UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

Alceu Domingues Alves

INTRODUZINDO A GEOMETRIA FRACTAL NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM BASEADA NAS FORMAS DOS OBJETOS CONSTRUÍDOS PELA NATUREZA.

RECIFE
2008

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

Alceu Domingues Alves

INTRODUZINDO A GEOMETRIA FRACTAL NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM BASEADA NAS FORMAS DOS OBJETOS CONSTRUÍDOS PELA NATUREZA.

RECIFE
2008

Alceu Domingues Alves

INTRODUZINDO A GEOMETRIA FRACTAL NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM BASEADA NAS FORMAS DOS OBJETOS CONSTRUÍDOS PELA NATUREZA.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências (PPGEC), Nível de Mestrado, da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Romildo Albuquerque Nogueira

Co-orientadora: Prof.Dra Josinalva Estacio Menezes

RECIFE

Agosto / 2008

FICHA CATALOGRÁFICA

A474i Alves, Alceu Domingues
Introduzindo a geometria fractal no ensino médio : uma abordagem baseada nas formas dos objetos construídos pela natureza / Alceu Domingues Alves. -- 2008.
150 f.

Orientador : Romildo Albuquerque Nogueira
Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências. Depar – tamento de Educação) -- Universidade Federal Rural de Pernambuco.
Inclui bibliografia.

CDD 510. 24

1. Matemática aplicada
2. Geometria Euclidiana
3. Geometria fractal
4. Ciclo da experiência de Kelly
5. Software
6. Geometria dinâmica
I. Nogueira, Romildo Albuquerque
II. Título

Alceu Domingues Alves

INTRODUZINDO A GEOMETRIA FRACTAL NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM BASEADA NAS FORMAS DOS OBJETOS CONSTRUÍDOS PELA NATUREZA.

Aprovada em 29 de Agosto de 2008.

Banca Examinadora

Presidente: ____

Prof. Dr. Romildo Albuquerque Nogueira (UFRPE)

1º: Examinador____

Prof. Dra. Josinalva Estacio Menezes (UFRPE)

2º: Examinador ____

Prof. Dr. George Chaves Jimenez (UFRPE)

3º: Examinador ____

Prof. Dr. Catão Temístocles de Freitas Barbosa (UFPE)

DEDICATÓRIA

Dedico esta pesquisa, a uma das melhores pessoas que tive o prazer de conhecer há exatos, nove anos e alguns meses, neste mundo tão cinza. “Pessoa fraterna, dádiva de Deus, passou a colorir meu mundo, deu som, formas, arrasou geral”, sempre me deixando feliz com suas travessuras. Será menina, serás adolescente e será mulher, mas sempre estará aos meus olhos como uma doce criança, pois o amor que envolve esta criatura é o mesmo que habita em meu ser: Mávia Caroline de Lima Alves, minha pequena e ao mesmo tempo grande filha. Graças a ti, Deus, por ela existir e por me presenteares com este ser maravilhoso.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, onipotente, onisciente e onipresente, que permitiu que eu estivesse aqui hoje e por me dar toda a força necessária para que este trabalho fosse realizado e meu curso fosse concluído. Agradeço ao meu saudoso pai Francisco Moizeis Alves, pelo grande exemplo enquanto esteve junto a nós. A minha mãe Mabel Domingues Alves, mulher guerreira, venceu todos os obstáculos que a vida sempre insistiu em colocar. A Silvia Catarina, pela paciência e amor; aos Professores do programa, perfeitos na troca de saberes. Ao Casal Shirley e João, pessoas inesquecíveis num importante momento de minha vida;

A minha irmã Mabel, pelos cuidados com a minha filha, nas minhas ausências devido à pesquisa;

As sobrinhas Gagau, Lili e Patricinha por participarem efetivamente neste trabalho de pesquisa;

Aos colegas de graduação, Josa, Galego, Chico, Marcelo, Rogério;

Ao colega de trabalho: Wagner Santos, exemplo de seriedade e responsabilidade;

Aos colegas de curso, Alba, Dilson, Décio, Maria do Carmo, Ricardo Braz, Neves, Kilma, Josilvado e aos demais colegas pelo harmonioso convívio.

AGRADECIMENTOS ESPECIAIS

Agradeço ao Professor e Orientador Romildo Albuquerque Nogueira, homem simples, homem sábio, por várias vezes paciente com meus atrasos, verdadeiro na hora de dar bronca, mas ao mesmo tempo, fraterno no reconhecimento do esforço dispendido por mim, obrigado, muito obrigado: **AMIGO**.

Agradeço a outro ser maravilhoso que é a querida e impressionante Professora "**Jô**", meu guia nos primeiros passos na via do conhecimento, sou fã incondicional, sempre dividindo o saber, sem escolher a quem. Obrigado à senhora também, professora, por tudo que me proporcionou. Deus a abençoe sempre.

Ao Professores Catão Temístocles de Freitas Barbosa e ***George Chaves*** Jimenez, pela disponibilidade e compreensão neste momento importante de mais uma etapa de minha vida.

Eu fico com a pureza das respostas das crianças:

É a vida! É bonita e é bonita!

Viver e não ter a vergonha de ser feliz

Cantar, e cantar, e cantar

A beleza de ser um eterno aprendiz.

Eu sei que a vida devia ser bem melhor e será

Mas isso não impede que eu repita:

É bonita, é bonita e é bonita!

(Gonzaguinha)

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **14**

1.1 Questão de pesquisa 14

1.2 Objetivos 14

1.2.1 Objetivo geral 14

1.2.2 Objetivos específicos 14

1- **FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA** **17**

1.1 Pequeno histórico da geometria plana 17

1.2 Um breve panorama histórico da Geometria Fractal 29

1.3 Uma revisão sobre a geometria dos fractais.

1.3.1 Algumas outras estruturas fractais 34 98

1.3.1. 1 O Triângulo de Sierpinski 34

1.3.1.2 O Conjunto de Cantor 35

1.3.1.3 Fractais da Natureza 36

1.3.2 Classes fractais 37

1.3.3 Calculando a dimensão fractal: o método de box-counting 39

1.4 A Teoria dos Construtos Pessoais de George Kelly 39

1.4.1 Uma breve biografia de George Kelly. 39

1.4.2 A Teoria dos Construtos Pessoais 42

1.4.3 Corolário da dicotomia 46

1.4.4 Corolário da faixa	46
1.4.5 Corolário da modulação	46
1.4.6 Corolário da experiência	47
1.4.7 Ciclo da Experiência de Kelly	48
1.4.8 O Teste da Matriz de Repertórios (Rep-Teste)	49
1.5 Cabri-Géomètre	51
1.5.1 Características do Cabri-Géomètre	52
1.5.2 Conhecendo O Cabri Géomètre II	53
1.5.2.1 Barras de ferramentas	53
1.5.3 Fundamentos de geometria	58
2 METODOLOGIA	**64**
2.1 Universo e amostra	64
2.2 Intervenção didática	65
2.2.1 Primeira etapa	65
2.2.1.1 Etapa A	66
2.2.1.2 Etapa B	72
2.2.1.2.1 Antecipação	72
2.2.1.2.2 Investimento, encontro e confirmação	72
2.2.1.2.3 Revisão construtiva	73
2.3 Experimentos didáticos	75
2.3.1 Atividade 1 - O que é Geometria Fractal ?	75
2.3.2 Atividade 2 - Conjunto de Cantor	77
2.3.3 Atividade 3- Triângulo de Sierpinski I	81
2.3.4 Atividade 4 – Dimensão fractal através do método Box-Counting.	82

2.3.5 ATIVIDADE 5 – Observação e cálculo da dimensão fractal de um galho de arvore utilizando o método Box-counting e softwares de geometria dinâmica. 84

Atividade - Esponja de Menger 85

3. ANÁLISE DOS DADOS 90

3.1 Análises dos dados coletados 90

3.1.1 Registros dos consensos 90

3.1.2 Análise dos pré e pós-testes e das matrizes de repertório 91

3.2 Categorização dos dados das matrizes de repertório 94

4. RESULTADOS DISCUSSÕES 98

4.1 Análises dos pré e pós-testes. 98

4.2 Análises das respostas dos alunos 98

4.3 Análise das matrizes de repertório 103

4.3.1 Análise do aluno A 103

4.3.2 Análise do aluno B 104

4.2.3 Análise do aluno C 106

4.3 Considerações finais 107

5. CONCLUSÃO 110

REFERÊNCIAS 114

ANEXOS 117

RESUMO

O presente trabalho propõe introduzir o conceito e propriedades da Geometria Fractal no Ensino Médio, com enfoque numa abordagem baseada nas descrições das formas dos objetos construídos pelo homem e pela natureza. A Geometria Fractal é um tema que tem sido explorado de maneira bastante superficial nas séries finais do ensino médio, apesar da sua extrema utilidade na descrição das formas construídas pela natureza. O principal objetivo do trabalho é investigar como os alunos concebem as formas geométricas dos objetos e processos da natureza. A proposta metodológica para a realização da pesquisa consistiu em utilizar objetos construídos pela natureza e pelo homem e levar os alunos a descreverem suas formas a partir da geometria euclidiana (estudada previamente) e da geometria fractal (discutida numa oficina realizada durante a pesquisa). Softwares educacionais de geometria dinâmica foram usados para trabalhar com os alunos as duas geometrias. A amostra trabalhada foi constituída de alunos de uma turma de terceiro ano do ensino médio de uma escola pública da rede oficial de ensino do Estado de Pernambuco. A teoria dos construtos pessoais de George Kelly foi usada para analisar os dados.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana, Geometria Fractal, Construtos pessoais, Ciclo da experiência de Kelly, Software de Geometria Dinâmica.

ABSTRACT

The present work of research proposes to teach the fractal geometry in high school classroom, with approach in the forms the objects natural and build by the man. Despite of the utility of the fractal geometry for description of the natural objects, this geometry is a subject that has been taught poor in the last series of the high school. The objective of the work is: i. to identify as the students conceive the geometric forms of objects and processes of the nature, without previous knowledge of fractal geometry; the procedure methodological is to carry the students for to apply the Euclidian and fractal in the description of the different shape natural an build by the man. educational Software of dynamic geometry will be used to work with the Euclidean and fractal geometry. The object used will be some students the last year of the high school from a public school of the state of Pernambuco. The theory of the Kelly personal constructs were be used in the analysis of the data.

Word-key: Euclidean Geometry, Fractal Geometry, Personal Constructs, Kelly experience Circle, Software of Dynamic Geometry.

INTRODUÇÃO

INTRODUÇÃO

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio - PCNEM (BRASIL, 2002), que têm como base a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei n^{o}s 9.394 / 96), propõem que seja dado significado para os conteúdos ministrados no ensino médio. Nos documentos dos PCNEM são sugeridos que os educandos desenvolvam competências e habilidades para sua a realização como profissional e cidadão. Os PCNEM estruturam o currículo nas seguintes áreas de conhecimento: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e suas Tecnologias. As várias disciplinas são ministradas dentro dessa nova perspectiva de áreas de conhecimento.

As competências a serem desenvolvidas nos alunos, em relação à matemática, sugeridas pelos PCNEM são: capacidade de abstração; desenvolvimento do pensamento sistêmico; criatividade; capacidade de pensar múltiplas soluções para um problema; ou seja, o desenvolvimento do pensamento crítico; capacidade de trabalhar em equipe; disposição para aceitar críticas; disposição para enfrentar as incertezas no conhecimento e na sua própria vida; saber comunicar-se, capacidade de buscar conhecimento (BRASIL, 2002).

Educar com essas propostas dos PCNEM exige do educador, além do domínio de conteúdos específicos, a capacidade para criar no dia-a-dia da sala de aula situações concretas que permitam ao educando aplicar seus conhecimentos. Neste contexto, o ensino de matemática é um grande desafio para o profissional que se propõe a trabalhar nessa perspectiva de desenvolvimento de competências e habilidades nos seus educandos. Diante disso, impõe uma seguinte questão: Como contribuir para desenvolver competências e habilidades nos discentes para aplicar a geometria na interpretação das formas dos objetos do seu cotidiano?

A análise das formas construídas pelo homem e pela natureza mostra que as duas usam regras geométricas distintas na construção dos objetos. Enquanto o homem utiliza a geometria euclidiana para construir suas estruturas, tais como prédios, carros, aviões etc., a natureza busca novas regras geométricas para construir as formas dos objetos e processos naturais, a exemplo dos corais, as árvores, os processos vasculares nos diversos organismos.

Neste sentido este trabalho propõe introduzir no ensino médio o ensino de uma nova geometria (a fractal) que permita descrever as formas dos objetos construídos pelo homem e pela natureza.

1. QUESTÃO DE PESQUISA

A partir das considerações feitas, emerge a seguinte questão: "Como trabalhar com os alunos do ensino médio uma nova geometria (a geometria fractal) que permita descrever com mais precisão os objetos e processos que ocorrem na natureza?"

1.2. Objetivos

Na busca de discutir a questão de pesquisa apresentada, este trabalho estabelece os seguintes objetivos:

1.2.1 Objetivo Geral:

Analisar estratégias didáticas para ensinar a geometria fractal, no nível médio, a partir da observação dos fenômenos da natureza.

1.2.2 Objetivos específicos:

Investigar como os alunos compreendem as formas geométricas dos objetos e processos da natureza;

Identificar como os alunos estabelecem diferenças nas formas que a natureza e o homem constroem seus objetos;

Analisar os sistemas de construtos dos alunos sobre a geometria fractal e suas articulações com a geometria euclidiana.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.

1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.

Este capítulo tem o objetivo de abordar os seguintes temas: breve histórico da geometria euclidiana; Os fundamentos da geometria dos fractais; as bases da teoria dos construtos pessoais de George Kelly, em especial, a matriz de repertório (Rep-Teste) e descrever a utilização do software Cabri-Géomètre**.**

1.1 Pequeno Histórico da Geometria Plana

A história da geometria, como a de muitas outras matérias em desenvolvimento e mudança, compõe-se de dois fios entrelaçados. Um deles narra o desenvolvimento de seu conteúdo e o outro sua natureza mutável. Ninguém ignora que a geometria deve ter se iniciado provavelmente em tempos muito remotos na Antigüidade, a partir de origens muito modestas, depois cresceu gradualmente até alcançar a dimensão enorme que tem hoje. Por outro lado, não são muitas as pessoas que estão cientes de que a natureza, ou caráter inerente, da matéria teve conotações diferentes em períodos diferentes de seu desenvolvimento. Nesta breve história da geometria convém nos empenharmos em dar a devida atenção a esses dois fios tão intrigantes.

As primeiras considerações que o homem fez a respeito da geometria são, inquestionavelmente, muito antigas. Parecem ter se originado de simples observações provenientes da capacidade humana de reconhecer configurações físicas, comparar formas e tamanhos.

Inúmeras circunstâncias da vida, até mesmo do homem mais primitivo, levavam a um certo montante de descobertas geométricas subconscientes.

A noção de distância foi, provavelmente, um dos primeiros conceitos geométricos a serem desenvolvidos. A necessidade de delimitar a terra levou à noção de figuras geométricas simples, tais como retângulos, quadrados e triângulos. Outros conceitos geométricos simples, como as noções de vertical, paralela e perpendicular, teriam sido sugeridos pela construção de muros e moradias.

Muitas observações do seu cotidiano devem ter levado o homem primitivo à concepção de curvas, superfícies e sólidos. Os exemplos de círculo eram numerosos — entre outros o contorno do sol e da lua, o arco-íris, as sementes de muitas flores e o corte transversal de um tronco de árvore.

Uma pedra arremessada descreve uma parábola; uma corda não esticada e pendurada pelas pontas forma uma catenária; uma corda enrolada forma uma espiral; os círculos de crescimento do tronco de uma árvore, os círculos concêntricos provocados na superfície de um lago por uma pedra nele arremessada e figuras sobre certas conchas sugerem a idéia de famílias de curvas. Muitas frutas e seixos são esféricos e bolhas de água são hemisféricas; alguns ovos de pássaros são aproximadamente elipsóides de revolução; um anel é um toro; troncos de árvores correspondem a cilindros circulares; configurações cônicas são freqüentemente encontradas na natureza. Oleiros primitivos construíam muitas superfícies e sólidos de revolução. Corpos de homens e animais, a maioria das folhas e flores e certas conchas e cristais ilustram a idéia de simetria.

A idéia de volume surge imediatamente ao se considerarem recipientes para conter líquidos e outras mercadorias.

Exemplos como estes podem se multiplicar quase que indefinidamente. Configurações físicas que têm uma característica ordenada, em contraste com as formas casuais e desorganizada da maioria dos corpos, necessariamente chamam a atenção de um espírito que reflete e alguns conceitos geométricos elementares são assim trazidos à luz. Essa geometria deveria, por falta de melhor denominação, ser chamada "geometria subconsciente". Esta geometria subconsciente era empregada pelo homem primitivo para fazer ornamentos decorativos e desenhos, e provavelmente é correto dizer-se que a arte primitiva preparou em grande escala o caminho para o desenvolvimento geométrico posterior. A evolução da geometria subconsciente nas crianças pequenas é bem conhecida e fácil de ser observada.

No início parece que o homem só considerava problemas geométricos concretos, que se apresentavam individualmente e entre os quais não era observada nenhuma ligação. Mais tarde, a inteligência humana tornou-se capaz de, a partir de certo número de observações relativas a formas, tamanhos e relações espaciais de objetos físicos específicos, extrair certas propriedades gerais e relações que incluíam as observações anteriores como casos particulares. Isto acarretou a vantagem de se ordenarem problemas geométricos práticos em conjuntos tais que os problemas de um conjunto podiam ser resolvidos pelo mesmo procedimento geral. Chegou-se assim à noção de lei ou regra geométrica. Por exemplo, a comparação dos comprimentos de caminhos circulares e de seus diâmetros levaria, num certo período de tempo, à lei geométrica de que a razão entre a circunferência e o diâmetro é constante.

Esse nível mais elevado do desenvolvimento da natureza da geometria pode ser chamado “geometria científica” uma vez que induz, ensaio e erro, e procedimentos empíricos eram os instrumentos de descoberta. A geometria transformou-se num conjunto de receitas práticas e resultados de laboratório, alguns corretos e alguns apenas aproximados, referentes a áreas, volumes e relações entre várias figuras sugeridas por objetos físicos.

Os dados obtidos nesta pesquisa não permitiram estimar quantos séculos se passaram até que o homem fosse capaz de elevar a geometria ao status de ciência. Mas escritores que se ocuparam desta questão unanimemente concordam em que o vale do rio Nilo, no Egito antigo, foi o local onde a geometria subconsciente transformou-se em científica. O famoso historiador Heródoto, do século V a.C., defendeu essa tese assim:

> Eles diziam que este rei [Sesóstris] dividia a terra entre os egípcios de modo a dar a cada um deles um lote quadrado de igual tamanho e impondo-lhes o pagamento de um tributo anual. Mas qualquer homem despojado pelo rio de uma pane de sua terra teria de ir a Sesóstris e notificar-lhe o ocorrido. Ele então mandava homens seus observarem e medirem quanto a terra se torna menor, para que o proprietário pudesse pagar sobre o que restam, proporcionalmente ao tributo total. Dessa maneira, parece-me que a geometria teve origem, sendo mais tarde levada até a Hélade.

Assim, o tradicional relato localiza na agrimensura prática do antigo Egito os primórdios da geometria como ciência; de fato, a palavra "*geometria*" significa "medida da terra". Embora não haja a ter certeza de sua origem, parece seguro assumir que a geometria científica brotou de necessidades práticas, surgidas vários milênios antes de nossa era, em certas áreas do Oriente Antigo, como uma ciência para assistir atividades ligadas à agricultura e à engenharia.

Há indícios históricos de que isso ocorreu não só ao longo do rio NiIo no Egito, mas também nas bacias de outros grandes rios, como o Tigre e o Eufrates na Mesopotâmia, o Indo e o Ganges na região centro-sul da Ásia e o Hwang Ho e Yangtzé na Ásia oriental. As bacias desses rios foram berços de formas avançadas de sociedade, conhecidas por sua habilidade em engenharia na drenagem de pântanos, irrigação, obras de defesa contra inundações e construção de grandes edifícios e estruturas. Tais projetos requeriam muita geometria prática.

Tanto quanto é possível recuar ao passado, ainda se encontra presente um corpo considerável de geometria científica. Ao que parece, a geometria se manteve nesse modelo até o grande período grego da antigüidade.

Há muito a ser dito, no plano elementar de instrução, como introdução à geometria empírica ou experimental; muitos professores acham conveniente preceder um primeiro curso de geometria demonstrativa de algumas semanas de geometria experimental. Esse trabalho leva o aluno a conhecer muitos conceitos de geometria e pode ser planejado de modo a enfatizar tanto os aspectos positivos como os defeitos da geometria empírica. Esse procedimento segue a tese de que, em geral, o programa de ensino deve ser paralelo ao desenvolvimento histórico.

Os mais antigos registros da atividade do homem no campo da geometria são algumas tábulas de argila cozida desenterradas na Mesopotâmia e que se acredita datarem, pelo menos em parte, do tempo dos Sumérios, por volta do ano 3000 a.C. Há outros suprimentos generosos de tábulas cuneiformes babilônicas provindas de períodos posteriores, como a época do rei Hammurabi, na primeira dinastia babilônica, a época do rei Nabucodonosor II, no império neobabilônico e as eras persa e selêucida, que se seguiram. A partir dessas tábulas vemos que a geometria babilônica antiga estava intimamente relacionada com a mensuração prática.

Numerosos exemplos concretos mostram que os babilônios do período 2000-1600 a.C. conheciam as regras gerais para o cálculo de áreas de retângulos, áreas de triângulos retângulos e isósceles (e talvez de um triângulo qualquer), a área do trapézio retângulo, o volume do paralelepípedo retângulo e, mais geralmente, o volume do prisma reto com base trapezoidal. A circunferência de um círculo era tomada como sendo o triplo do diâmetro e a área do circulo como um doze avos da área do quadrado construído sobre um lado de comprimento igual à circunferência do circulo: então o volume de um cilindro circular reto era obtido fazendo-se o produto da base pela altura. O volume de um tronco de cone ou de pirâmide quadrangular aparece incorretamente como o produto da altura pela semi-soma das bases. Parece também haver indícios de que os antigos babilônios usavam a fórmula incorreta

$$k = \frac{(a + c)(b + d)}{4}$$

para a área de um quadrilátero tendo a, *b, c, d* como lados consecutivos. Esses povos sabiam que lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais, que a altura baixada do vértice de um triângulo isósceles sobre a base divide-a ao meio e que o ângulo inscrito num semicirculo é reto. O teorema pitagórico também já era conhecido, desde cerca de 2000 a.C. (BOYER, 1974).

Nossas principais fontes de informações a respeito da geometria egípcia antiga são os papiros Moscou e Rhind — textos matemáticos que contêm, respectivamente, 25 e 85 problemas, e datam de aproximadamente 1850 a.C. e 1650 a.C. Há também, no Museu de Berlim, o mais antigo instrumento de astronomia ou de agrimensura conhecido — uma combinação de fio de prumo e colimador — procedente do Egito, aproximadamente do ano 1850 a.C. O Museu de Berlim também tem o mais antigo relógio de sol que se conhece. É egípcio e data de cerca de 1500 a.C. Esses instrumentos revelam, naturalmente, alguns conhecimentos de geometria prática aos quais estariam associados. Devemos também assinalar que a grande pirâmide de Gizé, cuja construção primorosa envolveu geometria prática, foi erguida em cerca de 2900 a.C.

As mudanças econômicas e políticas dos últimos séculos do segundo milênio a.C. fizeram com que o poder do Egito e da Babilônia diminuíssem. Novos povos passaram ao primeiro plano, e os desenvolvimentos posteriores da geometria foram passados aos gregos, que transformaram a matéria em algo muito diferente do conjunto de conclusões empíricas produzido por seus predecessores.

Os gregos insistiram em que os fatos geométricos deviam ser estabelecidos, não por procedimentos empíricos, mas por raciocínios dedutivos; as verdades geométricas deviam ser obtidas no gabinete de estudos, e não no laboratório. Em suma, os gregos transformaram a geometria empírica, ou científica, dos egípcios e babilônios antigos no que se poderia chamar de geometria "sistemática" ou "demonstrativa".

É decepcionante que, ao contrário do que ocorre para a geometria dos antigos egípcios e babilônios, não haja quase nenhuma fonte primária para o estudo da geometria grega primitiva em si. Impõe-se o apoio em manuscritos e relatos que datam de vários séculos depois de os originais terem sido escritos.

A principal fonte de informações referente à geometria grega primitiva é o chamado *Sumário eudemiano de Proclus*. Este sumário constitui várias páginas do *Comentário sobre Euclides, Livro I,* e é um breve esboço do desenvolvimento da geometria grega desde os tempos mais primitivos até Euclides. Embora Proclus tenha vivido no século V d.C., mais de um milênio depois do início da geometria grega, ainda teve acesso a numerosos trabalhos históricos e críticos, que depois se perderam, com exceção de alguns fragmentos e alusões preservadas por ele e outros. Entre esses trabalhos perdidos está o que era, ao que parece, uma história completa da geometria grega, cobrindo o período anterior a 335 a.C., escrita por Eudemo, um discípulo de Aristóteles. O *Sumário eudemiano* é assim chamado porque, supostamente, baseia-se nesse trabalho mais antigo.

Segundo o *Sumário eudemiano,* a geometria grega parece ter começado essencialmente com o trabalho de Tales de Mileto na primeira metade do século VI a.C. Esse gênio versátil, considerado um dos "sete sábios" da antiguidade, foi um digno fundador da geometria demonstrativa. É ele o primeiro individuo conhecido a quem estar associada a utilização de métodos dedutivos em geometria. Tales, segundo o sumário, residiu temporariamente no Egito, trazendo a geometria em sua volta para a Grécia, onde começou a aplicar à matéria procedimentos dedutivos da filosofia grega. São creditados a ele alguns resultados geométricos muito elementares, cujo valor não deve ser medido pelo seu conteúdo mas pelo fato de que ele os baseava em raciocínios lógicos e não em intuição e experimentação. Pela primeira vez, um estudioso da geometria se comprometeu com uma forma de raciocínio dedutivo, por mais parcial e incompleto que fosse. Além do mais, o fato de o primeiro pensamento dedutivo ocorrer no campo da geometria (e não no da álgebra, por exemplo) inaugurou uma tradição em matemática que se manteve até tempos muito recentes.

O próximo geômetra grego importante mencionado no *Sumário eudemiano* é Pitágoras, considerado como o continuador da sistematização da geometria iniciada por Tales, cerca de cinqüenta anos antes. Pitágoras nasceu por volta do ano 572 a.C. na ilha de Samos, uma das ilhas do mar Egeu próximas de Mileto, a cidade natal de Tales.

É bem possível, então, que Pitágoras tenha estudado com ele. Ao que parece, Pitágoras visitou então o Egito e talvez tenha mesmo viajado mais pelo Oriente. Quando de seu retorno, encontrou a Jônia sob o domínio persa, decidindo imigrar para Crotona, porto marítimo grego situado no sul da Itália. Lá ele fundou a famosa escola pitagórica, uma irmandade unida por mistérios, ritos cabalisticos e cerimônias e empenhada no estudo de filosofia, matemática e ciências naturais.

Apesar da natureza mística de muitos dos estudos pitagóricos, os membros da sociedade produziram, durante os cerca de duzentos anos que se seguiram à fundação da escola, uma grande quantidade de sólida matemática. Assim, em geometria, desenvolveram as propriedades das retas parelelas e usaram-nas para provar que a soma dos ângulos de um triângulo qualquer é igual a dois ângulos retos. Contribuíram de maneira notável para a álgebra geométrica grega e desenvolveram uma teoria das proporções bastante completa (ainda que limitada a grandezas comensuráveis) que usaram para deduzir propriedades de figuras semelhantes. Tinham ciência da existência de pelo menos três dos poliedros regulares; descobriram a incomensurabilidade do lado e da diagonal de um quadrado. Embora muitas dessas informações já fossem conhecidas pelos babilônios de tempos mais antigos, imaginase que os aspectos dedutivos da geometria devam ter sido consideravelmente explorados e aprimorados pelo trabalho dos pitagóricos. Cadeias de proposições em que umas derivam de outras anteriores começaram a emergir à medida que as cadeias se alongavam e se ligavam umas às outras, a idéia ousada de desenvolver toda a geometria como uma longa cadeia foi surgindo. O *Sumário eudemiano* afirma que um pitagórico, Hipócrates de Quio, foi o primeiro a tentar, com sucesso pelo menos parcial, uma apresentação lógica da geometria sob forma de uma única cadeia de proposições baseada em algumas definições e suposições iniciais. Tentativas melhores foram feitas por Lcon, Teudius e outros. Então, por volta do ano 300 a.C., Euclides produziu sua obra memorável, os *Elementos,* uma cadeia dedutiva única de 465 proposições compreendendo de maneira clara e harmoniosa geometria plana e espacial, teoria dos números e álgebra geométrica grega. Assim que surgiu, esse trabalho já mereceu o mais alto respeito, superando rápida e absolutamente os esforços anteriores no mesmo sentido — tanto que, destes últimos, não restou nenhum vestígio. O efeito deste único trabalho sobre o futuro desenvolvimento da geometria foi enorme, e dificilmente se poderia superestimá-lo.

Muitas foram as realizações dos gregos durante os três séculos entre Tales e Euclides. Pitágoras e outros desenvolveram não só o material que acabou sendo organizado nos *Elementos* de Euclides, como também noções relativas a infinitésimos e limites e processos somatórios (noções que só foram definitivamente esclarecidas com a invenção do cálculo nos tempos modernos). Também desenvolveram em boa parte a geometria superior, ou geometria de curvas que não o círculo e a reta e de superfícies que não a esfera e o plano. Curiosamente, muito dessa geometria superior originou-se de tentativas constantes de resolver os três famosos problemas de construção da antigüidade: a duplicação do cubo, a trissecção de um ângulo arbitrário e a quadratura do círculo.

Também durante os três primeiros séculos de sua matemática, os gregos desenvolveram a noção de discurso lógico como uma seqüência de afirmações obtidas por raciocínio dedutivo a partir de um conjunto aceito de afirmações iniciais. Então tanto as afirmações iniciais como as derivadas do discurso são afirmações sobre a questão técnica do discurso e, por isso, envolvem termos especiais ou técnicos. Os significados desses termos devem ser claros para o leitor e, assim, os gregos sentiam que o discurso deveria começar com uma lista de explanações e definições desses termos técnicos. Depois dessas explanações e definições terem sido dadas, as afirmações iniciais, chamadas “axiomas” e/ou “postulados” do discurso, deveriam ser enunciados. Essas afirmações iniciais, segundo os gregos. deveriam ser cuidadosamente escolhidas de maneira que sua veracidade fosse completamente aceitável pelo leitor em vista das aplanações e definições já citadas.

De um discurso conduzido segundo o plano acima diz-se, hoje, que foi desenvolvido através de “axiomática material”. Certamente a contribuição mais importante dos gregos antigos à matemática foi a formulação do modelo de axiomática material e a insistência em que a geometria fosse sistematizada de acordo com esse modelo. Os *Elementos* de Euclides são o mais antigo exemplo extensamente desenvolvido do uso do modelo que nos foi transmitido. Em anos mais recentes, como será visto, o modelo de axiomática material foi significativamente generalizado de modo a fornecer uma forma de discurso abstrato conhecido como “axiomática formal”.

Os três geômetras gregos mais importantes da Antiguidade foram Euclides (*c.* 300 a.C.), Arquimedes (287-212 a.C.) e Apolônio (*c.* 225 a.C.). Não é exagero dizer que quase tudo o que se fez de significativo em geometria, até os dias de hoje, e ainda hoje, tem sua semente original em algum trabalho desses três grandes eruditos.

Os três foram escritores prolificos. Assim, embora os *Elementos* sejam, de longe, seu trabalho mais importante — e na verdade a obra de geometria mais importante de toda a história —, Eucides escreveu vários outros tratados de geometria, sendo que existe algum conhecimento a respeito de cerca de oito deles.

Cerca de dez tratados matemáticos de Arquimedes sobreviveram até nossos dias, e há vestígios de vários trabalhos seus que se perderam. Dos que restaram, três são sobre geometria plana e dois sobre geometria sólida. Esses trabalhos não são compilações de realizações de predecessores, mas criações altamente originais, marcando Arquimedes como um dos maiores matemáticos de todos os tempos, e certamente o maior da Antiguidade. Num de seus trabalhos dedicados à geometria plana, Arquimedes inaugurou o clássico método dos perímetros para calcular π, considerando que π está situado entre 223/71 e 22/7, ou que, com duas casas decimais, π é dado por 3,14. Esse procedimento de Arquimedes foi o ponto de partida da longa história da busca de aproximações cada vez mais acuradas para o valor de π alcançando-se, em 1967, a fantástica aproximação de 500 000 casas decimais (hoje já temos aproximações de mais de 1 000 000 casas decimais). Em seus outros trabalhos de geometria plana, Arquimedes antecipou alguns dos métodos do cálculo integral.

Dentre esses geômetras posteriores, merecem menção especial Heron de Alexandria *(c.* 75 d.C.), Menelau (e. 100), Cláudio Ptolomeu (e. 85 - e. 165) e Papus (e. 320). Em geometria, Heron ocupou-se da mensuração plana e sólida e Menelau e Ptolomeu contribuiram para a trigonometria enquanto auxiliar da astronomia. Papus, o último dos geômetras gregos criativos, que viveu cerca de cinco séculos depois de Apolônio e esforçou-se em vão, apesar de seu entusiasmo, para instilar vida nova na debilitada geometria grega. Seu grande trabalho, a *Coleção,* cuja maior parte chegou até nós, é um misto de comentário e guia de outros trabalhos de seu tempo. Numerosas proposições originais, aprimoramentos, extensões e valiosos comentários históricos entremeiam a obra. A *Coleção* acabou sendo o réquiem da geometria grega, pois, após Papus, a geometria grega deixou de ser uma disciplina vivida: apenas sua memória foi perpetuada por escritores menores e comentadores.

Na geometria grega antiga encontramos o manancial do assunto, no que se refere à forma e ao conteúdo. E inestimável a importância desse legado notável para toda a geometria subseqüente.

O período final dos tempos antigos foi dominado por Roma. Os centros gregos foram caindo um após o outro sob o poder das tropas romanas, e em 146 a.C. a Grécia tornou-se uma província do Império Romano. As condições revelaram-se cada vez mais sufocantes para o trabalho científico original, e manifestou-se um declínio gradual do pensamento *criativo.* O advento dos bárbaros no Ocidente e o conseqüente colapso no mercado de escravos, com seus efeitos desastrosos para a economia romana, encontrou a ciência e a matemática reduzidas a um plano medíocre.

O período que se iniciou com a queda do Império Romano, na metade do século V, e se estendeu até o século XL é conhecido como alta Idade Média européia. Durante esse período a civilização na Europa ocidental desceu a níveis muito baixos. O ensino quase deixou de existir, o saber grego por pouco não desapareceu e grande parte das artes e ofícios transmitidos pelo mundo antigo foram esquecidos.

Durante este período estéril do ensino os povos do Oriente, especialmente hindus e árabes, tornaram-se os maiores depositários da matemática. Todavia, o conceito grego de raciocínio rigoroso — na verdade, a própria idéia de demonstração dedutiva — parecia desagradável à maneira hindu de fazer as coisas. Embora os hindus se sobressaissem na computação, contribuindo para a álgebra e desempenhando um importante papel no desenvolvimento do atual sistema de numeração posicional, em geometria ou em metodologia matemática básica quase nada produziram de importância. Talvez a melhor produção da geometria hindu do período, e um tanto solitária quanto à sua excelência, seja o trabalho de Brahmagupta *(c.* 628) sobre quadriláteros cíclicos, todos com lados, diagonais e áreas racionais.

O extraordinário episódio da ascensão e queda do Império Árabe ocorreu durante a alta Idade Média. Ao longo da década seguinte à fuga de Maomé de Meca para Medina, em 622, as tribos dispersas e desunidas da península arábica se consolidaram numa nação poderosa, movidas por um fervor religioso intenso. Um século depois, a força das armas tinha estendido os preceitos e a influência muçulmanos por um território que ia da Índia até a Espanha, passando pela Pérsia, Mesopotâmia e norte da África. O modo como os árabes se apropriaram do saber grego e hindu teve importância considerável para a preservação de grande parte da cultura do mundo. Numerosos trabalhos gregos e hindus nas áreas de astronomia, medicina e matemática foram diligentemente traduzidos para a língua árabe e, assim, foram salvos até que eruditos europeus posteriormente tivessem condições de retraduzi-los para o latim e outras línguas. Não fora o trabalho dos eruditos árabes e uma grande parte da ciência grega e hindu se teria perdido irremediavelmente ao longo da Idade Média.

Além disso, os matemáticos árabes deram também algumas pequenas contribuições próprias. Em geometria pode-se mencionar o trabalho feito por Abu'l-Wefa (940-998) com compassos "enferrujados", ou compassos da abertura fixa a solução geométrica das equações cúbicas dada por Ornar Khayyam *(c.* 1044 - e. 1123) e as pesquisas de Nasir eddin *(c.* 1250) sobre o postulado das paralelas de Euclides. Tal como os hindus, os matemáticos árabes consideravam-se primordialmente como astrônomos, mostrando por isso grande interesse por trigonometria. A eles pode-se creditar o uso das seis funções trigonométricas e aperfeiçoamentos na derivação de fórmulas da trigonometria esférica.

Foi só na parte final do século XI que os clássicos gregos da ciência e da matemática voltaram a se infiltrar na Europa. Seguiu-se um período de transmissão durante o qual o saber antigo, preservado pela cultura muçulmana, foi passado para a Europa ocidental mediante traduções latinas feitas por eruditos cristãos que se deslocavam até centros de ensino muçulmanos, e através da abertura de relações comerciais da Europa ocidental com o Levante e o mundo árabe. À perda de Toledo pelos mouros para os cristãos, em 1085, seguiu-se um influxo dc eruditos cristãos que se dirigiram à cidade para adquirir o saber muçulmano. A infiltração de eruditos cristãos ocorreu também em outros centros mouriscos da Espanha, e o século XII tornou-se, na história da matemática, o século dos tradutores.

O século XIII assistiu ao surgirnento das universidades de Paris, Oxford, Cambridge, Pádua e Nápoles. As universidades vieram a se tornar fatores poderosos de desenvolvimento da matemática, uma vez que muitos matemáticos se vinculavam a uma ou mais dessas instituições. Durante esse século, por volta de 1260, Johannes Campanus fez uma tradução para o latim dos *Elementos* de Euclides, que posteriormente, em 1482, tornou-se a primeira versão impressa dessa grande obra.

O século XIV foi improdutivo quanto à matemática. Foi o século da Peste, que dizimou mais de um terço da população da Europa. Durante esse século desenrolou-se a Guerra dos Cem Anos, com suas profundas transformações políticas e econômicas no norte da Europa.

O século XV, período inicial do Renascimento, testemunhou o reaparecimento da arte e do saber na Europa. Com o colapso do Império Bizantino, culminando com a queda de Constantinopla perante os turcos em 1453, refugiados afluiram à Itália, trazendo tesouros da civilização grega. Muitos clássicos gregos, conhecidos até então apenas através de traduções árabes que muitas vezes não eram boas, podiam agora ser estudados nas fontes originais. Também a invenção da imprensa com tipos móveis, por volta de meados do século, revolucionou o comércio de livros e permitiu que o conhecimento se difundisse numa velocidade sem precedentes.

A atividade matemática nesse século centrou-se principalmente nas cidades italianas e nas cidades de Nurembergue, Viena e Praga, na Europa central. Concentrava-se na aritmética, na álgebra e na trigonometria, sob a influencia prática do comércio, da navegação, da astronomia e da agrimensura.

No século XVI prosseguiu o desenvolvimento da aritmética e da álgebra, sendo que o feito mais espetacular da matemática no período foi a descoberta, por matemáticos italianos, da solução algébrica das equações cúbicas e quárticas. Esse desenvolvimento contínuo da álgebra, ao longo do qual ela passou da forma retórica à simbólica, teve posteriormente um efeito marcante, como veremos, sobre o desenvolvimento da geometria. Um estimulo mais imediato ao desenvolvimento da geometria foi a tradução, em 1533, do *Comentário sobre Euclides, Livro I,* de Proclus. A primeira tradução importante para o latim dos Livros I-IV da obra *Secções cônicas* de Apolônio foi feita por Federigo Commandino em 1566; os Livros V-VII só apareceram em traduções latinas em 1661. Em 1572, Commandino fez uma tradução muito importante dos *Elementos* de Euclides, a partir do grego. Essa tradução serviu de base para muitas outras subseqüentes, inclusive para um trabalho muito influente de Robert Simson (1687-1768), do qual, por sua vez, derivaram várias edições inglesas. Na época, muitos trabalhos de Arquimedes já tinham sido traduzidos para o latim. Com a divulgação de todos esses grandes trabalhos gregos sobre geometria, era inevitável que mais cedo ou mais tarde alguns dos aspectos da matéria voltassem a chamar a atenção dos pesquisadores.

A geometria euclidiana apesar de descrever as formas de figuras ideais não é adequada para descrever com precisão as formas construídas pela natureza. A geometria fractal foi proposta visando a descrição geométrica de estruturas com fragmentações, com dobras e outros aspectos não descritos adequadamente pela geometria euclidiana.

1.2 Um breve panorama histórico da Geometria Fractal

Benoit Mandelbrot nasceu em 20 de Novembro de 1924, em Varsóvia, capital da Polônia. Em 1936, Benoît e seus familiares foram morar na França, por causa da 2ª Guerra Mundial. Este pesquisador vem de família com tradição acadêmica, o que o levou a se interessar por

Matemática, influenciado pelo seu tio Szolem Mandelbrot (1899-1983), professor de Matemática no "Collège de France".

Benoît Mandelbrot estudou no "Lycze Rolin", em Paris. Em seguida, freqüentou a École Polytechnique (1944), onde trabalhou com Paul Pierre Lévy (1886-1971) e obteve o título de Ph.D, concedido pela Universidade de Paris. Depois, foi para os Estados Unidos da América para estudar em Princeton. Mandelbrot retornou à França em 1955, onde se casou com Aliette Kagan. Nessa época, começou a trabalhar no Centro Nationale de la Recherche Scientifique como professor da Matemática. Em 1957 retornou a École Politechnique, ficando sua carreira acadêmica marcada, principalmente, entre a França e os EUA. Em 1958, foi convidado para trabalhar na IBM, em Nova Iorque. Em 1987, tornou-se professor de Ciências Matemáticas na Universidade de Yale e, a partir desse momento, Mandelbrot começou a questionar a Geometria Euclidiana, pois afirmava que esta não evidenciava abstração aceitável para compreender a complexidade da natureza. Mandelbrot, após ser contratado pela IBM, começou uma série de estudos, junto com outros pesquisadores que estudavam coisas do tipo: o ruído (telecomunicação) e séries de preços em economia. Tais pesquisas acabaram convergindo com suas idéias iniciais, dando origem à Geometria Fractal. A *palavra* "fractal" tem origem da palavra latina "fractus", que significa quebrado, irregular. Mandelbrot é reconhecido mundialmente como o "criador" dos Fractais. Tal reconhecimento fica marcado através das obras clássicas: *Logique, Langage et Théorie de l' Information* (com L. Apostel e A Morf), de 1957; *Fractais: Forma, Hipóteses e Dimensão*, de 1977; *A Geometria Fractal da Natureza*, de 1982. Conforme visto, um dos fatores que levou Mandelbrot a estudar e desenvolver os Fractais foi não acreditar que a obra Euclidiana dava conta de explicar todas as formas, principalmente as da natureza. Após muitos estudos, Mandelbrot criticou a Geometria Euclidiana, afirmando que Euclides não se aprofundou na idéia de Dimensão, a qual considera ser muito importante para o desenvolvimento da Geometria. Embora Mandelbrot seja considerado o pai dos Fractais, estudos anteriores já mostravam idéias semelhantes aquelas de Mandelbrot, e que acredita-se terem colaborado para o desenvolvimento de sua Geometria Fractal.

Por volta de 1870, vários trabalhos estavam sendo desenvolvidos. Porém, alguns desses trabalhos geravam figuras que saíam das características usuais da Geometria Euclidiana.

Entre eles, há o de Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, que apresentou algumas funções contínuas, não diferenciáveis, isto é, em nenhum ponto podia-se descrever uma reta tangente à curva. Nessa mesma época, Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor, matemático de origem Russa, estudava um processo para transformar um segmento de reta em infinitos “pontos”, processo denominado de poeira de Cantor. Alguns anos depois, Jules Henri Poincaré, matemático e filósofo francês, estudava o sistema solar e as órbitas dos planetas, criando assim o que hoje é conhecido como “topologia”, afirmando que os movimentos dos planetas geravam curvas estranhas, “caóticas”, cujas órbitas jamais se tornavam periódicas e previsíveis. Estes trabalhos possuíam idéias que deram, mais tarde, origem aos Fractais.

1.3 Uma revisão sobre a geometria dos fractais.

A palavra “fractal” foi cunhada por Mandelbrot (1983). Ele reuniu, criou e popularizou uma grande coleção de objetos fractais. Esses objetos são caracterizados por suas propriedades que são:

i) a auto-similaridade, a qual significa que partes de um objeto ou processo são semelhantes ao objeto ou processo todo;

ii) a dependência de escala (scaling), que significa dizer que a medida de uma grandeza depende da escala na qual foi medida;

iii) dimensão fractal, a qual provê uma descrição quantitativa da auto-similaridade e dependência de escala;

iv) propriedades estatísticas anômalas das grandezas fractais (BASSINGTHWAIGHT *et al*., 1994).

A auto-similaridade da forma geométrica desses objetos não é descrita por uma função algébrica; ao invés disto é especificada por meio de um algoritmo que instrui como construir o objeto fractal (IBID.).

A construção de um objeto fractal é mostrada na Figura 1, onde se observa a curva de Koch para diferentes números de iterações do algoritmo gerador. A curva de Koch, cujo algoritmo de iteração consiste em adicionar–se repetidamente a cada face de um triângulo eqüilátero um novo triângulo cujos lados são 1/3 do comprimento do lado do triângulo anterior. O comprimento do perímetro da curva de Koch aumenta de 4/3 a cada estágio da iteração. O limite de infinitas iterações a curva de Koch terá um perímetro infinito, apesar de encerrar uma área finita. Observe-se também que a curva de Koch é uma curva contínua, porém não diferenciável em todos os pontos.

A dimensão fractal, definida aqui como dimensão de auto-similaridade, descreve quantos novos pedaços geometricamente similares ao objeto são observados quando a resolução é aumentada. Assim reduzida a escala por um fator F será encontrado que existem N pedaços similares ao original, então a dimensão de auto-similaridade é dada por: $N = F^d$, onde d é a dimensão de auto-similaridade, aplicando-se logaritmo:

$$d = \log N / \log F.$$

Quando o conceito de dimensão de auto-similaridade é aplicado a um segmento de reta é trivial observar-se que d = 1. Contudo, quando esse conceito é aplicado ao perímetro da curva de Koch, pode ser observado que uma redução do fator de escala de 3 (F = 3), N = 4 novos pedaços são encontrados. Desta forma, a dimensão fractal de auto-similaridade, d = log 4/ log3 = 1,2619 é um número fracionário (NUSSENZVEIG, 1999).

Figura 1: A curva de Koch, cujo algoritmo de iteração consiste em adicionar repetidamente a cada face de um triângulo eqüilátero um novo triângulo cujos lados são 1/3 do comprimento do lado do triângulo anterior. O comprimento do perímetro da curva de Koch aumenta de 4/3 a cada estágio da iteração. Construção de um objeto fractal (d = 1, 2619) (BASSINTHWAIGHT *ET AL.*, 1994).

Muitas estruturas e processos fisiológicos são estatisticamente auto-similares. Por exemplo, estruturas em que cada vez mais invaginações aparecem à medida que a resolução vai aumentando, são típicas em processos de transporte através de membranas, onde o aumento do número de invaginações[1] permite elevar a área disponível para realizações do transporte através dessas membranas (GOLDBERGER *et al.,* 1990).

Sistemas fisiológicos onde os padrões de bifurcações são similares em diferentes escalas espaciais são também exemplos de estruturas fractais. Outro exemplo de processos fractais são aqueles que ocorrem numa estrutura hierárquica. Por exemplo, proteínas têm diferentes formas estáveis denominadas *estados conformacionais*. Esses estados conformacionais são separados por barreiras de energias decorrentes das diferenças nas energias potenciais e no grau de ordem (entropia) entre esses estados. Nestas estruturas pode ser observado que pequenas barreiras de energias separam formas que diferem poucas umas da outras e que grandes barreiras de energia separam formas bastante diferentes entre si. (ANSARI *et al.*,1985; KEIRSTEAD & HUBERMAN,1987). A dependência de escala descreve como uma propriedade L(r) depende da escala usada para medi-la. Grandezas fractais caracterizam-se por apresentarem uma dependência em forma de uma lei de potência com a escala utilizada para medi-la. Assim $L(r) = A*r^b$, onde A e b são constantes para um determinado processo fractal.

Uma característica das grandezas fractais é a dependência linear do logaritmo da grandeza L com o logaritmo da escala utilizada na realização da medida. Além da dimensão de auto-similaridade, outras dimensões fractais podem ser definidas. São elas: dimensão de capacidade e a dimensão por contagem de caixas (box-counting) descritas a seguir.

A dimensão de capacidade é obtida cobrindo-se com N(r) “bolas” o objeto fractal, onde N(r) é o número mínimo de bolas de raio r necessárias para cobrir todos os pontos do objeto fractal. Desde que os objetos fractais têm forma irregular, essas bolas necessariamente se superpõem para poder incluir o objeto todo. Repete-se o procedimento com bolas de diferentes tamanhos e traça-se um gráfico do log-log de N(r) em função de r (raio das

[1] Invaginação, termo próprio da biologia, pode ser definida como uma dobra celular semelhante à textura do joelho e cotovelo.

bolas). A inclinação desse gráfico é a dimensão de capacidade, que pode ser definida, formalmente, através da seguinte expressão:

$$D_{capacidade} = \lim_{r \to 0} \log N(r) / \log(r)$$

O raio r na expressão equivale ao inverso do fator de escala F.

Quando a dimensão de um objeto fractal é determinada utilizando–se uma grade retangular, ao invés de bolas, está-se diante de um novo método de se determinar a dimensão fractal denominada dimensão por "contagem de caixas" (*box-counting*). Neste caso, cobre-se o objeto fractal com N(r) caixas que contenham pelo menos um ponto do objeto. Repete-se o procedimento com caixas de diferentes tamanhos e traça-se um gráfico do log-log de N(r) em função de r (lados das caixas). A inclinação desse gráfico é a dimensão de contagem por caixas, que pode ser definida, formalmente, através da seguinte expressão:

$$D_{box-counitng} = \lim_{r \to 0} \log N(r) / \log(1/r)$$

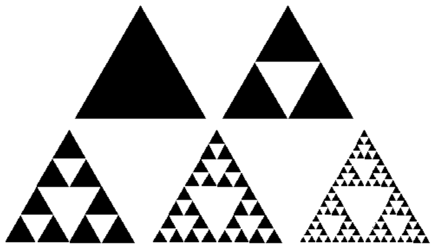
Além desses métodos, vários outros são propostos para calcular a dimensão dos objetos fractais, entre esses se podem citar: dimensão de massa, dimensão de informação, dimensão de correlação e outros que fogem ao escopo desse trabalho.

1.3.1 Algumas outras estruturas fractais

A seguir mostram-se algumas outras estruturas fractais que foram usadas neste trabalho, são elas: O triângulo de Sierpinski e o conjunto de Cantor.

1.3.1. 1 O Triângulo de Sierpinski

Este triângulo é construído da seguinte forma: marcam-se os pontos médios de cada um dos lados de um triângulo. Em seguida, unem-se esses pontos médios por um segmento, dividindo o triângulo original em quatro novos triângulos menores e semelhantes. Retira-se o triângulo do meio e faz-se o mesmo processo em cada um dos triângulos que sobram, e assim, sucessivamente. A imagem abaixo mostra o resultado, depois de se realizar esta operação por quatro vezes.

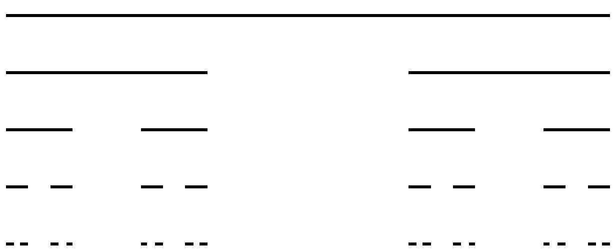


$$\text{Dimensão} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1{,}585$$

Figura 2: Triângulo de Sierpinski

1.3.1.2 O Conjunto de Cantor

No "Conjunto ou Poeira de Cantor", considera-se um segmento de reta, dividido em três partes iguais, sendo retirado o terço central. De cada um dos dois segmentos restantes procede-se da mesma forma anterior, isto é, dividindo-os em três partes iguais e retirando-se os terços médios. O processo de dividir os segmentos e de retirar o pedaço intermediário prossegue infinitamente.



$$\text{Dimensão} = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0{,}631$$

Figura 3 Este conjunto tem dimensão Fractal entre 0 e 1.

Os exemplos acima apresentam auto-similaridade. Quando vistas através de uma lente de aumento, as diferentes partes de um Fractal se mostram similares à forma como um todo. Existem os Fractais exatos, ou estritamente matemáticos, que são gerados no computador, e os Fractais naturais, cuja propriedade de auto-similaridade ocorre apenas aproximadamente.

1.3.1.3 Fractais da Natureza

Um exemplo de Fractal natural é a forma de um galho de árvore desfolhada, que repete sua forma nas ramificações, conforme mostrados a seguir.

Figura 4. Galho de árvore desfolhada.

Outro exemplo é a foto de um relâmpago, como mostrado na figura que segue:

Figura 5. Foto de um relâmpago.

Essa propriedade de auto-similaridade quer dizer, na linguagem dos matemáticos, que uma figura fractal é invariante em escalas, isto é, cada pedaço mínimo de uma figura se parece, com ligeiras diferenças, com a figura completa.

A conseqüência disto é que um matemático coloca em um computador uma equação simples, e trabalhando repetidamente sobre o mesmo padrão, o computador vai desenhar os ramos, galhos, troncos e, assim, produzir uma árvore completa. Pode-se com softwares de Geometria Dinâmica simular dando origem a um Fractal exato, como mostram as figuras que seguem quase idênticas a uma árvore e a um relâmpago real (fractais naturais).

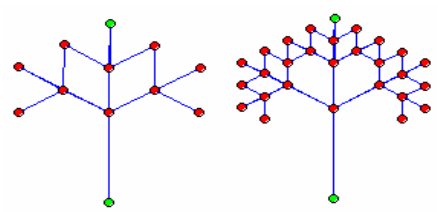


Figura 6. Galho de árvore construído Cabri Gèometré

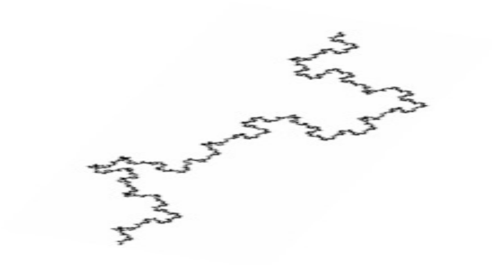


Figura7 – Relâmpago construído Cabri Gèometré

1.3.2 Classes fractais

Uma das características dos Fractais, como já mencionado, é a sua construção, pois para isso é necessário um “processo recursivo”. Na construção de qualquer Fractal há a necessidade de se repetir sempre um determinado procedimento infinitamente, o que, no nosso caso, é um processo geométrico. Utilizamos o termo “Classe Fractal” para referir a três grandes grupos que geram os Fractais. Estas classes são KERN *et al* (1990).

i) ***Classe Fractal Geométrica:*** nesta, os Fractais são construídos com objetos extremamente geométricos.

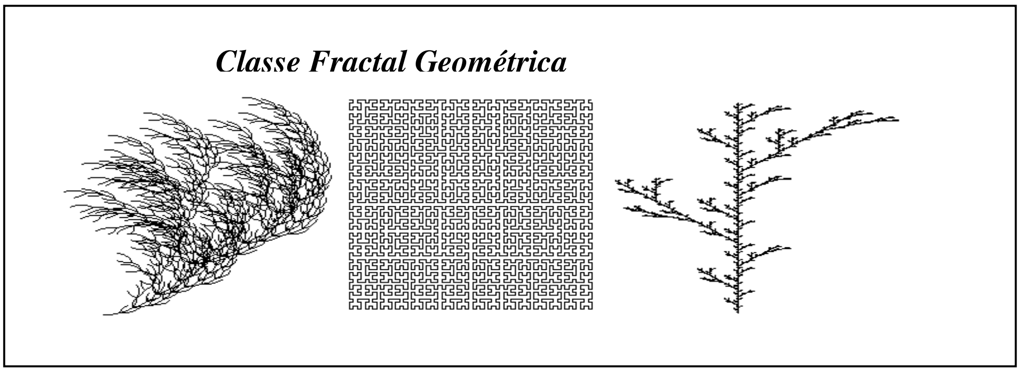


Figura 8. ***Fractal Geométrico***

ii) ***Classe Fractal IFS*** (Iterated Function System ou Sistema Iterativo de Funções): nesta classe os Fractais são construídos através de sistemas iterativos de funções. Para entender melhor esta classe são necessários alguns conhecimentos em Espaços Métricos e Topologia.

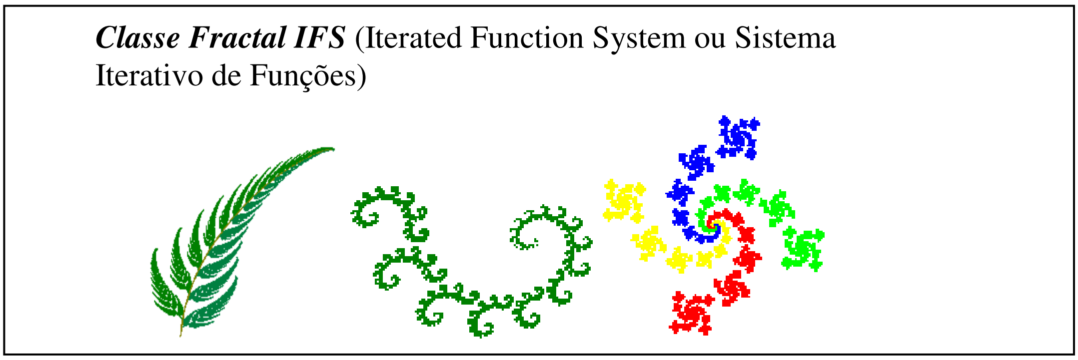


Figura 9. ***Fractal IFS***

iii) ***Classe Fractal EnL*** (Equações não Lineares) Por exemplo: $z_{n+1} = z_n^2 + c$, onde z e c são números complexos, ou na forma:

f: $C \rightarrow C$ definida por $f(z) = z^2 + c$.

Classe Fractal EnL (Equações não Lineares)

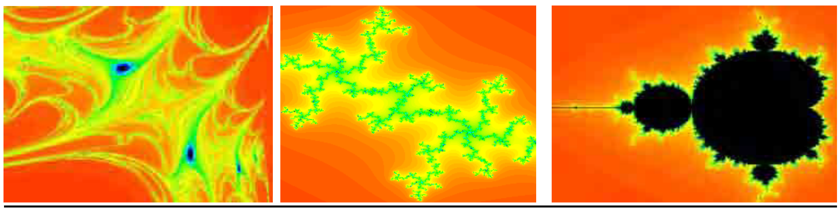


Figura 10. Fractal EnL.

Convém ressaltar existem alguns ambientes computacionais na Web que podem construir as três classes Fractais citadas. Para construir os exemplos mostrados, foi utilizado um software chamado **Fantastic Fractals 98**, que pode ser adquirido gratuitamente pela Web no endereço **http://library.advanced.org/12740/.** Neste trabalho foi explorada somente a Classe Fractal Geométrica, utilizando-se softwares de Geometria Dinâmica.

1.3.3 Calculando a dimensão fractal: o método de box-counting (contagem de caixas)

Os fractais são formas complexas que não podem ser medidas apenas por dimensão topológica. A dimensão fractal surge então como uma alternativa de medição já que pode assumir valores fracionários, obtendo assim o grau de complexidade de uma forma. A dimensão fractal de um conjunto é um valor que diz o quão densamente um conjunto ocupa o espaço métrico em que ele existe.

Dentre os vários cálculos de dimensão fractal existente, o **box-counting** é um dos mais utilizados. Sua grande popularidade se deve a sua facilidade de uso em cálculos matemáticos e em estimativas experimentais. O algoritmo para o cálculo dessa dimensão considera uma figura fractal qualquer coberta por uma grade de reticulada quadrada e calcula o número de quadrados necessários para cobrir toda a figura. Posteriormente, o lado do quadrado da grade reticulada é reduzido e novamente o número de quadrados contados.

Esse procedimento pode ser observado nas figuras 11 e 12. A dimensão fractal é obtida a partir do cálculo do coeficiente angular do diagrama log (N(s))/log(1/s), onde N(s) é o número de caixas usadas para cada tamanho de caixa usado (escala s). As Figuras 11 e 12 abaixo mostram diferentes tamanhos de grades usadas no cálculo da dimensão de box-counting.

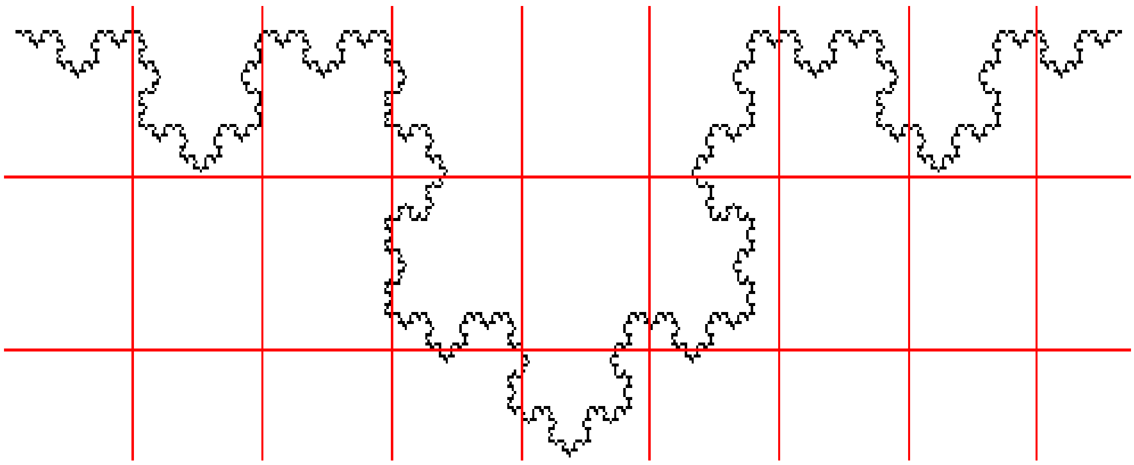


Figura 11. Grade reticulada usada na medida da dimensão de contagem por caixas.

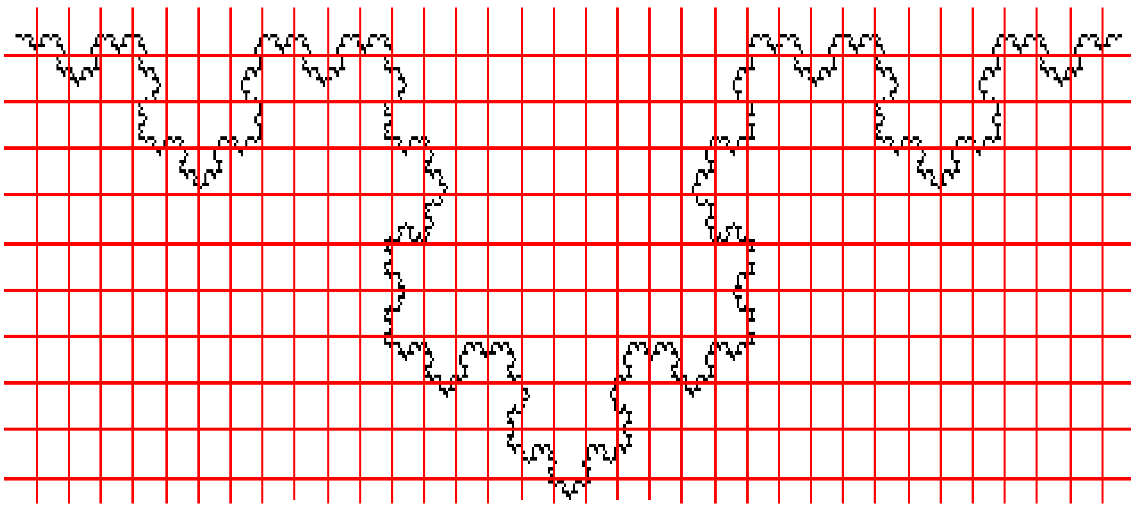


Figura 12. Grade reticulada de lado menor usada na medida da dimensão de contagem por caixas.

1.4 A Teoria dos Construtos Pessoais de George Kelly

Neste tópico será apresentada a teoria que fundamenta este trabalho de pesquisa.

1.4.1 Uma breve biografia de George Kelly.

George Kelly nasceu em 28 de abril de 1905 numa fazenda no estado norte americano de Kansas. Sua educação básica foi marcada por irregularidades típicas de uma comunidade rural do começo do século XX. Estudou durante três anos na Friends University, obtendo o grau de Bacharel em Física e Matemática no Park College no ano de 1926. (MAEHR, 1969). Participava ativamente das questões políticas e sociais, participava de debates durante seu período colegial. Seguindo sua nova linha de interesse, foi estudar sociologia educacional na Universidade de Kansas, onde obteve o grau de Mestre em 1928.

No seu estudo investigou as atividades de lazer dos trabalhadores de Kansas City em seu tempo de folga. (HALL et all, 2000). Acumulou experiência em várias instituições de ensino tendo, em 1929, obtido uma bolsa de estudos para Universidade de Edimburgo como aluno de intercâmbio, obtendo o grau de Bacharel em Educação em 1930, e desenvolvido uma tese, onde trabalhou com prognósticos sobre sucesso de processos de ensino. Retornou aos Estados Unidos da América, matriculando-se na Universidade de Iowa no curso de pós-graduação em Psicologia. Após o curto período de um ano recebeu, ainda em 1931, o grau de Ph.D., tendo desenvolvido um trabalho de pesquisa sobre os elementos mais comuns em deficiências de fala e escrita (MAEHR, 1969).

Nos treze anos que se seguiram Kelly lecionou no Fort Hays State College, tendo direcionado nesta época seus esforços para montar um programa de psicologia clínica para atender escolas estaduais no Kansas. Durante este período, desenvolveu novas abordagens na psicologia clínica em situações escolares, publicando vários artigos sobre o tema. Posteriormente, ingressou na Marinha Norte Americana, em virtude da 2ª. Guerra Mundial, encarregado do programa de treinamento local para pilotos civis, sendo designado em seguida para o Bureau de Medicina e Cirurgia da Marinha em Washington, onde permaneceu até o fim da guerra, em 1945. Neste mesmo ano foi indicado para o cargo de professor associado da Universidade de Maryland e no ano seguinte (1946) foi nomeado professor e diretor de Psicologia Clinica na Universidade Estadual de Ohio, onde permaneceu trabalhando durante as duas décadas seguintes. Durante muitos anos, canalizou suas energias para desenvolver o Programa de Graduação em Psicologia clínica daquele estabelecimento a um nível de destaque nacional, tendo conseguido alcançar seu objetivo maior que foi a obra intitulada *A Psicologia dos Construtos Pessoais,* que foi apresentada originalmente em dois volumes publicados em 1955, sendo posteriormente condensada num volume único - *Uma teoria de Personalidade:* A teoria dos Construtos Pessoais (KELLY, 1963), uma das obras consultadas nesta pesquisa.

Ao longo da sua vida profissional, George Kelly exerceu o cargo de Presidente das Divisões Clínica e Consultiva do "American Psychological Association", além de presidente do "American Board of Behavioral Science" na Universidade de Brandels, onde permaneceu até falecer em março de 1967, deixando vários trabalhos inacabados (HALL et all., 2000). Sua teoria dos construtos Pessoais foi reconhecida pela comunidade científica como um grande avanço no estudo da personalidade (MAEHR, 1969).

1.4.2 A Teoria dos Construtos Pessoais

Segundo Kelly, **"**Um construto é a maneira pela qual algumas coisas são interpretadas como sendo parecidas e, no entanto diferentes de outras" (KELLY APUD HALL, 2000, p. 334).O homem-cientista busca, então, representar o mundo exterior da melhor forma possível, com o intuito de prever eficientemente os eventos nos quais se encontra envolvido. Essa representação é feita através de padrões, criados com o objetivo de reproduzir os diversos aspectos do universo real, sendo estes padrões sujeitos a revisões sempre que necessário, visando a uma melhor adequação à realidade vivenciada. Esses padrões foram chamados por Kelly de construtos, e são os instrumentos através dos quais enxergam o mundo e tentam compreendê-lo da melhor maneira possível.

Segundo a visão de Kelly (1963), os construtos estão estruturados de forma dicotômica; o conceito de bom, por exemplo, está relacionado de maneira indissociável ao conceito de mau. Ainda nesse sentido, o contexto mínimo para fundamentar um construto é a comparação de três elementos; dois dos quais devem ser parecidos em determinado aspecto e simultaneamente serem diferentes do terceiro num mesmo modo. Os construtos são os elementos básicos dos sistemas de construção antecipatórios que orientam o comportamento pessoal frente às várias situações enfrentadas no cotidiano.

A eficiência destes sistemas na previsão de eventos depende fundamentalmente da coerência dos diversos construtos edificados pelo indivíduo. Os construtos são testados continuamente à medida que vão sendo usados em tais previsões, sendo passiveis de mudanças conceituais ou de natureza organizacional. O caráter dinâmico dos construtos pessoais, e consequentemente dos sistemas antecipatórios individuais é o que fundamenta a capacidade de aprendizagem continuada dos seres vivos. A respeito do mecanismo de ajuste dos construtos, Kelly (1963, p 9 tradução livre) escreveu: "Em geral, o individuo procura melhorar seus construtos incrementando seu repertório, alterando-os para conseguir melhores adequações, e agregando-os a construtos ou sistemas supra-ordenados."

Em sua teoria, Kelly assume que a estrutura do sistema de qualquer indivíduo é singular, ou seja, cada pessoa constrói e organiza de maneira única seu sistema antecipatório.

Neste sentido, o estudo dos construtos e da organização do sistema de construtos pessoais (a partir da matriz de repertório) compõe uma poderosa ferramenta de análise, uma vez que evidencia como este sistema foi erigido e/ou modificado. Não obstante, esta ferramenta de análise adequa-se bem às aplicações educacionais, uma vez que pode ser utilizada pelo educador para investigar o sistema de construtos de seus alunos, dando-lhes condições de direcionar as atividades pedagógicas orientado por este diagnóstico (MINGUET, 1998). Nesta pesquisa serão analisados os sistemas de construtos dos alunos, bem como o nível de articulação destes sistemas, com relação as geometria euclidiana e geometria da natureza, no caso a geometria fractal.

A Teoria dos Construtos Pessoais foca a personalidade individual e seus processos. Para Kelly a pessoa já é naturalmente ativa e tem suas ações direcionadas pelas sucessivas tentativas de antecipar satisfatoriamente os acontecimentos dos quais participa diariamente.

A proposta de Kelly era promover uma abordagem sistêmica de fatores comumente analisados de forma isolada, como fatores cognitivos, motivacionais e emocionais (CLONNIGER, 1999). Baseado num postulado fundamental, que fornece o embasamento para onze corolários que abordam diversos pontos relacionados aos processos psicológicos individuais. Em cada um destes tópicos, Kelly comenta suas propostas e desenvolve suas idéias sobre a sua construção da personalidade do indivíduo. O postulado fundamental da Teoria dos Construtos Pessoais (TCP) é transcrito a seguir: (KELLY APUD CLONINGER, 1999, p.427). “O processo de uma pessoa são canalizados psicologicamente pelas maneiras como ela antecipa os acontecimentos”.

Buscando embasar a teoria de Kelly, essa afirmação não tem a pretensão de ser a verdade definitiva, busca interpretar e prever eventos psicológicos. Como toda teoria científica, a TCP se sujeita a testar sua eficiência neste sentido, de modo que a consistência do seu postulado fundamental está relacionada diretamente á sua eficácia (KELLY, 1963). O domínio (psicológico) dos processos tratados por esta teoria também explicitado neste postulado, domínio que abrange e contempla o objeto de estudo deste trabalho, o processo de ensino-aprendizagem de conceitos científicos, em particular o estudo da geometria da natureza.

Os onzes corolários propostos por Kelly (1963, p. 103-104, tradução livre), são apresentados a seguir:

1. *Corolário de Construção*: Uma pessoa antecipa eventos ao interpretar suas reproduções;
2. *Corolário de Individualidade*: As pessoas diferem umas das outras na sua interpretação dos eventos;
3. *Corolário de Organização*: Cada pessoa desenvolve caracteristicamente um sistema de interpretação que abrange relacionamentos ordinais entre construtos, para ajudar na antecipação de eventos;
4. *Corolário da Dicotomia:* O sistema de construção de uma pessoa é composto de um número finito de construtos dicotômicos;
5. *Corolário de Escolha:* Uma pessoa escolhe aquela alternativa, em um construto dicotomizado, pela qual ela antecipa a maior possibilidade de extensão e definição de seu sistema;

6. *Corolário da Faixa*: O construto é conveniente apenas para antecipação de um intervalo finito de eventos;

7. *Corolário da Experiência:* O sistema de interpretação de uma pessoa varia conforme ela interpreta sucessivamente as reproduções de eventos;

8. *Corolário de Modulação*: A variação no sistema de interpretação de uma pessoa é limitada pela permeabilidade dos construtos dentro daquele intervalo de conveniência onde estão as variantes;

9. *Corolário de Fragmentação*: Uma pessoa pode empregar sucessivamente uma variante de subsistemas de interpretação inferencialmente incompatíveis entre si;

10. *Corolário de Comunalidade*: Na extensão em que uma pessoa emprega uma interpretação da experiência que é semelhante à empregada por outra pessoa, seus processos psicológicos são semelhantes aos dela;

11. *Corolário de Sociabilidade:* Na extensão em que uma pessoa interpreta os processos de construção da outra, ela pode desempenhar um papel em um processo social envolvendo a outra pessoa;

Neste trabalho serão usados os corolários da dicotomia, da faixa (ou do intervalo), da modulação e o corolário da experiência e, em particular, o ciclo da experiência de Kelly.

O ciclo de experiência de Kelly envolve cinco fases, que são: a fase da antecipação; a fase do investimento; a fase do encontro; a fase da confirmação ou desconfirmação e a fase da revisão construtiva. As diferentes fases do ciclo de experiência de Kelly serão descritas na seção de metodologia.

1.4.3 Corolário da dicotomia

O colorário da dicotomia na Teoria dos Construtos Pessoais de Kelly tem o seguinte enunciado: “O sistema de construção de um individuo é composto de um número finito de construtos dicotômicos.” (Kelly 1963.).

Kelly através deste corolário, propõe que os sistemas individuais de construção são compostos em sua totalidade por construtos de natureza dicotômica ou bipolar. Segundo ele (1963, p 105, tradução livre), “um construto é uma maneira através da qual algumas coisas são interpretadas como sendo semelhantes e ainda diferentes de outras.”

O pensamento dicotômico é uma ferramenta utilizada pelo homem para melhor estudar e compreender estes sistemas, as atitudes e processos de um individuo, baseiam-se em construtos caracteristicamente dicotômicos, não excluindo a possibilidade do mesmo trabalhar com escalas tão graduadas quanto necessárias entre dois construtos. Kelly cita vários tipos de escalas tais como, hierárquica, abstraídas, de acumulação, entre outras.

1.4.4 Corolário da faixa

O *corolário de faixa* determina que: “um construto é conveniente para a antecipação de apenas uma faixa finita de eventos” (KELLY, 1970, p. 16 *apud* BASTOS 1998). O corolário da faixa (ou do intervalo), diz que de maneira semelhante às teorias científicas e sistemas de representação em geral, os construtos apresentam um intervalo de conveniência e um foco de conveniência. O intervalo refere-se ao conjunto ou classe de objetos sobre os quais é pertinente a classificação segundo aquele construto, enquanto que o foco faz menção ao grupo dentro do intervalo de conveniência para o qual o construto é mais relevante (HALL, et al., 2000 *apud* Medeiros, 2005).

1.4.5 Corolário da modulação

O processo de aprendizagem de um indivíduo, compreende mudanças estruturais em seu sistema de construção, envolvendo seus subsistemas em diferentes níveis de organização e ordenação. A interpretação dos eventos vivenciados pela pessoa leva à reestruturação dos sub-sistemas, frisando que estas mudanças nos sub-sistemas são de acordo com suas estruturas, fazendo que o individuo exerça domínio sob suas habilidades. Nesta pesquisa será investigada a forma como a natureza constrói suas estruturas geométricas, através de seus processos

1.4.6 Corolário da experiência

O *corolário da experiência* nos explica que o sistema de construção de uma pessoa muda à medida que ela constrói réplicas de eventos e as confronta com as realidades do universo, isto é, a pessoa reconstrói seus construtos para melhorar suas antecipações. Este corolário é relacionado à idéia de Kelly sobre aprendizagem. Kelly discute neste corolário que a aprendizagem não é algo que acontece a uma pessoa em determinada ocasião, porém, o resultado das tentativas da pessoa lidar com suas experiências e seus eventos. Kelly define experiência como um ciclo contendo cinco fases: antecipação, investimento, encontro, confirmação ou desconfirmação e revisão construtiva. (KELLY, 1970, p.15 *apud* BASTOS 1998).

Dessa forma, para haver aprendizagem, é preciso engajar a pessoa nesse processo complexo, que se inicia com a fase da antecipação, quando a pessoa utilizando os construtos que possui no seu sistema de construção tenta antecipar o evento. Após essa fase, de acordo com sua capacidade de construir à réplica do evento, a pessoa se engaja numa fase de investimento, quando ela se prepara para se encontrar com o evento. No encontro, a pessoa checa suas teorias pessoais, o que conduz à confirmação ou desconfirmação das mesmas, seguida pela revisão dos pontos que geraram problemas.

Um aspecto importante dessa revisão é a construção de novas relações dentro do sistema de construtos, como, por exemplo, o desenvolvimento de novas estruturas subordinadas a construtos mais gerais já existentes. Esses construtos, contudo, podem ou não aceitar novas estruturas subordinadas – uma característica chamada permeabilidade por Kelly.

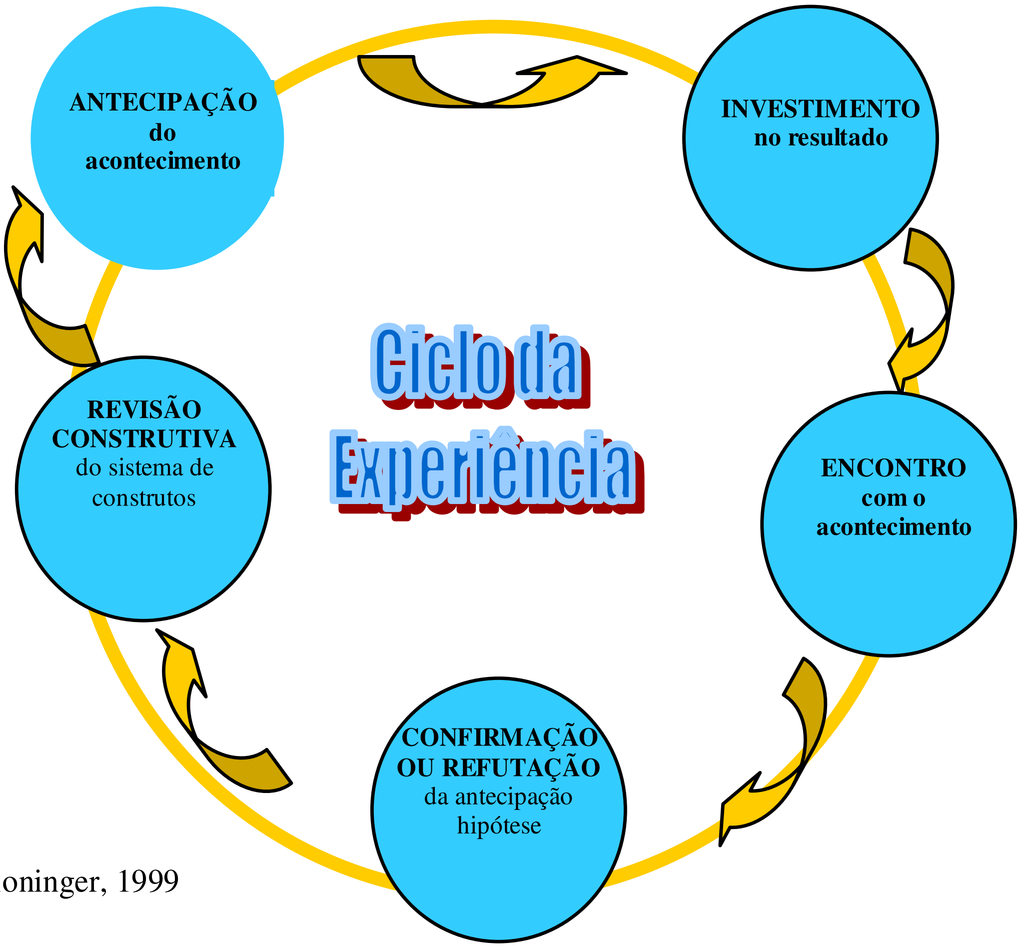
Essa limitação à mudança é tratada pelo *corolário da modulação*. Segundo Kelly “A variação no sistema de construção de uma pessoa é limitado pela permeabilidade dos construtos em cujas faixas de conveniência se encontram as variantes” (KELLY, 1970, p. 19 *apud* BASTOS, 1998).

1.4.7 Ciclo da Experiência de Kelly

O ciclo de experiência de Kelly envolve cinco fases, que são: a fase da antecipação; a fase do investimento; a fase do encontro; a fase da confirmação ou desconfirmação e a fase da revisão construtiva.

A fase *da antecipação* compreende a previsão dos eventos a serem vivenciados pelo indivíduo, de maneira que ele possa observar o que está para acontecer. Nessa fase o indivíduo constrói as primeiras replicas dos processos que foram apresentados, buscando um prognóstico inicial dos eventos subseqüentes, de acordo com o seu sistema de construção de conhecimento. A segunda etapa é a fase do *investimento* na qual o individuo deve procurar envolver-se com os eventos a serem vivenciados durante o processo da sua aprendizagem. Na fase do *encontro* é estabelecida a interação entre o indivíduo e os eventos vivenciados. O produto destas interações tem a capacidade de transformar o indivíduo e sua forma de construir os eventos vivenciados (KELLY, 1977). Após a experimentação dos eventos vivenciados pelo individuo (encontro), este deve ser capaz de confirmação ou refutação de suas observações, frente aos eventos vivenciados por ele. Esta fase é chamada *confirmação* ou *desconfirmação*, podendo ou não o indivíduo criar novas construções.

Chamado de *revisão construtiva,* a quinta fase do ciclo da experiência de Kelly, permite ao individuo a conclusão deste, sendo contemplada a unidade básica de aprendizagem definida por Kelly. Nesta fase do ciclo o indivíduo passa a reconhecer uma significativa mudança em seu sistema de construções, se conscientizado que seu crescimento cognitivo foi promovido, graças à experiência e a aprendizagem, segue uma ilustração mostrando o ciclo da experiência de Kelly.



Fonte: Cloninger, 1999

1.4.8 O Teste da Matriz de Repertórios (Rep-Teste)

George Kelly desenvolveu o Teste da Matriz de Repertórios (Rep-teste), como técnica para investigar os sistemas antecipatórios de seus pacientes, com o intuito de explorar os seus construtos e suas relações com diversos elementos. Embora o desenvolvimento da técnica tenha acontecido priorizando aplicações clínicas, estudos mostram que este teste pode ser utilizado para diagnosticar alterações nos sistemas antecipatórios decorrentes de experiências educacionais. Neste trabalho de pesquisa, este teste será utilizado, com o propósito de investigar os sistemas antecipatórios dos alunos. Serão explorados os construtos utilizados para fazer referência a propriedades e características da Geometria

Fractal, além do nível de articulação estabelecida entre estes construtos. A versão da matriz utilizada na pesquisa será a proposta por Bannister e Mair(1968)(apud MINGUET, 1998). Realizado o teste, foram apresentadas aos alunos três estruturas geradas pela natureza e três estruturas construídas pelo homem, tais como: Árvores, arborizações vasculares, corais, edifícios, cadeiras, veículos. O pesquisador escolheu três dessas estruturas criadas pelo homem ou pela natureza e solicitando que o aluno cite características geométricas que sejam comuns a duas dessas estruturas e que não pertençam à terceira estrutura.

As formas geométricas euclidianas e fractais que foram serão usadas como pólos, foram desenvolvidas, a partir das atividades propostas nas atividades com material concreto e o programa Cabri-Géomètre II. Dessa forma, foram estabelecidos dois pólos dicotômicos relacionados a um construto. A seguir é solicitado que o aluno categorize as formas geométricas construídas pela natureza ou pelo homem com base nos dois pólos estabelecidos. Para isto deve-se construir uma escala numerada entre 1 e 5, sendo a pontuação 1 referente a duas formas geométricas mais semelhantes e a pontuação 5 a forma geométrica que mais diferiu das duas primeiras. O procedimento foi repetido diversas vezes para várias tríades de formas geométricas criadas pelo homem ou pela natureza até que se obteve um razoável número de construtos.

Com o objetivo de esclarecer o procedimento da matriz de repertório será dado um exemplo de uma matriz de repertório, construída a partir de uma intervenção com mestrandos do curso de Ensino de Ciências da UFRPE da área de biologia, onde se questionava o que seria importante na formação continuada de professores de ciências.

A análise do quadro adiante mostra que o conceito de formação continuada para os estudantes da área de biologia envolve a capacitação, a especialização, o mestrado, participação em congresso e a publicação de artigos científicos. Além disso, a matriz de repertório também mostra a importância da participação do sujeito no seu processo de formação continuada. Observe-se que numa escala de 1 (máximo) a 5 (mínimo) o entrevistado atribuiu grau 1 (máximo) a participação do sujeito durante a formação do indivíduo nos cursos de capacitação, especialização e mestrado. Para participação em Congresso o grau atribuído foi 3, um valor mais próximo do mínimo (grau 5), possivelmente porque ele acha que participação do sujeito neste tipo de formação é menor que durante realização de um curso formal.

Na atividade publicação de artigos científicos o entrevistado atribuiu grau 2, um valor mais próximo do máximo (grau 1), mostrando que ele reconhece importância do sujeito nesta atividade de formação. Observe que além dos pólos dicotômicos sujeito ativo e sujeito passivo foram criados pelo entrevistado vários outros pólos dicotômicos.

Portanto, o conceito de formação continuada para os entrevistados envolve não só os diferentes níveis de cursos realizados pelo professor em sua formação continuada, porém também a participação do professor em formação durante todo o processo.

Tabela 3. Matriz de Repertório do Professor Biologia "P_B"

1	Capacitação	Especialização	Mestrado	Participação em congresso	Publicação de artigos científicos	5
Sujeito Ativo	1	1	1	3	2	Sujeito passivo
Postura crítica em relação à ciência e a sociedade	1	1	1	2	1	Postura acrítica
Construção coletiva do conhecimento	1	1	1	2	2	Construção individual do conhecimento
Visão complexa	1	1	1	3	3	Visão fragmentada
Ciência como verdade absoluta	5	5	5	2	3	Ciência não absoluta
Ensino construtivista	1	1	1	2	2	Ensino tradicional
Disciplinas interligadas	1	1	1	2	2	Disciplinas isoladas

1.5 Cabri-Géomètre

O software Cabri-Géomètre, é a abreviatura da expressão **CAHIER DE BROUILLON INTERACTIF** (Caderno de rascunho interativo). Idealizado por Jean-Marie Laborde e Franck Bellemain no Institute D'Informatique et Mathematiques Aplliquées de Grenoble na Universidade Joseph em Grenoble, França. O Cabri-Géomètre é representado no BRASIL desde 1992 pela PROEM (Programas de Estudos e Pesquisas no Ensino da Matemática) na PUC-SP. Ele tem o diferencial de possibilitar a interação do educando no que se refere à manipulação direta das figuras geradas via microcomputador.

1.5.1 Características do Cabri-Géomètre

- **Geometria Dinâmica**
  - Figura com movimento mantendo as suas propriedades
- **Construtivista**
  - O aluno cria as suas atividades construindo seu conhecimento
- **Software Aberto**
  - O professor cria as atividades como queira
- **Trabalhar Conceitos**
  - Construções de figuras geométricas
- **Explorar Propriedades dos Objetos e suas Relações**
  - Comprovar Experimentalmente
- **Formulação de Hipóteses e Conjecturas**
- **Históricos das Construções**
- **Criação de Macros**

O Cabri está disponível em mais de 40 países e em 24 idiomas diferentes e pode ser considerado um micro mundo da geometria dinâmica. Que em termos, se propõe a realizar construções da geometria euclidiana, que eram feitas com auxilio de régua e compasso.

Uma das áreas que vem recebendo atenção especial no ensino da matemática é a geometria. Após um período em que o seu ensino foi praticamente abandonado, têm se procurado esclarecer seus objetivos, os principais obstáculos para que estes sejam atingidos e elaborar novas estratégias para serem aplicadas em sala de aula.

A partir deste desafio, foram desenvolvidos os softwares conhecidos como ambientes de Geometria Dinâmica, dentre os quais se destaca o Cabri-Geometre II que utilizamos nesta pesquisa. O Cabri-Geometre é um programa que "permite construir e explorar de forma interativa os objetos do universo da geometria elementar em uma linguagem muito próxima a do universo lápis e papel". O Cabri funciona como um caderno interativo. Partindo desta concepção, orientamos os alunos a realizarem etapas distintas a fim de descobrirem propriedades e regularidades geométricas. A primeira etapa é a construção geométrica, no Cabri, da situação a ser analisada, em seguida, utilizando todo o dinamismo do software, os alunos devem explorar a figura para que então possam formar uma conjectura (mentalmente ou no papel), a qual vai se procurar verificar sobre diferentes configurações e, por fim, formalmente, sem o uso do computador, demonstrar as conclusões obtidas.

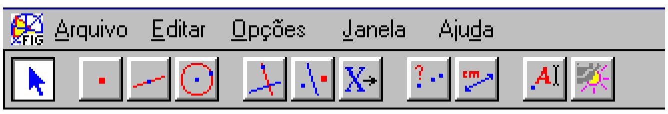
Inicialmente, faremos uma breve apresentação do software Cabri-Geometre II a respeito dos itens constantes no menu. Em seguida, realizaremos atividades construídas de acordo com a perspectiva descrita acima que visam propiciar o raciocínio matemático através de construções envolvendo simetria axial, construções geométricas euclidianas e fractal.

O software Cabri-Géomètre é apresentado com menus e barras de rolagem que ilustraremos a seguir algumas das funções básicas do Cabri.

1.5.2 Conhecendo O Cabri Géomètre II

1.5.2.1 Barras de ferramentas

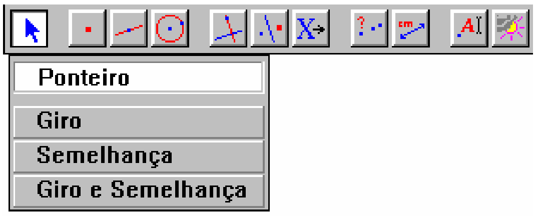
O programa abre-se numa tela onde, no topo, estão apresentados o menu e a barra de



ferramentas, com os botões que são chamados de "caixas de ferramentas".

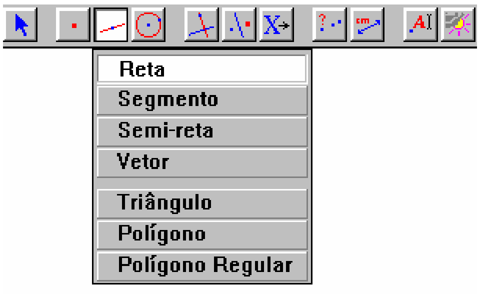
Clicando e mantendo pressionado o botão para que você veja as opções em cada um. Para selecionar uma das opções, basta ir com o ponteiro à opção (mantendo pressionado o botão) e soltar o clique.

Ponteiro

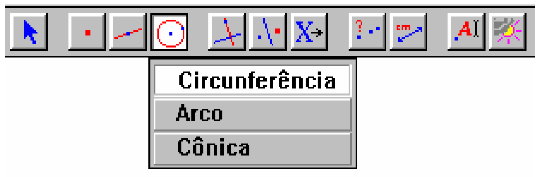


Pontos

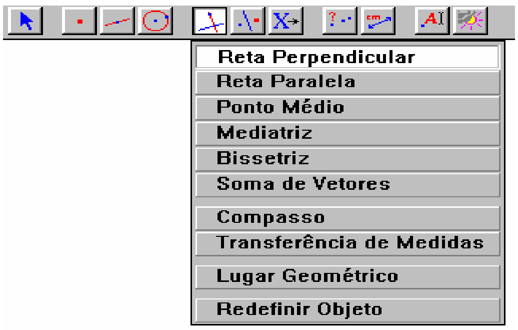
Retas



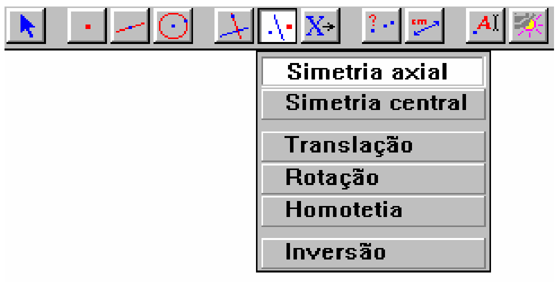
Curvas



Construir

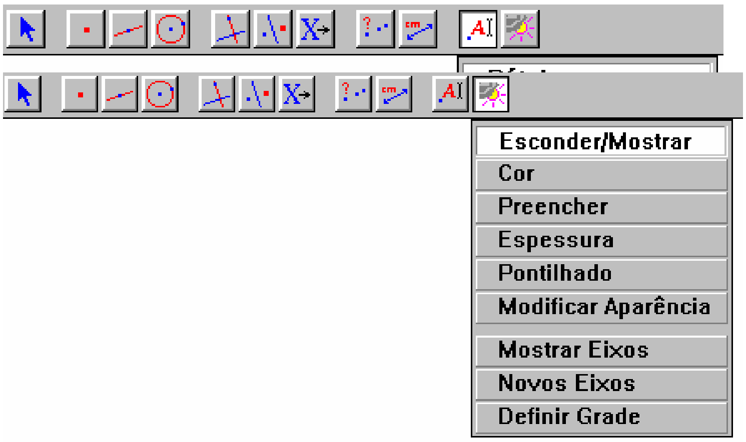


Transformar



Medir

Exibir



Desenhar

FORMAS DO PONTEIRO

O ponteiro ( ) assume algumas formas de acordo com tarefa:

ponteiro: para **selecionar** as opções

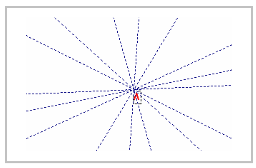
lápis: quando o ponteiro é movido para a tela – serve para **desenhar**.

mão apontando: quando aparece **mensagens** do tipo este ponto, por este ponto, nesta reta, etc.

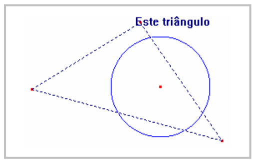
mão cumprimentando: quando pressionado o mouse, a mão apontando se transforma em mão cumprimentando – serve para **mover**.

uma lupa: quando tiver mais de um objeto a marcar a mão apontando transforma-se numa lupa com a mensagem **Qual objeto?**

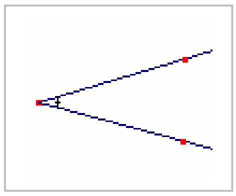
Alguns comandos freqüentemente utilizados são descritos a seguir:



APAGANDO TUDO: menu editar, escolhendo a opção selecionar tudo, ficará tudo piscando, aperte a tecla delete.

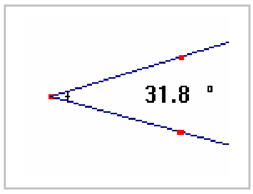


APAGANDO APENAS UMA FIGURA: apertando o botão ponteiros, levando o cursor à figura que deseja apagar, aparecerá uma mensagem especificando a figura; clicando a figura ficará piscando; aperte a tecla *delete*.



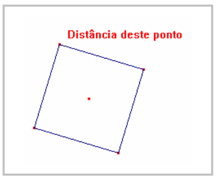
MARCANDO ÂNGULO: pressionando o botão exibir, selecione a opção marca de ângulo, leve o ponteiro à tela e clique em três pontos sendo que o segundo deve ser o vértice do ângulo.

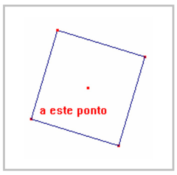
MEDINDO ÂNGULO: pressione o botão medir e escolha a opção ângulo. Clique nos três pontos sendo que o segundo ponto deve ser o vértice do ângulo.

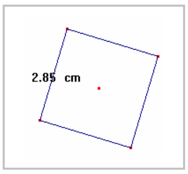


MEDINDO DISTÂNCIA E COMPRIMENTOS: pressione o botão medir e escolha a opção distância e comprimento.

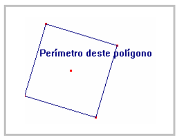
Distância ponto a ponto: cursor em um dos pontos até aparecer a mensagem *distância deste ponto* e clique; leve o cursor até o outro ponto até aparecer a mensagem *a este ponto* e clique; aparecerá a distância do segmento.



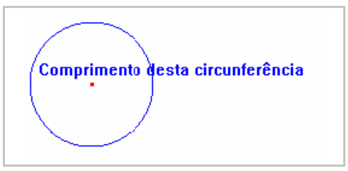




<u>Perímetro de uma figura</u> *(triângulo, polígono, etc.):* cursor na figura até aparecer a mensagem *perímetro* da figura e clique



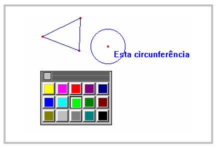
Comprimento da circunferência: cursor na circunferência até a parecer à mensagem comprimento desta circunferência e clique.



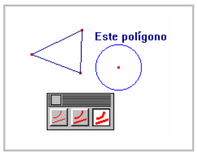
MEDINDO ÁREA: pressionando o botão medir e escolha a opção área; clicando sobre a figura cuja área deseja calcular.

MODIFICANDO:

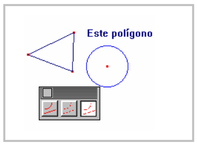
A COR: pressionando o botão desenhar e escolhendo a opção *cor*; aparecerá a paleta de cores; escolhendo a cor desejada.



A ESPESSURA*:* pressionando o botão desenhar e escolhendo a opção espessura; escolha a espessura na *paleta*.

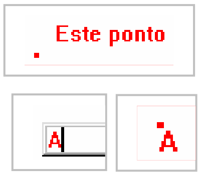


O PONTILHADO: pressionando o botão desenhar e escolhendo a opção pontilhado; escolha o pontilhado na *paleta.*

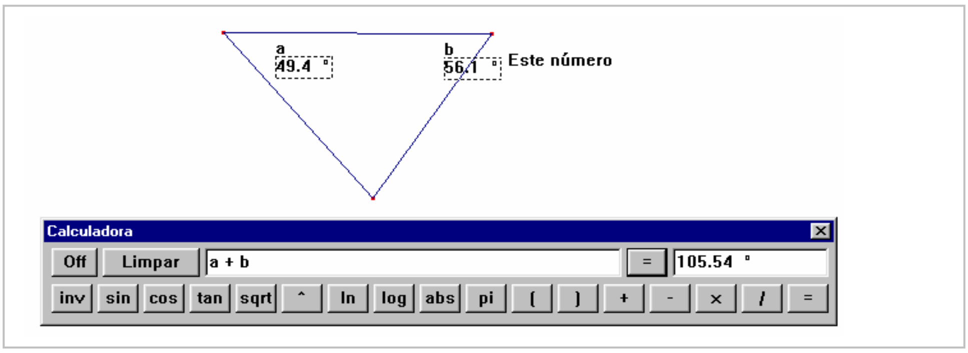


MOVENDO OBJETOS (PONTO, RETAS, SEMI-RETAS, ETC): pressionando o botão ponteiros; levando o cursor ao objeto até aparecer a mensagem especificando este objeto, o ponteiro ficará na forma de uma mão apontando; *clique* e o ponteiro virará uma mão cumprimentando, com o mouse pressionado mova o objeto.

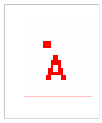
NOMEANDO (ponto, reta, circunferência, etc.): pressionando o botão *exibir* e selecione a opção rótulo. Levando o ponteiro ao ponto até aparecer à mensagem este ponto (esta reta, esta circunferência); clicando (aparecerá um quadrinho) e escreva.



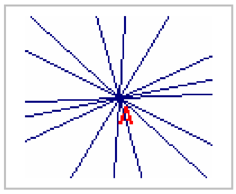
USANDO A CALCULADORA: pressionando o botão medir e escolhendo a opção calculadora; aparecerá a calculadora no inferior da tela. Movendo o ponteiro ao número até aparecer escrito *este número* e clique; depois clique: na função da calculadora, na outra medida e no sinal de igual. Aparecerão letras na calculadora e nos números. Podendo também digitar os números, porém, se forem decimais, no lugar da vírgula usar ponto.



1.5.3 Fundamentos de geometria

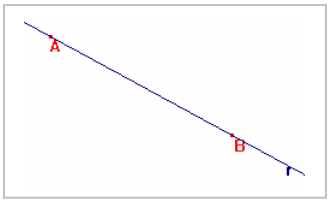


Criando um ponto: botão pontos - opção ponto; *cliquar* na tela (o ponteiro está na forma de um lápis) e solte; nomear o ponto, lembrando que os pontos são nomeados com letras maiúsculas latinas: A, B, C,.

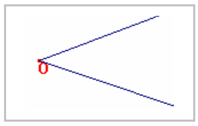


Criando retas por esse ponto: botão retas – opção reta; ir ao ponto até aparecer escrito por este ponto (o ponteiro ficará uma mão apontando); *clicar* o ponteiro ficará com a forma de um lápis, arrastando-o distante do ponto.

Criando uma reta passando por dois pontos distintos: criar dois pontos distantes um do outro, nomeie-os.

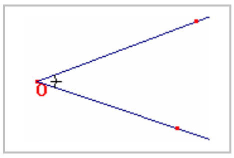


Clicar no botão *retas*, vá a um dos pontos até aparecer escrito por este ponto, clique, ir até o outro ponto até aparecer novamente por este ponto e cliquar aparecerá a reta; nomeie a reta. Lembre-se que as retas são nomeadas com letras minúsculas latinas: a, b, c, ...

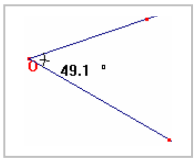


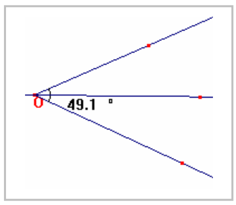
Criando uma semi-reta: botão retas – opção semi-retas; clique na tela, arraste o ponteiro e *clique*; nomeando o ponto de origem da semi-reta com a letra O; criando mais uma semi-reta na mesma origem.

Marcando

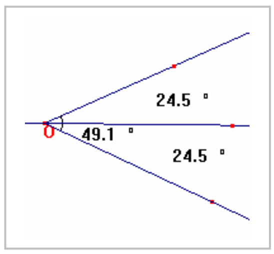


Medindo



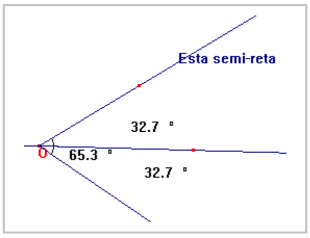


Construindo uma bissetriz: botão criação – opção *bissetriz*; clicando nos três pontos sendo que o segundo deve ser a origem O; formou a *bissetriz*.

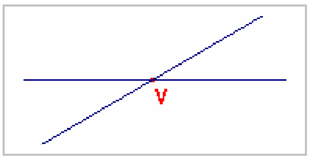


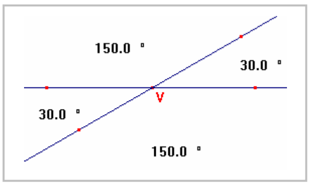
Medindo os novos ângulos.
Arrastando as medidas dos novos ângulos para o meio dele.

Movimentando as semi-retas: abrindo e fechando; percebendo mudanças quando movimenta a semi-reta.

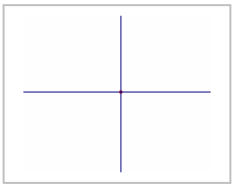


<u>Retas concorrentes</u>: Criando um ponto e duas retas distintas se cruzando nesse ponto. Nomeando este ponto com a letra V. Medindo os quatro ângulos. Arrastando os valores para não se misturarem. Vamos movimentar as retas.

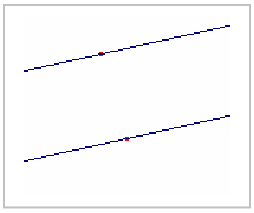




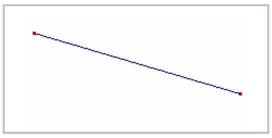
<u>Retas perpendiculares</u>: crie uma reta, selecione a opção reta perpendicular no botão *construir*.

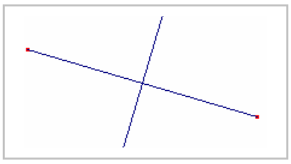


<u>Retas paralelas</u>: crie uma reta, selecione a opção reta paralela no botão *construir*. Clique na reta criada, distancie da reta e clique novamente. Vamos movê-las. Elas são sempre paralelas.



<u>Criando um segmento de reta</u>: pressionando o botão reta – opção segmento, clicando na tela, arrastando o ponteiro e clicando novamente.



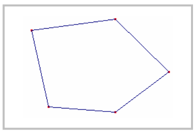
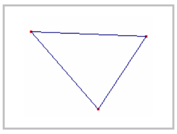
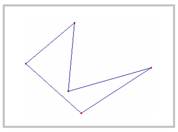
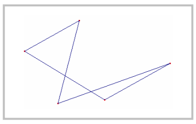
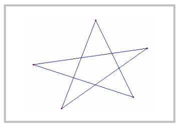


<u>Mediatriz de um segmento de reta</u>: escolhendo a opção mediatriz no botão *construindo* e clicando no segmento.

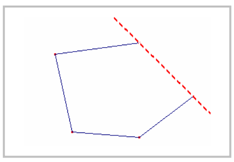
1.5.3.1 Construção de polígonos

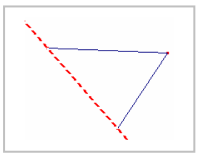
É chamada de polígono a união de três ou mais segmentos consecutivos.

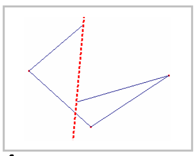
Criando um polígono**:** botão retas – opção *polígono*; clicando na tela para formar um ponto, distanciando do ponto e clicando novamente; repetindo duas vezes ou mais; o último *clique* deve ser no primeiro ponto fechar a figura. Segue exemplos de polígonos abaixo.

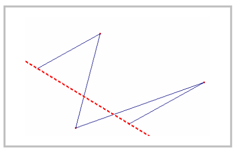
    

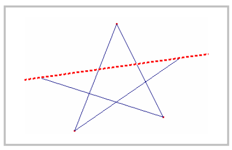
Polígono convexo e côncavo: um polígono é ***convexo*** se ao traçar uma reta por dois vértices consecutivos, deixa todos os outros vértices num mesmo semiplano, caso tenha uma reta passando por dois vértices consecutivos dividindo o polígono, ele é chamado de ***côncavo***. Verificando quais de seus polígonos são convexos e quais são côncavos. Para isso, escolhendo ***mostrar atributos*** no ***menu opções***; aparecerá no lado da tela uma caixa de ferramentas: escolhendo a cor que quiser para a reta pressionando o 1º botão superior; no 3º botão vai-se pressionando e escolhendo a opção de reta pontilhada; clicar no botão retas – opção reta e na tela chegando a um vértice do polígono até aparecer a mensagem ***por este ponto***, cliquar e fazer; faça o mesmo no outro vértice consecutivo. Veja dos exemplos citados acima quais são côncavos e convexos.


convexo


convexo

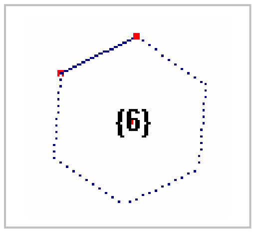

côncavo


côncavo


côncavo

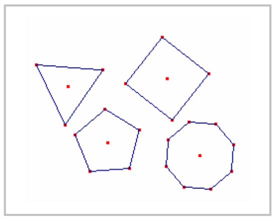
POLÍGONOS CONVEXOS REGULARES

Criando um polígono regular: clicando no botão retas e selecionando a opção polígono regular; clicando na tela para marcar o centro e afastando o cursor sem pressionar o mouse até o raio desejado; clicando e movendo (sem pressionar o mouse) para o ***sentido horário***; o número de lados do polígono aparece no centro. construindo quantos polígonos desejar, com diferentes números de lados. De acordo com o número ***n*** de lados os polígonos recebem nomes especiais:



$n = 3 \rightarrow$ triângulo $\rightarrow$ 3 lados

$n = 7 \rightarrow$ heptágono $\rightarrow$ 7 lados

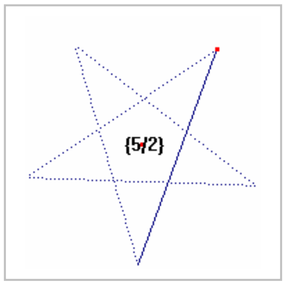


$n = 4 \rightarrow$ quadrilátero $\rightarrow$ 4 lados $n = 8 \rightarrow$ octógono $\rightarrow$ 8 lados

$n = 5 \rightarrow$ pentágono $\rightarrow$ 5 lados $n = 9 \rightarrow$ eneágono $\rightarrow$ 9 lados

$n = 6 \rightarrow$ hexágono $\rightarrow$ 6 lados $n = 10 \rightarrow$ decágono $\rightarrow$ 10 lados

Criando um polígono regular em estrela: criando um polígono, girando o cursor no sentido ***anti-horário***. Aparece uma fração no centro, o numerador indica o número de lados; o denominador o número de cruzamentos da estrela.

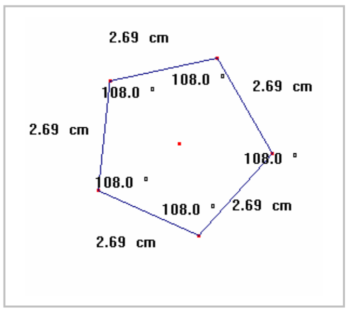


Verificando algumas propriedades.

Vamos a alguns exemplos:

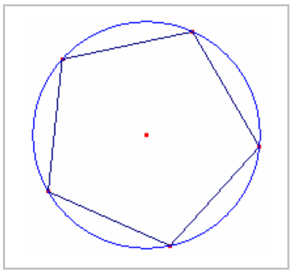
Faça um pentágono; meça seus lados.

Um polígono que possui os lados congruentes diz-se eqüilátero. Assim o triângulo que possui os lados congruentes é chamado de triângulo eqüilátero e, o quadrilátero regular (que possui os lados congruentes) é chamado de quadrado.



Saiba que: a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono é dada pela fórmula Si = (n-2) 180°. Vamos conferir: n é o número de lados, o pentágono tem 5 lados. Então Si = 3 × 180° = 540°. Some os ângulos do pentágono usando a calculadora do Cabri.

Todo polígono regular é inscritível numa circunferência. Isso é possível se a circunferência passar por todos os seus vértices. Para conferir: clique no botão curvas – opção circunferência, vá ao centro do polígono até aparecer a mensagem este centro e clicar; distancie o cursor a um vértice até aparecer a mensagem passando por este ponto; o pentágono ficou inscrito na circunferência.



O software **Cabri-Géomètre** será usado no presente trabalho com o objetivo de permitir que os estudantes possam construir figuras euclidianas e fractais.

CAPÍTULO 2

METODOLOGIA.

2 METODOLOGIA

Neste capítulo será apresentada a forma como o trabalho de pesquisa foi desenvolvido para que os objetivos definidos inicialmente fossem alcançados. Será apresentado como foi procedida à intervenção, observando os detalhes em todas as etapas.

2.1 Universo e amostra

O universo de pesquisa foi composto por alunos de uma turma de terceiro ano de uma escola publica da zona norte da cidade do Recife. Na primeira fase da pesquisa a turma participou integralmente, contudo, apenas 03(três) alunos, foram escolhidos para participar da segunda etapa, com base nos perfis observados na primeira etapa. Foi escolhido um aluno com perfil de conhecimento muito bom, outro com perfil médio e um último com perfil fraco. As ferramentas para coleta de dados foram aplicadas como segue. A colaboração do professor da disciplina de matemática desta turma foi de grande valia para efetiva aplicação da pesquisa, fato que criou condições favoráveis para a aplicação das atividades.

A pesquisa foi desenvolvida qualitativamente, com base na Teoria dos Construtos Pessoais de Kelly. A pesquisa procura aspectos relacionados à aprendizagem da geometria da natureza e seus objetivos específicos procuram investigar o nível de percepção dos alunos sobre esta nova geometria. Visando uma análise dos vários aspectos envolvidos na pesquisa e intervenção, foram utilizados diferentes instrumentos de coleta de dados, sendo o principal a matriz de repertório.

A técnica da matriz de repertório permite uma análise tanto qualitativa como quantitativa dos dados coletados, que posteriormente podem fornecer elementos para uma discussão dos sistemas de construtos dos alunos pesquisados e de suas mudanças conceituais. O outro instrumento utilizado foi um questionário diagnóstico, aplicado no primeiro dia da intervenção, com a intenção de diagnosticar as concepções prévias dos alunos a respeito tanto da geometria euclidiana tanto sobre a Geometria Fractal.

2.2 Intervenção didática

A intervenção consistiu de 2 (duas) etapas distintas: a primeira (**A**), consistiu de discussões relacionadas à geometria euclidiana, utilização do software Cabri Geométre e de materiais concretos e foi realizada em forma de seminários sendo um para a geometria euclidiana e outro versando sobre a geometria fractal, objeto de estudo da pesquisa, foi ainda realizada uma diagnose dos conhecimentos prévios dos alunos com relação à caracterização das formas geométricas construídas pelo homem e pela natureza. Nesta etapa da diagnose os alunos responderam a questões abertas visando observar características geométricas em diferentes objetos construídos pelo homem e pela natureza.

O primeiro seminário foi para apresentar textos, filmes, construções concretas, resoluções de exercícios básicos versando sobre geometria euclidiana, apresentação de recursos do software Cabri Geométre II, construções geométricas euclidianas utilizando, régua, compasso, par de esquadros e atividades desenvolvidas com software de geometria dinâmica Cabri Geométre II, dando posteriormente suporte para a etapa subseqüente, que foi o segundo seminário, no qual foi apresentado o objeto da pesquisa. O formato da segunda etapa (**B),** utilizou o Ciclo da Experiência de Kelly; também foi aplicada a matriz de repertório, individualmente com os 3 (três) alunos. As etapas são detalhadas a seguir.

2.2.1 Primeira etapa

Esta etapa teve quatro encontros de quatro horas cada, com objetivo de investigar as concepções prévias dos alunos em relação à geometria euclidiana. Vale salientar que a turma toda fez parte desta etapa. O primeiro momento foi a aplicação de um questionário, no qual as respostas eram dissertativas, com intuito de se obter um panorama acerca dos conhecimentos prévios dos alunos em relação às geometrias por eles estudadas até o momento. Foi introduzido também o estudo e utilização do Software Cabri Geometre, através de roteiros de atividades. Ainda nesta etapa foram escolhidos 3 (três) alunos, aos quais seria aplicada a técnica da matriz de repertório. Vale frisar que a escolha destes alunos contou com a colaboração do professor responsável pela turma. As respostas dos alunos foram analisadas logo após a aplicação do questionário, com o objetivo de direcionar a seqüência da segunda etapa. Com o intuito de analisar o grau de articulação que foram organizados em relação às formas e processos construídos pelo homem e a natureza, categorizamos em 8 (oito) categorias as respostas dos estudantes ao questionário.

2.2.1.1 Etapa A

Nesta etapa foram trabalhados o filme "Donald no país da matemágica" e os seguintes textos: "número de ouro publicado na revista sala de aula" - a revista do ensino médio, edição de n.6, mês novembro, da Editora Abril, Pathernon publicado na revista Projeto escola e cidadania da Editora Brasil e capítulos do livro "A divina proporção", do autor HUNTLEY, H.E, da editora UNB, ano 1985., atividades envolvendo construções manuais com material de desenho, utilizando exercícios do livro didático "Desenho Geométrico- Idéias e imagens" volumes de 1 até o volume 4, autora Sônia Jorge da Editora Saraiva, fichas de atividades da disciplina de Desenho Geométrico do curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco-UFRPE. As atividades foram desenvolvidas no laboratório de Matemática, devido à boa estrutura física e de materiais de desenho. Este conjunto de atividades foi desenvolvido em duas aulas de 50 min cada. Ao final foi aplicado um questionário composto por 8 (oito) perguntas versando sobre geometria, apresentadas no Quadro 01.

	Quadro 01- Questionário Diagnóstico
QUESTÃO 01	O que significa geometria para você?
QUESTÃO 02	Que tipos de geometrias você conhece?
QUESTÃO 03	Das que você conhece, cite alguns exemplos de suas construções?
QUESTÃO 04	Qual a utilidade prática da geometria na sua visão?
QUESTÃO 05	Você acha que as geometrias que você conhece são capazes de descrever as formas construídas pelo homem?
QUESTÃO 06	E as formas construídas pela natureza? Podem ser também descritas pelas geometrias que você conhece?
QUESTÃO 07	O que você entende por dimensão em relação à geometria?
QUESTÃO 08	Dê um exemplo de dimensão nas geometrias que você conhece.

As respostas dos alunos foram analisadas logo após este momento, visando planejar a etapa B. Observar a articulação dos alunos em relação às propriedades e processos de construções geométricas por eles conhecidas. Cada um destes processos e propriedades seriam abordados ao longo das fases do Ciclo da Experiência. Com intuito de analisar o grau de articulação estabelecido entre as geometrias e seus processos de construções de objetos conhecidos pelos alunos pesquisados em questão, as respostas referentes a cada questão foram classificadas em 8 (oito) categorias, apresentadas a seguir, no Quadro 02.

	Quadro 2 - Categorização das respostas ao questionário diagnóstico
A	Responderam de forma superficial, dando ênfase as formas e medidas.
B	Citaram a geometria plana, espacial e analítica.
C	Relacionaram as formas geométricas com a geometria adequada para descrevê-las.
D	Responderam de forma evasiva ou inadequada.
E	Sim 45%, Não 55%.
F	Responderam corretamente em relação aos objetos construídos pelo homem e equivocadamente em relação aos objetos construídos pela natureza.
G	Responderam com base nas formas euclidianas.
H	Citaram exemplos de figuras e processos de construções feitas pelo homem.

O resultado desta análise está representado nas figuras 13 até 20, apresentadas adiante. Nestas figuras encontram-se 08 (oito) gráficos, cada um referente a uma questão do questionário, a partir da analise dos gráficos foi decidido seriam abordados características fractais na etapa seguinte visando estabelecer uma visão de como os alunos percebem ou não a geometria e processos construídos pela natureza.

Quadro 03- Respostas dos alunos a 1ª. pergunta do questionário

QUESTÃO 01		
FORMAS	10	50%
MEDIDAS	3	15%
DIMENSÃO	3	15%
ARTE	1	5%
NÃO RESPONDERAM	3	15%

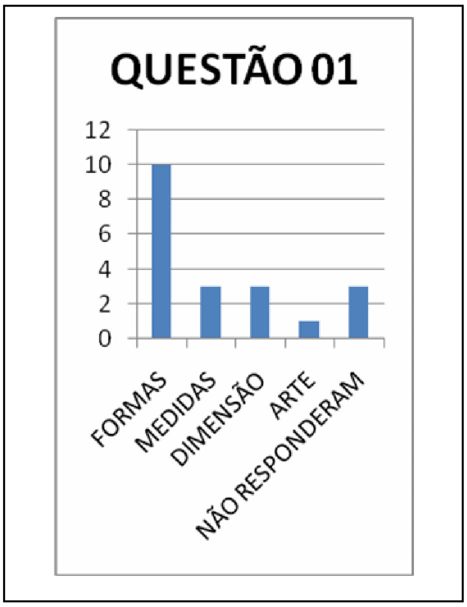


Gráfico 01- respostas dos alunos a questão 01

Quadro 04- Respostas dos alunos a 2ª. pergunta do questionário

QUESTÃO 02		
ANALÍTICA	11	55%
ESPACIAL	14	70%
PLANA	20	100%

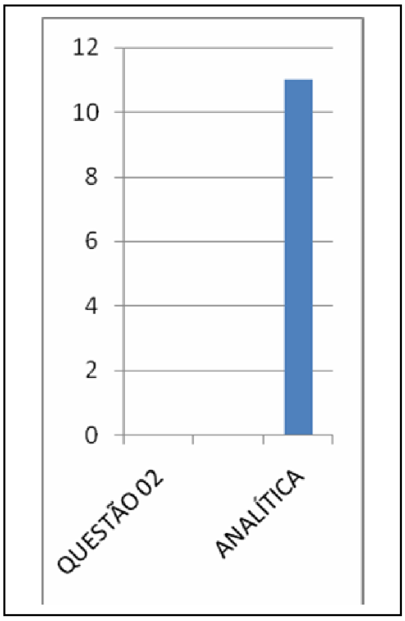


Gráfico 02- respostas dos alunos a questão 02

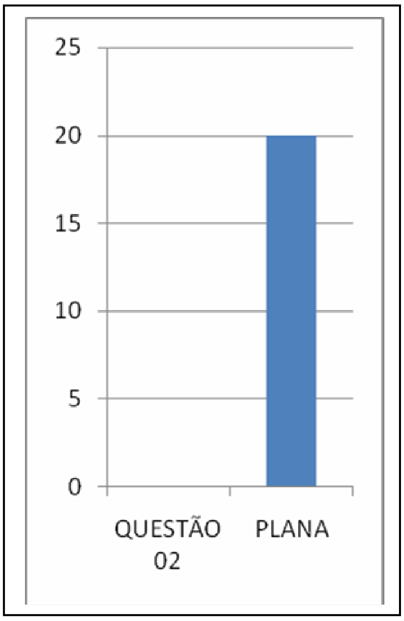


Gráfico 03- respostas dos alunos a questão 02

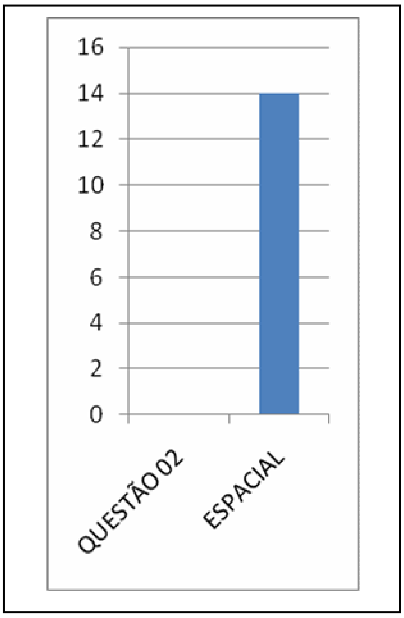


Gráfico 04- respostas dos alunos a questão 02

Quadro 05- Respostas dos alunos a 3ª. pergunta do questionário

QUESTÃO 03		
CONSTRUÇÕES NATUREZA	1	5%
CONSTRUÇÕES HOMEM	19	95%

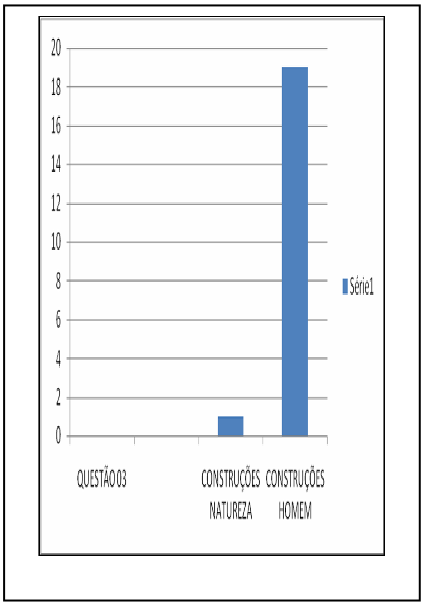


Gráfico 05- respostas dos alunos a questão 03

Quadro 06- Respostas dos alunos a 4ª. pergunta do questionário

QUESTÃO 04		
RESPOSTA EVASIVA	4	20%
RESPOSTA INADEQUADA	3	15%
RESPOSTA ADEQUADA	13	65%

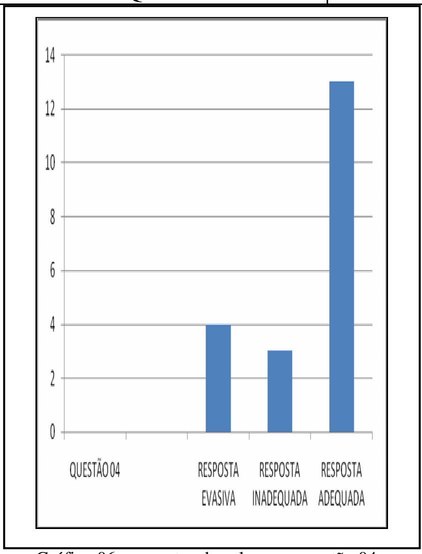


Gráfico 06- respostas dos alunos a questão 04

Quadro 07- Respostas dos alunos a 5ª. pergunta do questionário

QUESTÃO 05		
SIM	11	55%
NÃO	9	45%

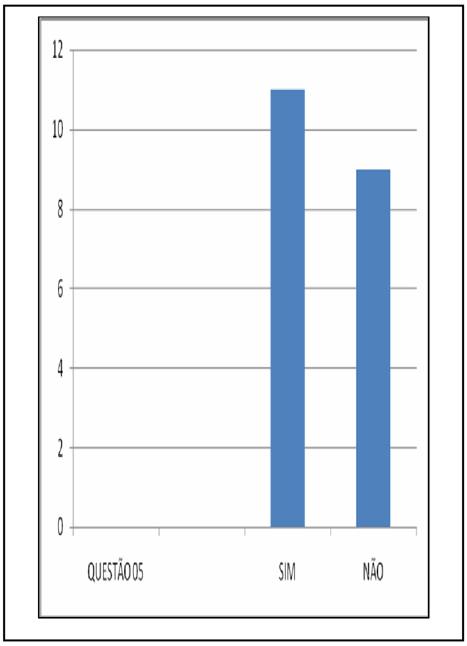


Gráfico 07- respostas dos alunos a questão 05

Quadro 07- Respostas dos alunos a 5ª. pergunta do questionário

QUESTÃO 06		
SIM	15	75%
NÃO	3	15%
NÃO SOUBE RESPONDER	2	10%

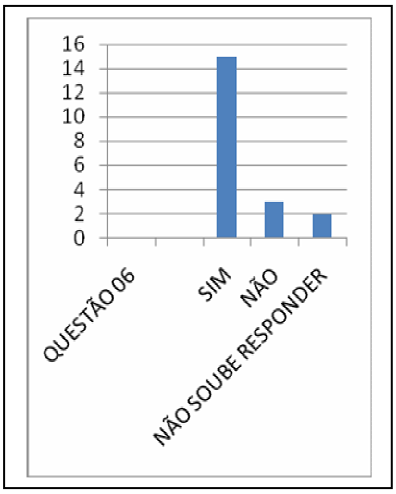


Gráfico 08- respostas dos alunos a questão 06

Quadro 08- Respostas dos alunos a 6ª. pergunta do questionário

QUESTÃO 07		
CITARAM AS DIMENSÕES EUCLIDIANAS	11	55%
CITARAM DIMENSÕES NÃO EUCLIDIANAS	6	30%
NÃO SOUBE RESPONDER	3	15%

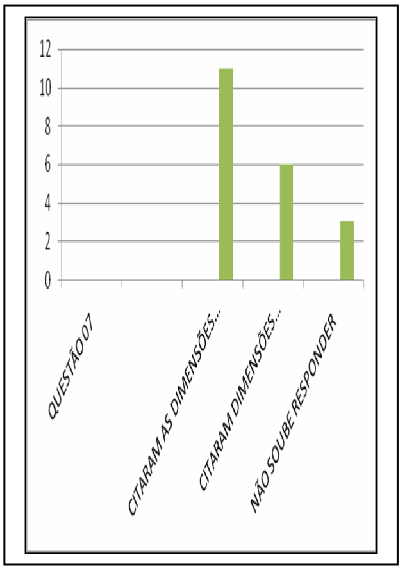


Gráfico 09- respostas dos alunos a questão 07

Quadro 09- Respostas dos alunos a 7ª. pergunta do questionário

QUESTÃO 08		
CONSTRUÇÕES HOMEM	19	95%
CONSTRUÇÕES NATUREZA	1	5%

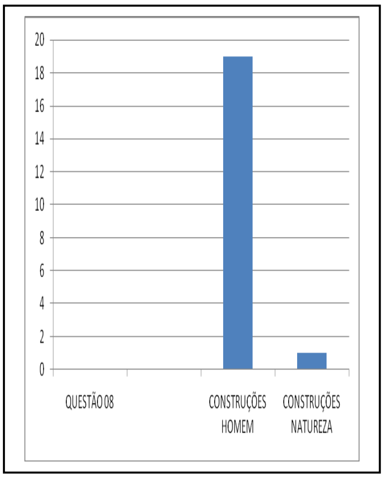


Gráfico 10- respostas dos alunos a questão 08

2.2.1.2 Etapa B

2.2.1.2.1 Antecipação

Na fase de antecipação que consiste em apresentar o objeto de estudo, o aluno toma conhecimento do evento a ser vivenciado e constrói alguma réplica deste evento a partir da estrutura do seu sistema de construtos.

O conjunto de atividades realizadas nessa fase ocorreu em forma de três encontros, com atividades individuais, em horário da disciplina. O objetivo seria dar suporte ao aluno, no sentido de que ele poderia prosseguir com a pesquisa, isto é, com ida aos laboratórios de matemática e informática, para iniciar o primeiro contato com o objeto de estudo da pesquisa, respondendo uma atividade que consistia em observar as formas de objetos que estavam dentro e fora da sala de aula. A idéia era que eles pudessem ter contato e perceberem como o homem e a natureza fazem as suas construções. Prosseguindo, eles executaram a segunda atividade com régua e compasso, que seria a construção da poeira de Cantor, sem ter ainda tido contato com a geometria fractal.

O segundo encontro desta etapa prosseguiu no laboratório de informática, com objetivo de executar as atividades com o software Cabri.

2.2.1.2.2 Investimento, encontro e confirmação

Nas fases de investimento, encontro e confirmação foram abordadas as principais propriedades da geometria fractal, que são: dimensão fractal, auto-similaridade e complexidade. A abordagem de cada característica, foi iniciada com a leitura e discussão de textos, apresentações de trabalhos em Power Point versando sobre o tema, preparação e realização de atividades experimentais. Cada abordagem das características dos fractais foi seguida por análise dos alunos participantes. As realizações das atividades consistem da fase de *investimento,* na qual se busca o engajamento dos alunos no evento a ser vivenciado. A análise dos resultados consistiu na fase de *encontro.* Nessa fase os alunos responderam aos questionamentos feitos pelo pesquisador, sobre quais seriam as características, observadas sobre os fractais nas atividades propostas (anexos 1, 2, 3. 4, 5 e 6). Os alunos tiveram 30 minutos para discussão em cada uma das abordagens e, após a discussão, se reuniam com o pesquisador e chegavam a um consenso. As conclusões dos alunos foram registradas no próprio texto da atividade.

Na fase de *confirmação* do Ciclo da Experiência, após os consensos dos alunos, o pesquisador conduziu uma discussão com os três alunos, na qual socializaram suas conclusões, as características observadas foram citadas de forma relevantes e os aspectos equivocados foram corrigidos pelo pesquisador.

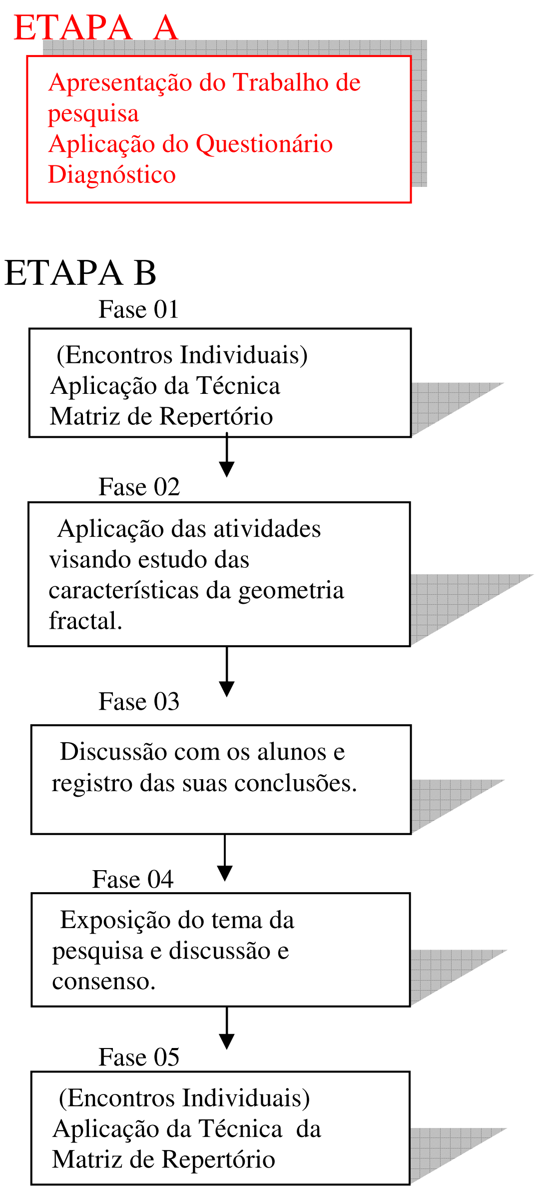
Após estas etapas os alunos passam à fase da *revisão construtiva,* que será descrita a seguir. A estruturação das três abordagens a partir dos mesmos procedimentos aplicados a diferentes propriedades teve como objetivo facilitar a percepção dos alunos sobre os aspectos comuns entre elas uma vez que de acordo com a Teoria dos Construtos Pessoais, um dos pressupostos teórico-metodológicos desta pesquisa é que os indivíduos alteram seus sistemas de construtos à medida que têm novas experiências, isto é chamado de temas recorrentes, que auxiliam na construção de réplicas dos eventos já vivenciados (KELLY, 1963).

2.2.1.2.3 Revisão construtiva

A revisão construtiva é a fase onde o indivíduo toma conhecimento das mudanças cognitivas operadas no fechamento do Ciclo da Experiência. A matriz de repertório foi aplicada aos três alunos neste momento, com o objetivo de investigar se no sistema de construtos dos alunos pesquisados houve mudanças após a intervenção didática.

Uma vez apresentada todas as atividades planejadas para o Ciclo da Experiência, faz-se necessário entender como foi programada a intervenção didática em sua totalidade, com intuito de facilitar o entendimento do Ciclo apresentamos abaixo esquema das atividades realizadas visando contemplar o Ciclo da Experiência. Nesta figura será observado que a etapa **A**, aparece diferenciada das demais, pois ela foi planejada como etapa de diagnose.

A etapa **B**, por sua vez, contempla na sua totalidade o Ciclo da Experiência de Kelly, iniciando pela etapa *antecipação,* onde se tem o contato com o objeto de estudo da pesquisa, nas etapas *investimento, encontro e confirmação,* são aplicadas as atividades visando contemplar o proposto nos objetivos da pesquisa que é introduzir o conceito de geometria fractal, discutidas e gravadas as observações e conclusões dos alunos, aplicação novamente da Técnica da Matriz de Repertório.



2.3 Experimentos didáticos

Na intervenção didática, durante o Ciclo da Experiência foram utilizadas 6 atividades, sendo que as duas apresentadas a seguir foram repetidas, pois no primeiro momento etapa (A**),** os alunos ainda não tinham tido contato com o objeto da pesquisa.

As seguintes atividades foram propostas:

2.3.1 Atividade 1 - O que é Geometria Fractal ?

1) Identificar e listar alguns objetos presentes na sala de aula, associando as suas formas às das figuras geométricas euclidianas conhecidas.

Objetos Observados	Figuras Associadas
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________

2) Repetir a observação, tomando agora como base áreas livres que você conheça (parques, jardins, quintais, etc.), associando, mais uma vez, as suas formas, aproximando-as de formas geométricas euclidianas conhecidas.

Objetos Observados	Figuras Associadas
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________

Resultados Observados

Antes de apresentar a Geometria Fractal ao grupo, esta atividade, de forma intuitiva, propôs a identificação da necessidade de outra geometria, que não a euclidiana para descrever as formas encontradas na natureza, já que as demais, construídas pelo homem, têm reconhecidamente formas euclidianas.

Para esta identificação foi solicitado ao grupo que listasse alguns objetos observados dentro e fora do ambiente da sala de aula relacionando-os às formas euclidianas. Os resultados desta investigação foram os seguintes:

Ambiente	Objetos Observados	Figuras Associadas
Dentro da	Quadro Negro	Retângulo
Sala de Aula	Mural	Retângulo
	Lata de Lixo	Cilindro
	Armário	Paralelepípedo
	Lâmpadas	Cilindros
	Assento da Mesa	Quadrado
	Cano	Cilindro
	Tampo da Fechadura	Círculo
	Porta	Retângulo
Fora da	Favo de Mel	Hexágono
Sala de Aula	Miolo das Flores	Círculo
	Tronco da Árvore	Cilindro
	Frutas (laranja, maçã, uva)	Esferas
	Estrela do Mar	Polígono Estrelado
	Gota	Retas e Círculos Concorrentes
	Pétala	Retas e Círculos Concorrentes
	Olhos dos Animais	Ovais

Após a simples listagem os alunos justificaram a imperfeição das formas geométricas encontradas na natureza pelo fato de possuirem "**...** *irregularidades próprias dela mesmo*" e, ainda " *As formas euclidianas são criadas pelo Homem, são fruto de generalizações*".

Atingido o objetivo primeiro da atividade, foi feito o seu fechamento ressaltando a importância da descoberta que eles próprios evidenciaram: a necessidade de uma "outra" geometria que descreva este "quase" euclidiano observado. Além disso foi ressaltada a característica de auto-similaridade dos fractais, exemplificada pela couve-flor, os brócolis e os galhos das árvores e mostrados alguns exemplos de fractais mais simples nas transparências.

2.3.2 Atividade 2 - Conjunto de Cantor

O “Conjunto ou Poeira de Cantor” considera um segmento de reta, dividido em três partes iguais, sendo retirado o terço central. De cada um dos dois segmentos restantes procede-se da mesma forma anterior, isto é dividindo-os em três partes iguais e retirando-se os terços médios. O processo de dividir os segmentos e de retirar o pedaço intermediário prossegue infinitamente. O “Conjunto ou Poeira de Cantor”, criado por George Cantor (1845-1918), é o conjunto de segmentos restantes. Este conjunto tem a cardinalidade do não enumerável, é não vazio, totalmente desconexo, não possui pontos isolados, sendo uma das mais simples construções fractais e o mais interessante. Este conceito de conjunto era algo incomum na Matemática no que diz respeito às dimensões uma vez que sob a ótica euclidiana só era possível pensar em dimensões inteiras. Talvez por esse motivo e por ser um modelo de fácil construção, é um exemplo trivial ao se tratar a teoria dos fractais.

Uma opção didática para a construção desse fractal é utilizando o Teorema de Tales na divisão de um segmento em partes iguais, aproveitando o uso de instrumentos de desenho. Essa construção é muito útil para representar números racionais na reta real.

Inicialmente vamos explorar como dividir um segmento AB em “n” partes iguais.

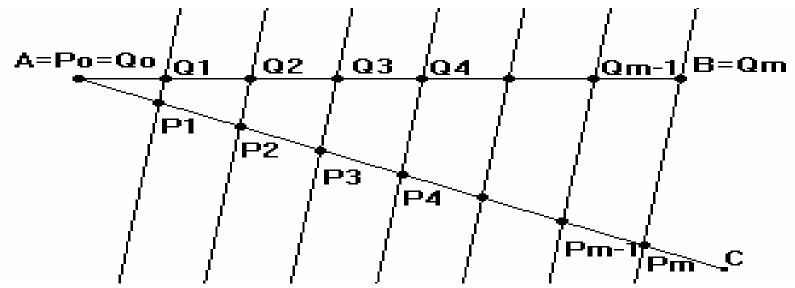


Figura 14 – divisão segmento AB em “n”partes iguais

1. Traça-se uma semi-reta AC distinta de AB.
2. Toma-se os pontos P_0, P_1,..., P_m na semi-reta AC tal que P_0=A, $P_0P_1 \cong P_1P_2$,..., $\cong P_{m-1}P_m$.

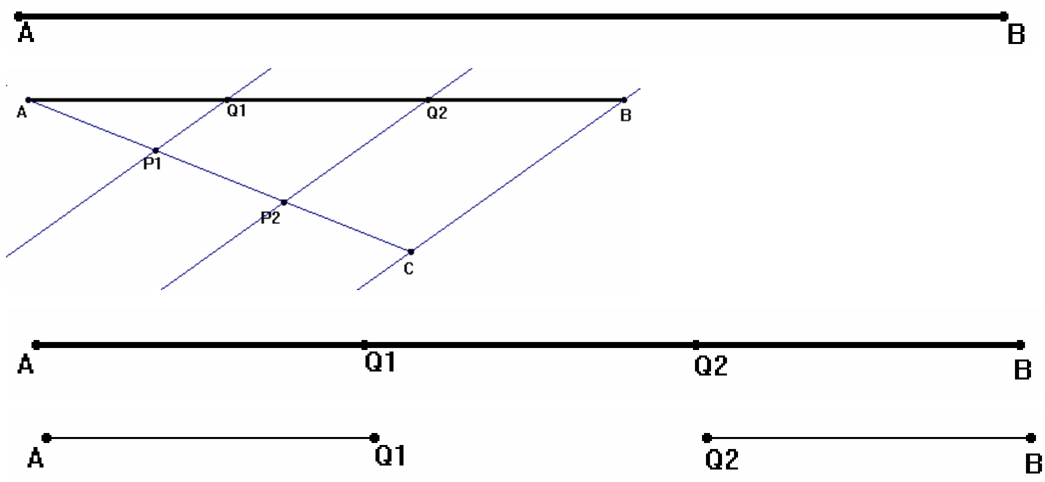
3.Seja "r"a reta P_mB.

4.Pelos pontos P_1, P_2,..., P_{m-1}, P_m traça-se retas paralelas a r, obtendo-se os pontos Q_1, Q_2, ..., Q_{m-1}, no segmento AB.

Pelo corolário anterior tem-se

5. $AQ_1 \cong Q_1Q_2 \cong ... \cong Q_{m-1}\, Q_m$

Considera-se um segmento qualquer AB a ser dividido em três partes iguais. No processo acima se toma os pontos A = P_0, P_1, P_2, P_3 = C. Une-se C a B e por P_1 e P_2, conduza paralelas a AC determinando os pontos Q_1, e Q_2 que são os terços médios do segmento AB. Obtém-se assim os segmentos AQ_1 e Q_2B que permanecem e o intermediário Q_1Q_2 que é excluído. Tem-se assim o algoritmo de construção do fractal. Basta repetir o processo iterativamente.



Repetindo-se sucessivamente obtém-se a seqüência abaixo.

Figura 15 – finalização da construção

Para se determinar à dimensão do Conjunto ou Poeira de Cantor considera-se o comprimento do segmento inicial AB medindo L unidades. Cada segmento na primeira iteração tem comprimento $d = \frac{L}{3}$. Assim,

n	**n° quadradinhos N(n)**	**d**	**Na**
1	2	$\frac{L}{3}$	$A_1 = \left(\frac{L}{3}\right)^D$
2	4	$\frac{L}{3^2}$	$A_2 = \left(\frac{L}{3^2}\right)^D$
3	8	$\frac{L}{3^3}$	$A_3 = \left(\frac{L}{3^3}\right)^D$
...	...	...	...
n	$N(n)=2^n$	$\frac{L}{3^n}$	$A_n = \left(\frac{L}{3^n}\right)^D$

$$A_T = N(n).A_n(n) = 2^n.\left(\frac{L}{3^n}\right)^D = \left(\frac{2}{3^D}\right)^n.L^D$$

Para que haja significado deve-se ter

$$\left(\frac{2}{3^D}\right)^n = 1$$

em qualquer iteração, donde

$$2 = 3^D.$$

aplicando-se logaritmo aos dois membros da igualdade e isolando D obtém-se

$$D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0{,}6309\ldots.$$

Nota-se aqui um primeiro objeto construído no mundo real ou matemático cuja dimensão é um número fracionário entre 0 e 1.

Resultados Observados

Mais uma vez às voltas com interações, o grupo experimentou a construção do "conjunto de Cantor". Novamente através das instruções passadas pela ficha da atividade os alunos chegaram ao objetivo imaginado.

Observando o desenho conseguido, responderam que este processo produziria "*segmentos muito pequenos*" na 5ª interação, "*pontos, praticamente*" na 10ª interação e "*poeira*" na 100ª, ou "*segmentos diminutos, cada vez mais próximos*". Em resumo, o resultado é sempre similar ao seu gerador: é a característica da auto-similaridade evidenciada.

Solicitados a preencher uma tabela, o resultado foi o mostrado a seguir:

Interação	Comprimento de cada Segmento	Número de Segmentos	Comprimento Total
0	1	1	1
1	1/3	2	2/3
2	1/9	8	4/9
3	1/27	16	8/27
4	1/81	32	16/81
5	1/243	64	32/243
6	1/729	128	64/729

Facilmente foi identificada a lei de formação de cada valor de cada coluna:

Interação	Comprimento de cada Segmento	Número de Segmentos	Comprimento Total
N	$1 / 3^n$	2^n	$2^n / 3^n$

Concluindo a aplicação, foi identificada como implicação destas leis de formação: "***Quando n cresce: o crescimento cai, o número de segmentos sobe e o comprimento tende ao***

infinito, quando n tende ao infinito". Este fato revela uma dimensão menor do que a unidade: a dimensão fracionária, característica dos fractais.

2.3.3 Atividade 3- Triângulo de Sierpinski I

Através desta atividade os alunos do Ensino Médio, além de conhecerem o Triângulo de Sierpinski, uma imagem fractal bem conhecida, poderão associá-la a conhecimentos já adquiridos em outros tópicos da Matemática.

1. Conectar os pontos médios dos lados dos triângulos como mostrado na 1ª interação já desenhada, apenas nos três "sub-triângulos" formados a partir dos cantos da figura;
2. Repetir a instrução por mais 3 vezes (mais 3 interações), lembrando que a cada estágio cada triângulo conduzirá a 3 "sub-triângulos" com o comprimento do lado igual à metade do que os originou;
3. Contar os pontos cuidadosamente; cada vértice de cada "sub-triângulo" em cada um dos 4 primeiros estágios coincidirá com um dos pontos da folha;
4. Verificar que a figura resultante deverá apresentar 81 pequenos triângulos, que representa o quarto estágio da construção do Triângulo de Sierpinski; sombrear estes triângulos;
5. Discutir com o grupo:

=> Imaginar a repetição do processo. Visualizar e descrever como a figura muda. Se o processo continua sem fim, o que acontece ?

=> O que aconteceria com o triângulo maior (original) depois de 4 interações se o algoritmo fosse mudado para desenhar os novos "sub-triângulos" apenas no triângulo do centro da figura ?

Atividade 4 – Calculando a Dimensão fractal através do método Box-Counting.

A Geometria Fractal tem o objetivo de medir a dimensão dos sistemas complexos. Fenômenos que não tenha uma escala característica de medidas são denominados sistemas complexos. Fenômenos como terremotos, tornados, crescimento populacional e outros que podem ocorrer em várias escalas são sistemas complexos. Os objetos e processos fractais são caracterizados pelas seguintes propriedades: são auto-similares, isto significa dizer que as partes de um objeto ou processo fractal são semelhantes ao objeto ou processo todo; apresentam dependência de escala, ou seja a medida de uma grandeza fractal depende da escala na qual a grandeza é medida. Essas propriedades podem ser descritas quantitativamente através do parâmetro denominado dimensão fractal. Essa dimensão que se caracteriza por ser fracionária, ou seja, não pertence às dimensões dos objetos Euclidianos, pode ser determinada por diferentes métodos, são eles: dimensão de auto-similaridade, dimensão de capacidade, dimensão por contagem de caixa (box-counting), dimensão de correlação, dimensão de informação e dimensão de Hausdorff-Besicovich.

Objetivo: Determinar a dimensão de objetos fractais por diferentes métodos.

Cálculo da dimensão de auto-similaridade:

A dimensão de auto-similaridade de um objeto fractal descreve quantos novos pedaços geometricamente similares ao objeto todos, são observados quando a escala de observação é reduzida de um certo fator. Assim, ao se reduzir a escala por um fator **F** forem observados **N** pedaços similares ao original, permite-se definir a dimensão de auto-similaridade da seguinte forma:

$$\boldsymbol{d}_{\text{auto-similaridade}} = \log N / \log F, \text{ onde } \boldsymbol{N} = n^{o} \text{ de pedaços similares do original.}$$

$$\boldsymbol{F} = \text{fator de escala}$$

Dimensão fractal por contagem de caixas (Box-counting)

O método da dimensão fractal por contagem de caixas (box-counting) consiste em cobrir o objeto fractal com **N**(r) caixas de maneira que elas contenham pelo menos um ponto do fractal. Modifica-se o tamanho das caixas e repete-se o procedimento. Após repetir-se várias vezes o procedimento traça-se um gráfico do logaritmo de **N**(r) em função do logaritmo de 1/r e determina-se a dimensão fractal pela inclinação do gráfico. O método para contar as caixas pode ser realizado manualmente ou por programas que utilizam imagens digitalizadas tipo arquivos preto e branco.

i. Construa um gráfico duplo logaritmo para N (r) versus 1 / r. Use o programa Excel para construir o gráfico;
ii. Trace a reta que melhor se ajuste aos pontos (método dos mínimos quadrados). Use o programa Excel para ajustar os pontos;
iii. Determine o coeficiente angular da reta. Esta inclinação é a dimensão fractal;

$$D_{Box\text{-}counting} = (In\ N\ (r_{n+1}) - In\ N\ (rn)) \,/\, (In\ (1/\ r\ n))$$

Outras Dimensões de Coberturas: As Dimensões de Capacidade de Hausdorff – Besicovintch.

A dimensão de capacidade é calculada de maneira semelhante à dimensão de contagem por caixas, sendo que no caso da dimensão de capacidade o objeto fractal é coberto com bolas de diferentes tamanhos, que podem ser sobrepostas.

Uma outra dimensão de cobertura é a dimensão de Hausdorff-Besicovitch. A dimensão de Hausdorff-Besicovitch (H-B) de uma maneira semelhante à dimensão de capacidade é definida cobrindo-se o fractal com a união de A_i subconjunto cada um dos quais com um diâmetro menor ou igual a r (r é o diâmetro do maior subconjunto). A medida da dimensão e H-B é obtida no limite quando o diâmetro dos subconjuntos que cobrem o fractal tende a zero. Nesta condição a medida do conjunto definida por h (S, r) = inf Σ (diâmetro $A_i)^s$ apresenta um único valor finito e não nulo para S, que é denominado de dimensão de H-B.

Determinação computacional da dimensão fractal por Box-counting (programa Winfeed):

Abrir a imagem do DLA no programa Winfeed (escolha a opção raiz.Bmp).

Clique na opção Box-counting

Clique em Calculate

Este procedimento permite o programa calcular a dimensão fractal pelo método Box-counting.

ATIVIDADE 5 – Observação e cálculo da dimensão fractal de um galho de arvore utilizando o método Box-counting e softwares de geometria dinâmica.

Muitos matemáticos procuram entender e compreender os fenômenos que ocorrem na natureza. Vamos observar a imagem abaixo:

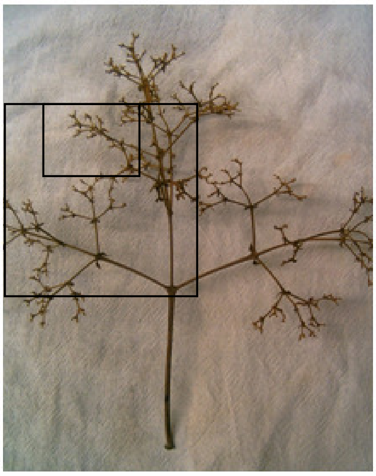


Figura 15 - Galho de árvore desfolhada.

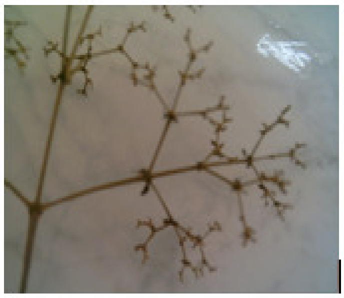


Figura 16- ramificações galho de árvore

Relate com as suas palavras o que você observou na foto acima e quais conceitos geométricos estão relacionados nesta foto de um galho de árvore?

a. É possível construir o galho da árvore da pagina anterior com régua e compasso?

Mas antes, meça com o transferidor ou com o compasso quais ângulos são formados pelos galhos da árvore.

Relate o que você observou na construção com régua e compasso? Quais conceitos geométricos estão relacionados na construção deste galho de árvore?

b. Vamos construir agora a mesma figura com o Cabri-Géomètre II? Relate o que você observou na construção da figura com os softwares de geometria dinâmica.

c. Investigue a evolução do número de segmentos e registre os valores que obteve em uma tabela. O que podemos dizer sobre o número de segmentos em relação às iterações?
d. Encontre uma fórmula que permita calcular o número de segmentos da n-ésima iterada.
e. Existe uma seqüência? Se existir, esta é limitada ou não? É convergente?
f. Quantos galhos a figura terá na n-ésima iteração?
g. Faça agora um estudo sobre o comprimento dos segmentos relacionando com as interações. O que ocorre com o comprimento dos segmentos em cada iteração?
h. Tente encontrar uma fórmula que permita calcular o número de segmentos da n-ésima iterada.
i. Para onde tende a medida dos galhos?
j. Faça um estudo do comprimento total da seqüência com *n* iterações.

Observando o comprimento total da seqüência com *n* iterações, o que podemos afirmar?

k. Calcule a dimensão do fractal (árvore)?

2.3.6 Atividade - Esponja de Menger

Nesta atividade explorou-se contagem, área, perímetro e volume de um dos mais complexos fractais, a Esponja de Menger, os alunos ao final desta atividade construíram uma representação com cubinhos de madeira.

Segue o estudo da contagem dos cubos de uma esponja de Menger. Inicia-se com um cubo; seja de aresta 1 (unidade). Então o dividi-se o mesmo em 27 cubos usando planos secantes ortogonais às faces. Esses cubos devem possuir aresta (1/3)u. Retira-se o cubo do centro e os cubos centrais de cada face.

Conclusão para o nível 1 (Fig.17):

Cubos removidos = 7, cubos restantes = 20.

Para o nível 2 (Fig. 18), iterando, em cada um dos 20 cubos restantes, é feita uma nova remoção de 7 pequenos cubos (aresta $(1/3)^2$ u), portanto são retirados, no nível 2, o número de 7 + 7.20. Desde que, em cada um dos 20 pequenos cubos, sobraram 20 cubos menores, concluímos que ao nível 2 existem 20^2 cubos menores.

Figura 17 – Nível 1

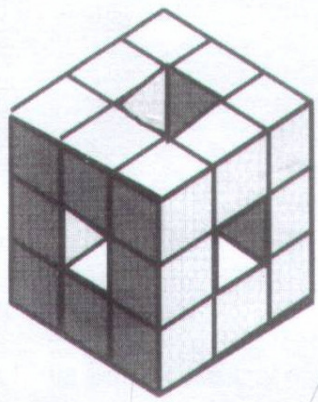


Figura 18 – Nível 2

Em continuação, ao nível 3, iterativamente, serão removidos 7.20^2 cubos de aresta $(1/3)^3$ u. Como ficam 20 em cada um, teremos como total restante 20^3 cubos (de aresta $(1/3)^3$ u).

Assim , em resumo, temos a tabela de contagem:

Nível	0	1	2	3	.... n
Cubos removidos	0	7	7.20	7.20^2	.........7.20^{n-1}
Cubos restantes	1	20	20^2	20^3	.... 20^n

Volume na Esponja

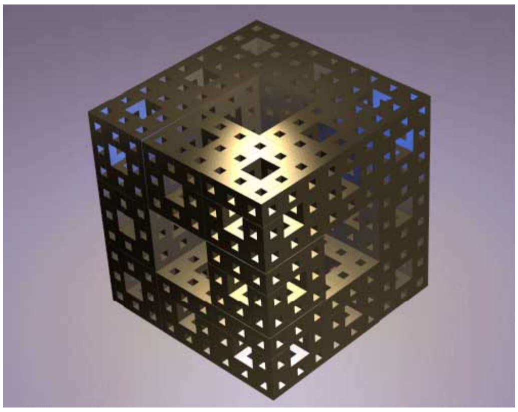


Figura 19 - Esponja de Menger

Seja V o volume do cubo inicial. Como dividimos em 27 cubos (de aresta (1/3)u). Segue que o volume de cada um, ao nível 1, é (1/127) V; mas como se retira 7 deles ao todo se removeu corpos com volume 7 (1/27) V e sobram (20/27) V.

Analogamente, ao nível 2, cada cubinho tem volume $(1/27^2)$ V, portanto, retiramos nessa iteração 7.20. $(1/27^2)$ V; ficamos, então , ao nível 2,com o volume restante

$V – 7.(1/27)\ V – 7.20\ .(1/27^2)\ v= [(27^2 – 7.27 – 7.20)/\ 27^2]\ V = \{[27(27-7)- 7.20]\ /\ 27^2\}V =$
$[\ (27.20 – 7.20)/\ 27^2]\ V = [(27-7)\ 20/27^2]\ V = (20/27)^2\ V$

Este resultado poderia ser encontrado mais rápido diretamente (*) pois se ficaram 20^2 cubinhos, e cada um têm volume $(1/27)^2$ ele segue. Da mesma maneira , ao nível 3, ter-se-á o volume $(20/27)^3$ V, observando os volumes respectivamente para o nível 0, 1, 2 e 3, dados por V, $(20/27)^n$ V.

(*) Só feito como sugestão interessante de cálculo a ser explorado.

Analisando o volume do fractal

Como (20/27) ‹ 1, a cada nova iteração, o volume diminui em 7/27, aproximadamente 26%; portanto, o volume do fractal tende a zero, cuja interpretação pode ser a seguinte: as perfurações na esponja vão aumentando tanto que a esponja tende a desaparecer em volume.

Áreas na Esponja

Estudemos agora as áreas das superfícies em cada nível da esponja. Seja **F** a área de cada face do cubo inicial, ou que a área da superfície total do cubo é 6 **F**. Desde que se divida em 27 pequenos cubos e se retira o cubo central e os 6 cubos dos centros das faces fazendo 3 perfurações concluímos que: Em cada face perde-se (1/9) **F** , fornecendo a perda total de 6 (1/9) **F**;

Entretanto, se ganha 24 (Fig. 29) novos quadrados para a superfície, ainda que nas perfurações, portanto, aumenta-se a área em 24 (1/9) F.

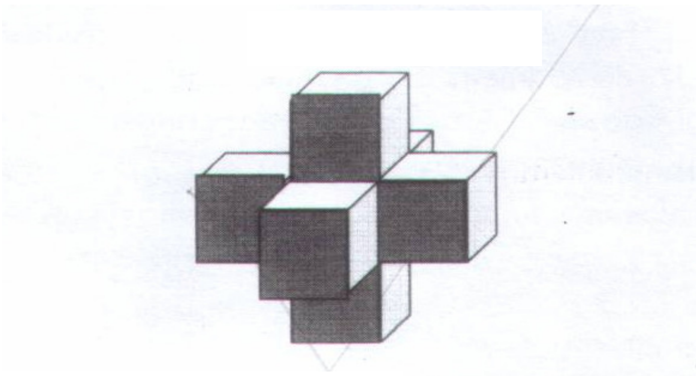


Figura 20- Cubos restantes

Em resumo, temos a área da esponja no nível 1 dada por:

$6F – 6(1/9)\, F + 24\, (1/9)\, F = [(\, 54 – 6 + 24) / 9]\, F = 8F$

Continuando a remoção dos cubos sempre da mesma forma, em todas as iterações, passa-se de uma área de 6 unidades para uma área de 8 unidades. Pode-se afirmar que em cada nível a área é 4/3 (equivalente a 8/6) da área do nível anterior. Em conseqüência, no limite a área total da superfície da esponja de Menger tende ao infinito (4/3› 1).

CAPÍTULO 3

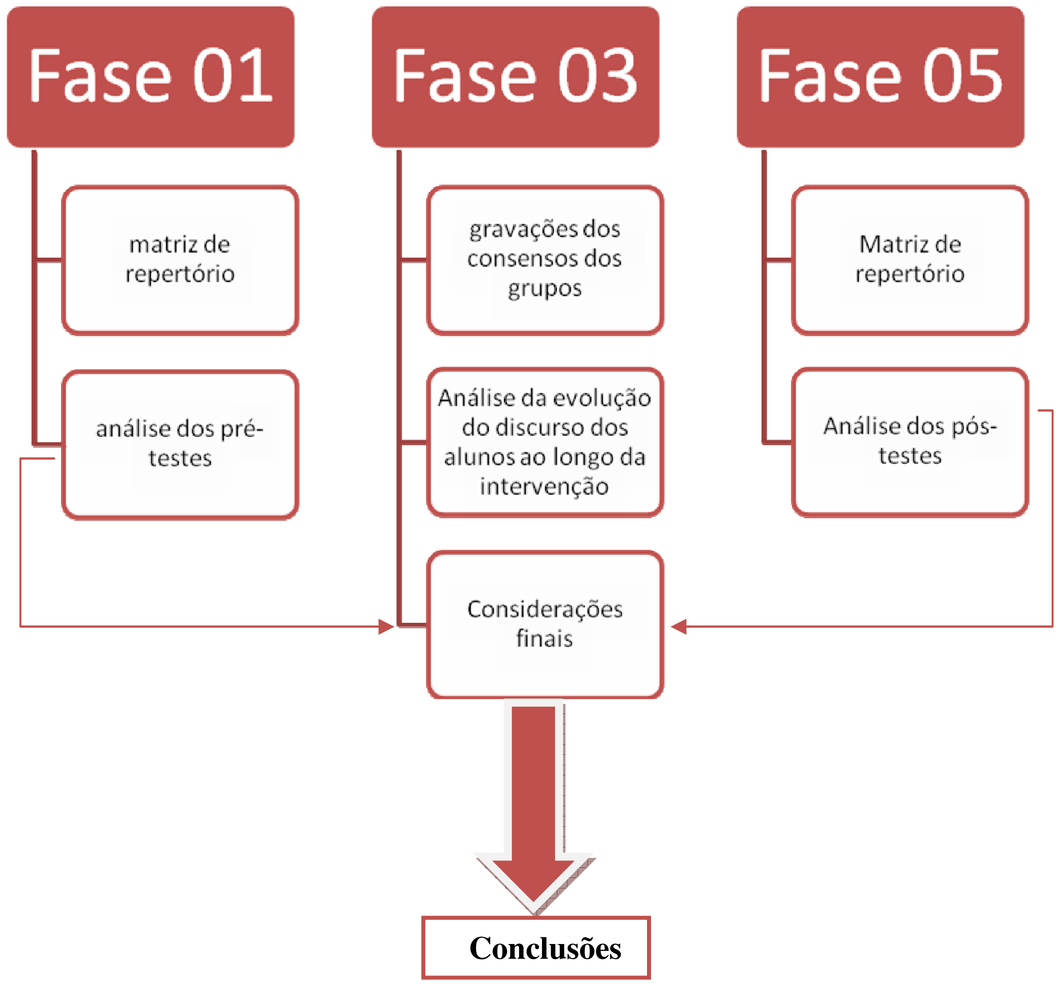
ANÁLISE DOS DADOS

3. ANÁLISE DOS DADOS

O objetivo neste capítulo foi de analisar os dados obtidos na aplicação da intervenção didática.

3.1 Análises dos dados coletados

Como mencionado anteriormente, as informações foram coletadas através de três instrumentos: o questionário diagnóstico aplicado na etapa A, o teste da matriz de repertório e os registros dos consensos dos três alunos durante a aplicação das atividades na etapa B da intervenção didática. O fluxograma abaixo explicita as fases do Ciclo da Experiência de Kelly (etapa B) nas quais esses instrumentos foram aplicados, bem como seu objetivo em cada momento.



3.1.1 Registros dos consensos

Os consensos formados pelos três alunos durante as abordagens na intervenção didática, foram analisados tendo em vista a sua evolução ao longo do processo.

3.1.2 Análise dos pré e pós-testes e das matrizes de repertório

A análise dos pré e pós-testes e as matrizes de repertórios constituíram as principais fontes de informações sobre a estrutura cognitiva dos alunos em relação às características dos fractais estudados nas abordagens da intervenção didática. A tabela abaixo mostra, de maneira categorizada, as respostas dos três alunos participantes de todas as fases da pesquisa, antes e após a intervenção didática. A resposta de cada aluno pode ser encontrada nos anexos 07, 08 e 09.

Quadro 10 – Respostas ao questionário diagnóstico, antes e após a intervenção.

Pergunta	Pré-teste (A B C)	Pós Teste (ABC)
O que significa geometria para você?	Responderam de forma superficial, dando ênfase a formas e medidas.	Responderam de forma coesa, todos citaram,além das formas conhecidas,citaram várias estruturas fractais
Que tipos de geometria você conhece?	Citaram as geometrias euclidianas (Plana,Espacial e Analítica).	Além das já citadas no pré-teste, todos citaram a geometria Fractal.
Das que você conhece, cite alguns exemplos de suas construções?	Citaram corretamente construções de acordo.	Citaram corretamente construções de acordo.
Qual a utilidade prática da geometria na sua vida?	Responderam de forma evasiva ou inadequada.	Responderam conceituando a geometria da natureza.
Você acha que as geometrias que você conhece são capazes de descrever as formas construídas pelo homem?	Sim 45%,Não 55%.	Todos os três responderam não,mas o aluno A observou que a geometria euclidiana auxilia no entendimento.
E as formas construídas pela natureza? Podem ser também descritas pelas geometrias que você conhece?	Responderam corretamente em relação aos objetos construídos pelo homem, e equivocadamente em relação aos objetos construídos pela natureza.	Responderam corretamente em relação aos objetos construídos pelo homem, e em relação aos objetos construídos pela natureza.
O que você entende por dimensão em relação à geometria?	Responderam euclidianamente.	Responderam euclidianamente e utilizando a geometria da natureza.
Dê um exemplo de dimensão nas geometrias que você conhece.	Citaram exemplos de figuras e processos de construções feitas pelo homem.	Citaram exemplos de figuras e processos de construções feitas pelo homem e após a intervenção citaram estruturas fractais com dimensões fracionárias.

Na análise da matriz de repertório se buscou identificar como os alunos constroem suas idéias sobre a geometria das estruturas naturais e construídas pelo homem, antes e após a intervenção didática. Como descrito na metodologia, foi estabelecida uma escala numerada entre 1 e 5, sendo a pontuação 1 referente a duas estruturas mais semelhantes e a pontuação 5 a estrutura que mais diferiu das duas primeiras. O procedimento foi repetido diversas vezes para várias tríades de estruturas criadas pelo homem ou pela natureza até ser obtido um razoável número construtos. As tabelas abaixo mostram as matrizes de repertórios construídas pelos alunos A, B e C, antes e após a intervenção didática. É interessante lembrar que as matrizes são construídas em resposta a seguinte pergunta: Quando você pensa em geometria, o que vem em sua mente?

Aluno A – Matriz de repertório Pré-teste

ALUNO-A							
PRÉ-TESTE							
1	RETA	CÍRCULO	LOSANGO	RETÂNGULO	PONTO	CUBO	5
DIMENSÃO	1	1	1	1	1	1	**ADIMENSIONAL**
ÁREA	1	1	1	1	1	1	**Inexistência de ÁREA**
VOLUME	5	5	1	1	5	1	**Inexistência de VOLUME**
DIAGONAIS	5	5	5	5	5	1	**Inexistência de DIAGONAIS**
LADOS	5	5	1	1	5	1	**Inexistência de LADOS**
COMPRIMENTO	5	5	1	1	1	1	**Inexistência de COMPRIMENTO**

Aluno A – Matriz de repertório Pós-teste

ALUNO-A PÓS – TESTE	BROCOLIS	FIGURAS PLANAS	GALHOS DE ARVORES	FIGURA RELAMPAGO	ESPONJA DE MENGER	TRIÂNGULO DE SIERPINSKI	COUVE – FLOR	
1								5
DIMENSÃO FRACTAL	**1**	**5**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**DIMENSÃO EUCLIDIANA**
AUTO SIMILARIDADE	**1**	**5**	**1**	**1**	**1**	**2**	**1**	**SIMETRIA**
COMPLEXIDADE	**1**	**5**	**3**	**1**	**1**	**4**	**2**	**CONSTRUÇÕES SIMPLES**
ITERAÇÕES	**1**	**5**	**3**	**1**	**1**	**1**	**1**	**PROCESSO SIMPLES**
PROPRIEDADES PROCESSOS CONSTRUÇÃO NATUREZA	**5**	**1**	**5**	**5**	**5**	**5**	**1**	**PROPRIEDADES EUCLIDIANAS**
OBJETOS NATUREZA	**1**	**5**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**OBJETOS CONSTRUÍDOS PELO HOMENS**

Aluno B – Matriz de repertório Pré-teste

ALUNO- B PRÉ-TESTE										
1	PONTO	RETA	TRIÂNGULO	CUBOS	CIRCUN	CONES	ÂNGULO	CILINDRO	PIRÂMIDES	5
DIMENSÃO FRACTAL	5	1	1	1	1	1	1	1	1	DIMENSÃO EUCLIDIANA
ÁREA	5	5	1	1	1	1	5	1	1	NÃO AREA
VOLUME	5	5	5	1	5	1	1	1	5	NÃO VOLUME
DIAGONAIS	5	5	5	1	5	5	5	5	5	NÃO DIAGONAL
LADOS	5	5	1	1	1	1	5	1	1	NÃO LADOS
COMPRIMENTO	5	1	1	1	1	1	1	1	1	NÃO COMPRIMENTO

Aluno B – Matriz de repertório Pós-teste

ALUNO-B PÓS – TESTE	FAVO DE MEL	FRUTAS	ESTRELA DO MAR	FIGURAS PLANAS	GALHOS DE ARVORES	FIGURA RELAMPAGO	ESPONJA DE MENGER	TRIÂNGULO DE SIERPINSKI	
1									5
DIMENSÃO FRACTAL	**1**	**1**	**1**	**5**	**1**	**1**	**1**	**1**	**DIMENSÃO EUCLIDIANA**
AUTO SIMILARIDADE	**1**	**1**	**1**	**5**	**1**	**1**	**1**	**2**	**SIMETRIA**
COMPLEXIDADE	**1**	**1**	**1**	**5**	**3**	**1**	**1**	**4**	**CONSTRUÇÕES SIMPLES**
ITERAÇÕES	**1**	**1**	**1**	**5**	**3**	**1**	**1**	**1**	**PROCESSO SIMPLES**
PROPRIEDADES PROCESSOS CONSTRUÇÃO NATUREZA	**5**	**1**	**1**	**1**	**5**	**5**	**5**	**5**	**PROPRIEDADES EUCLIDIANAS**
OBJETOS NATUREZA	**1**	**1**	**1**	**5**	**1**	**1**	**1**	**1**	**OBJETOS CONSTRUÍDOS PELO HOMENS**

Aluno C – Matriz de repertório Pré-teste

ALUNO – C PRÉ-TESTE	PONTO	RETA	QUADRADO	TRIÂNGULO	ÂNGULO	CIRCUNFER	
1							5
PRESENÇA DE ÁREA	5	1	1	1	1	1	AUSÊNCIA DE ÁREA
DIMENSÃO	5	5	1	1	1	1	ADIMENSIONAL
COMPRIMENTO	5	5	5	1	5	1	SEM COMPRIMENTO
DIAGONAL	5	5	5	1	5	5	SEM DIAGONAL
PRESENÇA ARESTAS	5	5	1	1	1	1	AUSÊNCIA ARESTAS
LADO	5	1	1	1	1	1	SEM LADOS

Aluno C – Matriz de repertório Pós-teste

ALUNO- C PÓS – TESTE	BROCOLIS	FIGURAS PLANAS	GALHOS DE ARVORES	FIGURA RELAMPAGO	ESPONJA DE MENGER	TRIÂNGULO DE SIERPINSKI	GOTA	OLHOS DOS ANIMAIS	
1									5
DIMENSÃO FRACTAL	**1**	**5**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	DIMENSÃO EUCLIDIANA
AUTO SIMILARIDADE	**1**	**5**	**1**	**1**	**1**	**2**	**1**	**3**	SIMETRIA
COMPLEXIDADE	**1**	**5**	**3**	**1**	**1**	**4**	**1**	**1**	CONSTRUÇÕES SIMPLES
ITERAÇÕES	**1**	**5**	**3**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	PROCESSO SIMPLES
OBJETOS NATUREZA	**1**	**5**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	OBJETOS CONSTRUÍDOS PELO HOMENS

3.2 Categorização dos dados das matrizes de repertório Como já foi dito anteriormente, três alunos foram escolhidos na etapa **A** para participar dos momentos da intervenção reservadas à construção das matrizes de repertório, nas fases Antecipação e Revisão Construtiva do Ciclo da Experiência de Kelly. Desta forma tem-se um total de seis matrizes de repertório para serem analisadas, duas a duas para cada aluno, como mostradas acima.

Após a leitura das matrizes foi compilada uma lista com todos os construtos propostos pelos alunos na construção das matrizes (Quadro 11). Cada construto está relacionado a uma letra de nosso alfabeto para facilitar a organização e a articulação entre as análises dos resultados dos três alunos.

Quadro 11 – Lista dos Construtos

A	Área
B	Auto-semelhança
C	Auto-similaridade
D	Complexidade
E	Comprimento
F	Construções simples
G	Diagonais
H	Dimensão euclidiana
I	Dimensão fractal
J	Formas geométricas euclidianas
K	Iterações
L	Lados
M	Mediatriz
N	Inexistência de área
O	Inexistência de comprimento
P	Inexistência de diagonal
Q	Inexistência de lados
R	Inexistência de volume
S	Nível de complexidade
T	Objetos construídos pelo homem
U	Objetos construídos pela natureza
V	Perímetros
X	Processo simples
W	Propriedades e processos construção natureza
Z	Propriedades euclidianas
A1	Regularidade
B1	Seqüência
C1	Simetria
D1	Superfícies

Entre os construtos listados na tabela 06, apareceram com mais freqüência os construtos: Dimensão fractal (I), Dimensão euclidiana (H), Iterações (K), Complexidade (D), Auto-similaridade (C). A maior freqüência destes cinco construtos se justifica pelo fato deles terem sido o foco dos trabalhos desenvolvidos nas etapas *investimento, encontro e confirmação* durante a intervenção didática, dentre as combinações priorizou-se aquelas que envolveriam tais construtos.

CAPÍTULO 4
RESULTADOS DISCUSSÕES

4. RESULTADOS DISCUSSÕES

Neste capítulo serão apresentados e discutidos os dados coletados através dos instrumentos descritos na metodologia. São analisados inicialmente os consensos produzidos pelos alunos nas etapas *investimento, encontro e confirmação* do Ciclo da Experiência, apresentaremos em seguida os resultados da análise das matrizes de repertório construídas pelos três alunos que participaram das fases de Antecipação e Revisão Construtiva.

4.1 Análises dos pré e pós-testes.

4.2 Análises das respostas dos alunos

As transcrições das respostas dos alunos são apresentadas de forma resumida nos quadros I para os questionamentos sobre a característica auto-similaridade, no quadro II sobre a característica complexidade, onde eles discutiram as formas e processos como a natureza constrói seus objetos e para a característica dimensão fractal o quadro III, na mesma ordem em que foram coletados, em sua análise procurou-se identificar os aspectos relacionados às características da geometria fractal explicitados pelos alunos.

Nos quadros, apresentados a seguir, encontram-se as respostas dos alunos A, B e C em relação aos questionamentos sobre a nova geometria e suas características. Essas respostas foram registradas nas etapas *investimento, encontro e confirmação* do Ciclo da Experiência. É importante observar que as propriedades fractais enfocadas foram às seguintes: auto-similaridade, complexidade e dimensão fractal.

QUADRO I – Respostas dos alunos ao questionamento sobre Auto-similaridade

Em relação à característica Auto- similaridade, o que ficou entendido por você no que se refere às construções da natureza?	
ALUNO A	Observei que os objetos e construções da natureza obedecem a processos auto- similares, tanto de natureza euclidiana como de natureza fractal, posso indicar a estrela do mar, que apesar de ser um ser natural, podemos reproduzi-lo euclidianamente e no seu centro podemos construir um polígono de cinco lados, como foi mostrado no filme Donald no País da matemágica.
ALUNO B	As construções feitas pelo homem podem ser ditas auto-semelhantes, mas não auto-similar, pois auto-similaridade significa uma parte pode representar o todo, já na semelhança as figuras não podem ser quebradas, e suas dimensões se mantêm que no caso da auto-similaridade depende do fator de escala.
ALUNO C	Meu entendimento sobre Auto-similaridade foi que os processos e construções da natureza obedecem a esta característica, dando a entender que todos os processos são auto – similares, cito como exemplo a costa da Inglaterra apresentada numa das transparências.

QUADRO II – Respostas dos alunos a característica Complexidade

Seu entendimento sobre complexidade contempla a geometria fractal?	
ALUNO A	Sim, nas atividades realizadas na pesquisa, nos mostrou que os processos e construções dos objetos da natureza são complexos nas suas leis de formação, apesar de começarem com processos simples, a iteração de alguns fractais chega a ser incompreensível no nível em que estamos.
ALUNO B	Sim, meu entendimento sobre complexidade mudou, pois achava que complexo significava difícil, mas após o entendimento da geometria fractal, a geometria da natureza, certificou que complexo não é complicado, mas sim que a partir de processos simples (iterações) podemos gerar belas, as figuras fractais.
ALUNO C	Meu entendimento sobre complexidade ficou um pouco confuso, pois achava que complexidade seria, complexo mesmo, mas após a apresentação dos trabalhos, slides, figuras de objetos da natureza (galhos de arvores, brócolis, etc.), pude perceber que complexo seria apenas como os objetos são gerados pela natureza.

QUADRO III – respostas dos alunos ao questionamento sobre Dimensão fractal

Após a introdução do conceito de fractal, seu conceito sobre dimensão mudou?	
ALUNO A	Sim, o conceito de dimensão que conhecia mudou radicalmente, pois pude perceber que existem outras dimensões, que elas estão presentes em todos os processos e objetos apresentados nas atividades e discussões que versavam sobre geometria da natureza, um dos exemplos que me chamou atenção foi à Esponja de Menger.
ALUNO B	Meu conceito sobre dimensão mudou, como a geometria fractal abriu minha mente, percebi que os processos e construções feitas pela natureza, são diferentes e copiados pelo homem para suas construções.
ALUNO C	Fiquei confuso para entender a dimensão fracionária, pois só conseguia enxergar a dimensão fechada (euclidiana), mesmo realizando as atividades e enxergando a dimensão fracionária, fiquei surpreso, por que, como estávamos cegos a ponto de não perceber esta geometria proposta por Benoit Mandelbrot, acho que precisamos de mais atividades e exemplos para preencher mais ainda as lacunas (ou bloqueios) que existem sobre este novo conceito de dimensão.

A análise dos quadros I, II e III mostra: que o aluno A percebeu as várias propriedades dos fractais, tais como auto-similaridade, complexidade e dimensão fractal; que o aluno B compreendeu as propriedades auto-similaridade, complexidade e dimensão fractal e também usou a idéia de iteração na construção dos objetos fractais; o aluno C entendeu o conceito de auto-similaridade, porém teve dificuldade na compreensão dos conceitos de complexidade e dimensão fractal.

As fotografias abaixo foram obtidas de estruturas fractais construídas pelos alunos durante o desenvolvimento dos trabalhos. É interessante observar que as construções evidenciam que os alunos compreenderam adequadamente a geometria fractal.

Figura 21– Construção com material dourado da representação da Esponja de Menger.

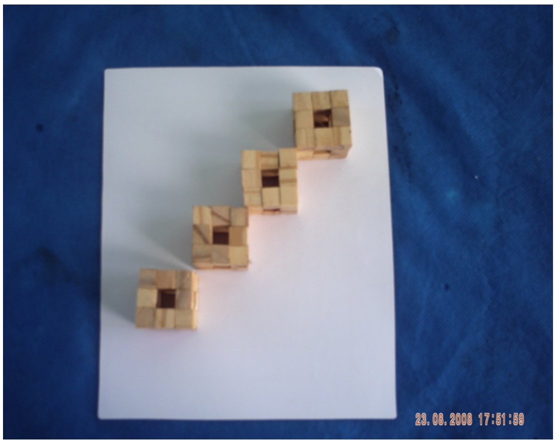


Figura 22 – Construção com material dourado da representação da Esponja de Menger.

Figura 23 – Construção com material dourado da representação da Esponja de Menger.

4.3 Análise das matrizes de repertório

E análise será feita aluno a aluno.

4.3.1 Análise do aluno A

Inicialmente buscou-se identificar quais os construtos levantados pelo aluno na fase 1 do ciclo, de modo a compará-los com os construtos levantados na fase 5, que foi o último momento da intervenção didática. As fases 1 e 5 podem ser consideradas com etapas de pré e pós-teste. Os construtos levantados nestes momentos são apresentados no quadro 13.

Quadro 13- Construtos listados pelo Aluno A nos dois Rep-testes realizados

PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
Dimensão	Dimensão fractal
Área	Auto similaridade
Volume	Complexidade
Diagonais	Iterações
Lados	Propriedades processos construção natureza
Comprimento	Objetos natureza
Adimensional	Dimensão euclidiana
Inexistência de área	Construções simples
Inexistência de volume	Processo simples
Inexistência de diagonais	Propriedades euclidianas
Inexistência de lados	Objetos construídos pelos homens
Inexistência de comprimento	

Analisando esta tabela, percebe-se que no pré-teste o aluno A citou 12 construtos no total, podemos observar que os construtos relacionados, intuitivamente já mostravam a dificuldade em enxergar a geometria da natureza e suas propriedades ou características. Já no pós-teste esta proporção está sensivelmente alterada: de um total de 11 construtos, 7 são relacionados à geometria fractal e suas características, enquanto 4 deles relacionam-se a geometria euclidiana, como, por exemplo, Figuras planas que possuem dimensão fechada (1, 2 e 3).

A análise das matrizes de repertório do aluno A mostra que no pré-teste o estudante elaborou a sua concepção de geometria baseado somente em figuras euclidianas. Isto se evidência pelos construtos, tais dimensão, área, volume, diagonais, lados e comprimento e todos eles relacionados com figuras euclidianas (reta, ponto, círculo, losango e cubo).

Portanto, sua concepção de geometria não permitia uma descrição geométrica adequada para os objetos da natureza. No pós-testes, vários novos construtos podem ser observados, tais como dimensão fractal, auto-similaridade, complexidade, iterações e objetos da natureza. Isto mostra que a intervenção didática permitiu uma evolução no conceito de geometria do aluno, incluindo na sua concepção vários construtos relacionados a geometria fractal. Esta evolução conceitual possibilitou que o estudante descrevesse de maneira adequada os objetos construídos pela natureza.

4.3.2 Análise do aluno B

Durante a análise das matrizes de repertório do aluno B, alguns pontos importantes foram observados e são apresentados em detalhe neste tópico. Inicialmente buscou-se identificar quais os construtos levantados pelo aluno na fase 1 do ciclo, de modo a compará-los com os construtos levantados na fase 5, que foi o último momento da intervenção didática. As fases 1 e 5 podem ser consideraras com etapas de pré e pós-teste. Os construtos levantados nestes momentos são apresentados no quadro 14.

Quadro 14 -Construtos listados pelo Aluno B nos dois Rep-testes realizados

PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
Dimensão fractal	Dimensão fractal
Área	Auto similaridade
Volume	Complexidade
Diagonais	Iterações
Lados	Propriedades processos construção natureza
Comprimento	Objetos natureza
Dimensão euclidiana	Dimensão euclidiana
Inexistência de área	Simetria
Inexistência de volume	Construções simples
Inexistência de diagonais	Processo simples
Inexistência de lados	Propriedades euclidianas
Inexistência de comprimento	Objetos construídos pelo homens

Para o aluno B o pré-teste mostra que a sua concepção de geometria basicamente euclidiana. Isto se evidência pelos construtos, tais dimensão, área, volume, diagonais, simetria, lados, ausência de volume, ausência de área e todos eles relacionados com figuras euclidianas (reta, ponto, triângulo, círculo, cilindro, pirâmides e cones), que são os elementos da matriz de repertório. É interessante observar que o estudante B tinha noção da geometria espacial, porém, sua concepção de geometria ainda era euclidiana e não permitia uma descrição geométrica adequada para os objetos da natureza.

No pós-teste, vários novos construtos podem ser observados, tais como dimensão fractal, auto-similaridade, complexidade, iterações, propriedades processos e construção da natureza, processos simples e objetos construído pelo homem. Isto mostra que a intervenção didática a inclusão de vários construtos relacionados aos objetos e processos fractais na sua concepção sobre geometria.

4.2.3 Análise do aluno C

A identificação dos construtos levantados pelo aluno C em cada um dos testes estão apresentados no quadro 15, de modo a compará-los com os construtos levantados na fase 5, que foi o último momento da intervenção didática.

Quadro 15 – Construtos listados pelo Aluno C nos dois Rep-testes realizados

PRÉ-TESTE	PÓS-TESTE
Presença de área	Dimensão euclidiana
Dimensão	Simetria
Comprimento	Construções simples
Diagonal	Processo simples
Presença arestas	Objetos construídos pelos homens
Lado	Dimensão fractal
Inexistência de área	Auto similaridade
Adimensional	Complexidade
Inexistência de comprimento	Iterações
Inexistência de diagonais	Objetos natureza
Inexistência de arestas	Simetria
Inexistência de lados	

A análise das matrizes de repertório do aluno C mostra que todos os construtos do estudante estavam relacionados a geometria euclidiana. Os construtos no pré-teste foram presença de área, dimensão, presença de aresta, lados, ausência de área, ausência de arestas e ausência de lados. Observe-se que todos os construtos e elementos (ponto, reta, quadrado, triângulo, cubo, circunferência) usados pelo estudante são pertinentes a geometria euclidiana. No pós-teste podem ser observados construtos, tais como dimensão fractal, auto-similaridade, complexidade, iterações e objetos da natureza e elementos como galho de árvore, brócolis, triângulo de Sierpinski, gota de óleo, vascularização de retina, esponja de Menger. Isto mostra que a intervenção didática permitiu uma evolução no conceito de geometria do aluno, incluindo na sua concepção vários construtos e elementos relacionados a geometria fractal.

4.3 Considerações finais

Após á análise dos discursos, gravados ao longo da intervenção, pode-se dizer que houve mudanças significativas no que se refere ao entendimento dos processos e objetos construídos pela natureza pelo os alunos pesquisados. Verificou-se que o conhecimento da geometria euclidiana é necessário para que o aluno evolua para geometria fractal. O treinamento dos estudantes no uso do software Cabri foi também de fundamental importância para realizações das tarefas envolvendo a construção de figuras euclidianas e fractais. As análises realizadas usando-se o Ciclo da Experiência de Kelly permitiram evidenciar que os alunos do ensino médio podem evoluir facilmente da geometria euclidiana para geometria fractal.

No que se refere aos resultados das análises dos sistemas de construtos dos alunos é possível destacar que esses sistemas inicialmente já se encontravam bem estruturados em relação à geometria euclidiana e os objetos construídos pelo homem. Segundo o corolário da modulação, essa condição inicial dos sistemas de construtos de um indivíduo, deve ter influenciado de forma positiva no processo de aprendizagem, uma vez que, as alterações dos sistemas de construtos de um indivíduo são moduladas pelo seu próprio sistema de construtos.

Em relação à intervenção didática pode-se dizer que poderá ser usada por outros professores em outras intervenções, pois se mostrou eficaz, ampliando os construtos dos alunos pesquisados e reorganizando os seus sistemas de construtos. Os alunos avançaram em perceberem a natureza e seus processos, perceberam também que a geometria euclidiana não dá conta com precisão dos objetos da natureza, no que se referem à característica dimensão.

Outro aspecto que pode ser observado é que quando comparamos as matrizes de repertório dos alunos pesquisados, mesmo tendo vivenciado as mesmas abordagens, os seus construtos não são exatamente iguais. Este resultado é importante para que o professor na sua prática do dia-a-dia possa compreender a singularidade de seus alunos.

Finalizando, é importante observar alguns pontos em relação ao Ciclo da Experiência de Kelly e sua relevância para este trabalho de pesquisa, Kelly propôs este ciclo como organizador dos processos cognitivos básicos dos indivíduos a serem vivenciados por eles em situações de experiências de forma que essas pudessem alterar seus sistemas de construtos.

Em relação ao trabalho aqui pesquisado o Ciclo da Experiência extrapolou o papel de sistematizar as cinco fases cognitivas vivenciadas pelos alunos ao longo do processo de experiência e também foi estruturador das atividades didáticas programadas ao longo da intervenção, as atividades iniciais compreenderam averiguação prévia (PRÈ -TESTES), montagem e realização de experimentos demonstrativos, discussões em grupos fomentadas por questionamentos sobre as construções da natureza e seus processos, exposições de trabalhos sobre o tema central da pesquisa e, finalmente, momentos de nova averiguação (PÓS-TESTE).

A estruturação das atividades com base nas cinco fases do ciclo mostrou-se adequada para o tema em questão, auxiliando os alunos em seus processos cognitivos.

CAPÍTULO 5
CONCLUSÃO

5. CONCLUSÃO

A partir dos resultados obtidos na aplicação das fichas de atividades propostas, pode-se dizer que a introdução da Geometria Fractal, através de observações dos processos construídos pela natureza no Currículo de Matemática praticado em nossas escolas, indagação motivadora deste trabalho, é viável e será bem vinda. Este fato pode ser comprovado pela opinião dos próprios alunos pesquisados, quando declaram que "***existe uma relação entre a Geometria Fractal e a Geometria Euclidiana***" e que "***uma pode auxiliar a outra***", ou ainda, que "***explicando a natureza torna-se interessante e motivadora***". Além disso, mencionaram ter gostado da experiência, que proporcionou conhecer novas teorias, relacionadas com conhecimentos já adquiridos anteriormente e oferecendo a oportunidade de utilizá-los.

De forma gratificante, observa-se que o aluno, quando está envolvido e tem desenvolvido o pensamento matemático, tem, intuitivamente, noções que formalmente não estão incluídas no currículo. Utilizar expressões como "infinidade" e "tendência" trazidas unicamente de um processo intuitivo, demonstra que está preparado para uma apresentação formal do conceito de limite. As atividades poderiam ser utilizadas para este fim.

Considerando este relato pode-se concluir que, realmente, a aprendizagem escolar acontece a partir da construção que o aluno faz a partir do que lhe é oferecida: se o produto é apresentado pronto, resta-lhe entendê-lo, assimilá-lo como verdadeiro e memorizá-lo; quando, em situação diversa, ao aluno é apresentada uma proposta de trabalho baseada, sim, em conhecimentos já adquiridos, mas com o objetivo de alcançar outros conteúdos mais complexos, ele é levado a utilizar seu raciocínio lógico e intuitivo para alcançar a construção do novo conceito. É necessário que o professor, neste último caso, acompanhe todo o processo, guie as atividades e fixe, finalmente, a idéia que pretende concretizar; deve se tornar um participante ativo do processo de construção, cujo centro é o aluno e não a matéria estudada.

A idéia, portanto, é que os alunos aprendem a partir da sua construção pessoal equivale a de "***elaborar uma representação pessoal do conteúdo objeto de aprendizagem***", o que não acontece a partir do nada, mas dos conhecimentos que permitem aos alunos através de alguma correlação chegar ao novo conceito e atribuir-lhe algum significado.

No caso específico da experiência vivida, assinala-se que o grupo foi conduzido a chegar ao conceito de fractal e suas características básicas a partir de atividades simples e intervenções eventuais, que proporcionaram tanto a utilização de conhecimentos prévios de Geometria Euclidiana, como a manipulação de conceitos intuitivos de limites - finitos e infinitos -, progressões, leis de formação, manipulação. Levou, enfim, a contextos que serão tratados em graus mais adiante nos currículos tradicionais, mas que, conforme o resultado apurado apresenta condições de ser introduzido, ainda que baseados somente na experimentação, sem a formalização do teórico.

Pôde-se observar, ao longo da aplicação das atividades, um processo de construção do conhecimento em que os alunos chegavam a conclusões a partir do que haviam experimentado anteriormente, trocando sempre as impressões pessoais. No caso presente os alunos já têm interesse declarado pela Matemática, colaborando de forma satisfatória nas atividades propostas.

O grupo interagiu totalmente durante toda a intervenção, o que contribuiu muito para que se chegasse às conclusões pretendidas. A pesquisa evidenciou que o método usado favoreceu o desenvolvimento mental e possibilitou o aluno pensar, desafiando-o a ir sempre além. Sobretudo, a metodologia baseada no construtivismo permitiu começar o processo por meio de ações externas e compartilhadas, ações que mediante o processo de internalização, transformaram-se em ações mentais. Confirma-se, assim, a eficiência do processo no sentido de dar condições aos alunos raciocinarem, de modo autônomo, empregando formas de pensamento lógico nos moldes encontrados no estágio das operações cognitivas formais — ou seja , um pensamento proposicional, onde o recurso à dedução, à generalização formal e à reflexão garante o caráter sistemático e necessário das conclusões a que se chega.

Ressalte-se, finalmente, que o grupo de alunos, apesar de diminuto, produziu resultados bastante proveitosos. Espera-se que este fato sirva de estímulo a que outros pesquisadores repitam a experiência com grupos maiores.

A análise das matrizes de repertório dos alunos de uma turma de ensino médio permitiu concluir que:

- Ampliaram seus sistemas de construtos em função da intervenção, na percepção de processos construídos pela natureza;
- Inicialmente houve um pouco de dificuldade, para entender a geometria da natureza, devido ao entendimento de sua dimensão fracionária, auto-similaridade e complexidade dos processos;

  Com relação à ferramenta utilizada para a construção das matrizes de repertório, é possível dizer que:

- Ferramenta de bastante utilidade permite tratar qualitativamente e quantitativamente as alterações ocorridas nos sistemas de construtos dos alunos;
- Contribui de maneira significativa para processos de ensino-aprendizagem, pode ser utilizada para diagnósticos e redirecionamentos de práticas pedagógicas.

REFERÊNCIAS.

REFERÊNCIAS.

ARTIGUE, M. Engenharia didáctica. In: BRUN, Jean. ***Didáctica das Matemáticas***. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996.

BALACHEFF, N; KAPUT, J**. Computer-Based Environments in Mathematics.** En

BANNON, Thomas J.: ***Fractals and Transformations***: The Mathematics Teacher, March 1991.

BARBOSA, Ruy Madsen. ***Descobrindo a Geometria Fractal*** *- para a sala de aula.* Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BARTON, Ray**:** ***Chaos and Fractals***: The Mathematics Teacher, October 1990.

BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. ***Educação Tecnológica e/na Educação Matemática: Aplicações da Matemática na Sala de Aula.*** Disponível em <http://mathematikos.psico.ufrgs.br/textos/edutecem.html> Acesso em: 07 ago. 2005.

BASTOS**,** Heloísa F. B.N. ***A Teoria do Construto Pessoal***. Texto digitado. Recife: UFRPE, 1998.

______, Changing teacher's pratice: towards a constructivist methodology of physics toaching, 1992, Tese de doutorado, University of Surrey, Ingalterra.

BRANDÃO, Leônidas de Oliveira. **Algoritmos e fractais com programas de GD**. *Revista do Professor de Matemática*, SBM, São Paulo, nº 49, p. 27-34, maio/ago. 2002.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica.

________, Ministério de Educação e Cultura. PCN+ **Ensino Médio: Orientações**

BRASIL, **Ministério de Educação e Cultura. Seminário Nacional do ensino médio**. Brasília. MEC/INEP, outubro 1999.

______________Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: SEMTEC,2002.

BUNGE, M. **Teoria e realidade**. São Paulo: Perspectiva, 1974.

CABRI GÉOMÈTRE II **– MANUAL PARA MACINTOSH Y MS-DOS**. Texas

CAMP, Dane R.: ***A Fractal Excursion***: The Mathematics Teacher, April 1991.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica: del saber sabido al saber enseñado**. Buenos Aires: Aique, 1991.

CLONINGER**,** Susan C**.** ***Teorias da Personalidade***. São Paulo: Martins Afonso, 1999.

COES, Loring: ***Building Fractal Models with Manipulatives***: The Mathematics Teacher, Vol 86, Nº 8, November 1993.

Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: SEMTEC,2002.

Egsgard, John C.: ***An Interesting Introduction to Sequencer and Series***, The Mathematics Teacher, February 1988.

FALCONER, Kenneth. ***Fractal Geometry: mathematical foundations and applications***. Chichester: John Wiley & Sons, 1990.
Freeman, 1977.

GARNIER , Catherine . Berdnarz ,Nadine e Ulanovskaya , Irina: ***Vygostky e Piaget : Perspectivas Social e Contrutivista . Escolas Russa e Ocidental*** .Porto Alegre , Artes Médicas , 1996 .

GIL , Antonio Carlos : ***Como Elaborar Projetos de Pesquisa*** . São Paulo .Atlas Editora,1991.

GUERRINI, Ivan Amaral. ***Caos, Fractais e complexidade: os novos rumos da ciência no século XXI***. Disponível em < http://www.geocities.com/Paris/Bistro/5657/artigo5.html> Acesso em: 10 maio 2005.
Instruments Instructional Communications, [s.n.t.].

International Handbook of Mathematical Education, Bishop, A. et al (eds), Kluwer

KELLY, G.A. A Brief Introduction to Personal Construct Theory. In Baunister. Ded. ***Perspectives in Personal Construct Theory***. London: Academic Press, 1970.

KERN, Jane F. and Mauk, Cherry C.: ***Exploring Fractals - a Problem-solving Adventure Using Mathematics and Logo*****:** The Mathematics Teacher, March 1990.

LORNELL, Randi e Westerberg, Judy: ***Fractals in High School: Exploring a New Geometry***: The Mathematics Teacher, Vol 92, Nº 3, March 1999

MAEHR, B. ***Clinical Psychology and Personality***: The Selected Papers of George Kelly. New York, Wiley, 1969.

MANDELBROT, B. P. ***Objetos Fractais***. Lisboa: Gradiva, 1998.

MANDELBROT, B. **The Fractal Geometry of Nature**. 3. ed. New York: W.H Freeman, 1983.

________________, Benoit: ***Fractals: Form, Chance and Dimension*** W. H. Freeman and Company, San Francisco, USA , 1977.

__________________, B. P. ***The Fractal Geometry of Nature.*** New York: Freeman, 1977.

Academic Publishers. p. 469-501, 1996.

OLIVEIRA, Marta Kohl de: ***Vygotsky - Aprendizado e Desenvolvimento um Processo Sócio-Histórico***: São Paulo, Editora Scipione, 1995.

Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília, 1999.

PEITGEN,Heinz-Otto, Jürgens,Hartmut, Saupe,Dietmar, Maletsky,Evan, Perciante,Terry e Yunker,Lee: ***Fractals for the Classroom: Strategic Activities Volume One***: Sringer-Verlag, New York, USA, 1991.

SALLUM, Élvia Mureb. **Fractais no ensino médio**. *Revista do Professor de Matemática*, SBM, São Paulo, nº 57, p. 1-8, maio/ago. 2005.

SERRA, Celso Penteado; KARAS, Elizabeth Wegner**.** ***Fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos.*** Curitiba: Champagnat, 1997.

SIMMT,Elaine e Davis,Brent**:** ***Fractal Cards: A Space for Exploration in Geometry and Discrete Mathematics***: The Mathematics Teacher, Vol 91, Nº 2, February 1998.

APÊNDICE

ANEXOS

ATIVIDADES, TEXTOS, ARTIGOS E APRESENTAÇÕES EM POWER POINT UTILIZADOS NAS ETAPAS DA INTERVENÇÃO DIDÁTICA.

ATIVIDADES

VLADIMIR (9)

ARTIGOS