UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO – UFRPE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO – PRPPG
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS E MATEMÁTICA - PPGEC

ALINE OLIVEIRA DA SILVA BARBOSA

A TRIGONOMETRIA DO CICLO TRIGONOMÉTRICO: UMA ANÁLISE DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA REALIZADA PELO LIVRO DIDÁTICO NA 2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO À LUZ DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Recife-PE
2015

Aline Oliveira da Silva Barbosa

A TRIGONOMETRIA DO CICLO TRIGONOMÉTRICO: UMA ANÁLISE DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA REALIZADA PELO LIVRO DIDÁTICO NA 2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO À LUZ DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências e Matemática – PPGEC da Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE, como requisito para a obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Anna Paula de Avelar Brito Lima

Recife-PE
2015

Aline Oliveira da Silva Barbosa

A TRIGONOMETRIA DO CICLO TRIGONOMÉTRICO: UMA ANÁLISE DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA REALIZADA PELO LIVRO DIDÁTICO NA 2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO À LUZ DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências e Matemática – PPGEC da Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE, como requisito para a obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Aprovada em 29 de maio de 2015

Banca Examinadora

Prof. Dr. Abraão Juvêncio de Araújo - UFPE
(Avaliador Externo)

Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes - UFCG
(Avaliador Externo)

Prof. Dr. Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade - UFRPE
(Avaliador Interno)

Profª. Drª. Anna Paula de Avelar Brito Lima - UFRPE
(Orientadora)

Recife-PE
2015

Dedico este trabalho...
...à Dona Alexandrina, minha mãe...
...mulher de fibra, educadora inigualável, minha maior fonte de inspiração, minha fortaleza.

AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho só foi possível devido às contribuições de muitas pessoas que considero importantes, por diversos motivos. Por isso, gostaria de agradecer a cada uma delas por contribuir, de alguma forma, para a realização desta pesquisa.

Agradeço, primeiramente, a Deus pelo dom da vida.

Aos meus pais José Ernesto da Silva (*in memoriam*) e Alexandrina Oliveira da Silva, pelo amor incondicional, pela educação para a vida, pelo incentivo em todas as minhas caminhadas.

Ao meu esposo Paulo Sérgio de Araújo Barbosa, amigo de todas as horas, pela compreensão, cuidado e paciência durante o percurso dessa trajetória, assim como em outros momentos. Pelo apoio e incentivo em todos os desafios que abraço. Por compartilhar os projetos e sonhos nesta existência.

Aos meus irmãos pelo incentivo na vida pessoal, acadêmica e profissional.

À minha querida sobrinha Elaine Cristina Silva de Albuquerque, pelo companheirismo, carinho e atenção nos momentos que mais precisei.

Aos demais familiares e amigos que sempre torcem por mim.

À minha orientadora, Professora Anna Paula de Avelar Brito Lima, pela paciência, pelo incentivo, pelos conselhos e, principalmente, pela forma carinhosa de assistir seus orientandos, não só em relação aos trabalhos acadêmicos mas também em relação às questões pessoais.

À professora Ângela Vasconcelos da UFRPE, pelas orientações, incentivo, motivações e, principalmente, pelas contribuições na minha vida profissional durante a vivência na Escola de Referência em Ensino Médio Professor Cândido Duarte em parceria com a UFRPE.

Ao professor Ross Nascimento, pelo apoio nas atividades da Semana de Matemática da EREM Professor Cândido Duarte, pelo incentivo durante os momentos de formação continuada.

Ao professor Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade, pelas valiosas contribuições sobre a Teoria Antropológica do Didático.

Às professoras da UFRPE, Edenia Amaral, Sandra Helena de Melo e Lúcia Falcão, pelas contribuições durante a vivência na EREM Professor Cândido Duarte em parceria com a UFRPE.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências da UFRPE, pelas orientações durante todo o curso de Mestrado.

Aos colegas de turma do Mestrado, pelos momentos maravilhosos durante as aulas, pela troca de experiências, pela amizade dentro e fora da UFRPE.

À banca escolhida, pelas valiosas contribuições dadas à minha pesquisa.

À UFRPE, pela oportunidade e pelo apoio.

Aos colegas de trabalho da EREM Professor Cândido Duarte, pela compreensão no dia-a-dia, pela torcida, pelo incentivo, pelo ombro amigo nos momentos de angústia, por compartilhar comigo momentos difíceis e momentos de conquistas.

Aos meus queridos alunos, por me proporcionar momentos de aprendizado durante as aulas, pela amizade cultivada e incentivo.

A todos que, de certa maneira, contribuíram para a realização desta pesquisa.

RESUMO

A Trigonometria é um conceito da matemática utilizado em diversos campos do conhecimento. Por esta razão, o ensino deste saber na educação básica nos parece ser imprescindível. A insuficiência de pesquisas sobre o ensino deste conceito, dentre outros aspectos, motivou-nos a realizar esta pesquisa. Esta investigação consistiu em analisar a Transposição Didática da Trigonometria, especificamente o ciclo trigonométrico, realizada pelo livro didático na 2ª série do ensino médio, considerando os elementos que compõem a praxeologia matemática proposta na Teoria Antropológica do Didático-TAD. Para fundamentar nossa pesquisa, elegemos como foco os estudos de Chevallard e de outros autores, relativos à Transposição Didática externa, particularmente relacionados às transformações sofridas pelo saber, desde sua produção até como eles aparecem nos livros didáticos. Foram utilizadas três obras, sendo a análise principal em apenas uma delas; as demais foram utilizadas nas análises complementares, principalmente na construção da modelização a priori. Além dos livros didáticos, analisou-se, também, os documentos oficiais que direcionam a educação brasileira, com o objetivo de verificar como a Trigonometria é tratada nesses documentos. Para a análise dos dados de nossa pesquisa, utilizamos o referencial da Teoria Antropológica do Didático – TAD. Identificamos as tarefas (tipos e subtipos), as técnicas, as tecnologias e teorias abordadas nas atividades propostas. Os resultados de nossas análises apontam que os livros didáticos apresentam formas diferentes de abordagem do saber, resultado das transformações da transposição didática sofridas por este saber. Observamos que, em alguns momentos, houve a supressão de alguns aspectos relacionados à Trigonometria, já em outros, percebeu-se uma abordagem mais enfática de aspectos menos relevantes de acordo com os documentos oficiais, priorizando determinados tipos de tarefas, em detrimento de outras. Os resultados dessa pesquisa nos levaram a refletir sobre a importância da praxeologia matemática no processo de ensino e de aprendizagem.

Palavras chaves: Trigonometria, Transposição Didática, Teoria Antropológica do Didático, Praxeologia.

ABSTRACT

Trigonometry is a concept of mathematics used in several fields of knowledge. For this reason, the teaching of this scholarship in basic education seems to be essential. The lack of research on teaching this concept, among other things, motivated us to conduct this research. The goal of this quest is to analyze the Didactic Transposition of Trigonometry, specifically the first round of the trigonometric cycle, through the activities presented in the textbook of the second year of high school. In support of our research, we chose the studies of Chevallard, and other authors, on the external didactic transposition as our focus, particularly the ones related to the transformations suffered by knowledge, from production to the way they appear in textbooks. Three works have been used, one in the main analysis, and the others in further analysis, especially in the construction of a priori modeling. In addition to the textbooks, we analyzed the official documents that guide the Brazilian education, aiming to check how trigonometry is treated in those documents. To analyze the data of our research, we use the framework of Anthropological Theory of the Didactic - ATD. We identified the tasks (types and subtypes), the techniques, technologies and theories addressed in the proposed activities. The results of our analysis show that the textbooks have different ways of approaching knowledge, as a result of the transformation of didactic transposition suffered by this knowledge. We noticed that, sometimes, there was suppression of some aspects related to Trigonometry while, in other moments, it was clear a more emphatic approach of less relevant aspects, according to the official documents, prioritizing certain types of tasks over others. The results of this research led us to reflect on the importance of mathematics praxeology in the teaching and learning process.

Keywords: Trigonometry, Didactic Transposition, Anthropological Theory of Didactic, Praxeology.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

A.C.	Antes de Cristo
CNE	Conselho Nacional de Educação
COS	Cosseno
I	Instituição
LD	Livro Didático
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação
MEC	Ministério da Educação
O	Objeto
OCEM	Orientações Curriculares para o Ensino Médio-OCEM
PCEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PCN$_+$	Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais
RAD	Radiano
RI	Relação Institucional
SEM	Seno
ST	Subtipo de tarefa
T	Tarefa
t	Tipo de tarefa
TAD	Teoria Antropológica do Didático
TD	Transposição Didática
TG	Tangente
Θ	Teoria
Ɵ	Tecnologia
Τ	Técnica

SUMÁRIO

1 **INTRODUÇÃO**

A sociedade, ao longo dos anos, vem passando por transformações e, a partir delas, estudos vêm sendo realizados, em todas as áreas do conhecimento, no sentido de entender tais mudanças e promover possibilidades de avanços. Desta forma, o que era considerado importante numa época, em outra pode se tornar obsoleto. Essa mudança que ocorre na sociedade influencia, de forma direta ou indireta, o sistema educacional. Os saberes a serem ensinados também sofrem modificações. *O que* se ensina e *como* se ensina são questões sempre presentes em discussões sobre o processo de ensino e aprendizagem.

Neste contexto, o professor, sendo um sujeito que desempenha um papel importante neste processo, precisa estar atento para as mudanças que ocorrem na sociedade e se qualificar para as exigências atuais. Se antes acreditava-se que bastava o professor ter 'vocação' para ensinar, hoje se tem a certeza de que ele precisa de muito mais que isto.

Será que o professor tem algum conhecimento sobre a origem dos saberes que ensina aos seus alunos? O que ensina aos seus alunos é o saber científico, na sua forma original? Qual é o papel do livro didático neste processo de construção do conhecimento? Todas as atividades propostas por livros didáticos auxiliam a promover a aprendizagem? Essas são algumas das questões que ocupam pesquisadores em educação e ensino das ciências.

Quando se pensa no ensino da matemática, questões adicionais podem ser elencadas. Há uma exigência hoje, tanto na sociedade quanto nos documentos oficiais (BRASIL, 2000), que o ensino da matemática não se resuma ao ensino de algoritmo de resolução de problemas, nem a uma matemática excessivamente formal, distante da realidade do aluno. É preciso que o aluno desenvolva a capacidade de pensar matematicamente, de analisar, propor soluções, compreender o uso da matemática nos diversos contextos, inclusive os que vão além do universo escolar. Mas, para isso, é preciso refletir sobre a natureza do saber matemático e os fenômenos que se instituem numa sala de aula. Tal preocupação fez surgir vários caminhos de pesquisa, conduzidos por pessoas e grupos de estudiosos que se interessam pela educação matemática.

A Didática da Matemática, principalmente os estudos realizados na França, tem buscado contribuir com respostas para essas questões. Guy Brousseau (1978) desenvolveu a Teoria das Situações Didáticas, que nos ajuda a compreender as interações entre os componentes da tríade *professor-aluno-saber*. Yves Chevallard (1991) nos orienta que o saber científico sofre transformações e deformações até chegar à sala de aula; e, partindo desse pressuposto, o autor realiza um estudo que contempla a compreensão da trajetória cumprida pelo saber, desde a sua origem até chegar ao saber ensinado na sala de aula, denominando este percurso de *transposição didática*.

Esse pesquisador nos traz também, nesse contexto, uma classificação dos saberes (*saber científico, saber a ensinar e saber ensinado*) e das instituições responsáveis pela produção e transformações desses saberes (*instituição produtora*, *instituição transpositiva* e *instituição de ensino*). A esse processo que estuda a transformação dos saberes através das instituições, Chevallard chamou de Transposição Didática (1991).

No entanto, como a noção da Transposição Didática - TD estuda o saber e suas transformações, Chevallard considerou que essa visão necessitava ser ampliada, pois era preciso observar, também, o homem perante o saber, mais especificamente, perante as situações matemáticas, bem como o saber perante as instituições e a sociedade. Nesse contexto, desenvolveu a Teoria Antropológica do Didático - TAD. Almoloud (2007) considera que o saber matemático organiza uma forma particular de conhecimento, sendo resultado da ação humana em uma instituição; a TAD, particularmente, ressalta o papel das instituições no sistema didático.

No nosso entendimento, a TAD pode ser compreendida como uma ampliação, um olhar antropológico sobre as questões elencadas a partir da noção de transposição didática de Chevallard. E embora do ponto de vista ao acesso aos estudos desse pesquisador pela comunidade científica identifiquemos os estudos da TAD aparecendo posteriormente aos da transposição didática, podemos dizer que a semente de muitas das ideias fundamentais da TAD surgem desde os primórdios, como quando Chevallard (1991) propõe que todo saber é o saber de uma Instituição.

Para modelar as práticas sociais em geral e, em particular, a atividade matemática, a TAD nos apresenta as noções de (tipo de) *tarefa*, *técnica*, *tecnologia* e *teoria.* Quando consideramos uma tarefa (ou bloco de tarefas), o conjunto de técnicas, de tecnologias e de teorias ali envolvidas, formam uma *organização praxeológica*. A palavra praxeologia é formada pelos termos gregos: *práxis* – que significa prática, e *logos* – que significa razão. A praxeologia associada a um saber é a junção de dois blocos: saber-fazer (técnico/prático) e saber (tecnológico-teórico).

Considerando todo esse arcabouço teórico do qual falamos aqui, bem como a relevância das pesquisas nessa área, nossa investigação consistiu em analisar a Transposição Didática da Trigonometria, especificamente o ciclo trigonométrico, realizada pelo livro didático na 2ª série do ensino médio, considerando os elementos que compõem a praxeologia matemática proposta na Teoria Antropológica do Didático-TAD.

Para fundamentar nossa pesquisa, elegemos como foco os estudos de Chevallard e de outros autores, relativos à Transposição Didática externa, particularmente relacionados às transformações sofridas pelo saber. Para a análise dos dados de nossa pesquisa, utilizamos o referencial da Teoria Antropológica do Didático – TAD.

A escolha do saber a ser analisado (Trigonometria) se deu por vários motivos, sejam eles de natureza pessoal ou inquietação como profissional:

1) quando a pesquisadora ainda era aluna da educação básica, especificamente do ensino médio, fazia questionamentos aos seus professores sobre o porquê de estudar aquele conteúdo, e as respostas, na época, eram: *"porque está no programa",* "*um dia você vai precisar disso*"; durante a graduação e especialização, as disciplinas cursadas não deram ênfase ao estudo da trigonometria; ao ingressar na sala de aula, como professora de matemática da educação básica, essa pesquisadora se deparou com as mesmas perguntas que fazia aos seus professores, sendo que, agora, elas partiam de seus alunos e assim como seus professores, também não tinha muitos argumentos para seus alunos;

2) análises preliminares nos documentos oficiais (tratadas no item 3.2) apontam que o ensino da trigonometria na educação básica apresenta relevância;

3) número reduzido de pesquisas que tratam deste saber.

Para nos firmarmos na decisão de tomarmos a Trigonometria como o campo do saber a ser investigado nesse estudo, fizemos um levantamento preliminar sobre como o tema aparece nos estudos e artigos relacionados ao ensino, nos últimos anos (informações encontradas no item 3.3).

Foram estes aspectos que nos motivaram a pesquisar sobre a Trigonometria nos livros didáticos.

Esclarecemos ainda que optamos por fazer uma análise preliminar nos documentos oficiais, ação esta prevista em um dos nossos objetivos específicos, por considerar que tais análises eram importantes para auxiliar nas nossas escolhas, quanto à amostra de nossa investigação.

A escolha da 2ª série do ensino médio se deu devido a dois fatores: 1) por se tratar de um nível de ensino no qual a pesquisadora desenvolve suas atividades profissionais; 2) devido às análises preliminares nos documentos oficiais que regem a educação brasileira; nos PCN_+ a trigonometria aparece com mais ênfase na 2ª série do ensino médio (ver item 3.2.2).

Esclarecemos que foram utilizados três livros didáticos, sendo a análise principal em apenas um livro; os outros dois foram utilizados nas análises complementares, principalmente para a modelização a priori, como será explicado posteriormente.

Na próxima seção, elencamos os objetivos que nortearam todo o processo de nossa investigação.

1.1 OBJETIVO GERAL

Analisar a Transposição Didática da Trigonometria, especificamente o ciclo trigonométrico, realizada pelo livro didático na 2ª série do ensino médio, considerando os elementos que compõem a praxeologia matemática proposta na Teoria Antropológica do Didático-TAD.

1.2 **Objetivos específicos**

- Investigar como a trigonometria aparece nos documentos oficiais que gerenciam ou direcionam a educação brasileira.
- Identificar as tarefas (tipos e subtipos) propostas em três livros didáticos para o ensino do ciclo trigonométrico da 1ª volta.
- Investigar as técnicas, tecnologias e teorias apresentadas no livro didático considerado na análise principal fazendo comparações com os dois livros didáticos utilizados na análise complementar.

- Analisar e comparar as diferenças de tratamento e abordagem desse saber, nos documentos oficiais e nos livros didáticos analisados.

2 **FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**

Neste capítulo, apresentaremos algumas reflexões sobre a noção de transposição didática - TD e a teoria antropológica do didático – TAD, propostas por Yves Chevallard. Essas perspectivas compõem um grande campo de investigações sobre fenômenos didáticos no ensino da Matemática, originadas na França e que influenciam outras investigações em outros países. A TD traz reflexões sobre as diversas transformações sofridas pelo saber, desde sua produção até se tornar o saber ensinado. Dentre outros aspectos, a TAD estuda as organizações praxeológicas didáticas, que definiremos posteriormente, pensadas para o ensino da matemática. O processo de nossa investigação foi norteado pelos elementos trazidos por essas duas perspectivas teóricas.

2.1 TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Quando ouvimos a expressão *Transposição Didática*, é comum nos remetermos, de imediato, a Yves Chevallard - didata francês do campo do ensino da matemática. No entanto, a noção de Transposição Didática é introduzida por Michel Verret em 1975 (BRITO MENEZES, 2006). A partir dessa noção é que o pesquisador Chevallard desenvolve toda a sua teoria sobre este fenômeno didático.

Em seus primeiros momentos de discussão sobre a Transposição Didática, o autor afirma que ela existe porque o funcionamento didático do saber é diferente do seu funcionamento científico (CHEVALLARD, 1991). Isso ocorre porque na comunidade científica e na escola os objetivos são diferentes. Na escola, não se deseja que o aluno se aproprie do saber tal qual ele foi produzido na comunidade científica, até mesmo porque ele (aluno) talvez não disponha, ainda, de maturidade suficiente para compreender a complexidade que envolve os saberes do mundo científico. Surge então, a necessidade de tornar o saber científico ‘ensinável’, possibilitando a sua aprendizagem pelo(s) aluno(s). Para isso, o saber científico terá que passar por diversas transformações até se tornar objeto de ensino. Tais transformações implicam em deformações, supressões, acréscimos, criações didáticas que o saber científico passará até chegar à sala de aula. A transposição didática tem como objetivo analisar todos os passos dessas transformações do saber científico até chegar o saber tal qual aparece na sala de aula.

Segundo a visão de diversos estudiosos, podemos entender a transposição didática como um processo epistemológico, sociológico e psicológico, simultaneamente (Chevallard, 2001; Arsac, 1989; Bordet, 1997; apud BRITO MENEZES, 2006, p.72). *Epistemológico* porque trata de um saber produzido na comunidade científica, o qual deverá ser comunicado e socializado; *Sociológico* porque precisamos considerar o contexto histórico no qual ele se constituiu, ou seja, qual sua relevância em um determinado tempo e contexto; *Psicológico* porque o aluno na sala de aula precisará se apropriar desse saber, reconstruindo-o a partir das situações de ensino propostas pelo professor, situações essas que podem gerar novas transformações e deformações do saber.

Chavallard (1991) ressalta que um saber não existe no ‘vácuo’, mas surge em um determinado contexto, em um dado momento, ancorado em uma ou mais instituições. Cada uma dessas instituições, de acordo com suas características e objetivos, tratará o saber de forma diferenciada, atribuindo-lhe nova ‘roupagem’ (BRITO MENEZES, 2006).

Bessot (2001), baseada nas reflexões de Chevallard acima mencionadas, propõe uma espécie de classificação das Instituições envolvidas na transposição didática, classificando-as pela sua função, desde a sua origem até chegar à sala de aula:

- *Instituição produtora* – responsável pela produção dos saberes de referência, ou seja, pela origem do saber;
- *Instituição transpositiva* – responsável por analisar o saber original, escolher o que deve ser ensinado nas instituições de ensino e realizar adaptações para que ele se torne ensinável;
- *Instituição de ensino* – responsável por organizar o *saber produzido e transposto* para que ele chegue à sala de aula.

Para compreendermos o papel de cada uma dessas instituições, é imprescindível discutirmos sobre as várias etapas das transformações pelas quais passa o saber, desde a sua origem até chegar à sala de aula.

2.1.1 **A origem dos saberes**

A sociedade evolui e com ela cresce a necessidade de descobertas em diversas áreas do conhecimento. Devido a essas necessidades, o pesquisador, no contexto acadêmico/científico inicia suas investigações. No referido contexto, então, sofre as *pressões externas e internas* para que publique suas 'descobertas' (ARSAC, 1989, apud BRITO MENEZES, 2006). As pressões internas são oriundas da própria comunidade científica, que exigem que tais saberes sejam comunicados para, a partir daí, novos saberes serem produzidos. O pesquisador deverá apresentá-lo aos demais membros da comunidade científica (congressos, simpósios, etc.). As pressões externas se referem à necessidade de apresentar os saberes produzidos à sociedade.

Considerando que a sociedade evolui em função dos avanços culturais, científicos, tecnológicos, entre outros, cada novo saber que é comunicado gera novas descobertas, novos questionamentos, que fazem com que alguns saberes tornem-se obsoletos e outros ganhem mais força em suas discussões. No entanto, para serem comunicados à sociedade, os saberes precisam passar por transformações que os torne compreensíveis e utilizáveis socialmente.

Ao publicar esses saberes, o pesquisador precisa ter cautela quanto às *motivações pessoais e ideológicas*, e também quanto à *especificidade do problema de pesquisa*. Esses aspectos são caracterizados por *despersonalização* e *descontextualização*, respectivamente (ARSAC, 1989, apud BRITO MENEZES, 2006). Ou seja, para o autor, o pesquisador deve eliminar tudo aquilo que personaliza o saber e o vincula ao cientista; além disso, deve realizar o *"descolamento daquele saber de uma situação específica, do problema de pesquisa que a ele deu origem, para, então, poder generalizá-lo"* (BRITO MENEZES, 2006, p.75). As motivações pessoais, como por exemplo os questionamentos que elencamos na introdução desta dissertação sobre o porquê do estudo da trigonometria, no nosso entendimento, podem servir para impulsionar o desenvolvimento das pesquisas, mas deve-se ter o cuidado para não deixar que a realização da investigação seja pautada neste personalismo.

2.1.2 **Transposição Didática Externa**

As transformações pelas quais passa o *saber científico* (*savoir savant*, em francês) para se tornar *saber a ensinar* (*savoir à ensigner)* são influenciadas pela NOOSFERA (Chevallard, 1991). Ela se caracteriza por ser a comunidade responsável por estabelecer o que deve ser ensinado na escola: didatas, professores, técnicos de instituições do governo responsáveis por gerir o ensino. O Ministério da Educação–MEC, por exemplo, representa uma dessas instituições. Essas pessoas, ou instituições, elaboram as diretrizes curriculares, programas, livros didáticos, etc., que servem como instrumentos reguladores para normatizar o que deve ser ensinado na escola, ou seja, o *saber a ensinar*.

Michel Henry (1991) nos apresenta uma etapa intermediária entre a transformação do saber científico em saber a ser ensinado na escola. Segundo o autor, o saber a ser ensinado é produzido quando da elaboração dos programas de ensino, no entanto, não são estes programas que conduzirão diretamente o processo de ensino-aprendizagem na sala de aula, e sim os livros didáticos, que estão relacionados a tais programas. Nesse cenário surgem novas adaptações, pois os livros didáticos trazem o programa dividido em capítulos, com abordagens diferenciadas, dependendo de cada autor. Essas adaptações geram o que o autor chama de *saber escolar (savoir scolaire)*. Assim, embora o próprio Chevallard não tenha falado de uma etapa intermediária do saber a ser ensinado (presente nos documentos oficiais) e o saber que aparece no livro didático, Michel Henry introduz essa etapa e nós decidimos considerá-la, mesmo não aparecendo originalmente na obra de Chevallard, pelo fato de que, no Brasil, os professores se relacionam mais com o conteúdo do livro didático, do que com aqueles que aparecem nos documentos oficiais.

Baseado em Verret (1975), Chevallard assinala algumas exigências que o saber científico precisa sofrer para se tornar ensinável. O autor chama de *la mise texte du savoir*, ou seja, *criar o texto do saber*, *textualizar o saber* (BRITO MENEZES, 2006). Vejamos as características de tais exigências:

- *dessincretização do saber* - o saber deixa de estar completamente intrincado (misturado) e é convertido em saberes parciais;
- *despersonalização do saber* - descolamento do saber que está sendo produzido daquele que o investiga, e também do contexto no qual está

inserido; ou seja, o saber deve apresentar um caráter mais geral, descontextualizado e não personalizado;

- *programabilidade da aquisição do saber* - é preciso estabelecer uma programação de forma sequencial e racional;
- *publicidade do saber* – diz respeito à definição explícita do que se deve ensinar e em que tempo;
- *controle social das aprendizagens* - diz respeito à definição explícita de como poder 'controlar' que a aprendizagem se deu, ou seja , como verificar se realmente houve aprendizagem.

Diante de tantas transformações, o saber científico, pouco a pouco, perde o seu formato original. Chevallard (1991) considera que *"o saber torna-se tanto mais legítimo quanto mais próximo ele for dos saberes de referência e mais distante dos saberes espontâneos".*

Há quem discorde desse posicionamento de Chevallard, alegando que há uma distância adequada entre os saberes de referência e os saberes a ensinar. Brito Menezes (2006) discute que, segundo o autor, "*considerar que o ensino deve estar tão próximo quanto possível dos saberes científicos é uma ilusão perigosa"* (BORDET, 1997, apud BRITO MENEZES, 2006, p.77).

Embora reconheça que há uma distância entre o saber científico, o saber a ensinar e o saber ensinado, para Chevallard (1991) é necessário que se realize uma *vigilância epistemológica*, para que as transformações não desfigurem o saber original, pois isto poderia criar obstáculos à aprendizagem.

Considerando a relação didática, os professores, em sua maioria, utilizam os manuais de ensino e livros didáticos, não sendo usual o acesso ao saber original e sim às suas transformações e adaptações, que são realizadas na própria noosfera. Nessas adaptações podem surgir deturpações, acréscimos e até mesmo invenções que não existiam quando da produção dos saberes originais, denominadas de *criações didáticas*. O professor é o responsável por adaptar os saberes de que tratam os manuais de ensino e o livro didático para que estes cheguem à sala de aula; para isso, faz analogias, utiliza metáforas, entre outros, produzindo, consequentemente, efeitos de contrato.

2.1.3 **A Transposição Didática Interna**

Conforme já mencionamos no item anterior, as transformações sofridas pelo saber a ser ensinado até que este chegue à sala de aula é o que caracteriza a transposição didática interna. Nesta etapa, os principais envolvidos são o professor e o aluno. Embora seja o professor o responsável por tal transposição, é importante lembrar que outras questões mais amplas delineiam a complexidade deste processo.

Ao adaptar o saber a ensinar, dando uma nova 'roupagem', Brito Menezes (2006) discute que segundo Câmara dos Santos (1997) o professor cria um texto didático, impregnado de sua subjetividade e sua relação com o saber. Segundo o autor, esses aspectos se revelam na *gestão do tempo*. Portanto, o que o professor faz na sala de aula não é simplesmente uma cópia do que está expresso no livro didático, mas sim uma 'transformação', uma 'reescrita', criando o que Chevallard (1991) chama de *metatexto*. O professor acha que está sendo fiel ao saber científico, criando uma *ficção de identidade*. O autor defende que o professor não percebe de forma espontânea a transposição didática, a não ser que tenha uma atenção especial em relação ao que faz em sala de aula. Outros autores, como Bessa de Menezes (2004), também falam sobre esse aspecto, ao referirem que o professor não tem clareza de que muda a cara do saber, ou seja, é um processo, em certo sentido inconsciente. Por outro lado, quando o professor faz o seu planejamento, ele está impregnado de intencionalidade, portanto tem certa consciência do que pretende ensinar.

Diante do exposto, podemos concluir que analisar a transposição didática interna nos parece ser uma tarefa complexa, uma vez que não é recomendável enxergar apenas o professor como o único responsável pelas transformações que o saber a ser ensinado precisa sofrer.

Conforme já mencionado na introdução deste trabalho, Chevallard considerou que a noção de Transposição Didática necessitava ser ampliada, pois era preciso observar também o homem perante o saber, e homem e saber inseridos em uma ecologia. Tais reflexões têm lugar na Teoria Antropológica do Didático – TAD, que será discutida na próxima seção.

2.2 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

A teoria antropológica do didático – TAD foi desenvolvida pelo pesquisador Yves Chevallard (1991) com o objetivo de estudar as condições de possibilidade e funcionamento de sistemas didáticos. Pode-se dizer, ainda, que ela estuda o homem perante o saber matemático, e mais especificamente, perante as situações matemáticas. O foco dessa teoria é o estudo das organizações praxeológicas didáticas, que definiremos posteriormente, pensadas para o ensino da Matemática.

Ao estudarmos a transposição didática, no item anterior, vimos que ela nos ajuda a distinguir os diferentes saberes envolvidos no processo ensino-aprendizagem; além disso, nos mostra que o *saber matemático* (*saber científico, ensinado ou a ensinar*) está no centro de toda problematização didática. Portanto, tem o propósito de fazer uma análise epistemológica do saber, sob o ponto de vista essencialmente em termos de *objetos do saber*. Esses objetos podem ser, de acordo com Chevallard (1991) categorizados em:

- paramatemáticos*:* ferramentas utilizadas para descrever e estudar outros objetos matemáticos;
- matemáticos: além de serem ferramentas para outros objetos matemáticos, tornam-se objetos de estudo em si mesmos;
- protomatemáticos: apesar de servirem como ferramentas para a resolução de alguns problemas, não possuem o *status* de objeto de estudo ou ferramenta para o estudo de outros objetos.

No entanto, para Chevallard, essa classificação pareceu ser insuficiente, motivando, então, o pesquisador a desenvolver a teoria antropológica do didático. Daí porque podemos considerar que "*ela representa uma evolução do conceito de transposição didática"*, conforme afirma Almouloud (2007, p.111).

A teoria antropológica do didático – TAD apoia-se nos conceitos primitivos de *objetos, pessoas* e *instituições,* bem como nos conceitos de *relações pessoais* de um indivíduo com um objeto e de *relações institucionais* de uma instituição com um objeto.

O primeiro conceito primitivo da TAD é o de objeto. De acordo com Chevallard (2003), um *objeto é toda entidade, material ou não, que existe para ao menos um indivíduo*. A partir desta definição, pode-se dizer que "tudo é objeto", incluindo as instituições, os indivíduos e as posições que os indivíduos ocupam nas instituições.

A relação pessoal R de um indivíduo X com um objeto O, outro conceito primitivo da TAD, é definida como o conjunto formado por todas as interações que X pode ter com o objeto O, indicadas por R(X, O). O objeto O existe para um indivíduo X se a relação pessoal de X com O é não vazia, ou seja, se R(X, O) ≠ Ø. Desta forma, essa relação indica como o indivíduo X conhece um objeto O. Pode-se dizer que, conhecer um objeto O significa ter uma relação pessoal com ele. Consequentemente o objeto O somente existe para a pessoa que o conhece.

Dessa forma, devido às várias sujeições, o indivíduo torna-se sujeito de uma multiplicidade de instituições.

Esses objetos e as relações pessoas entre os indivíduos e esses objetos compõem o que Chevallard (2003) chama de universo cognitivo de X. Vejamos sua representação: U(X) = {O, R(X,O)}.

O conceito de pessoa é definido como o par formado por um indivíduo X e pelo sistema de suas relações pessoais com os objetos O, designadas por R(X,O), em determinados momentos da história de X.

É importante destacarmos a distinção que Chevallard (2003) faz entre pessoa e indivíduo. Para ele, a pessoa se constitui a partir de suas relações pessoais com os objetos; desta forma, pode-se dizer que a pessoa muda de acordo com as instituições das quais ela faz parte, de acordo com o passar do tempo, dependendo da mudança e da evolução de suas relações pessoais com os objetos, ou seja, ele é o sujeito de uma multiplicidade de instituições; no entanto, o indivíduo permanece invariante, independentemente de qualquer fator.

Outro conceito primitivo da TAD é a noção de Instituição, definido como “um dispositivo social ‘total’ que pode ter apenas uma extensão muito reduzida no espaço social, mas que permite – e impõe – a seus sujeitos [...] maneiras próprias de fazer e de pensar”. Por exemplo, a sala de aula e o estabelecimento escolar são instituições do sistema educativo, que, por sua vez, é também uma instituição (CHEVALLARD, 2003, p.82).

Segundo Chevallard, a partir do momento em que um indivíduo X ocupa uma determinada posição nas instituições, este se sujeita às maneiras próprias dessas instituições, ou seja, torna-se sujeito delas.

> Desde o nascimento, todo indivíduo se sujeita a - quer dizer, é ao mesmo tempo submisso e sustentado por – múltiplas instituições, tais como sua família, da qual ele se torna sujeito. Em particular, a criança se sujeita de imediato a esta instituição que é a linguagem, e mais precisamente a esta língua, mesmo que ela não fale ainda: ela não pode escapar e, ao mesmo

> tempo, é ela que lhe permitirá falar, que lhe dará seu "poder" linguístico. De uma maneira geral, é por suas sujeições, pelo fato de que ele é o sujeito de uma multiplicidade de instituições, que o indivíduo X se constitui numa pessoa. (CHEVALLARD, 2003, p. 82)

Chevallard (2003) introduz também o conceito de relação institucional de uma instituição I com um objeto O, designada por RI(O). Da mesma maneira que acontece para um indivíduo X, um objeto O existe para uma instituição I, ou seja, I conhece O quando RI(O) ≠ Ø. O objeto O passa a ser um objeto institucional. A relação institucional com um objeto O é considerada ideal quando existe uma conformidade entre a relação pessoal de X e a relação institucional de I. O autor afirma ainda que, a partir do momento em que um indivíduo X torna-se sujeito de uma instituição I, um objeto O existente em I vai existir também para X sob a exigência da relação institucional RI(O).

Baseado nessas definições, Chevallard considera que há aprendizagem a partir do momento em que a relação pessoal R(X,O), de um indivíduo X com um objeto O, se modifica. Considerando que um mesmo objeto O pode existir em diferentes instituições, existirão diferentes relações institucionais em relação a este objeto, ou seja, RI(O), RI'(O), RI''(O), etc. Essas várias relações podem se desenvolver diferentemente em instituições diferentes, bem como mudar (evoluir, envelhecer ou desaparecer) ao longo do tempo em uma determinada instituição.

Chevallard (1992) observa, ainda, que um avaliador Y dos conhecimentos de um indivíduo X em relação a um objeto O só consegue examinar a conformidade da relação pessoal R(X,O) com a relação institucional RI(O). Essa questão de exclusividade a uma relação institucional pode esconder a existência de outras maneiras de conhecimento do objeto O.

Quando a relação pessoal de um indivíduo X com um objeto O apresenta pouca ou nenhuma conformidade a uma certa relação institucional RI(,O), o indivíduo X pode experimentar o sentimento desagradável de ser a vítima de uma arbitrariedade institucional caracterizada. Considera-se que, em I, X "não conhece", ou "conhece mal", o objeto O" (CHEVALLARD, 1992, p. 84).

Ainda segundo Chevallard (1991), o saber matemático é fruto da ação humana institucional, ou seja, é algo que é produzido, utilizado, ensinado, transposto em instituições. Faz-se necessária a elaboração de um método de análise que permita a descrição e o estudo das condições de realização das práticas institucionais.

Para modelar as práticas sociais em geral e, em particular, a atividade matemática, a TAD nos apresenta a noção de praxeologia ou organização praxeológica, se baseando em três postulados:

> 1) Toda prática institucional pode ser analisada, sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, em um sistema de tarefas relativamente bem delineadas.
> 2) O cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica.
> 3) A ecologia das tarefas, quer dizer, as condições e restrições que permitem sua produção e sua utilização nas instituições.
> (ALMOULOUD, 2007, p. 114)

A organização praxeológica, ou praxeologia, se constitui a partir das noções de (tipo de) *tarefa*, *técnica*, *tecnologia* e *teoria*, que discutiremos a seguir.

2.2.1 **A organização praxeológica ou praxeologia**

A palavra praxeologia vem da junção de dois termos gregos: práxis (prática) e logos (razão). O termo praxeologia nos traz a ideia de que toda prática humana em uma instituição não se realiza no vácuo, nem por acaso, mas existe um discurso que a justifica.

A organização praxeológica ou praxeologia constitui-se em torno de quatro elementos: tipos de tarefas (T), a serem cumpridas por meio de pelo menos certa maneira de executá-las, chamada técnica (τ), que, por sua vez, é explicada e legitimada por elementos tecnológicos (θ), justificados e esclarecidos por uma teoria (Θ). A praxeologia [T, τ , θ , Θ] formada por esses quatro componentes articula um bloco prático-técnico [T, τ] designando o saber-fazer, que consiste da associação entre certo tipo de tarefa e uma determinada técnica, e um bloco tecnológico-teórico [θ , Θ] designando o saber, resultado da articulação entre a tecnologia e a teoria. Esclarecemos que para designar a praxeologia, costuma-se utilizar letras do alfabeto grego: *tau* maiúsculo(T) , *tau* minúsculo (τ), *teta* maiúsculo (Θ), *teta* minúsculo (θ),.

Chevallard não define o que vem a ser *tarefa* [T] , mas menciona que, geralmente, elas são identificadas por um verbo de ação que sozinho caracterizaria um gênero de tarefa, não definindo o conteúdo em estudo; e quando acompanhado por alguma especificidade, indica o tipo de tarefa. O autor aponta que a necessidade de reconstrução de tarefas caracteriza um problema a ser resolvido dentro da própria instituição; no caso da escola temos uma 'questão didática'.

Desta forma, compreendemos que tarefa é 'a questão a ser resolvida'. Vejamos um exemplo: *calcular* representaria o gênero da tarefa; *calcular o seno de um ângulo* caracterizaria um tipo de tarefa [t].

Ao consultarmos a tese de Andrade (2013, p.188), encontramos uma informação sobre dois artigos de Chevallard que faz menção de forma suscinta, segundo Andrade, a outra categoria, denominada *subtipo de tarefa*. Essa categoria é descrita na tese de Araújo (2009). Ao nos referirmos a essa categoria em nossas análises, utilizaremos a simbologia st_1, st_2, st_3, etc.

Chevallard (1991) considera que para uma determinada tarefa, geralmente, existe uma ou várias técnicas [τ], reconhecidas na instituição que problematizou essa tarefa. E ressalta a necessidade de propor tarefas efetivamente problemáticas que estimulem o desenvolvimento de pelo menos uma técnica para responder às questões colocadas pela tarefa. Nesse contexto, compreendemos que *técnica* [τ] se refere à maneira de como foi resolvida a tarefa.

Entretanto, para que uma técnica exista em uma instituição, ela deve apresentar uma condição mínima: ser compreensível, legível e justificada. Essas condições implicam a existência de um *discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas*, nomeado por Bosch e Chevallard (1991, apud ALMOULOUD, 2007, p. 116) de *tecnologia* [θ] da técnica. A tecnologia tem por objetivos justificar a técnica, ou seja, assegurar que a técnica permita que se cumpra bem a tarefa do tipo t. Para isso, geralmente utiliza-se a demonstração. Outro objetivo da tecnologia é tornar a técnica inteligível, é "expor" por que ela funciona bem. Além disso, a tecnologia tem a função de *produzir* ou *aprimorar* novas técnicas, mais eficientes à realização de determinadas tarefas.

Analogamente, a *tecnologia*, por sua vez, também precisa de uma justificação, o que o autor denomina por *teoria* [Θ] da técnica. A teoria tem por objetivo justificar e esclarecer a tecnologia, bem como tornar inteligível o discurso tecnológico.

As praxeologias, segundo Chevallard, podem ser classificadas como: *praxeologia pontual, praxeologia local, praxeologia regional* e *praxeologia global*.

Vejamos as características dessas organizações matemáticas:

• *Praxeologia Pontual* [T, τ , ϴ , Θ] – quando é realizada em torno de um determinado (único) tipo de tarefa.

• *Praxeologia Local* [T_i, τ_i , ϴ , Θ] – quando é associada a um conjunto de diferentes tipos de tarefas, sendo necessária a utilização de várias técnicas e uma tecnologia que as justificam.

• *Praxeologia Regional* [T_{ij}, τ_{ij} , $ϴ_j$, Θ] – quando é desenvolvida em torno de uma única teoria.

• *Praxeologia Global* [T_{ijk}, τ_{ijk} , $ϴ_{jk}$, Θ_K] – quando resulta da agregação de várias organizações regionais correspondendo a várias teorias.

De acordo com algumas colocações de Chevallard (2002), as praxeologias podem envelhecer, na medida em que os seus componentes [T, τ , ϴ , Θ] perdem seus créditos[1]. Surge então a necessidade de rever as praxeologias, através de estudos e análises. Para ele, o estudo de um tema matemático pode ser realizado por meio dos seguintes objetos relativos às práticas dos professores: a *realidade matemática* que se observa em uma sala de aula onde se estuda o tema; e a *maneira como se pode construir* realizar o estudo do tema. A partir desses objetos, o autor faz uma classificação das praxeologias, que serão caracterizadas a seguir.

2.2.2 **Praxeologia Matemática ou Organização Matemática**

A praxeologia matemática é relativa às atividades matemáticas. Está intimamente ligada à realidade que se observa em uma sala de aula onde se estuda o tema. Chevallard (1997) observa que o primeiro trabalho de um professor ou pesquisador consiste em caracterizar as praxeologias matemáticas a serem estudadas, ou seja, determinar que temas se pretende estudar, em que contextos serão considerados.

Estas reflexões que o professor ou pesquisador precisam realizar podem partir das análises de documentos oficiais existentes, tais como os programas e livros escolares, descrevendo e analisando de maneira precisa os conteúdos

[1] . Isso nos remete, em certo sentido, a uma noção muito antiga proposta em Chevallard quando da reflexão acerca da noção de transposição didática, que é a ideia de obsolescência (Chevallard, 1991). Naquele contexto, o autor falava de obsolescência dos saberes, quando eles “envelheciam” e era deixados para trás, substituídos por novos saberes. Ao que parece, na TAD Chevallard também aponta para a ideia de obsolescência/envelhecimento.

matemáticos, observando o grau de desenvolvimento atribuído aos componentes [T, τ , ϴ , Θ].

Para esse primeiro trabalho do professor ou pesquisador, Araújo (2009) sugere que estes façam alguns questionamentos:

> - Os tipos de tarefas são claros e bem identificados? Eles são representativos? Eles são pertinentes em relação às necessidades matemáticas? As razões de ser desses tipos de tarefas estão bem explicitadas?
> - As técnicas propostas são efetivamente elaboradas? Elas são fáceis de utilizar? Seu campo de ação é abrangente? Elas são suficientemente inteligíveis? Elas poderão evoluir?
> - O enunciado do problema é bem colocado? Ele é considerado como evidente, natural ou bem conhecido? As formas tecnológicas de justificação utilizadas são próximas das formas-padrão em matemática? Elas são adaptadas às suas condições de utilização? Os resultados tecnológicos disponibilizados são efetiva e otimamente explorados?
> - Os elementos teóricos são explicitados? O que eles permitem esclarecer? O que eles permitem justificar?

De acordo com Chevallard (1997), independentemente do caminho utilizado para a reconstrução de uma determinada praxeologia matemática, haverá certos momentos em que alguns gestos didáticos deverão ser realizados. O conjunto formado por esses momentos didáticos é definido, por ele, como praxeologia didática ou organização didática.

2.2.3 **Praxeologia Didática ou Organização Didática**

A praxeologia didática tem como objetivo principal permitir a (re)construção ou transposição de uma determinada praxeologia matemática. Ela articula-se também em torno dos componentes tipos de tarefas, de técnicas, de tecnologias e de teorias.

Para construir uma grade que possibilite ao professor ou pesquisador os processos didáticos, Chevallard (1998) elenca seis momentos didáticos: *primeiro encontro* com a praxeologia matemática estudada; *exploração do tipo de tarefa e de elaboração de técnicas*; *constituição do ambiente tecnológico e teórico*; *momento de institucionalização*; *trabalho da técnica*; e *avaliação*.

Chevallard explica que a (re)construção de uma determinada praxeologia matemática não se realiza de maneira única, nem obedecendo a uma ordem arbitrária. Os momentos didáticos podem se realizar de diferentes maneiras em uma determinada praxeologia didática porque eles são, primeiramente, uma realidade funcional de estudo antes de serem uma realidade temporal.

O momento do primeiro encontro com uma praxeologia matemática a ser estudada pode ser produzido de diversas formas. No entanto, um modo inevitável consiste em encontrar ou reencontrar o objeto de estudo por meio de tipos de tarefas constitutivas desse objeto.

De acordo com Chevallard (1998), esse primeiro encontro com a organização matemática pode ocorrer desde um anúncio do professor (amanhã nós estudaremos o cosseno de um ângulo) até um outro extremo, em que o verdadeiro primeiro encontro passa quase inteiramente despercebido porque o objeto encontrado vive em estreita ligação com o objeto verdadeiro do encontro.

Chevallard (1998) destaca duas grandes formas possíveis de produzir esse primeiro encontro com a organização matemática:

- encontro cultural-mimético – onde a praxeologia matemática estudada aparece para o aluno de maneira mais ou menos explícita.
- encontro por meio de criações de situações fundamentais – onde a praxeologia matemática a ser estudada aparece para o aluno como resposta a uma ou mais questões específicas desse sistema de situações, criadas de um real peculiar, afastando toda referência do objeto de estudo de um mundo real preexistente.

O segundo momento didático é momento de exploração do tipo de tarefa e de elaboração de uma técnica. Chevallard (1998) considera que o estudo de um problema particular não deve ter como único objetivo sua resolução, mas ser um meio para que se constitua uma determinada técnica de resolução. Para ele, “a elaboração da técnica está no coração da atividade matemática”.

O terceiro momento didático é o momento da constituição do ambiente tecnológico-teórico. Chevallard (ibidem) considera que esse momento está diretamente relacionado com os momentos anteriores, na medida em que a técnica que permite realizar um certo tipo de tarefa é constituída em estreita relação com o ambiente tecnológico-teórico. Dependendo da visão do professor ou autor de livro didático, o bloco tecnológico-teórico pode aparecer, por exemplo, como primeira etapa de estudo.

O quarto momento didático é o momento de institucionalização, cujo objetivo consiste em explicitar e oficializar quais são os objetos que passarão a constituir definitivamente essa organização matemática.

> O momento de institucionalização é, de início, aquele que, na construção "bruta", emergiu do estudo. Pouco a pouco, vai ser separado, por um movimento que engaja o futuro, o "matematicamente necessário", que será conservado, e o "matematicamente contingente", que, logo, será esquecido. Neste submomento de oficialização, uma praxeologia matemática é doravante cortada da história singular que lhe trouxe a existência, fazendo sua entrada na cultura da institucionalização que alojou a gênese. É necessário que esta entrada na cultura determine completamente o futuro institucional da praxeologia matemática assim oficializada. Num segundo submomento, aquele da institucionalização stricto sensu, os objetos e relações oficiais, ingredientes declarados da organização em construção, vão ser ativados em graus diversos e, por isso, vão 'trabalhar'. (CHEVALLARD, 1998, p.112)

O quinto momento didático é o momento do trabalho da técnica, cujo objetivo consiste em pôr à prova e dominar a técnica elaborada para realizar os tipos de tarefas determinados no estudo. Nesse momento, pode-se também melhorar a técnica trabalhada, tornando-a mais econômica e eficiente.

O sexto momento didático, o da avaliação, está articulado com o momento da institucionalização, uma vez que proporciona uma reflexão sobre o que foi aprendido de fato, com a organização matemática construída e institucionalizada. É o momento de verificar se a pessoa domina a técnica de realização de determinado tipo de tarefa, mas, também, de se questionar sobre a própria técnica, visando identificar se ela é eficaz, eficiente, segura, etc.

2.2.4 **Avaliação de uma Organização Matemática**

Para Chevallard (1998), em qualquer instituição, a avaliação representa um gesto fundamental, mesmo que esse ato pareça saturado. No entanto, ele afirma que a atividade de avaliação é sempre e necessariamente relativa, pois depende do valor reconhecido a um objeto, pelo processo de avaliação, para um determinado uso social, ou seja, avalia-se sempre de certo ponto de vista.

Para esse autor, a avaliação dos tipos de tarefas precisa "se apoiar sobre critérios explícitos cuja análise prévia deverá permitir dizer em que medida eles são satisfeitos pela organização matemática a avaliar" (CHEVALLARD, 1998, p. 115). Organizamos esses critérios estabelecidos por Chevallard no quadro 1:

Quadro 1: Critérios para avaliar uma Praxeologia Matemática

Tarefas	1. Critério de identificação: verificar quais tipos de tarefas são apresentados e bem definidos.
	2. Critério das razões de ser: Verificar as razões de ser das tarefas ou se elas aparecem sem motivos válidos.
	3. Critério de pertinência: verificar se os tipos de tarefas são pertinentes tendo em vista as necessidades dos alunos.
Técnicas	São elaboradas ou somente esboçadas? São de fácil utilização? São imprescindíveis para cumprir a tarefa proposta?
Tecnologias	As formas de justificativas utilizadas são próximas daquelas matematicamente válidas? Essas justificativas são adequadas tendo em vista o problema colocado? Os argumentos colocados são cientificamente válidos? O resultado tecnológico de uma atividade pode ser explorado para produzir novas técnicas para resolver novas tarefas?

Fonte: Quadro organizado pela pesquisadora

Em nossa investigação, procuramos utilizar esses critérios para nos direcionar nas análises da praxeologia matemática sobre a 1ª volta do ciclo trigonométrico no livro didático da 2ª série do ensino médio.

O próximo capítulo trata do saber que foi considerado em nossa investigação: a trigonometria da 1ª volta do ciclo. Fizemos um estudo sobre a origem da trigonometria; sobre como ela aparece nos documentos oficiais que direcionam o ensino no Brasil; e sobre as pesquisas científicas sobre o ensino deste saber. Gostaríamos de salientar que encontramos poucos materiais de consulta sobre a trigonometria.

3 TRIGONOMETRIA: ASPECTOS HISTÓRICOS, DOCUMENTOS OFICIAIS E PESQUISAS

A nossa investigação remete ao estudo da transposição didática da Trigonometria da 1ª volta do ciclo trigonométrico, ou seja, referente aos ângulos de 0º (zero grau) a 360º (trezentos e sessenta graus), apresentada em um livro didático da 2ª série do ensino médio. Este capítulo abordará a síntese dos estudos que fizemos sobre o saber matemático proposto para nossa pesquisa (a trigonometria), abrangendo os aspectos históricos, as orientações dos documentos oficiais e as pesquisas realizadas no âmbito educacional que discutem esse saber.

3.1 O SABER CIENTÍFICO: REVISÃO HISTÓRICA DA TRIGONOMETRIA

Ao pesquisarmos livros de História da Matemática com publicações no Brasil, percebemos que ainda são poucas as contribuições sobre a origem da trigonometria.

A trigonometria surgiu e desenvolveu-se como ferramenta cuja finalidade era auxiliar a Astronomia, ainda na Antiguidade. A relação entre essas duas áreas era tão intrínseca que se tornou proveitoso considerar sua separação somente na Idade Média.

Assim como outros ramos da matemática, a trigonometria não foi obra de um só homem. Segundo Smith (1958), os primeiros vestígios de conhecimentos de trigonometria surgiram, tanto no Egito quanto na Babilônia, a partir do cálculo de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes. Teoremas sobre as razões entre os lados de triângulos semelhantes tinham sido conhecidos e usados pelos antigos egípcios e babilônios.

O desenvolvimento da Trigonometria está muito ligado ao da Geometria. Na Grécia, temos diversos nomes que contribuíram para a história da Matemática, tais como: Thales (625 - 546 a.C.), com seus estudos de semelhança que embasam a trigonometria, e seu discípulo Pitágoras (570 - 495 a.C.). Conjectura-se que este último tenha feito a primeira demonstração do teorema que leva seu nome: *“Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos”*. Deste teorema deriva a relação fundamental da Trigonometria, que ficou conhecida como Teorema de

Pitágoras. A Escola Pitagórica, fundada no século V a.C., realizou descobertas na área da acústica, elaborando uma lei de intervalos musicais. Tal descoberta pode ter sido um prenúncio do aparecimento das funções seno e cosseno no osciloscópio do futuro, para se estudar o som (BELLI, 1945).

Um estudo sistemático de relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos das cordas que os subentendem também foi encontrado com os gregos. As propriedades das cordas, como medidas de ângulos centrais ou inscritos em círculos, eram conhecidas dos gregos do tempo de Hipócrates, e é provável que Eudoxo tenha usado razões e medidas de ângulos para determinar o comprimento da terra e as distâncias relativas do sol e da lua. Nas obras de Euclides não há trigonometria no sentido estrito da palavra, mas há teoremas equivalentes a leis ou fórmulas trigonométricas específicas. As proposições II.12 e II.13 de *Os elementos* (grande obra de Euclides), por exemplo, são as leis de cosseno para ângulos obtuso e agudo, respectivamente, enunciadas em linguagem geométrica em vez de trigonométrica, e são provadas por método semelhante ao usado por Euclides para o teorema de Pitágoras. Os teoremas sobre comprimentos de cordas são essencialmente aplicações da lei dos senos. Cada vez mais os astrônomos da Idade de Alexandria, especificamente Eratóstenes de Cirene (276 a 194 a.C.) e Aristarco de Samos (310 a 230 a.C) tratavam de problemas que indicavam a necessidade de relações mais sistematizadas entre ângulos e cordas.

Muitos conhecimentos sobre a trigonometria podem ter se perdido por não haver, naquela época, um registro sistemático das descobertas (BOYER, 1996). Aristarco propôs um sistema heliocêntrico, antecipando-se a Copérnico por mais de um milênio e meio. Porém, se ele escreveu algo sobre esse sistema, os escritos não foram encontrados. O que se tem de Aristarco é um tratado *Sobre os comprimentos e distâncias do sol e da lua*, talvez escrito antes (por volta de 260 a.C.), que assume um universo geocêntrico. Nessa obra, Aristarco observa que quando a lua está exatamente meio cheia, o ângulo entre as linhas de vista ao sol e à lua difere para menos de um ângulo reto por trintavos de um quadrante. Lembramos que a introdução sistemática do círculo de 360º veio um pouco depois. Na linguagem atual, isso significa que a razão da distância da lua para a distância do sol é o seno de 3º. Tendo determinado as distâncias relativas do sol e da lua, Aristarco sabia que seus respectivos comprimentos estavam na mesma razão. Isso decorre do fato de terem o sol e a lua aproximadamente o mesmo comprimento aparente, ou seja, subentendem-se o mesmo ângulo ao olho de um observador na terra. No tratado em questão, esse ângulo é de 2º, mas Arquimedes atribui a Aristarco o valor de (1/2)º. Dessa razão Aristarco pôde obter uma aproximação para os comprimentos do sol e da lua em comparação com o da terra (BOYER, 1996, p.109).

Apesar da contribuição de Aristarco, ainda faltava a medida do raio da terra para chegar a uma avaliação dos comprimentos do sol e da lua. Aristóteles tinha mencionado uma estimativa de 60.000quilômetros para a circunferência da terra e Arquimedes contava que alguns de seus contemporâneos calculavam que essa circunferência seria de 45.000 quilômetros. No entanto, um cálculo muito melhor é atribuído a Eratóstenes de Cirene, contemporâneo mais jovem de Arquimedes e Aristarco. Hoje, Eratóstenes é lembrado especialmente por sua medida da terra (BOYER, 1996, p.110).

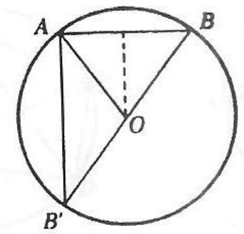
As relações entre reta e círculos, durante cerca de dois séculos e meio, foram estudadas pelos matemáticos gregos, aplicando-as na resolução de uma variedade de problemas de astronomia. Porém, disso não resultou uma trigonometria sistemática. Só por volta da segunda metade do segundo século a.C. é que foi compilada a primeira tabela trigonométrica pelo astrônomo Hiparco de Nicéia (por volta de 180-125 a.C.), daí porque este astrônomo ganhou o direito de ser chamado de “pai da trigonometria”. Aristarco sabia que num dado círculo, a razão do arco para a corda diminui de 180º para 0º, aproximando-se do limite 1. Parece que antes de Hiparco empreender a tarefa ninguém tinha tabulado valores correspondentes do arco e da corda para toda uma série de ângulos.

No entanto, foi sugerido que Apolônio pode ter se antecipado a Hiparco quanto a isso, e que a contribuição de Hiparco à trigonometria foi apenas de calcular um melhor conjunto de cordas do que seus predecessores. Hiparco calculou suas tabelas para serem utilizadas na sua astronomia, sobre cuja origem pouco se sabe. As principais contribuições à astronomia atribuídas a Hiparco foram a organização de dados empíricos derivados dos babilônios, a elaboração de um catálogo estelar, melhoramentos em constantes astronômicas importantes (duração do mês e do ano, comprimento da lua, e o ângulo de inclinação da eclíptica) e, finalmente, a descoberta da precessão dos equinócios.

Não se sabe, ao certo, quando o uso sistemático do círculo de 360º penetrou na matemática, mas parece dever-se em grande parte a Hiparco através de sua tabela de cordas. É possível que ele a tenha tomado de Hipsicles, que anteriormente havia dividido o dia em 360 partes, divisão esta que pode ter sido sugerida pela astronomia babilônica. Não se sabe como Hiparco fez sua tabela, pois suas obras se perderam, mas é provável que seus métodos fossem semelhantes aos de Ptolomeu, pois Teon de Alexandria, ao comentar a tabela de cordas de Ptolomeu, referiu que Hiparco antes tinha escrito um tratado em doze livros sobre cordas em um círculo (BOYER, 1996, p.111).

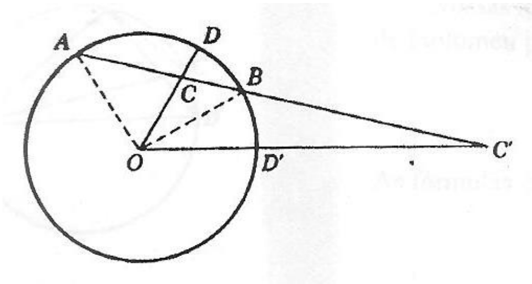
Outro tratado mencionado por Teon de Alexandria (cerca de 100 d.C.) foi o de Menelau de Alexandria, contendo seis livros onde este trata de *Cordas num círculo.* O livro III contém o "teorema de Menelau" como parte do que é essencialmente trigonometria esférica na forma grega típica, ou seja, uma geometria ou trigonometria de cordas num círculo (BOYER, 1996, p.111). Na figura 1 escreveríamos que a corda AB é duas vezes o seno da metade do ângulo central AOB (multiplicado pelo raio do círculo). Menelau e seus sucessores gregos em vez disso referiram-se a AB simplesmente como a corda correspondente ao arco AB. Se BOB' é um diâmetro do círculo, então a corda AB' é duas vezes o cosseno da metade do ângulo AOB (multiplicado pelo raio do círculo). Logo, os teoremas de Tales e Pitágoras, que levam à equação $AB^2 + AB'^2 = 4r^2$, equivalem à identidade trigonométrica moderna $sen^2q + cos^2q = 1$. Menelau, como também provavelmente Hiparco antes dele, conhecia bem outras identidades trigonométricas, duas das quais ele usou como lemas para provar seu teorema sobre transversais. O primeiro desses lemas pode ser assim enunciado: se uma corda AB num círculo de centro O (figura 2) é cortado no ponto C por um raio OD, então AC / CD = sen AD / sen DB. O segundo lema é semelhante: se a corda AB prolongada é cortada no ponto C' por um raio OD' prolongado, então AC'/BC' = sen AD'/sem BD'. Esses lemas são assumidos por Menelau sem prova, presumivelmente porque podiam ser encontrados em textos anteriores, possivelmente nos doze livros de Hiparco sobre cordas. Sobre esses lemas, Boyer (1996) sugere aos leitores uma comprovação através do perpendicularismo e da semelhança de triângulos.

Figura 1: Lema 1 de Menelau



Fonte: BOYER, 1996, p.111

Figura 2: Lema 2 de Menelau



Fonte: BOYER, 1996, p.111

Embora o teorema de Menelau tenha desempenhado um papel fundamental na trigonometria esférica e na astronomia, a mais influente e significativa obra trigonométrica da antiguidade foi a *Syntaxis matemática*, obra de doze livros escrita por Ptolomeu de Alexandria cerca de meio século depois de Menelau. Essa "Síntese matemática" era distinguida de outro grupo de tratados astronômicos por outros autores (inclusive Aristarco) por ser a de Ptolomeu chamada a coleção "maior" e a de Aristarco e outros a coleção "menor".

Devido às frequentes referências à obra de Ptolomeu como *magiste*, surgiu mais tarde na Arábia o costume de chamar o livro de Ptolomeu o *Almagesto*, que significa "maior", e é por esse nome que a obra ficou conhecida desde então. O *Almagesto* de Ptolomeu deve muito quanto a seus métodos ao *Cordas num círculo* de Hiparco. Ptolomeu utilizou o catálogo de posições estelares legado por Hiparco, mas não se sabe se as tabelas trigonométricas de Ptolomeu derivavam ou não de seu predecessor. Felizmente, o *Almagesto* de Ptolomeu sobreviveu aos estragos do tempo; por isso, temos não só suas tabelas trigonométricas, mas também uma exposição dos métodos usados em sua construção. Ainda hoje conhecemos uma proposição geométrica conhecida como "teorema de Ptolomeu": se ABCD é um quadrilátero (convexo) inscrito num círculo (figura 3), então AB.CD+BC.DA=AC.BD; isto é, a soma dos produtos de lados opostos de um quadrilátero inscritível é igual ao produto das diagonais. Outro caso especial do teorema geral de Ptolomeu é aquele em que um lado é diâmetro do círculo (figura 4): se AD=2r, temos 2r.BC+AB.CD=AC.BD. Esse teorema de Ptolomeu leva às fórmulas: $\text{sen}(a+b)=\text{sen}\,a.\cos b+\cos a.\text{sen}\,b$ e $\cos(a\pm b)=\cos a.\cos b+\text{sen}\,a.\text{sen}\,b$, que conhecemos como fórmulas de Ptolomeu. Outra fórmula que lhe foi muito útil foi a equivalente de nossa fórmula para metade do ângulo: *se é conhecida a corda de um arco, a corda da metade do arco também é* (BOYER, 1996, p. 112-113).

Figura 3: Quadrilátero inscrito no círculo

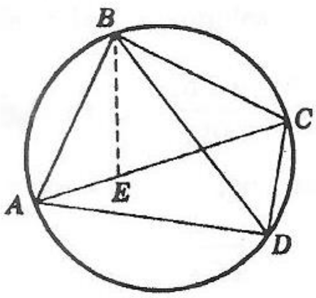
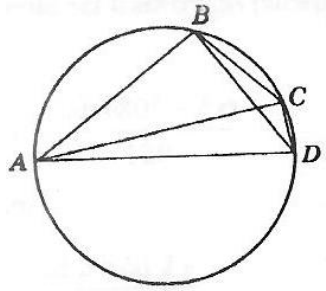


Figura 4: Diâmetro do círculo



Fonte: BOYER, 1996, p.112

Lembremos que desde Hiparco até os tempos modernos não havia ainda as *razões* trigonométricas, tal qual conhecemos hoje. Os gregos, depois os hindus e os árabes , usaram *linhas* trigonométricas. A princípio, essas linhas tiveram a forma de cordas num círculo, conforme vimos, cabendo a Ptolomeu associar valores numéricos, ou aproximações, a essas cordas. Para isso, eram necessárias duas convenções: 1) algum esquema para subdividir a circunferência; 2) alguma regra para subdividir o diâmetro. Não se sabe como a convenção de dividir a circunferência em 360 graus surgiu, mas parece ter estado em uso na Grécia desde os dias de Hiparco. Alguns palpites são sugeridos para justificar essa divisão: referêcia da astronomia, onde o zodíaco fora dividido em doze "signos" ou 36 "decanatos"; um ciclo de estações, de aproximadamente 360 dias, podia ser facilmente correspondido com o sistema de signos zodiacais e decanatos, subdividindo cada signo em trinta partes e cada decanato em dez partes. Acredita-se que foi o sistema sexagesimal que levou Ptolomeu a subdividir o diâmetro de seu círculo trigonométrico em 120 partes (BOYER, 1996, p.113).

Além da contribuição dos gregos, a trigonometria também foi desenvolvida pelos árabes. A princípio, houve na Arábia dois tipos de trigonometria: a geometria grega das cordas e as tabelas hindus dos senos. O conflito terminou com triunfo do sistema hindu, e quase toda a trigonometria árabe se baseou na função seno. Aliás, foi através dos árabes, e não diretamente dos hindus, que essa trigonometria do seno chegou à Europa. A astronomia de al-Battani (cerca de 850-929), conhecido na Europa como Albategnius, serviu como o veículo primário de transmissão. Num livro chamado *Sobre o movimento das estrelas* Albategnius deu fórmulas em que aparecem as funções seno e seno versor. Um século depois, ao tempo de Abu'l-Wefa, a função tangente era bastante conhecida. A função tangente dos árabes, ao contrário da função seno hindu, em geral era dada para um círculo unitário (BOYER, 1996, p.162). Diante destas informações sobre a utilização do círculo de raio unitário, podemos fazer nos questionar: “será que a utilização do raio unitário no ciclo trigonométrico, nos dias atuais, é herança da trigonometria dos árabes?” Com Abu’l-Wefa a trigonometria assume uma forma mais sistemática, em que são provados teoremas tais como as fórmulas para ângulo duplo ou metade.

De acordo com os estudos de Boyer (1996), um outro astrônomo que contribuiu para o desenvolvimento da trigonometria foi Nicolau Copérnico, embora esse nome nos remeta, a princípio, à revolução da visão do mundo ao colocar a Terra movendo-se em torno do sol (o que Aristarco tentara sem sucesso). Copérnico estudou na Universidade de Cracóvia, por volta de 1491, instituição esta que tinha grande prestígio em matemática e astronomia. Estudou também em Bolonha, Pádua e Ferrara; ensinou em Roma e depois voltou à Polônia, onde completou o célebre tratado *De revolutionibus orbium coelestium*, publicado em 1543. Esse tratado contém secções substanciais sobre trigonometria que haviam sido publicadas em separado no ano anterior. Além dos teoremas contidos na obra, Copérnico incluiu uma proposição numa versão manuscrita anterior do livro, não na obra impressa.

Conforme anunciamos no início deste capítulo, a trigonometria se desenvolveu a partir da contribuição de diversos homens, em diferentes lugares e épocas. Outra contribuição para o desenvolvimento da trigonometria foi advinda de Viète, considerado o fundador de uma álgebra literal. Ele partiu da obra de seus predecessores, especialmente Regiomontanus e Rheticus. Assim como Regiomontanus, Viète considerava a trigonometria um ramo independente da matemática; como Rheticus, ele trabalhava sem referência direta a meias cordas num círculo. Ele (Viète) recomendou o uso de frações decimais, em vez de sexagesimais. Observou também uma conexão importante entre suas fórmulas e a resolução de equações cúbicas, chegando à conclusão de que a trigonometria podia servir de auxiliar para a álgebra, no caso irredutível da cúbica. Ao aplicar a trigonometria a problemas algébricos e aritméticos, Viète ampliava o alcance do assunto. Foi por volta do fim do século dezesseis e começo do dezessete que o nome “trigonometria” veio a ser dado ao assunto (BOYER, 1996, p211-212).

3.2 A TRIGONOMETRIA NOS DOCUMENTOS OFICIAIS

Qualquer que seja o saber a ser considerado num trabalho de pesquisa sobre o processo ensino-aprendizagem, faz-se necessária uma visão ampla do contexto educacional atual. Por esta razão, nos sentimos responsáveis por levantar alguns pontos essenciais elencados nos diversos documentos que norteiam a educação brasileira: Lei de Diretrizes e Bases da Educação (1996), os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio-PCNEM (2000), as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN$_{+}$ (2002) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio-OCEM (2006).

Desde 1998 as disciplinas que compõem o ensino básico no Brasil são organizadas por área do conhecimento: *Linguagens e Códigos e suas Tecnologias*, *Ciências Humanas e suas Tecnologias* e *Ciências da Natureza e Matemática e suas Tecnologias*. As três áreas do conhecimento devem ser trabalhadas de forma articulada com o objetivo de promover elementos essenciais para a formação do indivíduo.

Nas diretrizes e parâmetros que organizam o ensino médio (BRASIL, 2000), a Biologia, a Física, a Química e a Matemática integram uma mesma área do conhecimento. São ciências que têm em comum a investigação da natureza e dos desenvolvimentos tecnológicos, compartilham linguagens para a representação e sistematização do conhecimento de fenômenos ou processos naturais e tecnológicos. No entanto, esta forma de organização adotada no Brasil não elimina o aspecto disciplinar de cada área do conhecimento que se faz necessário.

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - Lei nº 9.394/96 (BRASIL, 1996), o ensino médio tem como finalidade central não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, mas também a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos.

Elencaremos os pontos essenciais, discutidos nos documentos acima citados, sobre o papel da matemática no Ensino Médio, focalizando as orientações que se referem ao ensino da Trigonometria (objeto de estudo da nossa pesquisa).

3.2.1 **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCNEM**

Ao considerar o Ensino Médio como última e complementar etapa da Educação Básica, a LDB/96 e a Resolução CNE/98 ao instituirem as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000) nos apontam de que forma o aprendizado de Ciências e de Matemática, já iniciado no Ensino Fundamental, deve encontrar complementação e aprofundamento no Ensino Médio. Nessa nova etapa, os objetivos educacionais podem passar a ter um caráter mais formativo, tanto em termos da natureza das informações tratadas, dos procedimentos e atitudes envolvidas, como em termos das habilidades, competências e dos valores desenvolvidos, pois acredita-se que neste nível o aluno já apresenta uma certa maturidade.

No tocante à Matemática, os PCNEM (BRASIL, 2000) consideram que esta disciplina, por sua universalidade de quantificação e expressão, como linguagem ocupa uma posição singular, não apenas pelo fato de os instrumentos matemáticos serem essenciais para as construções abstratas mais elaboradas das outras ciências. Segundo o documento, é possível que não exista nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver. O documento considera que

> a Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. As formas de pensar dessa ciência possibilitam ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos (BRASIL, 2000, p.9).

Conforme já elucidamos anteriormente, a Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. Quanto ao papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade. No que diz respeito ao caráter instrumental, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional.

O documento nos esclarece, ainda, que para que essa etapa da escolaridade possa complementar a formação iniciada na escola básica e permitir o desenvolvimento das capacidades que são os objetivos do ensino de Matemática, é preciso rever e redimensionar alguns dos temas tradicionalmente ensinados. O conhecimento matemático não deve ser restrito à informação, com as definições e os exemplos, assim como a exercitação, ou seja, exercícios de aplicação ou fixação, pois, se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as ideias isoladas e desconectadas umas das outras.

O currículo a ser elaborado deve corresponder a uma boa seleção, deve contemplar aspectos dos conteúdos e práticas que precisam ser enfatizados. Outros aspectos merecem menor ênfase e devem mesmo ser abandonados por parte dos organizadores de currículos e professores. Essa organização terá de cuidar dos conteúdos mínimos da Base Nacional Comum. O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema. Nesse contexto, faz-se necessário observarmos o que diz os PCNEM sobre o ensino de trigonometria:

> Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos (BRASIL, 2000, p.44).

Essas orientações nos dão um direcionamento quanto ao que se deve priorizar no ensino da Trigonometria. Os PCNEM não especificam quais conteúdos devem ser trabalhados, mas apresentam as Competências e Habilidades, considerando os aspectos *Representação e Comunicação, Investigação e*

Compreensão, Contextualização Sociocultural, a serem desenvolvidas pelos alunos em Matemática:

> Representação e comunicação:
> - Ler e interpretar textos de Matemática.
> - Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.).
> - Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.
> - Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.
> - Produzir textos matemáticos adequados.
> - Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.
> - Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho.
>
> Investigação e compreensão:
> - Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc.).
> - Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
> - Formular hipóteses e prever resultados.
> - Selecionar estratégias de resolução de problemas.
> - Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
> - Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
> - Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
> - Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.
>
> Contextualização sociocultural
> - Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
> - Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.
> - Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade.
> - Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades. (BRASIL, 2000, p.46)

Conforme a citação acima, podemos observar que os PCNEM não deixam claro os temas e/ou conteúdos que devem ser trabalhados em Matemática no ensino médio. A partir daí surge a necessidade da criação de um documento complementar aos PCNEM que apresente de forma mais específica o que se deve trabalhar nesta fase da educação básica. Surge, então, as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares do Ensino Médio-PCN$_+$, documento que será discutido no próximo item.

3.2.2 **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio– PCN+**

O diálogo estabelecido neste documento é voltado diretamente para professores e demais educadores que atuam na escola, pois reconhece seu papel central e insubstituível na condução e no aperfeiçoamento da educação básica. Um ponto muito forte discutido pelos PCN+ é a articulação entre as disciplinas da área de Ciências da Natureza e Matemática. Com o objetivo de facilitar o trabalho nas escolas, explicita a articulação das competências gerais que se deseja promover com os conhecimentos disciplinares e apresenta um conjunto de sugestões de práticas educativas e de organização dos currículos que estabelece temas estruturadores do ensino disciplinar na área.

Enquanto os PCNEM elencam as competências e habilidades a serem desenvolvidas em cada área do conhecimento, e também em cada disciplina, de forma generalizada, ou seja, sem mencionar os conteúdos. Vejamos as competências relacionadas à trigonometria encontradas nos PCN+ (Brasil, 2002, p. 114-119):

- Identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema; por exemplo, para obter uma dada distância, saber optar por medi-la diretamente, utilizar uma planta em escala, usar semelhança de figuras, fazer uso de propriedades trigonométricas ou utilizar um sistema de eixos cartesianos e abordar o problema através da geometria analítica.
- Reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõem as condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema; por exemplo, estabelecer identidades ou relações como aquelas existentes entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, os volumes de um cilindro e de um cone que tenham a mesma base e a mesma altura, a relação entre catetos e hipotenusa em qualquer triângulo retângulo; ou ainda a identidade fundamental da trigonometria.
- Reconhecer e avaliar o caráter ético do conhecimento científico e tecnológico e utilizar tecnologia associada a campos diversos da matemática, reconhecendo sua presença e implicações no mundo cotidiano, nas relações sociais de cada época, nas transformações e na criação de novas necessidades, nas condições de vida. Por exemplo, ao se perceber a origem do uso dos logaritmos ou das razões trigonométricas como resultado do avanço tecnológico do período das grandes navegações do século 16, pode-se conceber a matemática como instrumento para a solução de problemas práticos e que se desenvolve para muito além deles, ganhando a dimensão de ideias gerais para novas aplicações fora do contexto que deu origem a elas.

As duas primeiras competências estão relacionadas com *Investigação e Compreensão*, enquanto a última está relacionada com *Contextualização Sociocultural*. Esse documento recomenda uma articulação lógica das ideias e conteúdos sistematizados em três eixos ou temas estruturadores, desenvolvidos de forma concomitante nas três séries do ensino médio:

Eixo 1 - Álgebra: números e funções

Unidades temáticas: Variação de Grandezas e Trigonometria.

Eixo 2 - Geometria e medidas

Unidades temáticas: Geometrias Plana, Espacial, Métrica e Analítica.

Eixo 3 - Análise de dados

Unidades temáticas: Estatística, Contagem e Probabilidade.

As nossas considerações serão referentes ao eixo 1, por tratar do saber que escolhemos para a nossa pesquisa (trigonometria). Os procedimentos básicos desse eixo se referem a calcular, resolver, identificar variáveis, traçar e interpretar gráficos e resolver equações de acordo com as propriedades das operações no conjunto dos números reais e as operações válidas para o cálculo algébrico.

A abordagem da trigonometria, conforme já mencionada em momentos anteriores, é sugerida em todas as séries do ensino médio. A figura 1 nos mostra a organização dos temas e suas unidades:

Figura 5: Organização dos temas por série proposta pelos PCN+

1ª série	2ª série	3ª série
1. Noção de função; funções analíticas e não-analíticas; análise gráfica; seqüências numéricas; função exponencial ou logarítmica. 1. Trigonometria do triângulo retângulo.	1. Funções seno, cosseno e tangente. 1. Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta.	1. Taxas de variação de grandezas.
2. Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.	2. Geometria espacial: poliedros; sólidos redondos; propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos. 2. Métrica: áreas e volumes; estimativas.	2. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.
3. Estatística: descrição de dados; representações gráficas.	3. Estatística: análise de dados. 3. Contagem.	3. Probabilidade.

Fonte: BRASIL, 2002, p.128

A organização dos temas e unidades foi proposta baseada em 4 aulas de Matemática semanais. Embora seja sugerido trabalhar a trigonometria também na 1ª série do ensino médio, podemos observar na organização proposta pelos PCN+ que a ênfase é dada na 2ª série, inclusive o estudo da trigonometria na 1ª volta do ciclo trigonométrico (foco de nossa pesquisa). Daí a nossa escolha por analisar um livro didático da 2ª série do ensino médio.

Outros documentos também nos nortearam nessa investigação; a seguir veremos algumas considerações trazidas pelas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM).

3.2.3 **Orientações Curriculares para o Ensino Médio - OCEM**

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM (BRASIL, 2006) foram elaboradas a partir de ampla discussão com as equipes técnicas dos Sistemas Estaduais de Educação, professores e alunos da rede pública, e representantes da comunidade acadêmica. O objetivo deste material é contribuir para o diálogo entre professor e escola sobre a prática docente. Complementando o que outros documentos oficiais sugerem, as OCEM recomendam a contextualização na abordagem dos conceitos Matemáticos.

No que se refere ao estudo das funções trigonométricas, o trabalho com a trigonometria deve anteceder a abordagem das funções seno, cosseno e tangente, priorizando as relações métricas no triângulo retângulo e as leis do seno e do cosseno como ferramentas essenciais a serem adquiridas pelos alunos no ensino médio. Ao iniciar o estudo das razões trigonométricas seno e cosseno, deve-se ressaltar que são as propriedades de semelhança de triângulos que dão sentido a essas definições. A apresentação das leis dos senos e dos cossenos pode ser motivada com questões relativas à determinação das medidas de elementos de um triângulo. É recomendável, também, o estudo da razão trigonométrica tangente (BRASIL, 2006, p. 73).

Assim como os PCNEM e os PCN+, as OCEM também nos elucidam sobre a prioridade no ensino da trigonometria: “Problemas de cálculos de distâncias inacessíveis são interessantes aplicações da trigonometria, e esse é um assunto que merece ser priorizado na escola.” (BRASIL, 2006, p.74).

Considerando os objetivos da educação Matemática no ensino médio, as OCEM nos orientam que alguns tópicos usualmente presentes no estudo da trigonometria podem ser dispensados, como, por exemplo, as outras três razões trigonométricas (secante, cossecante e cotangente), as fórmulas para sen (a+b) e cos (a+b), que tanto exigem dos alunos para serem memorizadas. Ressaltam ainda a atenção que os professores precisam ter quanto à transição do seno e do cosseno no triângulo retângulo (em que a medida do ângulo é dada em graus), para o seno e o cosseno, definidos como as coordenadas de um ponto que percorre um arco do círculo de raio unitário com medida em radianos.

A construção de gráficos referentes às funções trigonométricas é recomendada para os alunos. As funções trigonométricas seno e cosseno também devem ser associadas aos fenômenos que apresentam comportamento periódico. O estudo das demais funções trigonométricas pode e deve ser colocado em segundo plano.

O saber a ser analisado em nossa pesquisa (a trigonometria) foi escolhido, dentre outros fatores, a partir das análises preliminares realizadas nos documentos oficiais que aqui foram discutidos. Assim como esses documentos, outro aspecto fortaleceu a nossa escolha quanto ao objeto de nossa investigação: pesquisas sobre o ensino da trigonometria.

3.3 PESQUISAS SOBRE O ENSINO DE TRIGONOMETRIA

Considerando o avanço tecnológico, cada vez mais o mundo virtual nos proporciona uma variedade imensa de informações. Nesse contexto, percebemos que as revistas eletrônicas têm sido muito utilizadas pelos professores, na hora de realizarem suas pesquisas. Para o levantamento sobre pesquisas que abordam o ensino de trigonometria no Brasil, consultamos periódicos Qualis A e B (versão *online*), publicados no período de 2009 a 2013. Dentre as dez revistas pesquisadas, encontramos os seguintes trabalhos (Tema/Título; Questão/Objetivo):

Quadro 2: Pesquisas sobre o ensino de trigonometria

Tema: Construção de conceitos matemáticos na educação básica numa abordagem peirceana. Questão/Objetivo: Analisar a semiótica dos signos pensamento, gerados pelos alunos, para a compreensão do conceito de medida de comprimento (BOLEMA, Rio Claro (SP), v. 23, nº 37, p. 887 a 904, dezembro 2010). Tema: Investigando as concepções prévias dos alunos do segundo ano do ensino médio e seus desempenhos em alguns conceitos do campo conceitual da trigonometria. Questão/Objetivo: *A*plicar uma metodologia fundamentada em teorias de aprendizagem, para promover uma aprendizagem significativa no campo conceitual da trigonometria (BOLEMA, Rio claro (SP), v. 24, nº 38, p. 43 a 73, abril 2011). Tema: O uso de tecnologias para ensino de trigonometria: estratégias pedagógicas para a construção significativa da aprendizagem. Questão/Objetivo: Investigar a eficiência de estratégias pedagógicas com tecnologias na construção significativa do conhecimento sobre conceitos iniciais de trigonometria, e, de forma mais específica, sobre seno e cosseno. (EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E PESQUISA, São Paulo, v.12, n.3, p.548 e 577, 2010) Tema: Transposição didática: exemplos em educação matemática. Questão/Objetivo: Explorar a noção de “transposição didática” e trazer alguns exemplos propostos por Chevallard, detalhando os passos de transformação do saber matemático (EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA – RS, n. 10, v. 1, p.65-74, 2009). Tema: Somando funções trigonométricas: uma reconstrução didática do conceito de timbre a partir de duas experiências pedagógicas Questão/Objetivo: Desenvolvimento de uma abordagem interdisciplinar das funções trigonométricas através da análise da representação matemática do conceito de timbre (BOLEMA, Rio Claro (SP), v. 23, nº 36, p. 597 a 624, agosto 2010).

Fonte: Quadro organizado pela pesquisadora

Ao analisarmos as pesquisas acima, identificamos aspectos metodológicos em cada uma delas: a primeira trata de uma intervenção realizada com os alunos, onde houve práticas em que estes manipularam materiais; na segunda, foi proposta aos alunos a construção de mapas conceituais, além da aplicação de questionários; na terceira, foi proposta uma intervenção que abrangia dois momentos: a utilização de materiais simples de medição e no outro momento o uso de tecnologia (software Geogebra); no quarto trabalho, foi realizada uma pesquisa bibliográfica, procurando estabelecer um diálogo ente vários autores sobre a transposição didática da trigonometria; na quinta pesquisa, os autores fizeram, inicialmente, uma análise bibliográfica sobre a trigonometria e sua relação com a música, depois sugeriram algumas situações didáticas envolvendo os temas pesquisados, mas não realizaram nenhuma intervenção com alunos. Como podemos ver, nenhuma das pesquisas investigou a abordagem da trigonometria no livro didático.

Na exploração bibliográfica que fizemos, além dos periódicos *online* pesquisamos também teses e dissertações que discutiram a trigonometria. Encontramos um trabalho que nos chamou particular atenção sobre a trigonometria. Trata-se de uma pesquisa de mestrado (CASSOL, 2012) onde foi realizada uma meta-análise de teses e dissertações brasileiras nos últimos cinco anos. A pesquisadora, ao esclarecer os procedimentos e instrumentos para a construção dos dados, nos mostrou como são poucas as pesquisas sobre o tema. Segundo Cassol (2012),

> a localização das fontes e obtenção do material referente ao tema foi: por títulos e resumos no sítio eletrônico da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e por títulos em diversos Programas de Pós - Graduação. Foram utilizadas as palavras-chave **trigonometria**, inicialmente de forma individual, e posteriormente acompanhada da palavra **ensino**, já que esta é muito utilizada na área de educação e por fim acompanhada da palavra **tecnologia**. Como não foi possível encontrar teses no tema, utilizou-se somente as dissertações (CASSOL, 2012, p50).

No total, foram encontradas 20 dissertações, dentre elas, a pesquisadora analisou sete. Ela verificou que a maioria das dissertações selecionadas se volta para os conceitos básicos da Trigonometria, especialmente os conceitos seno e cosseno, e sua representação no plano cartesiano. Verificou também que seis pesquisas se preocuparam em proporcionar aos alunos uma aprendizagem significativa; uma pesquisa se preocupou em analisar as potencialidades e limitações do uso do software no ensino e na aprendizagem de Trigonometria; todas as sete pesquisas elaboraram, aplicaram e analisaram sequências didáticas com o uso do software nos diversos ramos da Trigonometria; uma pesquisa se preocupou em avaliar a mudança da prática docente, uma pesquisa abordou o erro e usou-o como recurso para tal aprendizagem e todas as pesquisas elencaram as dificuldades apresentadas pelos alunos no decorrer das atividades. Observamos que a maioria das pesquisas investiga o uso de softwares no ensino da trigonometria.

3.3.1 **Algumas considerações sobre essas pesquisas**

Tanto nas investigações sobre a trigonometria encontradas nos periódicos *online* quanto na dissertação acima analisada, observamos que nenhuma delas investiga a trigonometria nos livros didáticos, particularmente análises sobre as atividades propostas.

Será que o livro didático é um instrumento importante no processo de ensino-aprendizagem?

Pesquisas apontam que não são os programas de ensino que conduzem diretamente o processo de ensino-aprendizagem na sala de aula e sim o livro didático. Segundo Michel Henry (1991) os professores tomam mais como referência, na preparação de suas aulas, os manuais (livros didáticos) do que os textos de programas.

Diante do exposto, gostaríamos de tecer algumas observações sobre as possíveis contribuições de nossa pesquisa ao cenário de pesquisas envolvendo trigonometria, com o qual nos deparamos.

3.3.2 **Nossa pesquisa**

Considerando as pesquisas e documentos analisados, reconhecemos a importância da trigonometria para a educação básica e o papel importante dos livros didáticos para professores e alunos. Diante do exposto, constatamos que há carência de pesquisas que investigam a trigonometria apresentada nos livros didáticos.

Analisar a transposição didática da trigonometria, especificamente o ciclo trigonométrico da 1ª volta, através das atividades propostas no livro didático pode provocar reflexões profundas nos professores que utilizam tal instrumento (o livro didático) como o principal norteador de suas organizações matemáticas. Além do mais, ela pode também influenciar outras investigações sobre o ensino de trigonometria nos livros didáticos, uma vez constatada a insuficiência de pesquisas que abordam esse tema nos livros didáticos.

Desta forma, acreditamos que o desenvolvimento de nossa pesquisa poderá contribuir significativamente para a Didática da Matemática.

No próximo capítulo, descreveremos como ocorreu todo o processo de nossa investigação.

4 METODOLOGIA

O objetivo de nossa investigação foi analisar a transposição didática da Trigonometria, especificamente a 1ª volta do ciclo trigonométrico, no livro didático da 2ª série do ensino médio. Devido à natureza da pesquisa, não utilizamos indivíduos como alvo de nossa investigação, e sim os documentos oficiais e um livro didático, considerando, sobretudo, as atividades nele propostas, que revelam uma forma de tratamento do saber, bem como as concepções a ele relacionadas, e que, acreditamos, podem interferir direta ou indiretamente no processo de ensino e aprendizagem, uma vez que o livro didático parece continuar sendo um importante documento que norteia o professor e também o aluno nas situações didáticas.

As pesquisas científicas podem ser classificadas segundo os objetivos que se pretende alcançar e segundo os procedimentos metodológicos e técnicos. Embora existam diversas classificações para os tipos de pesquisa, optamos pela classificação elaborada por Gil (2008). Quanto aos objetivos, faremos uma pesquisa exploratória. Nesse tipo de pesquisa, o objetivo é proporcionar maior familiaridade com o problema (explicitá-lo). Pode envolver levantamento bibliográfico, entrevistas com pessoas experientes no problema pesquisado, dentre outros. Optamos por fazer uma análise de documentos, no nosso caso, o livro didático e os documentos oficiais que orientam a educação brasileira.

A seguir, faremos uma breve explanação de como ocorreu todo o processo de nossa investigação.

4.1 MÉTODO(S), MATERIAIS E TÉCNICAS

Inicialmente, investigamos como a trigonometria é abordada nos documentos oficiais que direcionam a educação brasileira, uma vez que a forma como o saber aparece nesses documentos revela uma primeira etapa da transposição didática externa, realizada pela/na noosfera. Baseado em nossa experiência na docência do ensino médio e também nas análises prévias dos documentos oficiais, identificamos que o estudo da trigonometria é aprofundado no ensino médio, embora no 9º ano do ensino fundamental as primeiras razões trigonométricas já sejam introduzidas no currículo. Daí a nossa escolha pelo ensino médio como modalidade de ensino a ser investigada. As análises prévias desses documentos também nos mostraram que a ênfase no estudo da trigonometria deve estar nas razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, abordadas especificamente na 1ª volta do ciclo trigonométrico, sugerido a ser trabalhado na 2ª série do ensino médio, conforme orientam os PCN_+ (BRASIL, 2002).

Ressaltamos que, embora nossas análises tenham sido realizadas em apenas um livro didático (análise “principal”), para a elaboração da modelização da praxeologia matemática, especificamente no momento de verificar as tarefas e tipos de tarefas que utilizaríamos como referência para analisar o livro didático escolhido, optamos por consultar mais dois livros didáticos com o objetivo de “alimentar” a análise principal. Essas análises realizadas nesses dois livros foram por nós denominadas de “análise complementar”.

A escolha do livro para a análise principal se deu pelo fato de a pesquisadora ter uma relação próxima com a obra, uma vez que esta foi adotada na instituição na qual a pesquisadora desenvolve suas atividades profissionais, como professora de matemática do ensino médio; e também por ser um livro adotada por outras escolas da rede pública estadual de ensino, localizadas no Recife e região metropolitana. O livro faz parte da coleção *Conexões com a Matemática*, da autora Juliane Matsubara Barroso, publicado pela Editora Moderna. Foi aprovado pelo Plano Nacional do Livro Didático-PNLD para o triênio 2012, 2013 e 2014. Durante as nossas análises, utilizaremos a denominação LD1 para nos referirmos ao livro didático *Conexões com a Matemática,* utilizado na nossa análise principal.

Os livros utilizados na análise complementar foram aprovados pelo PNLD, referentes ao triênio 2015, 2016 e 2017. Nossa escolha se deu pelo fato de dispormos, no momento, apenas de livros das coleções aprovadas no último PNLD (2015 a 2016). Eles fazem parte das seguintes coleções: um da coleção *Contextos e Aplicações*, do autor Luiz Roberto Dante, publicado pela Editora Ática; e o outro faz parte da coleção *Novo Olhar Matemática*, do autor Joamir Souza, publicado pela Editora FTD. Lembramos que estes dois livros não foram objeto da análise principal, apenas nos ajudaram na identificação de Tarefas e Tipos de Tarefas para a modelização a priori. Durante as nossas análises, ao nos referirmos a esses livros didáticos, utilizaremos a denominação LD2 para o livro intitulado *Novo Olhar Matemática* e LD3 para o: *Contextos e Aplicações*.

Os três livros considerados em nossa investigação são manuais do professor. Fizemos esta escolha devido ao fato de que, no manual do professor aparecem informações que não fazem parte do manual do aluno; podemos citar: informações complementares, resolução completa de exercícios, sugestões de outras atividades, etc.

Como a nossa investigação foi com base em análise de documentos, utilizamos como instrumentos fichamentos, tabelas e planilhas para as categorias de análise.

Com o objetivo de facilitar as nossas análises e, consequentemente, a compreensão do leitor deste trabalho, decidimos analisar o ciclo trigonométrico da 1ª volta, seguindo a mesma sequência que o livro didático propõe, ou seja, de acordo com os subtítulos. Assim sendo, apresentamos neste momento a estrutura que foi utilizada nas nossas análises:

Quadro 3: Estrutura utilizada em nossas análises

<table>
<tr><th>TÍTULO:
CICLO TRIGONOMÉTRICO (1ª VOLTA)</th><th rowspan="2">ESTRUTURA DAS ANÁLISES</th></tr>
<tr><th>SUBTÍTULOS</th></tr>
<tr><td>1. Arcos e ângulos</td><td rowspan="6">Em cada subtítulo foi analisado:
• como o tema é abordado (texto ou imagem introdutório);
• os exemplos propostos, identificando os elementos $[T, \tau, \theta, \Theta]$;
• os exercícios resolvidos, identificando os elementos $[T, \tau, \theta, \Theta]$;
• os exercícios propostos, identificando os elementos $[T, \tau, \theta, \Theta]$;

Após desenvolver todos os tópicos acima, em cada subtítulo, fizemos uma síntese geral.</td></tr>
<tr><td>2. O ciclo trigonométrico</td></tr>
<tr><td>3. Seno, cosseno e tangente</td></tr>
<tr><td>4. Equações e inequações trigonométricas</td></tr>
<tr><td>5. Trigonometria em um triângulo qualquer</td></tr>
<tr><td>Guia do professor</td></tr>
</table>

Fonte: Quadro organizado pela pesquisadora

Salientamos que, ao nos referirmos aos "exemplos propostos", estamos considerando os exemplos e os exercícios resolvidos sugeridos pelo autor. O leitor observará que, em algumas imagens de exemplos propostos, aparece a letra R seguida de alguma numeração, que quer dizer "exercício resolvido". Não fizemos distinção entre os exemplos e os exercícios resolvidos, ou seja, um ou outro, para nós, foi considerado como "exemplo proposto". E quanto à contagem dos exercícios propostos, consideramos cada item da questão como sendo um exercício; ex: 1ª questão –a, b, c, d, consideramos 4 exercícios propostos.

A seção do LD1 intitulada "guia do professor" foi utilizada nos momentos das análises das técnicas apresentadas nas resoluções dos exercícios propostos, e não como um subtítulo a ser analisado como os demais.

Antes de realizarmos as análises descritas no quadro 3, construímos uma "modelização a priori" de praxeologias matemáticas relativas ao saber em foco (1ª volta do ciclo trigonométrico), baseada nas tarefas (tipos e subtipos) apresentadas em três livros didáticos, incluindo nestes livros aquele que foi utilizado para a análise principal. Essa modelização está inserida no capítulo referente aos resultados, especificamente no item 5.2 deste trabalho.

Consideramos, também, necessário mostrar como o livro didático utilizado para a análise principal está organizado, uma vez que, em alguns momentos, fizemos menção a partes específicas (seções) do livro. Em virtude disso, fizemos uma breve apresentação da obra, com o objetivo de situar o leitor deste trabalho no contexto que nos referimos, facilitando, desta forma, a compreensão das análises. Iniciaremos o próximo capítulo apresentando o livro didático utilizado na análise principal.

5 RESULTADOS

Este capítulo trata das análises realizadas ao longo de nossa investigação. Antes de apresentarmos as análises propriamente ditas, consideramos importante apresentar a obra utilizada na análise principal.

5.1 APRESENTAÇÃO DA OBRA UTILIZADA NA ANÁLISE PRINCIPAL

O livro didático escolhido como instrumento para a análise principal compõe a coleção intitulada *Conexões com a Matemática*, da autora Juliane Matsubara Barroso, publicado pela Editora Moderna; foi aprovado pelo PNLD para o triênio 2012, 2013 e 2014.

O livro foi organizado em onze capítulos distribuídos em quatro unidades, além de uma seção de questões de vestibulares, uma de questões do Exame Nacional do Ensino Médio-ENEM, sugestões de leitura, respostas dos exercícios de todas as unidades e o guia do professor. O detalhamento dessa organização pode ser visto na íntegra através do *sumário* do livro analisado (LD1), contido no anexo A.

Embora tenhamos disponibilizado o sumário do livro, optamos por construir uma tabela sintetizando a obra. Conforme a organização descrita (quadro 4), podemos observar que nossas análises se referem ao capítulo 1 do livro didático, que trata do ciclo trigonométrico (1ª volta).

Quadro 4: Organização do livro didático utilizado na análise principal

UNIDADES E CAPÍTULOS		
Unidades	Capítulos	Títulos dos capítulos
1 TRIGONOMETRIA	1.	Ciclo trigonométrico (1ª volta)
	2.	Principais funções trigonométricas
	3.	Complementos e aprofundamento
2 GEOMETRIA	4.	Superfícies poligonais, círculo e áreas
	5.	Introdução à Geometria espacial
	6.	Poliedros
	7.	Corpos redondos
3 MATRIZES E SISTEMAS LINEARES	8.	Matrizes e determinantes
	9.	Sistemas lineares
4 ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE	10.	Análise combinatória
	11.	Probabilidade

OUTRAS SEÇÕES DO LIVRO		
QUESTÕES DE VESTIBULAR	Advindas de instituições diversas de todo o Brasil, organizadas de acordo com as unidades.	
QUESTÕES DO ENEM	Organizadas por ano: de 1998 a 2007.	
SUGESTÕES DE LEITURAS	Indicação de seis livros abrangendo a Matemática (geral e abstrata).	
RESPOSTAS	Referentes a todos os exercícios propostos. Contém apenas a resposta final, sem mostrar como foram elaboradas.	
GUIA DO PROFESSOR	Parte geral	Pressupostos teóricos e objetivos da coleção, organização e estrutura da obra, a importância do livro didático, avaliação, sugestão de leituras, materiais e sites, dentre outros.
	Parte específica	I. Suplemento: sugere atividades extras para cada capítulo, com resolução demonstrativa. II. Resoluções e comentários: detalha as respostas de todas as atividades sugeridas, não só referentes aos exercícios propostos.

Fonte: Quadro organizado pela pesquisadora

Para analisarmos a praxeologia matemática, além do capítulo 1, investigamos também o guia do professor, principalmente a parte específica, pois ela sugere um suplemento de atividades extras, resoluções e comentários das atividades sugeridas para o aluno.

Ao abrirmos o livro didático analisado, logo após o sumário, ele traz duas páginas mostrando o esquema da unidade, esclarecendo ao leitor como os temas foram organizados (ver anexo B). No início de cada unidade, o autor exibe uma página de abertura trazendo as informações:

- lista dos capítulos que compõem a unidade;

- situação de partida (texto) que explora conceitos desenvolvidos nos capítulos;
- imagem para motivar e ilustrar a contextualização dos conceitos;
- atividades que promovem a sondagem de conhecimentos prévios.

Na abertura de cada capítulo, são propostos os objetivos (do capítulo) e imagem(s) que sugerem os conceitos que ali serão abordados. Nas páginas posteriores são explorados: *apresentação dos conteúdos* (cada tópico do capítulo apresenta: textos introdutórios, exemplos, exercícios resolvidos, exercícios propostos), *exercícios complementares* (abrangendo todos os tópicos do capítulo), *resumo do capítulo* e, por fim, *autoavaliação*. Ao final de alguns capítulos são sugeridas algumas questões de vestibulares com as resoluções comentadas (seção intitulada de *resolução comentada)*, e textos variados que exploram interpretação, compreensão e trabalho em grupo (seção intitulada *compreensão de texto).*

5.2 MODELIZAÇÃO DE PRAXEOLOGIAS MATEMÁTICAS

Tomando como referência os estudos realizados sobre a TAD e nossa experiência como professora de matemática do ensino médio, neste tópico, apresentaremos uma proposta de "modelização a priori" das praxeologias matemáticas que se podem construir em torno dos tipos e subtipos de tarefas relativos à trigonometria da 1ª volta (ciclo trigonométrico). Essa modelização foi construída a partir das tarefas (tipos e subtipos) encontradas nos três livros didáticos utilizados nesta investigação.

5.2.1 **Tarefas**

Nos estudos realizados, bem como nas pesquisas em três livros didáticos, encontramos as seguintes Tarefas (T) relativas à trigonometria da 1ª volta:

Quadro 5: Modelização a priori – Descrição das Tarefas

T_1	Determinar o comprimento.
T_2	Calcular a medida.
T_3	Determinar o valor.
T_4	Classificar as sentenças.
T_5	Calcular as expressões.
T_6	Colocar em ordem.
T_7	Resolver a equação.
T_8	Resolver a inequação.
T_9	Representar a solução.
T_{10}	Calcular a área.

Fonte: Quadro organizado pela pesquisadora

Ressaltamos que, em alguns momentos, identificamos tarefas que apresentavam verbos diferentes, mas que tinham o mesmo significado, quando analisávamos o contexto geral da pergunta; por exemplo, "determinar a medida do ângulo" e "calcular a medida do ângulo". Nestes casos, optamos por um dos verbos para designar a tarefa, por entendermos que nesse contexto eles são sinônimos.

5.2.2 **Tipos e subtipos de tarefas**

Embora não encontremos em Chevallard (1991) e em outros a denominação subtipos de tarefas, adotamos essa terminologia e proposição de análise, inspirados no estudo de Araújo (2009).

Antes de elencarmos as Tarefas (tipos e subtipos) que serão referência para a nossa análise principal, gostaríamos de esclarecer a identificação que utilizamos para designar cada informação:

i - representa a *variação dessas tarefas*.

j - representa a *variação dos tipos de tarefas* relacionadas à tarefa $T_{i.}$

k - representa a *variação dos subtipos de tarefas* relacionadas ao tipo de tarefa j que, por sua vez, refere-se à tarefa T_i .[2]

No quadro 6 esclarecemos a simbologia utilizada para tal identificação através de alguns exemplos.

[2] Na lista de abreviaturas, no início dessa dissertação, essas abreviaturas também são elencadas.

Quadro 6: Exemplos da simbologia utilizada para identificar as Tarefas (tipos e subtipos)

Considerando a tarefa T_2 – *Calcular a medida*, temos:

Tipo de tarefa: t_{21} – *Calcular a medida do raio*.
2 – representa a tarefa a qual nos referimos;
1 - representa o 1º tipo de tarefa relacionado à tarefa T_2.
Tipo de tarefa: t_{22} – *Calcular a medida de um arco*.
2 – representa a tarefa a qual nos referimos;
2 - representa o 2º tipo de tarefa relacionado à tarefa T_2.
Tipo de tarefa: t_{23} – *Calcular a medida do ângulo*.
2 – representa a tarefa a qual nos referimos;
3 - representa o 3º tipo de tarefa relacionado à tarefa T_2.

Analogamente, utilizamos a mesma lógica para os subtipos de tarefas:

Subtipo de tarefa : st_{211} – *Calcular a medida do raio de uma circunferência de comprimento x*.
2 – representa a tarefa a qual nos referimos;
1 - representa o 1º tipo de tarefa relacionado à tarefa T_2.

Fonte: Quadro organizado pela pesquisadora

Para cada tarefa (T) elencada na seção anterior, identificamos os tipos (t) e subtipos (st) de tarefas correlacionadas. Utilizamos as abreviações sen (seno), cos (cosseno) e tg (tangente). Para melhor compreensão, organizamos as informações no quadro 7.

Quadro 7: Modelização a priori - Tarefas (tipos e subtipos)

Tarefas (T_i)	Tipos de tarefas (t_{ij})	Subtipos de tarefas (st_{ijk})
T_1	t_{11} – Determinar o comprimento de uma circunferência.	st_{111} - Determinar o comprimento de uma circunferência de raio x. st_{112} - Determinar o comprimento de uma circunferência de diâmetro y.
T_2	t_{21} – Calcular a medida do raio.	st_{211} – Calcular a medida do raio de uma circunferência de comprimento x.
	t_{22} – Calcular a medida de um arco.	st_{221} – Calcular a medida de um arco em graus. st_{222} – Calcular a medida de um arco em radianos. st_{223} – Calcular a medida de um arco a partir da medida do ângulo central. st_{224} – Calcular a medida de um arco a partir da medida do comprimento da circunferência. st_{225} – Calcular a medida dos arcos simétricos ao arco x em relação ao eixo das ordenadas e/ou abcissas. st_{226} – Determinar a medida do arco x dado sen x = y e o quadrante a que x pertence. st_{227} – Determinar a medida do arco x dado cos x = y e o quadrante a que x pertence. st_{228} – Determinar a medida do arco x dado tg x = y e o quadrante a que x pertence.

<table>
<tr><th>Tarefas (T_i)</th><th>Tipos de tarefas (t_{ij})</th><th>Subtipos de tarefas (st_{ijk})</th></tr>
<tr><td rowspan="2">T_2</td><td>t_{23} – Calcular a medida do ângulo.</td><td>st_{231} – Calcular a medida do ângulo central em graus.
st_{232} – Calcular a medida do ângulo central em radianos.
st_{233} – Calcular a medida de um ângulo do triângulo.</td></tr>
<tr><td>t_{24} – Calcular a medida do lado do polígono.</td><td>st_{241} – Calcular a medida do lado de um triângulo.
st_{242} – Calcular a medida do lado de um losango.
st_{243} – Determinar a medida dos lados e/ou dos ângulos de um triângulo.
st_{244} – Determinar a medida da diagonal de um paralelogramo.
st_{245} – Determinar o perímetro do triângulo a partir da medida de seu lado.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">T_3</td><td>t_{31} – Determinar o valor do seno x.</td><td>st_{311} – Determinar o valor do sen x e seu sinal.
st_{312} – Determinar o quadrante do ângulo/arco x para sen x = y.
st_{313} – Determinar o sinal do sen x.
st_{314} – Determinar o valor do sen x consultando a tabela trigonométrica e a simetria.
st_{315} – Determinar o valor de sen x, seno y, dados x e y.
st_{316} – Determinar o valor de sen x dado cos x.
st_{317} – Determinar o valor de sen x dado tg x.</td></tr>
<tr><td>t_{32} – Determinar o valor do cosseno x.</td><td>st_{321} – Determinar o sinal do cos x.
st_{322} – Determinar o quadrante do ângulo/arco x para cos x = y.
st_{323} – Determinar o quadrante do ângulo/arco x para cos x = sen x.
st_{324} – Determinar se cos x é o triplo do cos 3x.
st_{325} – Determinar se cos x é metade do cos 2x.
st_{326} – Determinar o cos x consultando a tabela trigonométrica.
st_{327} – Determinar cos x, dado sen x.
st_{328} – Determinar cos x, dada tg x.</td></tr>
<tr><td>t_{33} – Determinar o valor da tangente x.</td><td>st_{331} – Determinar o sinal da tg x.
st_{332} – Determinar o quadrante do ângulo/arco x para tg x = y.
st_{333} – Determinar o quadrante do ângulo/arco x para tg x = sen x.
st_{334} – Determinar a tg x, dado cos x.
st_{335} – Determinar a tg x, dado sen x.</td></tr>
<tr><td>T_4</td><td>t_{41} – Classificar as sentenças em verdadeiro ou falso.</td><td>st_{411} – Classificar as sentenças do tipo:
sen(x)=sen(y)+sen(y)
sen(x+y)=sen(x)+sen(y)
sen(x.y)=x.sen(y)

st_{412} – Classificar as sentenças do tipo:
cos(x)= cos (y)+ cos (y)
cos (x+y)= cos (x)+ cos (y)
cos (x.y)=x. cos (y)

st_{413} – Classificar as sentenças do tipo:
tg(x)= tg(y)+tg(z)</td></tr>
</table>

Tarefas (T_i)	Tipos de tarefas (t_{ij})	Subtipos de tarefas (st_{ijk})
T_5	t_{51} – Calcular as expressões.	st_{511} – Calcular as expressões do tipo $\frac{sen(x)+sen(y)}{sen(z)}$ st_{512} – Calcular as expressões do tipo $\frac{sen(x)-sen(y)}{k.sen(z)}$ st_{513} – Calcular as expressões do tipo $\frac{cos(x)+cos(y)}{sen(z)}$ st_{514} – Calcular as expressões do tipo $\frac{cos(x)-cos(y)}{k.sen(z)}$
T_6	t_{61} – Colocar em ordem crescente ou decrescente os valores.	st_{611} – Colocar em ordem crescente ou decrescente os valores do sen x. st_{612} – Colocar em ordem crescente ou decrescente os valores do cos x. st_{613} – Colocar em ordem crescente ou decrescente os valores da tg x.
T_7	t_{71} – Resolver a equação trigonométrica.	st_{711} – Determinar o valor de y sabendo que $y = cosx + tgx$. st_{712} – Determinar os valores de x que satisfazem a equação $senx = y$. st_{713} – Determinar os valores de x que satisfazem a equação $cosx = y$. st_{714} – Determinar os valores de x que satisfazem a equação $tgx = y$. st_{715} – Determinar os valores de x que satisfazem a equação $sen(k.x) = y$. st_{716} – Determinar os valores de x que satisfazem a equação $cos(k.x) = y$. st_{717} – Determinar os valores de x que satisfazem a equação $tg(k.x) = y$. st_{718} – Determinar os valores de x que satisfazem a equação $sen^2x - senx - k = y$. st_{719} – Determinar os valores de x que satisfazem a equação $cos^2x - cosx - k = y$. st_{7110} – Determinar os valores de x que satisfazem a equação $tg^2x - tgx + k = y$. st_{7111} – Determinar os valores de x que satisfazem a equação $\mathrm{COS}\, x + y = sen^2 x$. st_{7112} – Determinar os valores de x que satisfazem a equação $cos^2x + sen^2x = senx + k$. st_{7113} – Determinar os valores de x que satisfazem a equação $sen^2x = k.cosx - cos^2x$. st_{7114} – Determinar os valores de x que satisfazem a equação $senx.cosx - cosx = 0$.

Tarefas (T_i)	Tipos de tarefas (t_{ij})	Subtipos de tarefas (st_{ijk})
T_7	t_{71} – Resolver a equação trigonométrica.	st_{7115} – Determinar os valores de x que satisfazem a equação $sen^3x.cosx + sen.cosx = 0$. st_{7116} – Determinar os valores de x que satisfazem a equação $k.cosx = \frac{1}{cosx}$ st_{7117} – Determinar os valores de x que satisfazem a equação $k + tg^2x = q.tgx$. st_{7118} – Determinar os valores de x que satisfazem a equação $\frac{sen^2x}{cosx} + cosx + k = 0$
T_8	t_{81} – Resolver a inequação trigonométrica.	st_{811} – Resolver a inequação trigonométrica do tipo $k.senx \geq y \;\; ou \;\; k.senx \leq y$. st_{812} – Resolver a inequação trigonométrica do tipo $k.cosx \geq y \;\; ou \;\; k.cosx \leq y$. st_{813} – Resolver a inequação trigonométrica do tipo $k.tgx \geq y \;\; ou \;\; k.tgx \leq y$.
T_9	t_{91} – Representar a solução de uma inequação.	st_{911} – Representar a solução de uma inequação trigonométrica no ciclo trigonométrico.
T_{10}	t_{101} – Calcular a área de um polígono.	st_{1011} – Calcular a área de um retângulo. st_{1012} – Calcular a área de um losango. st_{1013} – Calcular a área de um triângulo. st_{1014} – Calcular a área de um hexágono. st_{1015} – Calcular a área de um paralelogramo.

Fonte: Quadro organizado pela pesquisadora

Decidimos não incluir na modelização as técnicas, tecnologias e teorias, uma vez que estes elementos serão discutidos, analisados e comparados na próxima seção, de acordo com as informações coletadas nos três livros didáticos considerados neste estudo.

5.3 ANÁLISE DA PRAXEOLOGIA MATEMÁTICA DA TRIGONOMETRIA DA 1ª VOLTA DO CICLO TRIGONOMÉTRICO (0º A 360º)

Esta seção apresenta os resultados da praxeologia matemática realizada no livro didático da 2ª série do ensino médio. Conforme já mencionado na seção 4.1 deste trabalho, optamos por fazer nossa análise principal, ou seja, a análise propriamente dita das atividades sugeridas no livro didático, seguindo a mesma sequência proposta pela obra. Esclarecemos que, embora nosso foco sejam as atividades propostas (exemplos e exercícios sugeridos), consideramos importante analisar, também, como o saber é tratado no texto didático (texto que explica o saber no livro didático) que antecede os exemplos e exercícios sugeridos, uma vez que estes (textos) podem justificar o tipo de tarefa sugerida nas atividades propostas.

5.3.1 **Análise praxeológica do subtítulo "arcos e ângulos"**

Conforme vimos no quadro 4, na organização do livro didático, a unidade 1 trata da Trigonometria subdividida em três capítulos. As nossas análises se referem ao capítulo 1 que trata do Ciclo Trigonométrico da 1ª volta. Consideramos importante iniciarmos as nossas análises pela página de abertura da unidade.

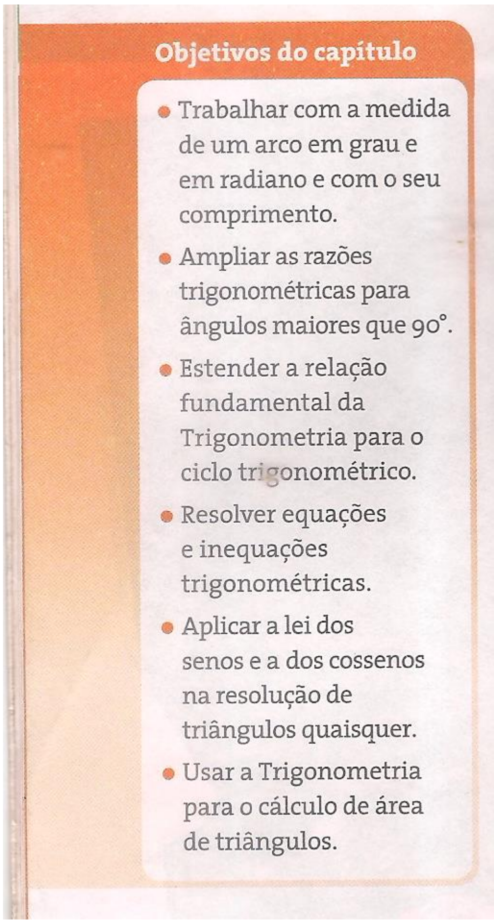
Na página de abertura da unidade 1, o autor exibe uma imagem de uma roda-gigante japonesa, considerada a maior até 2005. Logo abaixo da imagem, é sugerido um questionário intitulado "Teste seus conhecimentos prévios", onde são elencadas perguntas referentes à roda-gigante apresentada. Ao lado da imagem apresenta também um texto explicativo sobre o significado da palavra trigonometria. Disponibilizamos a página de abertura da unidade 1 no anexo C, para melhor compreensão do leitor. Ao que nos parece, através da imagem e do questionário, há uma tentativa do autor de fazer com que sejam relembrados alguns conceitos matemáticos que estão diretamente ligados à trigonometria: ângulos, coordenadas de pontos no plano, etc.

5.3.1.1 Como o tema é abordado

Na página de abertura do capítulo 1 (anexo D), que trata do ciclo trigonométrico da 1ª volta, o autor elenca os objetivos do capítulo (figura 6).

Esses objetivos sinalizam as tarefas que aparecem ao longo do capítulo.

FIGURA 6: Objetivos do capítulo "Ciclo Trigonométrico" do LD1



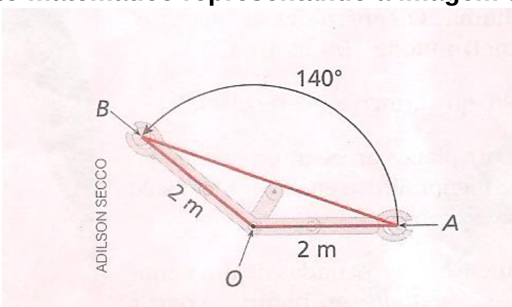
Objetivos do capítulo

- Trabalhar com a medida de um arco em grau e em radiano e com o seu comprimento.
- Ampliar as razões trigonométricas para ângulos maiores que 90°.
- Estender a relação fundamental da Trigonometria para o ciclo trigonométrico.
- Resolver equações e inequações trigonométricas.
- Aplicar a lei dos senos e a dos cossenos na resolução de triângulos quaisquer.
- Usar a Trigonometria para o cálculo de área de triângulos.

Fonte: BARROSO,2010, p.10.

Ao lado dos objetivos é apresentada uma imagem de um braço mecânico segurando uma bola de tênis, sugerindo a realização de um movimento de até 140º. Percebemos que a intenção do autor parece ser a de introduzir o estudo de ângulos. Logo abaixo da imagem, tem-se um desenho matemático modelizando o braço mecânico; trata-se de um triângulo isósceles com os dois lados iguais medindo 2m (dois metros) e o ângulo entre esses lados medindo 140º (figura 7).

FIGURA 7: Modelo matemático representando a imagem do braço mecânico



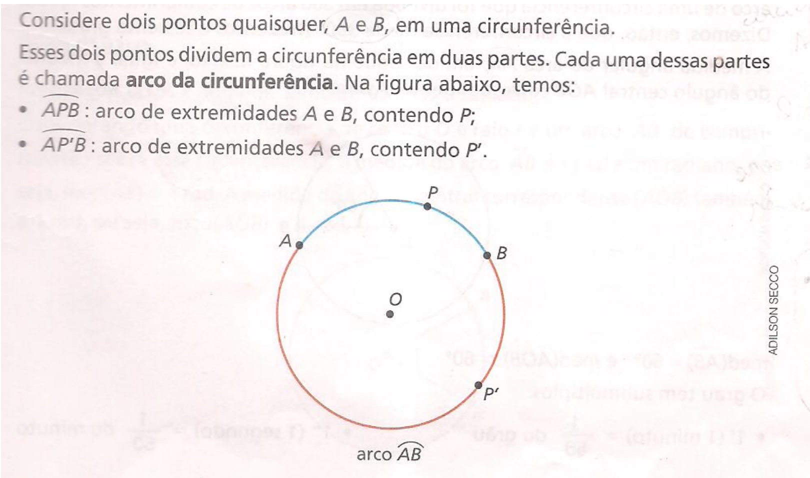
Fonte: BARROSO,2010, p.10.

Após a imagem do braço mecânico, o autor inicia o texto sobre arcos e ângulos explicitando que as relações trigonométricas vistas até o momento são suficientes para resolver situações problemas que envolvem apenas triângulos retângulos; informa ainda que, neste capítulo, serão ampliadas as definições das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente para os ângulos de 0º a 360º, que possibilitará trabalhar com a trigonometria em qualquer triângulo (BARROSO, 2010, p.10).

O conjunto da imagem do braço mecânico com o texto apresentado logo em seguida, no livro didático, pode ser considerado o momento cultural-mimético, descrito por Chevallard (1998) como uma das formas possíveis de produzir o primeiro encontro com a organização matemática.

Ainda na página de abertura do capítulo 1, o autor elenca informações mais específicas sobre arcos de circunferência, iniciando pela definição (figura 8).

FIGURA 8: Definição de “arco de circunferência” no LD1


Considere dois pontos quaisquer, A e B, em uma circunferência.
Esses dois pontos dividem a circunferência em duas partes. Cada uma dessas partes é chamada **arco da circunferência**. Na figura abaixo, temos:

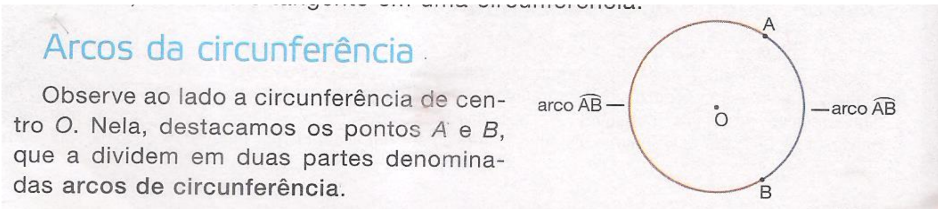
- $\widehat{APB}$: arco de extremidades A e B, contendo P;
- $\widehat{AP'B}$: arco de extremidades A e B, contendo P'.

Fonte: BARROSO,2010, p.11.

Percebemos que, neste exemplo, o comprimento da circunferência é igual à soma dos arcos APB e AP’B, sendo os pontos A e B distintos. Tanto o enunciado quanto a figura, elaborados pelo autor do livro didático, parecem sugerir que “arco de circunferência” é uma parte da circunferência. No entanto, temos casos em que o arco pode ter o mesmo comprimento da circunferência, quando consideramos pontos coincidentes (que não foi este o caso). Se forem coincidentes, já que pertencem a mesma circunferência, poderemos ter uma “circunferência completa”, ou seja, o mesmo ponto representando o início e o término do arco, sendo possível, neste caso, o comprimento do arco ser igual ao da circunferência, ou um arco de comprimento zero. Em nenhum outro espaço do LD1 encontramos alguma menção sobre a possibilidade do arco ser do mesmo comprimento da circunferência.

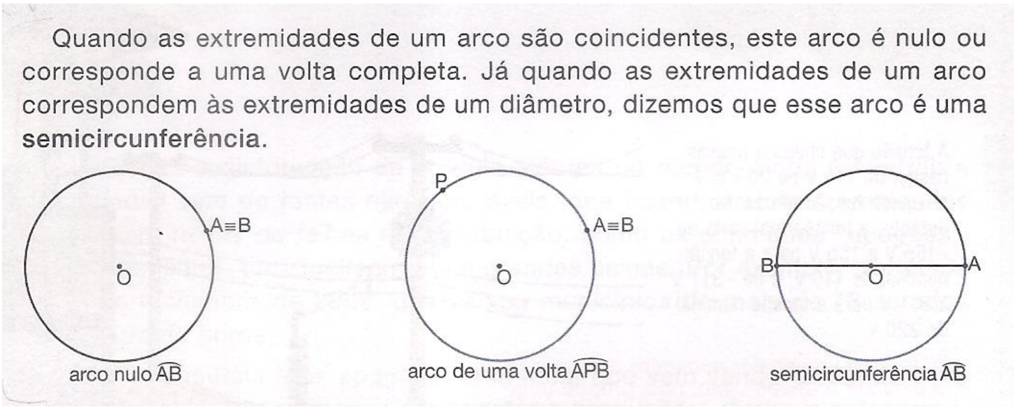
Nas figuras 9 e 10, podemos observar como as definições para arco de circunferência são expressas nos outros dois livros didáticos, utilizados para as análises complementares.

FIGURA 9: Definição de “arco de circunferência” no LD2



Fonte: SOUZA, 2013, p.10.

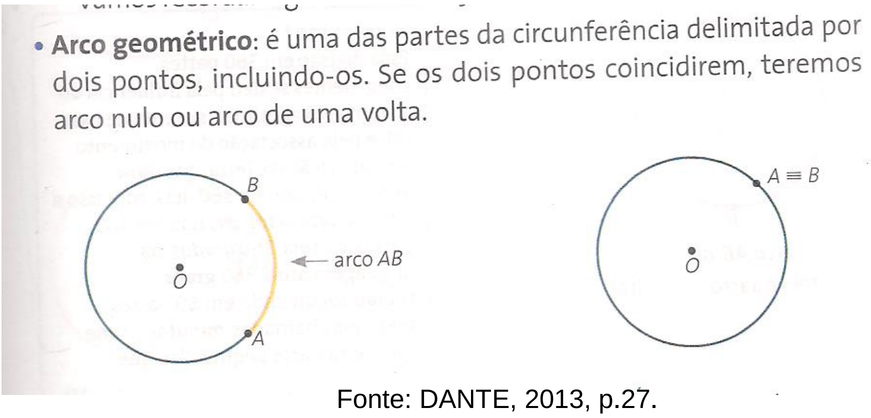
FIGURA 10: Ressalva sobre a definição de “arcos de circunferência” no LD2



Fonte: SOUZA, 2013, p.10.

Podemos observar que a definição contida no LD2 está bem próxima do LD1, no entanto, encontramos uma ressalva que deixa claro que o arco pode ter o mesmo comprimento da circunferência, que se chama “arco de uma volta” (figura 10).

FIGURA 11: Definição de "arco de circunferência" no LD3


• **Arco geométrico**: é uma das partes da circunferência delimitada por dois pontos, incluindo-os. Se os dois pontos coincidirem, teremos arco nulo ou arco de uma volta.

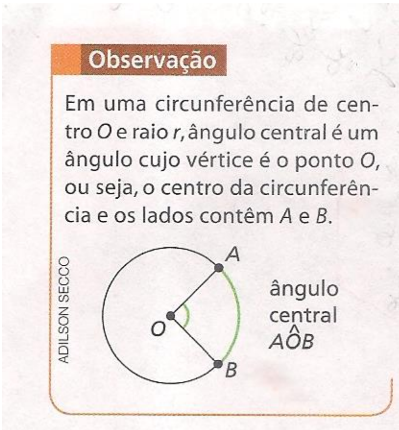
Fonte: DANTE, 2013, p.27.

Na definição expressa no LD3, as informações parecem estar mais esclarecedoras.

Considerando as definições de arco de circunferência expressas nos três livros didáticos, percebe-se algumas lacunas no LD1, o que pode configurar a supressão de informações no tratamento do saber, podendo gerar deturpações, tão comum acontecerem durante o processo da transposição didática.

Após a definição de arco de circunferência, no LD1 encontramos um tópico que trata da medida e comprimento de arcos. O autor enuncia as formas de medirmos arcos: medida angular e linear. Ao falar da medida angular, ele cita o ângulo central, não o definindo no corpo do texto, mas numa parte isolada da página intitulada de *observação* (figura 12). No texto ele apenas cita quem é o ângulo central na imagem ilustrativa exibida no LD1(figura 13).

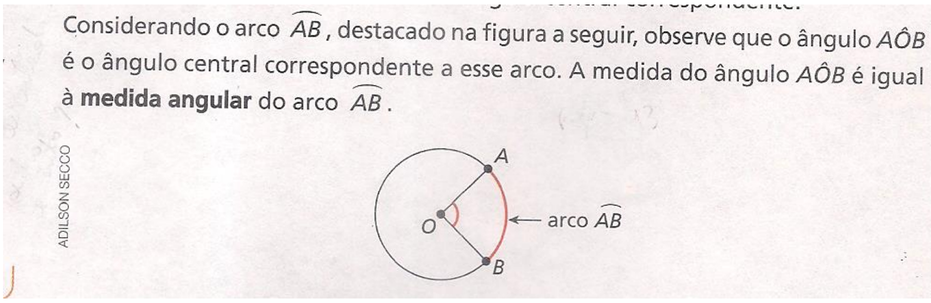
FIGURA 12: Definição de "ângulo central" no LD1


Observação

Em uma circunferência de centro *O* e raio *r*, ângulo central é um ângulo cujo vértice é o ponto *O*, ou seja, o centro da circunferência e os lados contêm *A* e *B*.

Fonte: BARROSO,2010, p.12.

FIGURA 13: Imagem que representa o ângulo central no LD1



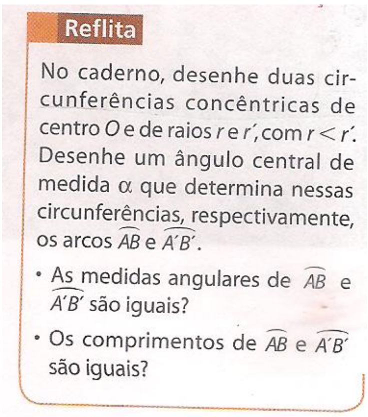
Considerando o arco $\overset{\frown}{AB}$, destacado na figura a seguir, observe que o ângulo $A\hat{O}B$ é o ângulo central correspondente a esse arco. A medida do ângulo $A\hat{O}B$ é igual à **medida angular** do arco $\overset{\frown}{AB}$.

Fonte: BARROSO,2010, p.12.

Acreditamos que o autor não inseriu esta informação no texto por se tratar de algo que talvez já tenha sido discutido em momentos anteriores, no volume 1 da coleção, por exemplo. A definição de ângulo central não aparece no LD2 e no LD3.

Na seção intitulada *Reflita* , que se encontra às margens do texto do LD1 sobre medida e comprimento de arcos, é sugerida ao aluno uma tarefa, a qual não incluímos na modelização a priori (figura 14).

FIGURA 14: Tarefa sobre medida de ângulo no LD1



Reflita

No caderno, desenhe duas circunferências concêntricas de centro O e de raios r e r', com $r < r'$. Desenhe um ângulo central de medida α que determina nessas circunferências, respectivamente, os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{A'B'}$.

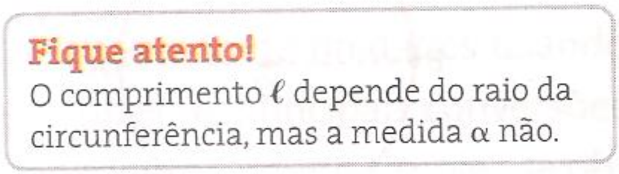
- As medidas angulares de $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{A'B'}$ são iguais?
- Os comprimentos de $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{A'B'}$ são iguais?

Fonte: BARROSO,2010, p.12.

No exemplar do professor, o autor explicita sua intenção com esta atividade: *"Espera-se que os alunos percebam que a medida angular do arco depende apenas da medida do ângulo central; logo, não haverá variação. Já com relação ao comprimento do arco, haverá variação."* (BARROSO, 2010, p.12).

Ao que nos parece, no LD1 espera-se que o aluno construa a informação a partir da tarefa sugerida; no LD2 a informação aparece de forma explícita no texto didático: *"É importante compreender que a medida de um arco não é o mesmo que o comprimento de um arco. Enquanto a medida depende exclusivamente do ângulo* *central correspondente, o comprimento de um arco equivale a sua medida linear."* *(*SOUZA, 2013, p.11). No LD3 a informação aparece numa pequena caixa de diálogo, com o título de "*Fique atento!"*, localizada às margens do texto didático (figura 15). No entanto, logo abaixo do "*Fique atento!"* parece uma outra caixa de diálogo sugerindo uma tarefa (figura 16) semelhante a do LD1. Esclarecemos que, ao nos referirmos à expressão *texto didático*, estamos fazendo menção ao texto que aborda o saber no livro didático de uma forma geral.

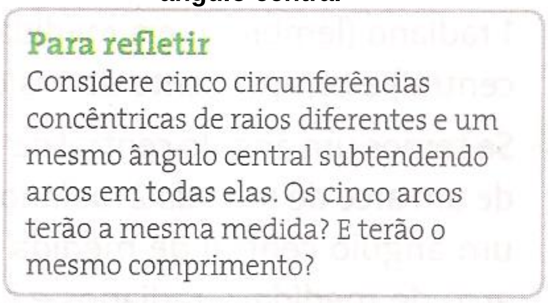
FIGURA 15: Informação do LD3 sobre a relação entre o comprimento do arco e o ângulo central



Fique atento!
O comprimento ℓ depende do raio da circunferência, mas a medida α não.

Fonte: DANTE, 2013, p.27.

FIGURA 16: Tarefa do LD3 que sugere a relação entre o comprimento do arco e o ângulo central



Para refletir
Considere cinco circunferências concêntricas de raios diferentes e um mesmo ângulo central subtendendo arcos em todas elas. Os cinco arcos terão a mesma medida? E terão o mesmo comprimento?

Fonte: DANTE, 2013, p.27.

A maneira como a informação sobre a medida do arco e suas relações com o ângulo central foi abordada no LD1 denota uma forma de priorizar a participação do aluno neste momento de construção do saber, uma vez que não enuncia a relação entre a medida do arco e a medida do raio. No LD2 o aluno apenas recebe a informação. No LD3, embora seja sugerida uma tarefa relacionada a esta informação, ela (a tarefa) é sugerida logo após a informação ser dada na seção "*Fique atento!"*, portanto, neste caso, o aluno não é impulsionado a construir a informação, pois esta já lhe foi anunciada anteriormente.

Quanto à elaboração do enunciado da tarefa, tanto no LD1 (figura 14) quanto no LD3 (figura 16), percebemos que os autores citam termos que não aparecem no texto didático: *circunferências concêntricas*. Será que o aluno da 2ª série sabe o que isto significa? Se sim, seria importante retomar o significado destes termos? Para cumprir a tarefa proposta ele precisa da definição de *circunferências concêntricas.* Não incluímos esta tarefa na modelização a priori por se tratar de um tipo de tarefa que não aparece nos exemplos nem nos exercícios propostos de nenhum dos três livros didáticos considerados nesta investigação.

As próximas informações explícitas no texto didático do LD1 são sobre a medida de arcos e ângulos, mais especificamente sobre as unidades de medida *grau* e *radiano*.

Ao se referir à medida em grau e seus submúltiplos (minutos e segundos), não aparece no texto didático do LD1 nem do LD2 a origem dessa informação. Conforme vimos no capítulo 3, especificamente a seção 3.1 deste trabalho (p. 42) que trata dos aspectos históricos da trigonometria, a justificativa para a divisão do círculo em 360 pode ser encontrada através da história da Matemática, que traz a informação de que foi o sistema sexagesimal que influenciou esta divisão. Esta informação é explicitada no LD3, não no texto didático, mas numa caixa de diálogo intitulada "*Você sabia?"*, localizada ao lado do texto didático (DANTE, 2013, p28).

Quanto à definição de radiano, os três livros didáticos apresentam esta informação no texto didático e também relembram o cálculo do comprimento da circunferência a partir de seu raio, cálculo este já apresentado aos alunos no ensino fundamental.

Um fato curioso que identificamos foi a unidade de medida de arco que divide o ângulo reto em cem partes iguais, chamada de grado. Esta unidade de medida aparece apenas no LD3; não no texto didático, e sim em uma das tarefas sobre *história da matemática*. A atividade sugere pesquisa em dupla sobre essa unidade de medida. Diante deste fato, nos perguntamos: por que esta unidade de medida não aparece nos outros dois livros analisados? Por que no LD3 ela só aparece em um exercício proposto? Qual será a relevância dessa informação para o aluno do ensino médio?

Na próxima seção apresentamos as análises sobre os exemplos propostos no LD1 sobre arcos e ângulos.

5.3.1.2 Os exemplos propostos – Identificação das tarefas (tipos e subtipos)

Em relação ao subtítulo “arcos e ângulos”, o LD1 apresenta alguns exemplos, os quais identificamos de acordo com as tarefas (tipos e subtipos) propostas na modelização a priori, contidas na seção 5.2 deste trabalho.

Encontramos nos exemplos propostos as tarefas:

- T_1 – Determinar o comprimento.
- T_2 – Calcular a medida.

Na tabela 1 organizamos as quantidades de tarefas (tipos e subtipos) encontradas.

Tabela 1: Tarefas (tipos e subtipos) encontradas nos exemplos propostos sobre “Arcos e ângulos”

Tarefas (T_i)	Tipos de tarefas (t_{ij})	Subtipos de tarefas (st_{ijk})	Frequencia
T_1	t_{11} – Determinar o comprimento de uma circunferência.	st_{111} - Determinar o comprimento de uma circunferência de raio x.	2
		st_{112} - Determinar o comprimento de uma circunferência de diâmetro y.	0
T_2	t_{21} – Calcular a medida do raio.	st_{211} – Calcular a medida do raio de uma circunferência de comprimento x.	0
	t_{22} – Calcular a medida de um arco.	st_{221} – Calcular a medida de um arco em graus.	2
		st_{222} – Calcular a medida de um arco em radianos.	1
		st_{223} – Calcular a medida de um arco a partir da medida do ângulo central.	1
		st_{224} – Calcular a medida de um arco a partir da medida do comprimento da circunferência.	1
		st_{225} – Calcular a medida dos arcos simétricos ao arco x em relação ao eixo das ordenadas e/ou abcissas.	0
		st_{226} – Determinar a medida do arco x dado sen x = y e o quadrante a que x pertence.	0
		st_{227} – Determinar a medida do arco x dado cos x = y e o quadrante a que x pertence.	0
		st_{228} – Determinar a medida do arco x dado tg x = y e o quadrante a que x pertence.	0
	t_{23} – Calcular a medida do ângulo.	st_{231} – Calcular a medida do ângulo central em graus.	1
		st_{232} – Calcular a medida do ângulo central em radianos.	2
		st_{233} – Calcular a medida de um ângulo do triângulo.	0
	t_{24} – Calcular a medida do lado do polígono.	st_{241} – Calcular a medida do lado de um triângulo.	0

Tarefas (T_i)	Tipos de tarefas (t_{ij})	Subtipos de tarefas (st_{ijk})	Frequência
T_2	t_{24} – Calcular a medida do lado do polígono.	st_{242} – Calcular a medida do lado de um losango.	0
		st_{243} – Determinar a medida dos lados e/ou dos ângulos de um triângulo.	0
		st_{244} – Determinar a medida da diagonal de um paralelogramo.	0
		st_{245} – Determinar o perímetro do triângulo a partir da medida de seu lado.	0

Fonte: Tabela organizada pela pesquisadora

Conforme dados apresentados na tabela 1, observamos que, referente ao subtítulo “arcos e ângulos”, o LD1 apresenta em seus exemplos 2 tarefas, 3 tipos de tarefas, 7 subtipos de tarefas.

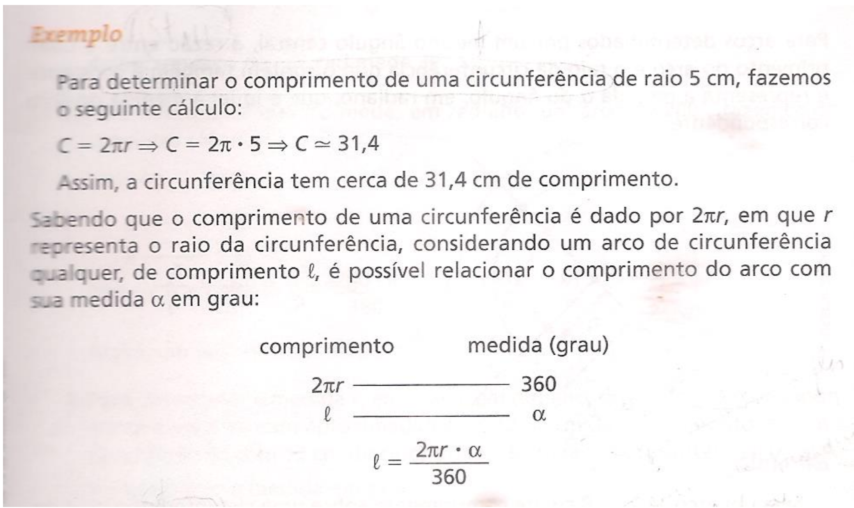
Na próxima seção (5.3.1.3) analisaremos os 7 subtipos de tarefas, identificando as técnicas apresentadas pelo autor do LD1 (elementos do bloco técnico/prático da TAD), bem como as tecnologias e teorias (elementos do bloco tecnológico-teórico).

5.3.1.3 Os exemplos propostos – Identificação das técnicas, tecnologias e teorias

Apresentaremos através das figuras os 7 subtipos de tarefas, com as respectivas técnicas, que encontramos nos exemplos propostos no LD1.

st_{111} - Determinar o comprimento de uma circunferência de raio x.

FIGURA 17: Exemplo extraído do LD1 sobre o st_{111}



Exemplo

Para determinar o comprimento de uma circunferência de raio 5 cm, fazemos o seguinte cálculo:

$C = 2\pi r \Rightarrow C = 2\pi \cdot 5 \Rightarrow C \simeq 31{,}4$

Assim, a circunferência tem cerca de 31,4 cm de comprimento.

Sabendo que o comprimento de uma circunferência é dado por $2\pi r$, em que r representa o raio da circunferência, considerando um arco de circunferência qualquer, de comprimento ℓ, é possível relacionar o comprimento do arco com sua medida α em grau:

comprimento	medida (grau)
$2\pi r$	360
ℓ	α

$$\ell = \frac{2\pi r \cdot \alpha}{360}$$

Fonte: BARROSO,2010, p.13.

st_{221} – Calcular a medida de um arco em graus.

FIGURA 18: Exemplo extraído do LD1 sobre o st_{221}

Exemplos

1. Para verificar quanto mede, em grau, um arco de $\frac{\pi}{6}$ rad, fazemos os seguintes cálculos:

grau radiano

180 —— π

x —— $\frac{\pi}{6}$

$$\pi \cdot x = 180 \cdot \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{180 \cdot \frac{\pi}{6}}{\pi} \Rightarrow x = 30$$

Assim, um arco de $\frac{\pi}{6}$ rad mede 30°.

Fonte: BARROSO,2010, p.15.

st_{222} – Calcular a medida de um arco em radianos.

FIGURA 19: Exemplo extraído do LD1 sobre o st_{222}

2. Para determinar quanto mede, em radiano, um arco de 200°, fazemos os seguintes cálculos:

radiano grau

π —— 180

x —— 200

$$180 \cdot x = \pi \cdot 200 \Rightarrow x = \frac{200 \cdot \pi}{180} \Rightarrow x = \frac{10\pi}{9}$$

Assim, um arco de 200° mede $\frac{10\pi}{9}$ rad.

Fonte: BARROSO,2010, p.15.

st_{223} – Calcular a medida de um arco a partir da medida do ângulo central.

FIGURA 20: Exemplo extraído do LD1 sobre o st_{223}

Exemplo

Para calcular o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ de 45° de uma circunferência de 8 cm de raio, fazemos a seguinte relação entre o comprimento do arco e sua medida angular:

comprimento (cm)		medida (grau)
$2\pi \cdot 8$	———	360
ℓ	———	45

$$\ell = \frac{2\pi \cdot 8 \cdot 45}{360} \Rightarrow \ell = \frac{2\pi \cdot 8}{8} \Rightarrow \ell \simeq 6{,}28$$

Assim, o arco $\overset{\frown}{AB}$ tem cerca de 6,28 cm de comprimento.

Fonte: BARROSO,2010, p.13.

st_{224} – Calcular a medida de um arco a partir da medida da circunferência que o contém.

FIGURA 21: Exemplo extraído do LD1 sobre o st_{224}

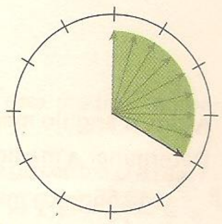
R3. Em um relógio, o ponteiro dos minutos mede 15 cm. Determinar o comprimento do arco percorrido pela extremidade desse ponteiro das 14 h às 14 h 20 min.

Resolução

Como 20 minutos equivalem à terça parte de 1 hora, a extremidade do ponteiro descreve um arco de comprimento ℓ igual à terça parte do comprimento da circunferência. Assim:

$$\ell = \frac{2 \cdot \pi \cdot 15}{3} \simeq 31{,}4$$

Então, o ponteiro percorre um arco de cerca de 31,4 cm de comprimento.



Fonte: BARROSO,2010, p.16.

st_{231} – Calcular a medida do ângulo central em graus.

st_{232} – Calcular a medida do ângulo central em radianos.

FIGURA 22: Exemplo extraído do LD1 sobre o st_{231} e st_{232}

3. Para determinar a medida x, em grau e em radiano, de um ângulo correspo dente a um arco com aproximadamente 12,56 cm de comprimento, em un circunferência com 12 cm de raio, podemos fazer os seguintes cálculos:

- Determinar a medida em grau:

comprimento (cm)	medida (grau)
12,56	x
$2 \cdot \pi \cdot 12$	360

$$x \simeq \frac{360 \cdot 12,56}{2 \cdot 3,14 \cdot 12} \Rightarrow x \simeq 60$$

Assim, o ângulo mede por volta de 60°.

- Determinar a medida em radiano:

$$x \simeq \frac{12,56}{12} \Rightarrow x \simeq 1,047$$

Como $12,56 \simeq 4\pi$, também podemos obter o seguinte valor para x:

$$x \simeq \frac{12,56}{12} \Rightarrow x \simeq \frac{4\pi}{12} \Rightarrow x \simeq \frac{\pi}{3}$$

Assim, o ângulo x mede por volta de $\frac{\pi}{3}$ rad ou 1,047 rad.

Fonte: BARROSO,2010, p.15.

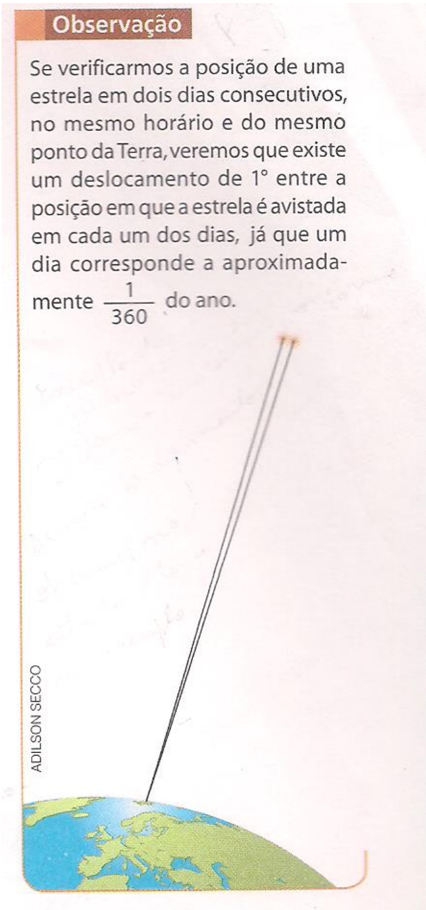
De acordo com a figura 17, referente ao st_{111}, podemos observar que a técnica apresentada é a fórmula para o cálculo do comprimento da circunferência. Utilizaremos a denominação τ_1 para esta técnica. O que justifica esta técnica é a razão entre o comprimento C e o diâmetro d (d=2r), que resulta em uma constante representada pela letra grega π. Essa justificativa aparece no texto didático do LD1 da seguinte forma: $\frac{C}{d} = \frac{C}{2r} = \pi$. Podemos considerar que a tecnologia Θ_1 que justifica a técnica τ_1 é a lei das proporções, que faz parte da teoria da Proporcionalidade que indicaremos por Θ_1.

É importante destacarmos que no texto didático, aparece a tecnologia Θ_1, no entanto, não é citada a teoria Θ_1.

Nas figuras 18, 19, 20, 21 e 22, que representam os subtipos de tarefas st_{221}, st_{222}, st_{223}, st_{224}, st_{231} e st_{232}, respectivamente, podemos observar o uso de uma mesma técnica (regra de três simples) que denominaremos de τ_2. Essa técnica também é justificada pela lei das proporções, portanto faz parte da teoria da Proporcionalidade. No texto didático aparece apenas a técnica, mas não há menção sobre a tecnologia nem a teoria que justifique o uso de tal técnica.

Dentre os dez exemplos apresentados no LD1 referentes ao subtítulo “arcos e ângulos” apenas dois, ou seja, vinte por cento (20%) representam uma situação real. Um refere-se às voltas que se pode dar em torno de uma praça em formato circular; o outro refere-se à posição dos ponteiros de um relógio. Os demais exemplos fazem parte apenas do contexto matemático. Retomando o que sugerem os documentos oficiais, o estudo da trigonometria deve priorizar a contextualização, especificamente o cálculo de distâncias inacessíveis. Neste subtítulo, além dos dois exemplos os quais nos referimos sobre representação de uma situação real, encontramos apenas uma menção sobre a utilização dos ângulos no cálculo de distâncias inacessíveis (figura 23).

FIGURA 23: Exemplo extraído do LD1 sobre a utilização de ângulos no cálculo de distâncias inacessíveis.



Fonte: BARROSO, 2010, p.13.

No LD2, referente ao subtítulo que estamos aqui considerando (arcos e ângulos), o autor sugere 4 exemplos, representando 3 subtipos de tarefas: st_{223} (um exemplo), st_{231} (dois exemplos) e st_{231} (um exemplo). Como podemos ver, todos esses exemplos referem-se à tarefa T_2 – Calcular a medida, e aos tipos t_{22} – Calcular a medida de um arco e t_{23} – Calcular a medida do ângulo. Dentre esses quatro exemplos, apenas um apresenta uma situação contextualizada: exemplo utilizando os ponteiros de um relógio (SOUZA, 2013, p.12). Todos os exemplos apresentam a mesma técnica, a τ_2 , também apresentada nos exemplos do LD1.

No LD3, referente ao subtítulo arcos e ângulos, encontramos sugere 18 exemplos, representando 3 subtipos de tarefas: st_{224} (sete exemplos), st_{232} (quatro exemplos), st_{231} (cinco exemplos) e st_{224} (um exemplo). Como podemos ver, todos esses exemplos referem-se à tarefa T_2 – Calcular a medida, e aos tipos t_{22} – Calcular a medida de um arco e t_{23} – Calcular a medida do ângulo. Dentre esses 18 exemplos, nenhum deles apresenta uma situação contextualizada. Observamos que, para esses tipos de tarefas, o autor sugere a mesma técnica apresentada no LD1 e no LD2, ou seja a τ_2. No entanto, para os subtipos st_{231} e st_{232}, ele (o autor) apresenta, além da técnica τ_2, outra técnica (figura 24).

FIGURA 24: Técnica para st_{231} e st_{232} apresentada no LD3, não identificadas nos LD1 e LD2

e) transformação em radianos ou em graus sem usar regra de três.

- $330° = 11 \cdot 30° = 11 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$
- $\frac{7\pi}{4} = 7 \cdot 45° = 315°$
- $225° = 5 \cdot 45° = 5 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$
- $\frac{4\pi}{3} = 4 \cdot 60° = 240°$
- $\frac{7\pi}{6} = 7 \cdot 30° = 210°$

Fonte: DANTE, 2013, p.30.

Podemos observar que a técnica utilizada, identificada por nós como τ_3 , é a transformação de um número em um produto, justificada pela multiplicação de números naturais, que chamaremos de tecnologia Θ_2, que faz parte da teoria dos Números, representada por Θ_2.

Essa técnica não é apresentada no LD1 nem no LD2.

Na próxima seção, apresentaremos as tarefas identificadas nos exercícios propostos no LD1 referentes ao subtítulo “arcos e ângulos”.

5.3.1.4 Os exercícios propostos – Identificação das tarefas (tipos e subtipos)

As tarefas (tipos e subtipos) identificadas nos exercícios propostos no LD1 estão relacionadas na tabela 2.

Tabela 2: Tarefas (tipos e subtipos) encontradas nos exercícios propostos sobre “Arcos e ângulos” no LD1

Tarefas (T_i)	Tipos de tarefas (t_{ij})	Subtipos de tarefas (st_{ijk})	Frequência
T_1	t_{11}	st_{111}	2
		st_{112}	1
T_2	t_{21}	st_{211}	0
	t_{22}	st_{221}	5
		st_{222}	8
		st_{223}	1
		st_{224}	3
	t_{23}	st_{231}	1
		st_{232}	4
		st_{233}	0

Fonte: Tabela organizada pela pesquisadora

Assim como nos exemplos, os exercícios propostos no LD1 sobre arcos e ângulos também sugerem as tarefas T1 e T2, aparecendo apenas 3 tipos de tarefas e 8 subtipos de tarefas (st_{111}, st_{112}, st_{221}, st_{222}, st_{223}, st_{224}, st_{231}, st_{232}).

Gostaríamos de esclarecer que, em questões que apresentam letras (a, b, c, d, etc), contamos cada uma das letras como sendo um quesito (uma tarefa).

Ao compararmos o que é sugerido nos exemplos e o que se pede nos exercícios propostos, observamos que são os mesmos subtipos de tarefas. O único subtipo que aparece nos exercícios propostos mas que não aparece nos exemplos é o st_{112}.

No que se refere às questões contextualizadas, observamos que, das 25 questões propostas nos exercícios, 5 delas, ou seja 20%, apresentam um contexto (refiro-me a contextos que não são meramente matemáticos). O percentual de questões contextualizadas foi o mesmo apresentado nos exemplos sugeridos.

Na próxima seção, discutiremos as técnicas, tecnologias e teorias que justificam as tarefas que encontramos nos exercícios propostos sobre o subtítulo arcos e ângulos.

5.3.1.5 Os exercícios propostos – Identificação das técnicas, tecnologias e teorias

No guia do professor, parte específica - item II, que trata das resoluções e comentários dos exercícios propostos, observamos que as técnicas apresentadas são as mesmas sugeridas nos exemplos elencados no texto didático. Portanto, as tecnologias e teorias também são as mesmas.

Conforme já mencionamos, ao compararmos o que é sugerido nos exemplos e o que se pede nos exercícios propostos, observamos que o único subtipo de tarefa que aparece nos exercícios propostos mas que não aparece nos exemplos é o st_{112}.

A figura 25 mostra o exercício proposto e a figura 26 mostra a solução apresentada no guia do professor do LD1.

FIGURA 25: Exercício proposto no LD1 (exercício 9) abordando o st_{112}

9. Calcule o comprimento de uma circunferência de 30 cm de diâmetro. $\simeq$ 94,2 cm

Fonte: BARROSO,2010, p.16.

FIGURA 26: Resolução do Exercício proposto no LD1 (exercício 9) abordando o st_{112}

9. $C = 2\pi r \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 15 = 94{,}2 \text{ cm}$

Fonte: BARROSO, 2010, p.74.

Observamos que a técnica utilizada para o st_{112} é a mesma para o st_{111}, ou seja τ_1- uso da fórmula para o cálculo do comprimento da circunferência, justificada pela tecnologia Θ_1 e, consequentemente pela teoria Θ_1.

Na próxima seção discutiremos a análise praxeológica referente ao subtítulo “o ciclo trigonométrico”.

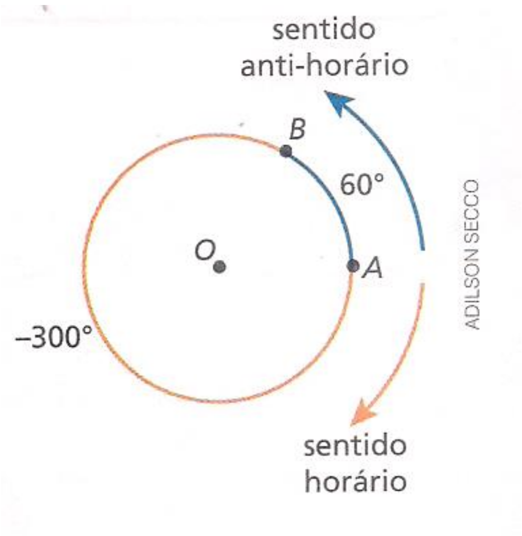
5.3.2 **Análise praxeológica do subtítulo “O ciclo trigonométrico”**

Este subtítulo trata das características básicas do ciclo trigonométrico, tais como sentido, simetria, localização dos pontos, entre outros aspectos.

5.3.2.1 Como o tema é abordado

O autor inicia sua abordagem sobre o ciclo trigonométrico citando os dois sentidos que a circunferência pode percorrer: sentido horário (medidas positivas) e sentido anti-horário (medidas negativas). É sugerida uma imagem (figura 26) que mostra tais sentidos.

FIGURA 27: Imagem do LD1 mostrando os sentidos percorridos pela circunferência



Fonte: BARROSO, 2010, p.17.

Na seção do LD1 intitulada *Observação* o autor esclarece que será adotado como convenção o sentido anti-horário para designar os arcos positivos (figura 28).

FIGURA 28: Imagem do LD1 – convenção do sentido anti-horário para os arcos positivos.

Observação

Convencionamos que, daqui em diante, a notação $\overset{\frown}{AB}$ representa um arco de circunferência orientado no sentido anti-horário, com origem em *A* e extremidade em *B*.

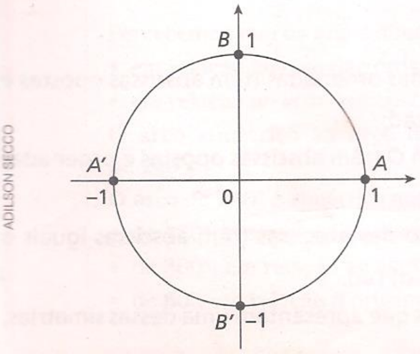
Fonte: BARROSO, 2010, p.17.

Ao analisarmos o texto didático, não encontramos nenhuma menção sobre o porquê dessa convenção.

Ao falar sobre a circunferência trigonométrica, ou ciclo trigonométrico, o autor cita que a circunferência tem origem no plano cartesiano no ponto (0,0) e que tem raio unitário (figura 29).

FIGURA 29: Imagem do LD1 – A circunferência trigonométrica de raio unitário.

A **circunferência trigonométrica**, ou **ciclo trigonométrico**, tem centro na origem *O*(0, 0) de um plano cartesiano e raio de 1 unidade. No ciclo trigonométrico, o ponto *A*(1, 0) é a **origem** de todos os arcos, isto é, o ponto a partir do qual percorremos a circunferência até um ponto *P* para determinar o arco $\overset{\frown}{AP}$ (*P* é a extremidade do arco). Adotando o sentido anti-horário como positivo, associaremos, a cada ponto *P* da circunferência, a medida de $\overset{\frown}{AP}$ tal que $0 \text{ rad} \leqslant \text{med}(\overset{\frown}{AP}) \leqslant 2\pi \text{ rad}$, ou $0° \leqslant \text{med}(\overset{\frown}{AP}) \leqslant 360°$.



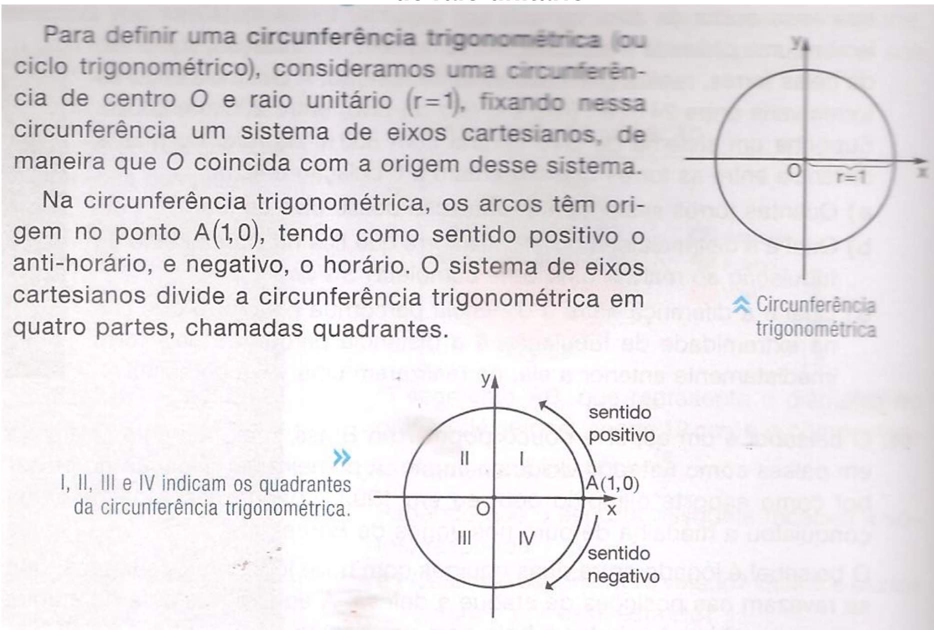
$$\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 90° \text{ ou } \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$
$$\text{med}(\overset{\frown}{AA'}) = 180° \text{ ou } \pi \text{ rad}$$
$$\text{med}(\overset{\frown}{AB'}) = 270° \text{ ou } \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$
$$\text{med}(\overset{\frown}{ABA}) = 360° \text{ ou } 2\pi \text{ rad}$$

Fonte: BARROSO, 2010, p.17.

No texto didático do LD1, também não encontramos justificativa para o fato de adotar o raio unitário.

No LD2 (figura 30) e no LD3 (figura 31), encontramos as mesmas informações quanto ao sentido adotado para os arcos positivos e quanto à medida do raio (raio unitário).

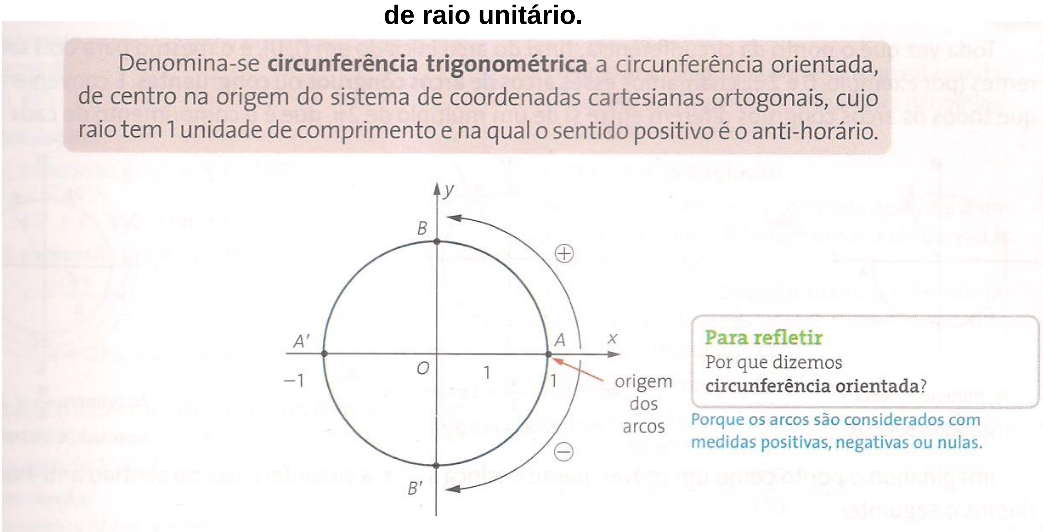
FIGURA 30: Informações do LD2 – Sentido dos arcos positivos e circunferência trigonométrica de raio unitário.


Para definir uma **circunferência trigonométrica** (ou ciclo trigonométrico), consideramos uma circunferência de centro *O* e raio unitário (r = 1), fixando nessa circunferência um sistema de eixos cartesianos, de maneira que *O* coincida com a origem desse sistema.

Na circunferência trigonométrica, os arcos têm origem no ponto A(1, 0), tendo como sentido positivo o anti-horário, e negativo, o horário. O sistema de eixos cartesianos divide a circunferência trigonométrica em quatro partes, chamadas quadrantes.

Fonte: SOUZA, 2013, p.16.

FIGURA 31: Informações do LD3 – Sentido dos arcos positivos e circunferência trigonométrica de raio unitário.

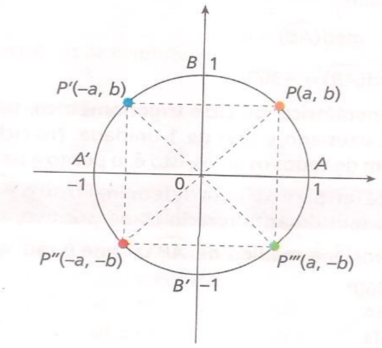

Denomina-se **circunferência trigonométrica** a circunferência orientada, de centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, cujo raio tem 1 unidade de comprimento e na qual o sentido positivo é o anti-horário.

Fonte: DANTE, 2013, p.31.

Podemos observar que, no LD2 e no LD3 também não são apresentadas justificativas para tais convenções.

O autor mostra também a divisão do ciclo trigonométrico em quatro quadrantes, estabelecidos pelos eixos horizontal e vertical do plano cartesiano (eixo das abcissas e eixo das ordenadas; especificando quais os arcos que pertencem a cada um dos quadrantes. Em seguida, mostra os tipos de simetria no ciclo trigonométrico (figura 32).

FIGURA 32: Informações do LD1 – Tipos de simetria no ciclo trigonométrico



- P e P' são simétricos em relação ao eixo das ordenadas (têm abscissas opostas e ordenadas iguais); med$(\widehat{AP'}) = (\pi - \alpha)$ rad;
- P e P'' são simétricos em relação à origem O (têm abscissas opostas e ordenadas opostas); med$(\widehat{AP''}) = (\pi + \alpha)$ rad;
- P e P''' são simétricos em relação ao eixo das abscissas (têm abscissas iguais e ordenadas opostas); med $(\widehat{AP'''}) = (2\pi - \alpha)$ rad.

Se as extremidades de dois arcos são pontos que apresentam uma dessas simetrias, dizemos que os arcos são **arcos simétricos**.

Fonte: BARROSO, 2010, p.18.

No LD1, as informações sobre arcos côngruos não são abordadas no capítulo que estamos realizando nossas análises. No LD2, "arcos côngruos” são abordados no capítulo inicial sobre o ciclo trigonométrico, portanto, aparecem tarefas relacionadas a este. Não elencamos tais tarefas na nossa modelização a priori por se tratar de um tema que aparece no capítulo 2 do LD1, logo as tarefas a ele relacionadas aparecem no capítulo 2, que não faz parte do foco de nossa pesquisa. No LD3, “arcos côngruos” também não aparece no capítulo que estamos utilizando nas nossas análises complementares, ou seja, aparecem num capítulo à parte.

Na próxima seção, apresentaremos as tarefas (tipos e subtipos) apresentadas através dos exemplos propostos para o subtítulo “o ciclo trigonométrico”.

5.3.2.2 Os exemplos propostos – Identificação das tarefas (tipos e subtipos)

Referente ao subtítulo “o ciclo trigonométrico”, encontramos dois exemplos (figuras 33 e 34).

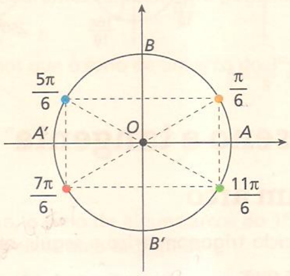
FIGURA 33: Exemplo proposto no LD1 (R4) sobre o subtítulo "o ciclo trigonométrico"

R4. Determinar a medida dos arcos simétricos ao arco de $\frac{\pi}{6}$ rad em relação ao eixo das ordenadas, ao eixo das abscissas e em relação à origem.

Resolução

Os arcos simétricos ao arco de $\frac{\pi}{6}$ rad medem:

- em relação ao eixo das ordenadas: $\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ rad $= \frac{5\pi}{6}$ rad
- em relação ao eixo das abscissas: $\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ rad $= \frac{11\pi}{6}$ rad
- em relação à origem O: $\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$ rad $= \frac{7\pi}{6}$ rad



ADILSON SECCO

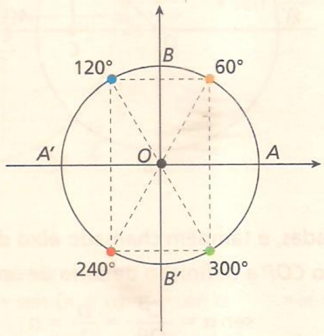
Fonte: BARROSO, 2010, p.19.

FIGURA 34: Exemplo proposto no LD1 (R5) sobre o subtítulo "o ciclo trigonométrico"

R5. Determinar a medida dos arcos simétricos ao arco de 60° em relação aos eixos das ordenadas e das abscissas. Depois dê a medida de todos os arcos simétricos ao simétrico de 60° em relação à origem *O*.

Resolução

Observe o ciclo trigonométrico abaixo:



ADILSON SECCO

Percebemos que os arcos simétricos ao arco de 60° medem:

- em relação ao eixo das ordenadas: 180° − 60° = 120°
- em relação ao eixo das abscissas: 360° − 60° = 300°

O arco simétrico ao arco de 60° em relação à origem *O* é o arco de 240°.

O arco de 240° é simétrico aos arcos:

- de 120°, em relação ao eixo das abscissas;
- de 300°, em relação ao eixo das ordenadas;
- de 60°, em relação à origem: 180° + 60° = 240°

Fonte: BARROSO, 2010, p.19.

Verificamos que os dois exemplos representam a tarefa T_2 , especificamente o st_{225} – Calcular a medida dos arcos simétricos ao arco x em relação ao eixo das abcissas e/ou ordenadas. A única diferença entre esses exemplos é que o R4 trata da medida do arco em radiano e o R5 da medida em graus. A técnica apresentada será discutida na próxima seção.

5.3.2.3 Os exemplos propostos – Identificação das técnicas, tecnologias e teorias

Os dois exemplos propostos representam o mesmo subtipo de tarefa, e também a mesma técnica, que identificamos por τ_4. Esta técnica consiste na observação da localização dos pontos no plano cartesiano. Ela é justificada pela simetria no plano cartesiano, identificada por nós como a tecnologia θ_3. Neste contexto, esta tecnologia faz parte da teoria cartesiana, ou seja, do sistema de coordenadas cartesianas, que indicaremos por Θ_3. A partir da observação da localização dos pontos no plano cartesiano, utiliza-se a subtração entre o arco de 180º ou 360º (dependendo do referencial: eixo das abcissas ou eixo das ordenadas) e o arco considerado na questão para encontrar o seu simétrico.

No texto didático do LD1, aparece a técnica e vestígios da tecnologia (o texto fala de arco simétrico); no entanto, não identificamos informações mais aprofundadas sobre a tecnologia e a teoria ali envolvidas.

5.3.2.4 Os exercícios propostos – Identificação das tarefas (tipos e subtipos)

Nos exercícios propostos sobre identificamos apenas 1 tarefa, 1 tipo de tarefa e 2 subtipos de tarefa (st_{222} e st_{225} , na tabela 3).

Tabela 3: Tarefas (tipos e subtipos) encontradas nos exercícios propostos sobre "O ciclo trigonométrico"

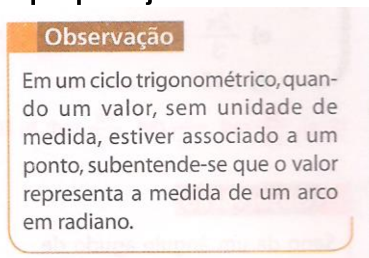
Tarefas (T_i)	Tipos de tarefas (t_{ij})	Subtipos de tarefas (st_{ijk})	Frequencia
T_2	t_{22}	st_{221}	0
		st_{222}	7
		st_{223}	0
		st_{224}	0
		st_{225}	4
		st_{226}	0
		st_{227}	0
		st_{228}	0

Fonte: Tabela organizada pela pesquisadora

Conforme os dados apresentados na tabela 3, podemos observar que, embora o LD1 apresente apenas exemplos do st_{225}, a maior parte dos exercícios propostos é do subtipo st_{222}.

Na página do texto didático do LD1 sobre o subtítulo "o ciclo trigonométrico", o autor enuncia uma informação que pode justificar o porquê da abordagem de atividades do subtipo st_{222} (figura 35).

FIGURA 35: Informação do LD1 que pode justificar os exercícios propostos do subtipo st_{222}


Observação

Em um ciclo trigonométrico, quando um valor, sem unidade de medida, estiver associado a um ponto, subentende-se que o valor representa a medida de um arco em radiano.

Fonte: BARROSO, 2010, p.19.

As tarefas propostas do st_{222} parecem terem sido construídas a partir dessa informação; portanto, o aluno só precisa observar a informação acima (figura 35) e utilizar a simetria.

5.3.2.5 Os exercícios propostos – Identificação das técnicas, tecnologias e teorias

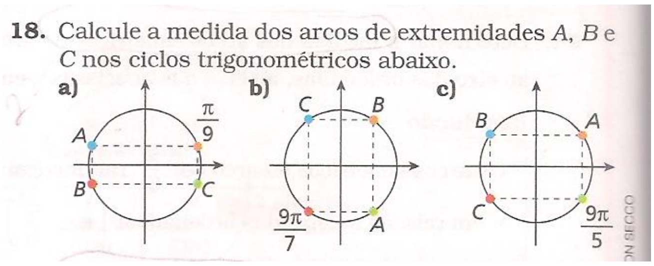
Conforme já mencionamos na seção 5.3.2.4, os exercícios propostos representam os subtipos de tarefas st_{225} e st_{222}.

Para o st_{225}, é utilizada a mesma técnica apresentada nos exemplos propostos: τ_4 . Esta técnica consiste na observação da localização dos pontos no plano cartesiano. Ela é justificada pela simetria no plano cartesiano, identificada por nós como a tecnologia Θ_3, que faz parte da teoria cartesiana, ou seja, do sistema de coordenadas cartesianas, que indicaremos por Θ_3.

Para o st_{222}, ao consultarmos o guia do professor, na parte específica - item II, que trata das resoluções e comentários dos exercícios propostos, observamos que a técnica apresentada é a mesma para o st_{225}, ou seja, τ_4. No entanto, o autor não exibe o desenho do ciclo trigonométrico, apresenta apenas a subtração dos arcos de 180º (π rad) ou 360º (2π rad) pelo arco de que trata a tarefa sugerida. Acreditamos que ele (o autor) suprime da resolução o desenho do ciclo trigonométrico pelo fato dele (o desenho) já está apresentado no enunciado da questão.

As figuras 36 e 37 mostram um exercício proposto do st_{222} e a respectiva técnica apresentada no guia do professor do LD1.

FIGURA 36: Exercício proposto no LD1 (quesito18) do subtipo st_{225}



Fonte: BARROSO, 2010, p.20.

FIGURA 37: Resolução do exercício proposto no guia do professor no LD1 (quesito18) do subtipo st_{225}

18. a) $A: \pi - \frac{\pi}{9} = \frac{8\pi}{9}$

$B: \frac{\pi}{9} + \pi = \frac{10\pi}{9}$

$C: 2\pi - \frac{\pi}{9} = \frac{17\pi}{9}$

b) $A: 2\pi - \frac{2\pi}{7} = \frac{12\pi}{7}$

$B: \frac{9\pi}{7} - \pi = \frac{2\pi}{7}$

$C: \pi - \frac{2\pi}{7} = \frac{5\pi}{7}$

c) $A: 2\pi - \frac{9\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$

$B: \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$

$C: \pi + \frac{\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$

Fonte: BARROSO, 2010, p.74.

Salientamos que, nem no texto didático nem no guia do professor há menção sobre a justificativa dessa técnica. Embora nessa seção do LD1, intitulada de guia do professor, apareça a resolução completa dos exercícios propostos, nos parece que as informações disponibilizadas para o professor sobre o saber são insuficientes.

Na próxima seção discutiremos a praxeologia do subtítulo “seno, cosseno e tangente”.

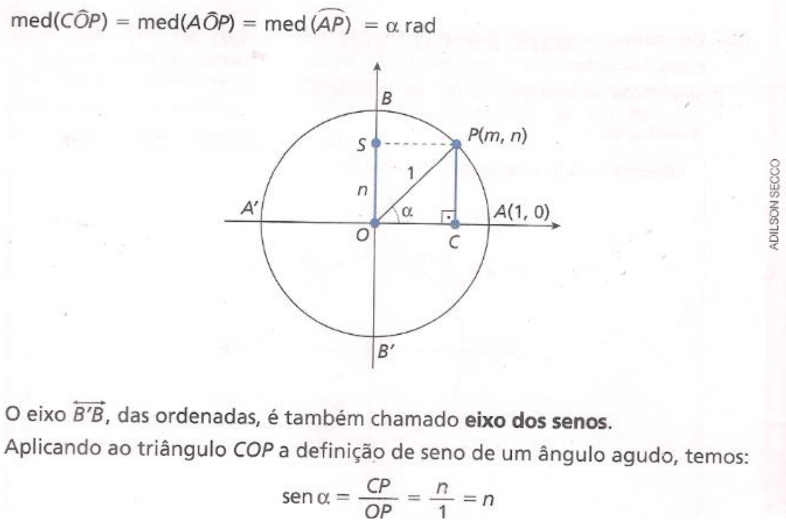
5.3.3 **Análise praxeológica do subtítulo “seno, cosseno e tangente”**

O subtítulo “seno, cosseno e tangente” apresentou uma variedade e também quantidade de tarefas. Por isso, diferentemente de outros subtítulos, optamos por construir algumas tabelas para mostrar as técnicas, tecnologias e teorias identificadas. Esta será um pouco mais extensa que as anteriores.

5.3.3.1 Como o tema é abordado

O autor inicia sua abordagem do subtítulo “seno, cosseno e tangente” a partir da equivalência entre o ângulo central e a medida do arco que o compreende (figura 38) para, a partir daí, explorar a definição de seno de um arco no ciclo trigonométrico.

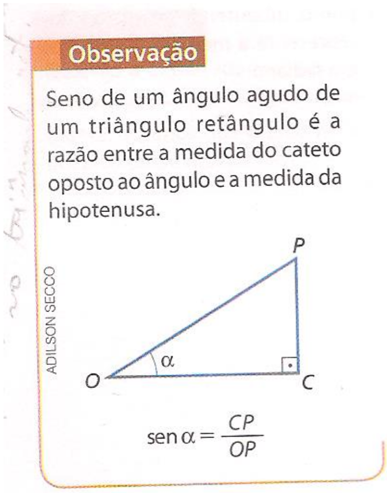
FIGURA 38: Imagem do LD1 para introduzir a definição de seno no ciclo trigonométrico



Fonte: BARROSO, 2010, p20.

Ao observarmos a figura 38, podemos perceber que é utilizada a definição de seno no triângulo retângulo quando o autor se refere à expressão *“aplicando ao triângulo COP a definição de seno de um ângulo agudo”*. Além da imagem acima, o autor fornece uma informação, na seção do LD1 intitulada de *observação* , com o objetivo de retomar a definição de seno no triângulo retângulo (figura 39).

FIGURA 39: Retomada da definição de seno no triângulo retângulo

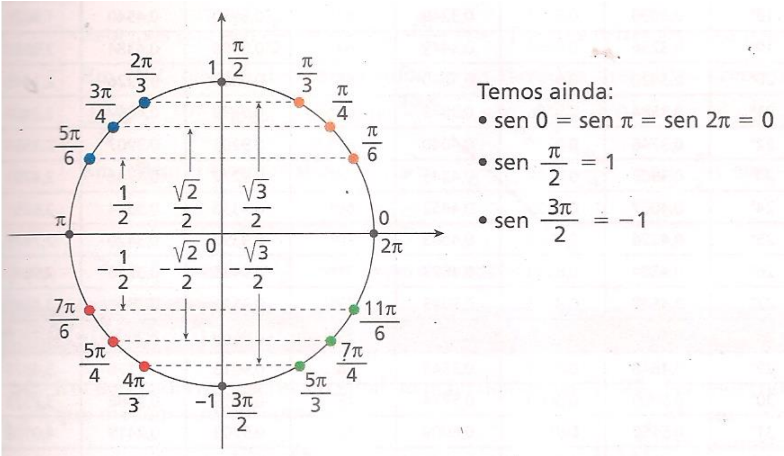


Fonte: BARROSO, 2010, p. 20.

Embora saibamos que no ensino fundamental é estudada a trigonometria do triângulo retângulo, consideramos relevante para o estudo da trigonometria no ciclo a retomada desses conhecimentos, pois estes, acreditamos, representam a base para a compreensão das relações trigonométricas no ciclo.

O autor traz informações sobre a simetria em relação ao eixo das abcissas e ao eixo das ordenadas, justificando os sinais do seno de acordo com os quadrantes aos quais os arcos pertencem. A imagem (figura 40) sobre o seno de alguns arcos do 1º quadrante e de seus simétricos em relação aos eixos ou à origem do plano cartesiano, nos mostra que o autor parte dos valores dos senos dos ângulos notáveis (30º, 45º e 60º) vistos a partir da trigonometria do triângulo retângulo. No entanto, essa informação não é retomada de forma aprofundada.

FIGURA 40: Seno dos arcos do 1º quadrante e de seus simétricos no LD1



Fonte: BARROSO, 2010, p. 21.

Na seção do LD1 *observação* (figura 41) é explícito o seno dos ângulos notáveis, mas não há uma explicação de onde esses valores surgiram.

FIGURA 41: Valores do seno dos ângulos notáveis

Observação

$\text{sen } 30° = \text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\text{sen } 45° = \text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen } 60° = \text{sen } \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Fonte: BARROSO, 2010, p. 21.

Após mostrar o seno dos arcos do 1º quadrante e seus simétricos, o autor fala das variações do seno, explicitando que estes estão entre -1 e 1 (incluindo estes valores no intervalo). Em seguida, o autor exibe uma tabela de razões trigonométricas (anexo E) onde aparecem os valores do seno cosseno e tangente os ângulos de 1º (um grau) até 89º (oitenta e nove graus). Os valores são expressos na forma decimal, considerando até a 4ª casa decimal. Para o leitor (aluno) parece ser compreensível os valores do seno dos ângulos ou arcos que são simétricos aos ângulos notáveis. O próprio ciclo trigonométrico, pela sua estrutura, justifica os valores. No entanto, os valores das relações trigonométricas (seno, cosseno e tangente) dos arcos ou ângulos que não são simétricos aos ângulos notáveis precisam ser justificados, ao nosso ver. Ao analisarmos o texto didático sobre o subtítulo “o ciclo trigonométrico” não encontramos qualquer menção sobre a origem da construção desta tabela. Na seção 3.1 deste trabalho, elencamos alguns fatos da história da matemática sobre a trigonometria, inclusive a informação de que, por volta da segunda metade do segundo século a.C. , foi compilada a primeira tabela trigonométrica pelo astrônomo Hiparco de Nicéia (por volta de 180-125 a.C.). Talvez essa informação fosse útil ser trazida nos livros didáticos, ao mencionarem a tabela trigonométrica.

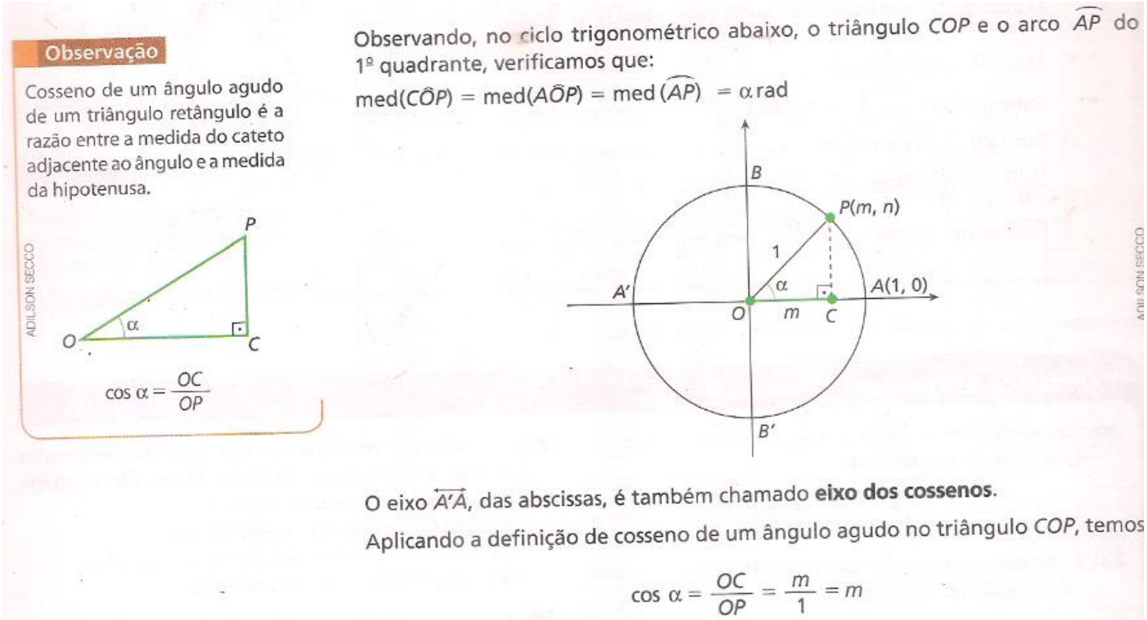
No LD2, encontramos tabelas informando as relações seno cosseno e tangente para os ângulos notáveis, seus simétricos, e os ângulos 0º, 90º, 180º,270º e 360º. Não encontramos uma tabela trigonométrica para outros ângulos.

No LD3, encontramos tabelas informando as relações seno cosseno e tangente para os ângulos notáveis, seus simétricos, e os ângulos 0º, 90º, 180º,270º , 360º e também uma tabela trigonométrica para outros ângulos (1º a 89º). Um fato curioso: a tabela trigonométrica aparece no LD3 após uma lista de exercícios (anexo F), sem ligação alguma com o exercício nem com o texto da página seguinte; não encontramos menção alguma sobre a tabela. Na página seguinte, o autor sugere um texto falando de outros contextos intitulado *O mundo na palma das mãos*.

Após a exibição da tabela trigonométrica no LD1, o autor cita alguns exemplos e sugere algumas atividades sobre o seno dos arcos. Preferimos discutir estes aspectos na próxima seção.

Assim como fez para discutir o seno no ciclo trigonométrico, o autor também recorreu à trigonometria do triângulo retângulo para falar do cosseno e da tangente no ciclo trigonométrico, seguindo a mesma estrutura lógica para abordar as três relações (seno cosseno e tangente). A figura 42 nos mostra como o autor inicia sua abordagem para a definição de cosseno no ciclo trigonométrico.

FIGURA 42: Imagem do LD1 para introduzir a definição de cosseno no ciclo trigonométrico

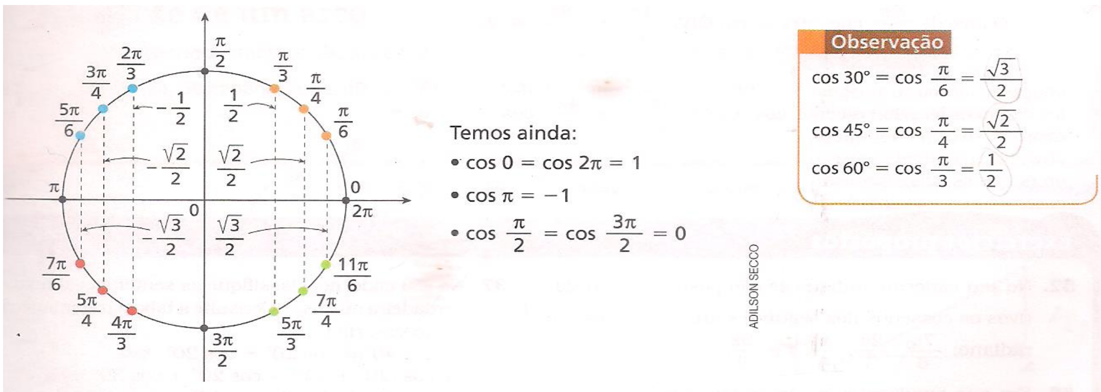


Fonte: BARROSO, 2010, p. 24.

Percebe-se que há uma retomada da definição de cosseno a partir do triângulo retângulo.

Após a definição de cosseno, o autor mostra os valores do cosseno para os arcos (ou ângulos) do 1º quadrante, seus simétricos, os arcos 0º, 90º, 180º, 270º e 360º. Explicita os valores do cosseno dos ângulos notáveis, sem retomar de onde esses valores surgiram (fato observado também no caso do seno discutido anteriormente). A figura 43 nos mostra essas informações.

FIGURA 43: Cosseno dos arcos do 1º quadrante e de seus simétricos no LD1

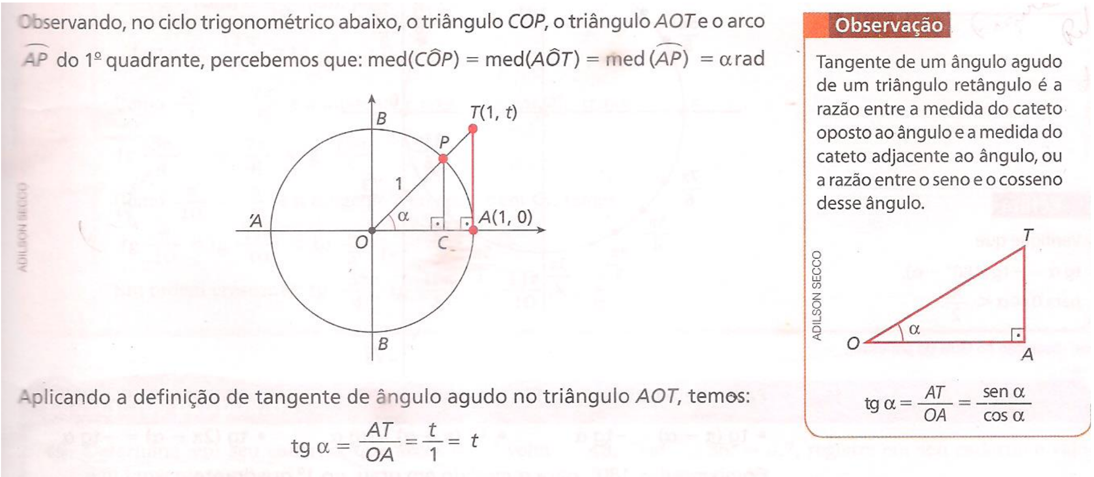


Fonte: BARROSO, 2010, p. 25.

Em seguida, o autor fala da variação do cosseno (entre -1 e 1, incluindo estes valores no intervalo), cita exemplos e propõe exercícios, que serão discutidos nas próximas seções.

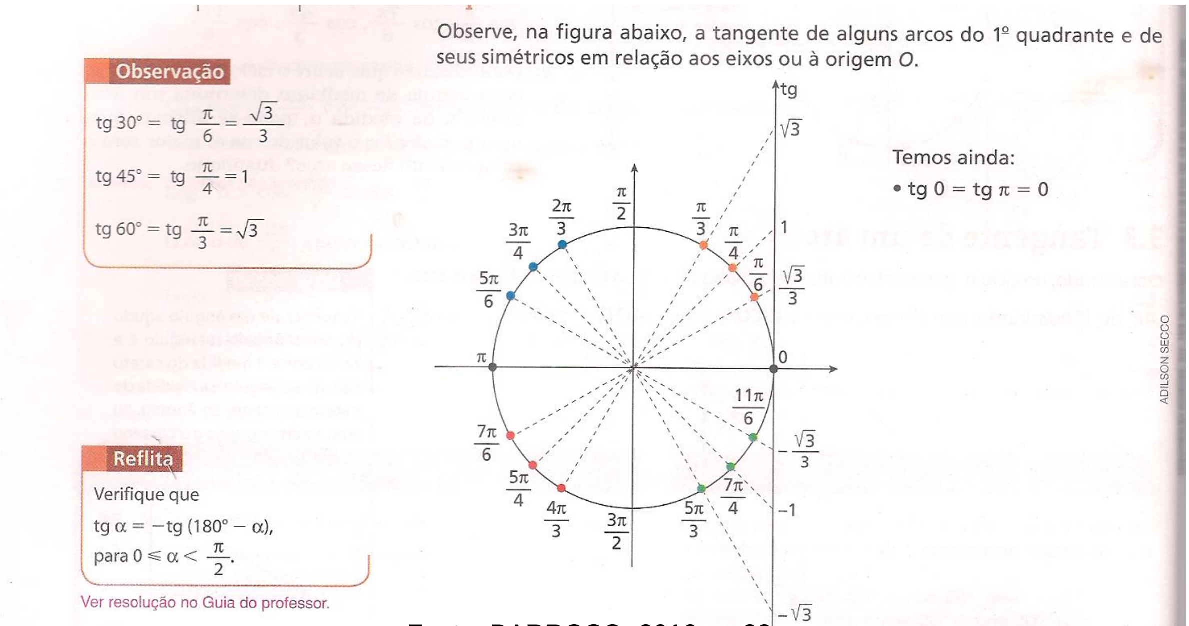
Ao abordar as informações sobre a tangente, o autor também utiliza a mesma sequência: retomada da definição de tangente no triângulo retângulo (figura 44); e tangente dos arcos do 1º quadrante, seus simétricos e dos arcos de 0º, 180º e 360º (figura 45).

FIGURA 44: Imagem do LD1 para introduzir a definição de tangente no ciclo trigonométrico



Fonte: BARROSO, 2010, p. 27.

FIGURA 45: Cosseno dos arcos do 1º quadrante e de seus simétricos no LD1

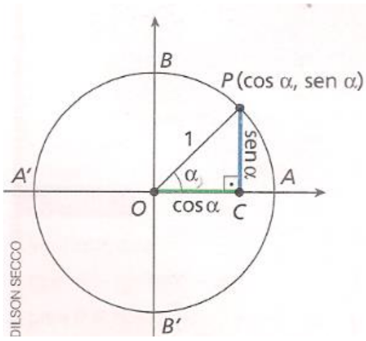


Fonte: BARROSO, 2010, p. 28.

O autor também faz menção ao caso da tangente de 90º e 270º, que não existem, pois a reta suporte que define os valores da tangente é paralela ao eixo da tangente, portanto não há intersecção entre elas. Em seguida, fala da variação da tangente, cita exemplos e sugere exercícios.

Ainda referente ao subtítulo “seno, cosseno e tangente”, o autor aborda a relação fundamental da trigonometria (figura 46), que deriva da aplicação do teorema de Pitágoras no triângulo do ciclo trigonométrico.

FIGURA 46: Relação fundamental da Trigonometria



Observe o ciclo trigonométrico ao lado. O ponto P é extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α rad; logo, P tem coordenadas cos α e sen α. Os lados do triângulo COP medem: $OC = \cos\alpha$, $CP = \text{sen}\,\alpha$ e $OP = 1$.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo COP, obtemos a **relação fundamental da Trigonometria**:

$$\boxed{\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Vimos a relação para um arco $\overset{\frown}{AP}$ do primeiro quadrante.

Fonte: BARROSO, 2010, p. 30.

Assim como já mencionamos em momentos anteriores, essa relação também utiliza raio unitário, no entanto não há justificativa para tal convenção.

A partir da relação fundamental para o 1º quadrante, o autor utiliza o princípio da igualdade para provar que esta relação fundamental é válida para qualquer arco, de qualquer quadrante (figura 47) e também nos casos em que a extremidade do arco pertence a um dos eixos (figura 48).

FIGURA 47: Relação fundamental da Trigonometria válida para arcos de qualquer quadrante

Vimos a relação para um arco $\overset{\frown}{AP}$ do primeiro quadrante. Considerando arcos do segundo, do terceiro e do quarto quadrantes, temos:

Segundo quadrante

- $\text{sen}\,(\pi - \alpha) = \text{sen}\,\alpha \Rightarrow \text{sen}^2\,(\pi - \alpha) = \text{sen}^2\,\alpha$
- $\cos\,(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \Rightarrow \cos^2\,(\pi - \alpha) = (-\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$

Assim: $\text{sen}^2\,(\pi - \alpha) + \cos^2\,(\pi - \alpha) = \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Terceiro quadrante

- $\text{sen}\,(\pi + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha \Rightarrow \text{sen}^2\,(\pi + \alpha) = (-\text{sen}\,\alpha)^2 = \text{sen}^2\,\alpha$
- $\cos\,(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \Rightarrow \cos^2\,(\pi + \alpha) = (-\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$

Assim: $\text{sen}^2\,(\pi + \alpha) + \cos^2\,(\pi + \alpha) = \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Quarto quadrante

- $\text{sen}\,(2\pi - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha \Rightarrow \text{sen}^2\,(2\pi - \alpha) = (-\text{sen}\,\alpha)^2 = \text{sen}^2\,\alpha$
- $\cos\,(2\pi - \alpha) = \cos\alpha \Rightarrow \cos^2\,(2\pi - \alpha) = \cos^2\alpha$

Assim: $\text{sen}^2\,(2\pi - \alpha) + \cos^2\,(2\pi - \alpha) = \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Verificamos então que a relação é válida para um arco de qualquer quadrante.

Fonte: BARROSO, 2010, p. 30.

FIGURA 48: Relação fundamental da Trigonometria válida para arcos cuja extremidade faz parte de um dos eixos

Nos casos em que P pertence a um dos eixos, temos:

- $P \equiv A \Rightarrow \text{sen}^2\,0 + \cos^2 0 = 0^2 + 1^2 = 1$
- $P \equiv B \Rightarrow \text{sen}^2\,\dfrac{\pi}{2} + \cos^2\dfrac{\pi}{2} = 1^2 + 0^2 = 1$
- $P \equiv A' \Rightarrow \text{sen}^2\,\pi + \cos^2\pi = 0^2 + (-1)^2 = 1$
- $P \equiv B' \Rightarrow \text{sen}^2\,\dfrac{3\pi}{2} + \cos^2\dfrac{3\pi}{2} = (-1)^2 + 0^2 = 1$

Assim, verificamos que para qualquer arco $\overset{\frown}{AP}$ tal que $\text{med}(\overset{\frown}{AP}) = \alpha$ rad, com $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, a relação fundamental da Trigonometria é válida.

Fonte: BARROSO, 2010, p. 31.

Após as informações sobre a relação fundamental da trigonometria, o autor cita exemplos e sugere alguns exercícios.

A próxima seção discute as tarefas (tipos e subtipos) encontradas no LD1 referente ao subtítulo “seno, cosseno e tangente”.

5.3.3.2 Os exemplos propostos – Identificação das tarefas (tipos e subtipos)

O subtítulo “seno, cosseno e tangente” apresenta 9 exemplos. A tabela 4 nos mostra as tarefas (tipos e subtipos) que foram identificadas nos exemplos propostos.

Tabela 4: Tarefas (tipos e subtipos) encontradas nos exemplos propostos sobre “seno, cosseno e tangente”

Tarefas (T_i)	Tipos de tarefas (t_{ij})	Subtipos de tarefas (st_{ijk})	Frequência
T_3	t_{31} – Determinar o valor do seno x.	st_{311} – Determinar o valor do sen x e seu sinal.	1
		st_{315} – Determinar o valor de sen x, seno y, dados x e y.	2
	t_{32} – Determinar o valor do cosseno x.	st_{321} – Determinar o sinal do cos x.	1
		st_{327} – Determinar cos x, dado sen x.	1
	t_{33} – Determinar o valor da tangente x.	st_{333} – Determinar o quadrante do ângulo/arco x para tg x = sen x.	1
T_6	t_{61} – Colocar em ordem crescente ou decrescente os valores.	st_{611} – Colocar em ordem crescente ou decrescente os valores do sen x.	1
		st_{612} – Colocar em ordem crescente ou decrescente os valores do cos x.	1
		st_{613} – Colocar em ordem crescente ou decrescente os valores da tg x.	1

Fonte: Tabela organizada pela pesquisadora

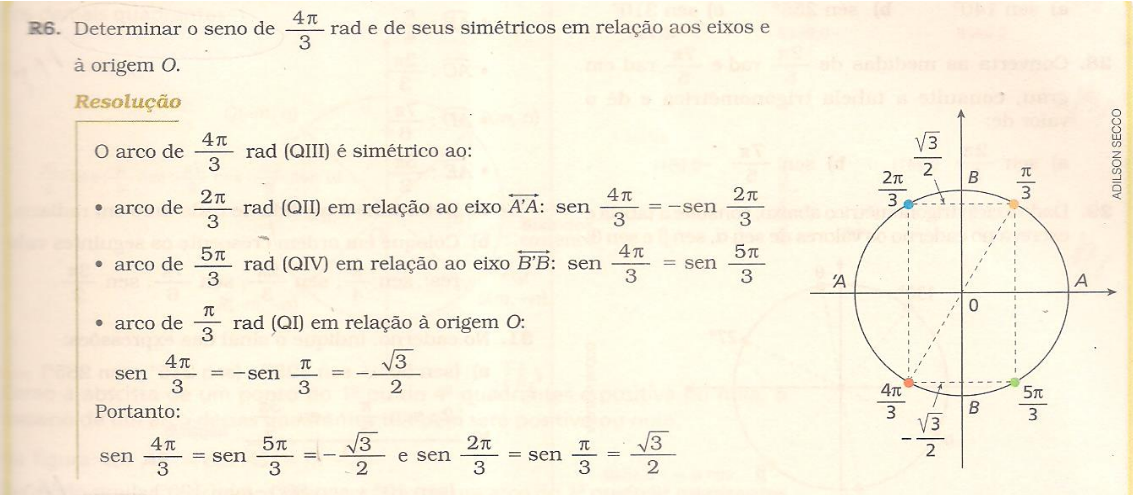
De acordo com os dados da tabela 4, observamos que os exemplos propostos representam 2 tarefas, sendo 4 tipos e 8 subtipos. Não encontramos nenhum exemplo contextualizado.

Na próxima seção (5.3.3.3) analisaremos os 8 subtipos de tarefas, identificando as técnicas apresentadas pelo autor do LD1 (elementos do bloco técnico/prático da TAD), bem como as tecnologias e teorias (elementos do bloco tecnológico-teórico).

5.3.3.3 Os exemplos propostos – Identificação das técnicas, tecnologias e teorias

As figuras 49, 50,51, 52,53 e 54 referem-se aos tipos de tarefas relacionadas às definições de seno, cosseno e tangente.

FIGURA 49: Exemplo proposto no LD1 (R6) abordando o st_{311}



R6. Determinar o seno de $\frac{4\pi}{3}$ rad e de seus simétricos em relação aos eixos e à origem O.

Resolução

O arco de $\frac{4\pi}{3}$ rad (QIII) é simétrico ao:

- arco de $\frac{2\pi}{3}$ rad (QII) em relação ao eixo $\overleftrightarrow{A'A}$: $\text{sen}\ \frac{4\pi}{3} = -\text{sen}\ \frac{2\pi}{3}$
- arco de $\frac{5\pi}{3}$ rad (QIV) em relação ao eixo $\overleftrightarrow{B'B}$: $\text{sen}\ \frac{4\pi}{3} = \text{sen}\ \frac{5\pi}{3}$
- arco de $\frac{\pi}{3}$ rad (QI) em relação à origem O:

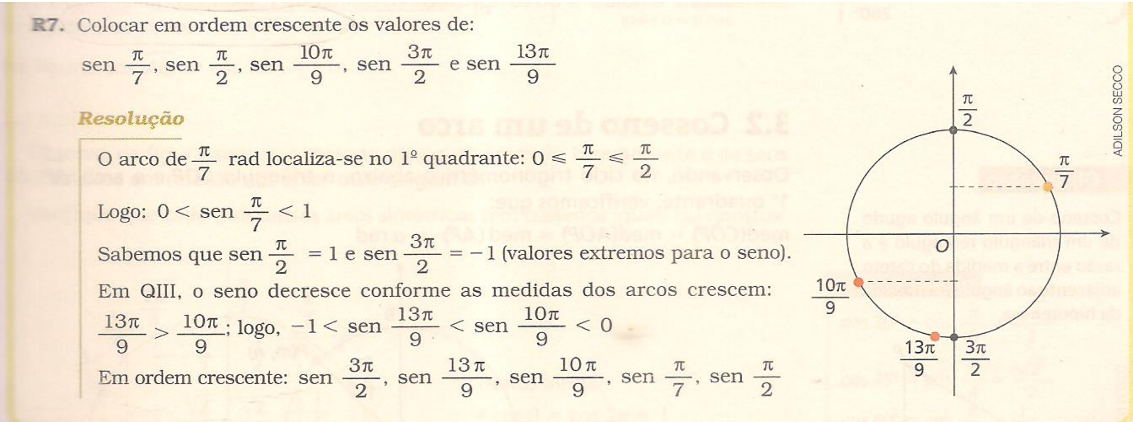
$\text{sen}\ \frac{4\pi}{3} = -\text{sen}\ \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Portanto:

$\text{sen}\ \frac{4\pi}{3} = \text{sen}\ \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen}\ \frac{2\pi}{3} = \text{sen}\ \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Fonte: BARROSO, 2010, p. 23.

FIGURA 50: Exemplo proposto no LD1 (R7) abordando o st_{611}



R7. Colocar em ordem crescente os valores de:

$\text{sen}\ \frac{\pi}{7}$, $\text{sen}\ \frac{\pi}{2}$, $\text{sen}\ \frac{10\pi}{9}$, $\text{sen}\ \frac{3\pi}{2}$ e $\text{sen}\ \frac{13\pi}{9}$

Resolução

O arco de $\frac{\pi}{7}$ rad localiza-se no 1º quadrante: $0 \leqslant \frac{\pi}{7} \leqslant \frac{\pi}{2}$

Logo: $0 < \text{sen}\ \frac{\pi}{7} < 1$

Sabemos que $\text{sen}\ \frac{\pi}{2} = 1$ e $\text{sen}\ \frac{3\pi}{2} = -1$ (valores extremos para o seno).

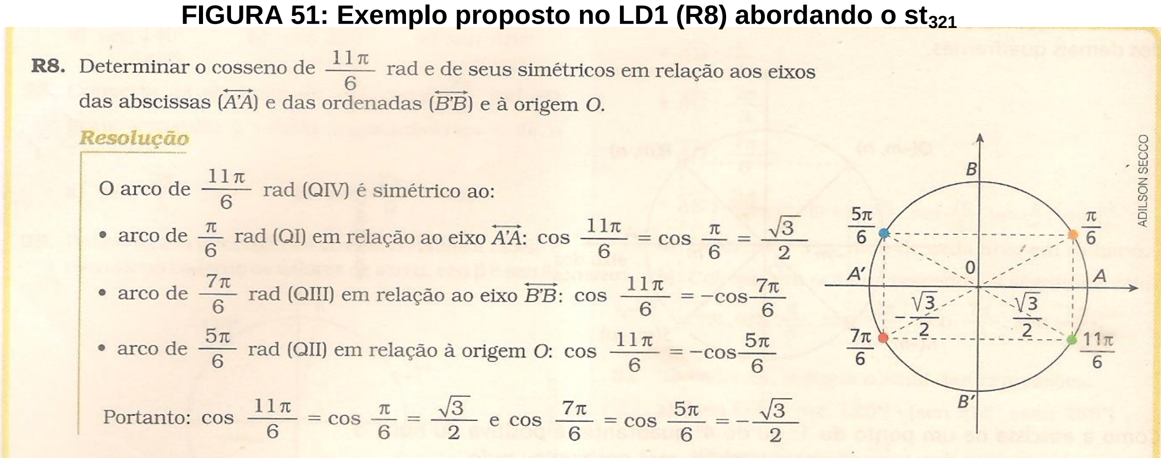
Em QIII, o seno decresce conforme as medidas dos arcos crescem:

$\frac{13\pi}{9} > \frac{10\pi}{9}$; logo, $-1 < \text{sen}\ \frac{13\pi}{9} < \text{sen}\ \frac{10\pi}{9} < 0$

Em ordem crescente: $\text{sen}\ \frac{3\pi}{2}$, $\text{sen}\ \frac{13\pi}{9}$, $\text{sen}\ \frac{10\pi}{9}$, $\text{sen}\ \frac{\pi}{7}$, $\text{sen}\ \frac{\pi}{2}$

Fonte: BARROSO, 2010, p. 23.

FIGURA 51: Exemplo proposto no LD1 (R8) abordando o st_{321}



R8. Determinar o cosseno de $\frac{11\pi}{6}$ rad e de seus simétricos em relação aos eixos das abscissas ($\overleftrightarrow{A'A}$) e das ordenadas ($\overleftrightarrow{B'B}$) e à origem O.

Resolução

O arco de $\frac{11\pi}{6}$ rad (QIV) é simétrico ao:

- arco de $\frac{\pi}{6}$ rad (QI) em relação ao eixo $\overleftrightarrow{A'A}$: $\cos\ \frac{11\pi}{6} = \cos\ \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- arco de $\frac{7\pi}{6}$ rad (QIII) em relação ao eixo $\overleftrightarrow{B'B}$: $\cos\ \frac{11\pi}{6} = -\cos \frac{7\pi}{6}$
- arco de $\frac{5\pi}{6}$ rad (QII) em relação à origem O: $\cos\ \frac{11\pi}{6} = -\cos \frac{5\pi}{6}$

Portanto: $\cos\ \frac{11\pi}{6} = \cos\ \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\ \frac{7\pi}{6} = \cos\ \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Fonte: BARROSO, 2010, p. 26.

FIGURA 52: Exemplo proposto no LD1 (R9) abordando o st_{612}

R9. Escrever em ordem decrescente os valores de:

$\cos 0$, $\cos \frac{4\pi}{7}$, $\cos \frac{6\pi}{7}$, $\cos \pi$ e $\cos \frac{8\pi}{5}$

Resolução

Os valores do cosseno variam de 1 ($\cos 0$) a -1 ($\cos \pi$).

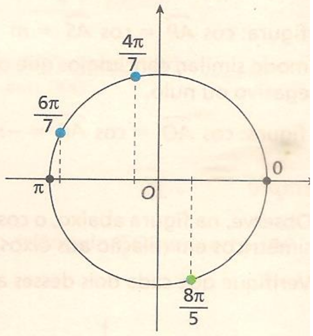
Os arcos de $\frac{4\pi}{7}$ e de $\frac{6\pi}{7}$ localizam-se em QII, no qual os valores do cosseno decrescem conforme as medidas dos arcos crescem, e: $\frac{4\pi}{7} < \frac{6\pi}{7}$

Logo: $0 > \cos \frac{4\pi}{7} > \cos \frac{6\pi}{7} > -1$

O arco de $\frac{8\pi}{5}$ encontra-se em QIV: $\frac{3\pi}{2} \leqslant \frac{8\pi}{5} \leqslant 2\pi$

Logo: $0 < \cos \frac{8\pi}{5} < 1$

Em ordem decrescente: $\cos 0$, $\cos \frac{8\pi}{5}$, $\cos \frac{4\pi}{7}$, $\cos \frac{6\pi}{7}$, $\cos \pi$



Fonte: BARROSO, 2010, p. 26.

FIGURA 53: Exemplo proposto no LD1 (R10) abordando o st_{333}

R10. Determinar a tangente do arco de $\frac{11\pi}{6}$ rad e de seus simétricos em relação ao eixos das abscissas ($\overleftrightarrow{A'A}$) e das ordenadas ($\overleftrightarrow{B'B}$) e à origem O.

Resolução

O arco de $\frac{11\pi}{6}$ rad está em QIV e é simétrico aos arcos de:

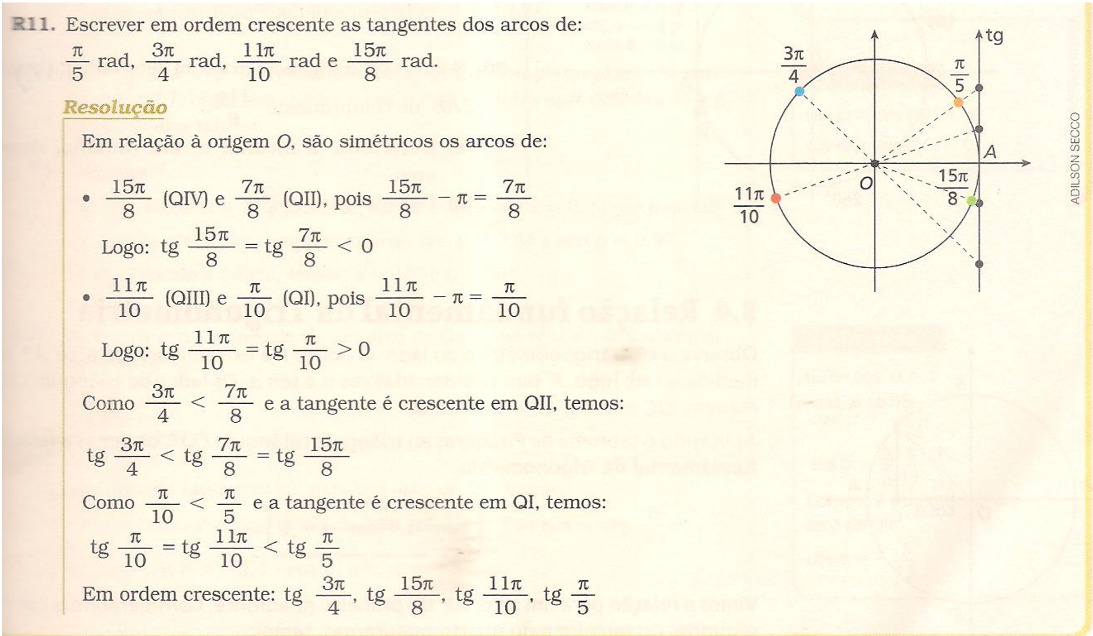
- $\frac{\pi}{6}$ rad (QI) em relação ao eixo $\overleftrightarrow{A'A}$: $\text{tg}\ \frac{11\pi}{6} = -\text{tg}\ \frac{\pi}{6}$
- $\frac{5\pi}{6}$ rad (QII) em relação à origem O: $\text{tg}\ \frac{11\pi}{6} = \text{tg}\ \frac{5\pi}{6}$
- $\frac{7\pi}{6}$ rad (QIII) em relação ao eixo $\overleftrightarrow{B'B}$: $\text{tg}\ \frac{11\pi}{6} = -\text{tg}\ \frac{7\pi}{6}$

As tangentes dos arcos de QI e de QIII são positivas.
As tangentes dos arcos de QII e de QIV são negativas.
Portanto:

$\text{tg}\ \frac{\pi}{6} = \text{tg}\ \frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\text{tg}\ \frac{5\pi}{6} = \text{tg}\ \frac{11\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Fonte: BARROSO, 2010, p. 29.

FIGURA 54: Exemplo proposto no LD1 (R11) abordando o st_{613}



R11. Escrever em ordem crescente as tangentes dos arcos de:

$\frac{\pi}{5}$ rad, $\frac{3\pi}{4}$ rad, $\frac{11\pi}{10}$ rad e $\frac{15\pi}{8}$ rad.

Resolução

Em relação à origem O, são simétricos os arcos de:

- $\frac{15\pi}{8}$ (QIV) e $\frac{7\pi}{8}$ (QII), pois $\frac{15\pi}{8} - \pi = \frac{7\pi}{8}$

  Logo: $\text{tg}\,\frac{15\pi}{8} = \text{tg}\,\frac{7\pi}{8} < 0$

- $\frac{11\pi}{10}$ (QIII) e $\frac{\pi}{10}$ (QI), pois $\frac{11\pi}{10} - \pi = \frac{\pi}{10}$

  Logo: $\text{tg}\,\frac{11\pi}{10} = \text{tg}\,\frac{\pi}{10} > 0$

Como $\frac{3\pi}{4} < \frac{7\pi}{8}$ e a tangente é crescente em QII, temos:

$\text{tg}\,\frac{3\pi}{4} < \text{tg}\,\frac{7\pi}{8} = \text{tg}\,\frac{15\pi}{8}$

Como $\frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{5}$ e a tangente é crescente em QI, temos:

$\text{tg}\,\frac{\pi}{10} = \text{tg}\,\frac{11\pi}{10} < \text{tg}\,\frac{\pi}{5}$

Em ordem crescente: $\text{tg}\,\frac{3\pi}{4}$, $\text{tg}\,\frac{15\pi}{8}$, $\text{tg}\,\frac{11\pi}{10}$, $\text{tg}\,\frac{\pi}{5}$

Fonte: BARROSO, 2010, p. 29.

Ao compararmos as figuras 49, 51 e 53, podemos perceber que os subtipos st_{311}, st_{321}, st_{331} referem-se à mesma tarefa, T_3 – Determinar o valor, o tipo e subtipo muda apenas porque o objeto muda (seno, cosseno ou tangente). A técnica utilizada para os três subtipos é a mesma: τ_4 - Observação da localização dos pontos no plano cartesiano. Ela é justificada pela simetria no plano cartesiano, identificada por nós como a tecnologia θ_3. Neste contexto, esta tecnologia faz parte da teoria cartesiana, ou seja, do sistema de coordenadas cartesianas, que indicaremos por Θ_3.

O mesmo acontece com as figuras 50, 52 e 54, onde os subtipos st_{611}, st_{612}, st_{613} referem-se à tarefa T_6 – Colocar em ordem. A técnica utilizada para os três subtipos é a mesma: τ_5 - Observação dos valores na reta numérica. Ela é justificada pelas propriedades dos números reais, identificada por nós como a tecnologia θ_4. Esta tecnologia faz parte da teoria dos números Θ_2.

Encontramos também três exemplos que abordam a relação fundamental da trigonometria, sendo um deles do st_{327} e dois do st_{315}. As figuras 55 e 56 mostram os exemplos propostos para os subtipos mencionados.

FIGURA 55: Exemplo proposto no LD1 (R12) abordando o st_{327}

R12. Sabendo que sen $\alpha = 0{,}5$ e que α é a medida de um arco do 2º quadrante, obter cos α.

Resolução

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow (0{,}5)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha \simeq \pm 0{,}87$

Como α é um arco do 2º quadrante, $\cos\alpha \simeq -0{,}87$.

Fonte: BARROSO, 2010, p. 31.

FIGURA 56: Exemplo proposto no LD1 (R13) abordando o st_{315}

R13. Dado que x e y são medidas de ângulos complementares e que $\cos x = 0{,}97$, obter sen y, sen x, cos y e as medidas aproximadas de x e y (consultar a tabela).

Resolução

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow (0{,}97)^2 + \text{sen}^2\,x = 1 \Rightarrow \text{sen}\,x \simeq 0{,}24$ (arco de QI)

Como os arcos são complementares: $\cos y \simeq 0{,}24$ e $\text{sen}\,y \simeq 0{,}97$

Consultando a tabela, temos: $x \simeq 15°$ e $y \simeq 75°$

Fonte: BARROSO, 2010, p. 31.

Os dois exemplos propostos referem-se à tarefa T_3 – Determinar o valor. Lembramos que, na modelização a priori, utilizamos verbos sinônimos para designar uma mesma tarefa. Nos exemplos citados nas figuras 55 e 56 são utilizados a relação fundamental da trigonometria, que chamaremos de técnica τ_4 , justificada pelo teorema de Pitágoras, que denominaremos de tecnologia Θ_4. No texto esse elemento tecnológico aparece de forma explícita.

Na próxima seção, apresentaremos as tarefas (tipos e subtipos) identificadas nos exercícios propostos.

5.3.3.4 Os exercícios propostos – Identificação das tarefas (tipos e subtipos)

As tarefas (tipos e subtipos) identificadas nos exercícios propostos no LD1 estão relacionadas na tabela 5.

Tabela 5: Tarefas (tipos e subtipos) encontradas nos exercícios propostos sobre "seno, cosseno e tangente" no LD1

Tarefas (T_i)	Tipos de tarefas (t_{ij})	Subtipos de tarefas (st_{ijk})	Frequência
T_2	t_{22}	st_{222}	4
T_3	t_{31}	st_{311}	5
		st_{312}	4
		st_{313}	3
		st_{314}	6
		st_{315}	1
		st_{316}	2
		st_{317}	2
	t_{32}	st_{321}	15
		st_{322}	4
		st_{323}	0
		st_{324}	1
		st_{325}	1
		st_{326}	7
		st_{327}	2
		st_{328}	1
	t_{33}	st_{331}	9
		st_{332}	5
		st_{333}	0
		st_{334}	9
		st_{335}	0
T_4	t_{41}	st_{411}	3
		st_{412}	3
		st_{413}	2
T_5	t_{51}	st_{511}	3
		st_{512}	0
		st_{513}	1
		st_{514}	1
T_6	t_{61}	st_{611}	1
		st_{612}	2
		st_{613}	0

Fonte: Tabela organizada pela pesquisadora

Os exercícios propostos no LD1 referentes ao subtítulo "seno ,cosseno e tangente" sugerem as 5 tarefas: T_2, T_3, T_4, T_5 e T_6; aparecendo apenas 7 tipos de tarefas e 26 subtipos de tarefas.

Ao compararmos o que é sugerido nos exemplos e o que se pede nos exercícios propostos, observamos que há uma quantidade e variedade de tarefas (tipos e subtipos) bem superior nos exercícios propostos. Os subtipos que aparecem nos exemplos são referentes às tarefas T_3 e T_6. Nos exercícios propostos também aparecem muitas questões sobre a tarefa T_3 (das 97 questões, 77 são referentes à T_3, ou seja,79%). O subtipo que mais aparece é o st_{321}.

No que se refere às questões contextualizadas, observamos que, das 97 questões propostas nos exercícios, nenhuma delas apresenta um contexto (refiro-me a contextos que não são meramente matemáticos).

Na próxima seção, discutiremos as técnicas, tecnologias e teorias que justificam as tarefas que encontramos nos exercícios propostos sobre o subtítulo “seno, cosseno e tangente”.

5.3.3.5 Os exercícios propostos – Identificação das técnicas, tecnologias e teorias

Nos exemplos propostos encontramos as seguintes técnicas, tecnologias e teorias:

st_{311}, st_{321}, st_{331} – Técnica τ_4, tecnologia Θ_3, teoria Θ_3.

st_{611}, st_{612}, st_{613} – Técnica τ_5, tecnologia Θ_4, teoria Θ_2.

Nos exercícios propostos referentes a esses subtipos, foram utilizadas as mesmas técnicas, consequentemente as mesmas tecnologias e teorias.

Para os demais subtipos encontrados nos exercícios propostos mas que não apareceram nos exemplos citados, consultamos o guia do professor, parte específica - item II, que trata das resoluções e comentários dos exercícios propostos.

Por se tratar de uma variedade de subtipos de tarefas, decidimos organizar os dados no quadro 8 para facilitar a compreensão do leitor.

Quadro 8: Técnicas, tecnologias e teorias que justificam os subtipos de tarefas encontradas nos exercícios propostos sobre “seno, cosseno e tangente” no LD1

Subtipos de tarefas (st_{ijk})	Técnicas (τ)	Tecnologias(Θ)	Teorias (Θ)
st_{222}	Não houve técnica. Só repetição dos valores.	-	-
st_{311}	τ_4	Θ_3	Θ_3
st_{312}	τ_4	Θ_3	Θ_3
st_{313}	τ_6	Θ_4	Θ_2
st_{314}	τ_6 e τ_4	Θ_4 e Θ_3	Θ_2 e Θ_3
st_{315}	τ_7 e τ_8	Θ_5 e Θ_4	Θ_4 e Θ_2
st_{316}	τ_7 e τ_8	Θ_5 e Θ_4	Θ_4 e Θ_2
st_{317}	τ_7 e τ_9	Θ_5 e Θ_5	Θ_4 e Θ_4
st_{321}	τ_4	Θ_3	Θ_3
st_{322}	τ_6 e τ_4	Θ_4 e Θ_3	Θ_2 e Θ_3
st_{324}	τ_6	Θ_4	Θ_2
st_{325}	τ_6	Θ_4	Θ_2
st_{326}	τ_4	Θ_3	Θ_3
st_{327}	τ_7 e τ_8	Θ_5 e Θ_4	Θ_4 e Θ_2
st_{328}	τ_7 , τ_9 e τ_8	Θ_5, Θ_5 e Θ_4	Θ_4, Θ_4 e Θ_2
st_{331}	τ_4	Θ_3	Θ_3
st_{332}	τ_6 e τ_4	Θ_4 e Θ_3	Θ_2 e Θ_3
st_{334}	τ_2 e τ_6	Θ_1 e Θ_4	Θ_1 e Θ_2
st_{411}	τ_5	Θ_4	Θ_2
st_{412}	τ_6	Θ_4	Θ_2
st_{413}	τ_6	Θ_4	Θ_2
st_{511}	τ_5	Θ_4	Θ_2
st_{513}	τ_6	Θ_4	Θ_2
st_{514}	τ_6	Θ_4	Θ_2
st_{611}	τ_5	Θ_4	Θ_2
st_{612}	τ_5	Θ_4	Θ_2
st_{613}	τ_5	Θ_4	Θ_2

Fonte: Quadro organizado pela pesquisadora

Conforme dados do quadro 8 podemos observar que, referente ao subtítulo “seno, cosseno e tangente”, encontramos 7 técnicas ($\tau_{2,}$ $\tau_{4,}$ $\tau_{5,}$ $\tau_{6,}$ $\tau_{7,}$ $\tau_{8,}$ τ_9), 4 tecnologias $\Theta_{1,}$ $\Theta_{3,}$ $\Theta_{4,}$ Θ_5) e 3 teorias.

Mostraremos alguns exercícios propostos no LD1 sobre o subtítulo aqui considerado, com a resposta proposta no guia do professor, com o objetivo de mostrar a técnica que foi utilizada. Elegemos os subtipos: st_{334} (técnicas τ_2 e $\tau_{6)}$, st_{315} (técnicas τ_7 e τ_8) e st_{328} (técnicas $\tau_{7,}$ τ_9 e τ_8)e . Esclarecemos que, não elegemos nenhum exercício proposto que abordasse as técnicas τ_4 e τ_5 pelo fato de já termos mostrado essas técnicas na seção 5.3.3.3 , quando falamos dos exemplos propostos – Identificação das técnicas, tecnologias e teorias.

FIGURA 57: Exercício proposto no LD1 abordando o st_{334}

52. Converta para grau as medidas dos arcos, dadas em radiano. Depois, aplique as relações de simetria, consulte a tabela e escreva no caderno o valor de:

a) $\text{tg}\ \frac{2\pi}{5}$

Fonte: BARROSO, 2010, p.30.

FIGURA 58: Técnicas utilizadas no Exercício proposto no LD1 abordando o st_{334}

52. a) radiano — grau

$$\left.\begin{array}{ccc} \pi & \text{——} & 180 \\ \frac{2\pi}{5} & \text{——} & x \end{array}\right\} x = 72°,\ \text{tg}\ 72° = 3{,}0777$$

Fonte: BARROSO, 2010, p.78.

Na figura 58 temos um exemplo da técnica τ_2 - Regra de três simples, justificada pela tecnologia Θ_1 - lei das proporções: $\frac{c}{d} = \frac{c}{2r} = \pi$, que faz parte da teoria Θ_1 - teoria da proporcionalidade; seguida da técnica τ_6 - observação da tabela trigonométrica e substituição dos valores na expressão para resolução, justificada pela tecnologia Θ_4 - propriedade dos números reais, que faz parte da teoria Θ_2 - teoria dos números.

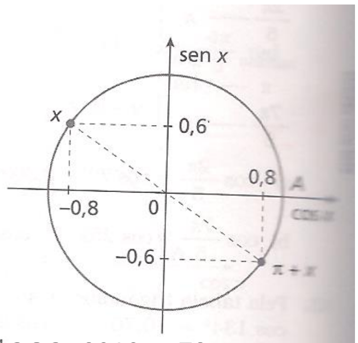
FIGURA 59: Exercício proposto no LD1 abordando o st_{315}

59. Sabendo que x é um arco do QII e que sen $x = 0{,}6$, calcule no caderno cos x, sen $(\pi + x)$ e cos $(\pi + x)$.

Fonte: BARROSO, 2010, p.31.

FIGURA 60: Técnicas utilizadas no Exercício proposto no LD1 abordando o st_{315}

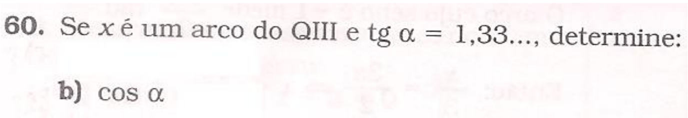
59. $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$
$\cos^2 x + (0{,}6)^2 = 1$
$\cos x = \pm 0{,}8$
Como $x \in$ QII
$\cos x < 0$
Logo, $\cos x = -0{,}8$
$\text{sen}\ (\pi + x) = -0{,}6$
$\cos\ (\pi + x) = 0{,}8$



Fonte: BARROSO, 2010, p.78.

Na figura 60 temos um exemplo da técnica τ_7 - relação fundamental da trigonometria: $sen^2 \propto + cos^2 \propto = 1$, justificada pela tecnologia θ_5 - teorema de Pitágoras , que faz parte da teoria Θ_4 - Teoria dos triângulos; seguida da técnica τ_8 - propriedade da operação inversa dos números reais, justificada pela tecnologia θ_4 - propriedade dos números reais, que faz parte da teoria Θ_2 - teoria dos números.

FIGURA 61: Exercício proposto no LD1 abordando o st_{328}

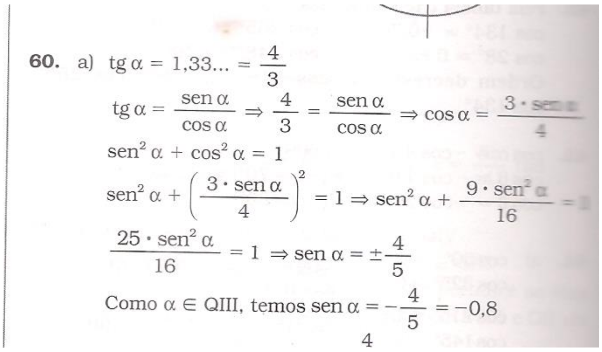


60. Se x é um arco do QIII e $\text{tg}\ \alpha = 1{,}33\ldots$, determine:

b) $\cos\alpha$

Fonte: BARROSO, 2010, p.31.

FIGURA 62: Técnicas utilizadas no Exercício proposto no LD1 abordando o st_{328}



60. a) $\text{tg}\ \alpha = 1{,}33\ldots = \frac{4}{3}$

$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3 \cdot \text{sen}\ \alpha}{4}$

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\text{sen}^2\alpha + \left(\frac{3 \cdot \text{sen}\ \alpha}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \frac{9 \cdot \text{sen}^2\alpha}{16} = 1$

$\frac{25 \cdot \text{sen}^2\alpha}{16} = 1 \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \pm\frac{4}{5}$

Como $\alpha \in$ QIII, temos $\text{sen}\ \alpha = -\frac{4}{5} = -0{,}8$

4

Fonte: BARROSO, 2010, p.78.

Na figura 62 temos um exemplo da técnica τ_7 - relação fundamental da trigonometria: $sen^2 \propto + cos^2 \propto = 1$, justificada pela tecnologia θ_5 - teorema de Pitágoras , que faz parte da teoria Θ_4 - Teoria dos triângulos; seguida da técnica τ_9 - definição das relações trigonométricas (seno, cosseno ou tangente), justificada pela tecnologia θ_5 - teorema de Pitágoras, que faz parte da teoria Θ_4 - teoria dos triângulos; seguida da técnica τ_8 - propriedade da operação inversa dos números reais, justificada pela tecnologia θ_4 - propriedade dos números reais, que faz parte da teoria Θ_2 - teoria dos números.

No LD2 e LD3 encontramos as mesmas tarefas (tipos e subtipos) apresentando as mesmas técnicas, mudando apenas a quantidade de exercícios propostos para cada subtipo.

Na próxima seção, discutiremos o subtítulo “equações e inequações”.

5.3.4 **Análise praxeológica do subtítulo “equações e inequações trigonométricas”**

Esta seção aborda uma parte significativa deste trabalho, por tratar de uma variedade de subtipos de tarefas identificadas no LD1. Contudo, não queremos expressar que esta é mais importante que as outras seções. Queremos apenas chamar a atenção neste momento por se tratar de uma parte da trigonometria onde os documentos oficiais que direcionam a educação brasileira (PCNEM) dizem que deve-se evitar o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações (BRASIL, 1999, P.44). Esta informação encontra-se neste trabalho na seção 3.2.1, especificamente na pág. 46. Ressaltamos que não temos a intenção de julgar se a quantidade de subtipos de tarefas referentes às equações e inequações trigonométricas encontradas é excessiva ou não. O LD1 apresenta um subtítulo específico sobre equações e inequações trigonométricas. O LD2 apresenta alguns tipos de equações dentro do capítulo que trata das funções trigonométricas e também no final do capítulo sobre trigonometria, não faz nenhuma menção sobre as inequações trigonométricas.

5.3.4.1 Como o tema é abordado

O autor inicia a abordagem desse subtítulo com a definição de equação trigonométrica (figura 63).

FIGURA 63: Definição de equação trigonométrica no LD1

> Toda equação em que aparecem razões trigonométricas com arco de medida desconhecida é chamada **equação trigonométrica**.

Fonte: BARROSO, 2010, p.32.

Após a definição, ele cita alguns exemplos de equações trigonométricas (figura 64) e na seção do LD1 intitulada *observação* ele cita exemplos que não representam equações trigonométricas (figura 65).

FIGURA 64: Exemplos de equações trigonométricas no LD1

Exemplos

- $\operatorname{sen} x = 0{,}5$
- $\cos 2x = -\dfrac{3}{4}$
- $\operatorname{tg}^2 x + (\sqrt{3} - 1)\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$
- $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = \dfrac{1}{2}$

Fonte: BARROSO, 2010, p.32.

FIGURA 65: Exemplos do LD1 que não são equações trigonométricas

Observação

Equações do tipo

- $3x \cdot \cos \pi = 2$
- $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{4} + x = \dfrac{1}{2}$

não são equações trigonométricas, pois a incógnita *x* não representa a medida de um arco.

Fonte: BARROSO, 2010, p.32.

Em seguida, esclarece que na resolução das equações trigonométricas do capítulo do livro didático (o capítulo que é foco de nossa investigação), serão considerados os arcos, em radiano, no intervalo $[0,2\pi]$.

Após o esclarecimento, o autor propõe 6 exemplos sobre a resolução de equações trigonométricas e, em seguida, os exercícios. Salientamos que, dos 6 exemplos, apenas em 2 deles são exibidas as soluções no ciclo trigonométrico. Tanto os exemplos quanto os exercícios serão discutidos nas próximas seções.

Depois dos exercícios propostos sobre equação trigonométrica, o autor inicia um tópico sobre a inequação trigonométrica, iniciando sua abordagem com a definição e os exemplos de inequações trigonométricas (figura 66).

FIGURA 66: Definição e exemplos de inequações trigonométricas

Toda inequação na qual aparecem razões trigonométricas com arco de medida desconhecida é denominada **inequação trigonométrica**.

Exemplos

- $\operatorname{sen} x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos \dfrac{x}{2} \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\operatorname{tg} x \geq 1$
- $\cos(x + \pi) \cdot \operatorname{tg}(x + \pi) < -\dfrac{1}{2}$

Fonte: BARROSO, 2010, p.34.

Após a definição, o autor sugere 6 exemplos abordando a resolução de inequações trigonométricas, mostrando, inclusive, a solução de todos os exemplos no ciclo trigonométrico. Em seguida, propõe alguns exercícios, que discutiremos, também, nas próximas seções.

O LD2 apresenta alguns tipos de equações (senx=a, cosx=a, tgx=a) dentro do capítulo que trata das funções trigonométricas (SOUZA, 2013, p.25-35) e no final do capítulo sobre trigonometria retoma outros tipos de equações trigonométricas por meio de atividades resolvidas (cita 4 exemplos) e depois sugere 8 exercícios envolvendo equações trigonométricas (SOUZA, 2013, p.50); o autor não faz nenhuma menção sobre as inequações trigonométricas, em nenhuma parte do livro. As técnicas utilizadas são basicamente as observações do ciclo trigonométrico e as operações inversas dos números reais.

5.3.4.2 Os exemplos propostos – Identificação das tarefas (tipos e subtipos)

O subtítulo "equações e inequações trigonométricas" apresenta 12 exemplos, sendo 6 referentes às equações e 6 referentes às inequações. A tabela 6 nos mostra as tarefas (tipos e subtipos) que foram identificadas nos exemplos propostos.

Tabela 6: Tarefas (tipos e subtipos) encontradas nos exemplos propostos sobre "equações e inequações trigonométricas"

Tarefas (T_i)	Tipos de tarefas (t_{ij})	Subtipos de tarefas (st_{ijk})	Frequência
T_7	t_{71} – Resolver a equação trigonométrica.	st_{711} – Determinar o valor de y sabendo que $y = cosx + tgx$.	1
		st_{712} – Determinar os valores de x que satisfazem a equação $senx = y$.	2
		st_{713} – Determinar os valores de x que satisfazem a equação $cosx = y$.	1
		st_{717} – Determinar os valores de x que satisfazem a equação $tg(k.x) = y$.	1
		st_{719} – Determinar os valores de x que satisfazem a equação $cos^2x - cosx - k = y$.	1
T_8	t_{81} – Resolver a inequação trigonométrica.	st_{811} – Resolver a inequação trigonométrica do tipo $k.senx \geq y \ ou \ k.senx \leq y$.	2
		st_{812} – Resolver a inequação trigonométrica do tipo $k.cosx \geq y \ ou \ k.cosx \leq y$.	2
		st_{813} – Resolver a inequação trigonométrica do tipo $k.tgx \geq y \ ou \ k.tgx \leq y$.	2

Fonte: Tabela organizada pela pesquisadora

De acordo com os dados da tabela 6, observamos que os exemplos propostos representam 2 tarefas (T_7 e T_8), sendo 2 tipos e 8 subtipos. Não encontramos nenhum exemplo contextualizado.

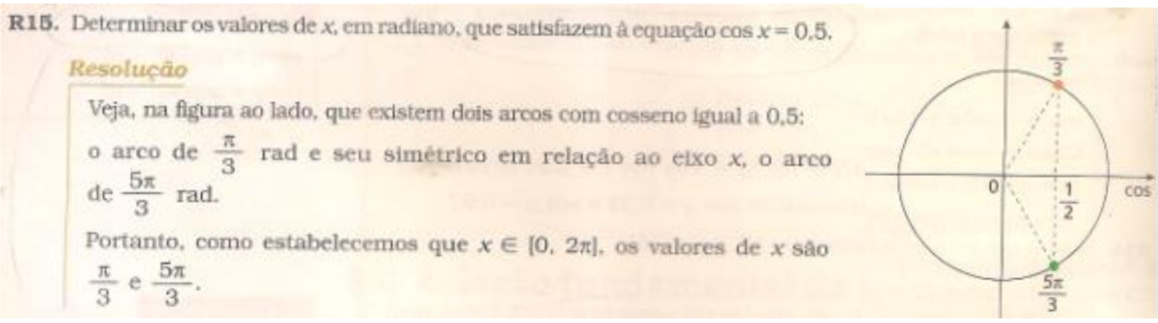
Na próxima seção (5.3.3.3) analisaremos os 8 subtipos de tarefas, identificando as técnicas apresentadas pelo autor do LD1 (elementos do bloco técnico/prático da TAD), bem como as tecnologias e teorias (elementos do bloco tecnológico-teórico).

5.3.4.3 Os exemplos propostos – Identificação das técnicas, tecnologias e teorias

O subtítulo que aqui estamos considerando (equações e inequações trigonométricas) apresenta nos seus exemplos propostos 2 tarefas, sendo 2 tipos e 8 subtipos.

As figuras 67 a 71 exibem os exemplos sobre “equações trigonométricas”, referentes aos subtipos de tarefas st_{713}, st_{717}, st_{712}, st_{711}, st_{719}. Vejamos as técnicas utilizadas em cada subtipo.

FIGURA 67: Exemplo proposto no LD1 (R15) abordando o st_{713}


R15. Determinar os valores de x, em radiano, que satisfazem à equação $\cos x = 0,5$.

Resolução

Veja, na figura ao lado, que existem dois arcos com cosseno igual a 0,5: o arco de $\frac{\pi}{3}$ rad e seu simétrico em relação ao eixo x, o arco de $\frac{5\pi}{3}$ rad.

Portanto, como estabelecemos que $x \in [0, 2\pi]$, os valores de x são $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$.

Fonte: BARROSO, 2010, p.32.

Na figura 67 observamos que este subtipo de tarefa não exige cálculos, apenas que se observe na tabela trigonométrica qual arco possui o valor do cosseno sendo 0,5. Pela simetria, podemos ver no ciclo trigonométrico que existem dois arcos que possuem o mesmo valor do seno em questão. Portanto, a técnica τ_{10} - Observação da tabela trigonométrica e/ou observação da localização dos arcos no ciclo trigonométrico. Essa técnica é justificada pela tecnologia Θ_3 – simetria no plano cartesiano, que faz parte da teoria Θ_3 - teoria cartesiana, ou seja, do sistema de coordenadas cartesianas.

FIGURA 68: Exemplo proposto no LD1 (R16) abordando o st_{717}

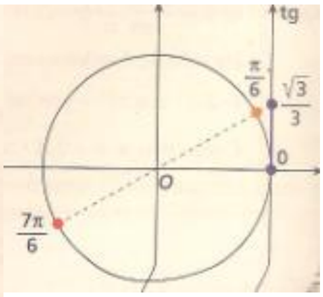
R16. Descobrir o conjunto solução da equação $\operatorname{tg} 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Resolução

Com tangente igual a $\frac{\sqrt{3}}{3}$ existem dois arcos: o de $\frac{\pi}{6}$ e o de $\frac{7\pi}{6}$.

Assim: $2x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12}$ ou $2x = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12}$

Então, o conjunto solução da equação é $S = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right\}$.



Fonte: BARROSO, 2010, p.32.

Na figura 68 observamos que, primeiro é utilizada a técnica da observação da tabela trigonométrica, para verificar quais arcos possuem o valor da tangente = $\frac{\sqrt{3}}{3}$, depois há uma substituição dos arcos encontrados no lugar do valor da tangente, ou seja, no lugar de $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Depois utiliza-se na igualdade a operação inversa da multiplicação, encontrando, consequentemente, a solução da equação. Portanto, neste exemplo, são utilizadas duas técnicas. A primeira técnica é τ_{10} - Observação da tabela trigonométrica e/ou observação da localização dos arcos no ciclo trigonométrico. Essa técnica é justificada pela tecnologia Θ_3 – simetria no plano cartesiano, que faz parte da teoria Θ_3 - teoria cartesiana, ou seja, do sistema de coordenadas cartesianas. A segunda técnica é τ_8 - propriedade da operação inversa dos números reais, justificada pela tecnologia Θ_4 – propriedade dos números reais, que faz parte da teoria Θ_2 - teoria dos Números.

FIGURA 69: Exemplo proposto no LD1 (R17) abordando o st_{712}

R17. Calcular o valor de x, em radiano, na equação sen $\frac{x}{3} + 1 = 0$.

Resolução

sen $\frac{x}{3} + 1 = 0 \Rightarrow$ sen $\frac{x}{3} = -1$

O arco cujo seno é -1 mede $\frac{3\pi}{2}$ rad.

Então: $\frac{x}{3} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{9\pi}{2}$

Como $\frac{9\pi}{2} \notin [0, 2\pi]$, o conjunto solução da equação é $S = \varnothing$.

Fonte: BARROSO, 2010, p.32.

Na figura 69, também foram utilizadas as técnicas τ_8 e τ_{10}, nesta ordem. As tecnologias e teorias que as justificam são as mesmas que citamos no exemplo anterior: τ_8 - Θ_4, Θ_2 ; τ_{10} - Θ_3, Θ_3.

FIGURA 70: Exemplo proposto no LD1 (R19) abordando o st_{711}

R19. Que valores de x, em radiano, satisfazem à equação $\cos x + 1 = \operatorname{sen}^2 x$?

Resolução

Da relação fundamental vem: $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$

Então: $\cos x + 1 = 1 - \cos^2 x$

$\cos^2 x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{2} \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi \end{cases}$$

Portanto, os valores de x, em radiano, que satisfazem à equação são $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ e π.

Fonte: BARROSO, 2010, p.33.

Na figura 70, primeiro utiliza-se a relação fundamental e a substitui na equação, depois utiliza-se a propriedade da operação inversa dos números reais e por fim verifica-se na tabela trigonométrica quais arcos possuem $\cos x = 0$ *e* $\cos x = -1$. Portanto, foram utilizadas três técnicas: τ_7, τ_8 e τ_{10}. Estas técnicas são justificadas pelas seguintes tecnologias e teorias: τ_7 - Θ_5, Θ_4 ; τ_8 - Θ_3, Θ_3 e τ_{10} - Θ_4, Θ_2.

FIGURA 71: Exemplo proposto no LD1 (R20) abordando o st_{719}

R20. Determinar o conjunto solução da equação $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$.

Resolução

Substituindo $\cos x$ por y, temos: $y^2 - y - 2 = 0$, com $-1 \leq y \leq 1$.

Resolvendo a equação do 2º grau:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow y = 2 \text{ (não serve) ou}$$

$y = -1$

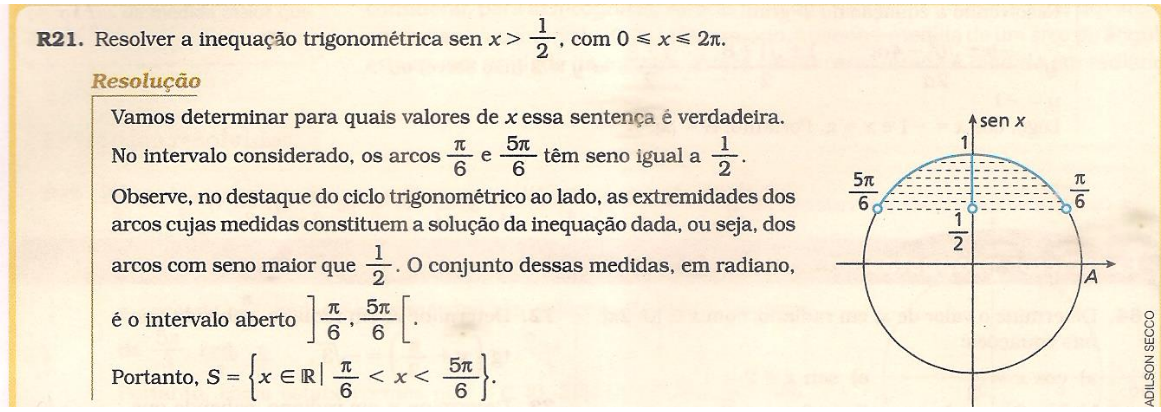
Logo, $\cos x = -1$ e $x = \pi$. Portanto, $S = \{\pi\}$.

Fonte: BARROSO, 2010, p.33.

Na figura 71, foi utilizada apenas a fórmula de Bháskara na resolução. No entanto, antes de aplicar a referida fórmula, o autor substituiu a expressão cos x por y. Acreditamos que esta substituição foi com o objetivo de trabalhar apenas com uma incógnita (y). Portanto, a técnica utilizada foi τ_{11} - fórmula de Bháskara , justificada pela tecnologia Θ_4 - propriedade dos números reais, que faz parte da teoria Θ_2 – teoria dos números.

As figuras 72 a 74 exibem os exemplos sobre “inequações trigonométricas”, referentes aos subtipos de tarefas st_{811}, st_{812} e st_{813}. Vejamos as técnicas utilizadas em cada um desses subtipos.

FIGURA 72: Exemplo proposto no LD1 (R21) abordando o st_{811}



R21. Resolver a inequação trigonométrica sen $x > \frac{1}{2}$, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Resolução

Vamos determinar para quais valores de x essa sentença é verdadeira.

No intervalo considerado, os arcos $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$ têm seno igual a $\frac{1}{2}$.

Observe, no destaque do ciclo trigonométrico ao lado, as extremidades dos arcos cujas medidas constituem a solução da inequação dada, ou seja, dos arcos com seno maior que $\frac{1}{2}$. O conjunto dessas medidas, em radiano, é o intervalo aberto $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$.

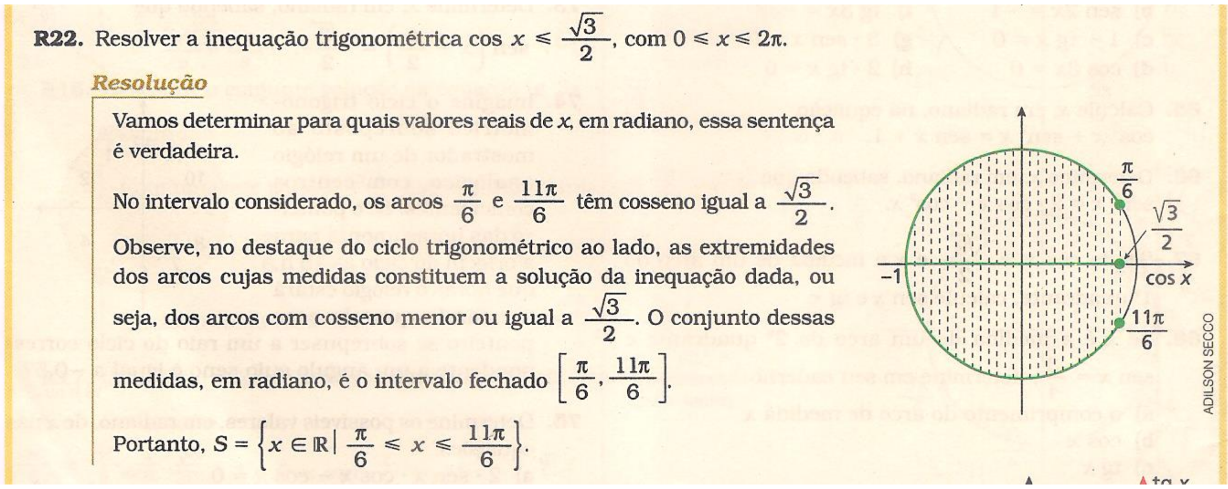
Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}\right\}$.

Fonte: BARROSO, 2010, p.34.

Analisando a resolução do exemplo proposto no LD1 (R21) abordando o st_{811}, podemos observar que a primeira preocupação é *determinar para quais valores de x essa sentença* $\left[sen\ x > \frac{1}{2}\right]$ *é verdadeira.* Ao observar o eixo dos senos e localizar nele o valor $\frac{1}{2}$, é só verificar quais arcos possuem valores do seno maiores que $\frac{1}{2}$. O aluno também pode recorrer à observação na tabela trigonométrica. Nos dois casos, é necessário observar ou o ciclo trigonométrico ou a tabela trigonométrica. De acordo com a resolução exposta pelo autor, podemos concluir que ele sugere a observação no ciclo trigonométrico.

Os outros exemplos propostos, abordando os subtipos de tarefas st_{812} e st_{813} , apresentam resoluções semelhantes (figuras 73 e 74).

FIGURA 73: Exemplo proposto no LD1 (R22) abordando o st_{812}



R22. Resolver a inequação trigonométrica $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, com $0 \leq x \leq 2\pi$.

Resolução

Vamos determinar para quais valores reais de *x*, em radiano, essa sentença é verdadeira.

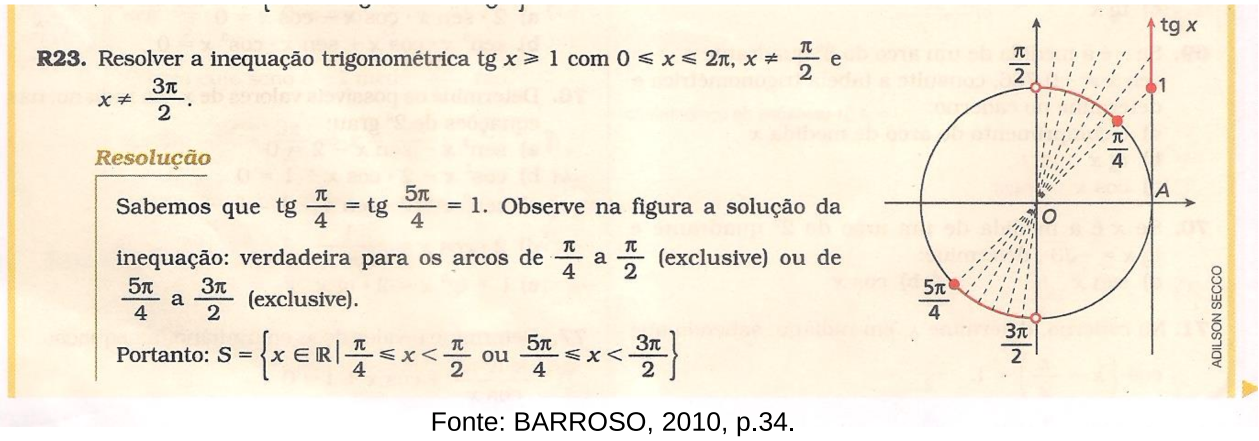
No intervalo considerado, os arcos $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$ têm cosseno igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Observe, no destaque do ciclo trigonométrico ao lado, as extremidades dos arcos cujas medidas constituem a solução da inequação dada, ou seja, dos arcos com cosseno menor ou igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$. O conjunto dessas medidas, em radiano, é o intervalo fechado $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$.

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}\right\}$.

Fonte: BARROSO, 2010, p.34.

FIGURA 74: Exemplo proposto no LD1 (R23) abordando o st_{813}



R23. Resolver a inequação trigonométrica $\text{tg}\, x \geq 1$ com $0 \leq x \leq 2\pi$, $x \neq \frac{\pi}{2}$ e $x \neq \frac{3\pi}{2}$.

Resolução

Sabemos que $\text{tg}\, \frac{\pi}{4} = \text{tg}\, \frac{5\pi}{4} = 1$. Observe na figura a solução da inequação: verdadeira para os arcos de $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{2}$ (exclusive) ou de $\frac{5\pi}{4}$ a $\frac{3\pi}{2}$ (exclusive).

Portanto: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{2}\right\}$

Fonte: BARROSO, 2010, p.34.

Ao compararmos as figuras 72, 73 e 74, podemos observar que as resoluções dos subtipos de tarefas st_{811}, st_{812} e st_{813} são as mesmas, construídas a partir da observação da tabela trigonométrica, para verificar quais arcos possuem o valor da relação trigonométrica (seno, cosseno ou tangente) citada na tarefa. Em seguida, é só observar o ciclo trigonométrico e fazer as deduções. Portanto, a técnica utilizada para os três subtipos de tarefas aqui considerados é a τ_{10}, justificada pela tecnologia Θ_3, que faz parte da teoria Θ_3.

Na próxima seção, discutiremos as tarefas (tipos e subtipos) que foram identificadas nos exercícios propostos para o subtítulo “equações e inequações trigonométricas).

5.3.4.4 Os exercícios propostos – Identificação das tarefas (tipos e subtipos)

As tarefas (tipos e subtipos) identificadas nos exercícios propostos no LD1 estão relacionadas na tabela 7.

Tabela 7 : Tarefas (tipos e subtipos) encontradas nos exercícios propostos sobre "equações e inequações trigonométricas" no LD1

Tarefas (T_i)	Tipos de tarefas (t_{ij})	Subtipos de tarefas (st_{ijk})	Frequência
T_2	t_{22}	st_{226}	3
		st_{227}	1
		st_{228}	1
T_3	t_{31}	st_{317}	1
	t_{32}	st_{326}	1
		st_{327}	4
		st_{328}	1
T_7	t_{71}	st_{712}	3
		st_{713}	1
		st_{714}	2
		st_{715}	1
		st_{716}	1
		st_{717}	2
		st_{718}	3
		st_{719}	1
		st_{7112}	1
		st_{7113}	1
		st_{7114}	1
		st_{7115}	1
		st_{7116}	1
		st_{7117}	1
T_8	t_{81}	st_{811}	11
		st_{812}	6
		st_{813}	5
T_9	t_{91}	St_{911}	1

Fonte: Tabela organizada pela pesquisadora

Os exercícios propostos no LD1 referentes ao subtítulo "equações e inequações trigonométricas" sugerem 5 tarefas: T_2, $T_{3,}$ $T_{7,}$ T_8 e $T_{9;}$ aparecendo 5 tipos de tarefas e 25 subtipos de tarefas.

Assim como ocorreu com as informações sobre o subtítulo "seno, cosseno e tangente" (seção 5.3.3.2, pág. 107), ao compararmos o que é sugerido nos exemplos e o que se pede nos exercícios propostos, referente ao subtítulo "equações e inequações trigonométricas", observamos que, também, há uma quantidade e variedade de tarefas (tipos e subtipos) bem superior nos exercícios propostos. O subtipo que mais aparece nos exercícios é o $st_{811.}$

No que se refere às questões contextualizadas, observamos que, das 55 questões propostas nos exercícios, apenas uma delas apresenta um contexto (refiro-me a contextos que não são meramente matemáticos). Essa questão fala da localização dos ponteiros de um relógio.

Na próxima seção, discutiremos as técnicas, tecnologias e teorias que justificam as tarefas que encontramos nos exercícios propostos sobre o subtítulo "equações e inequações trigonométricas".

5.3.4.5 Os exercícios propostos – Identificação das técnicas, tecnologias e teorias

Ao consultarmos o guia do professor, na parte específica - item II, que trata das resoluções e comentários dos exercícios propostos, observamos que as técnicas apresentadas nas resoluções dos exercícios propostos são as mesmas que foram sugeridas nos exemplos propostos. Não encontramos nenhuma técnica diferente. Por esta razão, não sentimos a necessidade de mostrar resoluções dos exercícios propostos com o objetivo de discutir as técnicas, uma vez que estas já foram analisadas na seção 5.3.4.3 deste trabalho.

Exibiremos, através do quadro 9 quais técnicas, tecnologias e teorias foram utilizadas em cada subtipo de tarefa encontrado nos exercícios propostos para o subtítulo "equações e inequações trigonométricas" no LD1.

Quadro 9: Técnicas, tecnologias e teorias que justificam os subtipos de tarefas encontradas nos exercícios propostos sobre "equações e inequações trigonométricas" no LD1

Subtipos de tarefas (st_{ijk})	Técnicas (τ)	Tecnologias(Θ)	Teorias (Θ)
st_{226}	τ_{10}	Θ_3	Θ_3
st_{227}	τ_{10} e τ_8	Θ_3 e Θ_4	Θ_3 e Θ_2
st_{228}	τ_{10} e τ_8	Θ_3 e Θ_4	Θ_3 e Θ_2
st_{317}	τ_7	Θ_5	Θ_4
st_{326}	τ_7	Θ_5	Θ_4
st_{327}	τ_7	Θ_5	Θ_4
st_{328}	τ_7	Θ_5	Θ_4
st_{712}	τ_8 e τ_{10}	Θ_4 e Θ_3	Θ_2 e Θ_3
st_{713}	τ_{10}	Θ_3	Θ_3
st_{714}	τ_{10}	Θ_3	Θ_3
st_{715}	τ_{10}	Θ_3	Θ_3
st_{716}	τ_{10}	Θ_3	Θ_3
st_{717}	τ_{10} e τ_8	Θ_3 e Θ_4	Θ_3 e Θ_2
st_{718}	τ_{11}	Θ_4	Θ_2
st_{719}	τ_{11}	Θ_4	Θ_2
st_{7112}	τ_7 e τ_8	Θ_5 e Θ_4	Θ_4 e Θ_2
st_{7113}	τ_7 e τ_8	Θ_5 e Θ_4	Θ_4 e Θ_2
st_{7114}	τ_3 e τ_{10}	Θ_2 e Θ_3	Θ_2 e Θ_3
st_{7115}	τ_3 e τ_{10}	Θ_2 e Θ_3	Θ_2 e Θ_3
st_{7116}	τ_{11}	Θ_4	Θ_2
st_{7117}	τ_{11}	Θ_4	Θ_2
st_{811}	τ_{10}	Θ_3	Θ_3
st_{812}	τ_{10}	Θ_3	Θ_3
st_{813}	τ_{10}	Θ_3	Θ_3
St_{911}	τ_{10}	Θ_3	Θ_3

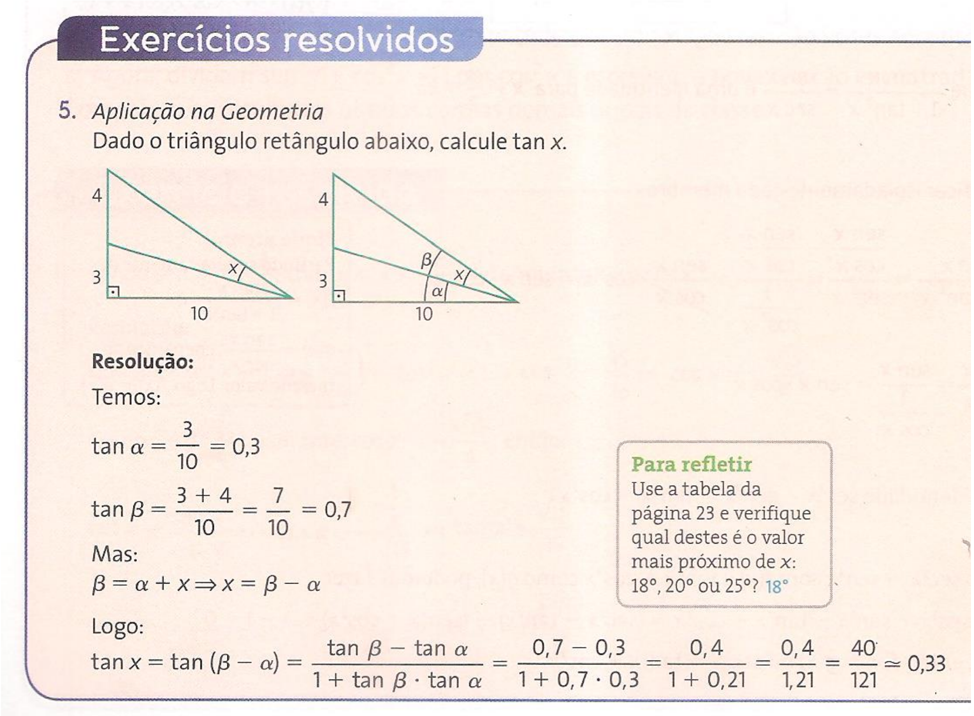
Fonte: Quadro organizado pela pesquisadora

Conforme os dados do quadro 9, podemos observar que as técnicas utilizadas nos subtipos de tarefas dos exercícios propostos são as mesmas que foram exploradas nos exemplos. Em alguns casos, houve a utilização de mais de uma técnica para a resolução do subtipo de tarefa proposto. A técnica mais utilizada nos exercícios propostos para o subtítulo "equações e inequações trigonométricas" foi a τ_{10} (observação da tabela trigonométrica e/ou observação da localização dos arcos no ciclo trigonométrico).

Ao discutirmos sobre o subtítulo "o ciclo trigonométrico", na seção 5.3.3.1 deste trabalho, informamos que não encontramos no LD2 uma tabela trigonométrica para os ângulos que não são múltiplos dos ângulos notáveis. Ao verificarmos os exercícios propostos no LD2, não encontramos os subtipos de tarefas que requerem o uso da tabela trigonométrica. Percebemos que nas atividades em que se faz necessário o valor das relações trigonométricas, geralmente esta informação é fornecida no enunciado da questão, não necessitando, portanto da consulta à tabela. De forma geral, os demais subtipos de tarefas, assim como as resoluções, encontrados no LD2 são semelhantes às do LD1.

Em relação ao LD3, ao discutirmos sobre o subtítulo “o ciclo trigonométrico”, na seção 5.3.3.1 deste trabalho, informamos que encontramos no LD3 uma tabela trigonométrica para os ângulos que não são múltiplos dos ângulos notáveis. Ao verificarmos os exemplos e também os exercícios propostos, encontramos apenas um exemplo que sugeria o uso da tabela trigonométrica (figura 75).

FIGURA 75: Exemplo proposto no LD3 que sugere a utilização da tabela trigonométrica



Exercícios resolvidos

5. *Aplicação na Geometria*
Dado o triângulo retângulo abaixo, calcule tan x.

Resolução:

Temos:

$\tan \alpha = \frac{3}{10} = 0{,}3$

$\tan \beta = \frac{3+4}{10} = \frac{7}{10} = 0{,}7$

Mas:

$\beta = \alpha + x \Rightarrow x = \beta - \alpha$

Logo:

$\tan x = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \cdot \tan \alpha} = \frac{0{,}7 - 0{,}3}{1 + 0{,}7 \cdot 0{,}3} = \frac{0{,}4}{1 + 0{,}21} = \frac{0{,}4}{1{,}21} = \frac{40}{121} \simeq 0{,}33$

Para refletir
Use a tabela da página 23 e verifique qual destes é o valor mais próximo de x: 18°, 20° ou 25°? 18°

Fonte: DANTE, 2013, p.58.

Percebemos que no LD3, nas atividades em que se faz necessário o valor das relações trigonométricas, assim como no LD2, esta informação também é fornecida no enunciado da questão. De forma geral, os demais subtipos de tarefas, assim como as resoluções, encontrados no LD3 também são semelhantes às do LD1.

Na próxima seção, elencamos as observações realizadas feitas em torno do subtítulo “trigonometria em um triângulo qualquer”.

5.3.5 **Análise praxeológica do subtítulo “Trigonometria em um triângulo qualquer”**

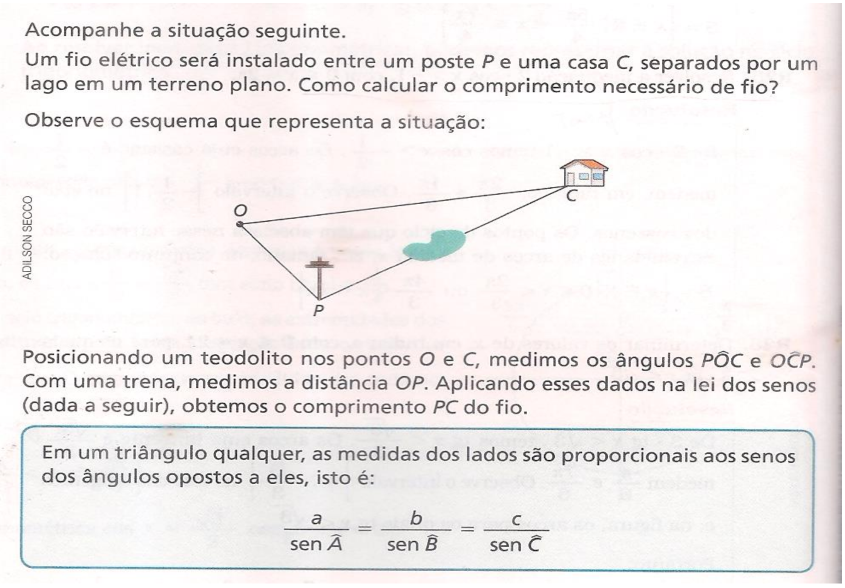
O subtítulo “trigonometria em um triângulo qualquer” trata do estudo do triângulo e de outros polígonos que podem ser decompostos em triângulos. Alguns cálculos realizados para encontrar a área, o lado, o ângulo, entre outros elementos das figuras planas, principalmente referente ao triângulo, só podem ser realizados através de algumas fórmulas que envolvem a trigonometria. Nesta seção, discutiremos como subtítulo foi abordado no LD1, principalmente no que diz respeito aos exemplos e exercícios propostos.

5.3.5.1 Como o tema é abordado

O autor inicia sua abordagem mencionando que, em certas situações, não é possível realizarmos medições de forma direta, então recorremos ao teodolito (instrumento utilizado na medição, principalmente, de distâncias inacessíveis). Logo ao lado da informação do autor, é exibida uma imagem de uma pessoa utilizando o teodolito. Neste momento, temos a impressão de que o autor teve a intenção de justificar a importância das informações elencadas neste subtítulo do LD1.

Em seguida, inicia um tópico intitulado “lei dos senos”, com uma situação-problema (figura 76).

FIGURA 76: Situação – problema do LD1 para introduzir a discussão sobre a lei dos senos



Acompanhe a situação seguinte.

Um fio elétrico será instalado entre um poste P e uma casa C, separados por um lago em um terreno plano. Como calcular o comprimento necessário de fio?

Observe o esquema que representa a situação:

Posicionando um teodolito nos pontos O e C, medimos os ângulos $P\hat{O}C$ e $O\hat{C}P$. Com uma trena, medimos a distância OP. Aplicando esses dados na lei dos senos (dada a seguir), obtemos o comprimento PC do fio.

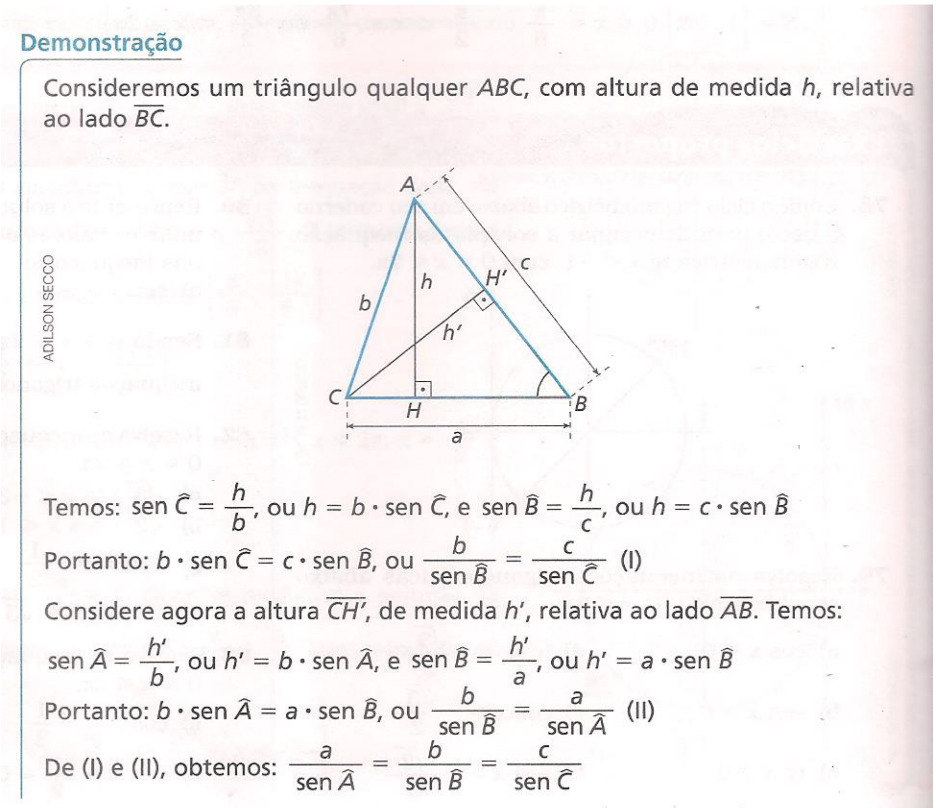
Em um triângulo qualquer, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles, isto é:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$$

Fonte: BARROSO, 2010, p.36.

Ao analisarmos a figura 76, observamos que o autor já enuncia a lei dos senos na resolução do problema, sem ter fornecido informação alguma sobre essa lei. Depois de enunciá-la, ele exibe a demonstração desta lei.

FIGURA 77: Demonstração da lei dos senos



Demonstração

Consideremos um triângulo qualquer ABC, com altura de medida h, relativa ao lado $\overline{BC}$.

Temos: $\text{sen}\,\hat{C} = \dfrac{h}{b}$, ou $h = b \cdot \text{sen}\,\hat{C}$, e $\text{sen}\,\hat{B} = \dfrac{h}{c}$, ou $h = c \cdot \text{sen}\,\hat{B}$

Portanto: $b \cdot \text{sen}\,\hat{C} = c \cdot \text{sen}\,\hat{B}$, ou $\dfrac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \dfrac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$ (I)

Considere agora a altura $\overline{CH'}$, de medida h', relativa ao lado $\overline{AB}$. Temos:

$\text{sen}\,\hat{A} = \dfrac{h'}{b}$, ou $h' = b \cdot \text{sen}\,\hat{A}$, e $\text{sen}\,\hat{B} = \dfrac{h'}{a}$, ou $h' = a \cdot \text{sen}\,\hat{B}$

Portanto: $b \cdot \text{sen}\,\hat{A} = a \cdot \text{sen}\,\hat{B}$, ou $\dfrac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \dfrac{a}{\text{sen}\,\hat{A}}$ (II)

De (I) e (II), obtemos: $\dfrac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \dfrac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$

Fonte: BARROSO, 2010, p.36.

A demonstração da lei dos senos proposta pelo autor deriva da relação trigonométrica seno de um ângulo do triângulo retângulo. Observe que ele (autor) utiliza um triângulo acutângulo (triângulo que possui todos os ângulos internos menores que 90º) e traça as alturas referentes aos três lados, obtendo, consequentemente, triângulos retângulos.

Observe que o enunciado da lei dos senos (figura 76) refere-se a um triângulo qualquer e não apenas ao triângulo acutângulo (tipo de triângulo utilizado na demonstração). Ao lado da demonstração, na seção do LD1 intitulada *observação*, o autor acrescenta que esta demonstração pode ser feita também para um triângulo acutângulo e para um triângulo obtusângulo.

A lei dos senos representa uma técnica para encontrar lados e ângulos de um triângulo qualquer.

A demonstração dessa lei é construída a partir da definição de seno de um ângulo de um triângulo retângulo $\left[sen\ x = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}\right]$. Observe a figura 76 e veja que no triângulo ABC foram traçadas as três alturas relativas aos três lados, obtendo, desta forma, os triângulos retângulos ACH, ABH, ACH', BCH'. Considerando o triângulo ACH e aplicando a definição de seno referente ao ângulo C, temos $\left[sen\ \hat{C} = \frac{h}{b}\right]$, pela multiplicação dos meios pelos extremos, justificada tela propriedade das proporções, obtemos $\left[h = b\ .sen\ \hat{C}\right]$. De modo análogo, considerando o triângulo ABH e utilizando o seno do ângulo B, obtemos $\left[h = c\ .sen\ \hat{B}\right]$. Pelo princípio da igualdade, temos $\left[b\ .sen\ \hat{C} = c\ .sen\ \hat{B}\right]$, que também pode ser escrito como $\left[\frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}\right]$. Ao realizarmos os mesmos procedimentos, considerando os triângulos ACH' e BCH', obteremos $\left[b\ .sen\ \hat{A} = a\ .sen\ \hat{B}\right]$ ou $\left[\frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{a}{sen\ \hat{A}}\right]$. Novamente pelo princípio da igualdade, obtemos $\left[\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}\right]$, que foi denominada de lei dos senos.

Logo após a demonstração da lei dos senos, o autor cita dois exemplos da aplicação da lei dos senos e depois propõe exercícios.

Depois dos exercícios propostos, o autor enuncia a lei dos cossenos, desta vez sem nenhuma situação-problema para introduzir a informação (figura 78). Após enunciar a lei dos cossenos, é exibida a demonstração da lei utilizando um triângulo acutângulo (figura 79).

FIGURA 78: Enunciado sobre a lei dos cossenos

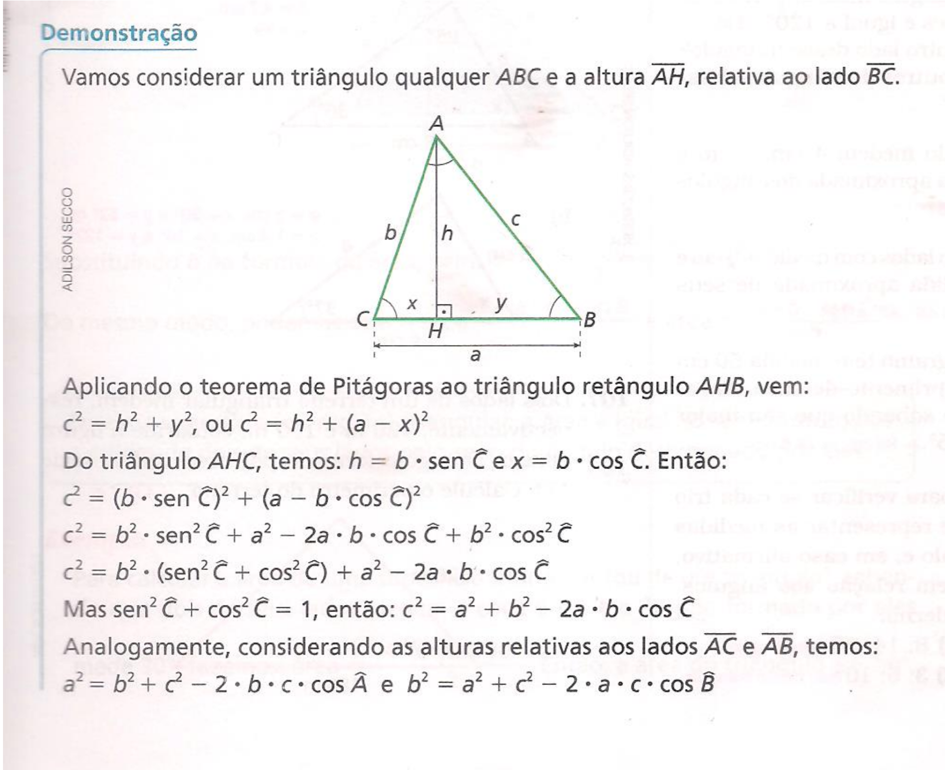
5.2 Lei dos cossenos

Em um triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros lados menos o duplo produto destas pelo cosseno do ângulo formado por esses lados, isto é:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

Fonte: BARROSO, 2010, p.39.

FIGURA 79: Demonstração da lei dos cossenos



Demonstração

Vamos considerar um triângulo qualquer ABC e a altura $\overline{AH}$, relativa ao lado $\overline{BC}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo AHB, vem:

$c^2 = h^2 + y^2$, ou $c^2 = h^2 + (a - x)^2$

Do triângulo AHC, temos: $h = b \cdot \text{sen}\, \hat{C}$ e $x = b \cdot \cos \hat{C}$. Então:

$c^2 = (b \cdot \text{sen}\, \hat{C})^2 + (a - b \cdot \cos \hat{C})^2$

$c^2 = b^2 \cdot \text{sen}^2 \hat{C} + a^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \hat{C} + b^2 \cdot \cos^2 \hat{C}$

$c^2 = b^2 \cdot (\text{sen}^2 \hat{C} + \cos^2 \hat{C}) + a^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$

Mas $\text{sen}^2 \hat{C} + \cos^2 \hat{C} = 1$, então: $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$

Analogamente, considerando as alturas relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, temos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$ e $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$

Fonte: BARROSO, 2010, p.39.

Assim como vimos na lei dos senos, observe que o enunciado da lei dos cossenos (figura 78) refere-se também a um triângulo qualquer e não apenas ao triângulo acutângulo (tipo de triângulo utilizado na demonstração). Ao lado da demonstração, na seção do LD1 intitulada *observação*, o autor acrescenta que esta demonstração também pode ser feita também para um triângulo acutângulo e para um triângulo obtusângulo.

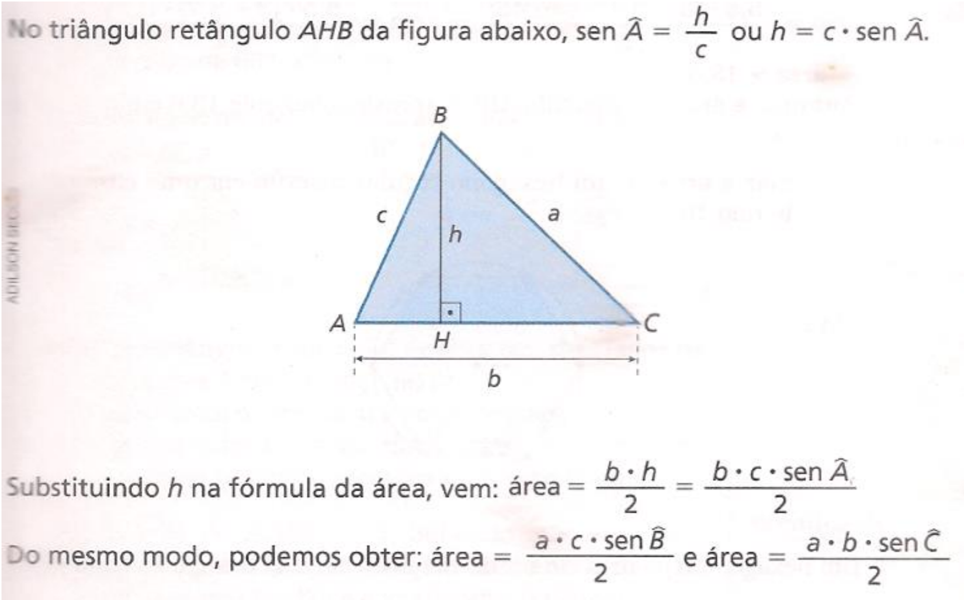
A lei dos cossenos representa uma técnica para encontrar lados e ângulos de um triângulo qualquer e sua demonstração representa a tecnologia que a justifica.

Na figura 79, podemos observar que no triângulo ABC, ao traçar a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ foram obtidos os triângulos AHC e ABH. Na demonstração, são aplicados o teorema de Pitágoras, as leis das proporções e a relação fundamental da trigonometria.

Após a demonstração da lei dos cossenos, o autor cita um exemplo envolvendo a aplicação desta lei, e em seguida propõe exercícios.

Ainda sobre o subtítulo "trigonometria em um triângulo qualquer", logo após os exercícios propostos sobre a lei dos cossenos, o autor inicia um outro tópico denominado de *área de superfície triangular*. Utiliza o desenho de um triângulo acutângulo, traçando a altura relativa a um dos lados, obtendo triângulos retângulos (figura 80).

FIGURA 80: Demonstração da fórmula para o cálculo da área de um triângulo qualquer


No triângulo retângulo *AHB* da figura abaixo, sen $\hat{A} = \frac{h}{c}$ ou $h = c \cdot \text{sen } \hat{A}$.

Substituindo *h* na fórmula da área, vem: área $= \frac{b \cdot h}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen } \hat{A}}{2}$

Do mesmo modo, podemos obter: área $= \frac{a \cdot c \cdot \text{sen } \hat{B}}{2}$ e área $= \frac{a \cdot b \cdot \text{sen } \hat{C}}{2}$

Fonte: BARROSO, 2010, p.41.

Conforme mostra a figura 80, o autor mostra como chegar à fórmula para o cálculo da área de um triângulo qualquer, conhecendo-se dois lados do triângulo e o seno do ângulo formado por esses dois lados. Essa demonstração é a justificativa para a fórmula da área de qualquer triângulo, que podemos considerar uma técnica. No entanto, para demonstrar essa fórmula são utilizadas mais de uma técnica. Podemos $\overline{AC}$ observar que, na demonstração, inicialmente no triângulo ABC foi traçada a altura relativa ao lado , obtendo-se os triângulos ABH e BCH. Aplicando-se a definição de seno de um ângulo no triângulo retângulo ABH (técnicas τ_9), obtém-se a expressão $[h = c\ .sen\ \hat{A}]$. Ao considerar a fórmula mais comum para o cálculo da área de um triângulo (quando se conhece sua altura e sua base) e substituir o valor de *h* , tem-se: $Área = \frac{b.h}{2} = \frac{b.c.sen\hat{A}}{2}$. Portanto, podemos considerar que o teorema de Pitágoras e as leis das proporções, contidas, respectivamente, na teoria dos triângulos e na teoria das proporções justificam essa demonstração.

Após a demonstração, o autor enuncia a fórmula para o cálculo da área da superfície triangular. Em seguida, cita exemplos e depois sugere exercícios.

Ao analisarmos o LD2 sobre o subtítulo “trigonometria em um triângulo qualquer”, não encontramos nenhuma menção nos textos didáticos nem nos exercícios sobre a lei dos senos, a lei dos cossenos, nem sobre o cálculo da área de superfícies triangulares a partir da trigonometria. Salientamos que a nossa pesquisa também ocorreu em um dos capítulos do LD2 que trata das áreas de figuras planas, onde encontramos três fórmulas para o cálculo da área de um triângulo, mas nenhuma delas utiliza a relação trigonométrica seno. Disponibilizamos a página do LD2 que aborda as fórmulas para o cálculo da área de triângulos (anexo G).

No LD3 encontramos tópicos específicos sobre a lei dos senos, a lei dos cossenos e a fórmula para o cálculo da superfície triangular por meio da trigonometria. As abordagens sobre a lei dos senos e dos cossenos foram iniciadas a partir de situações-problemas. Assim como no LD1, nas resoluções apareceram as leis e depois é que o autor coloca as demonstrações. Sobre a lei dos senos, encontramos 2 exemplos e 8 exercícios propostos. Com relação à lei dos cossenos, encontramos 2 exemplos e 16 exercícios propostos. A abordagem sobre a fórmula para o cálculo da superfície triangular por meio da trigonometria não acontece na unidade sobre trigonometria, e sim na unidade que trata da geometria plana e espacial, especificamente no capítulo sobre polígonos inscritos e áreas. Disponibilizamos a página do LD3 que aborda as fórmulas para o cálculo da área de triângulos (anexo H).

5.3.5.2 Os exemplos propostos – Identificação das tarefas (tipos e subtipos)

O subtítulo “trigonometria em um triângulo qualquer” apresenta 6 exemplos. A tabela 8 nos mostra as tarefas (tipos e subtipos) que foram identificadas nos exemplos propostos.

Tabela 8: Tarefas (tipos e subtipos) encontradas nos exemplos propostos sobre “trigonometria em um triângulo qualquer”

Tarefas (T_i)	Tipos de tarefas (t_{ij})	Subtipos de tarefas (st_{ijk})	Frequência
T_2	t_{23} – Calcular a medida do ângulo.	st_{233} – Calcular a medida de um ângulo do triângulo.	1
	t_{24} – Calcular a medida do lado do polígono.	st_{241} – Calcular a medida do lado de um triângulo.	1
		st_{242} – Calcular a medida do lado de um losango.	1
T_{10}	t_{101} – Calcular a área de um polígono.	st_{1013} – Calcular a área de um triângulo.	2
		st_{1014} – Calcular a área de um hexágono.	1

Fonte: Tabela organizada pela pesquisadora

De acordo com os dados da tabela 8, observamos que os exemplos propostos representam 2 tarefas (T_2 e T_{10}), sendo 3 tipos e 5 subtipos. Não encontramos nenhum exemplo contextualizado.

Na próxima seção (5.3.5.3) analisaremos os 5 subtipos de tarefas, identificando as técnicas apresentadas pelo autor do LD1 (elementos do bloco técnico/prático da TAD), bem como as tecnologias e teorias (elementos do bloco tecnológico-teórico).

5.3.5.3 Os exemplos propostos – Identificação das técnicas, tecnologias e teorias

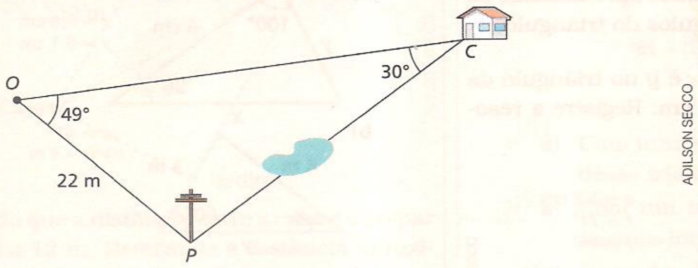
O subtítulo “trigonometria em um triângulo qualquer” apresenta nos seus exemplos propostos 5 subtipos de tarefas, conforme vimos na seção anterior.

As figuras 81 a 85 exibem os exemplos referentes a esses subtipos de tarefas (st_{233}, st_{241}, st_{242}, st_{1013}, st_{1014}). Vejamos as técnicas utilizadas em cada subtipo.

A figura 81 exibe um dos dois exemplos contidos no LD1 sobre a lei dos senos. Na seção 5.3.5.1 deste trabalho (p.119) detalhamos a demonstração dessa lei. Consideramos que a técnica utilizada no exemplo que representa do subtipo de tarefa $\mathbf{st_{233}}$ foi a lei dos senos, representada por τ_{10} , justificada pela lei das proporções - Θ_1, que faz parte da teoria das proporções - Θ_1.

FIGURA 81: Exemplo proposto no LD1 (R27) abordando o st_{233}

R27. O esquema abaixo ilustra a situação da página anterior, com as medidas dos ângulos $P\hat{O}C$ e $O\hat{C}P$ indicadas. Determinar a medida do ângulo $O\hat{P}C$ e das distâncias OC e PC (comprimento do fio).



Resolução

med($O\hat{P}C$) = 180° − (49° + 30°) = 101°

Da tabela de razões trigonométricas: sen 49° ≃ 0,75 e sen 101° = sen 79° ≃ 0,98.

Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{PC}{\text{sen } 49°} = \frac{OP}{\text{sen } 30°} = \frac{OC}{\text{sen } 101°}$$

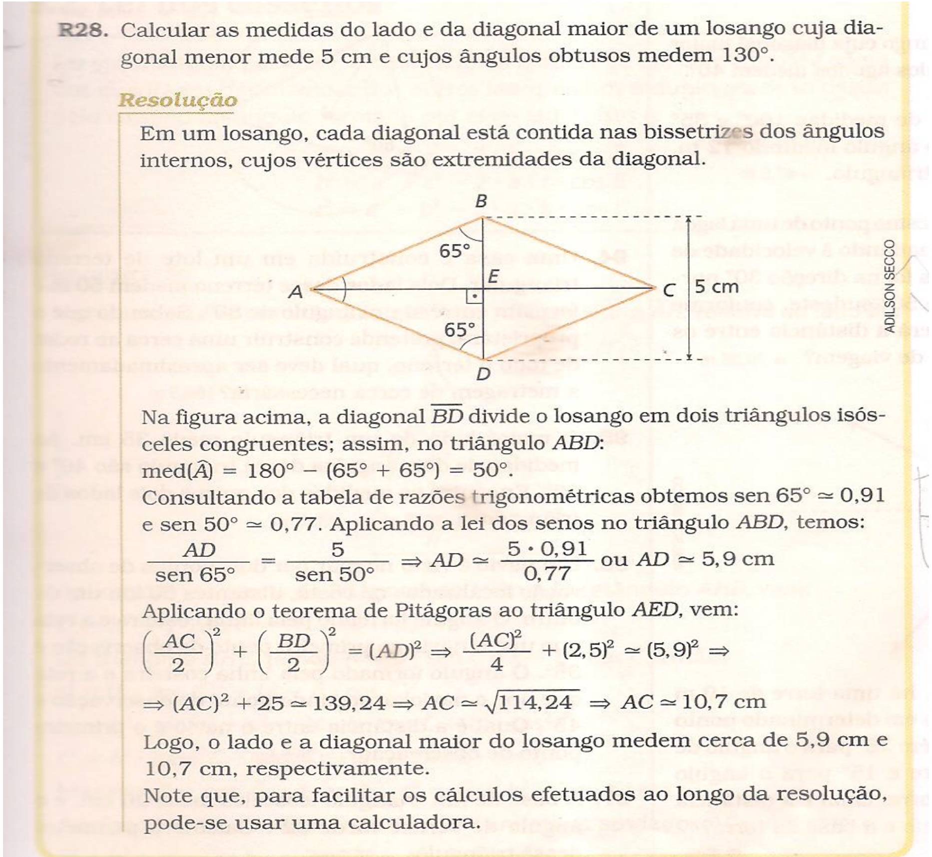
- $\dfrac{22}{\text{sen } 30°} = \dfrac{OC}{\text{sen } 101°} \Rightarrow OC \simeq \dfrac{22 \cdot 0{,}98}{0{,}5} \Rightarrow OC \simeq 43{,}1 \text{ m}$
- $\dfrac{PC}{\text{sen } 49°} = \dfrac{22}{\text{sen } 30°} \Rightarrow PC \simeq \dfrac{22 \cdot 0{,}75}{0{,}5} \Rightarrow PC \simeq 33 \text{ m}$

Portanto: $O\hat{P}C$ mede 101°, OC e PC medem, aproximadamente, 43,1 m e 33 m, respectivamente.

Fonte: BARROSO, 2010, p.37.

A figura 82 representa o outro exemplo do LD1 que aborda o **st_{241}**. Neste exemplo, inicialmente é utilizada a propriedade fundamental dos triângulos (Θ_6): a soma dos ângulos internos deve ser igual a 180º, representamos por τ_{15} . Em seguida, é consultada a tabela trigonométrica para descobrir os senos de 65º e 50º. Depois aplica-se a lei dos senos para descobrir o valor de um dos lados do losango (lembrando que, no losango, os lados opostos têm a mesma medida); em seguida aplica-se o teorema de Pitágoras para encontrar o valor do outro par de lados opostos do losango. Portanto, neste exemplo, podemos dizer que foram utilizadas as técnicas: τ_{15}- a soma dos ângulos internos de um triângulo, justificada pela tecnologia Θ_6 que por sua vez faz parte da teoria Θ_4; τ_{12} – lei dos senos , justificada pela tecnologia Θ_1 que por sua vez faz parte da teoria Θ_1; o teorema de Pitágoras.

FIGURA 82: Exemplo proposto no LD1 (R28) abordando o st_{241}



R28. Calcular as medidas do lado e da diagonal maior de um losango cuja diagonal menor mede 5 cm e cujos ângulos obtusos medem 130°.

Resolução

Em um losango, cada diagonal está contida nas bissetrizes dos ângulos internos, cujos vértices são extremidades da diagonal.

Na figura acima, a diagonal $\overline{BD}$ divide o losango em dois triângulos isósceles congruentes; assim, no triângulo ABD:
$\text{med}(\hat{A}) = 180° - (65° + 65°) = 50°$.
Consultando a tabela de razões trigonométricas obtemos sen $65° \simeq 0{,}91$ e sen $50° \simeq 0{,}77$. Aplicando a lei dos senos no triângulo ABD, temos:

$$\frac{AD}{\text{sen } 65°} = \frac{5}{\text{sen } 50°} \Rightarrow AD \simeq \frac{5 \cdot 0{,}91}{0{,}77} \text{ ou } AD \simeq 5{,}9 \text{ cm}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo AED, vem:

$$\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2 = (AD)^2 \Rightarrow \frac{(AC)^2}{4} + (2{,}5)^2 \simeq (5{,}9)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AC)^2 + 25 \simeq 139{,}24 \Rightarrow AC \simeq \sqrt{114{,}24} \Rightarrow AC \simeq 10{,}7 \text{ cm}$$

Logo, o lado e a diagonal maior do losango medem cerca de 5,9 cm e 10,7 cm, respectivamente.
Note que, para facilitar os cálculos efetuados ao longo da resolução, pode-se usar uma calculadora.

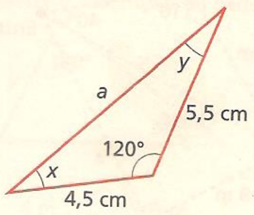
Fonte: BARROSO, 2010, p.37.

Gostaríamos de esclarecer que, embora tenhamos considerado na modelização a priori o teorema de Pitágoras como sendo uma tecnologia, neste exemplo o próprio teorema representa uma técnica, neste caso, a tecnologia que justifica a técnica seria a demonstração do teorema.

A figura 83 exibe o exemplo do LD1 sobre o **st_{242}** . Na resolução foi aplicada a lei dos cossenos, técnica τ_{13}, justificada pelas tecnologias Θ_5 e Θ_1, que fazem parte das teorias Θ_4 e Θ_1, respectivamente; e a soma dos ângulos internos de um triângulo, técnica τ_{15}, justificada pela tecnologia Θ_6, que faz parte da teoria Θ_4.

FIGURA 83: Exemplo proposto no LD1 (R29) abordando o st_{242}

R29. Determinar as medidas a, x e y indicadas no triângulo abaixo.



ADILSON SECCO

Resolução

Aplicando a lei dos cossenos, obtemos:
$a^2 = (5,5)^2 + (4,5)^2 - 2 \cdot 4,5 \cdot 5,5 \cdot \cos 120°$
Como $\cos 120° = -0,5$, vem:
$a^2 = 30,25 + 20,25 + 24,75 \Rightarrow a^2 = 75,25 \Rightarrow a \simeq \sqrt{75,25}$ cm
Agora podemos determinar a medida y. Podemos usar uma calculadora para efetuar os cálculos.
$(4,5)^2 = \left(\sqrt{75,25}\right)^2 + (5,5)^2 - 2 \cdot \sqrt{75,25} \cdot 5,5 \cdot \cos y \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos y \simeq 0,89$
Consultando a tabela de razões trigonométricas, verificamos que y é aproximadamente 27°.
Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, temos:
$x \simeq 180° - (120° + 27°) \Rightarrow x \simeq 33°$
Logo, $a = \sqrt{75,25}$ cm, $y \simeq 27°$ e $x \simeq 33°$

Fonte: BARROSO, 2010, p.40.

A figura 84 exibe o exemplo do LD1 sobre o st_{1013}. Na resolução foi aplicada a fórmula para o cálculo da área da superfície triangular, técnica τ_{14}. Essa técnica é justificada pelas tecnologias Θ_5 e Θ_1, que fazem parte das teorias Θ_4 e Θ_1, respectivamente.

FIGURA 84: Exemplo proposto no LD1 (R30) abordando o st_{1013}

R30. Calcular a área de um triângulo cujos lados medem 8 cm, 7 cm e 12 cm.

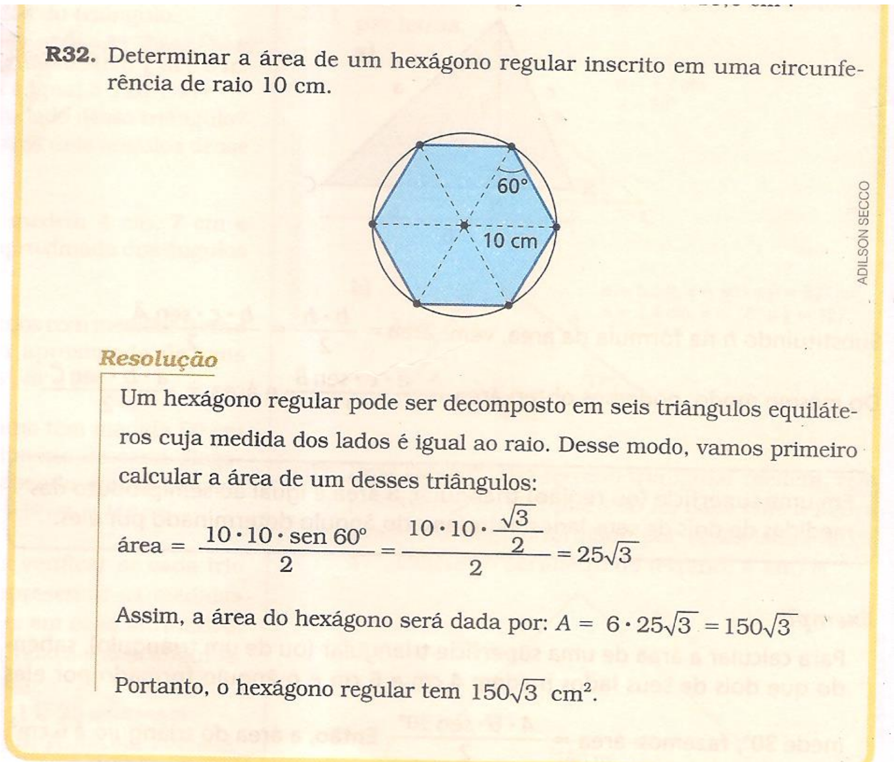
Resolução

Se $\hat{A}$ é o ângulo oposto ao lado de 7 cm, pela lei dos cossenos:
$7^2 = 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} \simeq 0,83$
Consultando a tabela de razões trigonométricas, verificamos que: med$(\hat{A}) \simeq 34°$
$$\text{área} \simeq \frac{8 \cdot 12 \cdot \text{sen } 34°}{2} \simeq \frac{8 \cdot 12 \cdot 0,5592}{2} \Rightarrow \text{área} \simeq 26,8$$
Portanto, a área do triângulo é cerca de 26,8 cm².

Fonte: BARROSO, 2010, p.42.

A figura 85 apresenta um exemplo do LD1 que apresenta o **st_{1014}.** Assim como para o **st_{1014},** a técnica aplicada também foi a fórmula para o cálculo da área da superfície triangular, técnica τ_{14}, justificada pelas tecnologias θ_5 e θ_1, que fazem parte das teorias Θ_4 e Θ_1, respectivamente.

FIGURA 85: Exemplo proposto no LD1 (R32) abordando o st_{1014}



R32. Determinar a área de um hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio 10 cm.

Resolução

Um hexágono regular pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros cuja medida dos lados é igual ao raio. Desse modo, vamos primeiro calcular a área de um desses triângulos:

$$\text{área} = \frac{10 \cdot 10 \cdot \text{sen } 60^\circ}{2} = \frac{10 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 25\sqrt{3}$$

Assim, a área do hexágono será dada por: $A = 6 \cdot 25\sqrt{3} = 150\sqrt{3}$

Portanto, o hexágono regular tem $150\sqrt{3}$ cm².

Fonte: BARROSO, 2010, p.42.

Na próxima seção, discutiremos as tarefas (tipos e subtipos) que foram identificadas nos exercícios propostos para o subtítulo “trigonometria em um triângulo qualquer).

5.3.5.4 Os exercícios propostos – Identificação das tarefas (tipos e subtipos)

As tarefas (tipos e subtipos) identificadas nos exercícios propostos no LD1 estão relacionadas na tabela 9.

Tabela 9: Tarefas (tipos e subtipos) encontradas nos exercícios propostos sobre "trigonometria em um triângulo qualquer" no LD1

Tarefas (T_i)	Tipos de tarefas (t_{ij})	Subtipos de tarefas (st_{ijk})	Frequência
T_2	t_{21}	st_{211}	1
	t_{23}	st_{233}	5
	t_{24}	st_{241}	16
		st_{243}	10
		st_{244}	2
		st_{245}	4
T_3	t_{31}	st_{311}	2
T_{10}	t_{101}	st_{1011}	1
		st_{1012}	5
		st_{1013}	19
		st_{1015}	1

Fonte: Tabela organizada pela pesquisadora

Os exercícios propostos no LD1 referentes ao subtítulo "trigonometria em um triângulo qualquer" sugerem 3 tarefas: T_2, T_3, T_{10}; aparecendo 5 tipos de tarefas e 11 subtipos de tarefas.

Ao compararmos o que é sugerido nos exemplos (seção 53.52, pág. 124) e o que se pede nos exercícios propostos, observamos que há uma certa equivalência, tanto na quantidade quanto na descrição dos subtipos de tarefas. Os subtipos que mais aparecem nos exercícios são: st_{1013} (19), st_{241} (16), St_{243} (10).

No que se refere às questões contextualizadas, observamos que, das 66 questões propostas nos exercícios, 9 delas apresentam um contexto (refiro-me a contextos que não são meramente matemáticos).

Na próxima seção, discutiremos as técnicas, tecnologias e teorias que justificam as tarefas que encontramos nos exercícios propostos sobre o subtítulo "trigonometria em um triângulo qualquer".

5.3.5.5 Os exercícios propostos – Identificação das técnicas, tecnologias e teorias

Assim como fizemos nas análises dos subtítulos anteriores, consultamos o guia do professor, na parte específica - item II, que trata das resoluções e comentários dos exercícios propostos. Observamos que as técnicas apresentadas nas resoluções dos exercícios propostos são as mesmas que foram sugeridas nos exemplos propostos. Não encontramos nenhuma técnica diferente.

Exibiremos, através do quadro 10 quais técnicas, tecnologias e teorias foram utilizadas em cada subtipo de tarefa encontrado nos exercícios propostos para o subtítulo “trigonometria em um triângulo qualquer” do LD1.

Quadro 10: Técnicas, tecnologias e teorias que justificam os subtipos de tarefas encontradas nos exercícios propostos sobre “trigonometria em um triângulo qualquer” no LD1

Subtipos de tarefas (st_{ijk})	Técnicas (τ)	Tecnologias(θ)	Teorias (Θ)
st_{211}	τ_{12}	θ_1	Θ_1
st_{233}	τ_{12}	θ_1	Θ_1
st_{241}	τ_{15} e τ_{12}	θ_6 e θ_1	Θ_4 e Θ_1
st_{243}	τ_{13}, τ_{15}, τ_{12}	θ_5 e θ_1, θ_6, θ_1	Θ_4 e Θ_1, Θ_4, Θ_1
st_{244}	τ_{13}, τ_{12}	θ_5 e θ_1, , θ_1	Θ_4 e Θ_1, Θ_1
st_{245}	τ_{13}, τ_{12}	θ_5 e θ_1	Θ_4 e Θ_1
st_{311}	τ_{14}	θ_5 e θ_1	Θ_4 e Θ_1
st_{1011}	τ_{14}	θ_5 e θ_1	Θ_4 e Θ_1
st_{1012}	τ_{14}	θ_5 e θ_1	Θ_4 e Θ_1
st_{1013}	τ_{14}	θ_5 e θ_1	Θ_4 e Θ_1
st_{1015}	τ_{14}	θ_5 e θ_1	Θ_4 e Θ_1

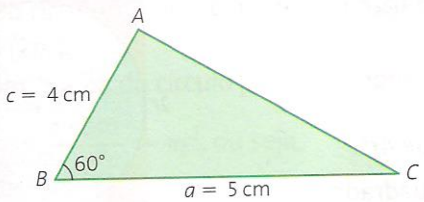
Fonte: Quadro organizado pela pesquisadora

Conforme os dados do quadro 10, assim como ocorreu no estudo de outros subtítulos tratados neste trabalho, podemos observar que as técnicas utilizadas nos subtipos de tarefas dos exercícios propostos são as mesmas que foram exploradas nos exemplos. Em alguns casos, houve a utilização de mais de uma técnica para a resolução do subtipo de tarefa proposto.

Ao discutirmos sobre o subtítulo “trigonometria em um triângulo qualquer”, na seção 5.3.5.1 deste trabalho, informamos que não encontramos no LD2 nenhuma menção sobre este subtítulo. E que no LD3 encontramos tópicos específicos sobre a lei dos senos, a lei dos cossenos e a fórmula para o cálculo da superfície triangular por meio da trigonometria. Sobre a lei dos senos, 8 exercícios propostos. Com relação à lei dos cossenos, 16 exercícios propostos. As tarefas (tipos e subtipos), bem como as técnicas apresentadas, são as mesmas encontradas no LD1. Referente à abordagem sobre a fórmula para o cálculo da superfície triangular por meio da trigonometria, esse estudo não acontece na unidade sobre trigonometria, e sim na unidade que trata da geometria plana e espacial, especificamente no capítulo sobre polígonos inscritos e áreas. Encontramos 5 questões que apresentam os subtipos de tarefas st_{1013} (questões 20 e 21), st_{1014} (questão24) e st_{1015} (questões 22 e 23). A figura 86 exibe os 5 exercícios propostos e a figura 87 exibe as técnicas utilizadas na resolução.

FIGURA 86: Exercícios propostos no LD3 abordando os subtipos de tarefas st_{1013}, st_{1014} e st_{1015}

20. Determine a área da região triangular abaixo:



$5\sqrt{3}$ cm²

21. Em um triângulo *ABC*, dois lados medem 4 cm e formam um ângulo de 60°. Determine a área dessa região triangular. $4\sqrt{3}$ cm²

22. Qual é a área da região limitada por um paralelogramo cujos lados medem 10 cm e 16 cm, sabendo que formam um ângulo de 30°? 80 cm²

23. As diagonais de um paralelogramo medem 10 cm e 8 cm e formam um ângulo de 60°. Determine a área dessa região limitada pelo paralelogramo. $20\sqrt{3}$ cm²

24. Um piso de cerâmica tem a forma hexagonal regular. O lado do piso mede 8 cm. Qual é a área desse piso? $96\sqrt{3}$ cm²

Fonte: DANTE, 2013, p.149.

FIGURA 87: Exercícios propostos no LD3 abordando os subtipos de tarefas st_{1013}, st_{1014} e st_{1015}

20. $A = \dfrac{4 \cdot 5 \cdot \text{sen } 60°}{2} = \dfrac{10 \cdot \sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

21. $A = \dfrac{4 \cdot 4 \cdot \text{sen } 60°}{2} = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

22. $A = 2 \cdot \dfrac{10 \cdot 16 \cdot \text{sen } 30°}{2} = 160 \cdot \dfrac{1}{2} = 80\ \text{cm}^2$

23. $A = 2 \cdot \left(\dfrac{4 \cdot 5 \cdot \text{sen } 60°}{2} + \dfrac{4 \cdot 5\ \text{sen } 120°}{2} \right) =$

$= 2\left(\dfrac{10 \cdot \sqrt{3}}{2} + \dfrac{10 \cdot \sqrt{3}}{2} \right) = 20\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

24. $A = 6 \cdot \left(\dfrac{8^2 \cdot \text{sen } 60°}{2} \right) = 96\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

Fonte: DANTE, 2013, p.422

Conforme as resoluções apresentadas na figura 87, podemos observar que a técnica utilizada em todas as questões é a aplicação da fórmula para o cálculo de superfícies triangulares.

Ao longo da seção 5.3 deste trabalho, mostramos as análises que fizemos em torno dos subtítulos referentes ao ciclo trigonométrico da 1ª volta. Na próxima seção apresentaremos uma síntese dessas análises, retomando alguns aspectos da TAD que nos direcionaram durante nossa investigação.

5.4 SÍNTESE DAS ANÁLISES PRAXEOLÓGICAS DOS SUBTÍTULOS

Após as análises realizadas em cada subtítulo referente ao capítulo 1 do LD1, identificamos 10 tarefas, 15 tipos de tarefa e 76 subtipos de tarefas, 15 técnicas, 6 tecnologias e 4 teorias.

Tabela 10 : Quantidades de tipos e subtipos de tarefas encontradas no LD1

Tarefas (T_i)	Quantidade de tipos de tarefas	Quantidade de subtipos de tarefas
T_1	1	2
T_2	4	17
T_3	3	20
T_4	1	3
T_5	1	4
T_6	1	3
T_7	1	18
T_8	1	3
T_9	1	1
T_{10}	1	3
TOTAL	**15**	**76**

Fonte: Tabela organizada pela pesquisadora

De acordo com a tabela 10, podemos verificar que o maior número de tipos de tarefas refere-se à tarefa T_2. E em relação aos subtipos de tarefas, os maiores números referem-se às tarefas T_3, T_7 e T_2, nesta ordem.

Reunimos na tabela 11 as informações gerais sobre a frequência dos exemplos sugeridos e dos exercícios propostos por tarefas e na tabela 12 as informações gerais sobre a frequência dos exemplos sugeridos e dos exercícios propostos por tipos de tarefas.

Tabela 11: Frequência dos exemplos sugeridos e dos exercícios propostos por tarefa no LD1

Tarefas (T_i)	Frequência dos exemplos sugeridos	Frequência dos exercícios propostos
T_1	2	3
T_2	13	80
T_3	6	86
T_4	0	8
T_5	0	5
T_6	3	3
T_7	6	20
T_8	6	22
T_9	0	1
T_{10}	3	26
TOTAL	**39**	**254**

Fonte: Tabela organizada pela pesquisadora

Conforme mostra a tabela 11, quanto ao maior número de exercícios propostos por tarefa, temos:

1º lugar - T_3 , com 86 exercícios, 34% do total de exercícios propostos;

2º lugar - $T_{2,}$ com 80 exercícios, 31% do total de exercícios propostos;

3º lugar - $T_{10,}$ com 26 exercícios,10% do total de exercícios propostos.

4º lugar - $T_{8,}$ com 22 exercícios,9% do total de exercícios propostos.

5º lugar - $T_{7,}$ com 20 exercícios,8% do total de exercícios propostos.

As demais tarefas, juntas, representam cerca de 8%.

Os dados quantitativos da tabela 11 nos revelam uma maior ênfase, quanto aos exemplos sugeridos, na tarefa T_{2} - Calcular a medida. Talvez isto tenha ocorrido devido à tarefa T_2 apresentar a maior quantidade de tipos de tarefas (4) em relação às demais. Em relação aos exercícios propostos, observa-se uma quantidade significativa referente às tarefas T_2 - Calcular a medida, e T_3 - Determinar o valor. Este fato nos revela uma sobrecarga de exercícios desses tipos de tarefas em detrimento dos demais.

Comparando as tabelas 18 e 19, observamos que, embora a tarefa T_7 apresente uma quantidade significativa de subtipos de tarefas, a quantidade de exercícios propostos não é tão grande quanto os valores referentes às tarefas T_2 e T_3.

Tabela 12 : Frequência dos exemplos sugeridos e dos exercícios propostos por tipos de tarefas no LD1

Tarefas (T_i)	Tipos de tarefas (t_{ij})	Frequência dos exemplos sugeridos	Frequência dos exercícios propostos
T_1	t_{11}	2	3
T_2	t_{21}	0	1
	t_{22}	7	37
	t_{23}	4	10
	t_{24}	2	32
T_3	t_{31}	3	26
	t_{32}	2	37
	t_{33}	1	23
T_4	t_{41}	0	8
T_5	t_{51}	0	5
T_6	t_{61}	3	3
T_7	t_{71}	6	20
T_8	t_{81}	6	22
T_9	t_{91}	0	1
T_{10}	t_{101}	3	26
TOTAL	**15**	**39**	**254**

Fonte: Tabela organizada pela pesquisadora

De acordo com a tabela 12, quanto ao maior número de exercícios propostos por subtipo de tarefas, temos:

1º lugar - t_{22}, com 37 exercícios, 15% do total de exercícios propostos;

- t_{32}, com 37 exercícios, 15% do total de exercícios propostos;

2º lugar - t_{24}, com 32 exercícios, 13% do total de exercícios propostos;

3º lugar - t_{31}, com 26 exercícios,10% do total de exercícios propostos;

- t_{101}, com 26 exercícios,10% do total de exercícios propostos.

4º lugar - t_{33}, com 23 exercícios,9% do total de exercícios propostos;

5º lugar - t_{81}, com 22 exercícios,9% do total de exercícios propostos;

Quanto aos exemplos sugeridos, o maior número refere-se ao subtipo de tarefa t_{22}..

Com relação à variedade de subtipos de tarefas, constatamos:

1º lugar - $t_{71,}$ com 18 subtipos;

2º lugar - t_{32} e t_{32} com 8 subtipos cada;

3º lugar - $t_{31,}$ com 7 subtipos.

É importante destacarmos que as tarefas T_7 , T_8 e T_9 referem-se a resoluções de equações e/ou inequações. Essas três tarefas, juntas, apresentam 22 subtipos de tarefas, ou seja, cerca de 30% do total de subtipos de tarefas identificadas (76 no total). Esses dados nos revelam que, no LD1, as equações e inequações são abordadas com uma certa ênfase, se compararmos com os outros dois livros considerados nas análises complementares. Esse fato se contrapõe em relação às orientações dos PCNEM quanto ao que se deve priorizar no ensino de trigonometria (BRASIL, 2000, p.44).

Outro aspecto a ser considerado em relação às orientações dos documentos oficiais que direcionam a educação brasileira e ao que verificamos nas nossas análises é o aparecimento de questões contextualizadas, principalmente referentes ao cálculo de distâncias inacessíveis. Encontramos poucos exemplos e exercícios propostos que atendem a essa exigência dos documentos oficiais.

Identificamos saberes que são abordados no LD1 mas que não são em outros livros didáticos. O caso da lei dos senos e dos cossenos, a fórmula para o cálculo da superfície triangular através da trigonometria, por exemplo, que não aparecem no LD2, nos faz refletir:

- não aparecem porque trata-se de saberes que se tornaram obsoletos?
- aparece em outro volume da coleção, referente a outra série do ensino médio?

Esses questionamentos indicam que é preciso ter muita cautela ao adotar um livro didático. Os fatos nos apontam que, para utilizar o livro didático como um aliado no processo de ensino é necessário consultar mais de uma coleção, para tentar minimizar os erros. Além disso, conhecer os textos dos documentos que orientam o processo de educação do seu país pode auxiliar na escolha do que deve ser priorizado no ensino da série que estiver sendo considerada.

As nossas considerações aqui apresentadas foram construídas com base nos critérios estabelecidos por Chevallard (1998) para avaliar uma praxeologia matemática (quadro 1).

Quanto às tarefas (tipos e subtipos), percebemos que grande parte do que é solicitado nos exercícios propostos é reflexo do tipo de exemplo que foi sugerido.

Com relação às técnicas, identificamos que tanto nos exemplos quanto nos exercícios solicitados, são apresentadas (esboçadas e não tão elaboradas) apenas uma maneira de realizar a tarefa em questão. As técnicas apresentadas no LD2 e no LD3, quando se trata do mesmo tipo de tarefa, não apresentam técnicas diferentes das apresentadas no LD1.

Referente ao bloco tecnológico-teórico (tecnologia/teoria), percebemos que são raros os casos em que é explicitada a tecnologia que justifica a técnica. Para sermos mais precisos, só identificamos a tecnologia nos casos em que havia uma demonstração, e mesmo assim, não identificamos clareza em determinadas demonstrações. Quanto às teorias, não identificamos menção sobre elas quando apresentadas as técnicas; e nem mesmo no guia do professor, na parte específica.

A distribuição e a forma como os saberes são apresentados nos livros didáticos muitas vezes revelam a ênfase que se dá ou não a determinados saberes. Ao realizarmos as análises complementares, identificamos a variação entre os três livros didáticos no tocante à organização dos saberes. No caso do LD1, constatamos que há um tratamento exaustivo quanto ao estudo da trigonometria, não apenas em relação às tarefas propostas, mas também na forma como os temas relacionados foram organizados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A nossa investigação consistiu em analisar a transposição didática da trigonometria, especificamente o ciclo trigonométrico da 1ª volta (ângulos compreendidos entre 0º e 360º) a partir das atividades propostas no livro didático da 2ª série do ensino médio, à luz da Teoria Antropológica do Didático.

Reiteramos a relevância de se estudar o tema proposto, uma vez que os estudos envolvendo a TAD têm crescido consideravelmente nessa última década. Isso coloca o nosso estudo no cenário desse campo de pesquisa hoje tão fecundo, sobretudo se considerarmos que não havia sido encontrado algum estudo que propusesse uma análise praxeológica do ensino da trigonometria no campo da matemática do ensino médio.

Nossas análises foram realizadas a partir dos textos e imagens introdutórios, exemplos e das atividades propostas nos três livros didáticos. As recomendações dos documentos oficiais que direcionam a educação brasileira apontam que se deve priorizar no ensino da trigonometria questões contextualizadas, principalmente referentes ao cálculo de distâncias inacessíveis. Foram encontrados poucos exemplos e exercícios propostos que atendem a essa exigência dos documentos oficiais.

As nossas considerações finais enfatizam os seguintes aspectos: *como o saber é abordado nos textos introdutórios, as tarefas (tipos e subtipos) identificadas, as técnicas, as tecnologias e teorias.*

Se retomarmos a noção de transposição didática, tal como proposta na literatura, uma das proposições centrais diz respeito aos acréscimos e supressões que configuram a deformação do saber, no sentido de que lhe é dada uma “nova forma”, sempre levando em consideração a vigilância epistemológica, no sentido de que o saber transposto continue fiel às suas origens.

Ao pesquisarmos sobre o saber Trigonometria na história da matemática, encontramos muitas informações que explicam a origem de determinados conceitos deste saber que são abordados na educação básica. Percebemos a Trigonometria não apenas com seus cálculos e fórmulas, mas com um arcabouço teórico que denota uma preocupação dos pesquisadores com os contextos que, ao longo dos séculos e em diversos locais, contribuíram para o surgimento e crescimento desta área da Matemática. A Trigonometria apresentada nos livros didáticos analisados parece ter sofrido muitas transformações, reduzindo este saber a cálculos e fórmulas puramente mecânicas.

Com relação à forma como foi abordada a trigonometria no ciclo trigonométrico (1ª volta), observamos que foi privilegiado o cálculo, transparecendo não haver preocupação com relação à origem das relações, dos conceitos, e até mesmo da utilidade deste saber; encontramos pouquíssimos exemplos que mostram a aplicação do ciclo trigonométrico em situações reais. Não encontramos acréscimos no que diz respeito às informações encontradas nos livros didáticos; no entanto, identificamos a supressão de alguns aspectos relacionados à trigonometria que consideramos relevante sua abordagem na educação básica. A justificativa da divisão de uma circunferência em 360 partes, por exemplo, foi algo que não encontramos em dois dos livros analisados; e em um dos livros encontramos uma menção sobre essa justificativa, numa discreta seção da página. Outro exemplo foi o caso da lei dos senos e dos cossenos e a fórmula para o cálculo da superfície triangular através da trigonometria, que não aparecem no LD2.

Em outros momentos, percebeu-se uma abordagem mais enfática de aspectos menos relevantes de acordo com os documentos oficiais; podemos citar, por exemplo, as informações contidas na história da matemática sobre a trigonometria que não aparecem em alguns livros didáticos, e quando aparecem é de forma sutil, em pequenas caixas de diálogo no canto da página. Essas informações que nos referimos da história da matemática podem justificar procedimentos utilizados em algumas tarefas.

Outro aspecto observado foi a maneira como algumas informações são tratadas nos textos dos livros didáticos, podendo gerar deturpações quanto ao entendimento, dependendo da interpretação do leitor. A definição de arco de circunferência aparece de forma diferenciada no LD1. Acreditamos que neste caso, talvez possa ter havido falha na vigilância epistemológica.

Quanto às tarefas, dentre as 10 identificadas, observa-se uma quantidade significativa de exercícios solicitados referentes às tarefas T_{2} - *Calcular a medida*, e T_{3} - *Determinar o valor*. Percebemos também uma ênfase maior nas tarefas que se referem a resoluções de equações e/ou inequações.

Este fato nos revela uma sobrecarga de exercícios de certos tipos de tarefas em detrimento dos demais. Considerando a tabela 12 e as reflexões construídas em torno dos dados, verificamos que, no LD1, as equações e inequações são abordadas com certa ênfase, se compararmos com os outros dois livros considerados nas análises complementares. Percebemos, também, que grande parte do tipo de tarefa solicitada nos exercícios propostos é reflexo do tipo de exemplo que foi sugerido no texto do livro didático, sendo muitas vezes uma "cópia" dos exemplos sugeridos.

Considerando as técnicas, observamos que em cada tarefa são utilizadas as mesmas nos três livros analisados. Identificamos que tanto nos exemplos quanto nos exercícios solicitados, apresenta-se uma única técnica para cada subtipo de tarefa, sendo essas técnicas esboçadas, mas não tão elaboradas, em muitos casos.

No que se refere ao bloco tecnológico-teórico (tecnologia/teoria), encontramos 6 tecnologias ($\Theta_{1,}$ $\Theta_{2,}$ $\Theta_{3,}$ $\Theta_{4,}$ $\Theta_{5,}$ Θ_{6}) e 4 teorias: *Teoria da Proporcionalidade, Teoria dos Números, Teoria cartesiana, ou seja, do sistema de coordenadas cartesianas, Teoria dos triângulos.* Percebemos que são raros os casos em que é explicitada a tecnologia que justifica a técnica. Para sermos mais precisos, só identificamos a tecnologia nos casos em que havia uma demonstração, e mesmo assim, não identificamos clareza em determinadas demonstrações. Quanto às teorias, não identificamos menção no livro didático sobre elas quando apresentadas as técnicas; e nem mesmo no guia do professor, na parte específica.

Diante do exposto, concluímos que as supressões e as falhas na vigilância epistemológica, bem como a insuficiência na variedade das técnicas apresentadas, apontam na direção de inadequações em relação à organização do ensino desse saber. Consideramos importante para o ensino da trigonometria os aspectos históricos; acreditamos que é possível pensar, também, outros caminhos para as tarefas e técnicas apresentadas; um olhar "mais generoso" para tarefas que explorem a contextualização dos conceitos podem aproximar mais a teoria e a prática, proporcionando, talvez, um sentido mais significativo da trigonometria para os alunos.

Uma vez que um estudo dessa natureza não consegue dar conta de todos os elementos que são relevantes numa análise praxeológica, destacamos a necessidade de uma investigação mais aprofundada sobre o bloco tecnológico/teórico (tecnologia e teoria) em torno da trigonometria.

O número ainda reduzido de pesquisas que tratam deste saber, particularmente no campo da TAD, nos impulsiona na direção de outros estudos que ainda podem ser realizados. Destacamos aqui a importância do professor neste processo de ensino e de aprendizagem, uma vez que este é o responsável por organizar e direcionar as tarefas pertinentes a cada saber em jogo. Devido a essa responsabilidade que compete ao professor, muito pertinente seria o desenvolvimento de pesquisas referentes à praxeologia matemática em torno das tarefas propostas pelo professor no dia-a-dia da sala de aula, referentes à trigonometria, pois, embora o livro didático seja um instrumento ainda muito importante para o professor, em muitos casos, o principal, sabemos que na sala de aula ele (o professor) utiliza outros meios para trabalhar os saberes com os alunos.

Por fim, esse estudo, muito mais do que selar o final de uma fase, nos remete a uma porta que se abre, para que continuemos a investigar o ensino de matemática; para que continuemos a ampliar as pesquisas nesse campo tão fecundo da Didática da Matemática, particularmente da Teoria Antropológica do Didático, já tão difundida no cenário de pesquisa europeu e ganhando força e fôlego em nosso país, nos últimos anos. Muito já foi feito, mas ainda há muito mais a investigar.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Vladimir Lira Veras Xavier. Tese em co-tutela (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática), UFRPE e L' Université Lumière Lyon 2 (Doutorado em Sciences de l' Éducation), Recife, 2013.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed.UFPR, 2007.

ARAÚJO, A. J. de. O ensino de álgebra no Brasil e na França: **Um estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da Teoria Antropológica do Didático**. Tese de Doutorado, UFPE, 2009.

BARROSO, Juliane Matsubara. **Conexões com a matmática.** v2, 1. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

BELLI, E.T.- .***The Development of Mathematics.***, 2ª edition. McGraw-Hill Book Company, Inc.,New York, U.S.A., 1945.

BESSA DE MENEZES, M. **Investigando o Processo de Transposição Didática interna: o caso dos quadriláteros**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Educação - Mestrado em Educação – UFPE, 2004.

BESSOT, A. **La transposition didactique**. Notas do curso de didática da matemática, 2001.

BOYER, C. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, Lei nº 9394, 20 de dezembro de 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Departamento de Políticas de Ensino Médio. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio** - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Brasília: MEC/Semtec, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ ensino médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

BRITO MENEZES, A.P.A. **Contrato Didático e Transposição Didática: Inter-relações entre os fenômenos didáticos na iniciação à álgebra na 6ª série do Ensino Fundamental**. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Educação – UFPE, 2006.

BROUSSEAU, G. **L'observation des activités, didactiques***.* Revue Francais de Pedagogie , v. 45, p. 130-139, 1978.

CÂMARA DOS SANTOS, M. **A relação ao conhecimento do professor de matemática em situação didática: uma abordagem pela análise de seu discurso**. Anais da XX Reunião da ANPEd . Caxambu, MG. (mimeo), 1997.

CASSOL, Vanessa Jurinic. **Tecnologias no ensino e aprendizagem de trigonometria: uma meta – análise de dissertações e teses brasileiras nos últimos cinco anos**. Porto Alegre, 2012. 84 p. Dissertação de Mestrado Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática – Faculdade de Física, PUCRS, 2012.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné.** Grenable, La Pensée Sauvage, 1991.

____ ______. Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In : MAURY, S. & CAILLOT, M (éds), **Rapport au savoir et didactiques**, Éditions Fabert, Paris, 2003, p. 81-104.

__________. Concepts fondamentaux de la didactique: perspective apportées par une approche anthropologique. In : **Recherches en didactique de mathématiques**, 1992, vol 12, p. 73-112.

__________. Familière et problématique, la figure du professeur. In : **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 1997, p. 17-54.

_________. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. In : **L'UNIVERSITE D'ETE**, 1998, p.91-118. Actes de l'Université d'été La Rochelle, IREM, Clermont-Ferrand, France, 1998.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações.** v.2, 2. ed., São Paulo: Ática, 2013.

GIL, Antonio Carlos. Como elaborar projetos de pesquisa. 4ª. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

HENRY, M. **Didactique des Mathématiques: sensibilizations à la didactique en vue de la formation initiale dês ensignants de mathématiques.** Laboratoire de Mathématiques – irem, Besançon, 1991.

REVISTA BOLEMA, Rio Claro (SP), v. 23, nº 36, p. 597 a 624, agosto 2010.

REVISTA BOLEMA, Rio Claro (SP), v. 23, nº 37, p. 887 a 904, dezembro 2010.

REVISTA BOLEMA, Rio claro (SP), v. 24, nº 38, p. 43 a 73, abril 2011.

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E PESQUISA, São Paulo, v.12, n.3, p.548 e 577, 2010.

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA – RS, n. 10, v. 1, p.65-74, 2009.

SMITH, D.E. **History of Mathematics.** vol. I, Dover Publications, INC. New York, 1958.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemática:** v2. 2.ed. – São Paulo: FTD, 2013.

VERRET, M. **Le Temps d'Etude**. Paris: Librairie Honoré Champion, 1975.

ANEXOS

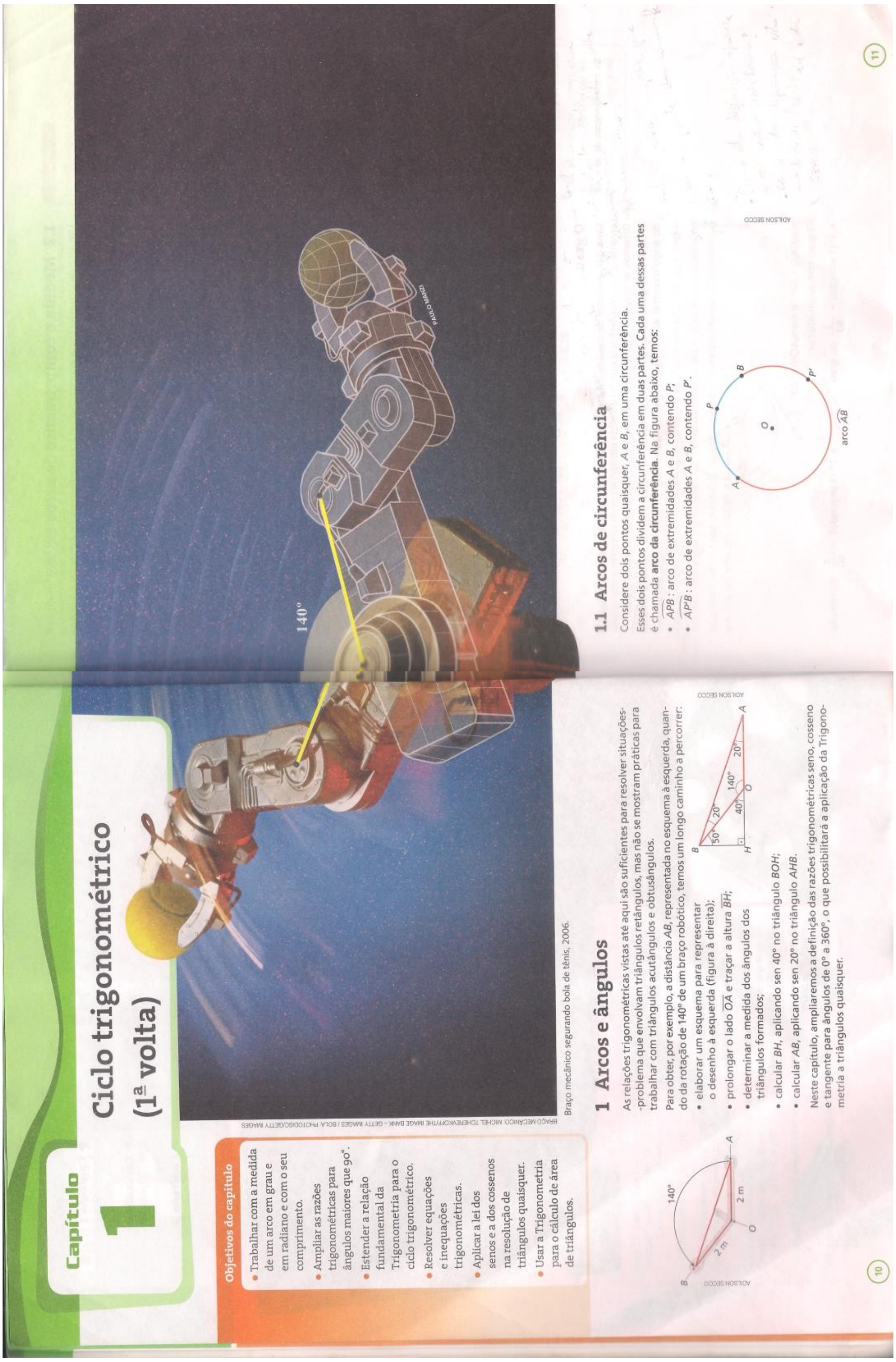
ANEXO A - Sumário do LD1

Sumário

ANEXO B – Organização das unidades do LD1

ANEXO C – Página de abertura da unidade 1 do LD1- Trigonometria

ANEXO D – Página de abertura do capítulo 1 do LD1 – Ciclo Trigonométrico



Capítulo 1

Ciclo trigonométrico (1ª volta)

Objetivos do capítulo

- Trabalhar com a medida de um arco em grau e em radiano e com o seu comprimento.
- Ampliar as razões trigonométricas para ângulos maiores que 90°.
- Estender a relação fundamental da Trigonometria para o ciclo trigonométrico.
- Resolver equações e inequações trigonométricas.
- Aplicar a lei dos senos e a dos cossenos na resolução de triângulos quaisquer.
- Usar a Trigonometria para o cálculo de área de triângulos.

Braço mecânico segurando bola de tênis, 2006.

1 Arcos e ângulos

As relações trigonométricas vistas até aqui são suficientes para resolver situações-problema que envolvam triângulos retângulos, mas não se mostram práticas para trabalhar com triângulos acutângulos e obtusângulos.

Para obter, por exemplo, a distância *AB*, representada no esquema à esquerda, quando da rotação de 140° de um braço robótico, temos um longo caminho a percorrer:

- elaborar um esquema para representar o desenho à esquerda (figura à direita);
- prolongar o lado $\overline{OA}$ e traçar a altura $\overline{BH}$;
- determinar a medida dos ângulos dos triângulos formados;
- calcular *BH*, aplicando sen 40° no triângulo *BOH*;
- calcular *AB*, aplicando sen 20° no triângulo *AHB*.

Neste capítulo, ampliaremos a definição das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente para ângulos de 0° a 360°, o que possibilitará a aplicação da Trigonometria a triângulos quaisquer.

1.1 Arcos de circunferência

Considere dois pontos quaisquer, *A* e *B*, em uma circunferência.

Esses dois pontos dividem a circunferência em duas partes. Cada uma dessas partes é chamada **arco da circunferência**. Na figura abaixo, temos:

- $\widehat{APB}$: arco de extremidades *A* e *B*, contendo *P*;
- $\widehat{AP'B}$: arco de extremidades *A* e *B*, contendo *P'*.

arco $\widehat{AB}$

10 11

ANEXO E – Tabela trigonométrica exibida no LD1

Tabela de razões trigonométricas

Uma vez que, em problemas trigonométricos, empregamos com frequência as razões seno, cosseno e tangente, é conveniente usar uma tabela trigonométrica para a consulta dessas razões. Assim, repetimos aqui a tabela vista no volume **1**.

Note que, para medidas x entre 0° e 90°, um aumento no ângulo de medida x implica aumento do sen x e diminuição do cos x.

Tabela de razões trigonométricas

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente	Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9989	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	4,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8393	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,2900
45°	0,7071	0,7071	1,0000				

ANEXO F – Tabela trigonométrica exibida no LD3

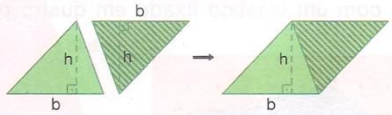
Tabela de razões trigonométricas

Ângulo	sen	cos	tan	Ângulo	sen	cos	tan
1°	0,017	1,000	0,017	46°	0,719	0,695	1,036
2°	0,035	0,999	0,035	47°	0,731	0,682	1,072
3°	0,052	0,999	0,052	48°	0,743	0,669	1,111
4°	0,070	0,998	0,070	49°	0,755	0,656	1,150
5°	0,087	0,996	0,087	50°	0,766	0,643	1,192
6°	0,105	0,995	0,105	51°	0,777	0,629	1,235
7°	0,122	0,993	0,123	52°	0,788	0,616	1,280
8°	0,139	0,990	0,141	53°	0,799	0,602	1,327
9°	0,156	0,988	0,158	54°	0,809	0,588	1,376
10°	0,174	0,985	0,176	55°	0,819	0,574	1,428
11°	0,191	0,982	0,194	56°	0,829	0,559	1,483
12°	0,208	0,978	0,213	57°	0,839	0,545	1,540
13°	0,225	0,974	0,231	58°	0,848	0,530	1,600
14°	0,242	0,970	0,249	59°	0,857	0,515	1,664
15°	0,259	0,966	0,268	60°	0,866	0,500	1,732
16°	0,276	0,961	0,287	61°	0,875	0,485	1,804
17°	0,292	0,956	0,306	62°	0,883	0,469	1,881
18°	0,309	0,951	0,325	63°	0,891	0,454	1,963
19°	0,326	0,946	0,344	64°	0,899	0,438	2,050
20°	0,342	0,940	0,364	65°	0,906	0,423	2,145
21°	0,358	0,934	0,384	66°	0,914	0,407	2,246
22°	0,375	0,927	0,404	67°	0,921	0,391	2,356
23°	0,391	0,921	0,424	68°	0,927	0,375	2,475
24°	0,407	0,914	0,445	69°	0,934	0,358	2,605
25°	0,423	0,906	0,466	70°	0,940	0,342	2,747
26°	0,438	0,899	0,488	71°	0,946	0,326	2,904
27°	0,454	0,891	0,510	72°	0,951	0,309	3,078
28°	0,469	0,883	0,532	73°	0,956	0,292	3,271
29°	0,485	0,875	0,554	74°	0,961	0,276	3,487
30°	0,500	0,866	0,577	75°	0,966	0,259	3,732
31°	0,515	0,857	0,601	76°	0,970	0,242	4,011
32°	0,530	0,848	0,625	77°	0,974	0,225	4,332
33°	0,545	0,839	0,649	78°	0,978	0,208	4,705
34°	0,559	0,829	0,675	79°	0,982	0,191	5,145
35°	0,574	0,819	0,700	80°	0,985	0,174	5,671
36°	0,588	0,809	0,727	81°	0,988	0,156	6,314
37°	0,602	0,799	0,754	82°	0,990	0,139	7,115
38°	0,616	0,788	0,781	83°	0,993	0,122	8,144
39°	0,629	0,777	0,810	84°	0,995	0,105	9,514
40°	0,643	0,766	0,839	85°	0,996	0,087	11,430
41°	0,656	0,755	0,869	86°	0,998	0,070	14,301
42°	0,669	0,743	0,900	87°	0,999	0,052	19,081
43°	0,682	0,731	0,933	88°	0,999	0,035	28,636
44°	0,695	0,719	0,966	89°	1,000	0,017	57,290
45°	0,707	0,707	1,000				

ANEXO G – Fórmulas para o cálculo da área de triângulos exibidas no LD2

Área do triângulo

No triângulo, *b* corresponde à medida da base, e *h*, à altura. Com outro triângulo congruente a esse, podemos compor um paralelogramo cuja altura é *h*, e a medida da base é *b*.



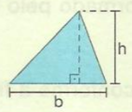
A área do paralelogramo pode ser calculada da seguinte maneira: $A_p = b \cdot h$.

Como a área do triângulo corresponde à metade da área do paralelogramo, temos:

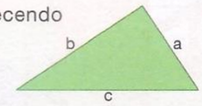
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

De maneira geral, podemos calcular a área de um triângulo multiplicando a medida da base pela medida da altura e dividindo o resultado por 2.

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$



Também podemos calcular a área de um triângulo conhecendo apenas as medidas de seus três lados.

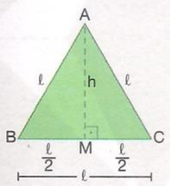


No triângulo, *a*, *b* e *c* correspondem às medidas dos lados. Diga aos alunos que o semiperímetro corresponde à metade da soma das medidas de todos os lados de um polígono.

Utilizando o semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$, podemos demonstrar que a área desse triângulo pode ser calculada pela seguinte fórmula: $\boxed{A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.

No caso do triângulo equilátero, podemos ainda calcular a área por meio de outra fórmula.

No triângulo equilátero de lado ℓ, traçamos a altura $\overline{AM}$.



Ilustrações: Acervo da editora

Em um triângulo equilátero, a altura também corresponde à mediatriz e à bissetriz.

Lembre aos alunos o que é mediatriz e bissetriz.

Note que o ΔAMC é retângulo. Utilizando o Teorema de Pitágoras, determinamos a altura desse triângulo em função da medida ℓ do lado.

$$\ell^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Substituindo $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ em $A = \frac{b \cdot h}{2}$, temos:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} = \ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

De maneira geral, podemos calcular a altura *h* e a área *A* de um triângulo equilátero em função da medida ℓ do lado utilizando, respectivamente, as fórmulas $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ e $A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$.

Triângulo é todo polígono que possui três lados e três ângulos internos. Aquele em que um dos ângulos internos é reto, chamamos de **triângulo retângulo**; aquele que possui todos os lados com medidas iguais chamamos de **triângulo equilátero**.

Fórmula de Herão

A fórmula $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ é conhecida como fórmula de Herão, em homenagem ao matemático Herão de Alexandria, que viveu por volta da segunda metade do século I d.C. Em geral, seus trabalhos tratam de aplicações práticas da Matemática, dando grandes contribuições à Agrimensura e à Engenharia. Em sua obra *A métrica*, dividida em três livros, Herão propõe vários trabalhos geométricos. No livro I, por exemplo, são tratadas as áreas de várias figuras planas e encontra-se a dedução da fórmula apresentada.

4 UNIDADE / Geometria

ANEXO H – Fórmulas para o cálculo da área de triângulos exibidas no LD3

Área da região triangular por meio da Trigonometria

Este caso se aplica quando são conhecidos dois lados do triângulo e o ângulo formado por eles.

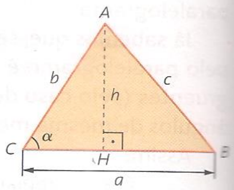
Observe que LAL é um caso de congruência de triângulos, o que significa que um triângulo fica perfeitamente determinado quando conhecemos dois de seus lados e o ângulo formado por eles.

Consideremos o triângulo ABC representado na figura abaixo.

Suponhamos que sejam conhecidas as medidas dos lados AC e CB e o ângulo formado por eles, $A\hat{C}B$. Vamos indicar essas medidas assim: $AC = b$, $CB = a$ e $A\hat{C}B = \alpha$ para facilitar a demonstração.

Seja h a altura relativa à base $\overline{BC}$.

Sabemos que a área desse triângulo é dada por $S = \frac{ah}{2}$.



Se nós conhecemos α, podemos escrever $\text{sen}\,\alpha = \frac{h}{b}$, já que ACH é um triângulo retângulo.

Agora, podemos encontrar a altura em função de α e b:

$$h = b \cdot \text{sen}\,\alpha$$

Assim, a área será dada por:

$$S = \frac{ab \cdot \text{sen}\,\alpha}{2}$$

Para refletir
Se no triângulo retângulo podemos dizer que a área vale a metade do produto das medidas dos catetos, o que se pode concluir quanto ao valor do seno de 90°?
sen 90° = 1

Mas o triângulo possui três alturas, cada uma dependendo do lado que considerarmos como base. Então, suponha que sejam conhecidos outros dois lados, AB e BC, por exemplo, e o ângulo formado por eles, $A\hat{B}C$, e verifique que a igualdade acima também se verifica para eles.

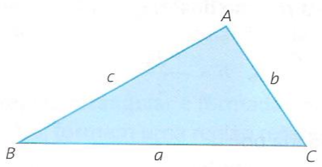
Isso nos permite afirmar que:

A área S de qualquer região triangular é igual à metade do produto das medidas de dois dos seus lados multiplicada pelo seno do ângulo formado por eles.

Fique atento!
Esta conclusão se estende aos triângulos obtusângulos, ou seja, aqueles que têm um dos ângulos maior que 90°.

Área da região triangular sendo conhecidos os três lados

Conhecidos os três lados (a, b e c) de um triângulo, a área da região triangular pode ser calculada pela fórmula de Heron.



Para refletir
O que significa semiperímetro de um polígono?
A metade da soma das medidas dos lados.

Sendo o semiperímetro $p = \frac{a + b + c}{2}$, é possível demonstrar que:

$$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \quad \text{fórmula de Heron}$$