UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Thiago Andrade Lins Cunha

Aritmética na OBMEP: Uma análise de questões da primeira fase do nível 3

RECIFE
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Thiago Andrade Lins Cunha

Aritmética na OBMEP: Uma análise de questões da primeira fase do nível 3

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eudes Mendes Barboza

RECIFE
2019

C972a Cunha, Thiago Andrade Lins
Aritmética na OBMEP: uma análise de questões da primeira fase do nível 3 / Thiago Andrade Lins Cunha. – 2019.
87 f. : il.

Orientador: Eudes Mendes Barboza.
Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Recife, BR-PE, 2019.
Inclui referências e apêndice(s).

1. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas 2. Matemática - Competições - Brasil 3. Matemática - Exames - Brasil 3. Escolas públicas - Brasil I. Barboza, Eudes Mendes, orient. II. Título

CDD 370

Thiago Andrade Lins Cunha

ARITMÉTICA NA OBMEP – UMA ANÁLISE DE QUESTÕES DA PRIMEIRA FASE DO NÍVEL 3

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 27 / 06 / 19

BANCA EXAMINADORA

Eudes Mendes Barboza

Prof. Dr. Eudes Mendes Barboza (Orientador) – PROFMAT/UFRPE

Mariana de Brito Maia

Profa. Dra. Mariana de Brito Maia – PROFMAT/UFERSA

José Deibsom

Prof. Dr. José Deibsom da Silva– PROFMAT/UFRPE

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus por ter me dado força para persistir até aqui.
Gostaria de externar meu reconhecimento a todos que de alguma forma participaram desta minha jornada acadêmica. Em especial, agradeço a meu orientador, Prof Dr Eudes Mendes Barboza, pelas intervenções seguras e oportunas, pelo compartilhamento de ideias, por sua conduta humana e paciente, por sua atenção, e pelas valiosas contribuições para a execução da presente pesquisa.

A minha família, por todo apoio, educação e criação. Em especial a minha querida esposa Nathália pela compreensão, paciência e pelo apoio incondicional. Muito obrigado! Meu amor e admiração por você é Incalculável. Aos meus pais Carlos e Diná pelo exemplo de seres humanos e pelos ensinamentos que alicerçaram minha caminhada. As minhas irmãs Daniela, Juliana e Késia que sempre foram apoio incondicional na minha trajetória de estudos.

Agradeço também aos professores do curso, pois foram relevantes para a realização deste trabalho. Agradeço a coordenação do PROFMAT, em especial a Professora Anette , por tudo o que fez pelo melhor andamento do curso e por todo o apoio prestado a mim e meus colegas.
Aos companheiros do PROFMAT, que passaram esses últimos anos dando força uns aos outros. Não tenho palavras para descrever o quão bom foi passar todo esse tempo com vocês, em especial a Elizeu, Eduardo, Maurílio, Eldaline e José Ricardo pela inspiração, motivação, e carinho comigo.

"Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12.2)

Declaração

Eu, **Thiago Andrade Lins Cunha** declaro, para devidos fins e efeitos, que a dissertação sob título "**Aritmética na OBMEP: Uma análise de questões da primeira fase do nível 3**", entregue como trabalho de conclusão de curso para obtenção do título de mestre. Com exceção das citações diretas e indiretas claramente indicadas e referenciadas, é um trabalho original. Eu estou consciente que a utilização de material de terceiros incluindo o uso de paráfrase sem as devidas indicações das fontes será considerado plágio e estará sujeito a processos administrativos da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais. Declaro ainda que respeitei todos os requisitos dos direitos de autor e isento a pós-graduação PROFMAT/UFRPE ,bem como o professor orientador **Dr. Eudes Mendes Barboza** de qualquer ônus ou responsabilidade sobre a sua autoria.

Recife, 27 de junho de 2019.

THIAGO ANDRADE LINS CUNHA.

Thiago Andrade Lins Cunha

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal analisar questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) com ênfase em aritmética, sugerindo alguns procedimentos didáticos e comentários complementares para servir de apoio na elaboração de um material que poderá ser aproveitado para possíveis e futuras formações dada aos professores do Ensino Médio, podendo também servir a estudantes que pretendem participar de Olimpíadas de Matemática. Ao ler esse material completo e fazendo algumas adaptações coerentes, o professor poderá aproveitar essa seleção de questões analisadas numa avaliação em grupo com resolução de problemas em sala de aula. Para isso, foram filtradas e solucionadas as questões de aritmética do nível 3, presentes na OBMEP do ano de 2005 até 2018 com o objetivo de facilitar o trabalho de quem for pesquisar um material de estudos sobre aritmética que atualmente na base curricular do Ensino Básico é conhecida como "Números e operações".

Palavras-chave: Aritmética, OBMEP, Resolução de problemas, Formação de professores, Números e operações.

Abstract

This work has as main objective to analyze questions of the OBMEP with an emphasis on arithmetic, to serve of support the elaboration of a material that can be used for possible and future formations given to the teachers of the High School, so that this also serves for students who intend to participate in the Brazilian Mathematical Olympiad. By reading this complete material and making some coherent adaptations, the teacher can take advantage of this selection of issues analyzed in a group assessment with problem solving in the classroom. For this, all questions of arithmetic were filtered and solved present in the Brazilian Mathematics Olympiad of the Public Schools-OBMEP from 2005 to 2018 with the purpose of facilitating the work of those who are researching a study material on arithmetic.

Keywords: Arithmetic, OBMEP, Problem solving, Teacher training, numbers and operations.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Questão 5 (OBMEP- Nível 3 - 2006) 48
Figura 2 – Questão 13 (OBMEP- Nível 3 - 2008) 57
Figura 3 – Questão 18 (OBMEP- Nível 3 - 2011) 61
Figura 4 – Questão 19 (OBMEP- Nível 3 - 2011) 62
Figura 5 – Questão 3 (OBMEP- Nível 3 - 2012) 63
Figura 6 – Solução da questão 3 (OBMEP- Nível 3 - 2012) 64
Figura 7 – Questão 9 (OBMEP- Nível 3 - 2012) 65

Sumário

INTRODUÇÃO 17

1 OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA 19
1.1 UM POUCO MAIS SOBRE AS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA 19
1.2 A Nova Base Nacional Curricular Comum e os Parâmetros Curriculares Nacionais relacionados ao contexto de números e operações 22
1.2.1 Os Parâmetros Curriculares Nacionais 22
1.2.2 A Base Nacional Comum Curricular 23

2 UM POUCO SOBRE ARITMÉTICA 25

Um pouco sobre aritmética 25
2.1 O que é aritmética? 25
2.2 Resultados importantes dos Números Naturais e Inteiros . . . 25
2.2.1 Algoritmo da divisão 27
2.2.2 Números Primos 28
2.2.3 Múltiplos e Divisores dos números Naturais 30
2.2.4 Sistema de numeração e algumas aplicações 33
2.2.5 Teorema de Legendre 35
2.2.6 Noções de Equação Diofantina Linear 39
2.2.7 Congruência Modular 40
2.3 Quadrados Mágicos 42

3 PROBLEMAS, SOLUÇÕES, COMENTÁRIOS E SUGESTÕES 47
3.1 Problemas, Soluções, Comentários e Sugestões 47

Conclusão 83

Apêndice 85

Referências 87

INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática pode de certa forma se tornar mais atrativo quando é aplicado a uma realidade mais próxima do estudante, motivando-o e desafiando-o a interpretar e resolver situações problemas. Jogos, desafios e gincanas podem ser considerados como exemplos e metodologias no ensino da Matemática. Nesse aspecto, as olimpíadas de Matemática ganham um destaque no Ensino Básico e vêm a cada ano crescendo no Brasil. Através das olimpíadas os estudantes podem se sentir mais instigados a desenvolver um raciocínio lógico matemático surpreendente, assim pode ser possível filtrar os candidatos com grandes habilidades nessa disciplina. As olimpíadas de Matemática podem ser muito importante na motivação de aprendizagem e incentivo ao raciocínio lógico usado em problemas interessantes e aplicáveis ao cotidiano dos estudantes.

É bastante comum um professor no período de formação escolar ou nos planejamentos pedagógicos aproveitar o período de planejamento periódico destinar uma parte desse tempo para elaborar suas listas de exercícios, cronogramas, preparar suas aulas, planejar algum material pedagógico para a escola ou de algum curso, bem como elaborar as suas avaliações. Então, é sempre bem-vinda uma ajuda que possibilite a aceleração dessa etapa de atividade extra-classe do professor. Visando essa perspectiva, iremos montar um possível banco de questões com todos os problemas do eixo matemático "números e operações"desde 2005 até o ano de 2018, com resoluções sugeridas, dando mais alternativas para pensar e resolver determinados problemas e sugerindo algumas vezes meios que tornem o aluno mais curioso e participativo na disciplina de Matemática.

Quase sempre é necessário uma boa estratégia de solucionar um determinado problema. É onde entra a criatividade e experiência do professor para tornar o conteúdo bem aceito pelos estudantes. É possível que o professor consiga motivar os seus estudantes a gostarem mais de Matemática usando problemas interessantes na concepção do aluno, pois para muitos deles a Matemática não é a disciplina preferida e sim, uma das mais difíceis, mas ao terem contato com os problemas mais difíceis de aritmética das provas de Olimpíadas Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas (OBMEP), o estudante pode ficar curioso e despertar uma maior interação com os colegas e professor.

O maior objetivo desse trabalho é fazer uma análise que sirva para uma elaboração de material por parte dos professores atribuindo um suporte a mais para estudar e discutir em sala de aula as questões de aritmética da primeira fase do Nível 3 das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas desde o ano de 2005 até 2018. A importância desse material consiste em poder ser usado como banco de questões para que o professor otimize seu tempo elaborando aulas sobre esse tema.

Inicialmente quando foi definido o tema para esse trabalho de conclusão de curso, foi feita uma análise em todas as questões da primeira fase nível 3 das provas da OBMEP de 2005 até 2018. Foram 14 provas analisadas nas quais eram compostas por 20 questões no total de diversos conteúdos da grade curricular de Matemática, mas em média apareciam entre 2 ou 3 questões de aritmética em cada ano. Essas questões foram encontradas no site oficial das olimpíadas brasileira de Matemática nas escolas públicas (OBMEP, 2019). Em seguida, buscou-se resolver cada problema sem verificar as respostas disponibilizadas no site da OBMEP. Posteriormente, comparou-se as respostas obtidas e analisou-se quais conteúdos poderiam ser contemplados em cada questão selecionada. Por fim, pensou-se em propor atividades e/ou abordagem baseadas em cada uma dessas questões que pudessem ser aproveitadas pelo professor em sala de aula.

No primeiro capítulo vamos abordar as informações estatística pertinente a esse tipo de olimpíadas, destacando também alguns dados sobre as escolas participantes e contextos históricos importantes sobre essa modalidade de exame, apresentando também o impacto no ensino de Matemática e sua repercussão nacional. Ainda no primeiro capítulo destacaremos as relações entre a prova da OBMEP com os temas e tendências dos parâmetros Curriculares Nacionais e também relacionando com a Base Nacional Curricular Comum em Matemática associados ao eixo "números e operações". Em seguida, no segundo capítulo, apresentamos definições e resultados relativos a conteúdos vistos no Ensino Básico ou Superior que auxiliarão na resolução das questões selecionadas, destacando-se a teoria sobre, números naturais, números inteiros, divisibilidade, algoritmo da divisão Euclidiana, Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum(juntamente com suas aplicações), Números primos, sistema de numeração, teorema de Legendre, quadrados mágicos, congruências modulares e noções de equações Diofantinas. Por fim, iremos tratar no terceiro capítulo as resoluções de todos os problemas de aritmética analisados desde o ano de 2005 até o ano de 2018 comparando as resoluções proposta da OBMEP com algumas soluções sugeridas propondo ao leitor ideias e comentários a serem vivenciados e observados em sala de aula a fim de ter um material de apoio para os professores de Matemática.

1 ASPECTOS GERAIS SOBRE A OBMEP

1.1 UM POUCO MAIS SOBRE AS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

As primeiras olimpíadas que datam de cerca de 2500 a. C. não eram destinadas à modalidade científica, mas à esportiva, sendo iniciadas pela civilização grega em honra a Zeus no santuário de Olímpia - o que originou o termo olimpíada. O evento era tão importante naquela época que tinha o poder de interromper conflitos e até mesmo as guerras. As Olimpíadas perderam prestígio com o domínio romano na Grécia, no século II a.C. Em 392, o imperador Teodósio I converteu-se ao cristianismo e proibiu todas as celebrações pagãs, inclusive as Olimpíadas. A retomada das olimpíadas veio somente em 6 de abril de 1896, ano em que começava em Atenas, na Grécia, a primeira edição dos Jogos Olímpicos da era moderna.

No entanto, atualmente a conotação para olimpíadas ultrapassa o âmbito esportivo. Há várias competições em diversas áreas (como Matemática, Física, Robótica, História, etc) que são nomeadas de olimpíadas e que objetivam destacar talentos e fortalecer o espírito competitivo e a divulgação do conhecimento. Em particular, enfocaremos as Olimpíadas Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas (OBMEP).

Historicamente, de acordo com (OBM,) as Olimpíadas de Matemática começaram a ser disputadas em 1894 na Hungria. Posteriormente, competições similares passaram a ser realizadas também em outros países do leste europeu, como Bulgária, Romênia e Rússia. A primeira Olimpíada Internacional de matemática ocorreu na Romênia, em 1959. Aqui no Brasil, esse tipo de competição demorou um pouco mais a ser desenvolvido. A Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) organizou em 1979 a primeira Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) que desde o ano de 2017 se juntou a OBMEP. Alguns estados do Brasil também criaram suas olimpíadas estaduais, como por exemplo a Olimpíada Pernambucana de Matemática (OPEMAT), realizada pelo departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco desde 2015. Inclusive alguns municípios do Brasil nos dias atuais fazem essa competição de Matemática como a Olimpíada Pessoense de Matemática (OPM) realizada pela departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, desde o ano de 1990.

Agora apresentaremos um breve histórico das Olimpíadas Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas. A OBMEP surgiu para estimular o estudo da matemática, revelar talentos e criar um ambiente diferente e motivador na escola. A partir dessa competição os alunos mantém contato com questões interessantes e desafiadoras e são estimulados a trabalhar em grupo. As provas são dirigidas a alunos do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental e das três séries do Ensino Médio das redes municipal e estadual (e atualmente também da rede particular de ensino). A primeira OBMEP foi realizada em 2005, com a participação na primeira fase de 10,5 milhões de alunos, de 31 mil escolas. Na edição de 2018, foram reunidos 18.237.996 de estudantes de 54.498 escolas públicas em 99,44% dos municípios brasileiros (OBMEP EM NÚMEROS,).

Os sucessivos recordes de participação em cada ano subsequente fazem da OBMEP a maior competição de matemática do mundo, em quantitativo de estudantes escritos. É importante salientar que grande parte desses números, deve-se ao fato de que cada escola participante tem seus alunos automaticamente inscritos. Em 2010 a OBMEP atingiu o seu número máximo de candidatos inscritos para realizar esse exame, foi um total de 19.665.928 estudantes. A olimpíada é realizada pelos ministérios da Educação e da Ciência e Tecnologia e pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Conta ainda com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). De acordo com os regulamentos da OBMEP, no seu site oficial.

> Desde a edição de 2017, a OBM passou a ser integrada juntamente com a OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), com o objetivo de racionalizar a utilização dos recursos financeiros e humanos, bem como tornar mais eficientes os esforços pela divulgação e estímulo da matemática no Brasil. A OBMEP, até então, contemplava apenas os alunos da rede pública mas, com a integração, passou-se a contar, também, com a participação de discentes de instituições de ensino privadas. Estas mudanças coincidem com a instituição do Biênio da Matemática no Brasil (2017/2018), criado pela lei federal 13.358/16. (REGULAMENTO,)

De 2005 até 2016 a OBMEP ficou conhecida por ser uma avaliação feita apenas para estudantes das escolas públicas, sendo que desde o ano de 2017 os estudantes de escola particulares podem participar dessa modalidade, bastando que a mesma faça a sua inscrição pela internet acessando o site oficial <http://www.obmep.org.br/>. As duas fases da OBMEP servirão como classificatória para a OBM, que passará a ter apenas uma etapa com cerca de mil candidatos.

Apesar do nosso foco ser a OBMEP, faremos uma breve descrição dos histórico da OBM, visto que atualmente estas competições estão associadas. Ao longo desses anos, a OBM passou por diversas mudanças em seu formato, mas sempre manteve a ideia central que é de estimular o estudo da Matemática aos alunos, desenvolver e aperfeiçoar a capacitação dos professores, contribuir para a melhoria do ensino, além de descobrir novos jovens talentos. Segue abaixo algumas mudanças sofridas pela OBM durante esses anos em ordem cronológica. (OBM,)

- **Ano de 1979** - Criação da primeira Olimpíada Brasileira de Matemática;

- **Ano de 1991** - Divisão das olimpíadas em 2 níveis de dificuldade, onde o critério dessa divisão seria a idade ou escolaridade. O nível Júnior criado para alunos completando no máximo 15 anos em 1991 e uma segunda categoria chamada de nível Sênio para alunos cursando o ensino médio;

- **Ano de 1992** - Divisão em 2 fases de exame, sendo a primeira fase com 25 questões de múltipla escolha. Já a segunda fase sendo avaliada em 2 dias contendo 3 questões discursivas em cada dia.

- **Ano de 1998** - Nesse momento o nivelamento começa a ser separado por séries de ensino, como nos dias de hoje. Então, no nível I se submetem a prova estudantes do 6º e 7º ano do ensino fundamental. no nível II se submetem a prova estudantes do 8º e 9º ano do ensino fundamental. Por fim, no nível III se submetem a prova estudantes do ensino médio. Nesse ano, também foram definidas três fases de provas, sendo na primeira fase com 20 ou 25 questões de múltipla escolha.

- **Ano de 1999** - A prova do nível II passa a ser realizada em dois dias.

- **Ano de 2001** - É criado o nível universitário, com duas fases.

  Essa modalidade é destinada aos estudantes de graduação em qualquer curso superior e em qualquer período. Basta apenas que os interessados entrem no site oficial e façam suas inscrições.

- **Ano de 2017** - A OBM se integra à Olimpíada Brasileira de Matemática nas Escolas Públicas (OBMEP), realizando apenas a fase única para os níveis I, II e III. Mantendo o nível universitário realizado em duas fases.

- **Ano de 2018-2019** Estudantes premiados pela OBM ou OBMEP nos anos de 2017 e 2018 puderam se inscrever em um novo processo de ingresso ao ensino superior na Universidade Estadual de Campinas(UNICAMP). Dos 76 estudantes que garantiram vaga na graduação da UNICAMP por meio de uma nova modalidade de inserção ao Ensino Superior, destinada a premiados em competições de conhecimentos, 23 são medalhistas de ouro, prata ou bronze na OBMEP e na OBM.

1.2 A Nova Base Nacional Curricular Comum e os Parâmetros Curriculares Nacionais relacionados ao contexto de números e operações

Nessa secção, iremos apresentar alguns trechos dos documentos oficiais acerca da Educação Básica. Dando ênfase ao ensino de matemática no eixo "Números e Operações".

1.2.1 Os Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) são diretrizes elaboradas para orientar os educadores por meio da normatização de alguns aspectos fundamentais padronizando cada disciplina que constituem um referencial de qualidade para a Educação Básica em todo o País. Na década de 90, o governo foi responsável pela sua elaboração, tinha como objetivo de orientar os professores educadores tanto da rede pública de ensino com também a rede particular. Em resumo, os PCNs são basicamente um conjunto de referências e instruções para os objetivos, conteúdos e didática do ensino, fazendo parte do cotidiano e da prática pedagógica, de modo que o professor possa ser transformado e transformador. Um Educador ao ler os Parâmetros Curriculares Nacionais e aplicar o seu entendimento poderá melhorar sua vivência com a revisão de suas metodologias, conteúdos, formas de encaminhamento das atividades, expectativas de aprendizagem, maneiras de avaliar, entre outras atividades vivenciadas no ambiente da educação escolar. O PCN norteia o educador sobre o que é possível fazer para sanar os problemas que dificultam a aprendizagem dos alunos. Cabe ao professor identificar os alunos que já estão munidos de uma bagagem razoável de conhecimentos lógicos e matemáticos. Isso só facilitará o processo. No entanto, alguns alunos não conseguem mostrar suas ideias usando adequadamente a linguagem matemática. Por isso, o PCN Matemática ajuda o professor a diagnosticar o domínio que cada aluno tem sobre os conteúdos a serem abordados, além de identificar quais são suas possibilidades e dificuldades diante da aprendizagem desses conteúdos. Afirma-se ainda que:

> É importante destacar que a Matemática deverá ser vista pelo aluno como um conhecimento que pode favorecer o desenvolvimento do seu raciocínio, de sua sensibilidade expressiva, de sua sensibilidade estética e de sua imaginação. (BRASIL, 1998)

A Matemática geralmente é uma disciplina considerada difícil e com baixa compreensão para alguns estudantes do Ensino Básico, e em muitas vezes é vista com pouca utilidade prática, gerando representações e sentimentos que afastarão o aluno do conhecimento matemático. É muito comum um professor de matemática ser questionado por um estudante que esteja disperso na escola "Por que eu tenho que aprender esses conteúdos de Matemática se minha área de atuação será Ciências Humanas?"ou "Aonde eu vou usar determinado conteúdo na vida prática?"dentre outras indagações para as quais o professor poderá ficar numa situação difícil sem saber dar uma resposta convincente.

Nesse contexto, para tornar as aulas mais atrativas podemos associar a resolução de problemas da OBMEP, na perspectiva dos professores de matemática, possibilita aos alunos aprimorar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance, melhorando o seu raciocínio lógico matemático. Assim, os alunos terão oportunidade de melhorar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos, ampliando a visão que eles têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança. Sendo assim, os problemas no ensino e aprendizagem da matemática tem como propósito desenvolver a capacidade dos alunos de interpretação e organização dos conhecimentos adquiridos, possibilitando assim construir ideias, conceitos, autonomia e confiança. Segundo o (BRASIL, 1998, p.41) “Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la”.

1.2.2 A Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. Ao longo da Educação Básica, as aprendizagens essenciais definidas na BNCC devem ocorrer para assegurar aos estudantes o desenvolvimento de competências gerais, que consubstanciam, no âmbito pedagógico, os direitos de aprendizagem e desenvolvimento. Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2017).

Com base nos recentes documentos curriculares brasileiros, a BNCC leva em conta que os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de ideias fundamentais que produzem articulações entre eles: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. Essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento. A BNCC propõe então cinco unidades temáticas,(*Números e operações, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e estatística*). Daremos enfoque na unidade temática "Números e Operações"pois aborda em maior quantidade os temas discutidos nos próximos capítulos.

A unidade temática **Números e Operações** tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da

Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações (BRASIL, 2017).

Em relação aos **Números**, os estudantes do Ensino Fundamental têm a oportunidade de desenvolver habilidades referentes ao pensamento numérico, ampliando a compreensão a respeito dos diferentes campos e significados das operações. Para isso, propõe-se a resolução de problemas envolvendo números naturais,inteiros, racionais e reais, em diferentes contextos (do cotidiano, da própria Matemática e de outras áreas do conhecimento). Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, conforme anteriormente anunciado. Nesse contexto, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, envolvidos, em diferentes graus dados por suas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros (BRASIL, 2017).

Dessa forma, as Olimpíadas de Matemática podem ajudar no processo educacional dos estudantes pois em muitas situações tornam-os mais curiosos na disciplina e dependendo do tipo de problema discutido pode estimulá-los a interagir a pensar em situações lógicas e importantes em seu cotidiano.

2 Um pouco sobre aritmética

2.1 O que é aritmética?

A aritmética é uma parte da matemática que estuda os números e as possíveis operações que podem ser realizadas entre eles. Do ponto de vista etimológico, a palavra aritmética vem do latim *arithmetica*, que por sua vez, tem origem no termo grego *aritmetikos*, composta pela raiz *arithmos* que significa números e pelo sufixo *tiko* que quer dizer ciência. Desta forma, a aritmética pode ser definida como a "ciência dos números". Além disso, a aritmética é o ramo mais antigo e elementar da matemática, pois é utilizada na maior parte do mundo para as tarefas do cotidiano mais básicas. Mas a aritmética também tem as suas complexabilidades, que exigem cálculos e manipulações estratégicas. Inclusive, existem diversos problemas de aritmética ainda não solucionados até os dias de hoje.

Em resumo, quando se explica na escola uma aritmética elementar, estamos pensando nas operações básicas da Matemática, como adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação. A aritmética possui um lugar fundamental no processo educativo. Normalmente, as crianças iniciam o estudo da matemática através dela. Num primeiro momento, os alunos iniciam a aprendizagem com as operações mais simples e intuitivas através da soma e da subtração. Uma vez que já se tem este domínio, os alunos passam para a aprendizagem das tabelas de multiplicação e divisão. Quando estas bases aritméticas se encontram mais sólidas é possível continuar com o ensino das áreas mais abstratas como a álgebra, geometria e outras de maior complexidade (ANTÔNIO, 2016).

2.2 Resultados importantes dos Números Naturais e Inteiros

Nessa secção, iremos apresentar alguns resultados importantes em matemática que em geral dão suporte a resolução de problemas associados ao eixo do currículo de matemática "Números e Operações"nas questões da OBMEP. Como algumas demonstrações precisam de outras ideias preliminares, aqui apresentamos apenas os resultados e indicaremos as referências de suas devidas demonstrações.

Observação 2.1. Representaremos o conjunto dos números naturais por

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

e denotaremos por $\mathbb{N}^*$ o conjunto $\mathbb{N} - \{0\}$.

Analogamente representaremos o conjunto dos números inteiros por

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3-2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

e denotaremos por $\mathbb{Z}^*$ o conjunto $\mathbb{Z} - \{0\}$.

A seguir listaremos alguns axiomas em respeito dos números naturais

Observação 2.2. O número $a \times b$ será chamado o produto de a por b e será também denotado por $a \cdot b$ ou simplesmente ab, quando não houver risco de confusão (HEFEZ, 2015, p.24).

1. A adição e a multiplicação são bem definidas:
   $\forall\ a, b, c, d \in \mathbb{N},\ a = c$ e $b = d \Longrightarrow a + b = c + d$ e $a \cdot b = c \cdot d$.

2. A adição e a multiplicação são comutativas:
   $\forall\ a, b \in \mathbb{N},\ a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$.

3. A adição e a multiplicação são associativas:
   $\forall\ a, b, c \in \mathbb{N},\ (a + b) + c = a + (b + c)$ e $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

4. A adição e a multiplicação possuem elementos neutros:
   $\forall\ a \in \mathbb{N},\ a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$.

5. A multiplicação é distributiva com relação à adição:
   $\forall\ a, b, c \in \mathbb{N},\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

6. Integridade: Dados a, $b \in \mathbb{N}^*$, tem-se que $(a + b) \in \mathbb{N}^*$ e $a \cdot b \in \mathbb{N}^*$. Em consequência dessa propriedade, temos que $\forall\ a, b \in \mathbb{N},\ a \cdot b = 0 \Longrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

7. Tricotomia: Dados a, $b \in \mathbb{N}$, tem-se uma, e apenas uma, das seguintes possibilidades que é verificada: (i) $a > b$ ou (ii) $a = b$ ou (iii) $a < b$.

Na primeira propriedade é permitido somar, a ambos os lados de uma igualdade, um dado número, ou multiplicar ambos os membros por um mesmo número. Usamos com frequência na manipulação numérica e é essa a ideia introduzida no estudo das equações de primeiro grau. Na segunda propriedade percebemos que a ordem dos termos na adição não altera a soma, e que a ordem dos fatores na multiplicação não altera o produto. A terceira propriedade serve principalmente para manipular expressões numéricas facilitando alguns resultados mais rapidamente. A quarta propriedade evidencia que o elemento neutro da adição é o número 0, e que o elemento neutro da multiplicação é o número 1. A quinta propriedade sugere a ideia do algoritmo da multiplicação de números naturais. A sexta propriedade acima é uma ideia apresentada em aritmética que também é muito discutida nas estruturas algébricas, muito usada também para resoluções de equações polinomiais e/ou fatoração de polinômios. Por fim, a sétima propriedade dá uma ideia de ordenação dos números por um sistema de comparação.

Definição 2.3. Dados dois números naturais $a \neq 0$ e n qualquer, definimos a operação de potenciação da seguinte maneira.

$$a^n = \begin{cases} 1, & se \quad n = 0 \\ a, & se \quad n = 1 \\ \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \quad vezes} \end{cases}.$$

No estudo de potenciação a é denominado como base da potência, n é o expoente e o resultado a^n chamamos de potência. Define-se também $0^n = 0$, para todo $n \neq 0$ (HEFEZ, 2015, p.29).

No próximo capítulo iremos usar algumas propriedades de potências as quais são importantes destacar aqui.

1. Produto de bases iguais: $a^m \times a^n = a^{m+n}$.
2. Divisão de bases iguais: $a^m \div a^n = a^{m-n}$.
3. Potência de potência: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
4. Produto de potências com o mesmo expoente: $a^n \times b^n = (a \times b)^n$.

2.2.1 Algoritmo da divisão

Uma das propriedades mais importantes dos números inteiros é a possibilidade de dividir um número por outro. Essa é a chamada divisão euclidiana.

Teorema 2.4. *Dado $x,\ y \in \mathbb{Z}$, no qual $y \neq 0$, existem únicos inteiros q, r chamados respectivamente de quociente e resto, tais que*

$$x = qy + r; \quad 0 \leqslant r < \mid y \mid.$$

A demonstração desse teorema acima poderá ser acompanhada em (HEFEZ, 2014, p. 53). Por definição o número x é chamado de dividendo, o número y divisor, os números q e r são chamados, respectivamente, quociente e resto da divisão de x por y. Note que dados dois números naturais x e y, nem sempre x é múltiplo de y, este será o caso se, e somente se, $r = 0$, tornando a divisão exata. A grande questão é como determinar os números q e r na divisão euclidiana? Vamos acompanhar abaixo, como segue no texto

1. Caso $x < y$. Como $x = 0 \cdot y + x$, temos que $q = 0$ e $r = x$.
2. Caso $x = y$. Neste caso, tomamos $q = 1$ e $r = 0$.

3. Caso $x > y$. Podemos considerar a sequência:

$$x - y,\ x - 2y,\ x - 3y,\ \cdots\ ,\ x - ny,$$

até encontrar um número natural q tal que $x - (q+1)y < 0$, com $x - qy \geq 0$. Assim, obtemos $x = qy + r$, no qual $r = x - qy$ e, portanto $0 \leqslant r < \ |\ y\ |$.

Exemplo 2.5. Para dividir o número 174 por 14, determinamos os resultados da subtração de 174 pelos múltiplos de 14:

$$\begin{aligned}
174 - 14 &= 160;\\
174 - 2 \cdot 14 &= 146;\\
174 - 3 \cdot 14 &= 132;\\
174 - 4 \cdot 14 &= 118;\\
174 - 5 \cdot 14 &= 104;\\
&\vdots\\
174 - 12 \cdot 14 &= 6;\\
174 - 13 \cdot 14 &= -8 < 0.
\end{aligned}$$

Assim, a divisão euclidiana de 174 por 14 se expressa como:

$$174 = 12 \cdot 14 + 6.$$

É bastante comum o algoritmo ser usado como na armação abaixo, inclusive é o método ensinado para as crianças do Ensino Básico. Porém a ideia central é prevalecida, no qual sempre temos que *Dividendo* $=$ *quociente* $\times$ *divisor* $+$ *resto*.

$$\begin{array}{r|l}
174 & 14 \\ \cline{2-2}
34 & 12 \\
(6) &
\end{array}$$

2.2.2 Números Primos

O estudo dos números primos é muito importante na resolução de problemas de aritmética, pois esses números desempenham um papel fundamental na decomposição dos inteiros. Suas aplicações estão relacionadas a muitos problemas famosos cujas soluções tiveram resistência e esforços de várias gerações de grandes matemáticos. A seguir definiremos tais números.

Definição 2.6. Os números primos são todos os números naturais que só tem como divisores o 1 ou ele mesmo. Ou seja, cada número primo tem apenas dois divisores naturais.

Observação 2.7. É comum alguns autores considerarem também os números negativos como primos, estendendo a ideia de que teriam 4 divisores, (1 e -1) além do próprio número em questão e o seu oposto. Nessa secção iremos abordar apenas números naturais, pois as maiores aplicações desse tipo de número se dão com os números positivos.

Definição 2.8. Um número é maior do que l que não é primo será chamado composto.

Exemplo 2.9. Listaremos alguns números primos e alguns números que são compostos.

- Números primos $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \cdots, 2^{74.207.281} - 1, \cdots\}$ existem infinitos números primos. Observe que o único número primo natural que é par é o número 2.
- Números compostos $\{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, \cdots\}$. Observe todos esses números têm mais de 2 divisores naturais, dentre eles o divisor 1 e o próprio valor.

Apesar da definição de números primos ser simples, é difícil listá-los, principalmente quando são números primos grandes. Os matemáticos fazem estudos para encontrar outros números primos maiores tão grande quanto se queira. Recentemente foi descoberto o maior número primo conhecido pela humanidade. A GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search) que é o grupo de busca de números primos de Mersenne, utilizando para isso a fórmula matemática de Mersenne, anunciou recentemente (21 de dezembro de 2018) a descoberta do quinquagésimo primeiro (51º) número primo de Mersenne (que são números primos que podem ser escritos na forma $2^n - 1$, no qual n é um número natural. O número descoberto é $2^{82.589.933} - 1$ (apelidado de M82589933). Ele possui 24.862.048 dígitos - quase 1,5 milhões de dígitos a mais que o antigo recordista de maior número primo conhecido, um fato surpreendente.

Agora enunciaremos um importante resultado que relaciona números primos e compostos.

Teorema 2.10. *Dado um número natural $n > l$, existem primos $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ e $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$, univocamente determinados, tais que:*

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}.$$

A demonstração do teorema acima poderá ser encontrada em (HEFEZ, 2011, p.83). Diremos algumas vezes nas soluções do capítulo 3 que n foi decomposto em fatores primos. Algumas relações importantes dos números naturais são decorrentes dessa decomposição.

Teorema 2.11. *Seja $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ a decomposição em fatores primos do número n, então esse número possui $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$ divisores naturais.*

A demonstração desse resultado poderá ser consultada em (HEFEZ, 2011, p.84). Porém, de uma maneira mais didática para o Ensino Médio, o professor poderá usar a ideia do princípio multiplicativo com os expoentes das bases p_i, para saber quantos divisores naturais o número n possui, como no próximo exemplo abaixo.

Exemplo 2.12. Quantos divisores naturais tem o número 120?
Fazendo a decomposição em fatores primos do número 120, temos que $120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ dessa forma o número total de divisores naturais é $(3+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Os divisores seriam 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120.

Nesta seção falaremos de múltiplos e divisores e de algumas de suas propriedades.

2.2.3 Múltiplos e Divisores dos números Naturais

Um número é considerado divisível por outro quando o resto da divisão entre eles é igual a zero. Para que a divisão entre os números resulte em partes inteiramente iguais, necessitamos ter conhecimento sobre algumas regras de divisibilidade. Um critério é uma norma, um parecer. Divisibilidade, por sua vez, é a característica daquilo que se pode dividir (separar-se ou partir-se).

Definição 2.13. Dizemos que um número inteiro a é divisível por outro inteiro b quando quando existir um número k, com $k \in \mathbb{Z}$, tal que

$$a = b \cdot k.$$

Diremos nesse caso que b divide a e denotamos por $b|a$ ou equivalentemente que b é divisor de a. Também dizemos que a é um múltiplo de b.

Definição 2.14. Dados dois números naturais a e b, não simultaneamente nulos, diremos que o número natural $d \in \mathbb{N}^*$ é um divisor comum de a e b se $d|a$ e $d|b$. Dizemos que d é um Máximo Divisor Comum (MDC) de a e b, ou $d = mdc(a, b)$ se possuir as seguintes propriedades

1. d é um divisor comum de a e de b;
2. d é divisível por todo divisor comum de a e b.

Definição 2.15. Diremos que um número m é um Mínimo Múltiplo Comum (MMC) de a e b se possuir as seguintes propriedades:

- m é um múltiplo comum de a e b.

- Se c é um múltiplo comum de a e b, então $m|c$. Ou seja, dentre todos os divisores naturais comuns entre a e b, dizemos que m é o menor possível.

Por exemplo, 24 é um múltiplo comum de 4 e 6, mas não é um MMC destes números. O número 12 é um MMC de 4 e 6. Perceba que $12|24$, mas estamos interessados no menor possível. Escrevemos em notação que $mmc[4, 6] = 12$.

No Ensino Fundamental, o cálculo do MDC é abordado normalmente de 2 maneiras. A primeira maneira seria fazer a decomposição em fatores primos dos números a e de b podendo ser estendido para uma maior quantidade de números e depois escolher as bases em comum com o menor expoente possível, após fazer o produto dessas potências encontrará o Máximo Divisor Comum entres esses números. Uma outra maneira, é decompor os números a e b juntos, podendo ser estendido para uma maior quantidade de números e fazer uma marcação nos divisores comuns aos números a e b fazendo o produto desses números marcados, será encontrado também o Máximo Divisor Comum entres esses eles. Perceba que são métodos que usam o mesmo raciocínio, mas que em geral o estudante associa a algoritmos distintos. É muito viável fazer pela segunda opção quando se está interessado em calcular o MDC de 3 ou mais números.

Segue agora alguns exemplos nos quais calculamos o MDC e também o MMC entre alguns números abaixo.

Exemplo 2.16. Calcular o Máximo Divisor Comum (mdc) dos números 96, 120 e 144.

Pela primeira maneira citada acima, iremos escrever ambos os números no formato de sua fatoração. Sendo assim, tem-se $96 = 2^5 \cdot 3$, $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, e $144 = 2^4 \cdot 3^2$. Agora basta comparar as fatorações escolhendo as potências de bases em comum com o menor expoente possível. Escolhendo o fator 2^3, e também o fator 3, basta multiplicá-los. Dessa forma, verifica que $mdc(96, 120, 144) = 2^3 \cdot 3 = 24$. Já pelo segundo método, é sugerido que seja feita a decomposição de todos números de uma única vez, e seja marcado, diferenciando os divisores comuns a ambos os números, dessa forma o produto desses números marcados será o resultado do MDC, como é feito na tabela abaixo.

96, 120, 144	2^*
48, 60, 72	2^*
24, 30, 36	2^*
12, 15, 18	2
6, 15, 9	2
3, 15, 9	3^*
1, 5, 3	3
1, 5,1	5
1, 1, 1	

Assim concluímos que $mdc(96, 120, 144) = 2^3 \cdot 3 = 24$. Com esse método além de calcular o MDC é possível também descobrir qual o valor do Mínimo Múltiplo Comum entre esses números, bastando multiplicar todos os números primos da decomposição. Diremos que um número m é um múltiplo comum de dois números naturais na notação $[a, b]$ dados, se ele é simultaneamente múltiplo de ambos os números. Em especial, pode se verificar que o número $a \cdot b$ é sempre um múltiplo comum de a e também de b.

Exemplo 2.17. Calcular o *mmc* entre os números 96, 120 e 144.

$$\begin{array}{c|l} 96,\ 120,\ 144 & 2 \\ 48,\ 60,\ 72 & 2 \\ 24,\ 30,\ 36 & 2 \\ 12,\ 15,\ 18 & 2 \\ 6,\ 15,\ 9 & 2 \\ 3,\ 15,\ 9 & 3 \\ 1,\ 5,\ 3 & 3 \\ 1,\ 5{,}1 & 5 \\ 1,\ 1,\ 1 & \end{array}$$

Desta forma, verifica-se que $mmc[96, 120, 144] = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 = 1440$.

Proposição 2.18. *Dados dois números naturais a e b, temos que $d = mdc(a, b)$ e $m = mmc[a, b]$ existem e $mmc[a, b] \cdot mdc(a, b) = a \cdot b$.*

Ou seja, o produto entre os MMC e o MDC entre a e b é igual a produto ab. A demonstração poderá ser verificada em (HEFEZ, 2011, p.63). Como consequência da proposição acima, temos:

Corolário 2.19. *Se a e b são números naturais primos entre si, então significa que o maior divisor comum é igual a 1, dessa forma temos que $mmc[a, b] = a \cdot b$.*

O exemplo a seguir ilustra uma aplicação desse resultado.

Exemplo 2.20. (CN 1978- Adaptação do Colégio Naval- RJ) O produto do mínimo múltiplo comum pelo máximo divisor comum de dois múltiplos de um número inteiro N é 4235. Descubra o valor do número N.

Solução:

Fazendo a decomposição em fatores primos do número 4235, temos $4235 = 5 \cdot 7 \cdot 11^2$ e usando o resultado acima, sabemos que $mmc[a, b] \cdot mdc(a, b) = a \cdot b$ e desta maneira, $a \cdot b = 5 \cdot 7 \cdot 11^2$ então perceba que podemos ter $a = 7 \cdot 11 = 77$ e $b = 5 \cdot 11 = 55$ ou vice-versa. Ou seja, os 2 números procurados são 77 e 55 no qual ambos são múltiplos de 11, sendo assim $N = 11$.

De fato se a ou b fossem iguais a 1 poderia dar uma confusão na resolução pois $mmc[1, 4235] = 4235$ e $mdc(1, 4235) = 1$, tornando o produto de ambos igual a 4235, Porém o enunciado aborda que ambos os números deverão ser múltiplos de N, sendo assim nenhum dos números a ou b poderão ser 1.

2.2.4 Sistema de numeração e algumas aplicações

O nosso sistema de numeração é chamado de decimal, simplesmente pelo fato de que podemos representar qualquer número inteiro usando uma sequência formada pelos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0. O símbolo zero é usado na ausência de valor. Quando são estudadas as classes e ordens numérica percebemos que ao trocar posições de símbolos é encontrado um outro valor numérico, como por exemplo, no número 523, ao trocar o 3 pelo 5 teríamos 325 configurando um outro valor, isso ocorre devido ao nosso sistema ser posicional, no qual cada posição define uma quantidade associada. No nosso sistema de numeração decimal, cada posição de algarismo representa uma quantidade múltipla de alguma potência de base dez.

Quando estudamos aplicações do sistema de numeração de um número a na base decimal e queremos transformar numa base $b > 1$. Estamos interessados em fazer com que esse número a possa ser obtido com um somatório de parcelas de modo que cada uma dessas seja um múltiplo de uma potência da base b e podemos escrever esse somatório fazendo algumas divisões de a por b usando o teorema que será citado abaixo. Em geral os problemas mais frequentes nos materiais que estão na referência desse trabalho, são considerados por alguns como problemas clássicos, pois são abordados diversas vezes em provas olímpicas e militares ou em treinamentos olímpicos. Nesse tipo de problema é solicitado geralmente passar da base decimal para outra base menor. Muitas vezes considerando a base binária(Que não é decimal), na qual $b = 2$, implicando que só poderá ser usado os símbolos 0 e 1 que são os possíveis restos na divisão por 2. Esse sistema binário tem muitas aplicações na informática. Veremos agora alguns resultados que tratam desse tema.

Teorema 2.21. *Sejam dados os números inteiros a e b, Com $a > 0$ e $b > 1$. Existem números inteiros $n \geq 0$ e $0 \leqslant r_0, r_1, \cdots, r_n < b$, com $r_n \neq 0$, univocamente determinados, tais que $a = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + \cdots + r_n b^n$.*

Sua demonstração poderá ser encontrada em (HEFEZ, 2014, p. 123)

Observação 2.22. A notação $[xy \cdots zw]_b$ significa que podemos escrever esse número na base b como $x.b^{n-1} + y.b^{n-2} + \cdots + z.b + w.b^0$, no qual n é o total de algarismos na base b.

Exemplo 2.23. Seja dado o número 5283 na base 10, escreva-o na base 2 e na base 8.

Primeiro vamos escrever esse número na base 2 (Sistema de numeração binária). Para isso, iremos fazer sucessivas divisões por 2.
$5283 = 2 \cdot 2641 + 1$, $2641 = 2 \cdot 1320 + 1$, $1320 = 2 \cdot 660 + 0$, $660 = 2 \cdot 330 + 0$, $330 = 2 \cdot 165 + 0$, $165 = 2 \cdot 82 + 1$, $82 = 2 \cdot 41 + 0$, $41 = 2 \cdot 20 + 1$, $20 = 2 \cdot 10 + 0$, $10 = 2 \cdot 5 + 0$, $5 = 2 \cdot 2 + 1$, $2 = 2 \cdot 1 + 0$, $1 = 2 \cdot 0 + 1$. Agora anote os restos, sendo assim, temos (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0,1). E desta forma podemos escrever que o número 5283 na base decimal quando é escrito na base 2, fica $[1010010100011]_2 = 1.2^{12} + 0.2^{11} + 1.2^{10} + 0.2^9 + 0.2^8 + 1.2^7 + 0.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 0.2^3 + 0.2^2 + 1.2 + 1.2^0$.

Agora iremos escrever 5283 na base 8. Para isso, iremos fazer sucessivas divisões por 8. $5283 = 8 \cdot 660 + 3$, $660 = 8 \cdot 82 + 4$, $82 = 8 \cdot 10 + 2$, $10 = 8 \cdot 1 + 2$, $1 = 8 \cdot 0 + 1$. Perceba que usamos sucessivas vezes o algoritmo da divisão, de modo que os restos foram (3, 4, 2, 2, 1) e dessa forma podemos escrever que 5283 na base 8 é escrito como $1.8^4 + 2.8^3 + 2.8^2 + 4.8 + 3$ que por nossa notação pode ser também escrita como $[12243]_8$. Perceba que para escrever um número na base 8 os seus algarismos só podem variar de 0 até 7, pois usam 8 símbolos.

Exemplo 2.24. Seja o número $[6232]_7$, escreva-o na base 5.

Inicialmente temos que escrever o número $[6232]_7$ na base 10. Daí temos $6232 = 6 \cdot 7^3 + 2 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 7^0 = 2058 + 98 + 21 + 2 = 2179$ e podemos concluir que $[6232]_7 = [2179]_{10}$. O próximo passo agora é escrever o número $[2179]_{10}$ na base 5 como propõe o exercício. Então vamos fazer algumas divisões euclidianas do número 2179 por 5. Dessa forma, temos que $2179 = 5 \cdot 435 + 4$; $435 = 5 \cdot 87 + 0$; $87 = 5 \cdot 17 + 2$; $17 = 5 \cdot 3 + 2$ e $3 = 5 \cdot 0 + 3$. Perceba que usamos sucessivas vezes o algoritmo da divisão, de modo que os restos foram (4, 0, 2, 2, 3) e dessa forma podemos escrever que 2179 na base 5 é escrito como $3.5^4 + 2.5^3 + 2.5^2 + 0.5 + 4$ que por nossa notação pode ser também escrita como $[32204]_5$. Perceba que para escrever um número na base 5 os seus algarismos só podem variar de 0 até 4, pois usam 5 símbolos.

No capítulo 3 usaremos algumas vezes o critério de divisibilidade do 3 e também o critério do 9. Por esse motivo apresentaremos o resultado abaixo.

Proposição 2.25. *Considere $a = r_0 + r_1.10 + r_2.10^2 + \cdots + r_n.10^n$ um número representado no sistema decimal. Uma condição necessária e suficiente para que a seja divisível por 3 ou por 9 é que $r_n + r_{n-1} + \cdots + r_1 + r_0$, ou seja, a soma dos algarismos ser divisível por 3 ou por 9, respectivamente (HEFEZ, 2011).*

1. (Critério de divisibilidade por 2): Um número é divisível por 2 se, e somente se, o seu algarismo das unidades é par.

2. (Critério de divisibilidade por 5 ou por 10): Um número é divisível por 5 se, e somente se, o seu algarismo das unidades for 0 ou 5. Um número é divisível por 10 se, e somente se, o seu algarismo das unidades for 0.

3. (Critério de divisibilidade por 11): Um número é divisível por 11, caso a soma dos algarismos de ordem par subtraídos da soma dos algarismos de ordem ímpar, resultar em um número divisível por 11. Caso o resultado seja igual a 0, pode-se afirmar também que é divisível por 11.

4. (Critério de divisibilidade por 100): Um número é divisível por 100 se, e somente se, os seus algarismos da unidade e também da dezena forem zero. Ou seja, quando o número terminar em pelo menos dois zeros.

5. (Critério de divisibilidade por 1000): Um número é divisível por 1000 se, e somente se, os seus algarismos da unidade, dezena e também da centena forem zero. Ou seja, quando o número terminar em pelo menos três zeros.

2.2.5 Teorema de Legendre

Adrien-Marie Legendre foi um matemático que nasceu na França em 18 de setembro de 1752, numa família rica. Foi-lhe dada uma educação de qualidade superior no Collège Mazarin em Paris, elaborando sua tese em física e matemática em 1770. A maior parte da sua obra foi completada por outros: seu trabalho sobre raízes polinomiais inspirou a teoria de Galois, o trabalho de Abel sobre funções elípticas foi construído sobre o de Legendre; alguns dos trabalhos de Gauss na teoria dos números e estatística completou os de Legendre. Ele desenvolveu o método dos mínimos quadrados, que tem ampla aplicação na regressão linear, processamento de sinais, estatística e ajuste de curvas. Na teoria dos números, ele conjecturou a lei da reciprocidade quadrática, posteriormente comprovada por Gauss. Em adição, o símbolo de Legendre tem esse nome em sua homenagem. Ele também fez um trabalho pioneiro sobre a distribuição dos números primos, e sobre a aplicação da análise à teoria dos números.

Resumindo, Legendre fez importantes contribuições à estatística, teoria dos números, álgebra abstrata e análise matemática. Nessa secção apresentaremos um resultado bastante útil quando se trata de decomposição em fatores primos de números fatoriais. Não pertence a grade curricular do Ensino Médio e é pouco visto nos cursos de graduação, embora seja de grande importância, pois em diversas provas de nível olímpico ou de nível militar são abordados problemas de decomposição em fatores primos de números fatoriais e/ou suas aplicações. Vejamos abaixo algumas definições que são necessárias para enunciar o Teorema de Legendre.

Definição 2.26. A parte inteira de um número real x é o maior inteiro $\lfloor x \rfloor$ que não é maior que x. Definimos a parte fracionária $\{x\}$ de x por $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Essa definição serve para verificar algumas propriedades na teoria dos números, inclusive iremos usar no teorema seguinte. Mas antes daremos alguns exemplos sobre essa função da parte inteira de um número.

Exemplo 2.27. Determine a parte inteira e a parte fracionária dos números abaixo, usando a definição.

- Parte inteira da divisão é $\lfloor \frac{15}{2} \rfloor = \lfloor 7,5 \rfloor = 7$. Para calcular a parte fracionária usamos a fórmula $\{\frac{15}{2}\} = 7,5 - \lfloor 7,5 \rfloor = 7,5 - 7 = 0,5$.
- Parte inteira da divisão é $\lfloor -\frac{11}{8} \rfloor = \lfloor -1,75 \rfloor = -2$. Para calcular a parte fracionária usamos a fórmula $\{-\frac{11}{8}\} = -1,75 - \lfloor -1,75 \rfloor = -1,75 - (-2) = 0,25$.

Em problemas de decomposição de um número fatorial, ou quando estamos interessados em saber qual é a maior potência de uma base específica que seja divisor de um número fatorial, é conveniente usar o Teorema de Legendre pois é possível descobrir qual o expoente de cada base prima. Em particular, a notação $E_p(n!)$ significa o valor do maior expoente da base p de modo que essa potência seja divisor de $n!$.

Exemplo 2.28. Encontre a maior potência de base 2 que seja um divisor do número 10!.

Em outras palavras, queremos calcular $E_2(10!)$. A resposta seria 8. Portanto teríamos que $2^8 \mid 10!$ e além disso, esse é o maior expoente da base 2, que torna a potência de base 2 um divisor de 10!. Vejamos agora o Teorema de Legendre.

Teorema 2.29. *Sejam α e n números naturais e p um número primo. Então,*

$$E_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor.$$

Resumidamente, temos que dado $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1) \cdot n$ de modo que $n > p$, então a primeira parcela $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ é equivalente a quantidade de múltiplos de p de 1 até n, a segunda parcela $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$ é equivalente a quantidade de múltiplo de p^2 de 1 até n, a terceira parcela $\left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor$ é equivalente a quantidade de múltiplo de p^3 de 1 até n. Seguindo esse raciocínio até a parcela $\left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor$. A sua demonstração formal poderá ser verificada em (HEFEZ, 2014, p. 176 e p.177).

Perceba que $E_p(n!)$ é um número finito e quando $p^\alpha > n$ implica nas parcelas de partes inteiras serem nulas. Ou seja, α é o maior expoente de p de modo que a potência não ultrapasse n.

Exercício 2.30. Mostre a forma da decomposição em fatores primos do número 30!.

Inicialmente iremos descobrir quais são os primos p menores que 30. Daí temos (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29). Então devemos calcular $E_p(30!)$ para todos esses casos.

- $E_2(30!) = \left\lfloor \frac{30}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30}{2^4} \right\rfloor = 15+7+3+1 = 26$. Então significa que $2^{26}|30!$, e deste modo 2^{26} é a maior potência de 2 que é divisor de 30!.

- $E_3(30!) = \left\lfloor \frac{30}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30}{3^3} \right\rfloor = 10 + 3 + 1 = 14$. Então significa que $3^{14}|30!$, e deste modo 3^{14} é a maior potência de 3 que é divisor de 30!.

- $E_5(30!) = \left\lfloor \frac{30}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{30}{5^2} \right\rfloor = 6 + 1 = 7$. Então significa que $5^7|30!$, e deste modo 5^7 é a maior potência de 5 que é divisor de 30!.

- $E_7(30!) = \left\lfloor \frac{30}{7} \right\rfloor = 4$. Então significa que $7^4|30!$, e deste modo 7^4 é a maior potência de 7 que é divisor de 30!.

- $E_{11}(30!) = \left\lfloor \frac{30}{11} \right\rfloor = 2$. Então significa que $11^2|30!$, e deste modo 11^2 é a maior potência de 11 que é divisor de 30!.

- $E_{13}(30!) = \left\lfloor \frac{30}{13} \right\rfloor = 2$. Então significa que $13^2|30!$, e deste modo 13^2 é a maior potência de 13 que é divisor de 30!.

- $E_{17}(30!) = \left\lfloor \frac{30}{17} \right\rfloor = 1$. Então significa que apenas $17|30!$, e deste modo 17^1 é a maior potência de 17 que é divisor de 30!.

- $E_{19}(30!) = \left\lfloor \frac{30}{19} \right\rfloor = 1$. Então significa que apenas $19|30!$, e deste modo 19^1 é a maior potência de 19 que é divisor de 30!.

- $E_{23}(30!) = \left\lfloor \frac{30}{23} \right\rfloor = 1$. Então significa que apenas $23|30!$, e deste modo 23^1 é a maior potência de 23 que é divisor de 30!.

- $E_{29}(30!) = \left\lfloor \frac{30}{29} \right\rfloor = 1$. Então significa que apenas $29|30!$, e deste modo 29^1 é a maior potência de 29 que é divisor de 30!.

Com os resultado obtidos acima, concluímos que $30! = 2^{26} \cdot 3^{14} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$.

Observação 2.31. A equação $E_p(x!) = \beta$ pode ser associada com uma aplicação direta do teorema de Legendre de modo que a incógnita agora é o número $x!$ e é dado o maior expoente dessa base p. Esta equação nos dá uma ideia da aplicação invertida do teorema citado anteriormente.

Já sabemos que $E_p(x!) = \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{p^3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{x}{p^\alpha} \right\rfloor = \beta$ e vamos usar o fato que $\left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \leqslant \frac{x}{p}\ \forall\ x\ ,\ p\ \in \mathbb{N}^*$. Com isso, temos por consequência que:

$$\left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{p^3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{x}{p^\alpha} \right\rfloor \leqslant \frac{x}{p} + \frac{x}{p^2} + \frac{x}{p^3} + \cdots + \frac{x}{p^\alpha}.$$

Mas agora temos uma indefinição em saber qual o valor de α já que não sabemos o valor de $x!$. Uma dica importante para calcular o valor de α nesse caso, é escrever o número β no sistema de numeração de base p, pois o total de dígitos do número β na base p será também o valor de α. Ou seja, $\beta = q_1 \cdot p^\alpha - 1 + q_2 \cdot p^{\alpha-2} + \cdots + q_{n-1} \cdot p + p \cdot q_n \cdot p^0$ pois nessa decomposição β tem α algarismos quando escrito na base p. Vejamos que no segundo membro dessa inequação tem um somatório de termos finitos de uma Progressão Geométrica (PG) de razão igual a $\frac{1}{p}$ e usando as propriedades de PG, temos simplificadamente:

$$\left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{p^3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{x}{p^\alpha} \right\rfloor = \beta \leqslant \frac{x \cdot \left[\left(\frac{1}{p}\right)^\alpha - 1\right]}{1-p}.$$

Como serão dado os valores de p e β então o valor de α também fica automaticamente definido usando a ideia de sistema de numeração do número β na base p, sobrando, portanto, uma inequação com apenas a incógnita x. Como trata-se de uma desigualdade, perceba também que em sua primeira tentativa se o menor valor possível não for solução, deve-se tentar para o valor de x o próximo múltiplo de p. Sendo assim, não precisa testar todas as soluções, basta testar no máximo as p primeiras soluções da desigualdade que podem se transformar em duas possibilidades de tentativas. Aplicando o teorema de Legendre para resolver a equação $E_p(x!) = \beta$ e verificar qual é o x que torna a equação verdadeira. Portanto, perceba que a equação $E_p(x!) = \beta$ não nos dá a resposta com precisão, apenas reduz as p possibilidades para no máximo 2.

Observação 2.32. A equação $E_p(x!) = \beta$ nem sempre terá solução, como por exemplo $E_2(x!) = 2$. Ao tentar as p possibilidades no teorema de Legendre, caso não obtenha o valor esperado na resolução é porque a equação não tem solução.

Observação 2.33. Esse tipo de equação poderá ser usado em problemas que seja dado uma, ou mais potência máxima como um divisor de um número fatorial grande. Em especial usamos na solução sugerida da questão 12 da OBMEP no ano de 2014.

Exemplo 2.34. Ache o menor valor de x, de modo que a maior potência de 5 que divide $x!$ seja 5^{41}. Quais são os outros números que gozam dessa propriedade?

Em outras palavras, queremos descobrir x de tal modo que, $E_5(x!) = 41$. para usarmos a equação da definição 2.17 precisamos descobrir o valor de α, então escrevendo 41 na base 5, temos

$$41 = 5 \cdot 8 + 1$$

$$8 = 5 \cdot 1 + 3$$

$$1 = 5 \cdot 0 + 1.$$

desse modo $41 = [131]_5 = 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1$ após a transformação de 41 na base 5 foram necessárias 3 divisões, ou seja, o número $[131]_5$ como tem 3 algarismos, então $\alpha = 3$. Outra maneira análoga para calcular α é aumentar 1 no expoente da maior base p. Daí, fica

$$\frac{x \cdot \left[\left(\frac{1}{p}\right)^\alpha - 1\right]}{1-p} \geq \beta$$

$$\frac{x \cdot \left[\left(\frac{1}{5}\right)^3 - 1\right]}{1-5} \geq 41$$

$$\frac{x \cdot \left[\left(\frac{-124}{125}\right)\right]}{1-5} \geq 41$$

$$x \geq \frac{125 \cdot 41}{31} \Longleftrightarrow x \geq 165,32258\cdots.$$

Como as possíveis soluções dessa equação é com números inteiros as primeiras tentativas seriam 166, caso não seja verdadeira, escolher o próximo múltiplo de 5 que seria o 170. Iremos testar.

Para $n = 166$ temos $\left\lfloor \frac{166}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{166}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{166}{125} \right\rfloor = 33 + 6 + 1 = 40$. O resultado esperado seria 41, como não obtivemos sucesso na primeira tentativa basta testa o próximo valor maior que 166 de modo que seja múltiplo de 5, pois bem, esse valor a ser testado deverá ser 170. Sendo assim concluímos que o menor número fatorial que é divisível por 5^{41} é 171!. Fazendo o teste para 170, tem-se $\left\lfloor \frac{170}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{170}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{170}{125} \right\rfloor = 34 + 6 + 1 = 41$. Além do 170! temos também os números $(171!, 172!, 173!, 174!)$ que ao aplicar o Teorema de Legendre ambos resultam em 41. A solução para esse tipo de equação quando existir ela não é única, porém geralmente é pedido a menor solução dentre todas. Perceba ainda, que o número 175! já não tem essa característica, pois ao aplicar o teorema o resultado daria $43 \neq 41$.

2.2.6 Noções de Equação Diofantina Linear

Nessa secção iremos discutir uma importante aplicação do Máximo Divisor Comum (MDC), que nos leva a resolver alguns problemas posteriores do capítulo 3. Na matemática, uma equação diofantina é uma equação polinomial que permite a duas ou mais variáveis assumirem apenas valores inteiros. Esse tipo de equação recebeu esse nome em homenagem a Diofanto de Alexandria (aproximadamente 300 d.C) que foi pioneiro nas descobertas de resoluções e publicação. Uma equação linear Diofantina é uma equação entre somas de monômios de grau um, como por exemplo $3x + 2y = 8$. Problemas Diofantinos possuem menos equações que variáveis e se resumem a achar inteiros que deverão funcionar corretamente para todas as equações.

As Equações diofantinas lineares assumem a forma $ax+by = c$. Sempre são possíveis serem solucionadas desde que $mdc(a, b) \mid c$. Se c for igual ao maior divisor comum de a e b, ou seja, se $c = mdc(a, b)$ então esta equação torna-se uma identidade de Bézout, o que permite uma quantidade infinita de soluções, também haverá uma quantidade infinita de soluções se c for um múltiplo do maior divisor comum de a e b. Caso contrário, a equação Diofantina$ax + by = c$ não possui solução. Como é tratado na proposição seguinte.

Observação 2.35. Diremos que dois números naturais a e b são primos entre si quando o $mdc(a, b) = 1$.

Proposição 2.36. *Sejam a e $b \in \mathbb{N}^*$ e $c \in \mathbb{N}^*$. A equação $aX + bY = c$ admite soluções naturais se, e somente se, $mdc(a, b) \mid c$.*

A demonstração dessa proposição poderá ser consultada em (HEFEZ, 2014, p.116).

Exemplo 2.37. Vejamos abaixo alguns exemplos de equações diofantinas e se elas têm ou não solução.

1. A equação $3x + 2y = 8$ possui solução, pois $mdc(2, 3) = 1$ e $1 \mid 8$ portanto a mesma tem solução, sendo $x_0 = 2$ e $y_0 = 1$. Generalizando, como o número 1 é um divisor natural de qualquer inteiro, então sempre que a e b são primos entre si, a equação diofantina possui ao menos uma solução.

2. A equação $4x + 6y = 7$ NÃO possui solução, pois $mdc(4, 6) = 2$ e $2 \nmid 7$.

Teorema 2.38. *(Relação de Bézout). Dados inteiros a e b, quaisquer, não simultaneamente nulos, existem dois inteiros x e y tais que*

$$mdc(a, b) = ax + by.$$

A demonstração desse Teorema poderá ser consultado em (HEFEZ, 2011, p.58).

Proposição 2.39. *Sejam x_0 e y_0 uma solução da equação $ax+by = c$ onde $mdc(a, b) = 1$. Então, as soluções $x, y \in \mathbb{Z}$, da equação são*

$$x = x_0 + bt \quad e \quad y = y_0 - at; \quad t \in Z.$$

Caso o problema aborde ou especifique que as soluções x_0 e y_0 sejam apenas números naturais, então podemos podemos escolher $x = x_0 + bt \geq 0$ e $y = y_0 - at \geq 0$ desta forma o parâmetro t nos dirá quantas são as possíveis soluções naturais para o devido problema. Esse tipo de aplicação é muito utilizada em problemas de contagem também, problemas que possam ser modelados por uma equação diofantina, mas ao mesmo tempo as soluções x_0 e y_0 não possam ser números negativos.

2.2.7 Congruência Modular

A ideia central que é explorada no estudo das congruências modulares é pensar nos restos das divisões euclidianas. Em Matemática, aritmética modular (chamada também de aritmética do relógio) é um sistema de aritmética para inteiros, no qual os números "voltam pra trás" quando atingem um certo valor, o módulo. O matemático suíço, Euler foi o pioneiro na abordagem de congruência por volta de 1750, quando ele explicitamente introduziu a ideia de congruência módulo um número natural n. O matemático Gauss, dentre outros estudou extensivamente sobre esse tema inclusive escreveu no seu livro *Disquisitiones Arithmeticae* publicado no ano de 1801. Em alguns livros, esse tema também é abordado como a "Aritmética dos Restos".

Definição 2.40. Sejam $a,\ b$ números inteiros e considere ainda que m um número natural diferente de zero, então denotamos por $a \equiv b\ mod(m)$. De forma que $a,\ b$ são chamados de congruentes módulo m se ambos têm o mesmo resto quando são divididos por m.

Uma maneira prática para saber se a e b são congruentes é verificar se $m|a-b$ ou $m|b-a$. Quando as diferenças de a e b resulta em um número múltiplo de m implica que a e b são congruentes módulo m. Quando a relação $a \equiv b\ mod(m)$ for falsa, diremos que a e b não são congruentes, ou que são incongruentes, módulo m. Escreveremos, neste caso, $a \not\equiv b\ mod(m)$ (HEFEZ, 2014, p.192).

Exemplo 2.41. observe que $38 \equiv 17\ mod(7)$ pois os restos da divisão de 38 e do 17 por 7 é igual a 3. como o resto é igual então dizemos que 38 e 17 são congruentes módulo 7.
Na teoria dos números, a congruência modular é considerada uma relação de equivalência por obedecer as 3 propriedades citadas abaixo.

Proposição 2.42. *Seja $m \in \mathbb{N}$ com $m > 1$. Para todos $a,\ b$ e $c \in \mathbb{N}$, tem-se que*

1. $a \equiv a\ mod(m)$. (Propriedade reflexiva);

2. $a \equiv b\ mod(m)$, então $b \equiv a\ mod(m)$. (Propriedade simétrica);

3. $a \equiv b\ mod(m)$ e $b \equiv c\ mod(m)$, então $a \equiv c\ mod(m)$. (Propriedade transitiva);
   A demonstração poderá ser encontrada em (HEFEZ, 2011, p.111).

Proposição 2.43. *Seja $a, b, c, d, m \in \mathbb{N}$ com $m > 1$. Tem-se que*

1. $a \equiv b\ mod(m)$ e $c \equiv d\ mod(m)$, então $a \pm c \equiv b \pm d\ mod(m)$.

2. $a \equiv b\ mod(m)$ e $c \equiv d\ mod(m)$, então $a \cdot c \equiv b \cdot d\ mod(m)$.
   A demonstração poderá ser encontrada em (HEFEZ, 2014, p.192).

Corolário 2.44. *Para todos $a,\ b$ e $n \in \mathbb{Z}$ no qual $n > 0$, temos que, se $a \equiv b\ mod(m)$, então tem-se que $a^n \equiv b^n\ mod(m)$.*

Basta usar n vezes o segundo resultado da proposição 2.15 que temos esse corolário por consequência. A demonstração faz-se por indução sobre n, para verificá-la detalhadamente, consulte em (HEFEZ, 2011, p.112).
Após verificar esses resultados iremos resolver um problema que usar essas aplicações de congruências modulares. Vejamos abaixo

Exemplo 2.45. (ENC - Exame Nacional de Cursos - Ano 1998) Qual é o resto da divisão de 12^{12} por 5?

Pela definição de congruência, temos que $12 \equiv 2 \ mod(5)$ e usando o corolário 2.30 acima podemos escrever $12^4 \equiv 2^4 \ mod(5)$, mas $16 \equiv 1 \ mod(5)$ e sendo assim usando a propriedade transitiva de equivalência, temos $12^4 \equiv 1 \ mod(5)$. Aplicando novamente o corolário anterior temos que $(12^4)^3 \equiv 1^3 \ mod(5)$ e sendo assim concluímos que $12^{12} \equiv 1 \ mod(5)$, então o resto da divisão de 12^{12} por 5 é igual a 1.

2.3 Quadrados Mágicos

Um quadrado mágico é por definição uma tabela quadrada de lado n contendo n^2 números e esses são distintos, de forma que a soma dos números das linhas, das colunas e das diagonais é constante. Esse valor constante das somas recebe um nome especial de **número mágico ou constante mágica**. Os quadrados mágicos podem ser classificados em três tipos, acompanhe.

1. Quadrados mágicos imperfeitos ou defeituosos;

2. Quadrados mágicos hiper mágicos;

3. Quadrados mágicos diabólicos;

Os quadrados mágicos imperfeitos ou defeituosos não obedecem a todas as regras de um quadrado mágicos, por exemplo, um quadrado mágico em que a soma de todas as linhas e todas as colunas são iguais, mas nas diagonais já não são iguais. Os quadrados mágicos hiper mágicos têm certas propriedades adicionais, além de obedecer às regras básicas, por exemplo, um quadrado mágico no qual se troca duas linhas ou colunas de lugar e se forma um outro quadrado mágico. Os quadrados mágicos diabólicos são quadrados hiper mágicos com muitas propriedades ou com propriedades muito complexas, o nome diabólico vem da dificuldade de os formar. Veja um exemplo a seguir

Exemplo 2.46. Segue um exemplo de um quadrados mágico considerado diabólico. Este quadrado de tamanho 4×4 possui a mesma soma na horizontal, vertical, em diagonais, nos cantos, e em um monte de outros lugares. É conhecido como quadrado de Dürer. O valor da constante mágica poderá ser calculado através de uma fórmula dada posteriormente, sendo igual a 34.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Listaremos algumas propriedades adicionais do quadrado mágico diabólico acima.

1. A soma dos 4 números que ficam nos cantos do quadrado é 34;
2. A soma dos 4 números das 4 casas centrais é 34;
3. A soma dos 2 números centrais da linha do alto com os 2 centrais da linha de baixo é 34;
4. A soma dos 2 números centrais da coluna direita com os 2 centrais da coluna esquerda é 34

De acordo com (LOPES, 2016).

> Historicamente há diversas versões sobre a origem dos quadrados mágicos, mas em sua maioria, é contado que há registros de sua existência em épocas anteriores à nossa era, na China e na Índia. Os historiadores dizem que os quadrados mágicos terão surgido há cerca de 3000 anos (na China e da Índia). O nome quadrado mágico foi dado pois na época achava-se que este tipo de quadrados tivessem poderes especiais.

Segue abaixo algumas observações notadas em problemas desafiadores envolvendo os quadrados mágicos. Os n^2 números de um quadrado mágico precisam formar uma Progressão Aritmética (PA) para que o mesmo obtenha as propriedades especiais em sua configuração. Uma vez que se montou os números em cada lugar específico do quadrado é possível estabelecer uma função (bijeção) que associe cada elemento de uma sequência no quadrado de ordem n ao seu elemento no outro quadrado de mesma ordem. É necessário que ambos os quadrados sejam do mesmo tamanho para que a bijeção funcione. Segue abaixo um exemplo no qual a ordem do quadrado seja igual a n.

Exemplo 2.47. Considere o quadrado mágico de (Ordem) lado 3 usando os números $a_i = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ de modo que a soma de cada linha, coluna ou diagonal seja igual ao número mágico 15.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Ao apresentar para um estudante esse problema, é esperado que ele tenha a curiosidade de saber qual é o número deve ser colocado no meio do quadrado, ou porque a constante mágica da soma é igual a 15. Posteriormente, daremos alguns resultados que sanarão essas dúvidas. Agora, a partir desse quadrado mágico acima, mostraremos a configuração de outro quadrado 3×3 usando os números da sequência $a_j = (8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16)$ de modo que a constante mágica seja igual a 36. Note que os 9 elementos dessa sequência podem ser colocados em bijeção que pega cada elemento da primeira sequência a_i e adiciona 7 criando a nova sequência a_j. Ou seja, $a_j = a_i + 7$.

11	16	9
10	12	14
15	8	13

Observação 2.48. Perceba que a posição do 8 no segundo quadrado foi colocado no lugar do número 1 no primeiro quadrado por ser o menor número da sequência, a posição do 16 no segundo quadrado foi colocado no lugar do 9 no primeiro quadrado por ser o maior número da sequência, ou seja, seguindo a sequência abaixo.

Quadrado 1	Quadrado 2
$1 \rightarrow$	8
$2 \rightarrow$	9
$3 \rightarrow$	10
$4 \rightarrow$	11
$5 \rightarrow$	12
$6 \rightarrow$	13
$7 \rightarrow$	14
$8 \rightarrow$	15
$9 \rightarrow$	16

Como o quadrado é uma figura simétrica, então podemos ter outras configurações de modo que o torne mágico. Mas essa ideia de associar os elementos pela sua ordem de comparação sempre ajuda a preencher um quadrado com números grandes.

Definição 2.49. O somatório dos n^2 números de um quadrado de lado n. Como esses números são termos de uma PA, no qual a_1 e a_{n^2} equivale ao menor e maior número respectivamente da sequência. então podemos calcular

$$S(n^2) = \frac{(a_1 + a_{n^2}) \cdot n^2}{2}.$$

Definição 2.50. Seja M o valor da constante mágica de um quadrado mágico $n \times n$, então podemos obter esse valor especial pela relação,

$$M = \frac{S(n^2)}{n} = \frac{(a_1 + a_{n^2}) \cdot n^2}{2n} = \frac{(a_1 + a_{n^2}) \cdot n}{2}.$$

Definição 2.51. Para os quadrados $n \times n$ de ondem ímpar é notável a importância de saber qual é o número que deve ser colocado na posição central, devido a sua simetria. Considere esse valor central sendo C, daí temos:

$$C = \frac{M}{n} = \frac{(a_1 + a_{n^2})}{2}.$$

Observação 2.52. Em quadrados de ordem ímpar podemos também obter esse valor central usando a ideia de termo mediano de uma PA.

Exemplo 2.53. Seja o quadrado 5×5 numerados de 1 até 25 de modo que a soma de cada linha, coluna ou diagonal seja um valor constante, então determine qual o valor da constante mágica (M) dessas somas e calcule também qual o valor central nesse quadrado. Por fim, complete os valores nesse Quadrado Mágico e o esboce.

1. O valor da constante mágica obtida pela soma de cada linha, coluna ou diagonal é obtida pela seguinte relação.

$$M = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(1 + 25) \cdot 5}{2} = \frac{130}{2} = 65.$$

2. O valor do termo central desse quadrado, considerando que o mesmo é de ondem impar é obtido pela relação.

$$C = \frac{M}{n} = \frac{65}{5} = 13.$$

3. Segue abaixo uma possível configuração completa desse quadrado mágico.

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Para os quadrados mágicos de ordem par também podemos usar o resultado dado na definição 2.50, mas obviamente não podemos usar a definição 2.51 pois como a ordem do quadrado é par, então não existe um quadrado no centro, ou seja, não existe o termo mediano. Sendo assim, esses quadrados usam propriedades especiais apenas no somatório de suas linhas e suas colunas.

3 Questões da OBMEP

Nesse capítulo, iremos apresentar as questões de aritmética presentes nas provas das Olimpíadas Brasileira de Matemática, de 2005 até 2018, com suas respectivas soluções disponibilizadas pelo site oficial (OBMEP, 2019). Quando possível, apresentaremos outra solução como uma alternativa a mais de resolução para problema. Além disso, em cada questão selecionada buscamos tecer alguns comentários e trazer sugestões que poderão ser aplicadas em sala de aula, oficinas e mini-cursos voltados ao tema dessas questões.

Foram selecionadas 33 problemas olímpicos da primeira fase do nível 3 que enfocam algum aspecto relacionado à aritmética, conhecido e associado no Ensino Médio como o eixo dos Números e Operações. A organização das questões aqui apresentada estão em ordem cronológica, começando do ano de 2005 até o ano de 2018. Enfocaremos apenas a prova objetiva da primeira fase da OBMEP pois a fase posterior que é uma prova subjetiva é reservada apenas para os 5% melhores colocados na prova objetiva da fase inicial.

Em caso de alguma dúvida nas soluções sugeridas ou comentários, é aconselhável consultar o Capítulo 2, no qual serão encontrados definições e/ou resultados que servirão para auxiliar nas resoluções dos problemas a seguir.

3.1 Problemas, Soluções, Comentários e Sugestões

Nesta seção apresentamos os problemas com suas respectivas soluções, comentários e sugestões.

Questão 6 - (Ano 2005) Quantos números inteiros, múltiplos de 3, existem entre 1 e 2005?

$a)$ 664 $b)$ 665 $c)$ 667 $d)$ 668 $e)$ 669

Solução da OBMEP: *(alternativa D)*
Os múltiplos de 3 que são maiores do que 1 e menores do que 2005 são os números $3 \times 1, 3 \times 2, 3 \times 3, \cdots, 3 \times n$ onde $3 \times n$ é o maior múltiplo de 3 menor do que 2005. Usando o algoritmo da divisão, podemos escrever $2005 = 3 \times 668 + 1$ e segue que n $= 668$.
Solução sugerida:
Reformulando a pergunta, teríamos:
Na progressão aritmética $\{3, 6, 9, 12, \cdots, 2001, 2004\}$ existem quantos termos?
Perceba que o primeiro termo é o menor múltiplo positivo de 3, logo $a_1 = 3$. A razão r dessa PA é igual a 3. Por fim, usando o critério de divisibilidade do 3, percebemos que o

maior múltiplo de 3 entre 1 e 2005 é o 2004, pois a soma de seus dígitos é igual a 6 que é múltiplo de 3. sendo assim o último termo $a_n = 2004$. Usando a expressão do termo geral da PA, temos:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$2004 = 3 + (n-1) \cdot 3$$

$$n = 668.$$

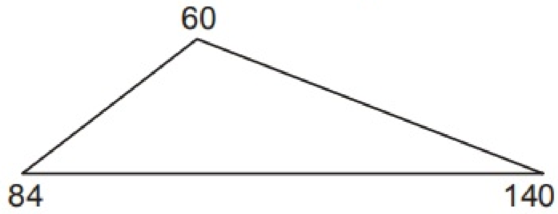
Comentários e sugestões:

Considerando a solução da OBMEP, esta questão requer conhecimentos básicos sobre múltiplos e divisores e algoritmo da divisão, que são conteúdos vistos desde a primeira fase do Ensino Fundamental. Inclusive, essa questão foi aplicada nos níveis 2 e 3 da primeira fase em 2005. No entanto, podemos apresentar esta questão para estudante do Ensino Médio com o enfoque voltado à PA, como podemos observar na solução sugerida.

Em sala de aula o professor poderá como motivação para introduzir o conteúdo de PA apresentar esse problema, iniciando uma discussão sobre quem seria o primeiro termo, qual seria a razão, qual seria o último termo e por fim qual seria a quantidade de termos nessa PA, ou até mesmo escrevendo a equação do termo geral.

Questão 5 - (Ano 2006) Os comprimentos dos lados do triângulo da figura são números inteiros. Junto a cada vértice aparece o produto dos comprimentos dos lados a ele adjacentes. Qual é o perímetro do triângulo?

Figura 1 – Questão 5 (OBMEP- Nível 3 - 2006)



Fonte: OBMEP Provas e Solução

a) 20 *b*) 24 *c*) 28 *d*) 30 *e*) 34

Solução da OBMEP: *(alternativa D)*

Solução 1: Sejam a, b e c os comprimentos dos lados do triângulo. Logo $a \times b = 60$, $b \times c = 140$ e $a \times c = 84$. Segue que

- a é divisor comum de 60 e 84, ou seja, as possibilidades para a são 1, 2, 3, 4, 6 e 12.
- b é divisor comum de 60 e 140, ou seja, as possibilidades para b são 1, 2, 3, 5, 10, 20.
- c é divisor comum de 84 e 140, ou seja, as possibilidades para c são 1, 2, 4, 7, 14, 28 Escolhemos agora as possibilidades que satisfazem $a \times b = 60$, $b \times c = 140$ e $a \times c = 84$.

a × b = 60		a × c = 84		b × c = 140	
a	**b**	**a**	**c**	**b**	**c**
3	20	3	28	5	28
6	10	6	14	10	14
12	5	12	7	20	7

A linha sombreada na tabela é a única em que os valores de a, b e c coincidem nas três colunas. Logo $a = 6$, $b = 10$ e $c = 14$ e o perímetro do triângulo é $6 + 10 + 14 = 30$.

Solução 2 da OBMEP: Como $ab = 60$ e $ac = 84$ segue que $a^2bc = 60 \times 84 = 5040$. Temos também $bc = 140$, donde $a^2 \times 140 = 5040$. Segue que $a^2 = 36$ e portanto $a = 6$. Logo $b = 10$ e $c = 14$.

Solução sugerida: Calculando o mdc entre 2 vértices do triângulo, obtemos: $mdc(60, 84) = 12$, $mdc(60, 140) = 20$, $mdc(84, 140) = 14$. Logo, os lados devem ser divisores desses valores. Pela desigualdade triangular existiria o triângulo de lados $12, 14,\ e\ 20$, mas ao fazer os produtos desses números, os resultados iriam exceder os valores proposto nos vértices do triângulo acima. Agora, analisando o triângulo semelhante de razão $\frac{1}{2}$ formado pelos lados $6, 7,\ e\ 10$, fazendo os 3 produtos possíveis teríamos nos vértices os valores $42, 70, 60$. Perceba que 42 é a metade 84, e que 70 é a metade de 140. Como temos 2 vértices no problema múltiplo de 10, então iremos continuar com um lado 10 e dobramos os lado 6 tendo então os lados $12, 7,\ e\ 10$, mas essa solução não é valida, pois $12 \times 10 = 120 \neq 140$. Outra possibilidade seria continuar com um lado 10 e dobramos o lado 7, tendo então as seguintes medidas $6, 14,\ e\ 10$ no qual, essa é a solução que interessa.

Comentários e sugestões:

Na primeira resolução da OBMEP foi abordado os divisores comuns e testando as possibilidades desde que $a, b,\ e\ c$ pudessem obedecer a desigualdade triangular. De modo que um estudante do 6º ou 7º ano do Ensino Fundamental pudessem desenvolver esse raciocínio. Mas na segunda resolução da OBMEP a abordagem foi algébrica, de modo que seria mais compatível com estudantes a partir do 8º ano. Já na solução sugerida desse problema, a abordagem foi mais voltada ao cálculo do MDC, critério de divisibilidade e razão de semelhança no triângulo.

A solução 2 da OBMEP é bastante curta e possivelmente é a preferencial dos estudantes. Porém trata-se de uma solução algébrica. Chame a atenção que em $a^2 = 36$ o valor a só pode ser $+6$ pois trata-se de uma medida geométrica, descartando a opção $a = -6$. Lembre-se também da desigualdade triangular, pois esse problema também envolve essa propriedade geométrica do triângulo.

Questão 7 - (Ano 2006) Qual é a soma dos algarismos do número

$$1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + \ldots + 10^{2004} + 10^{2005} + 10^{2006}?$$

a) 1 *b)* 10 *c)* 2006 *d)* 2007 *e)* 20060

Solução da OBMEP: *(alternativa D)*
Se n é um natural maior que 0, então 10^n é um número da forma

$$1\underbrace{00...00}_{n \text{ zeros}}$$

Logo, $1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + \ldots + 10^{2004} + 10^{2005} + 10^{2006} = \underbrace{111...111}_{2007\ algarismos}$ donde a soma dos algarismos desse número é 2007.

Solução sugerida:
É possível ser resolvido como um somatório de termos de uma Progressão Geométrica (PG) finita, de modo que o primeiro termo $a_1 = 1$, a razão $q = 10$ o total de termos $n = 2007$. Aplicando na fórmula de somatório de PG finita, temos:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Longrightarrow \frac{1 \cdot (10^{2007} - 1)}{10 - 1} \Longrightarrow \frac{(10^{2007} - 1)}{9} = \frac{\overbrace{999\ldots999}^{2007\ dígitos}}{9} = \underbrace{111...111}_{2007\ algarismos}.$$

Portanto, temos a mesma conclusão da solução proposta pela OBMEP na qual a soma dos algarismos desse número é $2007 \times 1 = 2007$.

Comentários e sugestões:
Neste problema é discutido o valor posicional dos algarismos no sistema de numeração na base decimal. Perceba na resolução da OBMEP que o somatório das potências de 10 pode ser entendida como a posição (unidade, dezena, centena) e sucessivamente para outras classes de numeração decimal. Nessa perspectiva de abordagem, esse problema poderia ser discutido já no Ensino Fundamental, porém na solução sugerida, o enfoque é voltado à PG, de modo que seria mais conveniente a aplicação para estudantes do Ensino Médio.

- Sugerimos que o professor mostre que o número 1111 pode ser compreendido assim $1111 = 1000 + 100 + 10 + 1 = 1 + +10 + 10^2 + 10^3$, sugira depois para os alunos fazerem essa decomposição com o número 1111111. Daí compare a decomposição feita com o problema da OBMEP.

- Na última igualdade da solução sugerida discuta com os alunos que o número $\underbrace{999\ldots999}_{2007\ dígitos}$ é múltiplo de 9 pelo critério de divisibilidade, pois $9|2007 \times 9$.

Questão 15 - (Ano 2006) Quantos são os números menores que 10000 tais que o produto de seus algarismos seja 100? Por exemplo, 455 é um destes números, porque $4 \times 5 \times 5 = 100$.

a) *Menos de* 10 *b*) 18 *c*) 21 *d*) 28 *e*) *Mais de* 30

Solução da OBMEP: *(alternativa C)*
Para que o produto seja 100, cada algarismo deve ser um divisor de 100. Os algarismos divisores de 100 são 1,2,4 e 5. Não é possível obter o produto 100 com números que tenham apenas 1 ou 2 algarismos, logo os números procurados têm 3 ou 4 algarismos, por serem menores que 10 000. Vejamos como obter o produto 100 com 3 ou 4 desses algarismos. Para facilitar a listagem observamos que 8 não é divisor de 100, donde os algarismos 2 e 4 não podem aparecer num mesmo número. Logo os números procurados são:

- números de 3 algarismos: 455, 545, 554
- números de 4 algarismos: 1455, 1545, 1554, 4155, 4515, 4551, 5145, 5154, 5415, 5451, 5514, 5541, 2255, 2525, 2552, 5522, 5252, 5225.

em um total de 21 números.
Solução sugerida:
Como $n < 10000$ então n tem no máximo 4 algarismos e queremos que o produto desses algarismos seja 100 então vamos decompor em fatores primos $100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$ perceba que é obrigatório aparecer 2 vezes o algarismo 5, pois $5^2 = 25$ é um número de 2 algarismos e não pode ser substituído por um único algarismo, diferentemente do 2^2 que pode ser substituído pelo algarismo 4. Fazendo essa contagem de permutação com repetição da sequência (2255) temos $\frac{4!}{2!.2!} = 6$ números. Mas como não é obrigatório que os algarismos sejam primos, então podemos ter o produto $100 = 1 \times 4 \times 5 \times 5$ fazendo uma permutação com repetição temos então (1455) $\frac{4!}{2!} = 12$ números. Não há mais opções com 4 algarismos pois os únicos divisores de 100 com 1 algarismo são $\{1,2,4,5\}$. Agora é o momento de analisar os números com 3 algarismos. Temos o produto $100 = 4 \times 5 \times 5$ fazendo uma permutação com repetição temos então (455) $\frac{3!}{2!} = 3$. Por fim, percebamos que com 2 algarismos é impossível o produto ser igual a 100, pois no máximo $9 \times 9 = 81 < 100$ sendo assim o total de números com essa característica é $6 + 12 + 3 = 21$.
Comentários e sugestões:
As 2 soluções acima são semelhantes, sendo diferenciada pelo método de contagem dos

números com a característica proposta no enunciado do problema, sendo que a primeira solução aborda contagem de forma implícita. Nas resoluções são explorados os conteúdos decomposição em fatores primos, divisibilidade e métodos de contagem (Análise Combinatória). Seria interessante que o estudante já tivesse uma noção básica de princípio de contagem, pois essa prova é aplicada nas 3 séries do Ensino Médio, a análise combinatória se estuda com mais destaque nos 2º e 3º ano do Ensino Médio, porém essa questão foi contemplada também no nível 2 para estudantes do Ensino Fundamental.

Questão 20 - (Ano 2006) O número $abcde$ tem cinco algarismos distintos e diferentes de zero, cada um deles representado por uma das letras a, b, c, d, e. Multiplicando-se este número por 4 obtém-se número de cinco algarismos $edcba$. Qual é o valor de $a+b+c+d+e$?

a) 22 *b*) 23 *c*) 24 *d*) 25 *e*) 27

Solução da OBMEP: *(alternativa E)*
A multiplicação pode ser esquematizada como

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \times & & & & 4 \\ \hline e & d & c & b & a \end{array}$$

A solução é baseada nas seguintes observações:

a só pode ser 1 ou 2 porque se $a \geq 3$ então $4a$ é um número de 2 algarismos e portanto o número $edcba$ teria 6 algarismos. Mas a não pode ser 1 pois $edcba$, sendo múltiplo de 4, é par, donde seu último algarismo é par. Logo $a = 2$.

$$\begin{array}{ccccc} 2 & b & c & d & e \\ \times & & & & 4 \\ \hline e & d & c & b & 2 \end{array}$$

e só pode ser 8 ou 9 porque $2 \times 4 = 8$ e $edcba$ tem apenas 5 algarismos. No entanto, e não pode ser 9 porque 9×4 termina em 6 e não em 2. Logo $e = 8$.

$$\begin{array}{ccccc} 2 & b & c & d & 8 \\ \times & & & & 4 \\ \hline 8 & d & c & b & 2 \end{array}$$

b só pode ser 1 ou 2 porque $4 \times b$ tem que ser um número de apenas 1 algarismo. Como $a = 2$ e os cinco algarismos de $abcde$ são distintos, só podemos ter $b = 1$.

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & c & d & 8 \\ \times & & & & 4 \\ \hline 8 & d & c & 1 & 2 \end{array}$$

d só pode ser 2 ou 7 porque $4 \times d + 3$ é um número terminado em 1. Como $a = 2$ e os cinco algarismos de $abcde$ são distintos, só podemos ter $d = 7$.

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & c & 7 & 8 \\ \times & & & & 4 \\ \hline 8 & 7 & c & 1 & 2 \end{array}$$

c só pode ser 9 porque $4c + 3$ é um número terminado em c.

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 9 & 7 & 8 \\ \times & & & & 4 \\ \hline 8 & 7 & 9 & 1 & 2 \end{array}$$

Logo, a resposta é $8 + 7 + 9 + 1 + 2 = 27$.

Comentários e sugestões:
Esse problema trata-se de tentativas de possibilidades que em algumas tentativas induz a erros matemática, na qual o estudante poderá obter sucesso rapidamente, ou não. Durante essa resolução foram abordados conhecimento de Múltiplos de 4, desigualdade, algoritmo da multiplicação. Sugerimos em casos de alunos com muita dificuldade, que o professor explique um exemplo mais simplificado com uma multiplicação de um número com 4 algarismos por 9. Deixando claro que os estudantes devem lembrar da tabuada de multiplicação do 9.

Encontre os algarismos a, b, c, d que tornam a expressão seguinte correta.

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \times & & & 9 \\ \hline d & c & b & a \end{array}$$

Perceba que nesse enunciado não diz que os algarismos são distintos ou que não são nulos e isso dificulta mais o problema, pois abre mais possibilidades de tentativas. A resposta dessa proposta de atividade seria $a = 1,\ b = 0,\ c = 8,\ d = 9$.

Questão 14 - (Ano 2007) Quantos são os números inteiros p tais que

$$50^3 < 5^p < 50^4?$$

a) 1 *b)* 2 *c)* 3 *d)* 4 *e)* 5

Solução da OBMEP: *(alternativa B)*
A decomposição de 50 em fatores primos é $50 = 2 \times 5^2$. Logo, a dupla desigualdade do enunciado pode ser escrita como $(2 \times 5^2)^3 < 5^p < (2 \times 5^2)^4$, ou seja, $2^3 \times 5^6 < 5^p < 2^4 \times 5^8$. Dividindo todos os termos por 5^6 , obtemos $2^3 < 5^{p-6} < 2^4 \times 5^2$, ou seja $8 < 5^{p-6} < 400$. As únicas potências de 5 que estão entre 8 e 400 são $5^2 = 25$ e $5^3 = 125$; logo $p - 6$ só pode assumir os valores 2 e 3, donde p só pode assumir os valores 8 e 9.
Comentários e sugestões:
Na resolução desse problema podem ser trabalhadas as propriedades de potenciação, inequação e em decomposição em fatores primos. Muitos estudantes têm dificuldades em

resolver problemas envolvendo desigualdades, apesar de pertencer a grade curricular de matemática no 7º ano do Ensino Fundamental. Sendo assim seria conveniente o professor fazer revisão sobre o que é uma inequação. Sugerimos que o professor inicialmente:

- Reformule a pergunta, se for o caso, para que o aluno entenda de uma maneira mais direta qual é a estratégia de resolução. A pergunta seria: Quantas potências de 5 existem entre 50^3 e 50^4.
- sugira ao estudante a ideia de deixar toda a desigualdade em função de potências de base 5, para poder fazer uma comparação, usando o fato de que como a base é maior que 1 a função exponencial é crescente.

Questão 15 - (Ano 2007) O contrário de um número de dois algarismos, ambos diferente de zero, é o número obtido trocando-se a ordem de seus algarismos. Por exemplo, o contrário de 25 é 52 e o contrário de 79 é 97. Qual dos números abaixo **NÃO** é a soma de um número de dois algarismos com o seu contrário?

a) 44 *b)* 99 *c)* 121 *d)* 165 *e)* 181

Solução da OBMEP: *(alternativa E)*
Seja n um número de dois algarismos, sendo a seu algarismo das dezenas e b o algarismo das unidades; então $n = 10a + b$. Se a e b são ambos diferentes de zero, o contrário de n é $10b + a$. Desse modo, a soma de n e de seu contrário é:

$$(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11 \cdot (a + b)$$

e portanto a soma de um número com seu contrário é sempre um múltiplo de 11. Basta agora notar que todas as opções são múltiplos de 11, com a exceção de 181.
Comentários e sugestões:
Essa questão inicia-se com uma definição, o que pode estimular o raciocínio e construção de novos conceitos através de exemplos. Para resolvê-la usamos valor posicional no sistema de numeração decimal, a relação de múltiplo e divisor de um número. A solução da OBMEP induz que se pode usar critério de divisibilidade por 11. Podemos perceber que essa questão pode ser trabalhada a partir do 6º devido aos conteúdos englobados, mas que também pode ser apresentada a alunos do Ensino Médio para estimular o raciocínio aritmético. Sugerimos que o professor inicialmente:

- Reforce o raciocínio de que um número inteiro do tipo abc pode ser escrito como $100a + 10b + c$ destacando o valor posicional de cada algarismo. Em geral, essa é uma boa ideia em alguns problemas clássicos de aritmética.
- Aproveite e discuta sobre o critério de divisibilidade do 11, já que é um critério que pode ser confuso para alguns estudantes.

Questão 7 - (Ano 2008) Em certo ano bissexto (isto é, um ano que tem 366 dias) o número de sábados foi maior que o número de domingos. Em que dia da semana caiu o dia 20 de janeiro desse ano?

a) *Segunda* *b)* *Terça* *c)* *Quarta* *d)* *Quinta* *e)* *Sexta*

Solução da OBMEP: *(alternativa C)*
Como a cada sábado segue um domingo, para que o número de sábados num ano seja maior que o número de domingos é necessário que o último dia desse ano seja sábado. Como $366 = 52 \times 7 + 2$, um ano bissexto consiste de 52 semanas e 2 dias. Logo, se 31 de dezembro foi um sábado, 2 de janeiro também foi um sábado. Contando de 7 em 7, vemos que 16 de janeiro foi um sábado, donde 20 de janeiro foi uma quarta-feira.
Solução sugerida
Um ano normal tem 1 dia da semana a mais que os outros dias da semana. Como $365 = 52 \times 7 + 1$. Neste caso o dia 01 de janeiro é no mesmo dia da semana que o dia 31 de dezembro. Já quando o ano é bissexto, então $366 = 52 \times 7 + 2$ então tem 2 dias da semana a mais que os outros dias da semana e esses 2 dias a mais no calendário são equivalentes as datas 01 de janeiro e 02 de janeiro. Como queremos que tenha mais sábados do que domingo, então os dias 01 e 02 de janeiro devem ser respectivamente na sexta e sábado. Daí esse ano bissexto teria 53 sextas e sábados e 52 domingos. Como o dia 01 de janeiro será numa sexta-feira, então dia 15 será novamente numa sexta pois $15 = (1 + 7 + 7)$,dia 22 de janeiro será novamente numa sexta-feira e dia 20 de janeiro será numa quarta-feira.
Comentários e sugestões:
Podemos ter algumas conclusões mais rápidas, quando tratamos problemas com datas de calendário e pensamos em Matemática, fazendo uma associação. É importante o domínio de algumas noções de calendário (dias, semanas, meses e ano). Para a questão acima usamos algumas ideias sobre congruência modular(se for aplicado a turmas de Ensino superior ou turmas avançadas do Nível Médio), critério de divisibilidade e algoritmo da divisão de uma maneira geral.

- Em problemas envolvendo calendário anual é importante saber que $365 \equiv 1 \ mod\ (7)$. Se for descoberto em qual dia da semana começa o ano basta ir aumentando de 7 em 7 dias para voltar ao mesmo dia da semana.

- Aumentar 5 dias no calendário equivale a voltar 2 dias da semana pois pela congruência modular, temos $5 \equiv -2 \ mod\ (7)$ tendo em vista $7|5 - (-2)$.

Questão 11 - (Ano 2008) Os 535 alunos e os professores de uma escola fizeram um passeio de ônibus. Os ônibus, com capacidade para 46 passageiros cada, ficaram lotados. Em cada ônibus havia um ou dois professores. Em quantos ônibus havia dois professores?

a) 3 *b)* 5 *c)* 6 *d)* 8 *e)* 9

Solução da OBMEP: *(alternativa B)*
Como $535 = 11 \times 46 + 29$, vemos que 11 ônibus são insuficientes para o passeio. Por outro lado, de $13 \times 46 = 598$ vemos que se o número de ônibus fosse maior ou igual a 13 o número de professores seria no mínimo $598 - 535 = 63$, o que não é possível pois em cada ônibus há no máximo 2 professores. Logo o passeio foi feito com 12 ônibus e o número de professores é $12 \times 46 - 535 = 17$. Como cada ônibus tem 1 ou 2 professores e 17 dividido por 12 tem quociente 1 e resto 5, concluímos que o número de ônibus com 2 professores é 5.
Outra solução da OBMEP:
Sejam x o número de ônibus com 1 professor (nesses ônibus há 45 alunos) e y o número de ônibus com 2 professores (nesses ônibus há 44 alunos). Logo, $45x + 44y = 535$. Para resolver essa equação, observe que como x e y são inteiros positivos, y tem que ser um múltiplo de 5 menor que 15 (porque $15 \times 44 > 535$), isto é, y vale 5 ou 10. Substituindo esses valores na equação, obtemos $y = 5$.
Solução sugerida:
Perceba na segunda solução da OBMEP poderia ser resolvida pela equação diofantina $45x + 44y = 535$ usando o menor par (x, y) de solução natural.
Como $mdc[44, 45] = 1$ e $1|535$ então essa equação tem solução e pelo Teorema e Bezout podemos escrever que $45x + 44y = mdc[44, 45] = 1$ mas como $45 - 44 = 1$ então temos a solução $45 \cdot 1 + 44 \cdot (-1) = 1$ e multiplicando ambos os lados da igualdade por 535 temos $45 \cdot 535 + 44 \cdot (-535) = 535$. Então temos a solução $x_0 = 535$ e $y_0 = -535$. Mas, pela solução geral da equação diofantina, temos:

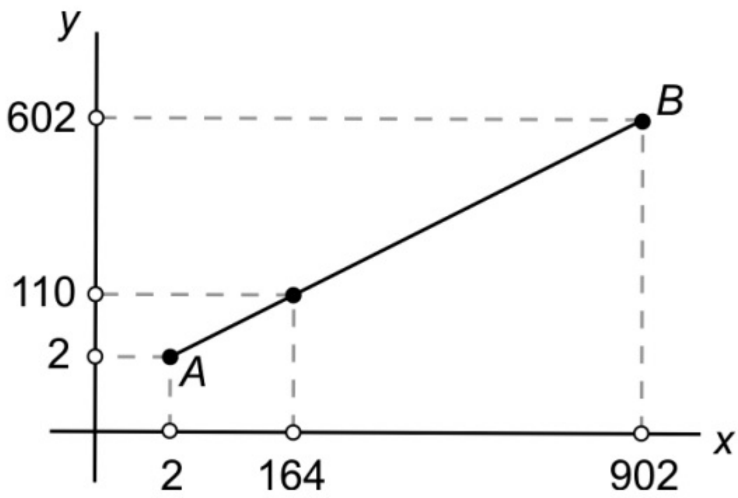
$$x = x_0 - bt \ e \ y = y_0 + at$$

implica em $x = 535 - 44t$ e $y = -535 + 45t$. Como queremos que o par (x, y) seja uma solução natural, precisaremos ambos seja maior que zero, ou seja $535 - 44t > 0$ e $-535+45t > 0$. Resolvendo essas 2 inequações obtemos para t um valor único, sendo $t = 12$ e consequentemente a única solução natural do par (x, y) é $x = 7$ e $y = 5$. Lembrando que, pela solução 2 foi definido que x é o número de ônibus com 1 professor (nesses ônibus há 45 alunos) e y o número de ônibus com 2 professores (nesses ônibus há 44 alunos).
Comentários e sugestões:
Na primeira resolução da OBMEP foi abordado basicamente o algoritmo da divisão, podendo ser uma situação vivenciada com estudantes do Ensino Fundamental, inclusive, esse problema foi proposto no nível 2 nesse mesmo ano de aplicação. Na segunda solução proposta pela OBMEP foi dada uma ideia de resolução por uma equação do 1º grau com as variáveis x e y de modo que com uma tentativa conveniente o estudante resolveria. Porém, essa equação do 1º pode ser interpretada pelo leitor como uma equação diofantina, já que

suas soluções são números naturais. Sendo assim, foi feita a solução sugerida resolvendo detalhadamente a equação diofantina.

Questão 13 - (Ano 2008) No segmento AB da figura existem vários pontos de coordenadas inteiras, como por exemplo (164,110). Quantos pontos com as duas coordenadas inteiras existem nesse segmento, contando os extremos?

Figura 2 – Questão 13 (OBMEP- Nível 3 - 2008)

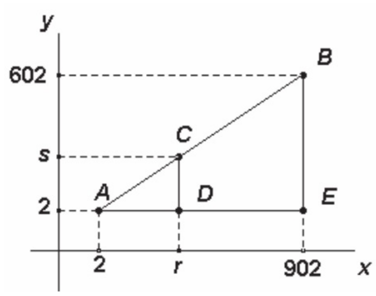


Fonte: OBMEP Provas e Solução

a) 218 *b*) 249 *c*) 268 *d*) 289 *e*) 301

Solução da OBMEP: *(alternativa E)*

Seja C um ponto de coordenadas (r, s) no segmento AB, como na figura. Da semelhança dos triângulos ADC e AEB concluímos que:



$$\frac{r-2}{s-2} = \frac{902-2}{602-2} = \frac{3}{2}$$

ou seja, $3s - 2r = 2$. Como queremos que r e s sejam inteiros, segue dessa equação que s é par. Uma vez assim escolhido s, o valor de r fica determinado, e desse modo obtemos todos os pontos de coordenadas inteiras no segmento AB. Como existem 301 números pares de 2 a 602, inclusive esses, segue que a alternativa correta é (E).

Solução sugerida:

Precisamos saber qual é a equação da reta que passa pelos pontos $A = (2, 2)$ e $B = (902, 602)$ para analisar os casos que os pares (x, y) são inteiros (perceba que como a semirreta está toda no primeiro quadrante então as coordenadas x e y são números naturais. Pela equação da reta temos $y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$ no qual a é a taxa de declividade da reta. $a = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{602-2}{902-2} = \frac{600}{900} = \frac{2}{3}$ então a equação da reta é $y - 2 = \frac{2}{3} \cdot (x - 2)$ isolando o y em função de x fica $y = \frac{2}{3} \cdot (x + 1)$. Note que nessa expressão y só será inteiro quando o numerador $(x + 1)$ for múltiplo de 3. Os possíveis valores de x são {2,5,8,11, ..., 899,902} que forma uma Progressão Aritmética (PA) de razão 3 a qual possui 301 termos. Sendo assim existem 301 pares (x, y) inteiros nesse segmento AB.

Comentários e sugestões:

Comparando as duas resoluções acima, perceba que na proposta feita pela OBMEP é abordado os temas de semelhança de triângulo e divisibilidade, podendo no último passo de resolução não ser entendido por alguns estudantes, pelo fato de não ser um conhecimento de rápida compreensão para alguns que há 301 números pares de 2 a 602. Na resolução sugerida, a ideia predominante é fazer uma manipulação algébrica para obter a equação da reta e associar as variáveis x e y. Consequentemente é usado divisibilidade e PA. Sendo um problema mais apropriado para estudantes do Ensino Médio.

- Como requisito para acompanhar a resolução sugerida acima, é importante o estudante ter uma noção básica sobre equação da reta ou taxa de declividade.

- No 1º ano do Ensino Médio o estudante já aprende a calcular a taxa de declividade da reta e determinar a equação da reta que passa pelos 2 pontos.

Questão 3 - (Ano 2009) Joãozinho inventou uma operação matemática com números inteiros, para a qual ele usa o sinal *. Ela funciona assim:

$$a * b = (a + 1) \times (b - 1)$$

Por exemplo, $3 * 5 = (3 + 1) \times (5 - 1) = 16$. Se a e b são inteiros positivos tais que $a * b = 24$ e $b * a = 30$, quanto vale $a + b$?

a) 11 *b*) 12 *c*) 15 *d*) 16 *e*) 18

Solução da OBMEP: *(alternativa A)*

Escrevendo 24 como produto de inteiros positivos de todas as maneiras possíveis, podemos investigar todas as possibilidades para a e b em $a * b = (a + 1) \times (b - 1) = 24$ e testá-las em para achar os possíveis valores de a e b.

Logo $a = 7$ e $b = 4$, donde $a + b = 11$.

$24 =$	a	b	$(b+1)\times(a-1)$
1×24	0	25	não considerar pois $a>0$
2×12	1	13	0
3×8	2	9	10
4×6	3	7	16
6×4	5	5	25
8×3	7	4	**30**
12×2	11	3	33
24×1	23	2	46

Comentários e sugestões:
Similar ao problema 15 do ano de 2007, essa questão inicia-se com uma definição no seu enunciado, o que pode estimular o raciocínio e construção de novos conceitos através de exemplos. Para resolvê-la usamos a relação de múltiplo e divisor de um número. É importante destacar que essa operação definida não é comutativa. A solução da OBMEP induz que temos que descobrir todos os divisores naturais do 24 a fim de preencher a tabela acima. Podemos perceber que essa questão pode ser trabalhada a partir do Ensino Fundamental devido aos conteúdos englobados, inclusive foi uma questão proposta também no nível 2.

- Perceba que na coluna do número a apresenta todos os antecessores naturais dos divisores de 24. Já na coluna de b conta todos os sucessores naturais dos divisores de 24.
- Poderia também se criar uma tabela de modo que $b * a = 30$ Fazendo o raciocínio inverso. mas daria o mesmo trabalho em quantidade, pois tanto o 24 como 30, ambos tem 8 divisores naturais, sendo assim teria que fazer uma análise bem semelhante.

Questão 7 - (Ano 2009) Qual é o valor de $5353^2 - 2828^2$?

a) 2525^2 *b*) 3535^2 *c*) 4545^2 *d*) 4565^2 *e*) 5335^2

Solução da OBMEP: *(alternativa D)*
Notamos que $5353 = 53\times 101$ e $2828 = 28\times 101$. Podemos então fazer a conta rapidamente, usando a identidade $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$:
$5353^2 - 2828^2 = 53^2\times 101^2 - 28^2\times 101^2 = (53^2-28^2)\times 101^2 = [(53-28)\times(53+28)]\times 101^2$
$= 5^2\times 9^2\times 101^2 = 45^2\times 101^2 = (45\times 101)^2 = 4545^2$.
Comentários e sugestões:
É bem provável que seja lembrado rapidamente a ideia do produto notável da soma pela

diferença afim de manipular essa expressão numérica. Na resolução da OBMEP foi usado também algumas fatorações numéricas e propriedades de potência para a conclusão da resolução, sendo dado uma ideia dos números quadrados perfeitos e dos múltiplos de 101 por um número menor que 100 obtendo um resultado curioso e facilitando a manipulação da expressão numérica. Sugerimos que o professor

- Mostre aos alunos esse resultado curioso das multiplicações $101 \times 10, 101 \times 11, 101 \times 12, \cdots 101 \times 98, 101 \times 99$. É como se ao multiplicar um número de dois algarismos por 101, essa dezena gerasse um "clone"(um número com as casas repetidas) formando um novo número de 4 algarismos. Exemplo: $101 \times 53 = 5353$.

- Generalize que $101 \times ab = abab$.
  Como sugestão, tome $(100+1) \times 10a + b = 1000a + 100b + 10a + b$ pensando em algarismo posicional temos que $1000a + 100b + 10a + b = abab$ comprovando esse fato curioso.

Questão 11 - (Ano 2011) Um grupo de crianças quer comprar pizzas com 12 pedaços cada uma. Três pizzas não são suficientes para que cada menino coma 7 pedaços e cada menina coma 2 pedaços. Por outro lado, quatro pizzas são suficientes para que cada menino coma 8 pedaços, cada menina coma 4 pedaços e ainda sobrem pedaços. Quantas crianças há no grupo?

a) 9 *b*) 8 *c*) 7 *d*) 6 *e*) 4

Solução da OBMEP: *(alternativa D)*
Seja x o número de meninas e y o número de meninos no grupo. Como 3 pizzas de 12 pedaços cada não são suficientes para que cada menino coma 7 pedaços e cada menina coma 2 pedaços, temos $36 < 2x + 7y$. Por outro lado, como 4 pizzas de 12 pedaços cada são suficientes para que cada menino coma 8 pedaços e cada menina coma 4 pedaços, com sobra, temos $4x + 8y < 48$. Como $2x + 7y < 4x + 8y$ e tanto $4x + 8y$ são números maiores que 36 e menores que 48, temos

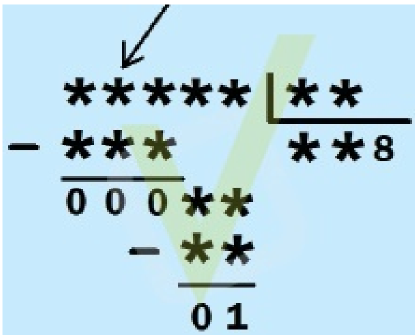
$$(4x + 8y) - (2x + 7y) = 2x + y < 48 - 36 = 12.$$

A desigualdade $2x + y < 12$ mostra que $x \leq 5$. Vamos agora testar a desigualdade $36 - 2x < 7y < 8y < 48 - 4x$ para os possíveis valores de x. Quando $x = 1$ temos $34 < 7y < 8y < 44$, que tem a solução $y = 5$; os valores 2,3,4 e 5 para x levam, respectivamente, às inequações $32 < 7y < 8y < 40$, $30 < 7y < 8y < 36$, $28 < 7y < 8y < 32$ e $26 < 7y < 8y < 28$ todas sem solução inteira para y. Segue que a única solução do problema é $x = 5$, $y = 1$ e assim a quantidade de crianças é $x + y = 5 + 1 = 6$.
Comentários e sugestões:
Neste problema usamos diversas desigualdades, fazendo as devidas análises e tentativas até

chegar no resultado obtido. Poderia ser uma situação discutida no Ensino Fundamental, mas trata-se de uma resolução muito trabalhosa então certifique-se que o público-alvo estará apto a acompanhar. Esses resultados podem ser usados em uma aula introdutória, ou uma aula de revisão das desigualdades.

Questão 18 - (Ano 2011) Na divisão indicada na figura, os asteriscos representam algarismos, iguais ou não. Qual é o algarismo representado pelo asterisco apontado pela flecha?

Figura 3 – Questão 18 (OBMEP- Nível 3 - 2011)



Fonte: OBMEP Provas e Solução

a) 8 *b*) 7 *c*) 6 *d*) 3 *e*) 0

Solução da OBMEP: *(alternativa E)*
Observamos que ao multiplicar 8 pelo divisor, obtemos um número com dois algarismos. Como o divisor também tem dois algarismos e $8 \times 13 = 104$, as possibilidades para o divisor são 10, 11 e 12. Observamos agora que ao multiplicar o algarismo das centenas do quociente pelo divisor, obtemos um número de três algarismos. A única maneira possível de multiplicar um número de apenas um algarismos por 10, 11 ou 12 de modo a obter um número de três algarismos é $9 \times 12 = 108$. Como a primeira subtração efetuada na conta armada tem como resultado 000, os três asteriscos à esquerda no dividendo correspondem a 1, 0 e 8, nessa ordem. Assim, o asterisco indicado em vermelho corresponde ao algarismo 0. O(a) leitor(a) pode prosseguir essa análise e mostrar que a conta armada corresponde à expressão $10897 = 12 \times 908 + 1$.
Comentários e sugestões:
É muito importante que caso o professor decida trabalhar essa questão em sua turma, ele verifique que a mesma tenha domínio sobre o algoritmo da divisão, evitando a falta de estímulo sobre esse problema com tantas variáveis desconhecidas. É também provável e esperado que alguns estudantes tentem completar os asteriscos com algumas variáveis, porém faça a ressalva que esse caminho seria muito algébrico e com poucas informações numéricas, formando equações indeterminadas.

- Reforce que quando usamos o algoritmo da divisão, temos a relação clássica:

$$Dividendo = Divisor \times Quociente + Resto$$

- A análise foi feita do final para o início nessa divisão, perceba que isso aconteceu pois foi dado o último algarismo do quociente (8) e o último resto sendo (1).

Questão 19 - (Ano 2011) Escreva os algarismos de 0 até 9 em uma linha, na ordem que você escolher. Na linha de baixo junte os vizinhos, formando nove números novos, e some esses números como no exemplo: Qual é a maior soma que é possível obter desse modo?

Figura 4 – Questão 19 (OBMEP- Nível 3 - 2011)

2		1		3		7		4		9		5		8		0		6
	21		13		37		74		49		95		58		80		06	
21 + 13 + 37 + 74 + 49 + 95 + 58 + 80 + 6 = 433																		

Fonte: OBMEP Provas e Solução

a) 506 *b*) 494 *c*) 469 *d*) 447 *e*) 432

Solução da OBMEP: *(alternativa B)*
Para qualquer disposição dos algarismos, a soma dos vizinhos "juntados" terá sempre nove parcelas, sem repetição de algarismos nas unidades ou nas dezenas. O único algarismo que não aparece nas unidades é o primeiro e o único que não aparece nas dezenas é o último. Para que a soma seja máxima, o algarismo 0 não deve comparecer nas dezenas e, portanto, deve ser o último; além disso, o menor dos algarismos $1, 2, \cdots, 9$ não deve aparecer nas unidades e, portanto, o 1 deve ser o primeiro. Concluímos que a soma é máxima para qualquer escolha onde 1 é o primeiro algarismo e 0 o último. Nesse caso, a soma das unidades será $0 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 44$ e a soma das dezenas será $10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 + 80 + 90 = 450$; a soma máxima é então $450 + 44 = 494$.
Solução sugerida:
Queremos que o algarismo zero seja apenas unidade e nunca dezena para ter um número maior na dezena e com isso vamos fixar o zero na última casa. Precisamos agora fixar o primeiro número na casa de modo que seja apenas dezena e nunca unidade e inicialmente a maioria pensa em fixar o 9 na primeira casa, porém há um erro em fazer isso pois da segunda casa até a penúltima todos os algarismos serão uma hora unidade e uma hora dezena, ou seja essa soma dos 8 números do meio sempre será múltiplo de 11 então para a soma ser máxima, já que separamos o zero pra o final o ideal agora é fixar o 1 na primeira

casa pois é o segundo menor valor. Agora perceba que aleatoriamente qualquer sequência que fixar 1 no início e zero no final dará sempre o mesmo resultado que é 494, veja.

$$1\ |2\ |3\ |4\ |5\ |6\ |7\ |8\ |9\ |0\ |$$

$$10 + (2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) \times 11 = 10 + 44 \times 11 = 10 + 484 = 494.$$

Comentários e sugestões:
Perceba que ao fixar 1 no início e zero no final os oitos algarismos restantes {2,3,4,5,6,7,8,9} sempre desempenham o papel uma vez de unidade e outra de dezena justamente porque o zero é o último algarismo, por isso foi colocado o 11 em evidência. É como estivesse aparecendo $ab = 10a + b$, $bc = 10b + c$, $cd = 10c + d$ de modo que somando todos, apareça sempre um múltiplo de 11. Nesse problema abordamos o critério de divisibilidade, valor posicional do sistema de numeração na base decimal.

Questão 3 - (Ano 2012) Júlio escreveu todos os números de 1 a 1000. Depois ele apagou o número 3 e, em ordem crescente, prosseguiu apagando os números que eram soma de dois números não apagados. Quantos números restaram quando Júlio terminou a tarefa?

Figura 5 – Questão 3 (OBMEP- Nível 3 - 2012)

Fonte: OBMEP Provas e Solução

a) 333 *b*) 335 *c*) 337 *d*) 340 *e*) 345

Solução da OBMEP: *(alternativa B)*
Apagando alguns números a mais, notamos o seguinte padrão: os números que não são apagados são 1, 2 e os da forma $3n + 1$ para $n \geq 1$. Para verificar que esse padrão se estende até 1000, distribuímos os números de 1 a 1000 na seguinte tabela:
A primeira coluna lista os números que deixam resto 1 quando divididos por 3, isto é, os números da forma $3n + 1$; analogamente, a segunda coluna lista os números que deixam resto 2 quando divididos por 3 e a terceira lista os múltiplos de 3; as casas de cor cinza indicam número apagados. O padrão indicado até $n = 4$ se repete até o final da tabela. De fato, para n = 5, o número da primeira coluna só será apagado caso ele seja soma de dois números não apagados anteriormente; mas isso não pode acontecer, pois

n	$3n+1$	$3n+2$	$3(n+1)$
0	1	2	3
1	4	5	6
2	7	8	9
3	10	11	12
4	13	14	15
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
332	997	998	999
333	1000		

- a soma de um número anterior da primeira coluna com 2 está na terceira coluna: $(3n+1)+2 = 3(n+1)$;
- a soma de dois números anteriores da primeira coluna está na segunda coluna: $(3m+1)+(3n+1) = 3(m+n)+2$.

Assim, o próximo número da primeira coluna, que é da forma $3n+1$, não será apagado e os números $3n+2 = (3n+1)+1$ e $3(n+1) = (3n+1)+2$, à sua direita, serão apagados. Usando esse argumento linha após linha, vemos que os números não apagados na tabela serão exatamente os números da primeira coluna. Na tabela vemos que há 333 números da forma $3n+1$ entre 4 e 1000, incluindo os extremos. Acrescentando os números 1 e 2, obtemos 335 números não apagados.

Solução sugerida:

É importante o estudante continuar essa sequência para saber qual o padrão que está acontecendo. então vamos anotar os 30 primeiros números.

Figura 6 – Solução da questão 3 (OBMEP- Nível 3 - 2012)

1 2 3 **4** 5 6 **7** 8 9 **10** 11 12 **13** 14 15 **18** 17

18 **19** 20 21 **22** 23 24 **25** 26 27 **28** 29 30**...**

Fonte: O autor

Agora perceba que do número 5 até o 1000 a cada três números, temos 2 apagados e um número aceso como pode ser observado na figura acima. Ou seja, do 5 até 1000 tem 996 números onde apenas um terço $\frac{1}{3}$ desses 996 números continuam aparecendo, no caso $\frac{1}{3}$ de 996 é igual a 332. Porém nessa sequência de 1 até 4 temos ainda os números 1,2 e 4 aparecendo, totalizando 335 números que não são apagados.

Comentários e sugestões:

É sempre uma boa ideia continuar uma sequência para testar e conjecturar o seu padrão numérico. É muito comum o aluno perceber o que acontece após expandir a sua sequência. Além do padrão nas sequências numéricas foi abordado também nessas soluções acima a noção de divisibilidade.

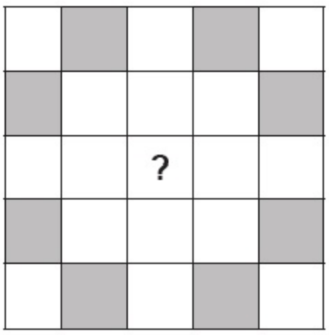
Questão 7 - (Ano 2012) Quantas vezes 17^2 deve aparecer dentro do radicando na igualdade $\sqrt{17^2 + 17^2 + 17^2 + \ldots + 17^2} = 17^2 + 17^2 + 17^2$ para que ela seja verdadeira?

a) 9 *b*) 51 *c*) 289 *d*) 861 *e*) 2601

Solução da OBMEP: *(alternativa E)*
A expressão dada pode ser escrita como $\sqrt{n \cdot 17^2} = 3 \cdot 17^2$, sendo n o número de parcelas 17^2 que aparecem dentro do radical. Elevando os dois lados dessa expressão ao quadrado, temos $n \cdot 17^2 = 9 \cdot 17^4$, donde $n = 9 \cdot 17^2 = 2601$.
Comentários e sugestões:
Pelos conteúdos abordados nessa questão, ela poderia ser um problema discutido no 9º ano do Ensino Fundamental após o professor introduzir e apresentar as equações irracionais e aplicar algumas manipulações numéricas e propriedades de potência. Como não se sabe quantas parcelas de 17^2 aparecem dentro do radical foi proposto introduzir na resolução da equação irracional n quantidade dessa parcela. Posteriormente foi usada algumas propriedades de potenciação afim de calcular o valor de n.

Questão 9 - (Ano 2012) No quadriculado 5×5 ao lado colocam-se os números de 1 a 25, um em cada casa, de modo que a soma dos números que aparecem em cada linha, coluna e diagonal é a mesma. Sabe-se que a soma dos números que aparecem nas casas cinzentas é 104. Qual é o número que aparece na casa central?

Figura 7 – Questão 9 (OBMEP- Nível 3 - 2012)



Fonte: OBMEP Provas e Solução

a) 13 *b*) 14 *c*) 15 *d*) 16 *e*) 17

Solução da OBMEP: *(alternativa A)*
Notamos primeiro que a soma dos números de 1 a 25 é $\frac{(1+25)\cdot 25}{2} = 325$ a soma dos números

em uma linha, coluna ou diagonal é então $\frac{325}{5} = 65$. As casas brancas do tabuleiro consistem de uma linha, de uma coluna e das duas diagonais, todas se cruzando na casa central. Denotando por x o número da casa central e lembrando que a soma dos números das casas cinzentas é 104, temos $4 \cdot 65 - 3x = 325 - 104$ e segue que $x = 13$.

Solução sugerida:

Em todo quadrado $n \times n$ no qual n é um número natural, é possível fazer algumas configurações com n^2 números sempre que esses n^2 números formam termos de uma progressão aritmética. Perceba que do 1 até o 25 são números que pertencem a uma PA de razão 1, então podemos organizar no quadrado e considerá-lo hiper-mágico pois todas as somas de linhas, colunas ou diagonais resulta no mesmo valor. Esse valor da soma não foi dado na questão. Quando n é um número ímpar, consequentemente *o valor central nesse quadrado é o termo mediano.* Na sequência $\{1, 2, 3, \cdots, 24, 25\}$ a mediana é 13, logo o termo central onde está a interrogação necessariamente precisa ser 13.

Comentários e sugestões

Essa questão poderia ser sugerida pelo professor em sua aplicação como um desafio de sala de aula, tendo em vista que é um problema que se assemelha com um jogo de enigma, no qual o estudante através de tentativas poderá resolver essa situação problema. Este problema também foi aplicado na prova do nível 2, no mesmo ano. Aqui poderão ser abordados os conteúdos de PA, mediana, equação do primeiro grau, e principalmente a resolução por tentativas e erros. É comum que antes de apresentar um quadrado mágico de ordem 5, o professor explique antes(como uma espécie de pré-requisito) um pouco sobre esse tipo de quadrado, características ou até fazer uma associação com o famoso jogo da velha, no qual invés de marcar símbolos iguais nas linhas, colunas ou diagonais, o estudante fará as devidas somas dessas linhas colunas e diagonais para comprovar se o valor de fato foi constante.

Sugerimos que o professor motive as seguintes discussões.

1. Qual é o valor da soma dos quadrados de cada linha, coluna ou diagonal? Generalize essa técnica com os alunos? Deixar claro que esse valor constante recebe nome especial(Número Mágico) e generalizar esse cálculo para quadrado de qualquer ordem;

2. Quais são os conteúdos matemáticos que vocês (alunos) conseguem fazer associação com esse problema?

3. Sugerir aos alunos montarem o quadrado todo. Fazer uma espécie de desafio, isso é motivador, mas se ninguém conseguir, coloque alguns valores nos quadrados para os alunos completarem;

4. Após os estudantes conseguirem a resolução, verificar se teve configurações diferente. (É sempre possível verificar outras configurações usando a ideia de simetria ou rotação

da figura);

Questão 13 - (Ano 2012) Para fazer várias blusas iguais, uma costureira gastou R$ 2,99 para comprar botões de 4 centavos e laços de 7 centavos. Ela usou todos os botões e laços que comprou. Quantas blusas ela fez?

a) 2 *b*) 5 *c*) 10 *d*) 13 *e*) 23

Solução da OBMEP: *(alternativa D)*
A costureira gastou 299 centavos. Como as blusas são iguais, em cada uma foi gasta a mesma quantia; logo, o número n de blusas é um divisor de 299. Como $299 = 13 \times 23$ e tanto 13 quanto 23 são primos, as possibilidades para n são $1, 13, 23$ *e* 299. O enunciado exclui a possibilidade $n = 1$ (são várias blusas) e a possibilidade $n = 299$ é excluída observando que, como um botão custa 4 centavos, a quantia gasta em qualquer blusa é maior que 1 centavo. Se $n = 23$, o total em botões e laços gasto em cada blusa seria 13 centavos, o que não pode acontecer pois não é possível gastar exatamente 13 centavos com botões de 4 centavos e laços de 7 centavos. Resta a possibilidade $n = 13$; nesse caso, o total gasto em botões e laços em cada blusa é de 23 centavos, que corresponde a 4 botões e 1 laço.

Comentários e sugestões:
Nesse problema foi abordado noções de divisibilidade e números primos. Outra alternativa poderia ser resolvido como uma equação diofantina $4x + 7y = 299$ para solução natural no qual x seria o número de botões e y seria o número de laços.

- Uma informação importante e desconhecida nesse problema é saber quantos botões e quantos laços têm em cada blusa.
- Converter a moeda principal do problemas em centavos, evita trabalhar com números decimais. Sendo assim, associe que R$2,99 significa 299 centavos.

Questão 2 - (Ano 2013) Quantos sinais de adição foram utilizados na expressão

$$2 + 0 + 1 + 3 + 2 + 0 + 1 + 3 + 2 + 0 + 1 + 3 + \ldots + 2 + 0 + 1 = 2013?$$

a) 503 *b*) 1342 *c*) 2012 *d*) 2013 *e*) 2016

Solução da OBMEP: *(alternativa B)*
Observemos que $2 + 0 + 1 + 3 = 6$, ou seja, a soma dos algarismos do número 2013 é igual a 6. Como $2013 = 6 \times 335 + 3$, concluímos que o lado esquerdo da igualdade dada no enunciado, que pode ser reescrito como

$$\underbrace{2+0+1+3+}_{4}\ \underbrace{2+0+1+3+}_{4}\ \ldots\ \underbrace{2+0+1+3+}_{4}\ \underbrace{2+0+1}_{2}$$

É formado por 335 blocos da forma $2+0+1+3+$, cada um contendo 4 sinais de adição, e um bloco da forma $2+0+1$, que contém 2 sinais de adição. Portanto, o número total de sinais de adição que foram utilizados na igualdade é igual a $4 \times 335 + 2 = 1342$.

Comentários e sugestões:

Ao perceber o padrão dessa soma, adicione um sinal de + no final de cada agrupamento, de modo que tenham 4 números e quatro sinais + pois um número positivo ao se iniciar o sinal + fica oculto, mas no final não deixe esse sinal de mais oculto. o padrão analisado é $2+0+1+3+$ e não $2+0+1+3$. Na resolução da OBMEP foi abordado a ideia do algoritmo da divisão, podendo inclusive ser um problema discutido no Ensino Fundamental.

Questão 12 - (Ano 2014) O símbolo $n!$ é usado para representar o produto dos números naturais de 1 a n, isto é, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 2 \cdot 1$ por exemplo, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Se $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, qual é o valor de n?

a) 13 *b*) 14 *c*) 15 *d*) 16 *e*) 18

Solução da OBMEP: *(alternativa D)*

Como $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, tem-se $n \geq 13$. Por outro lado,
$13! = 13 \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot 11 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 = 13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5^2 \cdot 3^5 \cdot 2^{10}$, e, portanto:

$$\frac{n!}{13!} = \frac{2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}{13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5^2 \cdot 3^5 \cdot 2^{10}} = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 14 \cdot 15 \cdot 16.$$

Logo $n! = 13! \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 = 16!$, ou seja, $n = 16$.

Solução sugerida:

Usando o teorema de Legendre temos $E_2(n!) = 15$. Em outras palavras, a pergunta seria: Qual é o menor número $n!$ que é divisível por 2^{15}? Segue que $E_2(n!) = 15 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^4} \right\rfloor$, a potência foi até 2^4 pois se escrever-mos o número 15 na base 2, teríamos que fazer 4 divisões sucessivas por 2, como conclusão que 15 escrito na base 2 tem 4 dígitos, veja:

$$15 = [1111] = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0.$$

Agora, perceba que esse somatório das partes inteiras da divisão é menor que o somatório da divisão completa, então temos:

$$15 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^4} \right\rfloor \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \frac{n}{16}$$

Resolvendo essa desigualdade, temos o seguinte resultado: $15 \leq \frac{15n}{16}$ e portanto $n \geq 16$. Mas perceba que $n < 17$ pois caso contrário iria aparecer algum fator de 17 na decomposição do $n!$. Concluímos então que $n = 16$.

Poderia-se também aplicar diretamente observação 2.30 no capítulo 2, (ver em 2.31) no qual pela fórmula $\frac{x \cdot \left[\left(\frac{1}{p}\right)^{\alpha} - 1\right]}{1-p} \geq \beta$ e atribuindo os valores $p = 2$, $\beta = 15$ e $\alpha = 4$. Dessa forma chegaria-se na mesma conclusão.

Comentários e sugestões Nessa questão são abordados como temas de Matemática a noção de divisibilidade, números primos, decomposição em fatores primos e a noção inicial sobre números fatoriais. Inclusive foi introduzidos os números fatoriais devido ao fato de a maioria dos estudantes do primeiro ano do Ensino Médio não conhecer as características desse número pois em geral esse conteúdo só é abordado a partir do 2º ano do Ensino Médio. Sugerimos que o professor motive as seguintes discussões.

1. Com as alternativas dada, discuta com os estudantes se é possível, só fazendo análise, eliminar alguma opção de resposta. (Perceba que dá para eliminar as opções [a,b,e] facilmente);

2. Quais são os conteúdos matemáticos que vocês (Estudantes) conseguem fazer alguma associação com esse problema? Como resposta, é esperado os temas:

   Decomposição em fatores primos, noções de divisibilidade, desigualdades, números fatoriais, entre outros que o professor pode expandir de maneira coerente com o problema.

3. Deixe claro em sua apresentação do teorema de Legendre que sua aplicação é mais conveniente em decomposição de fatores primos de números fatoriais grandes (HEFEZ, 2014);

4. Caso não tenha usado o item [1] tente uma resolução discursiva com seus alunos, sem as opções de gabaritos. Explorando um pouco mais do conhecimento dele;

Questão 15 - (Ano 2014) Quantos números inteiros e positivos de cinco algarismos têm a propriedade de que o produto de seus algarismos é 1000?

a) 10 *b*) 20 *c*) 25 *d*) 30 *e*) 40

Solução da OBMEP: *(alternativa E)*
Como $1000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, os possíveis números são formados pelos algarismos:

- $5, 5, 5, 2$ e 4, caso em que contabilizamos $5 \cdot 4 = 20$ possibilidades; 5 possibilidades para a posição do algarismo 2 e 4 possibilidades para o algarismo 4 (as demais casas do número devem receber o algarismo 5).

- $5, 5, 5, 8$ e 1, caso em que, de forma análoga, contabilizamos $5 \cdot 4 = 20$ possibilidades. Logo, existem $20 + 20 = 40$ números com tal propriedade.

Solução sugerida:
Os números inteiros positivos com 5 algarismos variam de 10000 até 99999. Agora, como queremos que o produto seja 1000, então vamos fazer a decomposição em fatores primos do

1000. assim, $1000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5^3$. Então perceba que queremos formar um número de 5 algarismos que tem que aparecer esses fatores 2 e 5. Obrigatoriamente o número formado com os cincos algarismos tem que ter três algarismos 5 pois $5^2 = 25$ e $5^3 = 125$ e ambos tem mais de um algarismos em suas potências. Então nas 5 vagas para colocar dígitos, três estão ocupadas com os algarismos 5. Logo sobram duas vagas para encaixar os 3 algarismos 2. Basta usar 2 bases de modo que o produto seja 8, $125 \times 8 = 1000$ então nas duas vagas restante podemos colocar $\{2{,}4\}$ ou $\{1{,}8\}$ sendo assim teríamos os números:

- O número (55524) e suas permutações tem a propriedade que o produto de seus algarismos é igual a 1000. Portanto, temos 5 algarismos, onde 3 são repetitivos. Temos um total de $P_5^2 = \frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$ números.

- Temos também a possível configuração (55518) e suas permutações. então temos 5 algarismos, onde 3 são repetitivos. um total de $P_5^2 = \frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$ números.

Totalizando 40 números.

Comentários e sugestões:

Essa questão é semelhante ao problema 15 do ano de 2006, nesse mesmo capítulo. A diferença é que nesse problema foi fixado que os números em análise têm que ter exatamente 5 algarismos. São abordados aqui os conteúdos, decomposição em fatores primos, métodos de contagem (Análise combinatória) e divisibilidade. Seria interessante que o estudante já tivesse uma noção básica de princípio de contagem, pois essa prova é aplicada nas 3 séries do Ensino Médio, a análise combinatória se estuda com mais destaque nos 2º e 3º ano do Ensino Médio.

Questão 16 - (Ano 2015) João colocou 100 moedas iguais em um pote e pediu a seus filhos, de idades distintas, que cada um deles colocasse no pote uma moeda para cada irmão mais velho e retirasse do pote duas moedas para cada irmão mais novo. Quando todos os filhos terminaram de fazer isso, restaram no pote 22 moedas. Quantos são os filhos de João?

a) 5 *b)* 7 *c)* 10 *d)* 13 *e)* 15

Solução da OBMEP: *(alternativa D)*

Considerando cada par de irmãos, o mais velho retira duas moedas do pote pelo irmão mais novo, enquanto o mais novo coloca uma moeda no pote pelo mais velho. Logo, para cada par de irmãos, uma moeda é retirada do pote. Se forem n os filhos de João, há $\frac{n(n-1)}{2}$ pares de irmãos e, portanto, este é o número total de moedas retiradas do pote no processo. Logo, temos $\frac{n(n-1)}{2} = 100 - 22 = 78$. Daí resulta $n^2 - n - 156 = 0$. Resolvendo a equação do segundo grau, obtemos $n = 13$ ou $n = -12$. Logo, João tem 13 filhos.

Outra solução da OBMEP: Na tabela, numeramos os irmãos de 1 a n, com idades crescentes:

	Irmão 1	irmão 2	irmão 3	$\cdots$	irmão $n-1$	irmão n
Moedas que coloca	$n-1$	$n-2$	$n-3$		1	0
Moedas que tira	2×0	2×1	2×2		$2\times(n-2)$	$2\times(n-1)$

A segunda linha é o dobro da primeira, portanto o que sobra de moedas é igual à soma $1+2+\cdots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}$ e, portanto, temos $\frac{n(n-1)}{2}=100-22=78$. Daí, resulta $n^2-n-156=0$. Resolvendo, como antes, obtemos $n=13$ ou $n=-12$. Logo, João tem 13 filhos.

Solução sugerida:

Tente fazer uma observação desse caso para 2 filhos, depois para 3 filhos, depois para 4 filhos e siga até perceber que acontece um padrão lógico numérico. Observe também que como restou 22 moedas é porque foram retiradas 78 moedas. Analisando esses casos, temos:

- Para 2 filhos, resultaria no final de tudo na retirada de uma moedas do pote, pois o filho novo colocaria 1 e o filho novo retiraria 2;
- Para 3 filhos, resultaria no final de tudo na retirada de três moedas do pote;
- Para 4 filhos, resultaria no final de tudo na retirada de seis moedas do pote;
- Para 5 filhos, resultaria no final de tudo na retirada de dez moedas do pote;
- Perceba que cada vez que aumenta 1 filho nesse procedimento de análise, são retirada uma moeda a mais do que no procedimento anterior. Exemplo: De 2 filhos para 3 filhos há uma diferença de 2 moedas, de 3 filhos para 4 filhos há uma diferença de 3 moedas, de 4 filhos para 5 filhos há uma diferença de 4 moedas. Essa sequência forma uma Progressão Aritmética de 2º ordem (Esse tipo de sequência não é abordado no Ensino Médio, mas tranquilamente pode ser feito como uma aplicação para os estudantes, tendo em vista sua aplicabilidade). Conjecturando para n filhos, resultaria um polinômio do 2º grau que é a expressão $M=\frac{n(n-1)}{2}$.

Veja na tabela quantas moedas seriam retiradas, de acordo com a quantidade de filhos usando esses procedimentos do problema.

Número de filhos (n)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	**13**	14
Moedas retirada (M)	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	**78**	91

Perceba na tabela acima que para 13 filhos são retiradas 78 moedas, restando então no pote 22 moedas.

Comentários e sugestões:
A conjectura de um padrão numérico nem sempre é fácil de ser descoberto. Mas o estudante apenas percebendo o padrão lógico de uma sequência pode idealizar as informações dessa tabela e resolver o problema com uma quantidade menor cálculos algébricos. O professor poderia fazer uma adaptação desse problema dizendo que ao invés de sobrar 22 moedas, sobraram 79 moedas, daí o aluno irá concluir que foram retiradas 21 moedas e procuraria quantos filhos João tinha. Apesar de parecer um problema de contagem, usamos a ideia de aritmética ao tentar conjecturar esse padrão numérico.

Questão 19 - (Ano 2015) Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 2014, 2015\}$, forma-se um subconjunto B, com a maior quantidade possível de elementos, tal que todo elemento de B é múltiplo ou divisor de qualquer outro elemento de B. Quantos elementos há no conjunto B?

a) 9 *b*) 10 *c*) 11 *d*) 12 *e*) 13

Solução da OBMEP: *(alternativa C)*
Existem vários subconjuntos que satisfazem às condições do enunciado; todos eles com 11 elementos. Por exemplo:

$$B_1 = \{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}\},$$

$$B_2 = \{1,\ 3,\ 2\cdot 3,\ 2^3\cdot 3,\ 2^4\cdot 3,\ 2^5\cdot 3,\ 2^6\cdot 3,\ 2^7\cdot 3,\ 2^8\cdot 3,\ 2^9\cdot 3\}$$

$$B_3 = \{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^9\cdot 3\}$$

Não é possível construir um subconjunto de A nas condições descritas no enunciado, contendo 12 ou mais elementos. De fato, suponhamos que isto fosse possível, e seja B um subconjunto de A, com $k \geq 12$ elementos. Seja n o maior elemento de B. Então, n deve ser múltiplo dos demais elementos de B. Logo n deve possuir k divisores positivos (ele próprio e os demais $k-1$ elementos do conjunto). O menor número n que possui k divisores positivos é 2^{k-1}. Entretanto, $2^{k-1} \geq 2^{11} = 2048 > 2015$ pois $k \geq 12$. Logo $n > 2015$ e, portanto, n não pode pertencer a B, já que B é subconjunto de A. Esta contradição surge da suposição de que B tem mais do que 11 elementos. Assim, os subconjuntos de A com a maior quantidade possível de elementos, que satisfazem as condições do enunciado, possuem 11 elementos.

Solução sugerida:
Entre todas as potências de números naturais, as potências de 2 são as que se distanciam menos a cada variação no expoente, pois 2 é a menor base prima. Logo basta analisar quantas potências de base 2 tem nesse intervalo de $1 = 2^0$ até $2015 > 2^{10} = 1024$. Então temos 11 elementos nesse subconjunto B. veja os elementos:

$$\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024\}.$$

Comentários e sugestões:
É de extrema importância que o professor chame uma atenção especial aos estudantes sobre o conhecimento das potências de base 2, associando que as maiores potências são múltiplos das menores potência da mesma base e as menores são divisores da maior potência, como uma memorização de 2^0 até 2^{10} , pois são potências rotineiras em problemas de matemática. Como uma sugestão ao professor, fazer analogias com as memórias de armazenamento em (HD, Celular, Vídeo-games, Pen-driver entre outros) de dispositivos eletrônicos com as potências de 2. Na solução da OBMEP perceba que aparecem outros subconjuntos distintos, de maneira que não interferem na resposta.
Questão 17 - (Ano 2016) Quantos são os números naturais n tais que $\frac{5n-12}{n-8}$ é também um número natural?

a) 4 *b*) 5 *c*) 6 *d*) 7 *e*) 8

Solução da OBMEP: *(alternativa D)*
Podemos reescrever a expressão somando e subtraindo 40 no denominador, como abaixo:

$$\frac{5n-12}{n-8} = \frac{5n-40+40-12}{n-8} = \frac{5n-40}{n-8} + \frac{28}{n-8} = \frac{5(n-8)}{n-8} + \frac{28}{n-8} = 5 + \frac{28}{n-8}.$$

Logo, os números inteiros n tais que $(5n-12)/(n-8)$ é um número natural são aqueles tais que $28/(n-8)$ é um número inteiro igual ou maior do que -5. E, dentre esses números, para $28/(n-8)$ ser um número inteiro igual ou maior que -5, segue que

$$n-8 = \pm1, \pm2, \pm4, \pm7, \pm14, ou\ \pm 28.$$

Logo, os possíveis inteiros n são:

$$n = +9, +10, +12, +15, +1, +22, -6, +36, ou\ -20.$$

Desses, sete são números naturais.
Comentários e sugestões:
Nessa solução são abordados os temas de fatoração de binômio, algoritmo da divisão, divisores e análise do sinal. Após fazer as manipulações algébricas e chegar em $\frac{5n-12}{n-8} = 5 + \frac{28}{n-8}$ é preciso muito cuidado para não analisar os divisores naturais de 28. Pela decomposição em fatores primos de 28, descobrimos que $28 = 2^2 \cdot 7$ tem $(2+1)\cdot(1+1) = 6$ divisores. Aqui está uma observação importante do problema. Perceba que para $n = 1$ tanto o numerador quanto o denominador são negativos, dessa forma temos o número $\frac{5n-12}{n-8} = \frac{5-12}{-7} = 1$.

Questão 6 - (Ano 2017) Somando 1 a um certo número natural, obtemos um múltiplo de 11. Subtraindo 1 desse mesmo número, obtemos um múltiplo de 8. Qual é o resto da divisão do quadrado desse número por 88?

a) 0 *b*) 1 *c*) 8 *d*) 10 *e*) 80

Solução da OBMEP: *(alternativa B)*

Lembramos primeiro que, se a e b são números naturais, dizer que a é múltiplo de b (ou b divide a) é dizer que existe outro número natural c tal que $a = bc$. O algoritmo da divisão nos diz que, se $b \neq 0$, existem únicos inteiros q e r tais que $a = qb + r$ e $0 \leqslant r < |b|$; os números q e r são ditos, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de a por b (se $r = 0$, temos o caso em que a é múltiplo de b). Seja agora n o número natural do enunciado. Como $n + 1$ é múltiplo de 11, existe um número natural t tal que $n + 1 = 11t$; do mesmo modo, existe um número natural s tal que $n - 1 = 8s$. Multiplicando membro a membro essas expressões, temos $(n + 1)(n - 1) = n^2 - 1 = 88ts$, ou seja, $n^2 = 88ts + 1$. Essa última expressão mostra que o resto da divisão de n^2 por 88 é 1.

Comentários e sugestões:

Na resolução da OBMEP foi abordado basicamente o algoritmo da divisão, o produto da soma pela diferença e noções de divisibilidade, podendo ser uma situação vivenciada com estudantes do Ensino Fundamental. Pode-se escrever também como notação de congruência modular como solução que $n^2 \equiv 1 \ mod\ (88)$ com objetivo de uma escrita de notação menor.

Questão 9 - (Ano 2017) A maior potência de 2 que divide o produto dos números naturais $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 2023 \times 2024$ é 2^{2017}. Então qual é a maior potência de 2 que divide o produto $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 4047 \times 4048$?

a) 2^{2018} *b)* 2^{4034} *c)* 2^{4041} *d)* 2^{6051} *e)* 2^{8068}

Solução da OBMEP: *(alternativa C)*

Como 2^{2017} é a maior potência de dois que divide o produto $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 2023 \times 2024$, podemos escrever esse produto na forma $2^{2017} \times I$, sendo I um número ímpar.

Já o produto $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 4047 \times 4048$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$1 \times (2 \times 1) \times 3 \times (2 \times 2) \times 5 \times (2 \times 3) \cdots \times (2 \times 2023) \times 4047 \times (2 \times 2024) =$

$(1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 4045 \times 4047) \times (2 \times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times \cdots \times (2 \times 2024) =$

$(1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 4045 \times 4047) \times (1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 2023 \times 2024) \times 2^{2024} =$

$(1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 4045 \times 4047) \times I \times 2^{2017} \times 2^{2024}$

O primeiro fator da última expressão também é um número ímpar, logo,

$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 4047 \times 4048 = T \times 2^{2017+2024} = T \times 2^{2041}$, sendo T um fator ímpar. Assim, o expoente da maior potência de dois que divide o produto dado é 4041.

Solução sugerida:

Basta aplicar o teorema de Legendre em 2.29 do número astronômico 4048! sobre a base 2. Perceba que $2048 = 2^{11} < 4048 < 4096 = 2^{12}$ então na aplicação do teorema teremos 11 parcelas e podemos fazer de 2 maneira essa soma.

$E_2(4048!) = \left\lfloor \frac{4048}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4048}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4048}{2^3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{4048}{2^{10}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4048}{2^{11}} \right\rfloor = 2024 + 1012 + 506 + 253 + 126 + 63 +$

$+ 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 4041$ então $2^{4041} | 4048!$

O teorema diz que em 4048! aparece 2024 divisores de 2, 1012 divisores de 4, 506 divisores

de 8, 253 divisores de 16 e seguindo nesse raciocínio até concluir 1 divisor de $2^{11} = 2048$ porém para números tão grande é mais viável fazer a primeira divisão e o resultado dividir por 2 para continuar até a parte inteira da divisão ser zero. Entenda:
$\left\lfloor \frac{4048}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4048}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4048}{2^3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{4048}{2^{11}} \right\rfloor = 2024 + \left\lfloor \frac{2024}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1012}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 4041$

O objetivo de fazer dessa maneira é para sempre dividir por 2 e não pelas potências maiores de 2. Basta fazer a primeira divisão por 2 e do resultado continuar dividindo por 2 pegando como resultado a parte inteira, até que a parte inteira seja zero para terminar a aplicação do teorema.

Comentários e sugestões:

Nessa questão são abordados como tema de Matemática do Ensino Básico os conteúdos de divisibilidade, noção de potências e poderia ser pensado também a ideia de número fatorial. Como solução sugerida usamos o teorema de Legendre, apesar de quase nunca ser discutida em turmas de Ensino Médio ou em graduações do Ensino Superior, ele se mostra uma ferramenta muito poderosa e simples em problemas de decomposição em fatores primos de números fatoriais muito grande.

Questão 16 - (Ano 2017) João tem 148 copos dispostos em fila, cada um contendo um grão de feijão. Em etapas, João reduz a quantidade de copos da fila da seguinte maneira:

- se em uma etapa a quantidade de copos for par, ele coloca os feijões do último copo no primeiro, do penúltimo no segundo, do antepenúltimo no terceiro e assim por diante, descartando os copos vazios;

- se em uma etapa a quantidade de copos for ímpar, ele coloca os feijões do último copo no segundo, do penúltimo no terceiro, do antepenúltimo no quarto e assim por diante, também descartando os copos vazios.

Quando a fila se reduzir a dois copos, quantos feijões estarão no primeiro copo?

a) 4 *b*) 10 *c*) 16 *d*) 20 *e*) 36

Solução da OBMEP: *(alternativa D)*

De acordo com a maneira com que João reduza a quantidade de copos da fila,

- após a 1º etapa teremos $\frac{148}{2} = 74$ copos na fila;

- após a 2º etapa teremos $\frac{74}{2} = 38$ copos na fila;

- após a 3º etapa teremos $\frac{37+1}{2} = 19$ copos na fila;

- após a 4º etapa teremos $\frac{19+1}{2} = 10$ copos na fila;

- após a 5º etapa teremos $\frac{10}{2} = 5$ copos na fila;
- após a 6º etapa teremos $\frac{5+1}{2} = 3$ copos na fila;
- após a 7º etapa teremos $\frac{3+1}{2} = 2$ copos na fila;

Em cada etapa, a quantidade de feijões no segundo copo sempre dobra. Assim, após a 7º etapa, a quantidade de feijões no segundo copo será $2^7 = 128$. Todos os demais feijões estarão no primeiro copo. Portanto, a quantidade de feijões no primeiro copo quando a fila se reduz a dois copos é $148 - 128 = 20$.

Comentários e sugestões:

Nesta questão foi abordado conceitos de divisibilidade, potências de base 2 e algoritmo da divisão. Tornando inclusive um problema experimental de modo que os alunos pudessem fazer essas sucessivas divisões de feijão na prática, obedecendo a regra de agrupamento dada no enunciado.

Questão 2 - (Ano 2018) Na igualdade abaixo, a, b e c são números inteiros positivos. Qual é o valor de c?

$$\frac{10}{7} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}.$$

a) 2 *b*) 3 *c*) 4 *d*) 5 *e*) 7

Solução da OBMEP: *(alternativa B)*

De acordo com o enunciado $a, b, c \geq 1$. Como $1 < \frac{10}{7} < 2$, 2, segue que $a = 1$. De fato, se $a \geq 2$ deveríamos ter $\frac{1}{b+\frac{1}{c}} < 0$, o que não ocorre. Consequentemente, $\frac{10}{7} = 1 + \frac{1}{b+\frac{1}{c}}$. Basta encontrar b e c tais que $\frac{3}{7} = \frac{1}{b+\frac{1}{c}} = \frac{c}{bc+1}$. A partir dessa igualdade de frações, concluímos que $7c = 3(bc + 1)$. Como 3 e 7 são números primos, segue que 3 divide c, bem como 7 divide $(bc + 1)$. Portanto, existem dois números naturais positivos m e n satisfazendo $c = 3m$ e $bc + 1 = 7n$

Assim, $7n\ c = (bc + 1)(3m) = 3(bc + 1)m = 7c\ m$ o que garante que $m = n$. Logo, $(bc + 1) = b(3m) + 1 = 7n = 7m$ e ,então, $1 = 7m - 3bm = m(7 - 3b)$. Consequentemente, $m = 1$, pois m divide 1 e é positivo. Segue que $c = 3m = 3$ e também que $b = 2$, pois $3b + 1 = 7$. Portanto $a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$. Observação: Uma fração contínua finita simples é uma expressão da forma

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

em que a_0 é um número inteiro e $a_1, \cdots, a_n$ são inteiros positivos.

Todo número racional pode ser expresso na forma de uma fração contínua simples, e toda fração contínua simples é um número racional. A representação como fração contínua não é única. Se $a_n > 1$, há apenas duas representações possíveis, porém de "comprimentos"diferentes.

Solução sugerida:

Temos uma resolução bastante simples se o aluno tiver o conhecimento de frações contínuas. Então ao invés de tentar mexer algebricamente no segundo membro, vamos manipular a fração.

$$\frac{10}{7} = \frac{7+3}{7} = 1 + \frac{3}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{3}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}.$$

Comparando com a expressão inicial, temos:

$$\frac{10}{7} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}.$$

Portanto $a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$.

Comentários e sugestões:

É muito importante o professor mostrar como manipular uma fração imprópria na forma contínua no Ensino Médio tendo em vista que não é um assunto da grade curricular de matemática no Ensino Básico, porém é comum estar presente em olimpíadas. Na solução proposta pela OBMEP foi também discutidas as noções de divisibilidade e propriedades entre números primos, mesmo sendo uma alternativa mais complexa. Então é ideal o aluno ter conhecimento sobre fração mista e inversão de fração como uma divisão, a fim de fazer as manipulações para chegar no formato de uma fração contínua.

Questão 5 - (Ano 2018) De quantas maneiras podemos trocar uma nota de R$ 20,00 por moedas de R$ 0,10 e R$ 0,25?

a) 21 *b)* 36 *c)* 38 *d)* 41 *e)* 56

Solução da OBMEP: *(alternativa D)*

Primeira Solução: Não podemos usar um número ímpar de moedas de 25 centavos, mas podemos usar 0, 2, 4, ... até 80 dessas moedas, e cada escolha gera uma maneira diferente de fazer a troca. Logo, o número de maneiras de trocar R$ 20,00 por moedas de R$ 0,10 e R$ 0,25 é igual à quantidade de números pares entre 0 e 80, incluindo os extremos, ou seja, é 41.

Segunda Solução:

Sejam x e y as quantidades de moedas de R$0,25 e R$0,10, respectivamente, usadas para formar a quantia de R$20,00. Assim, $0,25x + 0,10y = 20$.

Multiplicando a equação por 20, obtemos $5x + 2y = 400$. Como 400 e $2y$ são números pares, x também é um número par, e daí podemos escrever $x = 2z$. Uma vez que o valor do inteiro z tenha sido escolhido, teremos uma solução com $y = \frac{1}{2}(400 - 10z) = 200 - 5z$. Para que y seja um inteiro não negativo, $200 - 5z \geq 0$, ou seja, $z \leqslant 40$. Por outro lado, como $z \geq 0$, podemos concluir que existem exatamente 41 valores possíveis para ele, a saber: 0,1,2,$\cdots$, 40.

Terceira Solução:

Pensemos no que aconteceria se usássemos moedas com valor R$ 0,05. Precisaríamos de 400 dessas moedas para formar a quantia de R$ 20,00. Podemos trocar duas dessas moedas pela moeda de R$ 0,10 e cinco delas pela moeda de R$ 0,25. Para que consigamos usar apenas as duas moedas (de R$ 0,10 e R$ 0,25), mencionadas no enunciado, devemos realizar todas as trocas possíveis sem sobrar nenhuma moeda de R$ 0,05. Para que isso seja realizável, a quantidade de moedas de R$ 0,05 convertidas em R$ 0,25, além de múltiplo de 5, também deve ser par, para que sobre uma quantidade par de moedas de R$ 0,05 que devem estar associadas às trocas por moedas de R$ 0,10. Os múltiplos de 5 que são pares e estão entre 0 a 400 (incluindo-os), são: 0,10, 20,30,$\cdots$, 400. Essa lista é composta por 41 números e corresponde aos modos de usarmos as moedas de R$ 0,25 e R$ 0,10 para obtermos a quantia total de R$ 20,00.

Solução sugerida:

Podemos pensar que há p moedas de R$0,10 e q moedas de R$0,25. Então temos a equação $0,10p + 0,25q = 20$ multiplicando a equação por 20 temos a equação diofantina linear equivalente $2p + 5q = 400$ e a mesma tem solução, pois $mdc\ [2,5] = 1$ e $1 \mid 400$ então pelo teorema de Bezout $2p + 5q = mdc\ [2,5] = 1$ resolvendo temos $1 = 5 - 2 \cdot 2$ multiplicando por 400 fica $5 \cdot 400 - 2 \cdot 2 \cdot 400 = 1 \cdot 400$ é equivalente a $2 \cdot (-800) + 5 \cdot 400 = 400$ então as soluções nos inteiros de acordo com 2.29 ,são:

$$p = p_0 - bt \text{ e } p = p_0 + at.$$

Portanto, $p = -800 - 5t$ e $q = 400 + 2t$. Isto significa que aumentando 2 moedas de 25 centavos e diminuindo 5 moedas de 10 centavos se encontra outra solução distinta. Queremos que p e q ambos sejam números inteiros e não negativo então $p \geq 0$ e $q \geq 0$. resolvendo a desigualdade, temos $-800 - 5t \geq 0$ e $400 + 2t \geq 0$. dessas duas inequações concluímos que o parâmetro t varia de -160 até -200 ou seja t pode variar de 41 maneiras tornando p e q soluções inteiras não negativa.

Comentários e sugestões:

Foram disponibilizadas 3 soluções da OBMEP de modo que usando noções básicas de múltiplos, divisores, desigualdades e métodos de contagem fosse possível acompanhar cada uma resolução. Na segunda solução da OBMEP foi sugerida uma equação do primeiro grau nas varáveis p e q, de modo que sua solução seja natural, ou seja, uma equação diofantina que deixamos como solução sugerida de modo que caso tenha-se conhecimento sobre esse tema, há uma opção a mais para pensar nessa resolução de problema. É muito comum em livros de coleções universitárias ou alguns artigos sobre teoria dos números e aritméticas solucionarem algumas equações diofantina sem contexto envolvido, como se fosse com maior objetivo de praticar as técnicas de resolução. Porém para esse caso, temos uma resolução de questão contextualizada que consequentemente se transformou em uma aplicação da equação diofantina.

Questão 6 - (Ano 2018) Na igualdade $(EU)^2 = MEU$, as letras E, M e U representam algarismos não nulos. Nessa expressão, EU é um número de dois algarismos, e MEU é um número de três algarismos. Qual é o valor de $M + E + U$?

a) 10 *b)* 11 *c)* 12 *d)* 13 *e)* 14

Solução da OBMEP: *(alternativa D)*
Considerando somente as unidades em ambos os lados da igualdade $(EU)^2 = MEU$, observamos que U^2 termina com o algarismo U. Isso só acontece com os algarismos 1,5 ou 6. Logo, a letra U deve ser um desses algarismos. Como $31^2 = 961$ e $32^2 = 1024$, e considerando que $(EU)^2$ é igual ao número MEU de três algarismos, segue que o número EU deve ser maior do que 10 e menor do que 32. Além disso, E e U são algarismos diferentes e não nulos. Assim, as possibilidades para o número EU são: 15, 16, 21, 25, 26 e 31. Testando essas possibilidades, como segue, que a única correta é $25^2 = 625$.
$15^2 = 225$, $16^2 = 256$, $21^2 = 441$, $25^2 = 625$, $26^2 = 676$, $31^2 = 961$. Logo, MEU representa o número 625 e $M + E + U = 13$.

Solução sugerida:
Usando as noções de congruência modular poderíamos escrever que $EU \equiv EU \ mod \ (100)$ pois todo número é congruente a ele próprio módulo m com m pertencente aos naturais, mas podemos também escrever que $(EU)^2 \equiv MEU \equiv EU \ mod \ (100)$. Desta forma, subtraindo as congruências, temos que $(EU)^2 - EU \equiv 0 \ mod \ (100)$ pois os últimos dois algarismos são iguais nos dois números MEU e EU. Fatorando a expressão anterior, temos $EU \cdot (EU - 1) \equiv 0 \ mod \ (100)$ e pela definição de congruência significa que $100|EU \cdot (EU - 1)$. Agora vamos avaliar o produto de 2 números naturais consecutivos, maiores que 9 e menores que 100, cujo o produto seja divisível por 100. Perceba que um desses números é par e o outro é ímpar pois eles são consecutivos e ao multiplicar deve resultar em um número de 3 algarismos. Como queremos que $EU \cdot (EU - 1)$ seja múltiplo de 100, então existe K inteiro de modo que $EU \cdot (EU - 1) = 100K = (2^2 \cdot 5^2) \cdot K$. Perceba que o número EU e $(EU - 1)$ ambos têm 2 algarismos. Fazendo o K variar entre 2 e 9 podemos organizar produto de 2 números consecutivos apenas quando $K = 6$ tornando $EU \cdot (EU - 1) = 100 \cdot K = (2^2 \cdot 5^2) \cdot 6 = 600 = 5^2 \cdot 2^3 \cdot 3$.
Portanto EU e $(EU - 1)$ são respectivamente 25 e 24 pois $25 \cdot 24 = 600$. Agora, como sabemos que $25^2 = 625$ então $M = 6$, $E = 2$ e $U = 5$. Assim podemos concluir também que $M + E + U = 13$.

Comentários e sugestões:
Para a resolução dessa questão foram abordados os temas de Ensino Fundamental como noção de divisibilidade, sistema de numeração decimal e potências. Mas fazendo uma abordagem em nível de graduação ou preparatório para provas em nível militares e/ou olímpicos, poderia ser abordado o tema de congruência modular, como foi discutido na solução sugerida.

Provavelmente a maioria dos leitores acharão a solução sugerida mais complexas, e de fato é, porém a ideia de associar determinados problemas com congruência modulares nos dá mais opções para solucionar problemas de divisibilidade.

Questão 11 - (Ano 2018) Qual é o maior valor possível para o máximo divisor comum de dois números naturais cujo produto é 6 000?

a) 10 *b*) 20 *c*) 30 *d*) 40 *e*) 60

Solução da OBMEP: *(alternativa B)*
O MDC de dois números que estão fatorados como produto de primos é o produto dos primos comuns, cada um elevado ao menor expoente que comparece nas fatorações. Denotamos por α e β os dois números cujo produto é $6000 = 2^4 \times 3 \times 5^3$ Assim, os fatores primos de α e β são 2, 3 ou 5.
O MDC de α e β será o maior possível, quando os fatores primos estiverem distribuídos de forma mais equânime possível. Em particular, o fator primo 2, que ocorre com expoente par na fatoração de 6000, deve ocorrer com o mesmo expoente nas fatorações de α e β , a saber, a metade do expoente $(4 \div 2 = 2)$ que aparece na fatoração de 6000. Para o primo 5, cujo expoente é um número ímpar maior do que 2, devemos maximizar sua ocorrência nas fatorações de α e β . Para isso, subtraímos 1 de seu expoente na fatoração de 6000, ou seja, fazemos $3-1 = 2$, e depois tomamos a metade $(2 \div 2 = 1)$. Assim, para o caso estabelecido no enunciado, a fim de maximizar o MDC entre α e β devemos ter em suas fatorações o produto $2 \times 2 \times 5 = 20$. Uma possibilidade é $\alpha = 2 \times 2 \times 5 \times 3 = 60$ e $\beta = 2 \times 2 \times 5 \times 5$. Assim, o maior valor possível para o MDC entre α e β é 20.
Comentários e sugestões:
Para a resolução dessa questão foram abordados os temas de Ensino Fundamental como, decomposição em fatores primos, cálculos de MMC e MDC. É interessante que o professor dê um exemplo, como motivação de outro número grande e peça para os alunos responderem rapidamente. Exemplo: o número $45000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4$ podemos separar em dois fatores $x = 3 \cdot 2 \cdot 5^2$ e $y = 3 \cdot 2^2 \cdot 5^2$ com o MDC máximo sendo igual a $2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 150$.
Sugerimos que o professor

- apresente aos estudantes a propriedade citada na questão 7 do ano de 2009, que $\alpha \times \beta = mmc[\alpha, \beta] \times mdc(\alpha, \beta)$. Então como queremos que o MDC seja máximo, consequentemente o MMC deverá ser mínimo.

- Com a informação dada acima, sugira como exercício, que os estudantes calcule o MMC entre α e β sabendo que o MDC entre eles é máximo.

Questão 17 - (Ano 2018) Gabriel brinca com números de dois ou mais algarismos. Ele substitui os dois primeiros algarismos à esquerda do número pela soma desses algarismos, e repete esse procedimento até obter um número de um algarismo. Por exemplo, partindo do número 2018 ele obtém o número 2, pois 2018→218→38→11→2. Quantos são os números de três algarismos a partir dos quais Gabriel pode obter o número 1?

a) 9 *b*) 10 *c*) 56 *d*) 80 *e*) 100

Solução da OBMEP: *(alternativa E)*
Os números que Gabriel pode obter nessa brincadeira são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, já que ele nunca vai obter o número 0. Um fato interessante é que, se Gabriel parte de um número n qualquer e obtém o número 1, partindo do $n+1$, ele irá obter o 2, partindo do $n+2$, o 3, e assim por diante, voltando a obter o número 1 novamente a partir do $n+9$. A tabela abaixo ilustra esse fato com os números de três algarismos.

100 →	10 → 1		109 →	19 →	10 → 1	···	991 →	181 → 91	10 → 1
101 →	11 → 2		110 →	20 →	2	···	992 →	182 → 92	11 → 2
102 →	12 → 3		111 →	21 →	3	···	993 →	183 → 93	12 → 3
103 →	13 → 4		112 →	22 →	4	···	994 →	184 → 94	13 → 4
104 →	14 → 5		113 →	23 →	5	···	995 →	185 → 95	14 → 5
105 →	15 → 6		114 →	24 →	6	···	996 →	186 → 96	15 → 6
106 →	16 → 7		115 →	25 →	7	···	997 →	187 → 97	16 → 7
107 →	17 → 8		116 →	26 →	8	···	998 →	188 → 98	17 → 8
108 →	18 → 9		117 →	27 →	9	···	999 →	189 → 99	18 → 9

Observe que em cada uma dessas sequências a soma dos algarismos dos números que aparecem deixa sempre o mesmo resto quando divido por 9. O critério de divisibilidade por 9 afirma isto: por exemplo, se um número de três algarismos tem a forma abc, então ele pode ser escrito como $100a + 10b + c$, ou também como $99a + 9b + a + b + c$. Como 99 e 9 são múltiplos de 9, eles deixam resto 0 quando divididos por 9; logo, abc e $a + b + c$ têm o mesmo resto na divisão por 9.
Partindo de números com três algarismos, isto é, começando de 100 e somando o número 9 sucessivas vezes, obtemos uma progressão aritmética cujo termo geral é $100+9\cdot(k-1)$. Os números dessa progressão aritmética vão sempre terminar em 1 na brincadeira de Gabriel, sendo o último deles o número 991. Resolvendo a equação $100 + 9 \cdot (k - 1) = 991$, vamos encontrar $k = 100$, que é a quantidade de números de três algarismos a partir dos quais Gabriel pode obter o número 1.
Outra forma de se obter esse resultado é observar que entre 100 e 999 existem 900 números e com $\frac{1}{9}$ deles Gabriel obtém o número 1.
Comentários e sugestões:
Essa questão inicia-se explicando como aplicar o algoritmo numérico, o que pode estimular o raciocínio e construção de novos conceitos e ideias através de exemplos testados. Para

resolvê-la usamos a ideia de sucessão, padrão numérico, critério de divisibilidade e algoritmo da divisão. Essa atividade é desafiadora, pois de início o aluno vai descobrindo números novos que contém essa característica, até generalizar a sua ideia e/ou conclusão, sendo portanto uma questão mais compatível com o nível 3 da OBMEP.
Um fato que pode ser notado é que para esse algoritmo terminar em 1, na última transformação o número terá que ser 10 pois $1 + 0 = 1$, mesmo que existam configurações de números que possam obter com 2 dígitos um resultado anterior diferente de 10, usando como por exemplo 82, teríamos $442 \rightarrow 82 \rightarrow 10 \rightarrow 1$, então tentando resolver o problema de trás pra frente (ou do final para o início) pensemos em como pode-se obter o resultado 10 numa transformação de um número com 3 algarismos. Dessa maneira esse problema nos trás uma ideia de contagem que talvez não seja trivial, mas que ao menos exclui algumas possibilidades de alternativas. Após algumas tentativas, percebe-se que ao somar o algarismo da centena com o algarismo da dezena, quando essa soma for menor ou igual a 9 se reduzirá a apenas 1 algarismo, caso contrário serão 2 algarismos. Agora, perceba que todo número pode ser escrito numa notação como $9n$, $9n + 1$, $9n + 2$, $9n + 3$, $9n + 4$, $9n + 5$, $9n + 6$, $9n + 7$, ou $9n + 8$. Desta forma, todos os números do tipo $9n + 1$ ao se aplicar o algoritmo usado por Gabriel, terminará no algarismo 1.

Conclusão

Após ler o capítulo 3 é possível perceber que algumas soluções sugeridas nem sempre são vantajosas pois na maioria dos casos são mais trabalhosas ou complexas que a solução dada pelo site da OBMEP, porém com as sugestões dadas e comentários feitos, pode-se utilizar esse banco de questões como melhoria de desempenho na resolução de problemas, o que pode proporcionar dando outras opções de raciocínio e discussões em sala de aula.

Finalmente, pretendemos contribuir com este trabalho disponibilizando esse material para uma eventual formação com professores de escolas da rede pública ou privada de Ensino Básico, a fim de melhorar o desempenho dos estudantes na primeira fase da OBMEP em nível 3 com conteúdos pertinentes à grade curricular do Ensino Médio e até mesmo algumas dicas (quando for compatível) de conteúdos que não pertencem a grade curricular desse nível de ensino, mas que poderão ser útil em resoluções clássicas de problemas aritméticos abordados em olimpíadas ou em prova de acesso a escolas de nível militar. Esperamos ainda que esse material possa servir de motivação para se trabalhar com esse tema em sala de aula, como por exemplo fazer um seminário para apresentação de resolução com grupos de alunos, separando cada questão para um aluno resolver em quadro e explicar a outro aluno, propondo discussões. Esperamos que o professor consiga explorar todas as resoluções e se possível até detectar um outro caminho de resolução diferente para um eventual problema contido nesse material.

Apêndice

Aqui iremos apresentar alguns resultados para servir de apoio no entendimento de algumas resoluções de problemas do capítulo 3 que não tratam especificamente do eixo Números e Operações.

Definição 3.1. Uma Progressão aritmética (PA) é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e é representada pela letra r.

Na relação abaixo associamos o termo geral através do primeiro termo da PA e a sua razão constante. no qual a_1 indica o primeiro termo da sequência, n é a posição do termo n-ésimo, r é a razão e a_n é o valor do termo na posição n.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r.$$

É bastante comum os problemas envolvendo termos de uma PA exigir algum conhecimento sobre somatórios finitos de termos dessa sequência, desta forma, temos que a soma dos n primeiros termos da Progressão aritmética $(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$ é

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} a_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

Definição 3.2. Uma Progressão geométrica (PG) é uma sequência numérica na qual a taxa de crescimento (ou decrescimento) de cada termo para o seguinte é sempre constante. Essa razão constante entre 2 termos consecutivos é chamada de razão da progressão e é representada pela letra q.

Dessa forma $a_2 = a_1 \cdot q$, na relação seguinte associamos o termo geral através do primeiro termo da PG e a sua razão constante. no qual a_1 indica o primeiro termo da sequência, n é a posição do termo n-ésimo, q é a razão e a_n é o valor do termo na posição n.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

A soma de termos de uma progressão geométrica poderá ser calculado pela expressão

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Quando tratamos sobre as progressões geométricas podemos ter somatórios finitos sempre, mas diferentemente das progressões aritméticas aqui podemos formalizar uma expressão para somatório infinitos de termos de uma PG desde que sua razão q não faça com que esse somatório seja divergente, ou seja seja impossível calcular pois seu valor tende ao infinito. De certa forma estamos interessados em analisar somatórios de PGs que cresça de maneira lenta para que o somatório não seja divergente. Ou seja, sempre que $\mid q \mid < 1$ a sequência tem um somatório convergente pois $\lim_{n\to\infty}(q^n) = 0$. sendo assim, a última expressão fica

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}.$$

Definição 3.3. A mediana é uma medida de tendência central da Estatística que corresponde ao valor central de um conjunto de valores ordenados.

O termo "mediana" refere-se a "meio". Dado um conjunto de informações numéricas, o valor central corresponde à mediana desse conjunto. Dessa forma, é importante que esses valores sejam colocados em ordem, seja crescente ou decrescente. Se houver uma quantidade ímpar de valores numéricos, a mediana será o valor central do conjunto numérico. Se a quantidade de valores for um número par, devemos fazer uma média aritmética dos dois números centrais, e esse resultado será o valor da mediana.

Exemplo 3.4. Determine as medianas nos conjuntos A e B dado $A = \{21, 34, 12, 10, 12, 14, 25\}$ e $B = \{18, 14, 15, 10, 2, 4, 20, 9\}$.

Perceba que o conjunto A tem 7 elementos e é uma quantidade ímpar, então basta organizar numa ordem crescente e escolher o número central. Vejamos, (10, 12, 12, 14, 21, 25, 34) então note que o número 14 está no meio, este é denominado o termo mediano. Agora analisando o conjunto B perceba que o mesmo tem 8 elementos uma quantidade par, sendo assim, temos que organizar em ordem crescente e calcular a média aritmética dos 2 elementos centrais pois não existe um único elemento no meio. desta forma, temos (2, 4, 9, 10, 14, 15, 18, 20) escolhendo os dois números centrais temos 10 e 14, no qual a média entre eles resulta em 12, portanto a mediana dessa distribuição numérica é igual a 12. Note que quando temos uma quantidade par de termos pode ser que o resultado da mediana seja um elemento distinto de todos que foram dados na distribuição, como no conjunto B que apesar de não ter o elemento 12, sua mediana resultou em 12.

Há alguns problemas de análise combinatória que embora seja aplicações de princípio multiplicativo básico, aparecem com muita frequência nas olimpíadas. Para esses problemas, vale a pena saber rapidamente suas estratégias. Destacaremos então o método de contagem chamado de "Permutação com repetição".

Definição 3.5. O número de permutações de n objetos, do quais α são iguais a X, β são iguais a Y, γ são iguais a Z, etc, é

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma,\cdots} = \frac{n!}{\alpha!\cdot\beta!\cdot\gamma!\cdots}.$$

Referências

ANTÔNIO. Curiosidades da aritmética. Editorial Conceitos - Publicado: 29/01/2016, 2016. Disponível em: <https://conceitos.com/aritmetica/>.

BRASIL, M. d. E. e. S. d. E. B. *Base Nacional Comum Curricular*. [S.l.: s.n.], 2017.

BRASIL, S. d. E. F. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. [S.l.: s.n.], 1998.

HEFEZ, A. *Elementos de aritmética,(Coleção do Professor de Matemática)*. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

HEFEZ, A. *Aritmética,(Coleção Profmat)*. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

HEFEZ, A. *Iniciação à aritmética*. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

LOPES, T. A história dos quadrados mágicos. Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade de Coimbra, p. 1–2, 2016. Disponível em: <https://www.uc.pt/fctuc/dmat>.

OBM. *Histórico*. Disponível em: <https://www.obm.org.br/quem-somos/historico/>. Acesso em: 4 fev. 2019.

OBMEP. *Provas e Soluções*. Disponível em <http://www.obmep.org.br/provas.htm>: Olimpíada Brasileira De Matemática Das Escolas Públicas, 2019.

OBMEP EM NÚMEROS. *Olimpíada Brasileira De Matemática Das Escolas Públicas*. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/em-numeros.htm>. Acesso em: 28 dez. 2018.

REGULAMENTO. *Olimpíada Brasileira De Matemática Das Escolas Públicas*. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/regulamento.htm>. Acesso em: 24 jan. 2019.