



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Roberto Costa do Amaral

**CÔNICAS E QUÁDRICAS: UMA ABORDAGEM DIDÁTICA
PARA A AMPLIAÇÃO DO ENSINO MÉDIO E
APRIMORAMENTO DE CURSOS TÉCNICOS**

RECIFE
2019



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Roberto Costa do Amaral

**CÔNICAS E QUÁDRICAS: UMA ABORDAGEM DIDÁTICA
PARA A AMPLIAÇÃO DO ENSINO MÉDIO E
APRIMORAMENTO DE CURSOS TÉCNICOS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio José Ferreira Gomes Junior

RECIFE

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A485c Amaral, Roberto Costa do
 CÔNICAS E QUÁDRICAS: UMA ABORDAGEM DIDÁTICA PARA A AMPLIAÇÃO DO ENSINO MÉDIO
 E APRIMORAMENTO DE CURSOS TÉCNICOS / Roberto Costa do Amaral. - 2019.
 110 f. : il.

Orientador: Antonio José Ferreira Gomes Junior.
Inclui referências e anexo(s).

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado
Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, 2019.

1. Geometria Analítica. 2. Cônicas. 3. Quádricas . 4. Aplicações. 5. Animações Geométricas. I. Junior,
Antonio José Ferreira Gomes, orient. II. Título

CDD 510

ROBERTO COSTA DO AMARAL

CÔNICAS E QUÁDRICAS: UMA ABORDAGEM DIDÁTICA PARA A AMPLIAÇÃO DO ENSINO MÉDIO E APRIMORAMENTO DE CURSOS TÉCNICOS

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática - do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em ______.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonio José Ferreira Gomes Junior (Orientador)-UFRPE

Prof^a. Dr^a Karla Ferreira de Arruda Duque-UFRPE

Prof. Dr Ricardo Burity Croccia Macedo-UFPB

Dedicatória

Dedico este trabalho primeiramente aos meus pais (in memorian) Carmem Costa e Reginaldo Peixe, responsáveis diretos pela minha existência e caráter formado; aos meus irmãos e irmãs, na ordem decrescente de idade, Rosângela, Rogério, Rosiane, Rosamaria, Reginaldo, Rosivera, Rosicláudia (in memorian) e Ramon Costa (in memorian), a todos, pelos inesquecíveis momentos que passamos juntos e finalmente, mas não menos importante, à minha família (esposa e filhos, nesta ordem) Milena Amaral, Valérie Louise, Lucca Renè e Carly Rhaíssa, razões de minha vida e por quem trabalho e estudo incansavelmente.

Agradecimentos

Tudo que foi produzido nesta dissertação talvez tivesse acontecido apenas de maneira minimamente satisfatória não fosse a participação dos destaques que seguem e merecem meus agradecimentos:

1. A Deus, por ter me proporcionado saúde e garra para chegar até aqui buscando conquistar mais uma etapa na construção do saber;
2. Meus pais, já mencionados na dedicatória mas que merecem novo destaque aqui pela importância que tiveram no investimento e construção de minha vida acadêmica e como cidadão;
3. Todos os colegas do PROFMAT: Acácio, Alexandre, Andreia, Davidson, Delba, Eliton, Ewerton, Gustavo, Ivan, Jamesson, Jorge, Rildo, Rui, Simone e Wagner pelo companheirismo e disponibilidade em todos os momentos do curso;
4. Todos os professores da UFRPE vinculados ao programa PROFMAT, por seus comprometimentos e entrega na busca constante da significativa melhoria da qualidade dos professores mestres egressos;
5. A meu vizinho e amigo José Ferreira da Rocha, por me ajudar no fornecimento de materiais e consultoria técnica;
6. Ao técnico em mecânica, Elinaldo Neves dos Santos por sua colaboração e esclarecimentos nos assuntos referentes ao uso dos equipamentos;
7. À Direção geral do IFPE (Campus Recife), na pessoa do Professor Marivaldo Rosas por permitir o uso do espaço físico e por apoiar o desenvolvimento do trabalho;
8. Em especial, à minha família, esposa e filhos, por entenderem, apoiarem e lutarem junto comigo para estas conquistas que muitas vezes sacrificam, mas valem a pena pois objetivam um bem estar maior.
9. Em especial, a Ivan Dultra, colega de turma, companheiro de quase todas as horas, um verdadeiro "highlander", por estar sempre disposto a ajudar nas incríveis maratonas de estudo que antecediam as provas e que, muitas vezes, levavam o dia inteiro de esforço e dedicação.
10. Em especial, ao meu orientador, Prof. Dr. Antonio José Ferreira Gomes Junior pela disponibilidade, competência e versatilidade em compartilhar o conhecimento sobre o tema abordado com notória maestria.

"A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens".

Renè Descartes.

"Uma geometria não pode ser mais verdadeira do que outra; poderá ser apenas mais cômoda."

Poincaré.

DECLARAÇÃO

Eu, **Roberto Costa do Amaral** declaro, para devidos fins e efeitos, que a dissertação sob título **CÔNICAS E QUÁDRICAS: UMA ABORDAGEM DIDÁTICA PARA A AMPLIAÇÃO DO ENSINO MÉDIO E APRIMORAMENTO DE CURSOS TÉCNICOS**, entregue como Trabalho de Conclusão de curso para obtenção do título de mestre, com exceção das citações diretas e indiretas claramente indicadas e referenciadas, é um trabalho original. Eu estou consciente que a utilização de material de terceiros incluindo uso de paráfrase sem a devida indicação das fontes será considerado plágio, e estará sujeito à processo administrativos da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais. Declaro ainda que respeitei todos os requisitos dos direitos de autor e isento a Pós-graduação PROFMAT/UFRPE, bem como o professor orientador **Antonio José Ferreira Gomes Junior**, de qualquer ônus ou responsabilidade sobre a sua autoria.

Recife, 11 de Outubro de 2019.

Roberto Costa do Amaral

Resumo

Este trabalho foi elaborado com o intuito de ajudar professores e alunos do ensino médio e de cursos técnicos como Automação Industrial, Construção Naval, Edificações, Eletrotécnica e Eletrônica a se apropriarem da visão espacial, bem como dos conceitos algébricos que envolvem as curvas cônicas e as superfícies quádricas pois, diante da grande dificuldade encontrada em relacionar conteúdos de geometria plana, espacial e analítica com os objetos e ferramentas que são aplicados em seus respectivos cursos, nada melhor que uma aproximação desses eixos de modo que se possa aguçar a curiosidade num trabalho que permita melhorar suas habilidades estudantis e profissionais. Para tanto, faremos um breve histórico e fundamentação teórica sobre o tema relatando os principais estudiosos e suas respectivas contribuições. Deduziremos as equações canônicas com auxílio de conceitos estudados em Álgebra linear e classificaremos todas as curvas cônicas e superfícies quádricas bem como suas degenerações a partir dos sinais e valores dos coeficientes e do termo independente e ainda, construiremos, com o auxílio do *Geogebra*, exemplos de seus respectivos gráficos. Por fim, mostraremos os detalhes de uma intervenção feita com os alunos "voluntários" dos cursos já citados, com uso de material concreto, salientando que os mesmos se dispuseram a estudar um pouco mais do assunto num ambiente extraclasse. Animações das curvas cônicas, das superfícies quádricas e as devidas justificativas além das construções com material reciclável, foram elementos dessa exitosa intervenção.

Palavras-chave: Matemática, Geometria Analítica, Cônicas, Quádricas, Aplicações, Intervenção, Ensino médio/técnico, *Geogebra*, Material reciclável, Animações geométricas.

Abstract

This work was elaborated in order to help teachers and high school students and technical courses such as Industrial automation, shipbuilding, buildings, electrical and electronics to appropriate the spatial vision, as well as algebraic concepts that involve the conical curves and the quadrics surfaces because, given the great difficulty found in relating contents of planar, spatial and analytical geometry with the objects and tools that are applied in their respective courses, nothing better than a approximation of these axes so that one can sharpen the curiosity in a work that allows to improve their student and professional skills. To this end, we will make a brief history and theoretical foundation on the topic reporting the main scholars and their respective contributions. We will deduce the canonical equations with the aid of concepts studied in linear algebra and classify all the conical curves and quadrics surfaces as well as their degenerated from the signs and values of the coefficients and the independent term and still we will construct, with the help of *Geogebra*, examples of their respective graphs. Finally, we will show the details of an intervention made with the students "volunteers" of the courses already cited, with the use of concrete material, stressing that they were willing to study a little more of the subject in an extra class environment. Animations of the tapered curves, the quadrics surfaces and the justified justifications in addition to the constructions with recyclable material, were elements of this successful intervention.

Keywords: Mathematics, Analytical Geometry, Conics, Quadrics, Applications, Intervention, High School / Technical, *Geogebra*, Recyclable Material, Geometric Animations.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Euclides	28
Figura 2 – Arquimedes	28
Figura 3 – Apolonio de Perga	29
Figura 4 – Pappus de Alexandria	29
Figura 5 – Descartes e Fermat	30
Figura 6 – Leonhard Euler	31
Figura 7 – Cayley e Hamilton	31
Figura 8 – Elipse	38
Figura 9 – Elipse	39
Figura 10 – Eixo maior em OY	39
Figura 11 – Circunferência	40
Figura 12 – Hipérbole com Simetria em OX	40
Figura 13 – Hipérbole	41
Figura 14 – Hipérbole com Simetria em OY	42
Figura 15 – Parábola com simetria em OX	43
Figura 16 – Concavidade para direita	43
Figura 17 – Concavidade para esquerda	44
Figura 18 – Parábola com simetria em OY	45
Figura 19 – Conjunto vazio	45
Figura 20 – Ponto	45
Figura 21 – Retas concorrentes	46
Figura 22 – Conjunto vazio	46
Figura 23 – Reta sobre eixo	46
Figura 24 – Par de paralelas	47
Figura 25 – Cone circular de duas folhas	47
Figura 26 – Elipse $\theta < \alpha < \frac{\pi}{2}$	48
Figura 27 – Parábola $\alpha = \theta$	48
Figura 28 – Hipérbole $\alpha < \theta$	49
Figura 29 – Desenho da Elipse	50
Figura 30 – Elipse e seus elementos	51
Figura 31 – Focos no eixo OY	52
Figura 32 – Eixo maior paralelo a OX	52
Figura 33 – Eixo maior paralelo a OY	53
Figura 34 – Desenho da Hipérbole	53
Figura 35 – Hipérbole e seus elementos	54
Figura 36 – Focos no eixo OY	55

Figura 37 – Eixo real paralelo a OX	56
Figura 38 – Eixo real paralelo a OY	56
Figura 39 – Desenho da Parábola	57
Figura 40 – Parábola e seus elementos	58
Figura 41 – Simetria pelo eixo OX	58
Figura 42 – Simetria pelo eixo OY	59
Figura 43 – Esfera	64
Figura 44 – Elipsoide	64
Figura 45 – Hiperboloide de uma folha	65
Figura 46 – Hiperboloide de Revolução de uma folha	65
Figura 47 – Hiperboloide de duas folhas	66
Figura 48 – Hiperboloide de duas folhas de revolução	66
Figura 49 – Cone de duas folhas	66
Figura 50 – Cone de duas folhas de Revolução	67
Figura 51 – Paraboloides Elíptico	68
Figura 52 – Paraboloides de Revolução	68
Figura 53 – Paraboloides hiperbólico	69
Figura 54 – Cilindro elíptico	69
Figura 55 – Cilindro circular	70
Figura 56 – Cilindro hiperbólico	70
Figura 57 – Cilindro Parabólico	71
Figura 58 – Conjunto vazio	71
Figura 59 – Único ponto	72
Figura 60 – Plano	72
Figura 61 – Par de planos	72
Figura 62 – Reta pela origem	73
Figura 63 – Conjunto vazio	73
Figura 64 – Planos concorrentes	73
Figura 65 – Refletor	75
Figura 66 – Reflexão na elipse	76
Figura 67 – Reflexão da Parábola	77
Figura 68 – Reflexão da Hipérbole	78
Figura 69 – O Telescópio de Cassegrain	78
Figura 70 – Estrutura de Estação Espacial	79
Figura 71 – Antena Parabólica	80
Figura 72 – Construção da Parábola	82
Figura 73 – Justificativa	82
Figura 74 – Construção Hipérbole: 1,2 e 3	83
Figura 75 – Construção Hipérbole: 4,5,6 e 7	83

Figura 76 – Justificativa	84
Figura 77 – Construção itens 1,2,3 e 4	85
Figura 78 – Passos 5,6 e 7	85
Figura 79 – Justificativa	86
Figura 80 – Imagem animação 1	87
Figura 81 – Imagem animação 2	88
Figura 82 – Imagem animação 2	88
Figura 83 – Função g	89
Figura 84 – Paraboloide de Revolução	90
Figura 85 – Cone de Revolução	91
Figura 86 – Elipse Plano XOY	92
Figura 87 – Elipsoide de Revolução	92
Figura 88 – Hiperboloide de uma folha de Revolução	93
Figura 89 – Hiperboloide de duas folhas de Revolução	94
Figura 90 – dispositivo 1	97
Figura 91 – dispositivo 2	98
Figura 92 – dispositivo 3	98

Sumário

1	OBJETIVOS	25
1.1	Objetivo Geral	25
1.2	Objetivos Específicos	25
2	CONTEXTO HISTÓRICO	27
2.1	Surgimento e desenvolvimento da Geometria Analítica	27
2.2	Desenvolvimento histórico das seções cônicas e das superfícies quádricas	31
3	AS CÔNICAS	35
3.1	Identificação Algébrica	35
3.2	Classificação das Cônicas	37
3.2.1	A Elipse	37
3.2.1.1	Intervalos reais de existência	38
3.2.2	A Circunferência	39
3.2.3	A Hipérbole	40
3.2.3.1	Intervalos reais de existência	40
3.2.4	A Parábola	42
3.2.4.1	Concavidade	43
3.2.4.2	Intersecção com os eixos coordenados	44
3.2.5	Degenerações das Cônicas	45
3.3	Identificação Geométrica	47
3.4	A Elipse	49
3.4.1	Construindo a Elipse	50
3.4.2	Elementos da Elipse	50
3.4.3	Equação Canônica da Elipse	51
3.5	A Hipérbole	53
3.5.1	Construindo a Hipérbole	53
3.5.2	Elementos da Hipérbole	54
3.5.3	Equação canônica da Hipérbole	54
3.6	A Parábola	56
3.6.1	Construindo a Parábola	57
3.6.2	Elementos da Parábola	57
3.6.3	Equação Canônica da Parábola	58
4	AS QUÁDRICAS	61

4.1	Identificação Algébrica	61
4.2	Classificação das Quádricas	63
4.2.1	A Esfera	64
4.2.2	O Elipsoide	64
4.2.3	O Hiperboloide de uma folha	65
4.2.4	O Hiperboloide de duas folhas	65
4.2.5	O Cone de duas folhas	66
4.2.6	Os Paraboloides	68
4.2.6.1	Paraboloide Elíptico	68
4.2.6.2	Paraboloide Hiperbólico	68
4.2.7	O Cilindro Elíptico	69
4.2.8	O Cilindro de Revolução	69
4.2.9	O Cilindro Hiperbólico	70
4.2.10	Cilindro Parabólico	71
4.2.11	Degenerações das Quádricas	71
5	APLICAÇÕES TEÓRICO-PRÁTICAS DE CÔNICAS E QUÁ- DRICAS	75
5.1	Refletores Odontológicos	75
5.2	Telescópios	76
5.3	Antenas Parabólicas	79
6	ATIVIDADES DE AULA	81
6.1	Métodos para encontrar os pontos de uma cônica	81
6.1.1	Parábola	81
6.1.2	Hipérbole	82
6.1.3	Elipse	84
6.2	Animação Geométrica das Cônicas	86
6.2.1	Animação de um ponto sobre uma elipse	86
6.2.2	Animação de um ponto sobre uma Parábola	87
6.2.3	Animação de um ponto sobre uma hipérbole	88
6.3	Animação Geométrica das Quádricas	89
6.3.1	Paraboloide de Revolução	89
6.3.2	Cone de Revolução	90
6.3.3	Elipsoide de Revolução	91
6.3.4	Hiperboloide de uma folha de Revolução	92
6.3.5	Hiperboloide de duas folhas de Revolução	93
6.4	Cônicas com régua e compasso:	94
6.4.1	Esboço da Elipse:	94
6.4.2	Esboço da Hipérbole:	95

6.4.3	Esboço da Parábola:	95
6.5	Dispositivos com material reciclável:	96
6.5.1	Materiais Utilizados	96
6.5.2	Recomendações de manuseio	97
7	CONCLUSÃO	99
	Conclusão	100
	REFERÊNCIAS	101
	ANEXO A – ANEXOS	103
	ANEXO B – RESPOSTAS ESCOLHIDAS PARA REGISTRO	105

Introdução

Esse trabalho de conclusão de curso busca abordar as curvas cônicas e as superfícies quádricas de uma maneira mais didática a partir de uma visão construtivista e teve como elemento propulsor, a observação durante anos de experiência com resultados cada vez mais preocupantes no sentido negativo da palavra, obtidos pelos alunos tanto do ensino médio quanto dos cursos técnicos na área de exatas do Instituto Federal de Pernambuco (IFPE).

A constatação das dificuldades nos levou a pensar sobre o tipo de abordagem feita e repetida ano após ano de maneira automática e pouco criativa fazendo com que o aprendizado, quando existiu, tenha acontecido de maneira estanque, ou seja, o conteúdo trabalhado serviu apenas para produzir um conceito ou nota que teoricamente avaliou o desempenho dos alunos na disciplina envolvida. O fato é que devemos levar em conta outras variáveis que podem atrapalhar o processo de ensino e aprendizagem. Apenas como exemplos, citamos o tempo de maturação e absorção intelectual de cada indivíduo nesse ou naquele conteúdo, também o problema do calendário escolar, sempre apertado com baixo número de aulas e elevado conteúdo programático, entre outras.

Nos cursos superiores, a exemplo de Matemática, Física, Engenharias, etc, o estudo das Curvas Cônicas e das Superfícies Quádricas acontece na disciplina de Geometria Analítica. No entanto, pelos motivos já citados somados à ausência de recursos didáticos e muitas vezes, de profissionais dispostos a abandonar a "velha prática", a apresentação desses temas, normalmente, acaba não acontecendo de maneira satisfatória.

Acreditando que para o aprendizado significativo seja fundamental tratar as aplicações conectando o rigor da Matemática com as percepções dos elementos no dia a dia, propomos o investimento de nossa energia e esforço mental no desenvolvimento prático do assunto pois, buscamos despertar o interesse dos indivíduos envolvidos em pesquisar e estudar as particularidades num ambiente extra classe que propicie maior dedicação e concentração. Deste modo, além de uma alternativa mais didática e visual das curvas cônicas e superfícies quádricas, faremos demonstrações algébricas e geométricas que podem ser trabalhadas tranquilamente em sala de aula.

No que diz respeito às equações, trataremos segundo os dois pontos de vista, o algébrico e o geométrico lembrando que este segundo, muitas vezes é apresentado de maneira muito superficial e rápida pois, nos cursos regulares, nos deparamos com a dificuldade dos alunos em desenvolver a visão geométrica espacial necessária à compreensão dos temas. Portanto, esperamos trazer ao leitor, uma boa impressão desses conteúdos que são extremamente relevantes devido a sua abrangência e aplicabilidade. Pretendemos

então, trabalhar os conceitos algébricos e as definições geométricas de maneira mais clara e construtivista a partir de elementos palpáveis, próximos de nós, a fim de marcar a memória dos alunos participantes neste processo.

Assim, um tratamento com uso de recursos computacionais, visualização gráfica, reconhecimento prático e construção com materiais concretos deve mudar a forma como alunos e professores enxergam os conteúdos e retire algumas barreiras que desmotivam e diminuem o interesse pela inovação das práticas no ambiente de sala de aula. Dito isto, também dedicaremos parte do trabalho às demonstrações das equações de curvas cônicas e das superfícies quádricas de uma forma bem detalhada, utilizaremos os autovalores para classificar todas as cônicas e quádricas bem como suas degenerações. Faremos também, quando possível, alguns protocolos de construção e animações de figuras no *Geogebra* para que, tanto professor quanto aluno possam tornar essa ferramenta recorrente em suas práticas educacionais.

Por fim, apresentaremos os resultados de uma intervenção com os alunos voluntários que foi realizada em um minicurso de 18 horas, dividido em 6 sábados, paralelamente às disciplinas regulares. Vale lembrar que eles se dispuseram, em momentos extra classe, a realizar algumas atividades sobre o assunto a fim de entenderem melhor as relações entre os dois pontos de vista (algébrico e geométrico) aumentando assim, seus conhecimentos, capacidade de abstração e conseqüentemente seus desempenhos em Matemática.

1 Objetivos: Geral e Específicos

1.1 Objetivo Geral

Realizar um estudo das curvas cônicas e das superfícies quádricas sob uma óptica menos rigorosa e mais didática, voltada para os alunos dos ensinos médio e técnico que proporcione melhor aproveitamento das disciplinas que envolvem esses conceitos e também, facilite a compreensão dos leitores a partir das aplicações, construções com material manipulável e utilização de recursos visuais.

1.2 Objetivos Específicos

A busca para diminuir a distância entre o abstrato e o concreto que muitas vezes afasta o aluno, inclusive os que se candidatariam a cursos na área de exatas, e uma prática de estudo prazerosa, nos fez eleger os seguintes objetivos específicos como norteadores deste trabalho:

1. Conhecer e classificar todas as curvas cônicas bem como seus elementos, deduzindo suas equações canônicas do ponto de vista algébrico e geométrico;
2. Deduzir as equações canônicas das superfícies quádricas algebricamente e classificá-las de acordo com os sinais e valores de seus coeficientes e termo independente exemplificando cada uma com o uso do *geogebra*;
3. Construir cada cônica utilizando o *geogebra* e justificar a pertinência de cada ponto encontrado;
4. Construir cada cônica utilizando régua e compasso e justificar a pertinência de cada ponto encontrado;
5. Identificar algumas aplicações práticas das principais superfícies quádricas;
6. Propor atividades lúdicas que possam ser usadas facilmente em práticas de ensino na introdução dos conteúdos citados;
7. Construir animações geométricas das principais curvas cônicas evidenciando seus respectivos protocolos de construção;
8. Construir animações geométricas das principais superfícies quádricas de revolução evidenciando seus respectivos protocolos de construção;

9. Relacionar as equações das superfícies quádricas de revolução com seu respectivo gráfico;
10. Construir em laboratório, pequenos dispositivos com sucata eletrônica e materiais recicláveis para motivar os estudos trabalhando temas transversais como uso de equipamentos de segurança, dimensionamento de fios, uso de "Dimmer"(controlador de tensão) para corrente elétrica em tópicos de eletrônica e eletrotécnica, visão em perspectiva para edificações e construção naval.

2 Contexto Histórico

2.1 Surgimento e desenvolvimento da Geometria Analítica

É quase impossível falar de seções cônicas e superfícies quádricas sem antes mencionar a evolução histórica da Geometria Analítica e obviamente das contribuições em Geometria Plana e Espacial de grandes matemáticos helenísticos como Euclides, Arquimedes e Apolônio de Perga. Por exemplo, na chamada fase áurea da Matemática antiga, acontece praticamente todo desenvolvimento geométrico das cônicas. No entanto, como não havia notação algébrica adequada, o enfoque analítico só surgiu com Pierre de Fermat (séc. XVII). Por outro lado, credita-se aos pitagóricos, a construção do cubo, do tetraedro, do octaedro, do dodecaedro e também da "seção áurea".

Dentro da Matemática, a Geometria é uma das maiores e mais antigas áreas de pesquisa. Seu avanço, como dito, é marcado por grandes nomes como os de Euclides, Arquimedes e Apolônio de Perga, na Grécia antiga. Na idade moderna, destacamos outros estudiosos como Euler, Fermat, Descartes que também contribuíram com excelentes descobertas e foram reconhecidos por grandes produções. Claro que existiram muitos outros matemáticos, de várias outras épocas, que deram suas pequenas ou grandes contribuições para o avanço da Geometria e de outras áreas da Matemática mas, aqui vamos nos ater aos mencionados.

Para Euclides, levado de Atenas para Alexandria pelo até então general macedônio Ptolomeu I, destacamos a obra "***Os Elementos***" ($\pm 300 a.C.$), um dos mais notáveis registros de Matemática de todos os tempos com mais de mil edições publicadas. Conta a história que o rei Ptolomeu I perguntou a Euclides se não havia um caminho mais suave para se aprender Geometria e o mesmo respondera: "*Não há uma estrada real para a Geometria*". Nessa obra, Euclides cita as bases da Geometria hoje conhecida como Geometria Euclidiana. Tal Obra, ainda é muito importante nos dias de hoje e por muitos anos foi considerada completa e inspirou o conhecimento humano durante séculos. O tratado sobre as cônicas estava entre algumas das mais importantes obras de Euclides, porém muito se perdeu, talvez porque logo foi superada pelo trabalho mais extenso e detalhado escrito por Apolônio.

Arquimedes, nascido e morto em Siracusa (***287 a.C. - 212 a.C.***), estudou com os discípulos de Euclides. Sua genialidade é comparada apenas à de Isaac Newton no séc XVIII. A sua produção acadêmica é classificada como muito grande e original. Destacamos a lei básica da hidrostática (Princípio de Arquimedes), suas invenções bélicas (catapultas,



Figura 1 – Euclides

espelho parabólico, guindastes, etc). Ele obteve também a expressão para a área de uma elipse. Assim como Isaac Newton, Arquimedes é considerado uma das maiores mentes da história da humanidade.

Dois importantes trabalhos ligados às quádricas, merecem destaque. São eles:

1. Sobre conoides e esferoides, no qual ele descreve sólidos de revolução gerados por elipses, parábolas e hipérbolas em torno dos seus eixos (quádricas de revolução).
2. Sobre esfera e cilindro que contém demonstrações rigorosas do cálculo de volumes e da área dos referidos sólidos. Também estudou as áreas e superfícies obtidas por secções planas sobre a esfera (calotas e segmentos) e sobre cilindros. Uma curiosidade, a pedido de Arquimedes, foi gravado na lápide do seu túmulo, a representação de uma esfera inscrita em um cilindro reto.



Figura 2 – Arquimedes

Temos ainda que citar Apolônio de Perga (*262 a.C-190 a.C*), que mereceu dos antigos o apelido de "*O Grande Geômetra*", contudo, duramente contestado por muitos pelo fato de que boa parte de suas obras haviam desaparecido. O que se sabe na verdade, deve-se a Pappus de Alexandria que resumiu sua grande produção matemática não deixando de registrar que os tratados de Apolônio continham um tipo de Matemática muito avançada e bem próximo do que hoje chamamos de Geometria Analítica. São feitos atribuídos a Apolônio, entre outros: terminologias apropriadas das seções cônicas (elipse e hipérbole); mostrou pela primeira vez, que a partir de um único cone é possível fazer secções cônicas mudando apenas a inclinação do plano; introduziu o cone de duas folhas que levou à hipérbole como curva de dois ramos. Tudo isso, ele reuniu na sua obra prima

"*As Cônicas*", uma extensão da obra de Euclides, formada por oito volumes em que, para tristeza da comunidade matemática, um desses se perdeu. Por sua formalidade e criteriosidade, foi-lhe creditado teoremas da Geometria sobre centros de gravidade de sólidos e superfícies de revolução.

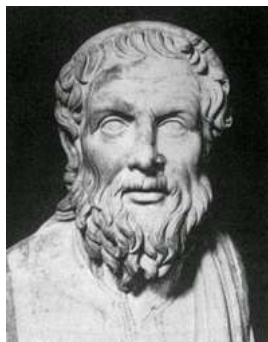


Figura 3 – Apolonio de Perga

Pappus de Alexandria (séc. IV d.C.) foi um importante matemático da chamada era de prata da Universidade de Alexandria. Juntamente com Diofanto, Pappus fez uma espécie de enciclopédia onde resumiu boa parte das descobertas dos matemáticos gregos porém, não citou as fontes. Sua obra recebeu o nome de "*Mathematicae Collectiones*" (Coleção matemática). Era formada por oito livros em que infelizmente, o primeiro e parte de segundo se perderam. Nesta coleção tem explicação de novas provas e várias proposições sobre superfícies de revolução, planos e sólidos geométricos e sistemas lineares. Pappus também é conhecido por importantes teoremas da Geometria Projetiva, suas descobertas serviram para a construção da Geometria Analítica cerca de treze séculos antes dela ser desenvolvida por Descartes e Fermat.



Figura 4 – Pappus de Alexandria

Então, o surgimento da Geometria Analítica com Renè Descartes e Pierre de Fermat teve grande influência e contribuições destes e de outros matemáticos e filósofos da antiguidade. Tanto Descartes quanto Fermat, utilizaram sistemas de coordenadas cartesianas para o seu desenvolvimento. Ao aplicar noções de álgebra, Pierre de Fermat terminou em 1629 o manuscrito "*Ad locos planos et solidos isagoge*" (introdução aos lugares planos e sólidos). Ainda existem muitas dúvidas sobre quem foi o criador da Geometria

Analítica, mas o manuscrito de Fermat marca o início dela em três dimensões. Podemos inclusive, citar uma frase de Fermat sobre equações de três dimensões:

"Há certos problemas que envolvem só uma incógnita e que podem ser chamados determinados, para distinguir-los dos problemas de lugares. Há outros que envolvem duas incógnitas e que nunca podem ser reduzidas a uma só; e esses são os problemas de lugares. Nos primeiros problemas, procuramos um ponto único, nos segundos, uma curva. Mas, se o problema proposto envolve três incógnitas, deve-se achar, para satisfazer à equação, não apenas um ponto ou uma curva, mas toda uma superfície. Assim aparecem superfícies como lugares, etc."



Figura 5 – Descartes e Fermat

Por outro lado, os avanços gerados na Geometria desenvolvida pelos gregos, juntamente com a Geometria Analítica, possibilitou à Matemática avançar ainda mais sobre os estudos envolvendo curvas cônicas e superfícies quádricas.

O matemático suíço Leonard Euler (1707-1783) foi responsável por importantes contribuições em todas as áreas da Matemática. Teve uma produção gigantesca de teoremas e conjecturas além de ter resolvido importantes problemas que perduraram até sua interferência. Destaque também para suas contribuições à Geometria no espaço \mathbb{R}^3 . No seu livro *"Introduction in Analysin Infinitorium"* (Introdução à Análise Infinita, publicada em 1748) apresentou, pela primeira vez, as quádricas, considerando como uma superfície do 2º grau no \mathbb{R}^3 . Neste mesmo livro, Euler apresenta as equações dos cones, paraboloides, elipsoides e hiperboloides usando o sistema cartesiano no \mathbb{R}^3 . Sem dúvida, foi um dos matemáticos com mais trabalhos reconhecidos. Tinha uma capacidade de calcular fora do comum e uma memória espetacular. Prova disso é que nos últimos anos de sua vida, ficou cego e mesmo assim, não parou de produzir e dar contribuições para a Matemática. Fazia cálculos mentalmente e ditava para que seu filho pudesse registrar.

No final do século XIX e início do século XX, matemáticos de várias áreas buscaram generalizar a Matemática criando uma linguagem universal para que todos, independente de onde estivessem, pudessem ler, entender e contribuir com suas descobertas e isso ia além de tentar unificar apenas a linguagem axiomática.

Utilizando noções de Geometria e Álgebra, as superfícies quádricas se tornaram



Figura 6 – Leonhard Euler

muito importantes para o mundo e para a Matemática moderna. Em áreas como Álgebra Linear e Geometria Diferencial, as quádricas têm grande importância pois, matemáticos como Cayley e Hamilton fizeram muitos avanços com trabalhos desenvolvidos sobre esse tema. Tanto que, um teorema importante da Álgebra Linear recebe o nome de ambos: Teorema de Cayley-Hamilton.



Figura 7 – Cayley e Hamilton

Em resumo, o estudo das superfícies quádricas traz consigo uma grande carga histórica a partir das contribuições de grandes matemáticos do passado e com certeza ainda estarão presentes nos trabalhos e descobertas do nosso mundo contemporâneo com suas aplicações na Física, Engenharia, Química e etc.

2.2 Desenvolvimento histórico das seções cônicas e das superfícies quádricas

Na Grécia antiga havia uma intensa busca pela solução do problema da duplicação do cubo. Hipócrates de Quio ($\pm 440a.C.$) o reduziu à construção de duas proporcionais médias entre dois segmentos de reta paralelos de razão 2. Na busca pelo lugar geométrico dos pontos que satisfaria o problema das médias proporcionais, Menaecmo ($\pm 350a.C.$) resolveu-o por meio das seções de um cone reto de revolução por planos perpendiculares a algumas geratrizes, assim, nascem e começam a ser estudadas pela humanidade as seções cônicas e as suas propriedades geométricas, o que fez então com que Eratóstenes enviasse uma carta para o rei Euergeta, chamando Menaecmo de "o descobridor das seções cônicas".

Menaecmo foi o primeiro a desenvolver as definições das cônicas ligadas ao cone reto de revolução. Suas nomenclaturas e classificações seguiam a classificação e denominação desses cones. A Elipse por exemplo, era chamada de *seção do cone acutângulo*, a Hipérbole, era a *seção do cone obtusângulo*, e a Parábola por sua vez, *a seção do cone reto*. Esses termos: acutângulo, obtusângulo e reto, referem-se ao ângulo entre duas geratrizes opostas no vértice do cone. Tais nomenclaturas perduraram por muito tempo, até que Apolônio de Perga criou uma que é utilizada até os dias de hoje.

Euclides contribuiu muito para a evolução do estudo das cônicas porém, muitos de seus trabalhos se perderam. Temos, na verdade, uma referência a quatro livros de uma obra Euclidiana sobre as cônicas que foram considerados de grande utilidade para Arquimedes e Pappus em seus trabalhos.

Os primeiros teoremas sobre as seções ou curvas cônicas, só nasceram de fato com os trabalhos de Arquimedes (287 a.C–212 a.C). Heraclides, que fora biógrafo de Arquimedes, acusou Apolônio de roubar seus teoremas e colocá-los em sua obra "*As Cônicas*". Nesta emblemática obra, encontram-se as primeiras afirmações sobre vários elementos das cônicas. Determina-se também a área da elipse e a quadratura da parábola, além de trazer à tona, um estudo minucioso sobre superfícies de revolução, principalmente das quádricas, em seu texto sobre Conoides e Esferoides.

Porém, foi na grande obra de Apolônio "*As cônicas*" onde foram registrados e provados os mais complexos teoremas e de onde se extraiu a mais pura Geometria envolvida nas cônicas. Apolônio determinou a possibilidade de encontrar uma curva cônica observando qualquer seção feita em qualquer cone, até mesmo nos oblíquos. Bastou para isso, considerar o cone circular duplo, ou seja, dois cones ligados pelo vértice, e os dois ramos da hipérbole como uma única curva. Apolônio contribuiu com diversos teoremas sobre as propriedades das cônicas. Explanou sobre tangentes, limites, máximos e mínimos, entre outros temas. Apolônio prova também que a resolução do problema do lugar geométrico de três e quatro linhas é uma cônica, confirmando os pensamentos iniciais de Euclides.

Mais a frente, Pappus é o próximo grande matemático a adentrar no estudo das cônicas. Ele, na maioria das vezes se referia a trabalhos de autores do passado. Dentre as apresentações de Pappus, estão os conceitos de foco e diretriz, atribuídos à Euclides, mas não citados por Apolônio. Os problemas do lugar geométrico de três e quatro linhas, já citados aqui, foram aprofundados por Pappus na intenção de resolvê-los para a generalização de problemas com mais linhas. Ele ainda conseguiu soluções para as curvas por métodos de aproximação. No entanto, os matemáticos de sua época não conseguiram avançar com seus trabalhos.

Descartes, no século XVII, recupera os textos de Pappus e se põe a tentar resolver o problema que fora deixado por este. Descartes foi incapaz de resolver o "problema de Pappus" como é chamado até agora, utilizando recursos puramente geométricos. Sendo

assim, Descartes utiliza sua Geometria Analítica na solução e prova de que o problema de 4 linhas é a resolução de uma equação do 2º grau, enquanto que, para o de 5 linhas a resposta trata-se da solução de uma equação do 3º grau e assim sucessivamente, um número N de linhas, leva a uma equação de grau $N - 2$ a ser resolvida. Deste modo, surge a conhecida correspondência entre curvas e equações devido ao sistema e método cartesiano.

3 As Cônicas

Chama-se *Curva Cônica* ou simplesmente *Cônica*, o conjunto de pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação geral do segundo grau em duas variáveis da forma:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

em que $a; b; c; d; e$ e f são números reais e pelo menos um dos coeficientes $a; b$ e c não é nulo.

Neste capítulo, deduziremos algebricamente a equação acima e encontraremos, com a técnica de completar quadrados, sua forma mais simples ou canônica e, a partir desta, classificaremos e construiremos cada uma das cônicas bem como suas degenerações em função de seus coeficientes e termo independente associados a um sistema cartesiano. Para tanto, aproveitaremos alguns conceitos básicos facilitadores da Álgebra Linear sobre matrizes e suas propriedades.

3.1 Identificação Algébrica

Sejam as matrizes: $A = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $F = [f]$, e a seguinte equação matricial:

$$X^t \cdot A \cdot X + B^t \cdot X + F = 0$$

que pode ser escrita assim:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [f] = 0$$

Desenvolvendo a expressão ficaremos com:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

Definição 3.1.1: Uma matriz P é dita **ortogonal** se é invertível, isto é, $\det(P) \neq 0$ e sua matriz inversa P^{-1} for igual a sua matriz transposta P^t .

Definição 3.1.2: Uma matriz quadrada D é dita *diagonal* se todos os elementos a_{ij} em que $i \neq j$ forem iguais a zero.

Definição 3.1.3: Uma matriz quadrada S é dita *simétrica* se ela for igual a sua transposta S^t .

Sendo assim, perceba que a matriz A é simétrica. Logo, pelo *teorema espectral*, podemos afirmar que é diagonalizável, ou seja, existe uma matriz P ortogonal, tal que:

$P^{-1} \cdot A \cdot P = D$, em que D é a matriz diagonal associada à matriz A e é dada por:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

cujos elementos da diagonal principal λ_1 e λ_2 , são os *autovalores* associados a matriz A , e cujas colunas são seus *autovetores*.

Daí, partindo da definição, podemos escrever:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D$$

multiplicando ambos os membros, à esquerda e à direita, respectivamente por P e P^{-1}

$$P \cdot P^{-1} \cdot A \cdot P \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

Como $P \cdot P^{-1} = I$, escrevemos:

$$I \cdot A \cdot I = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}, \text{ ou } A = P \cdot D \cdot P^t$$

Agora, usando o recurso de inserir a matriz $I = P \cdot P^t$ entre as matrizes B^t e X e, fazendo as devidas substituições na equação matricial, teremos:

$$X^t \cdot A \cdot X + B^t \cdot X + F = 0$$

$$X^t \cdot P \cdot D \cdot P^t \cdot X + B^t \cdot P \cdot P^t \cdot X + F = 0$$

ou seja, $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot P \cdot D \cdot P^t \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \cdot P \cdot P^t \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} = 0$

Definindo as matrizes:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} d_1 & e_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = P^t \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

chegamos a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 & e_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} = 0$$

a partir da qual, desenvolvendo e organizando convenientemente, ficaremos com uma equação sem o termo cruzado da expressão geral, reduzindo-a à:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + d_1 x_1 + e_1 y_1 + f = 0$$

Em que, completando os quadrados, encontraremos uma forma ainda mais simples de apresentá-la. Daí, podemos então classificar cada cônica segundo os sinais e valores dos λ_i 's e do termo independente.

Seja a equação $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + d_1 x_1 + e_1 y_1 + f = 0$, podemos escrever:

$$\lambda_1 \left(x_1 + \frac{d_1 x_1}{\lambda_1} \right) + \lambda_2 \left(y_1 + \frac{e_1 y_1}{\lambda_2} \right) + f = 0$$

$$\lambda_1 \left(x_1 + \frac{d_1 x_1}{\lambda_1} \right) + \lambda_2 \left(y_1 + \frac{e_1 y_1}{\lambda_2} \right) + f = 0$$

$$\lambda_1 \left[\left(x_1 + \frac{d_1}{2\lambda_1} \right)^2 - \frac{d_1^2}{4\lambda_1^2} \right] + \lambda_2 \left[\left(y_1 + \frac{e_1}{2\lambda_2} \right)^2 - \frac{e_1^2}{4\lambda_2^2} \right] + f = 0$$

$$\lambda_1 \left(x_1 + \frac{d_1}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y_1 + \frac{e_1}{2\lambda_2} \right)^2 = -f + \frac{d_1^2}{4\lambda_1} + \frac{e_1^2}{4\lambda_2}.$$

Fazendo:

$$X = \left(x_1 + \frac{d_1}{2\lambda_1} \right)$$

$$Y = \left(y_1 + \frac{e_1}{2\lambda_2} \right)$$

$$P = -f + \frac{d_1^2}{4\lambda_1} + \frac{e_1^2}{4\lambda_2}$$

a equação finalmente assume a forma canônica dada por:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = P.$$

3.2 Classificação das Cônicas

As curvas geradas por estes tipos de equação assumem formas geométricas de acordo com os sinais e valores dos coeficientes λ_i 's e do termo independente P .

Vamos agora, a partir de cada caso de combinação de sinais e valores, classificar e exemplificar, construindo com o *geogebra* um exemplo de uma curva cônica correspondente.

3.2.1 A Elipse

Uma curva \mathcal{E} , representada por uma equação da forma $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = P$ associada a um sistema ortogonal cartesiano, é uma **Elipse** se os sinais de λ_1 , λ_2 e P forem iguais e,

além disso, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Exemplo: $4x^2 + 9y^2 = 36$

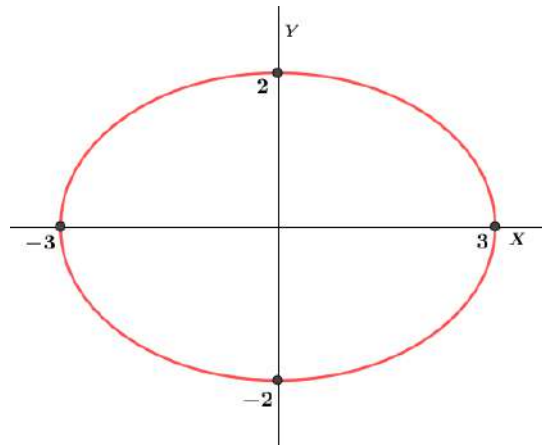


Figura 8 – Elipse

3.2.1.1 Intervalos reais de existência

Neste momento, mostraremos os limites e os intervalos reais nos eixos OX e OY em função dos λ_i s e do termo independente de uma elipse.

Suponha λ_1, λ_2 e P positivos e também $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

A equação $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = P$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{x^2}{\frac{P}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{\frac{P}{\lambda_2}} = 1 \implies \frac{x^2}{\frac{P}{\lambda_1}} = 1 - \frac{y^2}{\frac{P}{\lambda_2}} \implies x^2 = \frac{P}{\lambda_1} - \frac{y^2}{\lambda_2}$$

Sabemos que o traço da curva corta o eixo OX quando $y = 0$. Então, nesta última, se $y = 0$ teremos:

$x^2 = \frac{P}{\lambda_1}$, o que nos leva a duas possíveis raízes, $x_1 = -\sqrt{\frac{P}{\lambda_1}}$ ou $x_2 = \sqrt{\frac{P}{\lambda_1}}$. E ainda, como $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que:

$$\frac{P}{\lambda_1} - \frac{y^2}{\lambda_2} \geq 0 \iff \frac{y^2}{\lambda_2} \leq \frac{P}{\lambda_1} \iff y^2 \leq \frac{P}{\lambda_2} \iff -\sqrt{\frac{P}{\lambda_2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{P}{\lambda_2}}$$

O que nos fornece o intervalo de todos os valores que a variável y pode assumir em função dos coeficientes e do termo independente.

Analogamente, podemos mostrar que a curva tem limites no eixo OY dados por $y_1 = -\sqrt{\frac{P}{\lambda_2}}$ e $y_2 = \sqrt{\frac{P}{\lambda_2}}$ e todos os possíveis valores da variável x estão no intervalo $-\sqrt{\frac{P}{\lambda_1}} \leq x \leq \sqrt{\frac{P}{\lambda_1}}$.

Ainda podemos destacar:

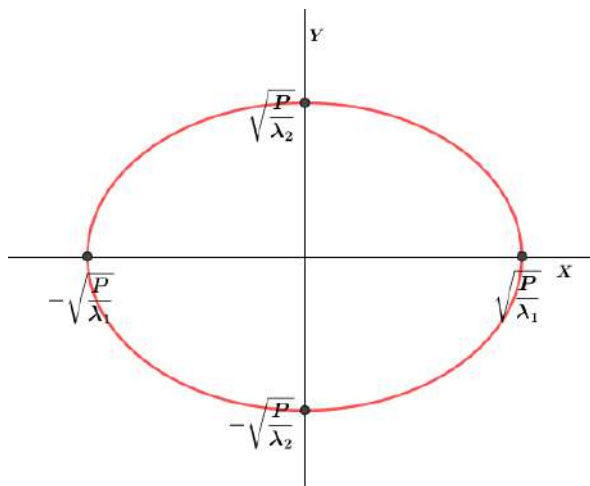
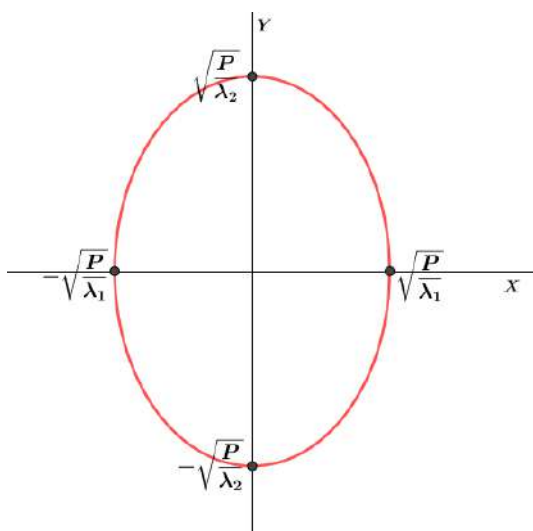


Figura 9 – Elipse

1. Se $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, a elipse tem eixo maior sobre OX ; (Fig.9);
2. Se $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, a elipse tem eixo maior sobre OY . (Fig.10)

Figura 10 – Eixo maior em OY

3.2.2 A Circunferência

Uma curva \mathcal{C} , representada por uma equação da forma $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = P$ associada a um sistema ortogonal cartesiano, é uma **Circunferência** se os sinais de λ_1 , λ_2 e P forem iguais e, além disso, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Exemplo: $4x^2 + 4y^2 = 16$

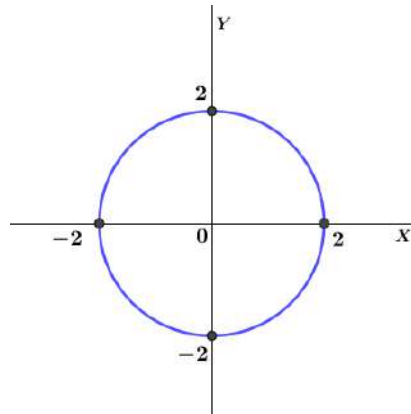
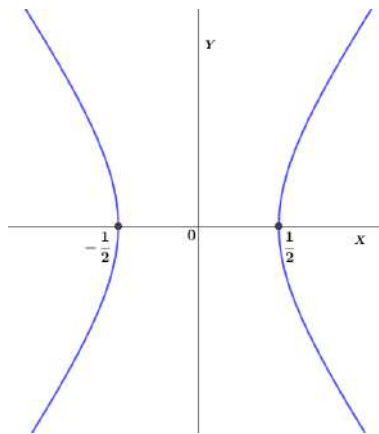


Figura 11 – Circunferência

3.2.3 A Hipérbole

Uma curva \mathcal{H} , representada por uma equação da forma $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = P$ associada a um sistema ortogonal cartesiano, é uma **Hipérbole** se o sinal de um dos λ_i 's for igual ao sinal de P e o do outro for diferente.

Exemplo: $x^2 - 2y^2 = \frac{1}{4}$

Figura 12 – Hipérbole com Simetria em OX

3.2.3.1 Intervalos reais de existência

Neste momento, mostraremos os limites e os intervalos reais nos eixos OX e OY em função dos λ_i 's e do termo independente de uma hipérbole.

Suponha λ_1 e P positivos e $\lambda_2 < 0$. A equação $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = P$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{x^2}{\frac{P}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{\frac{P}{\lambda_2}} = 1 \iff \frac{x^2}{\frac{P}{\lambda_1}} = 1 - \frac{y^2}{\frac{P}{\lambda_2}} \iff \frac{x^2}{\frac{P}{\lambda_1}} = 1 + \frac{y^2}{\left|\frac{P}{\lambda_2}\right|} \iff x^2 = \frac{P}{\lambda_1} + \frac{y^2}{\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|}$$

A curva corta o eixo OX quando $y = 0$. Então, se $y = 0$ teremos:

$x^2 = \frac{P}{\lambda_1}$, que nos leva a $x_1 = -\sqrt{\frac{P}{\lambda_1}}$ e $x_2 = \sqrt{\frac{P}{\lambda_1}}$, que são as abscissas dos pontos de intersecção com este eixo. E ainda, como $\frac{y^2}{\frac{|\lambda_1|}{\lambda_2}} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, podemos fazer:

$$x^2 - \frac{P}{\lambda_1} \geq 0 \iff x^2 \geq \frac{P}{\lambda_1}, \text{ cuja solução é } x \leq -\sqrt{\frac{P}{\lambda_1}} \text{ ou } x \geq \sqrt{\frac{P}{\lambda_1}}.$$

Por outro lado, fazendo $x = 0$, a equação da hipérbole dada por $\frac{x^2}{\frac{P}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{\frac{P}{\lambda_2}} = 1$, resulta em: $\frac{y^2}{\frac{P}{\lambda_2}} = 1$ ou $y^2 = \frac{P}{\lambda_2}$ o que é impossível pois, por hipótese, $\frac{P}{\lambda_2} < 0$. Assim, a curva não intersecta o eixo OY . E ainda, como $x^2 \geq 0$, devemos ter:

$$\frac{P}{\lambda_1} + \frac{y^2}{\frac{|\lambda_1|}{\lambda_2}} \geq 0 \iff \frac{y^2}{\frac{|\lambda_1|}{\lambda_2}} \geq -\frac{P}{\lambda_1} \implies y^2 \geq -\frac{P}{\lambda_1} \cdot \frac{|\lambda_1|}{\lambda_2} \implies y^2 \geq -\frac{P}{|\lambda_2|},$$

que é verdade para todo $y \in \mathbb{R}$.

Para $P > 0$:

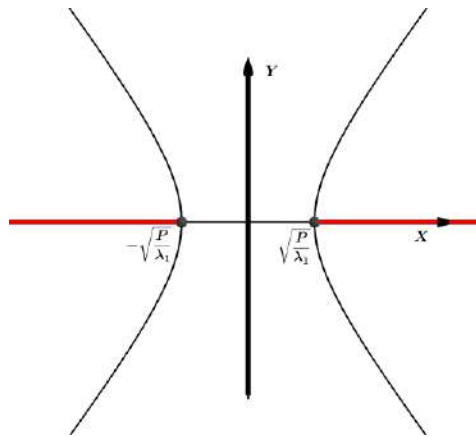


Figura 13 – Hipérbole

1. Se $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$, a hipérbole intersecta o eixo OX .(Fig.13)
2. Se $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$, a hipérbole intersecta o eixo OY .(Fig.14)

Exemplo: $-5x^2 + 3y^2 = 12$

A partir de agora, analisaremos as cônicas geradas para algum $\lambda_i = 0$ e mais uma vez, usaremos o *Geogebra* para dar um exemplo de cada.

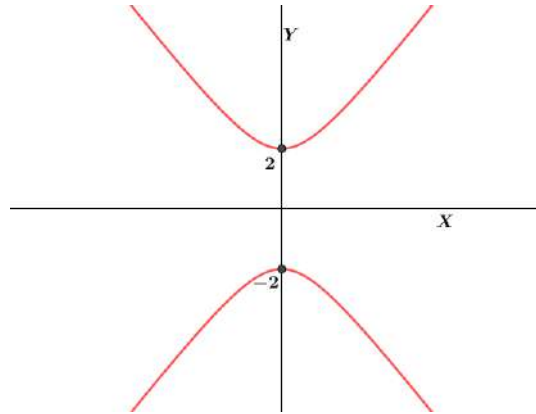


Figura 14 – Hipérbole com Simetria em OY

Façamos por exemplo, $\lambda_1 = 0$. Isso reduz nossa equação geral à:

$$\lambda_2 Y^2 + DX + EY + F = 0.$$

Organizando e completando os quadrados:

$$\begin{aligned} \lambda_2 \left(Y^2 + \frac{EY}{\lambda_2} \right) + F &= -DX \\ \lambda_2 \left[\left(Y + \frac{E}{2\lambda_2} \right)^2 - \frac{E^2}{4\lambda_2^2} \right] + F &= -DX \\ \lambda_2 \left(Y + \frac{E}{2\lambda_2} \right)^2 - \frac{E^2}{4\lambda_2} + F &= -DX \end{aligned}$$

Daí, se fizermos:

$$dx = -DX$$

$$y = Y + \frac{E}{2\lambda_2}$$

$$c = \left(F - \frac{E^2}{4\lambda_2} \right)$$

Substituímos e organizamos convenientemente, a equação reduz-se à forma canônica:

$$dx = \lambda_2 y^2 + c, \text{ com } c, d \in \mathbb{R}.$$

3.2.4 A Parábola

Uma curva \mathcal{P} , representada por uma equação da forma $dx = \lambda y^2 + c$, com $c \in \mathbb{R}$ e $d \in \mathbb{R}^*$, associada a um sistema ortogonal cartesiano, é uma **Parábola** para todo $\lambda \neq 0$.

Exemplo: $3x = -2y^2 + 4$

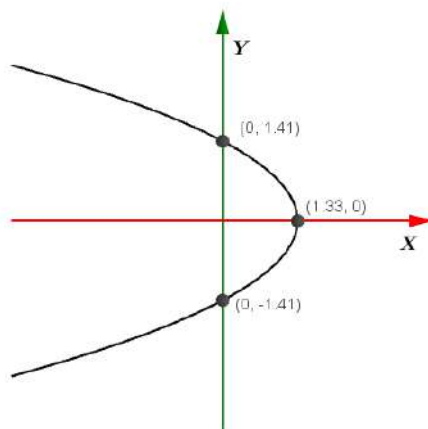


Figura 15 – Parábola com simetria em OX

3.2.4.1 Concavidade

Seja a equação de uma parábola dada por $dx = \lambda y^2 + c$, com $c \in \mathbb{R}$ e $d \in \mathbb{R}^*$:

1. Se d e λ tiverem sinais iguais, a parábola apresenta concavidade voltada para a direita.

Suponha, por exemplo, $d > 0$ e $\lambda > 0$. Assim, na equação $dx = \lambda y^2 + c$ é verdade que $\lambda y^2 \geq 0 \Rightarrow dx - c \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{c}{d}$

Significa que a curva se desenvolve para valores à direita de $\frac{c}{d}$, inclusive.

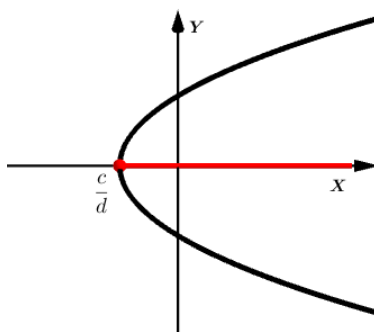


Figura 16 – Concavidade para direita

2. Se d e λ tiverem sinais contrários, a parábola apresenta concavidade voltada para a esquerda.

Suponha, por exemplo, $d > 0$ e $\lambda < 0$ (caso contrário, basta multiplicar por (-1)). Assim, na equação $dx = \lambda y^2 + c$ é verdade que $\lambda y^2 \leq 0 \Rightarrow dx - c \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{c}{d}$

Significa que a curva se desenvolve para valores à esquerda de $\frac{c}{d}$.

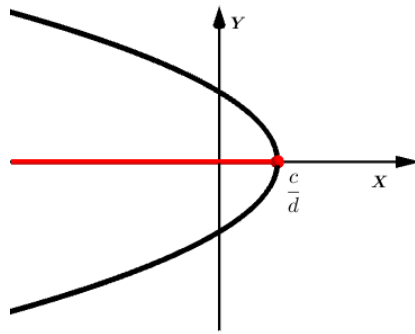


Figura 17 – Concavidade para esquerda

3.2.4.2 Intersecção com os eixos coordenados

A curva desenhada por uma equação do tipo $dx = \lambda y^2 + c$, com $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}^*$ e $\lambda \neq 0$ intersecta os eixos coordenados nas seguintes condições:

1. Eixo OX : no ponto de abscissa $x = \frac{c}{d}$, conforme visto na subsecção anterior;
2. Eixo OY (caso aconteça): nos pontos de ordenadas iguais a $-\sqrt{-\frac{c}{\lambda}}$ e $\sqrt{-\frac{c}{\lambda}}$

Considere a parábola dada por $dx = \lambda y^2 + c$. Caso a curva intersecte o eixo OY , devemos ter $x = 0$. Então, $\lambda y^2 + c = 0 \Rightarrow y^2 = -\frac{c}{\lambda}$. Assim, devemos considerar dois possíveis casos:

1º caso: Para $-\frac{c}{\lambda} = 0$, $y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$. Ou seja, é único o ponto de intersecção com o eixo OY ;

2º caso: Para $-\frac{c}{\lambda} > 0$, $y^2 = -\frac{c}{\lambda} \Rightarrow y = \pm\sqrt{-\frac{c}{\lambda}}$.

Vale salientar:

1. Se a equação tiver a forma $dx = \lambda y^2 + c$, com $\lambda \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$ e $d \in \mathbb{R}^*$ a parábola terá eixo de simetria coincidente com o eixo OX .(Fig. 17)
2. Se a equação tiver a forma $dy = \lambda x^2 + c$, com $\lambda \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$ e $d \in \mathbb{R}^*$ a parábola terá eixo de simetria coincidente com o eixo OY .(Fig.18)

Exemplo: $3y = 2x^2 - 2$

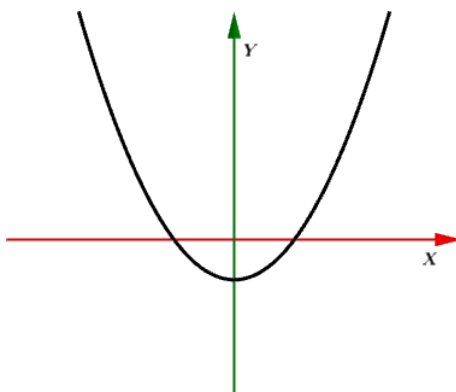


Figura 18 – Parábola com simetria em OY

3.2.5 Degerações das Cônicas

As equações do tipo $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = P$ apresentam as seguintes degenerações:

1. Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ e seus sinais são diferentes do sinal de P , teremos o conjunto vazio. (Fig.19)

Exemplo: $3x^2 + 2y^2 = -2$

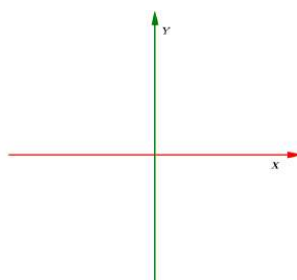


Figura 19 – Conjunto vazio

2. Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ e $P = 0$. Teremos então, um único ponto na origem. (fig.20)

Exemplo: $3x^2 + 8y^2 = 0$

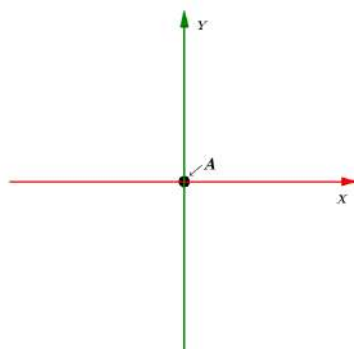


Figura 20 – Ponto

3. Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ e $P = 0$, o gráfico será dado por um par de retas concorrentes na origem do sistema.

Exemplo: $2x^2 - 3y^2 = 0$

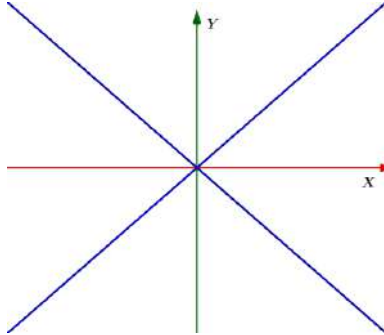


Figura 21 – Retas concorrentes

Já as equações do tipo $dx = \lambda_2 y^2 + c$, apresentam:

4. Se λ tiver sinal contrário ao de c , e $d = 0$, teremos novamente o conjunto vazio.

Exemplo: $3y^2 = -9$

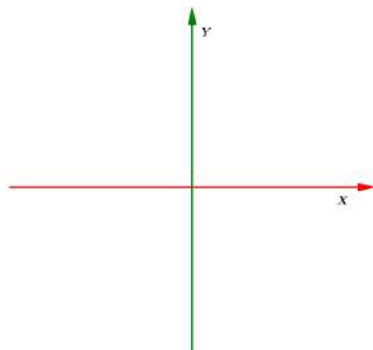


Figura 22 – Conjunto vazio

5. Se $\lambda \neq 0$ e $c = d = 0$, o gráfico é uma reta que coincide com um dos eixos coordenados.

Exemplo: $3y^2 = 0$

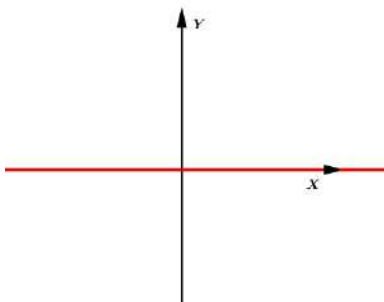


Figura 23 – Reta sobre eixo

6. Se λ tiver o mesmo sinal de c , e $d = 0$, o gráfico é um par de retas paralelas a um dos eixos coordenados.

Exemplo: $3y^2 = 2$

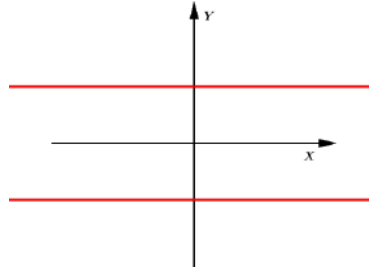


Figura 24 – Par de paralelas

3.3 Identificação Geométrica

Na antiguidade, os geômetras gregos enxergavam as três fascinantes curvas, elipse, hipérbole e parábola, apenas como intersecções entre o cone circular reto de duas folhas e planos que intersectam suas geratrizes, sem conhecer o método analítico utilizado atualmente na maioria dos livros que abordam esse assunto.

Nesta seção, abordaremos as cônicas sob o ponto de vista geométrico, identificando seus elementos e deduzindo suas equações canônicas a partir de suas definições.

Definição 3.3.1: Tomando-se duas retas, \mathbf{g} e \mathbf{e} , concorrentes mas não-perpendiculares em um ponto V , fixa-se a reta \mathbf{e} e gira-se a reta \mathbf{g} 360° em torno de \mathbf{e} mantendo-se constante o ângulo θ entre elas. A reta \mathbf{g} , chamada geratriz do cone, cria uma superfície cônica de revolução infinita e simétrica, em relação ao vértice V , chamada **cone**. Esse cone é costumeiramente denominado de **cone circular de duas folhas**.

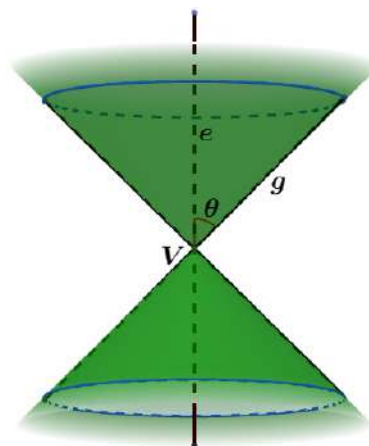


Figura 25 – Cone circular de duas folhas

Antes de Apolônio, os gregos necessitavam de três tipos de cones para obterem as seções cônicas, fazendo passar um plano, sempre perpendicular a uma geratriz qualquer desse cone circular reto. Esses três cones, capazes de determinar as seções cônicas, são definidos pelo ângulo que duas geratrizes diametralmente opostas fazem entre si. Se o ângulo for agudo, a seção será uma elipse, se for reto, será uma parábola, se for obtuso, uma hipérbole.

Apolônio demonstrou que, com apenas um cone circular reto de duas folhas, é possível encontrar qualquer uma das curvas cônicas, fazendo variar apenas o ângulo em que um plano Ω intersecta uma das geratrizes do cone. Temos então, três possíveis posições para esse plano em relação a uma geratriz.

1. Se Ω não for paralelo a nenhuma geratriz do cone, a intersecção é uma elipse. Neste caso, Ω corta o eixo e segundo um ângulo α , tal que $\theta < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

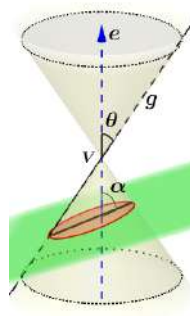


Figura 26 – Elipse $\theta < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Note que Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ teremos uma circunferência.

2. Se Ω é um plano paralelo somente a uma geratriz, ou seja, $\alpha = \theta$, teremos uma parábola como intersecção.

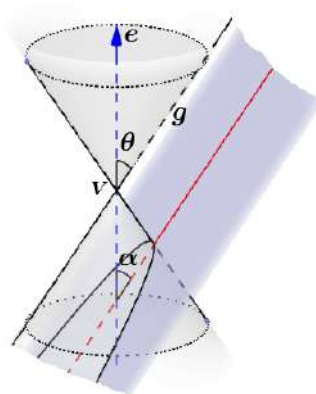


Figura 27 – Parábola $\alpha = \theta$

3. Se Ω é um plano concorrente a duas geratrizes, destacamos dois casos: no primeiro, Ω corta e de modo que $0 < \alpha < \theta$, e no segundo, Ω não corta e , ou seja, $\alpha = 0$, em ambos os casos a diretriz será uma Hipérbole.

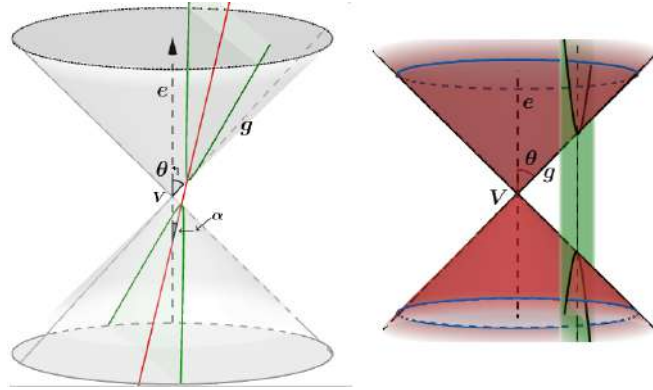


Figura 28 – Hipérbole $\alpha < \theta$

Enunciaremos abaixo as características de cada conjunto de pontos que determina uma seção cônica, ou seja, o lugar geométrico correspondente a cada uma das três cônicas.

Definição 3.3.2: Dado um número positivo $2a$ e dois pontos fixos F_1 e F_2 (*focos*), cuja distância entre si, $2c$, é menor que $2a$. O conjunto dos pontos P , tais que a soma das distâncias de P a F_1 e de P a F_2 é igual a $2a$, é chamado de **Elipse**.

Definição 3.3.3: Dados um ponto F e uma reta r (*diretriz*) que não contém F , denominamos **Parábola** de foco F e diretriz r o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de r e F .

Definição 3.3.4: Dados um número positivo $2a$, dois pontos fixos F_1 e F_2 (*focos*) cuja distância entre si, $2c$ é maior que $2a$, o conjunto dos pontos P , tais que a diferença das distâncias de P a F_1 e de P a F_2 é igual a $2a$, é chamado de **Hipérbole**.

Detalharemos a seguir os conceitos geométricos de cada uma das cônicas, valorizando uma abordagem mais prática e didática e mostraremos os métodos mais básicos de construção com instrumentos de fácil acesso como lápis, régua, prego, madeira, esquadro e cordão. Tal procedimento busca introduzir esses conteúdos de forma mais lúdica pois acreditamos que trabalhar o lúdico e palpável estimule o pensamento geométrico e conseqüentemente, uma compreensão mais sólida dos conceitos analíticos.

3.4 A Elipse

Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos de um plano, distantes $2c$ e a um número real tal que $a > c$. O lugar geométrico E dos pontos P do plano tais que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ chama-se **elipse**.

3.4.1 Construindo a Elipse

Marque os pontos F_1 e F_2 distintos sobre uma superfície plana; Fixe neles, as extremidades de um cordão cujo comprimento seja maior que a distância entre eles; Certifique-se de que as extremidades do cordão possam girar sem se enrolar nesses pontos; Encoste a ponta P de um lápis em algum ponto do cordão, esticando-o como na figura abaixo; Deslize P de modo a manter o cordão sempre esticado, traçando assim, uma curva fechada. Esta curva é o esboço de uma Elipse, pois a soma das distâncias de F_1 a P e de F_2 a P é igual ao comprimento do cordão qualquer que seja P pertencente à curva.

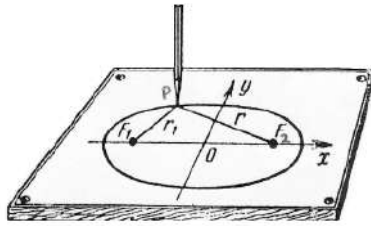


Figura 29 – Desenho da Elipse

3.4.2 Elementos da Elipse

- F_1 e F_2 : Focos, cuja distância, chamada focal, é $2c$;
- O : Centro da Elipse, também é ponto médio do segmento F_1F_2 ;
- A_1, A_2, B_1, B_2 : Vértices da Elipse;
- Segmento A_1A_2 : Eixo maior cujo comprimento é $2a$;
- Segmento B_1B_2 : Eixo menor cujo comprimento é $2b$;
- Excentricidade: $\epsilon = \frac{c}{a}$, com $0 < \epsilon < 1$.

Quanto mais próximo de zero for o valor de ϵ , mais a elipse se aproxima de uma circunferência. Por outro lado, quanto mais achatada for a elipse, mais próximo de 1 estará o valor de ϵ .

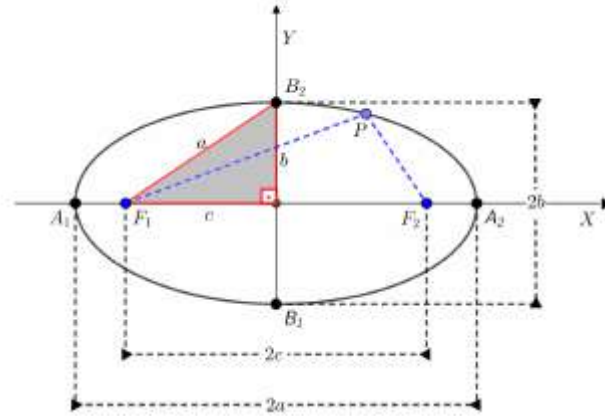


Figura 30 – Elipse e seus elementos

3.4.3 Equação Canônica da Elipse

Por definição, se $P = (x, y)$ é um ponto genérico da elipse de focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, então:

$$\begin{aligned}
 d(P, F_1) + d(P, F_2) &= 2a \implies \\
 \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} &= 2a \implies \\
 \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \implies \\
 x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x^2 - 2xc + c^2 + y^2) \implies \\
 4a^2 - 4xc &= 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \implies \\
 a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 &= a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) \implies \\
 a^4 + x^2c^2 &= a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2
 \end{aligned}$$

Fazendo $a^2 = b^2 + c^2$, podemos escrever $c^2 = a^2 - b^2$ e substituir na última equação:

$$a^4 + x^2(a^2 - b^2) = a^2x^2 + a^2(a^2 - b^2) + a^2y^2$$

Daí, desenvolvendo e eliminando os termos opostos, chegamos a:

$$-x^2b^2 = -a^2b^2 + a^2y^2$$

onde se dividindo toda equação por $(a^2 \cdot b^2)$ e organizando convenientemente, encontramos a equação canônica ou reduzida da elipse de centro na origem $C = (0, 0)$ e focos sobre o eixo OX .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Devido a facilidade de dedução, vamos apenas apresentar as equações reduzidas das elipses com as seguintes características:

1. Centro no ponto $C = (0, 0)$ e focos F_1 e F_2 sobre o eixo OY : $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

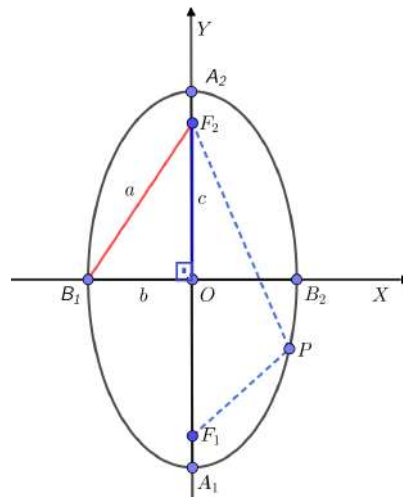


Figura 31 – Focos no eixo OY

2. Centro no ponto $C = (x_0, y_0)$ (fora da origem) e focos F_1 e F_2 sobre uma reta paralela ao eixo OX : $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

Exemplo: $\frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y - 3)^2}{4} = 1$

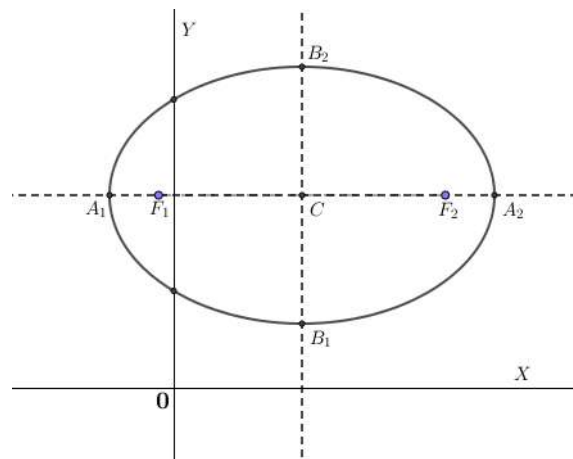


Figura 32 – Eixo maior paralelo a OX

3. Centro no ponto $C = (x_0, y_0)$ (fora da origem) e focos F_1 e F_2 sobre uma reta paralela ao eixo OY : $\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$

Exemplo: $\frac{(x + 1)^2}{4} + \frac{(y + 2)^2}{16} = 1$

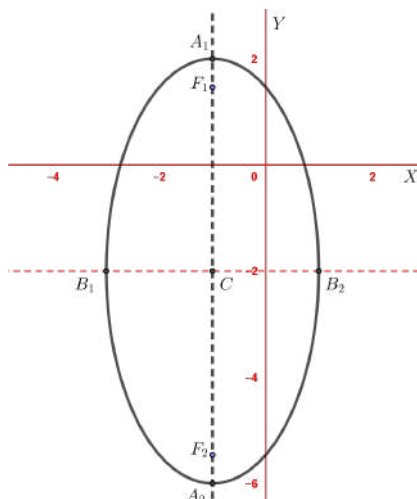


Figura 33 – Eixo maior paralelo a OY

3.5 A Hipérbole

Sejam F_1 e F_2 pontos de um plano distantes $2c$ e um número real a tal que, $0 < a < c$. Chama-se **hipérbole**, o lugar geométrico H dado por:

$$H = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$$

3.5.1 Construindo a Hipérbole

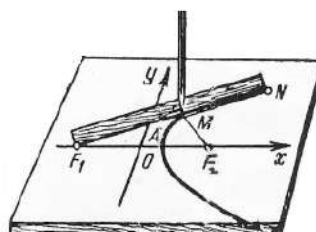


Figura 34 – Desenho da Hipérbole

Sobre uma superfície plana, trace uma reta x e marque sobre ela os pontos F_1 e F_2 ; Prenda uma das extremidades de uma régua a F_1 de modo que ela possa girar ao redor deste ponto; Na outra extremidade N da régua, fixe a ponta de um cordão que deve ter a outra ponta fixada no ponto F_2 . O comprimento do cordão deve ser menor que a régua mas, para esse caso, tomemos um tal que a diferença entre o comprimento da régua e a do cordão seja igual a distância entre F_1 e F_2 . Então, posicione a régua sobre a reta x com a ponta do lápis sobre o ponto A , que é determinado pela intersecção da reta x com a curva que está sendo traçada; Com o cordão sempre esticado e a ponta do lápis encostada na régua, deslize-a sobre o plano desenhando assim, o primeiro *ramo* da hipérbole.

Note que, se M é um ponto qualquer da curva construída, pela própria construção teremos: $|F_1N - (F_2M + MN)| = F_1F_2$ em que $F_1N = F_1M + MN$ e substituindo, $|F_1M + MN - (F_2M + MN)| = F_1F_2$, ou seja, $|F_1M - F_2M| = F_1F_2$ haja vista que para todo M pertencente à curva, a distância F_1F_2 permanece a mesma.

3.5.2 Elementos da Hipérbole

- F_1 e F_2 : Focos, a distância entre eles, $2c$, chama-se distância focal;
- O : Centro da hipérbole que também é ponto médio do segmento F_1F_2 ;
- A_1, A_2 : Vértices da hipérbole;
- Segmento A_1A_2 : Eixo real ou transversal, cujo comprimento é $2a$;
- Segmento B_1B_2 : Eixo imaginário ou conjugado, cujo comprimento é $2b$;
- Excentricidade: $\epsilon = \frac{c}{a}$, com $\epsilon > 1$, já que $c > a$;
Quanto maior o valor de ϵ maior a abertura da hipérbole e vice-versa.

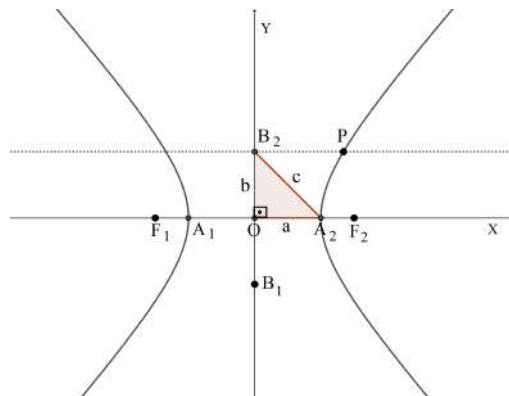


Figura 35 – Hipérbole e seus elementos

3.5.3 Equação canônica da Hipérbole

Por definição, se $P = (x, y)$ é um ponto genérico da hipérbole de focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, então:

$$\begin{aligned}
 |d(P, F_1) - d(P, F_2)| &= 2a \implies \\
 |\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}| &= 2a \iff \\
 \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} &= 2a + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \iff \\
 (x+c)^2 + y^2 &= (2a)^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + (x-c)^2 + y^2 \iff \\
 x^2 + 2xc + c^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + x^2 - 2xc + c^2 \iff
 \end{aligned}$$

$$4xc - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2}$$

Dividindo toda equação por 4 e desenvolvendo os produtos, teremos:

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$$

Agora, fazendo $c^2 = a^2 + b^2$, depois de algumas manipulações algébricas, chegaremos à equação reduzida ou canônica da hipérbole de centro na origem e focos sobre o eixo OX , dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Agora, semelhantemente ao que fizemos com a elipse, vamos apenas apresentar e exemplificar, construindo com o *Geogebra*, uma figura para cada equação reduzida da hipérbole com as seguintes características:

1. Centro no ponto $C = (0, 0)$ e focos F_1 e F_2 sobre o eixo OY : $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Ex: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{12} = 1$

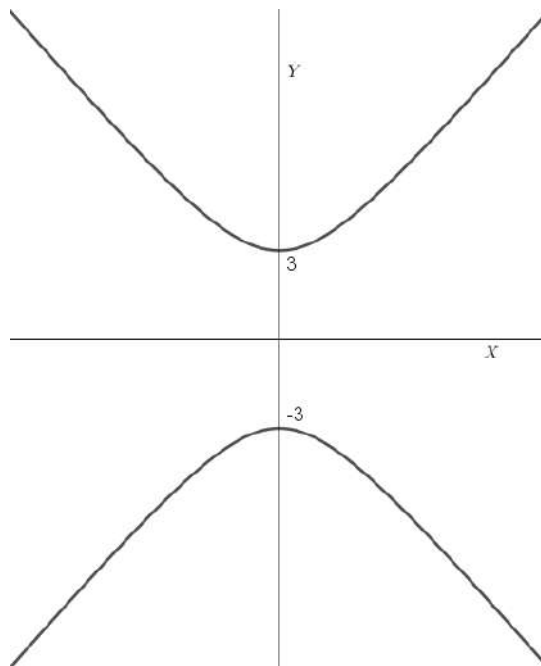


Figura 36 – Focos no eixo OY

2. Centro no ponto $C = (x_0, y_0)$ (fora da origem) e focos F_1 e F_2 sobre uma reta paralela ao eixo OX : $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

Exemplo: $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{6} = 1$

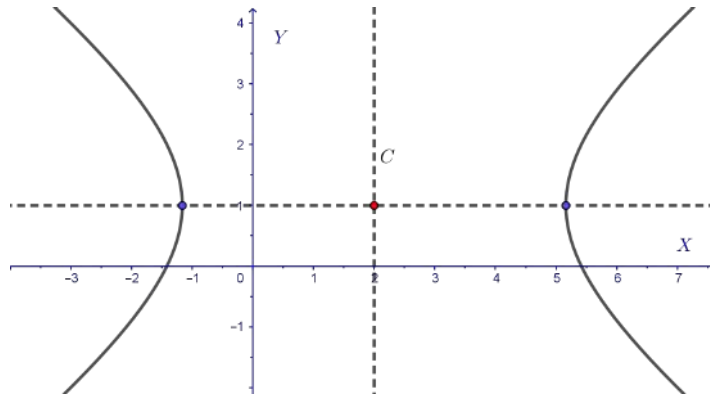


Figura 37 – Eixo real paralelo a OX

3. Centro no ponto $C = (x_0, y_0)$ (fora da origem) e focos F_1 e F_2 sobre uma reta paralela ao eixo OY : $\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$

Exemplo: $\frac{(y - 1)^2}{3} - \frac{(x + 2)^2}{4} = 1$

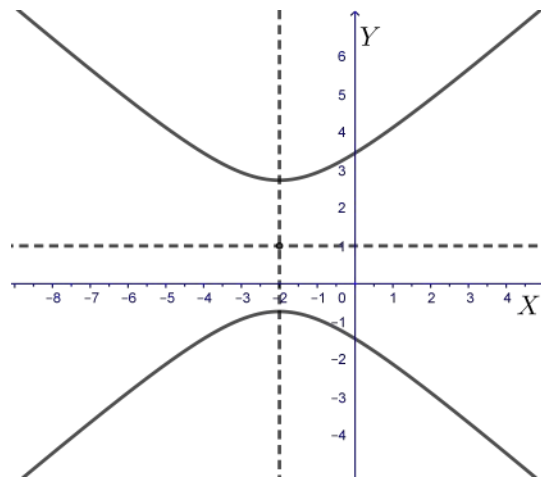


Figura 38 – Eixo real paralelo a OY

É perceptível a semelhança entre as equações da elipse e da hipérbole, mas é importante destacar que na elipse sempre $a > b$. Na hipérbole, pode-se ter $a > b$, $a = b$ ou $a < b$. Ou seja, na hipérbole o eixo real coincide ou é paralelo ao eixo da coordenada correspondente à variável de coeficiente positivo (se a equação estiver na forma canônica).

3.6 A Parábola

Sejam d uma reta do plano e F um ponto não pertencente a ela. O lugar geométrico ρ , dos pontos P equidistantes de F e d chama-se **Parábola**. Assim:

$$\rho = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, F) = d(P, d)\}$$

3.6.1 Construindo a Parábola

Trace uma reta x e sobre ela, marque três pontos O , A e F de modo que O seja ponto médio do segmento AF ; Trace pelo ponto A um segmento de reta auxiliar KL perpendicular à reta x ; Alinhe a borda de uma régua ao segmento KL e fixe-a nesta posição; Posicione o menor cateto de um esquadro ao longo da borda da régua alinhada com KL ; O cateto maior do esquadro, a partir de agora designado por NB deve estar posicionado sobre a reta x ; No vértice do ângulo B , prenda uma das pontas de um cordão cujo comprimento deve ser igual a NB e, a outra ponta, prenda a F ; Estique o cordão com a ponta de um lápis e, a partir do ponto O , com o cordão sempre esticado, deslize lentamente o esquadro ao longo da régua desenhando uma curva sobre o plano.

A curva traçada é um arco de parábola pois o comprimento do cordão é sempre igual ao tamanho do cateto NB o que nos garante que todo ponto M da curva é equidistante de F e da reta KL (diretriz).

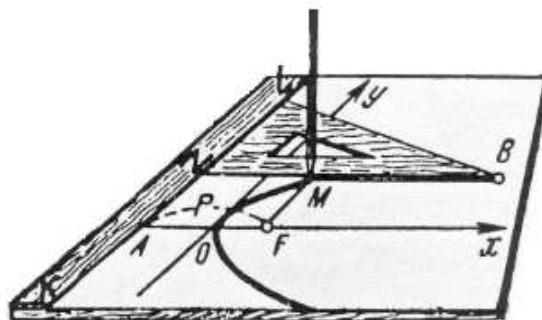


Figura 39 – Desenho da Parábola

3.6.2 Elementos da Parábola

- F : Foco;
- d : Diretriz;
- V : Vértice;
- $2p$: Distância do foco à diretriz;
- Reta VF : Eixo de simetria da parábola.

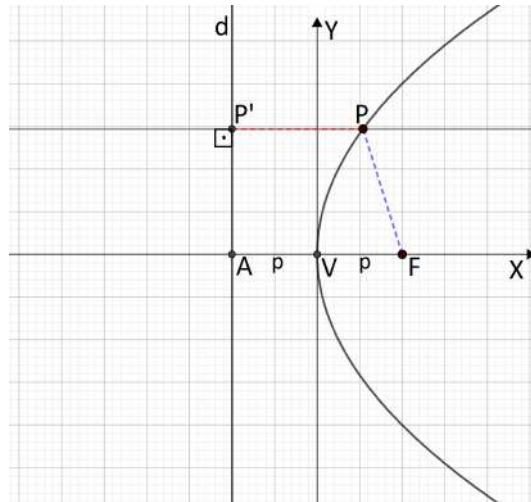


Figura 40 – Parábola e seus elementos

3.6.3 Equação Canônica da Parábola

Sejam $P = (x, y)$ um ponto genérico da parábola, d uma reta diretriz de equação $x = -p$, $F = (p, 0)$ seu foco, $P' = (-p, y)$ o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre a diretriz. Por definição, se P é um ponto dessa parábola então, $d(P, F) = d(P, P')$, isto é:

$$\sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x + p)^2 + (y - y)^2}$$

que é equivalente a:

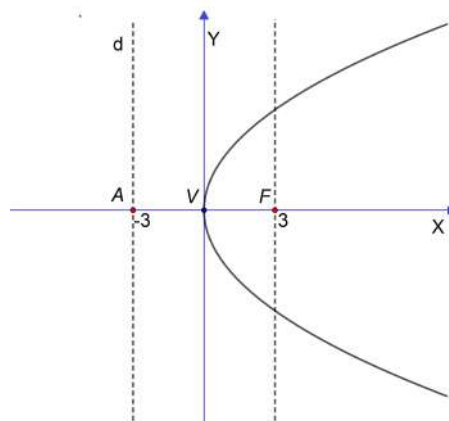
$$x^2 - 2xp + p^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$$

e após algumas manipulações algébricas chegaremos à equação em sua forma canônica dada por:

$$y^2 = 4px,$$

com vértice na origem e eixo de simetria sobre o eixo OX .

Exemplo: $y^2 = 6x$

Figura 41 – Simetria pelo eixo OX

Vale salientar que, se os pontos F e P' tiverem coordenadas $F = (-p, 0)$ e $P' = (p, y)$, a parábola terá concavidade voltada para a esquerda (parte negativa do eixo OX) e sua equação canônica será da forma:

$$y^2 = -4px$$

Podemos também enunciar as equações das parábolas que têm o vértice na origem e o eixo OY como eixo de simetria. São elas: $x^2 = 4py$ (concavidade voltada para cima) e $x^2 = -4py$ (concavidade voltada para baixo).

Exemplo: $x^2 = 7y$

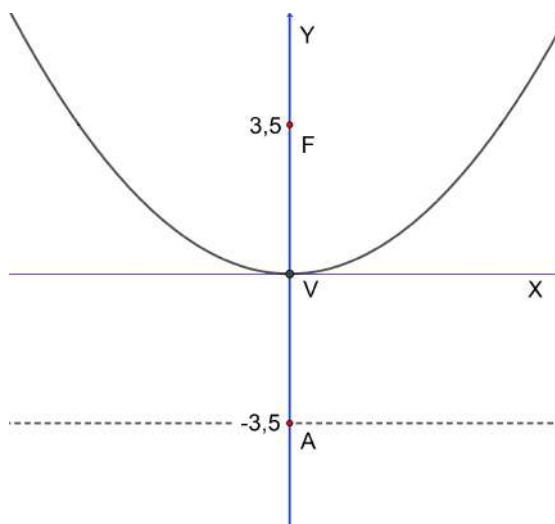


Figura 42 – Simetria pelo eixo OY

E para os casos em que o vértice $V = (x_0, y_0)$, encontra-se fora da origem e a diretriz é paralela a um dos eixos, as equações são da forma:

1. $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$ (concavidade para a direita);
2. $(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$ (concavidade para a esquerda);
3. $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$ (concavidade para cima);
4. $(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$ (concavidade para baixo).

4 As Quádricas

Chama-se *superfície quádrlica* ou simplesmente *quádrlica*, o conjunto de pontos $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfazem a equação geral do segundo grau em três variáveis dada por:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

em que $a; b; c; d; e; f; g; h; i$ e j são números reais e pelo menos um dos coeficientes $a; b; c; d; e$ e f não é nulo.

Neste capítulo, deduziremos algebricamente a equação acima e encontraremos uma forma mais simples ou canônica de escrevê-la com a técnica de completar quadrados. A partir desta nova forma, poderemos classificar e construir cada uma das quádrlicas bem como suas degenerações em função dos sinais e valores de seus autovalores e termo independente associados a um sistema cartesiano ortogonal. Aqui também, como nas cônicas, aproveitaremos alguns conceitos básicos da Álgebra Linear sobre matrizes e suas propriedades.

4.1 Identificação Algébrica

Sejam as matrizes: $A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $J = [j]$

e a seguinte equação matricial:

$$X^t \cdot A \cdot X + B^t \cdot X + J = 0$$

que pode ser escrita assim, $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [j] = 0$.

Desenvolvendo a expressão matricial encontraremos:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

Para prosseguir com a demonstração, de modo análogo, usaremos as definições 3.1.1 sobre matriz ortogonal, 3.1.2 sobre matriz diagonal e 3.1.3 sobre matriz simétrica, já vistas no capítulo anterior.

Então, como a matriz A é simétrica, também é diagonalizável, ou seja, existe uma matriz P ortogonal, tal que:

$P^{-1} \cdot A \cdot P = D$, em que D é a matriz diagonal associada à matriz A e é dada por:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

cujos elementos da diagonal principal λ_1, λ_2 e λ_3 , são os *autovalores* de A , e cujas colunas são seus *autovetores*.

Daí, partindo da definição, podemos escrever a série de equivalências:

$$\begin{aligned} P^{-1} \cdot A \cdot P &= D \iff \\ P \cdot P^{-1} \cdot A \cdot P \cdot P^{-1} &= P \cdot D \cdot P^{-1} \iff \\ A &= P \cdot D \cdot P^{-1}, \text{ ou } A = P \cdot D \cdot P^T \end{aligned}$$

Agora, fazendo as devidas substituições na equação matricial, teremos:

$$\begin{aligned} X^t \cdot A \cdot X + B^t \cdot X + J &= 0 \iff \\ X^t \cdot P \cdot D \cdot P^t \cdot X + B^t \cdot P \cdot P^t \cdot X + J &= 0 \\ \text{ou seja, } [x \ y \ z] \cdot P \cdot D \cdot P^t \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [g \ h \ i] \cdot P \cdot P^t \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [j] &= 0. \end{aligned}$$

Definindo as matrizes:

$$[X \ Y \ Z] = [x \ y \ z] \cdot P$$

$$[G \ H \ I] = [g \ h \ i] \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = P^t \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

chegamos a seguinte equação matricial:

$$[X \ Y \ Z] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + [G \ H \ I] \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + [j] = 0$$

a partir da qual, desenvolvendo e organizando, ficamos com a equação sem os termos mistos ou cruzados da expressão geral, reduzindo-a à forma:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + GX + HY + IZ + j = 0$$

4.2 Classificação das Quádricas

A partir de agora, com base nesta última, usaremos a técnica de completar quadrados para escrevê-la de forma ainda mais simples e classificaremos as quádricas segundo os sinais e valores dos λ_i 's e do termo independente. Para isso, precisamos considerar três casos:

1º Caso: Supondo todos os λ_i 's $\neq 0$. Completando quadrados, podemos escrever:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + GX + HY + IZ + j = 0$$

$$\lambda_1 \left(X^2 + \frac{GX}{\lambda_1} \right) + \lambda_2 \left(Y^2 + \frac{HY}{\lambda_2} \right) + \lambda_3 \left(Z^2 + \frac{IZ}{\lambda_3} \right) + j = 0$$

$$\lambda_1 \left[\left(X + \frac{G}{2\lambda_1} \right)^2 - \frac{G^2}{4\lambda_1^2} \right] + \lambda_2 \left[\left(Y + \frac{H}{2\lambda_2} \right)^2 - \frac{H^2}{4\lambda_2^2} \right] + \lambda_3 \left[\left(Z + \frac{I}{2\lambda_3} \right)^2 - \frac{I^2}{4\lambda_3^2} \right] = -j$$

$$\lambda_1 \left(X + \frac{G}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(Y + \frac{H}{2\lambda_2} \right)^2 + \lambda_3 \left(Z + \frac{I}{2\lambda_3} \right)^2 = (-j + \frac{G^2}{4\lambda_1} + \frac{H^2}{4\lambda_2} + \frac{I^2}{4\lambda_3})$$

Daí, se fizermos: $X' = X + \frac{G}{2\lambda_1}$, $Y' = Y + \frac{H}{2\lambda_2}$, $Z' = Z + \frac{I}{2\lambda_3}$ e $P = -j + \frac{G^2}{4\lambda_1} + \frac{H^2}{4\lambda_2} + \frac{I^2}{4\lambda_3}$

A equação reduz-se à $\lambda_1 (X')^2 + \lambda_2 (Y')^2 + \lambda_3 (Z')^2 = P$

Vamos agora, a partir de cada caso de combinação de sinais e valores dos λ_i 's e do termo independente P , classificar e exemplificar, construindo com o **Geogebra**, uma superfície quádrlica correspondente.

4.2.1 A Esfera

Uma superfície \mathcal{E} , representada por uma equação da forma $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = P$, associada a um sistema ortogonal cartesiano, é uma **esfera** se os sinais de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e P forem iguais e, além disso, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

Exemplo: $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 8$

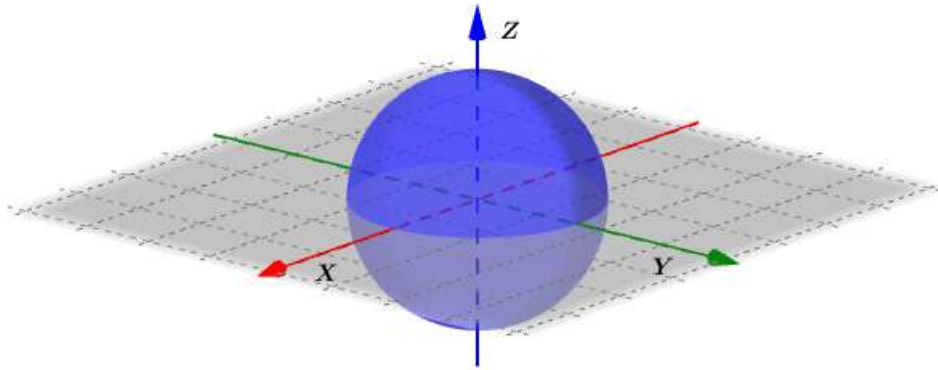


Figura 43 – Esfera

4.2.2 O Elipsoide

Uma superfície \mathcal{E} , representada por uma equação da forma $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = P$ associada a um sistema ortogonal cartesiano, é um **elipsoide** se os sinais de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e P forem iguais e, além disso, pelo menos um dos λ_i 's for diferente dos demais.

Exemplo: $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$

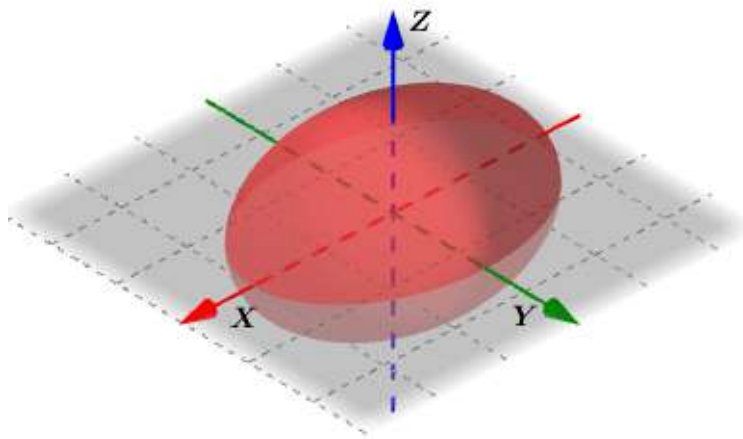


Figura 44 – Elipsoide

Se dois λ_i 's forem iguais e o outro diferente, o elipsoide será de revolução.

4.2.3 O Hiperboloide de uma folha

Uma superfície \mathcal{H}_1 , representada por uma equação da forma $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = P$ associada a um sistema ortogonal cartesiano, é um **Hiperboloide de uma folha** quando todos os λ_i 's forem diferentes de zero e o sinal de apenas um deles for diferente do sinal de P . Para ilustrar, façamos: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 > 0$ e $P > 0$.

Exemplo: $2x^2 - y^2 + 3z^2 = 2$

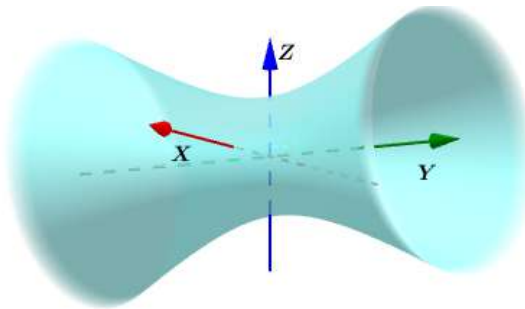


Figura 45 – Hiperboloide de uma folha

Note que, se os dois λ_i 's que possuem sinal igual ao de P forem iguais, teremos um hiperboloide de uma folha de revolução.

Exemplo: $2x^2 - 7y^2 + 2z^2 = 2$

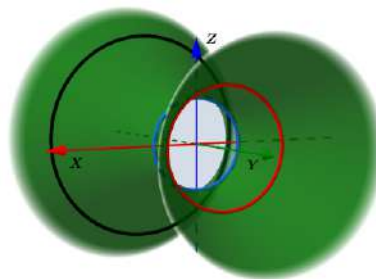


Figura 46 – Hiperboloide de Revolução de uma folha

4.2.4 O Hiperboloide de duas folhas

Uma superfície \mathcal{H}_2 , representada por uma equação da forma $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = P$ associada a um sistema ortogonal cartesiano, é um **Hiperboloide de duas folhas** quando todos os λ_i 's forem diferentes de zero e o sinal de apenas um deles for igual ao sinal de P .

Exemplo: $-2x^2 + 2y^2 - 8z^2 = 1$

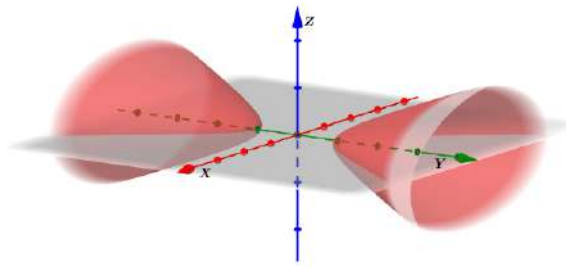


Figura 47 – Hiperboloide de duas folhas

Se os dois λ_i s que possuem sinais opostos ao sinal de P forem iguais, teremos um hiperboloide de duas folhas de revolução. (Figura 47)

Exemplo: $x^2 + y^2 - \frac{3}{2}z^2 = -1$

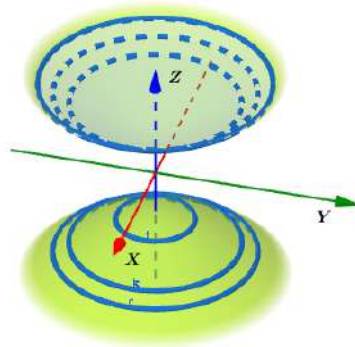


Figura 48 – Hiperboloide de duas folhas de revolução

4.2.5 O Cone de duas folhas

Uma superfície \mathcal{C}_2 , representada por uma equação da forma $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = P$, associada a um sistema ortogonal cartesiano, é um **cone de duas folhas** quando os λ_i s tiverem dois sinais iguais e um diferente e ainda, $P = 0$.

Exemplo: $x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$.

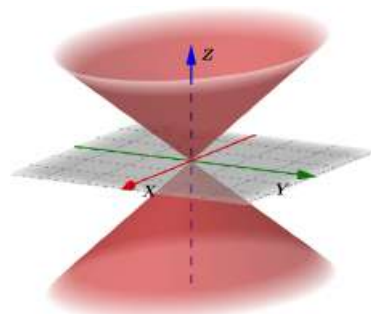


Figura 49 – Cone de duas folhas

Se dois dos λ_i 's forem iguais, o cone será de revolução.

Exemplo: $3x^2 + 3y^2 - 2z^2 = 0$.

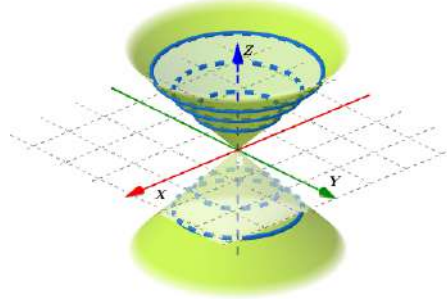


Figura 50 – Cone de duas folhas de Revolução

2º Caso: Supondo apenas um dos λ_i 's = 0, encontraremos uma equação do tipo $kz + c = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$ ou $kx + c = \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2$ ou $ky + c = \lambda_1 x^2 + \lambda_3 z^2$, com k e $c \in \mathbb{R}$.

Vejamos a dedução algébrica de uma dessas equações. Fazemos por exemplo, $\lambda_3 = 0$. Isso reduz a nossa equação geral à forma:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + GX + HY + IZ + j = 0.$$

Vamos agora organizar e completar os quadrados.

$$\lambda_1 \left(X^2 + \frac{GX}{\lambda_1} \right) + \lambda_2 \left(Y^2 + \frac{HY}{\lambda_2} \right) + IZ + j = 0$$

$$\lambda_1 \left[\left(X + \frac{G}{2\lambda_1} \right)^2 - \frac{G^2}{4\lambda_1^2} \right] + \lambda_2 \left[\left(Y + \frac{H}{2\lambda_2} \right)^2 - \frac{H^2}{4\lambda_2^2} \right] = -IZ - j$$

$$\lambda_1 \left(X + \frac{G}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(Y + \frac{H}{2\lambda_2} \right)^2 = -IZ - j + \frac{G^2}{4\lambda_1} + \frac{H^2}{4\lambda_2}$$

Daí, se fizermos:

$$x = X + \frac{G}{2\lambda_1}$$

$$y = Y + \frac{H}{2\lambda_2}$$

$$kz = -IZ$$

$$c = -j + \frac{G^2}{4\lambda_1} + \frac{H^2}{4\lambda_2}$$

A equação reduz-se à: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = kz + c$, com k e $c \in \mathbb{R}$.

4.2.6 Os Paraboloides

4.2.6.1 Paraboloides Elípticos

Uma superfície \mathcal{P}_e , representada por uma equação da forma $kz + c = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$ com $k \in \mathbb{R}^*$ e $c \in \mathbb{R}$ associada a um sistema ortogonal cartesiano, é um **Paraboloides elíptico** quando os sinais dos λ_i s forem iguais.

Exemplo: $3z = 2x^2 + 3y^2$

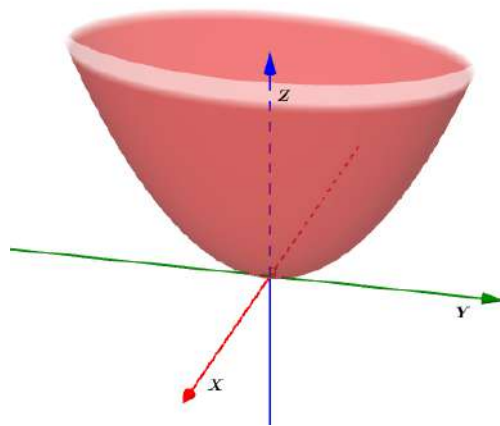


Figura 51 – Paraboloides Elíptico

Caso os λ_i s sejam iguais entre si, teremos um paraboloides de revolução.

Exemplo: $2x = y^2 + z^2$

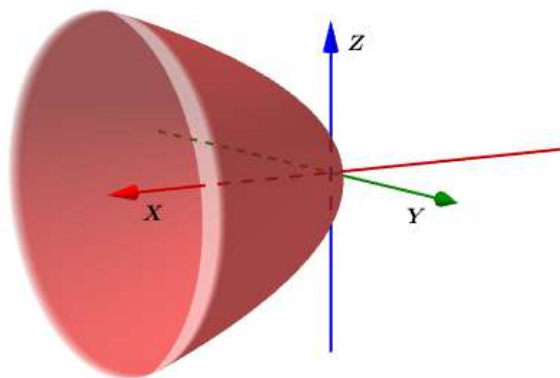


Figura 52 – Paraboloides de Revolução

4.2.6.2 Paraboloides Hiperbólicos

Uma superfície \mathcal{P}_h , dada por uma equação $kz + c = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$ com $k \in \mathbb{R}^*$ e $c \in \mathbb{R}$, associada a um sistema ortogonal cartesiano, é um **Paraboloides hiperbólico** quando os sinais dos λ_i s forem diferentes um do outro.

Exemplo: $2z = 3x^2 - 2y^2$

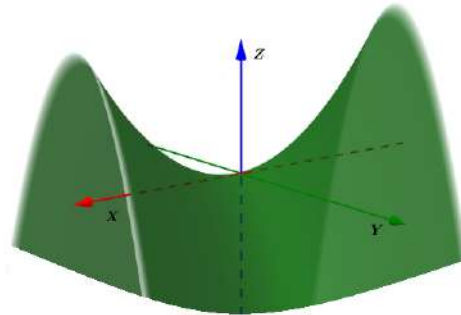


Figura 53 – Paraboloide hiperbólico

Note ainda que, para $k = 0$, a equação $kz + c = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$, reduz-se à: $c = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$ com $c \in \mathbb{R}$ e isso representará outro grupo de quádricas, os cilindros.

4.2.7 O Cilindro Elíptico

Uma superfície \mathcal{C}_e , representada por uma equação da forma $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = c$ com $c \in \mathbb{R}$, associada a um sistema ortogonal cartesiano, é um **cilindro elíptico** quando os sinais dos λ_i 's forem simultaneamente iguais ao sinal de c e, além disso, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Exemplo: $y^2 + 4z^2 = 4$

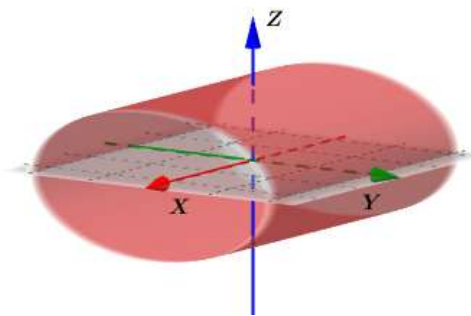


Figura 54 – Cilindro elíptico

4.2.8 O Cilindro de Revolução

Uma superfície \mathcal{C}_r , representada por uma equação da forma $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = c$ com $c \in \mathbb{R}$, associada a um sistema ortogonal cartesiano, é um **cilindro de revolução** quando os sinais dos λ_i 's forem simultaneamente iguais ao sinal de c e, além disso, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Exemplo: $2y^2 + 2z^2 = 8$

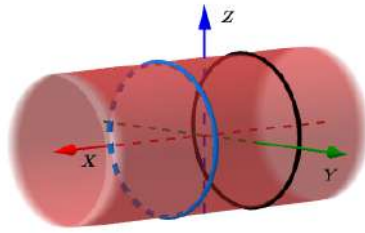


Figura 55 – Cilindro circular

4.2.9 O Cilindro Hiperbólico

Uma superfície \mathcal{C}_h , representada por uma equação da forma $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = c$, associada a um sistema ortogonal cartesiano, é um **cilindro hiperbólico** quando o sinal de apenas um dos λ_i s for igual ao sinal de c .

Exemplo: $5x^2 - 2z^2 = -1$

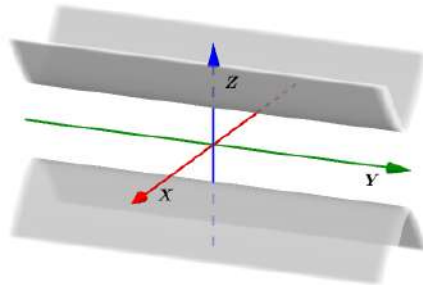


Figura 56 – Cilindro hiperbólico

3º Caso: Supondo dois dos λ_i s = 0, encontraremos uma equação do tipo $\lambda_1 x^2 = by + cz + d$ ou $\lambda_1 y^2 = ax + cz + d$ ou $\lambda_1 z^2 = ax + by + d$, com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$.

Vejamos a dedução algébrica de uma dessas equações. Façamos por exemplo, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 0$. Isso reduz a nossa equação à forma:

$$\lambda_1 X^2 + GX + HY + IZ + j = 0.$$

De modo que, organizando e completando o quadrado na variável X , teremos:

$$\lambda_1 \left(X^2 + \frac{GX}{\lambda_1} \right) + HY + IZ + j = 0 \implies$$

$$\lambda_1 \left(X + \frac{G}{2\lambda_1} \right)^2 = \frac{G^2}{4\lambda_1} - (HY + IZ + j) \implies$$

$$\lambda_1 \left(X + \frac{G}{2\lambda_1} \right)^2 = -HY - IZ + \frac{G^2}{4\lambda_1} - j$$

Daí, se fizermos: $x = X + \frac{G}{2\lambda_1}$, $by = -HY$, $cz = -IZ$, $d = \frac{G^2}{4\lambda_1} - j$, A equação reduzir-se-á à: $\lambda_1 x^2 = by + cz + d$ com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$.

4.2.10 Cilindro Parabólico

Uma superfície \mathcal{C}_p , dada por uma equação $\lambda_1 x^2 = by + cz + d$ com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$, associada a um sistema ortogonal cartesiano, é um **Cilindro Parabólico** quando, pelo menos um dos coeficientes b e c for diferente de zero.

Exemplo: $2x^2 = z$

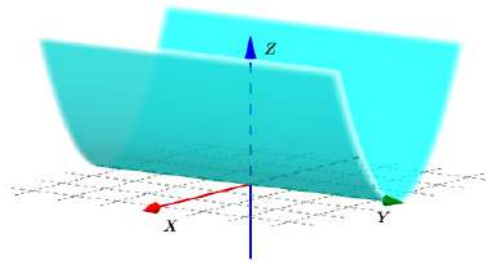


Figura 57 – Cilindro Parabólico

4.2.11 Degenerações das Quádricas

A equação da forma $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = P$, associada a um sistema ortogonal cartesiano, apresenta degenerações de acordo com as seguintes combinações:

1. Os sinais dos três λ_i 's são diferentes do sinal de P . Isso gera o conjunto vazio.

Exemplo: $4x^2 + 2y^2 + 3z^2 = -2$

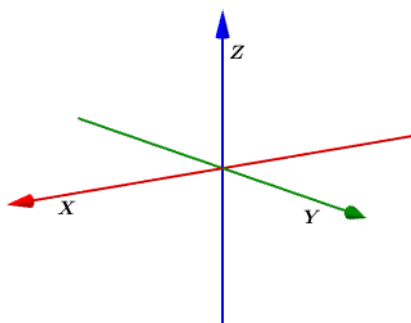


Figura 58 – Conjunto vazio

2. Os sinais dos λ_i 's são iguais entre si e $P = 0$. Isso gera apenas um ponto no espaço.

Exemplo: $-x^2 - 3y^2 - 2z^2 = 0$

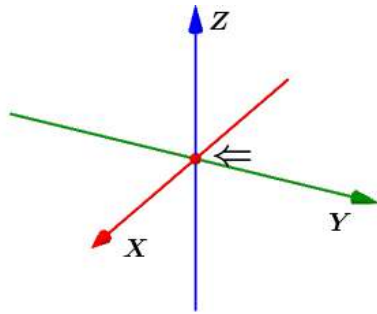


Figura 59 – Único ponto

3. Apenas dois dos λ_i 's são nulos e $P = 0$, gera um plano.

Exemplo: $3y^2 = 0$

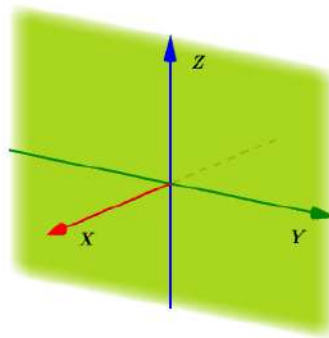


Figura 60 – Plano

4. Apenas dois dos λ_i 's são nulos e o terceiro λ_i tem o mesmo sinal de P . Isso gera um par de planos paralelos.

Exemplo: $3x^2 = 4$

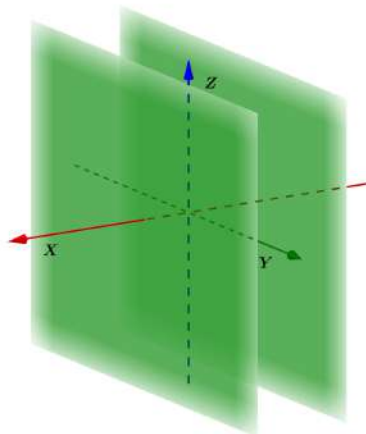


Figura 61 – Par de planos

5. Apenas um dos λ_i 's é nulo, os dois λ_i 's restantes possuem sinais iguais e $P = 0$, gera uma reta r passando pela origem.

Exemplo: $\frac{x^2}{3} + \frac{2y^2}{5} = 0$

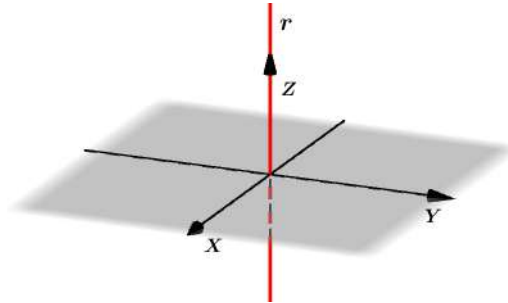


Figura 62 – Reta pela origem

6. Apenas um dos λ_i 's é nulo e os dois λ_i 's restantes possuem sinais contrários ao sinal de P . Isso gera novamente um conjunto vazio.

Exemplo: $5x^2 + 3y^2 = -2$

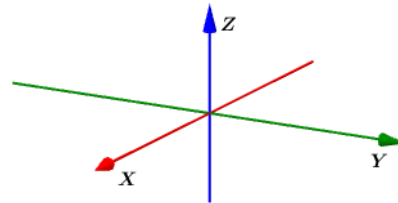


Figura 63 – Conjunto vazio

7. Apenas um dos λ_i 's é nulo, os dois λ_i 's restantes possuem sinais opostos e $P = 0$. Isso gera um par de planos concorrentes. Exemplo: $x^2 - 3y^2 = 0$

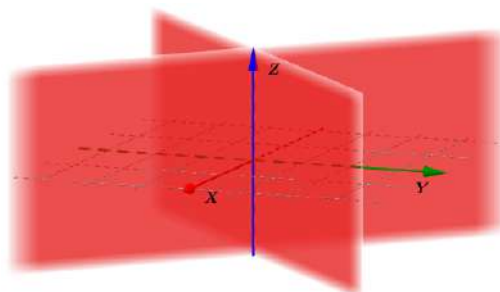


Figura 64 – Planos concorrentes

5 Aplicações teórico-práticas de Cônicas e Quádricas

É sabido por todos e citado em diversos trabalhos acadêmicos, a importância destes conteúdos na engenharia, arquitetura, design, medicina, etc. Sendo assim, dentre as inúmeras aplicações no nosso dia a dia, destacaremos neste capítulo, apenas a título de ilustração, algumas delas que, em sua maioria faz uso principalmente da propriedade refletora das cônicas e conseqüentemente das quádricas.

5.1 Refletores Odontológicos

Os refletores odontológicos são um grande exemplo de aparelhos que fazem uso de uma propriedade intrínseca às cônicas e quádricas, a refletora. Com a finalidade de facilitar o trabalho de profissionais da área odontológica, por exemplo, foram desenvolvidos esses equipamentos, os refletores odontológicos que possuem, em sua maioria, o formato elíptico e têm o poder de concentrar os raios luminosos em um ponto específico da cavidade bucal. Tal propriedade recebe um reforço de facilidade pelos pontos de articulação do próprio refletor, pois é possível proporcionar conforto ao paciente uma vez que o ajuste de iluminação é feito pela movimentação dos braços articulados. Conseguem-se, assim, duas vantagens: A primeira é concentrar o máximo de luz onde se está trabalhando, e a segunda, evitar que os raios luminosos ofusquem o paciente, o que aumentaria o desconforto causado pelo tratamento.

Diferentemente dos holofotes comuns, como os faróis de carro, que refletem os raios luminosos em uma mesma direção (valendo-se, para isso, de um espelho parabólico), os holofotes dentários se valem de espelhos elípticos para concentrar os raios luminosos emitidos pela lâmpada em um determinado ponto, o foco.



Figura 65 – Refletor

Fonte: Nova Kavo AQIA.2019

A elipse, e por consequência, o elipsoide, possuem esta notável propriedade denominada *Propriedade Refletora da Elipse* que possibilita diversas aplicações e é comumente utilizada nas engenharias, arquitetura, design gráfico, etc.

Propriedade refletora da elipse: Todo raio emitido de um dos focos de uma elipse numa superfície refletora que atinge um ponto P qualquer desta, reflete de modo a atingir o outro foco da elipse.

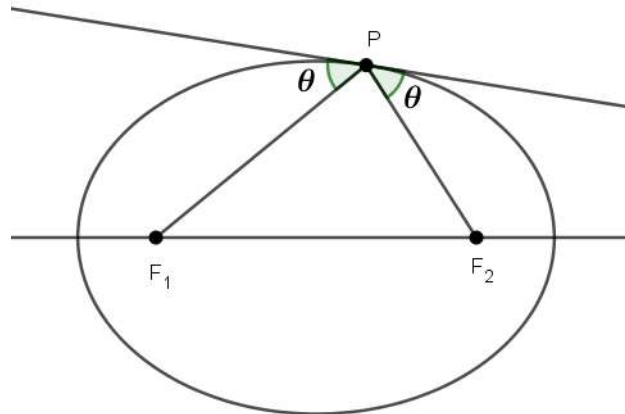


Figura 66 – Reflexão na elipse

5.2 Telescópios

Galileu Galilei (1564-1642), para ampliar seus conhecimentos através de observações astronômicas, construiu um telescópio que funcionava à base de refração dos raios de luz incidentes num espelho. Tal invenção é datada do ano de 1609 e resultou em notáveis proezas como por exemplo, a capacidade de observar montanhas e acidentes geográficos na superfície lunar; observou também que Vênus passa por fases como a Lua; notou que Saturno tem um formato alongado e ainda, que Júpiter possui satélites girando em sua órbita. Com isso, em pouco tempo Galileu revolucionou a Astronomia.

Mas, como nem tudo são flores, os telescópios criados por Galileu apresentavam um grande inconveniente, a deformação das imagens produzidas por suas lentes que atuavam como prismas, decompondo a luz branca em várias cores produzindo assim, um tipo de efeito visual indesejável, chamado aberração cromática. Esse e mais alguns problemas como falta de nitidez dos telescópios refratores foram corrigidos e praticamente não existem nos telescópios refletores.

O telescópio refletor é tão somente, um equipamento que usa um espelho parabólico no fundo de um tubo cilíndrico onde os raios provenientes de um corpo celeste distante (estrela, galáxia, planeta, etc.), formam um feixe "praticamente paralelo", que se reflete no espelho e forma a imagem do objeto no foco F , graças à propriedade refletora da parábola.

Propriedade refletora da Parábola: Se um espelho de formato parabólico for atingido por um raio de luz que incide paralelamente ao eixo de simetria da parábola, este será refletido na direção do foco dessa parábola.

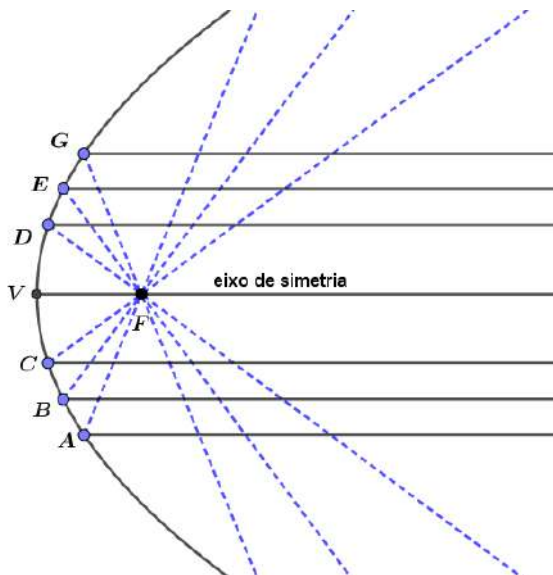


Figura 67 – Reflexão da Parábola

O problema agora é que, para observar essa imagem, o observador teria de estar com seu olho posicionado no foco da parábola, mas isso é impossível na prática.

Isaac Newton (1642-1727) resolveu esse problema colocando um espelho plano E entre o espelho parabólico e o foco F . Com isso, os raios que formariam a imagem em F são novamente refletidos para um ponto fora do tubo do telescópio, onde se posiciona o observador.

O Telescópio de Cassegrain

Em 1672 o astrônomo francês Laurent Giovanni Cassegrain propôs a utilização de um espelho hiperbólico ao invés do espelho plano proposto por Isaac Newton. Na verdade, Cassegrain combinou um espelho primário parabólico e um secundário hiperbólico, ambos alinhados simetricamente no eixo axial. No espelho primário, existe um furo no centro que permite a passagem das ondas eletromagnéticas para a lente ocular do telescópio.

A hipérbole, já mencionada nesse trabalho, é uma curva com dois ramos e dois focos. A sua propriedade refletora se assemelha a da elipse também já citada. Vejamos:

Propriedade refletora da Hipérbole: Se um raio de luz proveniente de um ponto A , incide sobre um ponto P de um espelho hiperbólico na direção de seu foco, este sofrerá uma reflexão em P de modo a se dirigir ao outro foco da hipérbole correspondente.

Basicamente, o princípio de reflexão adotado neste dispositivo funciona com os

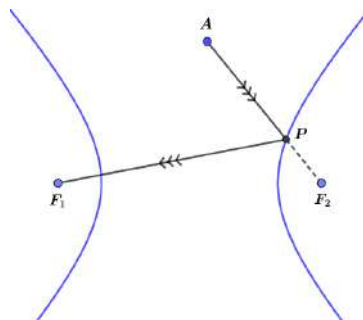


Figura 68 – Reflexão da Hipérbole

dois espelhos dispostos de forma tal que os eixos da parábola e da hipérbole coincidam assim como o foco da primeira cônica coincida com um dos focos da segunda. Os raios de luz ao refletirem no espelho parabólico, são dirigidos para o seu foco. Como este foco, também é foco da hipérbole, pela propriedade de reflexão desta, os raios de luz refletem-se no espelho hiperbólico e seguem na direção do outro foco da hipérbole. A partir daí, os raios de luz seguem através de um orifício no centro do espelho parabólico, atrás do qual está uma lente ocular que é capaz de corrigir a trajetória da luz para finalmente, chegar aos olhos do observador.

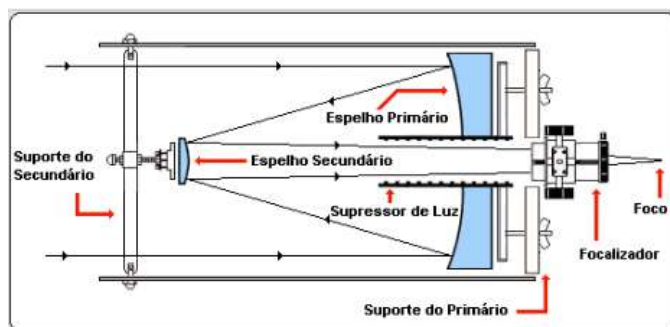


Figura 69 – O Telescópio de Cassegrain

Fonte:

<http://www.cacep.com.br/wp-content/uploads/2016/09/esquema-refletor-cassegrain.gif>
(consultado em agosto 2018)

As vantagens do espelho hiperbólico no telescópio de Cassegrain sobre o espelho plano no de Newton, estão relacionadas à posição relativa dos espelhos secundários. No de Newton, o espelho plano não pode ficar muito próximo do foco F . Já no de Cassegrain, o espelho secundário pode ser colocado com distância que permite maior curso de afastamento ou aproximação do foco F da parábola. Vale lembrar que, para manter fixa a distância FF' entre os focos da hipérbole, devemos em consequência, dispor de espelhos secundários com tamanhos diferentes e ainda, a distância entre os focos F e F' também pode ser alterada para mais ou para menos, e para isso, basta usar um espelho com maior ou menor excentricidade. A combinação desses fatores permite grande flexibilidade na montagem do refletor hiperbólico adequando o ajuste às necessidades ou exigências das observações.

Estações espaciais e de observações meteorológicas utilizam o princípio de Cassegrain em seus enormes telescópios para acompanhar trajetórias de corpos celestes e fenômenos climáticos que incidem sobre a atmosfera terrestre.



Figura 70 – Estrutura de Estação Espacial

Fonte: <https://www.google.com/search?q=esta> (acesso em agosto 2018)

5.3 Antenas Parabólicas

Ao olharmos para o topo de casas e edifícios é comum vermos as chamadas antenas parabólicas, que são unidades refletoras utilizadas para a captação de sinais de rádio e/ou televisão. Em centros espaciais e observatórios meteorológicos são indispensáveis. Elas são capazes de captar ondas eletromagnéticas enviadas por satélites em órbita ao redor da terra. Essa capacidade advém da propriedade refletora característica das parábolas e já enunciada anteriormente. No entanto, vale salientar que nesses dispositivos, as parábolas que formam as secções meridianas são capazes de refletir, para um único ponto, o foco F , todos os raios que incidem sobre o equipamento e são paralelos ao eixo de simetria. É conveniente que se coloque um receptor de ondas exatamente no foco, para que, ao receber o sinal de todas as reflexões possíveis, seja capaz de enviá-lo para um decodificador e a partir daí, imagem e som sejam reproduzidos pelo aparelho de TV.

Naturalmente chamamos qualquer uma das antenas que avistamos no alto de casas e edifícios de parabólicas porém, algumas delas não tem de fato o formato parabólico e sim, esférico. Pode-se dizer que uma antena é parabólica se a sua forma geométrica é derivada da forma de um parabolóide de revolução. Já as antenas esféricas têm a forma derivada de um esferoide de revolução. Esse tipo de antena tem o diferencial de possuir múltiplos pontos para onde convergem os sinais captados e refletidos por sua superfície. Na verdade, é praticamente impossível distinguir visualmente se a antena é parabólica ou

esférica. Por isso, é natural que todas sejam chamadas de parabólicas, sendo essa uma convenção que lhe caiu muito bem.



Figura 71 – Antena Parabólica

Fonte: <https://br.vazlon.com/static/pics/2013/12/28/Antena-Parablica-4-Receptores-de-Satlite-Analgico-20131228123913.jpg> (acesso em agosto 2018)

Existem diferentes formas de se construir antenas parabólicas. Por exemplo, para um mesmo diâmetro, podemos ter antenas mais ou menos profundas e para tanto, basta que na construção mudemos a localização do foco ou da reta diretriz. Outro detalhe, embora sua principal função não seja de refletir a luz, as antenas parabólicas podem ser consideradas espelhos pois, elas refletem ou canalizam ondas de radiofrequência para um único ponto e, para realizar esta tarefa, não precisamos necessariamente que a superfície seja espelhada. Lembramos ainda que a direção dessas ondas podem ser alteradas pelo simples choque com a superfície do dispositivo mesmo que tenha muitos furos como aquelas feitas com telas vazadas.

Então, de maneira simplificada, as antenas parabólicas nada mais são do que um dispositivo que deriva de um parabolóide de revolução e usufrui principalmente da propriedade refletora das parábolas para captar e refletir ondas eletromagnéticas que são enviadas por satélites posicionados ao redor da terra.

6 Atividades de Aula

Neste capítulo sugerimos algumas atividades que podem facilmente ser trabalhadas em sala de aula e objetivam introduzir as cônicas e as quádras de forma mais intuitiva. No nosso caso, uma experiência diferente das comumente utilizadas foi coroada com o despertar de uma vontade de estudar e aprender conteúdos que outrora eram apenas vistos para "cumprir tabela". As curvas cônicas e as superfícies quádras bem como suas propriedades, foram alvo de pesquisa e desenvolvimento de material manipulável para facilitar suas abordagens.

6.1 Métodos para encontrar os pontos de uma cônica

Atividade 1: Construir, com o auxílio do *Geogebra*, cada uma das principais Curvas Cônicas e justificar a construção a partir de conceitos geométricos já conhecidos.

6.1.1 Parábola

Protocolo de construção:

1. Trace uma reta d e um ponto F fora dela;
2. Trace pelo ponto F , uma reta r perpendicular a d definindo em d , o ponto A ;
3. Encontre V , com a ferramenta "ponto médio" do segmento AF ;
4. Na semi-reta VF , marque aleatoriamente, os pontos $R, S, T, U...$ e trace por eles, retas paralelas a d ;
5. Com a ferramenta "compasso" e abertura igual, respectivamente, aos segmentos VA, RA, FA, SA, TA, UA , a partir do ponto F , marque os pontos $B, C, D, E, G, H, I, J, K, L$ em suas respectivas retas-suporte;
6. Agora, com a ferramenta "parábola", escolha o ponto F como foco e a reta d como diretriz. A cônica traçada passará obrigatoriamente pelos pontos $B, C, D, E, G, H, I, J, K, L$.

Justificativa:

Tome qualquer dos pontos $B, C, D, E, G, H, I, J, K, L$ que foram encontrados de maneira similar. Seja L esse ponto. Queremos mostrar que $d(F, L) = d(L, d)$.

De fato, ao traçarmos por L uma perpendicular à reta d , definimos um ponto M tal que, $d(L, M) = d(U, A)$ (segmentos paralelos com extremidades nas mesmas retas paralelas)

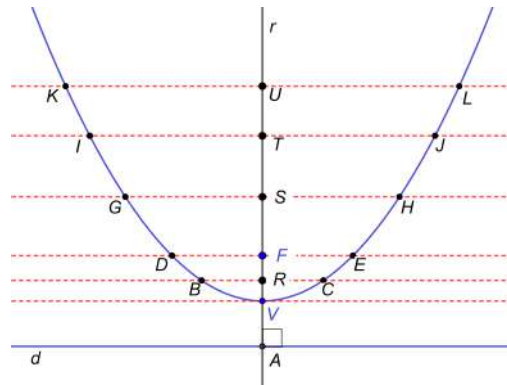


Figura 72 – Construção da Parábola

e, por construção, $d(U, A) = d(F, L)$. Logo, por transitividade, $d(F, L) = d(L, M) = d(L, d)$.

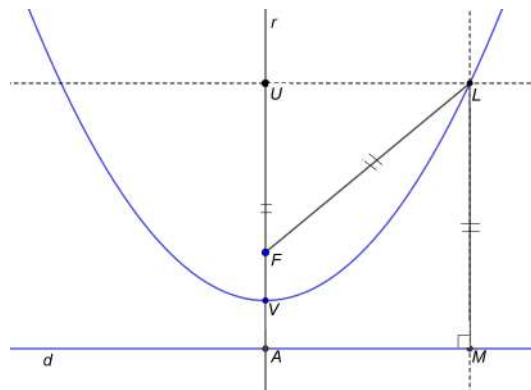


Figura 73 – Justificativa

6.1.2 Hipérbole

Protocolo de construção:

1. Marque quatro pontos distintos e colineares: F_1 , F_2 , e entre eles, A_1 e A_2 , de modo que $d(F_1, A_1) = d(F_2, A_2)$;
2. Com a ferramenta "compasso", a partir de F_2 (por exemplo), trace a circunferência de raio igual a $d(A_1, A_2)$;
3. Marque aleatoriamente na circunferência, alguns pontos. Por exemplo, $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ (podem ser mais pontos);
4. Trace a reta F_2A e a mediatriz m do segmento F_1A determinando o ponto J com a ferramenta "intersecção entre dois objetos";

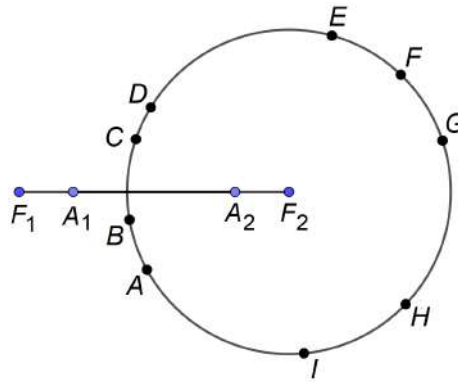


Figura 74 – Construção Hipérbole: 1,2 e 3

5. Selecione as retas F_2A e m , clique na ferramenta "exibir objeto" para esconder nesse caso;
6. Repita os dois passos anteriores para os pontos B, C, D, E, F, G, H, I encontrando os pontos K, L, M, N, O, P, Q ;
7. Agora, com a ferramenta "hipérbole", escolha três pontos: F_1 e F_2 (como focos) e qualquer um dos pontos K, L, M, N, O, P, Q ;

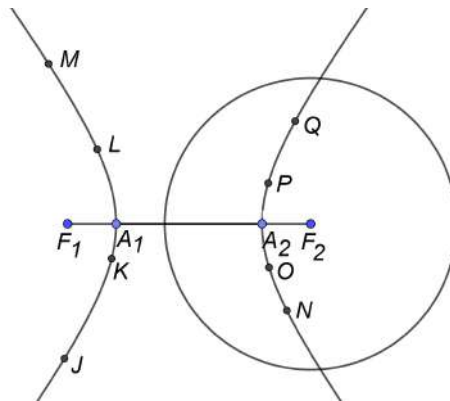


Figura 75 – Construção Hipérbole: 4,5,6 e 7

A curva encontrada é uma hipérbole que passa por todos os pontos $K, L, M, N, O, P, Q, \dots$

Justificativa:

Tome qualquer dos pontos J, K, L, M, N, O, P, Q que foram encontrados de maneira similar. Seja J esse ponto. Queremos mostrar que J é um ponto da hipérbole que tem focos F_1 e F_2 e eixo real A_1A_2 . Para isso, basta verificar a definição em que devemos ter $|d(F_2, J) - d(F_1, J)| = d(A_1, A_2)$.

De fato, ao traçarmos o segmento F_1J , destacamos dois triângulos F_1JR e AJR que são congruentes pelo caso L.A.L pois, o lado JR é comum, o ângulo em R é

reto (pé da mediatriz do segmento F_1A) e, $F_1R \equiv RA$ (R é ponto médio do segmento F_1A). Assim, como o raio da circunferência tem medida igual ao segmento A_1A_2 , temos: $d(A_1, A_2) = d(F_2, A) = d(F_2, J) - d(A, J) = (F_2, J) - d(F_1, J)$. Isso justifica nossa construção e assegura que J é ponto da hipérbole assim como os outros que, de modo análogo, poderiam passar pelo mesmo processo de justificação.

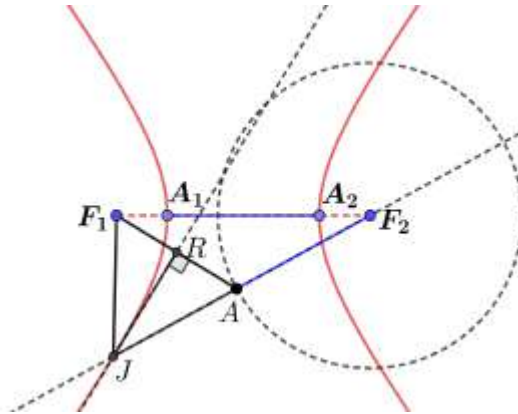


Figura 76 – Justificativa

6.1.3 Elipse

Protocolo de construção:

1. Marque quatro pontos distintos e colineares: A_1 , A_2 , e entre eles, F_1 e F_2 , de modo que $d(F_1, A_1) = d(F_2, A_2)$;
2. Com a ferramenta "compasso", a partir de F_2 , trace a circunferência de raio igual $d(A_1, A_2)$;
3. Marque aleatoriamente na circunferência, alguns pontos. Por exemplo, $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ (podem ser mais pontos);
4. Trace a reta F_2A e a mediatriz do segmento F_1A que se encontram num ponto J obtido com a ferramenta "intersecção entre dois objetos" selecionando as retas citadas;
5. Para não sobrecarregar a figura, selecione as retas F_2A e a mediatriz F_1A , clique na ferramenta "exibir objeto" para esconder nesse caso;
6. Repita os dois passos anteriores, porém no lugar do ponto A , use os demais pontos B, C, D, E, F, G, H, I encontrando os pontos K, L, M, N, O, P, Q ;
7. Agora, com a ferramenta "elipse", escolha três pontos: F_1 e F_2 (como focos) e qualquer um dos pontos J, K, L, M, N, O, P, Q .

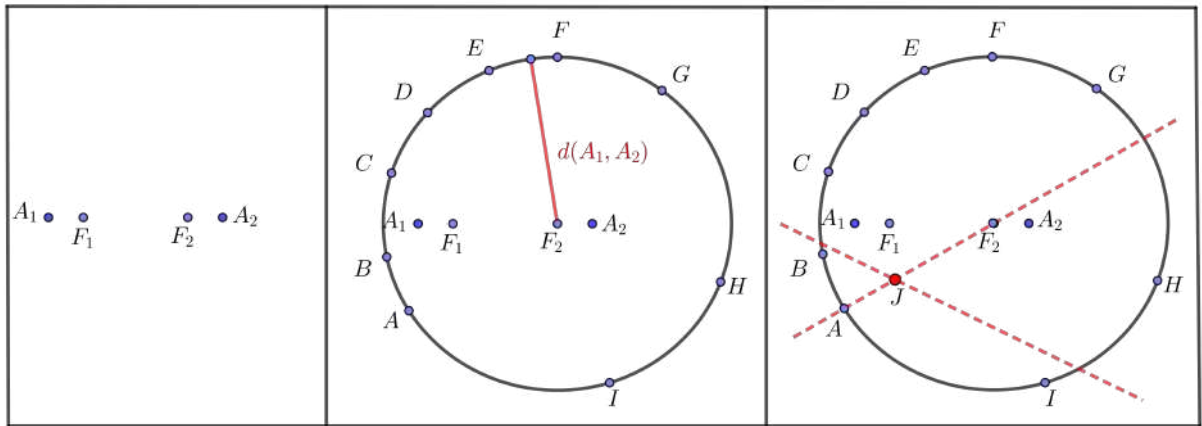


Figura 77 – Construção itens 1,2,3 e 4

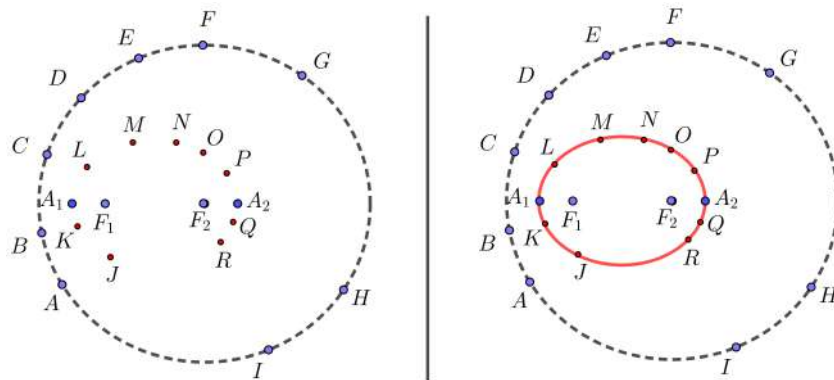


Figura 78 – Passos 5,6 e 7

A curva encontrada é uma elipse que passa por todos os pontos $J, K, L, M, N, O, P, Q, \dots$

Justificativa:

Tome qualquer dos pontos J, K, L, M, N, O, P, Q que foram encontrados de maneira similar. Seja R esse ponto. De acordo com a definição, para mostrar que R é um ponto da elipse de focos F_1 e F_2 e eixo maior A_1A_2 , basta verificar se $d(F_2, R) + d(F_1, R) = d(A_1, A_2)$.

De fato:

Por construção, $d(A_1, A_2) = d(F_2, I) = d(F_2, R) + d(R, I)$; Por outro lado, os triângulos RSF_1 e RSI são congruentes pelo caso L.A.L uma vez que o ponto S (pé da mediatriz) é médio de F_1I , fazendo com que $F_1S \cong SI$ e por fim, RS é comum. Deste modo, $d(F_1, R) = d(R, I)$ que, substituindo na primeira equação teremos:

$d(A_1, A_2) = d(F_2, I) = d(F_2, R) + d(R, I) = d(F_2, R) + d(F_1, R)$ Isso justifica nossa construção e assegura que R é ponto da elipse de focos F_1 e F_2 e eixo maior A_1A_2 .

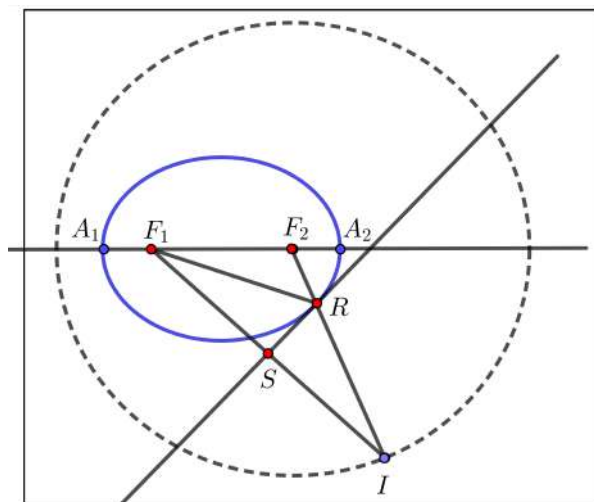


Figura 79 – Justificativa

6.2 Animação Geométrica das Cônicas

Nesta secção, detalhamos alguns protocolos de construção e os elementos aparecem com nomenclaturas que podem não coincidir com a sequência dada pelo *software*. Sendo assim, sugerimos que renomeiem os objetos para coincidir com o exemplo das construções abaixo.

Atividade 2: Utilizar os recursos do *Geogebra* para mostrar a trajetória de um ponto P qualquer sobre as principais cônicas. Em seguida, pausar a animação e verificar as expressões que definem cada cônica geometricamente.

6.2.1 Animação de um ponto sobre uma elipse

Protocolo de construção:

1. Na janela de visualização 2D, marque três pontos, F_1 , F_2 e C de modo que $d(C, F_1) + d(C, F_2) > d(F_1, F_2)$;
2. Com a ferramenta "elipse", selecione os três pontos: F_1 , F_2 como focos e C como ponto da elipse;
3. Trace a reta F_1F_2 e encontre os pontos A_1 e A_2 , com a ferramenta "intersecção de dois objetos"(reta F_1F_2 e a elipse);
4. Marque um ponto P sobre a elipse (ferramenta "ponto em objeto") e construa os segmentos $f = PF_1$ e $g = PF_2$;
5. Insira duas caixas de texto acima da figura: a primeira deve mostrar a medida do segmento A_1, A_2 e a segunda, a soma das medidas $f + g$ dada por $d(P, F_1) + d(P, F_2)$;

6. Selecione o ponto P com o botão direito do mouse e clique em "animar" (se ativar o rastro do ponto P , o efeito visual é melhor).

A partir daí, basta observar que a soma dos segmentos f e g permanece constante e igual a $d(A_1, A_2)$ para todo ponto P da elipse.

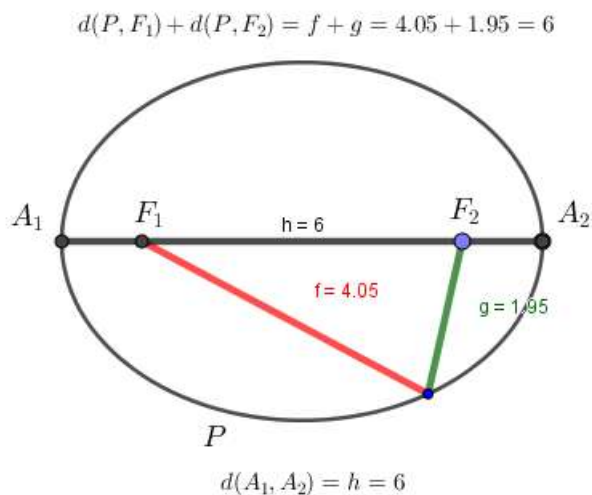


Figura 80 – Imagem animação 1

6.2.2 Animação de um ponto sobre uma Parábola

1. Na janela de visualização $2D$, trace uma reta d e marque um ponto F fora dela. (nesse caso, d paralela ao eixo OX dada por $y = -2$) e $F = (0, 2)$, por exemplo;
2. Crie um controle deslizante numérico "**a**" variando de -6 até 6 ;
3. Usando a caixa de entrada de funções do *geogebra*, crie um ponto $A = (a, -2)$ que aparecerá na reta d e poderá se deslocar sobre ela segundo os valores do controle deslizante "**a**";
4. Trace a mediatriz **j** do segmento PF e uma reta k perpendicular a d passando pelo ponto A ;
5. Com a ferramenta "**intersecção de dois objetos**", determine o ponto P , intersecção da mediatriz **j** com a reta **k**;
6. Para verificar a definição, crie os segmentos $l = PF$ e $m = PA$ e, em **exibir rótulo**, marque a opção **nome e valor**;
7. Finalmente, com o botão direito sobre o controle deslizante, marque "**animar**" e perceba que o ponto P desenhará uma parábola no intervalo $[-6, 6]$ e obviamente os segmentos l e m permanecerão com a mesma medida para qualquer posição de P sobre a curva.

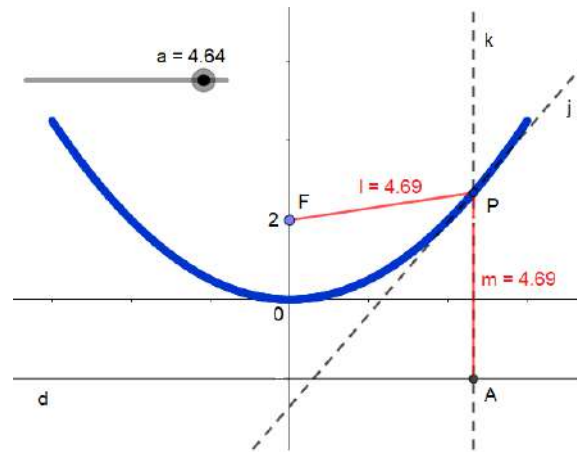


Figura 81 – Imagem animação 2

6.2.3 Animação de um ponto sobre uma hipérbole

1. Marque sobre o eixo OX , quatro pontos distintos: F_1 e F_2 e entre eles A_1 , A_2 de modo que $d(A_1, F_1) = d(A_2, F_2)$;
2. Com a ferramenta “compasso”, clique sobre os pontos A_1 e A_2 e, a partir do ponto F_2 trace a circunferência de raio A_1A_2 ;
3. Marque o ponto A sobre a circunferência usando a ferramenta “ponto em objeto”;
4. Trace as retas $s = F_2A$ e a “mediatriz” m do segmento F_1A e, com a ferramenta “intersecção de dois objetos”, determine o ponto P (entre “ s ” e “ m ”);
5. Botão direito do mouse sobre o ponto P marque a opção “habilitar rastro”; Botão direito agora sobre o ponto A , marque a opção “animar”. Pronto, o ponto P desenhará a hipérbole de focos F_1 e F_2 e eixo real de comprimento A_1A_2 , ou seja, todo ponto P da curva é tal que, $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = d(A_1, A_2)$.

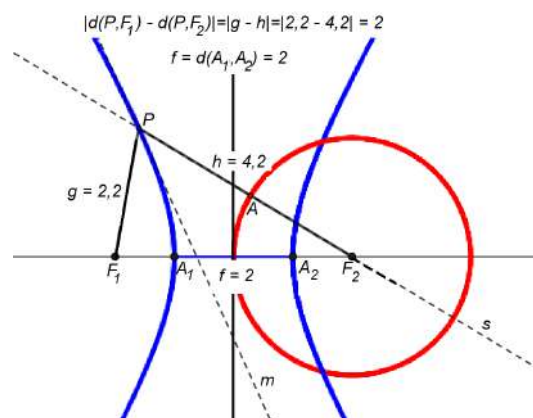


Figura 82 – Imagem animação 2

6.3 Animação Geométrica das Quádricas

Para esta secção destacamos mais uma vez a possibilidade de renomear os elementos para que coincidam com o protocolo sugerido em cada construção. Outra importante observação é que existem várias maneiras de se conseguir as superfícies desejadas e caberá, muitas vezes, a perspicácia e criatividade do leitor achar o caminho que melhor lhe convier.

Atividade 3: Utilizar os recursos do *geogebra* para construir as principais superfícies quádricas a partir da rotação das curvas cônicas ou de funções dadas em determinados domínios reais.

6.3.1 Parabolóide de Revolução

Ex: Vamos construir um parabolóide de revolução a partir da rotação do gráfico da função $f(x) = x^2$, com $0 \leq x \leq 4$ em torno do eixo OY .

Protocolo de Construção:

1. Clique para exibir as janelas de visualização e 3D, em seguida crie um controle deslizante α e marque a opção "ângulo";
2. Na barra de entrada, digite a função $f : y = x^2$ e, logo após, na "janela de álgebra", clique para "esconder esse objeto";
3. Novamente na barra de entrada, tecle $Função(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)$ e, nos locais indicados entre vírgulas, substitua por $(f, 0, 4)$ criando assim, uma função $g(x)$ ("**braço de parábola**") no intervalo $[0, 4]$;

Neste momento, depois de desabilitar o eixo OZ e rotacionar na janela 3D, estaremos diante da seguinte figura.

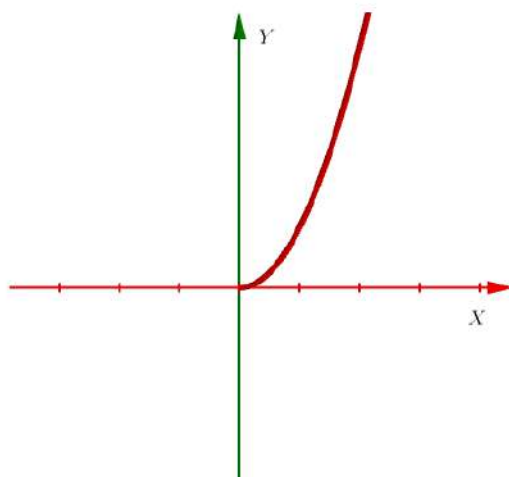


Figura 83 – Função g

4. Com o botão direito do mouse sobre a função g , marque a opção "habilitar rastro";
5. Com a ferramenta "girar em torno de uma reta", clique sobre a função g e sobre o eixo OY e, na caixa de diálogo, substitua o ângulo por α ;
6. Finalmente, botão direito sobre o "controle deslizante", marque a opção "animar". Pronto, depois que α percorrer seu intervalo, teremos um parabolóide de revolução.

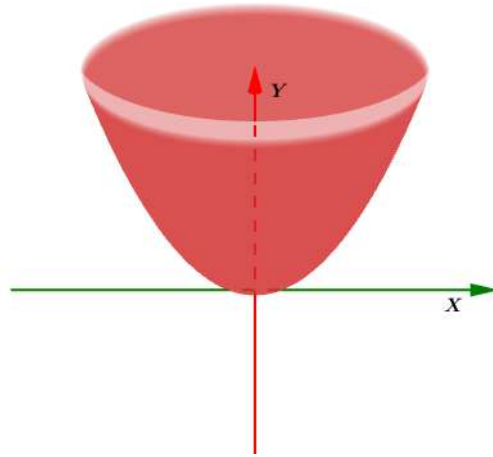


Figura 84 – Parabolóide de Revolução

6.3.2 Cone de Revolução

Ex: Vamos construir um cone de revolução a partir da rotação do gráfico da função $f : x = 2y$, com $-3 \leq x \leq 3$ em torno do eixo OX .

Protocolo de Construção:

1. Clique para abrir as janelas de visualização e 3D e, na "barra de entrada", crie a reta $r : x = 2y$;
2. Crie, na janela de visualização, um "controle deslizante" α para ângulo variando de 0° a 360° ;
3. Na barra de entrada, teclie $Função(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)$ e, nos locais indicados entre vírgulas, substitua por $(f, -3, 3)$ criando assim, uma função g ;
4. Botão direito sobre a reta r , marque a opção "exibir objeto" para esconder (neste caso);
5. Botão direito sobre o segmento g , marque "habilitar rastro" e, com a ferramenta "girar em torno de uma reta", clique novamente sobre o segmento g e sobre o eixo OX substituindo o ângulo da caixa de diálogo por α .

6. Botão direito sobre o controle deslizante α marque a opção "animar". Pronto, depois que o ângulo α percorrer seu intervalo, teremos um cone de revolução de duas folhas

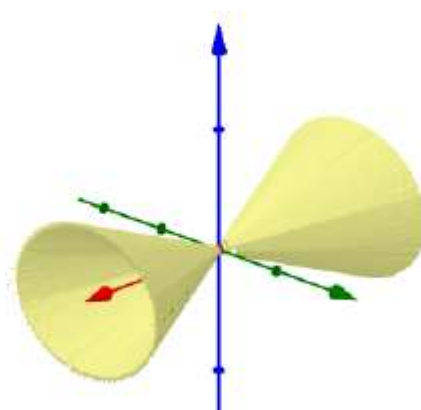


Figura 85 – Cone de Revolução

6.3.3 Elipsoide de Revolução

Ex: Para fugir um pouco do tradicional, vamos construir um elipsoide de revolução a partir da rotação completa de uma elipse cujos focos F_1 e F_2 pertencem à bissetriz r dos quadrantes ímpares do sistema cartesiano XOY em torno desta mesma reta.

Protocolo de Construção:

1. Abra as janelas de visualização e 3D. Crie um controle deslizante α para ângulo variando de 0° a 360° ;
2. Usando a barra de entrada, crie a reta r digitando $y = x$;
3. Com a ferramenta "elipse", marque três pontos sobre a reta r : F_1 , F_2 para serem os focos e P um ponto qualquer fora do segmento F_1F_2 ;
4. Botão direito sobre a elipse que aparece na janela 3D, clique em "habilitar rastro";
5. Com a ferramenta, "girar em torno de uma reta", clique sobre a elipse e a reta r da janela 3D e na caixa de diálogo troque o ângulo por α .
6. Botão direito sobre o controle deslizante, marque a opção "animar". Pronto, após o ângulo α percorrer seu intervalo, teremos o elipsoide de revolução rotacionado em torno da reta r .

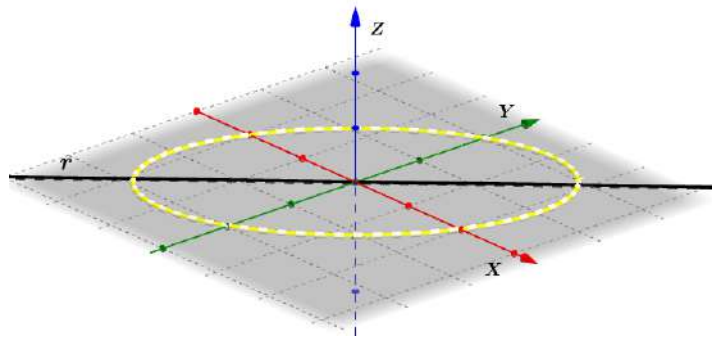


Figura 86 – Elipse Plano XOY

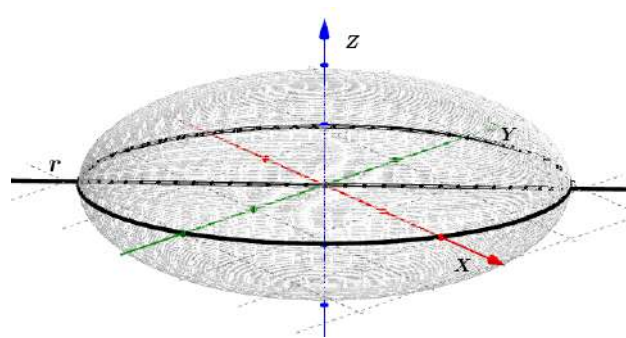


Figura 87 – Elipsoide de Revolução

6.3.4 Hiperboloide de uma folha de Revolução

Ex: Vamos determinar uma hipérbole cuja reta focal coincide com o eixo OX e a partir dela, por rotação completa em torno da mediatriz "m" do segmento A_1A_2 em que A_1 e A_2 são os vértices da hipérbole, conseguiremos um hiperboloide de uma folha de revolução.

Protocolo de Construção:

1. Abra as janelas de visualização e 3D. Crie um controle deslizante α para ângulo variando de 0° a 360° ;
2. Usando a barra de entrada, insira a equação $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{12} = 1$ (por exemplo) para obter uma hipérbole com eixo focal sobre o eixo OX ;
3. Determine os pontos A_1 e A_2 com a ferramenta "intersecção entre dois objetos" clicando sobre a hipérbole e sobre o eixo OX ;
4. Com a ferramenta "mediatriz", encontre a reta "m" clicando sobre os pontos A_1 e A_2 ;
5. Botão direito sobre a hipérbole da janela 3D, clique em "habilitar rastro";
6. Com a ferramenta, "girar em torno de uma reta", clique sobre a hipérbole e sobre a reta m da janela 3D e, na caixa de diálogo, troque o ângulo por α .

7. Finalmente, botão direito sobre o controle deslizante, marque a opção "animar". Pronto, após o ângulo α percorrer seu intervalo, teremos o hiperboloide de revolução de uma folha rotacionado em torno da reta m .

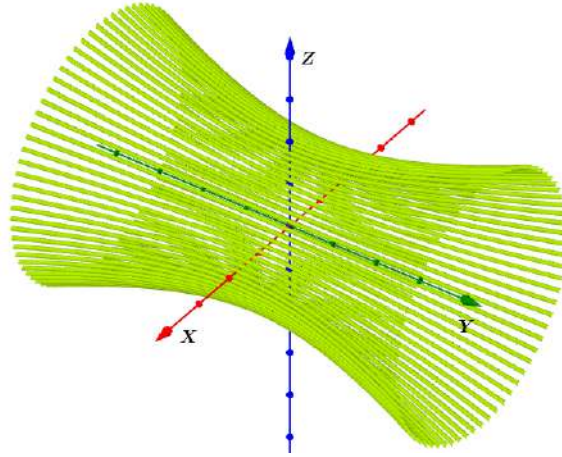


Figura 88 – Hiperboloide de uma folha de Revolução

6.3.5 Hiperboloide de duas folhas de Revolução

Ex: Construir um hiperboloide de revolução de duas folhas com a reta focal sobre a bissetriz dos quadrantes pares do plano XOY .

Protocolo de Construção:

1. Abra as janelas de visualização e $3D$ do Geogebra e crie, na janela de visualização, um controle deslizante para ângulo com intervalo de 0° a 360° ;
2. Use a barra de entrada e digite a equação de uma hipérbole. Por exemplo, $x^2 - 2y^2 = 1$;
3. Marque o ponto A na origem do sistema e, com a ferramenta "girar em torno de um ponto", faça a hipérbole girar 45° em torno dele no sentido horário;
Nesse momento, você terá duas hipérboles em que uma delas tem eixo focal sobre a bissetriz dos quadrantes pares do plano XOY . Oculte a outra para evitar poluição visual;
4. Use a barra de entrada para criar a reta $y = -x$ (bissetriz dos quadrantes pares deste plano);
5. Botão direito sobre a hipérbole da janela $3D$, habilite o rastro;
6. Com a ferramenta "girar em torno de uma reta", selecione a hipérbole e a bissetriz encontrada. Na caixa de diálogo, troque o ângulo por α . Pronto, após o ângulo α percorrer seu intervalo, teremos a seguinte figura que atende às exigências do exercício.

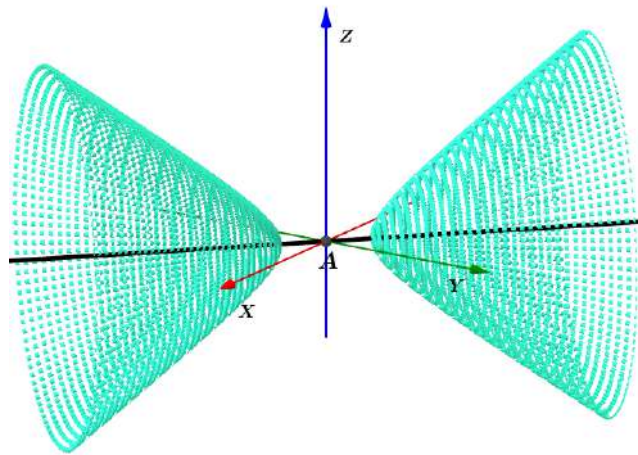


Figura 89 – Hiperboloide de duas folhas de Revolução

6.4 Cônicas com régua e compasso:

Nesta secção, destacamos os protocolos elaborados pelos alunos com o auxílio do professor para conseguir os esboços das principais cônicas utilizando materiais simples de desenho geométrico como régua, compasso, par de esquadros e canetas coloridas. Assim, o exercício consiste em utilizar estes instrumentos para conseguir alguns pontos de cada cônica, esboçar o seu gráfico e depois, justificar a pertinência dos pontos à sua respectiva curva.

A importância desta atividade se deu pelo fato de que, o manuseio de instrumentos que vem caindo em desuso frente à criação de novas tecnologias que, através de recursos computacionais os substituem com bem mais precisão terminou sendo "algo novo" que despertou o interesse dos alunos em construir algo "com as próprias mãos". Assim, para efeito de registro, deixamos nos anexos um resultado de cada cônica feita por três alunos participantes, seguindo os protocolos abaixo.

6.4.1 Esboço da Elipse:

Ex: Esboçar uma elipse com eixo maior medindo 12cm e distância focal 8cm encontrando pelo menos 12 pontos desta curva. Justifique sua construção.

Protocolo de construção:

1. Marcar sobre uma mesma reta suporte, os pontos A_1 e A_2 distantes 12cm , e entre eles, F_1 e F_2 distantes 8cm , de modo que $d(A_1, F_1) = d(A_2, F_2) = 2\text{cm}$;
2. Entre os pontos A_1 e A_2 marque os pontos P, Q e R;
3. Com abertura do compasso igual a $\overline{A_1P}$ e $\overline{A_2P}$, a partir de F_1 e F_2 , encontre os pontos A, B, C e D;

4. Com abertura do compasso igual a $\overline{A_1Q}$ e $\overline{A_2Q}$, a partir de F_1 e F_2 , encontre os pontos E, F, G e H;
5. Com abertura do compasso igual a $\overline{A_1R}$ e $\overline{A_2R}$, a partir de F_1 e F_2 , encontre os pontos I, J, K e L;
6. Esboce a elipse que passa por todos esses pontos.

6.4.2 Esboço da Hipérbole:

Ex: Esboçar o gráfico de uma hipérbole com eixo real medindo $6cm$ e distância focal $10cm$ encontrando pelo menos 12 pontos desta curva. Justifique sua construção.

Protocolo de construção:

1. Marcar sobre uma mesma reta suporte, os pontos F_1 e F_2 distantes $10cm$, e entre eles, A_1 e A_2 distantes $6cm$, de modo que $d(A_1, F_1) = d(A_2, F_2) = 2cm$;
2. À direita do ponto F_2 , marque os pontos P, Q e R (por exemplo);
3. Com abertura do compasso igual a $\overline{A_1P}$ e $\overline{A_2P}$, a partir de F_1 e F_2 , encontre os pontos A, B, C e D;
4. Com abertura do compasso igual a $\overline{A_1Q}$ e $\overline{A_2Q}$, a partir de F_1 e F_2 , encontre os pontos E, F, G e H;
5. Com abertura do compasso igual a $\overline{A_1R}$ e $\overline{A_2R}$, a partir de F_1 e F_2 , encontre os pontos I, J, K e L;
6. Esboce a hipérbole que passa por todos esses pontos.

6.4.3 Esboço da Parábola:

Ex: Esboce o gráfico de uma parábola cujo foco F encontra-se a $4cm$ de sua diretriz d.

Protocolo de construção:

1. Trace uma reta d e um ponto F, distante $4cm$ dela;
2. Usando o compasso, trace a perpendicular que passa em F e encontra d no ponto P;
3. Encontre V (vértice), ponto médio do segmento \overline{FP} ;
4. Usando o par de esquadros, trace retas paralelas a d sobre a semirreta \overrightarrow{VF} encontrando os pontos A, B, C, D, E e G, por exemplo;

5. Com abertura do compasso igual a \overline{AP} , a partir de F, marque os pontos A_1 e A_2 , na reta paralela que contém o ponto A;
6. Repita o processo para os demais pontos conseguindo assim, $B_1, B_2, C_1, C_2, \dots, G_1$ e G_2 .
7. Esboce a parábola que passa por todos esses pontos.

6.5 Dispositivos com material reciclável:

Aqui aparecerão três dispositivos elétricos desenvolvidos pelos alunos que, diante da possibilidade de manusear máquinas e equipamentos sob a orientação do professor e de um responsável técnico não hesitaram em pensar no projeto, aperfeiçoar as ideias e finalmente executar as tarefas para construí-los.

O pensamento dos alunos foi de criar modelos em madeira para cada uma das principais cônicas (elipse, hipérbole e parábola) e, através dos tais dispositivos, fazê-las rotacionar de modo a se obter um efeito visual em $3D$ das principais superfícies quádricas de revolução (elipsoide, hiperboloide e paraboloides).

O procedimento de construção e montagem é relativamente simples. Consiste em utilizar uma das técnicas de desenho das cônicas apresentadas no trabalho sobre as folhas de compensado. Depois disso, fazer os cortes para se obter as curvas e utilizar um pouco de criatividade e paciência para prender os demais elementos aos motores como aparecem nas figuras que seguem.

6.5.1 Materiais Utilizados

1. Três motores de "sucata" de exaustores domésticos;
2. Pedacos de folhas de compensado com espessura de $4mm$;
3. Seis astes ($50cm$ cada) de PVC cortadas das sobras de canos domésticos;
4. Barbante e arame para prender as astes de PVC aos cortes de madeira;
5. Serra tico-tico, poli-corte e furadeira para fabricação das peças;
6. Régua, compasso e caneta para desenhar as cônicas na folha de compensado;
7. Uma presilha do freio traseiro de moto e varão rosqueado de $3/8$ com 6 porcas e 6 arruelas;
8. Seis metros de fio ($2m$ para cada dispositivo) de espessura $2,5mm$

9. Três controladores de tensão elétrica *Dimmer* também conhecidos como potenciômetro, com capacidade de até 500watts.

6.5.2 Recomendações de manuseio

A primeira recomendação é de que, se o leitor não tiver a menor habilidade com máquinas e equipamentos elétricos, caso queira, contrate algum profissional de marcenaria e/ou eletricista para corte e preparação dos elementos que serão usados nos dispositivos se encarregando apenas do projeto e da montagem junto com os alunos. Fora isso, recomendamos também o uso de equipamentos de segurança como luvas, óculos de proteção, fita isolante de qualidade comprovada, calçados com isolamento elétrico bem como procedimentos cautelares de uso para minimizar riscos de acidentes na fabricação das peças.

Importante: Professores não incentivem seus alunos, principalmente os menores de idade a utilizarem qualquer dos equipamentos elétricos sem a presença de um responsável técnico capaz se supervisionar as ações de maneira segura e controlada.

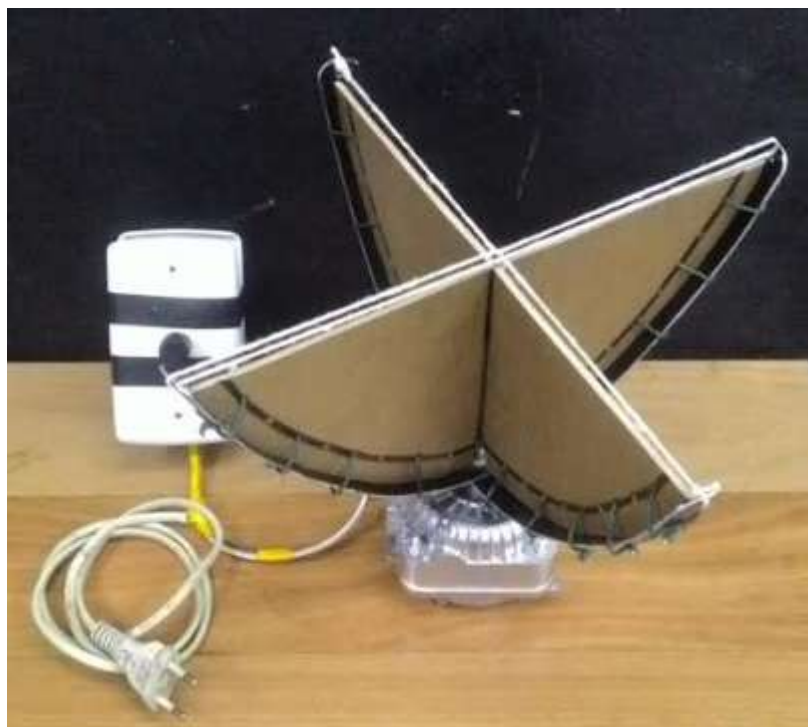


Figura 90 – dispositivo 1

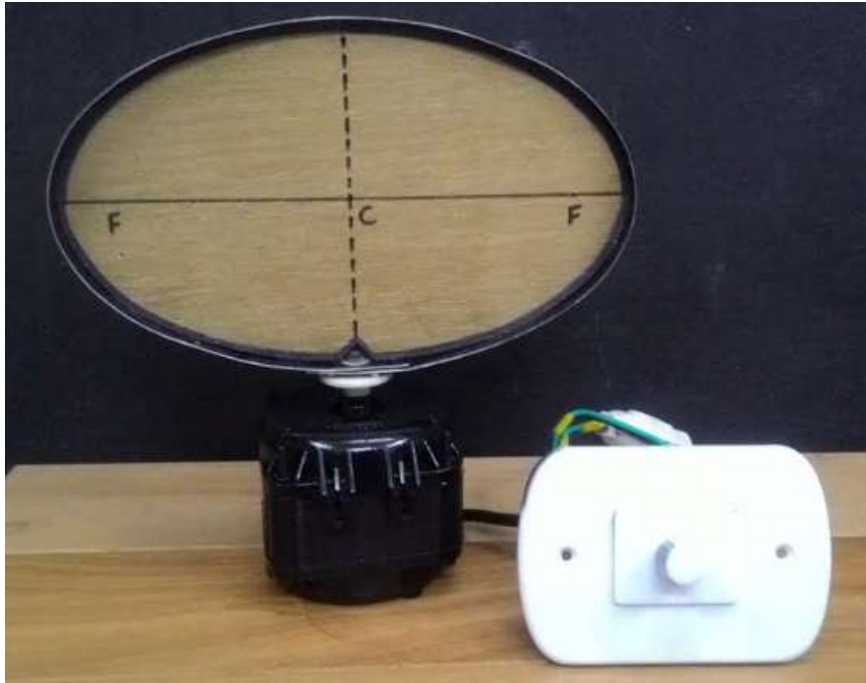


Figura 91 – dispositivo 2

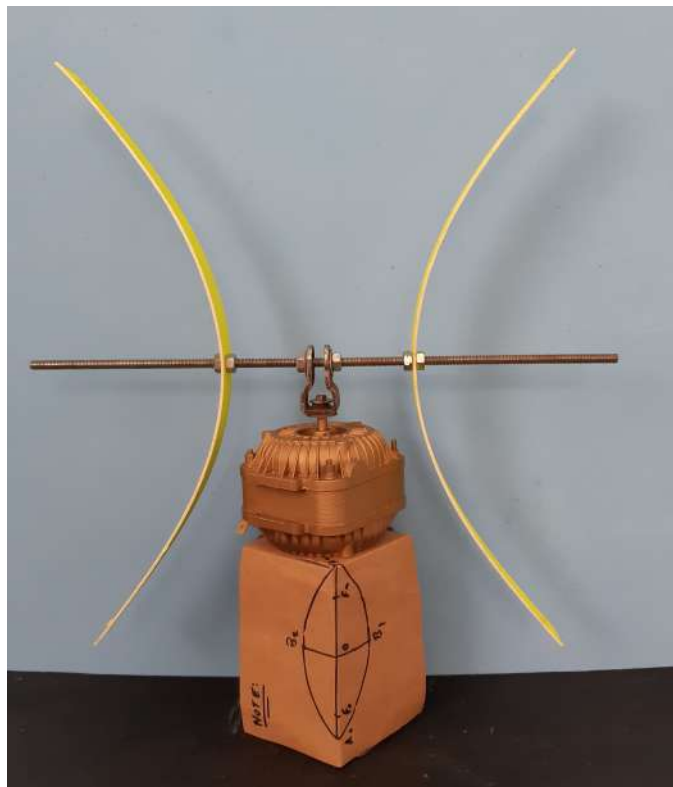


Figura 92 – dispositivo 3

7 Considerações Finais

Este trabalho de conclusão de curso nos proporcionou, sem dúvida, uma experiência ímpar. Sob depoimentos de satisfação e resultados positivos no desempenho das disciplinas regulares de matemática, os alunos participantes se envolveram profundamente com a proposta e se dedicaram a ponto de cumprir todas as atividades com louvor. Sendo assim, percebemos que, com um pouco de criatividade e disponibilidade na preparação das aulas e materiais a serem usados, podemos otimizar o tempo presencial e atingir, com mais eficácia, públicos que apresentam maior dificuldade no desenvolvimento da visão espacial e nos conceitos algébricos, elementos estes que permeiam um aprendizado mais consistente da Geometria e da Álgebra envolvidas. Deste modo, esperamos que os registros aqui feitos, sirvam como material de apoio e consulta para colegas que ministrem aulas em turmas de ensino médio e cursos técnicos em áreas afins, bem como para todos os leitores interessados no tema e dispostos a pensarem e contribuírem para a inovação de práticas de ensino que busquem de maneira incansável a excelência na educação.

Por outro lado, sugerimos também que se repensem as formas de abordagem e reflitam sobre a importância de se trabalhar conteúdos significativos, aqueles que facilmente podem ser observados e aplicados em nosso dia a dia. Sendo assim, fica um apelo à conscientização e bom senso para aqueles "responsáveis pela escolha" e mapeamento dos conteúdos programáticos a serem trabalhados no ensino básico, técnico e tecnológico para que, ao invés de se retirar da grade curricular conteúdos tachados como de difícil aprendizagem, seja pela falta de tempo ou pela falta de base do público, que sejam levantadas suas importâncias na proposta de cada curso e, incentivem e criem ferramentas para melhor trabalhá-los de modo a contribuir para uma formação mais sólida e consistente dos alunos.

Destaque para as observações da intervenção:

1. O compromisso e assiduidade dos alunos às aulas regulares aumentou consideravelmente;
2. O desempenho/aprovação dos mesmos, na disciplina regular de Matemática foi maior em comparação aos que não participaram;
3. A busca pela informação, utilizando os meios disponíveis na internet e consultas ao professor se deram de maneira satisfatória;
4. As contribuições dos alunos e de outros profissionais da área técnica, por exemplo, eletricitista, engenheiro de segurança e técnico de mecânica, possibilitaram a inserção de outros saberes que culminou na construção de um material apresentado neste trabalho

que, além de melhorar a visualização no espaço, motivou o uso de equipamentos com dupla finalidade, pedagógica e funcional.

Em virtude de tudo isso, quem sabe essa não seja uma boa hora para que voltemos às práticas prazerosas da escola, tentando diminuir a distância entre a vastidão teórica e sua utilidade prática. Acreditamos, principalmente depois destas observações que, do ponto de vista do aluno: *"é muito mais fácil estudar quando se quer aprender do que, aprender quando se é obrigado a estudar"* (afirmação de um dos alunos); Já do ponto de vista do professor, talvez valha a pena se perguntar: *"O que é melhor, chegar numa sala de aula em que os alunos são como potes vazios, simples depositários de um conhecimento que achamos deter ou, ao invés disso, encontrarmos alunos curiosos, questionadores, participantes enfim, agentes ativos nesse complicado processo de ensino e aprendizagem?"*

Referências

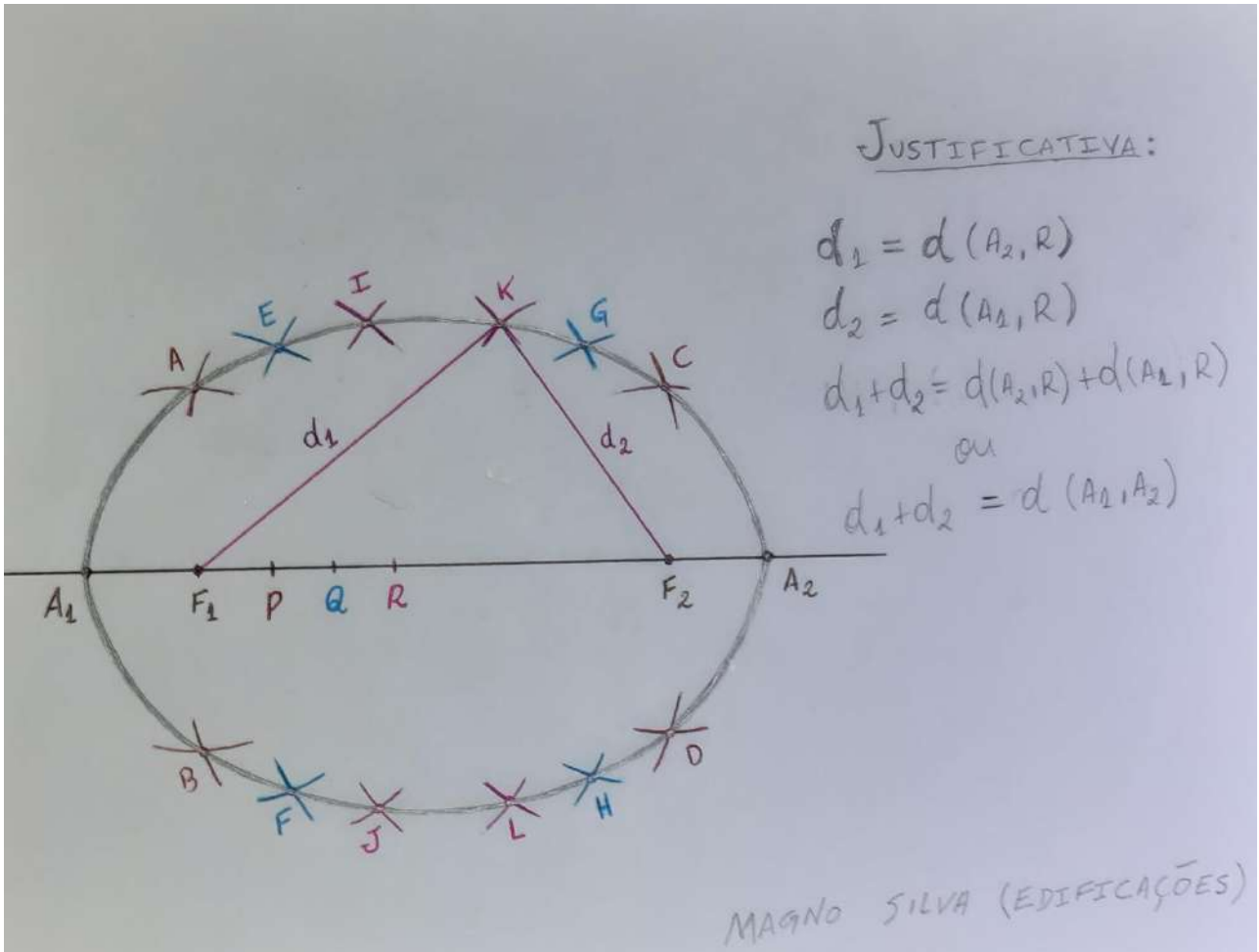
- [1] DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando - *Ática Matemática - Contexto e Aplicações* - Vol. Único - 3ª Ed. 2009
- [2] BOULOS, P.; CAMARGO, I. *Introdução a Geometria Analítica no Espaço*. São Paulo: Makron Books, 1997
- [3] REIS, Genesio dos. *GEOMETRIA ANALÍTICA 2ª ED*. Genesio Lima dos Reis | Valdir Vilmar da Silva São Paulo: LTC, 1996
- [4] GASPAR, Antônio Simões. *As cônicas, quádricas e suas aplicações*. Dissertação de Mestrado. Orientador Barroso Neto, Nilton Moura. Universidade de Brasília, Brasília, 2014, p.7
- [5] STEWART J. *Cálculo volume 2*, 7ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.
- [6] LIMA, E. L. de. *Coordenadas no Plano*. 4ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2002.
- [7] CAMARGO, Ivan de. *Geometria analítica/ Ivan de Camargo e Paulo Boulos*, São Paulo: Prentice Hall, 2005.
- [8] IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar 7*, Geometria Analítica, 4ª ed, São Paulo: Atual Editora, 1993.
- [9] BEZERRA, Licio Hernanes. *Geometria analítica/ Licio Hernanes Bezerra, Ivan Pontual Costa e Silva*. – 2ªed. – Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2010.
- [10] OLIVEIRA, Antônio Marmo de ; SILVA, Agostinho. *Curso de Matemática Moderna Lisa* - 1ª Ed. São Paulo: Lisa, 1974.
- [11] PERES, Eduardo dos Santos . *Classificação de Cônicas e Quádricas em Função da Equação Algébrica*. Dissertação de Doutorado. Orientador Fantin Silas. UNIRIO, 2014,p.95.
- [12] GONÇALVES, Vladmir Sicca. *Curvas, Superfícies e Arquitetura*. Acesso em 20, 22 e 26 de fevereiro de 2019, Universidade Estadual de Campinas UEC: <https://curvasearquitetura.wordpress.com/historia-das-conicas/>

- [13] Software gratuito **Geogebra** disponível em <https://www.geogebra.org/?lang=pt>
-

ANEXO A – Atividades com Régua e Compasso

ANEXO B – Respostas escolhidas para registro

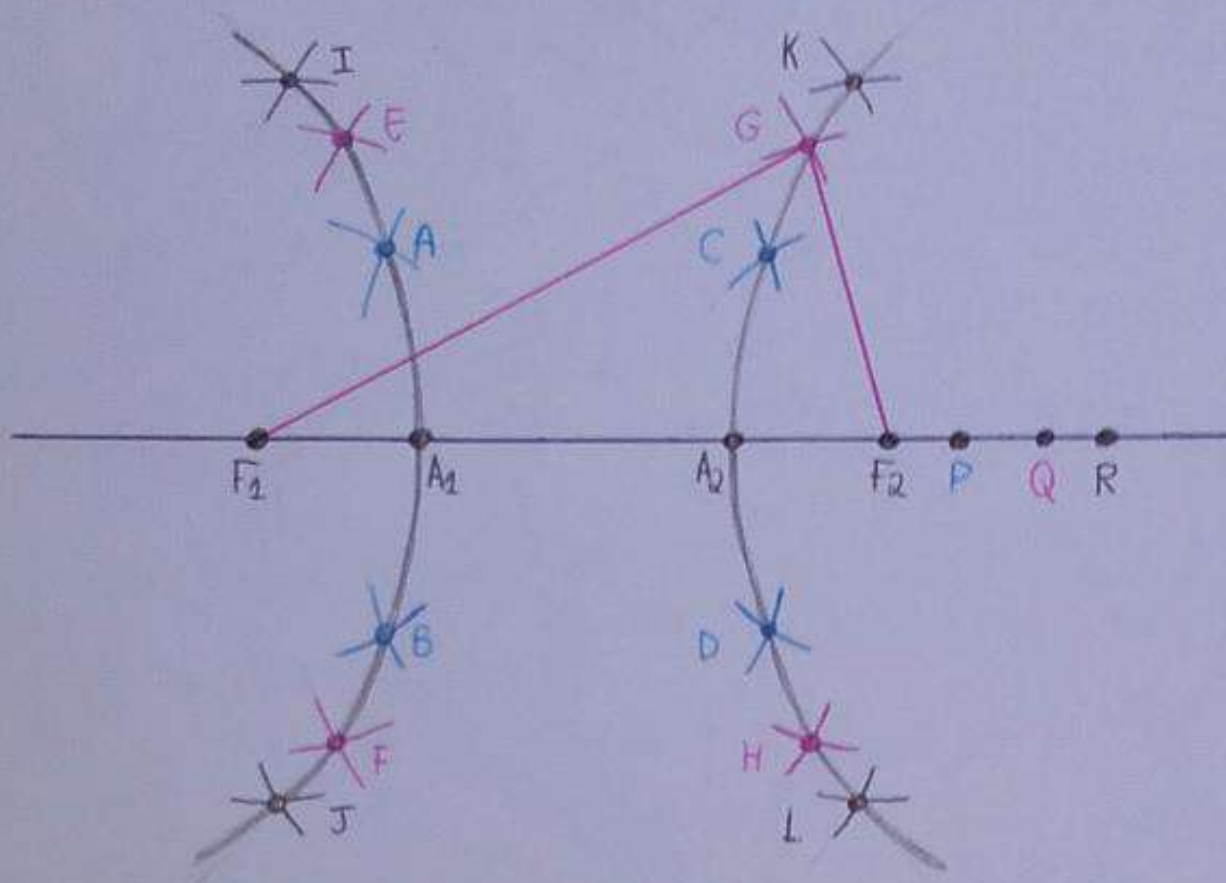
Esboçar uma elipse com eixo maior medindo 12 cm e distância focal 8 cm encontrando pelo menos 12 pontos desta curva. Justifique sua construção.



Esboçar o gráfico de uma hipérbole com eixo real medindo 6 cm e distância focal 10 cm encontrando pelo menos 12 pontos desta curva. Justifique sua construção.

ALUNO: MATHEUS HENRIQUE COSTA AGUIAR.

CURSO: CONSTRUÇÃO NAVAL.



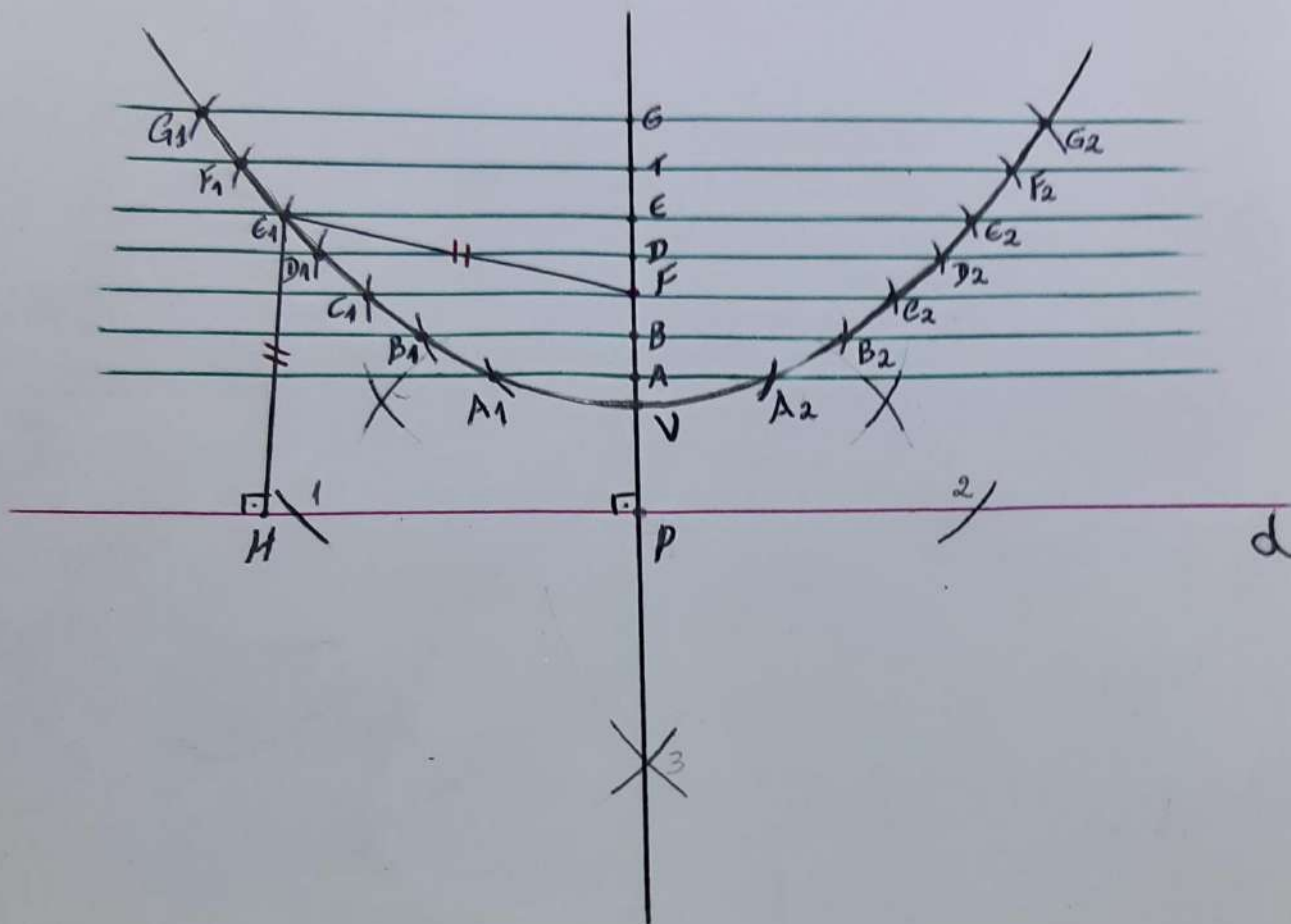
$$\text{I. } \overline{F_1G} = \overline{A_1Q} \text{ (POR CONSTRUÇÃO)}$$

$$\text{II. } \overline{F_2G} = \overline{A_2Q} \text{ (POR CONSTRUÇÃO)}$$

$$\text{I-II. } \overline{F_1G} - \overline{F_2G} = \overline{A_1Q} - \overline{A_2Q} = \overline{A_1A_2}$$

OBS: ANALOGAMENTE PARA OS DEMAIS PONTOS ENCONTRADOS NA CURVA.

Esboçar uma parábola cujo foco F se encontra a 4 cm de sua reta diretriz d. Justifique sua construção.



$$\overline{EP} = \overline{FE_1} \text{ (construção)}$$

$$\overline{EP} = \overline{E_1H} \text{ (segmentos paralelos)}$$

$$\text{então, } \overline{FE_1} = \overline{E_1H}$$

aluna: Gabriela F. Batista.

curso: Eletrônica