



Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação  
Departamento de Física

Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada

Correlações Espaciais e Temporais da Dinâmica de Distribuição de  
Renda

*Ayron Andrey da Silva Lima*

Dissertação de Mestrado

Recife - PE

22 de abril de 2019

Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação  
Departamento de Física

*Ayron Andrey da Silva Lima*

**Correlações Espaciais e Temporais da Dinâmica de Distribuição de  
Renda**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada do Departamento de Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

**Orientador: Prof. Dr. Pedro Hugo de Figueirêdo**

**Recife - PE  
22 de abril de 2019**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE  
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

L732c Lima, Ayrton Andrey da Silva  
Correlações espaciais e temporais da dinâmica de distribuição de  
renda / Ayrton Andrey da Silva Lima. – 2019.  
71 f. : il.

Orientador: Pedro Hugo de Figueirêdo.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de  
Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada,  
Recife, BR-PE, 2019.  
Inclui referências e anexo(s).

1. Renda – Distribuição 2. Análise espacial (Estatística)  
3. Correlação (Estatística) I. Figueirêdo, Pedro Hugo de, orient.  
II. Título

CDD 621

*No meio da dificuldade encontra-se a oportunidade.*

- Albert Einstein

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

**Correlações Espaciais e Temporais da Dinâmica de Distribuição de Renda**

*Ayron Andrey da Silva Lima*

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de mestre em Física, defendida e aprovada por unanimidade em 22/04/2019 pela Comissão Examinadora.

Orientador:

---

Prof. Dr. Pedro Hugo de Figueirêdo  
DF-UFRPE

Banca Examinadora:

---

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Viviane Moraes de Oliveira  
DF-UFRPE

---

Prof. Dr. Tiago Alessandro Espínola Ferreira  
DEINFO-UFRPE

Dedico esta, bem como todas as minhas demais conquistas, a todos meus amigos e familiares, em especial aos meus pais, que sempre estiveram comigo e contribuíram para que eu pudesse concluir todos os meus objetivos.

# Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer aos meus familiares, em especial aos meus pais Cida e Valdeci que sempre apoiaram, incentivaram, e em nenhum momento diminuíram seus esforços para me ver ir cada vez mais longe, sempre estiveram comigo nos maus e bons momentos, e a todo momento me apoiaram e aconselharam nas minhas escolhas e decisões, e a minha namorada Nathielle que sempre me manteve firme nos momentos mais sensíveis e difíceis, mostrando que podemos ter pessoas de bem e que realmente nos gostam ao nosso lado.

Aos meus amigos, em especial Marcos e Jucilene, que formei no ensino médio e até hoje mantemos laços e fazem os momentos tristes se tornarem alegres e bem humorados. Aos amigos da graduação e do mestrado que me proporcionam grandes momentos de ensinamentos e aprendizagens que levarei para o resto da vida, onde pudemos discutir exercícios, ideias, criações, trabalho e muito mais.

Em especial gostaria de agradecer ao professor Pedro Hugo pela sua infinita paciência, dedicação e disponibilidade para realização desse trabalho. Sem suas ideias, seus pensamentos e seu enorme conhecimento, a viabilização desse trabalho se tornaria árdua. Durante esse tempo juntos, pude aprender muito acerca da física e da humanidade de um professor para com os seus alunos.

Por fim, gostaria de agradecer a coordenação da Pós-Graduação que sempre esteve disponível para conversar e solucionar os problemas que apareceram durante o período e também a CAPES, pelo apoio financeiro.

# Resumo

Nas três últimas décadas muito esforço tem sido empreendido por pesquisadores e agentes públicos para a compreensão do papel da distribuição espacial de renda no desenvolvimento socioambiental em diversas escalas como bairros, cidades, regiões metropolitanas, países e até continentes. Para distintas escalas de tempo e regimes de renda, uma grande classe de modelos, pertencentes a área que se convencionou chamar de econofísica, pode ser encontrada na literatura, desde aqueles que incorporam aspectos espaciais e topológicos, até aqueles que utilizam um tratamento de equações diferenciais. Nesta dissertação investigamos as propriedades das correlações espaciais e temporais associadas a um modelo estocástico de agentes que incorpora características de heterogeneidade e adaptabilidade a um sistema fechado no qual agentes são caracterizados por sua renda  $m_i$ , taxa de gasto  $\omega_i$  e mobilidade  $\mu_i$ . Uma fração  $q$  da população possui taxa de gasto positivamente correlacionada com sua renda enquanto que a população restante correlaciona-se negativamente. Um segundo parâmetro  $p$  especifica a fração de agentes cuja mobilidade pode estar correlacionada com o nível de renda, segundo 4 possíveis cenários. A variação de parâmetros  $(p, q)$  produz comportamentos limitantes para a taxa de gasto média e índice de Gini compatíveis com aqueles observados em dados reais. A distribuição radial de recursos  $m(r)$  em torno do agente de maior renda, bem como sua variância  $\Delta m^2(r)$  contempla como casos particulares resultados de modelos já introduzidos na literatura. Por fim as correlações temporais apontam para diferentes dinâmicas de relaxação do sistema dependentes do parâmetro  $q$ .

**Palavras-chave:** Econofísica, modelos de agentes, adaptabilidade, correlações.



# Abstract

In the last three decades much effort has been made by researchers and public agents to understand the role of the spatial distribution of income in socio-environmental development at various scales such as neighborhoods, cities, metropolitan regions, countries and even continents. For different time scales and income regimes, a large class of models, belonging to an area that is conventionally called econophysical, can be found in the literature, from those that incorporate spatial and topological aspects, to those that use a differential equation treatment. In this dissertation we investigate the spatio-temporal correlations properties associated to a stochastic model of agents that incorporates characteristics of heterogeneity and adaptability to a closed system in which agents are characterized by their income  $m_i$ , expenditure rate  $\omega_i$  and mobility  $\mu_i$ . A fraction  $q$  of the population has a spending rate positively correlated with their income while the remaining population correlates negatively. A second parameter  $p$  specifies the fraction of agents whose mobility may be correlated with the level of income, according to 4 possible scenarios. The variation of parameters  $(p, q)$  produces behaviors limiting the average expenditure rate and Gini index compatible with those observed in real data. The radial distribution of resources  $m(r)$  around the highest income agent, as well as its variance  $\Delta m^2(r)$  particular cases results of models already introduced in the literature. Finally, the temporal correlations point to different system relaxation dynamics dependent on the  $q$  parameter.

**Keywords:** Econophysics, agent model, adaptability, correlations.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modelos</b>	<b>7</b>
2.1	Modelos Homogêneos . . . . .	8
2.1.1	Modelo de Angle . . . . .	9
2.1.2	Modelo de Bennati . . . . .	10
2.1.3	Modelo de Chakraborti e Chakrabarti . . . . .	10
2.1.4	Modelo de Dragulesco e Yakovenko . . . . .	12
2.2	Modelos Heterogêneos . . . . .	13
2.3	Modelo Heterogêneo e Adaptativo . . . . .	14
2.3.1	Modelo Heterogêneo e Adaptativo-1 (MHA-1) . . . . .	15
2.3.2	Modelo Heterogêneo e Adaptativo-2 (MHA-2) . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Aspectos Espaciais da Distribuição de Renda</b>	<b>17</b>
3.1	Modelo Heterogêneo e Adaptativo com Estrutura Espacial . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Correlações Espaciais</b>	<b>24</b>
<b>5</b>	<b>Correlações Temporais</b>	<b>38</b>
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>45</b>
<b>A</b>	<b>Anexo</b>	<b>47</b>

# Lista de Símbolos

$\nu$	Expoente de Pareto
$m_i$	Renda do $i$ -ésimo agente
$G$	Índice de Gini
$\mu_i$	Mobilidade do $i$ -ésimo agente
$\omega_i$	Taxa de gasto do $i$ -ésimo agente
$q$	Fração dos agentes que possuem taxa de gasto e renda positivamente correlacionadas
$p$	Fração dos agentes que possuem mobilidade adaptável
$\langle\omega\rangle$	Taxa de gasto média
$\langle m(r)\rangle$	Renda média dos agentes localizados a uma distância $r$ do sítio com renda máxima
$\tau_c$	Tempo de correlação característico
$\tau_m$	Tempo médio em que o agente permaneceu sendo o mais rico

# Lista de Figuras

1.1	Curva de Lorenz para uma distribuição de renda exponencial (curva em vermelho) e a curva correspondente à perfeita igualdade de renda (curva preta). Figura extraída de [1]. . . . .	4
1.2	Histograma dos valores médios dos coeficientes de Gini para 132 países, bem como suas médias temporais entre os anos de 1990 à 2009 com as respectivas barras de erro (subgráfico). Dados do Banco Mundial e figura extraída de [2]. . . . .	5
3.1	Proporção dos 25% dos domicílios que pagam mais impostos em relação aos 25% dos domicílios que pagam menos impostos. Extraído de [3]. . . . .	19
4.1	Comportamento da taxa de gasto $[\omega]$ em função do tempo, para as frações de agentes com mobilidade adaptável $p$ correspondente ao caso crescente. . . . .	25
4.2	Comportamento da taxa de gasto $[\omega]$ em função do tempo, para as frações de agentes com mobilidade adaptável $p$ correspondente ao caso decrescente. . . . .	26
4.3	Comportamento da taxa de gasto $[\omega]$ em função do tempo, para as frações de agentes com mobilidade adaptável $p$ correspondente ao caso negativo. . . . .	27
4.4	Comportamento da taxa de gasto $[\omega]$ em função do tempo, para as frações de agentes com mobilidade adaptável $p$ correspondente ao caso positivo. . . . .	28
4.5	Comportamento do Índice de Gini $[G]$ em função da taxa de gasto $[\omega]$ para os quatro casos de correlação entre mobilidade e renda. . . . .	29
4.6	Gráfico do comportamento do Índice de Gini $[G]$ em função da taxa de gasto $[\omega]$ para o caso decrescente, em comparação com as médias para o coeficiente de Gini e a taxa de gasto dos 132 países, no período de 1990 à 2009 (círculos pretos). . . . .	30

4.7	Gráficos da renda média dos agentes localizados a uma distância $r$ do agente com renda máxima correspondente ao caso crescente. . . . .	31
4.8	Gráficos da renda média dos agentes localizados a uma distância $r$ do agente com renda máxima correspondente ao caso decrescente. . . . .	32
4.9	Gráficos da renda média dos agentes localizados a uma distância $r$ do agente com renda máxima correspondente ao caso negativo. . . . .	33
4.10	Gráficos da renda média dos agentes localizados a uma distância $r$ do agente com renda máxima correspondente ao caso positivo. . . . .	34
4.11	Gráficos da variância da renda média dos agentes localizados a uma distância $r$ do agente com renda máxima correspondente ao caso crescente. . . . .	34
4.12	Gráficos da variância da renda média dos agentes localizados a uma distância $r$ do agente com renda máxima correspondente ao caso decrescente. . . . .	35
4.13	Gráficos da variância da renda média dos agentes localizados a uma distância $r$ do agente com renda máxima correspondente ao caso negativo. . . . .	35
4.14	Gráficos da variância da renda média dos agentes localizados a uma distância $r$ do agente com renda máxima correspondente ao caso positivo. . . . .	36
4.15	Gráfico log-log da variância da renda média dos agentes localizados a uma distância $r$ do agente com renda máxima para o caso decrescente quando $p = 0.4$ . . . . .	36
4.16	Gráficos do comportamento do expoente da regressão $\lambda$ em função de $q$ para os quatro casos de correlação entre mobilidade e renda. . . . .	37
5.1	Gráficos do comportamento da função de correlação da taxa de gasto média para diferentes valores de $q = 0.3, 0.4, 0.5$ para os quatro casos de correlação entre mobilidade e renda. . .	39
5.2	Gráficos do comportamento do tempo de correlação da taxa de gasto média em função de $q$ para os quatro casos de correlação entre mobilidade e renda. . . . .	40
5.3	Gráficos das distribuições da taxa de gasto para os casos crescente e decrescente para diferentes valores de $q$ . . . . .	41
5.4	Gráficos do comportamento da fração de agentes que foram o mais rico pelo menos uma vez em função de $q$ para os quatro casos de correlação entre mobilidade e renda. . . . .	42

5.5	Gráficos do comportamento do tempo médio em que o agente permaneceu sendo o mais rico em função de $q$ para os quatro casos de correlação entre mobilidade e renda. . . . .	43
-----	---	----

# Lista de Tabelas

2.1	Quadro comparativo dos parâmetros $n(\lambda)$ , $\tilde{\omega}_i$ e $\tilde{\omega}_j$ , para os modelos de Angle, Bennati, Chakraborti e Chakrabarti e Dragulesco e Yakovenko. . . . .	12
A.1	Valores da taxa de consumo $\omega$ e índice de Gini médios, para o período de 1990 - 2009 dados retirados do Banco Mundial. . . . .	47
A.2	Valores da taxa de consumo $\omega$ e índice de Gini médios, para o período de 1990 - 2009 dados retirados do Banco Mundial. . . . .	48
A.3	Valores da taxa de consumo $\omega$ e índice de Gini médios, para o período de 1990 - 2009 dados retirados do Banco Mundial. . . . .	49
A.4	Valores da taxa de consumo $\omega$ e índice de Gini médios, para o período de 1990 - 2009 dados retirados do Banco Mundial. . . . .	50
A.5	Valores da taxa de consumo $\omega$ e índice de Gini médios, para o período de 1990 - 2009 dados retirados do Banco Mundial. . . . .	51
A.6	Valores da taxa de consumo $\omega$ e índice de Gini médios, para o período de 1990 - 2009 dados retirados do Banco Mundial. . . . .	52

# Capítulo 1

## Introdução

Nas últimas décadas, o número de estudos nos quais a física está aplicada de forma interdisciplinar a temas ligados as ciências sociais, ciências biológicas, linguística e urbanismo têm crescido notavelmente [4]. Esses Sistemas Complexos, como têm sido chamados, são constituídos por um grande número de elementos que interagem entre si através de mecanismos não triviais, compartilhando características fundamentais como adaptabilidade, frustração e memória. Usualmente a composição dessas características guia o sistema para um comportamento coletivo emergente [5, 6].

Essa ligação entre a física e outras áreas do conhecimento fez com que um grande número de pesquisadores se interessassem e sugerissem novos métodos de análise e modelagem nas ciências sociais [7]. Em relação à economia, criou-se uma área de pesquisa chamada econofísica. Em uma busca rápida, foram encontrados mais de 130 artigos publicados relacionados ao tema Econofísica, no período entre 2008 e 2018 [8]. Cunhada em analogia a áreas como biofísica, geofísica e astrofísica, a expressão econofísica foi primeiramente utilizada pelo físico americano Harry Eugene Stanley, na conferência *Dynamics of Complex Systems*, realizada na Índia em 1995 [9]. Apesar do termo econofísica ter sido utilizado recentemente, a ligação da física com a economia vem de algumas décadas atrás através de alguns pesquisadores como Pareto, Mandelbrot e Bachelier [10].

A econofísica é uma área de pesquisa interdisciplinar que utiliza-se de métodos matemáticos da mecânica estatística para abordar problemas de natureza econômica. Esse novo



ramo estuda sistemas com um grande número de agentes econômicos, que interagem entre si. Uma de suas abordagens consiste na utilização de modelos microscópicos aplicados a agentes heterogêneos e de aprendizagem, tentando reproduzir as regularidades estatísticas existentes nos sistemas econômicos ou financeiros.

A distribuição de renda é um dos principais temas de interesse da econofísica [11]. A forma como os recursos se distribuem em uma sociedade ou um mercado desempenha um papel muito importante para os agentes econômicos. Uma das primeiras contribuições para o estudo foi fornecida pelo matemático Vilfredo Pareto no final do século XIX, em que fez a análise de dados de renda de diversos países europeus, concluindo que a distribuição de riqueza em uma sociedade seguia uma lei de potência, com um expoente  $\nu$  que não dependia das diferentes condições econômicas dos países [12], descrita pela expressão:

$$P(m) \propto m^{-(\nu+1)} \quad (1.1)$$

onde  $m$  representa a quantidade de recursos e  $\nu$  é o chamado expoente de Pareto.

Embora a lei proposta por Pareto estivesse de acordo com o regime de grandes intervalos de renda, ela divergia para médios e pequenos intervalos. A partir da década de 1960, através de muitos estudos empíricos, verificou-se que o expoente para a cauda de distribuição de renda não era universal [13, 14]. Com isso diversos modelos foram propostos na tentativa de obter novas distribuições em consonância com os dados reais.

Alguns estudos [13, 14, 15] apontam que a distribuição de renda  $P(m)$  pode ser subdividida em dois regimes distintos separados por uma escala  $m_c$ . O primeiro associado a um regime de baixas rendas ( $m \leq m_c$ ) descrito por uma função Gama e um segundo ligado a um regime de altas rendas ( $m > m_c$ ), matematicamente representado por uma lei de potência com um parâmetro  $1 \leq \nu \leq 2$ , usualmente chamado de expoente de Pareto. Explicitamente:

$$P(m) = \begin{cases} (\beta m)^{n-1} e^{-\beta m}, & m \leq m_c \\ m^{-(\nu+1)} & , \quad m > m_c \end{cases} \quad (1.2)$$

onde  $\beta$  representaria o inverso do valor médio de renda para uma distribuição Gama completa.

Para garantir que a distribuição seja normalizada, temos o seguinte vínculo:

$$\int_0^{\infty} P(m)dm = \frac{\gamma(n, \beta m_c)}{\beta^n} + \frac{1}{\nu m_c^\nu} = 1 \quad (1.3)$$

onde

$$\gamma(n, \beta m_c) = \int_0^{m_c} (\beta m)^{n-1} e^{-\beta m} dm \quad (1.4)$$

indica a função Gama incompleta inferior.

Um aspecto importante é quantificar o grau de heterogeneidade da distribuição de recursos de um sistema econômico. Usualmente o índice ou coeficiente de Gini é o parâmetro utilizado para indicar o grau de concentração de renda de um sistema econômico. O índice de Gini está compreendido entre  $0 \leq G \leq 1$  que assume valor  $G = 0$  para mínima concentração de renda, ou seja, todos os indivíduos possuem a mesma quantidade de recursos e  $G = 1$  que representa a máxima concentração de renda, ou seja, um único indivíduo detém de todos os recursos da sociedade [16].

O coeficiente de Gini é obtido a partir da curva de Lorenz, que é a forma padrão para representar todos os dados da distribuição de renda  $P(r)$ . Ele é calculado analiticamente através de duas quantidades paramétricas:

$$X(m) = \frac{\int_0^m P(r)dr}{\int_0^{\infty} P(r)dr} \quad (1.5)$$

$$Y(m) = \frac{\int_0^m rP(r)dr}{\int_0^{\infty} rP(r)dr} \quad (1.6)$$

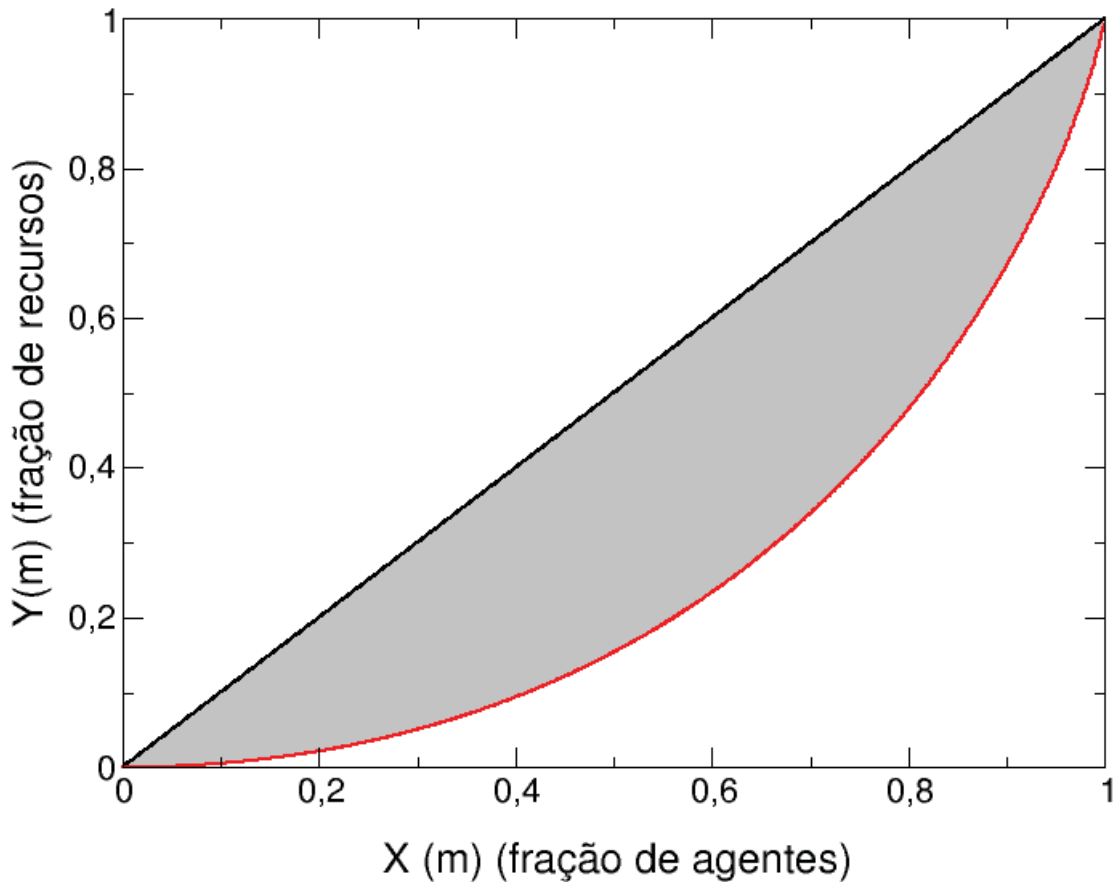
onde  $X(m)$  representa a fração de agentes com recurso inferior a  $m$  e  $Y(m)$  a fração de recursos associada a população de  $X(m)$ .

Na Figura 1.1, a curva vermelha (curva de Lorenz) representa uma distribuição exponencial de renda, e a curva preta representa a distribuição de renda perfeitamente igualitária. A região entre as curvas é a área de concentração de renda e a região abaixo da curva de cor preta e chamada de área de máxima concentração.

O coeficiente de Gini é definido como a razão entre a área de concentração de renda e a área de máxima concentração de renda, podendo ser escrito da seguinte forma,

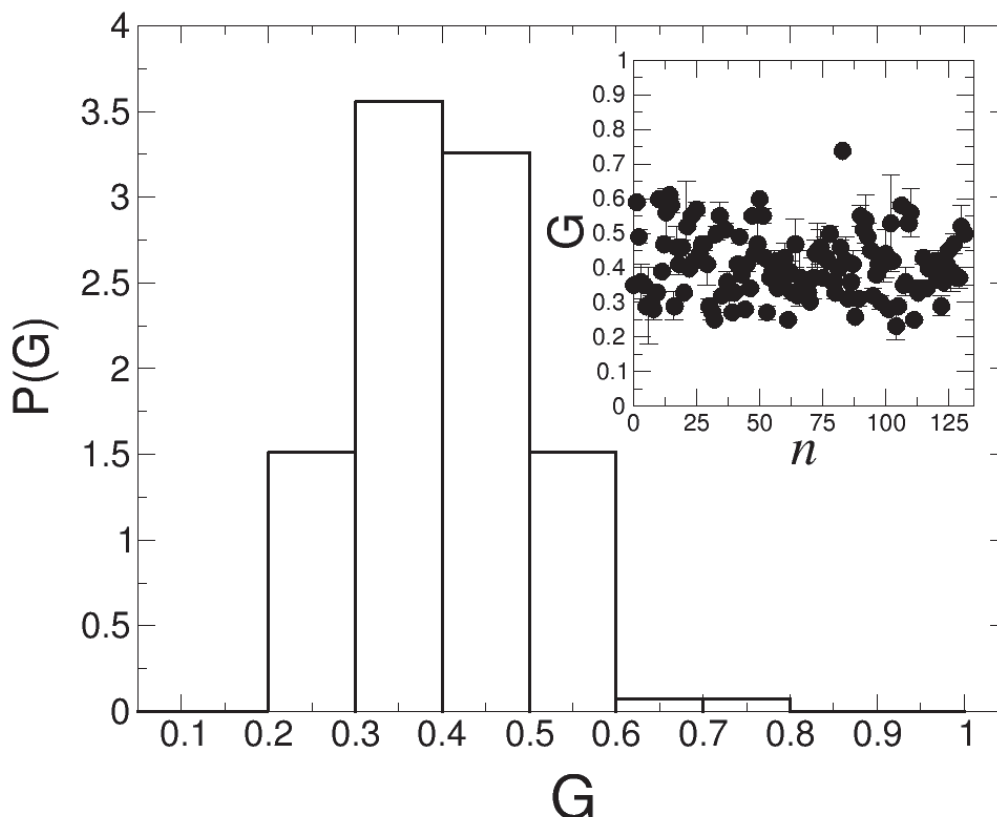
$$G \equiv 2 \int_0^1 (X - Y)dX. \quad (1.7)$$

Figura 1.1: Curva de Lorenz para uma distribuição de renda exponencial (curva em vermelho) e a curva correspondente à perfeita igualdade de renda (curva preta). Figura extraída de [1].



Apesar do fato de que analiticamente o coeficiente de Gini esteja contido no intervalo  $0 \leq G \leq 1$ , valores reais associados a esse parâmetro extraídos de dados do Banco Mundial, estão concentrados numa subregião. Na Figura 1.2, um histograma é apresentado, contendo as médias temporais do índice de Gini de 132 países, onde os dados foram obtidos do Banco Mundial entre os anos de 1990 à 2009, com representantes de todos os continentes [17, 18]. No subgráfico, exibimos os valores específicos da média temporal de cada país com suas respectivas barras de erro [2].

Figura 1.2: Histograma dos valores médios dos coeficientes de Gini para 132 países, bem como suas médias temporais entre os anos de 1990 à 2009 com as respectivas barras de erro (subgráfico). Dados do Banco Mundial e figura extraída de [2].



Podemos observar que o intervalo no qual se encontram os valores reais destes dados, para este parâmetro correspondem a  $\bar{G}_{min} = 0.23 \pm 0.04$  (República Eslovaca) e  $\bar{G}_{max} = 0.74 \pm 0.04$  (República da Namíbia) respectivamente [2].

Nesta dissertação estamos interessados em investigar alguns aspectos espaciais e temporais da distribuição de renda em uma rede composta de muitos agentes, onde estes incorporam características como heterogeneidade e adaptabilidade em suas taxas de gasto.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no capítulo 2, apresentamos uma breve revisão dos principais modelos encontrados na literatura [19, 9] aplicados na investigação do processo de distribuição de renda de diversos países, e suas principais características.

No capítulo 3, abordamos alguns aspectos da distribuição espacial de renda da perspectiva econômica e apresentamos uma generalização do modelo heterogêneo adaptativo [20], que

engloba aspectos espaciais da distribuição de renda.

No capítulo 4, apresentamos os resultados e a discussão do nosso trabalho relacionados as correlações espaciais, assim como comparamos os resultados obtidos através do modelo heterogêneo adaptativo com os dados reais de países retirados do Banco Mundial.

Já no capítulo 5, exibimos os resultados e as discussões do nosso estudo, associados as correlações temporais.

E por fim, no capítulo 6 expomos a conclusão, as perspectivas, e considerações finais de nosso estudo.

# Capítulo 2

## Modelos

Devido ao desenvolvimento de recursos computacionais de alto desempenho, modelos estatísticos de muitos agentes, que incluem em sua dinâmica taxas de gasto, tem sido propostos frequentemente como forma de descrever sistemas econômicos fechados e que podem reproduzir algumas características da distribuição de renda, como por exemplo o índice de Gini [21].

Em tais modelos, assume-se que o sistema é composto de  $N$  agentes  $\{i = 1, 2, \dots, N\}$  e cada um possui uma quantidade de recursos  $m_i$  ( $m_i > 0$ ), enquanto que a quantidade total de recursos

$$\sum_{i=1}^N m_i = M \quad (2.1)$$

é conservada. Para cada agente é estabelecida uma taxa de gasto  $\omega_i$  ( $0 < \omega_i < 1$ ), que seria a fração atual da quantidade de recursos que pode ser transferida para outro agente, que é escolhido entre os  $(N - 1)$  agentes restantes. De forma semelhante, é estabelecido um parâmetro denominado poupança  $\lambda_i = 1 - \omega_i$  ( $0 < \lambda_i < 1$ ) sendo a fração de recursos preservada em cada transação. A dinâmica do sistema prossegue até que todos os agentes tenham realizado no mínimo uma transação, então contabilizamos um passo de Monte Carlo.

Logo após uma transação, cada unidade  $i$  e  $j$  terão uma nova quantidade de recursos  $m_i(t + 1)$  e  $m_j(t + 1)$  respectivamente. A interação pode ser descrita através das seguintes

equações:

$$\begin{cases} \Delta m = \omega_i m_i(t) - \omega_j m_j(t) \\ m_i(t+1) = m_i(t) - \Delta m \\ m_j(t+1) = m_j(t) + \Delta m \end{cases}, \quad (2.2)$$

onde  $\Delta m$  pode ser entendida como o fluxo efetivo de recursos em cada transação. Divergindo dos sistemas econômicos reais, os sistemas estudados são fechados, mantendo constantes o número de agentes  $N$  e a quantidade total de recursos  $M$ . Esses modelos também podem ser classificados como simétricos e assimétricos. Um modelo é dito simétrico, quando a probabilidade  $\epsilon$  com a qual um agente  $i$  ou  $j$  perde uma quantidade de recursos é fixa e a quantidade de recursos trocados  $\Delta m$  satisfaz a relação:

$$\Delta m(m_i, m_j; \epsilon) = -\Delta m(m_j, m_i; \epsilon). \quad (2.3)$$

Da mesma forma, um modelo é dito assimétrico, quando  $\epsilon$  for fixo e a quantidade de recursos trocados  $\Delta m$  satisfazer a relação:

$$\Delta m(m_i, m_j; \epsilon) \neq -\Delta m(m_j, m_i; \epsilon). \quad (2.4)$$

Em uma interação entre dois agentes  $i$  e  $j$ , se a quantidade total de troca  $\Delta m$  for inteiramente perdida por um agente e adquirida pelo outro, o modelo é considerado unidirecional.

Estes modelos são normalmente separados em duas classes distintas, uma chamada homogênea e a outra heterogênea. Na primeira, os agentes têm a mesma taxa de gasto  $\omega$ , enquanto que na segunda há uma única taxa de gasto  $\omega_i$  associada a cada agente. Em ambas as classes, as taxas de gasto são definidas de forma exógena ao sistema. A seguir discutiremos cada uma dessas classes.

## 2.1 Modelos Homogêneos

A princípio iremos tratar dos modelos homogêneos, nos quais a taxa de gasto  $\omega$  é a mesma para todos os agentes.

### 2.1.1 Modelo de Angle

O modelo proposto por J. Angle em 1983 [21, 22] busca descrever como trocas individuais entre agentes econômicos que inicialmente tem a mesma quantidade de recursos, produz uma distribuição de renda desigual. Do ponto de vista matemático, ele é classificado como um modelo assimétrico e unidirecional, além de possuir uma dinâmica não linear.

Para o modelo de Angle, o módulo da variação de recursos do  $i$ -ésimo agente é dado por

$$|\Delta m| = \epsilon \omega m_i, \quad (2.5)$$

onde  $\epsilon$  é uma fração aleatória de  $m_i$  [ $\epsilon = \epsilon(m_i)$ ].

Quando  $m_i < m_j$  o agente  $i$  terá uma probabilidade  $p_0$  de perder seus recursos. Embora, se  $m_i > m_j$ , o agente  $j$  terá uma probabilidade  $1 - p_0$  de perder seus recursos.

A variação da quantidade de recursos obedece a seguinte lei:

$$\Delta m = \eta(m_j - m_i)\epsilon\omega m_i - [1 - \eta(m_j - m_i)]\epsilon\omega m_j, \quad (2.6)$$

onde  $\eta$  e  $\epsilon$  são variáveis aleatórias. O parâmetro  $\epsilon$  está compreendido no intervalo ( $0 < \epsilon < 1$ ), ele pode ser uniforme ou ter uma determinada distribuição de probabilidade. Já  $\eta$  é uma variável dicotômica, responsável pela unidirecionalidade do fluxo de recursos do modelo, podendo assumir dois valores: com a probabilidade  $p_0$ ,  $\eta(m > 0) = +1$  ou com probabilidade  $1 - p_0$ ,  $\eta(m < 0) = 0$ . O valor de  $\eta$  igual a 1 quer dizer que o fluxo de recursos vai do agente  $i$  para o agente  $j$ , já quando o valor de  $\eta$  é igual a 0, a transferência de recursos se dá do agente  $j$  para o agente  $i$ .

O modelo exhibe um comportamento especial quando  $p_0 = 1/2$ . Nesse caso, todos os indivíduos tem a mesma chance de ganhar ou perder recursos. Nessa condição específica, a distribuição de renda apresentada pelo modelo é caracterizada por uma distribuição Gama:

$$P(m) = \beta \gamma_n(\beta m) = \frac{\beta}{\Gamma(n)} (\beta m)^{n-1} \exp(-\beta m), \quad (2.7)$$

onde

$$n \equiv \frac{D}{2} = \frac{1 + 2\lambda}{2(1 - \lambda)} = \frac{3 - 2\omega}{2\omega}, \quad (2.8)$$

onde  $\beta$  é um parâmetro que faz o papel do inverso da renda média, e as variáveis  $n$  e  $D$  são interpretadas como parâmetros referentes a dimensão do sistema. Percebe-se que quando  $n < 1$ , ou seja,  $\omega > 3/4$  ou  $\lambda < 1/4$ , a distribuição Gama diverge quando  $m \rightarrow 0$ .



Um análogo mecânico para o modelo de Angle, é um modelo com a interação entre gotas de chuva. Uma gota de chuva possui inicialmente uma massa  $m_i$ , após várias interações ou colisões, ela pode perder uma fração da sua massa inicial, passando a ter uma nova massa  $m_i(t+1) = m_i(t) - \Delta m$ , onde  $\Delta m$  representa a fração de massa perdida. Contudo, essa quantidade é absorvida por uma nova gota que tinha massa inicial  $m_j$  e que após as interações ou choques passa a ter uma massa  $m_j(t+1) = m_j(t) + \Delta m$ .

### 2.1.2 Modelo de Bennati

O modelo desenvolvido por E. Bennati [22], em uma perspectiva matemática, é classificado como simétrico e unidirecional. Neste modelo, os agentes interagem e trocam quantidades constantes de recursos  $\Delta m$ . Se após as transações, suas quantidades de recursos finais forem positivas [ $m_i(t+1), m_j(t+1) \geq 0$ ], o sistema é descrito pela equação 2.3, onde

$$\Delta m(t+1) = \Delta m(t), \quad (2.9)$$

ou seja, o fluxo de recursos trocados não depende de uma taxa de gasto. Caso [ $m_i(t+1), m_j(t+1) \leq 0$ ] não ocorre interação. Esse modelo é análogo a um conjunto de partículas trocando energia por emissão e absorção de quanta de luz a uma frequência constante  $\nu_0 = \Delta m_0 / \hbar$ .

Este modelo é bem descrito analiticamente pela distribuição de equilíbrio exponencial ou distribuição de Gibbs

$$P(m) = \frac{\exp(-m / \langle m \rangle)}{\langle m \rangle} \quad (2.10)$$

onde  $\langle m \rangle$  é quantidade média de recursos.

O modelo de Bennati torna-se equivalente ao modelo de Angle quando  $D/2 = n = 1$ . Esse modelo diferencia-se do modelo de Angle pelo fato dele ser aditivo, ou seja,  $\Delta m$  não depende de  $m$ , e o outro ser multiplicativo  $\Delta m \propto m$ .

### 2.1.3 Modelo de Chakraborti e Chakrabarti

O modelo introduzido por Chakraborti e Chakrabarti [14, 15] possui uma dinâmica de troca de recursos semelhante a dos modelos discutidos anteriormente, tendo como regra geral

as seguintes expressões:

$$\begin{cases} m_i(t+1) = \lambda m_i + \epsilon(1-\lambda)(m_i + m_j) \\ m_j(t+1) = \lambda m_j + \bar{\epsilon}(1-\lambda)(m_i + m_j) \end{cases} \quad (2.11)$$

onde  $\bar{\epsilon} = 1 - \epsilon$  representa uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo  $(0,1)$ . Esta regra é equivalente a Equação 2.3 caso

$$\begin{cases} \Delta m = \omega(\bar{\epsilon}\omega_i - \epsilon m_j) = (1-\lambda)(\bar{\epsilon}\omega_i - \epsilon m_j) \\ \bar{\epsilon} + \epsilon = 1 \end{cases} \quad (2.12)$$

Da mesma forma do modelo de Angle, a distribuição de recursos no equilíbrio é descrita por uma distribuição Gama, assim como na Equação 2.8, entretanto o parâmetro  $n$  é dado por

$$n_c(\omega) \equiv n(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{2} = \frac{1+2\lambda}{1-\lambda} = \frac{3-2\omega}{\omega}, \quad (2.13)$$

ou seja, é somente o dobro do parâmetro do modelo de Angle simétrico para  $p_0 = 1/2$ .

Quando temos  $m \rightarrow 0$ , a densidade de probabilidade é sempre finita e tanto para o valor mais alto da taxa de gasto  $\omega = 1$ , ou para o valor mínimo de poupança  $\lambda = 0$ , a distribuição converge para uma função exponencial  $P(m) = \beta \exp(-\beta m)$ .

Apesar de existir uma relação entre as distribuições de equilíbrio do modelo de Angle simétrico e do modelo de Chakraborti e Chakrabarti, algumas divergências podem ser apontadas:

- O modelo de Chakraborti e Chakrabarti não é unidirecional, a riqueza flui do  $i$ -ésimo para o  $j$ -ésimo agente e vice-versa.
- O modelo é linear do ponto de vista da transferência de recurso, enquanto que, a unidirecionalidade do modelo de Angle implica em uma dependência não-linear das riquezas dos agentes.
- No modelo Chakraborti e Chakrabarti o componente estocástico está apenas associado ao parâmetro  $\epsilon$ .

Um análogo mecânico para o modelo Chakraborti e Chakrabarti é um sistema harmônico com  $D = 2n$  graus de liberdade, ou um gás ideal em  $D = 2n$  dimensões.

### 2.1.4 Modelo de Dragulesco e Yakovenko

O modelo proposto por Dragulesco e Yakovenko [23, 24] reproduz trocas simétricas entre os agentes econômicos da mesma forma como ocorre no modelo de Chakraborti e Chakrabarti. O modelo pode ser visto como uma reorganização aleatória da riqueza total inicial ( $m_i + m_j$ ) de dois indivíduos,

$$\begin{cases} m_i(t+1) = \epsilon(m_i(t) + m_j(t)) \\ m_j(t+1) = \bar{\epsilon}(m_i(t) + m_j(t)) \\ \bar{\epsilon} + \epsilon = 1 \end{cases} \quad (2.14)$$

onde a quantidade de fluxo de recursos  $\Delta m$  é dada por

$$\Delta m = \bar{\epsilon}m_i - \epsilon m_j. \quad (2.15)$$

Os parâmetros  $\epsilon$  e  $\bar{\epsilon}$  são número aleatórios distribuídos uniformemente no intervalo  $(0,1)$ . Pode-se considerar o modelo desenvolvido por Dragulesco e Yakovenko um caso particular do modelo de Chakraborti e Chakrabarti para o caso onde o parâmetro de poupança  $\lambda$  é nulo, ou seja, a taxa de gasto  $\omega$  é máxima ( $\lambda = 0$  e  $\omega = 1$ ).

Assim como nos modelos de Angle, de Bennati, e de Chakraborti e Chakrabarti ( $n = 1$ ), a distribuição de equilíbrio é bem descrita por uma densidade puramente exponencial.

Na Tabela 2.1 apresentamos um quadro comparativo entre os modelos discutidos nessa seção.

Tabela 2.1: Quadro comparativo dos parâmetros  $n(\lambda)$ ,  $\tilde{\omega}_i$  e  $\tilde{\omega}_j$ , para os modelos de Angle, Bennati, Chakraborti e Chakrabarti e Dragulesco e Yakovenko.

Modelo	$n(\lambda)$	$\tilde{\omega}_i$	$\tilde{\omega}_j$
Angle	$\frac{3-2\omega}{2\omega}$	$\eta(m_j - m_i)\epsilon$	$(1 - \eta(m_j - m_i))\epsilon$
Bennati	1	$\epsilon$	$(1 - \epsilon)$
Chakraborti e Chakrabarti	$\frac{3-2\omega}{\omega}$	$\epsilon(1 - \lambda_i)$	$(1 - \epsilon)(1 - \lambda_i)$
Dragulesco e Yakovenko	1	$\epsilon$	$(1 - \epsilon)$

## 2.2 Modelos Heterogêneos

Nessa seção, passaremos a tratar dos modelos heterogêneos, ou seja, nesses modelos cada agente possui uma taxa de gasto distinta  $\omega_i = 1 - \lambda_i$ , distribuída uniformemente no intervalo  $[0,1)$ . A partir dos modelos homogêneos, podemos formular suas versões heterogêneas fazendo a substituição do termo  $\omega m_i(\lambda m_i)$  por  $\omega_i m_i(\lambda_i m_i)$ , onde o conjunto de parâmetros  $\omega_i$  ( $\lambda_i$ ), é constante no tempo e específico para cada agente.

Os modelos de Angle e de Chakraborti e Chakrabarti, após suas reformulações, tem suas dinâmicas descritas por uma distribuição exponencial para valores intermediários de renda, e uma distribuição lei de potência para altos valores de renda como mostra a equação

$$P(m) \propto m^{-(1+\nu)}. \quad (2.16)$$

É possível reformular os modelos multiplicativos citados até aqui, exceto o modelo de Bennati que é aditivo, a partir da equação 2.3, com o termo de fluxo de recursos dado por

$$\Delta m = \tilde{\omega}_i m_i - \tilde{\omega}_j m_j, \quad (2.17)$$

onde  $\tilde{\omega}_i m_i$  e  $\tilde{\omega}_j m_j$  são variáveis estocásticas que indicam a porcentagem real de recurso perdida pelos  $i$ -ésimo e  $j$ -ésimo agentes, respectivamente. As variáveis  $\tilde{\omega}_i$  e  $\tilde{\omega}_j$  são definidas a seguir para os demais casos:

- No modelo de Angle,  $\tilde{\omega}_i$  e  $\tilde{\omega}_j$  são funções não-lineares e independentes dos recursos dos agentes  $m_i$  e  $m_j$  e são escritas segundo as equações:

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_i = \eta(1 - \lambda_i) \equiv \epsilon \omega_i \\ \tilde{\omega}_j = (1 - \epsilon)(1 - \lambda_j) \equiv (1 - \epsilon)\omega_j \end{cases} \quad (2.18)$$

onde  $\epsilon$  é uma variável aleatória com uma densidade  $g(\epsilon)$ , usualmente  $U[0, 1]$  e  $\eta(m > 0) = 1$  com probabilidade  $p_0$  e  $\eta(m < 0) = 0$  com probabilidade  $1 - p_0$ .

- Para o modelo Chakraborti e Chakrabarti podemos escrever  $\tilde{\omega}_i$  e  $\tilde{\omega}_j$  como [22]:

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_i = \eta(m_j - m_i)\epsilon\omega_i \\ \tilde{\omega}_j = \eta(m_i - m_j)\epsilon\omega_j \end{cases} \quad (2.19)$$

onde  $\epsilon$  é uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo  $(0,1)$  e  $\tilde{\omega}_i$  é um número aleatório uniforme que pode assumir valores no intervalo  $(0, \omega_i]$ .

- O modelo de Dragulesco e Yakovenko é obtido quando  $\tilde{\omega}_i \rightarrow 1$  [22].

## 2.3 Modelo Heterogêneo e Adaptativo

Nos modelos tratados anteriormente, os parâmetros são regulados de maneira exógena, especialmente, a taxa de gasto de cada agente. Como forma de contornar tal fato, foi introduzido um modelo microscópico, no qual a troca de recursos está sujeita a um processo adaptativo, onde a taxa de gasto pode ser regulada individualmente, em função da sua quantidade de recursos.

No Modelo Heterogêneo Adaptativo [20], o sistema é fechado e composto por  $N$  agentes  $i = 1, 2, \dots, N$ , onde cada agente possui uma quantidade de renda  $m_i > 0$ , e a soma total destas quantidades é

$$M = \sum_i^N m_i. \quad (2.20)$$

A taxa de gasto  $\omega_i$  ( $0 < \omega_i < 1$ ) é o fator que determina a quantidade de recursos que será transferida do agente  $i$  para o agente  $j$ , que é escolhido aleatoriamente entre os  $N - 1$  agentes restantes. A taxa de gasto é atualizada a cada passo de Monte Carlo, de acordo com sua renda e de um parâmetro denominado inércia  $\mu_i$  ( $\mu_i = 0$  ou  $\mu_i = 1$ ), ligado a cada agente. A inércia pode ser entendida como a capacidade de um agente modificar sua taxa de gasto de acordo com mudanças externas. Após cada transação realizada, a quantidade final de recursos obtida por cada agente obedece as seguintes equações

$$\left\{ \begin{array}{l} m_i(t+1) = m_i(t) + \Delta m_{ij} \\ m_j(t+1) = m_j(t) - \Delta m_{ij} \\ \Delta m_{ij} = \omega_j m_j - \omega_i m_i. \end{array} \right. \quad (2.21)$$

O Modelo Heterogêneo e Adaptativo pode ser caracterizada de duas formas possíveis, de acordo com a variação percentual de recursos  $\alpha_i$  dos agentes

$$\alpha \equiv \frac{m_i(t+1)}{m_i(t)}, \quad (2.22)$$

onde essas duas formas foram denominadas respectivamente de Modelo Heterogêneo e Adaptativo-1 e Modelo Heterogêneo e Adaptativo-2, que serão descritos a seguir.

### 2.3.1 Modelo Heterogêneo e Adaptativo-1 (MHA-1)

Nesse caso, após uma transação o agente conserva uma fração da quantidade de recursos restante, sendo  $m_i(t+1) < m_i(t)$ , isto é, se  $(\alpha < 1)$ , haverá uma redução na taxa de gasto desse agente  $\omega_i(t+1) < \omega_i(t)$ . Caso ocorra o oposto, quer dizer, se  $m_i(t+1) > m_i(t)$  ( $\alpha \geq 1$ ), haverá um incremento na taxa de gasto do agente  $\omega_i(t+1) > \omega_i(t)$  na próxima negociação. A principal característica do modelo MHA-1 é que os parâmetros da renda  $m_i(t)$  e da taxa de gasto  $\omega_i(t)$  estão positivamente correlacionados. Pode-se representar matematicamente esse comportamento pelas equações,

$$\omega_i(t+1) = \begin{cases} \alpha\omega_i(t), & \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha}\omega_i(t) + (1 - \frac{1}{\alpha}), & \alpha \geq 1. \end{cases} \quad (2.23)$$

Podemos observar três situações limites:

1. Se após uma transação um agente possuir  $m_i(t+1) \gg m_i(t)$ , seu comportamento será aumentar sua taxa de gasto para  $\omega_i \approx 1$ .
2. Se depois de uma transação o agente possuir  $m_i(t+1) = m_i(t)$ , sua atitude será manter sua taxa de gasto  $\omega_i(t+1) = \omega_i(t)$ .
3. Por fim, se após uma negociação acontecer que  $m_i(t+1) \ll m_i(t)$ , sua reação será diminuir sua taxa de gasto para  $\omega_i(t+1) \approx 0$ .

### 2.3.2 Modelo Heterogêneo e Adaptativo-2 (MHA-2)

Nesta situação, se após uma transação o agente possuir uma renda  $m_i(t+1) < m_i(t)$ , ou seja, se  $\alpha_i < 1$ , acontecerá um aumento na sua taxa de gasto  $\omega_i(t+1) > \omega_i(t)$ . Caso ocorra o oposto, se após uma negociação  $m_i(t+1) \geq m_i(t)$  a atitude do agente também será aumentar sua taxa de gasto  $\omega_i(t+1) > \omega_i(t)$  para a próxima interação. No caso onde  $\alpha < 1$  os parâmetros renda  $m_i$  e taxa de gasto  $\omega_i$  são negativamente correlacionados e no

caso onde  $\alpha \geq 1$  os parâmetros são positivamente correlacionados, e esse comportamento pode ser descrito pelas equações:

$$\omega_i(t+1) = \begin{cases} \alpha\omega_i(t) + (1-\alpha), & \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha}\omega_i(t) + (1-\frac{1}{\alpha}), & \alpha \geq 1. \end{cases} \quad (2.24)$$

Da mesma forma que foi observado no modelo MHA-1, o modelo MHA-2 também apresenta três situações limites:

1. Após uma transação, se um agente possuir renda  $m_i(t+1) \gg m_i(t)$ , seu comportamento será aumentar a sua taxa de gasto para  $\omega_i(t+1) \approx 1$ .
2. Se, após a negociação, o agente possuir renda  $m_i(t+1) = m_i(t)$ , a reação do agente é manter sua taxa de gasto  $\omega_i(t+1) = \omega_i(t)$ .
3. Finalmente após a transação o agente tiver renda  $m_i(t+1) \ll m_i(t)$ , sua atitude será aumentar a sua taxa de gasto  $\omega_i(t+1) \approx 1$ .

Neste capítulo abordamos os principais modelos presentes na literatura. No próximo capítulo iremos tratar de alguns aspectos espaciais da distribuição de renda sob a perspectiva econômica, assim como apresentar uma generalização do modelo heterogêneo adaptativo [20] que analisa essas características.

# Capítulo 3

## Aspectos Espaciais da Distribuição de Renda

No capítulo 2 apresentamos os principais modelos presentes na literatura, os quais analisam a evolução temporal da distribuição de recursos, a fim de compreender como em uma economia fechada as distribuições de renda são concebidas para diversas escalas de tempo e regimes. Um enorme leque de modelos pode ser encontrado na literatura, desde aqueles que utilizam equações diferenciais com o intuito de descrever o regime estacionário da distribuição [25] até aqueles que introduzem aspectos espaciais e topológicos do sistema econômico [26, 27]. Neste capítulo iremos tratar de alguns aspectos espaciais da distribuição de renda sob a ótica econômica e apresentar uma generalização do modelo heterogêneo adaptativo [20] que engloba aspectos espaciais da distribuição de renda.

Ainda não se chegou a um consenso sobre o que pode causar a desigualdade de renda e nem quais políticas públicas são eficazes para reduzi-la, visto que a mesma é uma característica importante de muitos países em desenvolvimento. Através de alguns indícios, percebe-se que com o rápido crescimento econômico, a desigualdade espacial nos países em desenvolvimento tende a aumentar [3, 28, 29].

Na pesquisa econômica, uma grande atenção tem sido dada a desigualdade da distribuição de renda, visto que muitos livros e artigos foram publicados com o intuito de investigar o quanto é desigual a distribuição de recursos. A utilização de métodos espaciais para elucidar



a desigualdade da distribuição regional de renda vem sendo aplicado a um pequeno número de países devido a escassez de dados, embora venha ocorrendo um crescimento em relação ao número de estudos com uma perspectiva espacial.

Uma coleção de dados fiscais individuais de contribuintes e informações geográficas são comumente utilizadas por economistas para a investigação da desigualdade espacial de renda, visto que tais dados permitem a averiguação dos impactos da desigualdade [30, 31, 32]. Além do mais, para mensurar os efeitos entre as medidas de desigualdade e os diferentes níveis de renda os pesquisadores utilizam regressões econométricas espaciais.

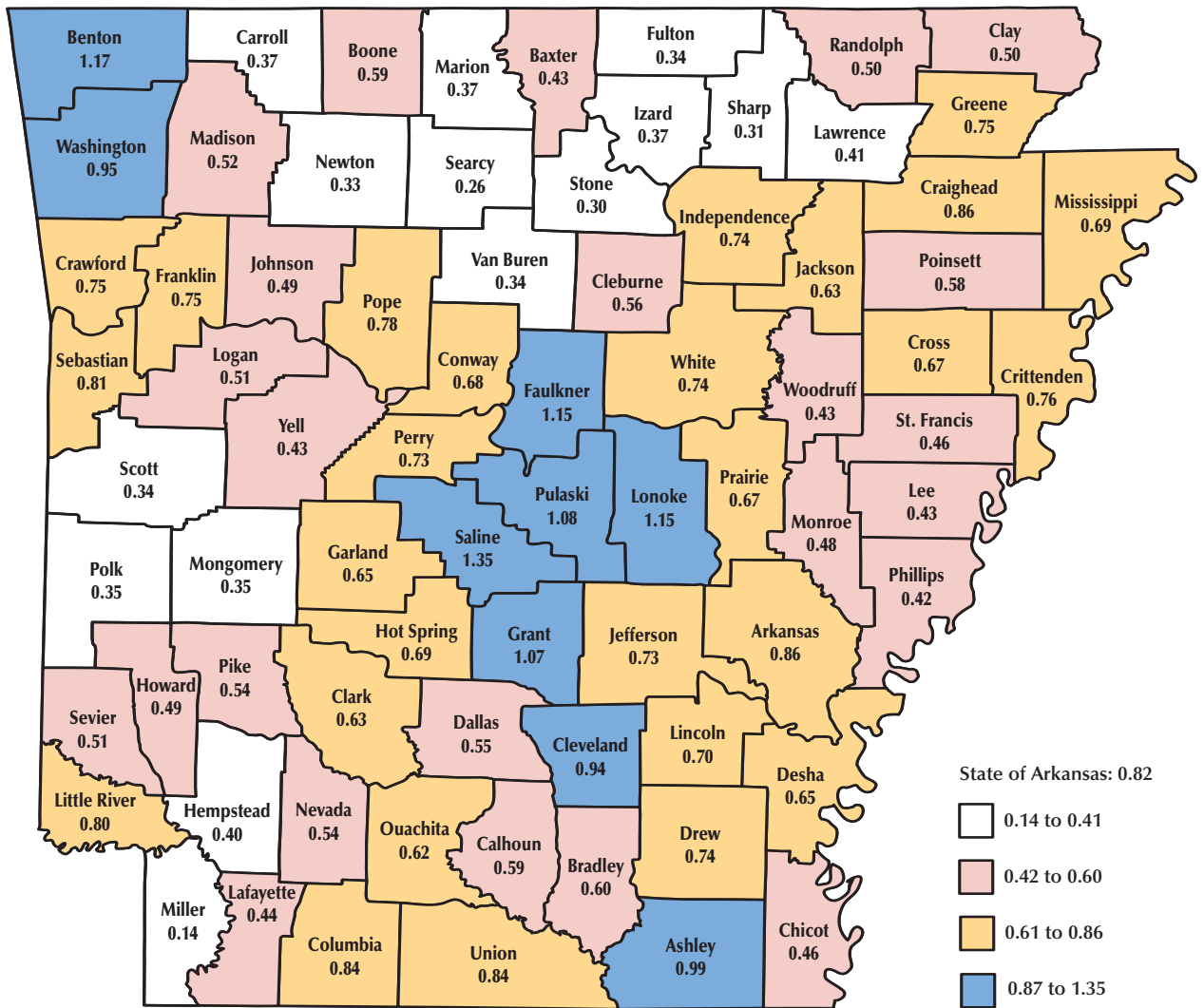
De acordo com alguns economistas, o sistema habitacional é a principal chave de ligação entre a segregação espacial e a desigualdade de renda, sendo que na competição por melhores vizinhanças, os grupos de menores rendas podem ser superados pelos de maior rendimento, uma vez que as famílias mais ricas podem inserir consideráveis melhorias na vizinhança, como por exemplo, comércio, segurança, saneamento básico, entre outros [32, 33, 34]. O fracasso parcial das políticas que promovem a redistribuição de renda e a deterioração da coesão social são causados pelo gradativo distanciamento espacial, juntamente com a crescente desigualdade de renda entre regiões [32].

John P. Shelnett e Vicent W. Yao [3] realizaram um estudo onde analisaram a distribuição espacial de renda nos condados do estado de Arkansas. Os autores utilizaram dados de declarações de imposto de renda individuais e desenvolveram uma medida alternativa de desigualdade de renda. Eles utilizaram uma proporção  $\varphi$  de 25% dos domicílios que pagam mais impostos com relação aos 25% que pagam menos impostos, sendo que tais dados oferecem medidas válidas da razão de famílias ricas e pobres. De acordo com essa proporção, a diferença de renda diminui quanto maior for o número de famílias ricas e menor o número de famílias pobres, porém, na situação oposta a diferença de renda aumenta. A Figura 3.1 apresenta um mapa da distribuição espacial da desigualdade de renda dos 75 condados do Arkansas em 2003.

Através do mapa, podemos observar que existem seis condados nos quais a proporção é maior que 1, e os condados das regiões norte e oeste normalmente tem baixa desigualdade de renda, assim como um baixo patamar de renda. De acordo com os autores, o estado do Arkansas possui uma distribuição de recursos mais desigual nos condados centrais, do

Figura 3.1: Proporção dos 25% dos domicílios que pagam mais impostos em relação aos 25% dos domicílios que pagam menos impostos. Extraído de [3].

**Ratio of Households in the Top 25 Percent to the Bottom 25 Percent of Tax Brackets, 2003**



noroeste, e em alguns da região sul. Eles certificam que há uma correlação positiva entre o padrão espacial e o crescimento econômico, e que o padrão da desigualdade é motivado por outros fatores, tais como, condições no mercado de trabalho, distribuição demográfica e nível de instrução. Segundo os resultados preliminares, o crescimento da área e a concentração urbana foram apontados como os principais estimuladores da desigualdade de renda e sua distribuição espacial.

Vale salientar que as proporções decaem de forma ligeiramente isotrópica em torno dos condados de máxima proporção, como em uma estrutura de camadas, tornando-se mais visível quando observamos os condados em azul, de máxima proporção ( $0.87 \leq \varphi \leq 1.35$ ), envoltos pelos condados em amarelo ( $0.61 \leq \varphi \leq 0.86$ ), de proporção intermediária, seguido pelos condados em rosa ( $0.42 \leq \varphi \leq 0.60$ ).

Um outro estudo foi realizado pelo economista Taisei Kaizoji [31] onde foi usado um banco de dados de contribuintes de alta renda do Japão para investigar como são criados as chamadas ruas e bairros residências de classe alta. O autor analisou as flutuações no rendimento pessoal de cerca de 80 mil contribuintes de alta renda, por dois anos seguidos, encontrando uma distribuição lei de potência com um expoente próximo de 2, a qual descrevia bem a distribuição cumulativa complementar de grandes rendimentos e o rendimento total dessas pessoas para cada uma das cidades. Os resultados empíricos revelaram que os grandes ganhadores de renda tendem a migrar para um pequeno número de cidades, e indicam que essa concentração de pessoas em um número mínimo de cidades tem como consequência as ruas e bairros residências de classe alta.

### 3.1 Modelo Heterogêneo e Adaptativo com Estrutura Espacial

Nesta seção apresentamos uma generalização do modelo heterogêneo e adaptativo [20], onde nos motivamos pelos aspectos discutidos na seção anterior e pelos modelos de muitos agentes apresentados no Capítulo 2. A fim de investigar o papel da estrutura espacial levamos em consideração, interações de curto e longo alcance. Este modelo constitui-se de um autômato celular bidimensional [35, 36] com condição de contorno periódica executado em uma rede quadrada de tamanho linear  $L$  com o intuito de simular o processo espacial da distribuição de renda. A dinâmica acontece em um sistema fechado composto de  $L^2$  sítios (agentes)  $i = 1, 2, \dots, L^2$  e recurso total  $M$ , individualizados por uma quantidade de recursos  $m_i$ , uma taxa de gasto  $\omega_i$  e por uma mobilidade  $\mu_i$ , podendo ser descrita pelos passos a seguir:

- Passo 1

Na condição inicial associamos a cada agente (sítio) uma quantidade de recursos fixa ( $m_i = 1, \forall i$ ), uma taxa de gasto  $\omega_i$ , uniformemente distribuída no intervalo ( $0 < \omega_i < 1$ ) e uma mobilidade  $\mu_i$  ( $0 \leq \mu_i \leq 1$ ).

- Passo 2

Uma fração  $q$  do total dos agentes tem sua renda ( $m_i$ ) e taxa de gasto ( $\omega_i$ ) positivamente correlacionadas (Tipo1), enquanto que, uma fração  $1 - q$  tem renda ( $m_i$ ) e taxa de gasto ( $\omega_i$ ) negativamente correlacionadas (Tipo2).

- Passo 3

Uma fração  $p$  do total de agentes tem sua mobilidade ( $\mu_i$ ) adaptável, ao mesmo tempo que uma fração  $1 - p$  tem mobilidade ( $\mu_i$ ) não adaptável.

- Passo 4

A dinâmica inicia quando um agente  $i$  escolhido aleatoriamente transfere uma fração  $\omega_i$  do seu recurso para um dos seus vizinhos  $j$ , escolhido aleatoriamente, e recebendo simultaneamente uma quantidade  $\omega_j m_j$ . Após a transação, o raio de interação dos agentes depende do seu tipo e da renda, sendo descrito pela seguinte equação

$$R(m_i) = 1 + \left( \frac{L}{2} - 1 \right) \times \frac{m_i - m_{min}}{m_{max} - m_{min}} \quad (3.1)$$

onde  $m_{min}$  e  $m_{max}$  são o mínimo e o máximo valor de renda do sistema. Os agentes que fazem parte da fração  $p$ , podem se adaptar em quatros cenários possíveis que descreveremos a seguir:

- ▶ Crescente: a mobilidade cresce proporcionalmente a variação de renda, tendo ela aumentado ou não.
- ▶ Decrescente: a mobilidade decresce proporcionalmente a variação de renda, tendo ela aumentado ou não.
- ▶ Positivo: ocorre aumento da mobilidade com o crescimento da renda e decréscimo com a redução da renda.

► Negativo: há aumento de mobilidade com a diminuição da renda e redução com o crescimento da renda.

O processo é repetido  $L^2$  vezes ao final do qual é contabilizado um passo de Monte Carlo. Devido a modificação da taxa de gasto com o decorrer da dinâmica, alguns parâmetros globais foram inseridos a fim de caracterizar o sistema, sendo eles, a taxa de gasto média  $\langle \omega \rangle$

$$\langle \omega \rangle = \frac{1}{L^2} \sum_{i=1}^{L^2} \omega_i \quad (3.2)$$

e o coeficiente de Gini, que é calculado operacionalmente [37] como:

$$G = \frac{1}{2L^4} \sum_{i \neq j}^{L^2} |m_i - m_j|. \quad (3.3)$$

Com o intuito de caracterizar a distribuição de renda no estado estacionário, definimos a renda média  $\langle m(r) \rangle$  dos sítios localizados a uma distância  $r$  do sítio com máxima renda  $m_{max}$ ,

$$\langle m(r) \rangle = \frac{1}{8R} \sum_{i=1}^{8R} m_i(r), \quad (3.4)$$

a média do quadrado da renda  $\langle m^2(r) \rangle$  expressa de acordo com a equação

$$\langle m^2(r) \rangle = \frac{1}{8R} \sum_{i=1}^{8R} m_i^2(r) \quad (3.5)$$

e por fim a variância

$$\Delta m^2(r) = \langle m^2(r) \rangle - \langle m(r) \rangle^2. \quad (3.6)$$

Inspirados no trabalho realizado por Iglesias e Pianegonda [27] fizemos a análise espacial. Nesse estudo, os autores determinaram a média temporal da correlação espacial  $C^2(X = |x - x_0|) = \langle w(X)^2 \rangle_x - \langle w \rangle^2$ , onde  $x_0$  é o local escolhido como origem e  $w$  é a renda, para os sítios com renda máxima e média em uma rede unidimensional com 1001 agentes e  $5 \times 10^3$  passos de tempo.

Em nosso estudo, para calcularmos a correlação espacial, utilizamos a função de correlação  $C(r)$  definida por

$$C(r) \equiv \frac{\langle m^2(r) \rangle - \langle m(r) \rangle^2}{\Delta m^2}, \quad (3.7)$$

onde  $\Delta m^2$  é a variância de todo o sistema dada por

$$\Delta m^2 = \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2. \quad (3.8)$$

Anteriormente definimos quantidades que são específicas para cada configuração inicial. A fim de garantir a relevância estatística dos resultados, definimos as quantidades para  $K$  configurações distintas, de acordo com as equações:

$$[\omega] \equiv \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \langle \omega \rangle_i, \quad [G] \equiv \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K G_i \quad (3.9)$$

$$[m(r)] \equiv \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \langle m(r) \rangle_i, \quad [\Delta m^2(r)] \equiv \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K [\Delta m^2(r)]_i. \quad (3.10)$$

Visto que já apresentamos o modelo e sua dinâmica, nos próximos capítulos serão expostos os resultados obtidos e suas análises.

# Capítulo 4

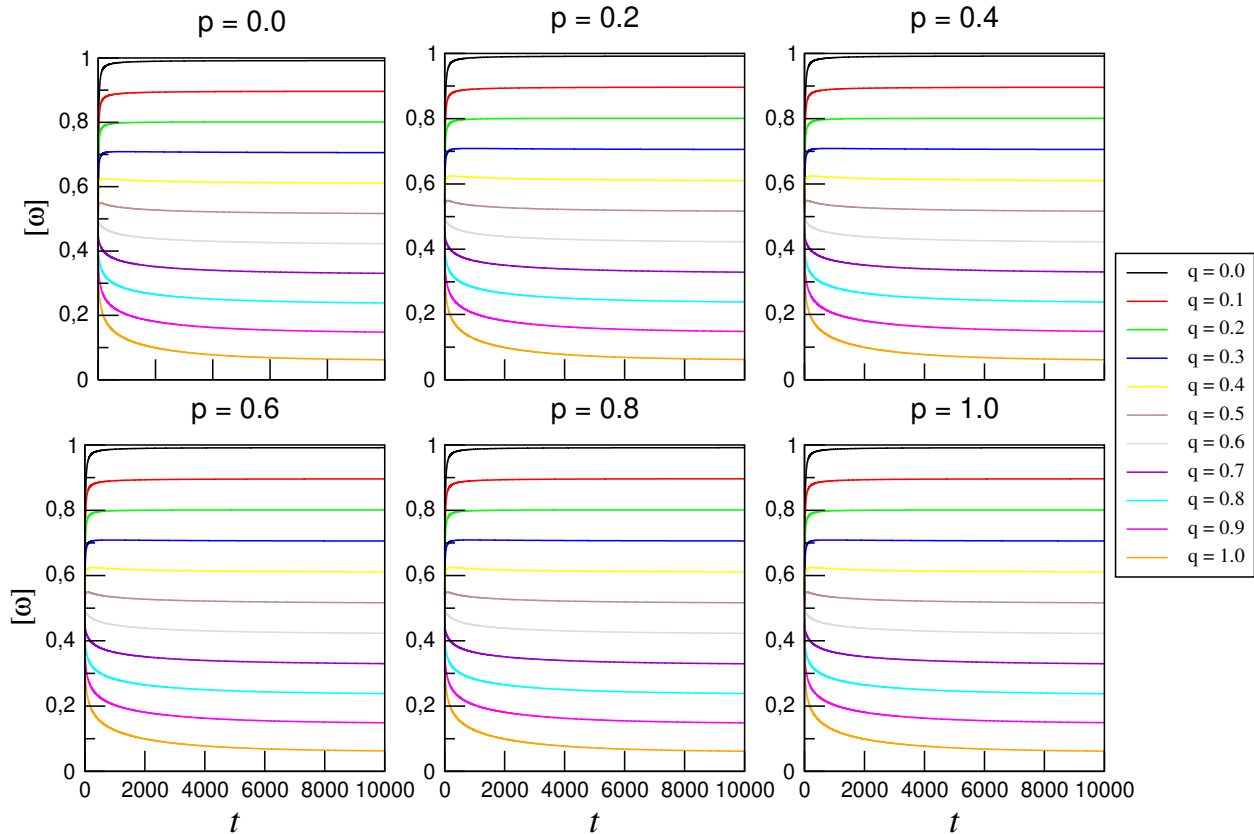
## Correlações Espaciais

Neste capítulo apresentaremos os resultados relacionados as correlações espaciais do modelo heterogêneo e adaptativo. Todas as simulações foram realizadas com 1000 amostras, numa escala de tempo de 10000 passos Monte Carlo (1 passo de Monte Carlo é o tempo necessário para que todos os agentes efetuem ao menos uma transação) no qual o sistema atinge o estado estacionário, de forma que as quantidades observadas atingem um valor constante dentro da barra de erro. A rede possui tamanho linear  $L = 100$ , correspondendo a um total de 10000 agentes, cada qual possuindo inicialmente uma unidade arbitrária de renda, mobilidade e taxa de gasto.

Apresentaremos inicialmente os gráficos associados aos valores médios da taxa de gasto  $[\omega]$  como função do tempo ( $t$ ) para os quatro casos de correlação entre renda e mobilidade, onde cada curva representa a média amostral. O código de cores corresponde aos valores de  $q$ , onde representam a fração de agentes positivamente correlacionados e  $p$  a fração de agentes que possuem mobilidade adaptável.

Na Figura 4.1 apresentamos o comportamento da taxa de gasto  $[\omega]$  em função do tempo para o caso crescente. Para valores de  $q$  entre 0 e 0.5 temos taxas de gasto com valores aproximadamente de  $1 - q$ . Já para valores entre 0.6 e 1.0, a taxa de gasto tem um comportamento decrescente e em seguida atinge o estado estacionário. Para o valor de  $q = 0$ , onde todos os agentes são negativamente correlacionados, a taxa de gasto cresce monotonicamente com o tempo e alcança um valor muito próximo a 1.

Figura 4.1: Comportamento da taxa de gasto  $[\omega]$  em função do tempo, para as frações de agentes com mobilidade adaptável  $p$  correspondente ao caso crescente.



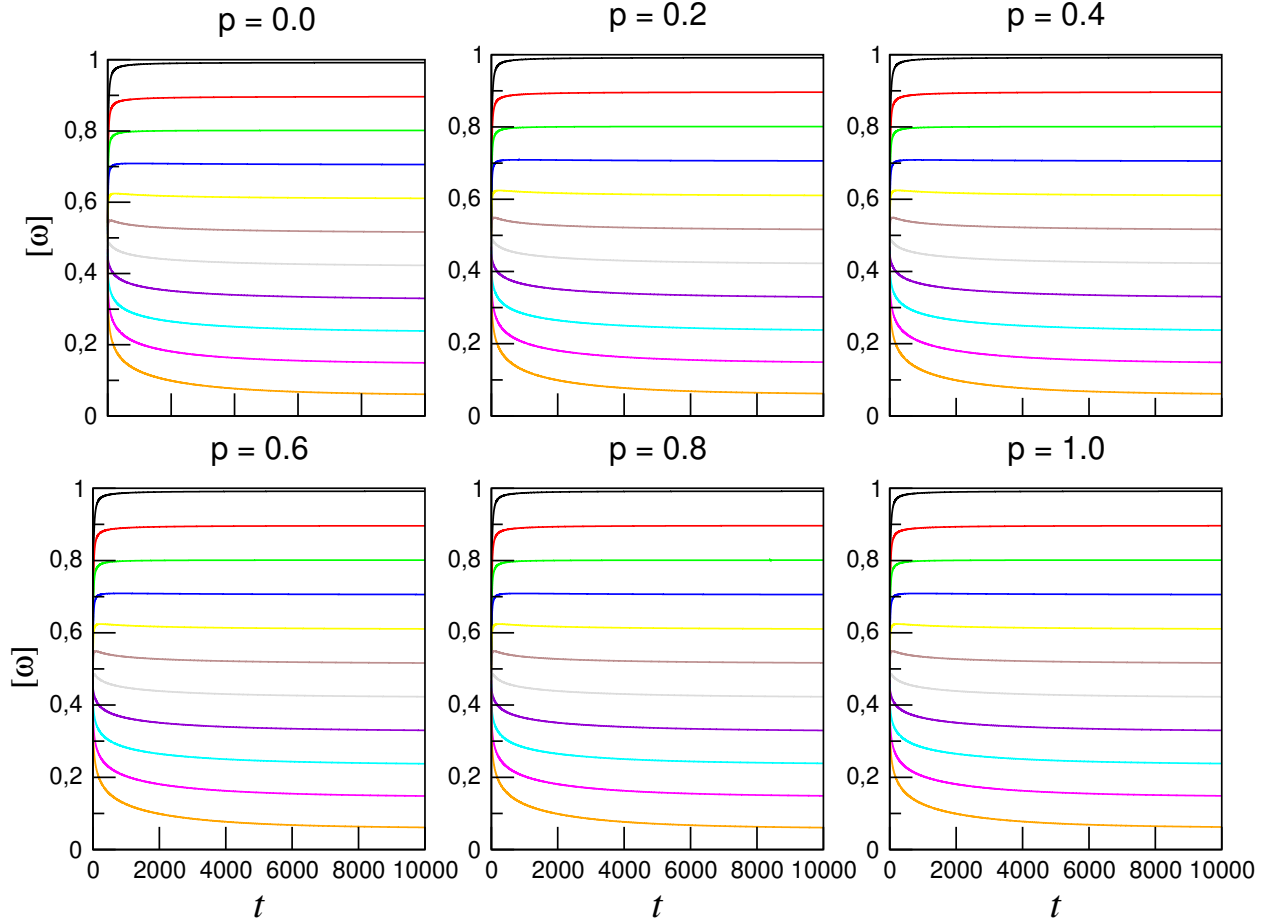
Na Figura 4.2 exibimos o comportamento da taxa de gasto  $[\omega]$  em função do tempo para o caso decrescente. Podemos observar um comportamento semelhante ao da Figura 4.1, onde para  $q = 0$ , independente de  $p$ , a taxa de gasto cresce ligeiramente para um valor muito próximo a 1. Para valores de  $q$  entre 0.5 e 1, o comportamento é levemente decrescente, e posteriormente atinge o estado estacionário.

Na Figura 4.3 apresentamos o comportamento da taxa de gasto  $[\omega]$  em função do tempo para o caso negativo. Podemos ver que para os valores de  $p = 0$  e  $p = 0.2$ , a taxa de gasto vai ligeiramente para 1 quando  $q = 0$ , sendo que nessa situação todos os agentes são negativamente correlacionados. Nos demais quadros vemos o comportamento se assemelha aos casos anteriores.

Na Figura 4.4 exibimos o comportamento da taxa de gasto  $[\omega]$  em função do tempo para



Figura 4.2: Comportamento da taxa de gasto  $[\omega]$  em função do tempo, para as frações de agentes com mobilidade adaptável  $p$  correspondente ao caso decrescente.

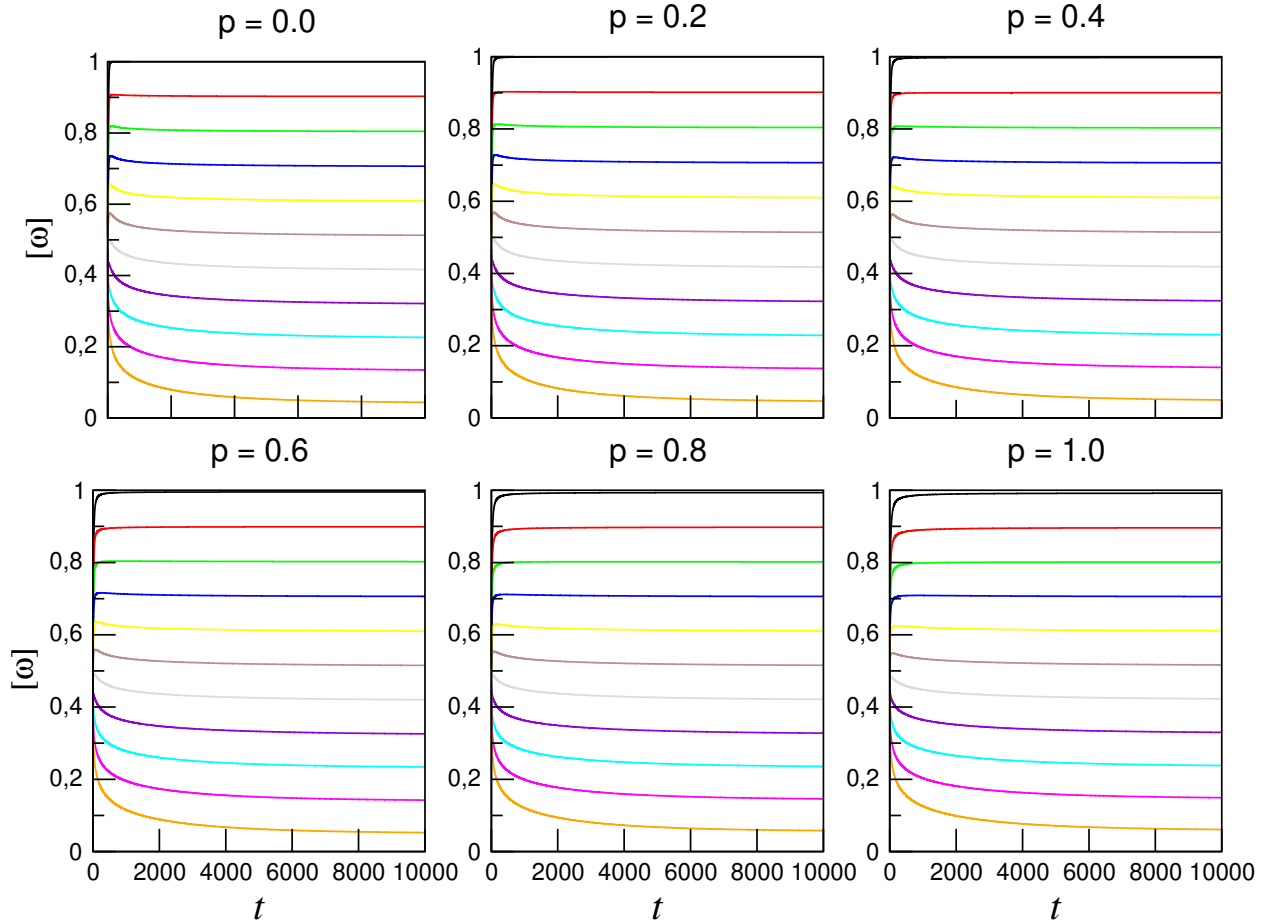


o caso positivo. Esse cenário se assemelha ao caso negativo, onde a taxa de gasto cresce rapidamente para 1 quando  $q = 0$  para  $p = 0$  e  $p = 0.2$ . e para os demais quadros, o comportamento é parecido com os casos mostrados anteriormente. Então percebemos que a taxa de gasto se comporta de tal maneira que independe de  $p$ , fração de agente com mobilidade adaptável, e depende de  $q$ , fração de agentes positivamente correlacionados.

Devido ao alto custo computacional, não mostraremos a séries temporais para Índice de Gini  $[G]$ . Em nossos cálculos computacionais, o Índice de Gini depende de  $L^4$ , onde  $L$  é o tamanho linear da rede, assim, tornando-se inviável de se calcular tempo a tempo.

Na Figura 4.5 exibimos os resultados para o estado estacionário do Índice de Gini como função da taxa de gasto, num espaço de parâmetros  $([\omega], [G])$  para os quatro casos de cor-

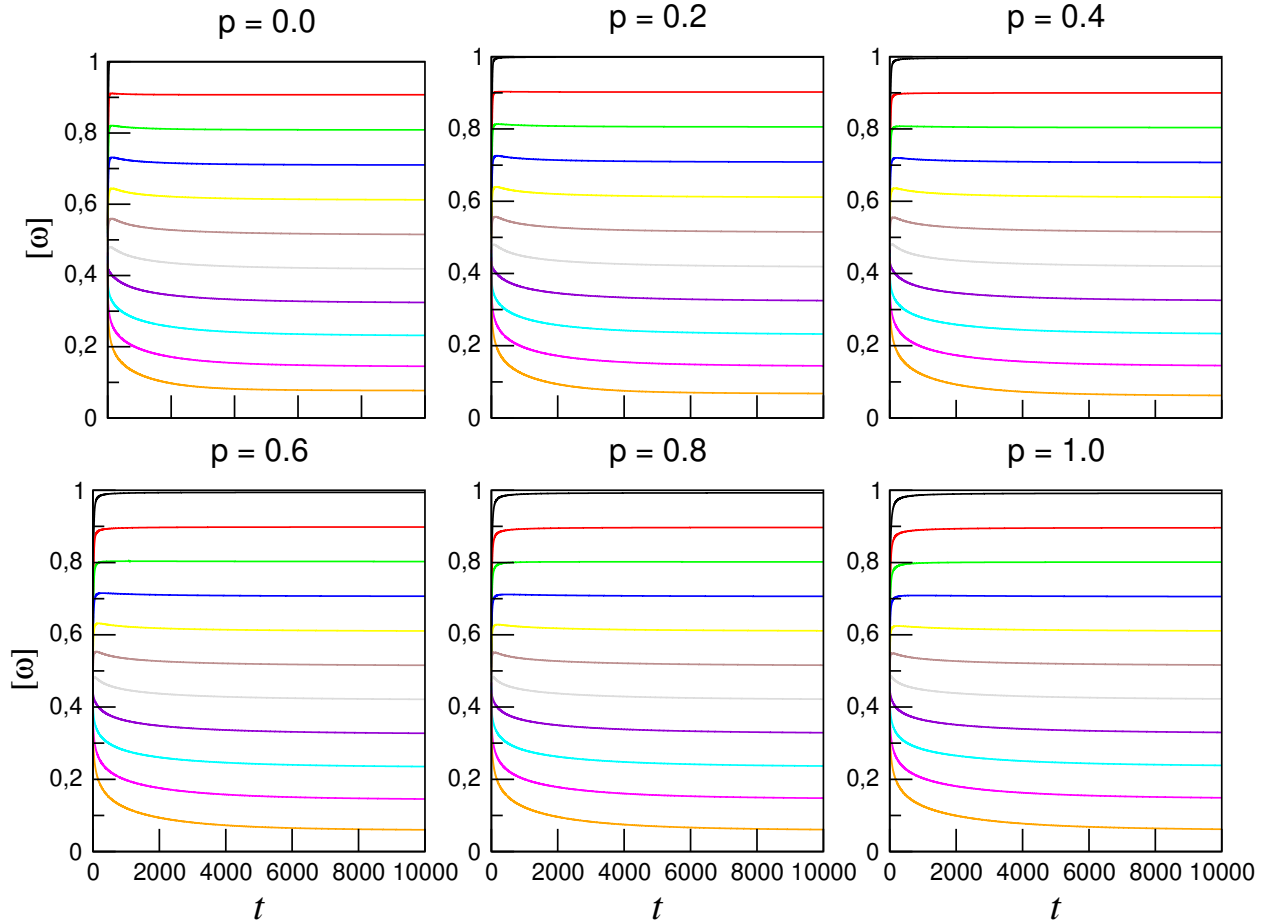
Figura 4.3: Comportamento da taxa de gasto  $[\omega]$  em função do tempo, para as frações de agentes com mobilidade adaptável  $p$  correspondente ao caso negativo.



relação entre mobilidade e renda, onde cada curva está associada a um valor da fração de agentes que possuem mobilidade adaptável  $p$  e os pontos de cada curva correspondem a uma fração  $q$ , que está compreendida no intervalo  $0 \leq q \leq 1$  em passos  $dq = 0.1$ . No interior de cada quadro estamos utilizando as letras *A*, *B*, *C* e *D* para identificar os casos como sendo (A) crescente, (B) decrescente, (C) negativo e (D) positivo.

Percebemos que para os casos crescente e decrescente, para todos os valores de  $p$ , o menor índice de Gini é dado quando  $q = 0$ , ou seja, quando todos os agentes são negativamente correlacionados. Para os casos negativo e positivo, o mesmo acontece exceto para  $p = 0$ , onde o menor índice de Gini é dado quando  $q = 1$ , situação onde todos os agentes são positivamente correlacionados. Por outro lado, o maior valor para o índice de Gini é encontrado em todos

Figura 4.4: Comportamento da taxa de gasto  $[\omega]$  em função do tempo, para as frações de agentes com mobilidade adaptável  $p$  correspondente ao caso positivo.

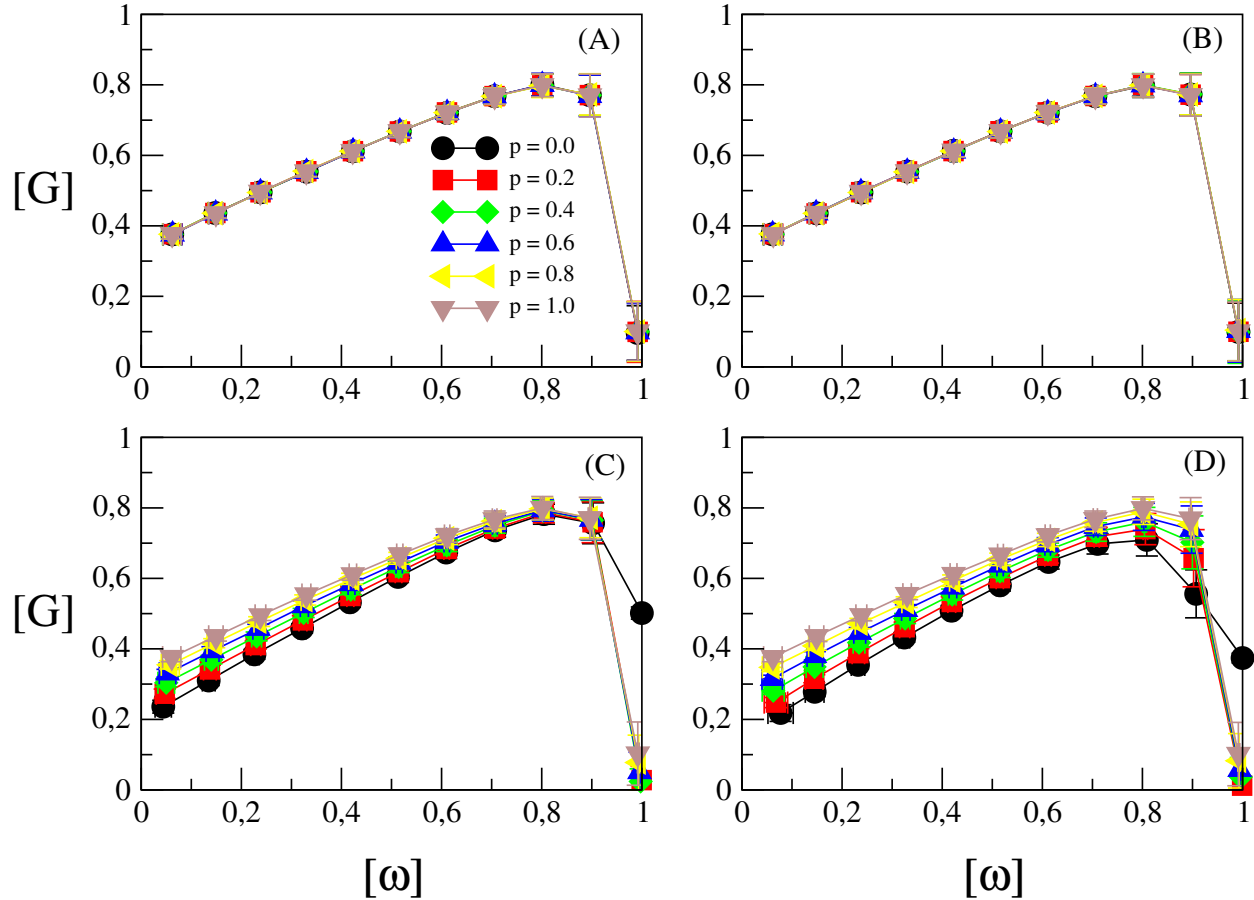


os casos em  $q = 0.2$ , sendo que nos casos negativo e positivo isso acontece quando  $p = 1$ .

Na Figura 4.6 confrontamos as características do caso decrescente da Figura 4.5 com dados reais para as médias do coeficiente de Gini e da taxa de gasto de 132 países, do período de 1990 à 2009 (círculos pretos) segundo o Banco Mundial [17, 18]. A particularidade deste resultado, é o fato de que poucos pontos extraídos do banco de dados encontram-se fora da região delimitada pelas curvas, sendo que nosso modelo engloba o maior e o menor índice de Gini.

Apesar do fato da desigualdade de renda ser geralmente medida pelo índice de Gini, alguns estudos indicam que a relação entre a desigualdade e outros fatores, tal como o crescimento econômico a nível estadual é diferente da relação a nível urbano [28]. Por este motivo o

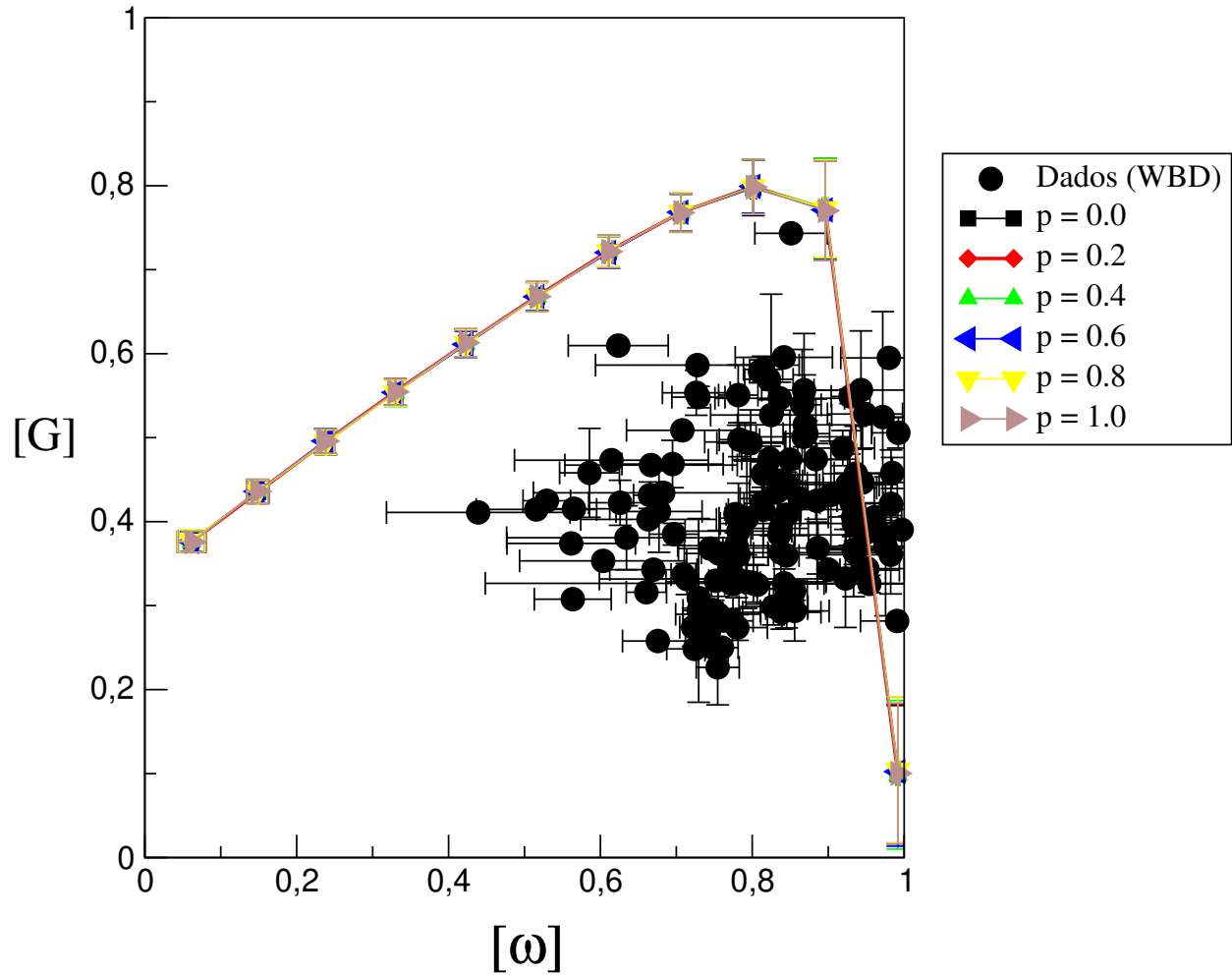
Figura 4.5: Comportamento do Índice de Gini  $[G]$  em função da taxa de gasto  $[\omega]$  para os quatro casos de correlação entre mobilidade e renda.



índice de Gini não seria adequado para medir a desigualdade a nível urbano [27]. Algumas medidas alternativas foram propostas com o intuito de quantificar a desigualdade de renda, como por exemplo as introduzidas por John P. Shelnut e Vicent W. Yao [3], e S. Pianegonda e J. R. Iglesias [27] citadas no capítulo 3.

O modelo [27] compõe-se de uma estrutura unidimensional com  $N$  sítios e condição de contorno periódica, onde cada sítio equivale a um agente econômico, a cada agente atribui-se um parâmetro de riqueza que corresponde ao seu bem-estar. Na condição inicial este parâmetro corresponde a um número que está entre 0 e 1 distribuído aleatoriamente entre os agentes. A desigualdade da distribuição espacial de renda foi quantificada através da determinação da média temporal da correlação espacial  $C^2(X = |x - x_0|) = \langle w(X)^2 \rangle_x -$

Figura 4.6: Gráfico do comportamento do Índice de Gini  $[G]$  em função da taxa de gasto  $[\omega]$  para o caso decrescente, em comparação com as médias para o coeficiente de Gini e a taxa de gasto dos 132 países, no período de 1990 à 2009 (círculos pretos).



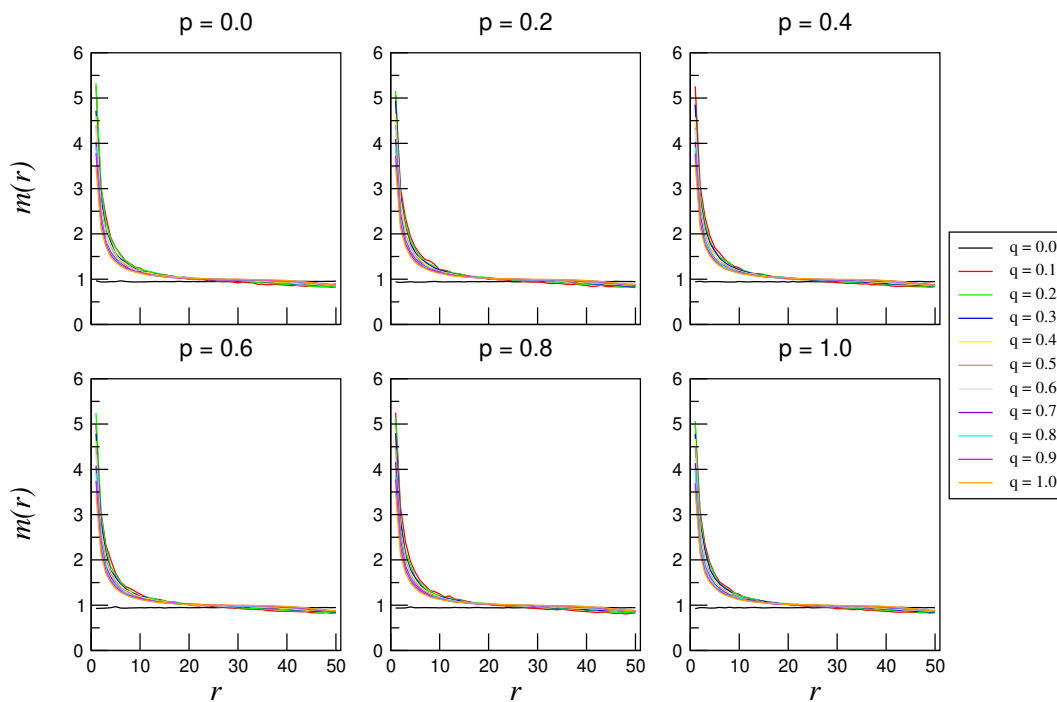
$\langle w \rangle^2$ , onde  $x_0$  é o local escolhido como origem e  $w$  é a renda, para os sítios com renda máxima e média em uma rede unidimensional com 1001 agentes e  $5 \times 10^3$  passos de tempo.

Motivados pelo estudo realizado por S. Pianegonda e J. R. Iglesias desenvolvemos um mecanismo para descrever a distribuição espacial de renda no estado estacionário e sua variância, como descrito no Capítulo 3 Seção 3.1. Definimos a renda média ( $m(r)$ ) dos agentes localizados a uma distância  $r$  do agente com maior renda ( $m_{max}$ ). Fisicamente, esta quantidade possui características similares aquelas ligadas a função de distribuição radial  $g(r)$ , definida quanto a caracterização estrutural de sólidos e líquidos, sendo interpretada

como uma medida da correlação entre as partículas [38, 39, 40].

Nas Figuras 4.7, 4.8, 4.9 e 4.10 exibimos os gráficos do comportamento da renda média como função de  $r$  para os quatro casos de correlação entre renda e mobilidade, onde em cada gráfico é fixado uma fração  $q$ , que está compreendido no intervalo  $0.0 \leq q \leq 1.0$  em passos  $dq = 0.1$ .

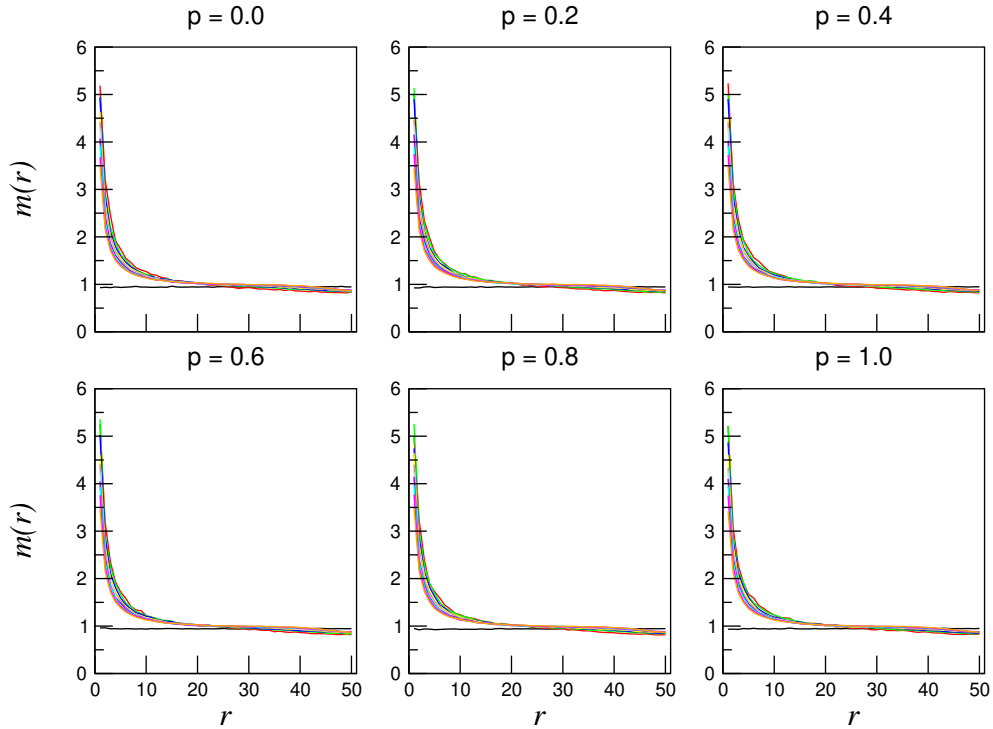
Figura 4.7: Gráficos da renda média dos agentes localizados a uma distância  $r$  do agente com renda máxima correspondente ao caso crescente.



Analisando as figuras, percebemos que os quatro casos tem comportamentos semelhantes, dessa forma notamos que a renda média ( $m(r)$ ) diminui com a distância radial do agente de renda máxima até atingir um valor constante, exceto para o valor de  $q = 0.0$  onde todos os agentes são negativamente correlacionados. Para essa exceção observamos uma distribuição homogênea de renda, pelo fato de que para esse valor de  $q$  os quatro casos apresentam o menor valor para o índice de Gini como mostrado na Figura 4.5.

Nas Figuras 4.11, 4.12, 4.13 e 4.14 apresentamos os gráficos da variância da renda média como função de  $r$  para os quatro casos de correlação entre renda e mobilidade. As flutuações medem o nível de heterogeneidade da renda da vizinhança, ou seja, o quanto a renda é diversificada em uma determinada distância  $r$  do agente de maior renda. Para todos os

Figura 4.8: Gráficos da renda média dos agentes localizados a uma distância  $r$  do agente com renda máxima correspondente ao caso decrescente.



casos, notamos um decrescimento da dispersão com a distância radial, exceto para  $q = 0.0$ , onde a dispersão tem um comportamento constante.

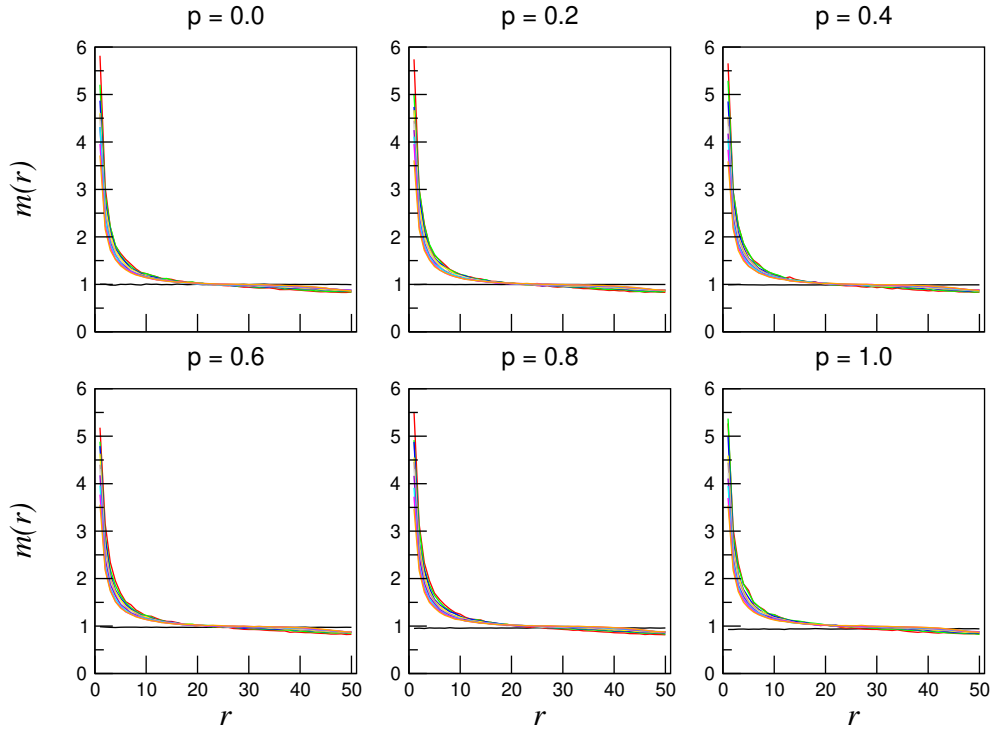
Como a variância diminui à medida em que nos afastamos do agente de maior renda, concluímos que as rendas diminuem com  $r$ , e simultaneamente, os valores da renda são muito próximos entre os agentes que estão a mesma distância radial indicando certa homogeneidade. Este resultado corrobora com os aspectos apresentados no estudo de John P. Shelnett e Vicent W. Yao descrito no Capítulo 3 [3].

Investigações anteriores realizadas por S. Pianegonda e J. R. Iglesias [27] apontam uma relação tipo lei de potência entre a correlação espacial em torno dos indivíduos de máxima e média renda. Adaptando a mesma metodologia para o desvio quadrático médio definido anteriormente, sugerimos a relação

$$\Delta m^2(r) \approx r^{-\lambda}. \quad (4.1)$$

Um comportamento típico das regressões realizadas com a utilização da Equação 4.1 é exibido na Figura 4.15 para o caso decrescente quando  $p = 0.4$ .

Figura 4.9: Gráficos da renda média dos agentes localizados a uma distância  $r$  do agente com renda máxima correspondente ao caso negativo.



A Figura 4.16 apresenta o comportamento dos expoentes das regressões  $\lambda$  em função de  $q$ , realizadas sobre as variâncias para os quatro casos de correlação entre renda e mobilidade. Podemos observar que o menor expoente é obtido quando  $q = 0.0$ , exceto para o caso positivo. É possível perceber um comportamento monotonicamente decrescente a partir de  $q = 0.1$ , exceto para o caso positivo, acrescentando a observação que o comportamento é praticamente independente de  $p$ .

Podemos observar que os valores de  $0 < q \leq 1$  produzem o comportamento limitante do expoente  $0.55 < \lambda < 0.62$  enquanto que  $q = 0.0$  corresponde a  $\lambda = 0.0$  exceto para os casos negativo e positivo com  $p = 0.0$ . É importante ressaltar que o caso  $q = 1.0$  associado ao valor  $\lambda \approx 0.55$  corresponde ao valor obtido por [27] em sua análise em torno do agente de máxima renda, enquanto o caso  $q = 0.0$  ( $p \neq 0$ ) associado ao valor  $\lambda \approx 0.0$  corresponde a mesma situação em torno do indivíduo de renda média.



Figura 4.10: Gráficos da renda média dos agentes localizados a uma distância  $r$  do agente com renda máxima correspondente ao caso positivo.

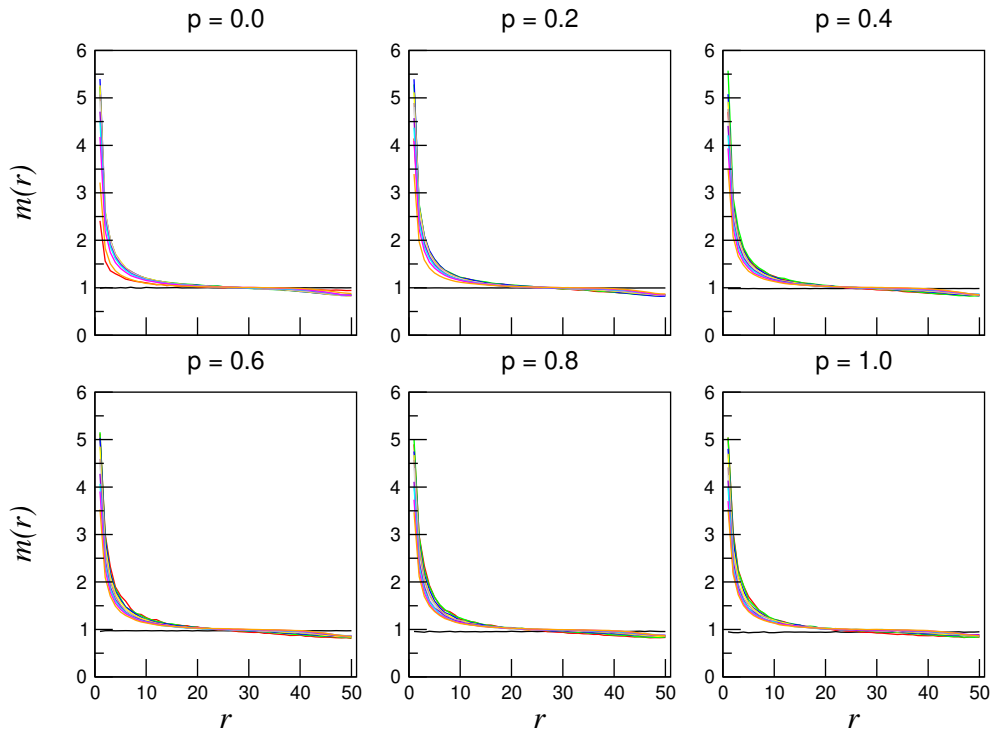


Figura 4.11: Gráficos da variância da renda média dos agentes localizados a uma distância  $r$  do agente com renda máxima correspondente ao caso crescente.

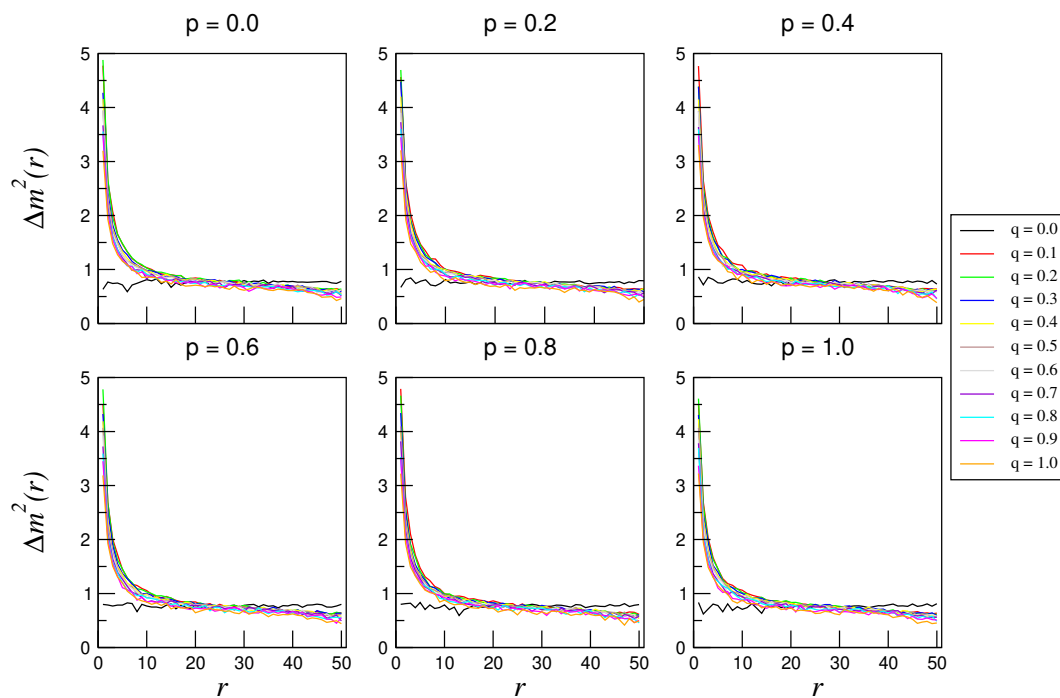


Figura 4.12: Gráficos da variância da renda média dos agentes localizados a uma distância  $r$  do agente com renda máxima correspondente ao caso decrescente.

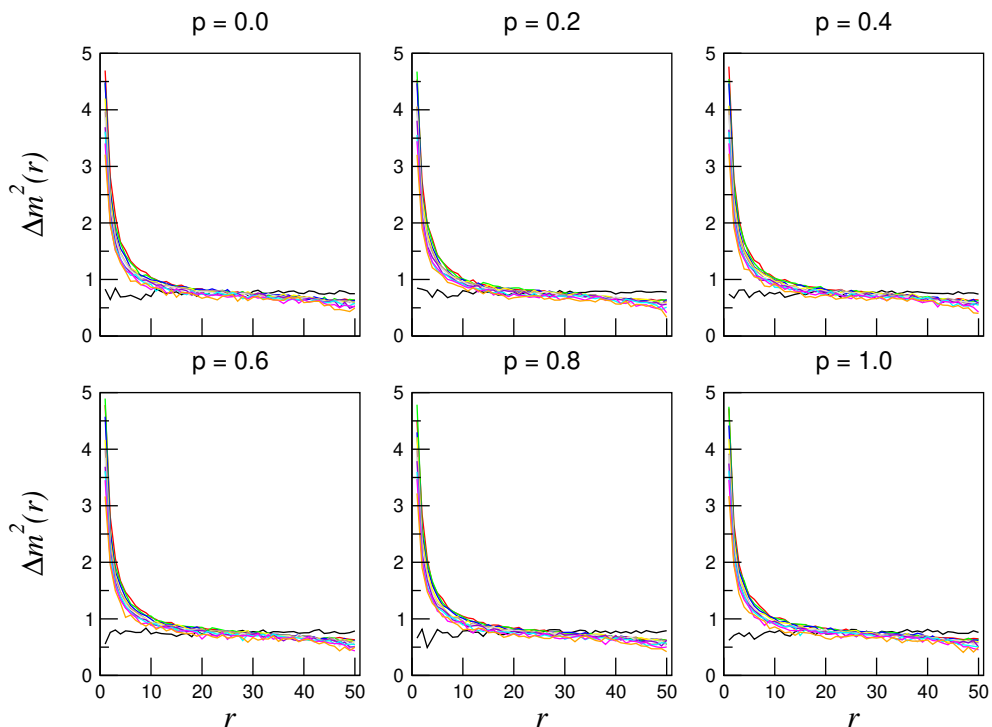


Figura 4.13: Gráficos da variância da renda média dos agentes localizados a uma distância  $r$  do agente com renda máxima correspondente ao caso negativo.

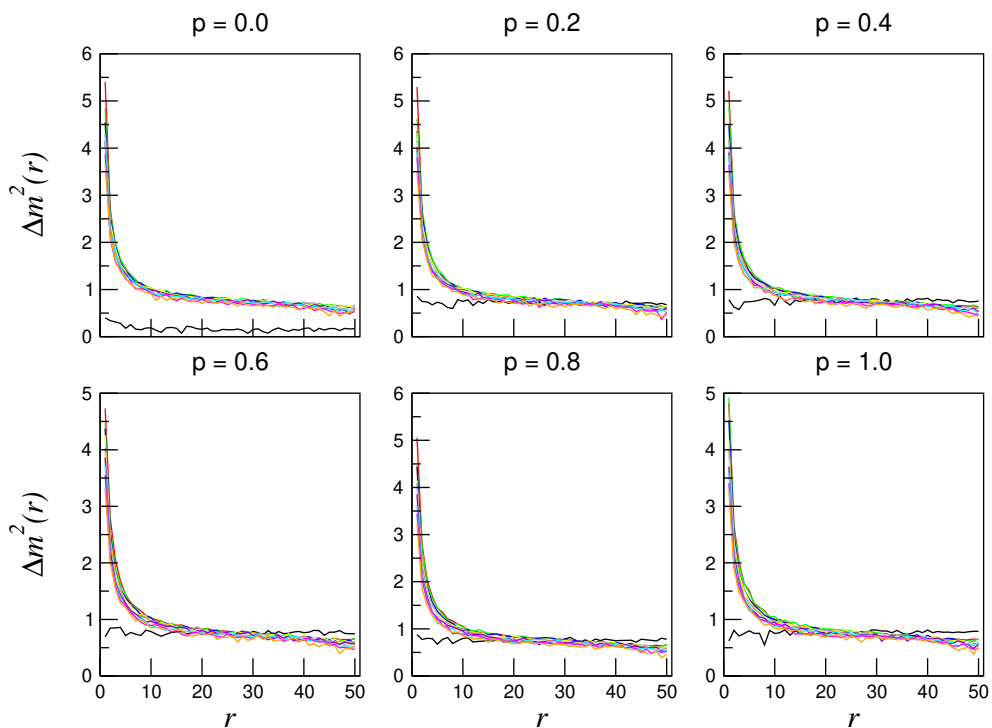


Figura 4.14: Gráficos da variância da renda média dos agentes localizados a uma distância  $r$  do agente com renda máxima correspondente ao caso positivo.

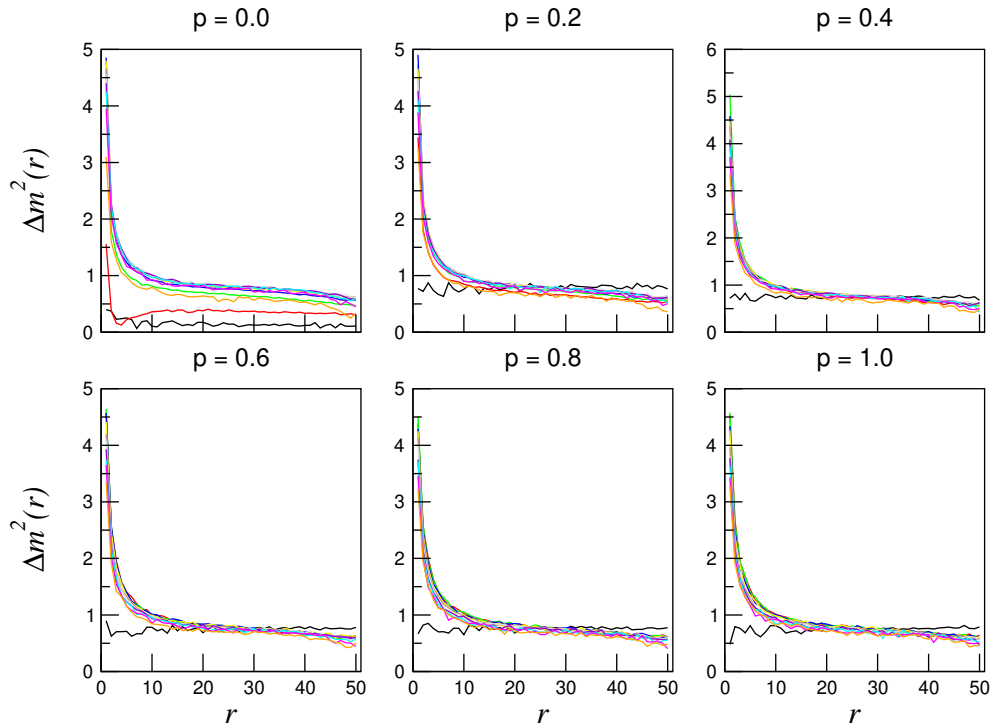


Figura 4.15: Gráfico log-log da variância da renda média dos agentes localizados a uma distância  $r$  do agente com renda máxima para o caso decrescente quando  $p = 0.4$ .

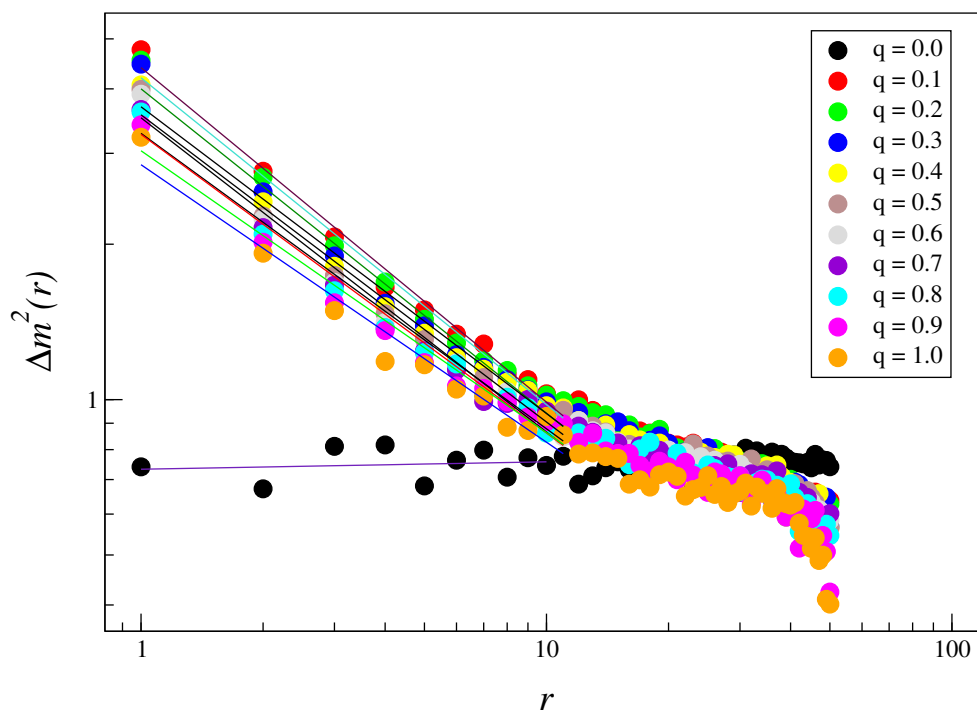
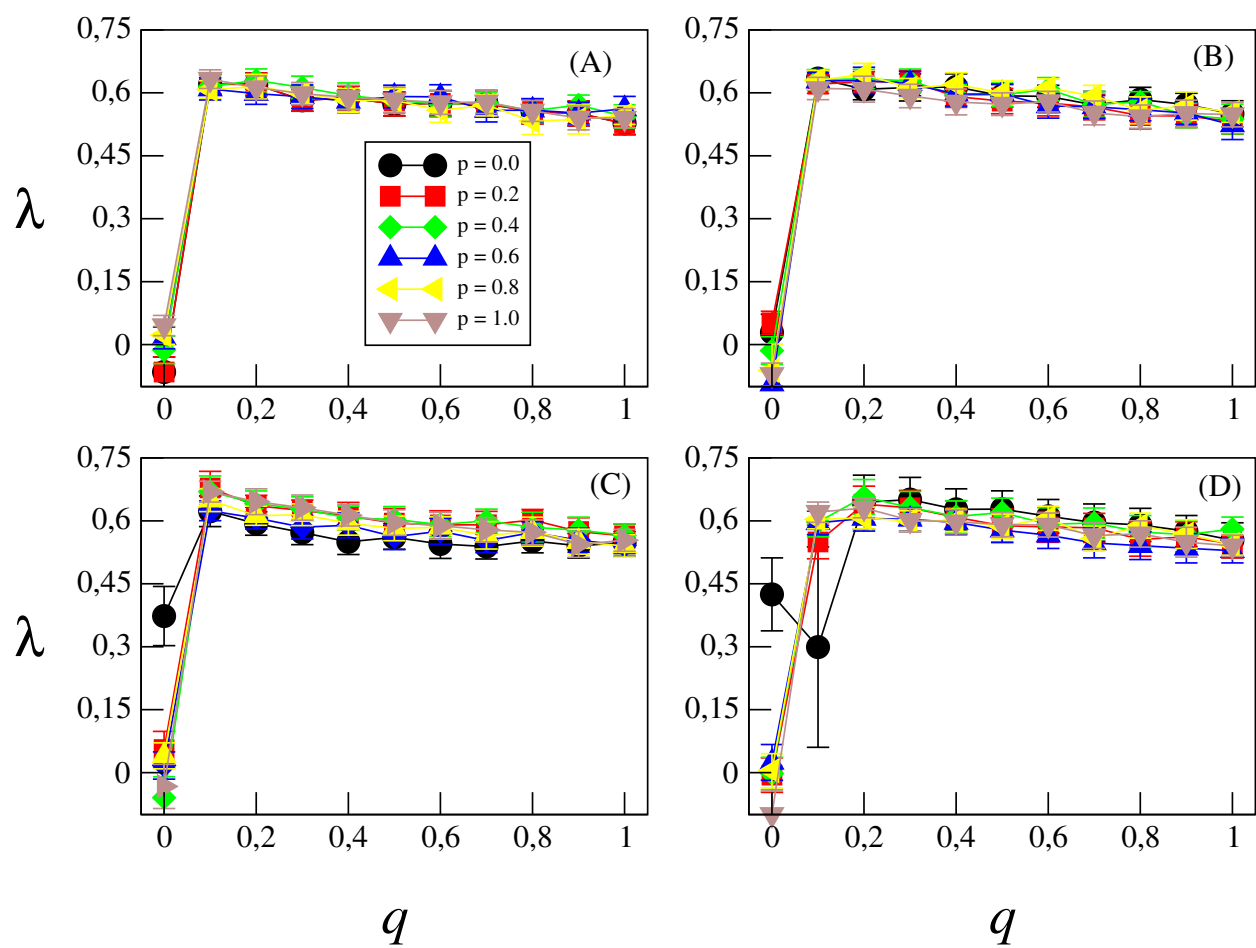


Figura 4.16: Gráficos do comportamento do expoente da regressão  $\lambda$  em função de  $q$  para os quatro casos de correlação entre mobilidade e renda.



# Capítulo 5

## Correlações Temporais

No capítulo anterior apresentamos os resultados relacionados aos aspectos espaciais da distribuição de renda para o modelo heterogêneo e adaptativo. Nesse capítulo exibiremos os resultados relacionados aos seus aspectos temporais. Inicialmente calculamos a correlação temporal da taxa de gasto média  $[\omega]$  a partir da seguinte função:

$$C(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \sum_{t=0}^{T-\tau} \frac{(\omega(t + \tau) - \langle \omega \rangle) \cdot (\omega(t) - \langle \omega \rangle)}{\Delta\omega^2} \quad (5.1)$$

onde  $\tau$  é o tempo de correlação,  $T$  é o tempo total da série e  $\Delta\omega^2$  corresponde a variância da série temporal [41].

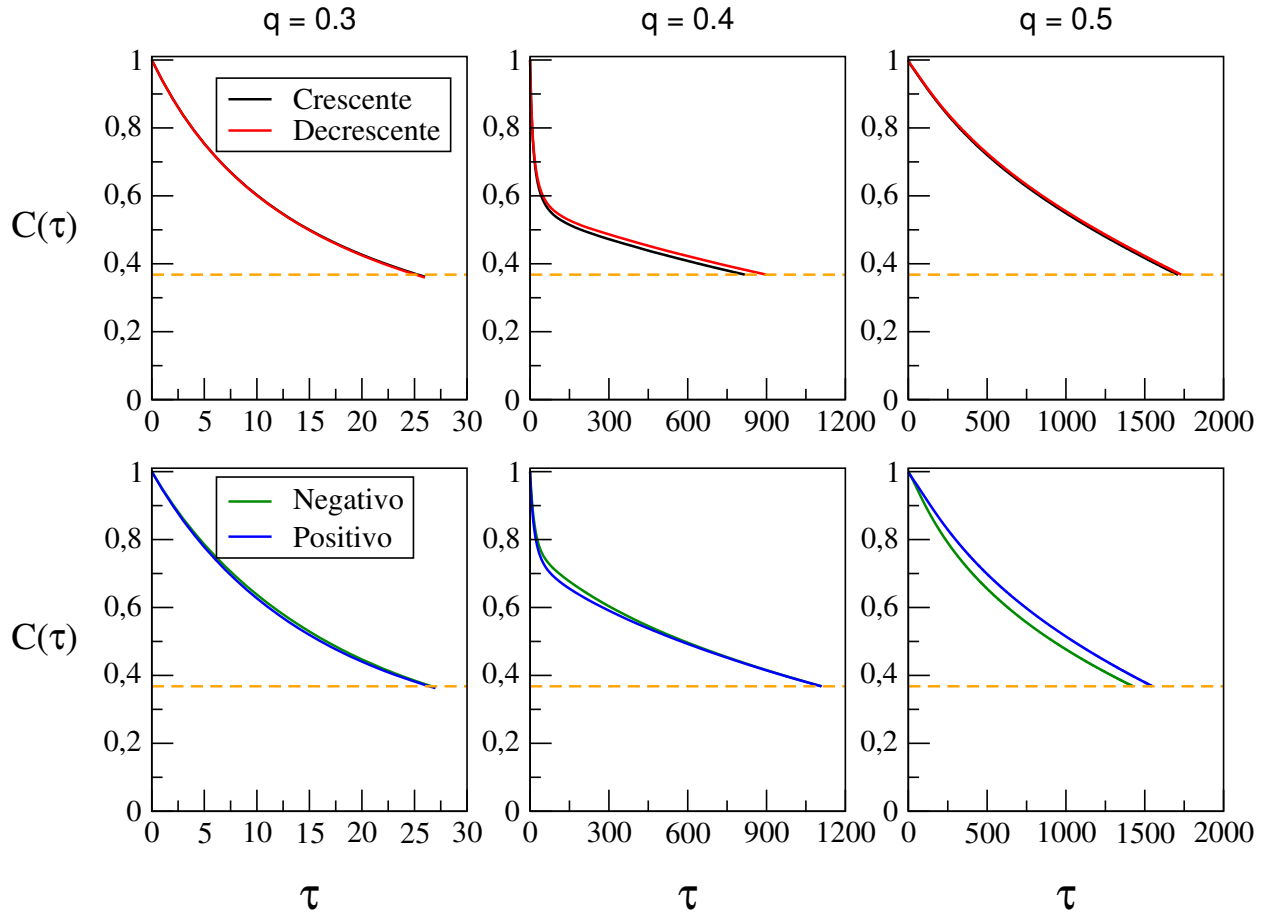
Na Figura 5.1 apresentamos o comportamento típico da função de correlação da taxa de gasto média  $C(\tau)$  para os valores de  $q = 0.3, 0.4, 0.5$  para os diferentes cenários de correlação entre renda e mobilidade: crescente (curva em preto), decrescente (curva em vermelho), negativo (curva em verde) e positivo (curva em azul), em todos os casos utilizamos  $p = 0.4$ . Admitindo uma dependência exponencial para  $C(\tau)$  na forma:

$$C(\tau) = e^{-\tau/\tau_c}, \quad (5.2)$$

a linha tracejada corresponde ao valor de  $1/e$  e sua interseção com as diferentes curvas determina o tempo característico  $\tau_c$ .

Podemos observar na Figura 5.1 que para os diferentes frações de agentes positivamente correlacionados  $q$ , os tempos característicos apresentam valores muito distintos entre si, variando da ordem de dezenas a milhares de passos tempo, indicando um espectro de dinâmicas

Figura 5.1: Gráficos do comportamento da função de correlação da taxa de gasto média para diferentes valores de  $q = 0.3, 0.4, 0.5$  para os quatro casos de correlação entre mobilidade e renda.

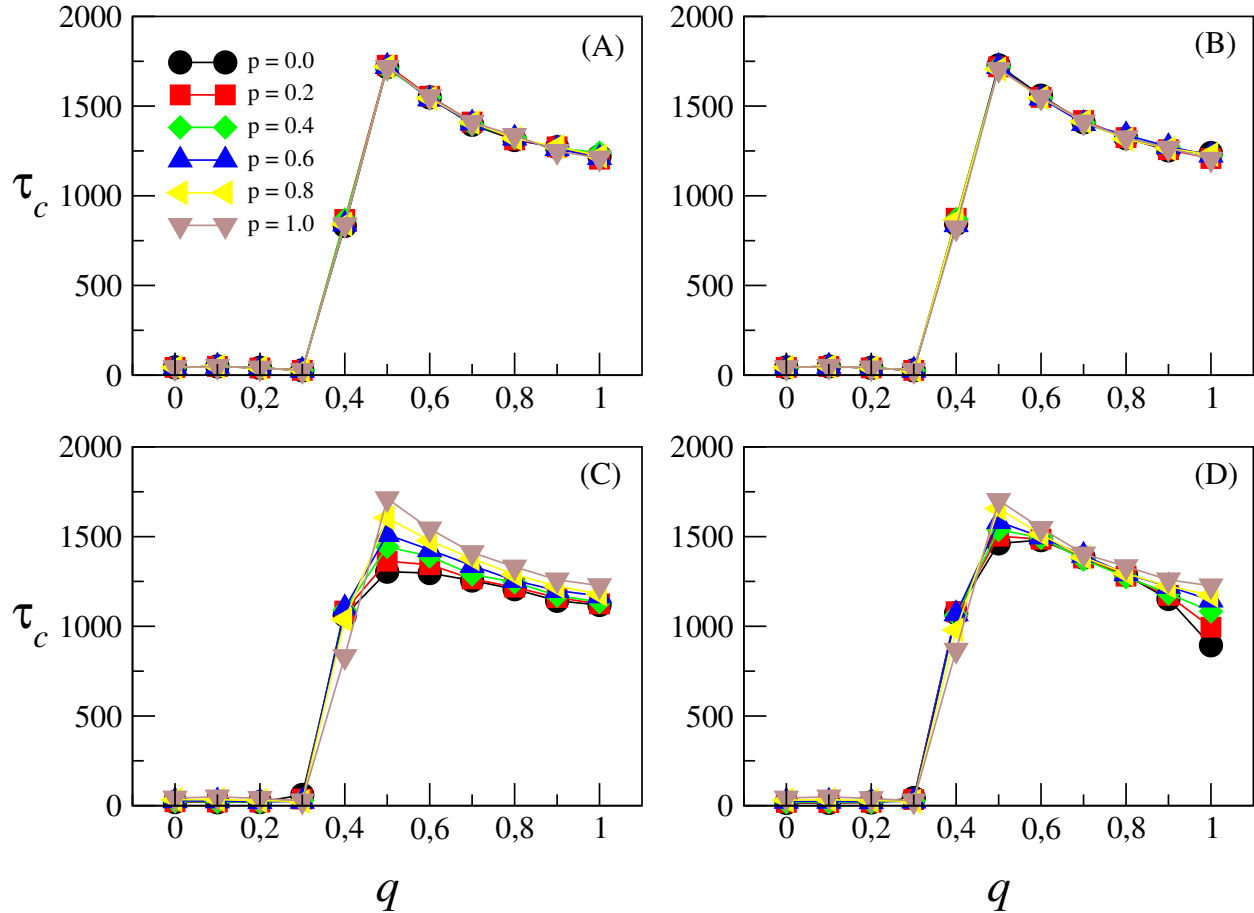


de relaxação. Assim, na Figura 5.2 apresentamos os gráficos do tempo característico em função de  $q$  para os quatro casos de correlação entre renda e mobilidade.

Percebemos para todos os casos que o tempo de correlação é próximo de zero para os valores de  $q$  entre 0.0 e 0.3, sofrendo um aumento monotônico para valores de  $q$  compreendidos entre 0.3 e 0.5, e finalmente tendo um decrescimento para valores de  $q$  entre 0.5 e 1.0. Para os casos crescente e decrescente, é possível observar que o comportamento do tempo de correlação característico é independente de  $p$ , porém, para os casos negativo e positivo, as curvas possuem leves diferenças entre si para os diferentes valores do parâmetro  $p$ .

Uma possível explicação para as mudanças nos regimes de correlação pode estar associada ao valor das taxas de consumo médio como aponta [13]. Nesta referência é investigado o

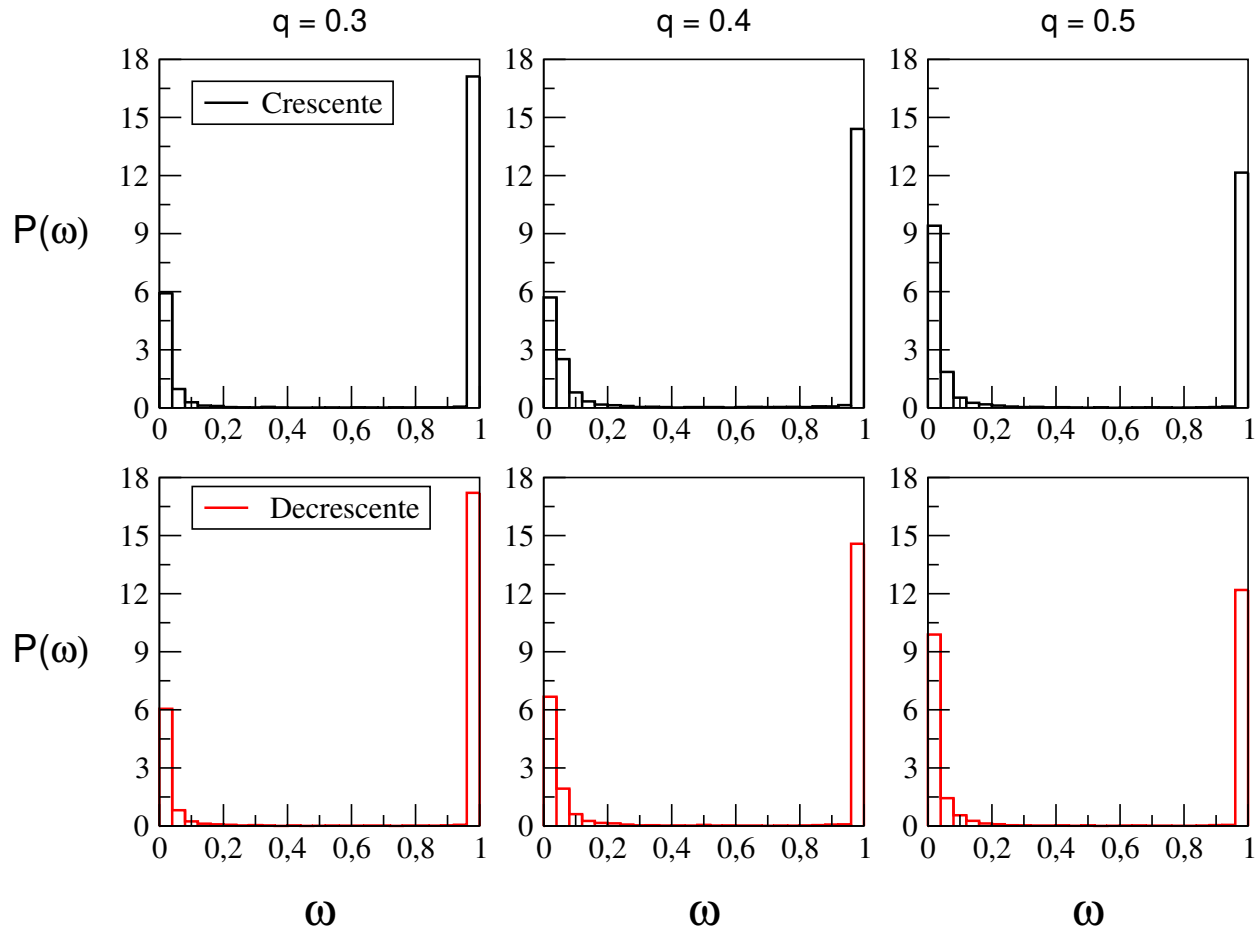
Figura 5.2: Gráficos do comportamento do tempo de correlação da taxa de gasto média em função de  $q$  para os quatro casos de correlação entre mobilidade e renda.



comportamento do tempo de relaxação para o equilíbrio como função da distribuição das taxas de poupança. Em nosso caso, a Figura 4.5 indica que ao cruzarmos o limiar de  $q \approx 0.5$  as taxas de gasto se tornam inferiores a 0.5, contemplando maiores taxas de poupança, e portanto maiores tempos de relaxação. De modo a corroborar esta análise, apresentamos na Figura 5.3 distribuições típicas das taxas de gasto para os casos de correlação crescente e decrescente com  $q = 0.3, 0.4, 0.5$ , na qual podemos apreciar o aumento dos modos em torno de  $\omega = 0.0$  em detrimento dos modos em torno de  $\omega = 1.0$ .

Como forma de estimar a persistência dos estados de concentração de renda, exibimos na Figura 5.4 os gráficos da fração de agentes distintos que foram o mais rico pelo menos uma vez ( $f$ ) em função de  $q$  para os quatro casos de correlação entre renda e mobilidade.

Figura 5.3: Gráficos das distribuições da taxa de gasto para os casos crescente e decrescente para diferentes valores de  $q$ .

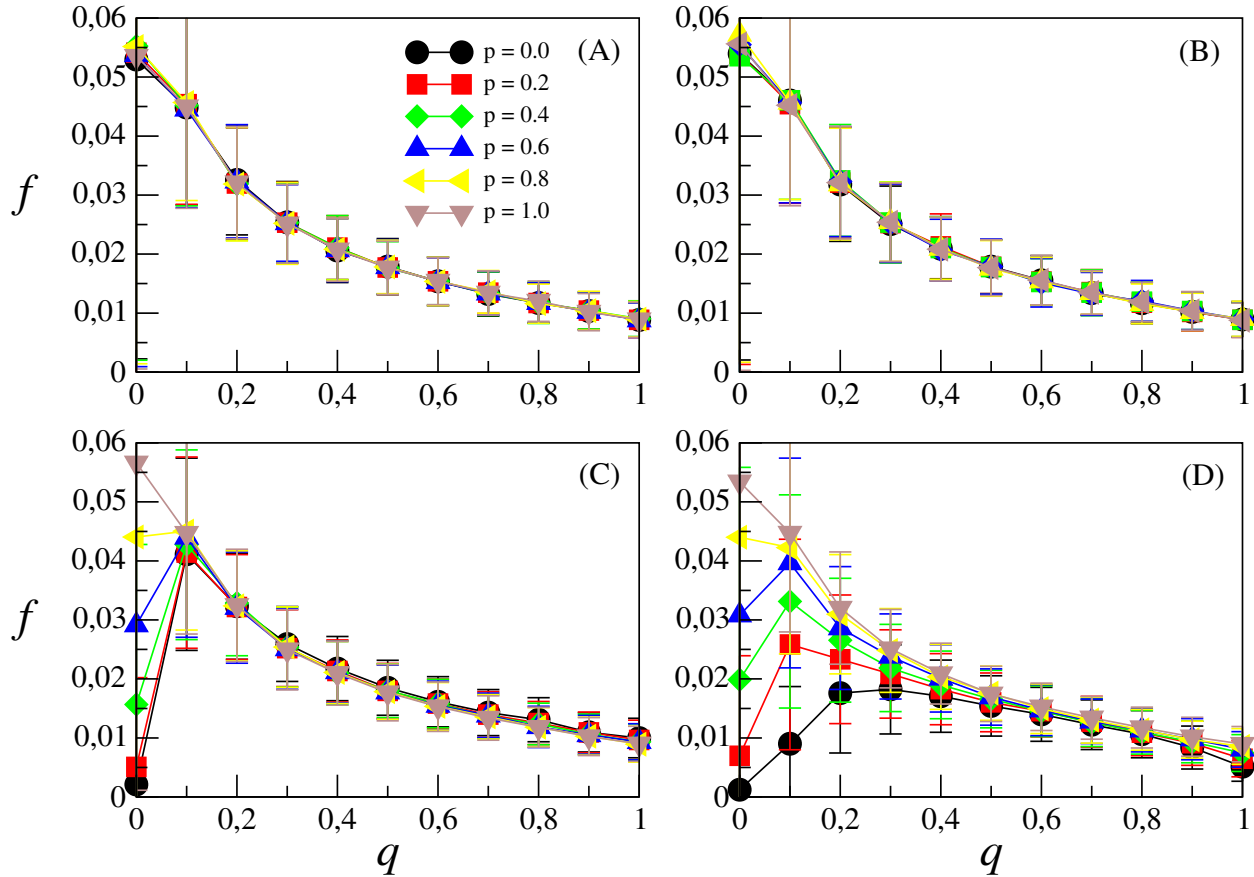


Para os casos crescente e decrescente observamos um comportamento monotonicamente decrescente de  $f$  com  $q$ , os dois casos possuem as maiores frações de agentes, para todos os valores de  $p$ , quando  $q = 0.0$ . Isso se dá pelo fato, como mostrado na Figura 4.5, onde em  $q = 0.0$ , os casos apresentam seu menor valor para o índice de Gini, conseqüentemente mais agentes conseguem ser o mais rico pelo menos uma vez. Esses dois casos ainda apresentam as menores frações de agentes, para todos os valores de  $p$ , quando  $q = 1.0$ , resultado que também está de acordo com a Figura 4.5, onde os casos crescente e decrescente apresentam um maior índice de Gini quando  $q = 1.0$ , para todos os valores de  $p$ , acarretando em uma quantidade menor de agentes que conseguem ser ricos pelo menos uma vez.

Para os casos de correlação negativa e positiva, observamos que as frações agora têm



Figura 5.4: Gráficos do comportamento da fração de agentes que foram o mais rico pelo menos uma vez em função de  $q$  para os quatro casos de correlação entre mobilidade e renda.



uma dependência não monotônica com o parâmetro  $q$ , diferentemente do que foi discutido anteriormente para os casos crescente e decrescente. Nesses dois cenários é possível perceber que para o valor de  $q = 0.0$  temos um comportamento crescente da fração com o parâmetro  $p$ , sendo que temos para  $p = 0.0$ , onde nenhum agente tem mobilidade adaptável, o valor da fração praticamente nulo, estando de acordo com a Figura 4.5, pelo fato de, para  $q = 0.0$ , o maior índice de Gini é notado em  $p = 0.0$ . Assim como para o valor de  $p = 1.0$ , ainda para  $q = 0.0$ , temos a maior fração de agentes, consequência do fato de que para essa situação o Índice de Gini é próximo de zero.

Uma quantificação alternativa dos estados de concentração de renda consiste em determinar o tempo médio em que o agente permaneceu sendo o mais rico. Assim, definimos o

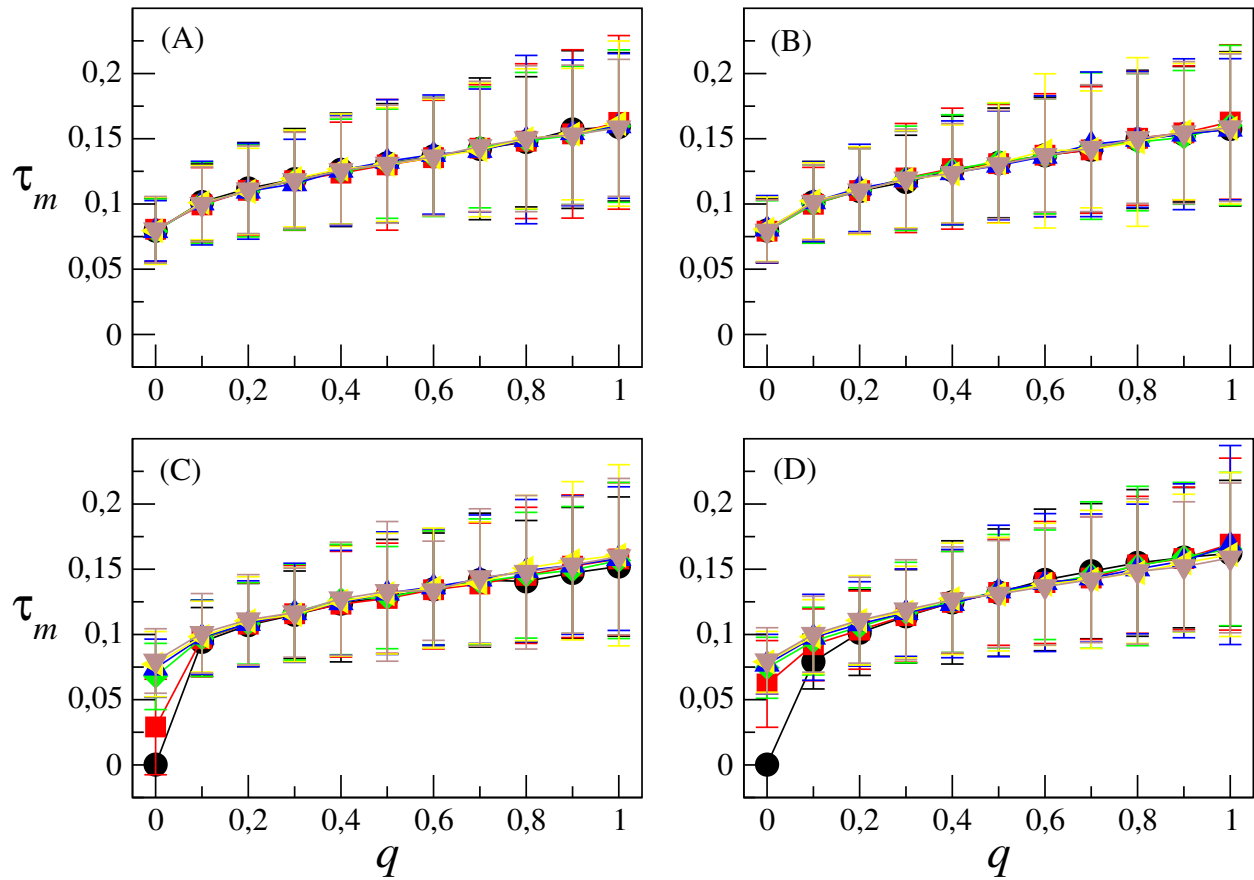
tempo médio como

$$\tau_m = \sum_{i=0}^S \frac{t_i}{T}, \quad (5.3)$$

onde  $S$  é a quantidade de agentes que foram ricos pelo menos uma vez,  $t_i$  é o tempo que o agente permaneceu sendo o mais rico e  $T$  é o tempo total da série temporal.

Na Figura 5.5 apresentamos os gráficos do tempo médio em que o agente permaneceu sendo o mais rico ( $\tau_m$ ) em função de  $q$  para os quatro casos de correlação entre renda e mobilidade, onde utilizamos o mesmo código de cores da Figura 5.4.

Figura 5.5: Gráficos do comportamento do tempo médio em que o agente permaneceu sendo o mais rico em função de  $q$  para os quatro casos de correlação entre mobilidade e renda.



Percebemos que para os casos crescente e decrescente, o comportamento do tempo médio independe de  $p$ . Para  $q = 0.0$  temos o menor valor do tempo médio, situação onde temos

---

a maior fração de agentes que foram ricos ao menos uma vez. A partir disso, ocorre um crescimento até  $q = 1.0$ , onde temos o maior tempo médio, porém, a menor fração de agentes. Para os casos negativo e positivo é possível notar que na situação onde temos  $q = 0.0$ , ocorre um crescimento do tempo médio com o parâmetro  $p$ , em que no cenário onde  $q = 0.0$  e  $p = 0.0$  temos o tempo médio nulo, corroborando com o resultado anterior onde a fração nessa mesma situação também é nula.

# Capítulo 6

## Conclusões

Nesta dissertação apresentamos uma generalização do Modelo Heterogêneo e Adaptativo [20] com o intuito de estudar aspectos da distribuição espacial de renda. Sob a perspectiva econômica, investigamos como fatores socioeconômicos se relacionam com a distribuição espacial de renda e sua quantificação. Motivados por esses aspectos e por modelos encontrados na literatura, elaboramos um modelo em uma rede bidimensional quadrada de lado  $L$  onde a cada sítio está associado um agente caracterizado por sua renda ( $m_i$ ), taxa de gasto ( $\omega_i$ ) e mobilidade ( $\mu_i$ ).

O modelo fornece quatro cenários de correlação entre mobilidade e renda, onde a fração de agentes que possui mobilidade adaptável é definida pelo parâmetro  $p$  e a fração de agentes que possuem renda e taxa de gasto correlacionadas positivamente é definida pelo parâmetro  $q$ , enquanto que o restante dos agentes apresenta correlação negativa. No início da dinâmica a taxa de gasto é distribuída uniformemente no intervalo  $0 < \omega < 1$ , definindo a heterogeneidade do sistema.

Inicialmente investigamos o papel de algumas características como a adaptabilidade e a heterogeneidade. Variando o parâmetro  $q$  para os diferentes valores de  $p$ , percebemos que a taxa de gasto tem um comportamento monotonicamente crescente para  $q > 0.5$  e monotonicamente decrescente para  $q < 0.5$ . Também fizemos a análise do espaço  $[G, \omega]$ , para o estado estacionário, e notamos que para o caso decrescente, a região delimitada pelas curvas contemplam os dados extraídos do banco mundial.

Em seguida introduzimos a renda média ( $\langle m(r) \rangle$ ) e a variância ( $\Delta m^2(r)$ ) dos agentes localizados a uma distância  $r$  do agente de maior renda. Percebemos tanto a renda quanto a variância decrescem em função da distância radial em exceção para o valor de  $q = 0.0$ . Também notamos que a variância tem um comportamento lei de potência com expoentes  $0.55 < \lambda < 0.62$ , exceto para  $p = 0.0$  onde não há dependência com  $r$ .

Posteriormente apresentamos o comportamento típico da função de correlação temporal, onde definimos um tempo característico  $\tau_c$  quando a curva atinge o valor de  $1/e$ . Notamos que acontece uma transição do tempo característico para o valor de  $q = 0.3$ , onde especulamos que isso acontece devido o aumento das taxas de poupança dos agentes, assim, aumentando o tempo de relaxação do sistema. A fração de agentes distintos que foram ricos pelo menos uma vez decresce monotonicamente com  $q$ , ao contrário do que acontece com o tempo médio em que o agente permaneceu sendo o mais rico.

Apesar do modelo apresentar algumas características da distribuição espaço-temporal de renda, é importante destacar que alguns aspectos ainda podem ser investigados, como por exemplo, a mudança instantânea da mobilidade assim como acontece com as taxas de gasto, estudar um sistema aberto, onde a quantidade de recursos do sistema pode variar e investigar a natureza da aparente transição que ocorre com o tempo característico.

# Apêndice A

## Anexo

Exibimos neste anexo uma tabela com o nome e os valores médios do índice de Gini  $\bar{G}$  e da taxa de gasto  $\bar{\omega}$ , e suas respectivas barras de erro, para cada um dos 132 países utilizados nesta pesquisa. A estatística foi realizada sobre as séries temporais no período de 1990 - 2009, disponibilizadas no Banco Mundial [17, 18].

Tabela A.1: Valores da taxa de consumo  $\omega$  e índice de Gini médios, para o período de 1990 - 2009 dados retirados do Banco Mundial.

N	Países	$\bar{\omega}$	$\Delta\omega$	$\bar{G}$	$\Delta G$
1	Argélia	0.60	0.11	0.35	0.00
2	Angola	0.73	0.13	0.59	0.00
3	Argentina	0.79	0.05	0.49	0.02
4	Armênia	0.98	0.16	0.36	0.05
5	Austrália	0.77	0.01	0.35	0.00
6	Áustria	0.74	0.02	0.29	0.00
7	Azerbaijão	0.73	0.02	0.29	0.11
8	Alemanha	0.77	0.01	0.28	0.00
9	África do Sul	0.81	0.01	0.58	0.01

Tabela A.2: Valores da taxa de consumo  $\omega$  e índice de Gini médios, para o período de 1990 - 2009 dados retirados do Banco Mundial.

<b>N</b>	<b>Países</b>	$\bar{\omega}$	$\Delta\omega$	$\bar{G}$	$\Delta G$
10	Belgíca	0.75	0.01	0.33	0.00
11	Belize	0.84	0.06	0.60	0.00
12	Benin	0.95	0.02	0.39	0.00
13	Butão	0.67	0.11	0.47	0.00
14	Bolívia	0.87	0.06	0.56	0.07
15	Botswana	0.62	0.07	0.61	0.00
16	Brasil	0.81	0.03	0.58	0.02
17	Bulgária	0.86	0.05	0.29	0.04
18	Burkina Faso	0.94	0.04	0.46	0.06
19	Bangladesh	0.85	0.03	0.30	0.02
20	Belarus	0.76	0.04	0.28	0.03
21	Catar	0.44	0.12	0.41	0.09
22	Cingapura	0.53	0.03	0.42	0.00
23	Chade	0.93	0.18	0.40	0.00
24	Chile	0.73	0.03	0.55	0.01
25	China	0.57	0.05	0.42	0.00
26	Colombia	0.82	0.03	0.57	0.02
27	Costa Rica	0.82	0.04	0.47	0.02
28	Costa do Marfim	0.81	0.05	0.41	0.06
29	Croácia	0.84	0.05	0.29	0.02
30	Camboja	0.93	0.07	0.41	0.03
31	Camarões	0.81	0.02	0.46	0.02
32	Canadá	0.77	0.03	0.33	0.00
33	Coréia do Sul	0.66	0.03	0.32	0.00

Tabela A.3: Valores da taxa de consumo  $\omega$  e índice de Gini médios, para o período de 1990 - 2009 dados retirados do Banco Mundial.

N	Países	$\bar{\omega}$	$\Delta\omega$	$\bar{G}$	$\Delta G$
34	Dinamarca	0.75	0.02	0.25	0.00
35	El Salvador	0.99	0.04	0.51	0.02
36	Estónia	0.76	0.05	0.36	0.03
37	Etiópia	0.92	0.04	0.33	0.06
38	Eslovênia	0.75	0.03	0.29	0.01
39	Espanha	0.77	0.01	0.35	0.01
40	Estados Unidos	0.84	0.02	0.41	0.00
41	Equador	0.78	0.03	0.55	0.04
42	Egito	0.86	0.02	0.32	0.01
43	França	0.80	0.01	0.33	0.00
44	Filipinas	0.84	0.03	0.45	0.01
45	Finlândia	0.79	0.03	0.27	0.00
46	Gâmbia	0.92	0.04	0.49	0.02
47	Geórgia	0.97	0.17	0.38	0.02
48	Gana	0.93	0.03	0.41	0.02
49	Grécia	0.90	0.02	0.34	0.00
50	Guatemala	0.93	0.03	0.55	0.01
51	Guiné	0.83	0.03	0.44	0.03
52	Guiana	0.85	0.08	0.47	0.06
53	Gabão	0.52	0.08	0.41	0.00
54	Honduras	0.84	0.09	0.55	0.02
55	Hong Kong	0.68	0.17	0.43	0.00
56	Hungria	0.78	0.04	0.27	0.02
57	Holanda	0.73	0.01	0.31	0.00
58	Haiti	0.98	0.06	0.60	0.00



Tabela A.4: Valores da taxa de consumo  $\omega$  e índice de Gini médios, para o período de 1990 - 2009 dados retirados do Banco Mundial.

N	Países	$\bar{\omega}$	$\Delta\omega$	$\bar{G}$	$\Delta G$
59	Indonésia	0.70	0.03	0.39	0.01
60	Irã	0.63	0.04	0.42	0.03
61	Irlanda	0.67	0.06	0.34	0.00
62	Israel	0.84	0.04	0.39	0.00
63	Itália	0.78	0.01	0.36	0.00
64	Índia	0.74	0.04	0.37	0.00
65	Iêmen	0.89	0.13	0.37	0.03
66	Jordânia	0.99	0.06	0.39	0.03
67	Jamaica	0.86	0.08	0.43	0.04
68	Japão	0.72	0.04	0.25	0.00
69	Kazaquistão	0.71	0.12	0.33	0.02
70	Laos	0.80	0.35	0.33	0.02
71	Latónia	0.79	0.11	0.33	0.03
72	Lituânia	0.84	0.05	0.33	0.02
73	Luxemburgo	0.56	0.05	0.31	0.00
74	Macedônia	0.93	0.04	0.37	0.06
75	Madagascar	0.93	0.04	0.44	0.04
76	Malawi	0.95	0.09	0.45	0.08
77	Mongólia	0.78	0.12	0.33	0.02
78	Marrocos	0.79	0.04	0.40	0.08
79	Moçambique	0.98	0.08	0.46	0.02
80	Malásia	0.59	0.04	0.46	0.05
81	Maldivas	0.56	0.08	0.37	0.00
82	Mali	0.90	0.03	0.43	0.06
83	Mauritânia	0.98	0.16	0.42	0.06
84	México	0.78	0.03	0.50	0.02

Tabela A.5: Valores da taxa de consumo  $\omega$  e índice de Gini médios, para o período de 1990 - 2009 dados retirados do Banco Mundial.

N	Países	$\bar{\omega}$	$\Delta\omega$	$\bar{G}$	$\Delta G$
85	Moldávia	0.94	0.20	0.36	0.014
86	Namíbia	0.85	0.05	0.74	0.00
87	Nepal	0.89	0.03	0.42	0.07
88	Nova Zelândia	0.78	0.02	0.36	0.00
89	Nigéria	0.96	0.03	0.41	0.04
90	Noruega	0.68	0.05	0.26	0.00
91	Nova Guiné	0.71	0.07	0.51	0.00
92	Panamá	0.73	0.04	0.55	0.03
93	Paquistão	0.84	0.02	0.31	0.02
94	Paraguai	0.87	0.03	0.54	0.07
95	Peru	0.80	0.04	0.49	0.04
96	polônia	0.81	0.04	0.32	0.02
97	Portugal	0.84	0.02	0.38	0.09
98	Quênia	0.88	0.05	0.47	0.07
99	Quirguistão	0.98	0.10	0.37	0.08
100	Romênia	0.83	0.05	0.30	0.02
101	Rússia	0.68	0.06	0.41	0.05
102	República Dem. do Congo	0.93	0.07	0.44	0.00
103	República do Congo	0.61	0.13	0.47	0.00
104	República Eslovaca	0.75	0.03	0.23	0.04
105	República Centro - Africana	0.97	0.03	0.52	0.13
106	República Checa	0.72	0.02	0.27	0.02
107	República Dominicana	0.87	0.03	0.50	0.02
108	Reino Unido	0.85	0.02	0.36	0.00

Tabela A.6: Valores da taxa de consumo  $\omega$  e índice de Gini médios, para o período de 1990 - 2009 dados retirados do Banco Mundial.

N	Países	$\bar{\omega}$	$\Delta\omega$	$\bar{G}$	$\Delta G$
109	Senegal	0.93	0.04	0.44	0.07
110	Sérvia	0.99	0.05	0.28	0.09
111	Serra Leoa	0.82	0.08	0.53	0.14
112	Sri Lanka	0.84	0.02	0.36	0.04
113	Suriname	0.95	0.05	0.53	0.00
114	Suazilândia	0.94	0.06	0.57	0.07
115	Suécia	0.76	0.02	0.25	0.00
116	Suíça	0.71	0.02	0.34	0.00
117	Tajiquistão	0.95	0.19	0.33	0.01
118	Tanzânia	0.94	0.05	0.34	0.01
119	Tailândia	0.67	0.02	0.43	0.02
120	Togo	0.95	0.05	0.34	0.00
121	Trinidad e Tobago	0.66	0.09	0.40	0.00
122	Tunísia	0.78	0.01	0.41	0.01
123	Turquia	0.81	0.02	0.42	0.01
124	Turcomenistão	0.63	0.16	0.38	0.04
125	Uganda	0.93	0.04	0.42	0.03
126	Ucrânia	0.76	0.06	0.29	0.03
127	Uruguai	0.84	0.03	0.45	0.01
128	Uzbequistão	0.78	0.07	0.39	0.06
129	Venezuela	0.70	0.07	0.47	0.03
130	Vietnã	0.78	0.08	0.37	0.02
131	Zâmbia	0.87	0.09	0.52	0.06
132	Zimbábue	0.87	0.06	0.50	0.00

# Referências Bibliográficas

- [1] Ângela de Mesquita Pereira. Modelo espaço-temporal para a dinâmica da distribuição de renda, 2017.
- [2] Luiz Carlos da Silva Junior. Efeitos de heterogeneidade e adaptabilidade sobre processos de distribuição de renda, 2013.
- [3] John P Shelnutt, Vincent W Yao, et al. A spatial analysis of income inequality in arkansas at the county level: evidence from tax and commuting data. *Federal Reserve Bank of St. Louis Regional Economic Development*, 1(1):52–65, 2005.
- [4] Yuriy Holovatch, Ralph Kenna, and Stefan Thurner. Complex systems: physics beyond physics. *European Journal of Physics*, 38(2):023002, 2017.
- [5] Nino Boccara. *Modeling complex systems*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [6] Sunny Y Auyang. *Foundations of complex-system theories: in economics, evolutionary biology, and statistical physics*. Cambridge University Press, 1999.
- [7] Matteo Smerlak. Thermodynamics of inequalities: From precariousness to economic stratification. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 441:40–50, 2016.
- [8] SAO/NASA. Astrophysics Data System. [http://adsabs.harvard.edu/cgi-bin/basic\\_connect?qsearch=econophysics&version=1](http://adsabs.harvard.edu/cgi-bin/basic_connect?qsearch=econophysics&version=1), 2019. Accessed: 2019-01-31.
- [9] Victor M Yakovenko and J Barkley Rosser Jr. Colloquium: Statistical mechanics of money, wealth, and income. *Reviews of Modern Physics*, 81(4):1703, 2009.

- [10] Eder Johnson de Area Leão Pereira, Marcus Fernandes da Silva, and HBB Pereira. Econophysics: Past and present. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 473:251–261, 2017.
- [11] Venkat Venkatasubramanian, Yu Luo, and Jay Sethuraman. How much inequality in income is fair? a microeconomic game theoretic perspective. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 435:120–138, 2015.
- [12] Vilfredo Pareto. *Cours d'économie politique*, volume 1. Librairie Droz, 1964.
- [13] Marco Patriarca, Anirban Chakraborti, Els Heinsalu, and Guido Germano. Relaxation in statistical many-agent economy models. *The European Physical Journal B*, 57(2):219–224, 2007.
- [14] Arnab Chatterjee and Bikas K Chakrabarti. Kinetic exchange models for income and wealth distributions. *The European Physical Journal B*, 60(2):135–149, 2007.
- [15] Anindya S Chakrabarti. Modelling savings behavior of agents in the kinetic exchange models of market. *arXiv preprint arXiv:1006.5044*, 2010.
- [16] Lorenzo Giovanni Bellù and Paolo Liberati. Inequality analysis: The gini index. *FAO, EASYPol Module*, 40, 2006.
- [17] World Bank. Instituto de Pesquisas Econômicas e Aplicadas. [http://databank.worldbank.org/data/reports.aspx?source=2&series=NE.CON.TETC.ZS&country=.](http://databank.worldbank.org/data/reports.aspx?source=2&series=NE.CON.TETC.ZS&country=)
- [18] World Bank. Instituto de Pesquisas Econômicas e Aplicadas. [http://databank.worldbank.org/data/reports.aspx?source=2&series=SI.POV.GINI&country=.](http://databank.worldbank.org/data/reports.aspx?source=2&series=SI.POV.GINI&country=)
- [19] Marco Patriarca, Anirban Chakraborti, and Kimmo Kaski. Gibbs versus non-gibbs distributions in money dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 340(1-3):334–339, 2004.
- [20] LC da Silva Junior and PH de Figueirêdo. Income distribution: An adaptive heterogeneous model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 395:275–282, 2014.

- 
- [21] John Angle. The surplus theory of social stratification and the size distribution of personal wealth. *Social Forces*, 65(2):293–326, 1986.
- [22] Marco Patriarca, Els Heinsalu, and A Chakraborty. The abcd’s of statistical many-agent economy models. Technical report, 2006.
- [23] Adrian Dragulescu and Victor M Yakovenko. Statistical mechanics of money. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 17(4):723–729, 2000.
- [24] Adrian Drăgulescu and Victor M Yakovenko. Evidence for the exponential distribution of income in the usa. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 20(4):585–589, 2001.
- [25] Urna Basu and PK Mohanty. Modeling wealth distribution in growing markets. *The European Physical Journal B*, 65(4):585, 2008.
- [26] Diego Garlaschelli and Maria I Loffredo. Effects of network topology on wealth distributions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(22):224018, 2008.
- [27] S Pianegonda and JR Iglesias. Inequalities of wealth distribution in a conservative economy. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 342(1-2):193–199, 2004.
- [28] Sukkoo Kim. *Spatial inequality and economic development: Theories, facts, and policies*. World Bank Publications, 2008.
- [29] Sudiksha Joshi and Tesfa G Gebremedhin. A spatial analysis of poverty and income inequality in the appalachian region. *Journal of Rural and Community Development*, 7(2), 2012.
- [30] Eustáquio Reis. Spatial income inequality in brazil, 1872–2000. *Economia*, 15(2):119–140, 2014.
- [31] Taisei Kaizoji. Spatial distribution of large income earners: an empirical study on the formation of exclusive residential districts. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 347:575–582, 2005.

- 
- [32] Mathias Moser and Matthias Schnetzer. The geography of average income and inequality: Spatial evidence from austria. 2014.
- [33] H Spencer Banzhaf and Randall P Walsh. Do people vote with their feet? an empirical test of tiebout. *American Economic Review*, 98(3):843–63, 2008.
- [34] Tara Watson. Inequality and the measurement of residential segregation by income in american neighborhoods. *Review of Income and Wealth*, 55(3):820–844, 2009.
- [35] John Conway. The game of life. *Scientific American*, 223(4):4, 1970.
- [36] Stephen Wolfram. Cellular automata as models of complexity. *Nature*, 311(5985):419, 1984.
- [37] GM Caon, S Gonçalves, and JR Iglesias. The unfair consequences of equal opportunities: Comparing exchange models of wealth distribution. *The European Physical Journal Special Topics*, 143(1):69–74, 2007.
- [38] Harvey Gould, Jan Tobochnik, and Wolfgang Christian. *An introduction to computer simulation methods*, volume 1. Addison-Wesley New York, 1988.
- [39] Charles Kittel, Paul McEuen, and Paul McEuen. *Introduction to solid state physics*, volume 8. Wiley New York, 1996.
- [40] José Pedro Rino and BV Costa. Abc da simulação computacional. *Livraria da Física-UFSCar*, 2013.
- [41] Cláudio Scherer. *Métodos computacionais da física*. Editora Livraria da Física, 2005.