



Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação  
Departamento de Física

Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada

REGIMES DE PROPAGAÇÃO ANÔMALOS PARA UMA  
CAMINHADA QUÂNTICA COM DUAS PARTÍCULAS  
EMARANHADAS

*Igor Emanuel Gonçalves de Oliveira*

Dissertação de Mestrado

Recife - PE

10 de Março de 2023

Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação  
Departamento de Física

*Igor Emanuel Gonçalves de Oliveira*

**REGIMES DE PROPAGAÇÃO ANÔMALOS PARA UMA  
CAMINHADA QUÂNTICA COM DUAS PARTÍCULAS  
EMARANHADAS**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada do Departamento de Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física Aplicada.

**Orientador: Dr. José Ferraz de Moura Nunes Filho**

**Recife - PE  
10 de Março de 2023**

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

—

**Igor Emanuel Gonçalves de Oliveira**

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de mestre em Física, defendida e aprovada por unanimidade em 07/03/2023 pela Comissão Examinadora.

Orientador:

\_\_\_\_\_

Prof. Dr. José Ferraz de Moura Nunes Filho

Departamento de Física - Universidade Federal Rural de Pernambuco

Banca Examinadora:

\_\_\_\_\_

Prof. Dr. Pedro Hugo de Figueirêdo

Departamento de Física - Universidade Federal Rural de Pernambuco

\_\_\_\_\_

Prof. Dr. Eduardo Jorge da Silva Fonseca

Departamento de Física - Universidade Federal de Alagoas

*"Até aqui o Senhor nos ajudou."*

*1 Samuel 7:12*

Dedico este trabalho, a toda minha  
família e aos meus amigos.

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por mais uma vitória, pelo sustento e pelo dom da vida. Agradeço-o também por poder superar as adversidades desde o meu término da minha graduação, a chegada na metrópole pernambucana, o surto da pandemia do vírus da COVID-19, até os dias de hoje.

Agradeço ao Prof. Dr. José Ferraz de Moura Nunes Filho pela orientação e pela confiança no meu trabalho, estabelecendo um bom vínculo entre nós. Agradecimento ao Prof. Dr. Pedro Hugo de Figueiredo pela contribuição fundamental em relação à nossa pesquisa. A orientação dos dois docentes foi de suma importância para a minha formação porque eu pude lidar, ao longo desse processo, com algumas lacunas profissionais e acadêmicas, que aos poucos vou preenchendo. Minha gratidão à minha amiga e companheira de curso Glaucyevnn Guimarães, por estar comigo nos momentos de turbulência dentro e fora dos estudos. Agradeço também ao companheiro de curso Rodrigo Caitano Barbosa da Silva, por ser o meu companheiro no estudo da área de pesquisa de Informação Quântica com ênfase em Caminhadas Quânticas na nossa universidade.

Agradeço a minha família e os meus amigos, pelo apoio e pela admiração à minha pessoa. Eu sou grato, pois eles sempre percebem o meu potencial intelectual e as minhas qualidades, mesmo sem entender o contexto que estou inserindo, o ambiente acadêmico e o intuito da minha formação.

Agradeço a minha mãe, Ednalva de Oliveira Santos, por gerar a vida e estar comigo o tempo todo nos momentos bons e ruins da vida. Agradeço aos meus pais pelo suporte e por passarem para mim que a vida deve ser aproveitada da melhor maneira, apesar dos problemas. Eu sou grato ao meu pai, Francisco Gonçalves Neto, pelo apoio e pelo acolhimento da sua atual esposa Luciane Almeida. Meu agradecimento a minha tia, Eliane de Oliveira Santos, que através da sua passagem no meio acadêmico tem me ajudado nessa difícil caminhada.

Toda a minha gratidão a Camaragibe, região metropolitana de Recife, por acolher esse baiano de Juazeiro. Apesar de estar de uma capital, este pode conviver com uma realidade um pouco parecida com a sua terra natal. Agradecimento à minha família residente em Camaragibe, por todo apoio e pela convivência durante o período presencial do curso. Em especial, à minha prima Amanda Israela de Freitas.

Agradeço ao Programa de Pós Graduação de Física Aplicada (PPGFA) da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) pela oportunidade e espaço de contribuir com o ramo científico e deixar o meu legado na área. Portanto, através destes, obtive experiências e mais conhecimento durante esse período do mestrado e posteriormente irei compartilhar o meu conhecimento adquirido desde a graduação.

Agradeço ao Prof. Dr. Fernando de Moraes, pela supervisão do Estágio Docente realizado nesse curso. As aulas foram realizadas de maneira remota e ao final delas consegui elogios, carinho e o reconhecimento sincero do nosso trabalho, abrindo espaço para novos horizontes além da academia.

Agradeço ao Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano (IFSertão-PE) pela formação acadêmica no nível de graduação em Licenciatura em Física. Através dessa experiência, obtive uma boa base em algumas profissionais, Prática de Ensino, Oficinas de Física, PIBID (Projeto Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência) e Monitoria.

Agradeço à minha psicóloga Giselle Dark Batista Leão, por estar desde a minha gradu-

ação, tratando dos meus momentos de instabilidades e de certas questões internas.

Agradeço a CAPES pelo investimento financeiro durante o período desse curso.



# Resumo

Analizamos através de um estudo teórico, uma caminhada quântica unidimensional discreta no tempo. A dinâmica dos caminhantes é analisada para estados quânticos de uma única partícula e de duas partículas. Para duas partículas, podemos combinar caminhadas quânticas com estados emaranhados no mesmo sistema. A simetria de estados quânticos bosônicos ou fermiônicos, por exemplo, afeta drasticamente a dinâmica das partículas. Ao longo da caminhada, é introduzida uma desordem nas fases dos divisores de feixe que compõem a rede na qual o caminhante se propaga. Alterando parâmetros dessa desordem, podemos verificar que diferentes regimes de propagação se estabelecem. Os regimes de propagação mais encontrados na natureza são os balísticos, correspondentes a sistema quânticos e os difusivos, associados a estados clássicos. Nesse cenário, mostramos que através da manipulação de um único parâmetro de controle da desordem, é possível mapear toda a região em que o regime de superdifusão está presente, indo do comportamento balístico quântico até a difusão clássica. Além disso, para os estados fermiônicos, existe uma indicação do regime de hiper transporte, no qual os caminhantes se dispersam mais rapidamente que no caso quântico. Nosso modelo de simulação leva em consideração uma possível implementação em um chip de fotônica integrada através de uma aplicação da teoria desenvolvida.

**Palavras-chave:** Caminhada Quântica, Estados Emaranhados, Regimes de Transporte, Fotônica Integrada.

# Abstract

We investigated theoretically a discrete time one dimensional quantum walk. Particle dynamics are analyzed for single particle and two particles quantum states. For two particles states, it is possible to combine entangled states and quantum walk in the same system. Quantum states symmetry for fermionic as well as for bosonic systems, drastically influence its particle dynamics in the lattice. These two particles have symmetric or antisymmetric wave functions, respectively. A disorder is introduced in the beam splitters and in the phase shifters, where the walker spreads in this lattice. Also, this disorder evolves over time. By changing the disorder parameter, we can check the different kinds of transport regimes that settle in. The more usual propagation regimes in nature are ballistic or quantum and diffusive or classic. In this scene, we scan all superdiffusive region through a single disorder control parameter, in our simulation, between ballistic behavior and classic diffusion. Besides, for fermionic states, there is a hyperdiffusive regime indication, where the walker spreads faster than ballistic case. Our integrated arrangement takes into account a possible implementation in an integrated photonic chip through a developed theoretical application.

**Keywords:** Quantum walk, Entangled states, Transport Regimes, Integrated Photonic.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
1.1	Problema Proposto . . . . .	4
1.2	Objetivos . . . . .	5
1.2.1	Objetivos Gerais . . . . .	5
1.2.2	Objetivos Específicos . . . . .	5
1.3	Estrutura do Trabalho . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Caminhada Aleatória Clássica</b>	<b>6</b>
2.1	Conceito . . . . .	6
2.2	Representação . . . . .	7
2.3	Distribuição Binomial de Probabilidade . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Caminhada Quântica</b>	<b>14</b>
3.1	Definição . . . . .	14
3.1.1	Implementação Óptica de uma Caminhada Quântica . . . . .	16
3.1.2	Representação Matemática . . . . .	18
3.2	Caminhada Quântica para Partícula Simples . . . . .	23
3.2.1	Caminhada Quântica para Partícula Simples entrando pela porta A da rede . . . . .	25

3.2.2	Caminhada Quântica para Partícula Simples entrando pela porta B da rede . . . . .	34
3.3	Caminhada Quântica para Duas Partículas com Simetrias Bosônicas e Fermiônicas . . . . .	40
3.4	Caminhada Quântica com Desordem . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Simulações</b>	<b>50</b>
4.1	Caminhada Quântica Ordenada . . . . .	51
4.2	Caminhada Quântica Dinâmica . . . . .	54
4.2.1	Distribuição de Fase Uniforme . . . . .	55
4.2.2	Distribuição de Laplace . . . . .	62
4.2.3	Distribuição de Cauchy . . . . .	67
4.2.4	Transição entre Comportamentos Balísticos e Difusivos para uma Caminhada Quântica . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>85</b>
	<b>Referências</b>	<b>95</b>

# Lista de Figuras

2.1	Tábua de Galton: Representação para caminhada aleatória clássica unidimensional de 8 passos e posições variando de $-8$ a $+8$ . A figura também mostra, destacada em verde, uma possível trajetória do caminhante. [1] . . . . .	10
2.2	Distribuição de probabilidade clássica $P(j, T)$ para uma caminhada aleatória clássica de 4 passos e posições $j$ variando de $-4$ a $+4$ . . . . .	10
2.3	A figura mostra dois gráficos de duas distribuições de probabilidade com variâncias de dispersões diferentes. . . . .	13
3.1	Representação de um Interferômetro de Mach-Zehnder. Figura retirada da referência [2]. . . . .	17
3.2	Esquema de um circuito de caminhada quântica em “bulk optics” com divisores de feixe e moduladores de fase em cascata. [3] . . . . .	17
3.3	Representação de uma Caminhada Quântica Discreta Unidimensional com tempo variando entre $T = 0$ e $T = 4$ e posição $j = 4$ a $j = -4$ . [2] . . . . .	18
3.4	(a) Caminhada quântica unidimensional, onde a partícula pode se mover para cima ( $U$ ) ou para baixo ( $D$ ) em um eixo $j$ . (b) Caminhada quântica para quatro passos ( $T = 4$ ) feita por uma rede de divisores de feixe. A partícula pode entrar pelo lado A ou B e termina em uma das posições finais $j$ . . . . .	24
3.5	A tabela acima mostra os valores para a distribuição de probabilidade quântica $P(j, T)$ da caminhada para a partícula simples incidindo pela entrada A. . . . .	31

3.6	Comparação das distribuições de probabilidades $P(j, t)$ para as caminhadas clássica e quântica . . . . .	33
3.7	A tabela acima mostra os valores para a distribuição de probabilidade quântica $P(j, T)$ da caminhada para a partícula simples incidindo pela entrada B. . .	40
3.8	(a) Caminhada Quântica Unidimensional: O caminhante pode se mover para cima (U) ou para baixo (D) até chegar uma posição final $J$ . (b) Esquema de uma rede de divisores de feixe para uma caminhada quântica de quatro passos, $T = 4$ . As linhas tracejadas indicam os passos $T$ da mesma e as faixas horizontais representam a posição $j$ .(c) Comportamentos de bósons e férmions ao atravessar um divisor de feixe. Figura retirada do artigo [4] . . . . .	43
3.9	Arranjos de uma caminhada quântica com 6 passos, 12 posições possíveis de saída e duas entradas, A e B. O eixo horizontal ( $n$ ) indica os instantes de tempo ou passos da caminhada e o eixo vertical ( $m$ ) representa as posições do caminhante. A representação (a) apresenta a desordem estática, (b) a dinâmica e (c) a dinâmica espaço-temporal. Figura retirada da Tese [1]. . . .	49
4.1	Caminhada Quântica Ordenada com 100 passos e saídas ( $0 < J < 200$ ) com fase nula para todos os divisores de feixe, refletividade $R = 0,5$ e 10 realizações da caminhada, para a partícula simples. . . . .	52
4.2	Distribuição de probabilidade da saída de uma caminhada quântica ordenada de 100 passos com refletividade $R=0,5$ e 10 realizações da caminhada com fase nula para todos os divisores de feixe, para uma única partícula e duas partículas cujo estado inicial tem simetria bosônica e fermiônica. . . . .	53
4.3	Variância da distribuição de probabilidade em uma CQO de 100 passos com refletividade $R = 0,5$ e fase nula para todos os divisores de feixe e média sobre 10 realizações, para a partícula simples, bósons e férmions. . . . .	54

4.4	Distribuição de probabilidade da saída de uma caminhada quântica com desordem dinâmica de 100 passos com refletividade $R = 0,5$ para a distribuição de fase uniforme para uma largura de fase $\delta = 0,02 \text{ rad}$ e média sobre 10 realizações da caminhada, para uma única partícula e duas partículas cujo estado inicial tem simetria bosônica e fermiônica. . . . .	57
4.5	Distribuição de probabilidade da saída de uma caminhada quântica com desordem dinâmica de 100 passos com refletividade $R = 0,5$ para a distribuição de fase uniforme para uma largura de fase $\delta = 1,40 \text{ rad}$ e média sobre 10 realizações da caminhada, para uma única partícula e duas partículas cujo estado inicial tem simetria bosônica e fermiônica. . . . .	59
4.6	Distribuição de probabilidade da saída de uma caminhada quântica com desordem dinâmica de 100 passos para a distribuição de fase uniforme para uma largura de fase $\delta = 2,65 \text{ rad}$ e uma média de 10 realizações da caminhada, para uma única partícula e duas partículas cujo estado inicial tem simetria bosônica e fermiônica. . . . .	61
4.7	Distribuição de probabilidade da saída de uma caminhada quântica com desordem dinâmica de 100 passos com refletividade $R=0,5$ para a distribuição de fase Laplaciana para uma largura de fase $\delta = 0,02 \text{ rad}$ e 10 realizações da caminhada, para uma única partícula e duas partículas cujo estado inicial tem simetria bosônica e fermiônica. . . . .	64
4.8	Distribuição de probabilidade da saída de uma caminhada quântica com desordem dinâmica de 100 passos com refletividade $R=0,5$ para a distribuição de fase laplaciana para uma largura de fase $\delta = 1,40 \text{ rad}$ e média de 10 realizações da caminhada, para uma única partícula e duas partículas cujo estado inicial tem simetria bosônica e fermiônica. . . . .	65
4.9	Distribuição de probabilidade da saída de uma caminhada quântica com desordem dinâmica de 100 passos com refletividade $R = 0,5$ para a distribuição de fase laplaciana para uma largura de fase $\delta = 2,65 \text{ rad}$ e média de 10 realizações da caminhada, para duas partículas cujo estado inicial tem simetria bosônica (a) e fermiônica (b) e para uma partícula simples (c). . . . .	67

4.10	Distribuição de probabilidade da saída de uma caminhada quântica com desordem dinâmica de 100 passos com refletividade $R = 0,5$ para a distribuição de fase de Cauchy para uma largura de fase $\delta = 0,02 \text{ rad}$ e média de 10 realizações da caminhada, para uma única partícula e duas partículas cujo estado inicial tem simetria bosônica e fermiônica. . . . .	69
4.11	Distribuição de probabilidade da saída de uma caminhada quântica com desordem dinâmica de 100 passos com refletividade $R=0,5$ para a distribuição de fase de Cauchy para uma largura de fase $\delta = 1,40 \text{ rad}$ e média de 10 realizações da caminhada, para uma única partícula e duas partículas cujo estado inicial tem simetria bosônica e fermiônica. . . . .	70
4.12	Distribuição de probabilidade da saída de uma caminhada quântica com desordem dinâmica de 100 passos com refletividade $R = 0,5$ para a distribuição de fase de Cauchy para uma largura de fase $\delta = 2,65\text{rad}$ e média sobre 10 realizações da caminhada, para uma única partícula e duas partículas cujo estado inicial tem simetria bosônica e fermiônica. . . . .	72
4.13	Gráfico do expoente da variância da posição das partículas ( $\eta$ ) em função da largura ( $\delta$ ) para uma distribuição de probabilidade uniforme da desordem, em uma caminhada quântica de 100 passos, refletividade $R=0.5$ e 10 interações. Esta simulação foi realizada com larguras desta distribuição de fase uniforme expressas em radiano, variando em torno de $0.01 \text{ rad}$ a $3,03 \text{ rad}$ . Estes resultados foram obtidos para uma única partícula e duas partículas com simetrias bosônicas e fermiônicas. . . . .	77
4.14	Gráfico do expoente da variância da posição das partículas ( $\eta$ ) em função da largura ( $\delta$ ) para uma distribuição de probabilidade Laplaciana da desordem, em uma caminhada quântica de 100 passos, refletividade $R = 0.5$ e 10 interações. Esta simulação foi realizada com larguras desta distribuição de fase laplaciana expressas em radiano, variando em torno de $0,01 \text{ rad}$ a $3,03 \text{ rad}$ . Estes resultados foram obtidos para uma única partícula e duas partículas com simetrias bosônicas e fermiônicas. . . . .	80



4.15 Diagrama que expressa o expoente da variância ( $\eta$ ) de uma distribuição de probabilidade de Cauchy em função da largura de fase ( $\delta$ ) em uma caminhada quântica de 100 passos, com refletividade  $R = 0.5$  e 10 interações. Esta simulação foi realizada com larguras desta distribuição de fase laplaciana expressas em radiano, variando em torno de  $0,01rad$  a  $3,03rad$ . Estes resultados foram obtidos para uma única partícula e duas partículas com simetrias bosônicas e fermiônicas. . . . . 84

# Lista de Tabelas

4.1	Valores dos expoentes da variância da distribuição de probabilidade uniforme para cada largura de fase, dada em radianos, localizada em torno da propagação balística, de acordo com a Figura (4.13). Tais valores foram obtidos para a partícula simples, bósons e férmions. . . . .	75
4.2	Valores dos expoentes da variância da distribuição de probabilidade uniforme para algumas larguras de fase intermediárias, dadas em radianos, como mostra a Figura (4.14). Tais valores foram obtidos para a partícula simples, bósons e férmions. . . . .	75
4.3	Valores dos expoentes da variância da distribuição de probabilidade uniforme para algumas larguras de fase, dadas em radiano, localizadas em torno da propagação difusiva (clássica), como mostra a Figura (4.14). Tais valores foram obtidos para a partícula simples, bósons e férmions. . . . .	76
4.4	Valores dos expoentes da variância da distribuição de probabilidade Laplaciana com desordem, para larguras de fases diferentes dadas em radianos, localizada em torno da propagação balística, de acordo com a Figura (4.14). Tais valores foram obtidos para a partícula simples, bósons e férmions. . . . .	78
4.5	Valores dos expoentes da variância da distribuição de probabilidade laplaciana com desordem, para algumas larguras de fases intermediárias dadas em radianos, como mostra a Figura (4.14). Tais valores foram obtidos para a partícula simples, bósons e férmions. . . . .	79

- 
- 4.6 Valores específicos da largura da distribuição de probabilidade Laplaciana para a desordem, dados em radianos. Estas larguras estão localizadas em torno da propagação difusiva (clássica), como mostra a Figura (4.14). Tais valores foram obtidos para a partícula simples, bósons e férmions. . . . . 80
- 4.7 Valores dos expoentes da variância da distribuição de probabilidade laplaciana para cada largura de fase, dada em radiano, localizada em torno da propagação balística, de acordo com a Figura (4.15). Tais valores foram obtidos para a partícula simples, bósons e férmions. . . . . 81
- 4.8 Valores dos expoentes da variância da distribuição de probabilidade de Cauchy para algumas larguras de fase intermediárias, dadas em radianos, como mostra a Figura (4.15). Tais valores foram obtidos para a partícula simples, bósons e férmions. . . . . 82
- 4.9 Valores dos expoentes da variância da distribuição de probabilidade de Cauchy para algumas larguras de fase, expressas em radiano, localizadas em torno da propagação difusiva (clássica), como mostra a Figura (4.15). Tais valores foram obtidos para a partícula simples, bósons e férmions. . . . . 83

# Capítulo 1

## Introdução

Os primeiros computadores eletrônicos foram utilizados para fins militares, pois havia uma intensa corrida armamentista por conta da Segunda Guerra Mundial que ocorreu entre 1939 e 1945. O primeiro computador totalmente eletrônico foi o ENIAC, desenvolvido por dois pesquisadores da Universidade da Pensilvânia, John Mauchly (1907-1980) e J. Presper Eckert (1919-1995), no período de 1942 a 1945. Mais tarde, nos anos de 1944 a 1951, foi construído outro projeto, o EDVAC, dessa vez com a colaboração de John Von Neumann (1903-1957). Neumann deixou um grande legado ao mundo da computação, principalmente na área de redes neurais, uma das principais linhas de pesquisa estudadas em Inteligência Artificial, e na análise numérica moderna [5–7].

Os dois projetos de arquitetura computacional citados no texto, em sua execução, ocupavam salas enormes, pesavam toneladas, eram programados através de aglomerados de cartões perfurados, cabos de conexão e consumiam milhares de válvulas termiônicas. Como equipamentos tão grandes e robustos se tornaram tão portáteis? A resposta é dada através da invenção de um dispositivo chamado “transistor”, que é um pequeno semicondutor eletrônico capaz de realizar as mesmas tarefas de uma válvula, porém de modo bem mais eficiente. Este aparelho fez uma verdadeira revolução na eletrônica e na computação. A sua descoberta trouxe o Prêmio Nobel de Física em 1956 para William B. Shockley (1910-1984), Walter H. Brattain (1902-1987) e John Bardeen (1908-1991) [5, 8]. O seu desenvolvimento levou à criação dos circuitos integrados, permitindo a sua atuação em conjunto com outros transistores,

o que levou no final dos anos 60, o engenheiro e co-fundador da Intel Corporation Gordon E. Moore a elaborar uma “lei” com seu próprio nome, Lei de Moore, que diz que o número de transistores dobra a cada 18 meses. Esse princípio vem sendo utilizado nos dias atuais, mas o mesmo está chegando em um limiar porque o tamanho dos transistores está cada vez mais se aproximando de escalas atômicas [9]. Então, qual seria uma possível solução para esse problema? Uma delas é a aplicação de tecnologias baseadas em Princípios da Mecânica Quântica (MQ), como é o caso do ramo da Informação Quântica (IQ), por exemplo. A IQ unifica a MQ com a Teoria da Informação ou Teoria Matemática da Comunicação, um ramo da ciência que estuda maneiras de codificar uma informação transmitida por um emissor utilizando fundamentos da teoria da probabilidade [10–12].

A Teoria da Informação foi criada por Claude Shannon (1916-2001) em 1948, começando a tratar a informação como algo mensurável e quantificável, assim como Newton fez com que o movimento não tivesse apenas um olhar qualitativo introduzindo variáveis para massa e força, por exemplo. Dessa maneira, a informação passa a ter uma nova unidade denominada “bit” . Na computação clássica, um transistor registra o valor “0” quando não passa corrente elétrica por ele em um circuito integrado e o valor “1” é registrado quando há passagem de corrente, esse procedimento é chamado de “binário” [11].

O análogo quântico do bit é o “qubit” ou “quantum bit”, sendo representado pelos estados quânticos “ $|0\rangle$ ” e “ $|1\rangle$ ” por meio do Princípio da Superposição Quântica. Os qubits também podem ser caracterizados através do estado da polarização de um fóton gerando fótons com orientações horizontal ( $|H\rangle$ ) e vertical ( $|V\rangle$ ), cada um com sua amplitude de probabilidade [11–13]. Na aplicação do exemplo dos qubits, percebe-se quando um dos graus de liberdade do fóton é polarizado na direção horizontal, o outro está verticalmente polarizado. Aplicando estas e outras propriedades quânticas na parte prática da pesquisa científica, iniciou-se uma nova revolução chamada “Computação Quântica” [13].

Dois dos principais idealizadores da Computação Quântica foram Richard P. Feynman (1918-1988) e David Deutsch (1953-). Feynman propôs as ideias de um computador quântico simulando sistemas quânticos e de algoritmos que simulem sistemas físicos, pois sistemas clássicos não conseguem simular os de natureza quântica e a natureza não se comporta de maneira clássica, conforme ele postulava [14]. Esse argumento deu origem a simulação quân-

tica, no caso dessa dissertação foi feita análise de simulações computacionais que estudam o funcionamento de alguns circuitos integrados para a implementação futura em um chip de fotônica integrada. Posteriormente, Deutsch implementou um conceito de computação quântica universal unificando a teoria da Máquina de Turing e fundamentos da Mecânica Quântica [15].

O uso de tecnologias baseadas no conteúdo teórico da Mecânica Quântica na atualidade encontra dificuldades devido à uma série de limitações práticas, uma delas é a implementação experimental com equipamentos de precisão de controle de fase óptica necessária para alcançar valores permitidos pela MQ. Um exemplo dessa implementação é a fotônica integrada, em que uma de suas características é trabalhar com equipamentos e dispositivos montados em circuitos integrados, como transistores [8], chips e guias de ondas [1]. Antes de chegar a esta experimentação, são realizadas simulações computacionais. No caso desta dissertação, como já foi citado, realizamos tais simulações baseadas em funcionamento de circuitos integrados com o intuito de fazer a aplicação em chips de fotônica.

Os arranjos de circuitos integrados simulados nesta dissertação, são representações de versões quânticas de caminhadas aleatórias clássica. O primeiro modelo foi fornecido por Y. Aharonov, L. Davidovich e N. Zagury, proposto no artigo “Quantum Random Walks” publicado no início da década de 1990 [16]. No artigo, os autores analisaram a superposição de estados quânticos de uma partícula com spins down (D) e up (U) no famoso modelo de Stern-Gerlach, havendo uma probabilidade para cada direção do spin da partícula. Então, iniciou-se uma análise de uma caminhada aleatória com propriedades quânticas. A caminhada quântica se tornou uma importante linha de pesquisa dentro do ramo da informação quântica, sendo bem estudada atualmente, com certas aplicações em outras áreas da ciência e no nosso cotidiano. Assim, alguns detalhes relacionados à sua esquematização e aos seus aspectos qualitativos e quantitativos, foram abordados ao longo do texto desta dissertação.

## 1.1 Problema Proposto

Nosso problema é analisar o comportamento das caminhadas quânticas em diferentes distribuições de probabilidades e verificar os regimes de propagação quando variamos o pa-

râmetro de desordem destas caminhadas.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivos Gerais

O objetivo do nosso estudo é analisar os possíveis regimes de transporte em que um caminhante quântico está sujeito, de acordo com uma desordem presente dentro da caminhada e a simetria da função de onda no estado quântico inicial das partículas integrantes do sistemas.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

- Analisar os regimes de propagação, balísticos e difusivos, em função da desordem;
- Verificar as distribuições de probabilidade analisadas nas simulações;
- Simular o funcionamento de um circuito integrado, servindo como potencial ferramenta para possíveis hardwares.

## 1.3 Estrutura do Trabalho

Essa dissertação está estruturada em 5 capítulos. Começamos a abordagem no primeiro capítulo de Introdução através de um breve texto e das sessões de Problemas Propostos, Objetivos Gerais e Específicos, e Estrutura do Trabalho. No segundo capítulo, apresentamos um estudo teórico sobre caminhada aleatória clássica. No terceiro capítulo, o conteúdo teórico abordado é o da caminhada quântica. No quarto capítulo, foram apresentados os resultados das simulações realizadas. E finalmente, apresentamos as conclusões e as perspectivas no quinto capítulo.

# Capítulo 2

## Caminhada Aleatória Clássica

### 2.1 Conceito

Nesse capítulo, apresentaremos o conteúdo teórico relacionado à caminhada aleatória clássica. Abordaremos a sua definição, bem como a formulação matemática e distribuição de probabilidade aplicada.

A representação de uma caminhada clássica abordada nesse trabalho é uma caminhada unidimensional com passos de tamanho fixo e discreto no tempo, onde o movimento de uma partícula clássica pode ser realizado em um eixo horizontal partindo de um ponto e prosseguindo de maneira aleatória ao longo deste eixo [17, 18]. Esse tipo de sistema está presente não só na Física e na Matemática, mas em várias áreas da ciência com diferentes aplicabilidades. No nosso cotidiano, este movimento pode ser visto através de um caminho traçado por um bêbado tentando voltar para casa depois de uma festa, por um animal predador em busca da presa, na difusão de uma molécula de gás. A Caminhada Aleatória Clássica (CAC) também pode ser vista na forma do Movimento Browniano, em movimento de partículas suspensas em um fluido, e no chamado Voo de Levy, em trajetórias de voos de aves marinhas. Outras aplicações da CAC podem ser vistas nos campos da Robótica [19], Economia [20, 21] e Biologia [22, 23].

Para simular uma caminhada aleatória clássica, utilizamos o modelo da Tábua de Galton, onde podemos ver a trajetória de um dos possíveis caminhos realizados pelo caminhante. Este



também parte de um ponto zero até chegar uma das posições finais do arranjo. Através da ilustração da Tábua de Galton, percebemos que através do comportamento da partícula da caminhada há uma distribuição binomial de probabilidade atuando. Logo, percebemos que a distribuição de probabilidade que dá a posição do caminhante de estar em um determinado instante de tempo é uma distribuição do tipo binomial.

## 2.2 Representação

Representaremos uma caminhada aleatória unidimensional através do movimento retilíneo de uma partícula em um eixo  $j$  e um comprimento fixo  $l$  de cada passo, onde

$$j = ml, \quad (2.1)$$

indica a posição do caminhante aleatório clássico e  $m$  é um número inteiro que está dentro do intervalo  $-N \leq m \leq N$ , em que  $N$  é o número total de passos que a partícula percorre e

$$N = n_1 + n_2, \quad (2.2)$$

então,  $n_1$  é o deslocamento que a partícula faz para a direita e  $n_2$  é o deslocamento executado para a esquerda, isto é, a quantidade de vezes que esta se movimenta para um lado ou para o outro.

Assim, o número de combinações que uma partícula pode executar para a direita e a esquerda com  $N$  passos, é dado pelo arranjo:

$$\frac{N!}{n_1!n_2!}. \quad (2.3)$$

Podemos escrever a probabilidade do caminhante chegar em uma posição associada  $n_1$  passos para a direita e  $n_2$  passos para a esquerda, através de uma única trajetória, como

$$(p \cdots p) (q \cdots q) = p^{n_1} q^{n_2} \quad (2.4)$$

Essas probabilidades são independentes e a soma delas, assim como todas as somas totais de probabilidades, é igual a 1:

$$p + q = 1 \quad (2.5)$$

Existem dois tipos de caminhada aleatória clássica: a simples e simétrica. No primeiro caso, o caminhante salta de um lado para outro (por exemplo: esquerda para a direita ou vice-versa) com probabilidades  $p$  e  $q$  diferentes. No segundo caso, a partícula executa o mesmo movimento com probabilidades  $p$  e  $q$  iguais. Para a nossa caminhada utilizaremos o segundo caso, onde a trajetória do caminhante inicia-se em zero e o seu movimento é executado para a posição  $+1$  ou  $-1$  com as probabilidades  $p$  e  $q$  iguais a  $1/2$  de ir para uma das posições. Esse valor aplicado para as tais probabilidades é visto no cotidiano através do famoso exemplo denominado "cara ou coroa". Ainda abordando a Figura (2.1), um marcador é colocado no ponto zero e uma moeda justa com  $p = q = 1/2$  é lançada, então o caminhante percorre uma unidade para a direita quando surge o lado "cara" e vai para a esquerda quando aparece o lado "coroa" da moeda.

## 2.3 Distribuição Binomial de Probabilidade

A distribuição de probabilidade da caminhada clássica aleatória é do tipo binomial. Para obter esse resultado, considere que o passo do caminhante pode ter  $n_1$  ( $n_2$ ) sucessos e  $N - n_1$  ( $N - n_2$ ) falhas de para a direita (esquerda) de ser executado após  $N$  lançamentos da partícula na caminhada. Então, podemos calcular essa distribuição binomial de duas maneiras. Primeiro, obtemos a sua expressão em função do deslocamento do caminhante executado para a direita e da probabilidade do mesmo de ir para essa mesma direção. De maneira análoga, calculamos a expressão em função do deslocamento realizado pela partícula para o lado esquerdo e da probabilidade da tal de ir também para a esquerda. Portanto, a expressão densidade de probabilidade discreta em função do número total de passos  $N$ , da probabilidade  $p$  e do deslocamento  $n_1$  é:

$$P(N, n_1, p) = \frac{N!}{n_1!(N - n_1)!} p^{n_1} (1 - p)^{N - n_1} \quad (2.6)$$

A expressão acima já se encontra normalizada, pois [24]:

$$\sum_{n_1=0}^N P(n_1) = \sum_{n_1=0}^N \frac{N!}{n_1!(N - n_1)!} p^{n_1} (1 - p)^{N - n_1} = \sum_{n_1=0}^N \binom{N}{n_1} p^{n_1} (1 - p)^{N - n_1} = (p + q)^N = 1 \quad (2.7)$$

Na equação (2.7), vimos que através de um binômio de Newton obtemos a normalização da equação (2.6).

Agora, para a expressão densidade de probabilidade discreta em função do número total de passos  $N$ , da probabilidade  $q$  e do deslocamento  $n_2$ , temos:

$$Q(N, n_2, q) = \frac{N!}{n_2!(N - n_2)!} q^{n_2} (1 - q)^{N - n_2} \quad (2.8)$$

De modo análogo a execução do deslocamento do caminhante para a direita, a normalização para a equação (2.8) é realizada.

Uma das representações mais conhecidas para a caminhada aleatória clássica é a tábua de Galton, apresentado na Figura (2.1). Nesse arranjo, o caminhante parte do ponto zero podendo saltar para a direita ou para a esquerda ao longo de uma caminhada aleatória clássica simétrica com probabilidades  $p$  e  $q$  iguais a  $1/2$ , o eixo horizontal corresponde a posição  $j$  e o vertical corresponde ao tempo  $T$ . Nessa mesma figura, vemos que esta representação possui 8 passos e posições variando nos pontos  $-8$  e  $8$  no eixo horizontal e é possível ver que uma das possíveis trajetórias da partícula está destacada em verde. No final deste caminho, é formada uma imagem que equivale ao diagrama da distribuição binomial de probabilidade, à medida que os caminhantes vão chegando às posições finais da caminhada. Conforme o número de repetições do experimento vai aumentando cada vez mais, o comportamento da figura formada vai se aproximando de uma distribuição normal ou gaussiana. Esta esquematização explica o motivo dos caminhantes chegarem às posições finais associadas ao centro da caminhada.

A partir da Figura (2.1) podemos ver e entender a tabela representada pela Figura (2.2), em que esta mostra os valores da probabilidade do caminhante estar em uma determinada posição  $j$  num determinado instante de tempo  $T$ , obtidos pelas expressões (2.6) e (2.8).

O número de passos de uma caminhada aleatória pode ser utilizado para discretizar o tempo em que o processo ocorre. Cada passo do caminhante será associado a um instante de tempo, o primeiro passo é o instante  $T = 1$ , o segundo passo é o instante  $T = 2$  e assim sucessivamente, até o último passo da caminhada em que a dinâmica se encerra. Este tipo de caminhada aleatória, em que é possível associar os passos do caminhante a

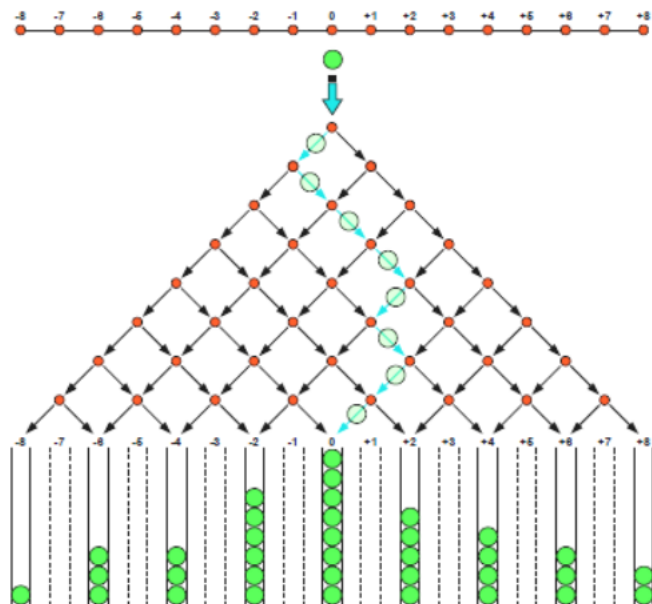


Figura 2.1: Tábua de Galton: Representação para caminhada aleatória clássica unidimensional de 8 passos e posições variando de  $-8$  a  $+8$ . A figura também mostra, destacada em verde, uma possível trajetória do caminhante. [1]

$P(j, T)$	$j$	4	3	2	1	0	1	2	3	4
$T - 0$						1				
$T - 1$				$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				
$T - 2$			$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$			
$T - 3$			$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{8}$	
$T - 4$		$\frac{1}{16}$		$\frac{4}{16}$		$\frac{6}{16}$		$\frac{4}{16}$		$\frac{1}{16}$

Figura 2.2: Distribuição de probabilidade clássica  $P(j, T)$  para uma caminhada aleatória clássica de 4 passos e posições  $j$  variando de  $-4$  a  $+4$ .

um instante de tempo bem definido é chamado de caminhada aleatória discreta no tempo. Retomando à Figura 2.1, vemos que o deslocamento realizado para a direita ou para esquerda é a quantidade de setas por onde o caminhante se move até chegar em uma determinada posição. Então, para obter o valor de cada uma das probabilidades da partícula de estar em uma posição em um determinado instante de tempo após percorrer uma quantidade de deslocamentos realizados para a direita ou para a esquerda, temos:

Para o instante  $T = 1$ , posição  $j = 1$  e deslocamento  $n_1 = 1$ :

$$P(N = 1, n_1 = 1) = \frac{1!}{1!(0)!} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{2}\right) \quad (2.9)$$

Para o instante  $T = 1$ , posição  $j = -1$  e deslocamento  $n_2 = 1$ :

$$Q(N = 1, n_2 = 1) = \frac{1!}{1!(0)!} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \left(\frac{1}{2}\right) \quad (2.10)$$

Para o instante  $T = 2$ , posição  $j = 2$  e deslocamento  $n_1 = 2$ :

$$P(N = 2, n_1 = 2) = \frac{2!}{2!(0)!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{4}\right) \quad (2.11)$$

Para o instante  $T = 2$ , posição  $j = -2$  e deslocamento  $n_2 = 2$ :

$$Q(N = 2, n_2 = 2) = \frac{2!}{2!(0)!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{4}\right) \quad (2.12)$$

Para o instante  $T = 2$ , posição  $j = 0$  e deslocamento  $n_1 = 1$ :

$$P(N = 2, n_1 = 1) = \frac{2!}{1!1!} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \left(\frac{1}{2}\right) \quad (2.13)$$

Para o instante  $T = 3$ , posição  $j = 3$  e deslocamento  $n_1 = 3$ :

$$P(N = 3, n_1 = 3) = \frac{3!}{3!0!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{8}\right) \quad (2.14)$$

Para o instante  $T = 3$ , posição  $j = 1$  e deslocamento  $n_1 = 2$ :

$$P(N = 3, n_1 = 2) = \frac{3!}{2!1!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \left(\frac{3}{8}\right) \quad (2.15)$$

Para o instante  $T = 3$ , posição  $j = -1$  e deslocamento  $n_1 = 1$ :

$$P(N = 3, n_1 = 2) = \frac{3!}{2!1!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \left(\frac{3}{8}\right) \quad (2.16)$$

Para o instante  $T = 3$ , posição  $j = -3$  e deslocamento  $n_2 = 3$ :

$$Q(N = 3, n_2 = 3) = \frac{3!}{3!0!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{8}\right) \quad (2.17)$$

Para o instante  $T = 4$ , posição  $j = 4$  e deslocamento  $n_1 = 4$ :

$$P(N = 4, n_1 = 4) = \frac{4!}{4!0!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{16}\right) \quad (2.18)$$

Para o instante  $T = 4$ , posição  $j = 2$  e deslocamento  $n_1 = 3$ :

$$P(N = 4, n_1 = 3) = \frac{4!}{1!3!} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{4}{16}\right) \quad (2.19)$$

Para o instante  $T = 4$ , posição  $j = 0$  e deslocamento  $n_1 = 2$ :

$$P(N = 4, n_1 = 2) = \frac{4!}{2!2!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{6}{16}\right) \quad (2.20)$$

Para o instante  $T = 4$ , posição  $j = -2$  e deslocamento  $n_1 = 1$ :

$$P(N = 4, n_1 = 1) = \frac{4!}{3!1!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \left(\frac{4}{16}\right) \quad (2.21)$$

Para o instante  $T = 4$ , posição  $j = -4$  e deslocamento  $n_2 = 4$ :

$$P(N = 4, n_2 = 4) = \frac{4!}{0!4!} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{16}\right) \quad (2.22)$$

Por meio das equações (2.9) à (2.22), obtemos os valores para a probabilidade do caminhante de estar em uma determinada posição em um determinado instante de tempo para uma distribuição de probabilidade binomial, ao executar uma caminhada clássica aleatória. Estes valores estão registrados na tabela representada pela Figura (2.2).

Neste capítulo, também foi possível iniciar a abordagem de outra quantidade de grande importância em probabilidade e estatística é a variância. A variância ou desvio padrão é uma medida de dispersão dos valores de uma variável aleatória  $X$  em relação a uma média  $\mu$  desta variável e a função de sua distribuição de probabilidade  $P(X)$  [24, 25], então:

$$Var(X) = \sum (X - \mu)^2 P(X) \quad (2.23)$$

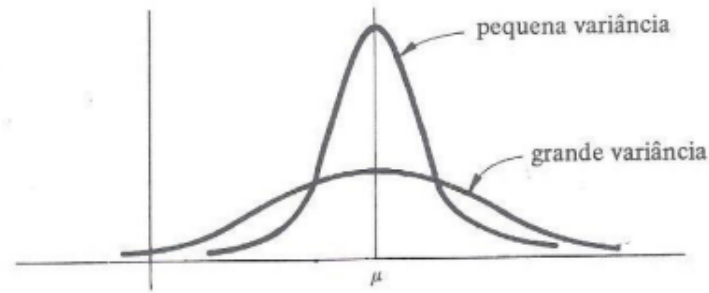


Figura 2.3: A figura mostra dois gráficos de duas distribuições de probabilidade com variâncias de dispersões diferentes.

Em que, através desta dispersão podemos perceber quando os valores de uma variável aleatória possuem uma tendência de se aproximarem da média  $\mu$ , a variância é pequena e quando estes valores se afastarem da média, a variância é grande. Esta situação é apresentada na Figura (2.3), para duas distribuições contínuas com a mesma média  $\mu$ , logo:

A equação (2.24) representa uma variância de uma distribuição contínua de probabilidade [24, 25]. Então,

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu)^2 P(X) dX \quad (2.24)$$

uma consequência do fenômeno da variância é a Lei dos Grandes Números, a qual diz que para uma repetição muito grande de um determinado experimento ocorre uma maior frequência bem maior de um resultado [24]. Aplicando no caso de uma distribuição de probabilidade binomial, podemos perceber que, na maioria das vezes, os caminhantes chegarão às posições finais associadas ao centro da rede da caminhada aleatória. Outra consequência deste efeito é o uma manifestação particular do Teorema do Limite Central, onde a forma do gráfico de uma distribuição binomial tende a se aproximar de uma Gaussiana, para um número muito grande de realizações de um experimento [18].

# Capítulo 3

## Caminhada Quântica

### 3.1 Definição

Numa caminhada clássica, um caminhante pode ir para um lado ou para o outro, a cada etapa da caminhada, com probabilidades bem definidas até chegar nas posições finais do arranjo. A CAC possui um análogo quântico, a caminhada quântica, no qual propriedades da mecânica quântica, tais como superposição de estados e emaranhamento, possuem papel fundamental na análise da dinâmica do caminhante [16, 26–28]. Estas propriedades alteram a trajetória da partícula dentro do arranjo da caminhada gerando distribuições de probabilidade sem análogo clássico. A superposição de estados quânticos, por exemplo, permite que o caminhante possua uma probabilidade de ir tanto para um lado quanto, simultaneamente, em cada posição da caminhada.

Assim como o caso clássico, a caminhada quântica (CQ) também possui as mais variadas aplicações. As CQ's podem contribuir para a implementação da computação quântica [29] e para a criação de um algoritmo de buscas mais eficientes [30], por exemplo. Na biologia, existem estudos que utilizam a CQ para estudar a transferência de energia no processo da fotossíntese [31]. Há também, trabalhos que abordam mais uma das importantes propriedades da Mecânica Quântica, a decoerência [32–37], que é a descrição do mundo clássico através do mundo quântico sendo a principal obstáculo para a realização do processamento de informação quântica [38, 39].



Nesse capítulo serão abordadas as seguintes seções, primeiro a implementação óptica de uma rede de CQ, onde a sua estrutura é representada na forma de um circuito integrado que se assemelha a miniaturas de “Interferômetros de Mach-Zehnder”. Nesta mesma seção podemos perceber que estes interferômetros atuam como modelos de arranjo para a análise inicial da CQ. Posteriormente, abordamos a formulação matemática de uma CQ, que tem como principais objetivos, a dedução e a apresentação de importantes resultados analíticos. Estas equações descrevem a trajetória dos caminhantes quânticos dentro do arranjo. A rede possui duas entradas e as partículas incidem por uma delas. Assim, se inicia a descrição dos caminhantes no sistema, logo começaremos abordando a trajetória de uma partícula simples na caminhada, na seção (3.2). Nesta seção, obtemos a probabilidade de uma partícula estar em uma posição e em mais posições a cada passo da caminhada, para a partícula que entra pela porta A e também para a partícula que é inserida pela porta B. A explicação de uma partícula poder estar em mais de uma posição a cada passo, está no chamado princípio da superposição quântica, o qual é visto nas principais equações obtidas na subseção de representação matemática de uma CQ. Encontrados os valores para as probabilidades do caminhante quântico de estarem em cada sítio da rede, comparamos estes resultados com os valores das probabilidades relacionadas ao caso clássico, para poder analisar melhor a trajetória da partícula na rede da caminhada. Na penúltima seção, é possível ter também a entrada simultânea de dois caminhantes quânticos por ambas as entradas, em especial a análise de bósons e férmions dentro da caminhada. Através da análise destas duas partículas, podemos investigar a simetria do estado inicial destes caminhantes. A análise da simetria do estado inicial dos caminhantes é fundamental, pois esta propriedade tem bastante influência no comportamento da distribuição de probabilidade da caminhada e, conseqüentemente, na trajetória de cada um destes caminhantes no arranjo. Então, realizamos alguns cálculos com o objetivo de obter um estado geral para cada passo da caminhada para bósons e férmions. Logo, podemos investigar o comportamento das partículas ao passarem por um divisor de feixe localizado em cada sítio da rede.

Por último, esta seção descreve as desordens de uma caminhada quântica quando implementamos fase em cada sítio da rede utilizando os seus moduladores de fase. O acréscimo de fase também altera a distribuição de probabilidade do caminhante quântico. As caminhadas

desordenadas são divididas de acordo com alterações de fases relacionadas a tempo e/ou espaço. Logo, as desordens podem ser realizadas apenas no espaço ou no tempo e também há possibilidade de ocorrer tanto no espaço quanto no tempo. Cada tipo de desordem leva a um regime de propagação característico. Na Seção 3.5 iremos detalhar esses tipos de desordem.

O estudo das distribuições de probabilidade dentro de uma caminhada é essencial para a investigação do comportamento do caminhante, onde podemos analisar com mais detalhes em simulações computacionais realizadas durante o período da construção deste trabalho, este registro foi colocado no Capítulo 4.

### 3.1.1 Implementação Óptica de uma Caminhada Quântica

Uma simulação de uma caminhada quântica pode ser realizada através de um conjunto de divisores de feixe e moduladores de fase. Este aparato experimental pode ser implementado em óptica convencional [40–42] e em circuitos de óptica integrada [1, 43]. Neste tipo de implementação experimental, a célula unitária de rede em que o caminhante irá se propagar, descreve um interferômetro de Mach-Zehnder. Este interferômetro foi proposto em 1891 pelo médico e químico austríaco Ludwig Mach (1868-1949) e pelo físico suíço Ludwig Zehnder (1854-1949). O esquema experimental é formado por um espelho semi refletor ou divisor de feixe  $B_1$ , que divide o feixe de luz de acordo com as regras da reflexão, transmitindo ou refletindo esse feixe; dois espelhos refletivos  $B_2$  e  $B_3$ , onde o feixe de luz é refletido e dirigido para o último espelho; e mais um espelho semi refletor  $B_4$ , o último espelho do esquema representado, de mesma função que  $B_1$  e depois disso o fóton passa pelo detector  $D_1$  ou pelo  $D_2$ . Na análise ondulatória, esses detectores são substituídos por anteparos e para o tratamento de partículas, estes atuam como contadores de fótons [2]. O esquema experimental está representado na Figura (3.1). Na figura (3.2), retirada da referência [3], temos a representação do esquema experimental, em óptica convencional, de uma caminhada quântica. Os divisores de feixe e os moduladores de fase estão dispostos em cascata, sendo possível observar o interferômetro de Mach-Zehnder como célula unitária da rede em que o caminhante desenvolve sua dinâmica.

Uma caminhada quântica possui duas classificações quanto à sua evolução temporal:

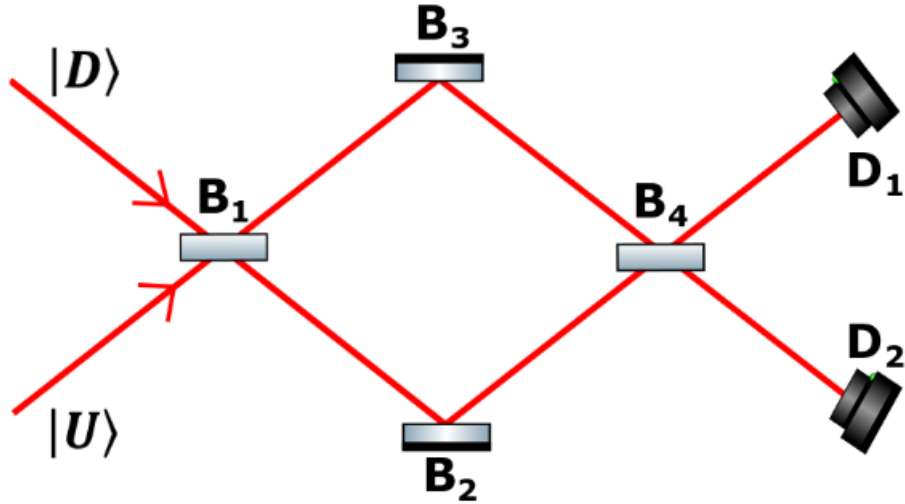


Figura 3.1: Representação de um Interferômetro de Mach-Zehnder. Figura retirada da referência [2].

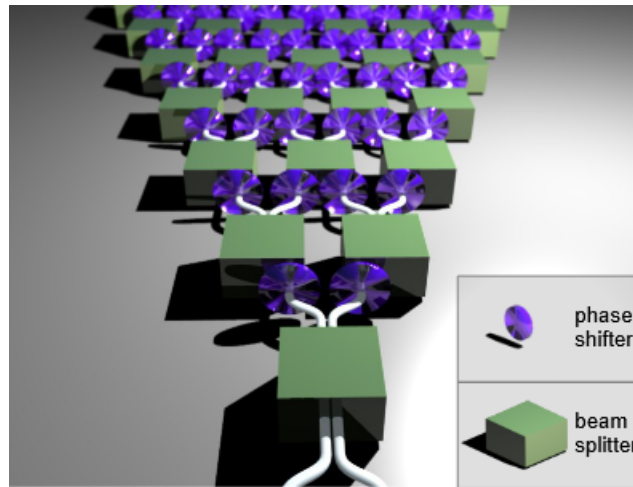


Figura 3.2: Esquema de um circuito de caminhada quântica em “bulk optics” com divisores de feixe e moduladores de fase em cascata. [3]

Discreta ou Contínua. No nosso estudo, trabalhamos apenas com o primeiro caso. Na representação da caminhada quântica discreta unidimensional abordada neste trabalho, é estabelecido um eixo  $j$  que representa a posição do caminhante. A partícula pode se movimentar para cima (U) ou para baixo (D), a cada instante de tempo  $T$ . Isto é, uma partícula pode estar localizada em uma posição  $j$  em um tempo  $T$  e depois transita para as posições  $j + 1$  e  $j - 1$  em um tempo  $T + 1$  até chegar às posições finais  $J$ , no último passo da caminhada. Nesta caminhada quântica de 4 passos, uma partícula parte da posição  $j = 0$  e no

instante  $T = 0$  de cima para baixo (D) ou de baixo para cima (U) e após o instante  $T = 4$ , esta pode chegar em uma das 8 possíveis posições finais, entre  $J = 1$  e  $J = 8$ , e em relação ao eixo das posições  $j$ , este varia entre as posições  $j = 4$  e  $j = -4$  [2], [1]. A ilustração do arranjo descrito nesse parágrafo é vista na Figura 3.2:

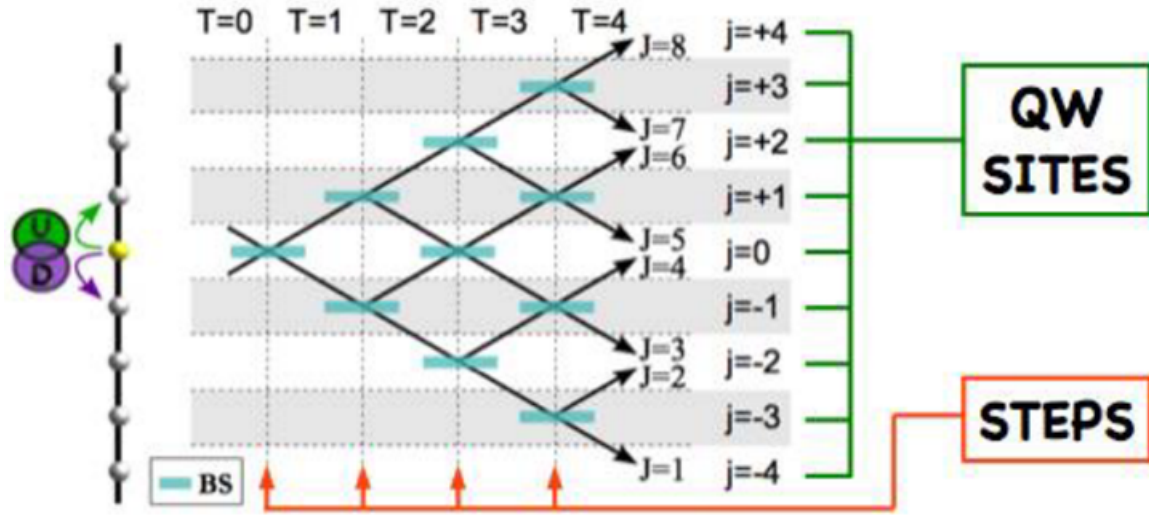


Figura 3.3: Representação de uma Caminhada Quântica Discreta Unidimensional com tempo variando entre  $T = 0$  e  $T = 4$  e posição  $j = 4$  a  $j = -4$ . [2]

### 3.1.2 Representação Matemática

A trajetória de um caminhante que incide de baixo para cima (U) ou de cima para baixo (D) é descrita através dos estados de superposição quântica  $|j, U\rangle_T$  e  $|j, D\rangle_T$  [1]. Estes estados são expressos de seguinte forma:

$$|j, D\rangle_T \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|j-1, D\rangle_{T+1} - |j+1, U\rangle_{T+1}) \quad (3.1)$$

$$|j, U\rangle_T \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|j+1, U\rangle_{T+1} + |j-1, D\rangle_{T+1}) \quad (3.2)$$

Como já foi discutido no capítulo anterior, uma partícula pode incidir de cima para baixo ( $|D\rangle$ ) ou de baixo para cima ( $|U\rangle$ ) em um arranjo de uma caminhada quântica. Essa

incidência é representada pelos estados  $|j, U\rangle_T$  e  $|j, D\rangle_T$ , que transitam de um tempo  $T$  para  $T + 1$ . A dedução matemática é realizada através do surgimento do operador moeda  $\hat{C}$  e do operador passo  $\hat{E}$ . Logo, o objetivo dessa subseção é calcular e obter as expressões (3.1) e (3.2).

Primeiramente, o operador moeda  $\hat{C}$  é expresso da seguinte forma:

$$\hat{C} = a|U\rangle\langle U| + b|U\rangle\langle D| + c|D\rangle\langle U| + d|D\rangle\langle D| \quad (3.3)$$

Onde, o operador  $|U\rangle\langle U|$  é o estado quântico que representa o feixe transmitido de baixo para cima, ao passar por cada divisor. O operador  $|U\rangle\langle D|$  também atua de baixo para cima, mas ao passar por um divisor de feixe, indica reflexão nesta mesma direção. Além disso, o operador  $|D\rangle\langle D|$  corresponde ao feixe transmitido de cima para baixo, passando por um divisor e a reflexão realizada nessa mesma direção é representada pelo operador  $|D\rangle\langle U|$ . Os coeficientes  $a, b, c$  e  $d$  possuem a denominação de amplitudes de probabilidades, o que significa dizer que cada coeficiente indica parcelas dos feixes refletidos ou transmitidos ao chegar em cada divisor de feixe. Com isso, a Equação (3.4) representa o operador associado ao lançamento da partícula em cada um deste componente óptico.

Em seguida, temos o operador passo condicional  $\hat{E}$  que é expresso da seguinte forma:

$$\hat{E} = \sum_j (\langle j-1| \langle j| \otimes |D\rangle\langle D| + |j+1\rangle \langle j| \otimes |U\rangle\langle U|) \quad (3.4)$$

Esse operador representa uma translação condicional que permite o caminhante que está localizado na posição  $j - 1$ , vindo cima para baixo ( $|D\rangle\langle D|$ ), seguir nessa mesma direção e na posição  $j + 1$ , ele segue de baixo para cima ( $|U\rangle\langle U|$ ) e segue condicionado a percorrer nessa direção.

O estado quântico para as direções  $|D\rangle$  e  $|U\rangle$  em um instante de tempo  $T$  na caminhada é representado pelos produtos tensoriais:

$$|j, D\rangle_T = |j\rangle_T \otimes |D\rangle_T \quad (3.5)$$

$$|j, U\rangle_T = |j\rangle_T \otimes |U\rangle_T \quad (3.6)$$

A evolução temporal destes estados é expressa da seguinte forma:

$$|j, D\rangle_{T+n} = \hat{U}^n |j, D\rangle_T \quad (3.7)$$

$$|j, U\rangle_{T+n} = \hat{U}^n |j, U\rangle_T \quad (3.8)$$

Onde,  $\hat{U}^n$  é o operador de evolução temporal e  $n$  é o número de vezes que esse operador é aplicado.

Primeiro, iremos aplicar o estado incidente de baixo para cima ( $|U\rangle$ ). Então, aplicando valores para as amplitudes de probabilidades da equação (3.4),  $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{2}}$  e  $d = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ , a expressão passa a ser um caso particular do operador moeda  $\hat{C}$  denominado "Operador Moeda de Hadamard" ( $\hat{H}$ ), como mostra a equação (3.9).

$$\hat{C} = \hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|U\rangle\langle U| + |U\rangle\langle D| + |D\rangle\langle U| - |D\rangle\langle D|) \quad (3.9)$$

Analisando a equação (3.9), podemos considerar  $|U\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $|D\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

A expressão (3.9) pode se tornar a forma mais conhecida para o operador moeda de Hadamard  $\hat{C}$ , dada pela equação (3.11):

$$\hat{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad (3.10)$$

Segue que:

$$\hat{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Agora, aplicamos o operador moeda de Hadamard  $\hat{C}$ , dado pela equação (3.9), na expressão (3.6):

$$\hat{C} |j, U\rangle_T = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|U\rangle \langle U| + |U\rangle \langle D| + |D\rangle \langle U| - |D\rangle \langle D|) \right) (|j\rangle_T \otimes |U\rangle_T) \quad (3.12)$$

$$\hat{C} |j, U\rangle_T = \frac{1}{\sqrt{2}} (|j\rangle_T \otimes |U\rangle_T + |j\rangle_T \otimes |D\rangle_T) = (|j, U\rangle_T + |j, D\rangle_T) \quad (3.13)$$

Aplicando a equação (3.13) no operador passo  $\hat{E}$ , dado pela equação (3.4), obtemos  $\hat{E}(\hat{C} |j, U\rangle_T)$ . Este resultado indica a evolução do estado quântico da partícula incidente de baixo para cima, então:

$$\hat{E}(\hat{C} |j, U\rangle_T) = \sum_{j'} (\langle j' - 1 | \langle j' | \otimes |D\rangle \langle D| + |j' + 1\rangle \langle j' | \otimes |U\rangle \langle U|) \frac{1}{\sqrt{2}} (|j\rangle_T \otimes |U\rangle_T + |j\rangle_T \otimes |D\rangle_T) \quad (3.14)$$

$$\hat{E}(\hat{C} |j, U\rangle_T) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sum_{j'} \langle j' | j \rangle (|j' - 1\rangle \otimes |D\rangle) + \sum_{j'} \langle j' | j \rangle (|j' + 1\rangle \otimes |U\rangle) \right) \quad (3.15)$$

Utilizando a função delta de Kronecker:

$$\delta_{j'j} = \langle j' | j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } j' = j \\ 0 & \text{se } j' \neq j \end{cases} \quad (3.16)$$

Temos:

$$\hat{E}(\hat{C} |j, U\rangle_T) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sum_j |j - 1\rangle_{T+1} \otimes |D\rangle_{T+1} + \sum_j |j + 1\rangle_{T+1} \otimes |U\rangle_{T+1}) \quad (3.17)$$

$$\hat{E}(\hat{C} |j, U\rangle_T) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_j (|j + 1, U\rangle_{T+1} + |j - 1, D\rangle_{T+1}) \quad (3.18)$$

Logo, obtemos a equação (3.2) através da expressão (3.18). Esta equação representa o estado quântico que evolui de um tempo  $T$  para um tempo  $T + 1$ , isto para a direção  $|U\rangle$ , como é mostrado logo abaixo:

$$|j, U\rangle_T \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|j + 1, U\rangle_{T+1} + |j - 1, D\rangle_{T+1})$$

Agora de maneira análoga, faremos o cálculo para o estado quântico evoluído de um caminhante, no tempo, que incide de cima para baixo ( $|D\rangle$ ). Então, aplicando os valores

$a = c = d = 1/\sqrt{2}$  e  $b = -1/\sqrt{2}$  nas amplitudes de probabilidades da equação (3.3), obtemos a Equação (3.19) para o operador moeda de Hadamard:

$$\hat{C} = \hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|U\rangle\langle U| - |U\rangle\langle D| + |D\rangle\langle U| + |D\rangle\langle D|) \quad (3.19)$$

Considerando  $|U\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $|D\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  para a Equação (3.19), podemos também chegar na forma mais conhecida para o operador moeda de Hadamard  $\hat{C}$ , que também pode ser expressa pela equação (3.21).

$$\hat{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad (3.20)$$

Segue que:

$$\hat{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Agora aplicamos o operador moeda de Hadamard  $\hat{C}$  representado pela Equação (3.19), na expressão (3.5). Logo:

$$\hat{C} |j, D\rangle_T = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|U\rangle\langle U| - |U\rangle\langle D| + |D\rangle\langle U| + |D\rangle\langle D|) \right) (|j\rangle_T \otimes |D\rangle_T) \quad (3.22)$$

$$\hat{C} |j, D\rangle_T = \frac{1}{\sqrt{2}} (|j\rangle_T \otimes |D\rangle_T - |j\rangle_T \otimes |U\rangle_T) = (|j, D\rangle_T - |j, U\rangle_T) \quad (3.23)$$

Aplicando o operador passo  $\hat{E}$  na equação (3.23), obtemos  $\hat{E}(\hat{C} |j, D\rangle_T)$ . Este resultado indica a evolução do estado quântico da partícula incidente de cima para baixo, então:

$$\hat{E} = \sum_{j'} (\langle j' - 1 | \langle j' | \otimes |D\rangle\langle D| + |j' + 1\rangle\langle j' | \otimes |U\rangle\langle U|) \frac{1}{\sqrt{2}} (|j\rangle_T \otimes |D\rangle_T - |j\rangle_T \otimes |U\rangle_T) \quad (3.24)$$



$$\hat{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sum_{j'} \langle j'|j \rangle (|j' - 1\rangle \otimes |D\rangle) - \sum_{j'} \langle j'|j \rangle (|j' + 1\rangle \otimes |U\rangle) \right) \quad (3.25)$$

Aplicando novamente a função delta, representada pela equação (3.16), na expressão (3.25), obtemos:

$$\hat{E}(\hat{C}|j, D\rangle_T) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_j |j - 1\rangle_{T+1} \otimes |D\rangle_{T+1} - \sum_j |j + 1\rangle_{T+1} \otimes |U\rangle_{T+1} \quad (3.26)$$

$$\hat{E}(\hat{C}|j, D\rangle_T) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_j (|j - 1, D\rangle_{T+1} - |j + 1, U\rangle_{T+1}) \quad (3.27)$$

Logo, obtemos a equação (3.1) através da expressão (3.27). Esta equação representa o estado quântico que evolui de um tempo  $T$  para  $T + 1$  para a direção ( $|D\rangle$ ), como é mostrado logo abaixo:

$$|j, D\rangle_T \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|j - 1, D\rangle_{T+1} - |j + 1, U\rangle_{T+1})$$

Desta forma, vemos que a dinâmica das equações (3.1) e (3.2) é completamente equivalente quando aplicamos os operadores passo condicional e moeda. Logo, iremos utilizar estes dois operadores para simular uma caminhada quântica de  $N$  passos.

## 3.2 Caminhada Quântica para Partícula Simples

Nessa sessão, iremos ver como se obtém a distribuição de probabilidade de uma caminhada quântica, ou seja, veremos a probabilidade de um caminhante estar em uma posição  $j$  e em um determinado instante de tempo  $T$  na rede. Iniciamos essa análise por meio da inserção de uma partícula, que denominamos "partícula simples", na rede de divisores de feixe, ela pode entrar pelo lado A ou B do mesmo. Como mostra a Figura (3.4).

Obteremos agora, os estados quânticos gerais para cada passo da caminhada. A expressão deste estado geral quântico relaciona os estados de superposição quântica, Equação (3.28) e Equação (3.29), e as amplitudes de probabilidades  $\alpha_{j,U}$  e  $\beta_{j,D}$ , estes termos são associados às

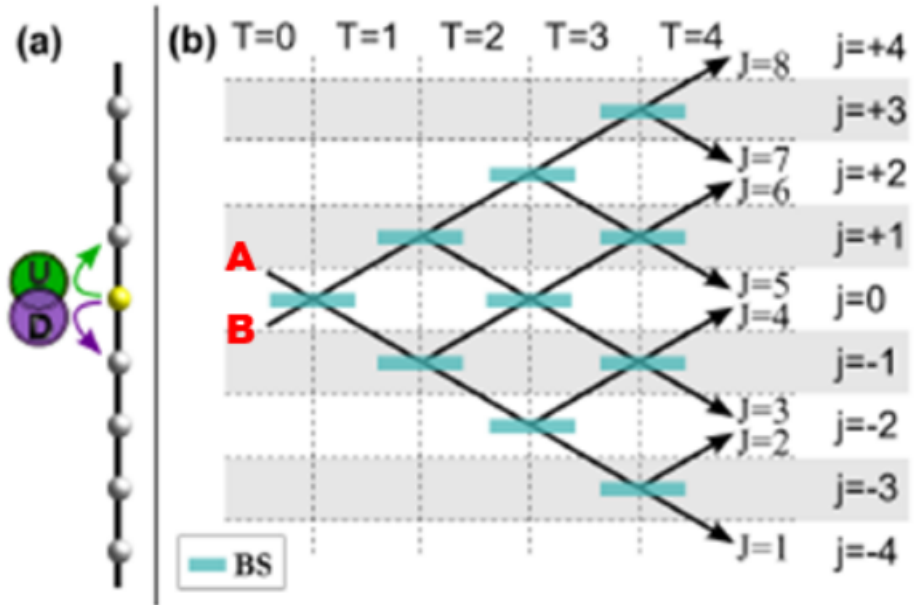


Figura 3.4: (a) Caminhada quântica unidimensional, onde a partícula pode se mover para cima ( $U$ ) ou para baixo ( $D$ ) em um eixo  $j$ . (b) Caminhada quântica para quatro passos ( $T = 4$ ) feita por uma rede de divisores de feixe. A partícula pode entrar pelo lado A ou B e termina em uma das posições finais  $j$ .

posições  $j$  e as direções do feixe das partículas quânticas que chegam nessas posições. Logo, a descrição realizada nesse parágrafo é representada matematicamente pela expressão (3.28) [16, 44].

$$|\Psi\rangle_T = \sum_j \alpha_{j,U} |j, U\rangle_T + \sum_j \beta_{j,D} |j, D\rangle_T \quad (3.28)$$

A probabilidade de cada partícula de estar em uma posição em um determinado instante  $T$  é calculada através da soma do quadrado das amplitudes de probabilidades, ou seja, por meio dela iremos medir o quanto de incidência de partículas vindas de cima para baixo ( $|D\rangle$ ) e/ou de baixo para cima ( $|U\rangle$ ) chegará nessa mesma posição [44, 45]. A expressão que descreve esse processo é a (3.28),

$$P(j, T) = |\alpha_{j,U}|^2 + |\beta_{j,D}|^2, \quad (3.29)$$

onde a amplitude de probabilidade  $\alpha_{j,U}$  indica a parcela de feixe vinda de baixo para cima e a amplitude  $\beta_{j,D}$  indica a parcela que chega no divisor de feixe oriunda de cima para baixo. As amplitudes de probabilidades indicam ainda mais a atuação do princípio da superposição na caminhada, onde uma partícula pode estar em várias posições diferentes a cada passo. Através das equações (3.27) e (3.28), foi possível obter os valores para a probabilidade de uma partícula estar em uma ou mais posições a cada instante. É possível também obter diferentes distribuições de probabilidade ao final da caminhada através dos resultados encontrados nas tabelas que iremos calcular nas próximas subseções. O comportamento destas distribuições na caminhada é estudado com mais detalhes no capítulo 4, o qual aborda as simulações que foram realizadas neste trabalho. Estas análises são feitas para a partícula simples entrando pela porta A e posteriormente para a porta B. Assim, podemos iniciar pela investigação de uma partícula simples entrando pelo lado A.

### 3.2.1 Caminhada Quântica para Partícula Simples entrando pela porta A da rede

Iniciando a abordagem sobre o comportamento de uma partícula simples dentro da rede da caminhada, analisamos a descrição da trajetória de um caminhante que entra na rede pela porta A. Para essa representação, utilizamos uma caminhada de 4 passos apresentada na Figura (3.3). Nesta seção, apresentamos os cálculos realizados para a obtenção da probabilidade do caminhante estar em cada sítio da rede. Estes cálculos representam o andamento da partícula a cada passo da caminhada. Começamos pela utilização das Equações (3.1) e (3.2), em que estas indicam a evolução temporal do caminhante no arranjo e a superposição deste nas possíveis posições a cada instante na caminhada. Ainda analisando as equações citadas, é possível identificar a cada passo as direções em que os feixes poderão chegar nos divisores posteriores no próximo passo. Depois obtemos os estados quânticos gerais pertencentes a cada passo da caminhada, em que é possível juntar todos os estados quânticos de superposição correspondentes estes instantes. Por último, obtemos valores para a probabilidade do caminhante de estar em cada um dos sítios. Estes são obtidos através da obtenção do módulo quadrado dos fatores que multiplicam os estados quânticos também representados

pelas Equações (3.1) e (3.2). O módulo destes fatores podem ser únicos ou serem somados, dependendo de quantos estados quânticos existirem referentes a um sítio. Ainda sobre estes valores, registramos em uma tabela e através dela podemos saber quais as parcelas dos feixes que chegam nos divisores e identificar possíveis trajetórias do caminhante. Ao final, comparamos esse resultado com o resultado encontrado para o caso clássico registrado pela Figura (2.2).

Na entrada A, a partícula incide de cima para baixo ao chegar no primeiro divisor de feixe do arranjo da caminhada. Então, a representação do seu estado parte de um determinado instante  $T$  e em uma posição  $j$  para um estado evoluído com tempo  $T + 1$  a partir de um estado ( $|D\rangle$ ) descrito pela Equação (3.2). Primeiro, obteremos a evolução temporal dos estados quânticos para cada posição da caminhada. Então:

No instante  $T = 0$  e posição  $j = 0$  utilizamos a Equação (3.1), pois a partícula simples entra na rede pela porta A, de acordo com a Figura (3.4). Então:

$$|0, D\rangle_0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|-1, D\rangle_1 - |1, U\rangle_1). \quad (3.30)$$

Para o instante  $T = 1$  e a posição  $j = -1$ , utilizamos o termo da equação (3.30) relacionado à parcela de feixe que incide nesta posição, vinda da direção de cima para baixo. Logo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |-1, D\rangle_1 \rightarrow \frac{1}{2}(|-2, D\rangle_2 - |0, U\rangle_2). \quad (3.31)$$

Para o instante  $T = 1$  e a posição  $j = 1$ , novamente utilizando a equação (3.30), aplicamos o termo relacionado à parcela de feixe que incide nesta posição, vinda da direção de baixo para cima. Logo:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} |1, U\rangle_1 \rightarrow -\frac{1}{2}(|2, U\rangle_2 + |0, D\rangle_2). \quad (3.32)$$

Para o instante  $T = 2$  e a posição  $j = -2$ , utilizamos o termo da equação (3.31) relacionado à parcela de feixe que incide nesta posição, vinda da direção de cima para baixo. Então:

$$\frac{1}{2} |-2, D\rangle_2 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}(|-3, D\rangle_3 - |-1, U\rangle_3). \quad (3.33)$$

No instante  $T = 2$  e posição  $j = 2$ , novamente utilizando a equação (3.32), aplicamos o termo relacionado à parcela de feixe que incide nesta posição, vinda da direção de baixo

para cima. Logo:

$$-\frac{1}{2}|2, U\rangle_2 \rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{2}}(|3, U\rangle_3 + |1, D\rangle_3). \quad (3.34)$$

Para o instante  $T = 2$  e a posição  $j = 0$ , duas parcelas de feixe são inseridas neste sítio. Uma delas chega no divisor de feixe da posição  $j = 0$ , vinda da direção ( $|U\rangle$ ) e representada pelo termo  $\frac{1}{2}|0, U\rangle_2$  da equação (3.31). A outra parcela que chega nesta mesma posição, vem da direção ( $|D\rangle$ ) e é representada pelo termo  $\frac{1}{2}|0, D\rangle_2$  da equação (3.32). Logo:

$$-\frac{1}{2}|0, U\rangle_2 \rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{2}}(|1, U\rangle_3 + |-1, D\rangle_3); \quad (3.35)$$

$$-\frac{1}{2}|0, D\rangle_2 \rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{2}}(|-1, D\rangle_3 - |1, U\rangle_3). \quad (3.36)$$

Para o instante  $T = 3$  e a posição  $j = -3$ , utilizamos o termo da equação (3.33) relacionado à parcela do feixe que incide nesta posição através da direção ( $|D\rangle$ ). Logo:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}|-3, D\rangle_3 \rightarrow \frac{1}{4}(|-4, D\rangle_4 - |2, U\rangle_4). \quad (3.37)$$

Para o instante  $T = 3$  e a posição  $j = -1$ , três parcelas de feixe são inseridas neste sítio. Uma delas chega no divisor de feixe desta posição, vinda da direção ( $|U\rangle$ ) e é representada por um dos termos da equação (3.33). As outras duas parcelas que chegam nesta mesma posição na direção ( $|D\rangle$ ) e são representadas por um dos termos da equação (3.35) e o outro termo referente à equação (3.36). Logo:

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}|-1, U\rangle_3 \rightarrow -\frac{1}{4}(|0, U\rangle_4 + |-2, D\rangle_4); \quad (3.38)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}|-1, D\rangle_3 \rightarrow -\frac{1}{4}(|-2, D\rangle_4 - |0, U\rangle_4); \quad (3.39)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}|-1, D\rangle_3 \rightarrow -\frac{1}{4}(|-2, D\rangle_4 - |0, U\rangle_4). \quad (3.40)$$

Para o instante  $T = 3$  e a posição  $j = 1$ , três parcelas de feixe são inseridas neste sítio. Uma delas chega no divisor de feixe desta posição, vinda da direção ( $|D\rangle$ ) e é representada

por um dos termos da equação (3.34). As outras duas parcelas que chegam nesta mesma posição na direção ( $|U\rangle$ ) e são representadas por um dos termos da equação (3.35) e o outro termo referente à equação (3.36). Logo:

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} |1, D\rangle_3 \rightarrow -\frac{1}{4}(|0, D\rangle_4 - |2, U\rangle_4); \quad (3.41)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} |1, U\rangle_3 \rightarrow -\frac{1}{4}(|2, U\rangle_4 + |0, D\rangle_4); \quad (3.42)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} |1, U\rangle_3 \rightarrow \frac{1}{4}(|2, U\rangle_4 + |0, D\rangle_4). \quad (3.43)$$

Para o instante  $T = 3$  e a posição  $j = 3$ , utilizamos um dos termos da equação (3.34) que é associado à parcela do feixe que incide nesta posição na direção ( $|U\rangle$ ). Então:

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} |3, U\rangle_3 \rightarrow -\frac{1}{4}(|4, U\rangle_4 + |2, D\rangle_4). \quad (3.44)$$

Agora, vamos juntar os estados quânticos de todas as posições  $j$  associados a um instante  $T$  utilizando a equação (3.28):

Para o instante  $T = 1$ :

$$|\Psi\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-1, D\rangle_1 - |1, U\rangle_1). \quad (3.45)$$

Para o instante  $T = 2$ :

$$|\Psi\rangle_2 = \frac{1}{2} (|-2, D\rangle_2 - |0, D\rangle_2 - |0, U\rangle_2 - |2, U\rangle_2). \quad (3.46)$$

Para o instante  $T = 3$ :

$$|\Psi\rangle_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} (|-3, D\rangle_3 - 2|-1, D\rangle_3 - |1, D\rangle_3 - |-1, U\rangle_3 - |3, U\rangle_3). \quad (3.47)$$

Para o instante  $T = 4$ :

$$|\Psi\rangle_4 = \frac{1}{4} (|-4, D\rangle_4 - |-2, U\rangle_4 - 3|-2, D\rangle_4 - |0, U\rangle_4 - |0, D\rangle_4 + |2, U\rangle_4 - |2, D\rangle_4 - |4, U\rangle_4). \quad (3.48)$$

Não calculamos o resultado para o instante  $T = 0$  e posição  $j = 0$ , pois nesse sítio a probabilidade se iguala a 1. Outro detalhe percebido é que na equação (3.47) e para os estados quânticos relacionados à posição  $j = -1$  para o instante  $T = 3$ , ocorre uma interferência construtiva neste trecho devido a uma soma de intensidade de parcelas de feixes vindos da direção ( $|D\rangle$ ) mais uma parcela vinda da direção ( $|U\rangle$ ). Para a posição  $j = 1$  neste mesmo instante e utilizando também a expressão (3.47), ocorre uma interferência destrutiva neste trecho devido a uma anulação de intensidade de parcelas de feixes, restando apenas os feixes vindos da direção ( $|D\rangle$ ).

Por último, obteremos as probabilidades da partícula de estar em uma posição  $j$  num instante  $T$  utilizando a equação (3.29). Então:

Para o instante  $T = 1$  e posição  $j = 1$ , utilizamos o termo da equação (3.45) relacionado à parcela do feixe que incide da direção de baixo para cima nesta posição. Logo:

$$P(j = 1, T = 1) = |\alpha_{1,U(1)}|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \left( \frac{1}{2} \right). \quad (3.49)$$

Para o instante  $T = 1$  e posição  $j = -1$ , utilizamos também a equação (3.45), onde aplicamos o termo relacionado à parcela do feixe que incide da direção de cima para baixo nesta posição. Logo:

$$P(j = -1, T = 1) = |\beta_{-1,D(1)}|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \left( \frac{1}{2} \right). \quad (3.50)$$

Para o instante  $T = 2$  e posição  $j = 2$ , utilizamos o termo da equação (3.46) relacionado à parcela do feixe que incide da direção de baixo para cima nesta posição. Logo:

$$P(j = 2, T = 2) = |\alpha_{2,U(2)}|^2 = \left| \frac{1}{2} \right|^2 = \left( \frac{1}{4} \right). \quad (3.51)$$

Para o instante  $T = 2$  e posição  $j = -2$ , utilizamos também a equação (3.46), onde aplicamos o termo relacionado à parcela do feixe que incide da direção de cima para baixo nesta posição. Logo:

$$P(j = -2, T = 2) = |\beta_{-2,D(2)}|^2 = \left| \frac{1}{2} \right|^2 = \left( \frac{1}{4} \right). \quad (3.52)$$

Para o instante  $T = 2$  e posição  $j = 0$ , através da equação (3.46) utilizamos duas parcelas de feixe vindas, respectivamente, das direções ( $|U\rangle$ ) e ( $|D\rangle$ ), são inseridas neste sítio. Logo,

ocorre uma soma destas parcelas:

$$P(j = 0, T = 2) = |\alpha_{0,U(2)}|^2 + |\beta_{0,D(2)}|^2 = \left|\frac{1}{2}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \left(\frac{1}{2}\right). \quad (3.53)$$

Para o instante  $T = 3$  e posição  $j = 3$ , utilizamos o termo da equação (3.47) relacionado à parcela do feixe que incide da direção de baixo para cima nesta posição. Logo:

$$P(j = 3, T = 3) = |\alpha_{3,U(3)}|^2 = \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \left(\frac{1}{8}\right). \quad (3.54)$$

Para o instante  $T = 3$  e posição  $j = -3$ , utilizamos também a equação (3.47), onde aplicamos o termo relacionado à parcela do feixe que incide da direção de cima para baixo nesta posição. Logo:

$$P(j = -3, T = 3) = |\beta_{-3,D(3)}|^2 = \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \left(\frac{1}{8}\right). \quad (3.55)$$

Para o instante  $T = 3$  e posição  $j = 1$ , através da equação (3.47) utilizamos apenas uma parcela do feixe vinda da direção ( $|D\rangle$ ). Logo:

$$P(j = 1, T = 3) = |\alpha_{1,D(3)}|^2 = \left|\frac{2}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \left(\frac{1}{8}\right). \quad (3.56)$$

Para o instante  $T = 3$  e posição  $j = -1$ , através da equação (3.47) utilizamos duas parcelas de feixe vindas da direção ( $|D\rangle$ ) e uma parcela da direção ( $|U\rangle$ ), que são inseridas no divisor de feixe desse sítio. Logo, ocorre uma soma destas parcelas:

$$P(j = -1, T = 3) = |\alpha_{-1,U(3)}|^2 + |\beta_{-1,D(3)}|^2 = \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{2}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \left(\frac{5}{8}\right). \quad (3.57)$$

Para o instante  $T = 4$  e posição  $j = 4$ , utilizamos o termo da equação (3.48) relacionado à parcela do feixe que incide da direção de baixo para cima nesta posição. Logo:

$$P(j = 4, T = 4) = |\alpha_{4,U(4)}|^2 = \left|\frac{1}{4}\right|^2 = \left(\frac{1}{16}\right). \quad (3.58)$$

Para o instante  $T = 4$  e posição  $j = 2$ , através da equação (3.48) utilizamos uma parcela de feixe vinda da direção ( $|D\rangle$ ) e outra vinda da direção ( $|U\rangle$ ), que são inseridas no divisor de feixe desse sítio. Logo, ocorre uma soma destas parcelas:

$$P(j = 2, T = 4) = |\alpha_{2,U(4)}|^2 + |\beta_{2,D(4)}|^2 = \left|\frac{1}{4}\right|^2 + \left|\frac{1}{4}\right|^2 = \left(\frac{2}{16}\right). \quad (3.59)$$



Para o instante  $T = 4$  e posição  $j = 0$ , através da equação (3.48) também utilizamos uma parcela de feixe vinda da direção ( $|D\rangle$ ) e outra vinda da direção ( $|U\rangle$ ), que são inseridas no divisor de feixe desse sítio. Logo, ocorre uma soma destas parcelas:

$$P(j = 0, T = 4) = |\alpha_{0,U(4)}|^2 + |\beta_{0,D(4)}|^2 = \left|\frac{1}{4}\right|^2 + \left|\frac{1}{4}\right|^2 = \left(\frac{2}{16}\right). \quad (3.60)$$

Para o instante  $T = 4$  e posição  $j = -2$ , através da equação (3.48) utilizamos uma parcela de feixe vinda da direção ( $|U\rangle$ ) e outras três vindas da direção ( $|D\rangle$ ), que são inseridas no divisor de feixe desse sítio. Logo, ocorre uma soma destas parcelas:

$$P(j = -2, T = 4) = |\alpha_{-2,U(4)}|^2 + |\beta_{-2,D(4)}|^2 = \left|\frac{1}{4}\right|^2 + \left|\frac{3}{4}\right|^2 = \left(\frac{10}{16}\right). \quad (3.61)$$

Para o instante  $T = 4$  e posição  $j = -4$ , utilizamos a equação (3.48), onde aplicamos o termo relacionado à parcela do feixe que incide da direção de cima para baixo nesta posição. Logo:

$$P(j = -4, T = 4) = |\beta_{-4,U(4)}|^2 = \left|\frac{1}{4}\right|^2 = \left(\frac{1}{16}\right). \quad (3.62)$$

Com os cálculos realizados obtemos uma tabela com estes valores encontrados, onde representamos pela Figura (3.5). Esta figura foi retirada da referência [2].

$P(j, T)$	$j$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$T = 0$						1				
$T = 1$					$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$			
$T = 2$				$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		
$T = 3$			$\frac{1}{8}$		$\frac{5}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$	
$T = 4$		$\frac{1}{16}$		$\frac{10}{16}$		$\frac{2}{16}$		$\frac{2}{16}$		$\frac{1}{16}$

Figura 3.5: A tabela acima mostra os valores para a distribuição de probabilidade quântica  $P(j, T)$  da caminhada para a partícula simples incidindo pela entrada A.

Comparando as distribuições de probabilidades  $P(j, T)$ , clássica e quântica, para a partícula simples incidindo pela entrada A, os valores não se alteram até o segundo passo e nas posições dos divisores de feixe localizadas nas extremidades de cada passo da caminhada, ou seja, vemos que as mudanças ocorrem a partir do terceiro passo da caminhada quântica. A diferença ocorre nas posições  $j = 1$  e  $j = -1$  do instante  $T = 3$ , e nas posições  $j = 2$  e  $j = -2$  do instante  $T = 4$ . Esta esquematização indica uma descrição de uma representação de uma caminhada quântica de 4 passos variando da posição  $j = -4$  a  $j = 4$ , conforme a tabela representada pela Figura (3.5). No instante  $T = 3$ , o valor para a probabilidade do caminhante ser encontrado na posição  $j = -1$  é de  $5/8$  e  $1/8$  para a posição  $j = 1$ , sendo estes os mesmos valores para as posições  $j = -2$  e  $j = 2$  associadas ao instante  $T = 4$ , respectivamente. Para o caso clássico, a distribuição de probabilidade é do tipo binomial, em que a utilização de sua expressão pode ser feita pela equação (2.6) ou pela equação (2.8). A caminhada aleatória clássica utilizada foi a simétrica, onde a moeda clássica possui probabilidade igual de ir para a direita ou para a esquerda, o que significa dizer que em um modelo de interferômetro de Mach Zehnder, por exemplo, a intensidade do feixe é igualmente dividida assim que sai de cada divisor. Ainda para o caso clássico, é interessante comentar que os valores para as posições  $j = 1$  e  $j = -1$ , referentes ao instante  $T = 3$ , possuem o mesmo valor relacionado ao valor da probabilidade de um caminhante estar na posição  $j = 0$  do instante  $T = 4$ . No caso quântico, a distribuição de probabilidade se dá pela soma do módulo do quadrado dos fatores multiplicadores dos estados quânticos associados a cada sítio da rede. Uma consequência prática deste cálculo realizado é o surgimento de efeitos de interferência, construtivos e destrutivos, que alteram drasticamente a distribuição de probabilidade nas posições  $j$  em cada passo da caminhada e a trajetória do caminhante ao longo do arranjo. A moeda quântica, nesse caso, possui refletividade  $R = 0,5$  para o divisor de feixe, sendo este chamado de moeda de Hadamard. Com este valor, iniciamos as simulações para a CQ e os detalhes para esta moeda quântica foram abordados na seção anterior, que aborda a representação matemática de uma CQ. Mais adiante, atribuímos fase para a cada divisor de feixe, assim como a refletividade pode ser também alterada. Todavia, o foco das nossas simulações foi estabelecido para simulações com refletividade  $R = 0,5$  para o divisor. O acréscimo de fase faz com que haja análises de diferentes tipos de caminhada no

nosso estudo. Estas caminhadas possuem diferentes distribuições de probabilidade que serão abordadas com mais detalhes na última seção desse capítulo e nas simulações realizadas registradas no capítulo 4. Para concluir este parágrafo, é importante destacar que os valores obtidos utilizados para a realização da comparação das distribuições probabilidade, clássica e quântica, são representados pela Figura (3.6). Esta também foi retirada da referência [2].

$P(j, T)$	$j$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
<b>Clássico</b>	$T = 0$					1				
	$T = 1$				$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$			
	$T = 2$			$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		
	$T = 3$		$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{8}$	
	$T = 4$	$\frac{1}{16}$		$\frac{4}{16}$		$\frac{6}{16}$		$\frac{4}{16}$		$\frac{1}{16}$
<b>Quântico</b>	$T = 0$					1				
	$T = 1$				$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$			
	$T = 2$			$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		
	$T = 3$		$\frac{1}{8}$		$\frac{5}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$	
	$T = 4$	$\frac{1}{16}$		$\frac{10}{16}$		$\frac{2}{16}$		$\frac{2}{16}$		$\frac{1}{16}$

Figura 3.6: Comparação das distribuições de probabilidades  $P(j, t)$  para as caminhadas clássica e quântica

### 3.2.2 Caminhada Quântica para Partícula Simples entrando pela porta B da rede

Analisando o comportamento de uma partícula simples entrando pelo lado B da rede, realizamos o mesmo procedimento quando esta partícula entra pela porta A para uma caminhada de 4 passos. Com isso, utilizamos também a figura (3.3) como representação e os cálculos para a obtenção dos estados quânticos de superposição e gerais, foram feitos de maneira equivalente ao caso anterior. As mudanças ocorrem na obtenção da probabilidade do caminhante estar em cada sítio da rede e conseqüentemente na trajetória do mesmo. Também obtemos uma tabelas onde registramos os valores para essas probabilidades e comparamos com o caso da para a partícula simples incidindo pela entrada A e também com o caso clássico.

Na entrada B, a partícula incide de baixo para cima ao chegar no primeiro divisor de feixe do arranjo da caminhada, de modo análogo à entrada A. Então, a representação do seu estado em um determinado instante  $T$  e em uma posição  $j$  parte de um estado evoluído no tempo  $T + 1$  a partir de um estado  $|U\rangle$ , descrito pela equação (3.3). Inicialmente, obteremos a evolução temporal dos estados quânticos para cada posição da caminhada. Então:

No instante  $T = 0$  e posição  $j = 0$ , utilizamos a equação (3.2), pois a partícula simples entra na rede pela porta B, como mostra a Figura (3.4). Então:

$$|0, U\rangle_0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, U\rangle_1 + |-1, D\rangle_1). \quad (3.63)$$

No instante  $T = 1$  e posição  $j = -1$ , utilizamos o termo da equação (3.63) relacionado à parcela de feixe que incide nesta posição, vinda da direção de cima para baixo. Logo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |-1, D\rangle_1 \rightarrow \frac{1}{2}(|-2, D\rangle_2 - |0, U\rangle_2). \quad (3.64)$$

No instante  $T = 1$  e posição  $j = 1$ , novamente utilizando a equação (3.63), aplicamos o termo relacionado à parcela de feixe que incide nesta posição, vinda da direção de baixo para cima. Logo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |1, U\rangle_1 \rightarrow \frac{1}{2}(|2, U\rangle_2 + |0, D\rangle_2). \quad (3.65)$$

No instante  $T = 2$  e posição  $j = -2$ , utilizamos o termo da equação (3.64) relacionado à

parcela de feixe que incide nesta posição, vinda da direção de cima para baixo. Então:

$$\frac{1}{2} |-2, D\rangle_2 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} (|-3, D\rangle_3 - |-1, U\rangle_3). \quad (3.66)$$

Para o instante  $T = 2$  e a posição  $j = 2$ , utilizamos a equação (3.65) aplicando o termo relacionado à parcela de feixe que incide nesta posição, vinda da direção de baixo para cima. Logo:

$$\frac{1}{2} |2, U\rangle_2 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} (|3, U\rangle_3 + |1, D\rangle_3). \quad (3.67)$$

No instante  $T = 2$  e posição  $j = 0$ , duas parcelas de feixe são inseridas neste sítio. Uma delas chega no divisor de feixe desta posição, vinda da direção ( $|U\rangle$ ) e é representada por um dos termos da equação (3.64). A outra parcela que chega nesta mesma posição vem da direção ( $|D\rangle$ ) e é representada por um dos termos da equação (3.65). Logo:

$$-\frac{1}{2} |0, U\rangle_2 \rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{2}} (|1, U\rangle_3 + |-1, D\rangle_3); \quad (3.68)$$

$$\frac{1}{2} |0, D\rangle_2 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} (|-1, D\rangle_3 - |1, U\rangle_3). \quad (3.69)$$

No instante  $T = 3$  e posição  $j = -3$ , utilizamos o termo da equação (3.66) relacionado à parcela do feixe que incide nesta posição através da direção ( $|D\rangle$ ). Logo:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} |-3, D\rangle_3 \rightarrow \frac{1}{4} (|-4, D\rangle_4 - |2, U\rangle_4). \quad (3.70)$$

No instante  $T = 3$  e posição  $j = -1$ , três parcelas de feixe são inseridas neste sítio. Uma delas chega no divisor de feixe desta posição, vinda da direção ( $|U\rangle$ ) e é representada por um dos termos da equação (3.66). As outras duas parcelas que chegam nesta mesma posição na direção ( $|D\rangle$ ) e são representadas por um dos termos da equação (3.69) e o outro termo referente à equação (3.68). Logo:

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} |-1, U\rangle_3 \rightarrow -\frac{1}{4} (|0, U\rangle_4 + |-2, D\rangle_4); \quad (3.71)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} |-1, D\rangle_3 \rightarrow -\frac{1}{4} (|-2, D\rangle_4 - |0, U\rangle_4); \quad (3.72)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} |-1, D\rangle_3 \rightarrow \frac{1}{4} (|-2, D\rangle_4 - |0, U\rangle_4). \quad (3.73)$$

Para o instante  $T = 3$  e a posição  $j = 1$ , três parcelas de feixe são inseridas neste sítio. Uma delas chega no divisor de feixe desta posição, vinda da direção ( $|D\rangle$ ) e é representada por um dos termos da equação (3.67). As outras duas parcelas que chegam nesta mesma posição na direção ( $|U\rangle$ ) e são representadas por um dos termos da equação (3.68) e o outro termo referente à equação (3.69). Logo:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} |1, D\rangle_3 \rightarrow \frac{1}{4} (|0, D\rangle_4 - |2, U\rangle_4); \quad (3.74)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} |1, U\rangle_3 \rightarrow -\frac{1}{4} (|2, U\rangle_4 + |0, D\rangle_4); \quad (3.75)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} |1, U\rangle_3 \rightarrow \frac{1}{4} (|2, U\rangle_4 + |0, D\rangle_4). \quad (3.76)$$

No instante  $T = 3$  e posição  $j = 3$ , utilizamos um dos termos da equação (3.67) que é associado à parcela do feixe que incide nesta posição na direção ( $|U\rangle$ ). Então:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} |3, U\rangle_3 \rightarrow \frac{1}{4} (|4, U\rangle_4 + |2, D\rangle_4). \quad (3.77)$$

Mais uma vez, iremos utilizar a equação (3.28):

Para o instante  $T = 1$ :

$$|\Psi\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-1, D\rangle_1 + |1, U\rangle_1). \quad (3.78)$$

Para o instante  $T = 2$ :

$$|\Psi\rangle_2 = \frac{1}{2} (|-2, D\rangle_2 + |0, D\rangle_2 - |0, U\rangle_2 + |2, U\rangle_2). \quad (3.79)$$

Para o instante  $T = 3$ :

$$|\Psi\rangle_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} (|-3, D\rangle_3 - 2 |-1, U\rangle_3 + |1, D\rangle_3 - |-1, D\rangle_3 + |3, U\rangle_3). \quad (3.80)$$

Para o instante  $T = 4$ :

$$|\Psi\rangle_4 = \frac{1}{4} (|-4, D\rangle_4 - |-2, U\rangle_4 - 3|2, U\rangle_4 + |0, U\rangle_4 - |0, D\rangle_4 + |2, D\rangle_4 - |-2, D\rangle_4 + |4, U\rangle_4). \quad (3.81)$$

Novamente, não calculamos o resultado para o instante  $T = 0$  e posição  $j = 0$ , pois nesse sítio a probabilidade se iguala a 1. Outro detalhe percebido é que na equação (3.80) e para os estados quânticos relacionados à posição  $j = -1$  para o instante  $T = 3$ , ocorre uma interferência construtiva neste trecho devido a uma soma de intensidade de parcelas de feixes vindos da direção ( $|U\rangle$ ) mais uma parcela vinda da direção ( $|D\rangle$ ). Para a posição  $j = 1$  neste mesmo instante e utilizando também a expressão (3.80), ocorre uma interferência destrutiva neste trecho devido a uma anulação de intensidade de parcelas de feixes, restando apenas os feixes vindos da direção ( $|D\rangle$ ).

Utilizando a equação (3.29) novamente, podemos perceber que para o instante  $T = 1$  e posição  $j = 1$ , utilizamos o termo da equação (3.78) relacionado à parcela do feixe que incide da direção de baixo para cima nesta posição. Logo:

$$P(j = 1, T = 1) = |\alpha_{1,U(1)}|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \left( \frac{1}{2} \right). \quad (3.82)$$

Para o instante  $T = 1$  e posição  $j = -1$ , utilizamos também a equação (3.78), onde aplicamos o termo relacionado à parcela do feixe que incide da direção de cima para baixo nesta posição. Logo:

$$P(j = -1, T = 1) = |\beta_{-1,D(1)}|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \left( \frac{1}{2} \right). \quad (3.83)$$

Para o instante  $T = 2$  e posição  $j = 2$ , utilizamos o termo da equação (3.79) relacionado à parcela do feixe que incide da direção de baixo para cima nesta posição. Logo :

$$P(j = 2, T = 2) = |\alpha_{2,U(2)}|^2 = \left| \frac{1}{2} \right|^2 = \left( \frac{1}{4} \right). \quad (3.84)$$

Para o instante  $T = 2$  e posição  $j = -2$ , utilizamos também a equação (3.79), onde aplicamos o termo relacionado à parcela do feixe que incide da direção de cima para baixo nesta posição. Logo :

$$P(j = -2, T = 2) = (|\beta_{-2,D(2)}|^2 = \left| \frac{1}{2} \right|^2 = \left( \frac{1}{4} \right). \quad (3.85)$$

Para o instante  $T = 2$  e posição  $j = 0$ , através da equação (3.79) utilizamos duas parcelas de feixe vindas, respectivamente, das direções ( $|U\rangle$ ) e ( $|D\rangle$ ), são inseridas neste sítio. Logo, ocorre uma soma destas parcelas:

$$P(j = 0, T = 2) = |\alpha_{0,U(2)}|^2 + |\beta_{0,D(2)}|^2 = \left|\frac{1}{2}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \left(\frac{1}{2}\right). \quad (3.86)$$

Para o instante  $T = 3$  e posição  $j = 3$ , utilizamos um dos termos da equação (3.80) que é associado à parcela do feixe que incide nesta posição na direção ( $|U\rangle$ ). Então :

$$P(j = 3, T = 3) = |\alpha_{3,U(3)}|^2 = \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \left(\frac{1}{8}\right). \quad (3.87)$$

Para o instante  $T = 3$  e posição  $j = -1$ , através da equação (3.80) utilizamos apenas uma parcela do feixe vinda da direção ( $|D\rangle$ ). Logo:

$$P(j = -1, T = 3) = |\beta_{-1,D(3)}|^2 = \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \left(\frac{1}{8}\right). \quad (3.88)$$

Para o instante  $T = 3$  e posição  $j = 1$ , através da equação (3.46) utilizamos duas parcelas de feixe vindas da direção ( $|U\rangle$ ) e uma parcela da direção ( $|D\rangle$ ), que são inseridas no divisor de feixe desse sítio. Logo, ocorre uma soma destas parcelas:

$$P(j = 1, T = 3) = |\alpha_{1,U(3)}|^2 + |\beta_{1,D(3)}|^2 = \left|\frac{2}{2\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \left(\frac{5}{8}\right). \quad (3.89)$$

Para o instante  $T = 3$  e posição  $j = -3$ , utilizamos também a equação (3.79), onde aplicamos o termo relacionado à parcela do feixe que incide da direção de cima para baixo nesta posição. Logo:

$$P(j = -3, T = 3) = |\beta_{-3,D(3)}|^2 = \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \left(\frac{1}{8}\right). \quad (3.90)$$

Para o instante  $T = 4$  e posição  $j = 4$ , utilizamos o termo da equação (3.81) relacionado à parcela do feixe que incide da direção de baixo para cima nesta posição. Logo:

$$P(j = 4, T = 4) = |\alpha_{4,U(4)}|^2 = \left|\frac{1}{4}\right|^2 = \left(\frac{1}{16}\right). \quad (3.91)$$

Para o instante  $T = 4$  e posição  $j = 2$ , através da equação (3.80) utilizamos uma parcela de feixe vinda da direção ( $|D\rangle$ ) e outras três vindas da direção ( $|U\rangle$ ), que são inseridas no divisor de feixe desse sítio. Logo, ocorre uma soma destas parcelas::

$$P(j = 2, T = 4) = |\alpha_{2,U(4)}|^2 + |\beta_{2,D(4)}|^2 = \left|\frac{3}{4}\right|^2 + \left|\frac{1}{4}\right|^2 = \left(\frac{10}{16}\right). \quad (3.92)$$



Para o instante  $T = 4$  e posição  $j = 0$ , através da equação (3.80) também utilizamos uma parcela de feixe vinda da direção ( $|D\rangle$ ) e outra vinda da direção ( $|U\rangle$ ), que são inseridas no divisor de feixe desse sítio. Logo, ocorre uma soma destas parcelas:

$$P(j = 0, T = 4) = |\alpha_{0,U(4)}|^2 + |\beta_{0,D(4)}|^2 = \left|\frac{1}{4}\right|^2 + \left|\frac{1}{4}\right|^2 = \left(\frac{2}{16}\right). \quad (3.93)$$

Para o instante  $T = 4$  e posição  $j = -2$ , através da equação (3.80) utilizamos uma parcela de feixe vinda da direção ( $|D\rangle$ ) e outra vinda da direção ( $|U\rangle$ ), que são inseridas no divisor de feixe desse sítio. Logo, ocorre uma soma destas parcelas:

$$P(j = -2, T = 4) = |\alpha_{-2,U(4)}|^2 + |\beta_{-2,D(4)}|^2 = \left|\frac{1}{4}\right|^2 + \left|\frac{1}{4}\right|^2 = \left(\frac{2}{16}\right). \quad (3.94)$$

Para o instante  $T = 4$  e posição  $j = -4$ , utilizamos a equação (3.80), onde aplicamos o termo relacionado à parcela do feixe que incide da direção de cima para baixo nesta posição. Logo:

$$P(j = 4, T = -4) = |\beta_{-4,U(4)}|^2 = \left|\frac{1}{4}\right|^2 = \left(\frac{1}{16}\right). \quad (3.95)$$

Os efeitos, resultados e o conteúdo teórico ocorrem de maneira equivalente ao caso da partícula simples que é inserida na caminhada pela porta A da rede. As únicas mudanças acontecem nas posições que se localizam entre as mais centrais e as extremas da caminhada. Na Figura (3.6) podemos ver estas diferenças, onde obtemos os valores para a probabilidade do caminhante estar em cada sítio para uma rede de 4 passos, para uma partícula que é inserida pela entrada B. Nesta mesma figura podemos perceber uma troca de valores quanto a probabilidade nas posições  $j = 1$  e  $j = -1$  do instante  $T = 3$ , e  $j = 2$  e  $j = -2$  do instante  $T = 4$ . Nestas posições relacionadas ao instante  $T = 3$ , o caminhante possui uma probabilidade de  $1/8$  de estar na posição  $j = -1$  e  $5/8$  na posição  $j = 1$ . No instante  $T = 4$ , o caminhante possui uma probabilidade de  $1/8$  ou  $2/16$  de estar na posição  $j = -2$  e  $5/8$  ou  $10/16$  na posição  $j = 2$ . Por fim, os valores obtidos para a partícula simples com acesso pela entrada B são apresentados na Figura (3.6).

De modo análogo à sessão anterior, obtemos os valores apresentados na tabela representada pela Figura (3.7). Esta figura também foi extraída da referência [2].

$P(j, T)$	j	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$T=0$						<b>1</b>				
$T=1$					$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$			
$T=2$				$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		
$T=3$			$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{5}{8}$		$\frac{1}{8}$	
$T=4$	$\frac{1}{16}$			$\frac{2}{16}$		$\frac{2}{16}$		$\frac{10}{16}$		$\frac{1}{16}$

Figura 3.7: A tabela acima mostra os valores para a distribuição de probabilidade quântica  $P(j, T)$  da caminhada para a partícula simples incidindo pela entrada B.

### 3.3 Caminhada Quântica para Duas Partículas com Simetrias Bosônicas e Fermiônicas

A simetria de um estado inicial de duas partículas emaranhadas que incidem pela entrada A e B, a inserção destas partículas é representada pela Figura (3.3), é dada pela Equação (3.96) [1]:

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_A; H\rangle |\psi_B; V\rangle \pm |\psi_A; V\rangle |\psi_B; H\rangle), \quad (3.96)$$

onde a simetria bosônica associa-se ao sinal positivo (+) e a fermiônica ao sinal negativo (-). A diferença nos sinais, apresentada na equação (3.96) se deve às simetrias das funções de onda da estatística de Fermi-Dirac e Bose-Einstein. Os bósons têm funções de ondas simétricas e os férmions possuem as antissimétricas. Isso significa que quando há troca de posições de coordenadas há possibilidade de ocorrer troca de sinais ou não. O argumento representado pela Equação (3.98) é utilizado para os bósons e para os férmions aplicamos o argumento representado pela expressão (3.99) [17, 18]. Logo:

$$\Psi(k, j, \dots, N) = \pm \Psi(j, k, \dots, N); \quad (3.97)$$

$$\Psi_{BS}(k, j, \dots, N) = +\Psi_{BS}(j, k, \dots, N); \quad (3.98)$$

$$\Psi_F(k, j, \dots, N) = -\Psi_F(j, k, \dots, N), \quad (3.99)$$

onde o argumento representado pela equação (3.97) é utilizado para os bósons e para os férmions aplicamos a (3.98). A expressão (3.96) representa um estado geral inicial de superposição para duas partículas emaranhadas com quatro graus de liberdade de polarização. O que quer dizer que uma partícula que incide por uma entrada pode estar localizada em um eixo horizontal (vertical) e a que incide por outra se situa possivelmente num eixo vertical (horizontal). As duas partículas depois de passarem por um divisor de feixe podem sair dele pela direção  $|U\rangle$  e/ou  $|D\rangle$ .

Utilizando novamente a expressão (3.96), faremos uma evolução temporal de  $T = 0$  até o  $T = 1$  e iniciando a obtenção do cálculo para os bósons, temos:

O estado geral para  $T = 0$  é:

$$|\Psi\rangle_{T=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, D; H\rangle_{T=0} |0, U; V\rangle_{T=0} + |0, D; V\rangle_{T=0} |0, U; H\rangle_{T=0}). \quad (3.100)$$

Utilizando os termos da equação (3.100) podemos fazer a evolução desse estado para o tempo  $T = 1$ , então:

$$|0, D; H\rangle_0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|-1, D; H\rangle_1 - |1, U; H\rangle_1). \quad (3.101)$$

$$|0, D; V\rangle_0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|-1, D; V\rangle_1 - |1, U; V\rangle_1). \quad (3.102)$$

$$|0, U; H\rangle_0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, U; H\rangle_1 + |-1, D; H\rangle_1). \quad (3.103)$$

$$|0, U; V\rangle_0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, U; V\rangle_1 - |-1, D; V\rangle_1). \quad (3.104)$$

Substituindo as quatro expressões anteriores, (3.101); (3.102); (3.103) e (3.104), na equação (3.100), obtemos o estado geral para o tempo  $T = 1$ :

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{T=1} = & \frac{1}{2} (|-1, D; H\rangle_{T=1} |-1, D; V\rangle_{T=1} + |-1, D; V\rangle_{T=1} |-1, D; H\rangle_{T=1}) \\ & - \frac{1}{2} (|1, U; H\rangle_{T=1} |1, U; V\rangle_{T=1} + |1, U; V\rangle_{T=1} |1, U; H\rangle_{T=1}). \end{aligned} \quad (3.105)$$

Por último, encontraremos os estados gerais emaranhados para os instantes  $T = 0$  e  $T = 1$  para férmions. Então:

Para  $T = 0$ , temos:

$$|\Psi\rangle_{T=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, D; H\rangle_{T=0} |0, U; V\rangle_{T=0} - |0, D; V\rangle_{T=0} |0, U; H\rangle_{T=0}). \quad (3.106)$$

Substituindo as quatro expressões, (3.101); (3.102); (3.103) e (3.104), na equação (3.105), obtemos o estado geral para os férmions no tempo  $T = 1$ :

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{T=1} = \frac{1}{2} (&|-1, D; H\rangle_{T=1} |1, U; V\rangle_{T=1} + |-1, D; V\rangle_{T=1} |1, U; H\rangle_{T=1}) \\ &- \frac{1}{2} (|1, U; H\rangle_{T=1} |-1, D; V\rangle_{T=1} + |1, U; V\rangle_{T=1} |-1, D; H\rangle_{T=1}) \end{aligned} \quad (3.107)$$

Nos estados gerais emaranhados para os instantes  $T = 1$ , também podemos ver a comportamento das simetrias bosônica e fermiônica de duas partículas. Os bósons, ao passar por um divisor de feixe irão sair juntos, seja na direção ( $|U\rangle$ ) ou ( $|D\rangle$ ). Os férmions sairão separados, cada um por uma direção. Esta é uma manifestação do princípio da exclusão de Pauli, onde dois férmions não podem ocupar o mesmo estado quântico simultaneamente, pois possuem spin semi-inteiro e funções de onda antissimétricas e para dois bósons há essa permissão porque estes têm spin inteiro e funções de onda simétricas, como foi mostrado nos argumentos (3.97), (3.98) e (3.99). A representação do comportamento dessa simetria em uma caminhada quântica de 4 passos e posições variando de  $j = -4$  e  $j = 4$  se encontra na Figura (3.8) [4].

Para a aplicação do conceito de variância, obtido no capítulo 2, envolvendo duas partículas na rede de uma caminhada quântica representada pela Figura (3.4), utilizamos a definição extraída de [1, 3]. Primeiro, aplicamos a variância para uma única partícula. Para este caso, esta quantidade é dada pela equação (3.108),

$$\Delta_Q^2 = \sum (j - j_Q)^2 |\phi_Q(j)|^2, \quad (3.108)$$

em que  $j$  representa as possíveis saídas da partícula na rede,  $j_Q$  é a posição média da saída da partícula e  $\phi_Q(j)$  é a amplitude de probabilidade dada pelas seguintes equações,

$$\phi_Q(j) = \langle j | \phi_Q \rangle \quad (3.109)$$

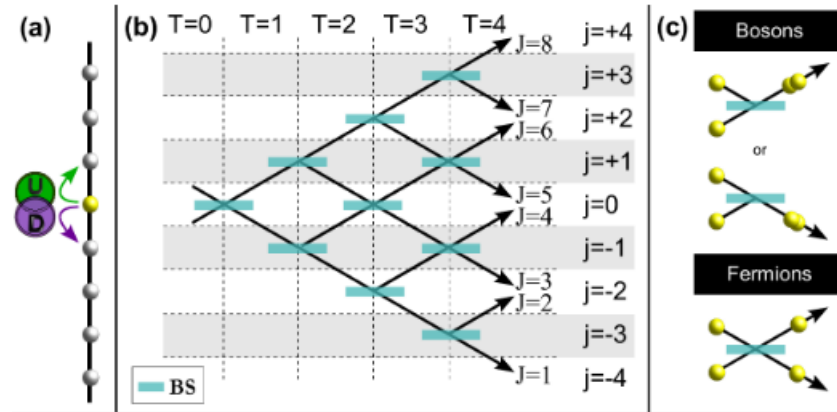


Figura 3.8: (a) Caminhada Quântica Unidimensional: O caminhante pode se mover para cima (U) ou para baixo (D) até chegar uma posição final  $J$ . (b) Esquema de uma rede de divisores de feixe para uma caminhada quântica de quatro passos,  $T = 4$ . As linhas tracejadas indicam os passos  $T$  da mesma e as faixas horizontais representam a posição  $j$ . (c) Comportamentos de bósons e férmions ao atravessar um divisor de feixe. Figura retirada do artigo [4]

,

$$P(\phi_Q(j)) = |\phi_Q(j)|^2 \quad (3.110)$$

e

$$j_Q = \sum j |\phi_Q(j)|^2, \quad (3.111)$$

onde,  $Q=A, B$ . Então, podemos aplicar a variância para duas partículas através da equação (3.112),

$$\Delta_{AB}^2 = |j\phi_A^*(j)\phi_B(j)|^2, \quad (3.112)$$

onde  $A$  e  $B$ , representam as entradas por onde as partículas são lançadas de cima para baixo e de baixo para cima, respectivamente. Logo, podemos demonstrar a chamada variância da posição média entre duas partículas, então obtemos:

$$\text{Var}(j_M)^\pm = \frac{\Delta_A^2 + \Delta_B^2 \pm \Delta_{AB}^2}{2}. \quad (3.113)$$

### 3.4 Caminhada Quântica com Desordem

Na seção anterior, abordamos a caminhada quântica ordenada, ou seja, analisamos o caso onde não há alteração de fase nos divisores de feixe no arranjo da caminhada. Nesta seção, apresentamos uma abordagem inicial relacionada à desordem na rede que compõe a caminhada, ou seja, acrescentamos fase em cada modulador de fase localizado em cada divisor de feixe, conforme foi mostrado na Figura (3.2). Quando colocamos desordem no sistema, ocorre uma mudança das possíveis trajetórias do caminhante, o que leva a alterações na distribuição de probabilidade da partícula. [46, 47].

Matematicamente, a manipulação de fases pode ser feita através da utilização do chamado operador moeda, obtido nas seções anteriores, onde o mesmo se refere ao lançamento ou salto das partículas em cada divisor de feixe à medida que vai evoluindo a cada passo da caminhada, este movimento associa-se ao que chamamos de “moeda quântica”. Já, uma moeda clássica faz com que um caminhante se movimente para a direita ou para a esquerda e numa moeda quântica, o caminhante está em superposição entre os lados direito e esquerdo, um conceito que foi explicado com mais detalhes nas seções anteriores. As propriedades da moeda quântica também é vista utilizando divisores de feixe totalmente refletores, onde o caminhante vindo do lado direito tem a sua direção alterada para se mover para o lado esquerdo, em um certo instante, e vice-versa [48]. No caso ordenado, temos o operador moeda de Hadamard, representado pela equação (3.11), onde a fase nos moduladores da rede é nula. Junto com o operador passo condicional, o operador moeda pode alterar a trajetória das partículas na rede, pois nas seções anteriores a utilização das expressões (3.4) e (3.9) realizam a dedução e a obtenção das expressões que descrevem toda a trajetória do caminhante no sistema, equações estas que encontram todos os estados quânticos dos sítios da rede a cada passo da caminhada, dadas pela expressões (3.1) e (3.2). Quando a desordem é acrescentada na rede, podemos analisá-la através de variáveis associadas ao espaço, ao tempo ou, então, com estas duas grandezas somadas. Analisar a desordem com estes parâmetros significa investigar diferentes efeitos na dinâmica de partículas simples e pares emaranhados e não emaranhados. Logo, a desordem relacionada a estes efeitos é classificada, respectivamente em: Estática, Dinâmica e Espaço-Temporal. Cada uma destas

desordens utiliza uma forma matricial para o operador moeda.

Uma das principais e mais importantes propriedades da mecânica quântica é o emaranhamento entre partículas, em que na evolução de uma caminhada quântica, ocorrem mudanças no padrão de interferência devido a sua atuação no sistema. Além do mais, o emaranhamento na rede da caminhada é altamente dependente das condições do caminhante. A relação entre desordem e emaranhamento se dá por meio da introdução de tipos diferentes de desordem que afetam a geração desta propriedade entre os graus de liberdade internos (exemplo: spin) e externos (exemplo: posição) em caminhadas quânticas unidimensionais. Em relação às classificações de desordem, o emaranhamento atua em menores níveis no caso estático e para os casos, temporal e espaço-temporal, ocorre a atuação em maiores níveis [49–51].

### **Desordem Estática**

Ao iniciar a abordagem sobre os tipos de desordem, estudados nesta Dissertação, analisamos a desordem estática ou espacial, em que esta atua no espaço e não no tempo. O caminhante, quando está se movimentando nesta desordem pode exibir a chamada “localização de Anderson”. Este fenômeno se tornou uma das mais notáveis previsões da mecânica quântica, mais especificamente, um dos conceitos mais importantes da física da matéria condensada [47, 52]. A descoberta deste fenômeno foi obtida um pouco mais de 50 anos atrás, mais precisamente em 1958 por P.W. Anderson, por meio de elétrons que realizavam transporte em cristais desordenados [45, 53–55]. A localização de Anderson se origina da quebra de periodicidade na dinâmica do sistema, induzida por uma média desordenada, provocando uma interferência destrutiva resultando na ausência de difusão das partículas envolvidas no processo [47]. Estas partículas ao chegarem no final da caminhada com desordem estática, exibem uma distribuição de probabilidade caracterizada pelo decaimento exponencial.

Como já foi colocado no início, a evolução de uma moeda quântica consiste em operações que evoluam o estado inicial aplicando fases. Assim, a modelagem da desordem em uma caminhada quântica se baseia no fato de uma moeda quântica que conduz a evolução do sistema for escolhida aleatoriamente em cada posição e/ou tempo [51, 54]. No caso da desordem estática, trabalhamos com variáveis aleatórias independentes do tempo, onde as

mudanças ao longo do arranjo da caminhada são realizadas nas fases associadas aos eixos espaciais, ou seja, este tipo de desordem faz com que as fases sejam distribuídas aleatoriamente ao longo dos sítios da rede. Como a evolução da caminhada não depende do tempo, a moeda quântica acaba se tornando fixa no tempo [46, 49]. Como mostra a relação (3.114), expressa pelo seguinte operador moeda,

$$C_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\phi_U(j_m)} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_D(j_m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.114)$$

onde  $\phi_U(j_m)$  e  $\phi_D(j_m)$ , são fases que dependem da posição, representadas pela variável  $m$ , e independem do tempo. [45].

Assim como o ocorreu a propagação de elétrons na presença de desordem, que levou a descoberta da localização de Anderson, uma partícula quântica simples lançada em uma rede com desordem, pode exibir localização espacial [56]. Não somente as partículas simples podem exibir a localização, pares emaranhados e não emaranhados também pode apresentar tal efeito no final da caminhada [56].

### Desordem Dinâmica

Agora, abordaremos o caso para a desordem dinâmica ou temporal em uma caminhada quântica. Um caminhante se movimenta em uma caminhada quântica com desordem dinâmica quando as variáveis aleatórias associadas às fases são dependentes do tempo. Logo, o operador moeda é fixo no espaço, ocorrendo alterações nas fases associadas aos eixos temporais [46, 49, 51].

Conforme foi posto nesta seção, a desordem altera a evolução de uma partícula em uma CQ. Então, o operador moeda que explicita a fase adquirida em cada divisor de feixe é dado pela expressão (3.115) [57, 58], em que esta fase é alterada apenas no tempo,

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\phi_U(j_n)} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_D(j_n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.115)$$



e a fase  $\phi_{U/D}(j_n)$  é atribuída ao divisor de feixe como fase relacionada ao eixo temporal e independe da posição. Então, a variável temporal é representada pela letra  $n$ . A fase  $\phi_{U/D}(j_n) = 0$ , surge quando não há fases no divisor, temos a caminhada quântica ordenada (CQO) e este passa a ser o operador moeda de Hadamard dado pela equação (3.11).

Uma característica de uma desordem dinâmica é fazer com que uma caminhada quântica possa fornecer efeitos de decoerência. À medida que o caminhante passa a adquirir decoerência, o regime de propagação do mesmo deixa de apresentar o comportamento quântico e se aproxima do clássico [50, 59]. O impacto da decoerência foi analisado em investigações numéricas e experimentais, mais especificamente em sistemas unidimensionais [3, 50, 60] e bidimensionais [61]. Em particular, na referência [45], foi analisado o caso de uma caminhada quântica envolvendo duas partículas com desordem dinâmica. Os autores investigaram, numericamente, a transição entre os regimes de propagação quântico e clássico através da presença da desordem dinâmica. Também foi demonstrado que a propagação das duas partículas depende, fortemente, da simetria do estado inicial do sistema, bosônico ou fermiônico. Em [62], ocorre a aplicação de introdução de decoerência na simulação de fenômenos biológicos.

A dependência temporal da desordem pode ser visualizada através da equação (3.114), na qual as fases variam apenas no tempo e não nos sítios da rede que os caminhantes percorrem. Logo, o surgimento de decoerência é uma consequência da variação de fases dinâmicas sofrida pela partícula durante a sua evolução na caminhada. Novamente em [45], é possível perceber que o fóton, quando passa a se movimentar em uma caminhada clássica exibe uma distribuição de probabilidade binomial, onde o comportamento para um caminhante clássico foi abordado no Capítulo 2.

### **Desordem Espaço-Temporal**

Vimos que uma partícula se movimentando em uma caminhada quântica com desordem espacial pode exibir o fenômeno da localização de Anderson. Todavia, uma partícula pode se movimentar em uma caminhada quântica com desordens associadas à espaço e tempo. Este efeito faz com que a partícula na caminhada possa exibir flutuações no tempo, por isso

uma desordem espaço-temporal também é chamada de desordem com flutuações temporais. Logo, um novo fenômeno se estabelece, com a denominação de “transição de Anderson”. A quebra da localização de Anderson ocorre por causa das flutuações temporais no sistema. Então, a localização é perdida e o transporte é restaurado [1, 45, 46, 49]. As fases para a desordem espaço-temporal são alteradas tanto no eixo espacial quanto no eixo temporal. Assim, o operador moeda, nesse caso, muda aleatoriamente em cada sítio da rede e a cada passo da caminhada. Esta descrição é representada pela equação (3.116),

$$C_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\phi_U(j_{m,n})} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_D(j_{m,n})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.116)$$

onde a operação é realizada com fases aleatórias  $\phi_{U/D}(j_{m,n})$  ao longo de toda a rede da caminhada. A expressão (3.110) representa o operador espaço-temporal para  $n$  passos e a fase  $\phi_{U/D}(j_{m,n})$  é escolhida aleatoriamente para todo passo  $n$  e cada sítio  $m$ . Assim como a desordem dinâmica, o caso espaço-temporal possui forte dependência da simetria do estado inicial, principalmente quando abordamos representações envolvendo duas partículas. Voltando a abordagem do fenômeno da transição de Anderson, podemos analisar alguns modelos experimentais como o efeito em propagação em ondas eletromagnéticas em estruturas dielétricas fortemente ordenadas [55, 63]. Podemos também analisar alguns mecanismos propostos para a quebra de localização e flutuações no tempo como o descrito por N. F. Mott que aborda o efeito de fônons em baixas temperaturas, originando um novo movimento difusivo chamado *variable-range hopping conductivity* [43, 64].

### Representação de uma caminhada quântica com desordem

Iremos abordar agora uma representação para uma caminhada quântica com desordem, onde esta possui uma fase aleatória para todos os divisores de feixe do arranjo da caminhada, ou seja, são acrescentadas fases na caminhada quântica (CQ). Um exemplo desta representação está na Figura (3.9), que mostra uma CQ com 6 passos e 12 posições de saída. Os esquemas destacados nesta ilustração, mostram a representação do circuito, onde há

três classificações quanto à mudança de fase ou desordem na caminhada: desordem estática quando ocorre alteração no espaço e não no tempo; desordem dinâmica, quando há alterações apenas no tempo; e desordem dinâmica espaço-temporal ou com flutuações no tempo, em que esta última ocorre quando há alterações de fase tanto no tempo quanto no espaço [1, 45, 53]. Nestas mesmas figuras, podemos perceber que a fase é representada pelas cores no final de cada célula da rede.

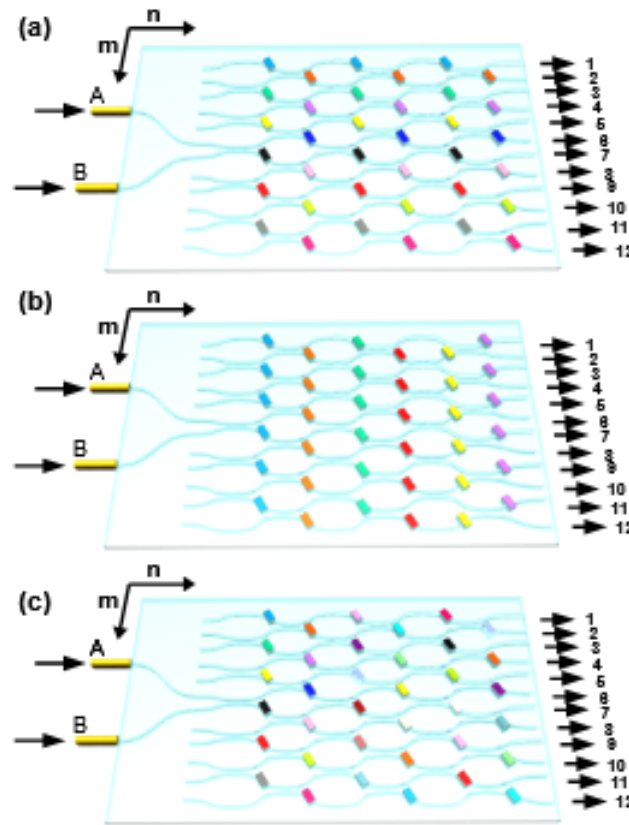


Figura 3.9: Arranjos de uma caminhada quântica com 6 passos, 12 posições possíveis de saída e duas entradas, A e B. O eixo horizontal ( $n$ ) indica os instantes de tempo ou passos da caminhada e o eixo vertical ( $m$ ) representa as posições do caminhante. A representação (a) apresenta a desordem estática, (b) a dinâmica e (c) a dinâmica espaço-temporal. Figura retirada da Tese [1].

# Capítulo 4

## Simulações

Nesse capítulo, iremos apresentar os resultados das simulações computacionais realizadas neste trabalho, para obter a distribuição de probabilidade ao final de uma caminhada quântica com 100 passos e o comportamento do expoente da sua variância em função da sua largura da distribuição de fase.

As distribuições de probabilidade analisadas nas simulações estão limitadas a um intervalo de fases entre  $-\pi$  a  $\pi$ , para permitir uma melhor comparação em relação às análises experimentais.

A classificação das caminhadas quânticas quanto à alteração ou desordem na fase dos divisores de feixe, se divide em ordenada e desordenada. No primeiro caso, não há alteração de fase nos divisores de feixe e no segundo, já ocorre estas alterações. Nesse capítulo, iremos estudar as caminhadas ordenadas e as caminhadas com desordem dinâmica, assim como as distribuições de probabilidade associadas ao segundo caso, como distribuição uniforme, de Cauchy ou Lorentz e de Laplace, pois a distribuição de probabilidade do tipo Gaussiana para a caminhada quântica é analisada, em detalhes, na referência [2]. Ao final, comparamos o resultado entre as distribuições citadas, com exceção da gaussiana.

Associando ao contexto da Teoria de Probabilidades, a Lei dos Grandes Números e o Teorema do Limite Central nos garantem que um passeio aleatório constituído pela soma de um grande número de variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas e que possuam os dois primeiros momentos de sua distribuição finitos, média e variância, res-

pectivamente, produzem uma distribuição Gaussiana e portanto um regime difusivo [65–67]. Extensões dessa abordagem contemplando a possibilidade de distribuição de passos distintos, não gaussianos e com introdução de correlação tem sido desenvolvidas com intensivas aplicações em diversas áreas como a química e biologia por exemplo [68–70]. Nessas situações os referidos resultados são naturalmente violados ao considerarmos por exemplo uma distribuição de Lévy, cujo limite assintótico possui um decaimento em forma de lei de Potência, semelhante a distribuição de Cauchy [71–73]. Inspirados por esses indícios, propomos investigar qual o efeito da cauda da distribuição de fases sobre o comportamento do caminhante quântico.

Analizamos a densidade de probabilidade para o último passo da caminhada e a variância da distribuição de probabilidade associada para a partícula simples, bósons e férmions. Também investigamos o comportamento do expoente da variância em função da largura de fase da distribuição associada à desordem.

## 4.1 Caminhada Quântica Ordenada

Para iniciar a expor os nossos resultados obtidos das simulações que realizamos, comecemos a abordar a caminhada quântica ordenada (CQO). Uma CQO ocorre quando não há diferença de fase nos divisores de feixe e nos moduladores de fase do arranjo da caminhada, isto é, quando não há desordem na rede.

Analizamos, uma caminhada quântica ordenada de 100 passos, refletividade  $R = 0,5$  e uma média de 10 interações. Nessa análise, foi obtida uma distribuição de probabilidade nas saídas entre as posições  $J = 0$  e  $J = 200$  e o comportamento da variância em função do número de passos, para a partícula simples, bósons e férmions. As figuras (4.1) e (4.2(c)) mostram as concentrações de probabilidade dos caminhantes no último passo da rede, em função das posições de saída para a partícula simples. Na Figura (4.2(c)) podemos perceber que há uma maior concentração próxima das posições  $J_{30}$  e  $J_{170}$ . Para bósons, há maiores concentrações próximas às posições  $J_{30,170}$ ,  $J_{30,30}$ ,  $J_{170,30}$  e  $J_{170,170}$ , formando uma figura que se assemelha a um quadrado, onde cada ponto corresponde a um vértice da figura geométrica de acordo com a Figura (4.2(a)). Os bósons têm o aspecto de estarem nas mesmas posições e em posições

contrárias na rede do arranjo da caminhada, isso acontece porque possuem funções de onda simétricas, indicando a coalescência bosônica, conforme foi apresentado na Seção 3.3 do capítulo anterior. O fato dos bósons estarem nas mesmas posições, faz com que os elementos da diagonal principal do mapa da distribuição de probabilidade possuam valores maiores. Esta é uma característica marcante que veremos de maneira mais evidente nas próximas seções desse capítulo. Para os férmions, há maiores concentrações próximas às posições  $J_{30,170}$  e  $J_{170,30}$ , gerando apenas uma figura com pontos anti-diagonais do quadrilátero, esta ilustração é registrada na Figura (4.2(b)). A anti-diagonalidade é forte característica das partículas fermiônicas, pois férmions possuem funções de onda antissimétricas, indicando a repulsão fermiônica e a manifestação do “princípio da exclusão de Pauli” no sistema, como também foi analisado no Capítulo 3. A Figura (4.2) mostra as concentrações no último passo da caminhada para os três casos. Nessas representações, os eixos possuem uma numeração de 1 a 200, de acordo com as posições finais da caminhada. Por essa razão, as probabilidades nas figuras são indicadas por meio da intensidade das cores. Logo, há uma variação da probabilidade 0, representada pela cor branca, até a probabilidade 1, indicada pela cor preta.

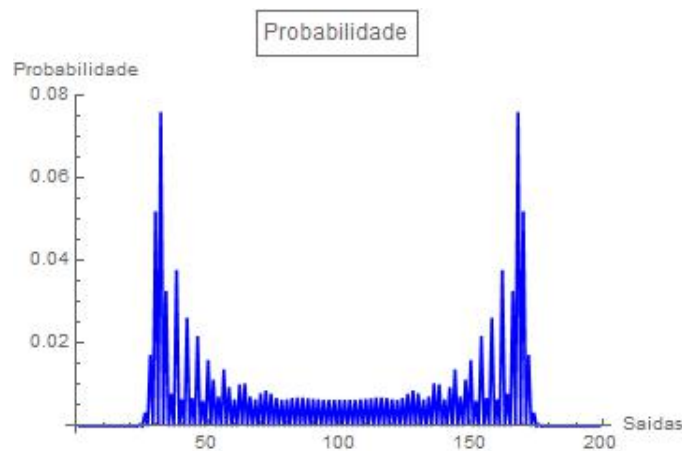


Figura 4.1: Caminhada Quântica Ordenada com 100 passos e saídas ( $0 < J < 200$ ) com fase nula para todos os divisores de feixe, refletividade  $R = 0,5$  e 10 realizações da caminhada, para a partícula simples.

Ao analisar o comportamento de uma CQ, foi obtida uma nova expressão através da relação da variância, apresentada na Seção 3.3, com o número de passos desta caminhada.

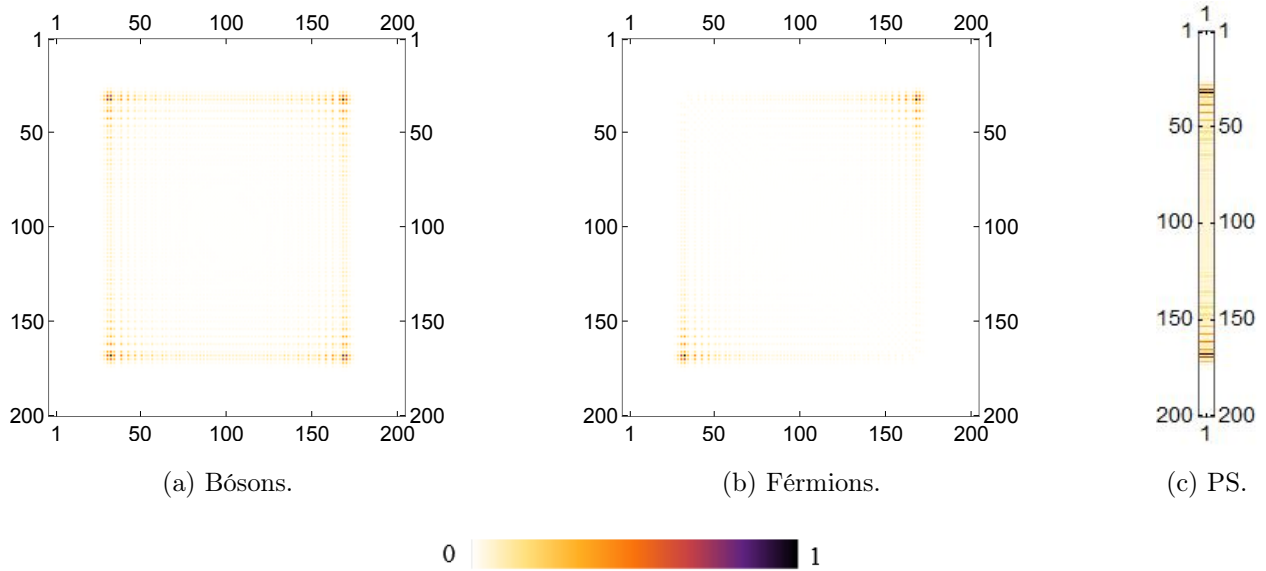


Figura 4.2: Distribuição de probabilidade da saída de uma caminhada quântica ordenada de 100 passos com refletividade  $R=0,5$  e 10 realizações da caminhada com fase nula para todos os divisores de feixe, para uma única partícula e duas partículas cujo estado inicial tem simetria bosônica e fermiônica.

Esta equação representa uma equação polinomial, obtida por meio da análise observacional do gráfico gerado, foi possível realizar curvas com formatos próximos de retas e parábolas, por exemplo. Então,

$$Var(N) = aN^\eta, \quad (4.1)$$

esta representa a variância de uma distribuição de probabilidade em relação ao número de passos ( $N$ ) de uma CQ. Então, realizamos um gráfico para a variância em função do número de passos da caminhada, para a partícula simples, bósons e férmions, como mostra a Figura (4.3). Com este gráfico, foi possível realizar a regressão apresentada na equação (4.1). A caracterização do comportamento das partículas na caminhada ordenada se baseia no valores dos expoentes da variância ( $\eta$ ) [2, 44, 45]. Estes expoentes tiveram seus valores, respectivamente e aproximadamente, encontrados para a partícula simples, bósons e férmions: 1,98; 1,96; 1,98. Estes valores indicam a localização do caminhante na região do regime superdifusivo, onde o expoente da variância possui valores entre  $1 < \eta < 2$ , e se aproxima do regime hiperdifusivo, quando o expoente passa a ser maior do que 2 ( $\eta \gtrsim 2$ ). Os valores

do expoente da variância muito próximos de 2, mostram que a dispersão do caminhante se dá de forma balística, se afastando do centro e se aproximando dos pontos de encontro dos eixos. Esta é uma propriedade intrínseca da natureza quântica atribuída a um caminhante que se propaga dentro da rede.

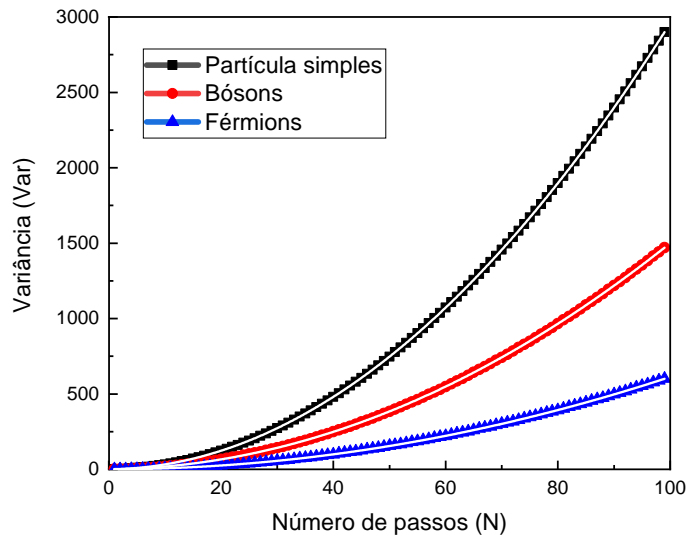


Figura 4.3: Variância da distribuição de probabilidade em uma CQO de 100 passos com refletividade  $R = 0,5$  e fase nula para todos os divisores de feixe e média sobre 10 realizações, para a partícula simples, bósons e férmions.

## 4.2 Caminhada Quântica Dinâmica

Iremos abordar agora a denominada caminhada quântica dinâmica (CQD). A CQD possui uma fase aleatória que varia apenas no tempo e não no espaço, como o próprio nome sugere. Uma representação esquemática da CQD foi dada na Figura (3.9(b)), cujas configurações foram analisadas no capítulo anterior. Como vimos, neste mesmo capítulo passado, existem três classificações quanto à mudança de fase ou desordem na caminhada, são estas: desordem estática quando ocorre alteração no espaço e não no tempo; desordem dinâmica, quando acontece o contrário do primeiro caso; e desordem dinâmica não-correlacionada, em que esta última ocorre quando há alterações de fase tanto no tempo quanto no espaço [1, 45, 53].



Nestas mesmas figuras, podemos perceber que a fase é representada pelas cores no final de cada célula da rede.

A desordem altera a evolução de uma partícula em uma CQ, porém, ao longo desse trabalho enfatizaremos o caso dinâmico. Então, o operador moeda que explicita a fase adquirida em cada divisor de feixe é dado pela expressão (4.2) [57], [58]. Esta fase é alterada apenas no tempo. Logo:

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\phi_U(j_n)} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_D(j_n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

A fase  $\phi_{U/D}(j_n)$  é atribuída ao divisor de feixe e para  $\phi_{U/D}(j_n) = 0$ , quando não há fases no divisor, temos a caminhada quântica ordenada (CQO) e este passa a ser o operador moeda de Hadamard dado pela equação (3.11).

### 4.2.1 Distribuição de Fase Uniforme

Na distribuição de probabilidade uniforme, a fase, em cada divisor de feixe, é aleatoriamente distribuída dentro do intervalo entre  $-\pi$  e  $\pi$ . Logo, selecionamos três valores, relacionados à fase uniforme, apresentados no final deste parágrafo, para analisar o comportamento da propagação do caminhante. A simulação desta caminhada quântica de 100 passos foi realizada com 10 interações, mantendo a refletividade de cada divisor de feixe com o valor de  $R = 0.5$ .

A desordem para a distribuição uniforme funciona de acordo com a equação (4.3), em que esta distribuição envolve duas variáveis, a fase  $\phi_{U,D}(j_n)$  que atua no intervalo entre  $-\frac{\delta}{2}$  e  $\frac{\delta}{2}$  e a largura de fase  $\delta$ . A largura da distribuição de fase varia entre os valores de 0,01 rad a 3,03 rad. Este registro também vale para as demais distribuições de probabilidade abordadas nas simulações que foram realizadas neste trabalho. Logo, a distribuição uniforme para esse caso se expressa da seguinte forma,

$$P(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} & \text{se } -\frac{\delta}{2} < \phi < \frac{\delta}{2} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (4.3)$$

com estas informações, iremos mostrar nas próximas sub-sessões, veremos o comportamento das partículas simples, dos bósons e dos férmions, para as larguras de fase  $\delta = 0,02 \text{ rad}$ ,  $\delta = 1,40 \text{ rad}$  e  $\delta = 2,65 \text{ rad}$ , relacionadas à desordem associada à distribuição de fase uniforme.

#### **Largura da Distribuição de Fase $\delta = 0,02 \text{ rad}$**

Podemos mostrar que em relação à densidade de probabilidade de saída do caminhante quântico na distribuição de fase uniforme em uma simulação de 100 passos e refletividade  $R = 0,5$  para uma largura de fase  $\delta = 0,02 \text{ rad}$ , ocorre uma equivalência relacionada ao caso não desordenado, pois as probabilidades das partículas atingem as posições finais localizadas nas extremidades, ocorrendo uma maior difusão destas, dentro da caminhada.

Analisando a partícula simples, vemos que há uma maior concentração de probabilidade próxima das posições  $J_{30}$  e  $J_{170}$ , conforme a Figura (4.4(c)). Para bósons, há maiores concentrações próximas às posições  $J_{30,170}$ ,  $J_{30,30}$ ,  $J_{170,30}$  e  $J_{170,170}$ , formando uma figura que se assemelha a um quadrado, onde cada ponto corresponde a um vértice desta figura geométrica, de acordo com a Figura (4.4(a)). Para os férmions, há maiores concentrações próximas às posições  $J_{30,170}$  e  $J_{170,30}$ , gerando apenas uma figura com densidades nos pontos anti-diagonais do quadrilátero, onde esta ilustração é registrada na Figura (4.4(b)). Analisando a variância em relação aos casos desordenados, realizamos um procedimento análogo ao caso ordenado, em que utilizamos a equação (4.1) e a partir desse cálculo esboçamos a Figura (4.3). Então, obtemos os valores dos expoentes para o caso dos caminhantes na largura  $\delta = 0,02 \text{ rad}$ , a partir deste esquema e estes foram, aproximadamente, obtidos para a partícula simples, bósons e férmions: 1,98; 1,96; 1,98, respectivamente. Como já dito no caso ordenado, estes valores para os expoentes da variância fazem com que o caminhante tenha uma difusão balística, associada a um sistema quântico.

#### **Largura da Distribuição de Fase $\delta = 1,40 \text{ rad}$**

Para dar continuidade ao nosso estudo, realizamos uma simulação utilizando uma largura  $\delta = 1,40 \text{ rad}$  para uma distribuição uniforme de fases, que utilizamos como desordem em

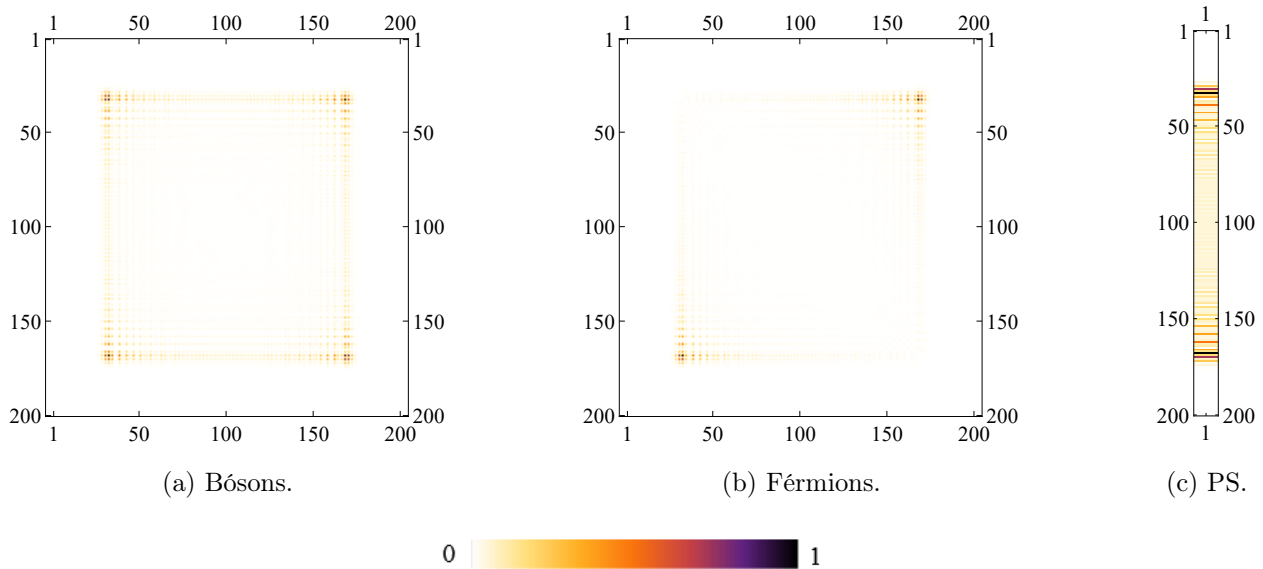


Figura 4.4: Distribuição de probabilidade da saída de uma caminhada quântica com desordem dinâmica de 100 passos com refletividade  $R = 0,5$  para a distribuição de fase uniforme para uma largura de fase  $\delta = 0,02 \text{ rad}$  e média sobre 10 realizações da caminhada, para uma única partícula e duas partículas cujo estado inicial tem simetria bosônica e fermiônica.

nosso sistema. As maiores densidades de probabilidade são localizadas nas posições centrais, havendo concentrações significativas entre as posições extremas e as do centro. Assim, o caminhante cada vez mais, sai das posições das extremidades para ocupar regiões mais centrais, próximas do ponto onde começou a caminhada. O que significa que ao aumentar a largura de fase ou a desordem na rede, ocorre perda da coerência quântica, em um processo conhecido como decoerência. Na decoerência, as propriedades quânticas de um sistema começam a deixar de existir e as clássicas se estabelecem. Outra consequência desse efeito no final da caminhada, é a ocorrência das partículas começarem a se espalhar menos na rede, construindo uma região limitada de densidades de probabilidades.

As partículas simples, nesse arranjo, possuem maior densidade de probabilidade em torno da posição mais central, concentração um pouco maior nas posições  $J = 110$  e  $J = 90$  e probabilidades podendo atingir proximidades às posições  $J = 130$  e  $J = 70$ . Conforme a Figura (4.5(c)) vemos que um caminhante tende a retornar à sua posição inicial, pois existe um grande agrupamento destes caminhantes no centro da região de saída. Os bósons também

possuem maior concentração em volta da posição mais central, mas possuem concentrações um pouco maiores próximas aos pontos  $J_{110,100}$ ,  $J_{100,110}$ ,  $J_{90,100}$  e  $J_{100,90}$ , e concentrações podendo atingir as proximidades dos pontos  $J_{130,100}$ ,  $J_{100,130}$ ,  $J_{70,100}$  e  $J_{100,70}$ , gerando uma imagem com formato de cruz. A coalescência bosônica é percebida nessa configuração, pois os bósons também tem maior probabilidade de serem encontrados nas posições diagonais da região que delimita o limite de densidades de probabilidade. Coalescência bosônica é o fenômeno conhecido por obter o agrupamento de bósons em um mesmo sítio. Estes resultados relacionados ao comportamento bosônico, mostram que para a largura da distribuição fase uniforme  $\delta = 1,40 \text{ rad}$ , ocorre maior agrupamento de partículas, principalmente nos pontos centrais. Nesta região também ocorre uma difusão significativa na região limitada apresentada de acordo com a Figura (4.5(a)). Quantos aos férmions, estes além de possuir maior concentração em volta da posição mais central e concentrações podendo atingir proximidades aos pontos  $J_{130,100}$ ,  $J_{100,130}$ ,  $J_{70,100}$  e  $J_{100,70}$ , obtendo também uma imagem semelhante a cruz. Percebe-se na figura, a anti diagonalidade e a repulsão fermiônica, pois os férmions também tem maior probabilidade de serem encontrados nas posições anti diagonais da região que limita as concentrações de probabilidade. Na repulsão fermiônica, o comportamento das partículas é marcado pelo anti agrupamento de suas partículas, ou seja, os férmions não se juntam no mesmo sítio, como aborda o princípio da exclusão de Pauli. Na Figura (4.5(b)), é possível perceber uma imagem com uma distribuição de partículas menos concentradas, nas posições mais centrais, e a ausência de coincidências na diagonal principal, o que fica evidenciado por uma reta branca nessa diagonal. Todas essas características são consequências da repulsão fermiônica. O comportamento da partícula simples, dos bósons e dos férmions, para a largura de  $\delta = 1,40 \text{ rad}$  para a distribuição uniforme, é obtido por meio dos valores dos expoentes da variância desta distribuição de probabilidade. Estes expoentes foram encontrados, respectivamente, para os três casos com os valores: 1,11; 1,07; 1,18. Estes valores indicam a localização do caminhante na região do regime superdifusivo, onde o expoente da variância possui valores entre  $1 < \eta < 2$ . Dessa vez, o comportamento do caminhante, ao invés de se aproximar do balístico, é indicado como intermediário entre o quântico e o clássico.

**Largura da Distribuição de Fase  $\delta = 2,65 \text{ rad}$**

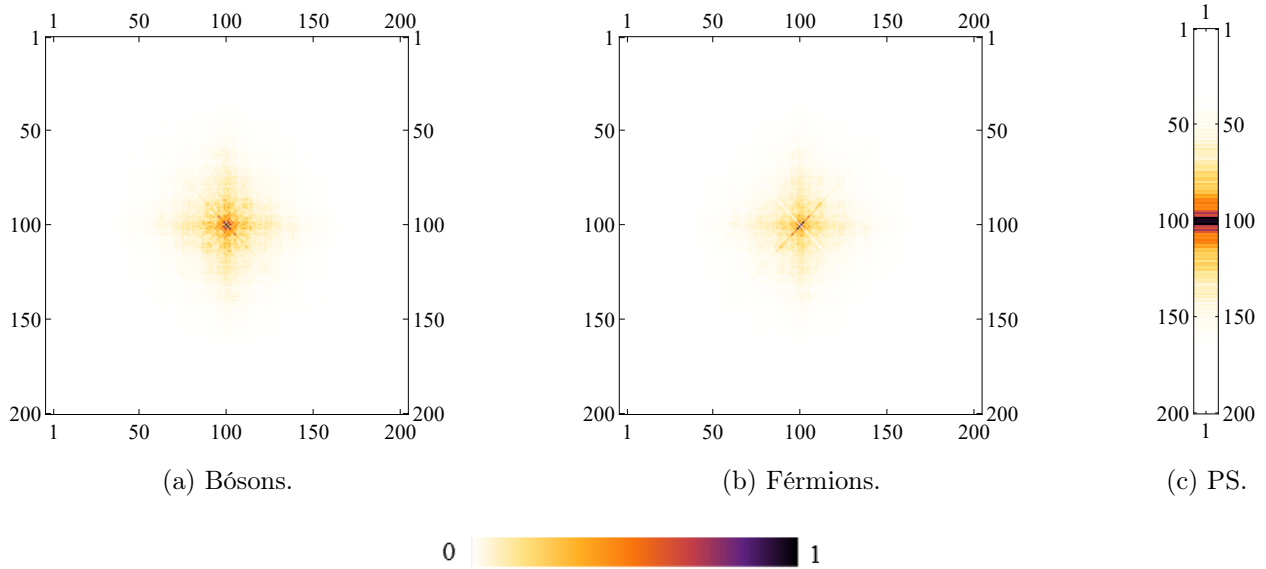


Figura 4.5: Distribuição de probabilidade da saída de uma caminhada quântica com desordem dinâmica de 100 passos com refletividade  $R = 0,5$  para a distribuição de fase uniforme para uma largura de fase  $\delta = 1,40 \text{ rad}$  e média sobre 10 realizações da caminhada, para uma única partícula e duas partículas cujo estado inicial tem simetria bosônica e fermiônica.

Para finalizar, abordamos o caso para a distribuição uniforme de probabilidade, o da largura de fase  $\delta = 2,65 \text{ rad}$ . Para esta largura, os caminhantes se concentram predominantemente nas posições centrais, com tendência a ir para o regime de propagação clássica. Logo, há uma maior decoerência quântica em relação às outras larguras de fase. Com a diminuição do espalhamento, a dispersão da caminhada quântica cada vez menor, mas ainda assim há registros das características principais das simetrias bosônicas e fermiônicas no sistema.

Investigamos o comportamento do caminhante para o caso da largura de fase uniforme  $\delta = 2.65 \text{ rad}$  para a partícula simples, bósons e férmions. Analisando o primeiro caso, temos maiores densidades de probabilidades nas regiões mais centrais e em torno delas, aproximadamente nas posições  $J = 105$  e  $J = 95$ , de acordo com a Figura (4.6(c)), em que a difusão tem a possibilidade de atingir regiões mais próximas das posições  $J = 110$  e  $J = 90$ . Para o caso dos bósons, além das maiores densidades de probabilidade nas

posições mais centrais ocorre grandes concentrações nas arestas do quadrado formado na figura, região que delimita as concentrações de probabilidade. Apesar da região de dispersão ser pequena, ainda é nítido ver como os bósons se distribuem no final do arranjo, como mostra a Figura (4.6(a)). Quanto aos férmions, ocorre maior concentração na região mais central e nas posições antidiagonais,  $J_{105,95}$  e  $J_{95,105}$ , acarretando também em uma boa nitidez quanto às essas características. A figura nítida, de menor tamanho e um pouco apagada em relação ao caso bosônico, também é a de um quadrado que delimita as densidades fermiônicas de probabilidade, como mostra a Figura (4.6(b)). Para a largura  $\delta = 2.65 \text{ rad}$  para a distribuição uniforme de desordem nas fases, temos os seguintes valores para o expoente da variância: 1,00; 0,97; 1,07, para a partícula simples, bósons e férmions, respectivamente. Um aspecto que vale ressaltar nesse parágrafo é uma tendência do caminhante de chegar em um novo regime de propagação, o subdifusivo, que possui o expoente da variância com valores abaixo de 1 ( $\eta < 1$ ). De acordo com os valores obtidos para estes expoentes, talvez seja possível obter uma tendência dos caminhantes exercerem esse comportamento, onde esta descrição precisa analisada com mais detalhe.

Para resumir a nossa análise, nas menores larguras de fase ou nas primeiras larguras a serem apresentadas na simulação realizada neste capítulo, o caminhante tende a exercer o comportamento quântico ou balístico, representado pelo valor 2 para o expoente da variância expresso pela equação (4.1). A partir desse valor, indica-se a obtenção de um novo regime de propagação, o hiperdifusivo, em que este tende a ser mais verificado para o estudo de fenômenos de transporte por ter uma boa investigação recentemente, tanto nesta área quanto em caminhadas quânticas. Quanto às densidades de probabilidade das partículas no final da caminhada para estas larguras de fase, estas se encontram nas posições finais das extremidades do arranjo, ocasionando em uma maior dispersão dos caminhantes. Depois, abordamos um comportamento intermediário do caminhante devido à apresentação de características clássicas e quânticas do mesmo. Isso ocorre quando o mesmo expoente da variância começa a ter um valor abaixo de 2, entrando no regime de propagação superdifusivo. As densidades de probabilidade de um caminhante no final da caminhada para larguras de fase intermediárias começam a deixar de se instalar nas posições das extremidades para chegar às posições centrais. Além do mais, as intensidades destas distribuições de probabilidade pas-

sam a ser mais intensas no centro, ocorrendo o início da propagação clássica do caminhante. Por último, analisando a caminhada para as maiores larguras de fase, podemos ver que há uma tendência do caminhante exercer o comportamento clássico ou difusivo, representado pelo valor 1 do mesmo expoente da variância citado neste parágrafo. Abaixo desse valor, indica-se a obtenção de um mais novo regime de propagação, o subdifusivo. Este é um novo regime a ser encontrado, pois há poucos trabalhos sobre o mesmo. As densidades de probabilidade do final da caminhada para as larguras de fase maiores nesta mesma simulação apresentada neste capítulo, são encontradas nas posições localizadas em torno do centro. Logo, as partículas acabam tendo as suas intensidades localizadas em torno de uma certa “área de restrição”. Então, podemos mostrar que no final de uma caminhada quântica para menores larguras, ocorre um maior espalhamento dos caminhantes e para maiores larguras, ocorre maior intensidade nas posições centrais.

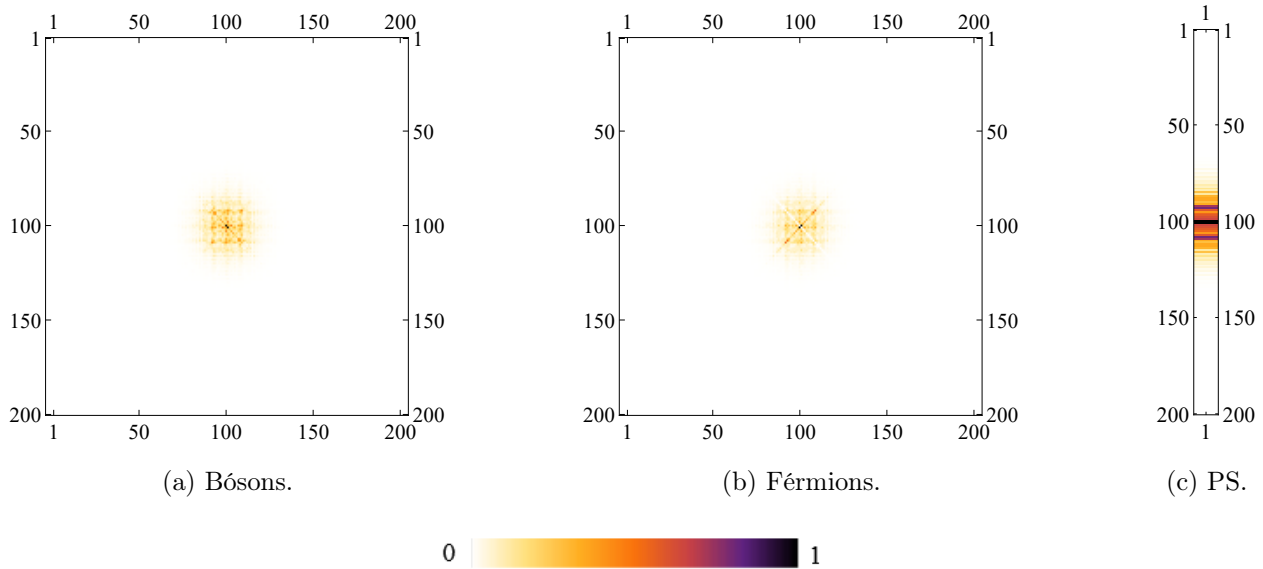


Figura 4.6: Distribuição de probabilidade da saída de uma caminhada quântica com desordem dinâmica de 100 passos para a distribuição de fase uniforme para uma largura de fase  $\delta = 2,65 \text{ rad}$  e uma média de 10 realizações da caminhada, para uma única partícula e duas partículas cujo estado inicial tem simetria bosônica e fermiônica.

### 4.2.2 Distribuição de Laplace

Abordando ainda mais diferentes distribuições de probabilidade na desordem na fase, podemos trabalhar com a Distribuição de Laplace nas caminhadas quânticas. O estudo da distribuição de probabilidade de Laplace teve início através de duas publicações, “First and Second Laws of Error” [74] e “The Use of Median in Determining Seasonal Variation” [75]. A distribuição de Laplace é conhecida como lei da diferença entre duas variáveis aleatórias exponenciais. Assim como também é conhecida pelos nomes de “Distribuição da Exponencial Dupla”, “Distribuição da Dupla Cauda” e “Lei Exponencial Bilateral” [76], [77].

A desordem da distribuição de Laplace é representada pela Equação (4.4), em que esta expressão possui duas variáveis que são envolvidas em um decaimento duplo exponencial e é expressa da seguinte forma,

$$P(\phi) = \frac{1}{2\delta} \exp\left(-\frac{|\phi - \mu|}{\delta}\right), \quad (4.4)$$

onde,  $\phi$  é a fase laplaciana que evolui a cada número de passos  $N$ , em um tempo  $t$ ,  $\delta$  é a largura de fase que varia entre  $0,01 \text{ rad}$  a  $3,03 \text{ rad}$  e esta distribuição é colocada no centro na posição zero, isto é, possui média  $\mu = 0$ . Um detalhe importante para a distribuição de probabilidade de Laplace é o aumento da largura de fase provoca a diminuição do pico da curva que compõe esta distribuição. Com estas informações, podemos apresentar o nosso estudo sobre a distribuição de probabilidade de Laplace na caminhada quântica para as larguras de fase  $\delta = 0,02 \text{ rad}$ ,  $\delta = 1,40 \text{ rad}$  e  $\delta = 2,65 \text{ rad}$ .

#### **Largura da Distribuição de Fase $\delta = 0.02 \text{ rad}$**

Para iniciar esta abordagem, investigamos a densidade de probabilidade na saída da caminhada quântica, simulada neste trabalho. Assim, obtemos o comportamento da partícula simples, bósons e férmions, analisando um pouco de suas peculiaridades e as posições que estas possam estar localizadas no final do arranjo. Nesta seção, investigamos também como desempenha a variância para a distribuição de fase Laplaciana, esboçando o diagrama que expressa o expoente desta variância em relação ao número de passos da partícula dentro da



partícula. Logo, realizamos um procedimento análogo ao cálculo realizado utilizando a equação (4.1), esboçando a Figura (4.3). Com os resultados encontrados através da forma como os caminhantes se distribuem no final desta caminhada quântica e dos valores associados ao expoente da variância da equação (4.3), podemos verificar em qual regime de propagação o caminhante esteja exercendo. Todas estas análises realizamos para todas as distribuições de probabilidade e seus respectivos casos.

A densidade de probabilidade de saída do caminhante quântico na distribuição de fase Laplaciana em uma simulação de 100 passos e refletividade  $R = 0,5$  para uma largura de fase  $\delta = 0,02 \text{ rad}$ , fornece um resultado semelhante ao caso da distribuição uniforme. Para a partícula simples, há uma maior concentração próxima das posições  $J_{30}$  e  $J_{170}$ , conforme a Figura (4.7(c)). Para bósons, há maiores concentrações próximas às posições  $J_{30,170}$ ,  $J_{30,30}$ ,  $J_{170,30}$  e  $J_{170,170}$ , formando uma figura que se assemelha a um quadrado, onde cada ponto corresponde a um vértice do sólido geométrico, de acordo com a Figura (4.7(a)). Para os férmions, há maiores concentrações próximas às posições  $J_{30,170}$  e  $J_{170,30}$ , gerando apenas uma figura com pontos anti-diagonais do quadrilátero, esta ilustração é registrada na Figura (4.7(b)). O comportamento dos caminhantes na largura  $\delta = 0,02 \text{ rad}$  associado aos expoentes da variância foram encontrados com os respectivos valores para a partícula simples, bósons e férmions: 1,98; 1,96; 1,98. Estes resultados geram uma tendência do caminhante a ir para o regime balístico de propagação.

#### **Largura da Distribuição de Fase $\delta = 1,40 \text{ rad}$**

Continuando a nossa abordagem sobre simulações realizadas relacionadas à distribuição de probabilidade de Laplace investigando o comportamento da densidade de probabilidade no final da caminhada para a largura de fase  $\delta = 1.40 \text{ rad}$  desta caminhada.

Então, analisamos os casos da partícula simples, dos bósons e dos férmions para esta largura. Para a partícula simples, há uma maior concentração em torno da posição mais central e concentrações um poucos maiores próximas às posições  $J = 120$  e  $J = 80$ , podendo atingir pontos próximos às posições  $J = 125$  e  $J = 75$ , de acordo com a Figura (4.8(c)). Nesse caso, o caminhante volta à sua posição inicial, porém o agrupamento das partículas simples em torno dessa posição é menor, comparado às outras distribuições de probabili-

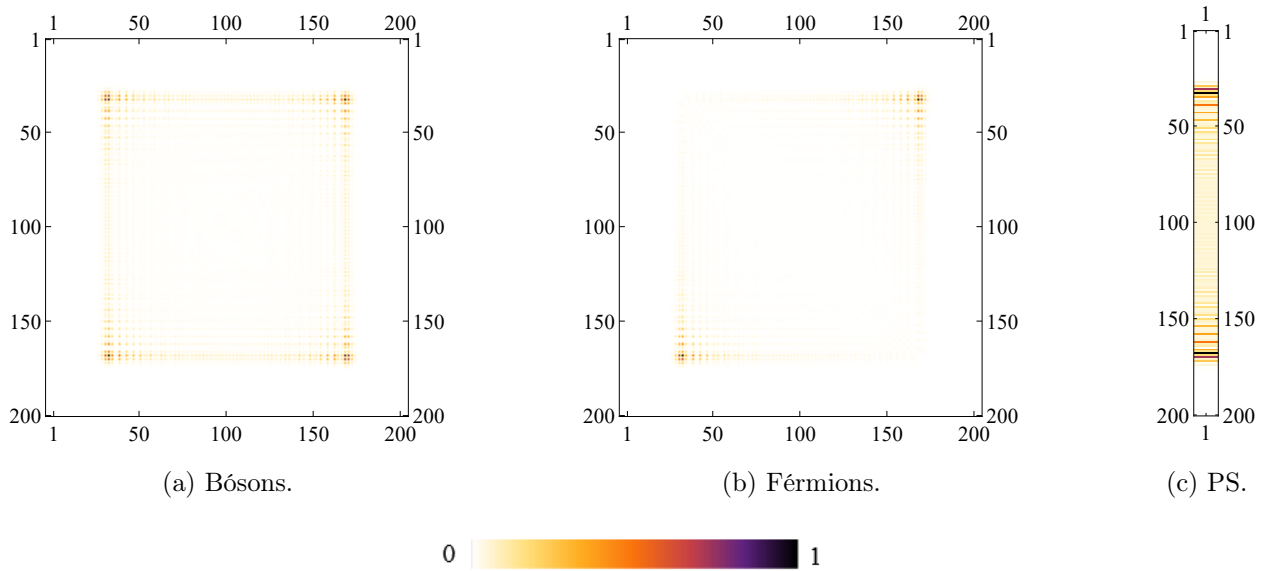


Figura 4.7: Distribuição de probabilidade da saída de uma caminhada quântica com desordem dinâmica de 100 passos com refletividade  $R=0,5$  para a distribuição de fase Laplaciana para uma largura de fase  $\delta = 0,02 \text{ rad}$  e 10 realizações da caminhada, para uma única partícula e duas partículas cujo estado inicial tem simetria bosônica e fermiônica.

dade. Para bósons, há grande concentração de probabilidade nas posições mais centrais e nas correspondentes às diagonais da região que delimita as densidades de probabilidade. A imagem fornecida também se assemelha a uma cruz, pois o limite das concentrações de probabilidade se aproxima das posições  $J_{120,100}$ ,  $J_{100,120}$ ,  $J_{80,100}$  e  $J_{100,80}$ , conservando a característica intermediária entre os casos quântico e clássico. A Figura (4.8(a)) apresenta uma imagem um pouco mais apagada para o comportamento bosônico em relação à largura de distribuição de fase laplaciana  $\delta = 1,40 \text{ rad}$ , pois nestas densidades de probabilidade ocorre menos concentração entre as partículas. Para férmions, ocorre uma concentração maior no ponto mais central e nas posições antidiagonais. As densidades de probabilidade fermiônicas podem chegar as mesmas posições referentes aos bósons, para esta largura, gerando também uma imagem semelhante a uma cruz, apesar da visualização mais apagada. Nesse caso, a imagem se torna ainda mais apagada por se tratar de um resultado de uma simulação do comportamento fermiônico para a largura de distribuição de fase de Laplace  $\delta = 1,40 \text{ rad}$ . Então, a dificuldade de ver estas características e a difusão menor da imagem, se devem

aos valores dos expoentes da variância. Nesse caso, os expoentes foram respectivamente encontrados para os três caminhantes associados: 1,13; 1,11; 1,20. Estes valores obtidos correspondem ao regime superdifusivo de propagação e um comportamento intermediário entre os casos clássico e quântico.

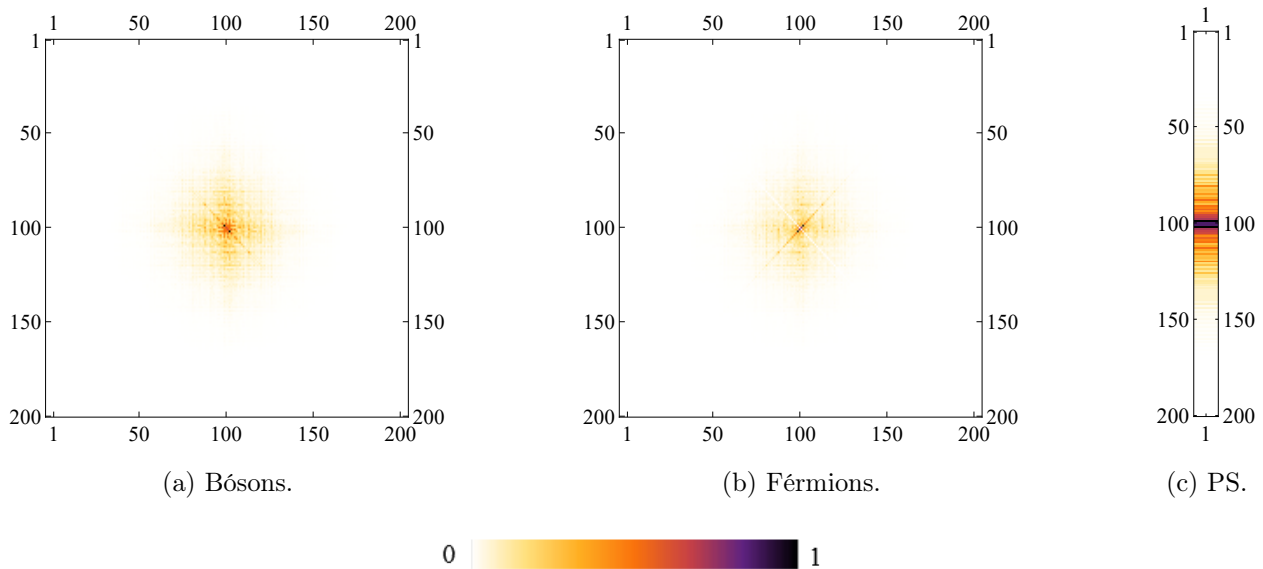


Figura 4.8: Distribuição de probabilidade da saída de uma caminhada quântica com desordem dinâmica de 100 passos com refletividade  $R=0,5$  para a distribuição de fase laplaciana para uma largura de fase  $\delta = 1,40 \text{ rad}$  e média de 10 realizações da caminhada, para uma única partícula e duas partículas cujo estado inicial tem simetria bosônica e fermiônica.

#### Largura da Distribuição de Fase $\delta = 2,65 \text{ rad}$

Para finalizar, abordamos o caso da largura de fase  $\delta = 2,65 \text{ rad}$  para a distribuição de probabilidade de Laplace. Simulamos o comportamento da partícula simples, bósons e férmions, no final da caminhada de 100 passos, para esta largura. Em todos os casos, os caminhantes ficam muito próximos, um dos outros, no último passo da caminhada. Logo, há densidades de probabilidade bem acentuadas na imagem gerada, nas posições mais centrais da figura.

Analisamos este caso para a partícula simples, bósons e férmions. Para as partículas simples, ocorrem enormes concentrações nas posições centrais e em torno delas, de acordo

com a Figura (4.9(c)). Para bósons, há concentração na posição mais central e nas posições diagonais da região que limita a distribuição de probabilidade. A figura que abriga esta região ao invés de se assemelhar a um quadrado, se assemelha a uma “mancha” com boa visibilidade, apesar do tamanho, fazendo com que as características bosônicas ainda sejam percebíveis, como mostra a Figura (4.9(a)). Para férmions, ocorre grandes concentrações nas posições centrais e nas anti diagonais da mesma região que delimita a concentração dos bósons. Na Figura (4.9(b)), é possível uma certa “mancha” com um risco branco cortado nesta mesma antidiagonal, registrando as características fermiônicas no sistema. Na largura de fase  $\delta = 2,65 \text{ rad}$  da distribuição de Laplace temos os seguintes valores para o expoente da variância: 0,98; 0,94; 1,06, para a partícula simples, bósons e férmions, respectivamente. Analisando estes valores para os expoentes da variância, em que estes estão próximos do valor 1, temos uma possibilidade destes caminhantes exercerem o regime de propagação subdifusivo, principalmente para bósons.

Através dos nossos resultados obtidos para a distribuição de probabilidade Laplaciana, podemos comparar com os resultados encontrados para a distribuição uniforme. Iniciando pelas menores larguras de fase analisadas na simulação, percebemos que os resultados obtidos de ambas as distribuições de probabilidade são muito parecidos. Logo, de maneira qualitativa podemos dizer que os resultados são praticamente os mesmos. Nas larguras de fase intermediárias, obtivemos maiores valores para o expoente da variância, representado pela equação (4.1), indicando uma intensidade um pouco menor das partículas no centro e maior afastamento do regime clássico de propagação, em relação a distribuição uniforme. Por último, analisamos as maiores larguras de fase para a distribuição de Laplace e comparando os resultados obtidos desta distribuição com os da uniforme, podemos perceber que há uma tendência maior do caminhante a exercer o regime, ocasionando em um ajuntamento ainda maior destas partículas na “área de restrição”. Estes efeitos acontecem devido aos valores encontrados para o expoente da variância, também retirado da expressão (4.1), serem menores comparados ao da distribuição uniforme.

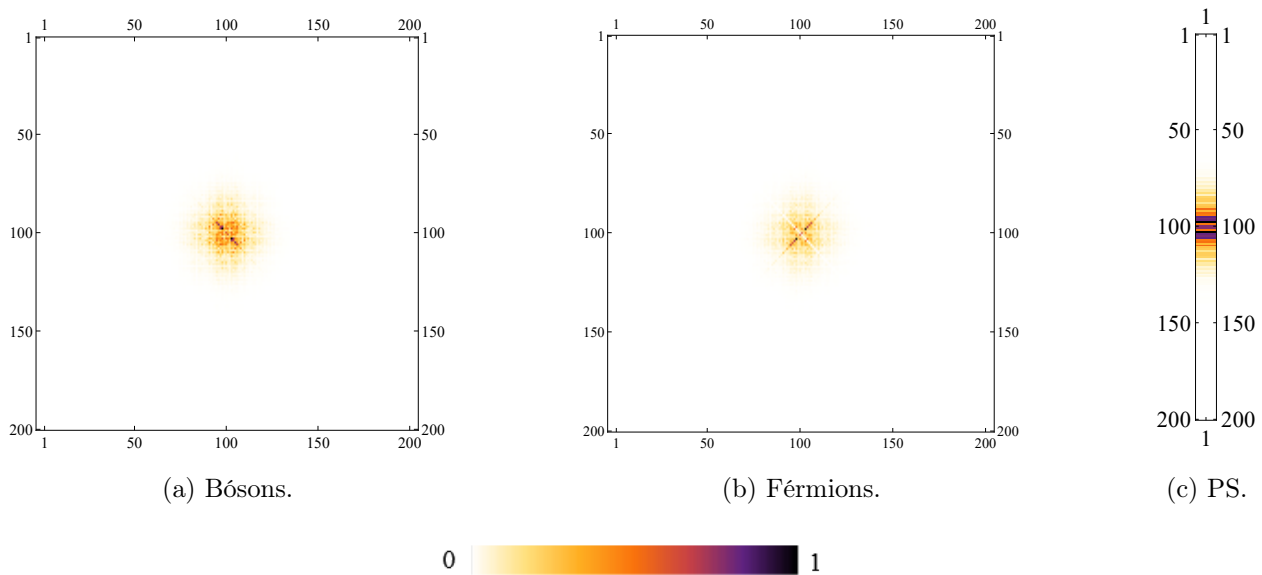


Figura 4.9: Distribuição de probabilidade da saída de uma caminhada quântica com desordem dinâmica de 100 passos com refletividade  $R = 0,5$  para a distribuição de fase laplaciana para uma largura de fase  $\delta = 2,65 \text{ rad}$  e média de 10 realizações da caminhada, para duas partículas cujo estado inicial tem simetria bosônica (a) e fermiônica (b) e para uma partícula simples (c).

### 4.2.3 Distribuição de Cauchy

A distribuição de Cauchy é uma distribuição de probabilidade que se caracteriza por ter caudas muito pesadas em sua configuração [78]. Esta foi alvo de pesquisa nas ciências exatas por mais de três séculos. Provavelmente, os primeiros estudos tenham sido realizados pelo brilhante matemático Pierre de Fermat (1607-1665) na metade do século XVII. Os estudos seguintes foram realizados, respectivamente, por Newton, Leibniz, Huygens, Guido Grandi e Maria Agnesi. A curva que caracteriza o comportamento da distribuição foi nomeada com o sobrenome da última estudiosa citada, assim o gráfico passou a ser chamado de “A Bruxa de Agnesi”, em meados do século XVIII. Quem analisou primeiramente a configuração desta curva como distribuição de probabilidade foi o também renomado matemático Simeon Denis Poisson (1781-1840) em 1824, descobrindo-a antes do cientista Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), que tem o seu nome colocado em uma das principais distribuições de probabilidade. Esta adoção se deve a uma disputa acadêmica envolvendo Cauchy e o estatístico Irénée-Jules Bienaymé em 1853 [79, 80].

A desordem da distribuição de Cauchy é representada pela equação (4.5), que é expressa da seguinte forma,

$$P(\phi) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\delta}{(\delta)^2 + (\phi - \mu)^2} \right], \quad (4.5)$$

onde,  $\phi$  é a fase da distribuição de Cauchy que evolui a cada número de passos  $N$ , em um tempo  $t$ ,  $\delta$  é a largura de fase que varia entre  $0,01 \text{ rad}$  a  $3,03 \text{ rad}$  e esta distribuição é colocada no centro na posição zero, isto é, possui média  $\mu = 0$ . Assim como ocorre para a distribuição de Laplace, na distribuição de probabilidade de Cauchy é provocado o aumento da largura de fase quando é diminuído o pico da curva que compõe esta distribuição.

Apresentamos os nossos resultados obtidos sobre a distribuição de probabilidade de Cauchy na caminhada quântica discreta com 100 passos para as larguras de fase  $\delta = 0,02 \text{ rad}$ ,  $\delta = 1,40 \text{ rad}$  e  $\delta = 2,65 \text{ rad}$ .

#### **Largura da Distribuição de Fase $\delta = 0,02 \text{ rad}$**

Para iniciar a abordagem, podemos mostrar que as densidades de probabilidade de saída do caminhante quântico na distribuição de fase de Cauchy, em uma simulação de 100 passos e refletividade  $R = 0,5$  para uma largura de fase  $\delta = 0,02 \text{ rad}$ , ocorrem de maneira equivalente ao caso uniforme. Logo, para a partícula simples, há uma maior concentração próxima das posições  $J_{30}$  e  $J_{170}$ , conforme a Figura (4.10(c)). Para bósons, há maiores concentrações próximas às posições  $J_{30,170}$ ,  $J_{30,30}$ ,  $J_{170,30}$  e  $J_{170,170}$ , formando uma figura que se assemelha a um quadrado, onde cada ponto corresponde a um vértice da figura geométrica, de acordo com a Figura (4.10(a)). Para os férmions, há maiores concentrações próximas às posições  $J_{30,170}$  e  $J_{170,30}$ , gerando apenas uma figura com pontos antidiagonais do quadrilátero, esta ilustração é registrada na Figura (4.10(b)). O comportamento dos caminhantes na largura  $\delta = 0,02 \text{ rad}$  acontece, pois os expoentes da variância foram encontrados com os respectivos valores para a partícula simples, bósons e férmions: 1,98; 1,96; 1,98. Estes valores para o expoente da variância desta distribuição de probabilidade fazem que o caminhante, imerso na rede, se aproxime do comportamento balístico.

#### **Largura da Distribuição de Fase $\delta = 1,40 \text{ rad}$**

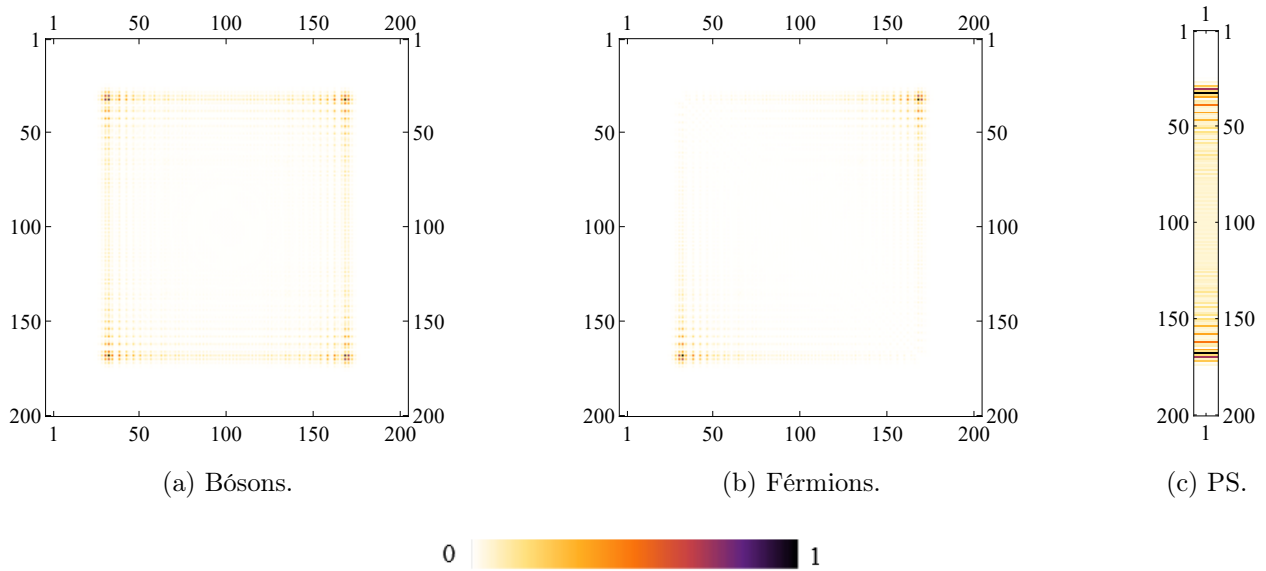


Figura 4.10: Distribuição de probabilidade da saída de uma caminhada quântica com desordem dinâmica de 100 passos com refletividade  $R = 0,5$  para a distribuição de fase de Cauchy para uma largura de fase  $\delta = 0,02 \text{ rad}$  e média de 10 realizações da caminhada, para uma única partícula e duas partículas cujo estado inicial tem simetria bosônica e fermiônica.

Agora, iremos abordar o caso intermediário para a distribuição de probabilidade de Cauchy, o da largura de fase  $\delta = 1,40 \text{ rad}$ . Para esta largura, analisamos a densidade de probabilidade na saída de caminhada para a partícula simples, bósons e férmions.

Em todos os casos, ocorre um maior espalhamento da partículas em relação às outras distribuições de probabilidade, acarretando em um limite maior quanto às concentrações de probabilidade. No caso da partícula simples, ocorre uma maior difusão, pois além de possuir maior concentração na posição central, ocorre concentrações um pouco maiores próximas das posições  $J_{70}$  e  $J_{130}$  e as outras menores podendo atingir os pontos  $J_{50}$  e  $J_{150}$ , conforme a Figura (4.11(c)). No caso dos bósons, há maior concentração de probabilidade na posição mais central e nas diagonais, e também há maior espalhamento porque ocorrem concentrações um pouco maiores próximas das posições  $J_{130,100}$ ,  $J_{100,130}$ ,  $J_{70,100}$  e  $J_{100,70}$  e outras concentrações menores possíveis de atingir posições  $J_{150,100}$ ,  $J_{100,150}$ ,  $J_{50,100}$  e  $J_{100,50}$ . Logo, há uma grande nitidez em relação à diagonalidade e outros efeitos bosônicos como a coalescência, devido ao aumento de fronteira de densidades de probabilidade, deixando a imagem no formato de cruz,

bem mais evidente. O que significa que as concentrações de probabilidade do caso bosônico de uma largura de fase  $\delta = 1,40 \text{ rad}$  para uma distribuição de fase do tipo Cauchy são as mais acentuadas e o agrupamento dos bósons fica mais claro de perceber. Logo, estes detalhes descritos relacionados aos bósons são representados pela Figura (4.11(a)). Para férmions, há também maior concentração na posição mais central e nas posições anti diagonais. O limite para a densidade de probabilidade pode chegar às mesmas posições relacionadas ao caminhante anterior, fazendo com que a anti diagonalidade e fenômenos associados como repulsão fermiônica possam ser percebidos com mais evidência, pois o anti agrupamento dos férmions fica mais fácil de perceber devido ao aumento da região que limita a densidades de probabilidade, conforme a Figura (4.11(b)). O caso intermediário para a distribuição de Cauchy tem os seguintes valores para o expoente da variância para a partícula simples, bósons e férmions, respectivamente: 1,10; 1,06; 1,19. Novamente, estes valores obtidos fazem com que o caminhante esteja no regime superdifusivo de propagação.

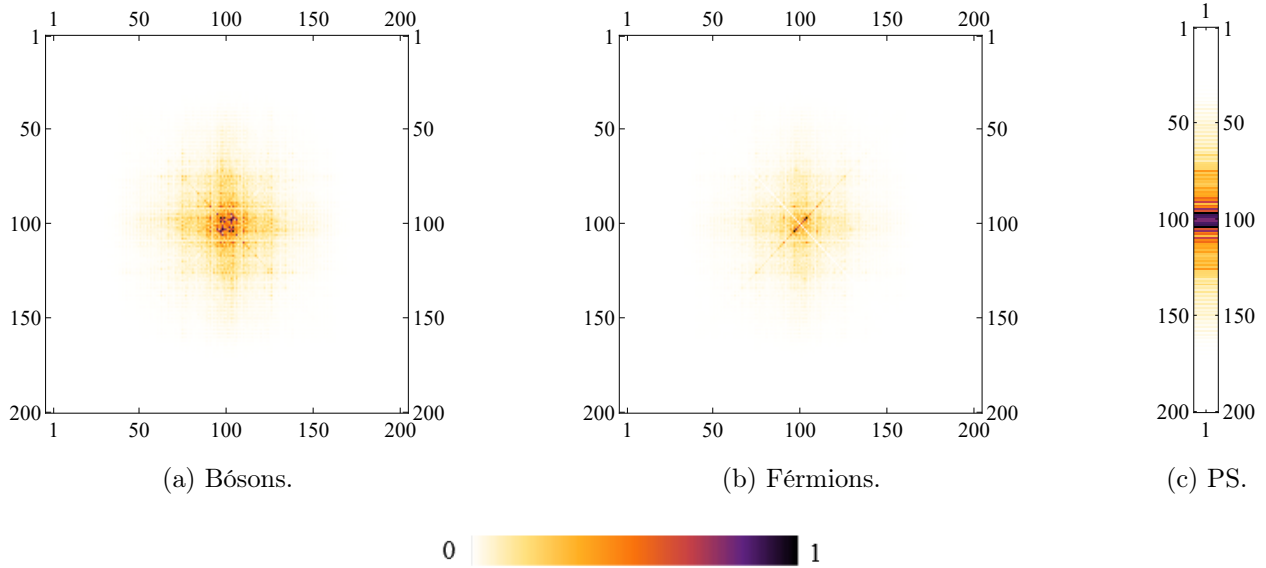


Figura 4.11: Distribuição de probabilidade da saída de uma caminhada quântica com desordem dinâmica de 100 passos com refletividade  $R=0,5$  para a distribuição de fase de Cauchy para uma largura de fase  $\delta = 1,40 \text{ rad}$  e média de 10 realizações da caminhada, para uma única partícula e duas partículas cujo estado inicial tem simetria bosônica e fermiônica.

#### Largura da Distribuição de Fase $\delta = 2,65 \text{ rad}$



Por último, abordamos a densidade de probabilidade no último passo da caminhada quântica no caso da distribuição de probabilidade de Cauchy para a largura de fase  $\delta = 2,65 \text{ rad}$  para a partícula simples, bósons e férmions. Em todos os casos, há uma imagem assemelhada a um ponto nas figuras obtidas porque ocorre as menores acentuações quanto às concentrações em relação às outras distribuições de probabilidade analisadas. Para começar, as densidades de probabilidade para a partícula simples possuem maiores valores nas posições centrais e as demais concentrações não chegar a expandir muito além destas posições, conforme a Figura (4.12(c)). As concentrações para bósons e férmions também ocorrem de maneira semelhante em relação ao primeiro caso, a única diferença é a grande probabilidade de encontrar os caminhantes nas posições diagonais para o caso bosônico e nas anti diagonais para o caso fermiônico, dentro da pequena região de concentrações, conforme as figuras (4.12(a)) e (4.12(b)). Nas diagonais e antidiagonais, podemos perceber uma distribuição mais espalhada das partículas, sem ocorrer um forte agrupamento das mesmas região de maior densidade. O comportamento dos caminhantes para a largura de fase  $\delta = 2,65 \text{ rad}$  se deve aos menores valores atribuídos para os expoentes da variância que são dados por: 1,01; 0,98; 1,09, para a partícula simples, bósons e férmions, respectivamente. Novamente de acordo com os valores do expoente da variância obtidos, todos os caminhantes estudados nesta simulação se propagam com um comportamento aproximadamente clássico, ao passarem em torno da largura de fase  $\delta = 2,65 \text{ rad}$ .

Mais uma vez foi mostrado que ao aumentarmos a largura da distribuição de uma desordem, ocorre uma transição do comportamento quântico para o clássico, em relação à propagação do caminhante. Apesar de ter algumas particularidades, foi possível também investigar os resultados analisando cada um deles de acordo com o regime de propagação indicado. Na próxima subseção, iremos analisar a caminhada quântica desordem com detalhes, a região que indica cada regime de propagação em gráficos são construídos através da obtenção do expoente da variância da posição média das partículas em função da largura de distribuição de fase.

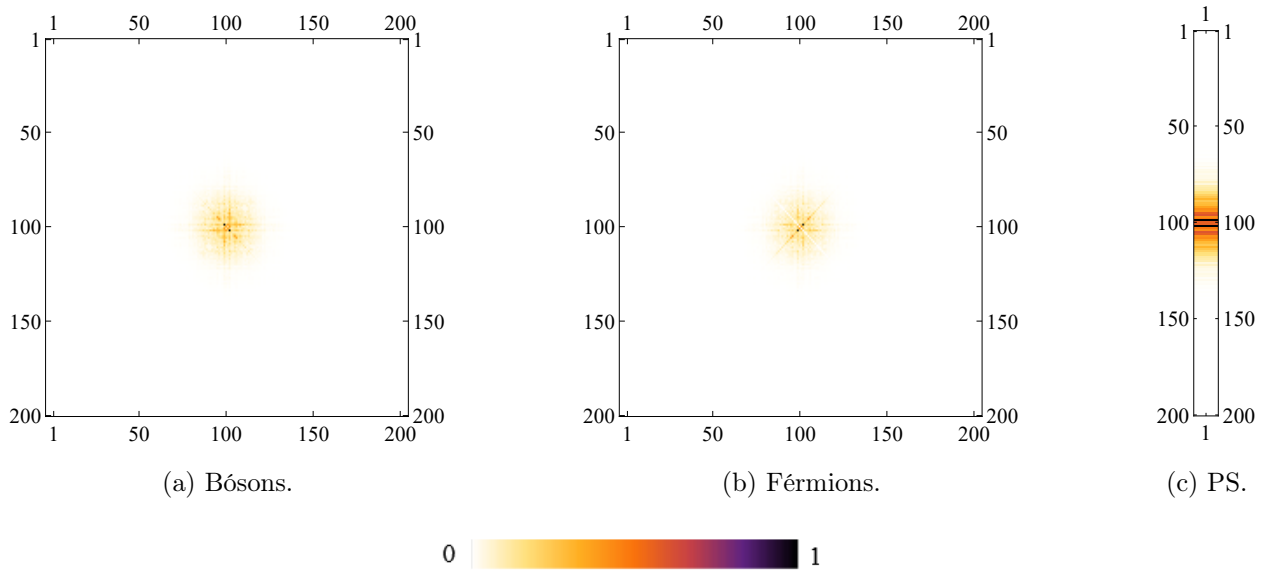


Figura 4.12: Distribuição de probabilidade da saída de uma caminhada quântica com desordem dinâmica de 100 passos com refletividade  $R = 0,5$  para a distribuição de fase de Cauchy para uma largura de fase  $\delta = 2,65rad$  e média sobre 10 realizações da caminhada, para uma única partícula e duas partículas cujo estado inicial tem simetria bosônica e fermiônica.

#### 4.2.4 Transição entre Comportamentos Balísticos e Difusivos para uma Caminhada Quântica

Analisamos o comportamento dos caminhantes abordados no nosso estudo (partícula simples, bósons e férmions), cuja caminhada quântica possui 100 passos com refletividade  $R = 0.5$  e 10 realizações, através da obtenção de gráficos que esboçam a relação do expoente da variância com a largura de distribuição de fase, em que ambas as variáveis são associadas a uma distribuição de probabilidade.

Os gráficos abordados, nesta sessão, passam a indicar qual o regime de propagação do caminhante. Estes regimes de propagação ou transporte, fazem com que os caminhantes apresentem comportamentos quânticos ou balísticos, difusivos ou clássicos e intermediários ou superdifusivos. Os caminhantes podem trafegar pelos regimes hiperdifusivos, superdifusivos e subdifusivos. Cada um destes, possuem os seguintes valores para o expoente da variância:  $\eta > 2$ ,  $1 < \eta < 2$  e  $\eta < 1$ , respectivamente. Logo, analisamos os diagramas de cada uma das distribuições de probabilidade que vimos nos capítulos anteriores (Uniforme,

Laplace e Cauchy). Dentro da análise destas distribuições, escolhemos fazer a verificação para algumas larguras nas fases próximas às balísticas, intermediárias e perto das difusivas, onde o primeiro caso tem o valor 2 e o último caso o valor 1, para o expoente da variância ( $\eta$ ). É possível perceber, através dos gráficos do expoente da variância em função da largura da distribuição da desordem, que para um valor específico da largura da distribuição da desordem, os férmions sempre possuem um expoente maior. Para todas as distribuições da desordem. Isto está de acordo com o esperado, devido à repulsão fermiônica. Existem alguns trabalhos que possuem realizações experimentais e numéricas [81, 82]. Numa exploração um pouco mais aprofundada em relação ao comportamento subdifusivo dos caminhantes, foi feita uma realização experimental que obteve um modelo de caminhada quântica capaz de obter fenômenos transitórios de subdifusão [81]. A partir de uma região intermediária, os férmions começam a se aproximar dos outros caminhantes, onde todos passam a exercer o regime de supertransporte em quase todo trecho da caminhada entre os demais regimes de propagação. Este regime de transporte é um regime intermediário entre os regimes, clássico ou difusivo e quântico ou balístico. Vários sistemas desordenados apresentam dinâmicas superdifusivas, exemplos podem ser encontrados nas referências [43, 83, 84]. Apenas os férmions podem chegar ao regime hiperdifusivo, pois o afastamento das outras partículas se deve ao fato das suas funções de onda possuírem características antissimétricas, como postulado pelo princípio da exclusão de Pauli. Os bósons têm como um dos seus principais aspectos a coalescência, pois suas funções de onda são simétricas. A coalescência, nesse caso, é percebida não apenas pelas partículas bosônicas, mas em outras como partículas simples. A hiperdifusão é explorada por uma gama de pesquisadores, onde um trabalho passou a ter pioneirismo na investigação experimental. Este artigo obteve resultados sobre tal regime, analisando a evolução da propagação de um laser através de um meio fotônico com evolução na desordem dinâmica, em que este modelo faz analogia a um sistema de óptica paraxial [85]. Quanto à investigação numérica, podemos citar um trabalho que através da obtenção de uma solução exata para a equação da difusão não-linear, que consegue indicar regime de hipertransporte [71]. Outros conseguem indicar hiperdifusão, indicando valores para o expoente da variância ( $\eta$ ) de uma distribuição de probabilidade próximos de 3 ( $\eta \approx 3$ ) [86, 87]. Além disso, as simulações realizadas apresentadas na sessão anterior, são consequências dos resultados obtidos mostrados

nesta sessão.

Novamente, o conteúdo desta sessão se divide nas abordagens realizadas para cada distribuição de probabilidade que estudamos na sessão anterior. Começando pela distribuição uniforme, depois pela Laplaciana e, finalmente, pela de Cauchy.

### Distribuição Uniforme

Para a distribuição uniforme, começamos a abordar as regiões próximas do regime de hipertransporte, depois analisamos regiões intermediárias entre as regiões de propagação balística e difusiva, e finalmente, estudamos regiões próximas ao regime de subtransporte.

Começamos a abordar as regiões localizadas em torno do valor 2 para o expoente da variância da distribuição uniforme, o qual é indicado como propagação balística para o caminhante. Como vimos na sessão anterior, temos uma tendência em ir para ao caso balístico por causa dos valores dos expoentes serem muito próximos de 2 para todos os caminhantes, em torno da largura  $\delta = 0,02 \text{ rad}$ . Ao aumentarmos o valor largura de fase no início da caminhada, podemos perceber a entrada dos férmions no regime hiperdifusivo para as larguras  $\delta = 0,14 \text{ rad}$  e  $\delta = 0,26 \text{ rad}$ , aproximadamente. No primeiro caso, a partícula férmionica começam a entrar no hipertransporte e no segundo ocorre o pico máximo em tal regime. Para a partícula simples e bósons, não há entrada destes no hipertransporte em torno destas larguras  $\delta = 0,14 \text{ rad}$  e  $\delta = 0,26 \text{ rad}$ , ocorrendo a manutenção destas partículas no regime superdifusivo. Em torno da largura  $\delta = 0,38 \text{ rad}$ , verificamos o retorno dos férmions para a superdifusão e todos os casos retornaram a estar no mesmo regime de propagação. Estes comportamentos são caracterizados através dos valores dos expoentes obtidos no diagrama que relaciona os expoentes da variância com os valores da largura de fase, conforme o gráfico da Figura (4.13). Os valores do expoente da variância para cada largura de fase no início da caminhada, analisando partícula simples, bósons e férmions, são representados na Tabela (4.1).

Agora, abordamos as larguras de fase intermediárias para a distribuição de probabilidade uniforme nesta mesma caminhada quântica de 100 passos, onde os valores do expoente da variância ficam entre 1 e 2 ( $1 < \eta < 2$ ). Iniciamos a análise pela largura  $\delta = 0,64 \text{ rad}$ ,

Larguras de Fase ( $\delta$ )	Exp.Var.( $\eta$ ) (P. S.)	Exp.Var.( $\eta$ ) (Bósons)	Exp.Var.( $\eta$ ) (Férmions)
0,02	1,98	1,96	1,98
0,14	1,94	1,91	2,04
0,26	1,83	1,80	2,06
0,38	1,71	1,68	1,94

Tabela 4.1: Valores dos expoentes da variância da distribuição de probabilidade uniforme para cada largura de fase, dada em radianos, localizada em torno da propagação balística, de acordo com a Figura (4.13). Tais valores foram obtidos para a partícula simples, bósons e férmions.

onde os férmions passar a indicar o começo de sua aproximação em relação a bósons e a partícula simples. Nas larguras  $\delta = 1,26 \text{ rad}$  e  $\delta = 1,40 \text{ rad}$ , os férmions podem ficar mais próximos das outras partículas e o segundo caso foi escolhido como o principal a ser analisado nos resultados da sessão passada. Na última largura a ser investigada para o caso intermediário da distribuição de Laplace, a  $\delta = 1,52 \text{ rad}$ , é possível iniciar uma tendência dos bósons de realizar propagação difusiva, pois o expoente da variância se aproxima muito próximo de 1. Nessa mesma largura de fase, a partícula simples também pode tender a exercer tal propagação, de maneira menos intensa, devido ao valor do expoente da variância associado. Os demais valores para o expoente da variância da distribuição uniforme para o caso intermediário estão registrados na tabela (4.2). A descrição das informações contidas neste parágrafo, está representada na Figura (4.14).

Larguras de Fase ( $\delta$ )	Exp.Var.( $\eta$ ) (P. S.)	Exp.Var.( $\eta$ ) (Bósons)	Exp.Var.( $\eta$ ) (Férmions)
0,64	1,41	1,38	1,61
1,26	1,09	1,06	1,17
1,40	1,11	1,07	1,18
1,52	1,05	1,01	1,12

Tabela 4.2: Valores dos expoentes da variância da distribuição de probabilidade uniforme para algumas larguras de fase intermediárias, dadas em radianos, como mostra a Figura (4.14). Tais valores foram obtidos para a partícula simples, bósons e férmions.

Por último, investigamos o comportamento dos caminhantes para valores mais elevados

da largura da distribuição da desordem. Nesse caso, os caminhantes trafegam aos arredores da região que delimita a propagação difusiva e subdifusiva. Nessa região, podemos perceber que os bósons tem menos pico de subdifusão e podem estar, quase a todo momento, próximos do limiar difusivo. Essa característica pode ser percebida pelos valores do expoente para cada uma largura de fase. Nas larguras  $\delta = 2,40 \text{ rad}$  e  $\delta = 2,77 \text{ rad}$ , os bósons e a partícula simples se encontram juntos no regime subdifusivo. Para  $\delta = 2,53 \text{ rad}$  e  $\delta = 2,65 \text{ rad}$ , apenas os bósons podem se encontrar em tal regime, partícula simples e férmions estão exercendo o regime superdifusivo, onde o expoente da variância possui um valor maior que 1. Estes comportamentos são representados pelos valores do expoente da variância obtidos na Tabela (4.3). A descrição das informações contidas neste último parágrafo relacionado à distribuição uniforme, está representada na Figura (4.13).

Larguras de Fase ( $\delta$ )	Exp.Var.( $\eta$ ) (P. S.)	Exp.Var.( $\eta$ ) (Bósons)	Exp.Var.( $\eta$ ) (Férmions)
2.40	0,97	0,95	1,05
2.53	1,01	0,99	1,07
2.65	1,00	0,97	1,07
2.77	0,98	0,96	1,05

Tabela 4.3: Valores dos expoentes da variância da distribuição de probabilidade uniforme para algumas larguras de fase, dadas em radiano, localizadas em torno da propagação difusiva (clássica), como mostra a Figura (4.14). Tais valores foram obtidos para a partícula simples, bósons e férmions.

### Distribuição de Laplace

Para a distribuição Laplaciana, fizemos a mesma abordagem em relação ao primeiro caso. Analisando regiões delimitadas em relação ao regime de hipertransporte, depois analisamos regiões intermediárias entre as regiões de propagação quântica e clássica, e finalmente, estudamos regiões que estão associadas à subdifusão. Uma peculiaridade desta distribuição de probabilidade é a que resultados obtidos das simulações, são parecidos com a distribuição uniforme, conforme a Figura (4.14). Esta figura representa um gráfico que apresenta o expoente da variância da posição média das partículas ao final da caminhada sob a influência da

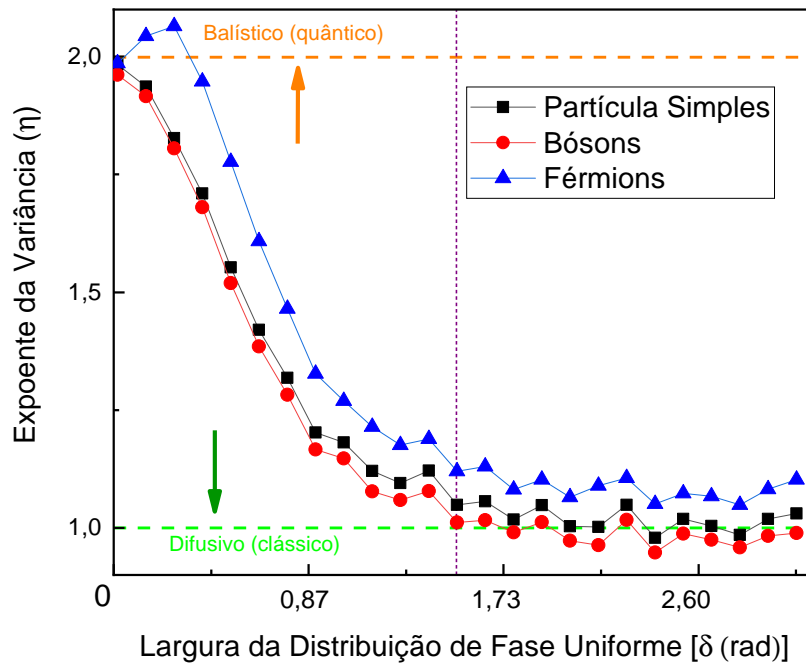


Figura 4.13: Gráfico do expoente da variância da posição das partículas ( $\eta$ ) em função da largura ( $\delta$ ) para uma distribuição de probabilidade uniforme da desordem, em uma caminhada quântica de 100 passos, refletividade  $R=0.5$  e 10 interações. Esta simulação foi realizada com larguras desta distribuição de fase uniforme expressas em radiano, variando em torno de  $0.01 \text{ rad}$  a  $3.03 \text{ rad}$ . Estes resultados foram obtidos para uma única partícula e duas partículas com simetrias bosônicas e fermiônicas.

desordem que tem uma distribuição cuja largura de fase varia. Com estes detalhes, podemos ver os regimes de propagação abordados nesse trabalho.

Começamos a analisar a distribuição de Laplace, começamos também pela largura  $\delta = 0,02 \text{ rad}$ , onde é possível observar uma tendência da partícula simples, bósons e férmions, irem para o regime balístico, mas estas podem continuar no superdifusivo. Um pouco acima desta largura de fase, os férmions podem entrar no regime hiperdifusivo e os outros podem permanecer no supertransporte. Próximo à largura de fase  $\delta = 0,14 \text{ rad}$ , o hipertransporte pode começar a atuar na caminhada. A máxima intensidade deste regime de propagação no sistema pode ocorrer próximo da largura  $\delta = 0,26 \text{ rad}$ . Por volta da largura  $\delta = 0,38 \text{ rad}$ ,

indica-se a saída dos férmions em relação ao hipertransporte e o seu retorno ao regime superdifusivo. Os resultados obtidos para o regime hiperdifusivo e a região que delimita a propagação balística para a distribuição Laplaciana, são bastante parecidos com estes resultados encontrados para a distribuição uniforme, como mostra a Figura (4.14). Os valores dos expoentes da variância, próximos de 2, para o caso balístico da distribuição de Laplace são apresentados na Tabela (4.4).

Larguras de Fase ( $\delta$ )	Exp.Var.( $\eta$ ) (P. S.)	Exp.Var.( $\eta$ ) (Bósons)	Exp.Var.( $\eta$ ) (Férmions)
0,02	1,98	1,96	1,98
0,14	1,94	1,92	2,05
0,26	1,83	1,82	2,07
0,38	1,70	1,68	1,95

Tabela 4.4: Valores dos expoentes da variância da distribuição de probabilidade Laplaciana com desordem, para larguras de fases diferentes dadas em radianos, localizada em torno da propagação balística, de acordo com a Figura (4.14). Tais valores foram obtidos para a partícula simples, bósons e férmions.

No caso intermediário para a distribuição de Laplace, iniciamos a abordagem por meio do comportamento dos caminhantes em torno da largura  $\delta = 0,76 \text{ rad}$ . Nesta largura de fase, os férmions podem começar a se aproximar da partícula simples e dos bósons. Avançando um pouco mais, podemos perceber que a largura  $\delta = 1,40 \text{ rad}$  pode passar a ser uma das últimas a possuírem características atribuídas ao regime superdifusivo, acarretando em uma tendência das partículas, com exceção dos férmions, a se propagarem de maneira clássica ou difusiva. Logo, esta tendência também pode ser vista nas larguras  $\delta = 1,52 \text{ rad}$  e  $\delta = 1,64 \text{ rad}$ . No último caso, o expoente da variância para os bósons se aproxima muito do limiar difusivo, ou seja, este valor quase se equivale a 1. Estes comportamentos acontecem devido aos valores do expoente da variância descritos na Tabela (4.5). Assim também, a descrição de todas essas informações colocadas neste parágrafo é representada na Figura (4.14).

Para terminar a abordagem para a distribuição de Laplace, investigamos o comportamento da partícula simples, bósons e férmions, ao passarem pelas larguras de fase difusivas



Larguras de Fase ( $\delta$ )	Exp.Var.( $\eta$ ) (P. S.)	Exp.Var.( $\eta$ ) (Bósons)	Exp.Var.( $\eta$ ) (Férmions)
0,76	1,31	1,35	1,50
1,40	1,13	1,11	1,20
1,52	1,08	1,05	1,16
1,64	1,06	1,02	1,13

Tabela 4.5: Valores dos expoentes da variância da distribuição de probabilidade laplaciana com desordem, para algumas larguras de fases intermediárias dadas em radianos, como mostra a Figura (4.14). Tais valores foram obtidos para a partícula simples, bósons e férmions.

que compõem a caminhada quântica que estamos analisando. Algumas das características desse caso poder ser relacionado à ocorrência de maiores picos de subtransporte em relação aos bósons e das partículas simples estarem no limiar da propagação difusiva. Para a largura  $\delta = 2.02 \text{ rad}$ , os bósons e a partícula simples, podem entrar no regime subdifusivo e os férmions estão no regime de propagação clássica. Na largura  $\delta = 2,53 \text{ rad}$ , os bósons podem permanecer no subtransporte e a partícula simples pode ser encontrada, praticamente, no limiar da propagação difusiva. O ponto em que se encontra a largura  $\delta = 2,65 \text{ rad}$  é onde pode ocorrer o maior intensidade relacionado a bósons e partícula simples. Por último, no ponto da largura  $\delta = 2,77 \text{ rad}$ , a partícula simples pode retornar a acompanhar os férmions no regime superdifusivo e os bósons passam a estar bem mais próximos do limite da propagação clássica. Estas informações relacionadas a estas partículas e as larguras de fase são obtidas através dos valores dos expoentes da variância dessa distribuição de probabilidade apresentados na Tabela (4.6), e estes valores são retirados da Figura (4.14).

### Distribuição de Cauchy

Iniciando a abordagem da distribuição de Cauchy para uma caminhada quântica de 100 passos com refletividade  $R = 0.5$  e 10 interações, podemos apresentar o comportamento dos caminhantes ao passar pelas regiões dos mesmos regimes de propagação abordados nas subseções anteriores, como os de hipertransporte, superdifusão e subtransporte. Um caminhante que desempenha o regime hipertransporte se encontra acima da propagação balística e quando este desempenha um regime subdifusivo, se encontra abaixo da propagação difusiva.

Larguras de Fase ( $\delta$ )	Exp.Var.( $\eta$ ) (P. S.)	Exp.Var.( $\eta$ ) (Bósons)	Exp.Var.( $\eta$ ) (Férmions)
2,02	0,98	0,95	1,05
2,53	1,02	1,00	1,10
2,65	0,98	0,94	1,06
2,77	1,03	0,99	1,10

Tabela 4.6: Valores específicos da largura da distribuição de probabilidade Laplaciana para a desordem, dados em radianos. Estas larguras estão localizadas em torno da propagação difusiva (clássica), como mostra a Figura (4.14). Tais valores foram obtidos para a partícula simples, bósons e férmions.

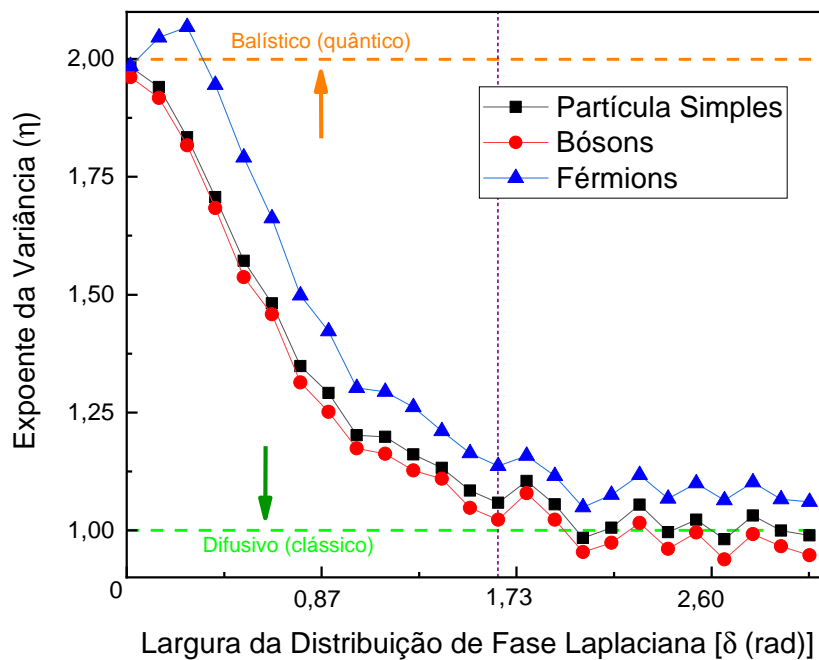


Figura 4.14: Gráfico do expoente da variância da posição das partículas ( $\eta$ ) em função da largura ( $\delta$ ) para uma distribuição de probabilidade Laplaciana da desordem, em uma caminhada quântica de 100 passos, refletividade  $R = 0.5$  e 10 interações. Esta simulação foi realizada com larguras desta distribuição de fase laplaciana expressas em radiano, variando em torno de  $0,01 \text{ rad}$  a  $3,03 \text{ rad}$ . Estes resultados foram obtidos para uma única partícula e duas partículas com simetrias bosônicas e fermiônicas.

Estas informações são descritas através do gráfico representado pela Figura (4.15).

Analisando a região de propagação balística para a distribuição de probabilidade de Cauchy, podemos iniciar pela largura  $\delta = 0,02 \text{ rad}$ , onde novamente é possível haver uma tendência da partícula simples, dos bósons e férmions, irem ao local que delimita a região balística. O pico do hipertransporte para os férmions, dessa vez, pode ocorrer por volta da largura  $\delta = 0,14 \text{ rad}$  e por volta da largura  $\delta = 0,26 \text{ rad}$ , os férmions podem ser encontrados por volta do limiar da propagação quântica. Ao sair do regime hiperdifusivo e da propagação balística, os férmions passam a estar no regime superdifusivo junto com os outros caminhantes a partir da largura  $\delta = 0,38 \text{ rad}$ . Para uma região de expoente da variância próxima de 2 de uma distribuição de Cauchy, pode haver uma maior concentração dos férmions em torno desse local, ocorrendo uma quantidade menor de picos para o regime hiperdifusivo. O expoente da variância indica o comportamento destas descrições, assim como a Figura (4.15) apresenta também. Os valores para o expoente da variância da distribuição de Cauchy próximos ao hipertransporte, foram obtidos e apresentados na Tabela (4.7).

Larguras de Fase ( $\delta$ )	Exp.Var.( $\eta$ ) (P. S.)	Exp.Var.( $\eta$ ) (Bósons)	Exp.Var.( $\eta$ ) (Férmions)
0,02	1,98	1,96	1,98
0,14	1,94	1,91	2,05
0,26	1,86	1,84	2,01
0,38	1,74	1,72	1,98

Tabela 4.7: Valores dos expoentes da variância da distribuição de probabilidade laplaciana para cada largura de fase, dada em radiano, localizada em torno da propagação balística, de acordo com a Figura (4.15). Tais valores foram obtidos para a partícula simples, bósons e férmions.

Iniciamos a abordar o caso intermediário para a distribuição de Cauchy, analisando em torno da largura  $\delta = 1,26 \text{ rad}$ , onde os férmions pode se aproximar dos bósons e da partícula simples. É possível também ocorrer uma aproximação dos férmions em relação a essas partículas em torno da largura  $\delta = 0,88 \text{ rad}$ , mas entre estas duas larguras citadas, os férmions podem se afastar dos outros caminhantes. Depois disso, partindo da largura  $\delta = 1,40 \text{ rad}$ , o caminhante tende a exercer uma propagação difusiva e na largura  $\delta = 1,64 \text{ rad}$ , o expoente da variância para bósons se aproxima bem do valor 1 para bósons e partícula

simples. Logo, o caminhante pode ser direcionado, cada vez mais, a se propagar de maneira clássica. Não apenas para a largura de fase  $\delta = 1,64 \text{ rad}$ , mas para outras larguras e partículas que se localizam próximas à região difusiva, obtemos e apresentamos os expoentes da variância na Tabela (4.8). Assim como, descrevemos o comportamento dos caminhantes nesse parágrafo e representamos na Figura (4.15).

Larguras de Fase ( $\delta$ )	Exp.Var.( $\eta$ ) (P. S.)	Exp.Var.( $\eta$ ) (Bósons)	Exp.Var.( $\eta$ ) (Férmions)
0,88	1,22	1,25	1,43
1,26	1,17	1,14	1,28
1,40	1,10	1,06	1,19
1,64	1,08	1,05	1,16

Tabela 4.8: Valores dos expoentes da variância da distribuição de probabilidade de Cauchy para algumas larguras de fase intermediárias, dadas em radianos, como mostra a Figura (4.15). Tais valores foram obtidos para a partícula simples, bósons e férmions.

Ao finalizar a abordagem para distribuição de Cauchy, investigamos o comportamento da partícula simples, bósons e férmions, ao passarem pelas larguras de fase próximas que são localizadas em torno da região de propagação difusiva, onde o expoente da variância é equivalente a 1. Ao passar em torno da largura de fase  $\delta = 2,15 \text{ rad}$ , os bósons e a partícula simples podem começar a desempenhar um comportamento subdifusivo, onde os dois caminhantes também passam a estar juntos em tal regime, em torno da largura  $\delta = 2,53 \text{ rad}$ , onde os férmions passam a exercer comportamentos, aproximadamente clássicos, devido ao valor do seu expoente da variância nesse ponto. Logo mais adiante, são os bósons e as partícula simples que passam a se aproximar do limiar da propagação clássica, por volta da largura  $\delta = 2,65 \text{ rad}$ . Além disso, em torno da largura  $\delta = 2,77 \text{ rad}$ , podemos perceber comportamentos parecidos dos bósons e da partícula simples relacionado ao caso da largura  $\delta = 2,53 \text{ rad}$ , devido aos valores de seus expoentes da variância se aproximarem bastante. É interessante notar que uma possível visualizar de casos difusivos para esta distribuição de probabilidade é o aumento de picos de comportamentos subdifusivos abaixo da região difusiva. De acordo com o gráfico que representa a Figura (4.15), é possível obter a descrição do comportamento destas partículas, esboçando o expoente da variância em

função da largura de fase. Logo, a partir deste gráfico encontramos os valores apresentados na Tabela (4.9) para este caso final da distribuição de Cauchy.

Larguras de Fase ( $\delta$ )	Exp.Var.( $\eta$ ) (P. S.)	Exp.Var.( $\eta$ ) (Bósons)	Exp.Var.( $\eta$ ) (Férmions)
2, 15	0,99	0,95	1,07
2, 53	0,97	0,94	1,04
2, 65	1,01	0,98	1,09
2, 77	0,97	0,94	1,04

Tabela 4.9: Valores dos expoentes da variância da distribuição de probabilidade de Cauchy para algumas larguras de fase, expressas em radiano, localizadas em torno da propagação difusiva (clássica), como mostra a Figura (4.15). Tais valores foram obtidos para a partícula simples, bósons e férmions.

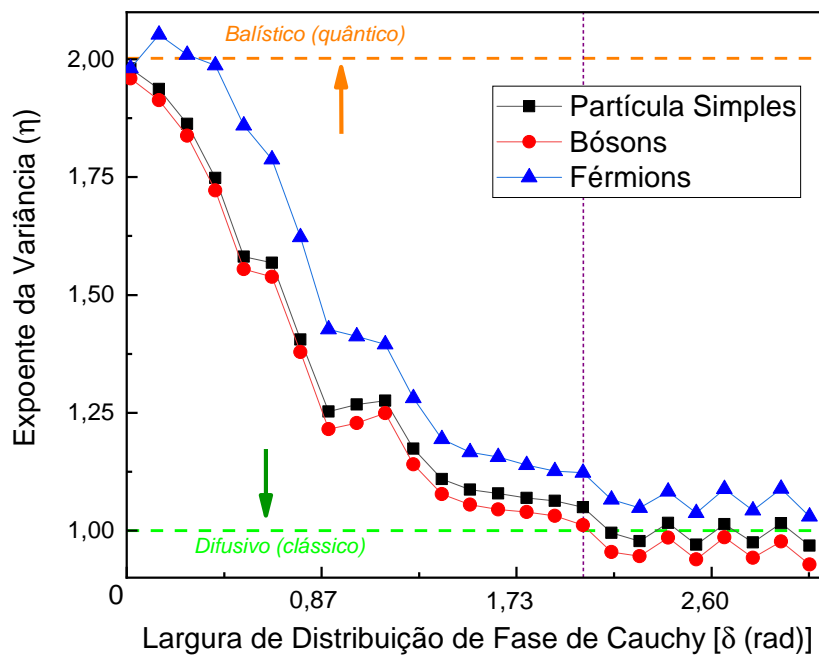


Figura 4.15: Diagrama que expressa o expoente da variância ( $\eta$ ) de uma distribuição de probabilidade de Cauchy em função da largura de fase ( $\delta$ ) em uma caminhada quântica de 100 passos, com refletividade  $R = 0.5$  e 10 interações. Esta simulação foi realizada com larguras desta distribuição de fase laplaciana expressas em radiano, variando em torno de  $0,01rad$  a  $3,03rad$ . Estes resultados foram obtidos para uma única partícula e duas partículas com simetrias bosônicas e fermiônicas.

# Capítulo 5

## Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho analisamos a simulação de um modelo de circuito de fotônica integrada. Este tipo de circuito é composto por um conjunto de divisores de feixe e moduladores da fase, que compõem uma rede na qual pode-se realizar uma caminhada quântica. Outro detalhe quanto à nossa análise é que realizamos a simulação da caminhada com 100 passos e uma média de 10 interações. Analisamos teoricamente modelos de caminhada quântica discreta para uma partícula e para duas partículas. Para sistemas com duas partículas, foi possível implementar estados emaranhados na caminhada, analisando as simetrias de estado iniciais bosônicos e fermiônicos.

Partindo de uma análise inicial sobre a caminhada quântica, foi possível acrescentar uma desordem ao sistema alterando as fases dos moduladores da rede e com isto podemos analisar as distribuições de probabilidade da posição do caminhante ao chegar no final da caminhada. Para a desordem, as distribuições de probabilidade utilizadas neste trabalho, a uniforme, a Laplaciana e a de Cauchy. O parâmetro principal que utilizamos para analisar estas distribuições foi a largura da distribuição de desordem ou largura de fase. Para cada região contendo algumas destas larguras, foi possível indicar um regime de propagação para o caminhante.

Verificamos que é possível “sintonizar” o regime de propagação do caminhante, indo da difusão até o regime balístico, através da largura da distribuição de probabilidade da desordem. Além disso, verificamos indícios que apontam para a possível existência da hiperdifusão

e da subdifusão. O fenômeno da hiperdifusão ocorre quando a propagação do caminhante passa a estar acima do limite quântico [71, 85–87].

Neste trabalho, também percebemos que há uma indicação do processo de hiperdifusão na caminhada quântica para a simetria fermiônica. O regime superdifusivo ocorre entre os limites quântico e clássico [43] [83] [84]. Já a subdifusão ocorre quando o caminhante passa a ter uma propagação abaixo do limite clássico [81] [82]. No processo subdifusivo, podemos perceber que ocorre uma indicação para a simetria bosônica. Com estes dados, foi possível analisar uma transição do comportamento quântico ou balístico, para o comportamento clássico ou difusivo, para as larguras de fase de  $0,01rad$  a  $3,03rad$ .

Com os resultados desta dissertação, alguns trabalhos foram produzidos, apresentados e publicados em encontros científicos de abrangência internacional. Com isto, foram utilizados resultados parciais deste estudo no artigo “Anomalous diffusion on a two-particle quantum walk” publicados e apresentados na 2022 SBFoton International Optics and Photonics Conference [88] e para a apresentação de um poster no Encontro de Outono da Sociedade Brasileira de Física de 2021, intitulado "Anomalous diffusion regimes on a two-particle quantum walk".

Como perspectiva, pretendemos aumentar o número de interações das simulações, para fazer uma análise mais precisa do erro associado ao expoente da variância. Quanto ao número de interações, este deve ser aumentado para 100 ou 1000. Um outro desafio está associado à implementação futura ligada à experimentação dos nossos estudos, que consiste em uma investigação experimental do processo de superdifusão através de desordem sintonizável em uma caminhada quântica discreta no tempo e a construção de um aparato experimental estável que pode ser utilizado em outros estudos relacionados a esta caminhada, com a possibilidade de explorar outros regimes de propagação como o hiperdifusivo e o subdifusivo.



# Referências Bibliográficas

- [1] Linda Sansoni. *Integrated devices for quantum information with polarization encoded qubits*. Tese (doutorado), Sapienza Università di Roma, 2012.
- [2] Rodrigo Caitano Barbosa da Silva. Simulação de uma caminhada quântica para simetrias bosônica e fermiônica em redes desordenadas. Dissertação (mestrado), Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2019.
- [3] Andrea Crespi, Roberto Osellame, Roberta Ramponi, Vittorio Giovannetti, Rosario Fazio, Linda Sansoni, Francesco De Nicola, Fabio Sciarrino, and Paolo Mataloni. Anderson localization of entangled photons in an integrated quantum walk. *Nature Photonics*, 7(4):322–328, 2013.
- [4] Linda Sansoni, Fabio Sciarrino, Giuseppe Vallone, Paolo Mataloni, Andrea Crespi, Roberta Ramponi, and Roberto Osellame. Two-particle bosonic-fermionic quantum walk via integrated photonics. *Physical review letters*, 108(1):010502, 2012.
- [5] A evolução dos computadores. Disponível em: <http://www.ic.uff.br/~aconci/evolucao.html>, Acesso em: 18 de junho de 2022.
- [6] A história do ENIAC. Disponível em: <https://tecnoblog.net/especiais/eniac-primeiro-computador-do-mundo-completa-65-anos//>, Acesso em: 18 de junho de 2022.
- [7] Tomasz Kowaltowski. Von neumann: suas contribuições à computação. *Estudos Avancados*, 10:237–260, 1996.

- [8] Ewaldo LM Mehl. Do transistor ao microprocessador. *S/d. Coletânea online de artigos acadêmicos, prof. Mehl. Disponível em: [http://www.eletrica.ufpr.br/mehl/historia\\_1.pdf](http://www.eletrica.ufpr.br/mehl/historia_1.pdf) [http://www.eletrica.ufpr.br/mehl/historia\\_2.pdf](http://www.eletrica.ufpr.br/mehl/historia_2.pdf) [http://www.eletrica.ufpr.br/mehl/historia\\_3.pdf](http://www.eletrica.ufpr.br/mehl/historia_3.pdf) [http://www.eletrica.ufpr.br/mehl/historia\\_4.pdf](http://www.eletrica.ufpr.br/mehl/historia_4.pdf)*, page 37, 2013.
- [9] O que é a lei de moore? Disponível em: <https://canaltech.com.br/mercado/o-que-e-a-lei-de-moore/>, Acesso em: 04 de julho de 2022.
- [10] Claude Elwood Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell system technical journal*, 27(3):379–423, 1948.
- [11] James Gleick. *A informação: uma história, uma teoria, uma enxurrada*. Editora Companhia das Letras, São Paulo, 2013.
- [12] Marco Antônio de Almeida. A informação, seus personagens e histórias. *InCID: Revista de Ciência da Informação e Documentação*, 6(1):116–119, 2015.
- [13] Dirk Bouwmeester, Artur Ekert, and Anton Zeilinger. *The Physics of Quantum Information*. Springer, 2000.
- [14] Richard P Feynman. Simulating physics with computers. In *Feynman and computation*, pages 133–153. CRC Press, 2018.
- [15] David Deutsch. Quantum theory, the church–turing principle and the universal quantum computer. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 400(1818):97–117, 1985.
- [16] Yakir Aharonov, Luiz Davidovich, and Nicim Zagury. Quantum random walks. *Physical Review A*, 48(2):1687, 1993.
- [17] Frederick Reif. *Fundamentals of statistical and thermal physics*. Waveland Press, 2009.
- [18] Sílvio RA Salinas. *Introdução a física estatística vol. 09*. Edusp, São Paulo, 1997.
- [19] Bao Pang, Yong Song, Chengjin Zhang, Hongling Wang, and Runtao Yang. A swarm robotic exploration strategy based on an improved random walk method. *Journal of Robotics*, 2019, 2019.

- 
- [20] Seema Rehman, Imran Umer Chhapra, Muhammad Kashif, and Raja Rehan. Are stock prices a random walk? an empirical evidence of asian stock markets. *An Empirical Evidence of Asian Stock Markets (July 31, 2017)*. *Etikonomi*, 17(2):237–252, 2018.
- [21] Rosario N Mantegna and H Eugene Stanley. *Introduction to econophysics: correlations and complexity in finance*. Cambridge university press, 1999.
- [22] Joseph E Neigel and John C Avise. Application of a random walk model to geographic distributions of animal mitochondrial dna variation. *Genetics*, 135(4):1209–1220, 1993.
- [23] Alberto Valdeolivas, Laurent Tichit, Claire Navarro, Sophie Perrin, Gaelle Odelin, Nicolas Levy, Pierre Cau, Elisabeth Remy, and Anaïs Baudot. Random walk with restart on multiplex and heterogeneous biological networks. *Bioinformatics*, 35(3):497–505, 2019.
- [24] Murray R Spiegel. *Probabilidade e Estatística-: Coleção Schaum*. McGraw-Hill, São Paulo, 1978.
- [25] Douglas C Montgomery and George C Runger. *Applied statistics and probability for engineers*. John wiley & sons, 2010.
- [26] David J Griffiths and Darrell F Schroeter. *Introduction to quantum mechanics*. Cambridge university press, 2018.
- [27] J Sakurai and J Napolitano. Modern quantum mechanics. 2-nd edition. *Person New International edition*, 2014.
- [28] Leonard Susskind and Art Friedman. *Quantum mechanics: the theoretical minimum*. Basic Books, 2014.
- [29] Andrew M Childs. Universal computation by quantum walk. *Physical review letters*, 102(18):180501, 2009.
- [30] Neil Shenvi, Julia Kempe, and K Birgitta Whaley. Quantum random-walk search algorithm. *Physical Review A*, 67(5):052307, 2003.
- [31] Neill Lambert, Yueh-Nan Chen, Yuan-Chung Cheng, Che-Ming Li, Guang-Yin Chen, and Franco Nori. Quantum biology. *Nature Physics*, 9(1):10–18, 2013.

- [32] Todd A Brun, Hilary A Carteret, and Andris Ambainis. Quantum to classical transition for random walks. *Physical review letters*, 91(13):130602, 2003.
- [33] Matthew A Broome, Alessandro Fedrizzi, Benjmain P Lanyon, Ivan Kassal, Alan Aspuru-Guzik, and Andrew G White. Discrete single-photon quantum walks with tunable decoherence. *Physical review letters*, 104(15):153602, 2010.
- [34] A Schreiber, KN Cassemiro, V Potoček, A Gábris, I Jex, and Ch Silberhorn. Decoherence and disorder in quantum walks: from ballistic spread to localization. *Physical review letters*, 106(18):180403, 2011.
- [35] Mostafa Annabestani, Seyed Javad Akhtarshenas, and Mohamad Reza Abolhassani. Decoherence in a one-dimensional quantum walk. *Physical Review A*, 81(3):032321, 2010.
- [36] Todd A Brun, Hilary A Carteret, and Andris Ambainis. Quantum random walks with decoherent coins. *Physical Review A*, 67(3):032304, 2003.
- [37] Václav Potoček, Aurél Gábris, Tamás Kiss, and Igor Jex. Optimized quantum random-walk search algorithms on the hypercube. *Physical Review A*, 79(1):012325, 2009.
- [38] John Polkinghorne. *Teoria quântica*. L&PM Pocket, 2011.
- [39] Olival Freire Jr, Osvaldo Pessoa Jr, and Joan Lisa Bromberg. *Teoria quântica: estudos históricos e implicações culturais*. Eduepb, 2011.
- [40] Borja Sepúlveda, J Sanchez Del Rio, M Moreno, Francisco J Blanco, K Mayora, Carlos Domínguez, and Laura M Lechuga. Optical biosensor microsystems based on the integration of highly sensitive mach–zehnder interferometer devices. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 8(7):S561, 2006.
- [41] Gerardo Aguilar, José Manuel Baptista, Leonardo Correia Gonçalves, and Pedro Jorge. Medição diferencial de temperatura através de fibra óptica: uma via promissora para a análise térmica de amostras. 2010.

- 
- [42] Karla Salas. Interferómetro mach zehnder en fibra óptica utilizando rejillas de periodo largo. 2010.
- [43] Andrea Gherardi, Alessandro Laneve, Luis Diego Bonavena, Linda Sansoni, Jose Ferraz, Andrea Fratalocchi, Fabio Sciarrino, Álvaro Cuevas, and Paolo Mataloni. Experimental investigation of superdiffusion via coherent disordered quantum walks. *Physical review letters*, 123(14):140501, 2019.
- [44] Julia Kempe. Quantum random walks: an introductory overview. *Contemporary Physics*, 44(4):307–327, 2003.
- [45] Francesco De Nicola, Linda Sansoni, Andrea Crespi, Roberta Ramponi, Roberto Oselame, Vittorio Giovannetti, Rosario Fazio, Paolo Mataloni, and Fabio Sciarrino. Quantum simulation of bosonic-fermionic noninteracting particles in disordered systems via a quantum walk. *Physical Review A*, 89(3):032322, 2014.
- [46] CM Chandrashekar. Quantum walk through lattice with temporal, spatial and fluctuating disordered operations. *arXiv preprint arXiv:1103.2704*, 2011.
- [47] CM Chandrashekar. Disorder induced localization and enhancement of entanglement in one-and two-dimensional quantum walks. *arXiv preprint arXiv:1212.5984*, 2012.
- [48] Hideaki Obuse and Norio Kawakami. Topological phases and delocalization of quantum walks in random environments. *Physical Review B*, 84(19):195139, 2011.
- [49] Rafael Vieira, Edgard PM Amorim, and Gustavo Rigolin. Dynamically disordered quantum walk as a maximal entanglement generator. *Physical review letters*, 111(18):180503, 2013.
- [50] Rong Zhang, Hao Qin, Bao Tang, and Peng Xue. Disorder and decoherence in coined quantum walks. *Chinese Physics B*, 22(11):110312, 2013.
- [51] Rafael Vieira, Edgard PM Amorim, and Gustavo Rigolin. Entangling power of disordered quantum walks. *Physical Review A*, 89(4):042307, 2014.

- [52] CVC Mendes, GMA Almeida, ML Lyra, and FABF de Moura. Localization properties of a discrete-time 1d quantum walk with generalized exponential correlated disorder. *Physics Letters A*, 394:127196, 2021.
- [53] Nicholas C Harris, Gregory R Steinbrecher, Mihika Prabhu, Yoav Lahini, Jacob Mower, Darius Bunandar, Changchen Chen, Franco NC Wong, Tom Baehr-Jones, Michael Hochberg, et al. Quantum transport simulations in a programmable nanophotonic processor. *Nature Photonics*, 11(7):447–452, 2017.
- [54] M Hilke. Seeing anderson localization. *Physical Review A*, 80(6):063820, 2009.
- [55] Philip W Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Physical review*, 109(5):1492, 1958.
- [56] Yoav Lahini, Yaron Bromberg, Demetrios N Christodoulides, and Yaron Silberberg. Quantum correlations in two-particle anderson localization. *Physical review letters*, 105(16):163905, 2010.
- [57] Keith R Motes, Alexei Gilchrist, and Peter P Rohde. Quantum random walks on congested lattices and the effect of dephasing. *Scientific reports*, 6(1):1–10, 2016.
- [58] Muhammad Sajid, Qurat ul Ain, Hanifa Qureshi, and Tulva Tayyeba. One-dimensional quantum walks with a time and spin-dependent phase shift. *Physics Letters A*, 416:127674, 2021.
- [59] Andre Ahlbrecht, Christopher Cedzich, Robert Matjeschk, Volkher B Scholz, Albert H Werner, and Reinhard F Werner. Asymptotic behavior of quantum walks with spatio-temporal coin fluctuations. *Quantum Information Processing*, 11(5):1219–1249, 2012.
- [60] Viv Kendon. Decoherence in quantum walks—a review. *Mathematical Structures in Computer Science*, 17(6):1169–1220, 2007.
- [61] Andreas Schreiber, Aurél Gábris, Peter P Rohde, Kaisa Laiho, Martin Štefaňák, Václav Potoček, Craig Hamilton, Igor Jex, and Christine Silberhorn. A 2d quantum walk simulation of two-particle dynamics. *Science*, 336(6077):55–58, 2012.

- [62] Masoud Mohseni, Patrick Rebentrost, Seth Lloyd, and Alan Aspuru-Guzik. Environment-assisted quantum walks in photosynthetic energy transfer. *The Journal of chemical physics*, 129(17):11B603, 2008.
- [63] Patrick A Lee and TV Ramakrishnan. Disordered electronic systems. *Reviews of modern physics*, 57(2):287, 1985.
- [64] NF Mott. Electrons in disordered structures. *Advances in Physics*, 16(61):49–144, 1967.
- [65] Tânia Tomé. *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade*. Edusp, 2014.
- [66] Linda E Reichl. A modern course in statistical physics, 2016.
- [67] William Feller. An introduction to probability theory and its applications. Technical report, 1968.
- [68] Joseph Klafter, Michael F Shlesinger, and Gert Zumofen. Beyond brownian motion. *Physics today*, 49(2):33–39, 1996.
- [69] RHA David Shaw and JA Tuszyński. Random walks with non-gaussian step-size distributions and the folding of random polymer chains. *Physical Review E*, 67(3):031102, 2003.
- [70] Tiago Aécio Grangeiro de Souza Barbosa Lima. Estudos de eficiência em buscas aleatórias unidimensionais. Dissertação (mestrado), Universidade Federal de Pernambuco, 2010.
- [71] Eirik G Flekkøy, Alex Hansen, and Beatrice Baldelli. Hyperballistic superdiffusion and explosive solutions to the non-linear diffusion equation. *Frontiers in Physics*, 9:640560, 2021.
- [72] Nathan dos Santos NICOLÁU. *Abordagem do espaço de Fock para caminhadas aleatórias de Lévy em um intervalo unidimensional: tempo médio de primeira passagem e probabilidades de absorção*. Tese (doutorado), Universidade Federal de Pernambuco, 2022.

- [73] HA Araújo, MO Lukin, MGE da Luz, GM Viswanathan, FAN Santos, and EP Raposo. Revisiting lévy flights on bounded domains: a fock space approach. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2020(8):083202, 2020.
- [74] Edwin Bidwell Wilson. First and second laws of error. *Journal of the American Statistical Association*, 18(143):841–851, 1923.
- [75] William Leonard Crum. The use of the median in determining seasonal variation. *Journal of the American Statistical Association*, 18(141):607–614, 1923.
- [76] Samuel Kotz, Tomasz Kozubowski, and Krzysztof Podgórski. *The Laplace distribution and generalizations: a revisit with applications to communications, economics, engineering, and finance*. Number 183. Springer Science & Business Media, 2001.
- [77] Gokarna Raj Aryal. Study of laplace and related probability distributions and their applications. 2006.
- [78] José Arnaldo Ribeiro Soares. A análise de risco, segundo o método de monte carlo, aplicada à modelagem financeira das empresas. 2006.
- [79] Stephen M Stigler. Studies in the history of probability and statistics. xxxiii cauchy and the witch of agnesi: An historical note on the cauchy distribution. *Biometrika*, pages 375–380, 1974.
- [80] Tadeu Fernandes de Carvalho, Denise Helena Lombardo Ferreira, and Júlio César Peneiro. Matemática, mulheres e mitos: causas e consequências históricas da discriminação de gênero mathematics, women and myths: causes and historical consequences of the discrimination gender. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 18(2), 2016.
- [81] Andrea Gherardi, Syamsundar De, Alessandro Laneve, Sonja Barkhofen, Jan Sperling, Paolo Mataloni, and Christine Silberhorn. Transient subdiffusion via disordered quantum walks. *Physical Review Research*, 3(2):023052, 2021.



- 
- [82] Nur Izzati Ishak, SV Muniandy, and Wu Yi Chong. Scaling exponent analysis and fidelity of the tunable discrete quantum walk in the noisy channel. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 559:125124, 2020.
- [83] Graça RM de Almeida, N Amaral, ARC Buarque, and WS Dias. Noise correlations behind superdiffusive quantum walks. *arXiv preprint arXiv:2207.13145*, 2022.
- [84] E Gholami and Z Mohammaddost-Lashkami. Quantum superballistic diffusion in presence of white noise. *Phys. Rev. E* 95, 022216, 2017.
- [85] Liad Levi, Yevgeny Krivolapov, Shmuel Fishman, and Mordechai Segev. Hypertransport of light and stochastic acceleration by evolving disorder. *Nature Physics*, 8(12):912–917, 2012.
- [86] Giuseppe Di Molfetta, Diogo O Soares-Pinto, and Sílvio M Duarte Queirós. Elephant quantum walk. *Physical Review A*, 97(6):062112, 2018.
- [87] Marcelo A Pires, Giuseppe Di Molfetta, and Sílvio M Duarte Queirós. Multiple transitions between normal and hyperballistic diffusion in quantum walks with time-dependent jumps. *Scientific Reports*, 9(1):1–8, 2019.
- [88] Igor Emanuel Goncalves De Oliveira, Rodrigo Caitano Barbosa Da Silva, Pedro Hugo de Figueirêdo, and José Ferraz. Anomalous diffusion on a two-particle quantum walk. In *2022 SBFoton International Optics and Photonics Conference (SBFoton IOPC)*, pages 1–5. IEEE, 2022.