



Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Física

Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada

Uma análise de escalonamento com o tamanho finito estendida
aplicada ao Modelo do Voto da Maioria

Francisco Wendel de Oliveira

Dissertação de Mestrado

Recife - PE

31 de Janeiro de 2019

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Física

Francisco Wendel de Oliveira

**Uma análise de escalonamento com o tamanho finito estendida
aplicada ao Modelo do Voto da Maioria**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada do Departamento de Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física Aplicada.

Orientador: Dr. Aduino José Ferreira de Souza

**Recife - PE
31 de Janeiro de 2020**

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

—

Francisco Wendel de Oliveira

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de mestre em Física, defendida e aprovada por unanimidade em 31/01/2020 pela Comissão Examinadora.

Orientador:

Prof. Dr. Aduino José Ferreira de Souza
DF - UFRPE

Banca Examinadora:

Dr. Pedro Hugo de Figueiredo
DF - UFRPE

Dr. Jairo Ricardo Rocha de Oliveira
DF - UFRPE

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- O48a Oliveira, Francisco Wendel de
Uma análise de escalonamento com o tamanho finito estendida aplicada ao Modelo do Voto da Maioria /
Francisco Wendel de Oliveira. - 2020.
51 f. : il.
- Orientador: Adauto Jose Ferreira de Souza.
Inclui referências.
- Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em
Física Aplicada, Recife, 2020.
1. Transições de fase. 2. Fenômenos críticos. 3. Simulações computacionais. I. Souza, Adauto Jose
Ferreira de, orient. II. Título

CDD 621

"Para cada momento da vida, existirá um verso do Racionais."

SANT (Artista musical)

Dedico este projeto a todos os professores que me influenciaram na minha trajetória. Em especial ao professor Aduino José Ferreira, meu orientador, com quem compartilhei minhas dúvidas e angústias a respeito do tema.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à minha mãe, Janieire Maria Nascimento de Oliveira. Sem o apoio dela, não poderia ter chegado até aqui.

Aos professores Pedro Hugo de Figueiredo e Jairo Ricardo Rocha de Oliveira por terem participado da banca e que contribuíram direta ou indiretamente na minha formação.

Ao professor Adauto José Ferreira de Souza por toda dedicação, paciência e excelente orientação.

Ao Cnpq e à Capes, pela ajuda financeira aos projetos e bolsas do programa de Pós graduação.

Resumo

Simulamos o Modelo do Voto da Maioria através do método Monte Carlo e determinamos um conjunto de funções de escala que são expressas apenas em termos da variável de escala $x = \xi_L/L$, onde ξ_L é o comprimento de correlação de um sistema finito de tamanho L . Os dados para redes quadradas obtidos em diferentes valores do ruído e vários tamanhos L , mostram um excelente colapso em todo intervalo de definição da variável de escala tanto para o comprimento de correlação quanto para a susceptibilidade. O conhecimento das funções de escala nos permite relacionar o valor de uma grandeza calculada em um sistema finito para um dado ruído com o valor desta mesma grandeza no limite termodinâmico ($L \rightarrow \infty$) e mesmo ruído. Desta forma, fomos capazes de extrair os valores da susceptibilidade (χ) e do comprimento de correlação (ξ) do Modelo do Voto Maioria, no limite termodinâmico, isto é, na região crítica em que $\xi \gg 1$. Os parâmetros críticos do modelos foram estimados diretamente das relações $\chi \sim t^{-\gamma}$ e $\xi \sim t^{-\nu}$, onde $t = 1 - q_c/q$ é a distância ao ponto crítico q_c . Estimamos $q_c = 0.076$, $\nu = 1.22(1)$ e $\gamma = 2.22(2)$, nos mostrando que os valores são compatíveis com os da literatura e que o sistema pertence a mesma classe de universalidade do Modelo de Ising 2D.

Palavras-chave: Sistemas socioeconômicos, transições de fase, fenômenos críticos, simulações computacionais.

Abstract

The majority voter model has been simulated through the Monte Carlo method and a set of scaling functions has been determined, which are only expressed on terms of the scale variable $x = \xi_L/L$, where ξ_L is the correlation length of a size L finite system. The data for the obtained square networks in different noise values and several L sizes show an excellent collapse in every definition interval of the scale variable for both the correlation length and susceptibility. Knowing the scaling functions permits relating the value of a calculated parameter in a finite system for a given noise with the value of the same parameter in the thermodynamic limit ($L \rightarrow \infty$) and the same noise. Therefore, it was capable to obtain the susceptibility values (χ) and the correlation length (ξ) from the majority voter model in the thermodynamic limit, in the critical region, which is $\xi \gg 1$. The critical parameters of the models were directly estimated from the $\chi \sim t^{-\gamma}$ and $\xi \sim t^{-\nu}$, where $t = 1 - q_c/q$ is the distance from the critical point q_c . It has been estimated $q_c = 0.076$, $\nu = 1.22(1)$ and $\gamma = 2.22(2)$, which shows that the values are compatible with the ones from the literature and that the system belongs to the same universality class of the 2D Ising model.

Keywords: Socioeconomic systems, phase transitions, critical phenomena, computer simulations..

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Fundamentos	4
2.1	Processos Estocásticos	4
2.2	Equação Mestra	5
2.3	Transição de Fases	6
2.4	Fenômenos Críticos	8
2.5	Método de Escala de Tamanho Finito	11
3	Modelo do Voto da Maioria	14
3.1	Redes de spins interagentes	15
3.2	Modelo do Voto da Maioria	17
4	Simulações e Resultados	20
4.1	Algoritmo de Monte Carlo	22
4.2	Simulações e Resultados	23
5	Conclusões	33
	Referências	38

Lista de Figuras

2.1	Diagrama de fases simplificado da água. Em destaque, o ponto triplo onde ocorre a coexistência das três fases e o ponto crítico [1].	7
3.1	Rede unidimensional com N sítios espaçados uniformemente. A interação ocorre entre os vizinhos mais próximos.	15
3.2	Rede bidimensional com 16 sítios espaçados uniformemente. A interação ocorre entre os vizinhos mais próximos.	15
3.3	Rede bidimensional com 16 sítios espaçados uniformemente. A interação ocorre entre os vizinhos mais próximos.	16
3.4	Rede bidimensional com 16 sítios espaçados uniformemente. A interação ocorre entre os vizinhos mais próximos.	17
4.1	Gráficos obtidos por meio da tabela 4.1 e da equação 2.23. Em (a), temos o gráfico da função $Q_\xi(x)$ associadas ao comprimento de correlação e em (b), o gráfico da função $Q_\chi(x)$ associado a susceptibilidade.	24
4.2	Gráficos obtidos por meio da tabela 4.3 para diferentes valores de q_c . Em (a), temos o gráfico da função log – log associada ao comprimento de correlação e em (b), o gráfico da função log – log associado a susceptibilidade.	28
4.3	Teste do qui-quadrado para diferentes valores de q_c . Em (a), temos o gráfico do teste associada ao comprimento de correlação e em (b), temos o gráfico do teste associado a susceptibilidade.	29

4.4	Teste do qui-quadrado para diferentes valores de $0.0760 \leq q_c \leq 0.0765$. Em (a), temos o gráfico do teste associada ao comprimento de correlação e em (b), temos o gráfico do teste associado a susceptibilidade.	30
4.5	Teste aplicados para valores de q_c no intervalo $0.0760 \leq q_c \leq 0.0765$. Em a(b), vemos o gráfico para o teste dos mínimos quadrados do teste qui-quadrado associados ao(a) comprimento de correlação(susceptibilidade).	31
4.6	Retas de ajuste para obter os expoentes críticos. Em a(b), vemos a reta de ajuste para obter o expoente crítico $\nu(\gamma)$ associado ao comprimento de correlação comprimento(susceptibilidade).	32

Capítulo 1

Introdução

Sistemas sociais têm despertado cada vez mais o interesse de cientistas naturais, com o objetivo de aplicar os mesmos métodos de análise de seu campo de conhecimento nas mais variadas formas dos fenômenos sociais. Esse campo interdisciplinar reúne ideias da Economia, Sociologia, Psicologia Social e Física. Para isso, os físicos aplicam formulações, resultados e técnicas de importantes campos da física, entre eles, a Mecânica Estatística. Sem sombra de dúvida, governos, corporações, agências de marketing entre outros gostariam de ser capazes de prever o comportamento de grupos sociais com a mesma precisão que somos hoje capazes de descrever o movimento dos astros ou o comportamento das marés. Indo muito mais além, talvez alguma dessas instituições até sonhe um dia poder inferir, controlar ou até mesmo induzir determinado comportamento das massas.

Ao fazer uma descrição da dinâmica coletiva de indivíduos usando modelos físicos de sistemas de muitas partículas, a ideia fundamental por de trás é que os detalhes do comportamento isolado de um dado constituinte não são relevantes quando desejamos estudar ou criar um modelo. Além disso, é essencial sabermos diferenciar a dinâmica de um sistema natural com a de um sistema idealizado (modelo físico), pois modelos sociais naturais apresentam uma complexidade que é muito maior do que qualquer sistema físico. No mínimo, o sonho referido acima terá que esperar muito tempo para ser realizado.

Por volta da década de 70, nasce um termo denominado sociofísica que começou a atrair o interesse de alguns físicos em meados dos anos 90 [2]. Sociofísica é uma área interdisciplinar

entre a Física e a Dinâmica Social que tem como objetivo aplicar métodos quantitativos ou matemáticos com objetivo de estudar como se comporta sistemas sociais composto por pessoas ou indivíduos, por meio de técnicas e ferramentas de física. Nesta perspectiva, diversos modelos de sociedades artificiais foram propostos, dinâmica populacional, epidemia, terrorismo, formação da coalizão e a dinâmica de opinião, cada um sendo responsável por quantificar e qualificar fenômenos coletivos e de comportamentos específicos encontrados em sistemas sociais reais [3–6].

Um dos temas que vem sendo mais estudados é a dinâmica de opinião. Modelos físicos tem sido desenvolvidos a fim de descrever a dinâmica de spins interagentes para estudar contextos de sistemas sociais que são formados por indivíduos que são influenciados coletivamente [7]. Nesses modelos, um dos interesses de estudo no campo da sociofísica se encontra em analisar transições de fase descritos nesse sistema [2]. Na dinâmica social de um sistema, a transição de fase pode ser interpretada como uma mudança de ordem à desordem. Para fins práticos, imaginemos um sistema que se encontre totalmente ordenado, isto é, todos os indivíduos concordem entre si em relação a um tema discutido. Dizemos, então que o sistema encontra-se completamente ordenado. A partir desse estado, permitimos que o sistema evolua de acordo com alguma prescrição dinâmica que considera a interação entre os indivíduos junto com um parâmetro que mensura a "temperatura social" que cada indivíduo possui em relação aos seus vizinhos mais próximos. No limite quando a temperatura social é muito baixa (tende a 0), cada indivíduo do sistema tem uma decisão independente dos seus vizinhos mais próximos. Neste caso, o sistema se encontra em um estado onde não há correlação entre seus vizinhos mais próximos e que ao longo do tempo, o sistema vai atingir um estado desordenado, ou seja, não há consenso. Por outro lado, no limite em que a temperatura social tende a um valor muito alto, um dado indivíduo do sistema passar a ser fortemente influenciado pelo seus vizinhos mais próximos, de modo que ao longo do tempo, a maioria dos indivíduos compartilharam a mesma opinião, ou seja, há consenso. Vemos assim que, a transição de um regime para o outro (consenso - não consenso), ocorre em algum valor que está entre zero e infinito.

Um Modelo que vem se destacando nesse contexto é o do voto da maioria [8]. Pela sua simplicidade, podemos combinar técnicas analíticas que podem ser utilizadas para estudar

as transições de fase desse modelo. Por exemplo, aproximação de campo médio é um método utilizado para reduzir o problema de vários elementos ao de um único corpo interagindo com um campo que representa a média das interações com todos os sítios adjacentes, fornecendo estimativas sobre as propriedades físicas de interesse [9]. Além disso, com os avanços na computação, as simulações numéricas tem sido uma das principais ferramentas no estudo de redes complexas. O desenvolvimento de técnicas de simulação computacional também mostrou ser importante no estudo de modelos em mecânica estatística, possibilitando uma abordagem alternativa na descrição adequada de fenômenos físicos nas vizinhanças dos pontos críticos. O método de simulação numérica, conhecido como Teoria de Escala de Tamanho Finito [10, 11], que será discutido nesse trabalho, mostrou-se uma ferramenta poderosa para obter resultados onde os métodos de aproximação analítica falhavam.

Nosso objetivo se constitui em simular computacionalmente o modelo do voto da maioria através do método de Monte Carlo. Por meio de funções de escala que são expressas apenas em termos da variável de escala $x = \xi_L/L$, onde ξ_L é o comprimento de correlação de um sistema finito de tamanho L , conseguiremos relacionar o valor de uma grandeza calculada em um sistema finito para um dado ruído com o valor desta mesma grandeza no limite termodinâmico ($L \rightarrow \infty$) e mesmo ruído. Desta forma, seremos capazes de extrair os valores da susceptibilidade (χ) e do comprimento de correlação (ξ) do nosso modelo no limite termodinâmico, isto é, $\xi \gg 1$. Esperamos que este estudo possamos obter um modelo simplificado para descrever sistemas sociais e estimar os parâmetros críticos do sistema q_c , ν e γ , além de nos mostrar que o modelo pertence a mesma classe de universalidade do Modelo de Ising 2D [12].

Esta dissertação está dividida em cinco capítulos. No capítulo 2 apresentamos revisão dos conceitos relevantes de mecânica estatística que precisamos para podermos desenvolver de forma satisfatória este trabalho, a metodologia da simulação e uma explicação sobre Transição de Fase, Fenômenos Críticos e Escalonamento de Tamanho Finito. No Capítulo 3 faremos uma introdução, que acreditamos didática, sobre o Modelo do Voto da Maioria. Discutimos também como tal teoria será aplicada para obter os resultados almejados. No capítulo 4 e 5 apresentaremos os resultados e conclusões deste trabalho, bem como uma perspectiva para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Fundamentos

Neste capítulo apresentaremos a teoria que está por trás da simulação computacional no qual descreve o modelo analisado neste trabalho. Após compreendido a seção da teoria relacionada a simulação, faremos uma abordagem de fenômenos críticos e transição de fase para compreendermos melhor os conceitos e comportamentos no qual julgamos serem mais relevantes para esse trabalho. No mais, finalizaremos o capítulo de Fundamentos fazendo uma revisão do Método de Escala de Tamanho de Finito de forma que possamos compreender e alcançar os objetivo da dissertação.

2.1 Processos Estocásticos

Uma classe muito importante de variáveis aleatórias é a daquelas que dependem do tempo, ou seja, aquelas cujo valor varia aleatoriamente ao longo do tempo. Para melhor compreendermos, considere um corpo massivo em que ao ser abandonado a alguns metros do solo, atingirá o solo num ponto situado verticalmente abaixo de onde foi solto. Se repetirmos este ensaio nas mesmas condições, veremos que o objeto cairá praticamente no mesmo ponto. Sendo assim, dizemos que a posição do objeto, por conseguinte, a velocidade e sua aceleração são *variáveis determinísticas*, pois seu valores são previsíveis ao longo do tempo. Já por outro lado, se considerarmos um objeto muito leve, por exemplo uma pena, e repetirmos várias vezes o mesmo ensaio do corpo massivo, constaremos que esse objeto atingirá o solo em pontos distinto, apesar de ser abandonado do mesmo ponto, de modo que, a posição, a velocidade

e aceleração passam a serem tratadas como *variáveis aleatórias*, isto é, seus valores variam aleatoriamente com o tempo e sua natureza é probabilística. Com isso, podemos inferir que processo estocástico são modelos matemáticos que são governados por leis de probabilidade para uma variável aleatória [13, 14].

Dado um sistema de natureza probabilística que evolui com o tempo, as variáveis aleatórias associadas a este sistema sofrem mudanças. Considerando que o sistema possa vir a atingir um *estado estacionário*, a probabilidade de encontrar o sistema num dado estado sofre variações até que esse sistema esteja num estado final estacionário, onde as transições não causam mudanças na distribuição de probabilidade.

Um processo estocástico que merece destaque é o processo de Markoviano. Neste processo, podemos interpretar como uma trajetória aleatória entre duas as configurações consecutivas c e c' , governada por uma probabilidade de transição $\omega(c \rightarrow c') = \omega_{cc'}$ e que satisfaz as seguintes condições:

- Não variar com o tempo;
- Depender somente dos estados c e c' , e não dos estados anteriores.

Satisfazer esses critérios sugere que a probabilidade de transição do sistema de ir para o estado c' , uma vez estando no estado c , não depende do valor que tenha ela tenha tomado nos instantes anteriores.

2.2 Equação Mestra

Seja $P_c(t)$ a probabilidade de encontrar o sistema em uma determinada configuração c , temos que a evolução temporal desta probabilidade é obtida através da equação diferencial

$$\frac{d}{dt}P_c(t) = \sum_{c'} P_{c'}(t)\omega_{c'c} - \sum_c P_c(t)\omega_{cc'} \quad (2.1)$$

denominada de equação mestra e que rege a evolução do sistema. O primeiro termo no lado direito da equação 2.1 está relacionado com o aumento na probabilidade de encontrar o sistema no estado c , enquanto o segundo termo está relacionado com a diminuição na

probabilidade de encontrar o sistema nesse mesmo estado. Os dois termos se contrapõem durante a dinâmica do processo de mantendo a distribuição de probabilidade normalizada [1]. Vale destacar que, para sistemas em que possam adquirir um equilíbrio, os mesmos evoluem até que os estados acessíveis tenham a mesma probabilidade de serem obtidos. Estando no equilíbrio, onde o taxa temporal da probabilidade $\frac{d}{dt}P_c(t) = 0$ [14, 15], todas transição deve obedecer a seguinte condição

$$\sum_{c'} P_{c'}(t)\omega_{c'c} = \sum_c P_c(t)\omega_{cc'}. \quad (2.2)$$

A equação 2.2 possui várias soluções. No entanto, essa condição de equilíbrio estará garantida se os termos da somatória cancelarem termo a termo. Uma possível solução conhecida como princípio do balanço detalhado em um sistema de não equilíbrio [14], é dada por

$$P_{c'}(t)\omega_{c'c} = P_c(t)\omega_{cc'}. \quad (2.3)$$

Para o nosso trabalho, a solução 2.3 não é satisfeita, pois há uma taxa de probabilidade $\frac{d}{dt}P_c(t)$ não nula entre as configurações acessíveis, mesmo estando no estado estacionário.

2.3 Transição de Fases

Uma das principais razões para estudar transições de fase de não equilíbrio está relacionado com o fato de que a maioria das transições de interesse ocorrem nesta condições [12, 16]. A título de exemplo, a água quando aquecida a pressão constante, entra em ebulição a uma temperatura bem definida, transformando-se em vapor. Para cada valor da pressão a que está submetida a água, corresponde uma temperatura de transição. Num diagrama temperatura-pressão, a transição líquido-vapor é representada por uma linha que possui uma inclinação positiva, pois a temperatura de transição cresce com o aumento da pressão. Sobre a linha de transição, o líquido e o vapor coexistem em quaisquer proporções. No entanto, o líquido e o vapor apresentam densidades bem definidas que dependem apenas da temperatura de transição. À medida que aumentamos a temperatura ao longo da linha de coexistência, as diferenças entre as densidades do líquido e do vapor se tornam cada vez menores e acabam se anulando num ponto crítico caracterizado por uma temperatura e uma

pressão bem definidas. Nesse ponto, o líquido e o vapor tornam-se indistintos e a linha de coexistência tem seu término. A temperaturas mais altas, não há mais distinção entre a fase líquida e a fase gasosa.

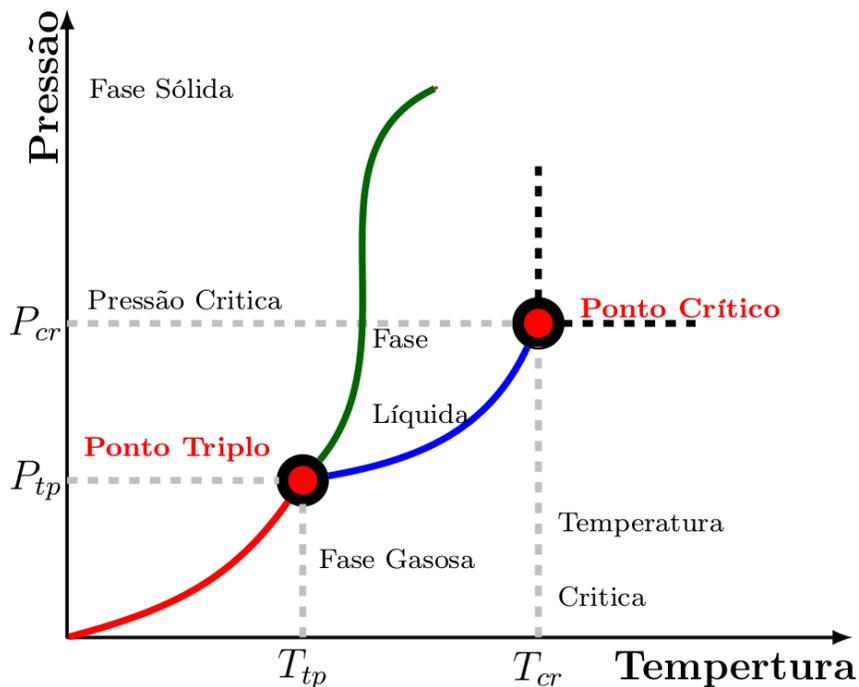


Figura 2.1: Diagrama de fases simplificado da água. Em destaque, o ponto triplo onde ocorre a coexistência das três fases e o ponto crítico [1].

Assim, vemos que as transições de não-equilíbrio apresentam dificuldades devido a singularidades ou descontinuidades analíticas nas funções termodinâmicas. Estas dificuldades são inerentes aos vários tipos de transições de fase as quais estes sistemas apresentam. O estudo destas transições e fenômenos críticos tem aumentado ao longo dos últimos 50 anos, e neste período somente algumas poucas soluções exatas foram encontradas [17].

Na teoria das transições de fase, o objetivo principal é estudar o comportamento do sistema nas vizinhanças do ponto crítico. Este comportamento é definido pela natureza das singularidades das funções termodinâmicas no ponto crítico. O estudo das transições de fase e pontos críticos é de grande interesse em vários campos da ciência [18–20].

Em decorrência desta forma de pesquisa, todo um novo ferramental matemático e teó-

rico foi desenvolvido. Neste ferramental as singularidades no ponto crítico são expressas comumente em termos de leis de potência, caracterizadas por um conjunto de expoentes críticos que determinam qualitativamente a natureza do comportamento crítico de um dado sistema [12, 21]. Sistemas que apresentam os mesmos expoentes críticos foram agrupados dentro de uma mesma classe de universalidade.

2.4 Fenômenos Críticos

Transições de fases são fenômenos presentes em uma variedade de sistemas, como fluidos, sistemas magnéticos e ligas metálicas [12]. Por exemplo, o imã, que é um material ferromagnética e quando aquecida perde sua imantação a uma temperatura bem definida, denominada temperatura de Curie, tornando-se um paramagneto. Pode-se também caracterizar as fases desses sistemas como uma fase ordenada, de menor simetria, e uma fase desordenada, com maior simetria.

Esses sistemas apresentam um comportamento peculiar nas vizinhanças da transição de fase. Para descrever a transição de fase Landau introduziu o conceito de parâmetro de ordem, cuja propriedade importante é assumir o valor nulo na fase desordenada e um valor não nulo na fase ordenada [16]. No caso da transição de fase líquido-vapor, pode-se definir como parâmetro de ordem a diferença entre as densidades do líquido e do vapor do fluido $\rho_L - \rho_G$, pois há coexistência das fases líquida e gasosa para temperaturas inferiores a T_c e, à medida que a temperatura aumenta a diferença entre essas densidades vai para zero. Em sistemas magnéticos, como o exemplo do imã, o parâmetro de ordem é a magnetização espontânea, pois deixa de existir para temperaturas superiores à temperatura crítica [14]. Em todos os casos acima o parâmetro de ordem se anula para temperaturas acima da temperatura de transição.

Do ponto de vista matemático as transições de fases são caracterizadas por um comportamento não analítico das propriedades termodinâmicas do sistema, que ocorre quando se varia continuamente um parâmetro externo, como a temperatura, campo magnético, pressão, etc. De acordo a classificação de Ehrenfest [12], a transição de fase é determinada com a mudança descontínua nas funções termodinâmicas, sendo do tipo de primeira ordem quando as

primeiras derivadas dos potenciais termodinâmicos mudarem de maneira descontínua como função de suas variáveis. Um exemplo típico de transição de primeira ordem é a transição líquido-vapor discutida acima, onde a entropia e o volume de um fluido apresentam descontinuidades no ponto de ebulição. Utiliza-se atualmente a definição de Landau [22], onde a transição ocorre no ponto de não analiticidade da energia livre.

Neste trabalho, as transições de fases estudadas são de segunda ordem, pois apresentam continuidades nas primeiras derivadas dos potenciais termodinâmicos, mas a não analiticidade encontra-se em suas segundas derivadas. Quantidades termodinâmicas que possuem comportamento bastante peculiar nas proximidades do ponto crítico, como compressibilidade, calor específico ou a susceptibilidade são divergentes (infinitas) ou mudam descontinuamente, caracterizam transições de fase de segunda ordem.

Uma característica muito interessante é a igualdade entre valores dos expoentes críticos para sistemas bastante distintos, sendo essa uma manifestação do princípio da universalidade do comportamento crítico. Essa igualdade entre os expoentes críticos de sistemas de naturezas diferentes permite agrupar esses sistemas em classes de universalidade. Nota-se que os expoentes críticos dos modelos dependem apenas de poucas propriedades, como a dimensionalidade do sistema, a dimensionalidade do parâmetro de ordem e a simetria. Por exemplo, no modelo de Ising [13, 14], o sistema possui simetria de inversão de spins, sendo a energia invariante pela transformação $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$ e o parâmetro de ordem é um escalar (dimensão um). Logo, todos os sistemas que têm essas mesmas propriedades devem possuir os mesmos expoentes críticos, independente da origem da transição. Essa propriedade universal independe de alguns parâmetros, como: detalhes das interações microscópicas, desde que seja de curto alcance, como energia de interação J entre os primeiros vizinhos no modelo de Ising, por exemplo. Enfim, a classe de universalidade possibilita o entendimento das propriedades de sistemas mais complexos através do estudo de um sistema mais simples.

Para estudar o comportamento singular de diversas grandezas na criticalidade do modelo de Ising [23], surge a necessidade de relacionar essas funções termodinâmicas com um conjunto de expoentes críticos que ajudam a descrever o comportamento dessas quantidades próxima da temperatura crítica. No limite termodinâmico, usando a variável $t = (q - q_c)$ que interpretamos como sendo a distância até o ponto crítico do sistema [12]. Neste caso,

temos

1. Expoente α do calor específico

$$c \sim |t|^{-\alpha} \quad (2.4)$$

2. Expoente β da magnetização

$$m \sim |t|^\beta \quad (2.5)$$

3. Expoente γ relativo à susceptibilidade a campo nulo

$$\chi \sim |t|^\gamma \quad (2.6)$$

4. Expoente δ dado pela seguinte relação

$$m \sim H^{\frac{1}{\delta}} \quad (2.7)$$

entre a magnetização e o campo magnético calculado ao longo da isoterma crítica.

5. Expoente ν relacionado ao comprimento de correlação de um sistema magnético, sendo a medida de quão o sistema está correlacionado, o qual diverge segundo

$$\xi \sim |t|^{-\nu} \quad (2.8)$$

6. Expoente η associado à função de correlação de pares, calculada no ponto crítico.

$$\rho \sim \frac{1}{r^{d-8-\eta}} \quad (2.9)$$

Não é a intenção desse trabalho, mas ainda seria possível definir outros expoentes críticos, como o tempo de relaxação τ do sistema e z , o expoente crítico dinâmico. Estes expoentes críticos podem também ser medidos experimentalmente, e estão relacionados entre si por meio de algumas relações [12], conhecidas como relações de escala

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad (2.10)$$

$$\alpha + \beta(\delta + 1) = 2 \quad (2.11)$$

$$\gamma = \beta(\delta - 1) \quad (2.12)$$

$$d\nu = 2 - \alpha \quad (2.13)$$

2.5 Método de Escala de Tamanho Finito

Muitos dos sistemas estudados em experimentos e em simulações computacionais são limitados em tamanho. O método de escala de tamanho finito (Finite Size Scaling - FSS) [24], permite extrair estimativas para a temperatura e os expoentes críticos quando se analisa a variação redes quadradas com tamanho L . Em meados de 1970, Fisher propôs a teoria de escala de tamanho finito [25] que possibilita fazer a conexão entre o comportamento de um sistema finito e seu equivalente no limite termodinâmico, permitindo obter as relações em termos de leis de potência que descrevem o comportamento das quantidades de interesse nas vizinhanças da transição de fase contínua.

Considere um observável A como um comportamento assintótico descrito pela equação

$$A(t) \sim t^{-\rho}, \quad (2.14)$$

em que t é a distância ao ponto crítico do sistema e ρ é um expoente crítico. A teoria FSS [25] afirma que o mesmo observável mensurado em sistema finito de tamanho linear L , pode ser expressa como

$$A_L(t) = L^{\frac{\rho}{\nu}} Q_A(\xi(t)/L). \quad (2.15)$$

Aqui ν é o expoente crítico associado ao comprimento de correlação e Q_A é uma função universal de escala. Dividindo a equação 2.14 pela equação 2.15 e sabendo que $\xi \sim t^{-\nu}$ [26], obtemos uma relação do tipo

$$\frac{A_L(t)}{A(t)} \propto \left(\frac{\xi(t)}{L} \right)^{-\frac{\rho}{\nu}} Q_A(\xi(t)/L). \quad (2.16)$$

Vale ressaltar que estamos distinguindo a quantidade mensurada no sistema de tamanho finito pelo índice L , ou seja, $A_L(t)$ é um observável tamanho finito L , enquanto $A(t)$

corresponde o observável no limite termodinâmico. Assim

$$\frac{A_L(t)}{A(t)} = F_A(\xi(t)/L), \quad (2.17)$$

onde

$$F_A(\xi(t)/L) = \left(\frac{\xi(t)}{L}\right)^{-\frac{e}{v}} Q_A(\xi(t)/L). \quad (2.18)$$

Fazendo $A = \xi$ na equação 2.17, obtemos

$$\frac{\xi_L(t)}{L} = \frac{\xi(t)}{L} F_\xi(\xi(t)/L), \quad (2.19)$$

ou ainda

$$\frac{\xi(t)}{L} F_\xi(\xi(t)/L) \equiv \tilde{F}_\xi(\xi(t)/L), \quad (2.20)$$

de modo que

$$\frac{\xi_L(t)}{L} = \tilde{F}_\xi(\xi(t)/L). \quad (2.21)$$

Na equação 2.19, $\xi_L(t)/L$ está em função de $\xi(t)/L$ e vice-versa. Pelo fato $\xi_L(t)/L$ ser analítico, podemos afirmar que a expressão do lado direito admite uma inversa e que $\xi(t)/L$ é dado por

$$\frac{\xi(t)}{L} = \tilde{F}_\xi^{-1}\left(\frac{\xi_L}{L}\right), \quad (2.22)$$

onde \tilde{F}_ξ^{-1} é a função inversa de F_ξ , permitindo escrever a relação

$$A_L(t) = A(t) \tilde{Q}_A(\xi(t)/L), \quad (2.23)$$

onde

$$\tilde{Q}_A(\xi(t)/L) = \tilde{Q}\left(\tilde{F}_\xi^{-1}\left(\frac{\xi_L}{L}\right)\right). \quad (2.24)$$

Pela equação 2.24, vemos que a função universal de escala \tilde{Q}_A depende do comprimento de correlação medido em um sistema *finito*. A relação $\xi_L(t)/L$ é a proporção entre o comprimento de correlação *em uma rede finita* e o tamanho da rede na qual denominamos sendo a variável da função de escala.

O método de escala de tamanho finito que vamos usar em nossa análise exige uma definição do comprimento da correlação que faz sentido em um sistema totalmente finito. Aqui empregamos o segundo comprimento de correlação do momento dado por

$$\xi_L = \frac{1}{2\sin(\pi/L)} \sqrt{G(\vec{0})/G(\vec{k})} - 1, \quad (2.25)$$

e que é obtida pela transformada de Fourier da função de correlação de dois pontos conectado $G(\vec{k})$ [24, 26]. Para qualquer fator de escala b fixado, podemos usar o mesmo raciocínio acima e obter a relação [10]

$$A_{bL}(t) = A_L(t)G_A(\xi(t)/L). \quad (2.26)$$

Uma vez calculado ξ_L pela equação 2.25, podemos estimar os valores das grandezas no limite termodinâmico pelas equações 2.23 e 2.26 do modelo do voto da maioria que será discutido no próximo capítulo.

Capítulo 3

Modelo do Voto da Maioria

Neste capítulo vamos estudar o comportamento do modelo do voto da maioria para caso bidimensional especificando o número de vizinhos e as operações de simetrias. Primeiramente, iniciaremos o capítulo explicando redes de spins interagentes. O caso do modelo que vamos abordar é o da rede quadrada com N sítios, com variáveis dinâmicas descrevendo dois estados $\sigma_i = \pm 1$ que vão estar associadas a cada sítio e que podem representar dentro de um contexto podem uma opinião contra ($\sigma_i = -1$) ou favor ($\sigma_i = +1$) sobre um tema em debate. Veremos também como serão definidas e interpretada as regras majoritárias do modelo, para conseguirmos estudar a dinâmica de evolução de como cada spin vai adquirir seu novo estado a partir dos sítios vizinhos. No mais, explicaremos como usar Mecânica Estatística para calcular a magnetização e seus momentos.

3.1 Redes de spins interagentes

Para explicar o nosso modelo, utilizamos como ponto de partida as redes de Spins Interagentes. Essas redes representa um conjunto de pontos (sítios ou vértices) articulado de forma em cada um desses pontos se encontram igualmente espaçados em relação aos seus vizinhos no espaço de dimensão $d = 1, 2, 3, 4, \dots, D$. Essas articulações vem sido por estudadas para interpretar diversos fenômenos físicos, químicos e biológicos [27–29]. O caso mais simples é a rede unidimensional, representada por uma cadeia de pontos sobre uma linha em que podemos enumerar cada ponto de 1 a N .

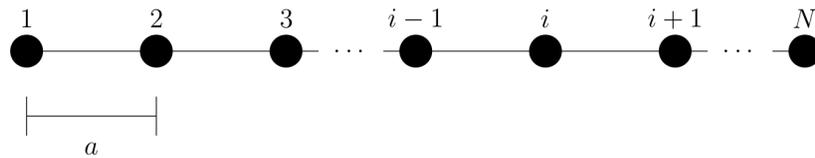


Figura 3.1: Rede unidimensional com N sítios espaçados uniformemente. A interação ocorre entre os vizinhos mais próximos.

Para uma dimensão qualquer, N denotará o número de sítios da rede. No caso em que a dimensão $d = 2$, a rede será formada por um conjunto de quadrados justapostos.

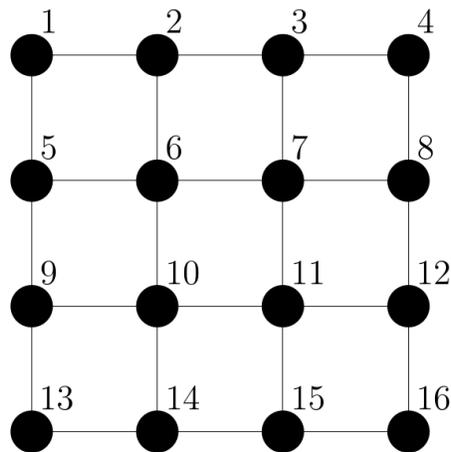


Figura 3.2: Rede bidimensional com 16 sítios espaçados uniformemente. A interação ocorre entre os vizinhos mais próximos.

Em três dimensões, a rede é obtida por unidade geradora em forma de um cubo, ver figura 3.3. Essa rede nas literaturas [30, 31] tem sido denominada de rede cúbica simples. No caso em que a dimensão $d > 3$, não é possível fazer um desenho da rede. No entanto, vimos que podemos obter as redes unidimensional, bidimensional, tridimensional por meio de uma unidade básica (célula unitária), dessa forma, podemos usar o mesmo raciocínio e encontrar a célula unitária associado dimensões maiores e por meio translação construir essas redes que não podemos desenhar [32]. Nas figuras das redes, cada seguimento entre os sítios é chamado ligação. Os sítios conectados por uma ligação são chamados de vizinhos mais próximos ou primeiros vizinhos. Para as redes aqui consideradas, se consideramos que estamos numa região que se encontra distante das “fronteiras” da rede, cada sítio de uma rede d -dimensional tem $2d$ primeiros vizinhos.

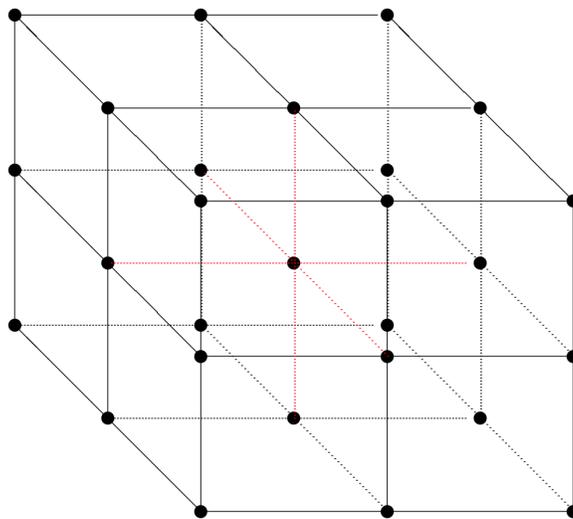


Figura 3.3: Rede bidimensional com 16 sítios espaçados uniformemente. A interação ocorre entre os vizinhos mais próximos.

Vale ressaltar que, o número de primeiros vizinhos de um sítio na fronteira ser diferente do número de vizinhos de um sítio no interior da rede, quebra a simetria de translação para construir a rede. Uma forma de evitar a quebra de simetria é usando uma condição de contorno periódica da rede, ou seja, introduzimos ligações extras conectando os sítios nas fronteiras de lados opostos. Isto corresponde a transformar a cadeia da figura 3.1 em um anel.

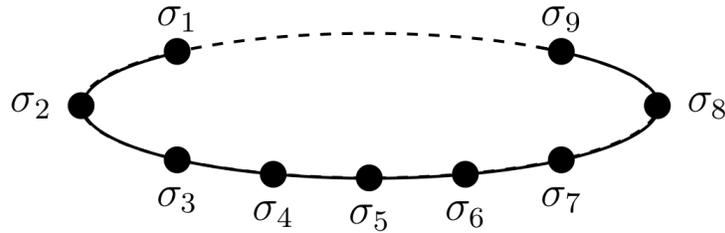


Figura 3.4: Rede bidimensional com 16 sítios espaçados uniformemente. A interação ocorre entre os vizinhos mais próximos.

Mantido a simetria da rede, vamos considerar que nos sítios $i = 1, 2, 3, \dots, N$, da rede, uma variável estocástica σ_i . Feito isso, considere que as variáveis σ_i , só podem assumir dois valores, $\sigma_i = \pm 1$. Isso representa no diz que cada sítio da rede pode estar apenas em um de dois possíveis estados. Quando atribuímos valores $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_N)$ para cada um dos sítios da rede, dizemos que o sistema se encontra em um particular microestado ou em uma dada configuração. O próximo passo para definição do modelo que analisaremos é estabelecer uma lei que governará a dinâmica do sistema que será discutido na próxima seção.

3.2 Modelo do Voto da Maioria

O modelo de voto da maioria (MVM) é um modelo que vem sendo aplicado estudar a dinâmica de opinião [8]. Na versão mais simples, cada agente pode ter apenas uma das duas opiniões. Nesse modelo, os agentes interagem com os vizinhos mais próximos e sistema evolui de acordo com uma regra estocástica, em que cada indivíduo (spin) assume a mesma opinião que a maioria de seus pares com probabilidade $1 - q$ e o oposto com probabilidade q .

Para fins práticos, imagine um grupo de amigos que pretendem viajar e que possuem uma opinião em relação ao lugar que pretendem viajar, colocando-se de forma favorável ou contrária a viagem. Com passar do tempo, os indivíduos vão mudando suas opiniões de acordo com o que os seus amigos (vizinhos) mais próximos. Considerando que estamos num grupo de amigos receptivos, um indivíduo passar a ser a favor se maioria dos indivíduos

for a favor, e passa a ser contra se a maioria for contra. No entanto, o que se assemelha mais a nossa realidade é quando estamos diante de indivíduos hesitantes, isto é, que às vezes agem contrariamente à opinião da maioria. Para isso, introduzimos um parâmetro ruidoso positivo q que representa de maneira abstrata uma temperatura social e que é entendido como a probabilidade de um determinado indivíduo optar pela opinião contrária ao da maioria.

O ruído $0 \leq q \leq 1/2$ é o parâmetro de controle e é interpretado como uma temperatura. Valores baixos de q favorecem um estado desordenado em que grandes grupos de indivíduos compartilham a mesma opinião. O sistema passa por uma transição de fase de segunda ordem, isto é, a suscetibilidade diverge, o comprimento de correlação é infinito e existe uma lei de potência quando q atinge um ruído crítico $q = q_c$ que depende da geometria da rede [33]. Para uma rede quadrada $q_c = 0,075$ e conjunto de expoentes críticos da classe de universalidade Ising bidimensional de equilíbrio, a saber, $\beta/\nu \approx 0,125$, $\gamma/\nu \approx 1,75$ e $1/\nu \approx 1,0$ [8, 34].

É interessante notar que, apesar de sua simplicidade, não há técnicas analíticas disponíveis para resolver o problema de obter os expoentes críticos do MVM. Com os recursos da equação de evolução, da equação mestra, da análise de escala de tamanho finito obtidos dos métodos da mecânica estatística de equilíbrio e do método de simulação computacional de Monte Carlo estuda-se o comportamento desse modelo nas proximidades do ponto crítico. Certamente, é tecnicamente impossível simular redes infinitas e qualquer resultado de Monte Carlo é afetado por efeitos de tamanho finito.

Uma vez compreendido o problema, para construir um modelo que descreve tal comunidade, imaginamos que os indivíduos estejam localizados nos sítios de uma rede regular. Associamos uma variável dinâmica σ_i que toma valor $+1$, caso o indivíduo que se encontra no sítio i seja a favor, e o valor -1 , caso seja contra. Consideramos também a interação do sistema do tipo Ising, e que durante um passo de Monte Carlo, um spin σ_i é escolhido aleatoriamente e invertido com uma probabilidade dada por

$$\omega(\sigma_i) = \begin{cases} q & \text{se } h_i \sigma_i > 0 \\ 0 & \text{se } h_i = 0 \\ 1 - q & \text{se } h_i \sigma_i < 0 \end{cases} . \quad (3.1)$$

Na equação 3.1, h_i é o campo médio local produzido pelos z vizinhos mais próximos do i -ésimo spin e q é o parâmetro de controle. Para redes quadradas $z = 4$ e para redes cúbicas $z = 6$.

A regra de evolução leva o sistema a um estado estacionário sem equilíbrio e sabe-se que, o valor numérico do ponto crítico (ou ruído crítico) depende da maneira de como atualizar os spins da rede [30, 35]. Definimos a magnetização do modelo do voto da maioria como

$$\langle m \rangle = \frac{1}{L^d} \left\langle \left| \sum_i \sigma_i \right| \right\rangle, \quad (3.2)$$

onde d é a dimensão do espaço e $\langle \dots \rangle$ representa a média de tempo obtida no regime de estado estacionário e que se encontra em uma dada configuração. De maneira a garantir a quebra da simetria de inversão do modelo, introduzimos na equação 3.1 o módulo do somatório dos spins, pois os estados com magnetizações de sinais contrários ocorrem com a mesma probabilidade.

Em analogia com o modelo de Ising [23], o limite termodinâmico do modelo ocorre quando o número de sítios $N \rightarrow \infty$, temos que $\langle m \rangle$ é não nulo (sistema ordenado, fase ferromagnética) para valores de q abaixo do valor crítico q_c . Enquanto que $\langle m \rangle$ é nulo para valores de q acima do valor crítico (sistema desordenado, fase paramagnética). Portanto, é conveniente de que $\langle m \rangle$ seja o parâmetro de ordem para medir a transição da fase de consenso-dissenso. Analogamente, define-se momentos de ordem p da magnetização como

$$\langle m^p \rangle = \frac{1}{L^d} \left\langle \left| \sum_i \sigma_i \right|^p \right\rangle. \quad (3.3)$$

Outra grandeza importante para a descrição completa do sistema é a variância do parâmetro de ordem do sistema. Para o nosso modelo, a susceptibilidade é dada pela variância

$$\chi = \frac{1}{L^d} (\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2). \quad (3.4)$$

Capítulo 4

Simulações e Resultados

Neste Capítulo descreveremos a simulação e o algoritmo de Monte Carlo empregado, a fim de simularmos o modelo do voto da maioria no caso bidimensional, satisfazendo as condições periódicas, isto é, cada sítio da rede terá quatro vizinhos. Em cada rede submetemos um determinado ruído, de modo que, possamos obter diretamente das simulações as magnetizações (eq. 3.2), as suscetibilidades (eq. 3.4) associadas a estas magnetizações e o comprimento de correlação de cada rede (eq. 2.25). As simulações visam apurar o comportamento de uma rede em que as interações são obtidas por meio do modelo do voto da maioria. As simulações foram realizadas em redes quadradas de lado L , de modo que podemos comportar $N = L^2$ indivíduos dentro dela. O sistema inicia num estado ordenado, em que todos os indivíduos da rede assumem uma variável dinâmica de mesmo valor, isto é, $\sigma_i = +1$ para $i = 1, 2, 3, \dots, N$. Além disso, aplicamos condições de contorno periódicas em redes de tamanho $L = [16, 18, 20, 24, \dots, 200]$.

O modelo analisado neste trabalho possui apenas um parâmetro de controle q . Para cada par de valor q e L , construímos uma rede com N indivíduos e iniciamos a simulação. Em seguida, esperamos um determinado tempo medido em passos de Monte Carlo o sistema possa atingir o estado estacionário em relação aos parâmetros que foram inicialmente atribuídos. O número de passos para que o sistema leva para atingir o estado estacionário é chamado de tempo de relaxação. Em nossas simulações utilizamos 2000 passos de Monte Carlo para a relaxação do sistema. Para reduzir a correlação entre os pontos dos dados, as medições das

configurações foram realizadas após ter passado 50 passos de Monte Carlo. Após ter realizado 10^6 MCS, foram calculadas diretamente das simulações os momentos da magnetização do sistema pela equação 3.2, o comprimento de permitindo obter comprimento de correlação pela 4.3 e a suscetibilidade pela equação 3.3.

No mais, discutiremos os resultados que foram obtidos com simulações para tamanhos de rede diferentes, bem como o comportamento das funções de escala ligadas as grandezas físicas analisadas neste trabalho. Também será explicado como obtivemos as estimativas das grandezas no limite termodinâmico, bem como as estimativas do ruído crítico q_c do modelo e dos valores dos expoentes críticos ν e γ , que permitem estudar o comportamento do comprimento de correlação e da suscetibilidade no limite termodinâmico na proximidade do ruído crítico respectivamente.

4.1 Algoritmo de Monte Carlo

Dado uma escolha de valores para associarmos ao parâmetro de ruído q e ao tamanho L da rede, o procedimento começa com a geração de valores nos sítios da rede. Esse procedimento é realizado com intuito de estabelecer matrizes onde seus elementos são variáveis de spin assumindo valores ± 1 . Aguardamos o sistema evoluir para um estado estacionário, isto é, esperamos um tempo de relaxação, de modo que ao passar esse tempo, podemos iniciar os cálculos das médias com o sistema no estado estacionário. Podemos organizar a dinâmica da simulação da seguinte maneira:

1. Gerar uma amostra do sistema de tamanho N no estado correspondente para o ruído q .
2. Escolher um indivíduo da rede ao acaso e calcular a probabilidade de fazer uma mudança no estado deste indivíduo segundo a equação 3.1.
3. Gerar um número aleatório no intervalo unitário .
4. Se a probabilidade de mudar o estado do indivíduo é maior que o número aleatório gerado no passo (3), aceitamos o novo estado e seguimos para o passo (6).
5. Se a probabilidade de mudar o estado do indivíduo é menor que o número aleatório gerado no passo (3), rejeitamos o novo estado e seguimos para o passo (6).
6. Repetimos N vezes os passos (2), (3), (4) e (5), de maneira que a cada passo de Monte Carlo realizado, em média, exista uma tentativa de inversão para todos os sítios do sistema. Acrescentamos de uma unidade o tempo de simulação.
7. Determinamos o valor das médias das grandezas físicas de interesse.
8. Repetimos os passos (2) a (7) para obtermos um número suficiente de amostras.
9. Calculamos as médias das grandezas físicas desejadas em cada amostra.

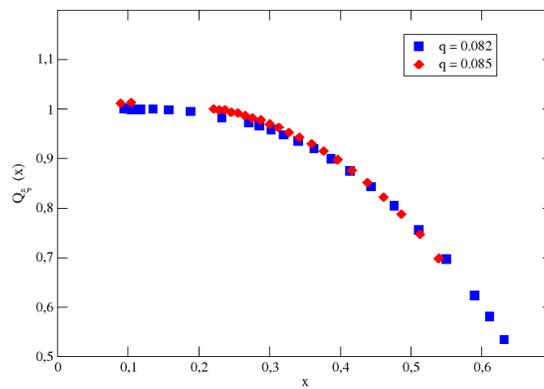
4.2 Simulações e Resultados

Primeiramente, começamos investigando os valores para uma variedade de grandezas físicas definidas, em particular a susceptibilidade χ comprimento de correlação ξ , pois são essas grandezas físicas que estamos interessados em estudar o comportamento no limite termodinâmico. Para isso, escolhemos um determinado ruído e realizamos medições dessas grandezas para vários valores de L .

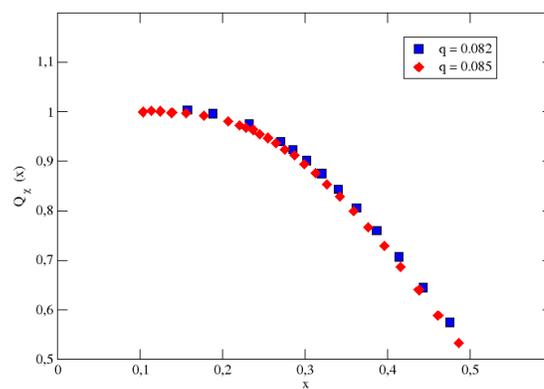
L	ξ_L	ξ_L/L	χ_L
16	10.10	0.631	92.6
18	10.99	0.610	109.6
20	11.80	0.590	126.8
24	13.18	0.549	160.8
28	14.29	0.510	193.2
32	15.22	0.475	223.5
36	15.95	0.443	251.0
40	16.54	0.413	275.1
44	17.02	0.386	295.6
48	17.40	0.362	313.5
52	17.70	0.340	328.3
56	17.92	0.320	340.6
60	18.12	0.302	350.9
64	18.28	0.285	359.3
68	18.41	0.270	365.7
80	18.59	0.232	379.5
100	18.81	0.188	387.7
120	18.89	0.157	391.8
140	18.91	0.135	392.2

Tabela 4.1: Tabela dos valores os valores ξ_L e χ_L para $q = 0.082$ variando L no intervalo de 16 a 100.

A partir desses dados na Tabela 4.1, é interessante notar que ξ_L é indistinguível de seu valor global para $L \geq 100$ por um erro estatístico muito pequeno. Assim, presumimos que esse valor esteja muito próximo do valor que o mesmo possui no limite termodinâmico, já que nesse regime a grandeza física independe do tamanho da rede. Dessa tabela, podemos obter os gráficos de $Q_A(x)$, onde $x \equiv \xi_L/L$, para o comprimento de correlação e a susceptibilidade usando a equação 2.23.



(a)



(b)

Figura 4.1: Gráficos obtidos por meio da tabela 4.1 e da equação 2.23. Em (a), temos o gráfico da função $Q_\xi(x)$ associadas ao comprimento de correlação e em (b), o gráfico da função $Q_\chi(x)$ associado a susceptibilidade.

Na tabela 4.1, a razão para começar $L = 16$ é que perto deste L o erro sistemático em nossa definição de ξ_L , está sobre 10^{-3} , que é comparável ao nossos erros estatísticos típicos. Além disso, os gráficos das figuras 4.1, foram construídos dividindo os valores de ξ_L e χ_L pela a média dos valores ξ_L e χ_L que permanecem indistinguíveis por pequenos erros estatísticos conforme vimos na tabela 4.1. Feito estas observações, é importante ressaltarmos que as funções $Q_A(x)$, onde A é um observável com um comportamento assintótico descrito pela equação 2.14, apresentam dois limites bem definidos.

O primeiro ocorre quando $\lim_{x \rightarrow 0} Q_A(x) \rightarrow 1$. Isso acontece pelo fato da variável da função escala $x \equiv \xi_L/L \rightarrow 0$, situação esta, que é obtida a medida que fazemos $L \rightarrow \infty$, permitindo que observável $A_L(t)$ convirja para o seu valor no limite termodinâmico $A(t)$. Já o segundo caso ocorre quando o $\lim_{x \rightarrow x_c} Q_A(x) \rightarrow 0$, pois próximo da criticalidade, $A(t)$ diverge devido as altas flutuações ocorridas nessa região.

As estimativas analisadas aqui são precisas apenas para $x \leq \xi_{L_0}/L_0 \equiv x_0$, com L_0 denotando o menor valor de L . Com as informações da função de escala $Q_A(x)$, agora podemos aplicar técnicas de suavização de curvas em dados com ruidosos na região de nosso interesse ($x \leq \xi_{L_0}/L_0 \equiv x_0$), para estimarmos as grandezas no limite termodinâmico de outras redes por meio de extrapolação. A técnica empregada neste trabalho foi o método de regularização de Tikhonov [CR]. Essa técnica garante um bom equilíbrio entre manter as essenciais características dos dados e a amplificação do ruído sob controle [CR]. Uma observação faz-se necessária, pois, muitas vezes durante o texto, também nos referiremos ao parâmetro de controle como sendo ruído e este pertence ao modelo dinâmico e exerce sobre o modelo o papel de perturbar o sistema, diferentemente dos ruídos advindos da aleatoriedade em que são geradas as amostras.

Uma vez aplicado a técnica, podemos repetir os passos que fizemos no início desta seção para diferente valores de parâmetro de controle, e assim, poder estimar os valores das grandezas físicas no limite termodinâmico. A ideia deste procedimento pode ser melhor entendida pela tabela a seguir.

q	L	ξ_L	x	χ_L	ξ	χ
0.090	20	7.31	0.365	72.7	8.31	95.4
	48	8.05	0.167	92.8	8.36	90.0
Média		7.68		82.7	8.34	92.7
0.080	64	25.84	0.403	595.4	29.82	836.2
	120	28.66	0.238	790.7	30.95	846.6
Média		27.25		693.0	30.39	841.4
0.082	60	18.12	0.302	350.9	20.13	414.6
	52	17.70	0.340	328.3	19.95	413.0
Média		17.91		339.6	20.04	413.8

Tabela 4.2: Tabela com os valores das gradezas ξ e χ no limite termodinâmico para diferente ruídos.

Na tabela 4.2, os valores de L e q foram escolhidos levando em consideração o tempo processamento que um computador executa a simulação, e de que os valores x da variável da função de escala estejam na região onde a função (ver fig. 4.1) se encontra. Sendo assim, optamos por valores de L que são modestamente pequenos e parâmetros de ordem q estejam próximos de 1. Nessa tabela vemos que as gradezas físicas extrapoladas assumem valores que estão dentro do mesmo intervalo de erro estatístico.

Para estudarmos a relação de escala do modelo do voto da maioria [CR], consideraremos uma rede $L = 512$ submetido a 9 ruídos diferentes e que foram calculados o comprimento de correlação e a susceptibilidade no limite termodinâmico pelo procedimento descrito até agora. O grau relação da correlação entre o ruído e a comprimento de correlação foi de -0.87, ao passo que, o grau de correlação entre o ruído e a susceptibilidade foi de -0.81, permitindo nos informa que a correlação entre essas variáveis é muito forte. Cabe observar que, o coeficiente de Pearson[CR] não contém informações do ajuste.

q	ξ	χ
0.0767	316.74	50847.6
0.0769	206.24	23980.5
0.0771	157.49	14293.4
0.0773	119.93	8763.4
0.0775	94.28	5838.7
0.0777	79.52	4303.9
0.0779	72.69	3411.6
0.0781	60.26	2597.2
0.0783	55.33	2147.1

Tabela 4.3: Tabela com os valores das grandezas ξ e χ no limite termodinâmico para diferente ruídos numa rede $L = 512$.

Próximo ao ponto crítico, os observáveis físicos tem um comportamento assintótico e descrito pela equação 2.14. Para o comprimento de correlação, a relação de escala é dado

$$\xi \sim t^{-\nu} \quad (4.1)$$

e para a susceptibilidade, é válida a relação

$$\chi \sim t^\gamma, \quad (4.2)$$

em que $t = q - q_c$ é a distância ao ruído crítico. Os expoentes γ e ν estão, respectivamente, associados aos expoentes críticos da susceptibilidade e do comprimento de correlação. Usando constantes de proporções, as equações 4.1 e 4.2 ficam respectivamente da forma a seguir:

$$\xi = \xi_0 t^{-\nu} \quad (4.3)$$

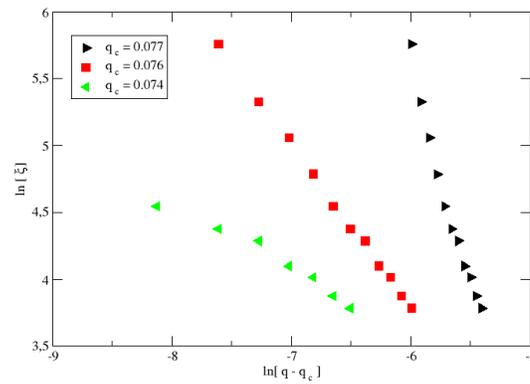
$$\chi = \chi_0 t^\gamma \quad (4.4)$$

Tomando o logaritmo das equações 4.3 e 4.4, obtemos

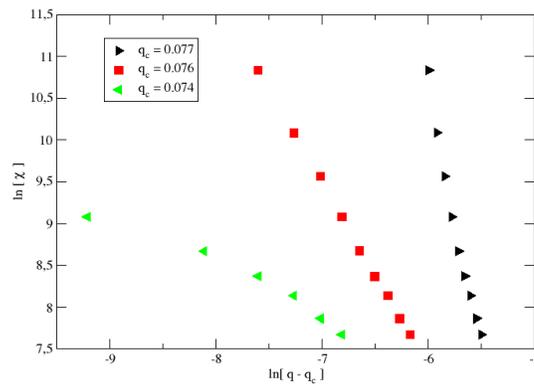
$$\ln(\xi) = \ln(\xi_0) - \nu \ln(t) \quad (4.5)$$

$$\ln(\chi) = \ln(\chi_0) - \gamma \ln(t). \quad (4.6)$$

onde ξ_0 e χ_0 são constantes. Para podermos aplicar 4.5 e 4.6, é importante saber se os dados da tabela 4.3 já é possível observar o sistema apresentar algum ponto de criticidade. Para isso, calculamos a diferença entre os ruídos da tabela 4.3 com um valor atribuído para q_c e vemos como se comporta o gráficos log – log para as grandezas físicas. Isso pode ser melhor compreendido pela a figura a seguir.



(a)



(b)

Figura 4.2: Gráficos obtidos por meio da tabela 4.3 para diferentes valores de q_c . Em (a), temos o gráfico da função log – log associada ao comprimento de correlação e em (b), o gráfico da função log – log associado a susceptibilidade.

Em ambos gráfico da figura 4.2, qualitativamente vemos que o melhor valor de q_c no qual ajusta linearmente os dados da tabela 4.3 está próximo 0.076. Também vemos que a curvatura do gráfico tem um comportamento específico para valores que são menores de q_c e outro comportamento para valores maiores, reforçando que a criticalidade do sistema está próxima desse valor.

Outra consideração importante a ser feita é o teste estatístico χ^2 (qui-quadrado). Esse teste nos permitiu avaliar quantitativamente com quanta certeza os valores observados podem ser aceitos como regidos pela teoria em questão. Fizemos o teste para diversos valores de q_c com a finalidade de encontrar o valor no qual ajusta nossos dados por meio de uma reta, isto é, aquele que apresenta o menor valor χ^2 .

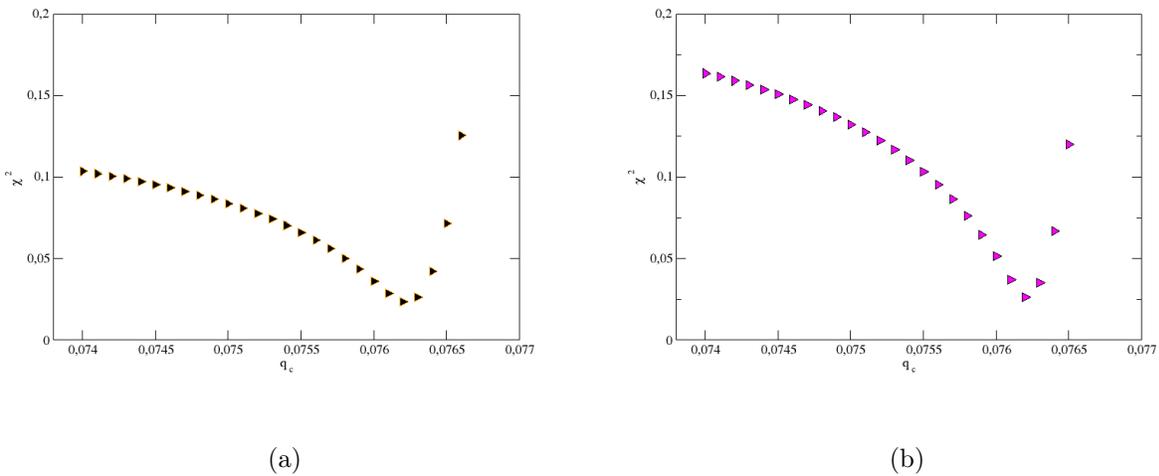
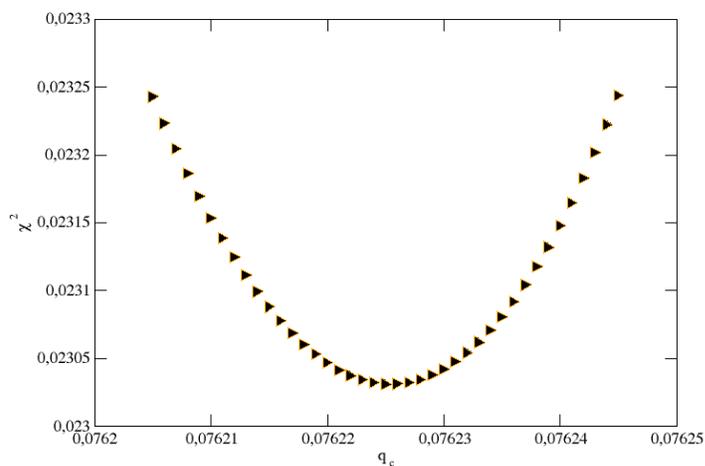
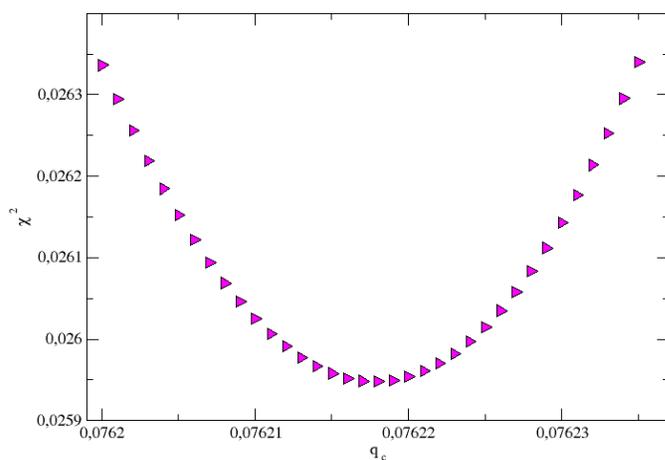


Figura 4.3: Teste do qui-quadrado para diferentes valores de q_c . Em (a), temos o gráfico do teste associada ao comprimento de correlação e em (b), temos o gráfico do teste associado a susceptibilidade.

Em ambos os gráfico da figura 4.3, vemos nitidamente um valor mínimo no intervalo $0.0760 \leq q_c \leq 0.0765$. Apesar do valor mínimo de q_c está encontrar numa faixa pequena, é interessante avaliarmos como o teste qui-quadrado se comporta nesse intervalo. Vale ressaltar que, os valores qui-quadrado obtidos foram divididos pelo número de graus de liberdade do sistema a fim de evitar que os ajustes não sofram influências do número de pontos.



(a)

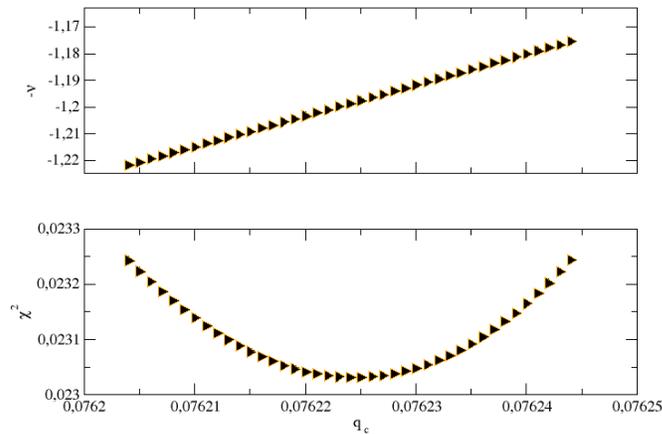


(b)

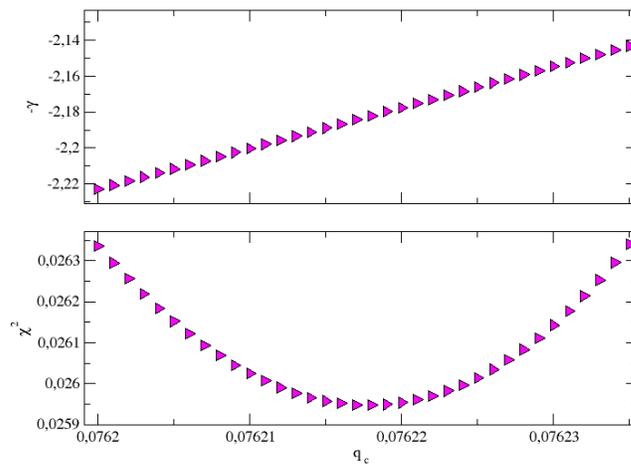
Figura 4.4: Teste do qui-quadrado para diferentes valores de $0,0760 \leq q_c \leq 0,0765$. Em (a), temos o gráfico do teste associada ao comprimento de correlação e em (b), temos o gráfico do teste associado a susceptibilidade.

Nesse mesmo intervalo no qual está o valor mínimo de q_c apresentado na figura 4.3, também vemos um faixa de valores valores qui-quadrado que diferenciam pouco um dos outros, ver figura 4.4. Encontrado q_c , automaticamente obtemos os coeficientes das retas das

equações 4.5 e 4.6 pelo método dos mínimos quadrados, representando respectivamente, o expoente crítico ν e γ no limite termodinâmico associados, respectivamente, ao comprimento de correlação e a susceptibilidade. As figuras abaixo apresentam melhor a ideia descrita.



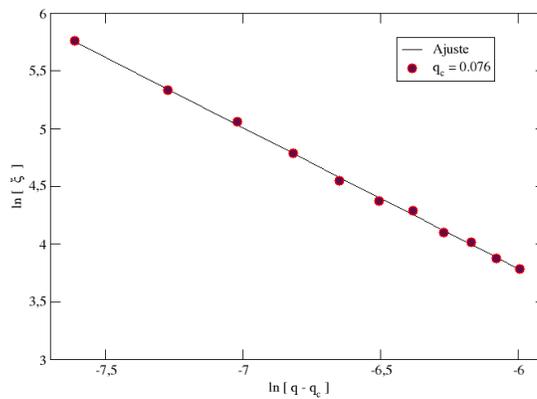
(a)



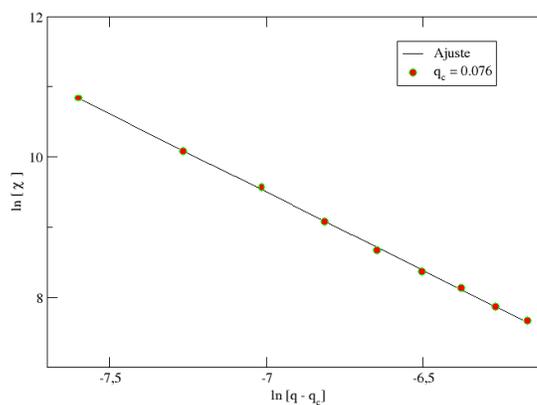
(b)

Figura 4.5: Teste aplicados para valores de q_c no intervalo $0.0760 \leq q_c \leq 0.0765$. Em a(b), vemos o gráfico para o teste dos mínimos quadrados do teste qui-quadrado associados ao(a) comprimento de correlação(susceptibilidade).

Neste trabalho consideramos $q_c \approx 0.076$, valor este que apresenta os dígitos mais robustos para os gráficos das figuras 4.4(a) e 4.4(b). Dito isso, para os dados do comprimento de correlação da tabela 4.3, obtivemos o expoente crítico $-\nu = -1.22(1)$. De maneira análoga, o expoente crítico γ para a susceptibilidade apresentou o valor $-\gamma = -2.22(2)$. Os ajustes obtidos apresenta ter boa qualidade, pois as distribuições dos pontos ficaram bem equilibrada ao longo reta, ver figura.



(a)



(b)

Figura 4.6: Retas de ajuste para obter os expoentes críticos. Em a(b), vemos a reta de ajuste para obter o expoente crítico $\nu(\gamma)$ associado ao comprimento de correlação comprimento(susceptibilidade).

Capítulo 5

Conclusões

Nesta Dissertação estudamos numericamente, através do método Monte Carlo, o Modelo do Voto da Maioria. Nossas simulações foram realizadas em redes quadradas de lado de comprimento L , com $16 \leq L \leq 140$ para alguns valores do parâmetro de controle q . Analisamos nossos resultados com base em uma teoria de escalonamento com o tamanho finito (FSS) estendida. Nessa formulação de escalonamento com o tamanho do sistema, a variável de escala é $x = \xi_L/L$, onde ξ_L é o comprimento de correlação medido em uma rede de lado L . Em termos dessa variável de escala, defini-se um conjunto de funções universais de escala com suporte no intervalo $0 \leq x \leq x_c$, com x_c sendo o valor no qual x se torna independente de L na criticalidade. Essas funções de escalas têm a vantagem de não dependerem explicitamente da distância ao ponto crítico. Assim, nenhum conhecimento prévio do comportamento crítico do sistema é exigido. Além disso, as funções de escala estão definidas mesmo para valores relativamente pequenos de L .

Aqui, ilustramos a aplicação dessa abordagem para extrair os valores da susceptibilidade e do comprimento de correlação, no limite termodinâmico, na região crítica do Modelo do Voto Maioria. Com os valores das grandezas termodinâmicas, podemos obter o comportamento crítico do sistema diretamente de uma relação do tipo $A(t) \sim t^{-\rho}$.

Primeiramente, começamos fazendo uma análise do ruído que o sistema esteve submetido com as grandezas no limite termodinâmico por meio do coeficiente de Pearson. Esse teste estatístico no mostrou que a correlação entre o ruído e a grandezas físicas analisadas foi

negativa e próxima de -1, isso nos informa de que a medida que os ruídos tendem ao ruído crítico, as grandezas observadas diminuem seu valor.

Feito a correlação entre as grandezas e o ruído, fizemos um teste do qui-quadrado para vários ruídos a fim de avaliarmos quantitativamente qual seria o ruído crítico que forneceria menor erro para o ajuste baseada nas relações de escala. Os gráficos χ^2 em função q para o comprimento de correlação e a susceptibilidade apresentaram um comportamento assimétrico e um mínimo local que estava no intervalo $0.0760 \leq x \leq 0.0765$. Nesse intervalo, o valor $q_c = 0.076$ que apresentou um $\chi^2 = 0.0230$, sendo este o menor valor. Obtido q_c , conseguimos extrair os expoentes críticos $-\nu = -1.22(1)$ associado ao comprimento de correlação e o expoente crítico $-\gamma = -2.22(2)$ relacionado a susceptibilidade. Os valores dos expoentes obtidos nesse trabalho são compatíveis com o da literatura e nos levam a concluir que o sistema pertence a mesma classe de universalidade do modelo de Ising para o caso bidimensional. Além disso, os ajustes lineares obtidos para os nossos dados apresentaram boa qualidade para realizar análise na região crítica do sistema, pois pontos se distribuíram de forma uniforme ao longo dos ajustes.

Portanto, por meio de uma nova abordagem para obter as funções de escala de tamanho finito e usando a simulação de Monte Carlo, esse trabalho nos permitiu um estudo das principais características qualitativas e quantitativas da transição de fase do modelo do voto da maioria e observamos que o sistema sofre a transição de fase quando submetemos a um ruído crítico $q_c \approx 0.076$. Este resultado para o valor crítico de q_c é muito próximo ao encontrado para o caso estudado por Mário de Oliveira [9, 14]. Para trabalhos futuros, espera-se estudar o modelo para o caso de 3 dimensões, a fim de estudar o comportamento da rede e determinar o ruído crítico e os expoentes críticos das grandezas estudadas no modelo com melhor acurácia.

Bibliografia

- [1] Jaiver Chicangana Cifuentes. Estudo de transições de fases em um antiferromagneto frustrado através do grupo de renormalização na representação de redes de tensores. Master's thesis, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada, Recife, BR-PE, 3 2018. An optional note.
- [2] Serge Galam, Yuval Gefen, and Yonathan Shapir. Sociophysics: A new approach of sociological collective behaviour. i. mean-behaviour description of a strike. *Journal of Mathematical Sociology*, 9(1):1–13, 1982.
- [3] Serge Galam. Sociophysics: a review of galam models. *International Journal of Modern Physics C*, 19(03):409–440, 2008.
- [4] Bikas K Chakrabarti, Anirban Chakraborti, and Arnab Chatterjee. *Econophysics and sociophysics: trends and perspectives*. John Wiley & Sons, 2006.
- [5] Serge Galam and Serge Moscovici. Towards a theory of collective phenomena. iii: Conflicts and forms of power. *European Journal of Social Psychology*, 25(2):217–229, 1995.
- [6] Serge Galam and Serge Moscovici. Towards a theory of collective phenomena. ii: Conformity and power. *European Journal of Social Psychology*, 24(4):481–495, 1994.
- [7] Katarzyna Sznajd-Weron and Jozef Sznajd. Opinion evolution in closed community. *International Journal of Modern Physics C*, 11(06):1157–1165, 2000.
- [8] Mario J de Oliveira. Isotropic majority-vote model on a square lattice. *Journal of Statistical Physics*, 66(1-2):273–281, 1992.

-
- [9] Tania Tome. *Irreversibilidade: modelos de rede com dinâmicas estocásticas*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 1996.
- [10] Vladimir Privman. *Finite size scaling and numerical simulation of statistical systems*. World Scientific Singapore, 1990.
- [11] John Cardy. *Finite-size scaling*. Elsevier, 2012.
- [12] H Eugene Stanley and Guenter Ahlers. Introduction to phase transitions and critical phenomena. *Physics Today*, 26:71, 1973.
- [13] Claudio Scherer. *Métodos computacionais da física*. Editora Livraria da Física, 2005.
- [14] Tânia Tomé and Mário José de Oliveira. *Dinâmica estocástica e irreversibilidade*. 2014.
- [15] RK Pathria. The canonical ensemble. *Statistical Mechanics*, pages 43–89, 1996.
- [16] Sílvio RA Salinas. *Introdução a física estatística vol. 09*. Edusp, 1997.
- [17] Amnon Aharony and Michael E Fisher. Nonlinear scaling fields and corrections to scaling near criticality. *Physical Review B*, 27(7):4394, 1983.
- [18] M Harré and Terence Bossomaier. Phase-transition-like behaviour of information measures in financial markets. *EPL (Europhysics Letters)*, 87(1):18009, 2009.
- [19] JA Kelso. Phase transitions and critical behavior in human bimanual coordination. *American Journal of Physiology-Regulatory, Integrative and Comparative Physiology*, 246(6):R1000–R1004, 1984.
- [20] Keisuke Ito and Mitsuhiro Matsuzaki. Earthquakes as self-organized critical phenomena. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 95(B5):6853–6860, 1990.
- [21] Julia M Yeomans. *Statistical mechanics of phase transitions*. Clarendon Press, 1992.
- [22] David P Landau and Kurt Binder. *A guide to Monte Carlo simulations in statistical physics*. Cambridge university press, 2014.

-
- [23] Ernst Ising. Beitrag zur theorie des ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, 31(1):253–258, 1925.
- [24] Kurt Binder. Finite size scaling analysis of ising model block distribution functions. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 43(2):119–140, 1981.
- [25] Michael E Fisher. The theory of equilibrium critical phenomena. *Reports on progress in physics*, 30(2):615, 1967.
- [26] Jae-Kwon Kim, Adauto JF De Souza, and DP Landau. Numerical computation of finite size scaling functions: An alternative approach to finite size scaling. *Physical Review E*, 54(3):2291, 1996.
- [27] Matthias Christandl, Nilanjana Datta, Artur Ekert, and Andrew J Landahl. Perfect state transfer in quantum spin networks. *Physical review letters*, 92(18):187902, 2004.
- [28] Yoshiyuki Shibayama, Hirohiko Sato, Toshiaki Enoki, and Morinobu Endo. Disordered magnetism at the metal-insulator threshold in nano-graphite-based carbon materials. *Physical review letters*, 84(8):1744, 2000.
- [29] Gérard Toulouse, Stanislas Dehaene, and Jean-Pierre Changeux. Spin glass model of learning by selection. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 83(6):1695–1698, 1986.
- [30] Ana L Acuña-Lara and Francisco Sastre. Critical phenomena of the majority voter model in a three-dimensional cubic lattice. *Physical Review E*, 86(4):041123, 2012.
- [31] Linda E Reichl. A modern course in statistical physics, 1999.
- [32] Lars Onsager. Crystal statistics. i. a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Physical Review*, 65(3-4):117, 1944.
- [33] Hanshuang Chen, Chuansheng Shen, Gang He, Haifeng Zhang, and Zhonghuai Hou. Critical noise of majority-vote model on complex networks. *Physical Review E*, 91(2):022816, 2015.

-
- [34] Wooseop Kwak, Jae-Suk Yang, Jang-il Sohn, and In-mook Kim. Critical behavior of the majority voter model is independent of transition rates. *Physical Review E*, 75(6):061110, 2007.
- [35] Luiz FC Pereira and FG Brady Moreira. Majority-vote model on random graphs. *Physical Review E*, 71(1):016123, 2005.