

FELIPE RICARDO SANTOS DE GUSMÃO

**UMA ABORDAGEM BAYESIANA PARA DISTRIBUIÇÃO
WEIBULL INVERSA GENERALIZADA**

RECIFE-PE - DEZ/2008



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA

UMA ABORDAGEM BAYESIANA PARA DISTRIBUIÇÃO WEIBULL INVERSA GENERALIZADA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada como exigência parcial à obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Modelagem Estatística e Computacional

Orientador: Prof. Dr. Eufrázio de Souza Santos

Co-orientador: Prof. Dr. Gauss M. Cordeiro

RECIFE-PE - DEZ/2008.

FICHA CATALOGRÁFICA

G982a Gusmão, Felipe Ricardo Santos de
 Uma abordagem Bayesiana para distribuição Weibull
 inversa generalizada / Felipe Ricardo Santos de Gusmão.
 -- 2008.
 56 f. : il.

 Orientador : Eufrázio de Souza Santos
 Dissertação (Mestrado em Biometria e Estatística Aplica -
 da) - Universidade Federal Rural de Pernambuco. Departa -
 mento de Estatística e Informática.
 Inclui apêndice e bibliografia.

CDD 574. 018 2

1. Weibull
 2. Verossimilhança
 3. Bayesiana
 4. Inferência
 5. Estimação
 6. Sobrevivência
- I. Santos, Eufrázio de Souza
 - II. Título

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA

UMA ABORDAGEM BAYESIANA PARA DISTRIBUIÇÃO WEIBULL INVERSA
GENERALIZADA

Felipe Ricardo Santos de Gusmão

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de mestre em Biometria e Estatística Aplicada, defendida e aprovada por unanimidade em 19/12/2008 pela Comissão Examinadora.

Orientador:

Prof. Dr. Eufrázio de Souza Santos
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Borko D. Stosic
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Dr. Marinho Gomes de Andrade Filho
Universidade de São Paulo

Prof^a. Dr^a. Roseli Aparecida Leandro
Universidade de São Paulo

Dedico, a todos que de alguma forma tornaram a realização deste trabalho possível.

Agradecimentos

Agradeço a todos que de forma direta ou indireta, por ter me concedido a graça de nascer do amor dos meus pais e ao longo de minha vida ter permitido chegar até aqui.

À minha mãe Sônia Gusmão, minha esposa Cristina e ao meu filho Vítor que são a razão da minha vida e luta.

Ao meu Orientador Eufrázio de Souza Santos pela sua paciência e ajuda no decorrer do meu período como mestrando e como aluno de iniciação científica.

Ao Prof. Gauss Moutinho Cordeiro pela sugestão dada a mim sobre este trabalho.

Ao Prof. Edwin M. M. Ortega pelo seu apoio, ajuda, pela orientação e dedicação dados a mim.

A Prof^a Roseli Aparecida Leandro por ter nos guiado no caminho do mundo bayesiano.

Ao Prof. Borko Stosíc por sua constante transmissão de conhecimentos.

Ao Secretário Marco Antônio dos Santos pela sua amizade e ajuda durante todo o decorrer deste período.

Ao meu amigo Erinaldo Leite de Siqueira Júnior por seu apoio durante todo o decorrer da nossa vida como mestrandos.

Ao meu amigo Kleber por seu apoio durante os últimos momentos de elaboração deste trabalho.

Ao meu amigo Ricardo por seu apoio e amizade durante todos estes anos.

A minha amiga Edleide Brito que enfrentou comigo a jornada em São Paulo.

A doutora Juliana Cespedes por seu apoio quando tive dificuldades em minha estadia em São Paulo.

A todos meus amigos do mestrados pela interação produtiva e harmoniosa durante nosso convívio.

Aos professores e funcionários do Departamento de Estatística e Informática pela convivência agradável durante esse período.

"O mundo é um lugar perigoso de se viver, não por causa daqueles que fazem o mal, mas sim por causa daqueles que observam e deixam o mal acontecer."

Albert Einstein

Resumo

A distribuição Weibull inversa tem a habilidade de modelar funções de risco com forma unimodal que são bastante comuns em estudos biológicos e de confiabilidade. Uma nova distribuição Weibull inversa generalizada tri-paramétrica com taxa de falha decrescente e unimodal é proposta. Um compreensivo tratamento das propriedades matemáticas de Weibull inversa generalizada é provido e foi encontrado expressões para suas funções geradoras de momentos e o r -ésimo momento generalizado foi determinado. Também discutimos a estimação de máxima verossimilhança e as fórmulas para os elementos da matriz de informação observada. Uma abordagem bayesiana para esta nova distribuição foi proposta e exemplificada, modelando um conjunto de dados agrários pelos métodos clássico e bayesiano.

Palavras-chave: Weibull, verossimilhança, Bayesiana, Inferência, Estimação, Sobrevivência.

Abstract

The distribution inverse Weibull is suitable for modeling failure rates which are quite common in reliability and biological studies. In this work a new three-parameter distribution generalized inverse Weibull with decreasing and unimodal failure rate is introduced. We provide a comprehensive treatment of the mathematical properties of the generalized inverse Weibull and derive expressions for its moment generating function and the r th generalized moment. We also discuss maximum likelihood estimation and we provide formulae for the elements of the Observed information matrix, we also made an bayesian approach for this new distribution and an applied was made for a real data set for the methods classic and bayes.

Lista de Figuras

1	(a) Função densidade da DWI. (b) Função de risco da DWI. (c) Função de Sobrevivência da DWI.	p. 20
2	Função densidade da DWIG.	p. 23
3	Função de Sobrevivência da DWIG.	p. 24
4	Função Taxa de Falha da DWIG.	p. 25
5	mistura de duas distribuições weibull inversa exponencializada com $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 2, \gamma_1 = 4, \alpha_2 = 2, \beta_2 = 3, \gamma_2 = 10,5$ e $p_1 = p_2 = 0,5$	p. 36
6	mistura de duas funções de sobrevivência da weibull inversa exponencializada com $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 2, \gamma_1 = 4, \alpha_2 = 2, \beta_2 = 3, \gamma_2 = 10,5$ e $p_1 = p_2 = 0,5$	p. 37
7	mistura de duas funções taxa de falha da weibull inversa exponencializada com $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 2, \gamma_1 = 4, \alpha_2 = 2, \beta_2 = 3, \gamma_2 = 10,5$ e $p_1 = p_2 = 0,5$	p. 38
8	Histograma, funções densidade da Weibull inversa e da Weibull inversa generalizada e densidade empírica.	p. 45
9	Comparação entre sobrevivências geradas pelo método clássico, bayesiano e Kaplan-Meier esboçadas no esquema $S(t)$ versus tempo. As curvas tracejadas são os intervalos de confiança 95% para o Kaplan-Meier	p. 47
10	Comparação entre sobrevivências geradas pelo método clássico, bayesiano e Kaplan-Meier esboçadas no esquema de linearização.	p. 47
11	Gráfico de autocorrelação para os parâmetros alfa, beta e gama.	p. 48
12	Gráfico das densidades a posteriori e do traço para o vetor de parâmetros.	p. 49

Lista de Tabelas

- 1 Algumas funções de distribuição geradas a partir da distribuição Weibull inversa generalizada p. 26
- 2 Valores estimados dos parâmetros α , β e γ pelo método de máxima verossimilhança para os dados do gado da raça Nelore p. 46
- 3 Resultados da abordagem bayesiana para distribuição Weibull inversa generalizada p. 46

Sumário

1	INTRODUÇÃO	p. 1
2	REVISÃO DE LITERATURA	p. 2
3	METODOLOGIA	p. 4
3.1	Inferência Estatística	p. 4
3.1.1	Função de Verossimilhança	p. 4
3.1.2	Função Escore	p. 5
3.1.3	Estimativa de Máxima Verossimilhança	p. 6
3.1.4	Métodos Iterativos	p. 6
3.1.5	Momentos e Cumulantes	p. 6
3.1.6	Identificabilidade	p. 7
3.2	Análise de Sobrevivência	p. 8
3.2.1	Censura	p. 8
3.2.2	Funções do Tempo de Sobrevivência	p. 9
3.2.3	Função de Sobrevivência	p. 9
3.2.4	Função Taxa de Falha	p. 10
3.2.5	Algumas Relações entre as Funções	p. 10
3.2.6	Técnicas Não-Paramétricas	p. 11
3.2.7	Estimador de Kaplan-Meier	p. 11
3.2.8	Função de Verossimilhança em Análise de sobrevivência	p. 12

3.3	Inferência Bayesiana	p. 12
3.3.1	Teorema de Bayes	p. 13
3.3.2	Informação a Priori	p. 14
3.3.2.1	Densidades a Priori Subjetivas	p. 14
3.3.2.2	Densidades a Priori Conjugadas	p. 15
3.3.2.3	Priori de Laplace	p. 15
3.3.2.4	Priori de Jeffreys	p. 16
3.3.2.5	Estimação Pontual	p. 17
3.3.2.6	Avaliação da Convergência do Método de Amostragem Gibbs	p. 17
3.3.2.7	Diagnóstico de Geweke	p. 18
3.4	A Distribuição Weibull Inversa	p. 18
4	Distribuição Weibull Inversa Generalizada	p. 21
4.1	Função Densidade da Distribuição Weibull Inversa Generalizada	p. 22
4.2	Função de Sobrevivência da Distribuição Weibull Inversa Generalizada	p. 23
4.3	Função Taxa de Falha da Distribuição Weibull Inversa Generalizada	p. 24
4.4	Relação com outras distribuições	p. 25
4.5	Momentos	p. 26
4.6	Função Geradora de Momentos e Cumulantes	p. 27
4.7	Estimação de Verossimilhança para DWIG	p. 28
4.8	Estimação de Máxima Verossimilhança com Dados Censurados	p. 30
4.9	Mistura de duas Distribuições Weibull Inversa Generalizada	p. 35
4.9.1	Propriedades	p. 35
4.9.2	Identificabilidade	p. 37

5 ABORDAGEM BAYESIANA	p. 40
5.1 Distribuições a priori para DWIG	p. 40
5.2 Função de verossimilhança para DWIG	p. 41
5.3 Densidade a posteriori para DWIG	p. 41
5.4 Média a posteriori e vetor das medianas a posteriori para DWIG	p. 42
6 APLICAÇÃO	p. 44
6.1 Função Taxa de Falha	p. 44
6.2 Estimação de Parâmetros	p. 44
6.2.1 Estimação Através do Método de Máxima Verossimilhança	p. 44
6.2.2 Estimação Através do Método Bayesiano	p. 46
7 CONCLUSÃO	p. 50
Referências	p. 51
APÊNDICE	p. 53

1 INTRODUÇÃO

Nos estudos em análise de sobrevivência, as distribuições usadas para estimar os tempos de sobrevivência de indivíduos, como a distribuição exponencial, a Weibull, a log-gama generalizada, acomodam algumas formas de risco, como a forma constante (distribuição exponencial) e a forma crescente e decrescente (distribuição Weibull), estes gráficos descritos anteriormente são fáceis de encontrar em livros sobre análise de sobrevivência, como o livro do Colosimo e Giolo (2006) por exemplo. Porém, na prática é comum encontrarmos dados de sobrevivência com função de risco de diferentes formas, como por exemplo, em forma de U ou banheira e unimodal como no artigo do Jiang *et. al.* (2001). Os modelos conhecidos para essas situações, em geral, têm como origem o modelo Weibull, que tradicionalmente pode modelar funções de risco com formas constantes, crescentes e decrescentes.

A distribuição Weibull é bastante utilizada em estudos associados ao tempo de falha, devido a grande aplicabilidade na área médica como na área de confiabilidade, bem como na análise de sobrevivência. Dentro do contexto da taxa de risco ter forma unimodal, a distribuição Weibull inversa atende a este requisito ver Jiang *et. al.* (2001).

No sentido (unimodalidade na função de risco), foi proposto uma nova distribuição nomeada de Weibull inversa generalizada. Esta nova distribuição, devido a flexibilidade em acomodar algumas formas de riscos, apresenta-se como uma importante distribuição pois pode ser utilizada nos mais variados problemas de modelagem de dados na análise de sobrevivência oferecendo a vantagem de modelar funções de risco crescentes, decrescentes e unimodal. Outra característica desta nova distribuição é a de possuir como caso particular as distribuições Weibull inversa, exponencial inversa e Rayleigh inversa.

2 REVISÃO DE LITERATURA

De acordo com Cordeiro (1999) a inferência busca adquirir procedimentos adequados de forma científica com base em dado conjunto de dados, tais como: obter uma estimativa de um parâmetro θ desconhecido, construir um conjunto de valores possíveis de θ que tenha uma confiabilidade especificada. Logo, as atividades da inferência são: a estimação, a construção de regiões de confiança e o desenvolvimento de testes de hipóteses.

A análise de sobrevivência pode ser definida como um conjunto de técnicas e modelos estatísticos que analisa dados tal como o tempo de ocorrência de determinado evento de interesse, este método se faz peculiar devido às características especiais, devido aos tipos de dados que são geralmente utilizados para esta análise como dados contendo censura, por exemplo. Este método exige a introdução de uma variável extra na análise, que indica se o valor do tempo de sobrevivência de um dado indivíduo foi observado ou não. Louzada-Neto *et. al.*(2001).

De acordo com Colosimo e Giolo(2006) um dos métodos que dispomos para testarmos se nosso modelo está bem ajustados aos dados consiste na comparação da função de sobrevivência do modelo paramétrico proposto com o estimador de Kaplan-Meier. Tendo em mãos as estimativas dos parâmetros do modelo, estima-se a função de sobrevivência. E para o mesmo conjunto de dados, obtém-se a estimativa de Kaplan-Meier para a função de sobrevivência. Daí, comparam-se graficamente as funções de sobrevivências estimadas para o modelo paramétrico proposto com o de Kaplan-Meier. Se o modelo for adequado ele deverá ter uma curva de sobrevivência que se aproxime da curva de sobrevivência do estimador de Kaplan-Meier. Outro método consiste em esboçarmos a função de sobrevivência do modelo paramétrico versus a estimativa de Kaplan-Meier para a função de sobrevivência, se esta curva estiver próxima da reta $y = x$ teremos um bom ajuste.

Jiang *et. al.* (2001) mostraram que a função densidade de probabilidade da distribuição

Weibull inversa tem a propriedade de unimodalidade e também propuseram modelos de misturas entre duas distribuições Weibull inversa.

Gupta e Kundu (1999) fizeram uso da generalização da distribuição exponencial calculando a máxima verossimilhança para dados completos e censurados.

Mudholkar *et. al.* (1996) propõem uma generalização da distribuição Weibull para estudos de dados de análise de sobrevivência.

Xie e Lai (1995) estudaram um modelo baseado da soma de duas distribuições Weibull.

Choudhury (2005) estudou sobre os momentos da distribuição Weibull exponenciada.

Lai *et. al.* (2003) fizeram uma modificação na distribuição Weibull e compararam com outras modificações já existentes.

Rajarshi e Rajarshi (1988) fizeram uma revisão sobre taxas de falha que apresentam a forma de banheira.

Xie *et. al.* (2002) propõem uma extensão da distribuição Weibull modificada, discutem a forma da taxa de falha do mesmo e estudam métodos de estimação de parâmetros.

De acordo com Pollard (1986) a abordagem bayesiana é um método para pôr no mesmo contexto a informação a priori e da amostra. Ele advoga como esta informação a priori deve ser corrigida pelos novos dados.

De acordo com Box e Tiao (1973) não existe um estado de ignorância total a respeito de uma dada situação ou do parâmetro, sempre se sabe algo, mesmo que este conhecimento seja mínimo.

De acordo com Paulino (2003) uma probabilidade subjetiva é uma medida de um certo grau de crença pessoal de um dado indivíduo.

O subjetivismo é o fundamento filosófico predominante da inferência bayesiana, embora na prática densidades a priori não informativas (construídas sobre alguma regra formal) são bastante usadas. Kass e Wasserman (1996)

3 METODOLOGIA

3.1 Inferência Estatística

De acordo com Gauss(1992) a *inferência* é a parte fundamental da Estatística e é tão antiga quanto a teoria dos métodos que formam a Estatística atual. As primeiras técnicas de inferência surgiram a mais de 200 anos com os trabalhos de Bayes, DeMoivre, Gauss e Laplace. Sir Ronald Fisher em 1912 propôs uma inferência estatística baseada diretamente na função de verossimilhança, porém a intensificação da proposta de Fisher só foi feita no período de 1930 à 1940, devido as aplicações em problemas agrícolas. A inferência tem por objetivo prover regras apropriadas de natureza científica baseando-se em um certo conjunto de dados para executar algumas tarefas como:

- 1) estimação;
- 2) construção de intervalos de confiança;
- 3) desenvolvimento de testes de hipóteses.

3.1.1 Função de Verossimilhança

Sendo $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ uma variável aleatória caracterizada por uma função de probabilidade ou densidade de probabilidade com forma analítica $f(y; \theta)$ conhecida e um vetor de parâmetros desconhecidos $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)^T$ e $\theta \in \Theta$ em que Θ é o espaço paramétrico e $\Theta \in \mathbb{R}^k$, em que $\mathbb{R}^k$ é o conjunto dos reais.

A função de verossimilhança $L(\theta)$ é igual a $f(y; \theta)$, daí

$$L(\theta) = f(y; \theta). \quad (3.1)$$

Assim, a função de verossimilhança quando inferida obtém-se informação sobre o vetor de parâmetros θ . Daí $L(\theta)$ depende de y e não de θ . Se Y tem componentes mutuamente independentes para $f(y_i; \theta)$, $\forall 1 \leq i \leq n$, tem-se

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(y_i; \theta) \quad (3.2)$$

O logaritmo da verossimilhança é conhecida como função suporte e no caso de variáveis aleatórias independentes é dada por

$$\ell(\theta) = \log L(\theta) = \log \left[\prod_{i=1}^n f(y_i; \theta) \right] = \sum_{i=1}^n \log [f(y_i; \theta)] \quad (3.3)$$

dentre vários vetores θ 's aquele que sobre o mesmo conjunto de dados tiver a maior verossimilhança será o vetor θ mais plausível ou o mais próximo de θ_0 (o vetor de parâmetros verdadeiros).

3.1.2 Função Escore

Por definição a primeira derivada da função suporte é denominada função escore também conhecida por vetor escore e é dada por:

$$U(\theta) = \ell'(\theta; y) = \frac{\partial \ell(\theta; y)}{\partial \theta} = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta}. \quad (3.4)$$

A função escore é um vetor com dimensão k .

A primeiras derivadas da função escore com sinal negativo é chamada de matriz de informação observada e é dada por:

$$J(\theta) = -\frac{\partial U^T}{\partial \theta} = -\ell''(\theta) = -\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^T}. \quad (3.5)$$

3.1.3 Estimativa de Máxima Verossimilhança

Para estimar os parâmetros usamos uma técnica de cálculo para encontrar máximos e mínimos, que consiste em derivar uma função e igualar o resultado à zero, então para nosso caso derivamos a função suporte e igualamos à zero.

$$U(\hat{\theta}) = 0. \quad (3.6)$$

3.1.4 Métodos Iterativos

Os métodos iterativos são usados quando a as equações de máxima verossimilhança gera equações que não tem soluções analíticas ou quando a dimensão k do parâmetro é muito grande, ao expandir $U(\hat{\theta})$ em série multivariada de Taylor até a primeira ordem ao redor de um ponto qualquer θ pertencente a uma vizinhança de $\hat{\theta}$, tem-se, aproximadamente

$$U(\hat{\theta}) \cong U(\theta) + \frac{\partial U(\theta)^T}{\partial \theta} (\theta - \hat{\theta}) \quad (3.7)$$

como $U(\hat{\theta}) = 0$, então

$$\hat{\theta} - \theta \cong [J(\theta)]^{-1} U(\theta) \quad (3.8)$$

O método de Newton-Raphson consiste em usar a equação obtida anteriormente de forma iterativa, assim

$$\hat{\theta}^{(m+1)} \cong \theta^{(m)} + [J(\theta^{(m)})]^{-1} U(\theta^{(m)}) \quad (3.9)$$

em que as quantidades com superescrito (m) são avaliadas na m-ésima iteração. Repete-se o procedimento até a diferença entre $\hat{\theta}^{(m+1)}$ e $\theta^{(m)}$ se tornar desprezível ou menor que uma certa quantidade definida.

3.1.5 Momentos e Cumulantes

A função geratriz de momentos (f_{gm}) é definida por:

$$M(t) = E(e^{tY}), \quad (3.10)$$

a função geratriz de momentos $M(t)$ pode ser representada também pela expansão dada por:

$$M(t) = 1 + \sum_k \mu'_k \frac{t^k}{k!} \quad (3.11)$$

suposta convergente para todo $|t|$ suficientemente pequeno. A função geratriz de cumulantes (*fgc*) é definida por:

$$K(t) = \log M(t) \quad (3.12)$$

e ainda a função geratriz de cumulantes pode ser expandida como

$$K(t) = \sum_k \kappa_k \frac{t^k}{k!}. \quad (3.13)$$

Os quatros primeiros cumulantes são dados por:

$$\kappa_1 = \mu'_1, \quad (3.14)$$

$$\kappa_2 = \mu'_2 - \mu_1'^2 \quad (3.15)$$

$$\kappa_3 = \mu'_3 - 3\mu'_2\mu'_1 + 2\mu_1'^3 \quad (3.16)$$

$$\kappa_4 = \mu'_4 - 4\mu'_3\mu'_1 - 3\mu_2'^2 + 12\mu'_2\mu_1'^2 - 6\mu_1'^4 \quad (3.17)$$

3.1.6 Identificabilidade

Definição: Seja ϕ uma transformação associada com cada $F_i \in \Phi$ tendo o domínio definido por D_{Φ_i} com mapa linear $M : F_i \rightarrow \phi_i$. Se existe uma ordem total ($\leq$) de Φ tal que:

i) $F_1 \leq F_2, (F_1, F_2 \in \Phi) \Rightarrow D_{\Phi_1} \subseteq D_{\Phi_2}$;

ii) para cada $F_1 \in \Phi$, existe algum $s_1 \in D_{\Phi_1}$, $\phi_1(s) \neq 0$ tal que $\lim_{s \rightarrow s_1} \frac{\phi_2}{\phi_1} = 0$ for $F_1 < F_2$, ($F_1, F_2 \in \Phi$).

Então a classe Λ de todas as misturas finitas de distribuições é identificável relativa a Φ . Ver Sultan *et. al.* (2006))

3.2 Análise de Sobrevivência

A análise de sobrevivência é uma das áreas da estatística que vem apresentando o maior crescimento nas duas últimas décadas do século passado de acordo com Colosimo e Giolo (2006), isto devido ao avanço tecnológico nos computadores e com o aprimoramento e desenvolvimento das técnicas estatísticas. A análise de sobrevivência é uma técnica estatística usada em casos em que, geralmente, a variável resposta é o período de tempo até o acontecimento de um evento de interesse e a este tempo é dado o nome de *tempo de falha*. O tempo de falha pode ser por exemplo a duração do funcionamento de um equipamento elétrico até sua queima, pode ser o tempo de vida de um paciente do momento que foi diagnosticado a doença até a morte do mesmo ou até cura, também pode ser o tempo de desmame de um bezerro. A característica principal dos dados em análise de sobrevivência é a censura, que consiste em uma observação parcial da resposta. Sem a presença de censura técnicas estatísticas como análise de regressão e planejamentos de experimentos seriam aplicadas sem nenhum problema nestes dados. Os dados de sobrevivência são basicamente caracterizados pelos tempos de falhas e pelas censuras.

3.2.1 Censura

As observações incompletas ou parciais são comuns em estudos clínicos, mesmo tendo estes longos períodos de duração, a estas observações dar-se o nome de *censuras* e podem ocorrer devido a diversas causas, por exemplo se estivermos analisando um grupo de pacientes com câncer alguns destes podem abandonar o estudo antes do término por uma razão qualquer que não seja o evento de interesse. Embora alguns dados dentro do estudo de análise de sobrevivência sejam censurados eles não devem ser descartados, pois mesmo sendo parciais fornecem informações sobre o tempo de vida dos indivíduos em estudo e o não uso dos dados parciais pode ocasionar conclusões viciadas. Há tipos de mecanismos de censuras diferenciados como as censuras tipo I, II e a aleatória. A censura do tipo I consiste em dar um final ao estudo num período de tempo pré-estabelecido, a censura tipo II consiste em terminar o estudo quando um número determinado de eventos de interesse tiverem acontecido e censura aleatória pode acontecer quando a

retirada da observação no estudo em questão for antes do evento de interesse ocorrer.

Para fazer uma representação simples do mecanismo de censura aleatória duas variáveis aleatórias serão usadas. Seja T e C variáveis aleatórias independentes a primeira representando o tempo de falha e a segunda a censura, respectivamente. Daí o tempo de uma observação é dado por $t = \min(T, C)$ e o indicador de censura é dado por

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{para o tempo de falha} \\ 0, & \text{para a censura} \end{cases} \quad (3.18)$$

3.2.2 Funções do Tempo de Sobrevivência

Seja T uma variável aleatória não-negativa, geralmente contínua, que representa o tempo de falha, é comumente especificada em análise de sobrevivência pelas suas funções de sobrevivência e de taxa de falha.

3.2.3 Função de Sobrevivência

A função de sobrevivência é uma das principais funções probabilísticas usadas em estudos de análise de sobrevivência. Definida como a probabilidade de uma observação não falhar até um tempo t e dada por

$$S(t) = P(T > t) = 1 - P(T \leq t) \quad (3.19)$$

em que $P(T \leq t) = F(t)$, daí a função de sobrevivência pode ser definida como

$$S(t) = 1 - F(t), \quad (3.20)$$

que tem as seguintes propriedades:

$$1) t = 0 \Rightarrow S(t) = 1;$$

$$2) t \rightarrow \infty \Rightarrow S(t) \rightarrow 0;$$

$$3) -\frac{d[S(t)]}{dt} = f(t).$$

3.2.4 Função Taxa de Falha

É definida como sendo a probabilidade de que a falha ocorra em um intervalo de tempo $[t, t + \Delta t)$ dado que não ocorreu antes do tempo t , dividida pelo comprimento do intervalo de tempo. Se assumirmos que Δt é muito pequeno $h(t)$ representa a função taxa de falha instantânea e é dada por

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t \mid T \geq t)}{\Delta t} \quad (3.21)$$

Funções de sobrevivência distintas podem ter formas semelhantes, porém podem diferir bastante nas funções taxa de falha. Daí a importância da função taxa de falha em análise de sobrevivência.

3.2.5 Algumas Relações entre as Funções

Seja T uma variável aleatória contínua e não-negativa, algumas relações podem ser obtidas em termos das funções definidas anteriormente e são elas

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} \quad (3.22)$$

em que $f(t)$ é a função densidade de probabilidade da distribuição a qual T esteja associada,

$$S(t) = \exp\left\{-\Lambda(t)\right\} \quad (3.23)$$

em que $\Lambda(t)$ é a função de taxa de falha acumulada que é definida como:

$$\Lambda(t) = \int_0^t h(u) du. \quad (3.24)$$

3.2.6 Técnicas Não-Paramétricas

A análise estatística envolvendo dados de sobrevivência geralmente estão relacionadas as respostas às perguntas de interesse obtidas a partir de um conjunto de dados de sobrevivência, o passo inicial de uma análise estatística consiste em uma descrição dos dados. Para as técnicas convencionais de análise descritiva, dados contendo censuras geralmente são um problema para obtenção de médias, desvio-padrão e técnicas gráficas como histograma, entre outras.

O principal componente da análise descritiva envolvendo dados de tempo de vida é a função de sobrevivência. Neste caso, o procedimento inicial é encontrar uma estimativa para esta função de sobrevivência e então, a partir dela, estimar as estatísticas de interesse que usualmente são o tempo médio ou mediano, alguns percentis ou certas frações de falhas em tempos fixos de acompanhamento.

3.2.7 Estimador de Kaplan-Meier

Em geral conjuntos de dados amostrais de tempos de falha contém censuras, e daí se faz necessário utilizar técnicas estatísticas especializadas para acomodar a informação contida nestas observações. A observação censurada informa que o tempo até a falha é maior do que aquele que foi registrado. De acordo com Colosimo e Giolo (2006) para fazer a estimação da função de sobrevivência, este estimador não-paramétrico de Kaplan-Meier é também conhecido por estimador limite-produto. O estimador consiste em uma adaptação da função de sobrevivência empírica que é definida por:

$$\hat{S}(t) = \frac{n}{N} \quad (3.25)$$

em que n =número de observações que não falharam até o tempo t e N =número total de observações no estudo. O estimador de Kaplan-Meier considera o número de intervalos iguais ao número de falhas distintas e os limites dos intervalos são os próprios tempos de falhas da amostra. Considerando os itens abaixo:

- $t_1 < t_2 \dots < t_k$, os k tempos distintos e ordenados de falha,

- d_j o número de falhas em t_j , $j = 1, \dots, k$, e
- n_j o número de indivíduos sob risco em t_j , ou seja, os indivíduos que não falharam e não foram censurados até o instante imediatamente anterior a t_j .

Podemos agora definir a expressão geral do estimador de Kaplan-Meier, que é dada por:

$$\hat{S}(t) = \prod_{j:t_j < t} \left(\frac{n_j - d_j}{n_j} \right) = \prod_{j:t_j < t} \left(1 - \frac{d_j}{n_j} \right). \quad (3.26)$$

A consistência e normalidade assintótica de $\hat{S}(t)$ foram provadas, sob certas condições de regularidade.

3.2.8 Função de Verossimilhança em Análise de sobrevivência

De forma geral a verossimilhança é dada por

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n [f(y_i; \theta)]^{\delta_i} [S(y_i; \theta)]^{1-\delta_i} \quad (3.27)$$

em que δ_i é o indicador de censura, se $\delta_i = 1$ ocorre tempo de falha e se $\delta_i = 0$ ocorre tempo de censura.

3.3 Inferência Bayesiana

Em estatística é fundamental a informação sobre a quantidade desconhecida θ ou seja o vetor de parâmetros $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^T$. Como já foi dito θ é um valor desconhecido e a estatística busca investiga-lo para tentar diminuir a incerteza sobre ele. Este desconhecimento sobre θ pode ter graus distintos de incerteza. Para os bayesianos este grau de desconhecimento assume uma distribuição de probabilidade para θ , então alguns pesquisadores podem diferir quanto o modelo probabilístico a ser usado, pois o modelo adotado tem haver com o conhecimento pessoal do pesquisador, daí para o mesmo problema pesquisadores podem assumir modelos probabilísticos distintos para θ .

3.3.1 Teorema de Bayes

Se considerarmos dois eventos A e B em um espaço de probabilidade. Sendo $P(B) > 0$, a probabilidade condicional do evento A ocorrer dado que o evento B já ocorreu é dada por:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad (3.28)$$

considerando agora os eventos $X_1, X_2, \dots, X_n$ em um espaço de probabilidade que formam uma partição do espaço amostral e $P(X_i) > 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Daí, para qualquer evento A , temos:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(X_i)P(A | X_i) \quad (3.29)$$

em que a descrição acima é chamada de *Lei da Probabilidade Total* e agora utilizando o que foi apresentado chegaremos no *Teorema de Bayes*.

Suponha que X_i 's em que $i = 1, 2, \dots, n$ estão em um espaço de probabilidade, formam uma partição do espaço amostral e $P(X_i) > 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Seja A um evento qualquer com $P(A) > 0$. Para todo $j = 1, 2, \dots, n$, o Teorema de Bayes é dado por:

$$P(X_j | A) = \frac{P(A | X_j)P(X_j)}{\sum_{i=1}^n P(A | X_i)P(X_i)}. \quad (3.30)$$

Supondo que se observa $Y = y$. Seja $f(y | \theta)$ a verossimilhança e a distribuição a priori do investigador $h(\theta)$, O teorema de Bayes para densidades leva a expressão:

$$h(\theta | y) = \frac{f(y | \theta)h(\theta)}{\int_{\Theta} f(y | \theta)h(\theta)d\theta} \quad (3.31)$$

em que $h(\theta | y)$ é densidade a posteriori de θ dado que conhecemos x .

Tendo um espaço-paramétrico finito, $\Theta = \theta_1, \dots, \theta_m$, temos

$$h(\theta_1 | y) = \frac{f(y | \theta_1)h(\theta_1)}{\sum_i f(y | \theta_i)h(\theta_i)} \quad (3.32)$$

em que $i = 1, \dots, m$. Sendo o denominador da expressão 3.32 igualado a uma constante c , pode-se escrever a expressão 3.30 como:

$$P(\theta | y) = c^{-1}P(y | \theta)P(\theta) \quad (3.33)$$

ou

$$P(\theta | y) \propto P(y | \theta)P(\theta) \quad (3.34)$$

e como c^{-1} não altera o conhecimento relativo a respeito de θ fica assim justificado a proporcionalidade. $P(\theta | y)$ é uma função densidade de probabilidade e por isto tem que integrar 1, mesmo que a priori, caso particular da uniforme, não integre 1. $P(\theta)$, chamada de priori, representa o que se sabe sobre θ antes da observação dos dados e $P(y | \theta)$ representa o conhecimento sobre θ depois de observados os dados ou seja atualizado pelos dados. Com $P(y | \theta)$ e $P(\theta)$ tendo sido especificado o Teorema de Bayes fornece solução para um dado problema através do aprendizado com os dados.

A verossimilhança $L(\theta | y)$ representada no Teorema de Bayes por $P(y | \theta)$ tem vital importância, pois é ela que atualiza o conhecimento sobre θ .

3.3.2 Informação a Priori

A distribuição a priori representa o conhecimento prévio do pesquisador antes de se observar os dados, devido a este acréscimo de informação o método bayesiano geralmente fornece conclusões mais fortes que o método freqüentista para um mesmo conjunto de dados. De acordo com Leandro (2001) devido, em geral, a subjetividade da escolha das densidades a priori, estatísticos freqüentistas se opõem ao uso desta informação adicional e se sustentam no fato de que a função densidade de probabilidade a posteriori ser bastante sensível a escolha de prioris distintas. Porém os estatísticos bayesianos tem apoio em alguns argumentos, por exemplo este feito por Gelman *et. al.* (1997): "*Todos os métodos estatísticos que usam probabilidades são subjetivos no sentido que se baseiam em idealizações matemáticas do mundo.*"

3.3.2.1 Densidades a Priori Subjetivas

Uma priori subjetiva representa única, direta e simplesmente a esperança subjetiva do pesquisador sobre o parâmetro, assim o sentimento do pesquisador é colocado na distribuição a priori. Algumas vezes a posteriori não se apresenta correspondente as expectativas do pesquisador e nestes casos a escolha da distribuição a priori terá que ser revista. Na escolha desta distribuição a priori poderemos ter distribuições próprias (que integradas no espaço parâmetro resulta 1) e distribuição impróprias (que integradas no espaço parâmetro não necessariamente resulta 1), porém a distribuição a posteriori tem

que integrar 1 não importando se a priori escolhida é própria ou imprópria. Ainda temos que verificar o domínio da distribuição a priori escolhida e ver se há compatibilidade com o espaço paramétrico do parâmetro em questão.

3.3.2.2 Densidades a Priori Conjugadas

A definição de priori conjugada de acordo com Lee (2004) é:

Seja $L(\theta)$ uma função de verossimilhança. Uma classe Φ de distribuições a priori é chamada geradora de uma família conjugada se a densidade posteriori está na classe Φ para todo t sempre que a densidade a priori está em Φ ,

$$\varphi(\theta | t) \propto \varphi(\theta)L(\theta | t). \quad (3.35)$$

3.3.2.3 Priori de Laplace

Na ausência de razão suficiente para priorizar umas possibilidades em detrimento de outras, devido a pouca informação decorrente a priori, deve-se adotar a equiprobabilidade, gerando assim densidades a Priori não informativas. A este processo deu-se o nome de *Princípio da Razão Insuficiente*.

Para o caso em que o espaço paramétrico é finito, $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$, a distribuição a priori é uma distribuição Uniforme discreta, que é expressa por:

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{k}, \theta \in \Theta. \quad (3.36)$$

Para o caso em que o espaço paramétrico é infinito numerável, não há distribuição de probabilidade que seja compatível com a equiprobabilidade de todos os valores possíveis de θ , produzindo uma distribuição imprópria.

Agora, quando o espaço paramétrico é infinito não numerável, conduz a uma distribuição Uniforme contínua, que é uma distribuição imprópria se θ não pertencer a um intervalo.

3.3.2.4 Priori de Jeffreys

O conceito de escolher uma priori por convenção, ou seja adotar uma referência padrão é devido ao físico Jeffreys. Ele tinha a crença na existência de um estado de ignorância e que o princípio da razão insuficiente era uma maneira formal de expressar tal ignorância.

De acordo com a idéia de Jeffreys para um dado conjunto de dados dizemos que uma certa proposição está relacionada a este conjunto de dados com uma e somente uma probabilidade. Se cada pesquisador atribuir uma probabilidade distinta para distribuição a priori, ela simplesmente está equivocada.

Das diversas situações consideradas por Jeffreys para formular regras objetivas para escolha de uma priori, a mais simples é o caso de um espaço paramétrico finito na qual ele utilizou o *princípio da razão insuficiente* a atribuição de probabilidades iguais para cada valor do parâmetro. Daí foi considerado os casos em que o espaço paramétrico tivesse um intervalo limitado, considerando um intervalo $(-\infty, \infty)$ ou o intervalo $(0, \infty)$.

Tentando assegurar a invariância sobre transformações injetivas Jeffreys advoga sobre um procedimento que se baseia no uso da medida de informação de Fisher sobre $\theta \in \Theta$,

$$I(\theta) = E \left[\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta^2} \mid \theta \right]. \quad (3.37)$$

Para qualquer transformação real injetiva de $\theta \in \Theta$, tem-se:

$$I(\rho) = I(\theta(\rho)) \left(\frac{d^2 \theta}{d \rho^2} \right). \quad (3.38)$$

Isto mostra que Jeffreys propõe uma distribuição a priori (no caso uniparamétrico) que é dada por:

$$\varphi(\theta) \propto [I(\theta)]^{\frac{1}{2}} \quad (3.39)$$

e tem a propriedade de invariância.

Agora no caso multiparamétrico, temos:

$$I_{i,j}(\theta) = E \left[\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \mid \theta \right], \quad (3.40)$$

daí a distribuição a priori é proporcional a raiz quadrada do determinante da matriz de informação de Fisher,

$$\varphi(\theta) \propto |I(\theta)|^{\frac{1}{2}}. \quad (3.41)$$

3.3.2.5 Estimação Pontual

As estimativas para o vetor de parâmetros $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ depende da forma da posteriori $h(\theta | t)$, como dos objetivos de seu uso. As estimativas mais usadas são a média a posteriori, moda a posteriori e a mediana a posteriori. Neste trabalho foi dado ênfase a média a posteriori e ao vetor das medianas a posteriori, em que a média é dada por:

$$\hat{\theta}_i = E[\theta_i | t] = \int_{\Theta} \theta_i h(\theta | t) d\theta, \quad (3.42)$$

em que $i = 1, \dots, k$ e Θ é o espaço paramétrico.

O vetor das medianas a posteriori é dado por:

$$P \left\{ \theta_i \geq \hat{\theta}_i | t \right\} \geq \frac{1}{2} \quad (3.43)$$

e

$$P \left\{ \theta_i \leq \hat{\theta}_i | t \right\} \leq \frac{1}{2} \quad (3.44)$$

em que $i = 1, \dots, k$ e $\hat{\theta} = \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k$.

3.3.2.6 Avaliação da Convergência do Método de Amostragem Gibbs

Seja $g(\theta)$ a função do parâmetro a ser estimado. Fazendo a simulação dos vetores de θ^t pelo método de Gibbs em uma determinada cadeia de Markov. O valor esperado a posteriori de $g(\theta)$ estimado é dado pela média ergódica dos $g(\theta^j)$. Então a função real $g(\theta)$ e sua trajetória $g^1, g^2, \dots$ construída a partir de $g^t = g(\theta^t)$, define uma série temporal.

3.3.2.7 Diagnóstico de Geweke

O método de Geweke consiste em observar um número N bastante longo em iterações e calcula-se a média $g_a = \frac{\sum g(\theta^t)}{n_a}$ à custa de n_a das primeiras iteradas, também calcula-se a média $g_b = \frac{\sum g(\theta^t)}{n_b}$ à custa de n_b das últimas iteradas.

Se a cadeia é estacionária, então a média g_a deve ser semelhante à g_b .

$$n_a + n_b < N \quad (3.45)$$

Com esta comparação pode averiguar-se se há ou não convergência. Uma boa descrição do algoritmo Gibbs pode ser visto no livro do Paulino *et. al.*(2003).

3.4 A Distribuição Weibull Inversa

Através da função de risco ou taxa de falha, podemos caracterizar algumas classes interessantes de distribuição de tempo de sobrevivência, conforme seu comportamento em função do tempo. A função de risco pode assumir comportamento constante, crescente, decrescente, etc...

A distribuição Weibull é bastante conhecida da literatura estatística, seu uso em questões de confiabilidade (como é conhecida nas engenharias) ou análise de sobrevivência (como é conhecida na literatura médica) é amplamente difundido. Na prática, os dados podem ser esboçados das mais variadas formas gráficas e novas distribuições são propostas na tentativa de modelá-los. Ultimamente vem sendo observado um grande interesse em estudar modificações e generalizações da distribuição Weibull em diversos artigos científicos e uma de suas modificações é distribuição chamada de Weibull inversa que tem a característica de unimodalidade na função de risco.

Utilizando uma distribuição Weibull padrão bi-paramétrica que tem como função de probabilidade acumulada:

$$Q(t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right] \quad (3.46)$$

em que α, β são positivos e $t \geq 0$, sendo o primeiro o parâmetro de escala e o segundo o parâmetro de forma, respectivamente, no artigo de Jiang, Ji e Murthy(2001) podemos ver a seguinte modificação:

Seja X uma variável aleatória contínua não-negativa com distribuição Weibull, defini-se Y como sendo:

$$Y = \frac{\alpha^2}{X} \quad (3.47)$$

e cuja função acumulada para Y é dada por:

$$G(t) = \exp \left[- \left(\frac{\alpha}{t} \right)^\beta \right] \quad (3.48)$$

em que $\alpha, \beta > 0$ e $t > 0$ e sua função densidade é dada por:

$$g(t) = \beta \alpha^\beta t^{-(\beta+1)} \exp \left[- \left(\frac{\alpha}{t} \right)^\beta \right] \quad (3.49)$$

e as funções de risco e sobrevivência são dadas, respectivamente, por:

$$h(t) = \beta \alpha^\beta t^{-(\beta+1)} \exp \left[- \left(\frac{\alpha}{t} \right)^\beta \right] \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{\alpha}{t} \right)^\beta \right] \right\}^{-1} \quad (3.50)$$

$$S(t) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{\alpha}{t} \right)^\beta \right\}, \quad t > 0; \quad (3.51)$$

e a expressão geral para os Momentos é dada por:

$$E(T^k) = \alpha^k \Gamma \left(1 - \frac{k}{\beta} \right). \quad (3.52)$$

Os gráficos produzidos pela distribuição Weibull inversa para as funções densidade, sobrevivência e risco; são exibidos nas figuras 1a, 1b e 1c; respectivamente:

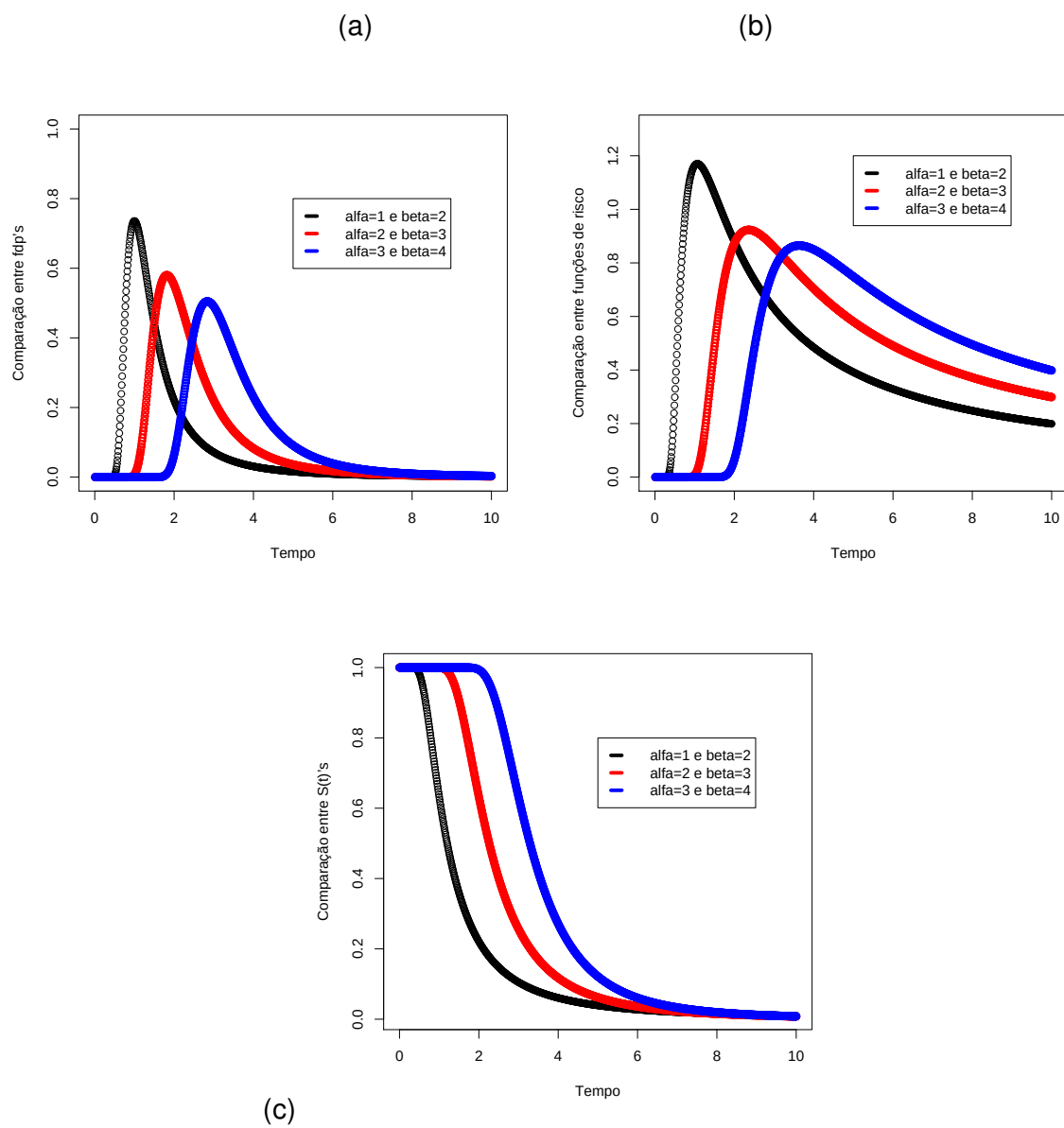


Figura 1: (a) Função densidade da DWI. (b) Função de risco da DWI. (c) Função de Sobre-
vivência da DWI.

4 Distribuição Weibull Inversa Generalizada

Neste trabalho foi proposto uma modificação para distribuição Weibull inversa; que consiste em elevar a função acumulada da distribuição Weibull inversa a uma constante γ positiva ao qual a esta nova função acumulada expressamos por $F(t)$ que é dada por:

$$F(t) = \left\{ G(t) \right\}^{\gamma} = \left\{ \exp \left[- \left(\frac{\alpha}{t} \right)^{\beta} \right] \right\}^{\gamma} = \exp \left[- \gamma \left(\frac{\alpha}{t} \right)^{\beta} \right] \quad (4.1)$$

em que $\gamma > 0$ e para suposta função densidade de probabilidade, temos:

$$f(t) = \gamma \beta \alpha^{\beta} t^{-(\beta+1)} \exp \left[- \gamma \left(\frac{\alpha}{t} \right)^{\beta} \right], \quad t > 0. \quad (4.2)$$

A introdução deste novo parâmetro γ , como foi mostrado acima, tem por finalidade aumentar a flexibilidade desta nova distribuição.

Agora precisamos mostrar que $f(t)$ é realmente uma função densidade de probabilidade, para isto duas propriedades devem ser satisfeitas:

$$1) f(t) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R};$$

$$2) \int_0^{\infty} f(t) dt = 1.$$

Para 1ª propriedade, temos:

$$f(t) = \gamma \beta \alpha^{\beta} t^{-(\beta+1)} \exp \left[- \gamma \left(\frac{\alpha}{t} \right)^{\beta} \right] I_{(0,\infty)}(t) \quad (4.3)$$

como todos os parâmetros são positivos e a variável independente também é positiva, então $f(t)$ é positiva e se a variável independente tender ao infinito $f(t)$ tende à zero. Daí 1ª propriedade é satisfeita.

Para 2ª propriedade, temos:

$$f(t) = \int_0^\infty \gamma \beta \alpha^\beta t^{-(\beta+1)} \exp \left[-\gamma \left(\frac{\alpha}{t} \right)^\beta \right] dt = 1 \quad (4.4)$$

Utilizando a técnica de integração por substituição, fazendo $u = -\gamma \alpha^\beta t^{-\beta}$ teremos $t^{-(\beta+1)} dt = du (\gamma \alpha^\beta \beta)^{-1}$

$$f(t) = \int_0^\infty \gamma \beta \alpha^\beta \frac{e^u du}{\gamma \beta \alpha^\beta} = e^u = \left[\exp \left(-\gamma \alpha^\beta \beta t^{-\beta} \right) \right]_0^\infty = 1 \quad (4.5)$$

Logo, a 2ª propriedade também é satisfeita.

4.1 Função Densidade da Distribuição Weibull Inversa Generalizada

A função densidade de probabilidade da DWIG é dada por:

$$f(t) = \gamma \beta \alpha^\beta t^{-(\beta+1)} \exp \left[-\gamma \left(\frac{\alpha}{t} \right)^\beta \right] \quad (4.6)$$

Através da análise da monotonicidade de uma função podemos determinar se ela é unimodal, bimodal, etc. Para esta finalidade utilizamos a técnica para encontrar extremos relativos, esta técnica consiste em estudar o crescimento da função, o qual será realizado analisando-se o sinal de sua derivada de primeira ordem.

$$f'(t) = f(t) t^{-(\beta+1)} [\gamma \beta \alpha^\beta - (\beta + 1) t^\beta] = 0 \quad (4.7)$$

agora resolvendo a equação acima e isolando t , temos

$$t = \alpha (\gamma)^{\frac{1}{\beta}} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)^{-\frac{1}{\beta}} \quad (4.8)$$

Se $t < t_m \Rightarrow f'(t) > 0$ e se $t > t_m \Rightarrow f'(t) < 0$, logo $f(t)$ é unimodal.

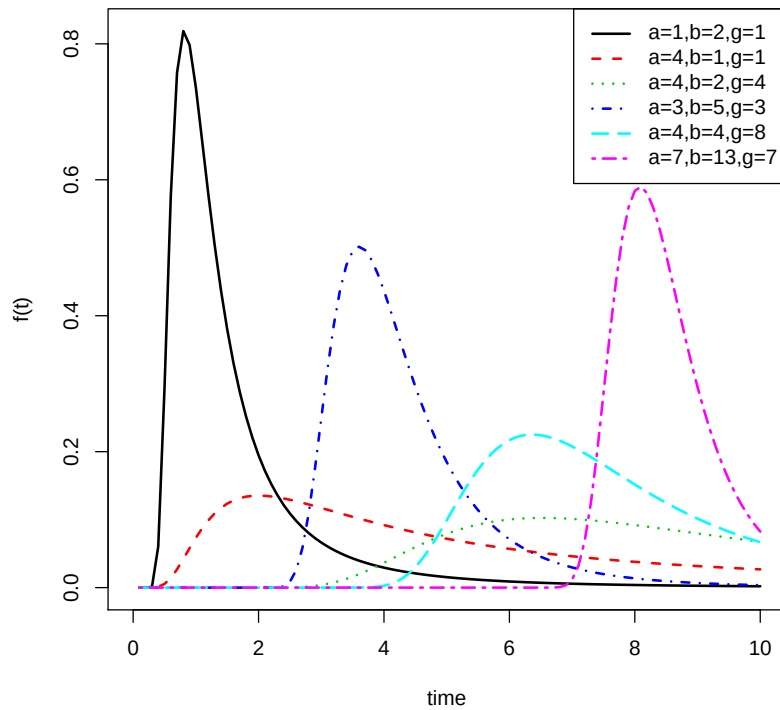


Figura 2: Função densidade da DWIG.

4.2 Função de Sobrevivência da Distribuição Weibull Inversa Generalizada

Usando a relação $S(t)=1-F(t)$ é fácil encontrar

$$S(t) = 1 - \exp \left[-\gamma \left(\frac{\alpha}{t} \right)^\beta \right] \quad (4.9)$$

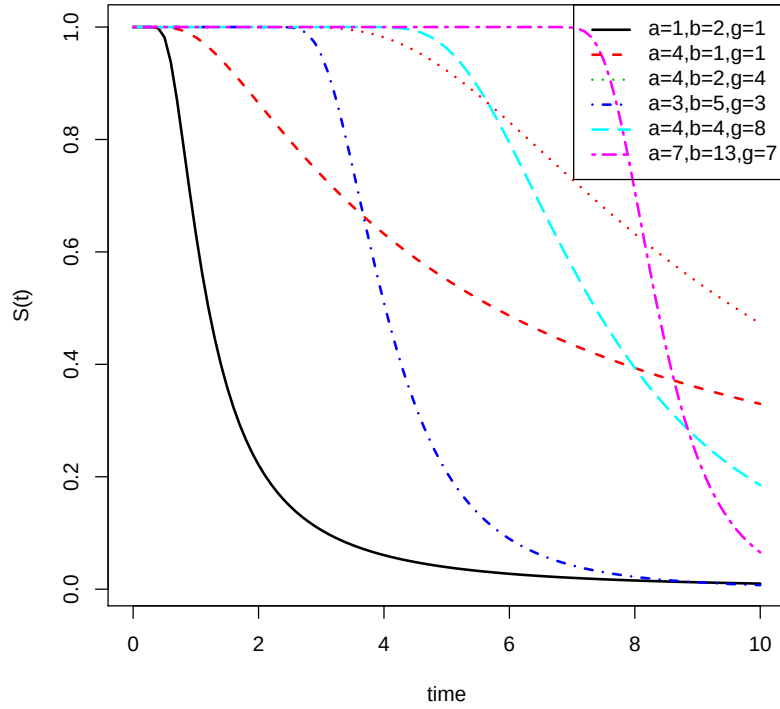


Figura 3: Função de Sobrevivência da DWIG.

4.3 Função Taxa de Falha da Distribuição Weibull Inversa Generalizada

A função taxa de falha é dada por:

$$h(t) = \gamma\beta\alpha^\beta t^{-(\beta+1)} \exp \left[-\gamma \left(\frac{\alpha}{t} \right)^\beta \right] \left\{ 1 - \exp \left[-\gamma \left(\frac{\alpha}{t} \right)^\beta \right] \right\}^{-1}. \quad (4.10)$$

Diferenciando $h(t)$, temos:

$$h'(t) = h(t)t^{-(\beta+1)} \left\{ \frac{\gamma\beta\alpha^\beta}{\left\{ 1 - \exp \left[-\gamma \left(\frac{\alpha}{t} \right)^\beta \right] \right\}} - (\beta+1)t^\beta \right\}. \quad (4.11)$$

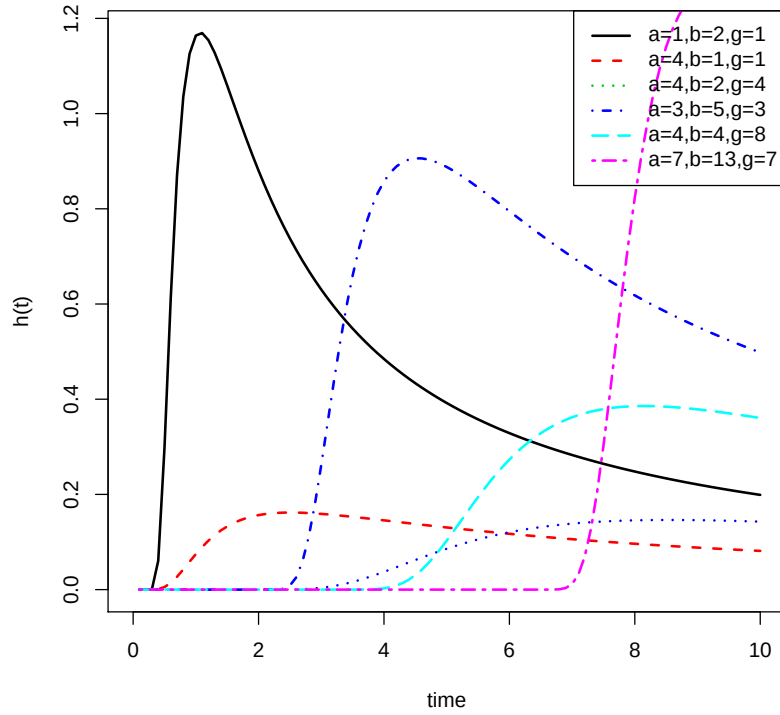


Figura 4: Função Taxa de Falha da DWIG.

Vemos que $h(t)$ é unimodal e tem pico em $t = t_M$ em que t_M é solução da equação abaixo

$$\frac{\gamma \left(\frac{\alpha}{t_M} \right)^\beta}{\left[1 - e^{-\gamma \left(\frac{\alpha}{t_M} \right)^\beta} \right]} = 1 + \frac{1}{\beta} \quad (4.12)$$

e que

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0 \quad (4.13)$$

4.4 Relação com outras distribuições

A distribuição Weibull inversa generalizada apresenta a distribuição Weibull inversa como caso particular. Quando o parâmetro γ é igual a 1(um), a distribuição Weibull inversa

generalizada assume a forma da distribuição Weibull inversa, quando β e γ são iguais a 1 (um) temos a distribuição exponencial inversa e se γ é igual a 1 (um) e β igual a 2 (dois) temos a distribuição Rayleigh inversa. O Tabela 1 resume estas relações

Tabela 1: Algumas funções de distribuição geradas a partir da distribuição Weibull inversa generalizada

Distribuição	Parâmetros
Weibull inversa	$\gamma = 1$
exponencial inversa	$\beta = 1, \gamma = 1$
Rayleigh inversa	$\beta = 2, \gamma = 1$

4.5 Momentos

É necessário enfatizar a importância e a necessidade dos momentos em qualquer análise estatística especialmente em trabalhos aplicados. Algumas das mais importantes características de uma dada distribuição pode ser estudada através dos momentos como: média, variância, assimetria e curtose. Seja T uma variável aleatória com função densidade de probabilidade dada pela distribuição Weibull inversa generalizada(DWIG) o k -ésimo momento de T é dado por

$$M_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k g(t) dt = \int_0^{\infty} \gamma \beta \alpha^\beta t^{k-\beta-1} e^{-\gamma \left(\frac{\alpha}{t}\right)^\beta} dt \quad (4.14)$$

Fazendo $u = \gamma \alpha^\beta t^{-\beta}$ e $du = \gamma \beta \alpha^\beta t^{-\beta-1} dt$ quando $t \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow \infty$ e quando $t \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow 0$, daí

$$M_k = \int_0^{\infty} t^k e^{-u} du \quad (4.15)$$

usando a seguinte relação $t^k = (t^\beta)^{\frac{k}{\beta}} = \left(\frac{u}{\gamma \alpha^\beta}\right)^{-\frac{k}{\beta}}$, então

$$M_k = \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{\gamma \alpha^\beta}\right)^{-\frac{k}{\beta}} e^{-u} du = (\gamma \alpha^\beta)^{\frac{k}{\beta}} \int_0^{\infty} u^{[1-\frac{k}{\beta}-1]} e^{-u} du = \gamma^{\frac{k}{\beta}} \alpha^k \Gamma\left(1 - \frac{k}{\beta}\right) \quad (4.16)$$

4.6 Função Geradora de Momentos e Cumulantes

Sendo o k -ésimo momento de T dado por:

$$E(T^k) = \gamma^{\frac{k}{\beta}} \alpha^k \Gamma\left(1 - \frac{k}{\beta}\right) \quad (4.17)$$

A função geradora de momentos é

$$M_t(z) = \sum_{k=0}^n \left[\frac{z^k}{k!} E(T^k) \right] \quad (4.18)$$

A função geradora de cumulantes é

$$K(z) = \log \left\{ M_t(z) = \sum_{k=0}^n \left[\frac{z^k}{k!} E(T^k) \right] \right\} \quad (4.19)$$

então o primeiro cumulante é a derivada da função geradora de cumulantes e em seguida iguala-se z à zero (z em nosso caso)

$$K'(z) = \frac{\sum_{k=0}^n \left[\frac{1}{k!} \gamma^{\frac{k}{\beta}} \alpha^k \Gamma\left(1 - \frac{k}{\beta}\right) k z^{k-1} \right]}{\sum_{k=0}^n \left[\frac{1}{k!} \gamma^{\frac{k}{\beta}} \alpha^k \Gamma\left(1 - \frac{k}{\beta}\right) z^k \right]} \quad (4.20)$$

expandindo os somatórios e em seguida igualando z à zero, temos:

$$K'(z) = k_1 = \gamma^{\frac{1}{\beta}} \alpha \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \quad (4.21)$$

que satisfaz a relação

$$k_1 = E(T) = \gamma^{\frac{1}{\beta}} \alpha \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right), \quad (4.22)$$

os próximos 3 cumulantes são dados pelas seguintes relações

$$k_2 = E(T^2) - [E(T^1)]^2 \quad (4.23)$$

$$k_3 = E(T^3) - 3E(T^2)E(T^1) + 2E(T^3) \quad (4.24)$$

$$k_4 = E(T^4) - 4E(T^3)E(T^1) - 3[E(T^2)]^2 + 12E(T^2)E(T^1) - 6[E(T^1)]^4. \quad (4.25)$$

Daí para DWIG, temos:

$$k_2 = \gamma^{\frac{2}{\beta}} \alpha^2 \left\{ \Gamma \left(1 - \frac{2}{\beta} \right) - \left[\Gamma \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \right]^2 \right\} \quad (4.26)$$

$$k_3 = \gamma^{\frac{3}{\beta}} \alpha^3 \left\{ \Gamma \left(1 - \frac{3}{\beta} \right) - 3\Gamma \left(1 - \frac{2}{\beta} \right) \Gamma \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) + 2 \left[\Gamma \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \right]^3 \right\} \quad (4.27)$$

$$k_4 = \gamma^{\frac{4}{\beta}} \alpha^4 \Gamma \left(1 - \frac{4}{\beta} \right) - 4\gamma^{\frac{4}{\beta}} \alpha^4 \Gamma \left(1 - \frac{3}{\beta} \right) \Gamma \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) - 3\gamma^{\frac{4}{\beta}} \alpha^4 \left[\Gamma \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \right]^2 + 12\gamma^{\frac{4}{\beta}} \alpha^4 \left[\Gamma \left(1 - \frac{2}{\beta} \right) \right]^2 \left[\Gamma \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \right]^2. \quad (4.28)$$

4.7 Estimação de Verossimilhança para DWIG

Sejam $T_1, T_2, \dots, T_n$ variáveis aleatórias, independentes e identicamente distribuídas seguindo uma DWIG em que o vetor de parâmetros é $\theta = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ e a função de verossimilhança para DWIG é dada por

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \gamma \beta \alpha^\beta t_i^{-(\beta+1)} \exp \left[-\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right] = [\gamma \beta \alpha^\beta]^n \prod_{i=1}^n t_i^{-(\beta+1)} \exp \left[-\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right] \quad (4.29)$$

O logaritmo da função de verossimilhança conhecida como função suporte como é descrita acima é dada por:

$$\ell(\theta) = \log L(\theta) = n \log \gamma + n \log \beta + n \beta \log \alpha - (\beta + 1) \sum_{i=1}^n \log(t_i) - \gamma \alpha^\beta \sum_{i=1}^n t_i^{-\beta}. \quad (4.30)$$

Então para estimar os parâmetros utilizamos a equação escore, que é definida como:

$$U(\hat{\theta}) = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (4.31)$$

para DWIG, temos

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \alpha} = n \beta \frac{1}{\alpha} - \gamma \beta \alpha^{\beta-1} \sum_{i=1}^n t_i^{-\beta} = 0, \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta} = n \frac{1}{\beta} - n \log \alpha - \sum_{i=1}^n \log(t_i) - \gamma \sum_{i=1}^n \left[\log \left(\frac{\alpha}{t_i} \right) t_i^{-\beta} \alpha^\beta \right] = 0 \quad (4.33)$$

e

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \gamma} = n \frac{1}{\gamma} - \alpha^\beta \sum_{i=1}^n t_i^{-\beta} = 0 \quad (4.34)$$

As equações 4.32, 4.33 e 4.34 não têm forma fechada, então para solucioná-las podemos utilizar o método iterativo de *Newton-Raphson*

$$\hat{\theta} - \theta = [J(\theta)]^{-1} \cdot U(\theta) \quad (4.35)$$

Mas para isto precisamos encontrar a matriz de informação observada $J(\theta)$

$$\mathbf{J}(\theta) = \begin{pmatrix} L_{\alpha\alpha}(\theta) & L_{\alpha\beta}(\theta) & L_{\alpha\gamma}(\theta) \\ L_{\beta\alpha}(\theta) & L_{\beta\beta}(\theta) & L_{\beta\gamma}(\theta) \\ L_{\gamma\alpha}(\theta) & L_{\gamma\beta}(\theta) & L_{\gamma\gamma}(\theta) \end{pmatrix}$$

para a DWIG tem como elementos $-\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \sigma} \right] = L_{\rho\sigma}(\theta)$ em que ρ e σ são parâmetros da distribuição em questão e θ o vetor de parâmetros, então

$$L_{\alpha\alpha}(\theta) = -n\beta\alpha^{-2} + (\beta - 1)\gamma\beta\alpha^{\beta-2} \sum_{i=1}^n t_i^{-\beta}$$

$$L_{\alpha\beta}(\theta) = -n\alpha^{-1} + \gamma \sum_{i=1}^n \left[t_i^{-\beta} \alpha^{\beta-1} (1 + \beta \log \alpha) - \beta \alpha^{\beta-1} t_i^{-\beta} \log t_i \right]$$

$$L_{\gamma\beta}(\theta) = \sum_{i=1}^n \alpha^\beta t_i^{-\beta} \log \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)$$

$$L_{\alpha\gamma}(\theta) = \beta \alpha^{\beta-1} \sum_{i=1}^n t_i^{-\beta}$$

$$L_{\gamma\gamma}(\boldsymbol{\theta}) = n\gamma^{-2}$$

$$L_{\beta\beta}(\boldsymbol{\theta}) = n\beta^{-2} + \gamma \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{\alpha}{t_i}\right) \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\alpha^\beta t_i^{-\beta}\right)$$

em que

$$\left(\alpha^\beta t_i^{-\beta}\right)' = \alpha^\beta t_i^{-\beta} \log\left(\frac{\alpha}{t_i}\right)$$

4.8 Estimação de Máxima Verossimilhança com Dados Censurados

Seja T_i uma variável aleatória seguindo uma DWIG com o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \gamma)^T$. Os dados encontrados em estudos de análise de sobrevivência e confiabilidade são censurados e então a função suporte é dada por

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\theta}) = & r \left[\log(\gamma) + \log(\beta) + \beta \log(\alpha) \right] - (\beta + 1) \sum_{i \in F} \log(t_i) - \gamma \alpha^\beta \sum_{i \in F} t_i^{-\beta} \\ & + \sum_{i \in C} \log \left\{ 1 - \exp \left[-\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right] \right\}, \end{aligned}$$

A função escore para os parâmetros α , β e γ é dado por

$$\begin{aligned} U_\alpha(\boldsymbol{\theta}) = & r\beta\alpha^{-1} - \gamma\beta\alpha^{\beta-1} \sum_{i \in F} t_i^{-\beta} + \gamma\beta\alpha^{\beta-1} \sum_{i \in C} t_i^{-\beta} \exp \left[-\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right] \\ & \left\{ 1 - \exp \left[-\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right] \right\}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_\beta(\boldsymbol{\theta}) &= r\beta^{-1} - \sum_{i \in F} \log t_i^{-\beta} - \gamma \sum_{i \in F} \left(\alpha^\beta t_i^{-\beta} \log(\alpha t_i^{-1}) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i \in C} t_i^{-\beta} \left(\alpha^\beta t_i^{-\beta} \log(\alpha t_i^{-1}) \exp \left[-\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right] \left\{ 1 - \exp \left[-\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right] \right\}^{-1} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$U_\gamma(\boldsymbol{\theta}) = r\gamma^{-1} - \alpha^\beta \sum_{i \in F} t_i^{-\beta} + \alpha^\beta \sum_{i \in C} t_i^{-\beta} \exp \left[-\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right] \left\{ 1 - \exp \left[-\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right] \right\}^{-1}$$

matriz $J(\boldsymbol{\theta})$ é

$$J(\boldsymbol{\theta}) = - \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{\alpha\alpha} & \mathbf{L}_{\alpha\beta} & \mathbf{L}_{\alpha\gamma} \\ . & \mathbf{L}_{\beta\beta} & \mathbf{L}_{\beta\gamma} \\ . & . & \mathbf{L}_{\gamma\gamma} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\theta}) &= -r\beta\alpha^{-2} + (\beta-1)\gamma\beta\alpha^{\beta-2} \sum_{i \in F} t_i^{-\beta} - \gamma\beta \sum_{i \in C} t_i^{-\beta} \left\{ \left[(\beta-1)\alpha^{\beta-2} \exp \left[-\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right] - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \gamma\beta\alpha^{2\beta-2} t_i^{-\beta} \exp \left[-\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right] \right] \left\{ 1 - \exp \left[-\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right] \right\}^{-1} - \right. \\
&\quad \left. - \alpha^{2\beta-2} \gamma\beta t_i^{-\beta} \exp \left[-2\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right] \left\{ 1 - \exp \left[-\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right] \right\}^{-2} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\theta}) &= -r\alpha^{-1} + \gamma \sum_{i \in F} \left[t_i^{-\beta} \alpha^{\beta-1} (1 + \beta \log \alpha) - \beta \alpha^{\beta-1} t_i^{-\beta} \log t_i \right] - \\
&\quad - \gamma \sum_{i \in C} \left[\left(\beta \alpha^{\beta-1} t_i^{-\beta} \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \right)' \left\{ 1 - \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \right\}^{-1} \right. \\
&\quad \left. - \beta \gamma \log \alpha \alpha^{2\beta-1} t_i^{-2\beta} \exp \left\{ -2\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \left\{ 1 - \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \right\}^{-2} \right]
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} \left(\beta \alpha^{\beta-1} t_i^{-\beta} \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \right)' &= (t_i^{-\beta} - \beta t_i^{-\beta} \log t_i) (\alpha^{\beta-1} \exp \left\{ -2\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\}) + \\ &\quad \beta t_i^{-\beta} \left[\alpha^{\beta-1} \log \alpha \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} - \right. \\ &\quad \left. \gamma \alpha^{\beta-1} \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \left((\alpha^\beta)' t_i - \alpha^\beta (t_i^{-\beta})' \right) \right] \end{aligned}$$

e

$$\left((\alpha^\beta)' t_i - \alpha^\beta (t_i^{-\beta})' \right) = \alpha^\beta t_i^{-\beta} \log \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\gamma\beta}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i \in F} \alpha^\beta t_i^{-\beta} \log \left(\frac{\alpha}{t_i} \right) - \sum_{i \in C} \left[\alpha^\beta t_i^{-\beta} \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \right]' \\ &\quad \left\{ 1 - \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \right\}^{-1} + \\ &\quad \alpha^\beta t_i^{-\beta} \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \left[\left\{ 1 - \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \right\}^{-1} \right]' \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} \left[\alpha^\beta t_i^{-\beta} \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \right]' &= \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \\ &\quad \log \left(\frac{\alpha}{t_i} \right) \alpha^\beta t_i^{-\beta} \left[1 - \gamma \alpha^\beta t_i^{-\beta} \right] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left[\left\{ 1 - \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \right\}^{-1} \right]' &= -\exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \gamma \alpha^\beta t_i^{-\beta} \log \left(\frac{\alpha}{t_i} \right) \\ &\quad \left\{ 1 - \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \right\}^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\alpha\gamma}(\boldsymbol{\theta}) &= \beta \alpha^{\beta-1} \sum_{i \in F} t_i^{-\beta} - \beta \alpha^{\beta-1} \sum_{i \in C} t_i^{-\beta} \left\{ -\alpha^\beta t_i^{-\beta} \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \right. \\ &\quad \left. \left\{ 1 - \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \right\}^{-1} \left\{ 1 + \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left\{ 1 - \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \right\}^{-1} \right\} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\gamma\gamma}(\boldsymbol{\theta}) &= r\gamma^{-2} - \alpha^\beta \sum_{i \in C} t_i^{-\beta} \left\{ -\alpha^\beta t_i^{-\beta} \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \left\{ 1 - \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \right\}^{-1} \right. \\ &\quad \left. \left[1 + \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \left\{ 1 - \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \right\}^{-1} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\beta\beta}(\boldsymbol{\theta}) &= r\beta^{-2} + \gamma \sum_{i \in F} \log \left(\frac{\alpha}{t_i} \right) \frac{\partial \left(\alpha^\beta t_i^{-\beta} \right)}{\partial \beta} - \gamma \sum_{i \in C} \log \left(\frac{\alpha}{t_i} \right) \\ &\quad \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \left(\alpha^\beta t_i^{-\beta} \right) \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \right. \\ &\quad \left. \left\{ 1 - \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \right\} \right\} \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} \frac{\left\{ \alpha^\beta t_i^{-\beta} \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \right.}{\left\{ 1 - \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \right\}^{-1}} \right\}' &= \alpha^\beta t_i^{-\beta} \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \left\{ \left\{ 1 - \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \right\}^{-1} \right\}' + \\ &\quad \left\{ \alpha^\beta t_i^{-\beta} \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \right\}' \left\{ 1 - \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \right\}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\left\{ \alpha^\beta t_i^{-\beta} \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \right\}' = \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \log \left(\frac{\alpha}{t_i} \right) \alpha^\beta t_i^{-\beta} \left[1 - \gamma \alpha^\beta t_i^{-\beta} \right],$$

$$\begin{aligned} \left\{ \left\{ 1 - \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \right\}^{-1} \right\}' &= -\gamma \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \left(\alpha^\beta t_i^{-\beta} \right)' \\ &\quad \left[1 - \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right\} \right]^{-2} \end{aligned}$$

e

$$\left(\alpha^\beta t_i^{-\beta} \right)' = \alpha^\beta t_i^{-\beta} \log \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)$$

Sob condições que são cumpridas pelos parâmetros no interior do espaço paramétrico,

mas não no limite, a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ é $N_3(0, I(\theta)^{-1})$, em que $I(\theta)$ é a matriz de informação esperada. Este comportamento assintótico é válido se $I(\theta)$ é substituído por $J(\hat{\theta})$, i.e., a matriz de informação observada evoluiu a $\hat{\theta}$. A normal multivariada assintótica $N_3(0, J(\hat{\theta})^{-1})$ distribuição pode ser usada para construir intervalos de confiança aproximados e regiões de confiança para os parâmetros individuais e para as funções de sobrevivência e risco.

4.9 Mistura de duas Distribuições Weibull Inversa Generalizada

Mistura de distribuições tem sido consideradas extensivamente por muitos autores; por uma excelente técnica de estimação em sobrevivência, discussão e aplicações, ver Sultan, Ismail e Al-Moisheer(2006) e Bucar, Nagode e Fajdiga (2003). Recentemente, tem sido revistas propriedades e técnicas de estimação de misturas finitas de alguns modelos de tempo de vida.

Neste trabalho, nós definimos a mistura de duas distribuições weibull inversa generalizada (MDDWIG) que tem como fdp

$$f(t; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^2 p_i f_i(t; \boldsymbol{\theta}_i) \quad (4.36)$$

em que $\sum_{i=1}^2 p_i = 1$, $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1^T, \boldsymbol{\theta}_2^T)^T$, $\boldsymbol{\theta}_1 = (p_1, \gamma_1, \alpha_1, \beta_1)^T$, $\boldsymbol{\theta}_2 = (p_2, \gamma_2, \alpha_2, \beta_2)^T$, e $f_i(t; \boldsymbol{\theta}_i)$, a função densidade do i -ésimo componente, é dado por:

$$f_i(t; \boldsymbol{\theta}_i) = \gamma_i \beta_i \alpha_i^{\beta_i} t^{-(\beta_i+1)} \exp \left\{ -\gamma_i \left(\frac{\alpha_i}{t} \right)^{\beta_i} \right\}, \quad t, \gamma_i, \alpha_i, \beta_i > 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.37)$$

A função acumulada da MDDWIG é dada por:

$$F(t; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^2 p_i F_i(t; \boldsymbol{\theta}_i), \quad (4.38)$$

em que $F_i(t; \boldsymbol{\theta}_i)$, a função acumulada do i -ésimo componente, é dado por:

$$F_i(t; \boldsymbol{\theta}_i) = \exp \left\{ -\gamma_i \left(\frac{\alpha_i}{t} \right)^{\beta_i} \right\}, \quad t, \gamma_i, \alpha_i, \beta_i > 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.39)$$

Alguns gráficos da MDDWIG são apresentados nas figuras 5, 6 e 7.

4.9.1 Propriedades

Nesta subseção, nós analisamos algumas propriedades para a DWIG por extensão dos resultados correspondentes da DWIG.

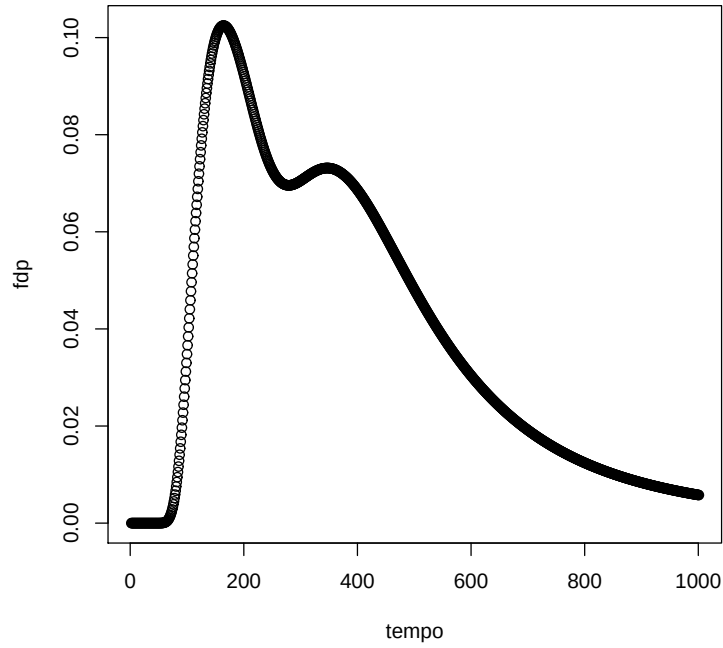


Figura 5: mistura de duas distribuições weibull inversa exponencializada com $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\gamma_1 = 4$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_2 = 3$, $\gamma_2 = 10,5$ e $p_1 = p_2 = 0,5$

O k-ésimo momento de T para DWIG é

$$E(T^k) = \sum_i^2 p_i \gamma_i^{\frac{k}{\beta_i}} \alpha_i^k \Gamma(1 - k\beta_i^{-1}). \quad (4.40)$$

As correspondentes funções de sobrevivência e taxa de falha são, respectivamente,

$$S(t) = \sum_i^2 p_i \left\{ 1 - \exp \left\{ -\gamma_i \left(\frac{\alpha_i}{t} \right)^{\beta_i} \right\} \right\} \quad (4.41)$$

e

$$h(t) = \frac{\sum_{i=1}^2 p_i \gamma_i \beta_i \alpha_i^{\beta_i} t^{-(\beta_i+1)} \exp \left\{ -\gamma_i \left(\frac{\alpha_i}{t} \right)^{\beta_i} \right\}}{\sum_i^2 p_i \left\{ 1 - \exp \left\{ -\gamma_i \left(\frac{\alpha_i}{t} \right)^{\beta_i} \right\} \right\}} \quad (4.42)$$

Se $\gamma_i = 1$ e $\alpha_i = \frac{1}{\delta_i}$ nós temos os resultados discutidos por Sultan, Ismail e AL-Moisheer (2006)

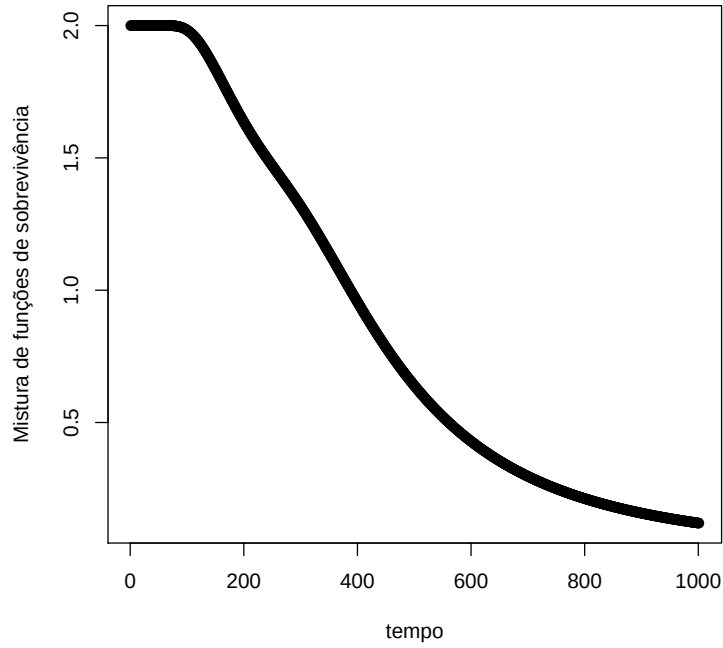


Figura 6: mistura de duas funções de sobrevivência da weibull inversa exponencializada com $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\gamma_1 = 4$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_2 = 3$, $\gamma_2 = 10,5$ e $p_1 = p_2 = 0,5$

4.9.2 Identificabilidade

Se a função densidade do i -ésimo componente, é dado por:

$$f_i(t; \theta_i) = \gamma_i \beta_i \alpha_i^{\beta_i} t^{-(\beta_i+1)} \exp \left\{ -\gamma_i (\alpha_i t)^{\beta_i} \right\}; \quad (4.43)$$

$t \geq 0$; $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i > 0$ e $i = 1, 2, \dots, n$

A função de probabilidade acumulada é dada por:

$$F_i(t; \theta_i) = \exp \left\{ -\gamma_i (\alpha_i t)^{\beta_i} \right\}; \quad (4.44)$$

$t \geq 0$; $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i > 0$ e $i = 1, 2, \dots, n$

Seja ϕ uma transformação associada com cada $F_i \in \Phi$ tendo o domínio de definido por D_{Φ_i} com mapa linear $M : F_i \rightarrow \phi_i$. Se existe uma ordem total ($\leq$) de Φ cada que

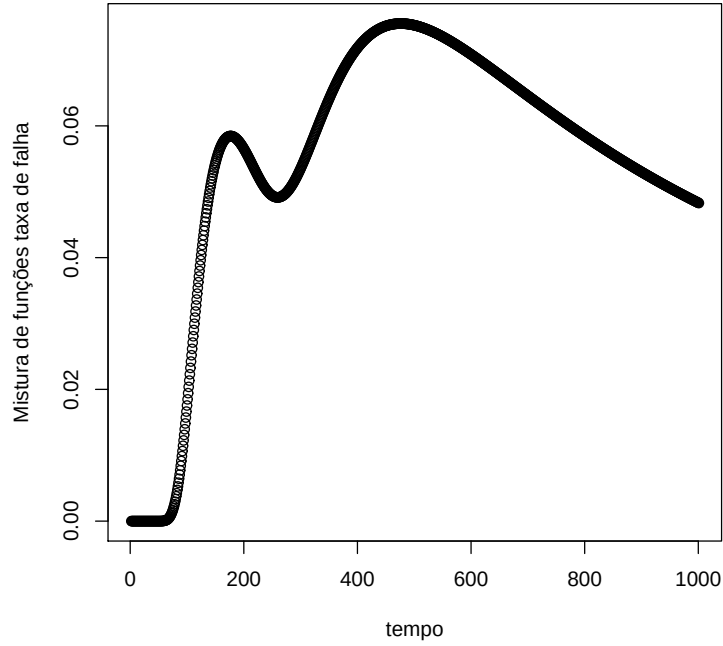


Figura 7: mistura de duas funções taxa de falha da weibull inversa exponencializada com $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 2, \gamma_1 = 4, \alpha_2 = 2, \beta_2 = 3, \gamma_2 = 10,5$ e $p_1 = p_2 = 0,5$

i) $F_1 \leq F_2, (F_1, F_2 \in \Phi) \Rightarrow D_{\Phi_i} \subseteq D_{\Phi_i};$

ii) para cada $F_1 \in \Phi$, existe algum $s_1 \in D_{\Phi_1}$, $\phi_1(s) \neq 0$ cada que $\lim_{s \rightarrow s_1} \frac{\phi_2}{\phi_1} = 0$ for $F_1 < F_2$, $(F_1, F_2 \in \Phi)$.

Então a classe Λ de todas as misturas finitas de distribuições é identificável relativa a Φ .

Usando o mostrado acima, nós provamos a seguinte proposição.

Proposição: A classe de todas as misturas finitas de distribuições relativas a DWIG são identificáveis.

Prova: Seja T uma variável aleatória tendo o *fdp* e função de probabilidade acumulada da DWIG dadas por (4.43) e (4.44), respectivamente. O s -ésimo momento da i -ésimo

componente da DWIG são dados por:

$$\phi_i(s) = E(T^s) = \gamma_i^{\frac{s}{\beta_i}} \alpha_i^{-s} \Gamma(1 - s\beta_i^{-1}), i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.45)$$

de (24), nós temos

1) $F_i < F_j$ quando $\beta_i = \beta_j$, $\gamma_i = \gamma_j$ and $\alpha_i < \alpha_j$ em que $j = i+1; i = 1, 2, \dots, n-1$;
 $j = 1, 2, \dots, n$

e

2) $F_i < F_j$ quando $\alpha_i = \alpha_j > \frac{1}{t}$, $\gamma_i = \gamma_j$ e $\beta_i < \beta_j$ em que $j = i+1; i = 1, 2, \dots, n-1$;
 $j = 1, 2, \dots, n$

Agora seja $D_{\phi_i}(s) = (-\infty, \beta_i)$, $D_{\phi_j}(s) = (-\infty, \beta_j)$ e $s_i = s_j$,

então de 1) e 2) nós temos que

$$\lim_{s \rightarrow \beta_i} \phi_i(s) = \gamma_i^{\frac{\beta_i}{\beta_i}} \alpha_i^{-\beta_i} \Gamma(1 - \beta_i \beta_i^{-1}) \simeq \Gamma(0+) = \infty \quad (4.46)$$

Agora, quando $\alpha_i = \alpha_j > \frac{1}{t}$, $\gamma_i = \gamma_j$ e $\beta_i < \beta_j$, nós temos

$$\lim_{s \rightarrow \beta_i} \phi_j(s) = \gamma_i^{\frac{\beta_i}{\beta_j}} \alpha_i^{-\beta_i} \Gamma(1 - \beta_i \beta_j^{-1}) > 0 \quad (4.47)$$

Por último, de (4.46) e (4.47), nós temos

$$\lim_{s \rightarrow \beta_i} \frac{\phi_j(s)}{\phi_i(s)} = 0 \quad (4.48)$$

a assim a identificabilidade é provada.

5 ABORDAGEM BAYESIANA

5.1 Distribuições a priori para DWIG

Na escolha da distribuição a priori tentamos utilizar alguns dos métodos objetivos como Jeffreys, Laplace e alguns outros métodos também objetivos que geralmente são derivados do método de Jeffreys, porém para utilizar uma priori de Jeffreys é necessário ter a matriz de informação esperada de Fisher e este resultado não foi obtido para distribuição proposta neste trabalho e para os outros métodos que derivam do métodos de Jeffreys também não foram utilizados pelo mesmo motivo que não utilizamos a priori de Jeffreys. Acabamos por adotar o método subjetivo para escolha destas densidades a priori. Então atribuímos as seguintes distribuições a priori:

$$1) h(\alpha) \propto \alpha^{b-1} e^{-a\alpha}; \alpha > 0,$$

$$2) h(\beta) \propto \beta^{d-1} e^{-c\beta}; \beta > 0,$$

$$3) h(\gamma) \propto \gamma^{g-1} e^{-f\gamma}; \gamma > 0.$$

A escolha destas densidades a priori com distribuição gama deve-se ao fato de que todos os parâmetros da DWIG serem positivos e também devido a maior flexibilidade que a distribuição gama bi-paramétrica proporciona para a escolha dos hiperparâmetros. Aqui todos os hiperparâmetros são assumidos conhecidos e positivos, os valores dos hiperparâmetros foram escolhido de forma tal que as densidades a priori sejam não-

informativas.

A função densidade de probabilidade da distribuição gama é expressa da seguinte maneira:

$$\lambda(\eta, \nu; t) = \frac{\nu^\eta}{\Gamma(\eta)} t^{\eta-1} \exp^{-\nu \cdot t} \quad (5.1)$$

em que η, ν são maiores que zero e $t \geq 0$.

5.2 Função de verossimilhança para DWIG

A expressão para verossimilhança da distribuição Weibull inversa generalizada é dada por:

$$f(y | \theta) = [\gamma \beta \alpha^\beta]^n \prod_{i=1}^n t_i^{-(\beta+1)} \exp \left[-\gamma \left(\frac{\alpha}{t_i} \right)^\beta \right]. \quad (5.2)$$

Considerando independência entre as priors, o produto da verossimilhança por elas é expresso por:

$$h(\theta | t) \propto h(\alpha)h(\beta)h(\gamma)f(y | \theta) \quad (5.3)$$

a constante normalizadora c que é a integração da expressão 5.3 e é dada por:

$$c^{-1} = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty h(\alpha)h(\beta)h(\gamma)f(y | \theta) d\alpha d\beta d\gamma \quad (5.4)$$

5.3 Densidade a posteriori para DWIG

Utilizando as expressões 5.3 e 5.4 a posteriori pode ser escrita como:

$$h(\theta | t) = \frac{h(\alpha)h(\beta)h(\gamma)f(y | \theta)}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty h(\alpha)h(\beta)h(\gamma)f(y | \theta)d\alpha d\beta d\gamma}. \quad (5.5)$$

5.4 Média a posteriori e vetor das medianas a posteriori para DWIG

Utilizando a expressão da média a posteriori, encontra-se as seguintes expressões para as médias a posteriori de α , β e γ :

$$\hat{\alpha} = E[\alpha | t] = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha h(\theta | t) d\alpha d\beta d\gamma; \quad (5.6)$$

$$\hat{\beta} = E[\beta | t] = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \beta h(\theta | t) d\alpha d\beta d\gamma; \quad (5.7)$$

$$\hat{\gamma} = E[\gamma | t] = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \gamma h(\theta | t) d\alpha d\beta d\gamma; \quad (5.8)$$

Então poderemos ter $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})^T$ apartir da média.

Para o vetor das medianas a posteriori da DWIG, temos:

$$P\{\alpha_i \geq \hat{\alpha}_i | t\} = \int_{\alpha} h(\theta | t) d\alpha d\beta d\gamma \geq \frac{1}{2} \quad (5.9)$$

$$P\{\beta_i \geq \hat{\beta}_i | t\} = \int_{\beta} h(\theta | t) d\alpha d\beta d\gamma \geq \frac{1}{2} \quad (5.10)$$

$$P\{\gamma_i \geq \hat{\gamma}_i \mid t\} = \int_{\gamma} h(\theta \mid t) d\alpha d\beta d\gamma \geq \frac{1}{2} \quad (5.11)$$

em que $h(\theta \mid t)$ é a densidade a posteriori e $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})^T$ apartir do vetor das medianas a posteriori da DWIG.

6 APLICAÇÃO

6.1 Função Taxa de Falha

A produção comercial da carne do gado no Brasil ,que geralmente provém do gado da raça Nelore, busca otimizar o processo tentando obter um tempo curto para o gado atingir o peso específico no período do nascimento até o desmame ou do desmame até o abate.

Para os dados com 155 touros da raça Nelore estudamos o tempo (em dias) até os animais atingirem o peso de 160kg relativo ao período do nascimento até o desmame, utilizamos apenas 69 animais destes 155, pois trabalhamos com os touros que chegaram até o evento de interesse (falha). Produzimos a curva da função de taxa de falha mostrando que a função de risco, associada o conjunto de dados tem a característica de unimodalidade. Sendo assim a distribuição Weibull inversa Generalizada, será utilizada para modelar esse conjunto de dados.

6.2 Estimação de Parâmetros

Nesta subseção,apresentamos os resultados da estimação de parâmetros do modelo da distribuição Weibull inversa exponencializada, sendo considerados os métodos de máxima verossimilhança vistos na subseção (3.1.1) e os métodos bayesianos estudados na seção (3.3).

6.2.1 Estimação Através do Método de Máxima Verossimilhança

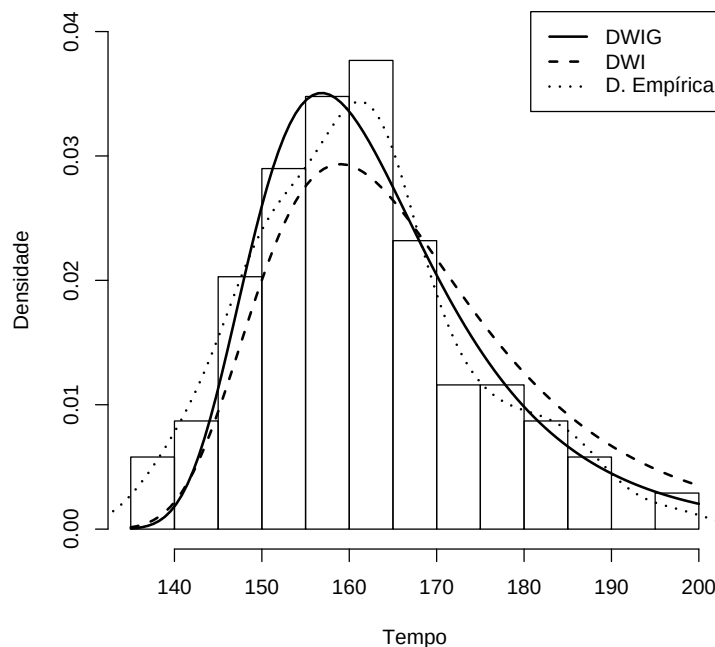


Figura 8: Histograma, funções densidade da Weibull inversa e da Weibull inversa generalizada e densidade empírica.

Utilizando a expressão de $\ell(\theta)$ da subseção (3.1.1) que foi escrita uma rotina para obter estimativas dos estimadores de máxima verossimilhança que não possuem formas fechadas com esta finalidade utilizamos o comando *MaxBFGS* da linguagem de programação Ox da versão 4.0 para estimar os valores do vetor de parâmetros $\theta = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ da distribuição Weibull inversa generalizada para os dados do gado da raça Nelore, este rotina também disponibiliza comandos para diferenciações numéricas (ver apêndice). A rotina MaxBFGS maximiza funções utilizando o método quase-Newton desenvolvido por Broyden, Fletcher, Goldfarb e Shanno (BFGS) com a possibilidade de escolha de condições e parâmetros da maximização, como a utilização de derivadas analíticas ou numéricas da função a ser maximizada, os critérios de convergência, o número máximo de iterações, etc.. Atráves do método de Kaplan-Meier descrito na subseção (3.2.7) obtivemos os valores da função de sobrevivência estimada para os dados em questão, os procedimentos para obtenção das estimativas de $f(t)$, $S(t)$, $h(t)$ e do gráfico foram produzidos no software R ver Venables et al. (2008).

Tabela 2: Valores estimados dos parâmetros α , β e γ pelo método de máxima verossimilhança para os dados do gado da raça Nelore

Parâmetro	Estimativa Clássica
α	137,135047
β	14,979992
γ	7,960508

6.2.2 Estimação Através do Método Bayesiano

Utilizando a expressão de $\ell(\theta)$ da subseção (3.1.1) que foi descrita uma rotina no software Winbugs, que é um software que utiliza três famílias de algoritmo MCMC: Gibbs, Metropolis Hasting e slice sampling (ver apêndice), para estimar os valores do vetor de parâmetros $\theta = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ da distribuição Weibull inversa generalizada para os dados do gado da raça Nelore. Na Tabela 6 são apresentados os resultados obtidos pelo software Winbugs como média, desvio padrão, mediana e intervalo de credibilidade para os parâmetros α , β e γ depois de executado um burn-in de 50.000 iterações com thin de 20 (burn-in) em seguida mais 300.000 iterações com thin de 20 para os dados do gado da raça Nelore.

Tabela 3: Resultados da abordagem bayesiana para distribuição Weibull inversa generalizada

Parâmetro	Média	Desvio Padrão	2,5%	Mediana	97,5%
α	136,3	11,26	118,8	134,6	163,3
β	14,27	1,323	11,75	14,24	16,95
γ	10,67	10,08	0,4774	7,596	38,04

A figuras 9 e 10 foram obtidas utilizando a estimação clássica e a estimação bayesiana do vetor das medianas a posteriori.

O diagnóstico de convergência de Geweke para o vetor de parâmetros utilizando a fração de 0,1 da primeira série de iterações e utilizando a fração de 0,5 da segunda série de iterações, foi obtido através do software *R* utilizando o pacote *CODA* que forneceu os seguintes valores:

a=-0,14886;

b=-0,11026

e

g=0,2012.

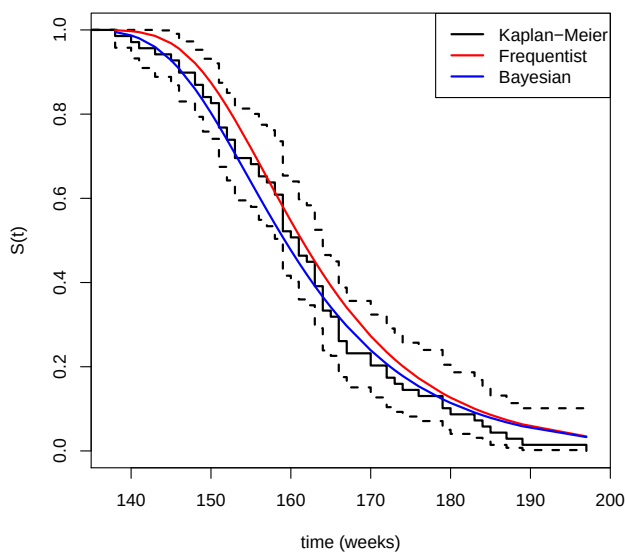


Figura 9: Comparação entre sobrevivências geradas pelo método clássico, bayesiano e Kaplan-Meier esboçadas no esquema $S(t)$ versus tempo. As curvas tracejadas são os intervalos de confiança 95% para o Kaplan-Meier

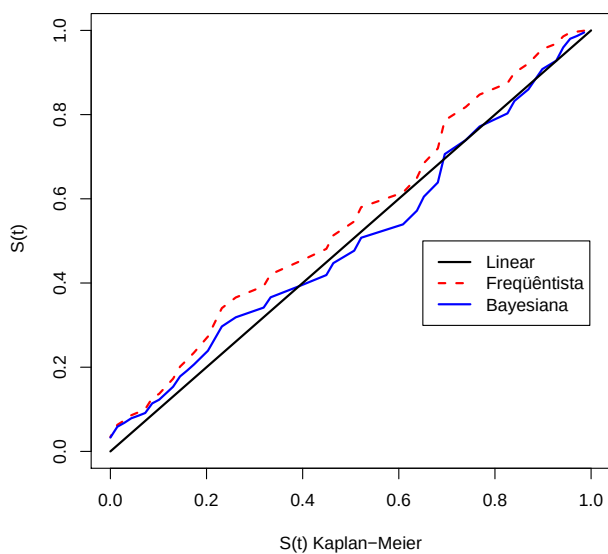


Figura 10: Comparação entre sobrevivências geradas pelo método clássico, bayesiano e Kaplan-Meier esboçadas no esquema de linearização.

Os valores devem ser menores que 1 (um) para convergirem, logo a convergência foi obtida.

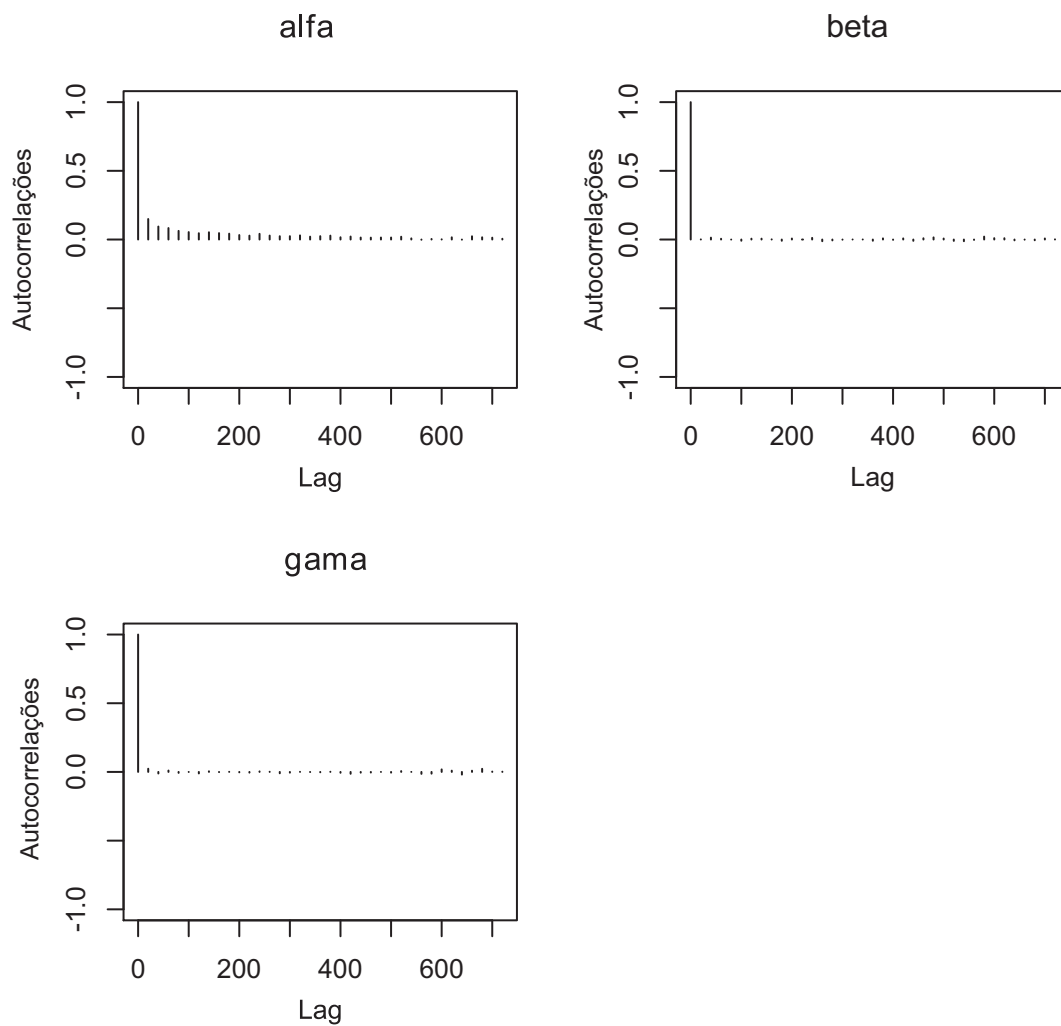


Figura 11: Gráfico de autocorrelação para os parâmetros alfa, beta e gama.

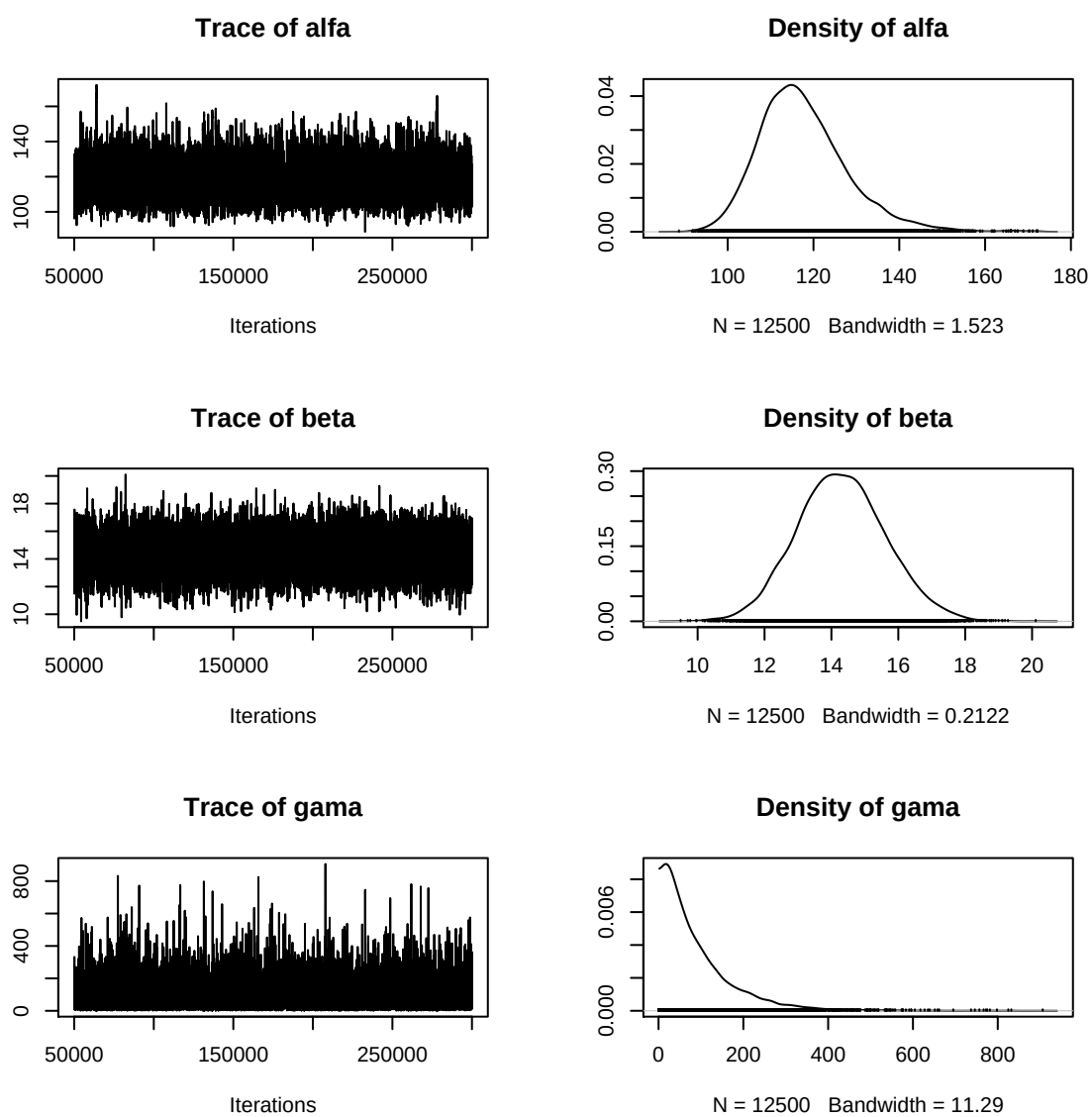


Figura 12: Gráfico das densidades a posteriori e do traço para o vetor de parâmetros.

7 CONCLUSÃO

Introduzimos uma nova distribuição para tempo de vida com três parâmetros chamada de distribuição Weibull inversa generalizada (DWIG) que generaliza algumas distribuições, que tem muitas aplicações e são bastante utilizados na literatura de análise de sobrevivência. O modelo mostrou um melhor ajuste que a distribuição Weibull inversa do qual a mesma foi derivada para os dados do gado Nelore através da comparação com o histograma e com a densidade empírica. A nova distribuição pode ter a função taxa de falha com formas decrescentes, crescentes e unimodal. Providenciamos um tratamento matemático desta distribuição calculando algumas estatísticas. Encontramos a explícita fórmula algébrica para r -ésimo momento para alguns valores fixos dos parâmetros. Foi obtido a estimação dos parâmetros pelo método de máxima verossimilhança e pelo método bayesiano. Para o conjunto de dados utilizados na aplicação, a função de sobrevivência paramétrica com os parâmetros estimados pelo método bayesiana se ajustou melhor a sobrevivência empírica que a função de sobrevivência paramétrica com os parâmetros estimados pelo método clássico.

Referências

- Abramowitz, M., Stegun I. P. (1972). Handbook of mathematical functions. edited by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, Dover publications, Inc., New York.
- Box, G. E. P., Tiao, G.C. (1973). Bayesian inference in statistical analysis. Addison- Wesley, 588p.
- Bucar, T., Nagode, M., Fajdiga, M. (2004). *Reliability approximation using finite Weibull mixture distributions*. Reliability Engineering and System Safety, **84**, 241–251.
- Choudhury, A. (2005). A Simple Derivation of Moments of the Exponentiated Weibull Distribution. *Metrika*, **62**, 17-22.
- Colosimo, E.A., Giolo, S.R. (2006). *Análise de sobrevivência aplicada*. Edgar blucher, 392p, São Paulo.
- Cordeiro, G.M. (1992). *Introdução a teoria assintótica*. 22º Colóquio Brasileiro de Matemática.
- Cordeiro, G.M. (1999). *Introdução a teoria da verossimilhança*. 10º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística.
- Doornik, J. (2007). Ox: An object-oriented matrix programming language. International Thomson Bussiness Press.
- Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S.; Rubin, D. B.(1997) *Bayesian Data Analysis*. London: Chapman Hall, pag. 526.
- Gupta, R.D., Kundu, D. (1999). *Generalized exponential distribution*. Australian and New Zeland Journal of Statistics. **41,2**, 173–188.
- Jiang, R., Murthy, D.N.P, Ji, P. (2001). Models involving two inverse Weibull distributions. Reliability Engineering and System Safety, **73**, 73–81.
- Kass, R.E., Wasserman, L. (1996). *The Selection of Prior Distributions by Formal Rules*. *Journal of the American Statistics Association*, **91**, 1343-1370.
- Lai, C. D., Xie, M., Murthy, D. N. P. (2003). A modified Weibull distribution. *Transactions on Reliability*, **52**, 33-37.
- Leandro, R. A. (2001). *Introdução à Estatística Bayesiana*. Departamento de Matemática e Estatística, ESALQ/USP Piracicaba. São Paulo.
- Lee, P. M. (2004). Bayesian Statistics An Introduction. Oxford University Press Inc. 351p.
- Louzada-Neto, F., Mazucheli, J. e Achcar, J. A. (2001). *Uma Introdução à Análise de Sobrevivência e Confiabilidade*. XXVIII Jornadas Nacionales de Estadística. Chile.

- Mudholkar, G. S., Srivastava, D. K. e Kollia, G. D. (1996). A generalization of the Weibull distribution with application to the analysis of survival data. *J. Americ. Statist. Assoc.*, **91**, 1575-1583.
- Paulino, C. D.; Turkman, M. A. A.; Murteira, B. (2003). Estatística Bayesiana. Fundação Calouste Gulbenkian / Lisboa. 446p.
- Pollard, W. E. (1986). Bayesian statistics for evaluation research An Introduction. Sage Publications New Delhi. 241p.
- Rajarshi, S., Rajarshi, M. B. (1988). Bathtub distributions: a review. *Commun. Statist. Theory. Meth.*, **17**, 2597-2521.
- Sultan, K. S., Ismail, M. A., Al-Moisheer, A. S. (2007). Mixture of two Weibull distributions: Properties and estimation. *Computacional Statistics and Data Analysis*, **51**, 5377-5387.
- Venables, W. N., Smith, D. M. and the R Development Core Team (2008). *An Introduction to R*. R Development Core Team.
- Xie, M., Lai, C. D. (1995). *Reliability analysis using an additive Weibull model with bathtub-shaped failure rate function*. *Reliab. Eng. Syst. Safety*, **52**, 87-93.
- Xie, M., Tang, Y., Goh, T. N. (2002). A modified Weibull extension with bathtub failure rate function. *Reliab. Eng. Syst. Safety*, **76**, 279-285.

APÊNDICE

```
/******
```

PROGRAMA 01: estimação-parametros-EMV.ox

USO:

Estima os parâmetros de máxima verossimilhança do modelo da distribuição Weibull inversa generalizada, mediante a rotina MaxBFGS.

AUTOR:

Edwin Moises Marcos Ortega (edwin@esalq.usp.br)

VERSÃO: 1.0

```
*****/
```

```
#include<oxstd.h>
```

```
#include<oxdraw.h>
```

```
#include<oxfloat.h>
```

```
#include<maximize.h>
```

```
#include<simula.h>
```

```
#pragma link("maximize.oxo")
```

```
static decl g mY;
```

```
log vero(const vP,const adFunc, const avScore,const amHessian)
```

```
{
```

```
decl t,cont;
```

```
decl n=rows(g mY);
```

```

decl uns=ones(n,1);
decl vero=zeros(1,n);
decl a1=vP[0][0]; //alpha
decl a2=vP[1][0]; //beta
decl a3=vP[2][0]; //gamma
for(cont=0;cont<n;++cont)
{ t=g mY[cont][0];
if(g mY[cont][1]==1)
vero[0][cont]=
log(a3)+log(a2)+a2*log(a1)-(a2+1)*log(t) -a3*((a1)a2)*((t)a2 - a2));
if(g mY[cont][1]==0)
vero[0][cont]=
log(1-exp(-a3*((a1/(t+0.0001))a2)));
}
adFunc[0]=double(vero * uns);
return 1;
}
main() {
g mY = loadmat("tabela1 - 5lozada.txt");

print("Dados",g mY);

decl nc=rows(g mY);

decl dfunc;

decl vP=<140.1;33.3;10.5>; //chute inicial

log vero(vP,dfunc,0,0);

println("vero=",dfunc);

MaxControl(-1,20);

decl mhess; decl ir, var, var1, var2;

ir=MaxBFGS(log vero,vP,dfunc,mhess,1);

Num2Derivative(log vero,vP,mhess);

var=-1/mhess;

```

```
//var1=invertsym((-1)*mhess);
var2=((-1)*mhess)l-1);
print("os valores da mhess ",mhess);
print("os valores das variâncias ",var);
//print("os valores das variâncias 1 ",var1);
print("os valores das variâncias 2 ",var2);
print("os valores dos parametros ", vP);
decl ep= sqrt(diagonal(-1/mhess));
print("Estimativa,Erro padrão, p valor: ",vP~ep'~(2*(1-probn(fabs(vP'./ep))))); }
```

```
/*****
```

PROGRAMA 02: estimação-parametros-WINBUGS

USO:

Estima os parâmetros de máxima verossimilhança do modelo da distribuição Weibull inversa generalizada, mediante o método Bayesiano.

AUTOR:

TUTORIAL WINBUGS

VERSÃO: 1.4

```
*****/
```

model

{

C <- 10000

const<- gama*beta*pow(alpha,beta)

cont2<- -beta-1

for(i in 1 : N) {

zeros[i] <- 0

```

cont1[i]<-alpha/t[i]
cont3[i]<-exp(-gama*pow(cont1[i],beta))
L[i]<-const*pow(t[i],cont2)*cont3[i]
phi[i] <- -log(L[i]) + C
zeros[i] ~ dpois(phi[i])
}
alpha ~ dgamma(0.1, 0.1)
beta ~ dgamma(0.1, 0.1)
gama ~ dgamma(0.1, 0.1)
}
list(t=c(138,140,141,143,145,146,146,148,
148,149,149,150,151,151,151,151,152,152,
153,153,153,155,156,156,157,158,158,159,
159,159,159,159,159,160,161,161,161,162,
163,163,163,163,164,164,164,164,165,166,
166,166,166,167,167,170,170,172,172,173,
174,176,179,179,180,183,184,185,187,189,
197),
N=69)
list(alfa=137.2, beta=15, gama=8)
}

```