UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

José Igor Gonçalves da Silva

A ação como ferramenta de aprendizagem

RECIFE
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

José Igor Gonçalves da Silva

A ação como ferramenta de aprendizagem

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dra. Márcia Pragana Dantas

RECIFE
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

S586a Silva, José Igor Gonçalves da.
A ação como ferramenta de aprendizagem / José Igor Gonçalves da Silva. – 2017.
85 f.: il.

Orientadora: Márcia Pragana Dantas.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Recife, BR-PE, 2017.
Inclui referências.

1. Lúdico 2. Vivência 3. Semelhança de triângulos 4. Pensamento crítico 5. Autonomia de pensamento I. Dantas, Márcia Pragana, orient. II. Título

CDD 510

A ação como ferramenta de aprendizagem

José Igor Gonçalves da Silva

Dissertação APROVADA, em 31/08/2017, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, polo UFRPE - pela seguinte comissão examinadora:

Orientadora: Márcia Pragana Dantas

Márcia Pragana Dantas

Banca examinadora:

Isis Gabriella Quinteiro
UFRPE

Airton Temístocles Gonçalves de Castro
UFPE

RECIFE, 2017

Dedico esta dissertação a Deus e à minha família que são os alicerces de minha vida. Principalmente ao meu filho, João Henrique Marinho Gonçalves, que consegue com um só sorriso iluminar qualquer vida.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por permitir que eu tenha desenvolvido este trabalho e ter me dado força e parcimônia para continuar lutando perante as adversidades.

Agradeço ao meu pai, Evaristo Gomes da Silva (in memoriam), que foi um exemplo de dedicação e honestidade. Trabalhou até o último dia de sua vida com o sorriso no rosto, sem nunca reclamar, só para possibilitar que seus filhos tivessem um futuro melhor.

Agradeço à minha mãe, Izabel Ferreira Gonçalves da Silva, que apoiou e orou todos os dias pelo meu sucesso. Depositando tanta fé em meu potencial que em nenhum momento me permiti pensar em desistir.

À minha irmã, Julianna Gonçalves da Silva, e à suas filhas, as quais amo como se fossem minhas, Júlia e Eduarda, sempre me recebendo com um belo sorriso naqueles momentos que eu chegava cansado após uma maratona de aula.

Agradeço também aos meus avós, Airton Ferreira Gonçalves e Maria Henrique Gonçalves, e todos outros familiares que aqui agradeço por todo amor e carinho.

Agradeço a todos os Professores do PROFMAT pelas aulas ministradas e dedicação ímpar e aos amigos, irmãos, que contribuíram muito em minha formação, lutando até o fim mesmo sabendo que “a vida não é fácil, não”.

Agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa durante todo o período de realização deste mestrado.

Agradeço muito à Professora Dra. Márcia Pragana Dantas. Mais que uma ótima professora e orientadora é uma grande amiga, tendo a sensibilidade de me entender e incentivar nos momentos mais difíceis deste mestrado. Conseguindo me proporcionar um prazer em escrever que eu nunca tinha sentido em outro momento de minha vida acadêmica.

Em especial, agradeço a minha esposa, Geyze Marinho dos Santos, e ao meu filho, João Henrique Marinho Gonçalves, pela paciência e incentivo. Por entender todos os momentos ausentes para estudar e mesmo assim me esperar chegar com um brilho no olhar. Saibam que o amor que sinto por vocês é incomensurável.

"Toda ação humana, quer se torne positiva
ou negativa, precisa depender de motivação."
Dalai Lama

Resumo

Atualmente percebemos um aumento significativo nas produções científicas que defendem atividades lúdicas como estratégia de ensino. Diversos autores como Jean Piaget, Ubiratan D'Ambrósio, Nilton José Machado e Paulo Freire destacam a importância da vivência para o amadurecimento intelectual e a interação social, questões fundamentais para o desenvolvimento do indivíduo. Este trabalho foi desenvolvido com foco na exploração do lúdico do ponto de vista da ação. Propusemos o uso de uma metodologia que propicie experiências agradáveis e relevantes para o aprendizado dos alunos, e que desperte neles o interesse pela matemática. Escolhemos alunos do Fundamental II de uma escola da Rede Pública de Ensino do Município de Itapissuma-PE para aplicar atividades simples e divertidas, que tinham alguma ligação com o cotidiano deles. Essas atividades foram aplicadas fora da sala de aula, antes da exposição conceitual. Elas estavam ligadas ao assunto a ser abordado, Semelhança de Triângulos, e contribuíram para desenvolver nos alunos a curiosidade, a socialização, o autodidatismo, a criatividade, o raciocínio lógico e estimular a descoberta. Após a realização das atividades, o conteúdo foi lecionado e discutido e, no término da aula, aplicamos uma avaliação escrita para validar a metodologia. Dedicamos um capítulo para expor algumas propostas de atividades do livro Matemática Lúdica, escrito por Leon Battista Alberti, no século XV, que serviu de inspiração para este trabalho. Alberti aborda o uso de relações matemáticas para medições de grandezas sem o uso de aparelhos específicos. Este estudo permitiu concluir que a matemática pode ser amada pelos alunos, pode ser uma matéria agradável de estudar, e que uma ferramenta importante para construir este elo é o uso do lúdico no processo de ensino-aprendizagem.

Palavras-chave: Lúdico, Vivência, Semelhança de Triângulos, Pensamento Crítico, Autonomia de Pensamento.

Abstract

In recent times, there has been a significant increase in studies that advocate ludic activities as a teaching strategy. Authors such as Jean Piaget, Ubiratan D'Ambrósio, Nilton José Machado and Paulo Freire have highlighted the role of experiential learning in intellectual growth and social interaction, both of which are fundamental questions in the development of the individual. This study has as its focus the practical application of ludic activities. We proposed a methodology that would provide students with pleasant and relevant experiences designed to stimulate their interest in mathematics. The subjects of our study were second-level students from a state school in Itapissuma, Pernambuco. Students engaged in simple and enjoyable activities that had some connection with their daily lives. These activities were used outside the classroom, prior to the conceptual exposition. They were related to the subject being taught—similar triangles—and prepared in order to arouse curiosity and foster social skills, self-learning, creativity, and logical reasoning. After the subject had been taught and discussed in class, a written test was applied to validate the methodology. We have devoted a chapter of this study to Ludi mathematici by 15th-century author Leon Battista Alberti, which was an inspiration to our work. Alberti showed how mathematical relationships could be used to carry out measurements without specific apparatus. This study concludes that mathematics can be an enjoyable experience for students and that an important tool in achieving this is the use of ludic activities in the teaching-learning process.

Keywords: Playful, Experience, Similar to Triangles, Critical Thinking, Autonomy of Thought.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

O desafio de tornar a matemática mais atraente e prazerosa não é tarefa fácil. Vários fatores influenciam para a baixa performance dos alunos na disciplina. Além do mais, muitos alunos acham a Matemática de nível fundamental como ultrapassada e sem sentido, considerando-a infundada e enfadonha.

Tornar a Matemática mais agradável, criar uma relação de confiança professor-aluno, apresentar situações nas quais a matemática está diretamente relacionada com a vivência, causar a sensação da descoberta do conhecimento, são possíveis caminhos para despertar no discente o desejo de estudar Matemática.

Ubiratan D'Ambrózio e Machado (2014) afirmam que o professor que considera que a melhor forma de ensinar seja expor o máximo de conteúdos, tornará a concepção da Matemática como um tema "abstrato", "exato" e "difícil". Assim, os prováveis maus resultados obtidos serão decorrentes desta mesma forma de abordagem.

Essa linha de pensamento por muitas vezes acarreta aquela situação na qual o aluno se depara com a exposição de um novo conteúdo sem que tenha compreendido o assunto anterior, resultando em um aprendizado fragmentado e na falta de entusiasmo dos alunos pela Matemática.

Segundo Paulo Freire (1977), uma sala de aula desmotivada é a maior dificuldade que o profissional pode ter. Mas no momento em que o aluno encontra-se motivado, quando desperta o interesse pelos estudos, podemos afirmar que este terá, ao entender um conteúdo de matemática, um conjunto de boas sensações.

> Há algo na Matemática que escapa a qualquer sentido prático/utilitário, que expressa relação - às vezes surpreendentes - e nos ajuda a construir o significado do mundo da experiência, no mesmo sentido em que um poema o faz. (D'AMBRÓZIO; MACHADO, 2014)

Hoje, é cada vez mais comum o uso do Lúdico no ensino em busca de bons resultados. As atividades lúdicas podem servir de ferramenta para estreitar o elo entre o ser e o saber. A integração e interação oriundas dessas atividades também possibilitam a integração das ações práticas com o conhecimento teórico (CHAGURI, 2004).

Este trabalho parte do reconhecimento da vivência como aspecto importante para a aprendizagem. Trabalhamos esta vivência de forma lúdica, inspirados no livro Matemática Lúdica, escrito por Leon Battista Alberti no século XV (Alberti, 2006), ensinando matemática a partir das experiências, que é, para nós, uma das melhores formas para facilitar a construção do saber atrelado à vontade de aprender mais. Nisso consiste o movimento da descoberta.

Essa forma de ensinar é considerado uma das formas mais adequadas para que o professor consiga obter sucesso e é defendido em trabalhos de diversos autores como Paulo Freire e

Ubiratan D'Ambrosio. Facilitando a construção do saber atrelado à vontade de aprender mais. Nisso consiste o movimento da descoberta.

A utilização do lúdico é uma excelente ferramenta para obter êxito nesse processo de ensino-aprendizagem. O livro Matemática Lúdica que usamos neste trabalho, apresenta vários procedimentos, utilizando relações matemáticas, para realizar medições que aparentemente só seriam possíveis com o auxílio de equipamentos específicos. Esses procedimentos podem ser adaptados aos ensinamentos atuais e alguns deles foram explorados como propostas de atividade nesta dissertação.

Neste trabalho utilizamos a ação por meio da vivência como ponto de partida da aprendizagem escolar das atividades pedagógicas no ensino de matemática para os estudantes do 7° e 8° anos do Ensino Fundamental II da Rede Pública de Ensino do Município de Itapissuma - PE. Os alunos foram conduzidos por duas atividades lúdicas, medir a altura de uma árvore e estudar as proporções dos catetos de triângulos retângulos utilizando uma folha de papel A4. A prática também serviu como mobilizadora de outros assuntos tais como a multiplicação, números decimais, sistema de medida, utilização da régua numerada e da trena como instrumento de medição, divisão, entre outros.

Tivemos como principal objetivo propor uma metodologia de ensino da Matemática que desperte no aluno o desejo pelo conhecimento. Esse despertar vem de movimentar no indivíduo o prazer da descoberta, a percepção da regra, do padrão. É no momento que surge o "Ahhh entendi" que marcamos a matemática em sua alma e que se estabelece uma relação que pode permanecer por toda vida.

Consideramos como objetivos específicos: despertar nos alunos o prazer de estudar matemática, contribuir para a socialização através das vivências, usar a vivência para o aprendizado do conteúdo Semelhança de Triângulos bem como sua aplicabilidade e contribuir para que os alunos percebam a importância de se estudar Matemática.

Dividimos esta dissertação em seis capítulos. No Capítulo 1 fazemos a apresentação de nosso referencial teórico divido em três seções. Primeiro abordamos as definições e discussões sobre três fundamentos importantes para o ensino da matemática: Conceituação, Manipulação e Aplicação. Em seguida fazemos uma breve abordagem da etnomatemática, dizendo quando surgiu em nosso país, como é abordada nos Parâmetros Curriculares Nacionais e o que estuda. Finalizamos esse capítulo falando sobre a matemática lúdica, destacando sua importância, o impacto nos estudantes e como outros autores defendem seu uso.

No Capítulo 2, abordamos os conceitos matemáticos envolvidos nos problemas que serão abordados. Como o principal conteúdo utilizado para realizar as atividades foi Semelhança de Triângulo separamos esse capítulo para a conceituação e demonstração do Teorema da Semelhança de Triângulo, Teorema de Tales, Teorema da Propriedade de Área de Triângulo e de outros conteúdos relacionados. Também, apresentamos axiomas e teoremas, como o Teorema de

Tales, que foram necessários para tal demonstração.

Denominamos por Vivência o Capítulo 3 que está dividido em quatro seções. Na primeira seção fazemos a apresentação da escola, sua descrição e localização e traçamos um rápido perfil dos alunos e da comunidade que circunvizinha a escola. As Seções 2 e 3 foram dedicadas às atividades realizadas. A primeira atividade consiste em estudar as proporções entre as alturas dos triângulos retângulos que surgem ao traçar em uma folha A4 uma diagonal e segmentos perpendiculares ao maior lado. A segunda atividade consiste em quatro procedimentos para calcular a altura de uma árvore. Posteriormente às práticas fora de sala, compartilhamos as informações entre os grupos e discutimos a vivência em sala. Na Seção 4, apontamos a conceituação e manipulação das atividades. Relatamos como conduzimos as ações realizadas fora de sala e mostramos como as vivências ajudaram no entendimento do conteúdo.

Já no Capítulo 4, analisamos as vivências, destacando os resultados e trazendo reflexões. Fizemos uma avaliação que foi aplicada no término de todo o processo com o intuito de analisar o sucesso das ações que conduzimos.

O Capítulo 5 é composto por propostas de atividades do livro Matemática Lúdica, de autoria de Leon Battista Alberti, de onde nos inspiramos para a produção das atividades desta dissertação (Aberti, 2006).

No Capítulo 6, fazemos um apanhado geral comparando o resultado da análise com as avaliações continuadas que antecederam as vivências e os nossos objetivos. Também, fazemos sugestões de leituras de outras dissertações que de alguma maneira abordam a linha de pensamento de nossa dissertação.

Concluímos com o Capítulo 6, onde fazemos as considerações finais sobre o trabalho e algumas sugestões sobre o a aplicação desta metodologia.

1 Referencial Teórico: A ação como mobilizador da aprendizagem.

O uso da ação como facilitador do aprendizado vem cada vez mais sendo defendida. Como um indivíduo pode abstrair um conteúdo se o mesmo não vivenciou nenhuma situação igual ou semelhante? A execução de atividades que propiciam ao aluno experiência suficiente para idealizar situações e ambientes facilitam significativamente a construção do saber.

O problema a ser superado é o interesse e ele vem com a descoberta, quando lhe é permitido a descoberta, através da prática no sentido da ação. A vivência pela ação mobiliza a curiosidade, a procura e a descoberta pelo indivíduo. Assim, o ser evolui intelectualmente durante a execução da ação à medida que cria novas memórias, hipóteses e ideias que facilitarão, ou facilitam, o entendimento de um estudo, problema ou de um ensinamento.

Neste capítulo expomos três pontos de vista que consideramos importantes no processo de ensino aprendizagem da perspectiva da importância da vivência.

1.1 Conceituação, Manipulação e Aplicações.

Segundo Elon Lages (1999, p.2) o ensino da matemática deve ser conduzido por três componentes fundamentais: Conceituação, Manipulação e Aplicações. O bom equilíbrio na utilização desses três componentes proporciona o interesse dos alunos e a capacidade de manipular a matemática estudada nas mais diversas esferas da ciência e das situações do cotidiano.

O autor Elon Lages Lima, destaca em seu livro que

> [...] (...) a Conceituação compreende a formulação correta e objetiva das definições matemáticas, o enunciado preciso das proposições, a prática do raciocínio dedutivo, a nítida conscientização de que conclusões sempre são provenientes de hipóteses que se admitem, a distinção entre uma afirmação e sua recíproca, o estabelecimento de conexões entre conceitos diversos, bem como a interpretação e a reformulação de ideias e fatos sob diferentes formas e termos. É importante ter em mente e destacar que a conceituação é indispensável para um bom resultado das aplicações (LIMA, 1999, p.2).

A Manipulação é de caráter principalmente algébrico, refere-se ao treinamento através da prática para aperfeiçoar o aprendizado. Um exemplo de manipulação são os exercícios que normalmente são realizados pelos professores após a explicação de um conteúdo.

Aplicações são empregos dos conhecimentos teóricos adquiridos para obter resultados, conclusões e previsões em diversas situações-problemas (LIMA, 1999). É de certo modo um motivador que justifica, para muitos alunos, a razão pela qual se estuda determinado conteúdo.

Os excessos cometidos na utilização de um desses componentes, bem como a falta de conexão entre eles, acabam levando a insucessos na prática docente. Um exemplo desse excesso pode ser observado na década de 60 e 70, durante o período da Matemática Moderna, onde houve uma ênfase na conceituação. Na escola, a Matemática não atendia as necessidades de outras disciplinas, nem do uso prático do dia-a-dia. Para Elon Lages,

> (...) professores e autores de livros não alcançavam a razão de ser e o emprego posterior das noções abstratas que tinham que expor, o ensino perdia muito em objetividade, insistindo em detalhes irrelevantes e deixando de destacar o essencial. (LIMA, 1999, p.3)

Já a Manipulação, mesmo sendo o componente mais difundido em nossas escolas, dentre os três, se apresenta com um excesso de questões com cálculos que não necessitam, em sua maioria, de raciocínio, desconectada da Conceituação.

A Manipulação está tão enraizada em nosso ensino que não é difícil encontrar professores do Ciclo Básico de Ensino que consideram que a Matemática se resume a ela. A capacidade de manusear corretamente expressões e símbolos algébricos é de certo muito importante, mas não está diretamente relacionada à capacidade de raciocinar abstratamente. Assim, muito embora a Manipulação seja importante para o desenvolvimento do aluno, são trabalhadas de forma pouco motivacionais.

Já a Aplicação é um problema comum a alguns professores de Matemática. A maior dificuldade está em achar uma para os temas que são lecionados. Sendo um grande desafio encontrar, ou elaborar, uma atividade que proporcione aos alunos uma aplicação clara do conteúdo sem diminuir sua vontade de aprender. Devido a essa dificuldade, muitos profissionais terminam se excedendo na Conceituação.

> [...] As aplicações constituem, para muitos alunos de nossas escolas, a parte mais atraente (ou menos cansativa) da Matemática que estudam. Se forem formuladas adequadamente, em termos realísticos, ligados a questões e fatos da vida atual, elas podem justificar o estudo, por vezes árido, de conceitos e manipulações, despertando o interesse da classe. Encontrar aplicações significativas para a matéria que está expondo é um desafio e deveria ser uma preocupação constante do professor (LIMA, 1999, p2).

Em busca de Aplicação, alguns professores fazem uso de exemplos e atividades apartadas da realidade dos alunos, sem considerar as experiências de vida que os alunos adquirem fora da escola, o que pode resultar no desestímulo do aluno, pois os conhecimentos matemáticos adquiridos até então acabam sendo desconsideradas por essa forma ensinar.

Acreditamos que o processo de ensino-aprendizagem da Matemática pode ser mais eficaz, pelo menos nas séries iniciais, se consideramos os conhecimentos adquiridos previamente pelos alunos, e trazidos para a escola, de suas próprias experiências de vida.

1.2 Etnomatemática

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) relatam que nas décadas de 60 e 70, o ensino da Matemática foi fortemente influenciado pelo movimento mundialmente conhecido como Matemática Moderna. O ensino passou a se concentrar excessivamente em abstrações, onde a teoria era supervalorizada e a prática cada vez mais deixada de lado.

De acordo com Carraher et al (1988), os alunos de classes sociais mais baixas eram frequentemente reprovados em sala de aula, mas em transações financeiras informais do seu cotidiano eram bem sucedidos. Esse fato mostrava uma necessidade na adequação da metodologia à realidade dos alunos.

A etnomatemática surgiu na década de 1970, a partir de críticas sociais à à forma de ensino vigente, que hoje chamamos de tradicional. Tendo surgido no Brasil em 1978, na Reunião Anual da Associação Americana para o Progresso da Ciência através do pronunciamento de Ubiratan D'Ambrosio.

Trata-se do uso das experiências de vida em um contexto cultural como ferramenta para o aprendizado. Em 1987, Ubiratan D'Ambrosio deu uma boa aproximação da definição ao dizer que Etnomatemática refere-se "(...) às diferentes formas de matemática que são próprias de grupos culturais".

Segundo Paulus Gerdes, "(...) a Etnomatemática tenta estudar a Matemática (ou ideias matemáticas) nas suas relações com o conjunto da vida cultural e social" (GERDES, 1989, p.2). Refere-se ao exercício da docência utilizando os conhecimentos socioculturais de uma região e validando os saberes adquiridos pelos alunos em suas experiências fora da escola.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais citam a Etnomatemática como uma alternativa para a ação pedagógica. Destacando que ela,

> [. . .] procura entender os processos de pensamento, os modos de explicar, de entender e de atuar na realidade, dentro do contexto cultural do próprio indivíduo. A Etnomatemática procura partir da realidade e chegar à ação pedagógica de maneira natural, mediante um enfoque cognitivo com forte fundamentação cultural (PCNs, 1997, p.21).

As pesquisas acerca da Etnomatemática estudam a relação entre os conhecimentos adquiridos nas práticas do dia-a-dia, seja em um contexto social, cultural ou político, e os ensinados na escola (KNIJNIK, 1996, p. 69). Trata-se de,

> [. . .] uma vertente que busca identificar manifestações matemáticas nas culturas periféricas e tem como referências categorias próprias de cada cultura, reconhecendo que é própria da espécie humana a satisfação de pulsões de sobrevivência e transcendência, absolutamente integradas, como numa relação simbiótica. (BURTON, 1997).

O uso da Etnomatemática foi de fundamental importância para a condução de nossa ação educativa na escola. Visto que, muitos dos nossos alunos ajudavam seus pais na venda de marisco em uma praia próxima e a manipulação com a prática de "passar o troco" de uma venda foi usada na compreensão das escalas de medida e nas operações com números decimais.

Assim, a Etnomatemática se alinha à Matemática Lúdica na busca de uma metodologia de ensino que estimule o aluno a estudar e facilite seu entendimento.

1.3 Matemática Lúdica

O uso do lúdico no ensino da Matemática é uma estratégia que se mostra cada vez mais eficaz no processo educacional. Mesmo não sendo adota por muito professores, atualmente podemos encontrar uma boa quantidade de trabalhos que usam o lúdico no ensino da matemática. O próprio portal do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) disponibiliza para download 15 dissertações produzidas nos últimos 2 anos que abordam o lúdico.

A palavra lúdico vem do latim *ludos* e significa brincar, jogar, teatro, drama, circo (Dicionário Etimológico, 2017). Mas na educação pode ter um significado bem mais amplo. No contexto desse trabalho consideramos que uma atividade é lúdica se remeter ao aluno o prazer, a diversão, a sensação de liberdade intelectual e de intimidade com as ações no processo de interação da tríade aluno-professor-ensino.

Já nas civilizações antigas o lúdico se apresentava de forma muito marcante na vida do homem, principalmente através de jogos. Como o mito e o culto, os jogos podem ser considerados como atividades lúdicas em prol do aprendizado, visto que o jogo entre o real e a fantasia era usado como ferramenta para o homem primitivo lidar com as situações de seu mundo (SZUNDY, 2005).

Há relatos que em 367 a.C., Platão acreditava que os jogos eram uma importante opção metodológica para a educação de jovens, orientando que meninos e meninas brincassem juntos através de atividades educativas (REVEMAT, 2011, p.20).

No século XVI, François Rabelais defendia a utilização dos jogos e da fantasia para despertar nas crianças o prazer pela leitura. Na primeira metade do século XX, ele era visto como um autor que escrevia para causar risos nos leitores, mas foi um crítico da educação da época que era predominantemente teológica (SOUZA, 2011, p.3), como fez em uma de suas obras mais conhecidas, Gargantua (1534), dizendo que aquela educação tornava o gigante "tolo, simplório, sempre pensativo e distraído" (RABELAIS, 2003, p.80).

Outros teóricos importantes como Jean-Jacques Rousseau e Johann Heinrich Pestalozzi, escritores suíços do século XVIII, John Dewey, filósofo e psicólogo estadunidense do século XIX, Maria Montessori, educadora e médica italiana, Lev Semenovitch Vygotsky, psicólogo russo e Jean William Fritz Piaget, epistemólogo francês, esses três últimos tiveram suas obras publicadas no século XX, também apresentaram estudos que eram relacionados com o uso do lúdico no processo de ensino-aprendizagem(REVEMAT, 2011, p.21).

O lúdico apresenta o prazer e o esforço espontâneo como principais elementos. O prazer devido em conduzir o indivíduo por boas emoções, capazes de prendê-lo durante toda a atividade sem que o mesmo sinta o passar do tempo. Para exercer estas atividades o aluno, usa uma relativa energia na prática da ação que pode se dar um maior ou menor esforço físico, um esforço espontâneo que lhe é natural ao ato de brincar, jogar, ou vivenciar.

No brincar, no imaginar, no jogar, em qualquer ação lúdica, a criança está em plena atividade física, emocional e mental (TEZANI, 2004). Essas ações desenvolvem a criatividade no indivíduo, o que ajuda na formação do eu e na evolução de sua intelectualidade.

Piaget (1998) destaca que é na infância que as crianças têm os primeiros contatos e vivências para desenvolver a aprendizagem. É nesta fase que suas personalidades e as suas múltiplas inteligências se desenvolvem. Mas é crucial entender que,

> [...] educadores e pais necessitam ter clareza quanto aos brinquedos, brincadeiras e/ou jogos que são necessários para as crianças, sabendo que eles trazem enormes contribuições ao desenvolvimento da habilidade de aprender e pensar. No jogo, ela está livre para explorar, brincar e/ou jogar com seus próprios ritmos, para autocontrolar suas atividades, muitas vezes é reforçada com respostas imediatas de sucesso ou encorajada tentar novamente, se da primeira alternativa não obteve o resultado esperado (SANTOS, 2000, p.166).

Uma escola onde a criança é privada de toda liberdade, uma escola voltada apenas para a exposição demasiada de conteúdos, uma escola em que os alunos são impedidos da socialização e vedados da livre relação entre sua criatividade e os conteúdos escolares, são as prováveis causadoras dos baixos índices escolares e da falta de estímulo para o aluno estudar.

> [...] As atividades lúdicas integram as várias dimensões da personalidade: afetiva, motora e cognitiva. Como atividade física e mental que mobiliza as funções e operações, a ludicidade aciona as esferas motora e cognitiva, e à medida que gera envolvimento emocional, apela para a esfera afetiva. Assim sendo, vê-se que a atividade lúdica se assemelha à atividade artística, como um elemento integrador dos vários aspectos da personalidade. O ser que brinca e joga é, também, o ser que age, sente, pensa, aprende e se desenvolve (TEIXEIRA, 1995, p. 23).

É importante relatar que nem todos os pesquisadores são defensores do uso do lúdico no ensino. Um bom exemplo é Dinello que critica o jogo na sala de aula "por considerá-lo apenas uma aparência de jogo ou como um falso jogo a fim de obter uma falsa resposta esperada" (DINELLO,1982, p. 51).

O uso de jogos e brincadeiras em excesso, ou inadequadamente, e a falta de objetividade na ação podem levar a confusões de ideias e perda da objetividade da aula, devendo-se ter todo cuidado para que não se propicie uma ação superficial e com motivação oculta (CARDOSO, 1996, p. 37).

> [. . .] O professor não pode subjugar sua metodologia de ensino a algum tipo de material porque ele é atraente ou lúdico. Nenhum material é válido por si só. Os materiais e seu emprego sempre devem estar em segundo plano. A simples introdução de jogos ou atividades no ensino da matemática não garante uma melhor aprendizagem desta disciplina (FIORENTINI; MIORIM, 1990).

2 Conceitos Matemáticos

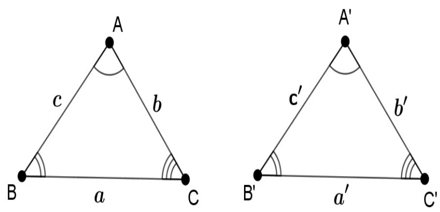
Neste capítulo apresentamos o conceito matemático que perpassa este trabalho, Semelhança de Triângulos, bem como os conteúdos de Congruência de Triângulos, Axioma das Paralelas e Teorema de Tales, necessários para a demonstração dos principais resultados de semelhança. Usamos como principais fontes os livros: Geometria (coleção PROFMAT), de Antonio Caminha (2013), Geometria Euclidiana Plana, de João Lucas Marques Barbosa (2012) e as notas de aula do Professor Eduardo Wagner (2015) do PROFMAT/IMPA.

2.1 Congruência de Triângulos

Intuitivamente, duas figuras planas são congruentes quando o deslocamento rígido de uma delas leva a coincidir sobre o outro. Sabendo que uma figura plana é composta por um conjunto de pontos, o deslocamento rígido aqui refere-se à movimentação desta figura sem alterar a distância entre seus pontos. Tratam-se dos movimentos de translação, rotação e simetria em relação a uma reta.

Definição 1 (Congruência de Triângulos). *Dois triângulos são congruentes se existe uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

Figura 1 – Triângulos Congruentes



Fonte: Produzido pelo autor

Se os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes, escrevemos $ABC \equiv A'B'C'$,

$$\{A, B, C\} \longleftrightarrow \{A', B', C'\}$$

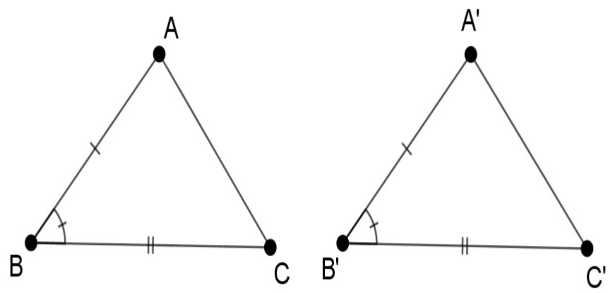
é a correspondência que define a congruência, então valem, simultaneamente, as seis seguintes relações:

- $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$
- $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e $BC = B'C'$.

Não é necessário analisar todas as condições acima para afirmar que dois triângulos são congruentes. Basta verificar um conjuntos de condições mínimas para garantir a congruência. Tem-se três casos: LAL (lado-ângulo-lado), ALA (ângulo-lado-ângulo), e LLL (lado-lado-lado), onde o primeiro é um axioma e os dois últimos são teoremas. Optamos por não incluir a demonstração desses casos aqui, que podem ser encontradas no Capítulo 4, do livro Geometria Euclidiana Plana de João Lucas Marques Barbosa.

Axioma 2.1 (1º Caso de Congruência: LAL)**.** *Se os triângulos ABC e $A'B'C'$ têm dois lados correspondentes congruentes e o ângulo entre esses lados são congruentes, então esses triângulos são congruentes.*

Figura 2 – Caso LAL



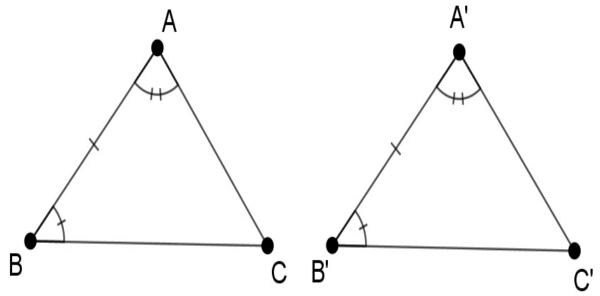
Fonte: Produzido pelo autor

Dados os triângulos ABC e $A'B'C'$, Figura 2,

$$\left.\begin{array}{r} BC = B'C' \\ AB = A'B' \\ \hat{B} = \hat{B'} \end{array}\right. \Longrightarrow ABC \equiv A'B'C'$$

Teorema 2.1.1 (2° Caso de Congruência: ALA)**.** *Os triângulos ABC e $A'B'C'$, Figura 3, são congruentes se um lado do triângulo ABC for congruente a um dos lados do triângulo $A'B'C'$ e os ângulos com vértices nas extremidades desses lados são respectivamente congruentes.*

Figura 3 – Caso ALA



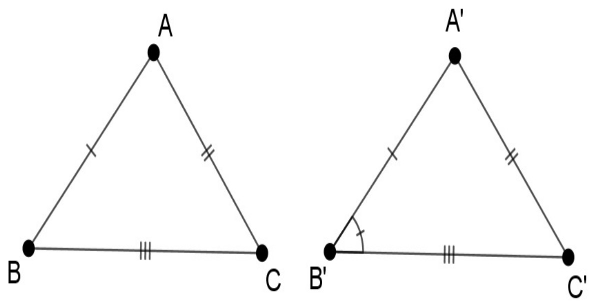
Fonte: Produzido pelo autor

Dados os triângulos ABC e $A'B'C'$, Figura 3,

$$\left.\begin{array}{r}\hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ AB = A'B'\end{array}\right. \Longrightarrow ABC \equiv A'B'C'$$

Teorema 2.1.2 (3º Caso de Congruência: LLL)**.** *Se os lados correspondentes de dois triângulos são congruentes então esses triângulos são congruentes.*

Figura 4 – Caso LLL



Fonte: Produzido pelo autor

Dados os triângulos ABC e $A'B'C'$, Figura 4,

$$\left.\begin{array}{r}AB = A'B' \\ BC = B'C' \\ AC = A'C'\end{array}\right. \Longrightarrow ABC \equiv A'B'C'$$

2.2 Teorema de Tales

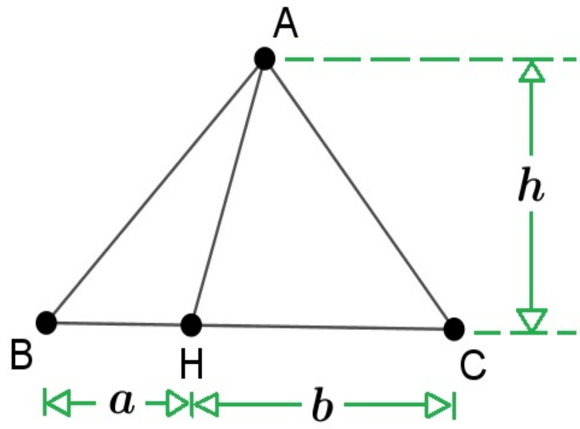
O Teorema de Tales é de fundamental importância para a matemática. Utilizamos a mesma abordagem do Professor Eduardo Wagner, do PROFMAT/IMPA, que usa área em sua demonstração. Antes de enunciar esse Teorema vamos mostrar uma importante propriedade que será usada na sua demonstração.

Definição 2 (Ceviana)**.** *Denominamos ceviana de um triângulo ao segmento que tem uma extremidade no vértice do triângulo e a outra na reta que contém o lado oposto.*

Teorema 2.2.1 (Propriedade de Área de Triângulo)**.** *Sendo H um ponto entre B e C do triângulo ABC, a ceviana AH divide o triângulo de forma que a razão entre as áreas será equivalente à razão entre suas bases contidas em BC.*

Demonstração. Para demonstrar este Teorema usaremos o fato da área do triângulo ser a metade do produto da base pela a altura. Os triângulos ABH e AHC têm a mesma altura em relação à reta que contém as bases BH e HC. Usaremos as notações a para representar a medida do

Figura 5 – Triângulo ABC e ceviana AH



Fonte: Produzido pelo autor

segmento BH, b para representar o segmento HC, h para altura, e [ ] para representar área, Figura 5.

$$[ABH] = \frac{a \cdot h}{2} \text{ e } [AHC] = \frac{b \cdot h}{2} \Longrightarrow \frac{[ABH]}{[AHC]} = \frac{\frac{a \cdot h}{2}}{\frac{b \cdot h}{2}} \Longrightarrow \frac{[ABH]}{[AHC]} = \frac{a}{b} \qquad \square$$

Chamamos de *feixe de retas* um conjunto de retas paralelas entre si e denominamos *reta transversal a um feixe* a uma reta que intersecte o feixe.

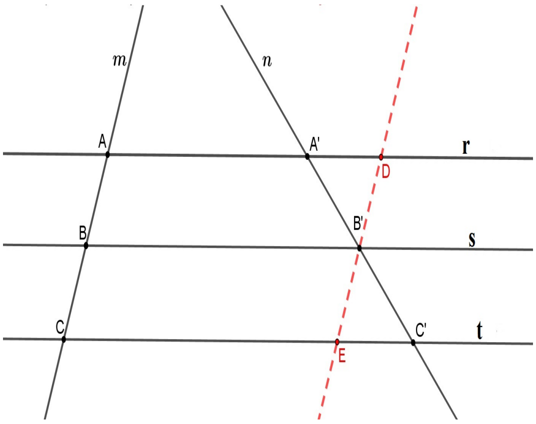
Quando um feixe de retas é cortada por duas retas, ou mais, formam-se segmentos cujas medidas se relacionam proporcionalmente. O Teorema de Tales aborda estas relações, para retas equidistantes ou não, em distintas versões que enunciamos a seguir.

Inicialmente enunciamos o Teoremas de Tales para um feixe de três retas equidistantes e depois enunciamos uma generalização deste resultado para um feixe de retas paralelas equidistantes como corolário. Em seguida trazemos outra versão do Teorema para o caso de um feixe de três retas paralelas não equidistantes.

Teorema 2.2.2 (Teorema de Tales)**.** *Suponha que três retas paralelas, r, s e t, cortam as retas m e n nos pontos A, B e C e nos pontos A', B' e C', respectivamente. Se o ponto B encontra-se entre A e C, então o ponto B' também encontra-se entre A' e C'. Se $AB = BC$, então também tem-se $A'B' = B'C'$.*

Demonstração. O ponto B, pertencente à reta s, é o ponto médio do segmento AC. Os pontos A e A', pertencentes à reta r, e os pontos C e C', pertencentes à reta t, estão em semiplanos opostos em relação a reta s. Logo, há um único ponto na interseção entre o segmento $A'C'$, contido na reta n, e na reta s. Como B' é o ponto de interseção entre a reta n e a reta s, então $A'C' \cap s = B'$. Logo B' está entre A' e C' (Figura 6).

Figura 6 – Retas Paralelas Equidistantes



Fonte: Produzido pelo autor

Traçando por B' uma reta paralela à reta m, encontrando os pontos D e E. Tendo os paralelogramos $ABB'D$ e $CBB'E$, podemos afirmar que $AB = DB'$ e $BC = B'E$.

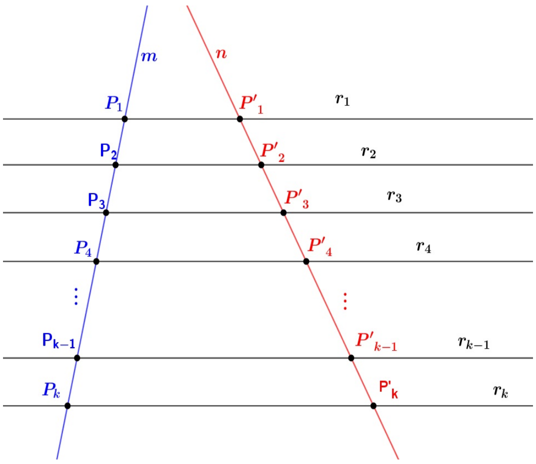
Por hipótese, $AB = BC$, então $DB' = B'E$. Como $E\hat{B'}C' = A'\hat{B'}D$, por serem ângulos opostos pelo vértice, e $A'\hat{D}B' = B'\hat{E}C'$, por serem ângulos alternos internos, então $A'B'D \equiv B'C'E$ pelo Teorema 2.1.1. Da congruência segue que $A'B' = B'C'$.

□

Enunciamos agora sem demonstração, na forma de um Corolário, a generalização do Teorema 2.2.2 para um feixe qualquer de retas paralelas equidistantes (ver BARBOSA, 2012, p.81).

Corolário 1. *Suponha que duas retas m e n são cortadas por k retas paralelas r_1, r_2, $\ldots$, r_k nos pontos P_1, P_2, $\ldots$, P_k e nos pontos P'_1, P'_2, $\ldots$, P'_k, respectivamente. Se $P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = \ldots = P_{k-1}P_k$ então $P'_1P'_2 = P'_2P'_3 = P'_3P'_4 = \ldots = P'_{k-1}P'_k$ (Figura 7).*

Figura 7 – Teorema de Tales para $k - retas$ paralelas



Fonte: Produzido pelo autor

Segundo Antonio Caminha (2013), o Teorema de Tales é uma importante ferramenta para o estudo dos aspectos métricos da Geometria Euclidiana Plana. Ele enuncia da seguinte forma.

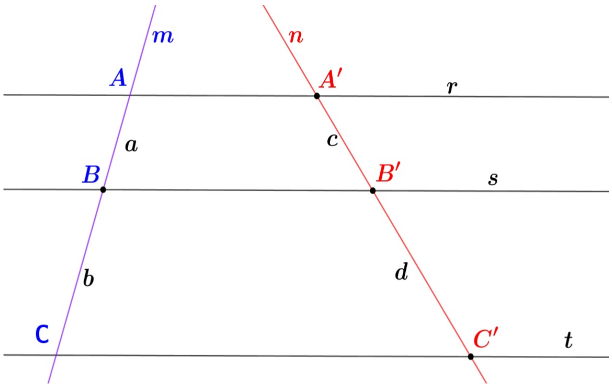
Teorema 2.2.3 (Teorema de Tales Generalizado)**.** *Sejam r, s, t retas paralelas. Escolhemos pontos* $A, A' \in r$*,* $B, B' \in s$ *e* $C, C' \in t$*, de modo que* A, B, C *e* A', B', C' *sejam dois ternos de pontos colineares. Então,*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Demonstração. Nomeando $AB = a$, $BC = b$, $A'B' = c$ e $B'C' = d$, pelo Teorema 2.2.3, temos que provar que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

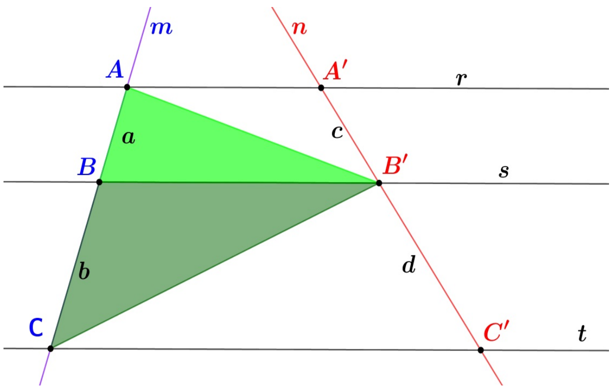
Figura 8 – Demonstração do Teorema de Tales



Fonte: Produzido pelo autor

Inicialmente, traçamos os segmentos AB' e CB' para destacarmos o triângulo ACB' e a ceviana BB', como visto na Figura 9.

Figura 9 – Demonstração do Teorema de Tales (Triângulo $AB'C$)



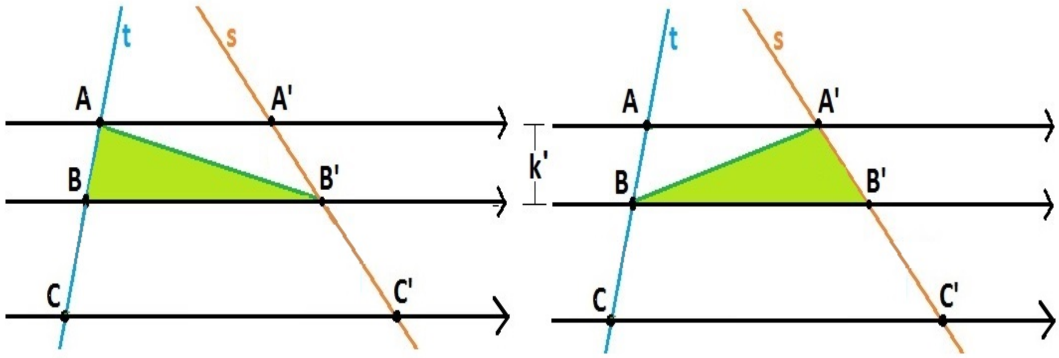
Fonte: Produzido pelo autor

Usando o Teorema 2.2.1, podemos afirmar que

$$\frac{[ABB']}{[BB'C]} = \frac{a}{b}$$

Como os segmentos AA' e BB' são paralelos, os triângulos ABB' e $A'BB'$ têm a mesma altura k', como pode ser vista na Figura 10. Sabendo que estes triângulos compartilham da mesma base BB' podemos afirmar que têm a mesma área. Analogamente, também podemos afirmar que os triângulos $BB'C$ e $BB'C'$ têm áreas de mesma medida.

Figura 10 – Área dos triângulos ABB' e $A'BB'$

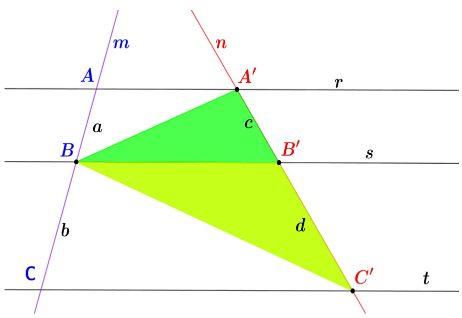


Fonte: Produzido pelo autor

Agora olhando o triângulo A’BC’ (Figura 11), que tem como ceviana BB’, pelo o Teorema 2.2.1, temos que

$$\frac{[A'BB']}{[BB'C']} = \frac{c}{d}$$

Figura 11 – Área do triângulo $A'BC'$



Fonte: Produzido pelo autor

Como $[ABB'] = [A'BB']$ e $[BB'C] = [BB'C']$, segue que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

□

A recíproca do Teorema de Tales Generalizado é verdadeira. Assim, dados dois ternos de pontos colineares A, B, C e A', B', C', as retas r, s e t, tal que, $\{A, A'\} \in r$, $\{B, B'\} \in s$, $\{C, C'\} \in t$, vale a relação

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \Longrightarrow r \parallel s \parallel t. \tag{2.1}$$

2.3 O Axioma das Paralelas

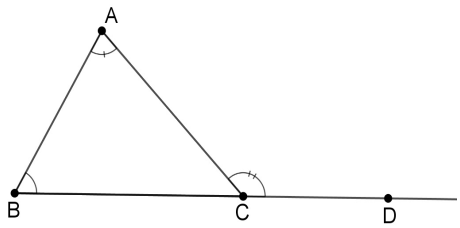
Nesta seção apresentamos algumas relações de grande importância para a Geometria Plana e que serão utilizadas em nossa dissertação. Usamos como principal referência o Capítulo 6, do livro Geometria Euclidiana Plana, de João Lucas Marques Barbosa (2012).

Axioma 2.2 (Axioma das Paralelas)**.** *Por um ponto fora de uma reta dada pode-se passar apenas uma única reta paralela a esta reta.*

Teorema 2.3.1 (Ângulo Externo)**.** *Todo ângulo externo de um triângulo é maior que a medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer e D um ponto pertencente à reta suporte do lado BC (Figura 12).

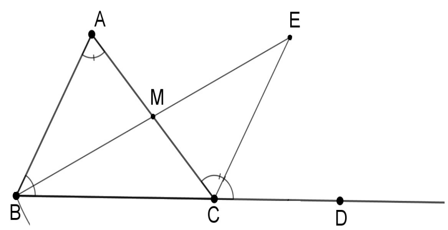
Figura 12 – Ângulo Externo



Fonte: Produzido pelo autor

Sendo M o ponto médio do segmento AC, prolonga-se o segmento $\overline{BM}$ até o ponto E de forma que $BM = ME$ (Figura 13). Como $AM = MC$, $BM = ME$, $A\hat{M}B = E\hat{M}C$, os triângulos AMB e EMC são congruentes pelo caso LAL (Seção 2.1). Logo, $M\hat{C}E = B\hat{A}M$.

Figura 13 – Demonstração do Teorema do Ângulo Externo



Fonte: Produzido pelo autor

Como o ângulo $M\hat{C}E$ é interno ao ângulo $A\hat{C}D$, podemos afirmar que $A\hat{C}D > M\hat{C}E \implies A\hat{C}D > B\hat{A}M$. Analogamente, $A\hat{C}D > A\hat{B}C$.

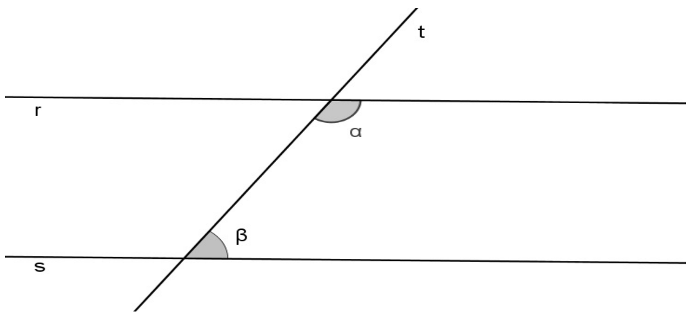
□

Proposição 1 (Proposição 28 do Livro 1 de Euclides)**.** *Sejam duas retas r e s cortadas por uma terceira reta t. Se a soma dos ângulos internos que estão de um mesmo lado da reta t é 180, então r e s são paralelas.*

Demonstração. Sejam r e s, as retas cortadas pela reta t, α e β os ângulos colaterais internos (ver Figura 14), então devemos provar que,

$$\alpha + \beta = 180^\circ \implies r \cap s = \emptyset \implies r \parallel s. \tag{2.2}$$

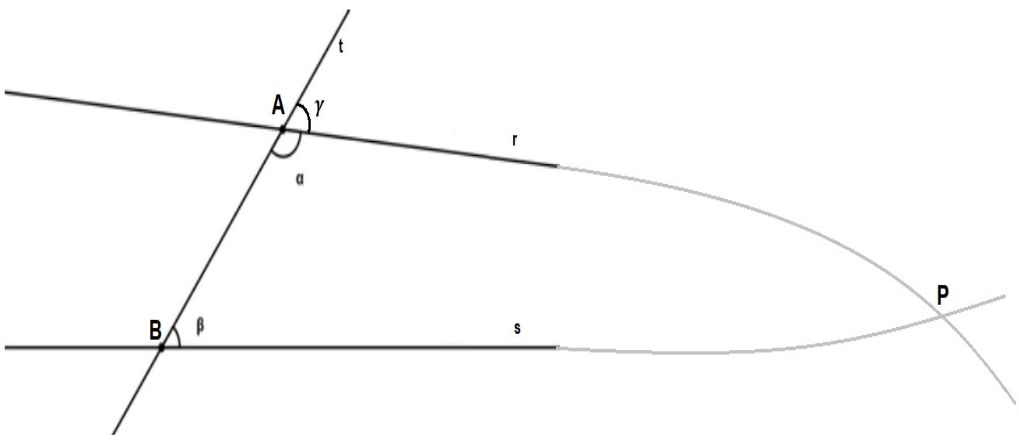
Figura 14 – α e β colaterais internos



Fonte: Produzido pelo autor

Suponha por absurdo que as retas r e s não são paralelas. Então existe um ponto $P = r \cap s$ e o triângulo ABP. Destacamos o ângulo externo γ como visto na Figura 15.

Figura 15 – Demonstração da congruência dos ângulos colaterais internos



Fonte: Produzido pelo autor

Por hipótese, α e β são suplementares e como α e γ também são suplementares, segue que $\beta = \gamma$ o que é uma contradição de acordo com o Teorema do Ângulo Externo (Teorema 2.3.1) que indica $\gamma > \beta$. Logo,

$$\alpha + \beta = 180° \Longrightarrow r \cap s = \emptyset \Longrightarrow r \parallel s \tag{2.3}$$

□

Axioma 2.3 (5° Postulado de Euclides)**.** *Se duas retas são cortadas por uma terceira formando ângulos internos cuja soma é menor que* 180°*, então essas duas retas são concorrentes no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor que* 180°.

Demonstração. Sejam r e s, as retas cortadas pela reta t, α e β os ângulos colaterais internos (ver Figura 16), então devemos provar que,

$$\alpha + \beta < 180° \Longrightarrow r \cap s \neq \emptyset. \tag{2.4}$$

A afirmação 2.4 equivale à relação

$$r \cap s = \emptyset \Longrightarrow \alpha + \beta \geq 180°. \tag{2.5}$$

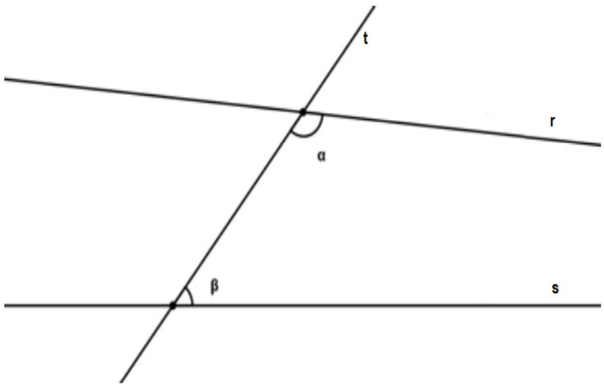
Mas, se ocorrer a desigualdade, a soma dos suplementos de α e β é menor que 180 graus, ou seja,

$$\alpha + \beta > 180° \Longrightarrow (180° - \alpha) + (180° - \beta) < 180° \Longrightarrow r \cap s \neq \emptyset,$$

o que é uma contradição. Logo, podemos reescrever, simbolicamente, o 5° Postulado de Euclides da seguinte forma,

$$r \cap s = \emptyset \Longrightarrow \alpha + \beta = 180°. \tag{2.6}$$

Figura 16 – $\alpha + \beta < 180°$



Fonte: Produzido pelo autor

□

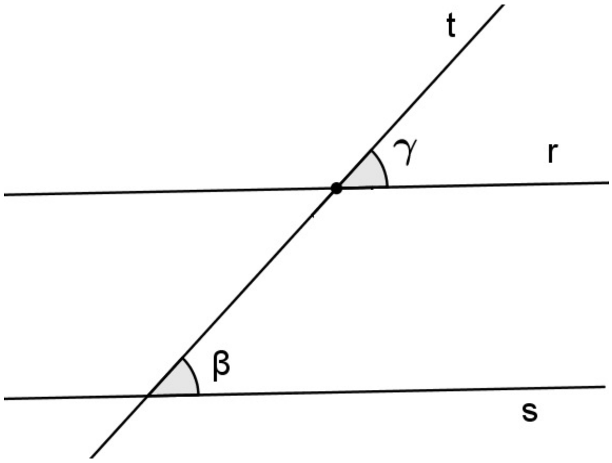
Proposição 2. *Sejam r e s retas cortadas pela reta t; β e γ dois ângulos colaterais. Se os ângulos β e γ são congruentes, então $r \parallel s$.*

Demonstração. Vamos provar que se

$$\beta = \gamma \Longrightarrow r \parallel s \tag{2.7}$$

que se traduz na Figura 17.

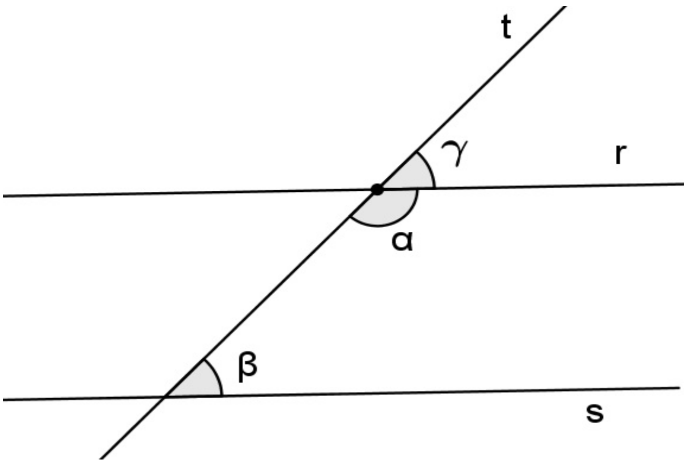
Figura 17 – Ângulos Correspondentes



Fonte: Produzido pelo autor

Considere o ângulo α suplementar a γ e colateral a β (Figura 18). Assim, como, por hipótese, $\beta = \gamma$, α e β são suplementares e pela Proposição 1 segue que r e s são paralelas demonstrando o resultado.

Figura 18 – Demonstração Ângulos Correspondentes



Fonte: Produzido pelo autor

□

2.4 Semelhança de Triângulos

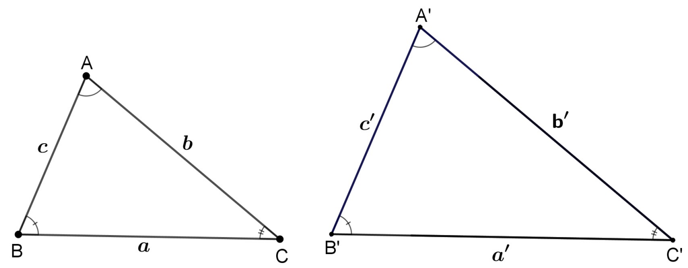
Intuitivamente, podemos afirmar que dois triângulos são semelhantes quando a ampliação de um deles e alguns movimentos rígidos, quando necessários, possibilitem a sobreposição perfeita sobre o outro triângulo.

Definição 3. *Triângulos Semelhantes são aqueles que possuem ângulos correspondentes de mesma medida e lados correspondentes proporcionais. Chamamos de homólogos os lados correspondentes.*

Teorema 2.4.1 (Semelhança de Triângulos)**.** *Dois triângulos possuem os mesmos ângulos internos se, e somente se, seus lados homólogos são proporcionais. De fato, esses triângulos serão semelhantes. Podemos representar a semelhança entre dois triângulos pela relação.*

$$\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \iff \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k \tag{2.8}$$

Figura 19 – Triângulos Semelhantes

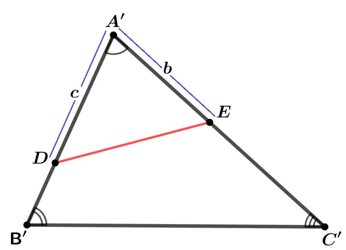


Fonte: Produzido pelo autor

Neste caso, dizemos que k é um número real denominado Razão de Semelhança ou Fator de Ampliação (ou de redução). Como existe uma correspondência biunívoca, $\frac{1}{k}$ também é uma Razão de Semelhança da proporção acima.

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Começamos construindo um triângulo sobre A'B'C' congruente ao triângulo ABC. Dado o triângulo $A'B'C'$, supondo $A'B' > AB$, existe um ponto D pertencente ao segmento $\overline{A'B'}$ tal que $A'D = AB = c$. Da mesma forma, supondo $A'C' > AC$, existe um ponto E pertencente a $\overline{A'C'}$ tal que $A'E = AC = b$ (Figura 20).

Figura 20 – $A'DE$ construído em $A'B'C'$



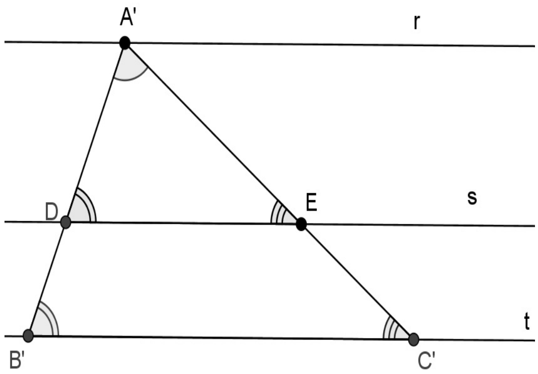
Fonte: Produzido pelo autor

Por construção, $A'D = AB$, $D\hat{A'}E = B\hat{A}C$ e $A'E = AC$, pelo caso LAL (Axioma 2.1), os triângulos $A'DE$ e ABC são congruentes. Consequentemente,

$$\hat{D} = \hat{B} = \hat{B'}$$
$$\hat{E} = \hat{C} = \hat{C'}.$$
$$\overline{DE} = \overline{BC} = a$$

Já que $\hat{D} = \hat{B'}$, podemos afirmar, pela Proposição 2, que $\overline{DE} \parallel \overline{B'C'}$. Sendo assim, podemos afirmar que existem três retas paralelas r, s e t, tal que $A' \in r$, $\overline{DE} \subset s$ e $\overline{B'C'} \subset t$ (Figura 21).

Figura 21 – $r \parallel s \parallel t$



Fonte: Produzido pelo autor

Segue imediatamente do Teorema de Tales Generalizado (Teorema 2.2.3),

$$\frac{EC'}{A'E} = \frac{DB'}{A'D} \Longrightarrow 1 + \frac{EC'}{A'E} = 1 + \frac{DB'}{A'D} \Longrightarrow \frac{A'E + EC'}{A'E} = \frac{A'D + DB'}{A'D} \Longrightarrow \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k.$$

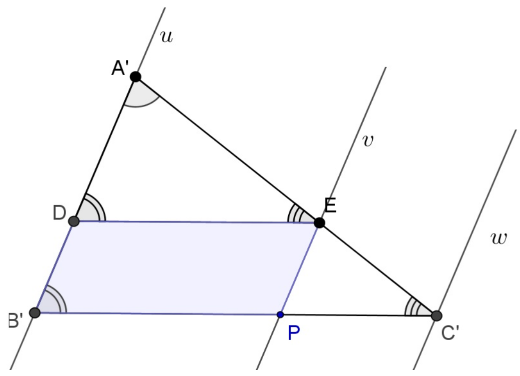
Para concluir esta etapa da demonstração vamos mostrar que $\dfrac{a'}{a} = k$. Seja u a reta que contem o lado $\overline{A'B'}$, v e w as retas paralelas a u passando por E e C', respectivamente (Figura 22). Assim, se $P = \overline{B'C'} \cap v$, segue pelo Teorema de Tales Generalizado (Teorema 2.2.3), mas agora referente às retas paralelas u, v e w, que,

$$\frac{PC'}{B'P} = \frac{EC'}{A'E} \Longrightarrow 1 + \frac{PC'}{B'P} = 1 + \frac{EC'}{A'E} \Longrightarrow \frac{B'P + PC'}{B'P} = \frac{A'E + EC'}{A'E}.$$

Já que $DEPB'$ é um paralelogramo, podemos afirmar que $B'P = DE = BC = a$. Logo,

$$\frac{B'P + PC'}{B'P} = \frac{A'E + EC'}{A'E} \Longrightarrow \frac{B'C'}{DE} = \frac{A'C'}{A'E} \Longrightarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = k.$$

Figura 22 – $u \parallel v \parallel w$

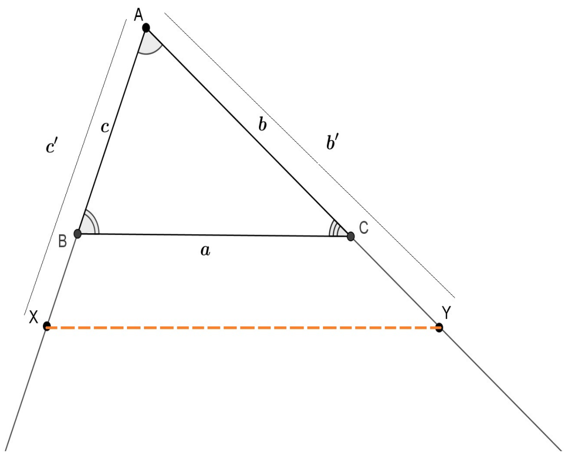


Fonte: Produzido pelo autor

($\Longleftarrow$) Para finalizar esta demonstração temos que mostrar que a relação $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{c'}{c}$ implica na congruência dos ângulos correspondentes dos dois triângulos.

Optamos por construir um triângulo sobre ABC e mostrar que é congruente ao triângulo A'B'C'. Com isso, considerando, sem perda de generalidade, um $k > 1$ a constante de proporcionalidade, tal que $k = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$. Prolongamos os lados AB e AC, como visto na Figura 23, marcamos na semirreta AB o ponto X de forma que $AX = k \cdot c = c'$ e na semirreta AC o ponto Y de forma que $AY = k \cdot b = b'$, obtendo o triângulo AXY.

Figura 23 – Prolongamento dos lados AB e AC



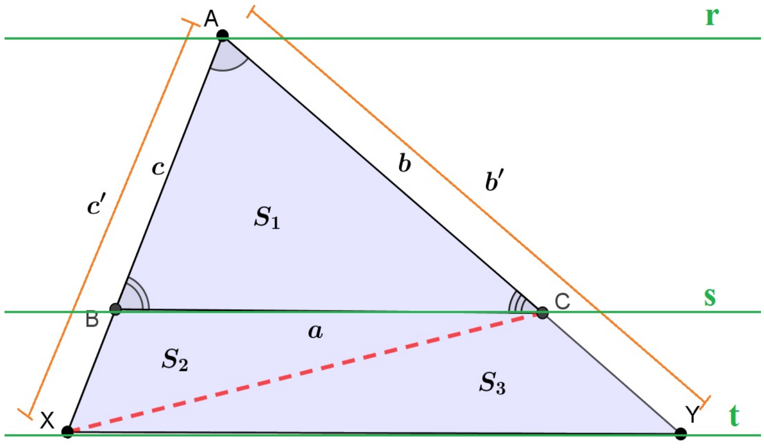
Fonte: Produzido pelo autor

Tendo três retas r, s e t, tal que $A \in r$, $\overline{BC} \subset s$ e $\overline{XY} \subset t$ e a hipótese $\frac{c'}{c} = \frac{b'}{b} = k$, podemos escrever,

$$\frac{AX}{AB} = \frac{c'}{c} = \frac{b'}{b} = \frac{AY}{AC}.$$

Logo, as retas r, s e t são paralelas pela Recíproca do Teorema de Tales (relação 2.1).

Figura 24 – $r \parallel s \parallel t$ no triângulo AXY



Fonte: Produzido pelo autor

Já que $s \parallel t$, pela relação (2.6),

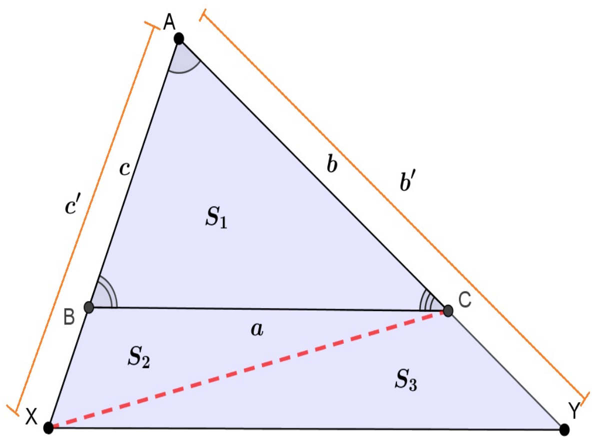
$$A\hat{X}Y + X\hat{B}C = 180^\circ \Longrightarrow A\hat{X}Y + 180^\circ - A\hat{B}C = 180^\circ \Longrightarrow A\hat{X}Y = A\hat{B}C.$$

Analogamente, $A\hat{Y}X = A\hat{C}B$. Concluindo que os triângulos ABC e AXY têm ângulos correspondentes de mesma medida.

Se o triângulo AXY tiver o lado AX medindo a, será congruente ao triângulo $A'B'C'$ pelo Caso LLL (Teorema 2.1.2). É o que vamos mostrar agora.

Ao Traçar o segmento XC teremos o triângulo AXY dividido em três triângulos de áreas S_1, S_2 e S_3, como visto na Figura 25.

Figura 25 – ÁREA de AXY



Fonte: Produzido pelo autor

$$S_1 = [ABC], S_2 = [BCX], S_3 = [CXY].$$

Olhando para o triângulo AXC com ceviana BC, aplicamos o Teorema 2.2.1, obtendo,

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{BX}{c} \Longrightarrow 1 + \frac{S_2}{S_1} = 1 + \frac{BX}{c} \Longrightarrow \frac{S_1 + S_2}{S_1} = \frac{c + BX}{c} \Longrightarrow \frac{S_1 + S_2}{S_1} = \frac{c'}{c}.$$

Por hipótese, $\frac{c'}{c} = k$, então

$$\frac{S_1 + S_2}{S_1} = k \Longrightarrow S_1 + S_2 = k \cdot S_1. \tag{2.9}$$

Olhando para o triângulo AXY com ceviana XC, e aplicando novamente o Teorema 2.2.1, temos,

$$\frac{S_3}{S_1 + S_2} = \frac{CY}{b} \Longrightarrow 1 + \frac{S_3}{S_1 + S_2} = 1 + \frac{CY}{b} \Longrightarrow \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_1 + S_2} = \frac{b + CY}{b} \Longrightarrow \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_1 + S_2} = \frac{b'}{b}.$$

Por hipótese, $\frac{b'}{b} = k$, então

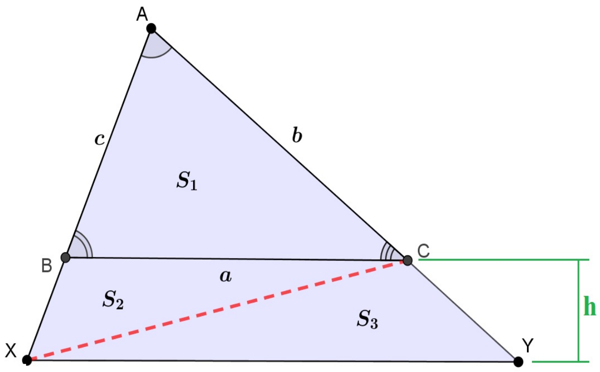
$$\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_1 + S_2} = k \Longrightarrow S_1 + S_2 + S_3 = k \cdot S_1 + k \cdot S_2. \tag{2.10}$$

Da diferença entre (2.10) e (2.9), segue que,

$$S_3 = k \cdot S_2 \tag{2.11}$$

Sabendo que $s \parallel t \Longrightarrow \overline{BC} \parallel \overline{XY}$. Consequentemente, os triângulos BCX e CXY têm a mesma altura h como visto na Figura 26.

Figura 26 – Triângulos de mesma altura



Fonte: Produzido pelo autor

Assim, $S_2 = \frac{(BC) \cdot h}{2}$, $S_3 = \frac{(XY) \cdot h}{2}$ e da igualdade (2.11), segue que

$$S_3 = k \cdot S_2 \Longrightarrow \frac{(XY) \cdot h}{2} = k \cdot \frac{(BC) \cdot h}{2} \Longrightarrow XY = k \cdot BC \Longrightarrow XY = k \cdot a = a'.$$

Já que $\overline{AX} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AY} \equiv \overline{A'C'}$ e $\overline{XY} \equiv \overline{B'C'}$, os triângulos AXY e $A'B'C'$ são congruentes pelo Caso 3 (Teorema 2.1.2). Assim, por transitividade, os triângulos ABC e $A'B'C'$ possuem ângulos internos de mesma medida. $\square$

3 Vivência

Aplicamos uma sequência didática com o intuito de despertar no aluno o prazer de estudar a matemática. Estruturamos duas vivências que foram aplicadas aos alunos do 7º e 8º anos da Escola João Bento de Paiva, Itapissuma-PE, conduzindo o aprendizado por um caminho mais dinâmico, acrescentando experiência ao tradicional ensino da sala de aula.

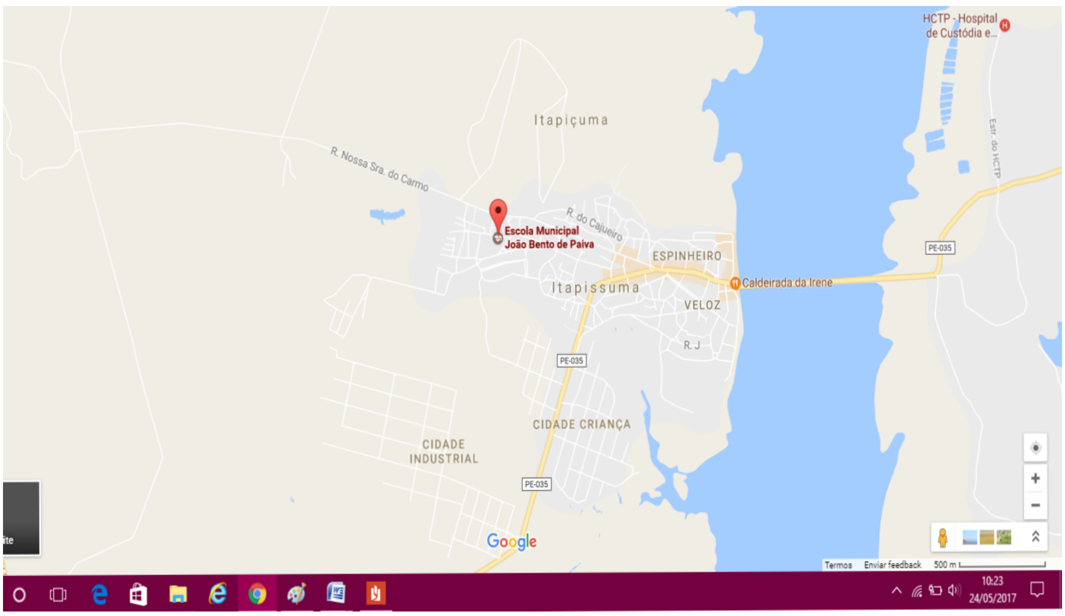
A única distinção realizada entre as séries de 7° ano e de 8° ano foi o uso de calculadora. Nas turmas de 7° ano foi permitido o uso, visto que os mesmos não possuíam domínio sobre as operações com números decimais. Já no 8° ano C, o uso de calculadora só foi autorizado para verificação de cálculos já realizados e, em último caso, quando não se conseguia realizar alguns cálculos mais trabalhosos.

As Atividades 1 e 2 tiveram cada uma duração de 4 aulas. Mais 5 aulas foram usadas para a conceituação e aplicação das avaliações relacionadas a essas atividades. Cada aula teve 50 minutos de duração.

3.1 Área de execução dos estudos e perfil do alunado

A escola em questão está situada na Rua Petronila Carneiro Barreiro, 35, Centro, Itapissuma-PE. As vivências ocorreram no turno da tarde, no 1° bimestre do ano letivo corrente. Na Figura 27, podemos observar sua localização.

Figura 27 – Localização da Escola João Bento de Paiva.



Fonte: Produzido pelo autor

O perfil dessas turmas é de alunos com grande dificuldade em matemática, muito dos quais não têm domínio sobre as operações fundamentais, habilidade que se espera que adquiram até o 5° ano. A indisciplina e violência nesta escola é algo corriqueiro, o que só dificulta o bom rendimento desses jovens nos estudos.

As turmas do 7° ano C, 7° ano D e 8° ano C, têm 33, 25 e 35 alunos, respectivamente, Figura 28. Os alunos são moradores dos bairros mais periféricos da cidade e convivem com o tráfico de drogas. A maioria deles são filhos ou netos de condenados, ou ex-condenados, pois suas famílias se mudaram para essa cidade por causa da proximidade à Penitenciária Agroindustrial São João, Itamaracá-PE.

Além disso, existem relatos de exploração infantil, sendo alguns usados como ambulantes na praia, ajudantes de pedreiro, para carregar frete com carro de mão, cobrador de transporte alternativo, entre outros.

Figura 28 – Turmas que realizaram a vivência.

Fonte: Produzido pelo autor

3.2 Atividade 1: Proporções na Folha A4 em sala

Nesta atividade orientamos os alunos para que os mesmos pudessem perceber as proporções existentes entre os lados de triângulos obtidos manipulando uma folha de papel A4, dobrando-a na diagonal. Vários triângulos foram construídos levantando um segmento perpendicular ao maior lado da folha com uma extremidade nesse lado e a outra na diagonal da folha.

Para isso, entregamos a cada aluno uma folha A4, junto com os materiais descritos abaixo, e dividimos a atividade em duas etapas.

Na primeira etapa os alunos foram orientados sobre a atividade e em seguida foram estimulados a encontrar valores dos novos segmentos relacionados. Tudo foi conduzido com o devido cuidado para não tirar dos alunos a chance de descobrirem as respostas sozinhos.

Na segunda etapa os alunos já tinham plena ciência das relações entre os segmentos. Aproveitamos esse fato para provocá-los em indagações mais complexas e para relacionar a ação a outros assuntos da grade curricular de matemática.

3.2.1 Etapa 1

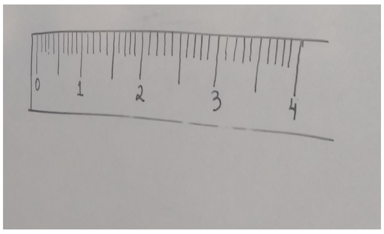
1. Materiais utilizados na atividade

    - Folha A4 (21 cm x 30 cm)
    - Régua numerada de 30 cm
    - Lápis
    - Calculadora

2. Procedimento

    Iniciamos a atividade entregando a cada aluno uma folha A4, uma régua de plástico numerada de 30 centímetros e um lápis. Em seguida, demos uma explicação prévia de como realizar medição e leitura através de uma régua simples, pois os alunos não sabiam utilizar a escala contida na régua.

    Figura 29 – Régua desenhada na lousa para explicar sua utilização

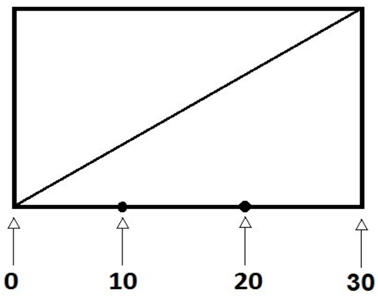
    

    Fonte: Produzido pelo autor

    A primeira parte da atividade consistiu em marcar no maior lado da folha um ponto a cada 10 cm e em traçar a diagonal da folha.

    Colocamos em prática as técnicas de leitura e medição utilizando a régua. Também solicitamos aos alunos que denominassem os pontos marcados no maior lado como 0 e 10, para os mais a esquerda, e 20 e 30 aos outros ponto como se vê na Figura 30.

Figura 30 – Indicações das medições e pontos da primeira atividade.



Fonte: Produzido pelo autor

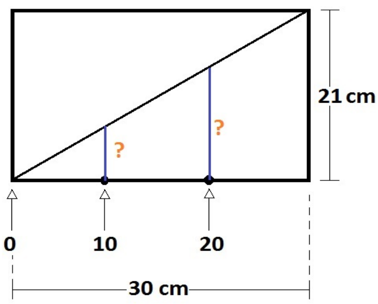
Com o uso da régua, os alunos que ainda não tinham percebido as dimensões da folha A4 puderam descobri-las e os que já sabiam, puderam confirmar, 21 cm no lado menor e, aproximadamente, 30 cm no lado maior. O lado maior da folha A4 tem 29,7 cm, mas orientamos usar 30 cm para facilitar a manipulação dos valores.

Neste momento da aula os alunos já apresentavam mais interesse do que de costume. E as primeiras demonstrações de curiosidade se revelaram ao perguntarem o nome do assunto que estava sendo dado. Esse só seria revelado em um momento posterior.

Em sequência, os alunos foram desafiados e instigados a descobrirem, sem o uso da régua, quais seriam os comprimentos dos segmentos perpendiculares ao maior lado que têm como uma das extremidades os pontos 10 e 20 marcados no lado maior, Figura 31. Para facilitar o entendimento do aluno, a pergunta foi realizada da seguinte forma:

> *Qual a medida do traço reto que "sobe" do 10 e do 20 na mesma "direção" do lado menor?*

Figura 31 – Medidas de segmentos verticais.



Fonte: Produzido pelo autor

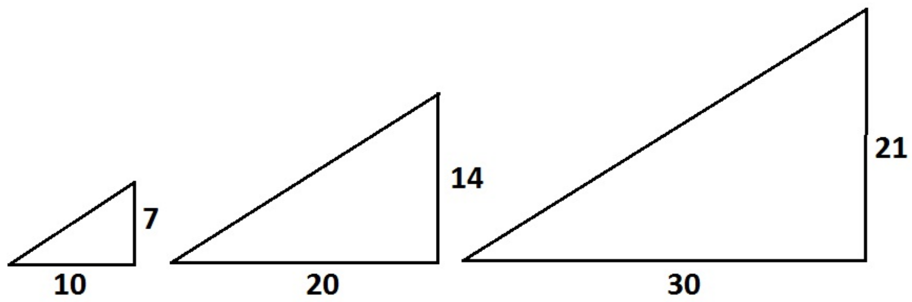
Minutos depois, alguns alunos responderam 7 e 14 centímetros. Indagados sobre como chegaram nesses resultados, responderam que,

> "se o segmento de 30 cm foi dividido em três partes iguais, então era só fazer o mesmo com o de 21 cm tendo três partes de 7 cm. Logo, o traço que parte do ponto 10 teria uma dessas partes (7), e o que parte do 20 teria duas dessas partes $(7 + 7 = 14)$".

Após escutar a linha de pensamento que levou esses alunos a descobrirem a medida dos seguimentos em questão, autorizamos o uso da régua para que confirmassem o quão correto estavam os valores encontrados.

Outro fato que os alunos observaram foi a formação de três triângulos e que a "medida de seus lados estavam na tabuada do número 10 e do 7", Figura 32, formando uma ligação com outros conteúdos já vivenciados. De certa forma, perceberam que os lados dos triângulos eram diretamente proporcionais aos lados homólogos.

Figura 32 – Lados diretamente proporcionais.



Fonte: Produzido pelo autor

A empolgação e disposição para aprender/estudar foi de fato a maior conquista obtida nesta experiência. Os alunos esqueceram as contrariedades e distrações de seu cotidiano que atrapalhavam o efetivo aprendizado dos conteúdos escolares, deixaram de lado a indisciplina e passaram a se comportar e participar das aulas de Matemática de forma mais adequada. Consequentemente, a atividade ativou uma relação afetiva com a plena ação de conquistar o saber.

O impacto desta atividade também despertou no professor responsável pela condução das ações, autor desta dissertação, a sensação de dever cumprido, visto que era muito difícil lecionar nestas turmas. Conseguir despertar a atenção e proporcionar a esses alunos a atitude de se colocarem dispostos a aprender, eram de fato suas maiores dificuldades e superá-las foi uma vitória.

3.2.2 Etapa 2

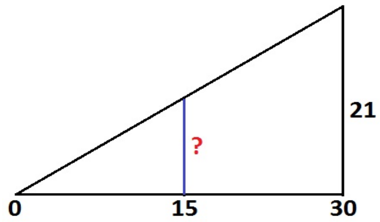
Diante dessa atitude positiva dos alunos, a Atividade 1 foi mais explorada aumentando-se o nível de dificuldade das questões e já considerando o triângulos retângulo de forma mais explicita. Utilizamos segmentos perpendiculares ao maior lado da folha posicionados de forma análoga à 1ª etapa, mas desta vez os alunos teriam um nível de dificuldades maior para encontrar os valores desconhecidos.

O desafio dos alunos foi equivalente a determinar o valor de um dos catetos, conhecido o valor do outro, do triângulo retângulo que tem sua hipotenusa contida na diagonal e um dos catetos contido no maior lado da folha que lhes foi entregue. Este valor encontrado usando apenas cálculos manuais eram posteriormente conferidos com o auxílio da calculadora.

Segue a primeira pergunta realizada nesta etapa da Atividade 1. A mesma ainda foi relativamente simples, mas não pode ser desmerecida quanto ao nível de abstração:

> *Qual a medida do segmento paralelo ao lado menor que parte do ponto central do lado maior?*

Figura 33 – Segmento perpendicular à base de um triângulo no seu ponto médio.



Fonte: Produzido pelo autor

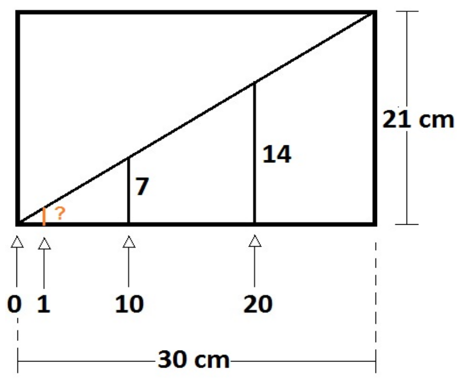
Nessa questão os alunos usaram a mesma lógica das anteriores. Perceberam que 30 é o dobro de 15, logo 21 equivaleria ao dobro do valor desconhecido. Então, formalizamos assim,

$$\frac{21}{30} = \frac{?}{15}. \tag{3.1}$$

Nesta etapa da vivência o aluno já compreendia a divisão como operação inversa da multiplicação, percebendo e depois calculando também o valor desconhecido em (3.1) como a metade de 21. Posteriormente, usaram novamente a régua para conferir através de medição a equivalência com o valor que encontraram na divisão de 21 por 2. Uma nova pergunta foi feita:

> *Qual o valor do segmento que sobe a 1 cm do ponto 0 até a diagonal?*

Figura 34 – Segmento perpendicular ao maior lado distante 1 cm do ponto 0.



Fonte: Produzido pelo autor

De posse dessas informações os alunos continuaram usando a linha de raciocínio referente à proporcionalidade. Formulamos assim,

$$\frac{14}{20} = \frac{7}{10} \tag{3.2}$$

$$\frac{7}{10} = \frac{?}{1} \tag{3.3}$$

Os alunos conseguiram perceber que encontraríamos (3.2) dividindo-se o numerador e denominador da segunda fração por 2. Logo, como o denominador da primeira fração de (3.3) é 1, equivalente a razão do denominador 10 por 10, para encontrar o valor desconhecido bastava dividir o numerador 7 por 10.

Ao medir o comprimento do segmento de medida desconhecida na Figura 34, os alunos encontraram 0,7 cm. Valor esse igual ao resultado calculado da divisão de 7 por 10.

Com isso abordamos o algoritmo da divisão e números decimais. Os alunos do 8° ano realizaram esse cálculo com mais facilidade, pois tinham estudado divisão recentemente. No caso das turmas de 7º ano houve uma maior dificuldade e liberamos o uso da calculadora, mas isso não impediu que os alunos tivessem uma melhor compreensão acerca dos números decimais.

Uma última questão desta atividade foi:

> *"Qual o valor para o comprimento da base de um triângulo construído na folha A4, onde sua altura mede 1 e sua hipotenusa está contida na diagonal desta folha".*

Estimulados e empolgados com as ações, os alunos rapidamente usaram o mesmo procedimento anterior para encontrar o valor desejado. Como o valor desejado resultou em uma dízima periódica, $1,428571428571428 57\ldots$, consideramos apenas o valor aproximado para uma casa decimal após a vírgula para facilitar a comparação com a medição através da régua.

É importante destacar aqui que os alunos do 8º ano já tinham estudado as dízimas periódicas em outro momento, o que não podemos afirmar em relação aos do 7º anos. Servindo como aperfeiçoamento para a turma do 8º ano e descoberta de uma nova forma de representar uma divisão para os alunos dos 7º.

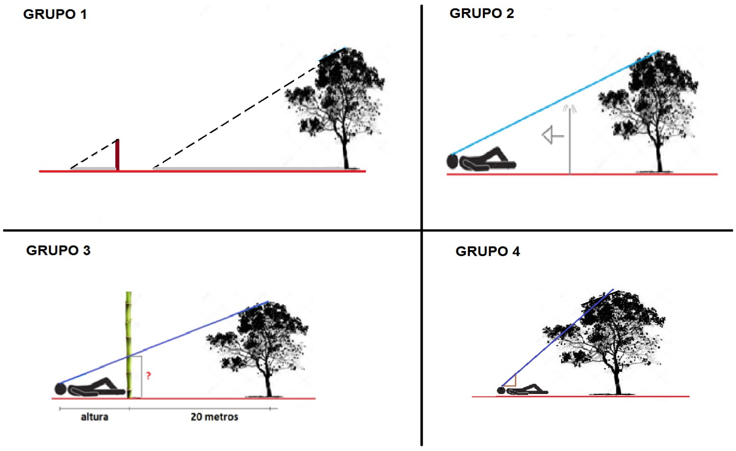
Esta atividade propiciou que os alunos tivessem um maior domínio das operações elementares. Em especial a divisão e multiplicação, tendo não só uma maior facilidade de calcular como também uma visão mais concreta de seu uso.

Outro conteúdo que foi abordado em nossa ação foi Números Decimais. Desenvolvendo uma compreensão de posicionamento na reta, de magnitude e de equivalência a uma fração, os alunos passaram a ver os números decimais como valores mais comuns a seu cotidiano.

3.3 Atividade 2: Calcular a altura de uma árvore

Nesta atividade os alunos foram conduzidos à aferição da altura de uma árvore de quatro formas diferentes. Para isso, ainda na sala de aula, dividimos a turma em quatro grupos com número de integrantes variando de 6 a 9 alunos. Entregamos, a cada equipe, uma sequência de ações diferentes entre si, com as devidas orientações, conforme se vê Figura 35. A Figura 36, representa a árvore em questão.

Figura 35 – Apresentação em sala das modalidades de medições.



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 36 – A árvore objeto de estudo da atividade 2.

Fonte: Produzido pelo autor

Grupo 1. Utilização da sombra da árvore para descobrir sua altura.

O Grupo 1, ficou responsável pela utilização do comprimento das sombras de uma árvore e de uma régua na vertical para descobrir a altura da árvore. Nos 7º ano C e D, o número de integrantes foram 7 e 6, respectivamente. O Grupo 1 do 8° ano C foi composto por 8 alunos.

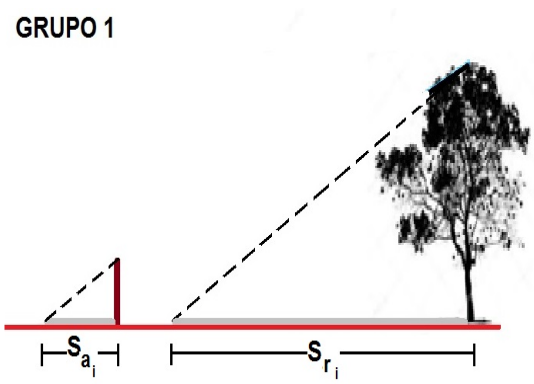
1. Materiais Utilizados

   - Régua de madeira de 1 metro
   - Trena de 5 metros
   - Caderno para anotação dos dados
   - Lápis

2. Procedimentos

   Aproveitando um dia ensolarado, os alunos realizaram a medição da sombra da árvore e da régua de 1 metro posicionado reto ao chão assim como a árvore, Figura 37. Esse procedimento foi repetido mais quatro vezes com um intervalo de 30 minutos entre as medições, pois a sombra tem seu comprimento alterado ao longo do tempo. É sabido desse fato porque a Terra está em movimento de rotação o que muda a posição da entrada dos raios do sol em nosso planeta. Um aluno da equipe ficou responsável pela anotação dos valores obtidos.

   Figura 37 – Calcular altura sabendo a medida da sombra.

   Fonte: Produzido pelo autor

3. Cálculo da altura da árvore

   De volta para a sala de aula para determinar a altura da árvore, eles foram orientados a dividir o comprimento da sombra da árvore, S_{a_i}, pelo comprimento da sombra da régua, S_{r_i}, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Ou seja, sendo h_i a altura da árvore,

$$h_i = \frac{S_{a_i}}{S_{r_i}}.$$

Como houve cinco alunos que realizaram as medições, computamos a média aritmética, m, das três alturas encontradas para a árvore com o intuito de obter um valor mais aproximado, ou seja,

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{5} h_i}{5},$$

cujo resultado consta na Tabela 1.

Tabela 1 – Comprimento da árvore por turma (m).

7° Ano C	7° Ano D	8° Ano D
17,58	17,83	17,72

Grupo 2. Deslocamento de uma barra reta ao solo.

O Grupo 2, utilizou os procedimentos de medida através do deslocamento de uma barra reta ao solo. Nos 7° ano C e D, o número de integrantes foram 8 e 7, respectivamente. No caso do 8° ano C, a quantidade de integrantes foi 9.

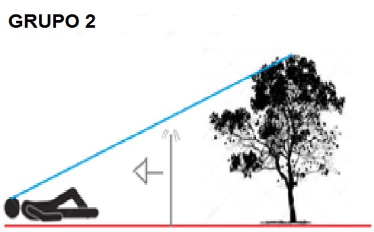
1. Materiais Utilizados

   - Régua numerada de metal de 1,45 m
   - Trena de 5 metros
   - Caderno para anotação dos dados
   - Lápis

2. Procedimentos

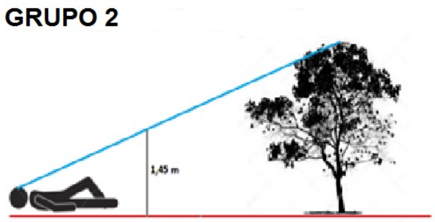
   Um aluno foi orientado a se deitar no chão de forma que seus pés, sua cabeça e o tronco da árvore estivessem alinhados. Com esse aluno olhando para o topo da árvore, outro integrante do grupo aproximava a régua, mantendo-a o mais perpendicular ao solo possível como visto na Figura 38, até que a linha imaginária, que representa a visada ao topo da árvore, entre em contato com a extremidade da régua que não toca o solo, Figura 39.

Figura 38 – Régua perpendicular se aproximando.



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 39 – Régua perpendicular na posição desejada.



Fonte: Produzido pelo autor

Observamos que dependendo da distância que o observador está da árvore pode ser necessário um ajuste na sua posição para não comprometer a condição de alinhamento (a régua poderia passar dos pés do aluno).

Anotamos os valores referentes à distância da régua à árvore e da régua ao topo da cabeça do observador. Refizemos esse procedimentos duas vezes trocando o aluno que deitava.

3. Cálculo da altura da árvore

Voltamos à sala para fazer o cálculo da altura da árvore, h_i. O grupo foi orientado a dividir o produto entre 1,45 m, equivalente ao comprimento da régua, e a medida da distância do topo da cabeça à árvore, d_{t,a_i}, pela distância da régua ao topo da cabeça do indivíduo deitado, d_{t,r_i}. A distância do topo da cabeça à árvore, d_{t,a_i}, foi obtida por adição das duas medidas de distância realizadas (da barra ao topo da cabeça e da barra à árvore). Assim,

$$h_i = \frac{1,45}{d_{tr_i}} \cdot d_{ta_i}.$$

Como houve três alunos que deitaram para realizar a atividade, computamos a média aritmética, m, das três alturas encontradas para a árvore com o intuito de obter um valor mais aproximado, ou seja,

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{3} h_i}{3},$$

cujo resultado consta na Tabela 2,

Tabela 2 – Comprimento da árvore por turma (m).

7° **Ano C**	7° **Ano D**	8° **Ano D**
17,55	17,62	17,49

Grupo 3. Barra fixa reta ao chão para calcular a altura da árvore.

O Grupo 3, usou uma barra fixa perpendicular ao chão, distante 20 metros, para determinar a altura da árvore. Nos 7° ano C e D, o número de integrantes foram 9 e 6, respectivamente. No caso do 8° ano C, 9 alunos integraram o Grupo 3.

1. Materiais Utilizados

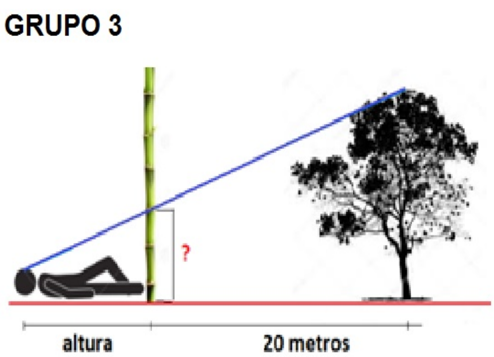
    - Vara de bambu reta
    - Trena de 5 metros
    - Caderno para anotação dos dados
    - Lápis
    - Piloto atômico

2. Procedimentos

    Inicialmente fixamos a vara de bambu a 20 metros de distância da árvore. Em seguida, um aluno deitou-se no chão olhando na direção da árvore e com os pés encostados na vara de forma que seu corpo, a vara e o tronco da árvore ficaram alinhados, como se vê na Figura 40.

    Em seguida, pedimos a um aluno para olhar para o topo da árvore; a linha imaginária de visada encontra a vara de bambu em um ponto que é marcado com um piloto atômico por outro integrante do grupo e anotamos a distância desta marca até o solo e a altura do aluno que deitou. Refizemos os procedimentos duas vezes trocando o aluno que deitava.

Figura 40 – Barra fixa.



Fonte: Produzido pelo autor

3. Cálculo da altura da árvore

    Para cada aluno que deitou dividimos o valor medido do ponto P marcado no bambu até o chão, $d_{P,chao_i}$, pela respectiva altura do aluno, h_{aluno_i}. O valor encontrado foi multiplicado pela distância do topo da cabeça à árvore, d_{c,a_i} (equivalente a soma entre a altura de cada aluno com 20 metros). Assim,

$$h_i = \frac{d_{P,chao_i}}{h_{aluno_i}} \cdot d_{c,a_i}.$$

Em seguida, realizamos a média aritmética das medidas da altura da árvore de cada aluno, que neste caso foram 3, ou seja,

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{3} h_i}{3},$$

cujo valor está descrito na Tabela 3.

Tabela 3 – Comprimento da árvore por turma (m).

7° **Ano C**	7° **Ano D**	8° **Ano D**
17,72	17,85	17,65

Grupo 4. Triângulo retângulo isósceles

No Grupo 4, usamos um triângulo isósceles para determinar a altura da árvore em questão. Nos 7° ano C e D, o número de integrantes foram 9 e 6, respectivamente. No caso do 8° ano C, 9 alunos integraram o Grupo 4.

1. Materiais Utilizados

   - Esquadro isósceles de madeira com catetos medindo 45 cm
   - Trena de 5 metros
   - Caderno para anotação dos dados
   - Lápis

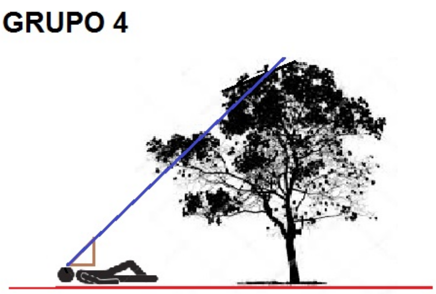
2. Procedimentos

   Neste grupo selecionamos um aluno para fazer as anotações e os outros fizeram as ações. Inclusive, o aluno responsável pelas anotações também ajudava orientando o aluno que realizava a visada a manter o posicionamento correto.

   Pedimos a um aluno do grupo que deitasse com o corpo esticado e alinhado com a árvore. Orientamos que posicionasse o esquadro sobre seu rosto com o lado menor paralelo ao solo e o maior lado contido na linha imaginária que vai do olho ao topo da árvore, como mostra a Figura 41. Para isso, o aluno se deslocou diversas vezes, aproximando-se ou afastando-se, até encontrar a posição certa para realizar a atividade. Refizemos os procedimentos duas vezes trocando o aluno que deitava.

   Nesse caso, para cada aluno deitado, foi medido e registrado a distância dos olhos ao pé do tronco da árvore.

Figura 41 – Uso do triângulo retângulo isósceles para achar altura.



Fonte: Produzido pelo autor

3. Cálculo da altura da árvore

Esse grupo teve um considerável trabalho para conseguir fazer com que cada integrante se posicionasse de forma correta com o esquadro na posição adequada (Figura 42), mas teve a menor quantidade de cálculo para determinar a altura da árvore. De fato, os valores encontrados já representavam a altura da árvore, como foram informados, posteriormente, em sala de aula. Assim, foram realizadas apenas a média aritmética dos valores encontrados para obter o valor mais aproximado do valor real, dada por

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i}{n},$$

n equivale ao número de alunos que deitaram para fazer os procedimento de cada turma.

Nesse caso, os valores encontrados para a altura da árvore estão descritos na Tabela 4.

Tabela 4 – Comprimento da árvore por turma (m).

7° **Ano C**	7° **Ano D**	8° **Ano D**
17,60	17,75	17,72

Figura 42 – Alunas realizando a atividade 2.

Fonte: Produzido pelo autor

3.4 Conceituação e Manipulação

No dia seguinte, de volta à sala de aula, a vivência foi usada como ponto de partida para o ensinamento teórico, o que notadamente tornou o processo de conceituação mais fácil. Os alunos adquiriram experiência através da vivência.

3.4.1 Introdução da Teoria

Ensinamos, a partir das duas atividades, o conteúdo de Semelhança de Triângulo que foi compreendido sem muita dificuldade. A todo tempo eles relacionavam o que tinha sido feito fora de sala e com a folha A4 ao que estava sendo exposto no quadro.

Introduzimos a definição de Semelhança de Triângulos (Definição 3) e o seu Teorema (Teorema 2.4.1), sem realizar a demonstração do teorema. Nos dedicamos, principalmente nos primeiros exemplos, em relacionar a teoria às experiências que proporcionamos.

Na exemplificação da parte teórica os alunos tiveram a oportunidade de ver outras aplicações que poderiam ser feitas com o conhecimento adquirido. Desenvolveram então a capacidade de abstrair uma situação-problema e usar seus conhecimentos para encontrar sua solução.

Após a abordagem teórica, proporcionamos atividades, em sala de aula. As primeiras eram relativamente fáceis, simples manipulações, e gradativamente aumentamos o nível de dificuldade, introduzimos situações-problemas e aplicações, algumas das quais retiradas de provas anteriores da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE) e do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB).

Durante a resolução dessas atividades auxiliamos os alunos o mínimo possível, deixando que eles elaborassem sua própria estratégia de resolução. Posteriormente, fizemos no quadro a resolução da atividade e deixamos a cargo do aluno a correção de sua própria atividade para que percebessem, caso fosse necessário, onde erraram.

3.4.2 Compreensão do conteúdo e comportamento

A compreensão mostrou-se muito mais fácil quando o aluno foi capaz de associar ao conteúdo teórico uma situação da vida real na qual eles atuaram, agiram, se mobilizaram para produzir de forma simples. Essa compreensão está atrelada à utilização responsável de três componentes fundamentais pelo facilitador do ensino: a Conceituação, Manipulação e Aplicação (Seção 1.1). Teríamos pouco êxito se nos concentrássemos apenas na Conceituação para o ensinamento do conteúdo. Da mesma forma, a dedicação exclusiva à Aplicação tornaria o aprendizado limitado e sem embasamento teórico, tornando o saber limitado.

Destacamos ainda que foi possível perceber entre os grupos um clima sadio de competição. Cada aluno quis dar o seu melhor para que seu grupo chegasse à altura correta da árvore. Eles perceberam que a menor alteração no procedimento de medição poderia variar muito o valor da altura da árvore. Isso fez com que a dedicação à atividade fosse máxima.

Eles tiveram também a oportunidade de vivenciar a matemática de uma forma simples e assim perceber que a matemática pode estar em coisas simples, palpáveis, tangíveis, levando a um melhor entendimento desta disciplina tão odiada por parte dos estudantes.

A felicidade apresentada por esses alunos ao viver a matemática e perceber que algo que consideravam tão difícil era acessível foi tanta que os mesmos não queriam o fim da aula, um dos grupos chegou a repetir as medições e cálculos no intervalo. Isso nos mostrou que vivenciar a matemática por meio de uma ação antes de iniciar uma explanação teórica, desperta o interesse, e que nesse caso não precisamos de ferramentas muito sofisticadas para isso.

4 Resultados e Discussões

Este capítulo contém uma análise da nossa experiência. Para isso, aplicamos uma avaliação para verificar o rendimento dos alunos e fizemos um questionário para saber a receptividade dos alunos quanto à metodologia.

4.1 Avaliação

Após o término de nossa vivência realizamos uma verificação de aprendizado com o intuito de constatar o impacto de nossas ações. Na Figura 43, apresentamos as questões que foram aplicadas e usadas como uma parte da nota do primeiro bimestre do corrente ano letivo. A mesma prova foi aplicada nas três salas, sendo permitido o uso de calculadora apenas nas turmas de 7º ano. A primeira questão nos permite avaliar se o aluno entendeu a teoria. Na segunda questão o aluno mostra sua capacidade de tomada de decisão na escolha da melhor ferramenta que utilizará para encontrar a solução. Nas questões três e quatro, o aluno prova seu poder dedutivo e o quanto está apto no manuseio do conteúdo. Na quinta e última questão, assim como na segunda, o aluno mostra se tem a habilidade de aplicar os conhecimentos adquiridos.

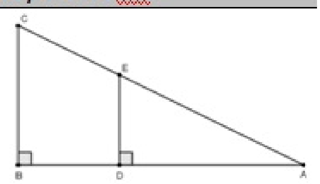
Figura 43 – Verificação de aprendizado

PREFEITURA MUNICIPAL DE ITAPISSUMA SECRETARIA DE EDUCAÇÃO ESCOLA MUNICIPAL JOÃO BENTO DE PAIVA		
PROFESSOR: JOSÉ IGOR GONÇALVES DA SILVA	DATA: 03/04/2017	Turma:
ALUNO (A):		
VERIFICAÇÃO PARCIAL DE APRENDIZADO DO 1° BIMESTRE – MATEMÁTICA		
QUESTÕES RETIRADAS DO PORTAL DA MATEMÁTICA, OBMEP. 8° ANO / 9° ANO E.F.		

1. Observe a figura abaixo e responda:

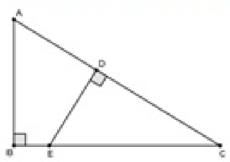
a) Os triângulos ΔABC e ΔADE são semelhantes? Explique sua afirmação.

b) Caso sejam semelhantes, quais são os lados homólogos?

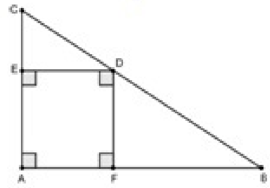


2. Como João pode medir a altura de um poste, conhecendo sua altura, 1,60m, o comprimento de sua sombra, 2m, o comprimento da sombra do poste no mesmo instante que mediu sua sombra, 7m?

3. Sabendo que AB = 15, BC = 20, AD = 10 e DC = 15, determine a medida de $\overline{DE}$ na figura abaixo.

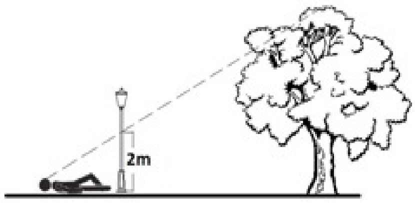


4. Na figura abaixo, temos AC = 4 e AB = 6. Determine o perímetro do quadrado AEDF.



QUESTÃO ELABORADA PELO PROFESSOR.

5. Antônio está deitado em um chão plano de forma que sua cabeça, seus pés, um poste reto ao chão e uma árvore reta ao mesmo chão estão alinhados. Ao olhar para o ponto mais alto da árvore a linha imaginária entre o olho de Antônio e o topo da árvore corta o poste a 2 metros do chão como mostra a figura.



Estando a cabeça de Antônio a 1,80 m do poste e o poste a 4,20 metros, qual a altura da árvore?

Fonte: Produzido pelo autor

4.2 Resultados da Verificação de Aprendizado

De uma forma geral, podemos dizer que os resultados foram positivos e bastante animadores. Os alunos mostraram ter um bom domínio do conteúdo ensinado, bem como sua aplicabilidade. Nas Tabelas 5 e 6, mostramos o número de acertos por questão e o percentual de acerto de cada turma, respectivamente.

Apenas uma das turmas, 7° ano C, mostrou alguma dificuldade. Mais precisamente nas questões 2 e 3. Esse fato pode se dever à falta de atenção ou problema de leitura. Como professor responsável pelas turmas de matemática desta escola, afirmamos, baseados nas avaliações continuadas, que os alunos não tinham nenhum conhecimento sobre proporções, apresentando um avanço significativo.

Tabela 5 – Número de Acertos por questão

Turmas	Alunos	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5
7° Ano C	33	28	19	19	24	27
7° Ano D	25	22	23	20	18	22
8° Ano C	35	31	27	28	25	29
TOTAL	93	81	69	67	67	78

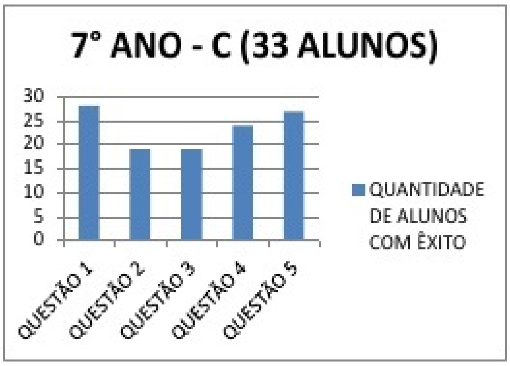
Tabela 6 – Percentual de acerto por questão

Turmas	Alunos	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5
7° Ano C	33	84,8%	58%	58%	73%	82%
7° Ano D	25	88%	92%	80%	72%	88%
8° Ano C	35	88,6%	77%	80%	71%	83%
TOTAL	93	87,1%	74%	72%	72%	84%

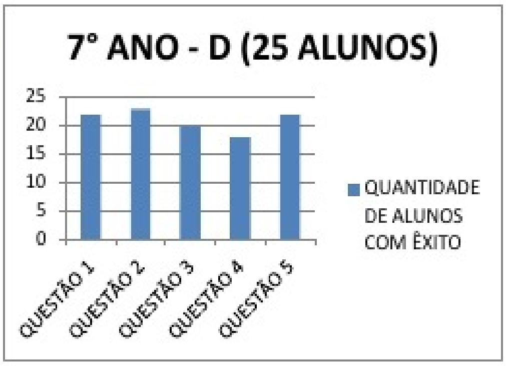
Os resultados das avaliações também podem ser vistos por turma na Figura 44, onde mostramos o número de acertos graficamente.

Figura 44 – Resultado da Verificação de aprendizado.

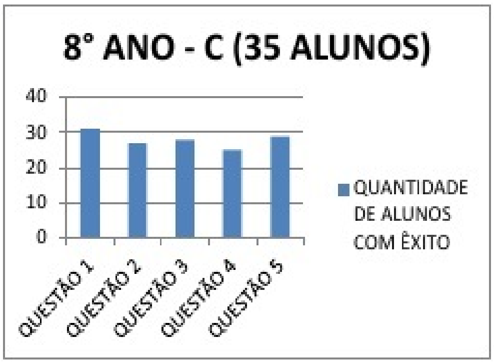
7° ANO C	
TOTAL DE ALUNOS	33
ATIVIDADE	QUANTIDADE DE ALUNOS COM ÊXITO
QUESTÃO 1	28
QUESTÃO 2	19
QUESTÃO 3	19
QUESTÃO 4	24
QUESTÃO 5	27



7° ANO D	
TOTAL DE ALUNOS	25
ATIVIDADE	QUANTIDADE DE ALUNOS COM ÊXITO
QUESTÃO 1	22
QUESTÃO 2	23
QUESTÃO 3	20
QUESTÃO 4	18
QUESTÃO 5	22



8° ano C	
TOTAL DE ALUNOS	35
ATIVIDADE	QUANTIDADE DE ALUNOS COM ÊXITO
QUESTÃO 1	31
QUESTÃO 2	27
QUESTÃO 3	28
QUESTÃO 4	25
QUESTÃO 5	29



Fonte: Produzido pelo autor

4.3 Mudanças na relação com a Matemática

Um dos impactos que pudemos observar como resultado das ações foi uma mudança de atitude dos alunos diante da matemática nas aulas. A busca pela descoberta, a curiosidade, o desejo de viver novos momentos de aprendizado, passou a fazer parte desses alunos. Um bom exemplo é o fato de cinco deles criarem um grupo de estudo para se prepararem para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Fizemos uma pesquisa de opinião com o intuito de constatar essa mudança observada na atitude dos alunos. Abaixo segue o formulário que aplicamos com a amostra de algumas respostas escolhidos aleatoriamente.

1. **Você gostou das aulas extraclasses? Por quê?**
    - Sim. Porque a gente aprendeu várias formas de medir coisas.
    - Sim. Porque foi diferente.
    - Sim. Eu gostei muito do assunto porque fiz parte da aula.
    - Sim. Porque nós aprendemos brincando.
    - Sim. Porque foi muito legal medir a árvore.
2. **Você achou a aula na sala mais interessante após as atividades fora de sala?**
    - Sim. Eu achei melhor porque a gente aprendeu no quadro algo que a gente já tinha feito.
    - Sim. Porque quando saímos da sala tudo ficou melhor e mais fácil.
    - Sim. Porque o professor fez a gente entender melhor do que na sala.
    - Sim. Porque depois de termos interagido com o conteúdo as aulas ficaram mais interessantes e mais fáceis.
    - Sim, eu achei melhor. Porque ele não foi direto pro quadro, ele foi medir a árvore.
3. **As atividades realizadas fora de sala lhe ajudaram a entender o assunto de matemática?**

    Todos responderam apenas sim.

4. **Você prefere as aulas tradicionais, como aquela que o professor explica o assunto apenas dentro de sala, ou na forma em que estudamos semelhança de triângulo, onde tivemos a experiência de medir a altura de uma árvore de várias formas diferentes?**
    - Sim. Prefiro fazer assim, porque só na sala não entendo.
    - Sim. É melhor fora de sala.
    - Sim. Prefiro fora da sala de aula.

- Sim. Eu prefiro a atividade fora da sala de aula, porque é mais interativa e mais divertida.
- Sim. Eu prefiro que o professor vá direto pro quadro.

5. **Você hoje gosta mais de matemática do que antes das aulas extraclasses? Por quê?**

- Sim. Porque antes eu não gostava de matemática e agora eu gosto.
- Sim. Porque a atividade fica mais fácil. Mais coisas novas.
- Sim. Gostei muito. Eu não gostava dessa aula e agora eu gosto.
- Sim. Porque graças à atividade fora de sala eu percebi a importância da matemática.
- Sim. Porque eu prefiro fora de classe.

4.4 Conclusão

Conseguimos ver alunos que diziam não gostar nem saber matemática querendo aprender mais, passar por novas experiências, adquirir mais conhecimento sobre o assunto. Para estes, a matemática deixou de ser um conjunto de números e contas difíceis e impossíveis de aprender. Começaram a ver a matemática como uma ciência mãe, como disse Ubiratan D'Ambrósio (1985), "(...) a espinha dorsal da humanidade".

A vivência não mudou apenas a forma dos alunos do 7° e 8° anos verem a matemática, mudou a forma de alguns professores e gestores desta escola enxergarem esse tipo de ação. Se por um lado alguns professores se opuseram à essa forma de ensino-aprendizagem, por outro lado, outros incorporaram a vivência como parte integrante de seus ensinamentos. Um exemplo disso foi o professor da disciplina de Ciências que, para ensinar Reações Químicas, realizou experimentos da reação entre bicarbonato e vinagre antes de fazer a conceituação e a manipulação.

A forma como hoje a comunidade escolar recebe essa forma de vivenciar o aprendizado nos permite acreditar que o objetivo deste trabalho foi alcançado. Observamos que situações em que pais de alunos colaboram ativamente, incentivando seus filhos ou conseguindo alguns materiais para as aulas, passou a ser cada vez mais frequentes. A equipe gestora frequentemente pergunta se precisamos de algo para ajudar nas aulas, o que nunca ocorria.

Acreditamos que tudo isso é reflexo de um aluno contente, satisfeito e motivado. Mesmo sabendo que essa ação não resolve o problema da educação e que nem sempre é possível preparar uma vivência para cada conteúdo, pensamos que conseguimos despertar em alguns alunos o amor pela matemática, que nossa ação causou uma marca na alma e que esta só tende a se propagar.

5 Outras Propostas de Atividades

Neste capítulo expomos algumas ações propostas no livro Matemática Lúdica ((ALBERTI, 2006), que serviu de inspiração para nosso trabalho. Nele, o autor relata como obter algumas medidas aproximadas através da matemática sem o uso de equipamentos sofisticados. Este livro foi escrito no Século XV, por Leon Battista Alberti e originalmente foi intitulado *Ludi Rerum Mathematicarum*.

O escritor Leon Battista Alberti (1404-1472), nasceu na cidade de Gênova, Itália, mas cresceu nas cidades de Florença, Veneza e Pádua (GILLISPIE, 2007; SOUFFRIN, 2006). Não se sabe muito sobre sua vida acadêmica, apenas que

> [. . .] Alberti teria optado pela formação em direito na universidade de Bolonha. Entretanto, por motivos de saúde, excesso de trabalho e a morte prematura do pai, teve que interromper seus estudos. Durante o período em que esteve afastado da universidade, Alberti passou a dedicar-se ao estudo da Matemática, Ciências Naturais e Física, voltando a frequentar a universidade posteriormente, recebendo por volta de 1428 o diploma de doutor em direito canônico em Bolonha. [...] Alberti é conhecido pelos seus diversos trabalhos na área da perspectiva, arquitetura e pintura devido a dois tratados: *De Pictura* (1435) e *De Re Aedificatoria*(1452). (SANTOS, 2014, p.20-24)

A maioria das obras de Alberti eram sobre pintura e arquitetura, mas em seus 68 anos de vida também publicou diversas obras como *Dissuasio Valerii ne uxorem* (1428), *Intercenales Deifira* (1428), *Vita S. Potiti* (1433),*De la famiglia* (1434), *Della famiglia* (1437),*Grammatica della língua toscana* (1441), *Descriptio urbis Romae* (1443), *De statua* (1464),*Ludi rerum mathematicarum* (Matemática Lúdica) (1450-2) e seu último trabalho literário os dez livros do tratado *De Re Aedificatória*. (CAMELO, 2005, p.42-53)

O livro *Matemática Lúdica*, foi dedicado ao Príncipe Meliaduse, o Marquês d'Este. Na dedicatória Alberti escreveu:

> "[. . .] De Leon Battista Alberti ao ilustríssimo príncipe Meliaduse, marquês d'Este, estas páginas de entretenimentos matemáticos. Devo admitir que respondo bastante tardiamente, com esta pequena obra, aos anseios que Vossa Senhoria exprimiu. Poderia invocar muitas desculpas e razões, mas prefiro confiar-me a vossa indulgência e bondade, e pedir que me perdoeis. Vossa paciência talvez tenha sido compensada pelo prazer que espero sintais ao conhecer as coisas bastante lúdicas que encontrareis reunidas, ou até mesmo ao pô-las em prática e delas se servir. Empenhei-me em descrevê-las mui claramente: devo, porém, salientar que se trata de matérias bem sutís cuja a exposição não dispensa o leitor de um esforço de atenção. Far-me-ai felicíssimo se ficásseis com ela. Caso desejes saber mais sobre esses temas, mandai-me informar, tentarei cumprir vossos desejos. Por hora contentai-vos com isso: encontrareis [aqui] coisas notabilíssimas. Recomendo-vos meu irmão Charles, cujo devotamento vos é dedicado assim como a vossa família. Valete". (ALBERTI, 2006, p. 27)

Traduzido por André Teles, este livro é composto por 12 dos 20 problemas práticos lançados no livro original que são solucionados com o uso da matemática, onde são relacionados à arquitetura, construção civil e topografia (SANTOS, 2014, p.27).

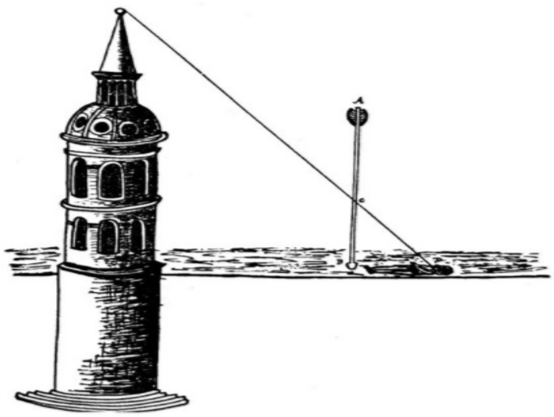
Neste capítulo, incluímos, além da questão que serviu de inspiração para as ações propostas neste trabalho, algumas atividades lúdicas contidas no livro *Matemática Lúdica* que consideramos interessantes para serem vivenciadas. Em algumas delas fazemos uma sugestão de adaptação que pode facilitar o uso destas atividades pelo professor.

5.1 Medindo a altura conhecendo apenas a distância da torre

Esta foi a atividade que adaptamos em nossa dissertação, ver Atividade 2 (seção 3.3). Nela, Alberti demonstra como podemos descobrir a altura de uma torre sem medir diretamente nenhuma parte dela, sabendo apenas a distância até a torre, a distância do olho do observador até a flecha e a distância do ponto de encontro entre a linha de visada e a flecha até o chão.

> O senhor pode calcular [...] a altura de uma torre da qual não consegue medir diretamente nenhuma parte, caso lhe seja possível se aproximar até sua base. Finque no chão uma Flecha, [...], afaste-se um pouco e, com o olho à flor do solo, vise o topo da torre utilizando a flecha como mira; coloque uma marca de cera no lugar em que seu olhar encontra a flecha. Chamemos A o topo da flecha, B sua base, C a marca de cera que o senhor colocou e D a posição de seu olho, como visto na Figura 45.

Figura 45 – Altura de uma Torre segundo Alberti.



Fonte: Livro Matemática Lúdica, p.7.

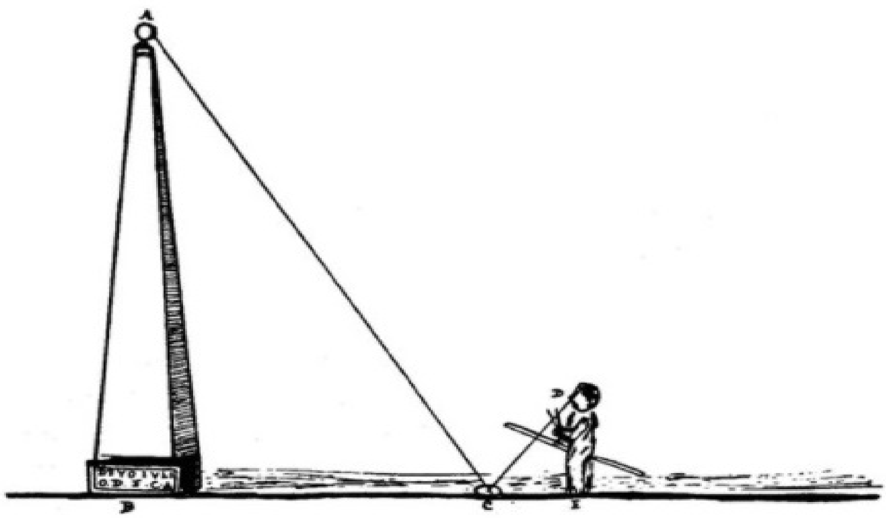
> Digo que a parte da flecha que está entre C e B cabe na distância de B a D, isto é, a distância do seu olho à base da flecha, tantas vezes quanto a altura da torre cabe na distância do seu olho até a base da torre. [. . .] Então, ao medir quantas vezes CB cabe em DB, saberá com esse número sem o menor erro quantas vezes a altura da torre cabe na distância que separa seu olho da base torre. (ALBERTI, 2006, p. 7-9)

5.2 Medir a altura de uma torre

Nesta seção, apresentamos uma forma alternativa de calcular a altura de uma torre proposta por Alberti.

> [. . .] Alguns acham mais direito aproximar-se da torre de maneira que, caso esteja-se deitado no solo com os pés tocando a flecha fincada no chão como disse, a mirada na direção do topo da torre caia na flecha precisamente numa altura igual à distância de seu olho até seus pés. Dizem com razão que haverá tanto da base da torre até seu olho quanto da base ao topo. Outros apresentam formas de proceder bastantes exatas e úteis. Dizem: pega-se um espelho, ou mais simplesmente uma gamela cheia d?água, e pousa-se no chão. Vai se afastando, sempre voltando para a torre e para a gamela, até perceber o topo da torre refletir-se na superfície da água; descobre-se que a distância do olho ao espelho tantas vezes quanto a torre cabe na distância do espelho à base da torre. Examinemos como um exemplo. Chamemos de A o topo da torre e de B sua base, C o espelho, D o olho e designemos como E a posição dos seus pés, como na Figura 46 (ALBERTI, 2006, p.10-12).”

Figura 46 – Altura da Torre.

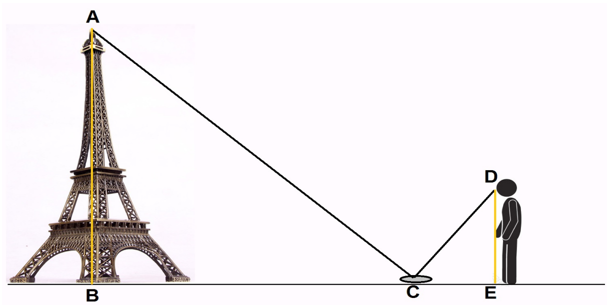


Fonte: Livro Matemática lúdica, p.10.

Nessa atividade também é possível encontrar o resultado através de Semelhança de Triângulos. Refazemos a imagem como visto na Figura 47. Para encontrar o valor AB, altura da torre, fazemos

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{CE}. \tag{5.1}$$

Figura 47 – Altura da Torre.



Fonte: Produzido pelo autor

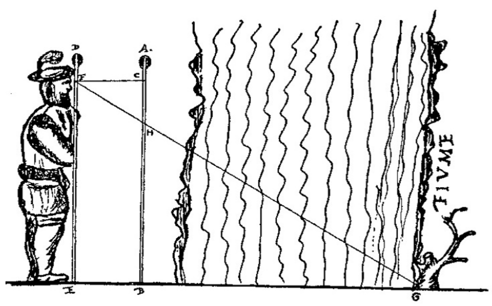
Esse exemplo é indicado para ser realizado em terrenos planos e em distâncias não muito grandes por causa da curvatura da superfície terrestre. Na prática escolar a figura da torre pode facilmente ser trocada por um poste ou uma árvore tão perpendicular ao solo quanto possível.

5.3 Medir a largura de um rio

Nesta atividade, Alberti descreve uma forma relativamente simples de calcular a largura de um rio. Segue o procedimento de medição descrito no livro.

> [. . .] Meça a largura de um rio, a partir da margem, como se segue. Tome posição num lugar bem plano, finque na terra uma flecha, [. . .] e chamemos essa flecha AB. Faça uma marca de cera nela, precisamente na altura dos olhos, e chame C esta marca. Depois afaste-se dessa flecha AB cerca de uma braça [equivalente ao comprimento de um punho a outro de um adulto com os braços lateralmente estendidos], e finque ali de maneira semelhante uma segunda flecha, e seja DE esta segunda flecha; coloque mais uma marca de cera exatamente na altura dos olhos sobre a flecha DE e chame-a F. Coloque o olho precisamente contra essa marca F e mire algo de perceptível na outra margem do rio no alinhamento da flecha A, como um arbusto, ou algum local ou uma pedra: chamemos esse objeto G. Ali onde seu olhar, na mirada, encontra a flecha AB, coloque uma outra marca de cera e chame-a H, como podemos ver na Figura 48.
>
> Digo que, caso meça a distância entre as duas marcas na primeira flecha, isto é, a distância CH sobre AB, ela caberá tantas vezes vezes na distância que separa as duas flechas, ou seja, CF, quanto HB cabe em BG, isto é, a distância que separa a primeira flecha do arbusto visado. (ALBERTI, 2006, p. 10-11)

Figura 48 – Medir a lagura de um rio.

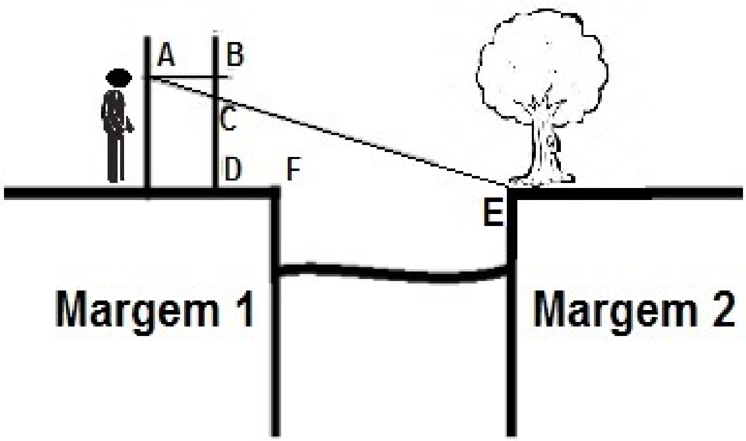


Fonte: Livro Matemática Lúdica, p.11.

Nesta atividade podemos trocar as flechas por qualquer objeto retilíneo, rígido e de comprimento maior que a altura de todos alunos que possam ser fixados no chão. Por exemplo, cabo de vassoura, varão de ferro, etc.

Na Figura 49, sugerimos o uso de duas margens opostas de um rio que estejam minimamente niveladas para calcular a largura do rio e a margem oposta com um objeto percetível. Lembramos que essa proposta se trata de uma atividade lúdica com o intuito de auxiliar no ensinamento da matemática.

Figura 49 – Calcular a lagura de um rio.



Fonte: Produzido pelo autor

Como os triângulos ABC e CDE são semelhantes, pelo Teorema 2.3.1,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{CD}. \tag{5.2}$$

Da relação (5.2) pode-se saber AB, BC e CD através de uma simples medição com uma trena. Com esses valores podemos calcular o valor de DE. A largura do rio EF é calculada pela diferença entre DE e DF.

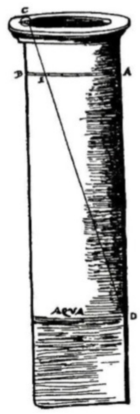
5.4 A profundidade de um reservatório até o nível da água

Nesta seção mostramos uma maneira proposta por Alberti para medir a profundidade de um poço até o nível da água. Segue trecho do livro.

> [. . .] Meça com a vista a profundidade de um poço, até o nível da água, da seguinte forma. Coloque um bambu atravessando no poço o mais baixo possível, de modo que lhe seja também possível atingi-lo com a mão, e fixe-o de uma maneira que agarre bem. Coloque depois o olho na beirada do poço justamente na prumada de uma das extremidades do bambu, de maneira a ver até o fundo da cavidade, isto é, até a superfície da água, e mire a beirada da superfície da água no lugar que se encontra justamente na prumada sob a outra extremidade

> do bambu. Chamemos A a ponta do bambu oposta ao observador, B a outra ponta que está do seu lado, C seu olho e D a superfície da água no fundo do poço. Feito isso, vise o ponto D na superfície da água, e, no lugar onde seu olhar bater no bambu, coloque uma marca de cera, e chamemos E a essa marca, como podemos ver desenhado na Figura 50. Digo que o número de vezes que EB couber em BC, ou seja, o número de vezes que a distância entre E e B no bambu cabe na parte do poço compreendida entre seu olho e a ponta do bambu situada na prumada de seu olho, equivalerá ao número de vezes que AB, isto é, o bambu inteiro, couber na profundidade total do poço. (ALBERTI, 2006, p. 38-39)

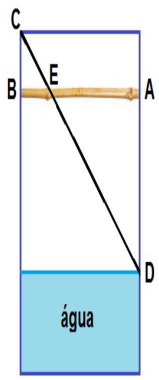
Figura 50 – Medir a profundidade de um poço até o nível da água.



Fonte: Livro Matemática Lúdica, p.15.

Para adaptar esta atividade do livro *Matemática Lúdica*, basta trocar a ideia do poço por um tonel. Caso não consiga o bambu pode-se usar qualquer objeto semelhante, retilíneo e de comprimento equivalente ao diâmetro do tonel e fixa-lo como visto na Figura 51.

Figura 51 – Medir a profundidade de um tonel até o nível da água.



Fonte: Produzido pelo autor

Escolhemos aqui os triângulos semelhantes BCE e ADE para determinar a profundidade do tonel. Usando o Teorema 2.4.1, e sabendo as medidas BC, BE e AE, basta calcular o valor de AD na relação abaixo e calcular $BC + AD$ para saber a profundidade até o nível da água.

$$\frac{BC}{AD} = \frac{BE}{AE} \tag{5.3}$$

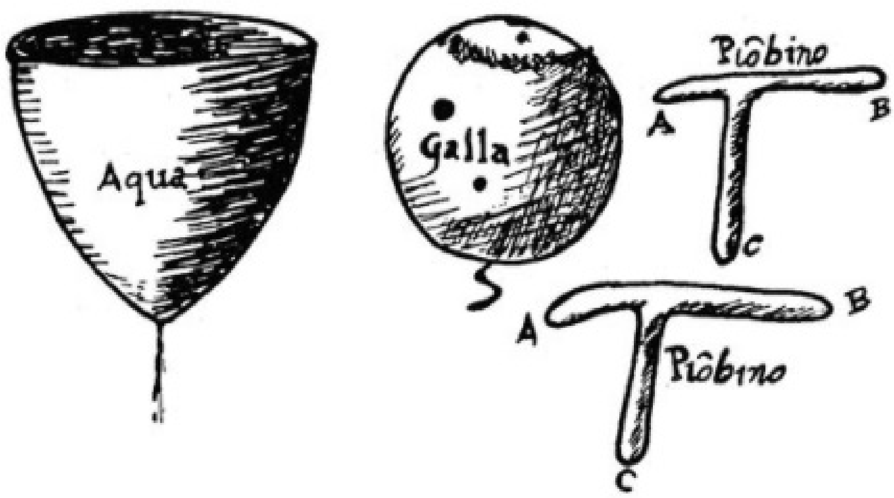
A seção seguinte aborda uma forma que Alberti propôs para calcular a grandes profundidades, de um rio ou lago sem correnteza.

5.5 Medir grandes profundidades

Alberti descreve uma forma de medir a profundidade em águas quando não conseguimos atingir o fundo com uma sonda ou com uma grande extensão de cabos, contanto que não haja correnteza. Para realizar este feito, orienta que se tenha um recipiente que possa armazenar água e que se faça no fundo um pequeno furo.

> [...] Tenha também uma noz-de-galha de carvalho, fixe nela um pequeno pedaço de ferro da forma do sinal que representa o 5 nos ábacos, e enfie na galha a metade da maior ponta desse pedacinho de ferro, enquanto a outra metade permanece no exterior. Tenha chumbos com um peso razoável, que farão a galha correr até o fundo, e proceda de modo que esses chumbos, o recipiente e a galha estejam dispostos como vê no desenho da Figura 52

Figura 52 – Equipamento para medição da profundidade.



Fonte: Livro Matemática Lúdica, p.17.

> Fixe um desses chumbos na galha, dirija-se a um lugar onde a profundidade da água foi previamente medida com uma sonda e lhe tenha sido informada, e ali encha com água seu recipiente; que seja água pura, e pese muito precisamente quantas onças e grãos totalizam a água e o recipiente. Efetuando tais preparativos, deixe cair na água a galha com seu chumbo e ao mesmo tempo deixe a água escoar do recipiente. A galha será então arrastada pelo chumbo até o fundo. À chegada do chumbo, é sua extremidade marcada como C que tocará primeiro o fundo que ali se deterá, e assim extremidade B irá inclinar-se para o solo de modo que a ponta A fixada no fio de ferro se destaque dele, e a galha liberada voltará à superfície. Feche então rapidamente com o dedo o recipiente a fim de que a água não escape mais, em seguida pese o que resta dela e o que falta, e observe quanto de água escoou durante o tempo levado pela galha para percorrer tantos côvados [equivalente a 0,66 cm] e voltar. (ALBERTI, 2006, p. 17-19)

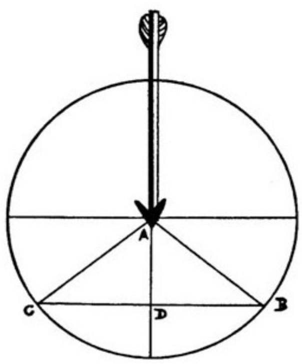
5.6 Medir o tempo pelo movimento do sol

Alberti considerava que os relógios que se baseavam no movimento dos astros eram os mais precisos. Uma das formas de medir o tempo que ele apresenta está relacionado com os pontos cardeais (Norte, Sul, Leste, Oeste). Acreditando que se obteria mais precisão em um relógio quando o tempo medido é regulado pela direção sul, "porque é o mais preciso e o mais regular de todos os marcos celestes". (ALBERTI, 2006, p.20)

Alberti descreve a seguinte forma de encontrar a direção sul.

> [...] Finque bem reto sua flecha num local plano, certifique-se de que permaneça em posição bem vertical, [...], entre o almoço e o meio dia, pegue um barbante, amarre na base da flecha, corte-o justamente no lugar em que termina a sombra da flecha sobre o solo e, girando, faça no chão um círculo em torno dessa flecha. A ponta da flecha fincada será portanto o centro desse círculo, que chamaremos A. Chamaremos B o lugar em que a extremidade da sombra da flecha cai precisamente sobre o círculo. Deixe a flecha como está. Enfie um pedaço de madeira no ponto B. Volte uma hora mais tarde; verá que a sombra da flecha encontra-se em outro ponto. Espere que venha tocar precisamente o círculo e marque com outro pedaço de madeira o lugar, que estará mais perto do lado onde o Sol nasce; chamaremos C essa marca, como podemos ver na Figura 53.

Figura 53 – Encontrando a direção Sul.

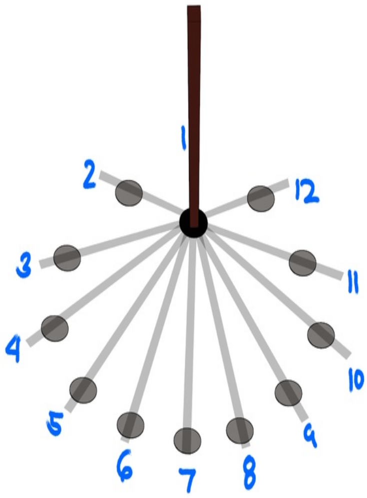


Fonte: Livro Matemática Lúdica, p.21.

> Divida a reta BC, isto é, a distância entre as duas marcas, em duas partes iguais; chamemos D o meio; estique um traço do ponto A no interior do círculo até esse ponto D. Essa reta está dirigida precisamente para o sul do lugar. A partir daí poderá instalar corretamente os quadrantes solares e outras coisas desse gênero. (ALBERTI, 2006, p.20-22)

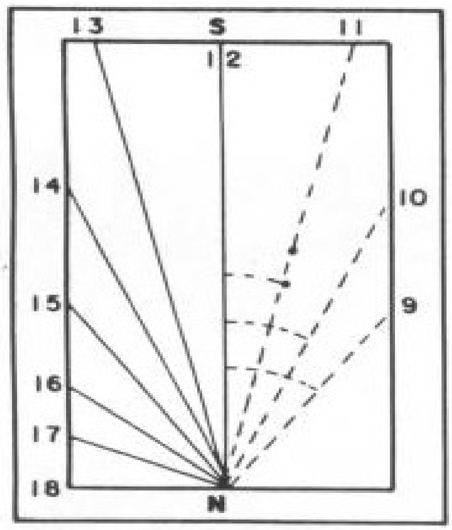
Esta atividade é relativamente simples de ser conduzida, necessitando apenas da substituição da flecha por um objeto que tenha características semelhantes sem oferecer risco à saúde dos alunos e numerando os pontos que a sombra encontra de acordo com a hora do dia como visto na Figura 54 ou na Figura 55.

Figura 54 – Relógio de Sombra 1.



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 55 – Relógio de Sombra 2.



Fonte: Produzido pelo autor

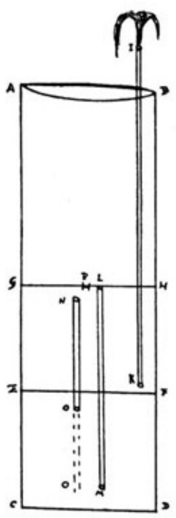
5.7 Relógio a Ar

Uma outra forma de medir o tempo apresentado por Alberti consiste em relógio que repele a água pela força do ar. Sua construção não é tão simples para indicarmos sua manipulação, mas optamos por destaca-la nesta seção por ser uma alternativa para construção de um relógio bastante interessante e belo.

> [...] Disponha de um recipiente com um altura de 3 palmos [equivalente a 22 cm], cuja abertura superior chamaremos AB, e o fundo, CD. Nesse recipiente, fixe dois outros fundos distantes um do outro cerca de uma mão, e chamaremos de EF o primeiro e GH o segundo, isto é, aquele que está mais próximo da borda superior. Todos esses fundos são bem fixados no recipiente de forma que não haja nenhum ponto de escape. No fundo GH, o mais alto, faça um buraco e fixe ali uma haste oca que o atravesse verticalmente quase até o fundo EF e que ultrapasse para cima do nível de borda AB. Chamaremos essa haste

> IK. É preciso ainda que haja um outro buraco no fundo de GH, e embaixo, em sua vertical, um outro no fundo EF. Passe por esses dois buracos uma haste perfurada que atravesse de um fundo a outro, isto é, de GH a EF, cuja ponta inferior vá até quase o fundo CD e cuja ponta de cima esteja no nível do fundo GH; chamaremos a ponta de cima dessa haste L, e M a de baixo. Além disso, é preciso que uma haste passe justinha por um buraco no fundo EF, cuja ponta inferior, digamos O, esteja no nível do fundo EF, e cuja ponta superior, chamemo-la N, quase atinja o fundo GH. Haverá então, como vemos na Figura 56, três fundos, um em cima do outro, ou seja, CD, EF e GH, e três hastes: IK, que atravessa o fundo GH; LM, que atravessa o fundo EF e vai até o fundo GH; e NO, que atravessa o fundo EF. Acrescente no fundo GH um buraco sem haste, pelo qual poderá encher o recipiente de água da forma que indicaremos e chamaremos de P esse buraco conforme indicado na Figura **??**

Figura 56 – Relógio Divertido.



Fonte: Livro Matemática Lúdica, p.19.

> Encha de água pelo buraco P a parte situada entre o fundo GH e o fundo EF, depois feche bem o o buraco P de modo que não entre nem saia mais água. Depois feche a abertura L da haste LM, e encha com água a parte superior do recipiente situada entre o topo AB e o fundo GH. Quando tudo isso estiver instalado, destape a extremidade L da haste LM. A água passará para a parte de baixo situada entre EF e CD, a qual, ao se encher de água, repelirá o ar que ali se encontrava e o enviará pela haste NO para a parte do recipiente situada entre EF e GH. Dali o ar repelirá a água pela haste IK, e, enquanto ali houver ar, sua força [*ímpeto*] continuará a repelir água para o exterior, o que produz um jato d'água bastante divertido. (ALBERTI, 2006, p.43-44)

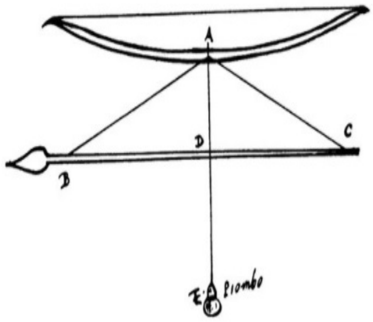
5.8 Medir pesos pouco significativos

Para calcular pesos pouco significativos, Alberti apresentou um objeto muito usado para cálculos em terrenos inclinados denominado *Equilibra*, Figura 57. Alberti afirma que o *Equilibra*

> [. . .] pode servir para medir todo tipo de coisa. Quando o ângulo é suspenso em algum ponto fixo, como uma balança, com pesos iguais fixados um em B e o outro em C, o fio AE que pende com seu chumbo cai justamente sobre a marca

> de cera D. Consegue-se assim, colocando ou retirando pesos, que o *equilibra* fique exatamente na horizontal. Esse instrumento é utilizado para muitas outras coisas. (ALBERTI, 2006, p.29-30)

Figura 57 – Equilibra.

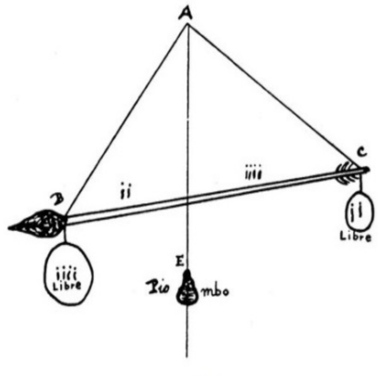


Fonte: Livro Matemática Lúdica, p.28.//

A atividade referente a essa seção pode ser utilizada no ensinamento do conteúdo Proporção. Segundo Alberti o *equilibra*

> [...] permite medir qualquer peso da seguinte maneira: o fio chumbado AE afasta-se da marca de cera D, na mesma proporção que o peso do qual se aproxima pesa mais que está na outra ponta. Quanto pesa além, poderemos saber assim: um dos pesos está contido no outro o número de vezes que a parte da flecha situada entre uma extremidade e o fio AE está contida no resto da flecha. (ALBERTI, 2006, p.30-32)

Figura 58 – Realizar pequenas pesagens.



Fonte: Livro Matemática Lúdica, p.31.

Sugerimos que o professor confeccione um *Equilibra*, ou confeccione junto aos alunos, e utilize um conjunto de pesos, dentre eles um com valor conhecido, para que se observe melhor a relação proposta por Alberti. Podendo também usar o *Equilibra* para introduzir outros assuntos, por exemplo: equações lineares ($y = ax$).

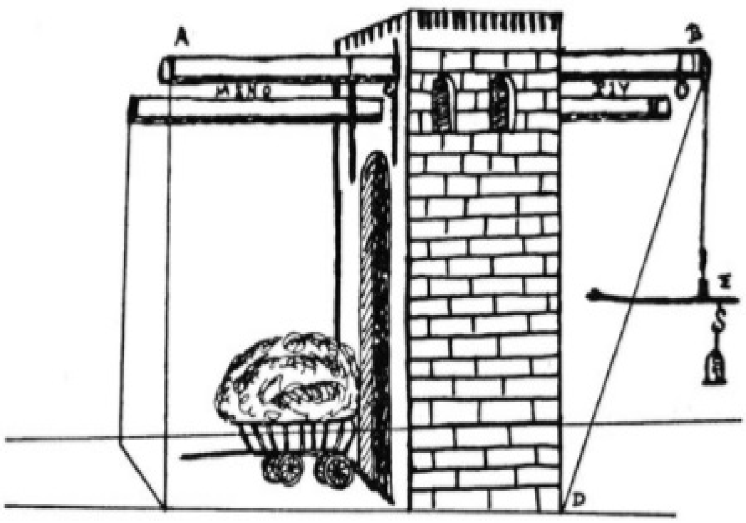
5.9 Medir pesos maiores

Nesta seção apresentamos uma proposta de Alberti que não é pedagogicamente recomendável, visto a complexidade e a dificuldade de se obter as ferramentas necessárias para adaptação, mas que complementa a seção anterior caso ocorra o questionamento do que se fazer ao se deparar com pesos maiores.

Alberti descreve um método com o auxílio de uma balança romana capaz de suportar no máximo 50 libras, o equivalente à 22,68 kg. Segundo Alberti, para medir grandes pesos é

> [. . .] preciso dispor de uma ponte semelhante às levadiças; disponha de forma que ela seja suspensa por suas correntes na extremidade de uma viga que ultrapasse a parte superior da entrada, como se faz no caso das pontes levadiças. E que do lugar em que a viga repousa sobre seu ponto de apoio até as correntes haja uma distância inferior àquela desse ponto de apoio à outra extremidade da viga, no interior, além da entrada, Chamaremos A a extremidade das correntes, B a outra extremidade que está no interior, e C o ponto de apoio. Na extremidade B instale um cadernal e fixe a ponta da corda, fixe sua balança no chão por um de seus ganchos, como se vê na Figura 59. E chamemos de E a ponta da corda à qual está presa a balança. Quando a carroça com os seus bois estiver sobre essa ponte, puxe a ponta E da corda e prenda a balança em D. A ponta irá se deslocar para cima. Basta que se erga quatro dedos. Digo que, uma vez que tiver deduzido quantas libras da carroça são sustentadas por uma onça sobre sua balança, poderá, com essa medida, pesar qualquer peso. E vos recordo o que dizia anteriormente: tantas vezes a parte mais comprida da viga AB contiver a menor, tantas libras serão equilibradas por uma única libra colocada em sua extremidade; e o mesmo ocorre no caso do cadernal: tantas vezes a corda for de cima para baixo e de baixo para cima, outras tantas o peso será dividido de modo que uma única libra suporte quatro ou seis de acordo com o número de voltas [que a corda dá no cadernal].(ALBERTI, 2006, p.32-33)

Figura 59 – Realizar grandes pesagens.



Fonte: Livro Matemática Lúdica, p.33.

5.10 Arquimedes e a Coroa de Hiêron

Nesta seção, transcrevemos o que Alberti relata sobre um feito de Arquimedes quando Hiêron II acabara de conquistar Siracusa. Conta-se que o rei mandou colocar em um certo templo uma coroa de ouro para homenagear os deuses imortais. Através de uma denuncia, o rei soube a falsificação da coroa e designou Arquimedes para comprovar se a coroa tinha a verdadeira quantidade de ouro. Segue o relato de Alberti.

> [...] O senhor também apreciará o que os amigos escreveram sobre Hiêron, tirano de Siracusa que mandou fazer um objeto em ouro, bastante pesado e de grande requinte, que, sobre a balança, tinha exatamente o peso de ouro que ele havia entregado aos ourives. Porém, insinuaram-lhe que os mestre ourives o tinham enganado e que o trabalho não era de ouro puro, mas misturado com prata. Hiêron, irritado, quis se assegurar do embuste sem destruir a obra; confiou essa tarefa ao matemático Arquimedes. Homem de uma inteligência superior, Arquimedes tornou a coisa evidente sem nada alterar ou deteriorar, da seguinte maneira.
>
> Mandou confeccionar duas massas do mesmo peso que o artefato dos ourives, uma de ouro puro e outra de prata pura. Introduziu-as em vasos da mesma forma e das mesmas dimensões cheio d'água, e observou as quantidades de água que transbordaram. Mergulhou depois similarmente o artefato, e pela relação entre os pesos descobriu a exata verdade sobre esse artefato. Era um espírito muito penetrante (ALBERTI, 2006, p.44).

Não entraremos em detalhes sobre a explicação científica que justifica como Arquimedes descobriu a falsificação da coroa. Mas, resumidamente, o que fez foi perceber que dois metais de densidades diferentes não poderiam ocupar o mesmo volume. Isso pode ser usado como introdução em uma aula de densidade ou para o aluno entender como a massa e o volume são diretamente proporcionais.

6 Considerações Finais

Diante dos argumentos expostos nesta dissertação e nos resultados obtidos, acreditamos que antes de desenvolver a teoria de determinado assunto é importante proporcionar uma vivência que envolva positivamente os alunos. Fazer isso é ajudar a desconstruir e romper com o paradigma que a matemática é difícil.

A reposta dos alunos à metodologia aplicada foi melhor que o esperado. Além de desenvolver um bom conhecimento acerca do conteúdo Semelhança de Triângulos, os alunos resolveram tomar iniciativa na evolução de seu aprendizado formando grupos de estudo para resolver questões e solicitando novas aulas para aprofundar tópicos que foram abordados de forma mais superficial, por exemplo dízima periódica.

Vale salientar que nossos estudos se concentraram em turmas com alunos jovens do Ensino Fundamental II, abrindo espaço para aprofundar nossos estudos ao verificar se existiria eficácia na aplicação desta metodologia em turmas no Ensino Médio e da Educação de Jovens e Adultos (EJA).

Referências Bibliográficas

1 ALBERTI, Leon Battista. **Matemática Lúdica**. Edição apresentada e comentada por Pierre Souffrin. Tradução de André Telles. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2006.

2 ANDRADE, O. G; SANCHES, G. M. M. B. Aprendendo com o Lúdico. In: **O Desafio das Letras**, 2., 2004, Rolândia, Anais. Rolândia: FACCAR, 2005. ISSN: 1808-2548.

3 BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

4 BURTON, Gary. **The Social Life of Numbers. A Quechua Ontology of Numbers and Philosophy of Arithmetic**. University of Texas Press, Austin, 1997.

5 CAMELO, Midori Hijioka. **Leon Battista Alberti e a matematização do olhar**. 2005. Dissertação (Mestrado em História da Ciência) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

6 CARDOSO, R. C. T. **Jogar para Aprender Língua Estrangeira na Escola**. 1996. Dissertação (Mestrado em Lingüística Aplicada) - Instituo de Estudos da Linguagem. UNICAMP, Campinas.

7 CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David; SHLIEMANN, Ana Lúcia. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1988.

8 CHAGURI, J. P. (2004). **Jogos: uma maneira lúdica de se aprender a língua inglesa**. Loanda. Disponível em: <http://www.linguaestrangeira.pro.br/para_saber/jogos.html>. Acesso em: 08 mai. 2017.

9 D'AMBROSIO, Ubiratan; MACHADO, Nilson José. **Ensino de Matemática: Pontos e Contrapontos**. In: ARANTES, Valeria Amorim (Org.). São Paulo: Editora Summus, 2014.

10 D'AMBROSIO, Ubiratan. **Socio-cultural bases for Mathematics education**. UNICAMP, Campinas 1985; pp. 42-48.

11 D'AMBROSIO, Ubiratan. Socio-Cultural Bases for Mathematical Education. In: Carss M. (eds) **Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematical Education**. Birkhäuser, Boston, MA, 1985.

12 D'AMBROSIO, Ubiratan. A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (org.). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 97-115.

13 DANTAS, H. Brincar e Trabalhar. In: KISHIMOTO, T. M. (org). **Brincar e suas teorias**. São Paulo: Pioneira, 1998.

14 DICIONÁRIO Etimológico, 2017. Disponível em: <https://www.dicionarioetimologico.com.br/ludico/>. Acesso em: 03 jun. 2017.

15 DINELLO, Raimundo Ángel. El **Derecho al Juego**. Buenos Aires: Nordan Comunidad, 1982.

16 FREIRE, Paulo. **A mensagem de Paulo Freire. Teoria e prática da libertação**. Porto: Nova Crítica, 1977.

17 GERDES, Paulus. **Cultura e o despertar do pensamento geométrico**. Curitiba: UFPR, 1991.

18 GERDES, Paulus. **Sobre o conceito de Etnomatemática.**[S.l.], 1989. Tradução da primeira parte da introdução ao livro Estudos Etnomatemáticos, em alemão, ISP (Maputo) - KMU (Leipzig).

19 GILLISPIE, Charles Coulston (Org.). **Dicionário de biografias científicas**. Tradução de Carlos Almeida Pereira et al. Rio de Janeiro: Contraponto, 2007.

20 KISHIMOTO, Tizuco Morchida. Bruner e a Brincadeira. In: ____. (org) **O brincar e suas teorias**. São Paulo: Pioneira, 1998.

21 KNIJNIK, G. **Exclusão e Resistência: Educação Matemática e Legitimidade Cultural**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

22 LIMA, E. L. **Conceituação, Manipulação e Aplicalções: os três componentes do ensino da Matemática**. Revista do Professor de Matemática - RPM, Rio de Janeiro, n.41, p.1-6, 1999.

23 MICHAELES. **Dicionário on line**, Disponível em: <http://michaelis.uol.com.br/busca?r=0&f=0&t=0&palavra=vivencia>. Acesso em: 08 jun. 2017.

24 MIORIM, Maria Ângela.; FIORENTINI, Dario. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. Boletim da SBEM-SP, São Paulo, v. 4, n. 7, p. 5-10, 1990. Disponível em: <http://files.profpereira.webnode.com/200000097-846ca86603/Texto%20-%20Uma%20Reflexao%20sobre%20o%20uso%20de%20Materiais%20Concretos%20e%20Jogos.pdf>. Acesso em: 08 jun. 2017.

25 NETO, Antonio Caminho Muniz. **Geometria**. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

26 PIAGET, Jean. **Psicologia da criança**. Ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1998.

27 RABELAIS, François. **Gargantua e Pantagruel.** (Trad. de David Jardim Júnior). Belo Horizonte: Editora Itatiaia, 2003.

28 REVEMAT, eISSN 1981-1322, Florianópolis (SC), v. 06, n. 2, p. 19-36, 2011.

29 SANTOS, Lucas Reis. **Leon Battista Alberti (1404 - 1472) e a medida do tempo**. 2014. Dissertação (Mestrado). Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PUC-SP.

30 SANTOS, Santa Marli Pires dos (org), **Brinquedoteca: A criança, o adulto e o lúdico**. Petrópolis: Vozes, 2000.

31 SZUNDY, P. T. C. **A Construção do Conhecimento do Jogo e Sobre o Jogo: ensino e aprendizagem de LE e formação reflexiva**. 2005. Tese (Doutorado em Linguística Aplicada e Estudos da Linguagem) - Laboratório de Estudos da Linguagem. PUC, São Paulo.

32 SOUFFRIN, Pierre. **Introdução. In: ALBERTI, Leon Battista. Matemática Lúdica**. Edição traduzida por André Telles. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2006.

33 TEIXEIRA, C. E. J. A Ludicidade na Escola. São Paulo: Loyola, 1995.

34 TEZANI, Thaís Cristina Rodrigues. O jogo e os processos de aprendizagem e desenvolvimento: aspectos cognitivos e afetivos. 2004. Disponível em: <http://www.piscopedagogia.com.br/artigos/artigos.asp?entrlD=621>. Acesso em: 15 mai. 2017.

35 WAGNER, Eduardo. **Semelhança, Triângulo Retângulo e Relações Métricas no Triângulo Qualquer.**. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=bOKn0ix_Ydg>. Acesso em: 17 jun. 2017.