UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

ADEGUNDES MACIEL DA SILVA

Investigando a concepção de frações de alunos nas séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio

RECIFE

2006

ADEGUNDES MACIEL DA SILVA

Investigando a concepção de frações de alunos nas séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Ensino das Ciências pela Universidade Federal Rural de Pernambuco.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos

RECIFE

2006

Maciel, Adegundes
Investigando a concepção de frações de alunos nas séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio/ Adegundes Maciel da Silva.
126f.
Dissertação de (mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco. Departamento de Educação. Recife, 2006.
Área de concentração: Ciências Matemáticas
Orientador: Marcelo Câmara dos Santos

1. Concepção 2. Fração 3. Equivalência

ADEGUNDES MACIEL DA SILVA

Investigando a concepção de frações de alunos nas séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Ensino das Ciências pela Universidade Federal Rural de Pernambuco.

Comissão Examinadora:

Dr. Marcelo Câmara - 1º Examinador / Orientador

Dra. Verônica Gitirana - 2º Examinador

Dra. Josinalva Menezes - 3º Examinador

Dra. Anna Paula - 4º Examinador

Recife, agosto de 2006.

Dedicatória

A meus pais (em memória), que sempre acreditaram no sucesso de seus filhos; à minha irmã querida (Lude); à minha família; e a todos que fazem a educação da nossa cidade – com seriedade, compromisso, carinho e profissionalismo – contextualizando a cidadania para o bem estar da sociedade.

Agradecimentos

A Deus sobre todas as coisas; à Mãe de Deus – N. S. da Conceição –, que me ajudou no equilíbrio de minhas energias e caminhos para que fosse classificado para este curso; ao Max (Fox Paulistinha) que contribuiu me fazendo companhia nas caminhadas pelo bairro, liberação de estresse nos momentos mais difíceis dessa minha jornada.

RESUMO

SILVA, A. M. **Investigando a concepção de frações de alunos nas séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.** 2006. 126f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2006.

O estudo das frações tem se tornado, ao longo dos anos, tema de discussões por grande parte dos educadores matemáticos. Resultados publicados pelo Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE) se mostram pouco animadores em relação ao ensino deste tópico, seja no Ensino Fundamental ou no Ensino Médio. O ensino das *frações* só inicia na 3ª série e algumas literaturas já defendem que esta prática seja bem antes – a partir do 1º ano escolar. Diante deste quadro, podemos perceber a complexidade que existe e o tempo necessário para que o aluno apreenda os conceitos de *fração*. Com o objetivo de identificar a *concepção de frações e de equivalência de frações de alunos nas séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio*, foi realizado um teste diagnóstico com 630 alunos de escolas, uma da Rede Municipal do Recife e outra da Rede Estadual de Pernambuco. Este instrumento foi composto de dez questões, que foram tabuladas e graficamente analisadas, envolvendo frações como: *parte-todo*, *quociente* e *operador,* a influência de figuras nas questões, *quantidades discretas e contínuas,* além de *equivalência das frações.* Os resultados revelam que os melhores desempenhos estiveram nas séries centrais (6ª e 7ª séries) e a partir do 2º ano do Ensino Médio. Várias concepções foram encontradas, como, por exemplo: *entre duas frações, quanto maiores os seus termos correspondentes, maior será a fração*; *quanto maior o denominador, menor será a fração, em qualquer circunstância*; *a equivalência de frações está estritamente associada à igualdade entre seus termos correspondentes*; *para determinar a fração correspondente numa figura de partes pintadas, não importa se as partes que foram divididas sejam iguais*; *a concepção de metade em figuras pintadas está condicionada à contigüidade dessas partes e a não importância da eqüidade entre as partes pintadas e não-pintadas;* e puderam expressar o quanto a influência dos números naturais cria barreiras na aprendizagem das frações; o bom desempenho nas *equivalências das frações* só acontece a partir da 7ª série e de forma crescente com a escolaridade; a presença de figuras nas questões como de *quantidades contínuas* promoveu aumento de rendimento na maioria dos itens do instrumento.

Palavras – chave: concepção, fração, equivalência.

ABSTRACT

MACIEL, A. **Investigating students' conception of fractions of the final levels of Elementary and Secondary School.** 2006. 126p. Dissertation (Master in Teaching of Sciences) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2006.

The study of fractions has becoming theme of discussions by many of mathematics´ educators. Results from the Educational Assessment System of Pernambuco (SAEPE) show bad scenarios in this mathematics topic, regarding elementary and secondary schools levels. The study of *fractions* begins only at the third grade, despite some literatures defend that this practice should start be much earlier – from the first scholar year. Considering this situation, we may perceive the complexity that exists and the time student need to learn *fraction.* In order to identify the *conception of fractions in students in the final grades of Elementary and Secondary Schools*, 630 students from one public municipal school and one public state school have been diagnosed. The instrument comprised of 10 questions, specifically tabulated and graphically analyzed, involving fractions such as: *part-whole*, *quotient* and *operator*, the influence of pictures in the questions, *continuous and discrete amounts* and also the *equivalence of the fractions*. The results reveal that the best performance was obtained by students of the central grades (sixth and seventh grades of Elementary School) and from the students second year of the Secondary School up. Several conceptions were found, such as: *between two fractions, the greater their corresponding terms, the greater will be the fraction; the greater the denominator, the smallest the fraction, regardless of circumstance; the equivalence of fractions is strictly associated to the equality of their corresponding terms; to determine the corresponding fraction in a picture of colored parts, it does not matter if the divided parts are alike; the conception of half in colored pictures is conditioned to the contiguity of these parts and not the import of the equity between colored parts and non-colored parts;* and could express how much the influence of natural numbers create barriers in the learning of fractions; the good performance in the *equivalence of fractions* happens only from the seventh grade and increases with school years; the presence of pictures in the questions such as *contiguous quantities* had great advantages in their performance in most items of the instrument.

Words key: conception, fraction, equivalence.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 12
2. REVISÃO DA LITERATURA 22
2.1. Condições para existência de frações.. 24
2.2. As *frações* no campo conceitual das estruturas multiplicativas............. 27
2.3. O conceito de *frações* em um campo maior: os números racionais...... 30
2.4. Saberes necessários e saberes inibidores à compreensão das *frações*.. 32
2.5. Como os livros didáticos introduzem as *frações* na 5ª série. 38
3. MÉTODO.. 40
3.1. Análise preliminar do questionário aplicado aos alunos....................... 42
3.2. Estrutura da análise dos resultados.. 51
4. ANÁLISE LONGITUDINAL... 52
5. ANÁLISE TRANSVERSAL.. 88
5.1 *Quantidades contínuas e quantidades discretas*.................................. 88
5.2 Suporte de representação 90
5.3 Quanto aos sub-construtos 91
5.4 A *concepção de fração* e de *equivalência de frações* em função da escolaridade.. 92
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS... 94
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.. 99
8. ANEXOS...104
8.1 Anexo 1 – Questionário página 1.2 105
8.2 Anexo 2 – Questionário página 2.2 106
8.3 Anexo 3 – Tabela de dados percentuais das questões (1a) e (1b) 107
8.4 Anexo 4 – Tabela de dados percentuais das questões (2), (3), (4), (5) 108
8.5 Anexo 5 – Tabela de dados percentuais das questões (6), (7), (8)..... 109
8.6 Anexo 6 – Tabela de dados percentuais das questões (9), (10) 110
8.7 Anexo 7 – Tabela de dados percentuais das questões (3a), (3b), (3c) 111
8.8 Anexo 8 – Artigo submetido à publicação pela Revista Bolema........... 112

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Itens–amostra das perguntas de equivalência. FONTE: Kerslake (1986).............pág. 14
Figura 2 - Exemplos de itens usados para estudar a compreensão das crianças sobre frações.
FONTE: Campos *et al*. (1995)..pág. 15
Figura 3 - Representação gráfica de frações como operadores multiplicativos....................pág. 32
Figura 4 - Gráfico percentual de desempenho na questão (1A)......................................pág. 52
Figura 5 - Gráfico percentual de erros da questão (1A)...pág. 53
Figura 6 - Gráfico percentual do desempenho na questão (1B)......................................pág. 55
Figura 7 - Gráfico percentual dos erros cometidos na questão (1B)..................................pág. 55
Figura 8 - Gráfico de acertos na questão (1A) e (1B) em função da escolaridade...............pág. 57
Figura 9 - Gráfico percentual de desempenho na questão (2)..pág. 59
Figura 10 - Gráfico percentual comparativo entre nossas 5ª séries, as 5ªs de
Magalhães (2004) e as 4ªs séries verificadas por Alencar (2004) e Lins (2004)....pág. 59
Figura 11 - Gráfico percentual de performance da questão (3abc)....................................pág. 60
Figura 12 - Gráfico percentual de desempenho na questão (3a).......................................pág. 61
Figura 13 - Gráfico percentual de desempenho na questão (3b).......................................pág. 62
Figura 14 - Gráfico percentual de desempenho na questão (3c).......................................pág. 62
Figura 15 - Desempenho percentual entre as crianças na Inglaterra e no Brasil para a
5ª série em acertos na questão (3)..pág. 63
Figura 16 - Gráfico percentual dos erros cometidos pelos alunos na questão (3a)..........pág. 64
Figura 17 - Gráfico percentual dos erros cometidos pelos alunos, na questão (3b)..............pág. 65
Figura 18 - Gráfico percentual de erros cometidos na questão (3c)..................................pág. 66
Figura 19 - Gráfico percentual de desempenho na questão (4)..pág. 68
Figura 20 - Gráfico percentual dos erros da questão (4)..pág. 69
Figura 21 - Gráfico percentual de erros na questão (5)...pág. 71
Figura 22 - Gráfico percentual de erros na questão (5)...pág. 72
Figura 23 - Gráfico percentual de desempenho na questão (6a).......................................pág. 74
Figura 24 - Gráfico percentual de erros na questão (6a)..pág. 74
Figura 25 - Gráfico percentual de desempenho na questão (6b).......................................pág. 75
Figura 26 - Gráfico percentual de erros na questão (6b)..pág. 76
Figura 27 - Gráfico percentual de desempenho na questão (6c).......................................pág. 76
Figura 28 - Gráfico percentual de erros na questão (6c)..pág. 77

Figura 29 - Resumo gráfico percentual de desempenho na questão (6)..............................pág. 78
Figura 30 - Gráfico percentual de desempenho na questão (7)..pág. 79
Figura 31 - Gráfico de desempenho na questão (8)...pág. 82
Figura 32 - Gráfico percentual de desempenho na questão (9)..pág. 83
Figura 33 - Gráfico percentual de erros na questão (9)...pág. 84
Figura 34 - Representação isomórfica dos chocolates na resolução do problema (9)...........pág. 85
Figura 35 - Gráfico percentual de desempenho na questão (10)..pág. 86
Figura 36 - Gráfico percentual de erros na questão (10)...pág. 86
Figura 37 - Gráfico percentual de desempenho nas questões de quantidades discretas e contínuas..pág. 89
Figura 38 - Gráfico percentual de desempenho nas questões com e sem figuras................pág. 91
Figura 39 - Gráfico percentual de desempenho relativo aos sub-construtos.........................pág. 91
Figura 40 - Gráfico percentual de desempenho dos alunos com as *frações* em geral e *equivalência das frações* em função da escolaridade......................................pág. 93

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Relação dos itens do questionário e suas características ....pág. 41

1. INTRODUÇÃO

... "Pensamentos sem conteúdos são vazios, intuições sem conceitos, são cegos. Esses dois poderes ou capacidades não podem trocar as suas funções. O entendimento não pode intuir nada, nem os sentidos pensar, seja o que for somente de sua união, pode sair o conhecimento" (KANT, 1787; 1990. p.77).

O conceito de fração está muito presente no nosso dia-a-dia e em diversos contextos. Na escola, é vivenciado a partir da 3ª série do Ensino Fundamental. Porém, é possível perceber que, mesmo as crianças passando um considerável tempo de instrução escolar, enfrentam uma série de dificuldades para adquirir a sua compreensão.

A aprendizagem das *frações* não é uma tarefa tão fácil, pois envolve a articulação de várias outras idéias, tais como: quociente, medida, razão e equivalência, entre outros.

Há muitos anos, o ensino das frações tem sido tema de preocupação nos grandes fóruns de professores da Rede Municipal de Ensino do Recife. As reuniões mensais tratam das informações decorrentes dos planejamentos, discussões sobre temas que trazem dificuldades na aprendizagem dos alunos, trocas e relatos de experiências. O conteúdo de *frações* tem sido bastante solicitado pelos professores, como tema de discussão que carece de melhores resultados nas práticas de ensino e da aprendizagem.

A mesma situação pode ser constatado na Rede Estadual de Ensino de Pernambuco. Resultados apresentado nas últimas pesquisas publicadas pelo Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco - SAEPE (PERNAMBUCO, 2003), as quais evidenciaram por meio dos itens que tratam das frações, um fraco desempenho dos alunos. Por exemplo, na 8ª série do Ensino Fundamental, nas questões relativas ao descritor D021 – *reconhecer as diferentes representações de um mesmo número racional,* apenas 3 a cada 10 alunos conseguiu êxito. No descritor E011 – *resolver problemas utilizando as noções de frações equivalentes,* menos de 30% dos alunos obteve sucesso nas questões associadas. Finalmente, se considerarmos o descritor D022 - *Identificar fração como representação que pode* *estar associada a diferentes significados* – apenas 15,9% dos alunos conseguiram resolver corretamente as questões associadas ao descritor.

Enquanto no Ensino Fundamental as frações são trabalhadas como "objeto de estudo", no Ensino Médio elas aparecem como "ferramentas", ou seja, instrumentos para o trabalho com outros campos da Matemática, tais como: razão, proporção, regra de três, juros, porcentagens, etc., na aritmética, na geometria, na trigonometria, na química, na física. Dessa forma, nos parece preocupante que alunos do 3º ano do Ensino Médio apresentem resultados tão baixos na avaliação do SAEPE. Por exemplo, encontramos que para o descritor D015 - *Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa entre grandezas*, apenas 27,4% dos alunos obtém sucesso. No descritor D016 – *Resolver problema que envolva porcentagem*, apenas um a cada quatro alunos consegue resolver corretamente os itens associados ao descritor, isso após oito anos de instrução escolar e seis com as *frações* na Matemática.

Vale ressaltar que esses resultados referem-se a alunos de duas séries terminais, isto é, de 8ª série do Ensino Fundamental e 3º ano do Ensino Médio. Isso nos levou a questionar como os alunos estariam se comportando durante seu percurso escolar, ou seja, como estaria sendo construído o conceito de fração durante a sua escolaridade. Dessa forma, tomamos como objeto de estudo investigar que concepções de fração e de equivalência de frações os alunos das séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio estariam construindo. Além do conceito de *fração*, adotamos como objeto de estudo a idéia de *equivalência de frações,* na medida em que a quase totalidade dos estudos realizados sobre o tema, como veremos mais adiante, demonstra que as duas idéias se relacionam de forma importante.

É nesta direção que a literatura, nesse campo, aponta resultados de estudos que tentam diagnosticar quais as dificuldades na aprendizagem do conceito de fração vivenciadas pelos nossos alunos.

> *Com as frações as aparências enganam. Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e, ainda assim, não o têm. Elas usam os termos fracionais certos; elas falam sobre frações coerentemente; elas resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que*

> *alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, e sem que ninguém perceba* (NUNES; BRYANT, 1997, p. 191).

Segundo os autores, é comum se apresentarem frações às crianças e mostrar-lhes *todos* divididos em *partes,* distinguindo muitas vezes o resto, e pintando algumas dessas partes. Em seguida, lhes é informado que o número total de partes é o denominador, e que a quantidade de partes pintadas corresponde ao numerador. Esta introdução vem, em geral, junto com alguma instrução de regras para operar com as frações, permitindo *que as crianças transmitam a impressão de que* sabem muito sobre frações.

Em um estudo sobre equivalência de frações, Kerslake (1986), trabalhando com crianças de 12 a 14 anos, demonstrou que elas não encontravam muita dificuldade em reconhecer partes equivalentes em figuras, como as representadas abaixo. Até acrescentavam que retirando as linhas oblíquas da figura (1a) ou a linha vertical de (1b), os diagramas pareceriam iguais, e era assim que elas sabiam que as frações eram iguais (ou equivalentes).

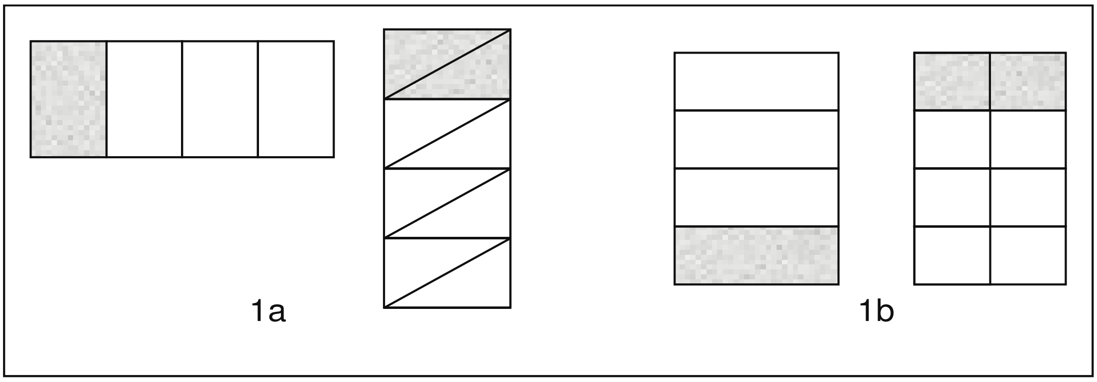


Figura 1 – Itens–amostra das perguntas de equivalência. FONTE: Kerslake (1986).

Apesar disso, Kerslake (ibd.) mostrou, em diversos momentos de seu estudo, que a impressão de crianças raciocinando com sucesso sobre frações poderia ser falsa. Foi o caso de os alunos não encontrarem frações equivalentes com o objetivo de efetuar adição, quando somavam frações com denominadores diferentes, como, por exemplo, 2/3 + 3/4 = 5/7. Mesmo quem conseguiu transformar as frações em frações equivalentes de mesmo denominador, antes de resolver, não conseguiu explicar a conexão entre a equivalência e a adição. Um em cada três alunos resolveu de forma correta, porém, nenhuma criança conseguiu explicar a mudança para o denominador comum (12) antes de operá-las. Elas estavam simplesmente *repetindo a rotina* de sala de aula (KERSLAKE, 1986, p.21).

Outro exemplo disso pôde ser verificado por Campos *et al.* (1995), quando ficou mostrado que o modo de se introduzir frações pode, realmente, levar as crianças ao erro. As estratégias de ensino empregadas na maioria das salas de aula simplesmente estimulam os alunos a empregar um tipo de contagem dupla. Por esse processo, faz-se contar o número total de partes e o número de partes pintadas sem compreender, realmente, o novo tipo de número.

Para comprovar esta hipótese, eles pediram às crianças que identificassem frações, em situações que não poderiam ser resolvidas por contagem dupla e que elas raciocinassem em termos de relação *parte-todo*.

Os autores deram três tipos de itens a alunos de 5ª série (12 anos) que tinham aprendido o procedimento de contagem dupla: o item tipo 1, típico de exercícios de sala de aula, no qual o todo foi dividido em partes iguais em que as partes pintadas são contíguas; o item tipo 2, menos comum, mas que poderia ser resolvido da mesma forma (de dupla contagem), em que a figura aparece dividida em formas iguais, as partes pintadas não estavam de forma contígua; o item tipo 3, não típico, que não poderia ser resolvido por *dupla contagem*, pois não havia uma divisão explícita às partes iguais, e, forçosamente, a divisão precisaria ser descoberta pelos alunos, pela análise da relação *parte-todo*, conforme a figura seguinte.

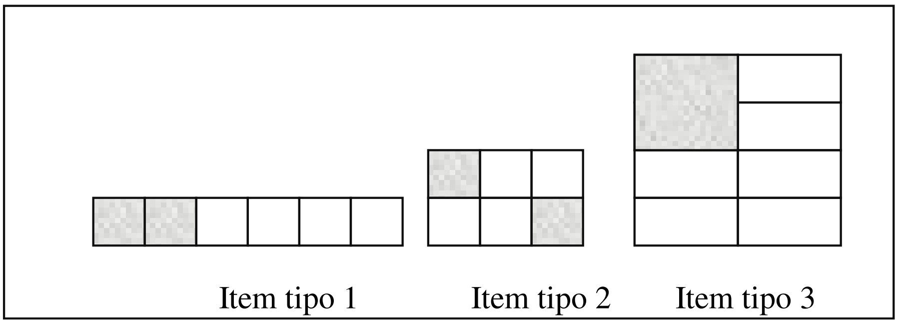


Figura 2 – Exemplos de itens usados para estudar a compreensão das crianças sobre frações. FONTE: Campos *et al.* (1995).

Os resultados do experimento confirmaram as hipóteses dos autores. Os itens 1 e 2 foram considerados fáceis para os alunos, com altos índices de acertos. No item tipo

3, 56% dos alunos responderam como 1/7 a fração correspondente; 12% responderam 2/8; e 4% tanto 2/8 como 1/4.

Estes resultados reforçam a suspeita de que os alunos utilizam a linguagem das frações sem necessariamente entendê-la.

Observa-se que na instrução escolar, as frações são definidas como $\frac{a}{b} \in Q, b \neq 0,$ ou seja, $\frac{a}{b}$ representa um número racional, com $b \neq 0$, sendo ***a*** chamado de numerador e ***b*** de denominador. No processo de *transposição didática*[1] do campo matemático para a esfera didático-pedagógica, esse novo número passa a ter um significado particular. A fração, neste caso, é entendida como uma *partição*, como a representação da conjugação de duas ações: dividir/ (tomar, comer ou pintar). Na escola, são mais usuais as pizzas, bolos, barras, ou figuras geométricas, limitando a idéia do conceito de *frações*.

Nesta direção, é percebido que entender frações como partições, leva os alunos a uma série de dificuldades na compreensão de seu conceito. Por isso, Maia, Câmara e Câmara (1991) sugerem que a idéia de fracionamento induz implicitamente que, cada uma dessas frações são porções menores (iguais) que o todo inicial, é uma fração do que foi o *todo* na sua origem. Logo, quando esse *todo* não está claramente definido, a idéia de unidade fica duvidosa e o fracionamento mais difícil. É nesse sentido que o conceito de *frações* torna-se incompreensível.

Fato mais incisivo pode ser constatado junto às frações impróprias, na qual as partes *tomadas* são maiores que o todo – maiores que o total das partes?! Segundo, Maia e colegas (*ibd.*), alguns sujeitos afirmavam que *o número de cima é quantas partes vou pintar e o de baixo quantas partes eu vou dividir o círculo,* limitando a relação *parte-todo,* que não alcança a idéia de razão entre os termos da fração. É assim que se reafirma a compreensão de *fração* em termos de *conjugação de ações.*

---

[1] Conjunto de transformações que sofre o saber científico antes de ser ensinado. Este processo vai desde a escolha do saber a ensinar à sua adaptação ao sistema didático, existindo todo um processo gerador de deformações, de estabelecimento de coerências e até a criação de novos conhecimentos, ao saber escolar (CHEVALLARD, 1985).

Críticas contundentes são encontradas na obra de Davydov e Tvetkovich (1991). Os autores examinaram planejamentos e manuais "tradicionais" de matemática fundamental e identificaram, quanto ao aprendizado do conceito de *frações*, o seguinte caminho: as crianças, inicialmente, representam como *quebrar* (ou *dividir)*, um objeto proposto como um elemento unitário, em vários objetos concretos divididos em parte iguais (*frações)*, formando assim, várias frações desses objetos (*um meio, um quarto...);* fazem este exercício usando desenhos como, bolos, pizzas, círculos, segmentos, etc.; e terminam operando o conceito de *fração* sem auxílio externo, além das próprias notações (1/2, 1/4, 2/3,...).

Por este caminho pode-se perceber que, para muitos, '*ensinar fração'* é introduzir conceitos através de objetos e números. Grande parte das instruções de sala de aula é consumida envolvendo-se manipulações de objetos discretos sob modelos de números naturais.

Vergnaud (1982) complementa o trabalho de Davydov (*ibd.*) no sentido de reconhecer que não apenas nas manipulações de objetos é possível compreender frações, mas em aspectos muito mais amplos a esse *campo conceitual*[2], como veremos mais adiante.

No mesmo sentido, encontramos em Schliemann e Carraher (1993 *apud* ZARZAR, 1998), considerações similares a Davydov e Tvetkovich (1991) e Vergnaud (1982), quando acreditam que ensinar conceitos *como se eles pudessem ser reduzidos a uma cadeia de símbolos sem significados,* é um fato comum na maioria das unidades escolares.

Uma outra situação delicada quanto a ensinar *frações* nas escolas, refere-se à particularidade do conceito de número tratado sob *quantidades discretas* e *contínuas*[3]. As crianças são envolvidas com esta natureza sem mesmo serem

---

[2] Uma situação para ser compreendida necessita do concurso de vários conceitos e cada conceito isoladamente pode ser mobilizado para a compreensão de mais de uma situação. Tal consideração cognitiva seria aquela proposta pela idéia de *campos conceituais.* Diversos domínios em matemática obedeceriam a essa organização, obedeceriam a esses *campos conceituais* (VERGNAUD, 1982).

[3] Quantidades *contínuas* referem-se ao modelo que podem ser subdivididas de várias formas, repetidas e infinitas; o modelo de quantidades *discretas* só permite divisão e contagem com uma menor ênfase em relação ao todo (PITKETHLY; HUNTING, 1996). A primeira questão do questionário de nossa pesquisa é exemplo do modelo de quantidades *discretas*; a questão de número 9 é exemplo de quantidades *contínuas.*

avisadas do que se tratam, representam ou importam para a sua inclusão nos estudos dos números racionais.

Para Nunes e Bryant (1997), as crianças precisam operar com *quantidades discretas*, obviamente, com procedimentos apropriados para isso. No entanto, ainda acreditam não existir o momento certo em operar *quantidades contínuas* com as crianças. Muitos autores acreditam que dependem de relações lógicas. Piaget *et al.* (1960) sugeriram as relações de transitividade como ponto de partida para a medida, e relação de *parte-todo* como ponto de partida para a compreensão de frações.

Bryant (1974) acredita que muito antes dos alunos começarem a entender as relações *parte-todo* (tipo mais elementar) serão capazes de utilizá-las. E se esta *quantidade contínua for dividida em apenas duas partes, pode-se verificar com freqüência se uma parte é maior que a outra. O* autor ainda acrescenta que as relações '*maior/ menor do que'* e '*igual',* poderiam ser as primeiras relações lógicas a serem usadas no conhecimento da *quantificação de frações.* Geralmente esse todo é dividido em duas partes, logo, '*metade'* tem um '*status' especial nas origens de quantificação das frações: o limite do meio define se duas partes são iguais ou se uma parte é maior que a outra.*

Para verificar as hipóteses anteriores, Spinillo e Bryant (1991) projetaram vários experimentos para analisar o uso do *limite do meio* nas crianças para julgamento de equivalência. Esses autores acrescentam que esse limite seria o primeiro passo no trabalho das crianças para relacionar e quantificar as *frações*.

Portanto, o conceito de *frações* envolvendo *quantidades discretas* tem a ver em dividir os elementos de um grupo em subgrupos de mesma quantidade. Para conseguir 1/2 de 8 maçãs basta dividir as 8 maçãs em 2 grupos que, obrigatoriamente, tenham 4 maçãs. E o mesmo conceito, envolvendo *quantidades contínuas*, tem a ver com a possibilidade de realizar cortes de um mesmo *todo*, *visualmente unitário*, que tenha a mesma medida. Para obter 1/2 de um *barbante*, basta cortá-lo em duas partes de mesmo tamanho e tomar uma destas partes (MIGUEL e MIORIM, 1986). É hábito, nas escolas, empregarem em seus currículos apenas *frações* com *quantidades contínuas*, o que não recomendam os autores deixar as *frações* com *quantidades discretas* de fora das instruções.

Em estudo realizado sobre o desenvolvimento do conceito de *frações* com *quantidades discretas*, Lima (1981, p. 2) afirma que as instruções escolares apenas se preocupam com as técnicas de ensino, esquecendo o lado psicológico das crianças quando se trata da construção de um conceito. *O desenvolvimento cognitivo das crianças não é analisado como base para a escolha do nível de abordagem do conceito de fração e das estratégias adequadas à fase de desenvolvimento conceitual em que se encontra a criança.* Ele verifica que a prática escolar está voltada para o ensino das *frações* restrito ao modelo *parte-todo*, este deixando de lado outros aspectos importantes do referido *campo conceitual*, notadamente a classe de problemas envolvendo *estruturas multiplicativas* (VERGNAUD, 1983).

Diante desse quadro, Kieren (1976) sugere que os números racionais sejam incorporados a uma análise diversificada de múltiplas interpretações matemáticas. Segundo o autor, o desenvolvimento da idéia de número racional estaria subordinado ao trabalho com várias outras idéias de fração, tais como *quantidades contínuas e discretas; razão; equivalência; proporção; e estimativa.*

Os números racionais surgiram pela necessidade de resolver problemas do cotidiano. Assim, expressões de medidas de grandezas ou muitos resultados de divisões, por exemplo, seriam impossíveis de serem resolvidos apenas com o conhecimento dos números *naturais* ou *inteiros*.

A construção dos números racionais, ou *campo numérico racional* (CARAÇA, 1989), aconteceu por uma extensão do *campo numérico inteiro.* Está diretamente relacionada ao *processo de medição*, relação estabelecida através da comparação entre duas grandezas, uma servindo de unidade de medida da outra, e a necessidade de, sempre que possível, expressar através de um quociente a relação (razão) entre dois inteiros quaisquer.

A construção do conceito do número racional / fracionário é complexa, seja do ponto de vista psicológico seja do ponto de vista epistemológico. Nesta construção, os alunos enfrentam barreiras para a compreensão da necessidade do conceito de um *novo* número (diferente dos números naturais). Para Silva (1997), estas barreiras podem ser entendidas como fatores ocasionais que impedem, em condições normais ou satisfatórias, a aprendizagem da concepção de *fração*, isto é, *obstáculos psicológicos ou epistemológicos*. A *representação simbólica*, na qual os alunos apenas reproduzem sem entender perfeitamente seu significado; a resistência a *números quebrados* como resultados; a dificuldade em aceitar as *frações como números*, pois os fracionários surgem da partição de algo que representa um inteiro, fazendo os alunos não interpretar *fração* como um único número, mas como um par de números naturais, pode ser considerado como os três primeiros obstáculos encontrados nas crianças quando iniciam os estudos das *frações.*

Ainda dois outros obstáculos são citados pela mesma autora: *o conhecimento dos números naturais*, no qual os alunos tentam aplicar tudo o que aprenderam acerca dos números naturais para as *frações,* tratando-as como dois números naturais – um em cima do outro – e não como um único número em si; e *o modelo de referência,* no qual permeiam na criança, durante muito tempo, que os naturais são os únicos que possuem *status de números*, estendendo todo seu conhecimento dos naturais para os fracionários. Como o modelo de referência dos números naturais é um modelo *discreto*, procuram ensinar frações com um modelo *contínuo*, buscando nas crianças mostrar as limitações dos naturais. Entretanto, na medida em que as crianças são levadas a contar as partes do todo, *há um movimento de 'discretização' da área envolvida em pedaços contáveis* (SILVA, 1997, p. 30). Com isso, há perda do sentido do inteiro e um retorno ao modelo original dos números naturais.

Para Kieren (1976), um outro obstáculo está na maneira de como é tratado o conceito. O trabalho com as frações é visto como uma seqüência de regras a serem aprendidas e processadas sem a devida importância à compreensão conceitual. As dificuldades são enormes para os professores que não vêem resultados satisfatórios, e, para os alunos, um fracasso.

Considerando a dificuldade do conteúdo e outras prioridades curriculares, documentos oficiais têm diminuído a ênfase em *frações*, nas séries iniciais. É o caso dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), cujas orientações vão à direção de eliminar, das séries iniciais, as operações com números racionais na representação fracionária (BRASIL, 2001). A matriz de descritores da 4ª série do SAEB – Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (INEP, 2001) – também não inclui essas operações.

Para Bertoni (2004), mais justo seria que os livros didáticos e as propostas curriculares tratassem, com uma maior ênfase, a introdução das frações e suas operações, suprindo, assim, lacunas deixadas pela omissão destes trabalhos nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

Nesta direção, segundo observações feitas por Streefland (1991), seria necessário que o conteúdo de *frações* fosse ensinado seguindo os mesmos caminhos pelos quais são ensinados os *inteiros*. Para estes, buscam-se explorar todas as suas relações: atividades de contagem, medida e operações que se possam envolver.

Para Stengel e Nodding (1982, *apud* CRUZ, 2003) seria importante um trabalho que permita realizar a transição entre os números inteiros e os racionais. Os autores recomendam que seja feita uma integração entre símbolos e sinais, o uso da reta numérica, operações com números mistos (incluindo *pedir emprestado* durante a subtração), pois, graficamente, isso facilitaria a compreensão dos números racionais.

Apesar dos avanços em pesquisas na educação matemática, o ensino das *frações* continua se caracterizando como um exercício de regras e procedimentos, uma *aprendizagem de algoritmos*. Assim, fica caracterizado um desafio a ser alcançado pelos educadores matemáticos que procuram desenvolver saídas, ferramentas inovadoras para uma real compreensão do conceito de *fração* e de *equivalência das frações.*

A partir desse quadro, buscamos *investigar a concepção de frações de alunos das séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.* Para tanto, aplicamos um instrumento escrito, nas séries finais do Ensino Fundamental e nas séries do Ensino Médio, em duas escolas públicas de Pernambuco.

Em nosso instrumento, contemplamos as idéias de *fração* como modelo *parte-todo*, como *quociente* e como *operador,* em situações de *quantidades discretas* e *contínuas*. Além do conceito de *fração*, buscamos, também, investigar, que concepções os alunos mobilizam no trabalho com a *equivalência de frações*.

2. REVISÃO DA LITERATURA

O início do trabalho com *frações* na escola, geralmente é acompanhado de uma grande preocupação com os aspectos didáticos e metodológicos relativos ao conceito, pouco consideradas as questões psicológicas ligadas à aquisição dessas idéias.

> *A construção do conceito de número racional/fracionário é sem dúvida, um processo complexo, seja do ponto de vista psicológico ou epistemológico. As crianças enfrentam diversas dificuldades para compreender a necessidade da utilização deste "novo" conceito de número em suas tarefas escolares, como documentado por alguns pesquisadores.* (MAIA; CÂMARA, M.; CÂMARA, P., 1991).

Em Lima e Brito (2001) encontramos que, na escola, as crianças elaboram o conceito de fração como sendo *um pedacinho de alguma coisa*, uma parte específica de um todo, ou algo menor que um todo. É a primeira idéia de fração que a criança recebe.

Alguns teóricos, como Daugustine (1976), defendem que sejam desenvolvidos intuitivamente os estudos dos números fracionários, à princípio, entre a 1ª e a 4ª séries, apoiando-se em figuras geométricas tais como regiões de polígonos, segmentos de retas, linhas e conjuntos (descontínuos) determinados, assim como seja desenvolvido o conceito intuitivo de equivalência, por meio de trabalhos com regiões congruentes.

De acordo com a proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais, é no 2º ciclo (3ª e 4ª séries) que se inicia a construção do significado do número racional, nas suas diferentes representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social. Propõe-se, para este período, que as crianças sejam levadas a refletir sobre as limitações dos números naturais (nas situações em que é preciso representar quantidades menores que um inteiro) e a conseqüente importância dos racionais. Com o objetivo de favorecer a compreensão das crianças quanto à utilização dos números racionais na vida cotidiana, propõe-se que sejam explorados os seus diferentes significados (parte-todo, quociente e razão). (BRASIL, 1998).

Para Bertoni (2004), existe uma perda significativa do aprendizado das frações no Ensino Fundamental. A autora defende, já no primeiro ciclo, que o ensino das frações seja mais acentuado, inclusive em relação às operações fundamentais com as mesmas.

Diante deste quadro, pode-se perceber que a construção do número fracionário exige um razoável período de tempo, tendo em vista que as crianças devem ter diferentes contatos com experiências que permitam a compreensão e a necessidade desse tipo de número em suas vidas. Ao mesmo tempo, encontramos poucos estudos que mostram como a aprendizagem desses conceitos se desenvolve ao longo do tempo.

Estudos recentes têm mostrado que, desde muito cedo, as crianças possuem um conhecimento intuitivo das frações, antecedendo as atividades formais (na escola) com os números racionais, que são iniciadas na 3ª série (PITKETHLY; HUNTING, 1996). Esses conhecimentos intuitivos incluem imagens, experiências vividas e ferramentas do pensamento, formadas a partir de um grande número de situações específicas vivenciadas no dia-a-dia, e que servirão de base para a construção do conhecimento formal. Segundo esses autores, são os esquemas intuitivos que permitem que as crianças possam criar soluções para determinados problemas e elaborar o seu próprio conhecimento matemático.

Há um consenso entre pesquisadores e professores de que a fração não é um conceito fácil de se entender (BEZERRA, 2004). Muitas vezes os alunos reconhecem a forma a/b (a e b naturais, com b ≠ 0), dizem que é uma fração, mas não conseguem representá-la ou aplicá-la numa determinada situação, principalmente quando se apresenta mais de um inteiro, explicito nas representações com *quantidades discretas.*

Vergnaud (1982) defende que, do ponto vista psicológico e didático da formação de conceitos matemáticos, estes devem ser compreendidos como sendo um conjunto de invariantes que podem ser utilizados na ação, em meio às situações que constituem as diversas propriedades e do conjunto de esquemas utilizados pelos sujeitos nessas situações.

Para que um conceito (C) possa ser compreendido em seu desenvolvimento e funcionamento é preciso considerar três subconjuntos de C = {S, IO, Y}: S é a *referência,* grupo formado de situações que dão consistência ao conceito; IO é o *significado*, grupo formado de invariantes operatórios, mecanismos utilizados pelo sujeito na resolução dos problemas, sobre os quais se apóiam a operacionalidade dos esquemas; e Y o *significante*, conjunto de representações simbólicas, tanto para a apresentação quanto para a resolução do problema. Os três elementos atuam conjuntamente, e para desenvolver melhor a compreensão de um determinado conceito se faz necessário estudá-lo num conjunto de situações diversas.

Segundo Franchi (1999), a operacionalidade de um conceito compreende uma variedade de situações e manifesta-se sobre uma variedade de ações e de esquemas. No plano do significado, os esquemas formam a articulação indispensável entre as situações de referência e os significantes (simbólicos), sendo formados de *invariantes, predição, inferências e regras de ação.*

Os *invariantes operatórios* (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) permitem que o sujeito possa reconhecer quais são os elementos relativos a uma dada situação e apreender a informação sobre a situação a ser tratada. São eles que determinam as diferenças entre um esquema e outro, essenciais para a formação dos campos conceituais. A *predição* são esquemas que condicionam os sujeitos a poderem antecipar o objetivo a ser alcançado, os efeitos a serem considerados e as possíveis etapas intermediárias. As *regras de ação permitem gerar a seqüência de ações pelo sujeito* (p.166), são regras do tipo *se..., então*. As *inferências capacitam aos cálculos, às regras e às antecipações de cada situação* com base nas disponibilidades das informações e do sistema de invariantes de cada sujeito.

2.1 Condições para existência de fração

Para Piaget *et al.* (1960), compreender *frações* necessita, primeiramente, da noção de conservação de quantidade. O número de um conjunto, seja contínuo ou descontínuo, permanece invariável em relação a mudanças de aspectos como: forma, posição, etc. Esta fase na criança acontece no estágio das operações concretas a partir de 7 ou 8 anos.

Os números fracionários apresentam particularidades nas relações entre a ação operatória e a representação perceptual (PIAGET; SZEMINSKA, 1975). *A origem desses números depende de uma ação por abstração reflexiva*[4] *ou empírica*. Segundo Boyer (1974), medições de terras influenciaram a criação do número

[4] *Ato de separar mentalmente um ou mais elementos de uma totalidade complexa (coisa, representação, fato), os quais só mentalmente podem subsistir fora dessa totalidade.*

fracionário. Muitos autores acreditam que a origem deles seja mais articulada com as questões espaciais que às questões ligadas à aritmética – mais perceptual que operatória. Logo, teria sua origem na experiência física do fracionamento de quantidades contínuas.

Para Piaget *et al.* (1960), o conceito de *fração* envolve uma relação *parte-parte* (quantidades extensivas) e uma relação *parte-todo* (quantidades intensivas)[5]. A relação *parte-parte* assegura que um todo pode ser exaustivamente dividido em partes equivalentes. A relação *parte-todo* assegura a compreensão de que a parte está sempre contida no todo e que juntas o compõem. Para esses autores, a compreensão de *frações* implica a construção de certos invariantes na organização das ações do sujeito:

- *Uma divisão eqüitativa das partes* – o todo precisa ser dividido em partes iguais para que cada parte seja considerada uma fração;
- *O esgotamento do todo* – a impossibilidade da existência de remanescentes quando se completa o todo;
- *A relação entre o número de partes e o número de cortes necessários para obter as partes* – para dividir um todo contínuo em três partes iguais serão necessários apenas dois cortes;
- *A relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido* – quanto maior o número das partes menor o tamanho de cada parte;
- *A soma de todas as partes constituídas a partir do todo é igual ao todo inicial 'princípio da invariância'* – com a divisão do todo em partes, a unidade não é alterada.

Para Piaget e Szeminska (1975), a compreensão do número fracionário é possível, diante de uma maturação biológica que segue, desde o pensamento das *operações concretas* até as *operações formais,* concedendo fundamental importância ao papel formador do *desenvolvimento cognitivo*.

[5] Quando quantidades se referem às relações em vez de à quantidade real elas são *intensivas*. Em contraste com quantidades extensivas que se referem à soma total (NUNES; BRYANT, 1997). As quantidades intensivas são relacionais, como: velocidade, taxa, probabilidades, etc. Como às relações *parte-todo.* As extensivas como às *parte-parte.*

O “raciocínio proporcional” na criança, começa no estágio das “operações formais”, último estágio do “desenvolvimento cognitivo”. Por outro lado, diversas são as pesquisas recentes que questionam a perspectiva *piagetiana* do raciocínio proporcional. Alguma delas: (HART, 1984; KARPLUS *et al*., 1979 *apud* CARRAHER, 1993) e Spinillo e Bryant (1991), mostram resultados diferentes.

Spinillo e Bryant (1991) realizaram um estudo para identificar como as crianças mobilizavam a idéia de razão em uma situação de proporcionalidade. Os resultados mostraram a importância da idéia de *metade* no pensamento proporcional dos sujeitos. Assim, o conceito de *frações* envolve a compreensão de outros conceitos e conhecimentos que poderão, nas fases iniciais da aprendizagem de competências e conceitos, estar implícitos ou mesmo incapazes de explicitação, mas que são extremamente importantes, pois orientam o desenvolvimento da ação. Estes conhecimentos são chamados por Vergnaud (1991) de *conhecimentos-em-ação.*

A formação de um conceito não invoca apenas aspectos práticos, como também teóricos. O conhecimento emerge de problemas a serem resolvidos e de situações a serem dominadas. Assim, a instrução escolar deve oferecer aos alunos várias situações, nas quais eles possam descobrir diversas relações num mesmo conteúdo matemático (VERGNAUD, 1991). Tanto concepções como modelos ou teorias são formados a partir das situações às quais o sujeito é submetido.

Vergnaud (*ibd.*) diz que, concepções, como habilidades, desenvolvem-se com o decorrer da vida e afirma que isso não ocorre apenas a partir de características gerais do pensamento, mas os conceitos de frações e razões possuem raízes em atividades que *são significativas para os alunos pré-adolescentes*, particularmente quando envolvem valores simples, tais como 1/2 ou 1/4. Complementando que esse conceito é uma dificuldade para jovens e adultos *não podemos subestimar a lentidão do desenvolvimento de certo conceito, atribuindo-lhe apenas uma razão ‘desenvolvimentista’,* defendida por Piaget.

Uma situação para ser compreendida necessita do concurso de vários conceitos e cada conceito isoladamente pode ser mobilizado para a compreensão de mais de uma situação. Tal consideração aparece na base do que Vergnaud (1982) denomina *campos conceituais*.

2.2 As *frações* no campo conceitual das estruturas multiplicativas

Segundo o autor, o conceito de número racional é definido a partir do campo conceitual das estruturas multiplicativas – conjunto de problemas que necessitam de operações de multiplicação e divisão, apesar de serem dependentes das estruturas aditivas; é um campo específico, incluindo proporções simples e múltiplas.

A contribuição de Vergnaud (1982) na formação de um conceito é especificamente de caráter operatório, pois *um conceito é um resultado da estruturação do real e da ação do sujeito sobre o real.*

Segundo Gérard Vergnaud (1988, p.141), o campo conceitual das estruturas multiplicativas é caracterizado por todas as situações que envolvem problemas de proporções simples ou múltiplas, para as quais, geralmente, precisa-se multiplicar ou/e dividir simultaneamente. Vários conceitos matemáticos participam deste campo conceitual como, por exemplo, fração, razão, taxa, número racional, multiplicação e divisão, funções lineares e não-lineares, espaço vetorial e análise dimensional. As estruturas multiplicativas são formadas por relações quaternárias, portanto, *os mais simples problemas de multiplicação e divisão implicam na proporção simples de duas variáveis, uma em relação à outra* (VERGNAUD, 1995, p.14).

As relações quaternárias são formadas por quatro termos. Exemplo: $\frac{20}{16} = \frac{5}{4}$ ou de forma geral $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$, lendo-se: x está para y assim como z está para w. Note-se que esta relação é composta por duas relações binárias. Estas últimas, por sua vez, envolvem a relação de dois elementos entre si, que podem ser objetos, números, pessoas, expressões literais, relações ou conjuntos. A diferença, entretanto, entre as relações binárias e as quaternárias é que, freqüentemente, as quaternárias põem em jogo dois conjuntos de referência e não apenas um, bem como a correspondência entre eles (VERGNAUD, 1991; 1995).

As relações quaternárias podem ser escritas:

- *na linguagem natural,* por exemplo,

  “Vinte está para dezesseis, assim como, cinco está para quatro”;

- *na escrita algébrica habitual,* por exemplo, 20 / 16 = 5 / 4;

- *na escrita algébrica polaca,* por exemplo,

R (x, y, z, w), lendo-se: “existe uma relação R entre x, y, z, w”. Ou seja, a mesma relação que existe entre x e y, existe entre z e w;

- *o esquema sagital e o plano cartesiano,* estes podem ser combinados *para representar as relações quaternárias, uma vez que põem em jogo dois conjuntos distintos e uma relação entre eles* (VERGNAUD, 1991, p.22).

pães		**reais(R$)**
oito	$\longrightarrow$	1,00
oitenta	$\longrightarrow$	10,00

No exemplo acima, vemos a relação que existe entre oito e oitenta que pertencem ao conjunto de unidades de pães. Entre 1,00 e 10,00 que pertencem ao conjunto de valores (moeda real) e ainda a correspondência entre eles, ou seja, entre cada quantidade de pães e seu valor em reais correspondente.

Não obstante, os alunos começam a entender *frações* como operadores, relações ou quantidades antes mesmo de compreendê-las como números que podem ser adicionados, subtraídos, multiplicados ou divididos (CRUZ, 2003).

Por isso, os números fracionários não aparecem como simples números no campo das estruturas multiplicativas, mas como medidas e relações, sendo utilizadas de diversas maneiras: seja para representar uma parte de um todo ou como uma magnitude fracionária (não podendo ser expressa por um número inteiro de unidades), seja por um par ordenado p / q de símbolos, como também uma relação que une duas magnitudes do mesmo tipo (VERGNAUD, 1983).

> *Estudar frações, por exemplo, sem considerar os conceitos a elas interconectados (proporções, razões, multiplicações, divisões, entre outros) se constituiria numa falha conceitual irreparável para o estudo de sua origem e desenvolvimento* (CRUZ, 2003, p. 32).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2001), a abordagem dos números racionais no segundo ciclo do Ensino Fundamental tem como objetivo principal levar os alunos a perceberem que os números naturais, já conhecidos, são insuficientes para resolver certos problemas.

Em muitas questões do dia-a-dia, os alunos não conseguem justificar a medida de uma grandeza ou um quociente entre dois naturais, identificando de uma forma ou de outra nos números racionais as respostas para novos problemas.

Como os alunos do segundo ciclo não conhecem ainda os números inteiros, para eles a construção da idéia de número racional está relacionada ao quociente entre dois naturais, sendo o segundo – o divisor – um número não nulo.

Não obstante, os alunos demandam um maior espaço de tempo para se adaptar às novas características de um novo número, agora denominado *números racionais*.

No trabalho com os números racionais, os alunos costumam mobilizar as idéias relativas aos números naturais o que, muitas vezes, provoca algumas dificuldades como as indicadas em seguida:

- Acostumados a relacionar comparações de números naturais do tipo $5 > 2$, os alunos são confrontados a uma nova realidade, parecendo-lhes contraditória, de que, $1/5 < 1/2$;
- Acostumados à idéia que quanto mais algarismos possuem um número, maior esse número ($3156 > 34$), no domínio dos racionais eles devem perceber que essa idéia não é mais válida, pois, por exemplo, 3,156 é menor que 3,4;
- Um número racional pode ser representado de infinitas formas (ou escritas), é o caso de 1/5, 2/10, 4/20, 8/40, que são representações diferentes de um mesmo número;
- A partir do 1, os naturais admitem um antecessor e um sucessor, mas com os racionais não acontece o mesmo. Observe-se que entre os números 0,6 e 0,7 estão 0,61, 0,634, 0,6895, ..., etc., infinitos outros;
- Multiplicando um número natural por outro (diferente de zero), nota-se que o resultado é sempre igual ou maior que um dos dois. Já com os racionais, se multiplicarmos 8 por 1/4, o resultado é menor que oito.

2.3 As *frações* em um campo maior: os números racionais

Ao estudarmos os números racionais, devemos admitir que, no contexto do dia-a-dia, aparecem com mais freqüência os números decimais que os fracionários. Com o advento das calculadoras, possivelmente este fato se tornou mais plausível, pois a escrita das frações trazia mais dificuldades de serem expressas nas antigas máquinas de escrever e as representações dos números com vírgulas se tornaram mais viáveis. Observe que é mais comum dizer: *passe-me 1/4 da pizza!* Que, *passe-me 0,25 da pizza!* Portanto, dependendo da ocasião será sempre mais prático e fácil de ser entendido utilizando a linguagem das *frações*.

Kieren (1976) acredita que os números racionais constituem a base para a educação matemática e científica. Entender frações impõe condições de incorporá-las dentro de um campo bem maior, o *campo dos números racionais*. A matemática define, como mostram os livros didáticos, que *número racional (Q) é um par ordenado de números inteiros p e q representado da forma p/q, com q≠0.* Neste sentido, os números racionais podem assumir a forma fracionária ou decimal.

O conceito de número racional possui diferentes sub-construtos[6], nos quais esses números podem ser interpretados como relação parte-todo, medida, quociente, razão e operador.

Segundo Kieren (1976), os números racionais envolvem diferentes idéias:

> *1)abrangem frações com as quais podemos comparar, adicionar, subtrair, etc.; 2) são frações decimais, as quais são extensões dos números naturais (via nosso sistema de numeração); 3) são classes de equivalência; 4) são números da forma p/q os quais p e q são inteiros e q≠o, logo, os racionais expressam razões; 5) são operadores multiplicativos, como exemplo, 2/3 de 1/2; 6) são elementos de ordem infinita no campo dos quocientes. São números da forma x=p/q, onde x satisfaz a equação qx = p; 7) são medidas ou pontos numa reta numérica (p.102-103).*

---

[6] A expressão *construto* veio do latim (construere, construct-: com-, juntos + struere, acumular) e significa construir; formar por partes semelhantes; criar (uma sentença, por exemplo) por meio do arranjo de idéias ou expressões, de forma sistemática. Do ponto de vista filosófico, “dá-se este nome a um termo, ou a um grupo de termos teóricos usados na formulação de uma hipótese científica com o fim de explicar e predizer fatos. O construto não é nenhuma entidade inferida, porque se supõe que não designa nenhuma entidade. Sua função é justamente a de evitar, ou reduzir a um mínimo, as entidades inferidas” (MORA, 1998, p. 673); *sub-construto* é o termo designado por Thomas Kieren, desde 1976, para classificar cada diferente *significado* das frações no campo dos números racionais.

No significado *parte-todo*, a unidade é introduzida na forma de uma figura contínua (por exemplo, uma pizza) ou um conjunto discreto (por exemplo, duas pessoas faltaram numa reunião com dez componentes). Aqui, o todo é repartido em partes de igual tamanho.

Como *medida* envolve, por exemplo, medir a área de uma região ao parti-la e cobri-la com unidades de um tamanho apropriado (formas congruentes ou não, de mesma área);

O significado *quociente* é percebido quando um número de objetos precisa ser dividido ou distribuído igualmente a certo número de grupos (a:b = a / b, a e b naturais com b ≠ 0). Ele se refere ao uso dos números racionais como solução para uma situação de divisão (por exemplo, 4/5 é o resultado em que quatro chocolates devem ser repartidos entre cinco pessoas);

O significado *razão* é uma relação de comparação multiplicativa entre duas quantidades de mesma grandeza (por exemplo, 2/3 pode representar a razão entre o número de estudantes e o número de passageiros que passam por uma catraca de ônibus, ou seja, a cada 2 estudantes que passam pela catraca, 3 passageiros já haviam passado). Por outro lado, se a razão é formada por grandezas diferentes e comparada multiplicativamente, a razão é chamada de taxa (por exemplo, um ônibus trafega a uma velocidade de 80 Km/h, isto é, a cada 80 quilômetros, o ônibus precisou de 1 hora para percorrê-los);

O significado *operador* é possivelmente trabalhado nos 3º e 4º Ciclos (5ª a 8ª séries) do Ensino Fundamental, semelhante ao processo de transformação *encolher* ou de *esticar,* de *reduzir* ou *ampliar*. Define uma estrutura multiplicativa de números racionais e é a mais algébrica das idéias básicas, determinando algo que atua sobre uma situação e a modifica (problemas, como, que “número deve multiplicar a 5 para que tenhamos 2?” Tem característica deste significado). Probabilidades, escalas e porcentagens, são algumas aplicações que têm as frações como *operadores*. Como multiplicação, a X b, no qual “*a”* é o multiplicador e “b” é o multiplicando, 2/3 pode ser visto na abaixo:

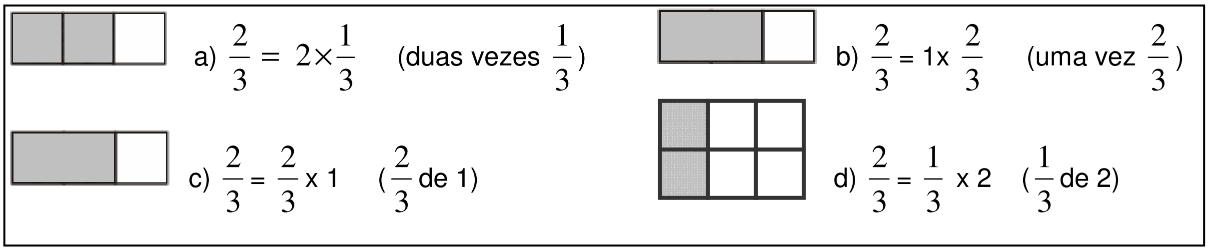


Figura 3 – Representação gráfica de frações como operadores multiplicativos.

Esses quatro sub-construtos têm propriedades matemáticas semelhantes e têm sido trabalhados com problemas diferentes de modo a se extrair, dos alunos, tipos diferentes de respostas.

Kieren (1988) recomendou que esses quatro sub-construtos estivessem presentes em qualquer currículo bem projetado de matemática. Uma verdadeira compreensão de frações requer tanto uma compreensão desses sub-construtos quanto de suas inter-relações.

As diferentes aplicações de cada sub-construto, descrito acima, são função do contexto do problema. Entender números racionais é poder identificar as diferentes interpretações desses números, tanto quanto suas inter-relações.

2.4 Saberes necessários e saberes inibidores à compreensão das *frações*

Alguns estudos têm buscado identificar que habilidades *favoreceriam* na construção do conhecimento de números racionais e de que forma esse conceito se estruturaria ao longo de seu desenvolvimento pelos alunos. Não obstante, outros grupos de pesquisadores procuraram investigar aspectos que poderiam ser considerados *inibidores* para a construção dessas idéias.

Destacam-se como **necessários à compreensão das *frações*** os esquemas: do *número inteiro*; do *conhecimento de metade*; de *partição*, *relacionais* e de *equivalência.*

Número inteiro

Assim como o *um* é a unidade de referência do esquema do número inteiro, as crianças utilizam esta mesma referência para fracionar, segundo Streefland (1991). Com a *unidade fracionária*, a criança poderá contar, dividir e reagrupar, baseado na unidade *um*. Esta estratégia foi experimentada em problemas que apresentavam figuras geométricas (círculos, retângulos...), ou até pizzas e chocolates (fictícios) divididos em partes iguais. As crianças conseguiam estabelecer a referência da unidade fracionária quando reagrupavam estas partes, fosse mentalmente, através de figuras, ou com material concreto (manipulativo) retomando a sua forma original – a unidade – o inteiro inicial.

Mesmo assim, é importante salientar que para Mix, Levine e Huttenlocher (1999), o entendimento de *frações* não só envolve a atenção da criança para a habilidade de interpretar as somas das partes, em relação a alguma unidade, mas, também habilitá-las a somar partes em que seu resultado pudesse resultar em um valor menor que a unidade. Exemplo disso foi observado na operação 1/2 + 1/4 = 3/4, quando as crianças dividiam o inteiro em quatro partes e utilizavam *quartos* para comparar as demais frações. Como a atividade era perceptivamente clara, neste sentido as crianças tinham grande chance de encontrar o resultado exato.

É importante que a criança compreenda o conceito de *equivalência*, reconhecendo que há várias maneiras diferentes de representar uma mesma fração de determinada unidade. Esta noção, inclusive, é base para ela poder comparar frações e executar as adições e subtrações com frações de denominadores diferentes de forma mais rápida.

Este processo, através da flexibilidade do conceito do *um* pela possibilidade das sucessivas divisões em partes iguais e sua reconstituição, representa ações fundamentais para a construção do número racional (PITKETHLY; HUNTING, 1996).

Para Mix *et al.* (1999), o entendimento das frações não está apenas envolvido nas crianças quanto ao tamanho das partes, mas também *em relação à habilidade de interpretar a soma das partes em relação a alguma unidade.*

Metade

Para Aguiar (1980), este esquema deve ser o primeiro a ser explorado ao ser introduzido o estudo dos números fracionários, tendo em vista que a noção de metade, nas tarefas de subdivisões de áreas, além de antecederem a formação de outras unidades como, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, etc., contribuem para a formação das mesmas.

A fim de verificar a importância do limite do meio para o julgamento proporcional entre crianças de 4 a 7 anos, Spinillo e Bryant (1991), desenvolveram estudos e observaram, em seus resultados, que as crianças obtiveram desempenhos bastante superiores em atividades que podiam utilizar o *limite do meio* para fazer julgamentos.

Posteriormente, Spinillo (1992,1997b) e Spinillo e Bryant (1999), mostraram que o referencial de *metade* podia favorecer o sucesso dos alunos nas tarefas de proporções, tanto em relação às quantidades discretas como em quantidades contínuas, visto que este referencial é tomado como estratégia para resolver problemas de *equivalência*.

Ao investigarem a competência de crianças entre 3 e 4 anos para criar o conceito de equivalência, Singer-Freeman e Goswami (2001), também encontraram sucesso nos alunos que usavam a fração 1/2, mais do que quando usavam as frações 1/4 e 3/4. Os autores verificaram, ainda, que isso acontece tanto com *quantidades discretas* quanto com *quantidades contínuas*.

Em Nunes e Bryant (1997, *apud* CRUZ, 2003) encontramos que a compreensão inicial do conceito de *metade* também favorece o estabelecimento das conexões entre os aspectos extensivos (*parte-parte*) e os aspectos intensivos (*parte-todo*) do número racional, podendo até ser considerado como referencial importante para as crianças iniciarem a quantificação das frações.

Partição

Em relação aos esquemas de *partição,* para Behr *et al.* (1993, *apud* PITKETHLY; HUNTING, 1996), eles são considerados os precursores cognitivos do número fracionário, mesmo que existam diferenças entre partição de *quantidades discretas e contínuas.* Para esses autores é no ato de partir que as crianças pequenas começam a compreender que existe uma relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes que o inteiro foi partido.

De modo similar, Nunes e Bryant (1997) perceberam que a habilidade das crianças em entender a relação entre **n** e **n-cortes**, em quantidades contínuas, antecede o conhecimento das representações fracionárias e da habilidade para calcular com frações.

> *Investigando o comportamento das crianças (4-6 anos) acerca da sistematização de suas ações para dividir quantidades discretas – 12 bolachas para 3 bonecas – observaram com freqüência que, a primeira ação das crianças era fazer um emparelhamento bolacha – boneca, em seguida esta ação foi repetida em ciclos até que não houvesse mais bolachas para serem distribuídas. Segundo eles, mesmo não sendo requerido um sofisticado conhecimento de contagem para produzir a divisão solicitada e embora as crianças não soubessem, ao final, quantas bolachas cada boneca havia recebido, elas utilizaram com bastante propriedade este método para solucionar tal problema* (PEPPER; HUNTING, 1998 *apud* CRUZ, 2003, p.35).

Para Hunting (prelo) o método acima, citado por Cruz, é uma *ação básica do pensamento para entender a linguagem simbólica das frações, principalmente em frações unitárias do tipo 1/2, 1/3 e 1/4.*

Relacionais

Segundo Bryant (1974), as primeiras relações lógicas utilizadas pelas crianças para quantificar frações são as relações *parte-parte*, pois é o conhecimento desta que permite o aluno comparar que parte é maior, igual ou menor.

São considerados básicos para a compreensão do conceito de frações, os esquemas relacionais, pois envolvem habilidades para estabelecer relações de *primeira ordem*. São eles: relações parte-parte – as razões –, e relações parte-todo – as frações –; e estabelecer relações de *segunda ordem* que são as relações entre relações de *primeira ordem* (SPINILLO, 1997a).

Destaca-se em Berh *et al.* (1993, *apud* PITKETHLY; HUNTING, 1996), o conhecimento *parte-todo* como fundamental para construção do conceito de número racional, pois esse conhecimento se encontra diretamente relacionado com a habilidade do sujeito em dividir todos, *discretos e contínuos*, em partes iguais.

Segundo Spinillo (1992), em seus estudos sobre o pensamento proporcional, as relações de segunda ordem são bem mais compreensíveis quando estão envolvidas comparações *parte-parte*, do que em *parte-todo*.

Equivalência

As noções de equivalência são fundamentais para que a criança possa dominar e operar com frações (LIMA, 1982; MIGUEL; MIORIM, 1986; MAIA, CÂMARA, M. e CÂMARA, P., 1991).

Para que a criança entenda a *equivalência de quantidades contínuas* é de suma importância a compreensão da divisão de um todo em partes iguais, não alterando a sua totalidade (LIMA, 1982). Indispensável, também, que haja a compreensão da relação compensatória entre a área e o número de partes iguais em que foi dividida a unidade, ou seja, quanto maior o número de partes em que a unidade foi dividida, menor a área de cada parte (BERH *et al.*, 1984) e (LIMA, 1982).

Em atividades de *equivalências com quantidades discretas*, nas quais a interferência do aspecto perceptual é eliminada, Lima (1982) observou que a criança recorre às equivalências entre as coleções, que representam frações, para que possam comprovar a veracidade dos resultados encontrados.

Enquanto alguns elementos podem favorecer a construção do conceito de fração, outros fatores **podem inibir à compreensão das *frações*** pelos alunos, tais como os esquemas de: *número inteiro*, *modelo parte-todo* e o *conhecimento de metade.*

Número inteiro

Streefland (1991), da mesma forma que identifica o esquema do número inteiro como referência na compreensão, por parte do aluno, do número racional, também o identifica como um fator que pode inibir esse conceito. Desta vez, justifica que grande parte dos alunos apresenta dificuldades com relação à questão simbólica da fração (a/b), demonstrando não compreendê-la como um número, mas como dois números inteiros distintos. Silva (1997) reforça este argumento, classificando esse esquema como *obstáculos psicológicos ou epistemológicos* para os alunos, ressaltando que aqueles números, por muito tempo, têm status de números para as crianças, daí tratarem a fração como dois números naturais, *um em cima do outro*, e não como um único número em si.

Parte-todo

Bastante trabalhado nas escolas pelos professores, como modelo ideal para a compreensão do número fracionário, além de reforçado por grande parte dos livros didáticos, a iniciação ao trabalho com as frações utilizando o modelo parte-todo tem recebido muitas críticas por parte de alguns pesquisadores.

Esse modelo consiste em uma prática freqüentemente relacionada com a dupla contagem, ou seja, conta-se o número de partes em que foi dividido o inteiro e depois o número de partes que foi tomada (ou pintada), o que causa muitos equívocos nos problemas de *quantidades discretas* (KERSLAKE, 1986).

Kieren (1988) mostra a fragilidade do modelo *parte-todo* quando afirma que essa metodologia induz ao processo de dupla contagem e não introduz a criança no campo dos quocientes. Ela é induzida a contar o número total de partes que foi dividido o inteiro e usá-lo como denominador, devendo contar o número de partes que foram pintadas na figura e usá-lo como numerador. No entanto, o aluno, provavelmente, não compreende porque esse novo número não pertence ao conjunto dos inteiros, visto que estão sempre contando a quantidade de partes. Ele não relaciona esses dois inteiros, pois a interpretação de quociente não lhes é apresentada e com isso a relação entre numerador e denominador fica perdida, não se desenvolvendo a idéia de número fracionário representando, também, uma quantidade.

Para Nunes *et al.* (1991), ensinar *frações* apenas pela rotulação de partes de um inteiro não favorece que os alunos possam perceber outros aspectos igualmente importantes para o conceito de *frações*. Por exemplo, a necessidade de que todas as partes sejam iguais e a equivalência entre as partes.

Metade

Da mesma forma que foi identificada como elemento facilitador na compreensão dos números fracionários, o esquema de metade, segundo alguns pesquisadores, também pode contribuir com dificuldades adicionais na construção desse conceito.

Pothier e Sawada (1983) desenvolveram atividades destinadas a investigar a emergência do processo de partição em tarefas de subdivisão de *todos contínuos*, nas quais crianças pequenas eram solicitadas a cortar um bolo em duas, quatro, três e cinco partes, sem precisar uma ordem.

Observou-se que as crianças, em comum, procuravam utilizar o conhecimento de *metade* (fazendo uma divisão na região do meio) para iniciar a divisão das áreas dos bolos (circulares e retangulares) em duas partes iguais. Na medida em que, quando as figuras eram divididas em números de partes múltiplas de dois, as crianças não encontravam dificuldades e acrescentavam apenas linhas para subdividir as partes já estabelecidas. O processo, neste caso, era eficiente para encontrar os resultados satisfatórios.

Por outro lado, os autores, observaram que as crianças tendiam em utilizar a mesma estratégia de divisão, quando teriam que dividir o bolo em três, ou cinco partes iguais, ou seja, elas iniciavam a divisão pelo mesmo processo anterior (pela região do meio). Dependendo do nível de *desenvolvimento* em que a criança se encontrava, podia perceber da impossibilidade de divisão das figuras em três ou cinco partes iguais, a partir de duas metades buscando outras formas.

> *É neste sentido que as autoras concluíram que o conhecimento de metade pode ser um dificultador no conceito de frações. Pois, para efetuar as subdivisões de múltiplos de dois é bastante favorável, mas desfavorável para as não-múltiplas de dois. Em casos como este, é necessário que as crianças percebam que a divisão ao meio, embora mais lógica para ela, nem sempre será a mais apropriada para iniciar qualquer divisão* (CRUZ, 2003. p.46).

2.5. O trabalho com *frações* nos livros didáticos da 5ª série

Com o objetivo de auxiliar na compreensão das estratégias adotadas pelos alunos, no momento de responder ao instrumento de pesquisa, foi feita uma pequena análise das estratégias utilizadas pelos autores dos livros didáticos adotados nas escolas em que foram obtidos os dados. Para tanto, selecionamos o volume de quinta série de cada coleção adotada, em razão de ser, nessa série, que o trabalho com as *frações* é explorado como objeto de estudo; nas outras séries, as frações aparecem apenas como ferramentas para resolver problemas outros campos da Matemática. Os livros adotados serão chamados de L1 e L2.

O livro L1 é composto de 300 páginas, e tem em seu capítulo sobre frações 31 páginas (10% do livro), sendo que 11 delas são reservadas a “exercícios”, “atividades” ou “problemas” (40% do capítulo).

O autor propõe, inicialmente, usar o *Tangram* para a introdução da idéia de fração. Busca-se identificar a fração equivalente ao triângulo pequeno, tomando-se o quadrado completo do *Tangram* como unidade. O parágrafo intitulado “As frações” é iniciado indagando-se “Para que servem as frações?”.

A apresentação do conceito de “Equivalência de frações” é feita por meio de atividades em que o aluno é solicitado a efetuar “dobras” em papel ofício. O autor não apresenta a definição formal de fração. Nesse volume da coleção, as operações com frações não são exploradas.

O livro didático L2 é composto de 270 páginas, 50 destinadas às *frações*, cujo capítulo é intitulado “A forma fracionária do número racional”, o que corresponde a 18% do livro. Dessas 50 páginas, 13 referem-se a “exercícios” e “atividades” (26% do capítulo).

O capítulo é iniciado com o título “A idéia de fração”. As medidas de parafusos no cotidiano são utilizadas como contexto para a introdução da idéia de fração, explorando o fato de que essas medidas podem ser lidas em milímetros e “polegadas”. Após a definição de “polegada”, apresenta algumas leituras de frações. A definição de fração é apresentada explicitamente:

> *De um modo geral a e b, com b≠0, quando escritos na forma a/b, representam uma fração. Nesta fração, o numero b indica em quantas partes iguais uma unidade foi dividida e é chamado de denominador; o número a indica quantas dessas partes foram consideradas e é chamado denominador. O numerador e o denominador são os termos da fração* (GIOVANNI; CASTRUCCI; GIOVANNI Jr., 2002. p.103).

O livro L2, além dos exercícios propostos, contempla um caderno de atividades suplementares. Esse livro não propõe *atividades de manipulação* para o aluno.

As duas obras exploram o trabalho com o sub-construto *operador,* tanto com proporções, quanto em situações de comparação entre duas ou mais frações. Em nenhuma das duas obras são trabalhados sub-construtos *razão* e *medida.*

O livro L1 apresenta figuras geométricas diversificadas, inclusive “pizzas” e exercícios afins.

Ao contrário, o livro L2, praticamente, só usa figuras retangulares contínuas nas apresentações gráficas das frações. Apenas três exemplos típicos são encontrados figuras de “pizzas”.

O sub-construto *quociente* não é explorado como exemplos nos dois materiais didáticos.

O livro L2, no trabalho com frações, apresenta ainda a idéia de porcentagem e raiz quadrada de frações, caracterizando-se por um trabalho bastante intenso com os algoritmos das operações.

3. MÉTODO

Com o objetivo de identificar as concepções de *frações* de alunos das séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, aplicamos um questionário em turmas de 5ª série ao 3º ano, distribuídos entre as diferentes séries dessas etapas de escolarização. Uma turma por série perfazendo um total de sete turmas por escola.

Para a aplicação do questionário, selecionamos duas escolas: uma da Rede Municipal do Recife e outra da Rede Estadual de Pernambuco (município de Camaragibe).

A escolha dessas escolas se deu pela facilidade de acesso do pesquisador e pela existência de todas as séries na mesma escola. Dessa forma, pensamos poder diminuir efeitos devidos a diferentes abordagens dos conceitos que estamos investigando em sala de aula entre as séries, ou seja, trabalhar com alunos que tenham sido submetidos a diferentes metodologias de ensino. Em cada uma dessas escolas conseguimos atingir uma média de 45 alunos por turma. Os professores desses alunos são efetivos por concurso público.

A escola municipal está localizada em área central da cidade do Recife e apresenta amplas salas de aula. Sua composição de alunos é de classe média-baixa, oriunda de bairros vizinhos e distantes, esses últimos se deslocando por transporte coletivo.

A escola estadual é da área central da cidade de Camaragibe e também comporta alunos de classe média-baixa. Possui um espaço físico modesto com salas de aulas de dimensões reduzidas. Entretanto, oferece, além do Ensino Médio, curso profissionalizante no período noturno.

Para a obtenção dos dados, aplicamos um questionário composto por 10 questões, enfocando as idéias de frações variando o tipo de quantidade (*contínua* ou *discreta*), o registro de representação (figuras geométricas ou linguagem natural) e significado das frações (*operador*, *parte-todo* ou *quociente*). O **Quadro 1**, apresentado em seguida, mostra os detalhes de cada questão. Os dados foram repassados para tabelas (em anexo) e, através de gráficos, puderam ser melhores interpretados nas Análises dos resultados e Considerações finais.

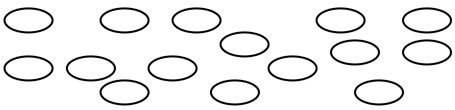
Quadro 1

Relação dos itens do questionário (em anexo) e suas características.

Nº	Questão	Tipo de quantidade	Apresentação da questão	Significado da fração
1	A) Paulo ganhou 1/3 dessas bolas de gude. Faça um contorno em volta das bolas que ele ganhou.	discreta	Figura	operador
1	B) Fabiana ganhou 2/3 das bolas de gude. Quantas bolas ela ganhou?	discreta	Figura	operador
2	A parte pintada representa 1/3 do circulo? Sim( ) Não ( ). Por quê?	contínua	Figura	parte-todo
3	Pinte dois terços de cada uma dessas figuras:	contínua	Figura	parte-todo
4	Certo dia, na 8ª série A, 2/7 dos alunos faltou. Sendo 14 o número de faltosos, assinale quantos alunos há nessa turma?	discreta	"linguagem natural"	parte-todo
5	Assinale as figuras que estão pintadas pela metade.	contínua	Figura	parte-todo
6	Diga que fração está representada na parte pintada, em cada uma das figuras abaixo:	contínua	Figura	parte-todo
7	Dois rapazes receberam a mesma quantia em dinheiro. Um decidiu economizar 1/4 da sua quantia, e o outro decidiu economizar 5/20 da sua quantia. Assinale a resposta correta:	discreta	"linguagem natural"	operador
8	Três amigos resolveram andar num parque de sua cidade, partindo todos do mesmo lugar. Como eles têm ritmos diferentes, em certo instante André havia andado 1/3 do percurso, Carlos 1/4 e Jorge 1/2. Quem andou mais? Quem andou menos?	contínua	"linguagem natural"	operador
9	Mário e Luciana têm cada um, uma barra de chocolate do mesmo tamanho. Mário dividiu a sua em 8 partes iguais e comeu 4 delas. Luciana dividiu a sua em 4 partes iguais e comeu 2 delas.	contínua	"linguagem natural"	parte-todo
10	Simone foi ao restaurante com três colegas e pediu uma pizza para quatro pessoas. O garçom dividiu a pizza em 4 partes. Nesse momento, chegaram mais quatro colegas e o garçom não teve dúvida em dividir cada parte ao meio. Que fração da pizza cada um dos colegas comeu?	contínua	"linguagem natural"	quociente

3.1 Análise preliminar do questionário

01) A) Paulo ganhou 1/3 dessas bolas de gude. Faça um contorno em volta das bolas que ele ganhou.



B) Fabiana ganhou 2/3 das bolas de gude. Quantas bolas ela ganhou?

O objetivo desta questão foi de identificar no aluno sua concepção de "frações de quantidades discretas" em uma situação apresentada por meio de uma figura. Como resposta correta esperada, temos 5 bolas, resultante da divisão das 15 bolas em três partes.

De acordo com o apresentado na *literatura constante* de nosso referencial teórico, duas estratégias errôneas poderiam ser mobilizadas pelos sujeitos. Na primeira, o sujeito poderia contornar "uma" ou "três" bolas, o que poderia estar indicando que o sujeito concebe fração como formada por dois números, considerando assim um dos dois: "o de cima" ou "o de baixo" do "traço da fração", respectivamente, numerador ou denominador.

Em uma segunda previsão de estratégia, o aluno poderia fazer o contorno de quatro bolas, resultado da compreensão de que os dois termos da fração devem ser operados.

O item (b) da primeira questão teve por objetivo verificar se o sujeito transfere os conhecimentos mobilizados no item anterior, identificando 2/3 das 15 bolas. Esperava-se, como resposta correta, 10 bolas. Nesse caso, o sujeito poderia estar mobilizando duas estratégias, a determinação da terça parte das 15 bolas, seguida da determinação de duas partes dessas, ou a identificação do complemento de 1/3 das bolas (5 bolas) e de seu complemento (2/3), ou seja, 10 bolas. É preciso ressaltar, porém, que nosso instrumento não foi elaborado de forma a realizar essa distinção.

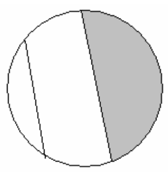
Um provável acerto na letra (A), desta questão, aumentaria as chances de acerto na letra (B), caso contrário, é consideravelmente esperado o erro na questão (B). Uma possibilidade de erro é a de tomar o denominador como grupo formado – o número de grupos. Logo, 1/3 será 1 grupo de 3 elementos. Na questão (A), 1/3 corresponderá a 3 bolas. Na questão (B), 2 grupos de 3, o que dará 6 bolas (2 x 3 = 6); uma segunda possibilidade é a de tomar 1/3 como sendo 1 + 3 = 4.

Uma das estratégias possíveis de serem mobilizadas pelo sujeito, viria do resultado obtido no primeiro item da questão. Assim, se o sujeito associar 1/3 das bolas a três delas no primeiro item, então 2/3 das bolas poderia ser compreendido como "dois grupos de três bolas", caso em que o sujeito apresentaria (6) como resposta. Podemos também pensar na possibilidade de apresentar a resposta (6) a partir da realização de uma operação entre os termos da fração (2x3=6), mas, em nosso trabalho, não temos os elementos necessários para diferenciar esses dois tipos de estratégia.

Uma segunda estratégia incorreta seria a indicação de "5 bolas" como resposta. Nesse caso, a hipótese de base é que, da mesma forma que no primeiro item, o sujeito concebe fração como um "número de dois andares"; aliando isso ao forte apelo às operações aritméticas, tão presente em nossas salas de aula, o sujeito seria levado a realizar a adição dos termos da fração (2+3=5).

Possibilidades como estas são encontradas nas pesquisas realizadas por Tinoco e Lopes (1994), reforçando a idéia que os alunos têm de fração como sendo um par de números naturais. Em outros estudos, tais como em Alencar (2004) e Magalhães (2004), foi encontrada ainda a possibilidade de o aluno fazer 3 x 3 = 9 para determinar os 2/3 das 15 bolas.

02) A parte pintada representa 1/3 do círculo? Sim( ) Não ( ). Por quê?



____

____

____

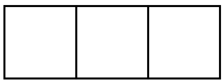
Nesta questão, o objetivo foi de verificar se o sujeito reconhece uma das condições de existência de uma fração, isto é, a igualdade das partes em uma representação pictórica.

Lima (1982) e Nunes e Bryant (1997) baseados nos trabalhos de Piaget, destacaram a divisão eqüitativa das partes como um dos *invariantes* presentes na organização das ações do sujeito para a compreensão das frações.

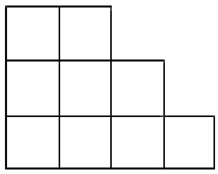
O item *Por quê* dessa questão não foi levado em consideração em nossa análise, em virtude do número bastante reduzido de respostas obtidas por parte dos sujeitos.

03) Pinte dois terços de cada uma dessas figuras:

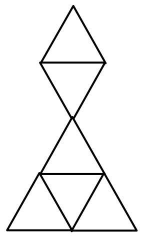
a)



b)



c)



Esta questão tem como objetivo identificar as estratégias mobilizadas pelos sujeitos na identificação de frações de *quantidades contínuas* em uma situação de registro pictórico. A expectativa foi de que os alunos não apresentariam dificuldades no item (a) em virtude de ser uma representação comumente trabalhada em sala de aula. No item (b), uma re-organização mental da figura apresentada também pode permitir a identificação visual de 2/3 da figura como duas linhas ou duas colunas. Já no item (c), representação pouco explorada, o sujeito dispõe de duas estratégias de base. A primeira consiste em fazer recurso à idéia de equivalência: “como temos 6 partes, buscar a fração equivalente a 1/3 de denominador 6”. Em uma outra, a contagem de partes pode ser utilizada numa espécie de *discretização* do inteiro; dessa forma, a ação corresponderia determinar 1/3 de 6 pedaços.

Como estratégia equivocada, prevemos que o sujeito pinte duas partes em todas as figuras, o que poderia significar a generalização de uma estratégia válida para o primeiro item, mas que não se adeqüe aos outros dois.

Também nessa questão, previmos o aparecimento de estratégias em que os sujeitos assinalam seis ou cinco regiões nos itens (b) e (c), multiplicando os termos da fração (2 x 3 = 6) ou somando (2 + 3 = 5), característico de alunos que acreditam ser uma fração dois números inteiros, um sobre o outro.

04) Certo dia, na 8ª série A, 2/7 dos alunos faltou. Sendo 14 o número de faltosos, assinale quantos alunos há nessa turma? a) 2 b) 4 c) 28 d) 49 e) 7

Neste item, investigamos a idéia de fração de quantidades discretas, em uma situação em que o registro se apresenta na forma de linguagem natural. Podemos observar que a questão apresenta, em seu enunciado, as duas formas de representação de alunos faltosos, quais sejam a quantidade e a fração correspondente.

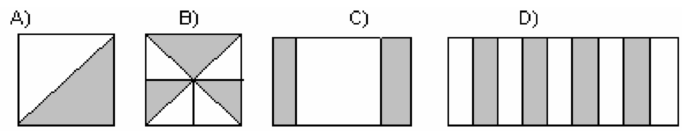
A solução dessa questão, demanda do sujeito à passagem pela unidade fracionária 1/7, correspondente a 7 alunos, determinando-se, em seguida, o total de alunos (7/7), correspondente a 49 alunos.

Como se trata de uma questão bastante explorada em nossas salas de aula e nos livros didáticos supõe que os sujeitos demonstrariam a tendência a mobilizar a idéia de operador, buscando realizar algum tipo de operação aritmética como os dados do enunciado.

Dessa forma, uma das estratégias equivocada, que poderiam ser mobilizadas pelos sujeitos, seria apresentar (2) como resposta, resultado da divisão de (14) pelo denominador da fração (7). É importante ressaltar que essa resposta também poderia estar associada ao fato de o aluno considerar apenas o numerador da fração apresentada no enunciado; em nosso trabalho, não seria possível diferenciar essas duas estratégias.

Nessa mesma busca por uma operação, o sujeito poderia indicar (4) como resposta (quantidade correspondente à fração fundamental 1/7), ou (28), que seria o produto da quantidade de faltosos (14) pelo numerador da fração (2).

05) Assinale as figuras que estão pintadas pela metade.



Neste item, queremos identificar, no aluno, o conceito de “metade” por meio de figuras hachuradas[7] baseadas no modelo *parte-todo*. As figuras que representam a metade são as correspondentes aos itens (a) e (b).

Não foram esperadas maiores dificuldades no item (a) por ser a figura mais representativa do trabalho com frações em sala de aula.

Já no item (b), que apresenta partes que não estão hachuradas de forma contígua, o triângulo superior hachurado (em cinza) corresponde exatamente (em área) aos dois inferiores, caracterizando desta forma, uma simetria vertical entre cinzas e brancos sob a forma de triângulos. Portanto, deve ser assinalada como uma fração de 1/2. Quanto ao conceito de “meio” ou “metade” (1/2) de uma fração, principalmente quando há ausência de contigüidade nas hachurações de figuras, ela pode proporcionar erros de interpretação quanto à *equivalência de frações*, ou seja, nesta fração, a representação seria de 4/8 (quatro oitavos) equivalente a 1/2.

Segundo Aguiar (1980), a idéia de metade deve ser a primeira a ser ensinada no conteúdo de frações, pois, em tarefas de subdivisões de áreas, a noção de meio, além de anteceder a formação de outras unidades fracionárias (1/3, 1/4, 1/5, 1/6...), contribui para a formação das mesmas.

Na figura (c), apesar de se basear em um modelo bastante explorado na escola, o “chocolate”, a visualização do “tamanho” das partes poderia servir de suporte para que o sujeito não veja a metade da figura hachurada. Podemos pensar que, ao indicar essa figura como representando a metade, o sujeito estaria estabelecendo uma razão entre o número de partes não pintadas (uma) e o número de partes pintadas (duas), caracterizando a fração 1/2 que lhe é bastante familiar.

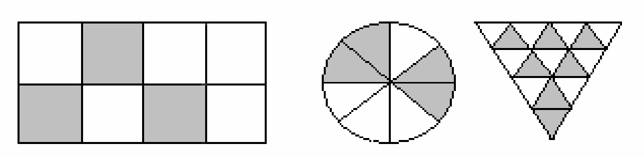
A estratégia da visualização também poderia ser mobilizada na figura (d), buscando-se agrupar as partes pintadas e verificando-se que o resultado obtido seria menor que a parte não pintada.

Por outro lado, a indicação dessa figura como representante da metade poderia estar indicando a idéia de metade também como razão, na medida em que o sujeito estaria estabelecendo uma razão entre “duas” partes, sendo “uma pintada”.

---

[7] *Hachuradas* entenda-se como pintadas.

06) Diga que fração está representada na parte pintada, em cada uma das figuras abaixo:



O objetivo desta questão é identificar como o sujeito mobiliza a idéia de fração em um modelo *parte-todo* em uma situação de registro pictórico. As duas primeiras figuras se apóiam em representações bastante familiares aos sujeitos, sendo que a segunda e a terceira figuras podem mobilizar a idéia de equivalência.

A primeira figura apresenta três partes pintadas, das oito divididas igualmente, logo, a fração correspondente será de 3/8 (três oitavos). A segunda possui quatro setores circulares hachurados de um total de oito, correspondendo à fração 4/8 (quatro oitavos) ou 1/2. Nesse item, o sujeito também poderá realizar uma re-arrumação da figura de forma a obter, visualmente, a fração 1/2. Finalizando, a terceira figura é composta de dezesseis triângulos, na qual apenas sete estão pintados, o que corresponde à fração 7/16 (sete dezesseis avos). Nessa última figura, a re-arrumação de forma a perceber visualmente o resultado, se mostra como uma estratégia pouco operacional, na medida em que essa organização da figura não produz como resultado uma imagem conhecida.

Nessa questão, podemos encontrar erros relativos à troca do numerador pelo denominador em todos os itens, caracterizando, assim, dificuldades quanto à concepção de frações, ou seja, dificuldades em reconhecer o significado dos termos da representação fracionária.

Uma outra concepção prevista é o estabelecimento de relações entre as partes, sem considerar a relação *parte-todo*. Dessa forma, as respostas dos sujeitos poderiam ser 3/5, 4/8 e 7/9 para os três itens, respectivamente. Desta forma, os numeradores, em cada caso representam as partes pintadas, enquanto os denominadores representam as partes não pintadas.

07) Dois rapazes receberam a mesma quantia em dinheiro. Um decidiu economizar 1/4 da sua quantia, e o outro decidiu economizar 5/20 da sua quantia. Assinale a resposta correta:

$a)\frac{5}{20}$ ***é maior que*** $\frac{1}{4}$ **.** $b)\frac{1}{4}$ ***é maior que*** $\frac{5}{20}$**.**

c) $\frac{5}{20}$ ***e*** $\frac{1}{4}$ ***representam a mesma quantia.***

Esta questão tem como objetivo verificar a mobilização do conceito de equivalência em uma atividade de comparação de frações em uma situação envolvendo o registro em linguagem natural.

Para Maia, Câmara, M. e Câmara, P. (1991), a compreensão do conceito de fração está articulada diretamente ao conceito de equivalência. Segundo esses autores, as noções de equivalência são fundamentais para que o aluno domine e opere com frações.

Nesta questão, a alternativa correta deverá ser a letra (c). As frações 5/20 (cinco vinte avos) e 1/4 (um quarto) são equivalentes, logo, representam a mesma quantia. O recurso ao registro pictórico, representando as frações por figuras geométricas e comparando-as, pode servir como suporte para o sujeito.

Como principal estratégia inadequada, poderíamos prever a ação do sujeito em comparar os numeradores e os denominadores correspondentes e dizer que 5/20 (cinco vinte avos) é maior que 1/4 (um quarto), pois 5 > 1 e 20 > 4, logo 5/20 > 1/4, assinalando a letra (a). Segundo essa concepção, comparar frações seria comparar os numeradores e denominadores correspondentes, estratégia em que o sujeito toma como referência os números naturais.

Ao assinalar a letra (b), o aluno pode estar pensando que 1/4 é maior que 5/20 porque a "quarta parte de um chocolate é maior que a vigésima parte desse mesmo", pois, condiciona seu raciocínio à idéia de que "quanto menor o numerador, maior a fração", logo, maior pedaço do chocolate.

08) Três amigos resolveram andar num parque de sua cidade, partindo todos do mesmo lugar. Como eles têm ritmos diferentes, em certo instante André havia andado 1/3 do percurso, Carlos 1/4 e Jorge 1/2.

a) Quem andou mais?___________________________________

b) Quem andou menos?__________________________________

Esta questão, como a anterior, demanda do aluno a mobilização do conceito de *equivalência de frações*. A diferença repousaria no fato que nesta questão, a idéia de "comparação" de frações aparece de forma mais explícita. A resposta esperada é Jorge, que andou 1/2 (um meio) do percurso. Como menor percurso, a resposta esperada é Carlos, que andou 1/4 (um quarto) do percurso. Ou seja,

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$$

Os possíveis erros esperados estarão ligados aos alunos que fazem relação entre as maiores frações de numerador 1, as que possuem maior denominador, contrariando, assim, o princípio da *inversibilidade natural*: "maiores os números, menores seus inversos". Os erros seriam: como 1/4 tem o maior denominador, esta será a maior fração, logo, corresponderá a Carlos o maior percurso no item (a); como 1/2 tem o menor denominador, esta é a menor fração, logo, corresponderá ao menor percurso, o de Jorge na letra (b). Portanto, defenderiam a relação: 1/4 > 1/3 > 1/2.

Segundo Streefland (1991), os esquemas que tomam como referência os números inteiros podem auxiliar o aluno na construção do conceito de número racional. Entretanto, este mesmo autor os considera inibidores deste conceito, principalmente na compreensão do simbolismo das frações na representação a/b, na qual demonstram compreendê-la não como um número, mas como dois números inteiros distintos.

09) Mário e Luciana têm cada um, uma barra de chocolate de mesmo tamanho. Mário dividiu a sua em 8 partes iguais e comeu 4 delas. Luciana dividiu a sua em 4 partes iguais e comeu 2 delas.

Quem comeu mais chocolate? ________________________________

Essa questão busca identificar de que forma o sujeito mobiliza a idéia de fração como *parte-todo* em uma atividade baseada em linguagem natural.

A resposta esperada será a de que as frações dos chocolates são equivalentes, isto é, são de mesmo tamanho. Em outras palavras, o sujeito deverá mobilizar a idéia que em um mesmo todo, se dividir em mais partes, estas serão menores.

Grande parte de alunos acredita ser o chocolate mais dividido, o que foi mais comido. Assim, 4/8 apresenta números maiores que 2/4, logo, 4/8 é maior que 2/4. A idéia de frações como dois números naturais, pode colaborar para promover erros como esses.

Outra concepção errônea estaria baseada no fato que o aluno pode afirmar que quem dividiu em quatro partes comeu mais, pois "quartos são maiores que oitavos", mobilizando, mesmo que de forma incompleta, a relação *parte-todo*.

Berh *et al.* (1984) afirmam que para se tornar mais compreensivo o conceito de *equivalência de frações* nas crianças, é muito relevante que haja a compreensão da relação compensatória entre a área e o número de partes iguais em que foi dividida a unidade, ou seja, para uma mesma unidade, quanto mais ela for dividida, menores serão as partes.

10) Simone foi ao restaurante com três colegas e pediu uma pizza para quatro pessoas. O garçom dividiu a pizza em 4 partes. Nesse momento chegaram mais quatro colegas e o garçom não teve dúvida em dividir cada parte ao meio. Que fração da pizza cada um dos colegas comeu? (A)1/8 (B) 1/4 (C) 4/4 (D) 8/8

O objetivo desta questão é identificar no aluno a concepção de fração como *quociente*, em uma situação apresentada em linguagem natural.

De forma que a pizza foi dividida inicialmente em quatro partes, e, logo após, cada parte ao meio, isto quer dizer que toda a pizza ficou dividida em oito partes iguais.

Como o total de pessoas é oito, concluímos que 1/8 da pizza foi a parte que correspondeu a cada pessoa. A resposta correta corresponde à letra (a).

A opção de escolher a alternativa (b) ou 1/4 pode estar relacionada à identificação seletiva de alguns elementos do enunciado; nesse caso, seriam selecionadas as informações “uma pizza” e “dividiu a pizza em 4 partes”.

Uma outra concepção estaria ligada ao amálgama entre as idéias de frações como *quocientes* e como partes de um todo. Nessa situação, teríamos os sujeitos que responderiam 4/4 (quatro partes/ quatro colegas), ou 8/8 (quatro colegas mais quatro colegas e oito partes de pizza).

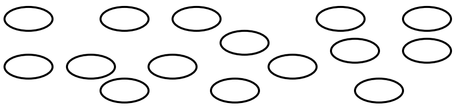
3.2 Estrutura da análise dos resultados

Estruturamos a análise dos resultados subdivididos em:

- **Análise Longitudinal**, ou seja, análise do instrumento na ordem em que aparecem as questões, verificando desempenho, erros comuns e concepções dos sujeitos de acordo com a escolaridade;
- **Análise Transversal**, ou seja, análise dos resultados encontrados na Análise Longitudinal explorando tipos de questões com quantidades envolvidas (*discretas* e *contínuas*), tipo de registro (apresentação com figuras ou na “linguagem natural”), relativo aos sub-construtos (*quociente, parte-todo* e *operador*) e uma visão geral de desempenho dos sujeitos quanto às *frações* e *equivalência de frações* em função da escolaridade.

4. ANÁLISE LONGITUDINAL

01) A) Paulo ganhou 1/3 dessas bolas de gude. Faça um contorno em volta das bolas que ele ganhou.



Esta questão envolve *quantidades discretas,* apresentando-se com figuras. Tem como significado da fração um *operador* e solicita que o aluno calcule a fração fundamental (1/3) do todo, formado por 15 bolinhas de “gude”.

De acordo com o gráfico da **Figura 4**, podemos constar que metade dos alunos que responderam o questionário obteve êxito em contornar 5 bolas, correspondente à terça parte do total das bolas apresentadas na questão (1A).

Existe uma crescente performance até a 7ª série e decrescente até o 2º ano, recuperando no 3º. A 5ª série foi a que apresentou maior índice de erros. Esses resultados nos levam a refletir sobre o papel do ensino no rendimento dos alunos, na medida em que, de 5ª a 7ª série, as frações são estudadas de forma explícita, enquanto objetos de ensino, ao passo que, a partir da 8ª série, as frações são consideradas como instrumentos na resolução de diferentes tipos de problemas.

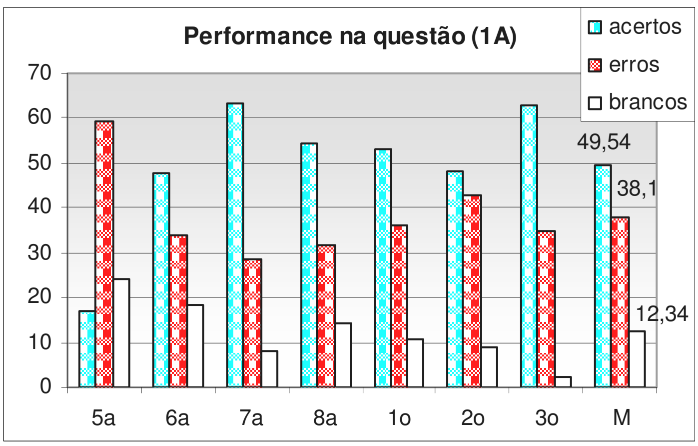


Figura 4 – Gráfico percentual de desempenho na questão (1A).
M representa a média percentual geral entre todos os sujeitos, como em todas as demais figuras a seguir.

A confirmação dessa hipótese nos levaria a pensar que o trabalho escolar com as frações pode não estar fornecendo os resultados esperados. De fato, nossa experiência em sala de aula vem ao encontro desse resultado: os alunos parecem “esquecer” os conceitos relativos aos números racionais na passagem de uma série para outra.

Na *análise preliminar*, previmos os contornos para 3 e 4 bolas como as que apresentavam maiores probabilidades de ocorrência como erros. Segundo os dados apresentados na **Figura 5,** podemos confirmar nossa análise inicial verificando que o erro relacionado a contornar três bolas aparece com uma incidência ligeiramente superior ao erro relacionado a contornar 4 bolas – aproximadamente 39% contra 33%. Interessante observar no Ensino Fundamental o erro-3 (contornar 3 bolas) ocorrendo com maior freqüência que o erro-4 (contornar 4 bolas), enquanto no Ensino Médio a situação se inverte com o aparecimento mais freqüente do erro-4.

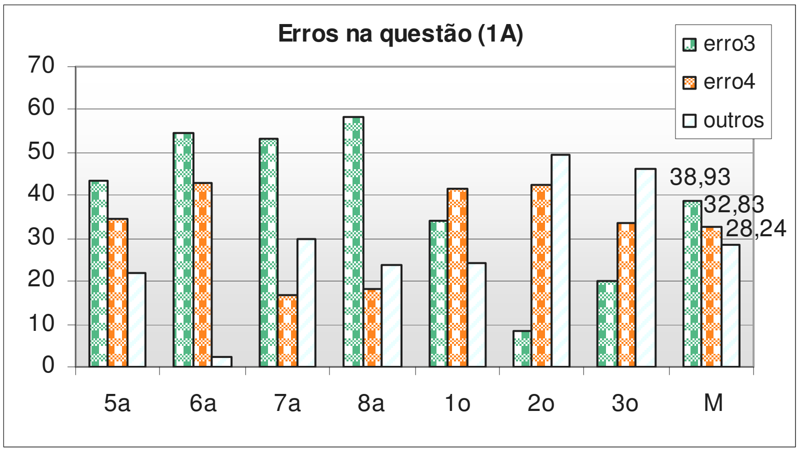


Figura 5 – Gráfico percentual de erros da questão (1A).

Conforme nossa análise preliminar, o erro-3 está baseado na compreensão de fração como dois números: “o de cima e o de baixo do traço”. Para esta questão que exigiu o contorno de 1/3 do número de bolas, apresentado na figura, ficou entendido que o “contorno” deveria comportar três bolas, o que corresponderia ao denominador da fração.

Esse mesmo tipo de concepção pode se manifestar como a busca da realização de uma operação entre os termos da fração, o que justificaria o aparecimento do erro-4, em que os termos da fração deveriam ser operados (1 + 3 = 4). Assim, durante muito tempo, as crianças tiveram os números naturais como os únicos que possuíam status de números, passando todo o seu conhecimento aprendido para a montagem de uma nova categoria de números – o número racional fracionário.

Outro fato interessante, mostrado pelos resultados, é a predominância de outros tipos de erros nas duas últimas séries do Ensino Médio, superando a freqüência dos erros 3 e 4. Nesse grupo, de “outros” erros, sobressai o erro-6 (contornar 6 bolas). Embora a natureza de nosso estudo, não permita identificar a natureza desse tipo de erro, podemos pensar em uma possível associação, por parte dos alunos, com a pergunta do item (b), que solicitava a quantidade de bolas correspondente a 2/3 do total. Nessas condições, os alunos estariam operando, da mesma forma que o erro-4, com os termos da fração, tomando como base a fração apresentada no item (b); nesse caso, a operação privilegiada seria a multiplicação (2x3=6).

O aparecimento desse erro entre os alunos do Ensino Médio, associado à maior freqüência do erro-4, nos leva a pensar que, enquanto os alunos do Ensino Fundamental apresentam a tendência a considerar apenas um dos termos da fração na determinação de uma fração de *quantidades discretas*, os alunos do Ensino Médio apresentaram uma tendência a operar com esses termos.

01) B) Fabiana ganhou 2/3 das bolas de gude. Quantas bolas ela ganhou?

Esta questão tem as mesmas características da (1A), podendo, como alternativa, exigir o conhecimento do “complemento” de uma fração (1/3 tem seu complemento igual a 2/3), logo, “se contorno cinco bolas do total de quinze, correspondentes a 1/3 delas, seu complemento, obviamente será de 10 bolas”.

Na **Figura 6**, podemos perceber um equilíbrio entre acertos, erros e respostas em branco, aproximadamente em torno de um terço para cada. Nota-se uma evolução crescente para os acertos até a 8ª e o 3º ano, mas um fraco desempenho nas séries iniciais (5ª e 1º ano). Se apenas a 5ª série estivesse neste contexto, a hipótese poderia ser a trivial (início dos estudos, necessidade de tempo para compreensão dos conceitos, etc.), mas, com o 1º ano, em condições relativamente parecidas, não encontramos respostas em nossos estudos, pois, não permitem avançar em hipóteses desta natureza, abrindo a questão para futuras investigações.

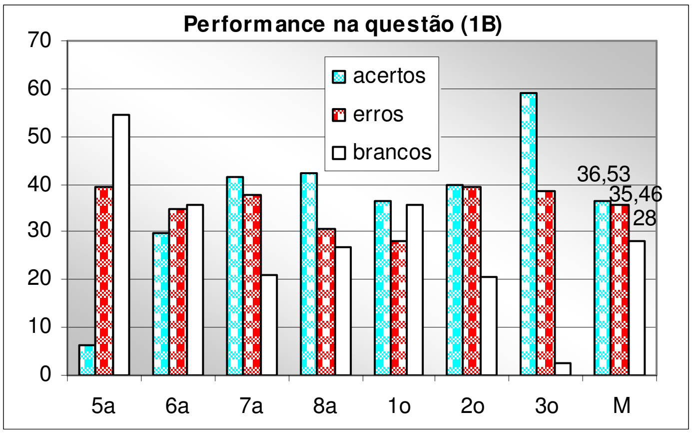


Figura 6 – Gráfico percentual do desempenho na questão (1B)

Na **Figura 7,** constatamos uma moderada diferença nas respostas entre os alunos do Ensino Fundamental que, defenderam 2/3 de 15 bolas como sendo 5 bolas e os do Ensino Médio como 6 bolas.

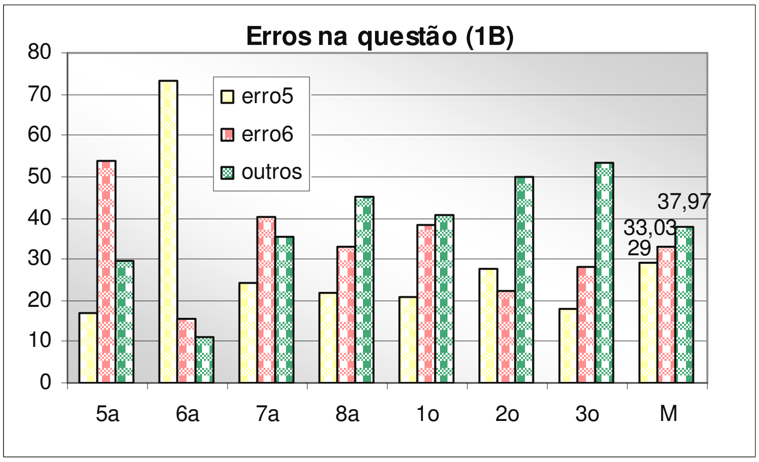


Figura 7 – Gráfico percentual dos erros cometidos na questão (1B).

Segundo, os dados, o erro-5 obteve 34% no Fundamental contra 22% no Médio.

O erro-6 obteve 35% no Ensino Fundamental contra 30% no Ensino Médio. Digamos que, há uma tendência no Fundamental em operar a adição dos termos da fração (2+3), como mostram os dados do erro-5. E, próximos entre os ensinos (em percentual) a operação de multiplicação (2x3), como mostra informações do erro-6. Esta tendência já pôde ser verificada na questão anterior (1A).

As operações de adição e multiplicação entre os termos da fração estão bastantes presentes, chegando à razão, no cômputo geral, de 1 para 4 alunos que apre4sentam esta concepção.

Em relação aos erros “outros”, aparece em destaque para representar 2/3 das 15 bolas: o erro-2 (48%), erro-3 (22%), erro-8 (15%) e erro-14 (15%).

Os dados nos mostram que o aparecimento de “outros” erros aumenta de acordo com o avanço na escolaridade dos alunos. Nessa categoria, os erros tipo 2 e 3 (apresentar duas ou três bolas como resposta), que corresponderiam aos termos da fração apresentada no enunciado, aparecem com a maior freqüência, sendo 48% dos erros dessa categoria correspondentes a duas bolas como resposta e 22% para três bolas. É importante também notar que esses tipos de erros não aparecem nos sujeitos de 5ª e 6ª séries de nosso trabalho, ao contrário do primeiro item da questão, em que a resposta como um dos termos da fração aparece com uma freqüência importante.

Uma outra interpretação para esse fenômeno poderia se basear nos estudos de Kerslake (1986), no qual, para certos alunos, a parte de “cima do traço da fração” corresponderia ao número de grupos a serem formados e a parte de “baixo do traço” indicaria a quantidade total de elementos que forma cada grupo. Nesta perspectiva, estes alunos desprezariam o “inteiro – discreto”. O “total”, o ”inteiro” ou o “todo”, seria então formado por 3 grupos, cada um com 3 elementos. Isso poderia demonstrar um raciocínio condicionado “ao todo – contínuo”, pois ao trabalhar frações, os alunos poderiam estar sendo induzidos ao procedimento de dupla contagem a partir de um todo dividido em partes iguais. Dessa forma, 1/3 das bolas de gude seria correspondente a um grupo de 3 bolas, enquanto 2/3 corresponderia a dois grupos de 3, configurando um total de 6 bolas.

Seria indispensável em um outro estudo, identificar em que medida o aparecimento desse tipo de erro estaria relacionado ao enunciado do item, seja pela proximidade de uma figura, seja pelo aparecimento de uma fração fundamental (1/3), como no item (A), ou ao trabalho com *quantidades discretas*.

Experiências realizadas por Alencar (2004) e Magalhães (2004), com alunos no final da 4ª e 5ª séries, respectivamente, mostram que a média de erros em questões que demandam a determinação de 2/3 de um número x de bolas é de 23%. Em nosso trabalho, com sujeitos a partir da 5ª série, encontramos uma média de erros bastante superior a essa, próximo de 36%, o que nos leva, mais uma vez, a pensar que o trabalho escolar com as *frações* não parece estar levando a uma aprendizagem efetiva e duradoura. Vimos também que o menor índice de erros encontrado esteve no 1º ano com uma marca de 28% do total dos alunos.

A nossa hipótese de que um bom desempenho no item (A) levaria a um bom desempenho também no item (B) só prevaleceu nas séries finais do Ensino Médio. As curvas seguiram com as mesmas características, mas apresentando uma leve redução no índice de acertos para o item (B). A média de "acertos" nas séries centrais (7ª ao 1º ano) para a questão, caiu 25% em relação. Isto pode ser constatado no gráfico da **Figura 8.**

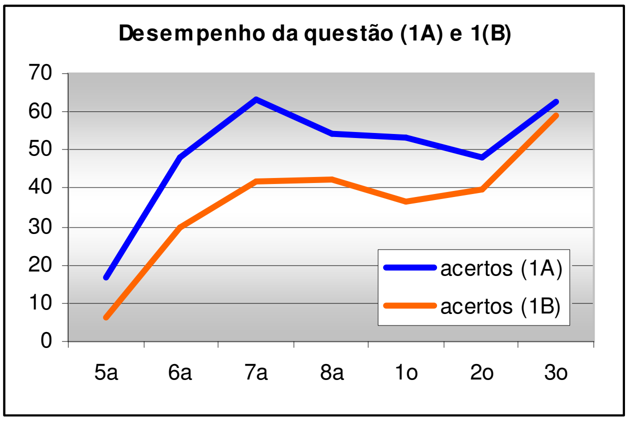


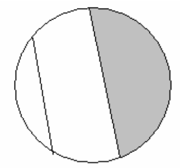
Figura 8 – Gráfico de acertos na questão (1A) e (1B) em função da escolaridade.

Podemos pensar em uma hipótese para justificar o comportamento favorável nas séries centrais e finais (a partir do 2º ano). A partir da 6ª série, próximo ao ensino de *medidas*, dá-se os estudos das razões, proporções, regras de três, porcentagens – exercícios incansáveis, conversões de frações ordinárias em centesimais, problemas fracionários sistemáticos –, juros (o emprego de *taxas*, simplificações de frações), geralmente se estendendo à 1ª unidade da 7ª série como complemento de algum conteúdo. O aluno deve ficar toda a 7ª série bastante presente com as frações.

A continuidade dessa hipótese pode ser reforçada com o comportamento das disciplinas de Química e Física que exploram no 2º ano do Ensino Médio, com as atividades que envolvem proporcionalidade ou razões centesimais: densidades relativas, *leis físicas dos gases, etc.; medidas com notações científicas, mecânica,...* Isso pode fazer com que o aluno, frequentemente, esteja em atividade com as frações. Este comportamento pode ser verificado da **Figura 8,** já nos itens (A) e (B) desta primeira questão.

Em Tinoco e Lopes (1994), encontramos considerações similares aos nossos comentários quando referimo-nos à prática de grande parte dos alunos em operar (adição e/ou multiplicação) com os termos das frações, envolvendo problemas de quantidades discretas. O entendimento de parte dos alunos, seja do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio, com esta concepção, é na ordem de 33% nas 3 séries centrais (7ª, 8ª e 1º ano) e de 33% nas duas séries iniciais e finais das escolas entrevistadas (5ª, 6ª, 2º e 3º anos). Logo, um terço dos erros desses alunos envolvem esta prática. Já no cômputo geral, um aluno a cada dez (nas séries centrais) comete o erro, 13% nas duas séries extremas. As séries centrais cometem menos erros desta natureza.

02) A parte pintada representa 1/3 do círculo?



Sim(   ) Não (   ). Por quê?

____

Neste quesito, desprezamos a justificativa (por quê?) dos alunos pelo motivo das respostas em branco serem muito acima dos 50%. Essa questão foi a que teve o menor índice de respostas em branco (para "sim" e "não"), de todo o questionário (6%).

Esta questão se apóia sobre *quantidades contínuas* e apresenta como suporte uma figura geométrica. Nesse momento estamos trabalhando a idéia da relação *parte-todo.* Como saberes inerentes, destaca-se a *condição de existência das frações – a divisão eqüitativa das partes.* O gráfico que compõe a **Figura 9** nos permite notar que as três séries centrais (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e 1º ano do ensino médio) apresentam certa estabilidade em relação aos índices de acertos e erros. Vale destacar também, que somente dois grupos de sujeitos (7ª série e 3º ano), apresentaram os índices de acertos maiores que os erros, além do menor número de alunos em deixar em branco a questão.

Identificamos também que mais da metade dos alunos parece não mobilizar, ao resolver a questão, a condição de existência das frações, assinalando o item (sim).

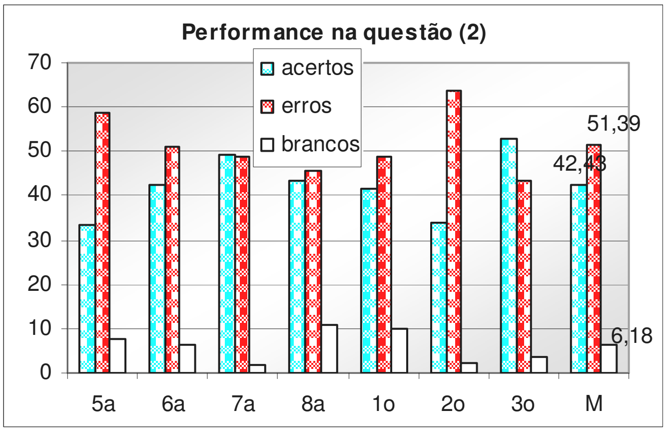


Figura 9 – Gráfico percentual de desempenho na questão (2)

A divisão eqüitativa das partes é papel preponderante para a construção do conceito de *fração*. "O todo precisa ser dividido em partes iguais para que cada parte seja considerada uma fração". Esta é uma das invariantes destacada por Lima (1982) e Nunes e Bryant (1997) na organização das ações do sujeito para a compreensão deste conceito.

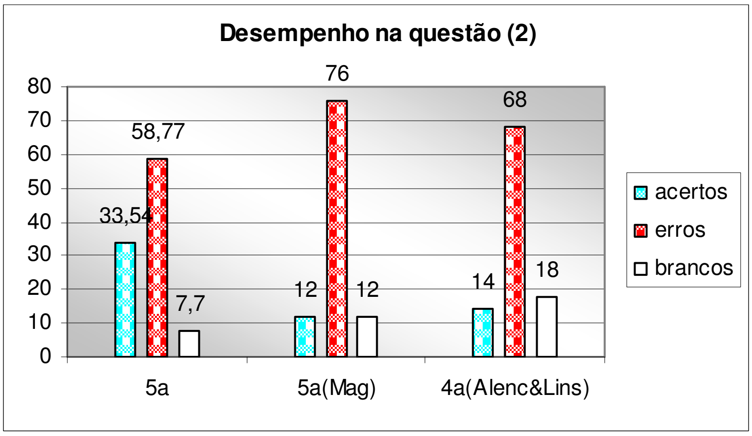


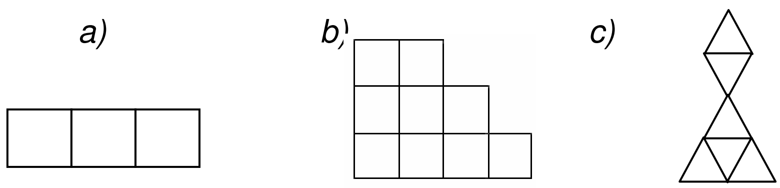
Figura 10 – Gráfico percentual comparativo entre nossas 5ª séries, as 5^{as} de Magalhães (2004) e as 4^{as} séries verificadas por Alencar (2004) e Lins (2004).

Questão similar foi testada com alunos de 5ª série de outras escolas nos estudos realizados por Magalhães (2004). Alencar (2004) e Lins (2004), com alunos da 4ª série (ver **Figura 10**). Magalhães e Lins trabalharam em pré-testes e pós-testes para verificar os efeitos de uma seqüência didática e importamos estes pré-resultados, no sentido de poder se perceber o desempenho de seus alunos, comparativamente.

Em nossa verificação, o desempenho dos alunos da 5ª série foi 20% melhor que os de Magalhães, que, por sua vez, se equipararam com os de Alencar e Lins da 4ª série. Acreditamos que estiveram nas previsões, os resultados entre 4ª e 5ª séries.

Os dados mostraram que, para muitas crianças, o fato de se apresentar uma figura dividida em partes, com algumas delas pintadas, garantiria a existência de uma fração, não sendo consideradas as relações entre as partes. Piaget (*apud* NUNES; BRYANT, 1997), destaca que a compreensão de fração acontece quando o aluno é capaz de estabelecer relação entre as partes e o todo e entre as partes e partes, percebendo, nesta última relação, a igualdade que deve existir entre as partes que forma o todo.

03) Pinte dois terços de cada uma dessas figuras:



Essa questão se caracteriza pelo suporte em *quantidades contínuas*, sendo explorada a relação *parte-todo*. Os itens (b) e (c) podem também mobilizar a noção de equivalência de frações. Em relação à representação utilizada, temos da mesma forma que as duas questões anteriores, a apresentação de figuras.

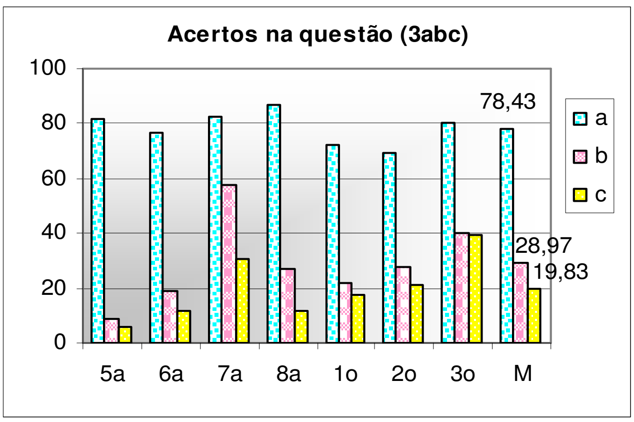


Figura 11 – Gráfico percentual de performance da questão (3abc).

O desempenho da questão (3) foi expressivo na letra (a), na qual, mais de 8 alunos a cada 10, acertaram (ver **Figura 11**).

A média de acertos nas questões (a), (b) e (c), que retratam relações *parte-todo* e de *equivalência* foi de 42%.

Por outro lado, menos de 3 e menos de 2 a cada 10 alunos conseguiram sucesso nos itens (b) e (c), respectivamente. Graficamente, são questões menos comuns que a do item (a), trabalhadas em sala de aula e livros didáticos.

A 7ª série foi a que teve a melhor média na questão. A 8ª série obteve o maior percentual de acertos na letra (a). Percebendo-se, também, um forte desempenho dos alunos concentrados nas séries centrais e no 3º ano entre as escolas.

Na **Figura 12,** pode se perceber que estão nas séries centrais (7ªs e 8ªs) e extremas (5as e 3ºs anos) os maiores índices de acertos na questão (3a). As questões em branco quase não aparecem no Ensino Médio. Por outro lado, é onde os erros estão mais concentrados.

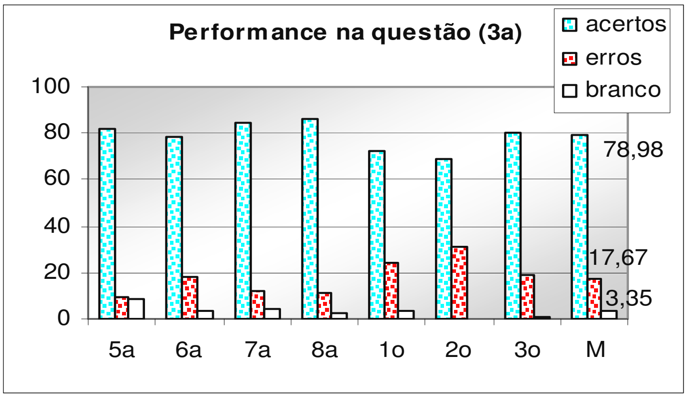


Figura 12 – Gráfico percentual de desempenho na questão (3a).

No primeiro item encontramos o maior percentual de acertos da questão com uma média de quase 80% de acertos. Isso pode ser justificado pela figura apresentada representar o modelo mais utilizado no trabalho com as frações na escola. Também nesse item verificamos uma queda de rendimento no 1º e 2º anos do Ensino Médio, momentos em que as frações são pouco exploradas como objetos de estudo, aparecendo mais como ferramentas na resolução de problemas.

Isso nos parece reforçar a hipótese da existência de uma espécie de “aprendizagem volátil” de certos conceitos matemáticos que não são mobilizados (as frações), pelos alunos, em outras situações, nas quais aparecem como ferramentas.

Encontramos na **Figura 13** e na **Figura 14**, os gráficos que representam o desempenho dos alunos nas questões (3b) e (3c).

Podemos verificar que os dois gráficos apresentam duas características comuns: os índices de erros e os índices de respostas em branco bastante próximos, o que parece indicar que os alunos tratam os dois itens da mesma forma, embora de maneira bem diferente do tratamento dado ao item (a) dessa questão, que apresentou uma figura mais familiar aos alunos, o que não demandava a mobilização da idéia de equivalência.

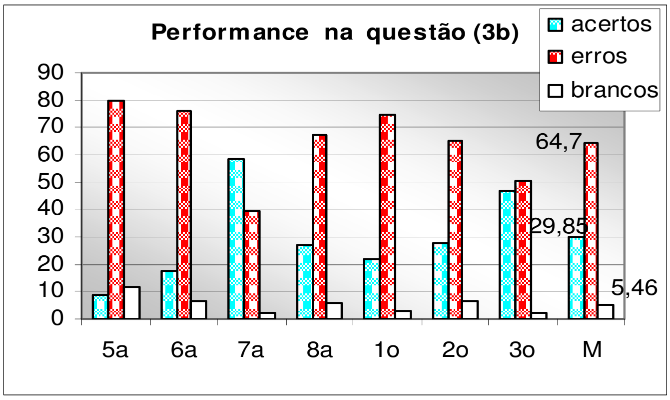


Figura 13 – Gráfico percentual de desempenho na questão (3b).

Entretanto, podemos perceber que para os alunos das turmas de 7ª série, o desempenho no item (b) não obedece ao comportamento dos alunos das outras séries. De fato, se para o item (b) encontramos um índice de quase 60% de acertos, no item (c) esse desempenho cai quase à metade (35%). Um outro instrumento metodológico, com entrevistas do tipo clínico, talvez pudesse identificar as razões desse comportamento.

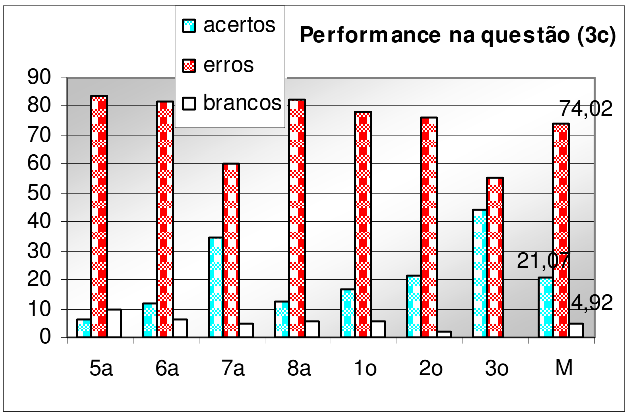
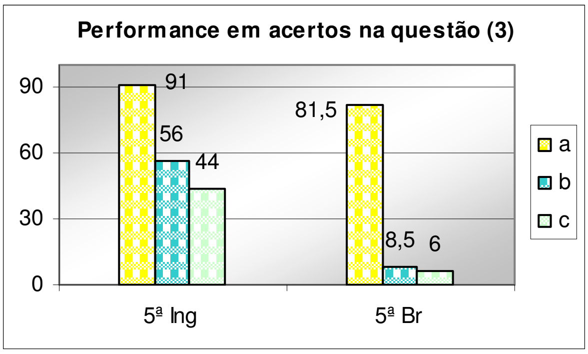


Figura 14 – Gráfico percentual de desempenho na questão (3c).

Segundo relatos apresentados por Nunes (2003), alunos (9-10) da 5ª série na Inglaterra, trabalhando a cardinalidade das frações e testando a compreensão dos alunos nas situações de *quociente, operador e parte-todo*, nesta última situação, uma das questões aplicadas às crianças, possuía, exatamente, os três itens que estamos analisando nesta oportunidade. O gráfico da **Figura 15** mostra a média dos resultados obtidos pelos alunos ingleses (5ª Ing) e brasileiros (5ª Br).

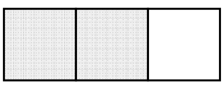


Figuras 15 – Desempenho percentual entre as crianças na Inglaterra e no Brasil para a 5ª série em acertos na questão (3).

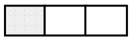
De acordo com o gráfico acima, podemos observar que a diferença entre os desempenhos na resolução do item (3a) pode ser devida à diferença entre as faixas etárias dos dois grupos. De fato, aplicamos o questionário em alunos dos turnos tarde e noite. No período noturno com idades bem mais avançadas que os alunos ingleses, que se encontravam na faixa compreendida entre 9-10 anos. Nos itens (b) e (c), embora a queda de rendimento apresentada pelos dois grupos seja bastante acentuada em relação aos alunos brasileiros, essa diferença aparece de forma bem mais acentuada, com um rendimento, por parte dos alunos ingleses, sete vezes maior que o rendimento dos alunos brasileiros. Um estudo mais aprofundado, em que se busque identificar as diferenças entre as abordagens didáticas nos dois grupos, talvez permitisse avançar nas causas dessa diferença.

Outras concepções na questão 3 (a).

Na **Figura 16**, encontramos informações que indicam as concepções diferenciadas dos alunos que não se destacaram em problemas de *quantidades intensivas,* envolvendo o conhecimento de *equivalência das frações.*



A incidência de erros diversificados é mais presente da 8ª série do

Ensino Fundamental ao 2º ano do Ensino Médio. A característica de representar 2/3 da figura através da pintura de um único quadrinho (1□)  é mais freqüente nas séries extremas e exatamente na série central (8ª série), e com pouca expressão nas outras séries. A exceção ficou por parte da 7ª série que não apresentou este erro.

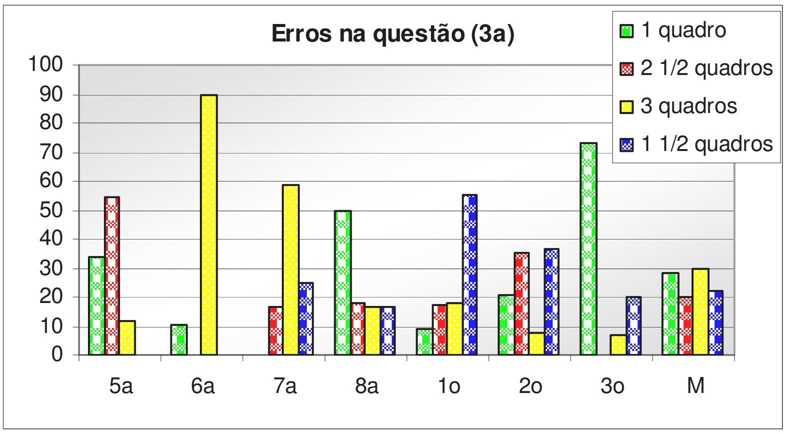
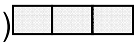


Figura 16 – Gráfico percentual dos erros cometidos pelos alunos na questão (3a).

Esta concepção pode estar caracterizada pela operação subtração (todo menos parte) ou complementar da representação da fração. Esta idéia representa, em média, 30% dos erros identificados nos protocolos.

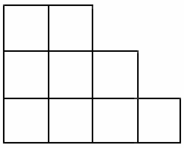
Uma outra ocorrência foi caracterizada pela pintura dos 3 quadrinhos (3□). Pode-se pensar que a representação de 2/3 da figura, supostamente estaria ligada a uma única contagem do denominador da fração. A 6ª e a 7ª séries foram as que mais apresentaram esse tipo de erro, que foi, em média, similar ao anterior (30%).

A idéia de representar 2/3, pintando 1 quadrinho e meio (1 1/2□)  foi apresentada a partir da 7ª série. Este entendimento pode estar ligado à idéia de metade dos três quadrinhos, ou seja, a leitura de 2/3 pode ter sido invertida com os alunos identificando 3/2, que corresponderia ao decimal 1,5. Essa modalidade de erro correspondeu a 20% do total dos erros apresentados pelos alunos, considerando a média geral.

Uma última idéia apresentada foi a de pintar dois quadrinhos e meio (2 1/2□), ou seja,  . Este raciocínio pode ter quase o mesmo caminho do anterior, mas no sentido de contar 3 (dois quadrinhos e meio, mais meio quadrinho em branco = três meios), linguagem inversa de 2/3. A incidência desse erro foi igual ao do anterior, ou ainda, ele apareceu entre dois a cada dez alunos.

Outras concepções na questão 3 (b).

Pintar 2/3 de uma figura que contém 9 quadrinhos exige do aluno o conhecimento de *frações equivalentes,* ou *de razão.* Assim, poderia, nesta última hipótese, articular dois para três, assim como quatro para seis, assim como, seis para nove.



Nesta questão (b), previmos a pintura de 2 quadrinhos, 5 ou 6. A primeira hipótese estaria em o aluno considerar a contagem única do numerador (2). A segunda e a terceira, na idéia de operar adição (2/3=2+3=5) e multiplicação (2/3=2x3=6) dos termos da fração. Na **Figura 17** estão relacionados, graficamente, os dados fornecidos pelo questionário.

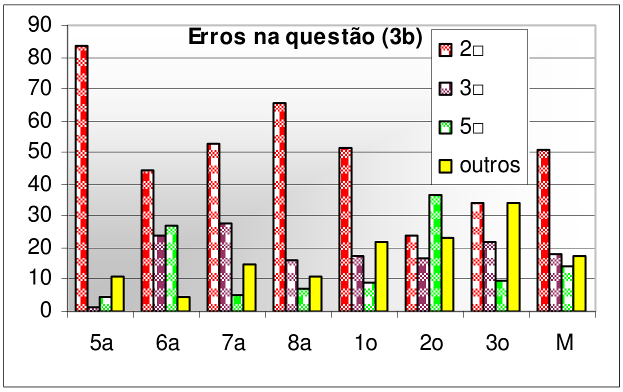


Figura 17 – Gráfico percentual dos erros cometidos pelos alunos na questão (3B).

Os resultados mostram que metade dos erros correspondeu à marcação de dois quadrinhos como representação da fração 2/3. Essa resposta foi mais representativa dentre os alunos do Ensino Fundamental, sendo que, para os alunos de 5ª série, esse índice chega a 83% do total de respostas erradas. Como apresentado em nossa análise preliminar, levantamos a hipótese que para esses alunos, o numerador da fração é o fator considerado no momento de representá-la.

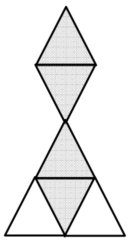
A idéia de pintar 3 quadrinhos para representar 2/3 numa figura que contém 9, não estava na nossa *análise preliminar*. Embora com percentuais menores que da concepção anterior, apenas a 5ª série quase não apresentou essa incidência. A hipótese para este fato, deve-se à contagem única do denominador para representação da fração, não importando a quantidade que se refere ao todo, da mesma forma que para a resposta em que o sujeito assinala dois quadrados.

Previmos a alternativa de se pintar 5 quadrinhos para representar 2/3 de 9 quadrinhos. Esta concepção estaria baseada na contagem dupla dos termos da fração. Essa idéia aparece mais acentuada entre os sujeitos do Ensino Médio.

A incidência de "outros" erros, como em outras questões anteriores, foi mais presente e de forma crescente no Ensino Médio. Nove tipos de respostas diferentes foram agrupados nessa categoria com poucas diferenças entre as suas ocorrências.

Outras concepções na questão 3 (c).

Similar à questão 3 (b), envolvendo o conhecimento de *equivalência das frações*, nesse item foi solicitado que o aluno pintasse 2/3 da figura, isto é, dos triângulos componentes. Para tanto, o aluno deveria ter pintado 4 deles. Observando a **Figura 18,** podemos perceber a incidência das respostas que foram persistentes também, na nossa previsão. Pintar dois ou três triângulos foi a concepção de 2/3 da região solicitada, admitindo que as contagens unilaterais dos termos da fração persistem em substituir a concepção de *equivalência das frações* para muitos dos alunos.



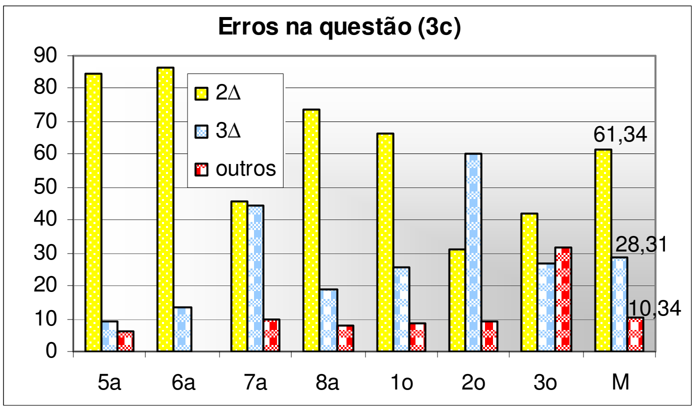
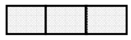


Figura 18 – Gráfico percentual de erros cometidos na questão (3c).

Podemos perceber que os alunos do Ensino Fundamental são aqueles que mais valorizam a idéia de representar os 2/3 hachurando dois triângulos, realizando a contagem única do numerador. Destacou-se dentre os sujeitos de 7ª série, a ocorrência das respostas 2 e 3 à questão que aparece de forma bem distribuída. Isso nos remete aos resultados obtidos na primeira questão por esses alunos, em que o índice de acertos foi, ao lado do grupo formado pelos alunos do 3º ano, o maior dentre todas as séries analisadas. Estudos posteriores poderiam esclarecer em que medida a modificação do suporte representacional (*quantidades contínuas ou discretas*) altera o comportamento dos alunos.

Esta questão (c), através dos resultados, mostrou o quanto é importante o entendimento da *equivalência das frações.* O menor índice de acertos de todo o questionário nos faz acreditar que ainda não existe efetivamente a compreensão do *conceito de fração* pela maioria dos alunos, mesmo com um alto número de acertos na questão (a). Piaget *et al. (apud* NUNES; BRYANT, 1997) enunciam que só há uma verdadeira compreensão da idéia de fração quando é possível estabelecer relações e articular essa idéia com o conceito de *equivalência.*

Neste sentido, pudemos observar na questão (3), três situações a considerar. Em primeiro lugar, a figura do item (a)  é bastante presente nos livros didáticos de matemática, por ocasião da introdução ao *conceito de fração*. Se por um lado o "modelo do chocolate" pode aparecer como familiar e motivador para alunos das séries iniciais, por outro, o privilégio desse modelo em sala de aula pode estar contribuindo para limitações na construção do conceito de fração por parte dos alunos.

Em segundo lugar, a utilização privilegiada de figuras prototípicas no trabalho com as frações pode estar também contribuindo para inibir a construção desse conceito, como mostram os resultados obtidos em nosso trabalho. De fato, nos itens (b) e (c) da terceira questão, mesmo se a discretização do contexto possa se apresentar como estratégia de solução para os itens, na medida em que eles poderiam contar os elementos das figuras, a estratégia típica demanda uma espécie de re-organização mental da figura apresentada, para a percepção visual da quantidade a ser representada.

Em terceiro lugar, os resultados obtidos parecem nos mostrar que poucos alunos mobilizam as idéias de *equivalência* e *razão* na resolução de questões que demandam a representação de frações. Nossa experiência de sala de aula tem mostrado que o trabalho com a *equivalência de frações*, muitas vezes tem se resumido à multiplicação de ambos os termos de uma fração por um mesmo número, o que pode levar ao abandono da idéia de fração como representante de certa quantidade.

04) Certo dia, na 8ª série A, 2/7 dos alunos faltou. Sendo 14 o número de faltosos, assinale quantos alunos há nessa turma? a) 2 b) 4 c)28 d) 49 e) 7

Esta questão refere-se a um problema de *quantidades discretas,* apresentada de forma descritiva (linguagem natural). A questão explora a relação *parte-todo*. A solução da questão demanda a passagem pelo valor equivalente à fração fundamental 1/7, para que o aluno consiga chegar ao todo (7/7), que corresponderia ao total de alunos da turma. O rendimento dos sujeitos encontra-se representado na figura abaixo.

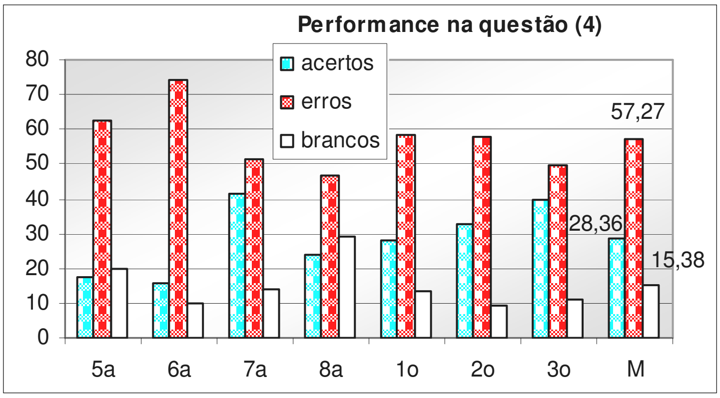


Figura 19 – Gráfico percentual de desempenho na questão (4)

Apesar de ser uma questão comumente encontrada em nossas salas de aula, os resultados nos mostram que menos de um a cada três alunos, em média, consegue acertar ao item. Apesar de se tratar de uma questão envolvendo a determinação do valor de uma fração de *quantidades discretas*, é necessário que o sujeito realize duas ações consecutivas (determinar 1/7 para, em seguida, determinar o valor correspondente ao total), o que pode gerar dificuldades suplementares.

Observa-se ainda que, na 5ª e na 6ª séries, quando esse tipo de problema aparece mais explorado nas salas de aula, o rendimento dos sujeitos não ultrapassa a marca dos 20% de acertos.

Magalhães (2004) aplicou a mesma questão com alunos da 5ª série e alcançou 23% de acertos. Compatível com nosso resultado na mesma série. Alencar (2004) e Lins (2004) aplicaram a questão com alunos da 4ª série atingindo 29%, valor equivalente à média de todos os alunos da nossa pesquisa que atingiu 28,36%.

Previmos que, o aluno poderia marcar o item da letra (a) = 2, sendo a divisão 14 por 7, mas, também, com amplas possibilidades de efetuar 14 x 2 = 28 optando pela (c). Se ainda dividir este último resultado por 7 obterá como resultado 4, o que o levaria a marcar o item da letra (b). A **Figura 20** mostra os erros mais freqüentes e uma opção que não havíamos previsto na análise preliminar como a do aluno marcar o item da letra (e) = 7.

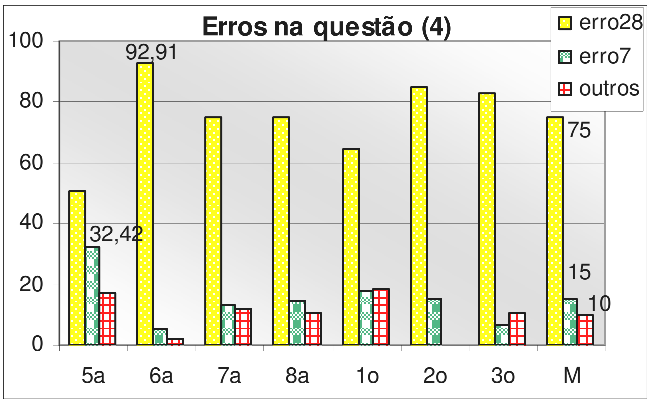


Figura 20 – Gráfico percentual dos erros da questão (4).

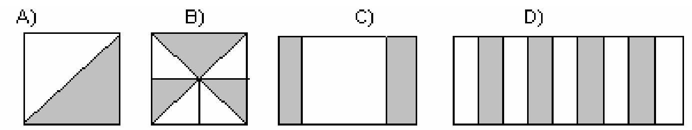
Esse tipo de erro, ou seja, identificar 7 como a resposta ao item, se deve, possivelmente, ao fato de o aluno compreender uma fração como a contagem única de seu denominador. A pregnância desse tipo de erro, que aparece desde os primeiro itens do instrumento, reforça ainda mais a idéia que, para muitos alunos, a concepção de fração ainda é a de um número de dois andares, tratando-se, de forma distinta, numeradores e denominadores. Um estudo específico poderia, sem dúvida, identificar possíveis causas para essa concepção, o que não foi objeto de nosso trabalho.

Apenas pouco mais de dois alunos a cada 10 não assinalaram a questão no item erro-28. Esta idéia foi percebida em 73% dos erros cometidos por alunos do Ensino Fundamental e 77% dos erros de alunos do Ensino Médio. Identificamos uma considerável tendência apresentada pelos alunos de buscar a realização de uma operação como forma de resolver o problema. Com isso, sem o conceito de fração como *parte-todo* consolidado, percebemos que o aluno estabelece como elemento da operação, um dos termos dessa fração, nesse caso, o numerador, obtendo então (28) como resposta.

O erro-7, que não havia sido previsto em nossa análise preliminar, correspondeu a 16% dos erros em alunos do Ensino Fundamental e 13% em alunos do Ensino Médio.

Porém, o que mais se destacou, é que três entre quatro sujeitos, busca como já identificado em itens anteriores, realizar algum tipo de operação aritmética com os termos da fração ou com os números envolvidos no enunciado do problema. Em estudos posteriores, com instrumentos metodológicos apropriados, poderíamos identificar as origens dessas concepções.

05) Assinale as figuras que estão pintadas pela metade.



Este item é característico de *quantidades contínuas*, apresentado por figuras geométricas que relacionam frações ao significado *parte-todo*. A presença ou não da contigüidade das partes pode interferir na escolha correta da resposta do aluno.

Quando as partes pintadas da figura estão próximas umas das outras (unidas ou adjacentes) – estão contíguas –, os alunos encontram menos dificuldades na percepção da relação *parte-todo* e as chances de acerto de representar a fração correspondente são maiores.

Observando o gráfico da **Figura 21**, podemos identificar o aparecimento de um fenômeno pouco comum nas questões anteriores. Observa-se que, excetuando-se as turmas de 5ª série, os erros aparecem mais concentrados nas séries centrais e os acertos nas extremidades, apresentando certa simetria em relação aos sujeitos do primeiro ano do Ensino Médio. É preciso salientar que, nesse item, consideramos como acerto a marcação, por parte do sujeito, das alternativas (a) e (b) simultaneamente.

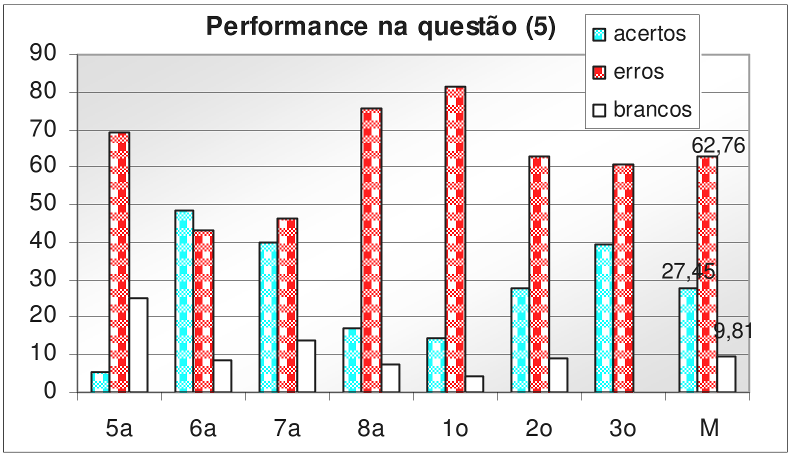
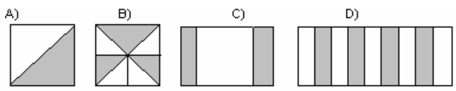


Figura 21 – Gráfico percentual de erros na questão (5).

Encontramos aproximadamente 2/3 dos alunos que não conseguem identificar corretamente figuras que representam a metade de uma *quantidade contínua*. Esse índice de erros aparece estável nas duas séries finais do Ensino Médio, o que nos leva a refletir que o avanço na escolaridade dos sujeitos não parece estar correspondendo a efetivas aprendizagens, ou talvez, esteja promovendo uma espécie de cristalização de concepções inadequadas.

Quem assinalou somente a letra (A), não obrigatoriamente faz parte de um grupo de



alunos que possui uma concepção diferenciada ou errada dos demais que assinalaram corretamente as alternativas (A) e (B). Entretanto, o conceito de metade exige que se reconheçam algumas outras situações como: números de partes pintadas iguais a não pintadas; condições de sobreposição das partes *em equivalência* das partes pintadas, além da não exigência da "contigüidade" das partes entre elas. A letra (B) não é uma figura contígua, mas possui uma área pintada equivalente à não pintada.

A escolha do aluno em marcar a letra (C), que obteve uma freqüência de 18% entre os sujeitos, pode estar relacionada ao número de partes não-pintadas e pintadas, numa razão qualquer de 1 para 2, não importando a divisão eqüitativa entre elas, gerando assim uma "fração fictícia" de 1/2.

A alternativa de marcar a letra (D) obteve um índice de 21% entre todos os alunos. Levanta-se a hipótese que esses sujeitos estariam, também, se baseando em aspectos puramente visuais, na medida em que poderiam estar associando uma parte pintada para uma parte não pintada.

Na **Figura 22** observam-se as informações quanto às respostas mais expressivas de "metade" (ou meio), de acordo com a escolaridade do aluno.

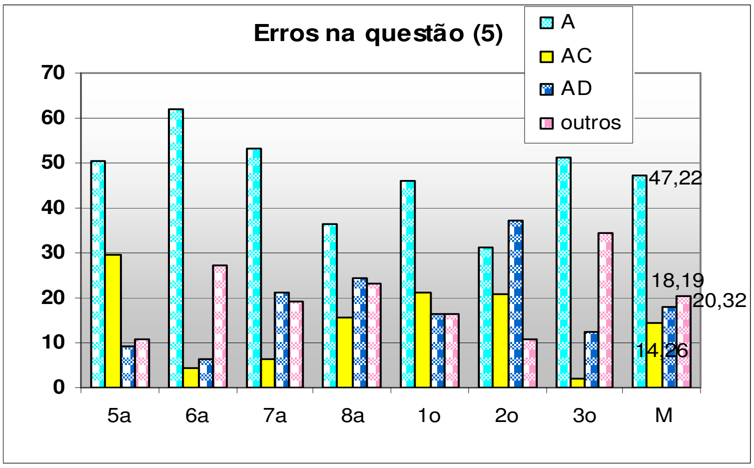


Figura 22 – Gráfico percentual de erros na questão (5).

Praticamente, metade dos alunos assinalou apenas o item (A). Observamos que os alunos têm uma grande tendência a identificar *metades,* apenas em figuras que apresentam a configuração padrão (figuras prototípicas), fato que aparece como mais evidente no Ensino Fundamental.

Os alunos se prenderam muito à visualização, fato aparentemente natural, na medida em que as frações são apresentadas por meio de figuras, esquecendo das relações *parte-parte* e *parte-todo*, importantes para as qualificações das *frações*. Vale salientar da importância do *limite do meio*[8], usado por eles, para assinalar em número bastante expressivo, o item (A), em todas as séries.

Para Bryant (*apud* NUNES; BRYANT, 1997), o *limite do meio* possibilita nas crianças, não só a definirem se as duas partes de um determinado "todo contínuo" são iguais, mas permitem estabelecer a relação *parte-parte*, como também a iniciarem a quantificação das frações.

Vimos, portanto, grande incidência de acertos onde havia o *limite do meio* entre as partes [na figura (A)], não ocorrendo com as demais, pois não havia contigüidade em suas partes. Consideravelmente, muitos alunos não deram importância ao princípio da *equivalência* ou até às sobreposições das partes da figura (B), fazendo com que

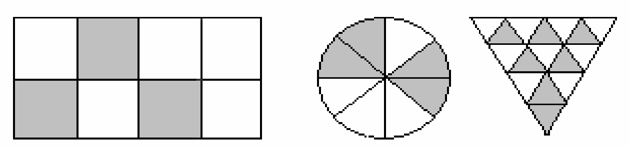
---

[8] Linha que divide uma figura possibilitando distinguir se a mesma, visualmente, foi dividida em duas partes iguais.

o *limite do meio* não pudesse ser considerado pelos alunos, obrigando-os a encontrar outros procedimentos ou lógicas para tanto.

Magalhães (2004) e Alencar (2004), ambos trabalhando a mesma questão com alunos da 5ª e 4ª séries de escolas municipais do interior, obtiveram índices de aproveitamento de 23% e 43%, respectivamente, só admitindo como certa a letra (A). A nossa média nas 5ªs séries atingiu 35%. Como certas (A) e (B), obtiveram, respectivamente, 4% e 9%. A nossa 5ª série obteve 5,54%, resultado bem próximo do encontrado por Magalhães, assim como dos alunos de Alencar na 4ª série.

06) Diga que fração está representada na parte pintada, em cada uma das figuras abaixo: a) b) c)



Este item trabalha a representação geométrica das frações com significado *parte-todo*, priorizando a verificação do conhecimento do aluno diante de *quantidades contínuas*, revelando suas habilidades quanto à representação simbólica de uma fração a partir de sua representação geométrica.

De acordo com os resultados do questionário respondido pelos alunos, alguns erros se apresentaram e, para facilitar a leitura das legendas nos gráficos confeccionados, chamaremos de "parte-parte", o erro no qual o aluno representa a fração na ordem *parte pintada/parte não-pintada* (ou vice-versa); a "unid frac pint", ou seja, a representação da *fração correspondente* é dada pela *unidade fracionária* que detém *o seu denominador*, *o número de partes pintadas*, ou seja, se houver cinco partes pintadas, a fração será 1/5, se houver oito partes pintadas a fração seria 1/8, e assim por diante, para qualquer total de partes que compunha a figura; e "fração inv" a representação da fração na *forma inversa,* ou seja, se cinco partes foram pintadas e o total de partes for dez, a fração correspondente seria 10/5 (inversa da correta 5/10), e assim por diante.

A **questão (6a)** é bastante conhecida nos exemplos de sala de aula e livros didáticos. Sua estrutura não apresenta contigüidade das partes pintadas, mas pode

ser considerada entre as três, a mais familiar entre os alunos. É Comum chamá-la de um chocolate dividido em tabletes. A resposta correta para expressar a fração correspondente é 3/8 (três oitavos) – número que corresponde à relação *parte-todo.*

Conforme a **Figura 23**, a 6ª série e o 3º ano apresentaram melhor desempenho.

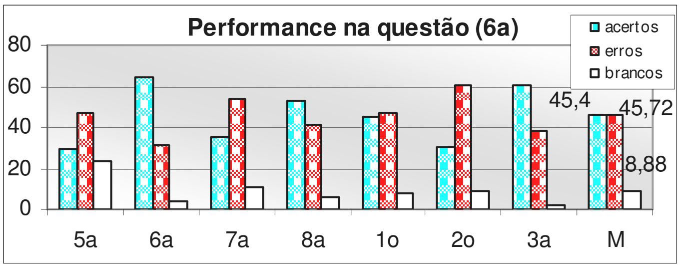


Figura 23 – Gráfico percentual de desempenho na questão (6a).

Os erros e acertos igualaram em 45%, na média geral dos sujeitos. É importante ressaltar que esse tipo de figura é explicitamente explorado em turmas de 5ª e 6ª séries, porém, mesmo se encontramos o maior índice de acertos em sujeitos da 6ª série, nos causa estranheza o resultado encontrado entre os sujeitos de 5ª série, com apenas 30% de acertos ao item, contra mais de 60% na série posterior.

Os erros, que chegaram quase à metade dos sujeitos, podem ser observados na **Figura 24**. A incidência maior foi de representar a fração com a relação *parte-parte* (48%).

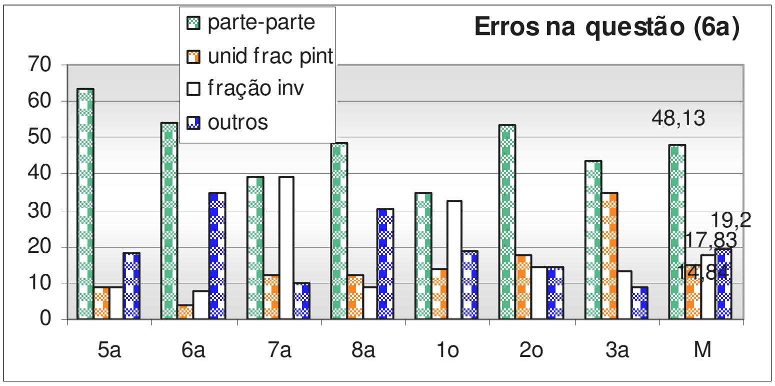


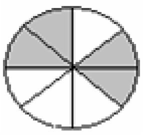
Figura 24 – Gráfico percentual de erros na questão (6a).

No Ensino Fundamental, a incidência desse erro (parte-parte), no caso, 3/5, 4/4 e 7/9 é bastante freqüente nas duas séries iniciais, aparecendo fortemente entre os sujeitos de 5ª série. Mais uma vez observamos certa estabilidade desse tipo de concepção entre os alunos das duas séries finais do Ensino Médio.

A ocorrência do erro da unidade fracionária pintada (unid frac pint), no caso, 1/3, 1/4 e 1/7, representar a fração com o inverso do número de partes pintadas, é crescente com a escolaridade.

O erro em representar a fração na forma inversa (fração inv), no caso, 8/3, 8/4 e 16/7 é crescente até a 7ª série e decrescente no Ensino Médio com a escolaridade; a ocorrência de “outros” erros é mais encontrada no Ensino Fundamental.

A **questão (6b)** apresenta uma figura menos conhecida que a da questão (6a), mas



bastante presente nos livros didáticos, e os alunos a reconhecem como uma pizza dividida em partes iguais. Sua representação correta é 4/8 (quatro oitavos) – número que corresponde à razão entre o número de partes pintada e total de partes da figura que foi dividida – com significado a relação *parte-todo.*

A média de acertos a esse item ficou por volta de 44%, o mesmo índice de acertos do item (a) que atingiu 45%. Mais uma vez, podemos atribuir à familiaridade que os alunos têm com esses tipos de figura a estabilidade dos percentuais de acertos.

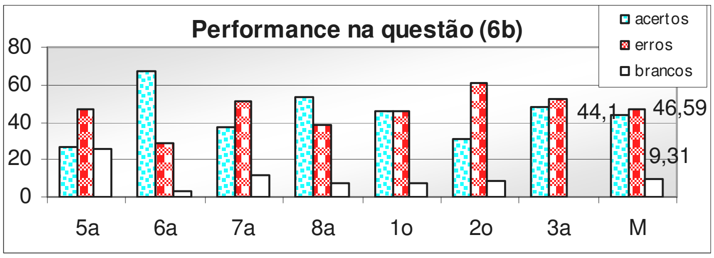


Figura 25 – Gráfico percentual de desempenho na questão (6b).

Também nesse item, podemos encontrar o maior percentual de acertos entre os sujeitos de 6ª série e o menor percentual entre os sujeitos de 5ª série (**Figura 25**). Este crescente rendimento pode estar relacionado aos estudos das *razões e proporções* que se apresentam nesta fase escolar.

Esperava-se também que alguns sujeitos indicassem como resposta a fração (1/2), principalmente pelo fato de ser facilmente identificável o deslocamento da parte pintada inferior para a posição superior.

Entretanto, o gráfico da **Figura 26**, nos mostra uma redução de 4% nas médias dos erros “parte-parte” e “unid frac pint”, com uma estabilidade no índice do erro “fração inv” em 17%. As diferenças nos dois primeiros tipos de erros passaram para os “outros”.

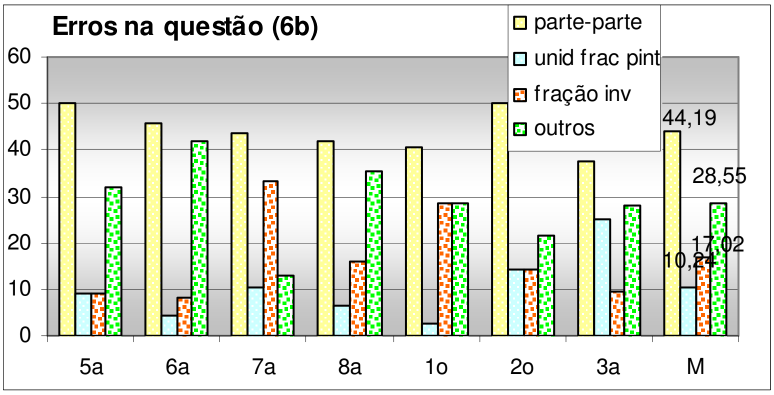
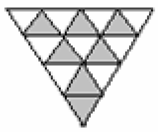


Figura 26 – Gráfico percentual de erros na questão (6b).

A **questão (6c)**, que pouco aparece em nossas salas de aula, tem sua figura representada pelo número 7/16 (sete dezesseis avos), fração que representa como significado a relação *parte-todo* ou a *razão* entre as partes pintadas e o total de partes.



Observando o gráfico da **Figura 27**, pode-se perceber que não há, entre esta questão e a anterior, diferença acentuada quanto ao desempenho dos alunos. Desta vez, a média de questões em branco ficou bem próxima de 10%.

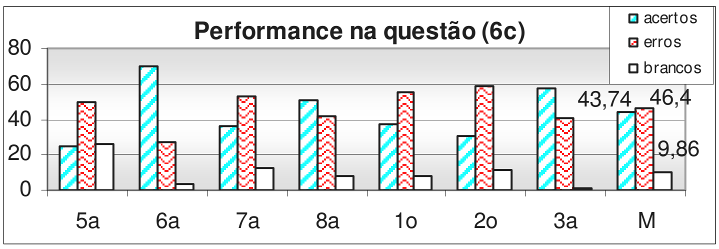


Figura 27 – Gráfico percentual de desempenho na questão (6c).

De acordo com a nossa *análise preliminar*, foram previstos os erros “parte-parte” e “fração inv” como os que mais se apresentariam. Fato que se juntaria ao erro de “unid frac pint” como está sendo apresentado nos três itens da questão (6). Assim, podemos perceber na **Figura 28**, a confirmação do que previmos.

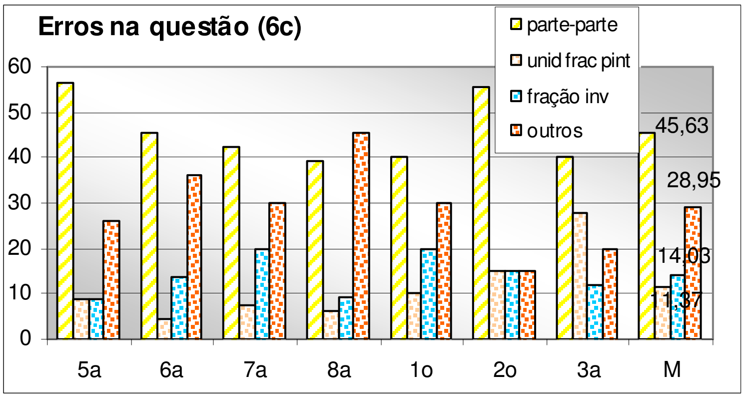


Figura 28 – Gráfico percentual de erros na questão (6c).

O erro "parte-parte" decresce com a escolaridade no Ensino Fundamental e cresce no Ensino Médio, até o 2º ano, voltando ao menor índice (40%) no 3º ano.

A unidade fracionária com o denominador igual ao número de partes pintadas ("unid frac pint"), no caso (1/7), apresenta-se de forma crescente com a escolaridade.

Com exceção da 8ª série, as séries centrais compõem a maior incidência do erro "fração inv", ou seja, (16/7).

Como vimos, entre as três figuras, não existiu nenhum índice tão expressivo que diferenciasse o nível de dificuldade quanto à forma ou a familiaridade entre os alunos para que pudessem expressar a relação *parte-todo* de forma correta.

Assim, podemos tomar como evidência a turma da 6ª série que conseguiu 70% de acerto em todos os itens, quando, por hipótese, trabalhando Razão e Proporções com seus alunos, possibilitou chegar a esse nível. Isto pode ser verificado na **Figura 29** adiante.

Com o objetivo de verificar a performance dos alunos, consideramos os sujeitos que responderam corretamente aos três itens simultaneamente, cujo resultado se encontra no gráfico da figura seguinte.

Podemos observar que um quarto dos alunos de 5ª série não respondeu à questão (aos três itens), o que pode demonstrar que esses sujeitos estariam com pouca segurança sobre os procedimentos a serem adotados.

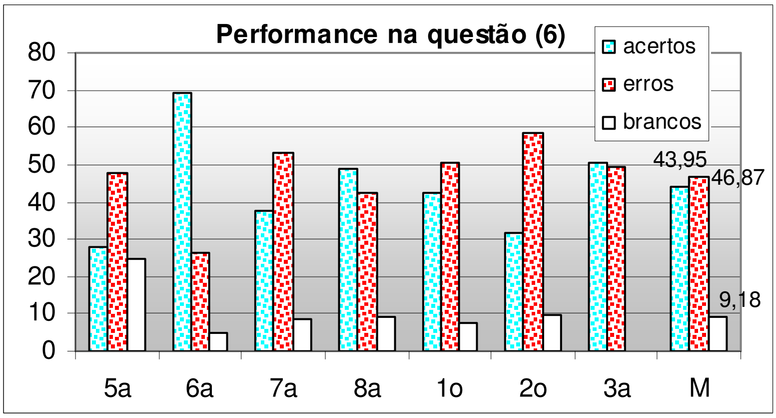
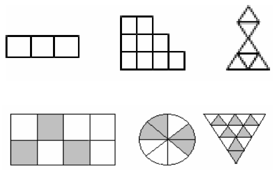


Figura 29 – Resumo gráfico percentual de desempenho na questão (6).

A 5ª série com o menor percentual de acertos, nos leva a refletir sobre a necessidade de outros estudos permitirem identificar as causas desse fenômeno, na medida em que é justamente nessa etapa de escolaridade, que o trabalho com as frações é bastante explorado, ou seja, as frações são trabalhadas, explicitamente, como um objeto de estudo.

Magalhães (2004) aplicou esta questão a alunos da 5ª série e obteve índices de erros de 44%, próximos de nosso resultado; Alencar (2004) e Lins (2004) aplicaram a questão a alunos de 4ª série e obtiveram em média 58% de erros, isto é, um rendimento menor.

É interessante comparar os resultados obtidos nessa questão com aqueles obtidos na questão (3), na medida em que, ambos os itens exploram o conceito de fração no modelo *parte-todo* com o suporte de figuras geométricas. Na questão (3) é solicitado que o aluno identifique na figura certa fração (2/3), enquanto que na questão (6) o aluno deve identificar a fração correspondente a uma parte pintada.



Observa-se que a performance dos sujeitos não é muito alterada em função do tipo de ação solicitada com 40% de acertos na questão (3) e 50% na questão (6). Essa diferença poderia ser explicada pelo fato de, na questão (3), aparecer, mesmo que de forma implícita, a idéia de *equivalência de frações*.

Entretanto, o baixo índice de acertos nas duas questões nos leva a refletir sobre os efeitos do privilégio que é dado ao modelo *parte-todo* no trabalho escolar com frações. Esses resultados avançam na direção dos resultados obtidos por Stengel e

Nodding (1982, *apud* CRUZ, 2003), que consideram este modelo de abordar *frações*, o esquema *parte-todo*, um obstáculo para a aprendizagem das crianças, pois elas não são levadas a uma ampla compreensão dos números racionais. Em outras palavras, nesse modelo, as crianças são conduzidas a entenderem frações como parte de coisas (tortas, chocolates, barras) e não como um número em si.

.

07) Dois rapazes receberam a mesma quantia em dinheiro. Um decidiu economizar 1/4 da sua quantia, e o outro decidiu economizar 5/20 da sua quantia. Assinale a resposta correta:

a) $\frac{5}{20}$ ***é maior que*** $\frac{1}{4}$ ***b)*** $\frac{1}{4}$ ***é maior que*** $\frac{5}{20}$

c) $\frac{5}{20}$ ***e*** $\frac{1}{4}$ ***representam a mesma quantia***

Esta questão mobiliza a idéia de fração como *operador.* Não é composta por figuras geométricas e envolve conhecimentos de *equivalência.*

Na **Figura 30**, podemos observar o desempenho dos sujeitos quanto ao conhecimento de *equivalência* das frações.

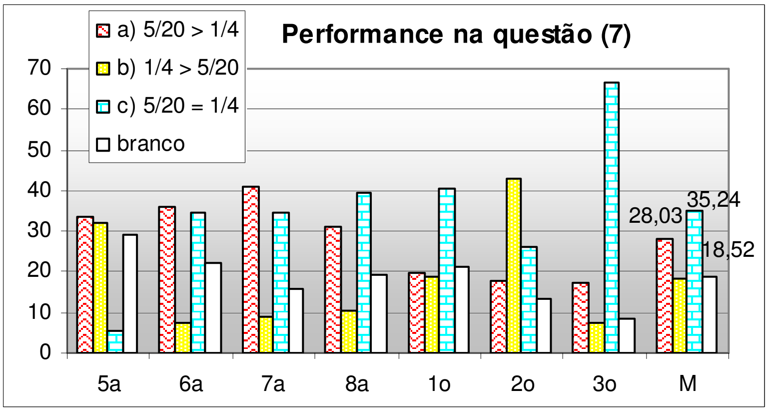


Figura 30 – Gráfico percentual de desempenho na questão (7).

Nessa questão, a performance dos sujeitos cresce de forma associada à escolaridade. Apenas entre os sujeitos do segundo ano do Ensino Médio tivemos uma queda de rendimento. Mais uma vez, podemos observar o baixo índice de acertos entre os alunos de 5ª série com aproximadamente 5% de acertos ao item. Seria interessante, em estudos posteriores, buscar identificar se esse fenômeno é restrito aos sujeitos de nosso trabalho ou se é um fenômeno comum em grupos com essa escolaridade, pois o esquema metodológico por nós adotado não nos permite avançar em outras hipóteses.

É preciso ressaltar, porém, que Magalhães (2004), ao aplicar essa mesma questão em alunos de 5ª série obteve 12% de aproveitamento, enquanto Lins (2004) obteve um índice de 4% de acertos com alunos de quarta série.

A ocorrência do erro do item (a) 5/20 > 1/4 esteve mais presente no Ensino Fundamental, decrescendo da 7ª série (41%) ao 3º ano (17%), numa média geral de 28%. A hipótese deste erro está relacionada à idéia (pelo aluno) de que, quanto maiores os termos da fração, maior ela é. Assim, se 5>1 e 20>4, então 5/20>1/4. À luz da literatura existente sobre o tema, essa idéia estaria baseada na concepção de fração como um "número de dois andares" e a comparação de duas frações seria feita pela comparação de seus termos, baseando-se nos números naturais.

A segunda ocorrência de erros se refere à generalização de uma regra implícita nos sujeitos, ou seja, a de quanto maior o denominador de uma fração, maior ela é. Neste caso, se 4 < 20, então, 1/4 > 5/20. Essa concepção aparece em nossos sujeitos, associada ao crescimento da escolaridade, excetuando-se as séries extremas, isto é, a 5ª série do Ensino Fundamental e o 3º ano do Ensino Médio.

Estudos têm demonstrado que fica bastante difícil para uma criança compreender a *equivalência* (igualdade) entre duas frações, quando ela ainda não adquiriu a capacidade de perceber esse número como resultado de duas relações: uma, a chamada de *parte-todo*, que reúne aspectos intensivos, e a outra, de *parte-parte*, que reúne aspectos extensivos.

É neste sentido que, Maia, Câmara, M. e Câmara, P. (1991), enfatizam em dizer que, a compreensão do *conceito de fração* está articulada em sincronismo com o conceito de *equivalência*, e as noções desta são fundamentais para que o aluno domine e opere com frações.

Por outro ângulo, em seus estudos, Tinoco e Lopes (1994) deixam claro que o conceito de *equivalência* só pode ser construído quando envolvemos os alunos em atividades caracterizadas pela experiência concreta e pela representação gráfica.

Para as autoras, quando se exploram as noções de *equivalência por 'regrinhas'* dificilmente os alunos constroem significado para esse conceito.

Exemplo disso, reforçando o que as autoras enfatizam, é o uso da prática de *isomorfismo de medidas*[9] em exercícios de frações em sala de aula que oportuniza aos alunos o hábito de resolver problemas usando as representações gráficas.

08) Três amigos resolveram andar num parque de sua cidade, partindo todos do mesmo lugar. Como eles têm ritmos diferentes, em certo instante André havia andado 1/3 do percurso, Carlos 1/4 e Jorge 1/2.

a) Quem andou mais?___________________________________

b) Quem andou menos?_________________________________

Essa questão busca identificar como os alunos realizam a comparação de frações em uma situação apresentada em *linguagem natural*, sem o suporte de figuras. A solução canônica consistiria em utilizar o conceito de *equivalência*, buscando frações equivalentes de mesmo denominador. Uma outra estratégia que poderia ser mobilizada pelos sujeitos seria considerando que os dados do problema apresentam frações fundamentais ao aplicarem a idéia que, nesse caso, quanto maior o denominador, maior a fração.

Na **Figura 31**, podemos constatar uma grande semelhança entre os gráficos de desempenho nas questões (8a) e (8b). Comparar as frações 1/3, 1/4 e 1/2 apresentadas na questão, correspondentes a André, Carlos e Jorge, é dizer que, no item (a) quem andou mais foi Jorge (andou 1/2 do percurso), e na letra (b) quem andou menos foi Carlos (andou 1/4 do percurso).

Os gráficos mostram que, quanto maior a escolaridade, maior o índice de erros encontrados, da 6ª série ao 2º ano, nos dois itens (a) e (b). Quanto menor a escolaridade, maior o número de acertos. Todas as turmas apresentaram um alto índice de erros.

---

[9] *Isomorfismo de medidas* é uma estrutura que consiste da exploração de problemas que estabelecem relações proporcionais entre conjuntos de mesma cardinalidade.

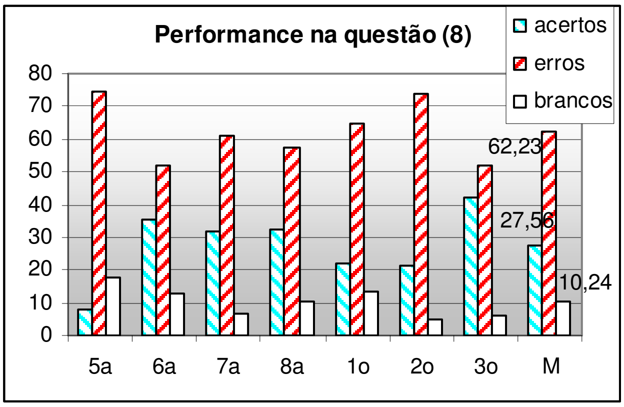


Figura 31 – Gráfico de desempenho na questão (8).

Em outras palavras, os sujeitos do Ensino Fundamental apresentaram melhor desempenho na questão (8), que exigiu comparações entre as *frações fundamentais*.

Os resultados obtidos caminham na direção daqueles obtidos por Silva (1997), afirmando que os números naturais, muitas vezes, podem atuar como elementos "dificultadores" na aprendizagem das frações, na medida em que esse tipo de número aparece com certa estabilidade nos alunos. Entretanto, podemos também avançar que essa pregnância dos naturais, quando do trabalho com *frações*, pode estar associada a pouca compreensão dos números racionais. Dessa forma, ao trabalhar em um domínio numérico pouco familiar, os alunos buscariam apoio no campo numérico que se apresenta como mais estabilizado, ou seja, os números naturais.

09) Mário e Luciana têm cada um, uma barra de chocolate de mesmo tamanho. Mário dividiu a sua em 8 partes iguais e comeu 4 delas. Luciana dividiu a sua em 4 partes iguais e comeu 2 delas.

Quem comeu mais chocolate? _______________

A questão apresenta significado de *fração* como *parte-todo,* não apresentando figuras geométricas, isto é, apresentada na linguagem natural. As idéias envolvidas na questão são de *comparação e equivalência de frações.* Apesar de apresentar, em seu contexto, o apelo ao "chocolate", comumente encontrado nos livros didáticos, trata-se de uma questão que não é freqüentemente encontrada em nossas salas de aula, particularmente por não se apoiar no modelo *parte-todo.*

Em média, apenas um em cada três alunos teve sucesso na questão, como indicado na figura seguinte. É interessante também notar o baixo índice de respostas em branco, apesar de sua posição no questionário, o que poderia provocar o "efeito cansaço". Podemos nos questionar sobre a influência de um contexto familiar na mobilização do aluno para responder ao item.

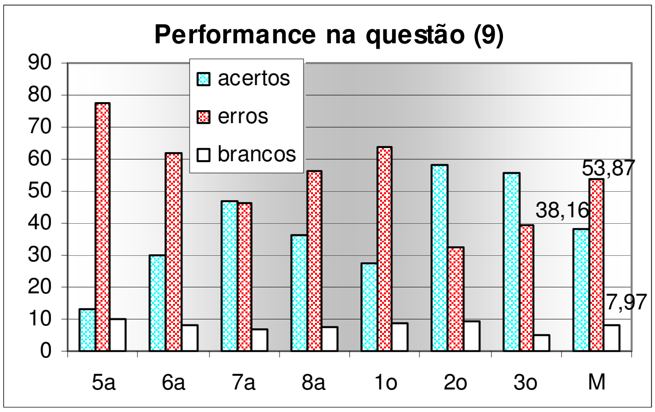


Figura 32 – Gráfico percentual de desempenho na questão (9).

Mais uma vez, podemos observar que os sujeitos de 5ª série continuam apresentando os menores rendimentos; neste caso, acompanhados dos sujeitos de 6ª série. Nas séries finais do Ensino Médio, nota-se uma espécie de inércia nos indices de acerto, da mesma forma como em outros itens do questionário com os acertos se aproximando do percentual de 55%.

Na análise preliminar, vimos a possibilidade de os alunos identificarem a maior fração com a que apresentasse os maiores termos, ou seja 4/8. Dessa forma, a resposta apresentada seria Mário. A **Figura 33**, abaixo, mostra a grande incidência no Ensino Fundamental desse erro com uma média geral de 60% para essa concepção.

Uma segunda idéia em representar as frações 8/4 e 4/2, com a leitura da questão, podem ter levado a 27% de todos os alunos a concepção de que, *quanto maior o denominador menor será a fração, em qualquer circunstância*, e concluído que, se

4>2, então, 8/4>4/2. Esta idéia teve maior destaque no Ensino Médio e de forma crescente com a escolaridade.

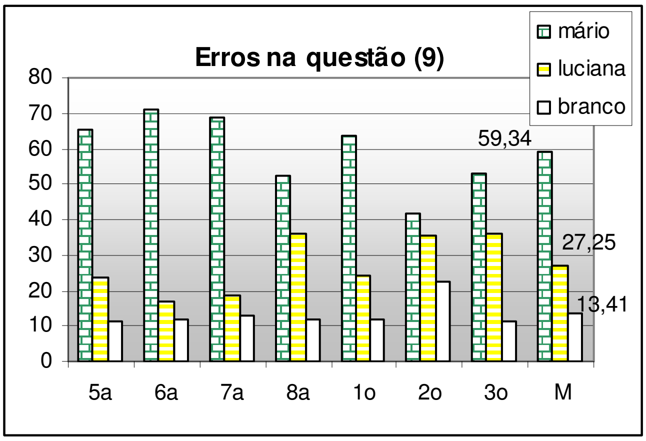


Figura 33 – Gráfico percentual de erros na questão (9).

Magalhães (2004), aplicando esta mesma questão em outras turmas de 5ª série, identificou 23% de acertos entre os seus sujeitos. Isso parece reforçar a hipótese que o baixo rendimento de nossos sujeitos não estaria necessariamente associado à nossa escolha, indicando que a concepção de *fração* como *quociente* ainda não se apresenta estabilizada nessa etapa de escolaridade. Um outro estudo poderia, talvez, identificar em que medida os alunos dessa série estariam mobilizando as idéias relativas ao modelo *parte-todo*, em situações envolvendo a idéia de *quociente*.

Em seus estudos, Tinoco e Lopes (1994) deixam claro que o conceito de equivalência só pode ser construído quando envolvemos os alunos em atividades que primem pela experiência concreta e pela representação gráfica. Para elas, a noção de *equivalência* explorada por uma lista de procedimentos “decorados mentalmente” não diz nada ao aluno.

Nessa direção, as autoras recomendam que o trabalho com atividades, explorando a representação pictórica da *equivalência de frações,* poderia ser um auxiliar na aprendizagem dessas idéias. Por exemplo, nessa linha de pensamento, os chocolates “A” e “B” são iguais em forma e tamanho: “A” foi dividido em 8 partes e consumido quatro pedaços, que seriam os pedaços comidos por Mário; Já o “B” foi dividido em quatro partes, e tomado dois pedaços, neste caso, comidos por Luciana.

Observando a **Figura 34**, podemos perceber que os pedaços são equivalentes. O que Mário comeu é exatamente igual, em quantidade, ao que Luciana comeu.

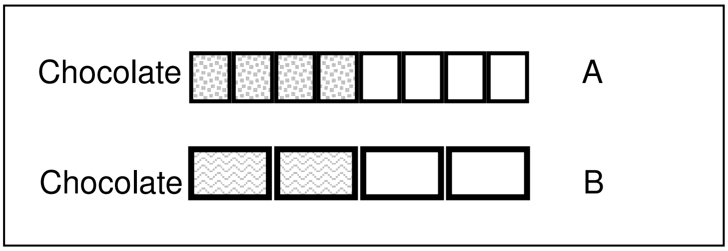


Figura 34 – Representação isomórfica dos chocolates na resolução do problema (9).

10) Simone foi ao restaurante com três colegas e pediu uma pizza para quatro pessoas. O garçom dividiu a pizza em 4 partes. Nesse momento chegaram mais quatro colegas e o garçom não teve dúvida em dividir cada parte ao meio. Que fração da pizza cada um dos colegas comeu? (A)1/8 (B) 1/4 (C) 4/4 (D) 8/8

Este problema contempla o significado de fração como *quociente* não apresentando o suporte de figuras geométricas. A questão poderia mobilizar, também, a idéia de *fração de fração*, na medida em que poderia ser interpretada como "a metade de 1/4". Dessa forma, se dividirmos a pizza em quatro partes, a metade de cada parte corresponderá à oitava parte.

De acordo com o gráfico da **Figura 35**, podemos observar que nenhum aluno deixou de responder a questão. Por outro lado, encontramos os maiores percentuais de erros entre os sujeitos do Ensino Médio. Ao mesmo tempo, podemos verificar que os sujeitos de 5ª série foram aqueles que obtiveram o maior índice de acertos, contrariando a tendência que se mostrava até então, ou seja, o de grupo de alunos com o rendimento mais baixo em todas as questões anteriores. Embora o nosso instrumento não permita buscar a origem desse efeito, podemos pensar na importância do contexto como elemento que auxilia ao aluno da construção de significado a uma tarefa.

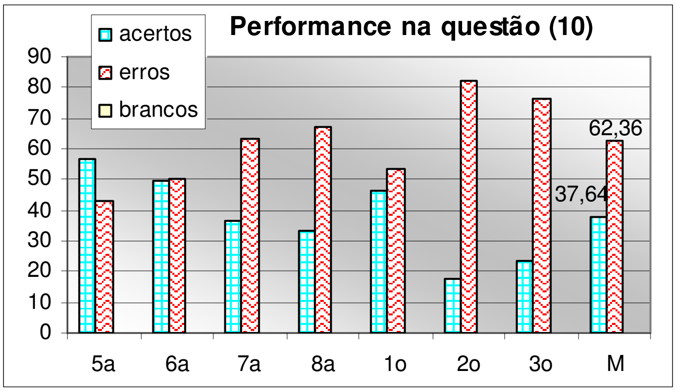


Figura 35 – Gráfico percentual de desempenho na questão (10).

Em outras palavras, enquanto os alunos de 5ª série parece se reportar às situações de seu cotidiano, como repartir uma pizza, alunos com maior escolaridade poderiam apresentar uma tendência a buscar o apoio de processos e algoritmos aprendidos na escola, e, muitas vezes, sem significado para ele.

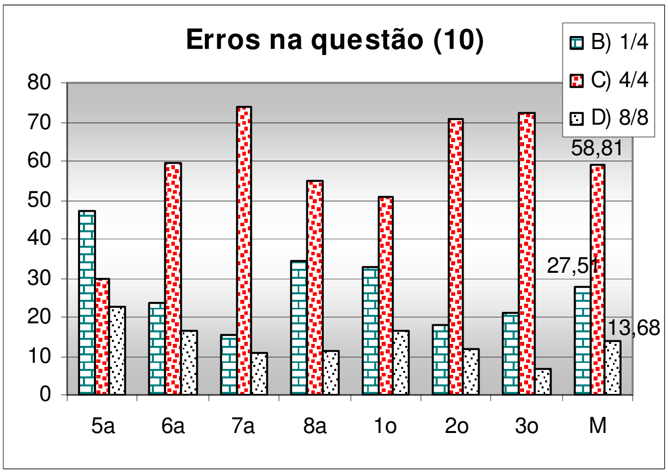


Figura 36 – Gráfico percentual de erros na questão (10).

A predominância de certo tipo de erro na 5ª série (1/4), parece reforçar nossa hipótese, particularmente se pensarmos que esses sujeitos estariam se apoiando no modelo *parte-todo*. Ou seja, para esses sujeitos, o fato de identificar a situação como a determinação da fração 1/4 seria suficiente para fornecer a resposta, não importando a outra etapa descrita no enunciado da questão (ver **Figura 36**).

A maior ocorrência de erros ficou com a opção do item (4/4). Em três das séries investigadas (7ª série do Ensino Fundamental e 2º e 3º anos do Ensino Médio), esse tipo de erro correspondeu a mais de 70% do total.

Em um estudo mais aprofundado e com um dispositivo metodológico diferente, poderíamos buscar identificar se, por exemplo, estaria acontecendo com esses sujeitos, um amálgama entre as idéias de *fração* como *quociente* e como *parte-todo*.

5. ANÁLISE TRANSVERSAL

Na análise transversal das questões do instrumento, selecionamos algumas variáveis que fizeram parte de nossos objetivos: quantidades envolvidas; sub-construtos do conceito de fração; e tipo de suporte de representação.

Em relação aos *tipos de quantidades*, buscamos identificar como os sujeitos se comportam em situações em que se trata de *quantidades contínuas* e naquelas que contemplam *quantidades discretas*. Nessa análise, queremos identificar se a diferenciação da quantidade envolvida afeta o rendimento dos sujeitos.

Uma outra questão a ser identificada tem suas origens em nossa experiência de sala de aula e diz respeito ao *sub-construto* envolvido no item. De fato, podemos verificar que o modelo *parte-todo* é priorizado de forma significativa na escola, particularmente no trabalho inicial com as frações. Para tanto, nesse momento da análise, vamos fazer a comparação entre o rendimento dos sujeitos em face de diferentes sub-construtos, tais como o próprio modelo *parte-todo*, a idéia de fração como um *operador* e como *quociente.*

Finalmente, buscamos identificar a influência do tipo de *registro de representação* das questões envolvido na atividade. Essa escolha se justifica pelos diversos estudos, envolvendo outros conceitos da matemática escolar em que o rendimento dos alunos se modifica sensivelmente entre situações que apresentam figuras e aquelas em que os dados se encontram no enunciado (*linguagem natural*).

5.1 Quantidades contínuas e quantidades discretas.

Nosso instrumento contemplou sete itens envolvendo *quantidades contínuas* e três envolvendo *quantidades discretas*. A **Figura 37** apresenta o gráfico comparativo de desempenho dos sujeitos.

Os dados mostram que o rendimento dos alunos do 3º Ciclo do Ensino Fundamental (5ª e 6ª séries) é superior nas questões envolvendo *quantidades contínuas* em relação àquelas envolvendo *quantidades discretas*.

Em relação a *quantidades discretas*, pudemos identificar que somente 10% dos sujeitos de 5ª série conseguem resolver, simultaneamente, as três questões envolvendo esse tipo de quantidade. A partir da 7ª série, observa-se certa estabilidade em termos de rendimento dos sujeitos para questões envolvendo as duas quantidades.

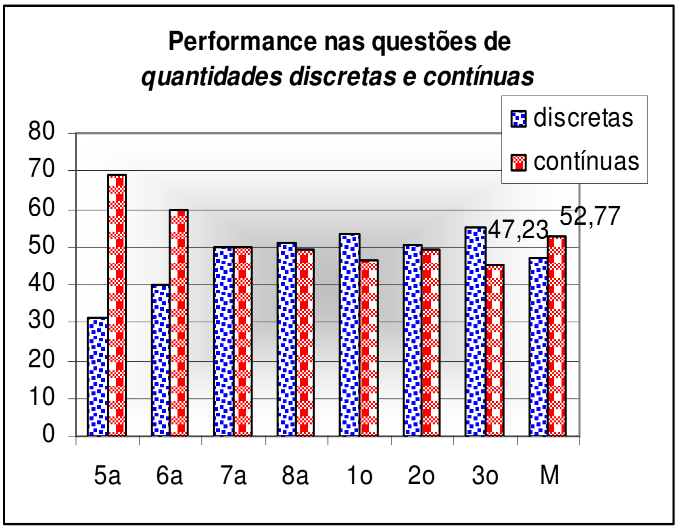


Figura 37 – Gráfico percentual de desempenho nas questões de quantidades discretas e contínuas. M continua representando a média dos resultados.

Esses resultados nos provocam a levantar algumas hipóteses explicativas. Em primeiro lugar, no 3º Ciclo, e particularmente na 5ª série, os alunos ainda apresentariam uma concepção de fração como uma "figura dividida e com algumas partes pintadas" que é o tipo de trabalho fortemente realizado em sala de aula. Ou seja, a ênfase nessa etapa de escolaridade recai no modelo *parte-todo* com maior presença de questões de *quantidades contínuas* –, tornando as questões de *quantidades discretas* pouco comuns na *introdução das frações*.

Acrescente-se ainda, que os alunos desse Ciclo também chegam das séries iniciais com o pensamento essencialmente aritmético, ou seja, para eles, tudo se resume a fazer operações. Por isso, a pregnância dos erros tipo "operar com os termos da fração", fato que constatamos na Análise Longitudinal e já percebida nos trabalhos de Tinoco e Lopes (1994). Esses resultados, também observados por Kerslake (1986), parecem reforçar a idéia defendida por Silva (1997), na qual *os números inteiros tornam-se um obstáculo para a construção do número fracionário.*

Seria pertinente investigar em outro trabalho, o rendimento dos sujeitos do 3º Ciclo no primeiro item (da primeira questão) de nosso instrumento, no caso em que as bolinhas estivessem arrumadas em uma disposição retangular (3x5, por exemplo), se os alunos fariam uma espécie de identificação visual, considerando como relevante não o número de bolinhas, mas um "pedaço" da figura formada por elas.

As questões (1), (4) e (7), envolveram *quantidades discretas.* O menor aproveitamento nesta categoria ficou com a 5ª série; apenas um a cada dez alunos, conseguiu resolver corretamente as três questões simultaneamente. Os alunos do Ensino Fundamental atingiram 30% de aproveitamento contra 42% dentre os alunos do Ensino Médio.

As questões restantes que envolveram *quantidades contínuas* registraram apenas 25% de acertos na 5ª série, mas 37% em média geral.

O desempenho dos alunos nas questões de *quantidades contínuas* se apresentou bem melhor no Ensino Fundamental (**Figura 37**, acima), principalmente nas duas séries iniciais.

Por outro lado, o rendimento nas questões de *quantidades discretas* comportou-se de forma crescente com a escolaridade no Ensino Fundamental, apenas com 30% de bom desempenho na 5ª série, comportando-se de forma estável, mas com desempenho acima dos 50% no Ensino Médio. Pudemos ainda observar que, ao contrário da 5ª série, o 3º ano atingiu o melhor desempenho (55%) nas questões que envolviam estas *quantidades*.

Resumindo, podemos perceber que os alunos com menor escolaridade demonstram melhor desempenho em questões de *quantidades contínuas*, enquanto só a partir da 7ª série começam a evoluir com as questões de *quantidades discretas.*

5.2 Suporte de representação.

Em relação ao tipo de suporte de representação, buscamos identificar como os sujeitos se comportam quando confrontados a questões em que os dados se apresentam no enunciado (*linguagem natural*) ou com figuras (registro pictórico). Os resultados estão apresentados na **Figura 38**, adiante.

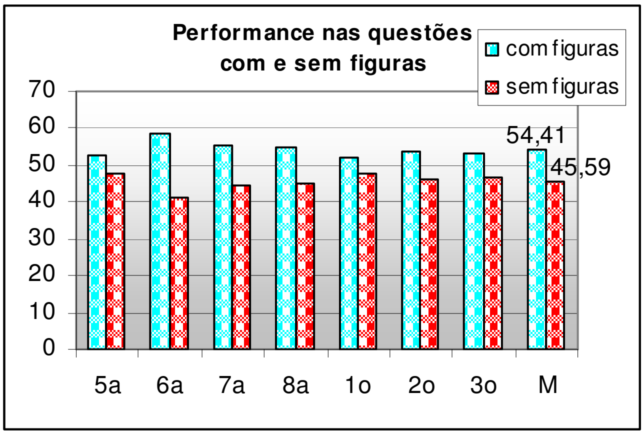


Figura 38 – Gráfico percentual de desempenho nas questões com e sem figuras.

Em todas as séries encontramos melhor rendimento em questões que apresentam figuras como suporte para a apresentação dos dados. Em média, percebemos que o rendimento é de aproximadamente 9 pontos percentuais superior, nesses casos. Essa tendência aparece de forma mais acentuada no Ensino Fundamental, particularmente na 6ª, 7ª e 8ª séries.

5.3 Quanto aos sub-construtos.

Em relação aos sub-construtos envolvidos na idéia de fração, nosso instrumento contemplou três deles: *operador, parte-todo e quociente.* Dentre eles, o sub-construto *parte-todo* se mostra o mais utilizado em nossas salas de aula. Isso nos levou a buscar identificar como o rendimento dos alunos se altera em função do sub-construto trabalhado. Os resultados são mostrados no gráfico da **Figura 39**.

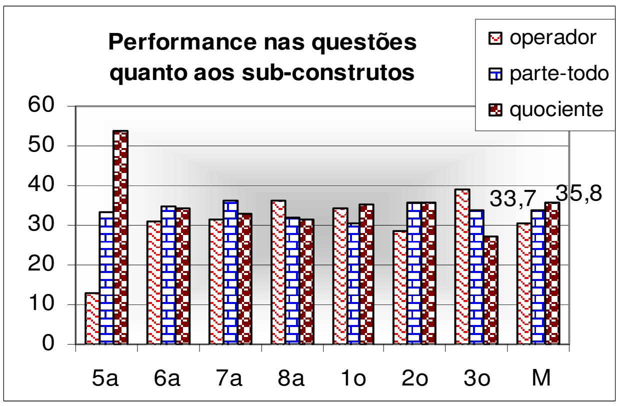


Figura 39 – Gráfico percentual de desempenho relativo aos sub-construtos.

Os resultados mostram que, excetuando-se a 5ª série, o rendimento dos sujeitos não apresentou diferenças significativas em função do sub-construto envolvido. Apesar do modelo *parte-todo* ser aquele predominantemente explorado no 3º Ciclo, o desempenho dos alunos, nesse modelo, praticamente não se altera com o decorrer da escolaridade.

O número de acertos em questões envolvendo a idéia de número racional como *operador,* também permaneceu inalterado com o avanço da escolaridade. De fato, a 5ª série, que vinha se comportando de forma bastante diferenciada, permaneceu desta forma.

É nessa mesma 5ª série que encontramos o melhor rendimento dos sujeitos em relação ao sub-construto *quociente*, cujos índices de sucesso se mantiveram praticamente constantes nas outras séries. Apesar da característica de nosso estudo não permitir avançar em maiores explicações para esse fenômeno, nossa experiência de sala de aula nos leva a questionar em que medida o trabalho essencialmente aritmético realizado nas séries iniciais não estaria levando os alunos de 5ª série a esses resultados. Essa hipótese é reforçada quando observamos os erros desses alunos em outros itens do instrumento, quando se pode perceber a busca, por grande parte dos sujeitos, de operar com os termos da fração.

5.4 A *concepção de fração* e de *equivalência de frações* em função da escolaridade.

O gráfico a seguir, comporta duas curvas que projetam percentuais de rendimento, uma "azul", representando o desempenho geral em todas as questões do instrumento que envolva a idéia de *fração*; a outra, de cor "vermelha", representando o desempenho dos alunos nas questões que mobilizaram *equivalência das frações.*

Percebemos através da "curva azul" que, a partir da 6ª até a 8ª série existe uma forte concentração de desempenho por parte dos alunos, voltando, apenas, e com maior evolução, só a partir do 2º ano do Ensino Médio. A hipótese para estes fatos está possivelmente baseada nos trabalhos de *Razões e Proporções* ocorridos na 6ª série e reforçados pelos exercícios de *Física e Química,* nos quais, as ferramentas de frações estão bastantes presentes no final do Ensino Médio.

Pela “curva vermelha”, podemos perceber que a *equivalência de frações* evolui no aluno, de forma crescente, até a 7ª série, decrescendo até o 1º ano se concretizando e com melhor desempenho (de forma crescente) no Ensino Médio.

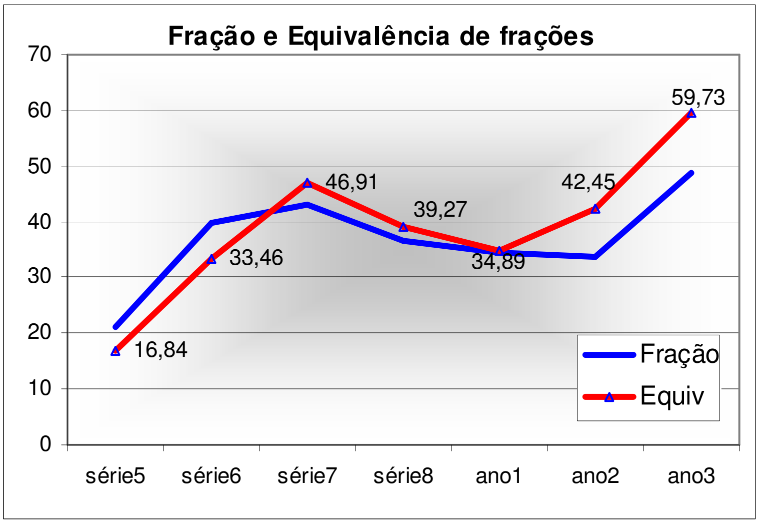


Figura 40 – Gráfico percentual de desempenho dos alunos com as *frações* em geral e *equivalência das frações* em função da escolaridade.

Os resultados nos instigam, mesmo que não tenha sido objeto de nossa investigação, a questionar as causas dessa variação de rendimento dos alunos em relação às idéias de *frações* e *equivalência de frações*.

É neste sentido que pudemos observar no aluno a necessidade de tempo para assimilar o conceito de *frações*, e consequentemente, de *equivalência de frações*.

Nesta direção, pode-se concordar com Ciscar e García (1988), pois, segundo eles, apesar dos vários caminhos para alcançar o *conceito de fração,* todas conservam um processo de aprendizagem em longo prazo. A diversidade de estruturas cognitivas e as diferentes interpretações das *frações* condicionam tais processos. Em outras palavras, o conceito global de fração não se consegue totalmente de uma só vez. A identificação e a caracterização dos contextos que tornam significativas as noções de *fração* estão ligadas a um megaconceito.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo do trabalho foi verificar a concepção de *fração* que o aluno tem de acordo com sua escolaridade. Especificamente, verificou-se em que medida a concepção de *fração* e *equivalência de frações* se modifica com a escolaridade do aluno. Além disso, a constatação de possíveis diferenças entre as concepções de *fração* de *quantidades contínuas* e de *quantidades discretas* e identificar o comportamento dos alunos quando da mudança dos sub-construtos (*quociente, parte-todo e operador*), verificando a influência de figuras na composição das questões no percentual de acertos dos alunos.

Para tanto, aplicamos um instrumento composto de 10 questões, envolvendo as idéias referidas acima, em um conjunto de 630 alunos das séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio em duas escolas públicas: uma da região metropolitana, e outra no centro do Recife, das Redes Estadual e Municipal, respectivamente.

Os resultados mostraram que, para grande parte dos alunos do Ensino Fundamental (52%), o conceito de fração como *operador* de uma *quantidade discreta,* estaria fortemente associado ao denominador da fração. Por exemplo, para alunos desse nível de escolaridade, ***um terço de m elementos corresponderia a 3 elementos***, independentemente dos elementos do conjunto. Já em relação aos alunos do Ensino Médio, observamos a tendência a identificar essa idéia a uma operação entre os membros da fração operadora. Dessa forma, para os alunos desse nível de escolaridade, ***um terço de m elementos corresponderia a quatro elementos***, resultado da adição dos termos da fração (1+3), essa concepção esteve presente, em média, em 49% dos sujeitos envolvidos em nosso trabalho.

Em relação ao complemento de uma fração a idéia permanece a mesma, ou seja, os sujeitos apresentam certa disposição em operar entre os seus termos. É interessante observar que, para os sujeitos do Ensino Fundamental, aparece como predominante a idéia de somar os termos da fração, enquanto no Ensino Médio os sujeitos tendem, prioritariamente, a multiplicar esses termos.

Com 93% dos erros na 6ª série e 75% na média de todas as turmas, verificou-se que, ***se a fração de um total T é uma quantidade m, logo, esse total é igual ao***

produto entre o denominador da fração e a parte correspondente **m** (se 1/3 de uma quantidade é 20, por exemplo, o total é correspondente ao produto 3x20)*;* e com 32% dos erros na 5ª série, a 15% em média de todas as turmas deixou a idéia de que, ***se a fração de um total T é uma quantidade m, logo, esse total é igual ao denominador dessa fração*** (assim, por exemplo, se 1/3 de uma quantidade é 20, o total corresponde ao denominador 3)*.*

Observamos como os alunos mobilizam a idéia de *equivalência de frações* em situações de *comparação* entre elas. Encontramos em um a cada três de nossos sujeitos, duas concepções principais.

A primeira consiste em identificar que, ***entre duas frações, quanto maiores os seus termos correspondentes, maior será a fração***. Na segunda concepção, os sujeitos estabelecem que, ***quanto maior o denominador, menor será a fração, em qualquer circunstância****.* Já em relação aos alunos de 5ª série, dois entre cada três sujeitos que erraram esse tipo de item, ***a equivalência de frações está estritamente associada à igualdade entre seus termos correspondentes***.

Em uma situação de reconhecimento de uma fração representada por uma figura, um número importante de sujeitos não estabelece que a igualdade das partes seja fundamental para a existência de uma fração. Os erros surgidos nesse tipo de questão alcançam índices que variam de 51% a 64%. Os dados mostram que para muitos alunos, o fato de se apresentar uma figura dividida em partes, com algumas delas pintadas, garantiria a existência de uma fração, não sendo consideradas as relações entre as partes. Em cada três alunos, quase dois apresentaram a idéia de que ***para determinar a fração correspondente numa figura de partes pintadas, não importa se as partes que foram divididas sejam iguais****.* Basta que a relação seja feita: ***parte pintada (acima do traço), sobre o total de partes que foi dividida a figura (abaixo do traço).***

Esta é uma das invariantes destacada por Lima (1982) e Nunes e Bryant (1997) na organização das ações do sujeito para a compreensão do conceito de *fração*: *o todo precisa ser dividido em partes iguais, para que cada parte seja considerada uma fração.*

Três concepções puderam ser percebidas envolvendo a relação *parte-todo*. Na primeira, com 73% dos erros no 3º ano, 50% na 8ª série e 34% na 5ª série, ***a fração***

de uma figura dividida em partes iguais é igual à figura representada que corresponde ao seu complemento (por exemplo, pintar 2/3 de 3 elementos corresponderia a pintar apenas 1 elemento).

Na segunda concepção, que contribuiu com 55% dos erros na 5ª série e 35% dos erros no 2º ano, ***dois terços de uma figura dividida em três partes iguais seria igual a duas partes mais meia parte***. Ou seja, nos parece que os sujeitos tenderiam a buscar uma espécie de relação entre os dois termos da fração sem levar em consideração *o todo* apresentado.

Finalmente, na terceira concepção, que contribuiu com 90% dos erros na 6ª série e com 59% dos erros na 5ª série, os sujeitos identificam que ***dois terços de uma figura dividida em três partes iguais é igual às três partes*** (contagem única do denominador).

Vale ressaltar que as três concepções apresentadas acima aparecem quando o número de partes em que o todo foi dividido coincide com o denominador da fração apresentada. Quando isso não acontece, como, por exemplo, em uma situação em que o aluno deve representar 2/3 em uma figura formada por 9 quadradinhos, observa-se que 84% de todos os erros correspondentes a pintar apenas *duas unidades*.

Maia, Câmara, M. e Câmara, P. (1991) afirmam que esse tipo de erro estaria associado à forma como é conduzido o ensino de fração nas escolas, que provém do modelo *parte–todo* tradicional, reforçando o entendimento de fração como conjugação de duas ações de dois números. Em seus estudos com alunos de 5ª série do Ensino Fundamental e de 2º ano do Ensino Médio, em Pernambuco, diagnosticaram que a concepção de fração como conjugação de duas ações, “dividir e pintar”, tem como referencial o modelo *parte-todo,* comumente apresentado no momento de iniciar o trabalho escolar com as frações.

Em Nunes e Bryant (1997), encontramos que o limite do meio desempenha um papel importante na quantificação de relações *parte-todo*, assim como em relações *parte-parte.* Em nosso estudo, encontramos que ***a concepção de metade em figuras pintadas está condicionada à contigüidade dessas partes* e *a não importância da eqüidade entre as partes pintadas e não-pintadas***. Em outras palavras, para os sujeitos de nosso trabalho, a condição para que uma figura represente “um meio” é que exista uma parte pintada contígua a uma parte não pintada, não importando a quantidade total de partes em que a figura foi dividida nem o número de partes consideradas.

Em situações em que os sujeitos deveriam identificar a fração correspondente às partes pintadas de uma figura, encontramos três concepções errôneas predominantes:

- [*parte-parte*] com 58% dos erros na 5ª série e 46% em média geral. **A *fração correspondente a uma figura dividida em partes iguais com partes pintadas, é determinada pela relação (parte pintada)/(parte não-pintada)*.** Por exemplo, uma figura dividida em cinco partes iguais com duas delas pintadas corresponderia à fração 2/3*;*
- [*unidade fracionária pintada*] com 30% dos erros no 3º ano e 12% na média geral. ***A fração correspondente de uma figura dividida em partes iguais com partes pintadas é determinada pela relação inversa do número dessas partes pintadas*.** Por exemplo, se uma figura foi dividida em oito partes e pintadas duas, a fração correspondente seria de 1/2, se fossem pintadas três, a fração seria 1/3, e assim por diante;
- [*fração inversa*] com 31% dos erros na 7ª série e 16% na média geral. ***A fração correspondente a uma figura dividida em partes iguais com partes pintadas, é determinada pela relação total de partes em que foi dividida a figura e o número de partes pintadas*.** Por exemplo, em uma figura dividida em cinco partes iguais com três delas pintadas, os alunos identificam como uma fração 5/3.

Em relação ao sub-construto *quociente*, encontramos o maior índice de acertos entre os alunos de 5ª série, decaindo em função do avanço na escolaridade dos sujeitos. Embora esta pesquisa não permita esclarecer as causas desse fenômeno, o fato do item relacionado a esse sub-construto apresentar contexto fortemente associado ao cotidiano dos alunos, poderia estar relacionado à performance dos sujeitos de menor escolaridade. Notamos que os erros apresentados concentram-se na identificação de frações que tenham os números apresentados no enunciado como termos da fração resultante. Por exemplo, em uma pizza dividida em quatro pedaços que deve ser servida a oito pessoas, os sujeitos tendem a identificar que cada uma das pessoas receberia “um quarto” ou “quatro quartos” da pizza. Questionamos a provável pregnância do modelo *parte-todo*, novamente, nas concepções dos alunos.

É notável, que o modelo *parte-todo* aparece como aquele priorizado pela escola no trabalho com frações. De fato, através de nossa experiência em sala de aula, verificamos que diferentes outros sub-construtos são pouco explorados nas atividades de ensino, tais como *operadores, quocientes, razões*, etc. No caso da idéia de *quociente*, pode-se perceber a insuficiência do modelo *parte-todo* para identificar frações.

Podemos afirmar da importância do modelo *quociente* para explicar frações do tipo 5/3, 8/7 ou 3/2, que não poderiam ser bem compreendidas pelo modelo *parte–todo* e uma criança dificilmente aceitaria a *parte* ser maior que o *todo* – em 5/3 (cinco terços), “5” é parte do *todo* “3”, por exemplo.

Retomamos as idéias de Vergnaud (1988), segundo o qual as competências e concepções desenvolvem-se ao longo do tempo, por meio de experiências envolvendo um grande número de situações tanto no interior da escola quanto fora dela. Assim, o conhecimento dos estudantes tanto pode ser explícito, no sentido de que eles podem expressá-lo de forma simbólica, quanto implícito, no sentido de usá-lo em ação, escolhendo operações adequadas sem expressar as razões dessa adequação.

Contudo, é importante lembrar que nosso trabalho se caracterizou como um estudo essencialmente diagnóstico, em que buscamos identificar como certas concepções se manifestam em relação ao avanço da escolaridade dos alunos. Consideramos que um estudo dessa natureza não pode se esgotar em si mesmo; enquanto professores em exercício, temos a convicção da necessidade de utilizar esse e outros estudos em situações de ensino que promovam efetivas aprendizagens por parte dos alunos. Esse é nosso próximo desafio!

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALENCAR, C. M. A. M. **Análise didática de erros que os alunos cometem em atividades com frações nas 4as séries nas Escolas Municipais do Município da Ilha de Itamaracá.** 2004. 87f. Monografia (Especialização em Avaliação Educacional em Matemática) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2004.

AGUIAR, M. C. **A formação de conceitos de frações e de proporcionalidade e as operações concretas e formais.** 1980. 74f. Dissertação (Mestrado em Psicologia) – Centro de Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1980.

BEHR, M. *et al*. Order an equivalence of national numbers: a clinical teaching experiment. **Journal for Research in Mathematics Education***,* v.15, n. 5, p.323-341, 1984.

BERTONI, N. E. Um novo paradigma no ensino e aprendizagem das frações. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais...** Recife: Soc. Brasil. Educ. Matemática, 2004. 1 CD-ROM.

BEZERRA, F. J. B. Construindo a representação da fração: abordagem tradicional versus abordagem conceitual. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais...** Recife: Soc. Brasil. Educ. Matemática, 2004. 1 CD-ROM.

BIGODE, A. J. L. **Matemática hoje é feita assim**. 4v., v.1. São Paulo: FTD, 2000. 303p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5ª a 8ª série).** Brasília: MEC/SEF, 2001. 142p.

BRYANT, P. E. **Perception and understanding in young children**. London: Metheuen & Co Ltd., 1974.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: EDGARD BLÜCHER Ltda,1974. 512p.

CAMPOS, T. *et al*. **Lógicas das equivalências***.* PUC, São Paulo: Relatório de pesquisa não publicado, 1995.

CARAÇA, B. **Conceitos Fundamentais da Matemática***.* Lisboa: Sá da Costa Editora, 1984. 318p.

CARRAHER, D. Lines of thought: a ratio and operator model of rational number. **Educational Studies in Mathematisc***,* Kwwer Eds., Holanda, v.25, 1993, p.281-305.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné,** Editions La Pensée sauvage, Grenoble: France, 1985. p.36-78.

CISCAR, S. L.; GARCÍA, M. V. Sánchez. **Fracciones**. Madri-Espanha: Sintesis, 1988. p.23-89.

CRUZ, M. S. S. **Resolvendo adição de frações através de estimativas: um estudo exploratório**. 2003. 145f. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) – Centro de Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2003.

DAUGUSTINE, C. H. **Métodos modernos de ensino da matemática**. Rio de janeiro: Livro Técnico. 1976. p.15-98.

DAVYDOV, V. V.; TSVETKOVICH, Z. H. The object sources of the concept of fractions. In: Davydov, V. V. (Soviet Edition Editor) & Steffe, L. P. (English Language Editor), **Soviet studies in mathematics education: Psychological Abilities of Primary school Children in Learning Mathematics**. Virginia: Reston, National Council of Teachers of Mathematics, 1991. p.86-162.

FRANCHI, A. **Educação matemática: uma introdução.** São Paulo: EDUC, 1999, p. 155-195.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B.; GIOVANNI Jr., J. R. **A Conquista da Matemática – Nova**, 4v. v.1. São Paulo: FTD, 2002. 271p.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS. **SAEB 2001**: Novas Perspectivas. Brasília, 2001. 166p.

KANT, I. **Critique of pure reason**. Buffalo: Prometheus, 1781/1990. p.70-79.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. In: R. Lesh (Eds.), **Number and meansurement.** Columbus, OH: ERIC/SMEAC, 1976. p. 101-144.

KIEREN, T. E. Conhecimento pessoal de números racionais: Seu desenvolvimento intuitivo e formal. In: J. Hiebert; M. Behr (Eds.), **Números e conceitos e em operações do número nas classes dos middles**. New York: Lawrence Erlbaum Associates. 1988. p.162-181.

KERSLAKE, D. **Frações: Estratégias e erros das crianças: Um relatório das estratégias e dos erros no projeto secundário da matemática.** Windsor, Berkshire, Inglaterra: NFER-Nelson, 1986. p.26-119.

LIMA, J. M. F. **Iniciação ao conceito de fração e desenvolvimento da conservação de quantidade.** 1981. 144f. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) – Centro Filosofia e Ciências.; Humanas, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1981.

LIMA, M. Iniciação ao conceito de fração e desenvolvimento da conservação de quantidade. In: T. N. CARRAHER (org.): **Aprender pensando**, Petrópolis: Vozes, 1982, p.81-127.

LIMA, V. S.; BRITO, M. R. Mapeamento cognitivo e a formação do conceito de frações. In: M.R. Brito (Org.), **Psicologia da educação matemática: teoria e pesquisa.** Florianópolis: Insular, 2001, p.107-127.

LINS, I. C. O. **Efeitos de uma seqüência didática sobre os conceitos de fração e equivalência de frações.** 2004. 89f. Monografia (Especialização em Avaliação Educacional em Matemática) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2004.

MAGALHÃES, J. E. R. **Efeitos de uma seqüência didática na compreensão do conceito do número fracionário.** 2004. 122f. Monografia (Especialização em Avaliação Educacional em Matemática) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2004.

MAIA, L. A. Teoria dos campos conceituais: Um novo olhar para a formação do professor. **Boletim Gepem,** Campinas**,** n. 36, 2000.

MAIA, L.; CÂMARA, M.; CÂMARA, P. Repensando a aprendizagem de frações: uma experiência pedagógica. **Tópicos Educacionais**, UFPE, Recife, v. 9, n.1/2, p.75-82, 1991.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **O ensino da matemática no primeiro grau.** São Paulo: Atual,1986. p.35-102.

MIX, K. S.; LEVINE, S. C.; HUTTENLOCHER, J. Early fraction calculation ability. **Developmental Psicology**, v.35, n. 5, p.164-174, 1999.

NUNES, T. **O ensino e a aprendizagem das frações**. Palestra realizada no Centro de Educação – Universidade Federal de Pernambuco –Recife, 04 dez. 2003.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997. 244p.

NUNES, T. *et al.* **Introdução à educação matemática: os números e as operações numéricas**. São Paulo: PROEM, 1991, p.66-167.

PERNAMBUCO. Governo do Estado de. Secretaria de Educação. Diretoria de Política e Programas Educacionais. **Matrizes Curriculares de Referência para o Estado de Pernambuco**. Recife: Secretaria de Educação / Diretoria de Política e Programas Educacionais, v.1, 2003.

PIAGET, J.; INHELDER, B.; SZEMINSKA, A. **The Child's Conception of Geometry**. London: Routledge and Kegen Paul, 1960, p.40-127.

PIAGET, J; SZEMINSKA, A. **A gênese do número na criança**. 2. ed., Rio de Janeiro: Zahar, 1975. 332p.

PITKETHLY, A.; HUNTING, R. A review of resent research in the area of initial fraction concepts. **Educational Studies in Mathematics Education**, v.14, n. 5, p. 307-317, 1996.

POTHIER, Y.; SAWADA, D. Partitioning: the emergence of rational number ideas in your children. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 14, n. 5, p. 307-317, 1983.

SILVA, M. J. F**. Sobre a introdução do conceito de número fracionário.** 2004. 167f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Centro de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

SINGER-FREEMEN, K. E.; GOSWAMI, U. Does half a pizza equal half a box of chocolates? Proportional matching. An analogy task. **Cognitive development**, n.16, p.811-829, 2001.

SPINILLO, A. G. A importância do referencial de "metade" e desenvolvimento do conceito de proporção. **Psicologia: teoria e pesquisa**, v.8, n. 3, p.305-317, 1992.

SPINILLO, A. G. **Conceito de chance em criança: noções iniciais e possibilidades de ensino.** In: SEMANA DE ESTUDOS EM PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2. 1997. Recife 2-5 jun. **Anais...** Recife: Mestrado em Psicologia, GEOP, UFPE, CAPES/PADCT/SPEC, p.67-134, 1997a.

SPINILLO, A. G. Proporções nas séries iniciais do primeiro grau. In: SCHILIEMANN, A. D.; D. W. CARRAHER, D. W.; SPINILLO, A. G.; MEIRA, L. L.; J. T. DA R. FALCÃO, J. T. R.; ACIOLY-RÉGNIER, N., **Estudos em psicologia da educação matemática** (2. ed.). Recife: Editora da UFPE, p. 40-61, 1997b.

SPINILLO, A. G. e BRYANT, P. E. Children's proportional judgment: the importance of half, **Child Development**. v. 62, p.427-440, 1991.

SPINILLO, A. G.; BRYANT, P. E. Proportional reasoning in your children: part-part comparisons about continuous and discontinuous quantity. **Mathematical Cognition.** v.5, n. 2, p.181-197, 1999.

STREEFLAND, L. **Fractions and realistic mathematics education: a paradigm of developmental research**. Dordrecht: Kluwer Academic Plublishers, 1991, p.34-113.

TINOCO, L. A. A.; LOPES, M. L. M. Frações: dos resultados de pesquisa à prática em sala de aula. In: **Educação Matemática em Revista** – SBEM, v. 1º Sem, n. 2, p. 13-18, 1994.

VERGNAUD, G. Uma classificação de tarefas cognitivas e das operações do pensamento envolvidas além e dos problemas da subtração. In: CARPENTER, T., ROMBERG T.; MOSER, J. (Eds.), **Adição e subtração: uma aproximação cognitive**. Hillsdale, NJ: Erlbaum. 1982, p.31-41.

VERGNAUD, G. Multiplicative structure. In: Lesh, R.; Landau, M. (eds.). **Acquisition of mathematics concepts and process.** New York: Academic Press, 1983, p.127-174.

VERGNAUD, G. Theorical frameworks and empirical facts in the psychology of mathematics education. **Proceedings of the International Congress on Mathematical Education** , Budapest, p. 39-41, 1988.

VERGNAUD, G. La théorie de champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, La Pensée Sauvage, v. 10, n. 2-3, p.133-170, 1991.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO, 1., 1995, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: Projeto Fundão, 1995. 321p. p.223.

ZARZAR, C. M. B. **A aquisição do conceito de fração: da partição às estruturas multiplicativas**. 1998. 130f. Dissertação (Mestrado em Psicologia) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1998.

8. ANEXOS