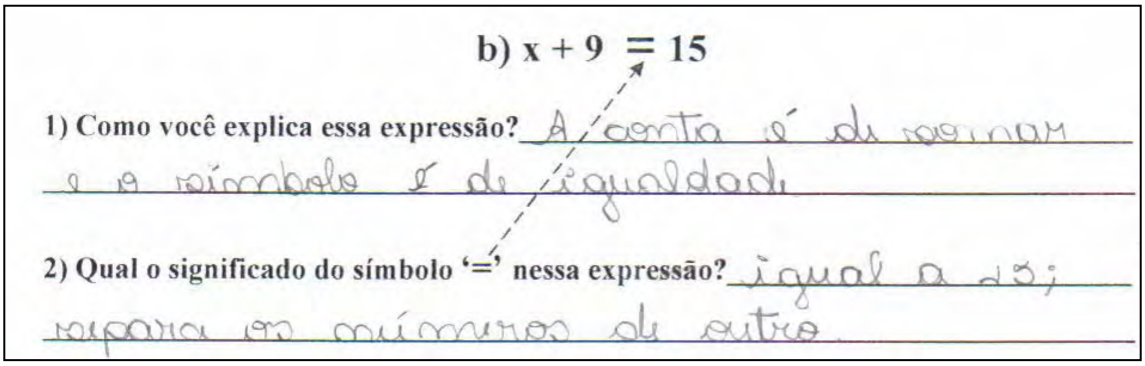
1) Como você explica essa expressão? Somando 9 com um número ainda não conhecido será igual a 15

2) Qual o significado do símbolo ‘=’ nessa expressão? Estabelece uma relação de igualdade entre as expressões.

Quadro 33– Protocolo (**instrumento1/98**)

No protocolo **instrumento1/98**, o aluno considera o “=” como um símbolo que estabelece uma relação de igualdade entre as expressões, no caso, x + 9 e 15. Compreendemos assim, que este aluno está tendo uma concepção igualdade relacional. Como vemos, neste protocolo, não há uma vinculação direta ao conceito de equivalência, enquanto que na concepção equivalência em igualdade condicional, essa relação de igualdade entre os membros da igualdade deve ser, necessariamente, em termos de equivalência.

A concepção símbolo separador foi identificada em 2,0% das respostas dos alunos. Os protocolos **instrumentos1/60** e **instrumento1/69,** a seguir, demonstram que, os alunos mobilizam idéias associadas a diferentes concepções. Contudo, entre estas idéias, parece destacar-se a de que o significado do símbolo “=” corresponde ao ato de *separar os números*.



b) x + 9 = 15

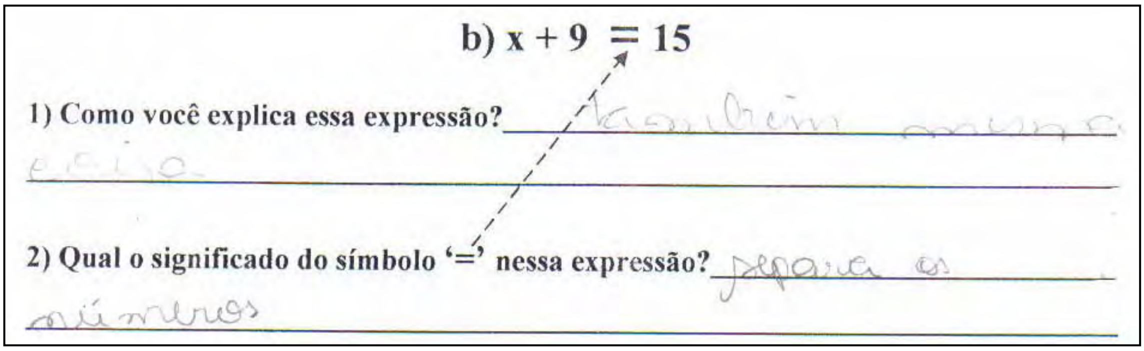
1) Como você explica essa expressão? A conta é de somar e o símbolo é de igualdade

2) Qual o significado do símbolo ‘=’ nessa expressão? igual a 15; separa os números do outro

Quadro 34 – Protocolo (**instrumento1/60**)

Como podemos observar no protocolo acima, o aluno não reconheceu a expressão x + 9 = 15 como uma equação, mas como uma conta de somar. Ainda, ele destaca que o símbolo “=” é de igualdade. Em relação ao significado do símbolo “=” nesta expressão, o aluno dá indícios de que está reconhecendo, ao mesmo tempo, a idéia de nome do símbolo, correspondente à concepção relacional nome-símbolo, e a de separar, correspondente à concepção símbolo separador.

No entanto, considerando que a idéia de separar é bem mais específica do que a de nome do símbolo, entendemos que mesmo utilizando a idéia nome do símbolo, o aluno compreende o significado do “=” em termos de separar números.



b) x + 9 = 15

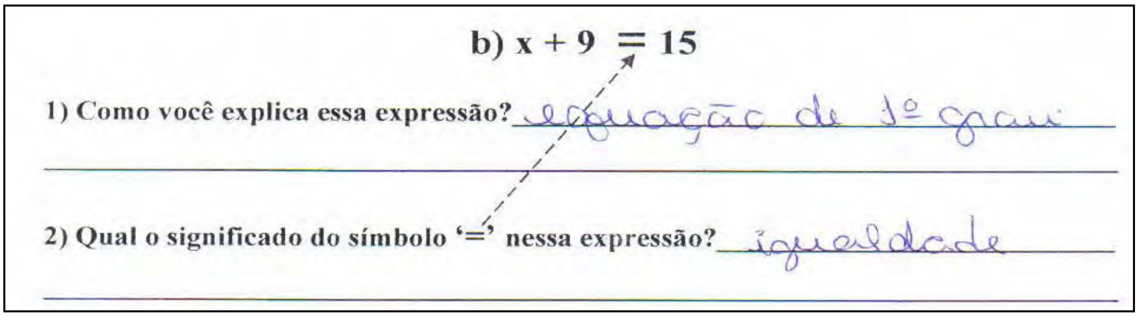
1) Como você explica essa expressão? também somar essa

2) Qual o significado do símbolo ‘=’ nessa expressão? separa os números

Quadro 35 – Protocolo (**instrumento1/69)**

A explicação do aluno referente à x + 9 = 15 remete à mesma resposta que este mesmo aluno escreveu no item anterior, correspondente à igualdade 14 + 8 = 22, onde escreveu “são iguais”. De qualquer forma, podemos dizer que ele não reconhece a expressão x + 9 = 15 como uma equação. Quanto ao significado do símbolo “=”, reconhecemos apenas a idéia de separar os números, que consideramos como concepção símbolo separador.

A concepção relacional nome-símbolo foi identificada em aproximadamente 29% das respostas dos alunos. Achamos desnecessário muitos comentários, pois entendemos que a idéia de relação entre o símbolo “=” e o nome igualdade, já ficou bem esclarecida.


b) x + 9 = 15

1) Como você explica essa expressão? equação de 1º grau

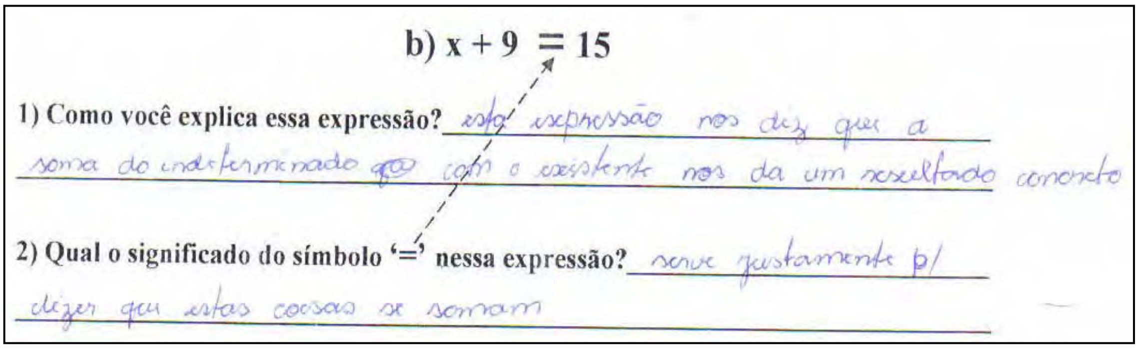
2) Qual o significado do símbolo ‘=’ nessa expressão? igualdade

Quadro 36 – Protocolo (**instrumento1/57)**

A resposta ilustrada no protocolo **instrumento1/57**, aponta que o aluno reconhece a expressão x + 9 = 15 como uma equação do 1º grau e o significado do “=”, nesta expressão, como igualdade. Entretanto, reconhecer o significado do símbolo “=” apenas como igualdade não garante que o aluno está relacionando este significado com as particularidades do contexto no qual ele aparece. Dessa maneira, a idéia subjacente corresponde ao que estamos discutindo como concepção relacional nome-símbolo.

Por último, discutiremos as concepções operacional e operacional sintático. Iniciando com a discussão dos resultados referentes à concepção operacional, esclarecemos que foi possível distinguir as idéias de mostrar o resultado ou a resposta, e sinal de fazer algo ou executar, por exemplo, a operação antes do “=”. Estas idéias, como já destacamos, correspondem a uma concepção operacional do sinal de igualdade. Além destas idéias, identificamos também, algumas respostas que apontam para a existência de expectativas referentes às idéias englobadas na concepção operacional.

Reconhecemos que não é nosso objetivo discutir a fundo os mecanismos que explicam o funcionamento destas expectativas, ressaltamos que elas podem também ser entendidas como regras de *contrato didático*. Nessa direção, resolvemos apresentar três protocolos sendo que, dois deles, demonstram, particularmente, estas regras de contrato.

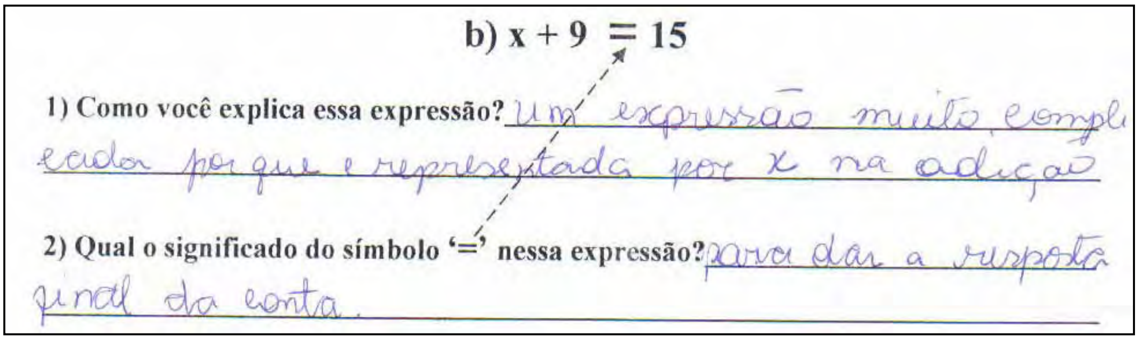

b) x + 9 = 15

1) Como você explica essa expressão? esta expressão nos diz que a soma do indeterminado que com o existente nos da um resultado concreto

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? serve justamente p/ dizer que estas coisas se somam

Quadro 37 – Protocolo (**instrumento1/38**)

Analisando a resposta ilustrada no protocolo **instrumento1/38**, observamos que o aluno não reconhece a expressão x + 9 = 15 como uma equação, mas sim como uma soma. Em relação ao significado do símbolo "=", ele não fala em resultado, mais destaca que este símbolo serve para "dizer que estas coisas se somam", sendo que estas coisas parecem corresponder à operação antes do sinal de igualdade. Na verdade, associamos esta resposta à idéia de sinal para fazer algo, no caso, somar o quem antes, ou para executar a soma antes do "=".

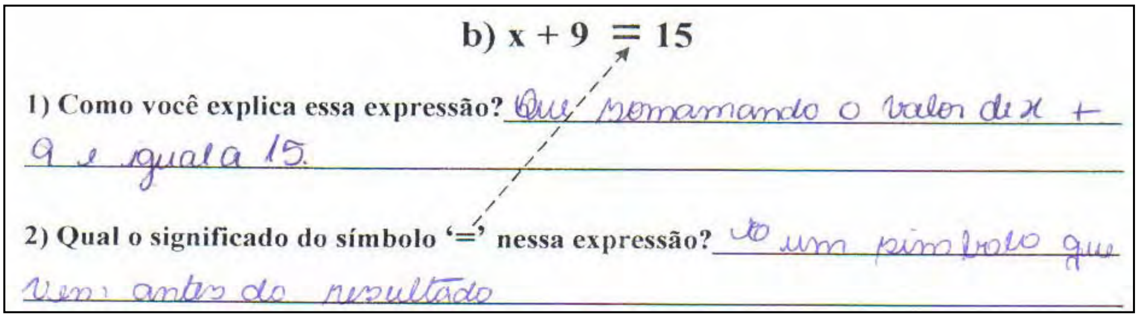

b) x + 9 = 15

1) Como você explica essa expressão? Um expressão muito complicado porque e representada por x na adição

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? para dar a resposta final da conta.

Quadro 38 – Protocolo (**instrumento1/13**)

A resposta do aluno representada no protocolo acima também não mostra evidências de que ele está reconhecendo a expressão x + 9 = 15 como uma equação. Já em relação ao significado do "=", ele considera a idéia de indicar a resposta e demonstra, ainda, que este resultado diz respeito ao final da conta. Analisando particularmente o que o aluno escreveu na segunda pergunta do item **b**, podemos dizer que para ele, a resposta, ou resultado, deve vir depois do símbolo "=" e que esta resposta representa o final da conta. Esta resposta do aluno exemplifica bem a concepção operacional do sinal de igualdade e uma possível regra de contrato didático representada pela parte na qual escreve sobre o "final da conta". Acrescentamos que esta regra pode estar ligada à utilização do símbolo "=" em operações aritméticas tais como, 3 + 4 =. Quando os alunos resolvem estas operações, geralmente esperam que depois do "=" venha a resposta e que esta resposta indica o final da conta.


b) x + 9 = 15

1) Como você explica essa expressão? Que somamando o valor de x + 9 e iguala 15.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? é um simbolo que vem antes do resultado

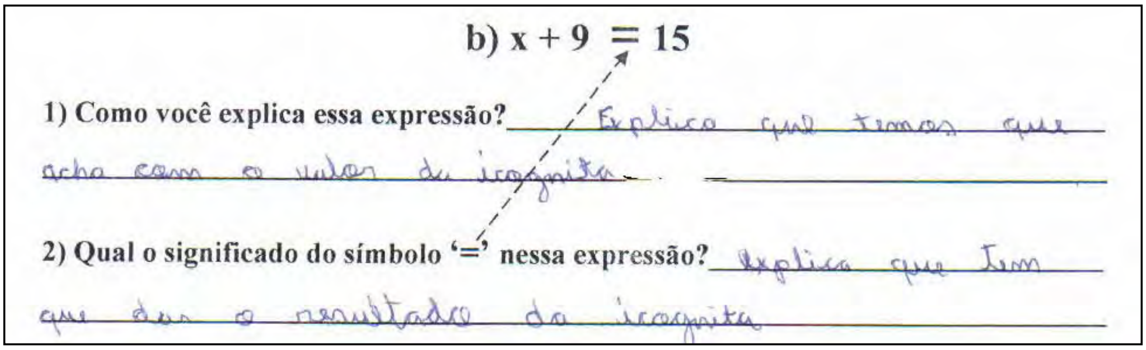
Quadro 39 – Protocolo (**instrumento1/55**)

No protocolo **instrumento1/55**, podemos ver que este aluno foi mais um dos que não reconheceram a expressão x + 9 = 15 como uma equação. A idéia que nos permitiu categorizar esta resposta como concepção operacional foi a de indicar o resultado. O outro ponto que particularmente chamou-nos a atenção, correspondeu ao fato do aluno destacar que este símbolo "vem antes" do resultado. A parte "vem antes" sugere uma possível regra de contrato didático associada à concepção operacional e, sobretudo, à maneira comumente utilizada de trabalhar-se nas aulas de Matemática, principalmente nos estudos aritméticos, com igualdades na forma (operação = resultado), ou seja, igualdades nas quais os "resultados" aparecem sempre depois do sinal de igualdade.

Questionamos neste sentido que, se o resultado, na expressão x + 9 = 15, está sendo representado pelo número 15 por ele estar após o "=", o que poderíamos dizer do número encontrado após um processo de resolução da equação x + 9 = 15 no qual se determina a condição de x para que esta equação seja uma igualdade? Isto remete ao fato de que a idéia de resultado, referente ao cálculo da operação que vem antes do "=" é especificamente de natureza aritmética.

Conforme Freudenthal (1983), numa expressão como 5 + __ = 12 o resultado correspondente não seria o 12, mas sim 7. Entendemos que este exemplo pode ser estendido para a equação x + 9 = 15. Consecutivamente, a natureza algébrica do significado do "=" como, enquanto idéia de resultado numa equação como x + 9 = 15, corresponde ao valor de x, e não ao valor da operação x + 9.

É nesta direção que realizamos a distinção principal entre a concepção operacional e a concepção operacional sintático. Portanto, esclarecemos que a idéia de resultado associada ao "=" na equação x + 9 = 15, numa concepção operacional é de natureza aritmética e refere-se ao resultado de "x + 9", isto é, à operação antes do "=". Já a idéia de resultado associada ao símbolo "=" na mesma equação, numa concepção operacional sintático, refere-se ao resultado ou valor de "x". Dados estes esclarecimentos, apresentamos, em seguida, os protocolos que exemplificam a concepção operacional sintático.

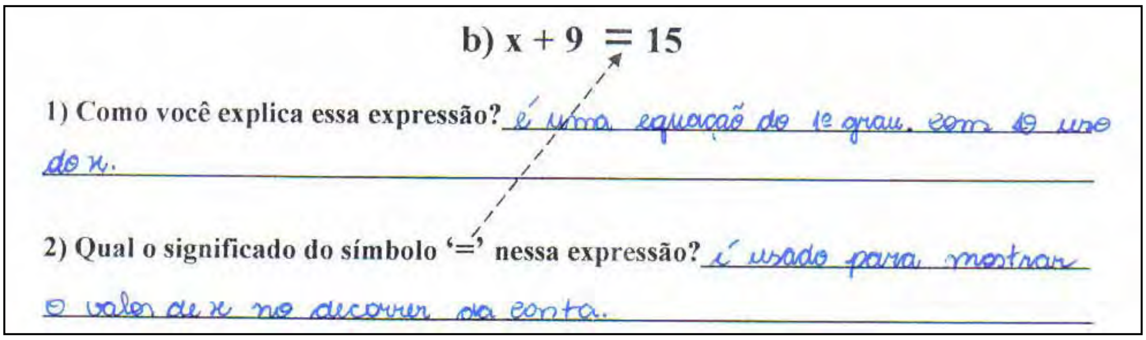

b) x + 9 = 15

1) Como você explica essa expressão? Explica que temos que acha com o valor da incógnita

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? Explica que tem que dar o resultado da incógnita

Quadro 40 – Protocolo (**instrumento1/1**)

Na análise dos resultados referentes à equação x + 9 = 15, temos discutido que a idéia de resultado correspondente à concepção operacional do sinal de igualdade, diz respeito ao resultado de x + 9. Não obstante, esclarecemos que no protocolo acima, o aluno escreve que o significado do "=" concerne ao "resultado da incógnita", no caso x, e não ao resultado de x + 9.

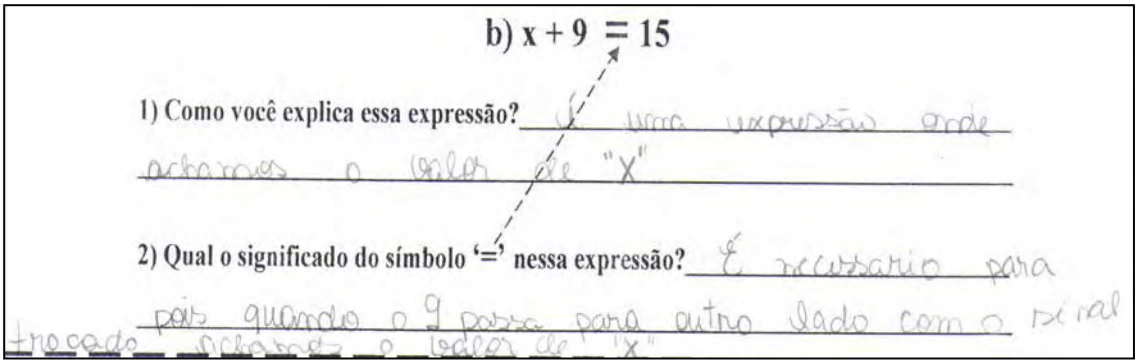

b) x + 9 = 15

1) Como você explica essa expressão? é uma equação do 1º grau, com o uso do x.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? é usado para mostrar o valor de x no decorrer da conta.

Quadro 41 – Protocolo (**instrumento1/87**)

Enquanto que no protocolo **instrumento1/1** a expressão x + 9 = 15 não é reconhecida pelo aluno como uma equação, no protocolo **instrumento1/87** ela é, e o aluno ainda realça a presença do x. Em relação ao significado do "=" nesta equação, o aluno escreve que ele é usado para "mostrar o valor de x no decorrer da conta".



b) x + 9 = 15

1) Como você explica essa expressão? É uma expressão onde achamos o valor de "x"

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? É necessario para pois quando o 9 passa para outro lado com o sinal trocado achamos o valor de "x"

Quadro 42 – Protocolo (**instrumento1/71**)

Por último, escolhemos o protocolo **instrumento1/71** por que o aluno menciona aspectos relativos às técnicas sintáticas comumente utilizadas na resolução de equações do 1º grau. Em outras palavras, o aluno associa o significado do símbolo "=" à manipulação de termos entre os membros da equação, na qual o produto final é a assinalação de um valor numérico à incógnita x. Dessa maneira, justifica-se também o nome de operacional sintático, pois operacional refere-se à idéia de resultado, e sintático refere-se à vinculação desta idéia aos aspectos sintáticos que podem surgir na resolução das equações.

4.3.2 Item b do instrumento 2: "15 = x + 9"

O item **b** do instrumento 2 corresponde ao contexto algébrico das equações e foi representado pela expressão 15 = x + 9. Comparando com a expressão utilizada no instrumento 1 para representar o contexto das equações, podemos apontar algumas diferenças. Entre elas, ressaltamos que a equação 15 = x + 9 pode ser entendida como uma inversão da equação x + 9 = 15; a incógnita nesta última equação está no primeiro membro enquanto que na equação 15 = x + 9, está no segundo membro e, em termos de operações, na equação do instrumento 1, o sinal de operação precede o símbolo "=" e na equação do instrumento 2, o sinal de operação está após o "=".

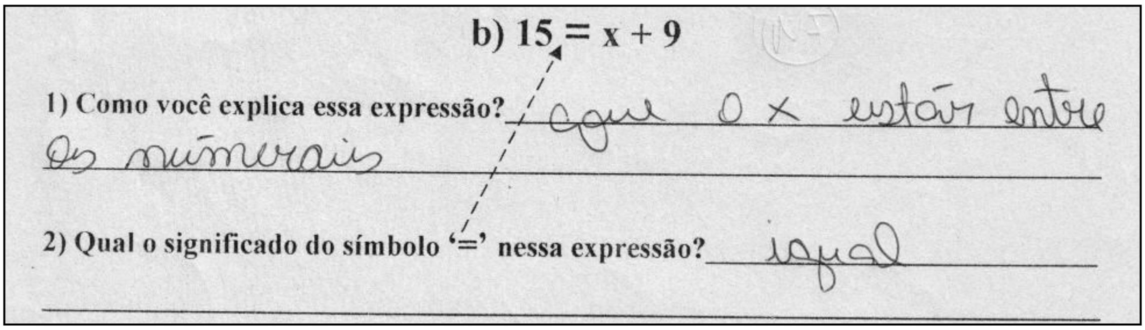
Na análise do item **b** do instrumento 1 identificamos cinco concepções do sinal de igualdade, a operacional, a igualdade relacional, a operacional sintático, a equivalência em igualdade condicional e a relacional nome-símbolo. Na categorização dos dados referentes ao item **b** do instrumento 2, por sua vez, foram identificadas quatro concepções. São elas: a operacional, a igualdade relacional, a operacional sintática e a relacional nome-símbolo. Em suma, em comparação às concepções identificadas no item **b** do instrumento 1, apenas não identificamos a concepção equivalência em igualdade condicional, ou seja, a principal concepção que esperávamos identificar neste contexto. Na tabela 10, a seguir, demonstramos a categorização das respostas dos alunos referentes ao item **b** do instrumento 2.

Expressão / Concepções	Equação 15 = x + 9
Relacional nome-símbolo	34,0%
Operacional sintático	17,5%
Símbolo separador	13,6%
Operacional	12,6%
Igualdade relacional	6,8%
Não identificada	12,6%
Não respondeu	2,9%
Total	100%

Tabela 09 – Equação (Instrumento 2)

Como as distinções concernentes às idéias que norteiam as concepções que achávamos necessárias já foram realizadas, discutiremos os resultados na ordem de maior percentual de categorização. Antes, disso ressaltamos que observamos, no que diz respeito às respostas não identificadas e as respostas em branco, percentuais de 12,6% e 2,9%, respectivamente.

Em seqüência, observamos que a maior parte das respostas dos alunos, isto é, um pouco mais de um terço das respostas, foi categorizada como concepção relacional nome-símbolo.

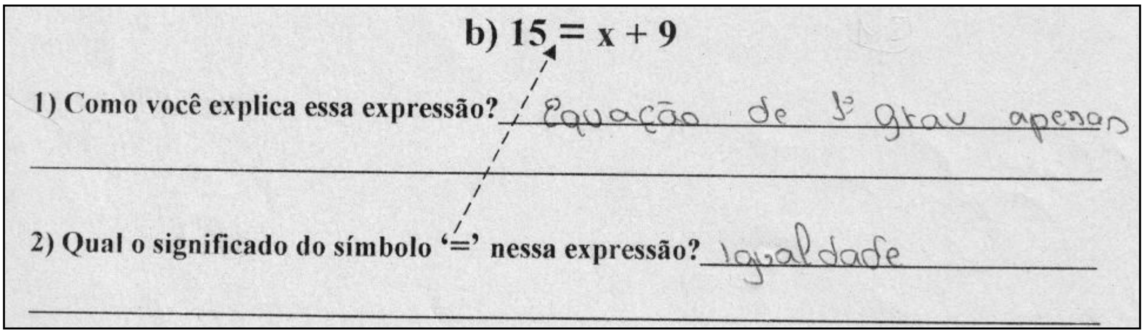

b) 15 = x + 9

1) Como você explica essa expressão? aque o x estár entre os numerais

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? igual

Quadro 43 – Protocolo (**instrumento2/22**)

No protocolo **instrumento2/22**, o aluno não reconhece 15 = x + 9 como uma equação. Já em relação ao significado do símbolo "=", nesta expressão, ele interpreta no sentido do que discutimos sobre a concepção relacional nome-símbolo.


b) 15 = x + 9

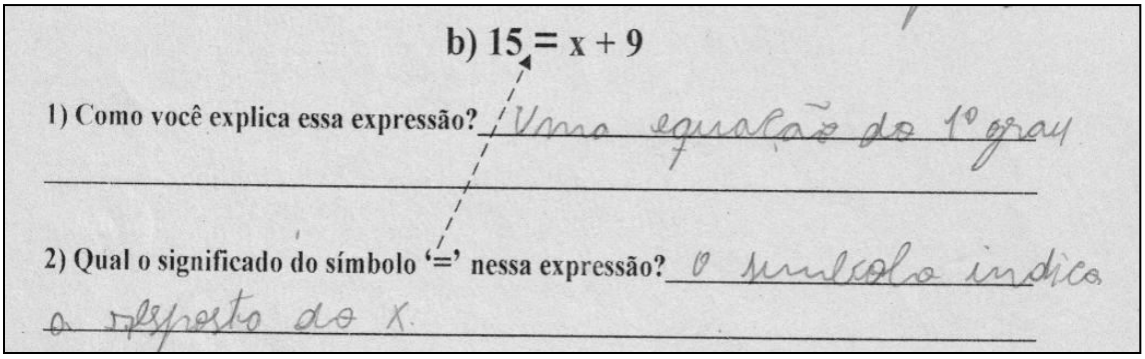
1) Como você explica essa expressão? Equação de 1º grau apenas

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? igualdade

Quadro 44 – Protocolo (**instrumento2/84**)

A resposta do aluno, exemplificada no protocolo acima, demonstra que ele reconheceu a expressão 15 = x + 9 como uma equação. Sobre o significado do símbolo "=" nesta expressão, o aluno apenas escreveu "igualdade". Tal resposta não permite analisar a relação entre o significado do sinal de igualdade e o contexto no qual está contido. Entendemos que esta reposta apenas garante a relação entre o símbolo e o seu nome, e por esse motivo, consideramos esta resposta como concepção relacional nome-símbolo.

A concepção operacional sintático obteve uma representatividade de aproximadamente 17,5% das respostas. Como já discutimos, nesta concepção, a idéia de resultado refere-se, especificamente ao resultado da incógnita e não ao resultado da operação, conforme podemos observar nos protocolos abaixo.

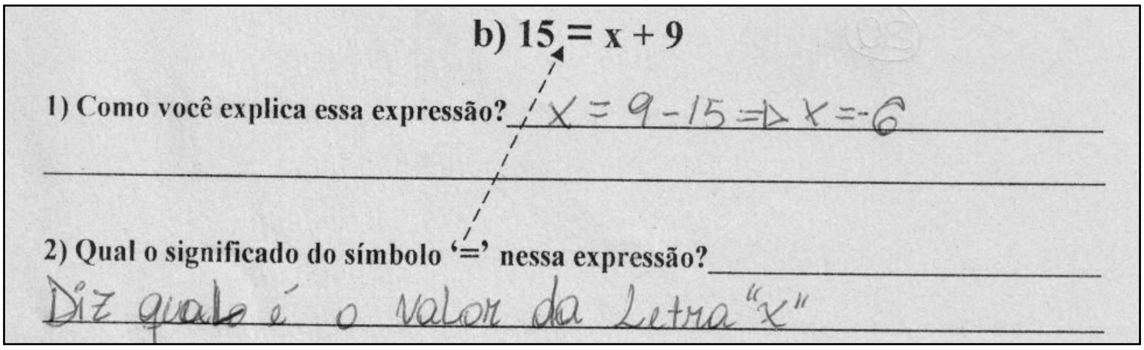

b) $15 = x + 9$

1) Como você explica essa expressão? Uma equação do 1º grau

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? O simbolo indica a resposta do x.

Quadro 45 – Protocolo (**instrumento2/28**)

Neste protocolo, em relação à primeira pergunta, o aluno reconhece 15 = x + 9 como uma equação do primeiro grau. Quanto ao significado do "=", ele escreve que "o símbolo indica a resposta de x". Muito claramente as respostas contidas no protocolo **instrumento2/28** exemplificam a concepção operacional sintático.


b) $15 = x + 9$

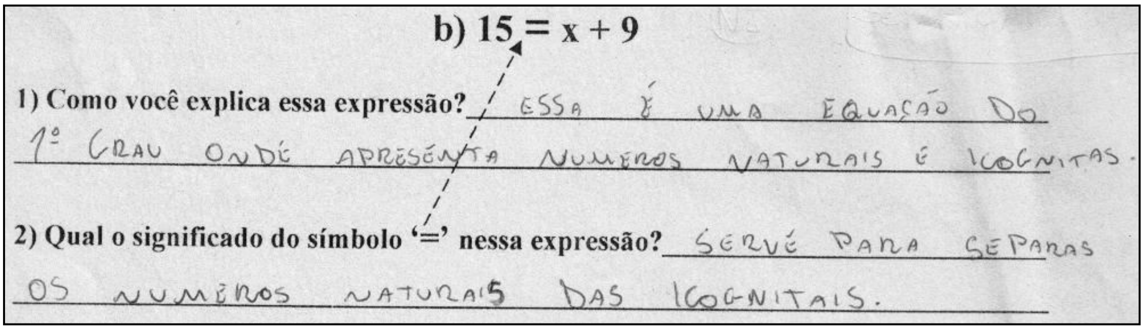
1) Como você explica essa expressão? $x = 9 - 15 \Rightarrow x = -6$

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? Diz quale é o valor da Letra "x"

Quadro 46 – Protocolo (**instrumento2/77**)

Já neste protocolo, o aluno não escreve a palavra equação para referir-se à expressão 15 = x + 9, mas por outro lado, ele parece tentar isolar o **x** utilizando a técnica de transposição de termos. O erro que o aluno comete confirma que o símbolo "=" não está sendo entendido em termos de equivalência, pois se **x** for igual a - 6, não há equivalência na expressão 15 = x + 9. Assim, fica evidente que este aluno esta compreendendo o significado do "=" como um operador sintático que indica o valor da incógnita. De maneira similar à resposta do aluno representada no protocolo **instrumento2/28**, o aluno no protocolo **instrumento2/77**, refere-se ao significado do símbolo "=" como algo que indica qual é o "valor da letra "x"". Estes dois exemplos ilustram bem as idéias englobadas na concepção operacional sintático.

A categoria referente à concepção símbolo separador obteve um percentual de 13,6%. Neste contexto das equações, a idéia referente à concepção símbolo separador tem um papel interessante, que também diz respeito aos aspectos sintáticos da resolução de equações. Contudo, diferentemente da idéia referente à concepção operacional sintático, que envolve o resultado da incógnita, a idéia referente à concepção símbolo separador corresponde à separação entre números e incógnitas. Este aspecto é ilustrado no protocolo **instrumento2/83**, logo em seguida.

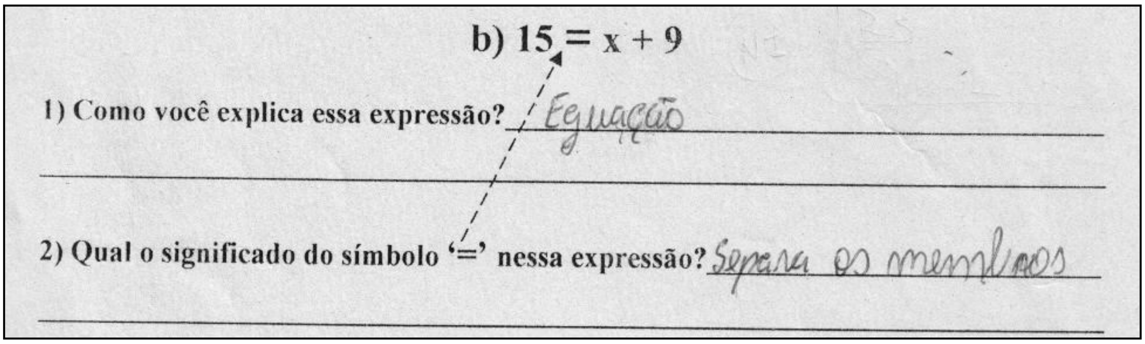

b) 15 = x + 9

1) Como você explica essa expressão? ESSA É UMA EQUAÇÃO DO 1º GRAU ONDÉ APRESÉNTA NUMEROS NATURAIS É ICOGNITAS.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? SERVÉ PARA SEPARAS OS NUMÉROS NATURAIS DAS ICOGNITAIS.

Quadro 47 – Protocolo (**instrumento2/83**)

No protocolo **instrumento2/83**, o aluno reconhece a expressão 15 = x + 9 como uma equação do 1º grau na qual aparecem números naturais e incógnitas. Neste contexto, o significado do símbolo "=' é compreendido pelo aluno como referente ao ato de separar os números das incógnitas.


b) 15 = x + 9

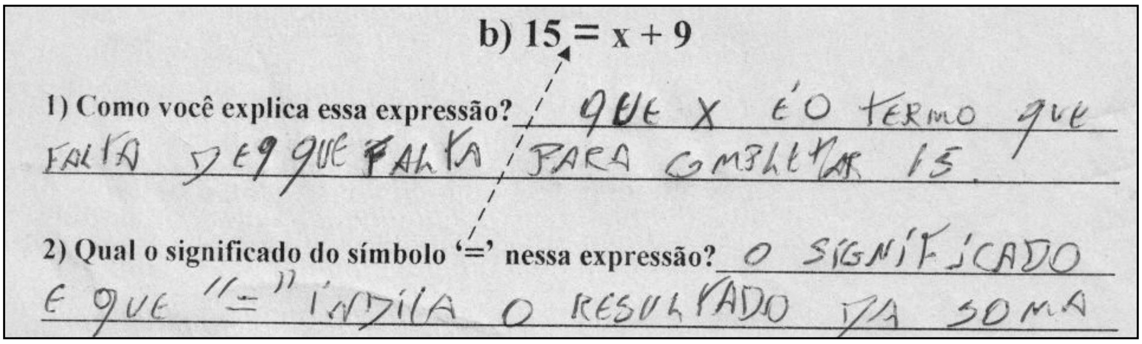
1) Como você explica essa expressão? Equação

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? Separa os membros

Quadro 48 – Protocolo (**instrumento2/71**)

Na resposta representada no protocolo **instrumento2/71**, o aluno reconhece 15 = x + 9 como uma equação, e interpreta o "=" como um símbolo que separa os membros desta equação. Provavelmente, esta resposta vai na mesma direção da resposta representada no protocolo anterior, pois é comum tratarmos que as incógnitas devem ficar primeiro membro e os números no segundo membro.

A concepção operacional, por sua vez, teve uma percentagem de 12,6% das respostas dos alunos. Diferentemente da concepção operacional sintático que se baseia na idéia correspondente ao resultado ou valor da incógnita, na concepção operacional, a idéia básica é que o "=" indica o resultado de uma operação de um dos lados da igualdade.

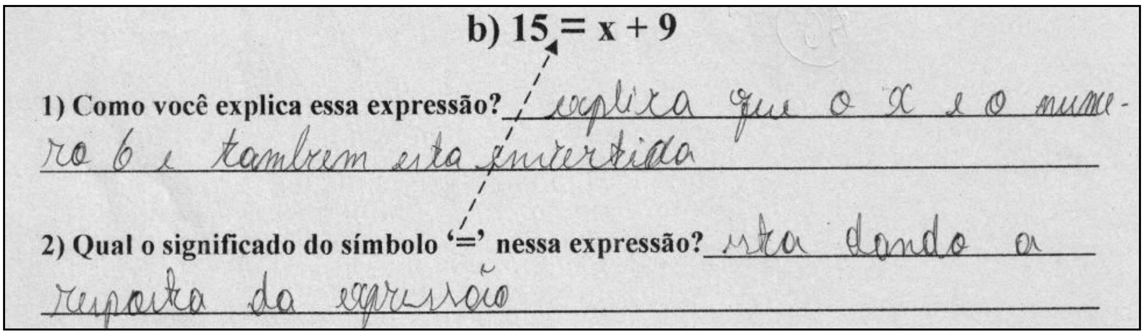

b) 15 = x + 9

1) Como você explica essa expressão? QUE X É O TERMO QUE FALTA DE 9 QUE FALTA PARA COMPLETAR 15.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? O SIGNIFICADO É QUE "=" INDICA O RESULTADO DA SOMA

Quadro 49 – Protocolo (**instrumento2/40**)

A resposta que o aluno escreveu acima dá a entender que, em relação à expressão 15 = x + 9, ele interpreta como, qual o número que falta a nove (ou que junto com nove) para completar 15? No que ser refere ao significado do "=", ele explicita que este símbolo "indica o resultado da soma".


b) 15 = x + 9

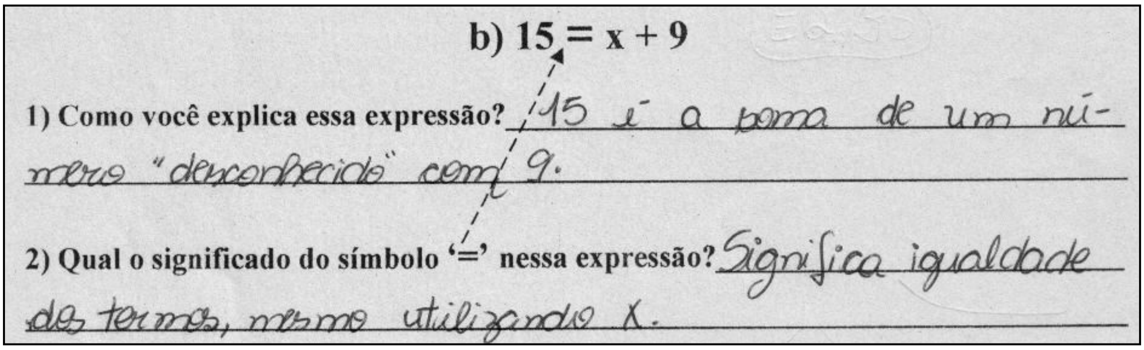
1) Como você explica essa expressão? explica que o x é o numero 6 e tambrem esta invertida

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? esta dando a reposta da expressão

Quadro 50 – Protocolo (**instrumento2/19**)

Já a resposta representada pelo protocolo **instrumento2/19** aponta que o aluno considera que a equação 15 = x + 9 está invertida. Esta consideração pode sugerir que este aluno tem dificuldade em aceitar a expressão com o número 15 do lado esquerdo e a operação x + 9 do lado direito. Como já mencionamos antes, na literatura encontramos que crianças jovens, com uma concepção operacional, têm dificuldades em aceitar expressões nas quais o símbolo "=" não é precedido por um sinal de operação.

Por último, a concepção igualdade relacional com 6,8%, foi a que apresentou o menor percentual de respostas. Lembramos que a idéia principal que norteia esta concepção é a relação de igualdade em termos de comparação dos lados esquerdo e direito do símbolo "=".


b) 15 = x + 9

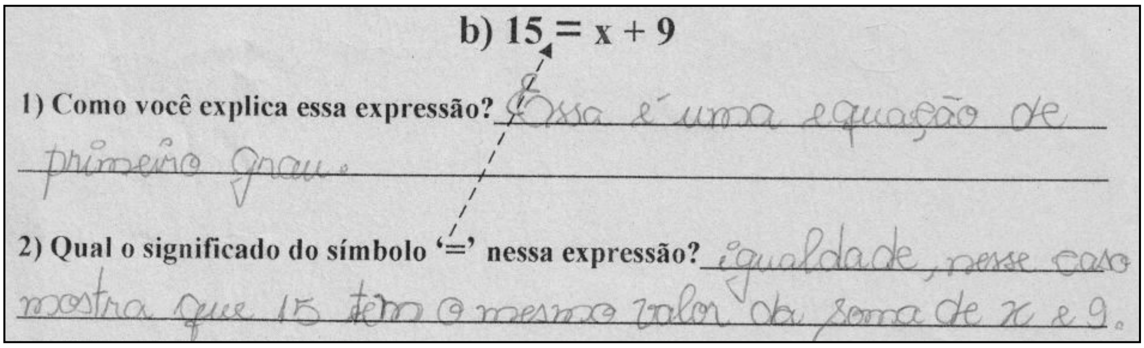
1) Como você explica essa expressão? 15 é a soma de um nú-mero "desconhecido" com 9.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? Significa igualdade dos termos, mesmo utilizando X.

Quadro 51 – Protocolo (**instrumento2/21**)

No protocolo **instrumento2/21**, observamos que o aluno parece não ter problemas em aceitar expressões nas quais a operação, ao invés de encontrar-se do lado esquerdo, encontra-se do lado direito, uma vez que ele, ao explicar a expressão 15 = x + 9, faz uma leitura na respectiva ordem, sem necessitar re-escrever para x + 9 = 15. Ao longo da análise, temos encontrado evidências de que os alunos com uma concepção operacional às vezes acabam re-escrevendo expressões do tipo a + b = c para c = a + b.

Em relação ao significado do sinal de igualdade, o aluno deixa claro que ele compara os lados esquerdo (15) e direito (x + 9) em termos de igualdade, mesmo que um deles tenha utilizado x, ou seja, mesmo sendo representados por símbolos diferentes, ambos os lados são iguais.



b) 15 = x + 9

1) Como você explica essa expressão? Essa é uma equação de primeiro grau.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? igualdade, nesse caso mostra que 15 tem o mesmo valor da soma de x e 9.

Quadro 52 – Protocolo (**instrumento2/85**)

Podemos ver que, no protocolo acima, o aluno reconhece 15 = x + 9 como uma equação do primeiro grau. Quanto ao significado do símbolo "=", nesta expressão, ele escreve "igualdade" e completa explicando que essa igualdade quer dizer que "15 tem o mesmo valor da soma de x e 9". Esta idéia "mesmo valor", como já discutimos, é compreendida no presente estudo como representação de uma compreensão do "=" como símbolo relacional e, portanto, correspondente à uma concepção igualdade relacional.

4.3.3 Equações: cruzamento dos resultados nos instrumentos 1 e 2

Para investigarmos as concepções dos alunos sobre o significado do sinal de igualdade no contexto das equações, utilizamos um item no instrumento 1, representado pela expressão x + 9 = 15, e um item no instrumento 2, representado pela expressão 15 = x + 9. O objetivo deste cruzamento dos resultados obtidos nos instrumentos 1 e 2 é verificar se as formas das equações (operação antes do "=" ou operação depois do "=") influenciaram as concepções dos alunos sobre o significado do sinal de igualdade.

A princípio, na análise do item referente à equação x + 9 = 15, identificamos seis concepções, a operacional, a igualdade relacional, a operacional sintático, a relacional nome-símbolo, a símbolo separador e a equivalência em igualdade condicional. Já na análise do item referente à equação 15 = x + 9, identificamos cinco concepções, as quais correspondem, a operacional, a igualdade relacional, a operacional sintático, a relacional nome-símbolo, a símbolo separador. Em outras palavras, tomando como base as concepções identificadas no item **b** do instrumento 1, apenas a concepção equivalência em igualdade condicional não foi identificada no item **b** do instrumento 2. Observamos também que o percentual de respostas não identificadas e de respostas em branco foi maior no item **b** do instrumento 2.

Prosseguindo, as duas concepções que obtiveram maiores percentuais no item **b** do instrumento 1 foram a concepção operacional com 30,4% e a relacional nome-símbolo com 29,4%. Já no item correspondente ao contexto das equações no instrumento 2, as duas concepções com maiores percentuais foram, a concepção relacional nome-símbolo com 34% e a concepção operacional sintático 17,5%. Contudo, a equação do instrumento 1 favoreceu mais a concepção operacional sintático, pois obteve um percentual de 20,6%, enquanto que a equação do instrumento 2 obteve um percentual, como já vimos, de 17,5%.

A concepção igualdade relacional quase não apresentou diferenças em razão da forma da expressão, pois os resultados foram 5,9% para a equação do instrumento 1 e 6,8% para a equação do instrumento 2. A concepção relacional nome-símbolo obteve o percentual de 29,4% na equação do instrumento 1 e 34,0% na equação do instrumento 2, sendo que esta diferença não entendemos como muito distante, para sugerir que equações do tipo $15 = x + 9$ influenciam mais esta concepção.

As maiores diferenças em razão da forma da equação, foram correspondentes às concepções operacional e símbolo separador. Em relação à equação do instrumento 1, a concepção operacional registrou um percentual de 30,4%. Já para a equação do instrumento 2, o percentual referente à concepção operacional foi 12,6%, ou seja, menos da metade. Dessa maneira, os dados apontam que há uma considerável tendência, no contexto das equações, na qual a concepção operacional é bem mais evidente em equações do tipo $x + 9 = 15$ do que em equações do tipo $15 = x + 9$. Continuando, os resultados demonstram que a concepção símbolo separador foi bem mais manifestada na equação do instrumento 2. Enquanto o percentual da equação do instrumento 1 foi de 2,0% na equação do instrumento 2 foi de 13,6%, isto é, quase sete vezes maior.

Por último, foi interessante verificar que a concepção equivalência em igualdade condicional, que definimos a priori como a que representaria melhor a relação entre o significado do símbolo “=” e o contexto das equações, quase não foi encontrada como concepções dos alunos que participaram da pesquisa. Encontramos na literatura diversos estudos (e.g. KIERAN, 1981; BRITO LIMA, 1996; NCTM, 2000; NORTON e COOPER, 2001) indicando a compreensão do símbolo "=" em termos de uma relação de equivalência como algo imprescindível para a aprendizagem em Álgebra e, particularmente, para a aprendizagem do conceito de equação. Nossa pesquisa demonstrou que mesmo aqueles alunos que já estudaram o conceito de equação não construíram uma concetualização adequada do símbolo "=" como um indicador de uma relação de equivalência.

4.3.4. Síntese dos resultados: equações

Abordaremos, neste momento, um síntese correspondente aos resultados gerais obtidos referentes ao contexto das equações, tanto no instrumento 1 quanto no 2. Os dados categorizados na tabela abaixo demonstram que foram identificadas, no contexto das equações, seis concepções sobre o significado do sinal de igualdade.

Concepções	**%**
Relacional nome-símbolo	31,7%
Operacional	21,5%
Operacional sintático	19,0%
Símbolo separador	7,8%
Igualdade relacional	6,3%
Equivalência em igualdade condicional	1,0%
Funcional	0%
Não identificada	10,7%
Não respondeu	2,0%
Total	100%

Tabela 10 – concepções no contexto das equações

De início podemos destacar que houve uma mudança de status nas concepções dos alunos sobre o significado do símbolo "=". No contexto algébrico das equações, percebemos que surgiram outras concepções, que não haviam sido identificadas nos contextos aritméticos das operações e das igualdades, tais como a concepção equivalência em igualdade condicional e a concepção operacional sintático. Além disso, também verificamos que a concepção que obteve maior percentual não foi a operacional, tal como havia acontecido nos dois contextos aritméticos.

O maior percentual foi o da concepção relacional nome-símbolo, com 31,7%, seguido do percentual de 21,5%, respectivo à concepção operacional. Em linhas gerais, destacamos a identificação da concepção operacional sintático, com um percentual de 19,0%, uma vez que esta concepção não foi descrita na literatura que fundamentou nosso quadro teórico, e que, por conseguinte, surgiu a posteriori, no âmbito das primeiras análises dos resultados obtidos na aplicação dos instrumentos de investigação. As concepções símbolo separador e igualdade relacional, que já discutimos nas sínteses dos resultados dos contextos operações e igualdades aritméticas, apresentaram, no contexto das equações, percentuais respectivos de 7,8% e 6,3%.

O outro aspecto que destacamos nesta síntese diz respeito ao percentual de apenas 1,0% referente à concepção equivalência em igualdade condicional que, definimos a priori, como adequada aos atributos do símbolo "=" correspondentes ao contexto das equações.

4.4 Funções

As funções podem ser definidas em termos de uma *dependência causal entre variáveis* (FREUDENTHAL, 1983; MEIRA, 1997). Comumente, o conceito de função afim é representado por $y = ax + b$, sendo x a variável independente e y a variável independente. Segundo Meira (ibid.), as funções apresentam propriedades dinâmicas correspondentes à *dependência entre variáveis*, no sentido de que as transformações aplicadas na variável independente provocam mudanças na variável dependente.

Dessa maneira, consideramos, neste trabalho, que o significado do símbolo "=" em uma função, não indica que nada deve ser preenchido, ou resolvido; não representa uma relação de igualdade, nem de equivalência em igualdade condicional, mas sim, refere-se aos aspectos dinâmicos correspondentes à dependência entre as variáveis dependente e independente. No instrumento 1, a expressão que representou o contexto das funções foi 2x + 8 = y, correspondente ao item **c**. No instrumento 2, a expressão foi y = 2x +8, também correspondente ao item **c**.

4.4.1 Item c do instrumento 1: “2x + 8 = y”

Tanto em nosso quadro teórico, quanto em nossa metodologia, discutimos que o símbolo “=” numa expressão como y = 2x + 8 não estaria denotando uma operação a ser realizada (concepção operacional), nem tampouco estaria indicando que y é a *mesma coisa* que 2x + 8 (concepção igualdade relacional). Por outro lado, estaria indicando uma relação causal de dependência entre uma variável dependente e outra independente. Então, a finalidade dos dois itens que propomos foi identificar as concepções dos alunos sobre o significado do símbolo “=” no contexto das funções e se a forma (2x + 8 = y ou y = 2x + 8) influenciaria diferenças entre os resultados obtidos.

Na análise do item **c** do instrumento 1, identificamos seis concepções dos alunos sobre os significados do símbolo “=” na expressão 2x + 8 = y. São elas: Operacional, Igualdade relacional, Relacional nome-símbolo, Operacional sintático, Símbolo separador e Equivalência em igualdade condicional. É importante ressaltar que mesmo identificando várias concepções sobre o significado do símbolo “=” no contexto das funções, não conseguimos dados que indicassem a concepção que definimos a priori como concepção funcional, na qual o aluno reconheceria o símbolo “=” como indicador de uma relação de dependência entre a variável independente e dependente.

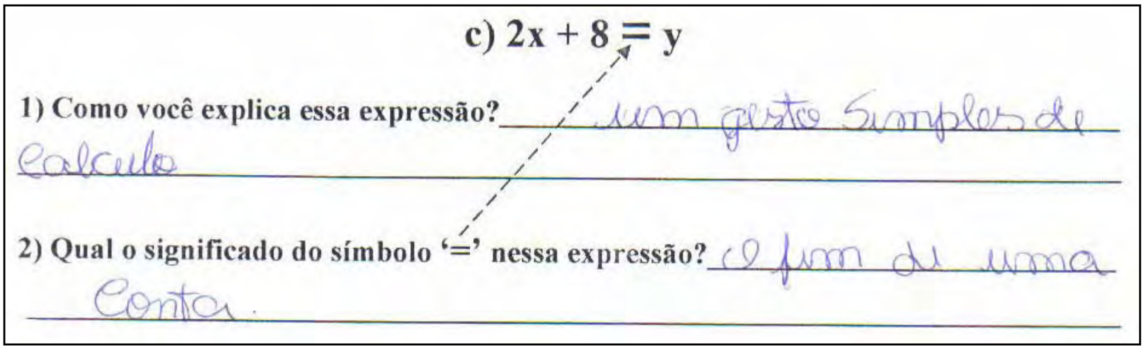
Os percentuais referentes à cada concepção estão representados na tabela a seguir, assim como os percentuais correspondentes aos que não responderam e às respostas não identificadas.

Expressão / Concepções	Funções $2x + 8 = y$
Operacional	37,3%
Relacional nome-símbolo	28,4%
Igualdade relacional	9,8%
Símbolo separador	7,8%
Operacional sintático	6,9%
Equivalência em igualdade condicional	1,0%
Funcional	0%
Não identificada	7,8%
Não respondeu	1,0%
Total	100%

Tabela 11 – Funções (Instrumento 1)

A porcentagem de respostas não identificadas e de alunos que não responderam foi de 7,8% e 1,0%, respectivamente. A maior parte das respostas foi referente à concepção operacional. Dessa maneira, apresentaremos dois protocolos demonstrando as idéias referentes à concepção operacional, acionadas em relação à expressão 2x + 8 = y.

Os protocolos que foram categorizados como concepção operacional apresentaram uma diversidade de idéias sobre o sinal de igualdade como símbolo operacional, que até fica difícil escolher apenas dois para exemplificar esta concepção.

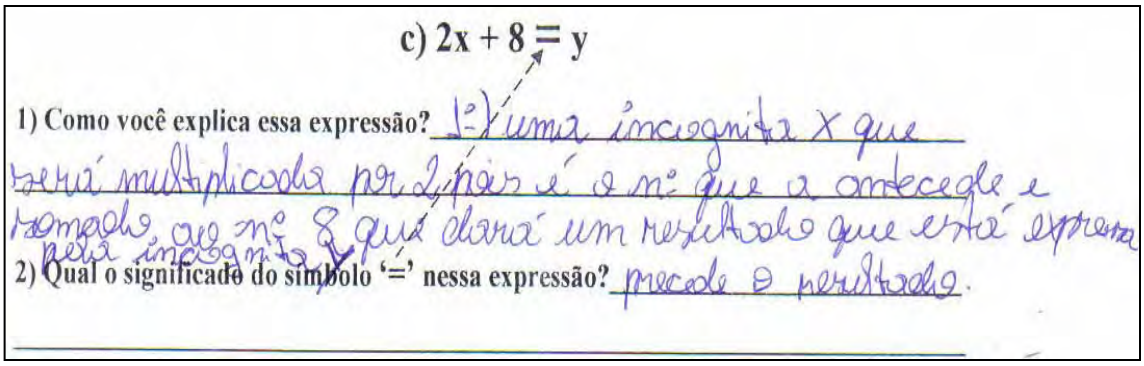

c) 2x + 8 = y

1) Como você explica essa expressão? um gesto Simples de calculo

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? o fim de uma Conta.

Quadro 53 – Protocolo (**instrumento1/6**)

O aluno expressa, no protocolo **instrumento1/6** que a expressão representa "um gesto simples de cálculo". Nessa direção, de maneira condizente, ele interpreta o significado do símbolo "=" neste cálculo como referência ao final de uma conta. Esta idéia também pode ser entendida como uma expectativa que está intrinsecamente associada à uma concepção operacional. Tal expectativa pode ser apoiada pela maneira que o símbolo “=” é introduzido na escola, por exemplo, 3 + 4 =, e pela utilização de calculadoras (GINSBURG, 1977; JONES e PRATT, 2005). Dessa maneira, podemos dizer que quando digitamos, em uma calculadora, alguns números e sinais de operação (+, -, x, ÷), comumente apertamos o símbolo “=”, com a intenção de finalizarmos a operação e de mostrar o resultado.


c) $2x + 8 = y$

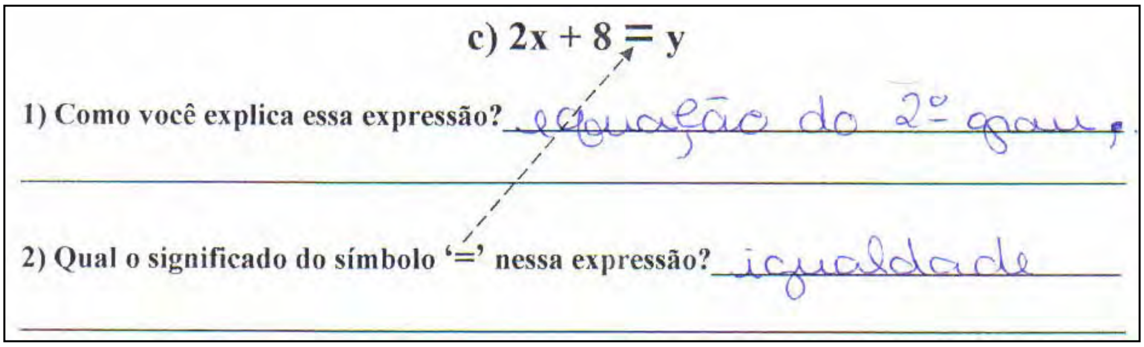
1) Como você explica essa expressão? 1º) uma incognita x que será multiplicada por 2, pois é o nº que a antecede e somado ao nº 8 que dará um resultado que está expresso pela incognita y

2) Qual o significado do símbolo ‘=’ nessa expressão? precede o resultado.

Quadro 54 – Protocolo (**instrumento1/86**)

Na resposta do aluno, representada no protocolo **instrumento1/86**, percebemos que ele, ao explicar a expressão 2x + 8 = y, apenas faz uma leitura linear da esquerda para direita, na qual se refere ao símbolo “=” como “dará o resultado”. A concepção operacional deste aluno fica ainda mais realçada quando ele, ao responder qual o significado do símbolo ‘=” escreve que “precede o resultado”. Os resultados permitem argumentar que várias idéias que são construídas pelos alunos no contexto das operações aritméticas das séries iniciais, podem ser persistentes, surgindo até nas concepções dos alunos do 3º ano do Ensino Médio sobre o significado do “=” em contextos algébricos.

A segunda concepção mais identificada na categorização dos dados foi a relacional nome-símbolo, com 28,4%. Lembramos que consideramos que um aluno está demonstrando esta concepção quando escreve que o significado do símbolo “=” é “igual”, “igualdade”, sugerindo apenas o reconhecimento da relação entre o símbolo “=” e o seu nome, igualdade. Os protocolos **instrumento1/57** e **instrumento1/43**, são dois exemplos da concepção relacional nome-símbolo referente ao significado do símbolo “=” em 2x +8 = y.

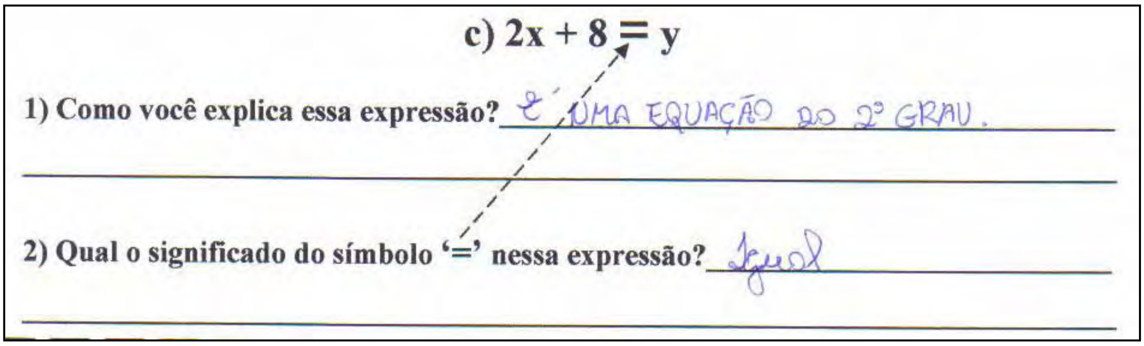


c) $2x + 8 = y$

1) Como você explica essa expressão? equação do 2º grau,

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? igualdade

Quadro 55 – Protocolo (**instrumento1/57**)



c) $2x + 8 = y$

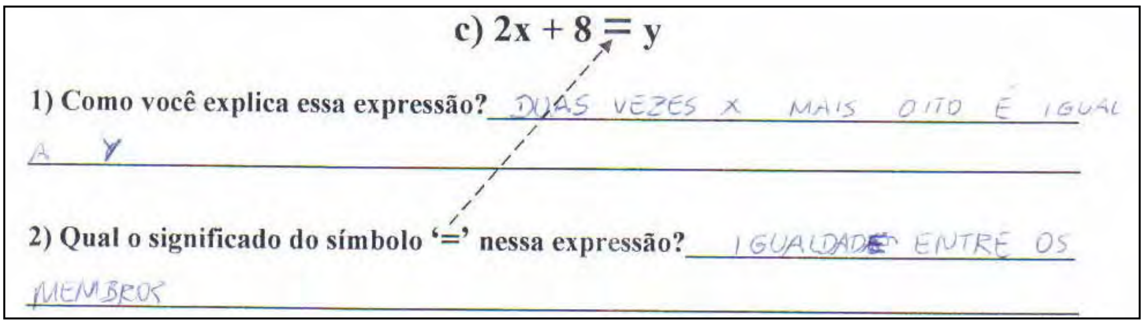
1) Como você explica essa expressão? É UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? Igual

Quadro 56 – Protocolo (**instrumento1/43**)

Como podemos observar, ambos os alunos reconhecem 2x +8 = y como uma equação do 2º grau, cujo significado do símbolo "=" é apenas "igualdade" e "igual". Por conseguinte, trataremos os resultados obtidos no que diz respeito à concepção igualdade relacional.

A concepção igualdade relacional foi identificada em 9,8% das respostas dos alunos. Um aluno com esta concepção compreende o "=" como um símbolo relacional, que indica uma comparação, em termos de igualdade, entre os lados esquerdo e direito deste símbolo, como podemos observar nas respostas dos alunos representadas nos protocolos abaixo.



c) $2x + 8 = y$

1) Como você explica essa expressão? DUAS VEZES X MAIS OITO É IGUAL A Y

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? IGUALDADE ENTRE OS MEMBROS

Quadro 57 – Protocolo (**instrumento1/6**)

No protocolo **instrumento1/6**, o aluno explica a expressão 2x + 8 = y apenas transcrevendo-a como se realizasse uma leitura. Sobre o significado do "=" nesta expressão, ele compreende-o como uma relação de igualdade entre os membros.

c) 2x + 8 = y

1) Como você explica essa expressão? multiplicar por 2 um número não conhecido e somando o resultado com 8 e será igual à um outro número desconhecido.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? Estabelece uma relação de igualdade entre as expressões.

Quadro 58 – Protocolo (**instrumento1/98**)

Na mesma direção, a resposta do aluno, no protocolo acima, também pode ser entendida como uma leitura da expressão. Sobre o significado do sinal de igualdade, o aluno deixa explícito que compreende este símbolo como uma relação de igualdade entre as expressões. Provavelmente, o termo expressões está sendo utilizado para se referir aos lados esquerdo e direito da igualdade.

Prosseguindo, verificamos que 7,8% dos alunos interpretaram o símbolo "=" como um símbolo separador, tal como demonstramos nos protocolos a seguir.

c) 2x + 8 = y

1) Como você explica essa expressão? é uma equação de 1º grau

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? é uma separação das classes

Quadro 59 – Protocolo (**instrumento1/53**)

Como podemos observar acima, o aluno explica que a expressão 2x + 8 = y corresponde a uma equação do 1º grau. Sua resposta sobre o significado do sinal de igualdade, nesta expressão, é um pouco confusa, pois não fica claro o que ele está considerando como classes. Contudo, a sua idéia sobre o sinal de igualdade é relativo ao ato de separar e, portanto, entendemos como uma concepção na qual o “=” é compreendido como um símbolo separador.

c) 2x + 8 = y

1) Como você explica essa expressão? Uma equação onde tem duas variáveis (x e y) e não se sabe o valor.

2) Qual o significado do símbolo ‘=’ nessa expressão? Separar o 1º termo do 2º termo

Quadro 60 – Protocolo (**instrumento1/66**)

Neste protocolo, o aluno explica que a expressão 2x + 8 = y é uma equação com duas variáveis que não se sabe o valor. Já sobre o sinal de igualdade, a idéia de separar é bem evidente em relação ao que ela se refere, no caso, podemos entender que o aluno está considerando “2x + 8” como um termo e “y” como um outro termo, os quais são separados pelo símbolo “=”. Portanto, também neste caso, o sinal de igualdade é entendido como um símbolo separador.

A concepção operacional sintático, por sua vez, obteve um percentual de 6,9% das respostas. Em outras palavras, este percentual corresponde aos alunos que interpretaram o sinal de igualdade como um símbolo que dá o resultado, não da expressão que vem antes dele (2x + 8), mas sim das letras, no caso, x e y.

c) 2x + 8 = y

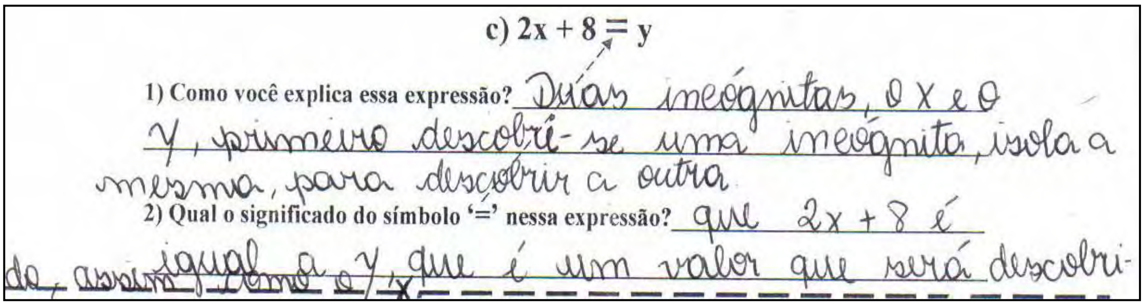
1) Como você explica essa expressão? Substituindo uma icognita por um número qualquer é possível descobrir o valor da outra icognita.

2) Qual o significado do símbolo ‘=’ nessa expressão? Sinal de igualdade, como os outros, sendo possível descobrir as icognitas.

Quadro 61– Protocolo (**instrumento1/85**)

O aluno quando sugere que substituindo uma incógnita por um número qualquer para que seja possível descobrir o valor da outra incógnita, parece estar reconhecendo a idéia de relação de dependência correspondente ao conceito de função. Entretanto, no que diz respeito ao significado do símbolo "=" na expressão 2x + 8 = y, não fica evidente que o aluno associa o significado do "=" à idéia de relação de dependência. De fato, entendemos que a idéia que parece estar mais realçada na resposta do aluno é que, nesta expressão, a finalidade do símbolo "=" é descobrir, ou tornar possível descobrir, o valor das incógnitas. Dessa maneira, compreendemos que esta idéia sobre o significado do sinal de igualdade corresponde à concepção que denominamos de operacional sintático.

Mesmo assim, para que pudéssemos decidir, neste caso, qual seria a concepção deste aluno sobre o significado do "=", recorremos à sua resposta sobre o significado do símbolo "=" na expressão anterior (item b do instrumento 1), que correspondia à equação x + 9 = 15. A razão para analisarmos a resposta do aluno neste outro item é porque ele escreveu que o "=" era um sinal de igualdade, como os outros. Assim, no item b do instrumento 1, a resposta deste aluno foi classificada como concepção operacional sintático, pois, para ele, o símbolo "=" servia para descobrir o valor da incógnita x. Então, decidimos classificar o protocolo **instrumento1/85** como concepção operacional sintático.


c) 2x + 8 = y

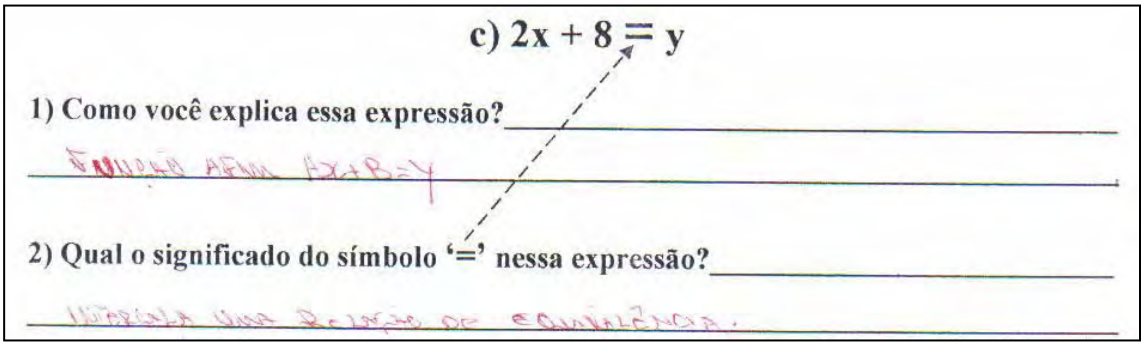
1) Como você explica essa expressão? Duas incógnitas, o x e o y, primeiro descobri-se uma incógnita, isola a mesma, para descobrir a outra.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? que 2x + 8 é igual a y, que é um valor que será descobri-

Quadro 62 – Protocolo (**instrumento1/75**)

No protocolo acima, podemos perceber que o aluno está considerando a expressão 2x + 8 = y como algo que deve ser resolvido achando o valor das incógnitas x e y. De maneira um pouco diferenciada da resposta do aluno, representada no protocolo **instrumento1/85**, percebemos que, este aluno, quando fala do sinal de igualdade se refere, num primeiro momento, ao y como valor a ser encontrado. Apenas esta informação poderia ser confusa, pois o y também corresponde, numa concepção operacional, ao resultado da expressão 2x + 8. Contudo, o aluno complementa dando a idéia de que o valor de y é um valor que será encontrado assim como o de x. Outro motivo que nos levou a categorizar este protocolo como correspondente à uma concepção operacional sintático, é que, quando o aluno explica que primeiro descobre-se uma incógnita e *isola-se* a mesma para que seja possível descobrir a outra, está na verdade utilizando conhecimentos associados aos aspectos sintáticos comumente presentes na resolução de equações.

Por último, a concepção equivalência em igualdade condicional surgiu, mas apenas em 1,0% das respostas, representada a seguir, no protocolo **instrumento1/82**.



c) 2x + 8 = y

1) Como você explica essa expressão?

FUNÇÃO AFIM 2X+8=Y

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão?

INDICA UMA RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA.

Quadro 63 – Protocolo (**instrumento1/82**)

Os resultados demonstram que não houve alunos que compreenderam o símbolo "=" em 2x + 8 = y como símbolo que relaciona y à x ou indica uma relação de dependência entre x e y. Uma possível razão para isto, poderia ser o fato a maior parte dos alunos não reconheceu a expressão 2x + 8 = y como uma função. No entanto, o protocolo **instrumento1/82** aponta que mesmo compreendendo 2x + 8 = y como uma função, a interpretação do significado do símbolo "=" não foi correspondentemente associado à concepção funcional, que tínhamos discutido como provável concepção dos alunos sobre o sinal de igualdade no contexto das funções.

4.4.2 Item c do instrumento 2 “y = 2x + 8”

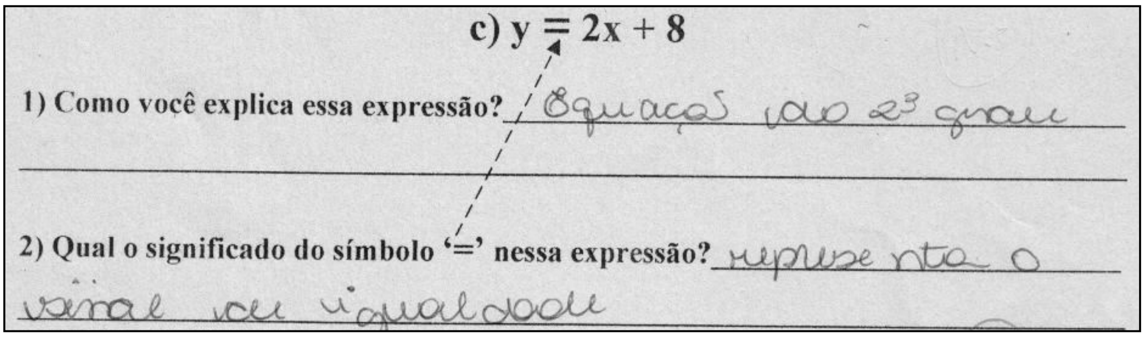
Dando continuidade à discussão dos resultados referentes ao contexto das funções, esclarecemos que no instrumento 2, este contexto foi representado pela expressão y = 2x + 8 (item **c**).

Na análise dos resultados obtidos, identificamos as mesmas concepções que foram discutidas em relação à expressão 2x + 8 = y, ou seja, as concepções: operacional, igualdade relacional, operacional sintático, relacional nome-símbolo, equivalência em igualdade condicional e símbolo separador.

Concepções \ **Expressão**	**Funções y = 2x + 8**
Relacional nome-símbolo	39,8%
Operacional sintático	12,6%
Símbolo separador	11,6%
Igualdade relacional	9,8%
Operacional	8,7%
Equivalência em igualdade condicional	1,0%
Funcional	0%
Não identificada	13,6%
Não respondeu	2,9%
Total	100%

Tabela 12 – Funções (Instrumento 2)

As respostas não identificadas corresponderam a 13,6% e as não respondidas à 2,9%. Na categorização das respostas deste item, a maior parte, isto é, 39,8%, foi identificada como concepção relacional nome-símbolo.

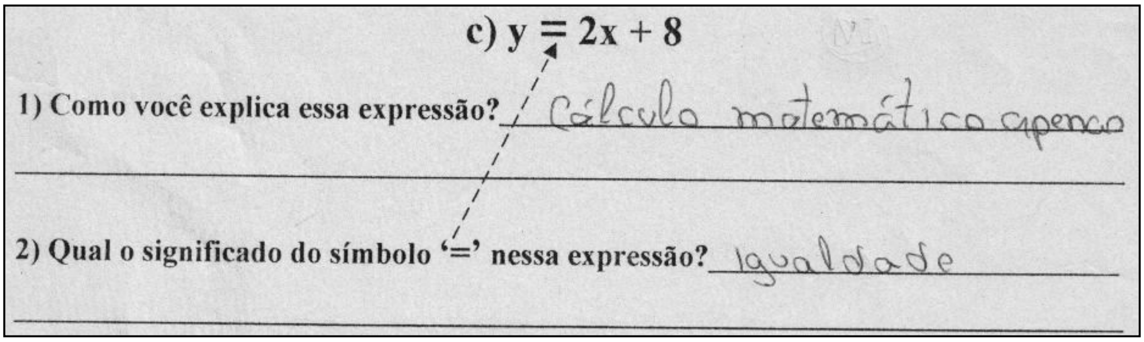

c) y = 2x + 8

1) Como você explica essa expressão? Equaçaõ do 2º grau

2) Qual o significado do símbolo ‘=’ nessa expressão? representa o valor ou igualdade

Quadro 64 – Protocolo (**instrumento2/11**)

No protocolo **instrumento2/11**, o aluno interpreta a expressão y = 2x +8 como uma equação do segundo grau. Já o significado do símbolo "=", nesta expressão, ele escreveu que "representa o sinal de igualdade". Na presente resposta não há nenhuma evidência sobre a relação entre o significado do sinal de igualdade e o contexto no qual está inserido. Em verdade, podemos perceber que esta resposta sugere que o aluno está apenas reconhecendo a relação entre o símbolo "=" e seu nome, "sinal de igualdade". Portanto, classificamo-a como concepção relacional nome-símbolo.



c) y = 2x + 8

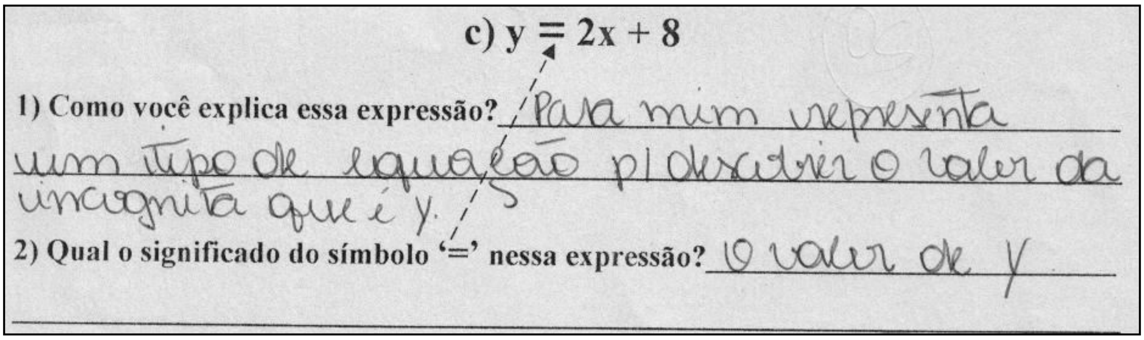
1) Como você explica essa expressão? Cálculo matemático apenas

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? igualdade

Quadro 65 – Protocolo (**instrumento2/84**)

A expressão y = 2x + 8 é compreendida, no protocolo **instrumento2/84**, apenas como um cálculo matemático. O significado do símbolo "=", mais uma vez, é interpretado, em nossa opinião, na perspectiva da concepção relacional nome-símbolo.

Continuando, um percentual de 12,6% compreendeu o significado do símbolo "=" em y = 2x + 8 como indicando a resposta/valor/resultado da(s) incógnita(s). As respostas deste tipo foram categorizadas como concepção operacional sintático.



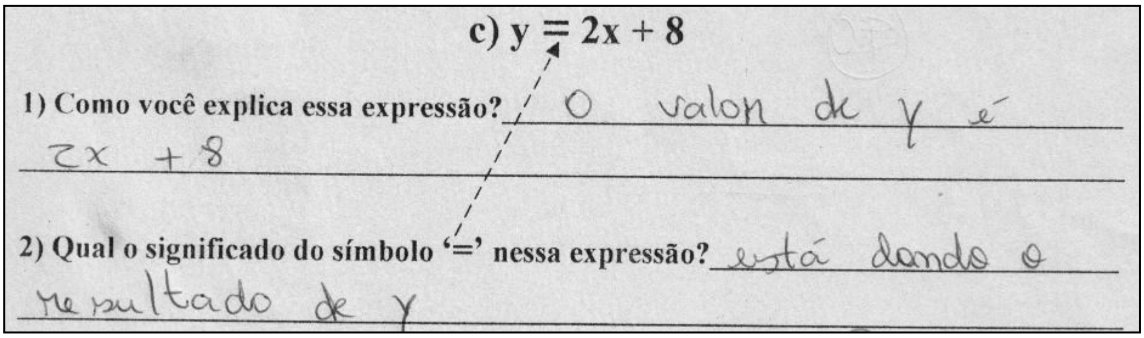
c) y = 2x + 8

1) Como você explica essa expressão? Para mim representa um tipo de equação p/ descobrir o valor da incognita que é y.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? O valor de y

Quadro 66 – Protocolo (**instrumento2/3**)

A resposta do aluno no protocolo **instrumento2/3** aponta que a expressão foi entendida como um tipo de equação para descobrir o valor de y. O significado do “=”, nesta direção, também foi relacionado ao valor de y. Em nossa compreensão, “o valor de y” está no sentido de “o resultado de y”, sendo que esta idéia, por sua vez, corresponde à concepção operacional sintático.


c) y = 2x + 8

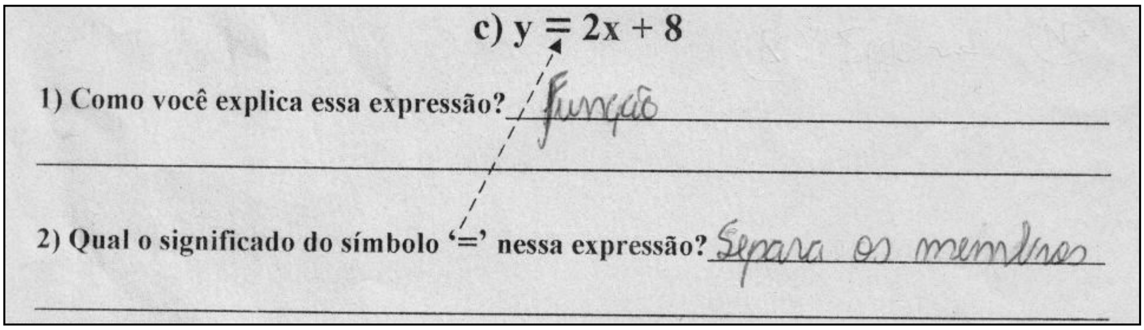
1) Como você explica essa expressão? O valor de y é 2x + 8

2) Qual o significado do símbolo ‘=’ nessa expressão? está dando o resultado de y

Quadro 67 – Protocolo (**instrumento2/75**)

Neste protocolo, o aluno por um lado explica a expressão y = 2x + 8 como “o valor de y é 2x + 8”, não a reconhecendo como uma função. Nesta explicação, podemos dizer que a partícula “é” está representado o símbolo “=”. Porém, o aluno é prescritivo e claro quando afirma que o significado deste símbolo na expressão, é dar “o resultado de y”. Neste sentido, consideramos tal idéia como demonstração da concepção operacional sintático.

Em ordem decrescente, levando-se em conta os percentuais obtidos na categorização dos dados, a próxima concepção é símbolo separador, que obteve um percentual de 11,6%. Como símbolo separador, já verificamos que o aluno vem reconhecendo o “=” como um símbolo para separar, por exemplo, os membros da igualdade, os números, as letras, etc.

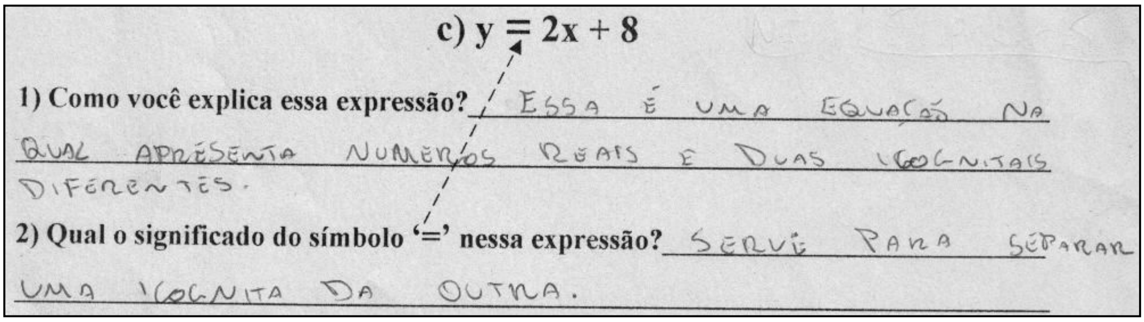

c) y = 2x + 8

1) Como você explica essa expressão? função

2) Qual o significado do símbolo ‘=’ nessa expressão? Separa os membros

Quadro 68 – Protocolo (**instrumento2/71**)

No protocolo **instrumento2/71**, acima, podemos ver que o aluno considera a expressão y = 2x + 8 como uma função. No entanto, o significado do símbolo "=", nesta expressão, não foi reconhecido levando-se em conta suas características no conceito de função. Na verdade, o aluno estava olhando para o "=" no sentido de um símbolo separador, neste caso, dos membros.


c) y = 2x + 8

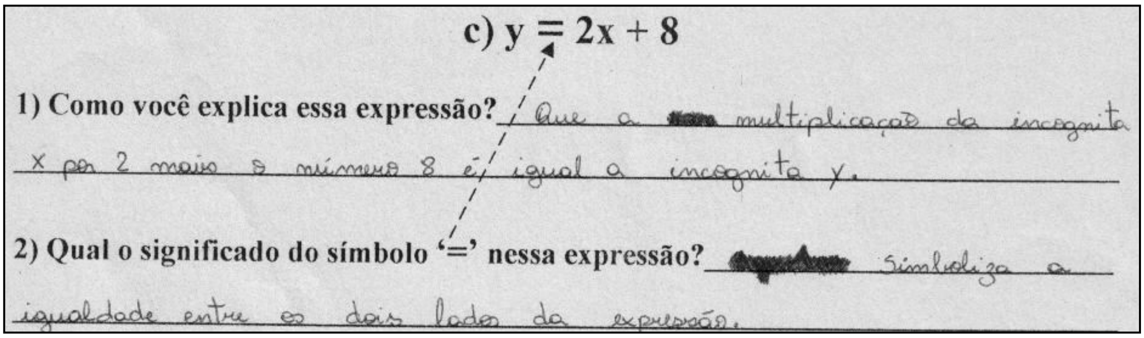
1) Como você explica essa expressão? ESSA É UMA EQUAÇÃO NA QUAL APRESENTA NUMEROS REAIS E DUAS ICOGNITAIS DIFERENTES.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? SERVE PARA SEPARAR UMA ICOGNITA DA OUTRA.

Quadro 69 – Protocolo (**instrumento2/83**)

Diferentemente, o aluno que escreveu a resposta no protocolo acima não reconheceu y = 2x + 8 como uma função, mas sim como uma equação com números e duas incógnitas. Já sobre o significado do símbolo "=", o aluno considerou-o como um símbolo para separar uma incógnita da outra. Esta idéia, como temos discutido, faz parte da concepção que chamamos de símbolo separador.

Na análise do item **c** do instrumento 2, expressão y = 2x + 8, o percentual correspondente à concepção igualdade relacional, em y = 2x + 8, foi de 9,8%. Lembramos que nesta concepção, o aluno identifica o "=" como um símbolo relacional que indica idéias, como por exemplo, mesma coisa, igualdade entre os membros, mesmo valor, etc.

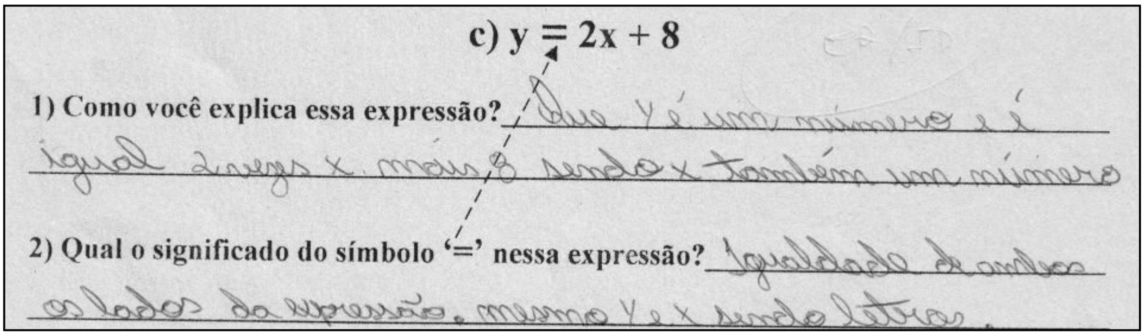

c) y = 2x + 8

1) Como você explica essa expressão? Que a [redacted] multiplicação da incognita x por 2 mais o número 8 é igual a incognita y.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? [redacted] Simboliza a igualdade entre os dois lados da expressão.

Quadro 70 – Protocolo (**instrumento2/50**)

No protocolo **instrumento2/50**, o aluno quando explica a expressão y = 2x + 8, utiliza o termo "é igual" no lugar do "=". Então, o aluno esclarece em seguida que este símbolo "simboliza a igualdade entre os dois lados da expressão".


c) y = 2x + 8

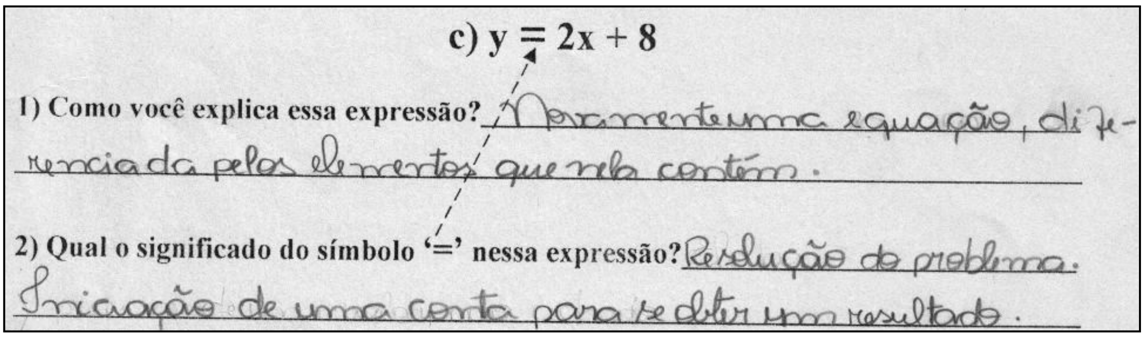
1) Como você explica essa expressão? Que y é um número e é igual 2 vezes x mais 8 sendo x também um número

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? Igualdade de ambos os lados da expressão, mesmo y e x sendo letras.

Quadro 71 – Protocolo (**instrumento2/10**)

Já neste protocolo, o aluno parece realizar uma tradução linear (esquerda-direita) também utilizando "é igual" no lugar do "=". Na mesma direção, este aluno complementa explicando que o significado do símbolo "=" corresponde à "igualdade de ambos os lados da expressão", acrescentando, ainda, "mesmo y e x sendo letras". Este exemplo representa a idéia de relação de igualdade referente à concepção igualdade relacional.

Se no item **c** do instrumento 1 (2x + 8 = y) o maior percentual de respostas foi respectivo à concepção operacional, no item **c** do instrumento 2 (y = 2x + 8) o percentual correspondente à esta concepção, no caso 8,7%, foi o segundo mais baixo. Nesta concepção, os alunos compreendem o sinal de igualdade como um sinal de fazer algo, dar a resposta, indicar o resultado, etc.

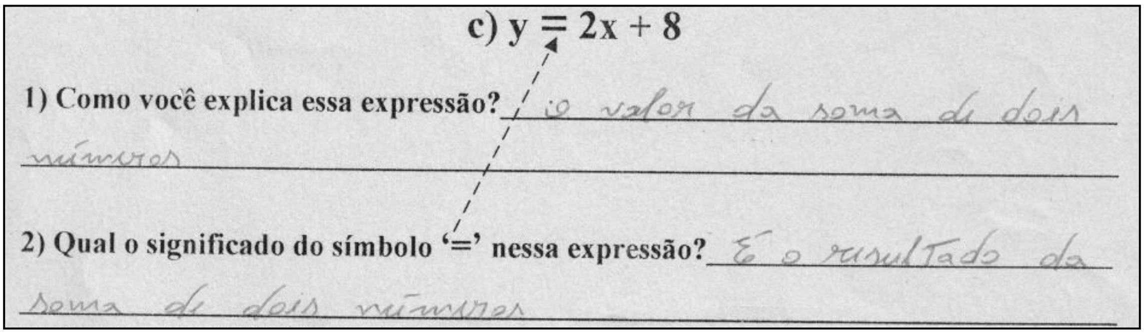

c) y = 2x + 8

1) Como você explica essa expressão? Novamente uma equação, diferenciada pelos elementos que nela contém.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? Resolução do problema. Iniciação de uma conta para se obter um resultado.

Quadro 72 – Protocolo (**instrumento2/36**)

O aluno não reconheceu, no protocolo **instrumento2/36**, y = 2x + 8 como uma função, mas sim como um tipo de equação. O significado do "=" foi interpretado associando-o à resolução de problema, particularmente, no que concerne à iniciação de uma conta para obtenção de um resultado. Então, o sinal de igualdade indica tanto o início da conta, quanto que se deve obter um resultado.


c) y = 2x + 8

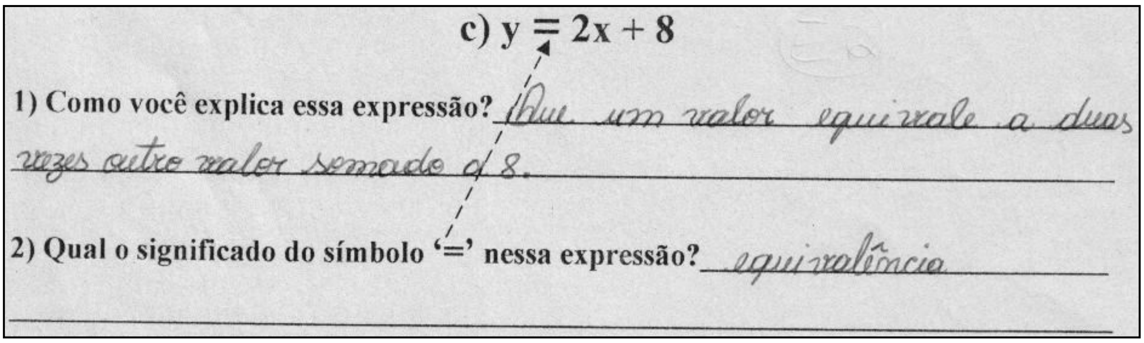
1) Como você explica essa expressão? o valor da soma de dois números

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? É o resultado da soma de dois números

Quadro 73 – Protocolo (**instrumento2/99**)

Neste protocolo, o aluno considera y = 2x + 8 como uma expressão do valor da soma de dois números. Nesse sentido, o aluno compreende o símbolo "=" associado ao resultado da soma de dois números, que no caso, provavelmente seriam 2x e 8. Todos os elementos neste protocolo apontam para uma concepção operacional do sinal de igualdade.

Finalmente, ressaltamos que também identificamos, em 1% das respostas, a concepção equivalência em igualdade condicional. Esta concepção envolve além de uma compreensão relacional do sinal de igualdade, a vinculação direta com o conceito de equivalência.


c) y = 2x + 8

1) Como você explica essa expressão? Que um valor equivale a duas vezes outro valor somado a 8.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? equivalência

Quadro 74 – Protocolo (**instrumento2/75**)

Como podemos observar na resposta do aluno, apresentada acima, o aluno reconhece diretamente, o significado do símbolo "=" como equivalência. Dessa maneira, podemos dizer que quando o aluno explica a expressão y = 2x + 8, ele acaba utilizando, no lugar do "=", a palavra equivalência, demonstrando que o aluno está mobilizando idéias referentes à concepção equivalência em igualdade condicional.

4.4.3 Funções: cruzamento dos resultados nos instrumentos 1 e 2

Acabamos de apresentar os resultados obtidos no item **c** dos instrumentos 1 e 2, que foram correspondentes ao contexto das funções. As expressões que utilizamos foram 2x + 8 = y, no primeiro instrumento, e y = 2x + 8, no segundo instrumento. A finalidade em comparar os resultados obtidos no instrumento 1 com os obtidos no instrumento 2 foi verificar se as formas das expressões (2x + 8 = y, operação antes do "=") e (y = 2x + 8, operação depois do "="), influenciaram as concepções dos alunos sobre o respectivo significado do sinal de igualdade no contexto das funções.

Primeiramente, observamos que, tanto no item **c** do instrumento 1 (2x + 8 = y), quanto no item **c** do instrumento 2 (y = 2x +8), foram identificadas as mesmas concepções: operacional, igualdade relacional, equivalência em igualdade condicional, relacional nome-símbolo, símbolo separador e operacional sintático. Mesmo que as mesmas concepções tenham sido identificadas em ambos os instrumentos, evidenciamos também, algumas diferenciações nos percentuais destas concepções, em razão da forma da expressão (2x + 8 = y) e (y = 2x + 8).

A concepção operacional, por exemplo, no item referente à expressão 2x + 8 = y (operação antes do "="), obteve um percentual de 37,3%, enquanto que no item referente à expressão y = 2x + 8, o percentual correspondente à esta concepção foi de 8,7%, ou seja, quatro vezes menor. Os percentuais das concepções igualdade relacional e equivalência em igualdade condicional permaneceram os mesmos para ambas as expressões, não demonstrando, assim, diferenças em razão da forma da expressão. Diferentemente dos percentuais da concepção operacional, que foi bem maior na expressão do item **c** do instrumento 1, os percentuais das demais concepções, operacional sintático, relacional nome-símbolo, e símbolo separador, foram maiores no item **c** do instrumento 2.

Na concepção operacional sintático, os resultados obtidos no instrumento 2, foram quase o dobro dos obtidos no instrumento 1. Isto é, enquanto o percentual referente à expressão 2x + 8 = y foi de 6,9%, na expressão y = 2x +8 foi de 12,6%. Com os percentuais correspondentes à concepção símbolo separador foi semelhante. Para a expressão 2x + 8 = y, o percentual foi de 7,8%, enquanto que para a expressão y = 2x + 8 foi de 11,6%. Destacamos também a diferença entre os resultados obtidos em relação à concepção relacional nome-símbolo. Na expressão 2x + 8 = y, o percentual foi de 28,4%. Já na expressão y = 2x + 8, o percentual correspondente foi bem maior, atingindo 39,8%. Acrescentamos ainda, que foi verificada certa diferença nos percentuais correspondentes às respostas não identificadas e não respondidas. Na expressão 2x + 8 = y, o percentual de não identificadas foi de 7,8% e de não respondidas de 1,0%. Na expressão y = 2x + 8, o percentual de não identificadas foi de 13,6% e o de não respondidas foi de 2,9%. Estes resultados sugerem que, na expressão y = 2x + 8, os alunos parecem ter mais dificuldades em interpretar o significado do símbolo "=", do quem na expressão 2x +8 = y.

4.4.4 Síntese dos resultados: funções

Na análise dos resultados referentes ao contexto das funções, foi possível identificarmos seis concepções dos alunos sobre o significado do símbolo "=". Foram elas: relacional nome-símbolo, operacional, símbolo separador, igualdade relacional, operacional sintático e equivalência em igualdade condicional.

Por estranho que pareça, a única concepção não identificada nas respostas dos alunos, aos itens que representaram o contexto das funções, foi a concepção funcional, que por sua vez, definimos a priori como a que corresponderia, mais adequadamente, aos aspectos dinâmicos correspondentes à relação causal entre as variáveis dependente e independente. Um fato observado em nossa análise foi que a maioria dos alunos reconheceu as expressões 2x + 8 = y e y = 2x + 8, como operações, somas, equações do 1º e 2º graus, e apenas alguns as consideraram como representações do conceito de função sem, contudo, observarem os aspectos relativos à dependência entre variáveis.

Concepções	**%**
Relacional nome-símbolo	34,1%
Operacional	22,8%
Símbolo separador	9,8%
Igualdade relacional	9,8%
Operacional sintático	9,8%
Equivalência em igualdade condicional	1,0%
Funcional	0%
Não identificada	10,7%
Não respondeu	2,0%
Total	100%

Tabela 13 – concepções no contexto das funções

Prosseguindo, as duas concepções com maiores percentuais foram a relacional nome-símbolo e a operacional com, respectivamente, 34,1% e 22,8%. Achamos importante ressaltar que, estas duas concepções são as que também demonstraram os maiores percentuais nas sínteses dos resultados dos outros três contextos. As concepções símbolo separador, igualdade relacional e operacional sintático apresentaram o percentual de 9,8%, cada uma. A concepção equivalência em igualdade condicional, por sua vez, apresentou o percentual de 1,0%.

Em linhas gerais, podemos dizer que os alunos, ao interpretarem o significado do símbolo "=" nas expressões $2x + 8 = y$ e $y = 2x + 8$, mobilizaram concepções características dos outros contextos, operações aritméticas, igualdades aritméticas e equações, demonstrando assim, que não reconheceram, o significado do símbolo "=", no contexto das funções, como indicação da relação de dependência entre as variáveis dependente e independente.

No contexto das funções, partindo do princípio de que os participantes da pesquisa são alunos do último ano do Ensino Médio e que, provavelmente já estudaram o conceito de função, esperávamos identificar principalmente a concepção funcional, que definimos a priori. Entretanto, não identificamos esta concepção em nenhum protocolo, mas, pelo contrário, os dados apontam que a maior parte dos alunos traz para o contexto das funções, concepções referentes a outros contextos, como por exemplo, a concepção operacional que corresponde ao significado do símbolo "=" no contexto das operações aritméticas.

4.5 Síntese dos resultados: instrumento 1

A finalidade desta síntese, é discutir os resultados obtidos no instrumento 1, no qual, as expressões que representaram os contextos, operações aritméticas, igualdades aritméticas, equações e funções, apresentaram, em sua estrutura, a operação antes do símbolo "=" (10 + 5 =; 14 + 8 = 22; x + 9 = 15; 2x + 8 = y). Esclarecemos assim, que esta síntese não corresponde ao significado do símbolo "=" na perspectiva dos contextos particulares.

O que realmente está em evidência é a estrutura (operação antes do "=") das expressões que representaram os contextos. Assim, discutiremos as concepções dos alunos em razão da estrutura (operação antes do "=").

Concepções	**%**
Operacional	45,6%
Relacional nome-símbolo	27,9%
Igualdade relacional	8,4%
Operacional sintático	6,9%
Símbolo separador	2,9%
Equivalência em igualdade condicional	0,7%
Funcional	0%
Não identificada	6,9%
Não respondida	0,7%
Total	100%

Tabela 14 – concepções x estrutura das expressões (operação antes do "=")

Como podemos observar na tabela 15, em relação à estrutura, operação antes do "=", quase metade dos alunos apresentou uma concepção operacional acerca do significado do sinal de igualdade. Pouco mais de um quarto dos alunos demonstrou uma concepção relacional nome-símbolo. No demais, as concepções igualdade relacional, operacional sintáticos, símbolo operador e equivalência em igualdade condicional obtiveram, cada um, percentuais menores que 10%. Os percentuais correspondentes às não respondidas e não identificadas foram de 6,9% e 0,75, respectivamente.

Dessa maneira, estes resultados permitem argumentar que a estrutura, operação antes do “=”, favoreceu, em especial, a interpretação do significado do símbolo “=” como símbolo operacional. Estes resultados não surpreendem por que, na literatura, a maioria dos pesquisadores que investigaram a compreensão dos alunos sobre significado do sinal de igualdade também evidenciou a forte tendência relativa à concepção operacional. Igualmente, foi evidenciado, que esta concepção não se restringe aos alunos das séries iniciais, mas persistem por outras séries.

4.6 Síntese dos resultados: instrumento 2

Lembramos que as expressões (= 10 + 5, 22 = 14 + 8; 15 = x + 9; y = 2x + 8) que representaram, no instrumento 2, os contextos das operações aritméticas, das igualdades aritméticas, das equações e das funções, apresentam a estrutura, operação depois do “=”. Nesta síntese, vamos observar principalmente, as concepções dos alunos sobre o significado do sinal de igualdade, em razão desta estrutura, operação depois do “=”.

Concepções	**%**
Relacional nome-símbolo	34,5%
Operacional	21,4%
Igualdade relacional	12,6%
Símbolo separador	7,8%
Operacional sintático	7,5%
Equivalência em igualdade condicional	0,2%
Funcional	0%
Não identificada	13,1%
Não respondida	2,9%
Total	100%

Tabela 15 – concepções x estrutura das expressões (operação depois do “=”)

Os resultados demonstram que a tendência em considerar o “=” como um símbolo operacional é menor quando a estrutura da expressão é, operação depois do igual, do que quando a estrutura da expressão é, operação antes do igual. Estes resultados já eram esperados, pois como já discutimos, um dos fortes aspectos que permeiam a concepção operacional corresponde à expectativa de que a operação vem antes do “=” e a resposta depois.

Como muitas das idéias e expectativas correspondentes à concepção operacional são mais comuns nas expressões com estrutura (operação antes do “=”), observamos que esta concepção, com um percentual de 21,4%, não foi mais a majoritária, como foi na análise realizada no tópico anterior. No entanto, proveu evidências de que, mesmo alunos do 3º ano do Ensino Médio, podem ter uma concepção operacional em expressões nas quais a operação sucede o “=”, tal como, c = a + b, e alguns acabam até re-escrevendo expressões deste tipo para a estrutura, operação antes do igual, tal como, a + b = c, assim como vários pesquisadores (e.g. GINSBURG, 1977; BEHR, ERLWANGER e NICHOLS, 1980; SHOECRAFT, 1989) verificaram com crianças de seis a doze anos.

Por último, podemos observar que a concepção relacional nome-símbolo, com 34,5%, foi a que apresentou maior percentual em razão da estrutura das expressões sendo, operação depois do “=”. A concepção igualdade relacional, com 12,6%, foi a que obteve o terceiro maior percentual, seguida pelas concepções símbolo separador, com 7,7%, operacional sintático, com 7,5%, e equivalência em igualdade condicional, com 0,2%.

4.7 Síntese geral dos resultados

Os resultados que discutimos, até o momento, demonstraram que as concepções dos alunos não coincidiram, na maior parte das vezes, com as características particulares dos significados do sinal de igualdade no contexto no qual ele estava inserido. Apenas no contexto das operações aritméticas é que verificamos que mais da metade dos sujeitos apresentaram concepções que foram compatíveis com as características do significado do símbolo “=” nas expressões que o representavam. No contexto das igualdades aritméticas, apenas em um quarto dos sujeitos, as concepções foram compatíveis com o significado do “=” como símbolo relacional.

Nos contextos algébricos, este desencontro foi ainda mais evidente. Se considerarmos o significado do sinal de igualdade no contexto das equações que definimos a priori, podemos dizer que apenas 1,0% dos sujeitos tiveram uma concepção na mesma direção. Contudo, se considerarmos a concepção que definimos a posteriori, no caso, a operacional sintático, podemos observar que mais de 19% dos sujeitos tiveram uma concepção próxima dos atributos do sinal de igualdade que permeiam o contexto das equações. Finalizando, evidenciamos que, no contexto das funções, nenhum aluno apresentou uma concepção compatível com o significado do símbolo "=" nas expressões que representam este contexto.

Concluindo a parte da análise, apresentamos, em seguida, uma categorização dos dados sem distinguir os contextos nem as estruturas das expressões (operação antes do "=" e operação depois do "=") que representaram os quatro contextos, operações aritméticas, igualdades aritméticas, equações e funções. Esclarecemos, assim, que somamos todos os resultados, provenientes dos oito itens investigados, categorizando-os nas concepções que definimos a priori e a posteriori, bem como em relação às não respondidas e não identificadas.

A tabela abaixo apresenta a freqüência relativa à cada concepção, demonstrando que, apenas a concepção funcional não foi identificada nas respostas dos alunos sobre o significado do sinal de igualdade.

Concepções	**%**
Operacional	33,4%
Relacional nome-símbolo	31,2%
Igualdade relacional	10,5%
Operacional sintático	7,2%
Símbolo separador	5,4%
Equivalência em igualdade condicional	0,5%
Funcional	0%
Não identificada	10,0%
Não respondida	1,8%
Total	100%

Tabela 16 – Síntese geral dos resultados

Como podemos ver, entre as seis concepções identificadas, mais de dois terços dos sujeitos apresentaram uma concepção operacional ou relacional nome-símbolo.

Lembramos que em quase todos os cenários de categorização de dados, estas duas concepções sempre foram as que apresentaram os maiores percentuais. A concepção igualdade relacional obteve um percentual geral de 10,5%. Logo em seguida, a concepção operacional sintático, apresentou um percentual geral de 7,2%, a concepção símbolo separador, 5,4% e, por último, a concepção equivalência em igualdade condicional foi representada por apenas 0,5% das respostas. As respostas não identificadas foram 10,0% enquanto que o percentual de não respondidas foi de 1,8%.

Voltando às duas concepções que foram, ao longo de toda a análise, e também nesta síntese geral dos resultados, apontadas como as que mais representaram as concepções dos alunos, gostaríamos, então, de articular alguns comentários.

Segundo Brousseau e Antibi (2000), os primeiros usos do símbolo "=" permitem que o raciocínio e o discurso tratem a igualdade como um procedimento. Assim, "o símbolo "=" anuncia simplesmente o resultado de um cálculo" (p. 30). De fato, esta afirmação vai de acordo com a maior parte das pesquisas já realizadas com a problemática envolvendo o sinal de igualdade. Behr, Erlwanger e Nichols (1980), por exemplo, evidenciaram que crianças de seis a doze anos consideram o "=" como um *sinal de fazer algo*. Kieran (1981), no mesmo sentido, afirma que esta idéia do "=" como sinal de fazer algo persiste por todo o Ensino Fundamental.

Prosseguindo, Brousseau e Antibi (2000) admitem a possibilidade de que, no decorrer do curso escolar de um aluno, não seja efetuado nenhum estudo explícito sobre os diferentes status do sinal de igualdade. Ainda, os próprios professores podem, então, "não terem verdadeira consciência das diferentes regras do sinal "="" (p. 31).

Concluindo, admitindo-se que: os primeiros usos do sinal de igualdade permitem pensar no sinal de igualdade como um símbolo operacional que anuncia o resultado de um cálculo, ou como um sinal de fazer algo; que esta concepção não se limita às séries iniciais, mas persiste por todo o Ensino Fundamental; que os alunos podem chegar, por exemplo, ao Ensino Médio sem que tenham vivenciado nenhum estudo explícito sobre os diferentes significados do sinal de igualdade, argumentamos, a partir destas considerações, que os resultados de nossa pesquisa, que demonstram que a maior parte dos alunos têm uma concepção operacional do sinal de igualdade, são consistentes e acompanham a tendência que vem sendo descrita pela literatura que discute a problemática do sinal de igualdade.

Wilhelmi, Godino e Lacasta (2007), por sua vez, destacaram que a prática matemática, para evitar que cada tipo de igualdade seja designado com um termo diferente, tem assumido um fenômeno de homonímia com relação à noção de igualdade. Decorrente deste fato, o nome igualdade assim como o símbolo “=” são mantidos em todos os contextos nos quais é utilizado, aceitando, dessa maneira, o significado específico que se atribui à noção de igualdade, em cada um destes contextos. Em outras palavras, convenciona-se pensar em igualdade para qualquer expressão com o símbolo “=”, mesmo que os atributos deste símbolo não sejam plenamente compatíveis com a noção de igualdade. Entendemos assim, que estas considerações podem justificar e ratificar os resultados de nossa pesquisa que demonstraram que, a segunda maior parte das concepções dos alunos, correspondeu à relação entre o símbolo “=” e o nome “igual”, “igualdade”, isto é, à concepção que denominamos nome-símbolo.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal desta pesquisa foi investigar as concepções dos alunos de 3º ano do Ensino Médio sobre o significado do símbolo “=” em contextos aritméticos e algébricos. Para atingirmos este objetivo buscamos identificar alguns aspectos específicos, tais como as concepções dos alunos sobre o significado do símbolo “=” em quatro contextos, dois aritméticos (operações e igualdades) e dois algébricos (equações e funções). Procuramos também identificar se as estruturas das expressões (operação antes do “=” ou operação depois do “=”) influenciavam estas concepções.

O aporte teórico que fundamentou esta pesquisa foi constituído de dois quadros. Um referente ao estudo das concepções, e o outro ao estudo do sinal de igualdade. No quadro teórico das concepções, discutimos três aspectos principais. O primeiro aspecto foi acerca da utilização do termo concepção, o segundo correspondeu ao termo concepção como uma noção teórica nas pesquisas em Educação Matemática, e o terceiro aspecto, foi sobre a maneira que este termo seria utilizado em nossa pesquisa.

No quadro teórico do sinal de igualdade, realizamos um estudo enfatizando a história do símbolo “=”, conceitos matemáticos associados a este símbolo, os significados deste símbolo, os significados do “=” na perspectiva dos alunos e, por fim, realizamos algumas considerações gerais sobre o sinal de igualdade.

Em nossa revisão da literatura evidenciamos que a maior parte das pesquisas acerca das concepções dos alunos sobre o significado do sinal de igualdade investigou, principalmente, aspectos referentes aos contextos das operações aritméticas, das igualdades aritméticas e das equações. Não encontramos na literatura nenhum estudo investigando as concepções dos alunos sobre o significado do “=” no contexto das funções. É importante ressaltar que os estudos anteriores identificavam freqüentemente, apenas as concepções operacional e relacional (incluindo à noção de equivalência).

Podemos dizer que nosso estudo permitiu avançar, pois, acrescenta, no cenário das pesquisas sobre as concepções dos alunos acerca do significado do símbolo “=”, um *novo* contexto que ainda não foi investigado, correspondente ao conceito de função.

Também destacamos que, com a realização deste estudo, foi possível definir cinco concepções a priori sobre o significado do símbolo “=” em quatro contextos distintos. A concepção operacional, correspondente ao contexto das operações aritméticas; a concepção igualdade relacional, referente ao contexto das igualdades aritméticas; a concepção equivalência em igualdade condicional, que foi respectiva ao contexto das equações; a concepção funcional concernente ao contexto das funções e a concepção relacional nome-símbolo que não corresponde, particularmente, ao significado do “=” em nenhum contexto, mas pode ser entendida como representando um significado genérico atinente à relação estabelecida entre o símbolo “=” e o nome igualdade.

Numa primeira análise dos dados, percebemos que, estas cinco concepções definidas *a priori*, não estavam sendo suficientes para agrupar as respostas dos alunos. Nesse sentido, conseguimos distinguir mais duas concepções que denominamos de operacional sintático, particularmente associada às características do símbolo “=” no contexto das equações, e símbolo separador que, assim como a concepção relacional nome-símbolo, não corresponde ao significado do símbolo “=” em nenhum contexto em particular. Em síntese, os dados foram categorizados em sete concepções, sendo que cinco (operacional, igualdade relacional, equivalência em igualdade condicional, funcional e relacional nome-símbolo) foram definidas a priori e duas (operacional sintático e símbolo separador) a posteriori.

Prosseguindo, em nossa investigação evidenciamos aspectos importantes das concepções dos alunos do 3º ano do Ensino Médio sobre o significado do símbolo “=”, que já foram descritos em pesquisas anteriores realizadas com diferentes sujeitos, como por exemplo, o fato de a concepção operacional persistir além das séries iniciais sendo identificada até nos contextos algébricos. Também foi possível identificarmos outros fatos relevantes que não encontramos no levantamento bibliográfico que realizamos e que, possivelmente, não tenham sido até o momento, demonstrados, tais como, a concepção operacional sintático.

Em relação ao contexto das operações aritméticas, nossos resultados demonstraram que mais da metade dos sujeitos apresentaram uma concepção operacional. Lembramos que neste contexto, o símbolo “=” tem um aspecto assimétrico, pois um lado é dado e o outro deve ser encontrado, que juntamente com outras características, denotam um significado operacional. Nesse sentido, podemos dizer que, como era esperado, a maior parte dos alunos apresentou uma concepção compatível com o significado do símbolo "=" no contexto das operações aritméticas. No entanto, esta compatibilidade entre as concepções da maior parte dos alunos e o significado do "=" no contexto no qual está inserido, não aconteceu nos demais contextos. Em outras palavras, os resultados demonstraram que as concepções que apresentaram maiores percentuais não foram compatíveis com os significados do símbolo "=" nos contextos das igualdades aritméticas, equações e funções.

Assim, no contexto das igualdades aritméticas, os resultados demonstraram que a maior parte dos sujeitos apresentou uma concepção operacional ou relacional nome-símbolo. Deste modo, compreendemos que estes resultados indicam que a tendência maior foi os alunos demonstrarem uma concepção associada a outro contexto particular, no caso, a concepção operacional que é associada ao contexto das operações aritméticas, ou, uma concepção associada à relação entre o símbolo "=" e o nome igualdade, no caso, a concepção relacional nome-símbolo. Conseqüentemente, estes resultados indicam que a maioria dos sujeitos não demonstraram a concepção igualdade relacional, compatível, em nosso entendimento, com o significado do símbolo "=" no contexto das igualdades aritméticas.

Nos contextos algébricos das equações e funções, este desencontro entre o significado do símbolo "=" no contexto no qual está inserido e as concepções dos alunos, foi ainda mais evidente. No contexto das equações, a maioria dos sujeitos demonstrou as concepções relacional nome-símbolo e operacional. A concepção que definimos a priori como compatível ao significado do símbolo "=" neste contexto foi a concepção equivalência em igualdade condicional. Entretanto, observamos que apenas 1,0% dos sujeitos demonstraram esta concepção. Estes resultados surpreendem, pois, por serem alunos do 3º ano do Ensino Médio, esperávamos que a idéia de equivalência, requisito essencial para a aprendizagem da Álgebra e, particularmente, das equações, seria reconhecida no significado do símbolo "=" pela maior parte dos sujeitos e não apenas por 1,0% deles.

Por outro lado, identificamos outra concepção, que definimos a posteriori e denominamos de operacional sintático. Esta concepção pode ser entendida como uma versão algébrica da concepção operacional, com características particulares correspondentes ao contexto das equações, no sentido de que decorre de manipulações de regras sintáticas no processo de resolução de equações.

Se levarmos em consideração que a concepção operacional sintático está essencialmente associada ao contexto das equações, podemos dizer que, agregando o 1,0% respectivo à concepção equivalência em igualdade condicional com os 19% correspondentes à concepção operacional sintático, podemos concluir assim, que um quinto dos sujeitos demonstrou, no contexto das equações, concepções compatíveis com os significados do símbolo "=". Embora nossos dados não dêem conta de avançarmos nas discussões acerca das rupturas e continuidades entre Aritmética e Álgebra envolvendo os significados do símbolo "=", salientamos que estes resultados ainda estão aquém do esperado para o contexto das equações, sugerindo assim, que a ruptura necessária em relação à concepção operacional, particularmente aritmética, não foi realizada pela maior parte dos sujeitos. Dessa maneira, entendemos que esta questão pode ser mais bem investigada em novas pesquisas.

Por último, no contexto das funções, lembramos que denominamos de concepção funcional a concepção que definimos a priori como sendo compatível com a idéia de *relação causal entre as variáveis dependente e independente* que, por sua vez, consideramos um significado essencial do símbolo "=" neste contexto. Contudo, os resultados obtidos demonstraram que os alunos não reconheceram esta idéia, não sendo possível, então, identificarmos em nossa análise a concepção funcional. Nesse sentido, destacamos que as concepções mais identificadas no contexto das funções foram a relacional nome-símbolo e a operacional, assim como no contexto das equações. Da mesma maneira que no contexto das equações, os resultados referentes ao contexto das funções também sugerem que não houve a ruptura com a concepção operacional. Além disso, não houve nenhuma evidência que desse a entender que os alunos estavam reconhecendo a idéia de relação de dependência no significado do símbolo "=" no contexto das funções.

Em linhas gerais, das cinco concepções (operacional, igualdade relacional, relacional nome-símbolo, equivalência em igualdade condicional e funcional) que definimos a priori, apenas não identificamos a concepção funcional, e, além destas concepções também identificamos mais duas a posteriori que denominamos de concepção operacional sintático e concepção símbolo separador. Mesmo com a identificação de diferentes concepções, os resultados que obtivemos permitiram concluir que a maior parte dos alunos não demonstrou concepções compatíveis com o significado do símbolo “=” no contexto no qual ele estava inserido.

Este desencontro entre o significado do símbolo “=”, no contexto no qual está inserido, e as concepções dos alunos, pode ser entendido como aquilo que parte da literatura sobre concepções denomina de *concepções errôneas*. No entanto, elucidamos que não vamos aprofundar esta discussão, pois não caberia aos objetivos que propomos para nossa investigação. Esclarecemos que a nossa pesquisa não nos permite atribuir causas a estas concepções errôneas. Nesse sentido, entendemos que novas investigações podem ser realizadas com a finalidade de estudar as possíveis causas referentes à problemática das concepções errôneas acerca dos significados do “=”.

As concepções operacional e igualdade relacional, particularmente associadas aos contextos aritméticos, foram identificadas nos contextos algébricos das equações e das funções. Já as concepções equivalência em igualdade condicional e funcional, particularmente associadas aos contextos algébricos, não foram identificadas nos contextos aritméticos das operações e das igualdades. Isto quer dizer que as concepções características dos contextos algébricos não foram “transferidas” para o significado do símbolo “=” nos contextos das operações e das igualdades, enquanto que as concepções características dos contextos aritméticos foram “transferidas” para o significado do símbolo “=” nos contextos das equações e das funções.

Refletindo sobre esta consideração podemos levantar a hipótese de que as primeiras concepções construídas pelos alunos sobre o significado do símbolo “=” no ensino de Matemática das séries iniciais, onde o foco é aritmético, não foram substituídas por outras mais adequadas aos contextos algébricos.

No que diz respeito à influência da estrutura das expressões (operação antes do símbolo “=” ou operação depois do símbolo “=”), verificamos que, em todos os contextos, os percentuais correspondentes à concepção operacional são maiores nas expressões com operação antes do símbolo “=” do que nas expressões com operação depois do símbolo “=”. Resumindo, observamos que o percentual de alunos que demonstraram a concepção operacional no instrumento 1, no qual as expressões apresentavam a estrutura operação antes do “=”, foi mais que o dobro do percentual de alunos que demonstraram a concepção operacional no instrumento 2, no qual as expressão apresentavam a estrutura operação depois do “=”.

Estes resultados permitem conjeturar que a estrutura da expressão exerce influência nas concepções dos alunos sobre o significado do símbolo “=”, particularmente no que diz respeito à relação entre a concepção operacional e a estrutura das expressões operação antes do “=”. Por fim, podemos argumentar que existem dois fatores importantes que parecem exercer grande influência em relação à concepção operacional: o contexto das operações aritméticas, no qual um lado é dado e o outro deve ser encontrado, e, a estrutura da expressão operação antes do “=”.

Na síntese geral dos dados provenientes dos dois instrumentos de investigação que utilizamos na coleta de dados, verificamos que das sete concepções utilizadas para categorização dos dados, apenas a concepção funcional não foi identificada nas respostas dos alunos. Todavia, nossos resultados permitem argumentar que, os alunos do 3º ano do Ensino Médio que participaram desta pesquisa, apresentaram uma tendência maior em demonstrarem a concepção operacional e a concepção relacional nome-símbolo. Lembramos que a concepção operacional é associada às características particulares do símbolo “=” no contexto das operações aritméticas, enquanto que a concepção relacional nome-símbolo não é associada a nenhum contexto em particular, mas, remete à relação entre o nome igualdade e o símbolo “=”.

Ressaltamos que o fato de a concepção operacional ter sido predominante não foi muito surpreendente, pois, na maioria das pesquisas sobre o sinal de igualdade, encontramos conclusões semelhantes. Já o fato do percentual referente à concepção relacional nome-símbolo ter sido bastante próximo do percentual de alunos que apresentou a concepção operacional, foi realmente inesperado. Acreditamos que a falta de esclarecimento sobre o fato do “=” ter vários significados pode justificar o alto percentual de alunos que demonstrou a concepção relacional nome-símbolo. Segundo Brousseau e Antibi (2000), é possível que durante a vida escolar de um aluno não seja realizado nenhum estudo explícito sobre os diferentes significados do símbolo “=” e que até mesmo os professores podem não ter consciência real dos vários significados deste símbolo. Assim, estes autores indicam que a instrução pode influenciar de modo especial, as concepções dos alunos sobre o significado do símbolo “=”, levando-os a acreditarem que este símbolo tem apenas um status.

Com a realização desta pesquisa foi possível identificar, nas concepções sujeitos que participaram da pesquisa, dois fatores importantes relacionados à concepção operacional: o contexto das operações aritméticas que sugere um cálculo a ser realizado e que se coloque o resultado, comumente depois do "=", e, a estrutura da expressão *operação antes do "=".* Argumentamos que estes dois fatores representam uma influência muito forte nas concepções dos alunos sobre o significado do símbolo "=", pois remetem as primeiras, e, talvez as únicas, idéias que são explicitamente instruídas sobre o significado do símbolo "=".

Por exemplo, podemos dizer que é no contexto das operações aritméticas que o símbolo "=" é introduzido. Justamente por neste contexto as expressões apresentarem apenas um lado, tal como 3 + 4 =, a instrução mais comum destaca as idéias de que esta expressão é para resolver, calcular, achar o resultado, ou seja, sugere ação e nesse sentido o "=" tem status de um operador (KIERAN, 1981; BOOTH, 1995). Ao mesmo tempo, as expressões que são comumente resolvidas pelos alunos no contexto das operações aritméticas apresentam a estrutura operação antes do "=", sugerindo que este símbolo seja interpretado de maneira unidirecional, no sentido da esquerda para a direita, realçando, assim, as idéias de que, antes do "=" vem a operação, e, depois do "=" vem o resultado/a resposta.

O contexto das igualdades aritméticas pode ser entendido como uma conseqüência da resolução das expressões do contexto das operações aritméticas. Em outras palavras, após resolver a expressão 3 + 4 = e colocar o resultado depois do "=", temos a igualdade aritmética 3 + 4 = 7. Como a literatura que discutimos demonstra, não é comum que os alunos estudem igualdades com estruturas diferente da operação antes do "=", e, assim, freqüentemente os alunos não aceitam expressões nas quais não aparece sinal de operação antes do "=", tais como 3 = 3 e 7 = 3 + 4 (BEHR, ERLWANGER e NICHOLS, 1980) e costumam modificá-las para 0 + 3 = 3 ou 3 + 4 = 7 (BEHR, ERLWANGER e NICHOLS, ibid.; SHOECRAFT, 1989). Nesse sentido, ressaltamos que as experiências que as crianças adquirem sobre o símbolo "=" no decorrer de suas primeiras experiências aritméticas conduzem à uma concepção operacional.

No contexto das equações, por sua vez, o significado do sinal de igualdade deveria ser compreendido pelos alunos como indicador de uma relação de equivalência ao invés de um símbolo para "escreva o resultado". Sobre este aspecto, Booth (1995) explica que a concepção referente à equivalência pode não ser logo de início percebida pelo aluno, contudo, ela destaca que esta concepção é necessária para a compreensão algébrica. De fato, a ruptura da concepção operacional do sinal de igualdade é considerada imprescindível para a aprendizagem em Álgebra.

Assim como no contexto das equações, no contexto das funções, a concepção operacional, referente aos aspectos do sinal de igualdade no contexto aritmético das operações não é, *stricto sensu*, a mais adequada às particularidades associadas aos significados do símbolo "=". No entanto, mais de um quinto dos alunos apresentaram esta concepção.

Como nosso estudo foi do tipo *diagnóstico*, os resultados não nos permitem aprofundar uma discussão das possíveis causas que determinam o fato de a concepção operacional, freqüentemente desenvolvida no processo de ensino-aprendizagem de expressões no contexto das operações aritméticas, nas séries iniciais, persistir nas concepções dos alunos cursando o 3º ano do Ensino Médio e em contextos nos em que esta concepção não é a mais adequada.

De fato, Kieran (1981) já apontava que a concepção operacional persiste além das séries iniciais e tal fato vem sendo verificado por diversos estudos que investigaram a compreensão dos alunos sobre o sinal de igualdade (ex. FALKNER, LEVI e CARPENTER, 1999; DEMONTY e VLASSIS, 1999; McNEIL e ALIBALI, 2005; KNUTH *et. all.*, 2006; CAVALCANTI e CÂMARA DOS SANTOS, 2007b). Todavia, nenhum destes estudos aprofunda o porquê desta concepção ser resistente e conservar-se além das séries inicias e do contexto das operações aritméticas. Dessa maneira, reconhecemos que há um amplo espaço para outras pesquisas investigarem e explicitarem o porquê da concepção operacional ser tão estável no sentido de que continua sendo bastante identificada nas concepções de alunos em séries adiantadas, mesmo em contextos que requerem outro tipo de concepção.

Dadas estas considerações, indicamos que a questão da concepção operacional do sinal de igualdade não se restringir ao contexto das operações aritméticas e ser freqüentemente identificada em outros contextos, pode ser estudada à luz dos fenômenos didáticos. Por exemplo, recorrendo novamente a Brousseau e Antibi (2000), notamos que estes autores acreditam que a instrução pode influenciar de modo especial, as concepções dos alunos sobre o significado do símbolo "=", levando-os a acreditarem que este símbolo tem apenas um status. Acreditamos também que a instrução pode exercer forte influência sobre as concepções dos alunos, mas, sobretudo acerca do desencontro que evidenciamos em nossa pesquisa entre as concepções dos alunos e o significado do "=" no contexto no qual está inserido.

Nessa direção, indicamos que algumas pesquisas poderiam ser realizadas empregando-se o modelo teórico da Transposição Didática e do Contrato Didático para investigar como acontece a utilização do símbolo "=" nas aulas de Matemática, mais particularmente focando como são abordados os aspectos que permeiam o significado do símbolo "=" nos contextos das operações aritméticas, das igualdades aritméticas, das equações e das funções.

Em outra direção, concordamos com Brousseau e Antibi (2000) quando sugerem que a possibilidade de que os próprios professores podem não ter consciência de que o sinal de igualdade tem vários significados. Com efeito, não encontramos na literatura nenhum estudo sobre o sinal de igualdade na perspectiva dos professores. Assim, entendemos que futuras pesquisas poderiam também explorar, por exemplo, as concepções dos professores sobre o significado do símbolo "=", e, até mesmo a influência destas concepções em sua prática pedagógica.

Na perspectiva de rupturas entre os significados do símbolo "=", a literatura aconselha que se deva ampliar, no âmbito da Álgebra, o significado do sinal de igualdade para além da concepção operacional, comumente realçada na Aritmética. Na perspectiva de nosso estudo, sugerimos a realização de pesquisas para investigar os aspectos de ruptura dos significados do símbolo "=" não apenas em relação à Aritmética e Álgebra, mas sim em relação aos contextos, operações aritméticas, igualdades aritméticas, equações e funções. Acreditamos assim, que em cada contexto há características particulares que são essenciais para uma compreensão adequada dos significados deste símbolo "=" no contexto ao qual está inserido. Nessa direção, outros aspectos poderiam ser estudados, investigando-se a relação envolvendo o desencontro entre o significado do símbolo "=" e as concepções dos alunos, a exemplo do que evidenciamos em nossa pesquisa, com possíveis erros ou dificuldades na aprendizagem de conceitos matemáticos.

Após a literatura avançar nos estudos dos fenômenos didáticos que permeiam a construção de significados acerca do símbolo “=” no contexto no qual está inserido, acreditamos que, então, poderão ser realizadas outros tipos de pesquisas, partindo da elaboração e experimentação de seqüências didáticas. Tais pesquisas podem auxiliar a compreensão de como realizar adequadamente as rupturas necessárias dos significados do sinal de igualdade nos contextos, em particular, algébricos, e, favorecer ao mesmo tempo a ampliação das concepções apropriadas a cada contexto evitando, assim, o desencontro que verificamos na presente pesquisa entre os significados do símbolo “=” e as concepções dos alunos.

REFERÊNCIAS

REFERÊNCIAS

ANGLADA, C. (2000). *La evolución de la igualad em escolares de 10 a 14 años de edad.* Trabajo de investigación tutuelada no publicado, Dpto. de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales, Universidad de Málaga, Málaga.

ARTIGUE, M. (1990). Épistémologie et didactique. In: *Recherche en didactique des mathématiques,* Vol. 10, nº 2.3. (p. 241-286).

BALACHEFF, N. (1995), Conception, Connaissance et Concept. *Didactique et Technologies Cognitives en Mathématiques,* Séminaires 1994-1995. Université Joseph Fourier, Grenoble. (p. 219-244).

____________, N. (2001), Les connaissances, pluralité de conceptions: le cas des mathématiques. Les Cahiers Leibniz, n°19.

____________, N. (2005). Cuadro, registro y concepción. Notas sobre las relaciones entre tres conceptos claves en didáctica *Revista EMA*, 10 (1). (p. 181-204).

____________, N., e GAUDIN, N. (2002). Students conceptions: an introduction to a formal characterization. *Les Cahiers Leibniz*, n°65.

____________, N., e MARGOLINAS, C. (2005). cK¢, Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In: Mercier A. et Margolinas C., *Balises pour la didactique des mathématiques,* Grenoble. La pensée sauvage.

BAROODY, A., e GINSBURG, H. (1983). The Effects of Instruction on Children's Understanding of the "Equals" Sign. *The Elementary School Journal, 84*, 199-212.

BARUK, S. (1992). *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*, Éditions du Seuil.

BEHR, M., ERLWANGER, S. e NICHOLS, E. (1976). How children view equality sentences. *PDMC Technical Report Nº 3.* Tallahassee. Florida State University. (ERIC Document Reproduction Service No. ED144-802).

_____, M., ERLWANGER, S., e NICHOLS, E. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics Teaching, 92*, 13-15.

BERGERON, J. C., e HERCOVICS, N. (1988). An extended model of understanding. In: Behr, M., Lacampagne, C., Wheeler, M. (eds.), *Proceedings of PME-NA–10.* Illinois: Northern Illinois University.

BESSOT, A., e RICHARD, F. (1977). Etude du schéma dans l'enseignement des mathématiques, M´moire de DEA, IREM de Bordeaux.

BOOTH, L. (1995). Dificuldades das crianças que se iniciam em Álgebra. In: COXFORD, A. & SHULTE, A (orgs.). *As Idéias da Álgebra.* São Paulo, SP: Atual Editora, p. 23-37.

BORASI, R., (1990). The invisible operating in mathematics instruction: Students' conceptions and expectations. In: T. Cooney & C. Hirsch (eds). *Teaching and Learning Mathematics in the 1990s*. 174-182. Reston, Virginia: NCTM.

BOUVIER, A., e GEORGE, M. (2000). *Diccionario de matemáticas* (2ª Ed.). Madrid: Akal ediciones.

BOYER, C. B. (1974). *História da matemática*. Tradução: Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher Ltda.

BREIDENBACH, D., DUBINKY, E., HAWALS, J., & NICHOLS, D. (1992). Development of the Process Conception of Function. *Educational Studies in Mathematics*, 23. (p. 247-285).

BRITO LIMA, A. P. (1996). *O desenvolvimento da representação de igualdades*. Dissertação de Mestrado não publicada. Mestrado em Psicologia – UFPE.

BROUSSEAU, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 4, n°2, La pensée sauvage. Grenoble. (p. 165-198).

____________, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des Mathématiques* vol 7.2. La pensée sauvage. Grenoble. (p. 33-115).

____________, G. (1988). Représentations et didactique du sens de la division. In G. Vergnaud, G. Brousseau, & M. Hulin (Eds.), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*. (Actes du colloque de Sèvres, mai 1987) Grenoble: La Pensée Sauvage Editions.

____________, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In: Bednarz N., Garnier C. (eds.) *Construction des savoirs.* Montréal: Editions Agence d'ARC. (p. 41-63).

____________, G. (1997). La théorie des situations didactiques. Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal. A paraître dans "*Interactions didactiques*" (Genève).

____________, G. (1998). Théorie des situations didactiques, [Textes rassemblés et prepares par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield], Grenoble : La Pensée Sauvage - Éditions, coll. *Recherches en Didactique des Mathématiques*.

____________, G. (2000). Education et didactique des mathématiques. *Revista Educación Matemática*. Vol. 12, N° 1. México. (p. 5-39).

___________, G., DAVIS, R. B., & WERNER, T. (1986). Observing students at work. In: B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

___________, G., e ANTIBI, A. (2000) La dé-transposition des connaissances scolaires. In: *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 20/1 pp. 7-40. La pensée sauvage.

CAJORI, F. A. (1993). *History of mathematical notations*: Two volumes bound into one. Originally published: Chicago: Open Court Pub. Co., 1928-1929. New York: Dover Books.

CÂMARA DOS SANTOS, M. (2002). Algumas concepções sobre o ensino e a aprendizagem em matemática. *Educação Matemática em Revista*, São Paulo, p. 38-46.

CAMICI, C., CINI, A., COTTINO, L., DAL CORSO, E., D'AMORE, B., FERRINI, A., FRANCINI, M., MARALDI, A. M., MICHELINI, C., NOBIS, G., PONTI, A., RICCI, M., e STELLA, C. (2002). Uguale è un segno di relazione o un indicatore di procedura? *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 25, 3, 255-270. Em: http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/429%20articolo%20su%20uguale.pdf.

CARPENTER, T. P., FRANKE, M. L., e LEVI, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic y algebra in elementary school.* Portsmouth: Heinemann. (Chapter 2).

___________, T. P., LEVI, L., e FARNSWORTH, V. (2000). Building a foundation for learning algebra in the elementary grades. *In Brief*, Vol. 1, No. 2. Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. Disponível em: http://www.wisc.wcer.edu/ncisla.

___________, T., e LEVI, L. (2000). *Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in the Primary Grades.* (Research Report 00-2). Madison, WI : National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. Disponível em: www.wcer.wisc.edu/ncisl.

CAVALCANTI, J. D. B., e CÂMARA DOS SANTOS, M. (2007a). NOÇÃO OPERACIONAL E EQUIVALÊNCIA: UM ESTUDO SOBRE A COMPREENSÃO DO SINAL DE IGUALDADE. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007. *Anais do IX ENEM*. Belo Horizonte.

_____________, J. D. B., e CÂMARA DOS SANTOS, M. (2007b). UM ESTUDO SOBRE A COMPREENSÃO DO SINAL DE IGUALDADE COM ALUNOS DA 6ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL. In: Reunión Comité Interamericano de Educación Matemática 'XII CIAEM', Santiado de Querétaro-México. *Memorias do XII CIAEM*, 2007.

CHÁVEZ, C., e LEÓN, A. (eds.) (2003). *La Bíblia de lãs Matemáticas.* México: Editorial Letrarte.

CHEVALARD, Y., (1985). *La transposition didactique*. La Pensée Sauvage. Grenoble.

CLEMENT, J. (1980). *Algebra Word problem solutions*: Analisis of a common misconception'. Paper presented at annual meeting of American Educational Research Association, Boston, 1980.

COLLIS, K. F. (1974). Cognitive development and mathematics learning. Paper presented at *Psychology of Mathematics Education Workshop*. Centre for Science Education, Chelsea College, London.

CONFREY, J. (1990). A review of the research on student conceptions in mathematics, science, and programming. *Review of Research in Education, 16*. (3-56).

_________, J., e LACHANCE, A. (2000). Transformative Teaching Experiments through Conjecture-Driven Research Design. In: A. Kelly, and R. Lesh (eds). *The Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

CONTADOR, P. R. M. *Matemática, uma breve história*. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2006. Vol. 01.

CURY, H. N. (1994). *As concepções de matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos*. Tese de Doutorado em Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

_____, H. N., LANNES, W., BROLEZZI, A. C. e VIANNA, C. R. (2002). Álgebra e educação algébrica: concepções de alunos e professores de matemática. In: *Educação Matemática em Revista*, v.4, n.4, Rio Grande do Sul. (p. 9-15).

DANEAU, C., SCHMIDT, S. e THIVIERGE-AYOTTE, L. (2000). Le rôle de la réflexion collective et de la symbolisation dans le développement de la pensée mathématique d'élèves en difficulté grave d'apprentissage. *Apprentissage et socialisation, 20*(2), 47-69.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. (1997). A Álgebra como Ferramenta de Representação e Resolução de Problemas. In: SCHLIEMANN, A. D. *Estudos em Psicologia da Educação Matemática (2ª ed.)*. Ed. UFPE, Recife.

DELOUSTAL-JORRAND, V. (2001). Implication et raisonnement mathématique. *Actes de la XIè École d'été de didactique des mathématiques*. éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

DEMONTY, I., e VLASSIS, J. (1999). Les representations pre-algebriques des eleves sortant de l'enseignement primaire. Synthèse de la recherche en pédagogie n°231/97. In: *Informations Pédagogiques n° 47 - Mai*. Université de Liè. Disponível em: http://www.restode.cfwb.be/ROOT/download/infoped/info47b.pdf.

DENMARK, T., BARCO, E., & VORAN, J. (1976). Final report: A teaching experiment on equality. *PMDC Technical Report Nº 6*. Florida State University. (ERIC Document Reproduction Service No. ED144805).

DÍAS, M. (1990). *Diccionario Básico de Matemáticas.* Madrid: Anaya.

DOLORES, C., e VALERO, M. S. (2004). Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en la situación escolar. *Revista Epsilon*, 58 Vol. 20(1). (p. 45-73).

DOSSEY, J. A. (1992). The nature of mathematics: its role and its influence. In: D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematic teaching and learning*. New York: Macmillan. (p. 39–48).

DOUADY, R. (1980). Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans). *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 1.1. (p. 77-110).

EL BOUAIZZAUI, H. (1988): *Conceptions des eleves et des profeseurs á propos de la notion de continuité d'une fonction*. Thése, Ph. D. Université Laval.

ERLWANGER, S., e BERLANGER, M. (1983). Interpretations of the equal sign among elementary school children. In: *Proceedings of the North American Chapter of the International Group for Psychology of Mathematics Education*. Montreal, Canadá

ERNEST, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: The Falmer Press.

FALKNER, K. P., LEVI, L., e CARPENTER, T. P. (1999). Children's understanding of equality: a foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics, 6*(4), 232-236.

FARMAKI, V., KLAOUDATOS, N., e VERIKIOS, P. (2005). Introduction of Algebraic thinking: Connecting the concepts of linear function and linear equation. In: *Proceedings of the 3rd Mediterranean conference of didactics of Mathematics*, Palermo, July 2005.

FILLOY, E. e ROJANO, T. (1989). Solving equations: transition from arithmetic to álgebra. *For the Learning of Mathematics, 9(2),* 19-25.

FIORENTINI, D., MIORIM, M. A. & MIGUEL, A. (1993). Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar, In: *Pro-Posições*, Revista Quadrimestral da Faculdade de Educação – Unicamp. Vol. 4, nº 1 [10]. Campinas: Cortez Editora, p.78-91.

FITTING, M., & FITTING, G. (1990). *Numbers*. Lido em novembro de 2007: http://comet.lehman.cuny.edu/fitting/bookspapers/pdf/unpubbooks/NumbersBook.pdf

FLORES, P. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje.* Granada: Comares.

FLÜCKIGER, A. (2000). *Genèse expérimentale d'une notion mathématique: la notion de division comme modèle de connaissances numériques*. Thèse présentée à la Faculté de Psychologie à la Faculté de Psychologie et de Sciences de l'Education de l'Université de Genève pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences de l'Education: Didactique des Mathématiques. Genève.

FREGOSO, A. (1977). *Los elementos del lenguaje de la matemática. Lógica y teoría de conjuntos.* México: Editorial Trillas.

FREIMAN, V., e LEE, L. (2004). Tracking primary student's understanding of the equal sign. In: M. Johnsen e A. Berit (Eds), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2.* (pp. 415-422), Bergen, Noruega: Bergen University College.

FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an educations task*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.

_______________, H. (1983). *Didatical phenomenology of mathematical structures*. Mathematics education Library. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.

FUSON, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In: D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 243 – 275). New York: Macmillan Publishing Company.

GALLARDO, A., e ROJANO, T. (1988). Áreas de dificultades em la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. In: *Recherche en didactique des mathématiques,* Vol. 9, nº 2. (pp. 155-188).

GARBI, G. G. *A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2006.

GARCÍA, P. (1992). *Diccionario de Términos Matemáticos.* Valladolig: Editorial La Calesa.

GATTEGNO, C. (1974). *The Common Sense of Teaching Mathematics.* Educational Solutions, New York.

GAUDIN, N. (2005). *Place de la validation dans la conceptualisation, le cas du concept de fonction*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble 1.

GINSBURG, H. (1977). *Children's arithmetic: how they learn it and how you teach it*. Texas: PROED, Inc, Austin.

GODFREY, D., & THOMAS, M. O. J. (2004). What do they see when they look? A student's perspective on equations. In I. Putt, R. Faragher & M. McLean (Eds.), *Mathematics Education for the Third Millennium Towards 2010* (Proceedings of the 27th Mathematics Education Research Group of Australasia Conference, pp. 263–270). Townsville: MERGA.

GODINO, J. D., e FONT, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Matemáticas y su didáctica para maestros. *Manual para el estudiante*: Edición Febrero, 2003. disponível em http://www.ugr.es/local/jgodino/edumatmaestros/

________, J. D., BATANERO, C., e FONT, V. (2006). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponível na internet em: URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm.

GRENIER, D. (1988). *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d' enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*. Tese de Doutorado, IMAG, Université Joseph Fourier. Grenoble.

GRUGEON, B. (2000), Une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire: Conception, exploitation et perspectives. In: *Actes des journées de formation de formateurs, Boisseron.* Publication de l'IREM, Université Montpellier II.

GUIMARÃES, H. (1993). *Ensinar matemática: concepções e práticas*. Tese de mestrado em Educação. Universidade de Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

HAFSTROM, J. E. (1961). *Basic concepts in modern mathematics*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

HEEFFER, A. (2004). The emergence of symbolic algebra as a shift in predominant models. *International Conference - Model-Based Reasoning in Science and Engineering Abduction, Visualization, Simulation*. University of Pavia, Italy. http://logica.ugent.be/albrecht/thesis/MBR2004.pdf (lido em outrubro de 2007).

_________, A. (2007). On the Nature and Origin of Algebraic Symbolism. *Perspectives on Mathematical Practices - International Conference*. Vrije Universiteit Brussel, Belgium. http://logica.ugent.be/albrecht/thesis/PMP2007Heeffer.pdf (lido em outubro de 2007).

HERSCOVICS, N., & LINCHEVSKI, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*, 59-78.

____________, N., e KIERAN, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *The Mathematics Teacher, nº 8, v. 73*, 572-581. The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

JONES, I., e PRATT, D. (2005). Three utilities for the equal sign. Em: H. L. Chick e J. L. Vicent (Eds.), *Proceedings of the 29th conference of the international group for the psychology of mathematics education,* Vol. 3 (pp. 185-192). Melbourne: PME.

______, I. (2006). The equals sign and me. *Mathematics teaching incorporanting micromath, 194,* 6-8.

JOSHUA, S. (1989). La perdurance des obstacles épistémologiques: un révelateur de leur nature. Em: Bednarz, N. y Garnier, C. (eds.). *Constructions des savoirs: Obstacles e conflicts*. Agence D'Arc, (pp. 110-116).

KALDRIMIDOU, M., e TZEKAKI, M. (2005). Theoretical issues in research of mathematics education: some considerations. In: *Proceedings of the Fourth Congress of* *theEuropean Society for Research in Mathematics Education*. European Research in Mathematics Education IV, Sant Feliu de Guíxols, Spain. (p. 17-21).

KENNY, A. (1997). *Introducción a Frege.* Madrid: Ediciones Cátedra.

KIERAN, C. (1979). Children's operational thinking within the context of bracketing and the order of operations. In: Tall, D. (ed.), *Proceedings of the Third International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Mathematics Education Research Centre, Warwick University, Coventry, England.

_______, C. (1980). Constructing meaning for non-trivial equations. Paper presented at *Annual Meeting of American Educational Research Association*, Boston. (ERIC Document Reproduction Service No. EDI84899).

_______, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 317-326.

_______, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In: D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390 – 419). New York: Macmillan Publishing Company.

KNUTH, E. J., STEPHENS, A. C., McNEIL, N. M., e Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*, 297-312.

LABINOWICZ, E. (1985). *Learning from Children. New beginnings for teaching numerical thinking.* Menlo Park, California: Addison-Wesley Publishing Company.

LABRAÑA, A. (2001). *Avaliación das concepcións dos alumnos de COU e bacharelato acerca do significado do cálculo integral*. Tesis de Doctorado em Ciencias de la Educación. Universidad de Santiago de Compostela.

LIMA, I. (2006). *De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs*: étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale. Tese de doutorado em Didactique des Mathématiques. Université Joseph Fourier, Grenoble.

_____, I. (2007). Procedimentos de resolução utilizados por alunos do ensino básico na construção de figuras por simetria de reflexão. In: *IX Encontro Nacional de Educação Matemática*. Belo Horizonte-MG.

LINCHEVSKI, L., & HERSCOVICS, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics, 30*, 39-65.

LINS LESSA, M. M. (1996). *A balança de dois pratos e problemas verbais como ferramentas didáticas*: um estudo comparativo. Dissertação de Mestrado não-publicada. Recife: UFPE.

LINS, R. & GIMENEZ, J. (1997). *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas, SP: Papirus.

MAIA, L. S. L. (2002). Analisando a aula de matemática: um estudo a partir das representações sociais do ensino da geometria. In: *25a Reunião Anual da ANPED*, Caxambú.

MARGOLINAS, C. (1993), *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage – Éditions.

McNEIL, N. M. (2004). Don't teach me 2 + 2 = 4: Knowledge of arithmetic operations hinders equation learning. In K. D. Forbus, D. Gentner, & R. Regier (Eds.), *Proceedings of the Twenty-sixth Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 938-943). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

_______, N. M., & ALIBALI, M. W. (2005). Knowledge change as a function of mathematics experience: All contexts are not created equal. *Journal of Cognition & Development, 6*, 285-306.

_______, N. M., GRANDAU, L., KNUTH, E. J., ALIBALI, M. W., STEPHENS, A. C., HATTIKUDUR, S., e KRILL, D. E. (2006). Middle-school students' understanding of the equal sign: The books they read can't help. *Cognition and Instrunction,* 24, 367-385. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

MEAVILLA, S. V. *Aspectos históricos de las matemáticas elementales*. Zaragoza. Prensas Universitarias de Zaragoza, 2001.

MEDINA, M. M. P. (1999). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. Tesis Doctoral**.** Didáctica de la Matemática. Universidad de La Laguna, Espanha.

MEIRA, L. (1997). Aprendizagem e ensino de funções. In: SCHLIEMANN, A. D. *Estudos em Psicologia da Educação Matemática (2ª ed.)*. Ed. UFPE, Recife.

MEVARECH, Z., e YITSCHAK, D. (1983). Student's misconceptions of the equivalence relationship. In: Hershkowitz, R. (dir.), *Proceedings of the Seventh International Conference of the Psychology of Mathematics Education* (p. 313-318). Rehovot, Israel: Weizmann Institute of Science.

MIYAKAWA, T. (2005). *Une étude du rapport entre connaissance et preuve: le cas de la notion de symétrie orthogonale*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble 1.

MOLINA, M. (2005). *Resolución de Igualdades Numéricas por Estudiantes de Tercer Grado. Un estudio sobre la compresión del signo igual y el desarrollo de pensamiento relacional.* Trabajo de Investigación Tutelada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponível em: http://biblioteca.unirioja.es/dialnet/490677.pdf.

________, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

________, M., CASTRO, E., e AMBROSE, R. (2006). Trabajo com igualdades numéricas para promover pensamiento relacional. *PNA, Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *1*(1), 31-46.

MOREUX, T. (1923). *Pour comprendre l'algèbre*. Librairie Octave Doin, Paris.

NCMR, NATIONAL COMMITTEE ON MATHEMATICAL REQUIREMENTS. (1921). Terms and symbols in elementary mathematics. *The Mathematics Teacher, nº 3, v. XIV*.

NCTM, NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

NORTON, S. J., e COOPER, T. J. (2001). *Students' perceptions of the importance of closure in arithmetic: implications for algebra*. In: The Mathematics Education into the 21st Century Project Proceedings of the International. Conference New Ideas in Mathematics Education. Palm Cove, Austrália.

OKSUZ, C. (2007). Children's understanding of equality and the equal symbol. *International Journal for Mathematics and Learning*. Centre for Innovation in Mathematics Teaching (CIMT). University of Plymouth. Disponível em: http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/oksuz.pdf.

PAJARES, M. F. (1992). 'Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct', *Review of Educational Research* *62*(3), 307-332.

PERNAMBUCO, SEDUC**.** *Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino do Estado de Pernambuco*. CD-ROM. Recife, 2006.

PONTE, J. P. da. (1992). Concepções dos professores de matemática e processos de formação. In: PONTE, J.P. et al. *Educação matemática*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional. (p.187-239).

______, J. P. da. (1994). Knowledge, beliefs and conceptions in mathematics teaching and learning. In L. Bazzini (Ed.), *Theory and practice in mathematic education: Proceedings of the V Conference for the Systematic Cooperation Between the Theory in Practice in Mathematics* (p. 169-177). Pavia, Italy: ISDAF.

______, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* .(pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

PUIG, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. In: *Investigaciones en Matemática Educativa II*. México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica, págs.109-131.

RECORDE, R. (1557). *The whetstone of witte [...]*. By I. Kyngston, London.

ROJANO, T. (2002). Mathematics learning in the junior secondary school: Students' access to significant mathematical ideas. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (Vol. 1, pp. 143-163). Mahwak, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

RUIZ, L. (1993). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico. *Documento no publicado.* Granada: Universidad de Granada.

SÁENZ-LUDLOW, A., e WALGAMUTH, C. (1998). Third Graders' Interpretation of Equality and the Equal Symbol. *Educational Studies in Mathematics, 35*(2), 153-187.

SALIN, M. H. (1976). *Le rôle de l'erreur dans l'appretissage des mathématiques de l'école primaire*. IREM de Bordeaux.

SCHLIEMANN, A. D., CARRAHER, D. W., e BRIZUELA, B. M. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

SELDEN, A., & SELDEN, J. (1992). Research Perspectives on Conceptions of Function: Summary and Overview. In E. Dubinky & G. Harel (eds). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Mathematical Association of America. (MAA Notes 25: p. 1-16).

SEO, K-H., & GINSBURG, H. P. (2003). "You've got to carefully read the math sentence…": Classroom context and children's interpretations of the equals sign. In: A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

SHOECRAFT, P. (1989). "Equals" means "the same as". *The Arithmetic Teacher, 36*(8), 36-40.

SIERPINSKA, A. (1989). *On 15-17 years old students' conceptions of functions, iteration of functions and attractive fixed points*. Institut de Mathématiques, preprint 454. Varsovie: Académie des Sciences de Pologne.

___________, A. (1992). On Understanding the Notion of Function. In E. Dubinky & G. Harel (eds), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Mathematical Association of America. (MAA Notes 25: p. 22-58).

STACEY, K., & MACGREGOR, M. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher, 90*(2), p. 110-113.

TAHRI, S. (1993). *Modélisation de l'Interaction Didactique: un Tuteur Hybride sur CABRI-GÉOMÈTRE pour l'Analyse de Décisions Didactiques*. Tese de doutorado, IMAG, Université Joseph Fourier.

TAYLOR, J. M. (1910). The axioms of equals not applicable to equations. *The Mathematics Teacher, n^o 4, v. II*, 135-146. Syracuse, N. Y.

THEIS, L. (2003). *Étude du développement de la compréhension du signe = chez des enfants de première année du primaire*. Thèse présentée à la Faculté d'éducation pour l'obtention du grade de Philosophiae Doctor (Ph. D.). Université de Sherbrooke.

THOMPSON, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws, *NCTM Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York: Macmillan. (p. 127-146).

USISKIN, Z. (1995). Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. Em: COXFORD, A. & SHULTE, A (orgs.) (1995). *As Idéias da Álgebra.* São Paulo, SP: Atual Editora, 1995. p. 9-22.

VERGNAUD, G. (1990). La Théorie des champs conceptuels. *Recherche en didactique des mathématiques, 10, (2-3).* (p. 133-170).

___________, G. (1994). *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Collection Exploration - cours et contributions pour les sciences de l'éducation. Peter Lang.

___________, G., CORTES, A., e FAVRE-ARTIGUE, P. (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles: problèmes épistemologiques et didactiques. Em: G. Vergnaud, G. Brousseau, e M. Hulin (Eds.), *Didactique et acquisitions des connaisances scientifiques : Actes du Colloque de Sèvres* (pp. 259-280). Sèvres, France, La Pensé Sauvage.

VERRET, M. (1975). *Le temps des études*, Paris, Honoré Champion, 2 vol.

VINNER, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 14. (p. 293-305).

________, S., e DREYFUS, T. (1989) Images and definition for the concept of function. *Educational Studies in Mathematics* 20(4). (p. 356-366).

________, S., e TALL, D. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, Vol, 12. (151-169).

WAGNER, S. (1977). Conservation of Equation, Conservation of Function and their Relationship to Formal Operational Thinking. Doctoral dissertation. New York University.

WARREN, E., e COOPER, T. J. (2005). Young children's ability to use the balance strategy to solve for unknowns. *Mathematics Education Research Journal, vol. 17, n^o 1*, 58-72.

WILHELMI, M. R., GODINO, J. D., e LACASTA, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 27 (1): 77 - 120.