



# Universidade Federal Rural de Pernambuco

Departamento de Física

*Recife - PE*

Potência do ruído de Disparo de Junção  
Normal-Supercondutor Topológico com Simetria Quiral

Isacc Antão de Saturno Junior

Isacc Antão de Saturno Junior

# Potência do ruído de Disparo de Junção Normal-Supercondutor Topológico com Simetria Quiral

Dissertação submetida ao Programa de pós-Graduação em Física Aplicada da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

**Orientador: Dr. Anderson Luiz da Rocha e Barbosa**  
**Co-Orientador: Dr. Aílton Fernandes Macedo Junior**

**UFRPE**

**Recife - PE**

**28 de Março de 2018**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE  
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

S254p

Saturno Junior, Isacc Antão de.

Potência do ruído de disparo de junção normal-supercondutor topológico com simetria quiral / Isacc Antão de Saturno Junior. – Recife, 2018.

50 f.: il.

Orientador (a): Anderson Luiz da Rocha e Barbosa.

Coorientador(a): Aílton Fernandes Macedo Junior.

Dissertação (Mestrado em Física Aplicada) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Física, Recife, 2018.

Inclui apêndice e apêndices.

1. Transporte eletrônico 2. Junção normal-supercondutor topológico  
3. Simetria quiral 4. Número quântico topológico 5. Potência do ruído de disparo I. Barbosa, Anderson Luiz da Rocha e, orient. II. Macedo Junior, Aílton Fernandes, coorient. III. Título

CDD 530

Meu pensamento se abre e se  
expõe em plena luz, E meu verso,  
mal ou bem, diz sempre alguma  
coisa.

- Schopenhauer.

# Agradecimentos

Quero agradecer a Deus, a grande força viva que rege o universo, pela força e coragem durante toda esta longa caminhada, que teve início em Agosto de 2010, quando iniciei minha graduação pela UFRPE, mestrado em 2016 e vem ao término hoje, fechando um importante ciclo. Agradeço, de todo coração, meu pai e à minha mãe, pelo apoio financeiro e moral ao longo desses anos.

Agradeço também a todos os professores que me acompanharam durante minha graduação na UFRPE . Agradeço àqueles que foram bons professores, pois estes me inspiram a ser um profissional do mesmo tipo. Agradeço, em especial, aos professores Jairo Rocha, Adauto José, Pedro Hugo, Ramón Ramayo, Raul Montagne, Antônio Romaguera, Fernando Morais, Jonas Romero, Carlos Dantas(DEN-UFPE) e Paulo Duarte (Biometria-UFRPE) pela confiança e apoio que vêm depositando em mim; e por fim, mas não menos importante, ao meu orientador, o professor Anderson Barbosa, por sua grande contribuição na elaboração do trabalho e também ao meu co-orientador Aílton Fernandes pelas diversas conversas, orientações e caronas.

Tenho que agradecer ainda a todos os meus amigos da UFRPE Jaiver Cifuentes, Felipe Assis, Júlio César, Marcos gabriel, Fernando, Caio e Tiago Verçosa pela ajuda nas disciplinas e na vida ao longo desse mestrado e graduação pelos bons momentos acadêmicos e não acadêmicos. Aos funcionários do departamento secretario Neto, técnicos Eduardo, Seu Antônio, grande Gílson(amigão de neto), Dona Fábria(Porteira), Natália(Porteira) e Tati(Limpeza).

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

**Potência do ruído de Disparo de Junção Normal-Supercondutor Topológico  
com Simetria Quiral**

Potência do ruído de Disparo de Junção Normal-Supercondutor Topológico com Simetria  
Chiral

*Isacc Antão de Saturno Junior*

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de Mestre em Física, defendida e aprovada por unanimidade em 28/02/2018 pela Comissão examinadora.

Orientador:

\_\_\_\_\_  
Dr. Anderson Luiz da Rocha e Barbosa  
UFRPE

Co-Orientador:

\_\_\_\_\_  
Dr. Ailton Fernandes Macedo Junior UFRPE

Banca Examinadora:

\_\_\_\_\_  
Dr. Antônio Murilo Santos Macêdo  
UFPE

\_\_\_\_\_  
Dr. Antônio Rodrigues de Castro Romaguera  
UFRPE

# Resumo

No processo físico de transporte em condutores mesoscópicos observamos flutuações na corrente. Surgindo observáveis como a potência do ruído de disparo que estão intimamente ligadas a quantização das cargas. Atualmente existe interesse no comportamento do processo de espalhamento em dispositivos mesoscópicos, damos um destaque nas junções do tipo normal-supercondutor topológico com simetria quiral. Que apresentam como principal peculiaridade as reflexões de Andreev. A teoria de matrizes aleatórias foi utilizada para interpretação desta dissertação, reobtendo as distribuições de probabilidade da condutância em função de um parâmetro topológico  $Q$  com o número  $N$  de canais abertos  $N = 1, 2, 3, 4$  [Diez e colaboradores] e como resultado inédito desta dissertação o caso  $N = 5$ . Obtemos as distribuições de probabilidade para potência do ruído de disparo em função do parâmetro topológico  $Q$  com o número de canais para os casos  $N = 1, 2, 3, 4, 5$ , sendo a segunda contribuição inédita desta dissertação.

**Palavras-chave:** transporte eletrônico; junção normal-supercondutor topológico; simetria quiral; número quântico topológico; potência do ruído de disparo.

# Abstract

In the physical process of transport in mesoscopic conductors, we observe fluctuations in the current. Observing as the power of the shot noise is closely related to the charge quantization. Currently there is interest in the behavior of the scattering process in mesoscopic devices, we give a prominence in the normal-superconductor topological junctions with chiral symmetry. Which present the main peculiarity of Andreev's reflections. The theory of random matrices was used to interpret this dissertation, retrieving the probability distributions of the conductance as a function of a topological parameter  $Q$  with the number  $N$  of open channels  $N = 1, 2, 3, 4$  [Diez and collaborators] and as an unprecedented result of this dissertation the case  $N = 5$ . We obtain the probability distributions for power of the shot noise as a function of the topological parameter  $Q$  with the number of channels for the cases  $N = 1, 2, 3, 4, 5$ , being the second unpublished contribution of this dissertation.

**Key-words:** electronic transport; topological-superconducting junction; chiral symmetry; topological quantum number; .



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Física mesoscópica . . . . .	1
1.2	Isolantes e supercondutores topológicos . . . . .	4
1.2.1	Reflexão de Andreev . . . . .	7
1.3	A teoria de espalhamento . . . . .	8
1.4	A teoria de Landauer-Büttiker para metais normais (N) . . . . .	9
1.4.1	Condutância ( $G$ ) . . . . .	11
1.4.2	As flutuações temporais da corrente . . . . .	12
1.4.3	Potência do ruído de disparo ( $P$ ) . . . . .	13
1.5	Estruturas híbridas: Junções metal normal-supercondutor ( $NS$ ) . . . . .	13
1.5.1	Condutância ( $G_{NS}$ ) . . . . .	14
1.5.2	Potência do ruído de disparo ( $P_{NS}$ ) . . . . .	15
1.6	Teoria de matrizes aleatórias . . . . .	15
1.6.1	Teoria de matrizes aleatórias aplicada a uma junção normal-supercondutor topológico . . . . .	17
1.6.2	Média da condutância e potência do ruído de disparo numa junção normal-supercondutor . . . . .	18
1.7	Nesta dissertação . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Distribuições de probabilidade da condutância em um bilhar quântico Wigner-Dyson</b>	<b>20</b>

2.1	introdução . . . . .	20
2.2	Distribuição de probabilidade da condutância no ensemble Wigner-Dyson . . . . .	20
2.3	Distribuição de probabilidade da potência do ruído de disparo . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Condutância de uma Junção normal-supercondutor topológico com Simetria Quiral</b>	<b>26</b>
3.1	Distribuição de Probabilidade da Condutância . . . . .	27
3.2	Distribuição de Probabilidade da potência do ruído de disparo . . . . .	29
3.3	Discussão: Junção normal-supercondutor topológico com simetria quiral . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>34</b>
<b>A</b>	<b>Expansão da função delta de Dirac</b>	<b>35</b>
A.1	Teoria da probabilidade . . . . .	36
A.1.1	Momentos . . . . .	37
A.1.2	Generalização da função delta de Dirac para o cálculo de funções distribuições de probabilidade . . . . .	38
<b>B</b>	<b>Mudança de variáveis</b>	<b>40</b>

# Lista de Figuras

1.1	(a) O ponto quântico de contato sobre um gás de elétrons bidimensional. (b) Medida da condutância vs voltagem aplicada na constrição. Figuras retiradas das referências [1, 2] respectivamente. . . . .	2
1.2	Relações entre o regime de condução e o comprimento característico para baixas temperaturas. . . . .	3
1.3	(a)-(c) O estado isolante. (a) Estado isolante. (b) Uma estrutura de banda de um isolante comum. (d)-(f) O estado do Hall quântico. (d) O movimento ciclotron dos elétrons. (e) Os níveis de Landau, que podem ser vistos como uma estrutura de banda. (c) e (f) Duas superfícies que diferem em seu gênero, $g$ . (c) $g = 0$ para a esfera e (f) $g = 1$ para o donut. O número Chern $n$ que distingue os dois estados é um invariante topológico semelhante ao gênero, figura retirada da referência [23]. . . . .	4
1.4	A interface entre o estado de Hall quântico e um isolador apresenta uma borda com banda de energia com simetria quirial. (a) As órbitas de ciclotron saltando. (b) Um único estado de borda conecta a banda de valência com a banda de condução, figura retirada da referência [23]. . . . .	5
1.5	Aplicamos uma d.d.p entre (IsSb) e (Au). O elemento (Au) que neste experimento tem o papel de reservatório de elétrons, que está conectado ao guia normal forma um material semiconductor de (IsSb) forma uma junção com o supercondutor (NbTiN) [3]. . . . .	6

1.6	Observamos uma reflexão normal do elétron que incide num isolante no lado esquerdo e na direita temos a reflexão do elétron no supercondutor, figura adaptada da referência [4]. . . . .	8
1.7	Espalhamento genérico com 2 terminais ligados em guias ideais com três canais abertos. Os reservatórios possuem potenciais eletroquímicos $\mu_1$ e $\mu_2$ , respectivamente. As letras $a$ representam as amplitudes das ondas que incidem no condutor coerente e $b$ as amplitudes das ondas que saem do centro espalhador. . . . .	9
2.2	Distribuição da potência do ruído de disparo para os casos $N = 1, 2$ em função da ausência ou presença da SRT. . . . .	24
3.1	Distribuição da condutância para o caso $N = 2, 3, 4, 5$ com a cor vermelha para os casos $Q = 0$ , verde para $Q = 1$ , Azul para $Q = 2$ , laranja para $Q = 3$ , Azul claro para $Q = 4$ e rosa para $Q = 5$ . . . . .	32
3.2	Distribuição da potência do ruído de disparo para o caso $N = 2, 3, 4e5$ com a cor vermelha para os casos $Q = 0$ , verde para $Q = 1$ , Azul para $Q = 2$ e laranja para $Q = 3$ . . . . .	33
A.1	Representação gráfica da média e variância de uma variável estocástica $x$ . . . . .	38
B.1	Potência do ruído de disparo $p = \tau(1 - \tau)$ e a função inversa $\tau = \tau(p)$ . Temos a regiçãoes da função inversa apresentada em cores diferentes: $\tau^{(+)}$ (azul) e $\tau^{(-)}$ (vermelho). . . . .	41
B.2	Intervalo das variáveis $(\tau_1, \tau_2)$ a esquerda, intervalo das variáveis $(x_1, x_2)$ a direita. . . . .	42
B.3	Intervalo das variáveis $(\tau_1, \tau_2)$ a esquerda, intervalo das variáveis $(x_1, x_2)$ a direita. . . . .	44

# Capítulo 1

## Introdução

Neste capítulo iniciamos com uma revisão dos conceitos de transporte eletrônico em física mesoscópica. Usaremos como principais referências [1, 2, 5, 6, 7, 8, 9] para elaboração do capítulo 1.

### 1.1 Física mesoscópica

Nos anos 80 surgem os primeiros experimentos envolvendo junções de arseneto de gálio (GaAs) e arseneto de gálio alumínio (AlGaAs) formando um gás bidimensional com canais de condução com baixo ruído e boa condutividade, veja figura (1.1). Experimentalmente a aplicação de uma diferença de potencial nos terminais da estrutura ocasiona o fim do regime de equilíbrio gerando uma direção preferencial, ou seja, um regime de transporte [10]. As pesquisas nas áreas da física mesoscópica tornaram-se constantes tanto na parte teórica quanto experimental [2, 7, 8]. Algumas grandezas como a condutância e a potência do ruído de disparo vêm sendo intensamente estudadas [11, 12, 13, 14, 15, 16].

Em princípio a condutância num condutor com largura  $W$ , comprimento  $L$  e condutividade  $\sigma$  é descrita pela lei de Ohm

$$G = \sigma \frac{W}{L}. \quad (1.1)$$

A equação acima nos leva a seguinte questão: qual o limite da validade da lei de Ohm O comprimento da amostra na equação (1.1) nos revela uma divergência na condutância no

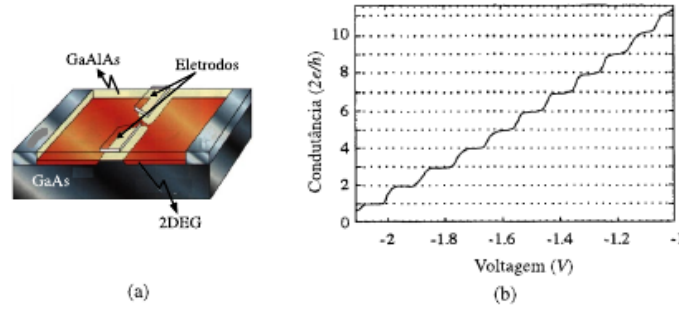


Figura 1.1: (a) O ponto quântico de contato sobre um Gás de elétrons bidimensional. (b) Medida da condutância vs voltagem aplicada na constricção. Figuras retiradas das referências [1, 2] respectivamente.

limite  $L \rightarrow 0$ , mas no regime mesoscópico isto não é observado experimentalmente [2].

Com a diminuição da amostra as partículas não se comportam de forma clássica, passam a assumir comportamento ondulatório [2]. Os efeitos de interferência passam a ter um papel de destaque no processo de transmissão. Devido a diminuição do comprimento do condutor surgem comprimentos característicos relacionados a física mesoscópica, são eles [2]

- Comprimento de Fermi  $\lambda_F$ : comprimento de onda relacionado as partículas que apresentam energia de Fermi, responsáveis pelo transporte a baixa temperatura. O comprimento tem a forma

$$\lambda_F = \sqrt{\frac{2\pi}{d_s}}, \quad (1.2)$$

onde  $d_s$  representa a densidade de elétrons.

- Livre caminho médio  $l$ : é a distância que as partículas percorrem antes de sofrer qualquer interação que modifique o seu momento [2]. Pode ser calculada por

$$l = v_F \tau_m, \quad (1.3)$$

onde  $v_F$  é a velocidade de Fermi e  $\tau_m$  é o tempo de relaxação do momento.

- Comprimento de localização  $\xi$ : extensão espacial das funções de onda da partícula. As ondas se estendem por toda a amostram em condutores metálicos, já em isolantes decaem exponencialmente [2, 17].

- Comprimento de relaxação de fase  $L_\varphi$ : comprimento máximo em que a partícula se propaga antes de perder a coerência de fase, dada por

$$L_\varphi = v_F \sqrt{\frac{\tau_m \tau_\varphi}{2}}, \quad (1.4)$$

onde  $\tau_\varphi$  representa o tempo em que a partícula perde a coerência de fase.

Os quatro comprimentos característicos descritos acima, representam as fronteiras dos regimes de transporte eletrônico em sistemas mesoscópicos, se classificam em

- Regime balístico ( $L < l$ ): a partícula atravessa o condutor sem sofrer espalhamento. Exemplos desse regime são encontrados em pontos quânticos.
- Regime difusivo ( $l < L < \xi$ ): as partículas sofrem uma sequência de colisões elásticas. Exemplos desse regime são fios quânticos desordenados.
- Regime localizado [17] ( $\xi < L < L_\varphi$ ): as funções de onda estão localizadas e não ocorre transporte eletrônico.
- Regime Ohmico ( $L_\varphi < L$ ): é o regime representado pela equação (1.1).

O resumo para os diferentes tipos de regime de condução pode ser observado na figura (1.2).

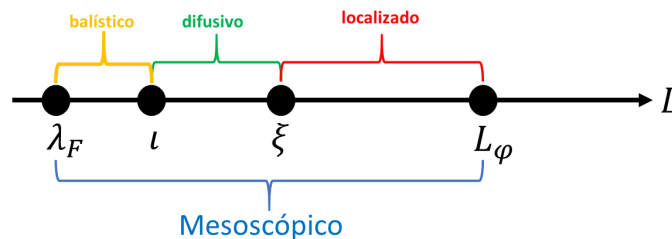


Figura 1.2: Relações entre o regime de condução e o comprimento característico para baixas temperaturas.

## 1.2 Isolantes e supercondutores topológicos

A topologia é aplicada a uma nova variedade de fenômenos que envolvem a interação entre o invariante topológico e a presença ou ausência de simetrias básicas no sistema analisado [18]. Influenciando de forma direta com o comportamento dos fenômenos, englobando dois paradigmas-chaves na física da matéria condensada: a relação entre a perda da simetria que ocorre de forma espontânea em função da variação do parâmetro topológico [18].

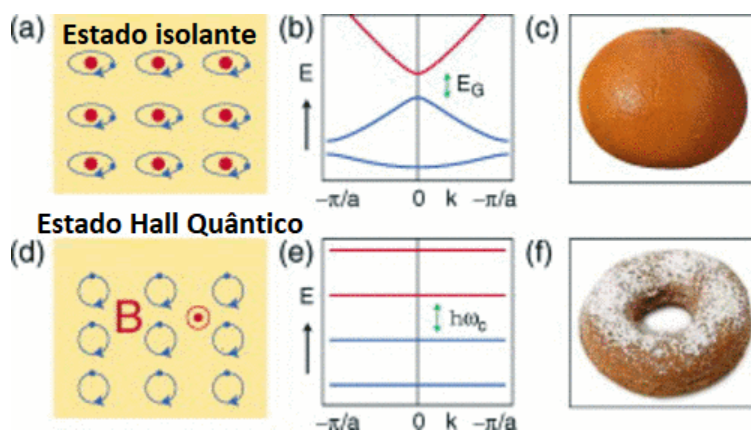


Figura 1.3: (a)-(c) O estado isolante. (a) Estado isolante. (b) Uma estrutura de banda de um isolante comum. (d)-(f) O estado do Hall quântico. (d) O movimento ciclotron dos elétrons. (e) Os níveis de Landau, que podem ser vistos como uma estrutura de banda. (c) e (f) Duas superfícies que diferem em seu gênero,  $g$ . (c)  $g = 0$  para a esfera e (f)  $g = 1$  para o donut. O número Chern  $n$  que distingue os dois estados é um invariante topológico semelhante ao gênero, figura retirada da referência [23].

Nos últimos 30 anos, o estudo do efeito Hall quântico induziu ao paradigma de classificar diferentes estados da matéria condensada baseada na variação de um parâmetro topológico [19, 20]. O efeito Hall quântico se apresenta como invariante topológico o número de Chern (1982), figura 1.4. Sistemas topológicos ganharam destaque em 2005 pela descoberta da fase isolante do efeito hall quântico em duas dimensões [21, 22].

Mudanças suaves não perturbam esse tipo de sistema e não podem ser alterados, e não podem ser alterados, exceto quando existe mudança da fase quântica tem estados protegido pela simetria de reversão do tempo [23]. Propriedades essas que tem aplicação na área de



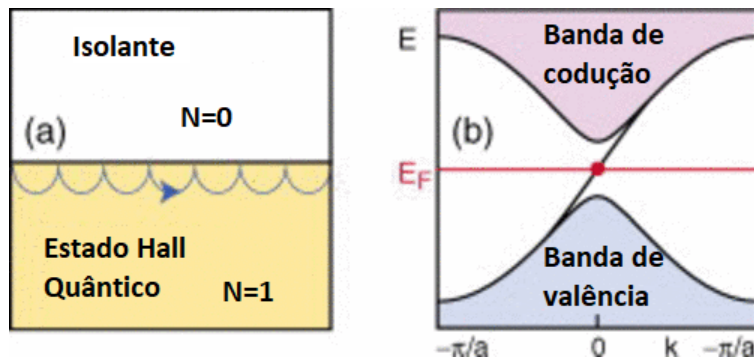


Figura 1.4: A interface entre o estado de Hall quântico e um isolador apresenta uma borda com banda de energia com simetria quirial. (a) As órbitas de ciclotron saltando. (b) Um único estado de borda conecta a banda de valência com à banda de condução, figura retirada da referência [23].

spintrônica e computação quântica.

O acoplamento da spin-órbita pode levar a matéria a assumir o comportamento de um isolante topológico. A superfície ou a borda em isolantes topológicos apresentam ausência de gap entre as bandas de condução surgindo a simetria de reversão temporal. As bordas dos isolantes podem ser alteradas para um estado condutor com a mudança topológica do sistema, podemos observar o comportamento de estrutura de isolantes topológicos e um isolante comum e uma exemplificação do que se pode entender por parâmetro topológico na figura 1.3.

No caso do modelo supercondutor topológico precede os recentes sistemas quânticos topológicos propostos e estudados [21, 24, 25]. Contudo ideias concretas para realizar tais supercondutores topológicos surgiram somente após a descoberta de isoladores topológicos, que fornecem uma plataforma convencional para a supercondutividade. O número quântico topológico possui uma correlação com o processo de condução e o número de canais na fronteira do condutor. Algumas propriedades dos supercondutores topológicos:

- São descritos pelo hamiltoniano BdG. Neste trabalho utilizaremos a Classe BDI da teoria TMA que será abordado numa seção adiante.
- Os estados com energia negativa do hamiltoniano tem equivalência com os estados

ocupados no supercondutor.

- A superfície desses materiais apresenta ausência de corrente elétrica e presença de condução térmica, enquanto internamente se comporta de forma inversa.
- Assume diferentes comportamentos no processo de transporte de partículas, variando de um isolante a um supercondutor conforme o ajuste do número quântico topológico  $Q$  [21].
- A classificação de supercondutor ou isolante topológico é dada pela simetria e pela dimensionalidade do gap desses sistemas.

Informações sobre o processo de classificação de matérias topológicas podem ser encontradas nas referências [26, 27, 28, 29]. No caso dos supercondutores topológicos a classificação do número quântico topológico  $Q$ , onde  $Q \in \mathbf{Z}$ . No caso do sistema normal-supercondutor  $Q$  representa o número de canais abertos no condutor normal que estão abaixo no nível de Fermi. O processo de espalhamento nesses materiais está intimamente ligado ao parâmetro topológico  $Q$ . Um supercondutor topológico conhecido é o (NbTiN), quando conectando com um guia de (InSb) representa o tipo de junção normal-supercondutora que encontramos a distribuição dos observáveis de transporte desta dissertação, figura 1.5.

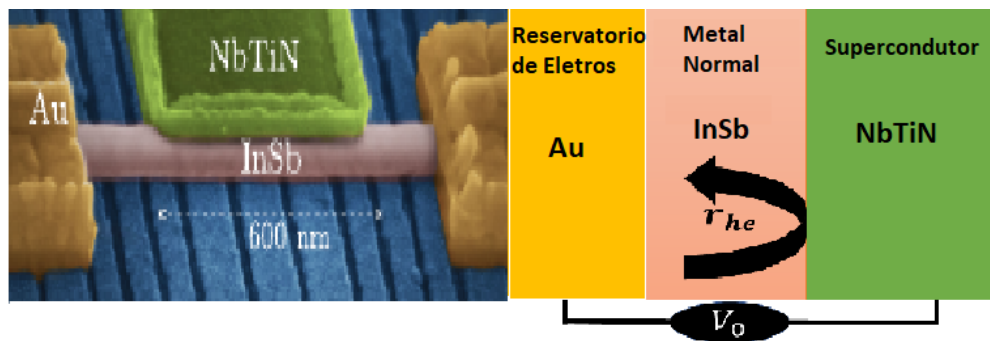


Figura 1.5: Aplicamos uma d.d.p entre (InSb) e (Au). O elemento (Au) que neste experimento tem o papel de reservatório de elétrons, que está conectado ao guia normal formado por um material semiconductor de (InSb) forma uma junção com o supercondutor (NbTiN) [3].

### 1.2.1 Reflexão de Andreev

Na interface entre um metal normal e um supercondutor, a corrente normal é convertida numa corrente típica de um sistema supercondutor [4, 17, 30]. O processo de condução numa junção normal-supercondutora foi descoberto em 1964 por Andreev. Ele observou a excitação de elétrons ligeiramente acima do nível de Fermi no metal normal que incidem na junção parte era refletida na forma de buracos ligeiramente abaixo do nível de Fermi. Mais tarde batizado de reflexão de Andreev, figura 1.6. O sistema no geral apresenta algumas propriedades

- Na reflexão de Andreev há conservação da carga. De forma local não temos conservação da corrente (condutor normal). Contudo quando englobamos os dois condutores, observamos um buraco retornando como  $-e$  no guia normal enquanto temos  $+2e$  no guia supercondutor encontrado assim a conservação da carga. Os pares de elétrons recebem o nome de pares de Cooper [31];
- A reflexão de Andreev apresenta conservação de spin, os buracos refletidos apresentam spin contrário aos elétrons incidentes;
- O momento se conserva na reflexão de Andreev, a partícula refletida volta pelo mesmo caminho do elétron incidente com buraco com energia  $-E$ ;
- A energia é conservada, portanto a reflexão de Andreev é um processo elástico. Em resumo, na reflexão de Andreev um elétron com energia ( $E$ ) acima do nível de Fermi é convertido em um buraco com energia ( $-E$ ) abaixo do nível fermiônico.

A formação de um par de Cooper ocorre pela interação entre elétrons, a qual é intermediada por um fônon associado à deformação da rede, criando um estado ligado entre dois elétrons [31]. Devido ao fônon apresentar uma velocidade menor que do elétron, o sistema possui menor velocidade em relação a corrente normal, o que leva a existência dos pares de Cooper com um maior tempo de permanência.

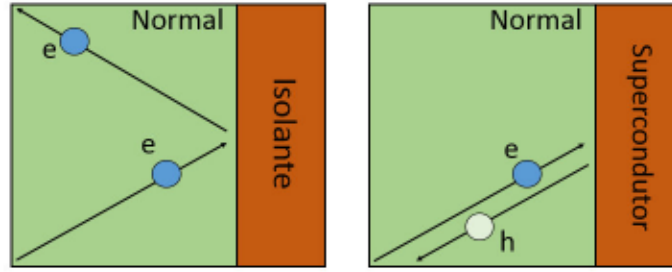


Figura 1.6: Observamos uma reflexão normal do elétron que incide num isolante no lado esquerdo e na direita temos a reflexão do elétron no supercondutor, figura adaptada da referência [4].

### 1.3 A teoria de espalhamento

Rolf William Landauer [14] foi o primeiro a estabelecer a relação entre os processos de espalhamentos quanto-mecânicos e a condutância entre dois terminais, veja a figura (1.7). Posteriormente Büttiker generalizou [13] para o caso de  $M$  terminais. Hoje o modelo é conhecido como formalismo de Landauer-Büttiker e tem sido utilizado amplamente na física-mesoscópica. O formalismo é baseado na matriz de espalhamento  $S$ , definida por

$$b = Sa, \quad (1.5)$$

onde  $a$  e  $b$  representam as amplitudes das ondas de entrada e saída no centro espalhador respectivamente, veja na figura (1.7).

Para um sistema de dois terminais, como na figura 1.7 a matriz  $S$  apresenta as seguintes estrutura de blocos

$$S = \begin{pmatrix} r_{N_1 \times N_1} & t'_{N_1 \times N_2} \\ t_{N_2 \times N_1} & r'_{N_2 \times N_2} \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

onde  $(t, t')$  são os blocos de transmissão,  $(r, r')$  referentes a reflexão e os índices inferiores  $N_1$  e  $N_2$  o número de canais abertos em cada guia. A probabilidade de transmissão ou reflexão de uma certa partícula é proporcional ao modulo quadrado do elemento da matriz  $S$  na forma

$$P_{pq} = |S_{pq}|^2, \quad (1.7)$$

onde  $P_{pq}$  representa a probabilidade da partícula ser transmitida do guia  $q$  para guia  $p$ .

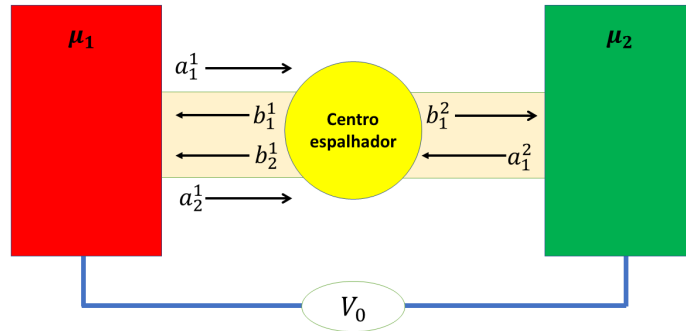


Figura 1.7: Espalhamento genérico com 2 terminais ligados em guias ideais com três canais abertos. Os reservatórios possuem potenciais eletroquímicos  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , respectivamente. As letras  $a$  representam as amplitudes das ondas que incidem no condutor coerente e  $b$  as amplitudes das ondas que saem do centro espalhador.

O princípio de conservação de carga no processo de espalhamento pode ser escrito na forma

$$\sum_m |a_m|^2 = \sum_m |b_m|^2, \quad (1.8)$$

isto impõe um vínculo de unitariedade da matriz de espalhamento que passa a ser unitária

$$S^\dagger = S^{-1}. \quad (1.9)$$

Na próxima seção mostraremos como os observáveis do sistema podem ser escritos em termos da matriz espalhamento.

## 1.4 A teoria de Landauer-Büttiker para metais normais (N)

Nesta seção iremos aplicar a teoria de espalhamento para encontrar a fórmula de Landauer-Büttiker. Em seguida usaremos o mesmo método para obter a expressão da potência do ruído de disparo. Para este fim usaremos as referências [12, 21].

Iniciaremos o cálculo a partir da densidade de probabilidade da corrente [32], dada por

$$J = \frac{i\hbar}{2m}(\Psi\nabla\Psi^\dagger - \Psi^\dagger\nabla\Psi), \quad (1.10)$$

onde  $\Psi$  representada a função de onda da partícula.

A corrente de elétrons que atravessa o guia é definida pela integral da densidade de corrente. Na visão da segunda quantização o operador corrente assume a forma

$$\hat{I}_l = \frac{e\hbar}{2im} \int dy_l \left( \hat{\Psi}_l^\dagger(\vec{r}_l, t) \frac{\partial \Psi_l(\vec{r}_l, t)}{\partial x_l} - \hat{\Psi}_l(\vec{r}_l, t) \frac{\partial \Psi_l^\dagger(\vec{r}_l, t)}{\partial x_l} \right). \quad (1.11)$$

onde  $\hat{\Psi}_l^\dagger(\vec{r}_l, t)$  é uma combinação linear das funções de onda no guia  $l$  denominada operador campo, que assume a forma

$$\hat{\Psi}_l(\vec{r}_l, t) = \sum_n \left[ \varphi_{(l,n)}^+(\vec{r}_l) \hat{a}_n^l + \varphi_{(l,m)}^-(\vec{r}_l) \hat{b}_n^l \right], \quad (1.12)$$

$$\hat{\Psi}_l^\dagger(\vec{r}_l, t) = \sum_n \left[ \varphi_{(l,n)}^{+*}(\vec{r}_l) \hat{a}_n^{l\dagger} + \varphi_{(l,m)}^{-*}(\vec{r}_l) \hat{b}_n^{l\dagger} \right]. \quad (1.13)$$

Os operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  são operadores aniquilação, enquanto  $\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{b}^\dagger$  são os operadores criação.

Temos que  $\varphi$  é dado por

$$\varphi_{(l,n)}^\pm(\vec{r}_l) = \frac{\exp(\pm ik_{l,n}x_l)}{(\hbar k_{l,n}m^{-1})^{\frac{1}{2}}} \chi_n(y_l). \quad (1.14)$$

onde o sinal  $+$  representa as ondas incidentes e o sinal  $-$  as refletidas. Por sua vez  $\chi_n(y_l)$  é a solução transversal da função de onda, o remanescente representa a solução longitudinal.

Para reescrevermos a corrente em função da energia, aplicamos a seguinte transformada de Fourier,

$$\hat{a}_n^l(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dE \hat{a}_n^l(E) \exp(-iE\frac{t}{\hbar}), \quad (1.15)$$

onde os operadores  $\hat{a}_n^{l\dagger}(t)$ ,  $\hat{b}_n^l(t)$  e  $\hat{b}_n^{l\dagger}(t)$  são escritos de forma semelhante.

Substituindo a equação (1.15) na equação (1.13), obtemos

$$\hat{\Psi}_l(\vec{r}_l, t) = \int \exp\left(-iE\frac{t}{\hbar}\right) \sum_n \frac{\chi_n(y_l)}{\sqrt{2\pi\hbar v_{l,n}(E)}} \left[ \hat{a}_n^l(E) \exp(ik_{l,n}x_l) + \hat{b}_n^l(E) \exp(-ik_{l,n}x_l) \right], \quad (1.16)$$

$$\hat{\Psi}_l^\dagger(\vec{r}_l, t) = \int \exp\left(iE\frac{t}{\hbar}\right) \sum_n \frac{\chi_n^*(y_l)}{\sqrt{2\pi\hbar v_{l,n}(E)}} \left[ \hat{a}_n^{\dagger l}(E) \exp(-ik_{l,n}x_l) + \hat{b}_n^{\dagger l}(E) \exp(ik_{l,n}x_l) \right]. \quad (1.17)$$

onde  $v_{l,n}$  representa a velocidade do elétron no  $n$ -ésimo canal do guia  $l$ . Finalmente, substituindo as equações 1.16 e 1.17 na equação 1.11, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{I}_l(x, t) &= \frac{e}{4\pi\hbar} \sum_n \int \int dE dE' \exp i(E - E') \frac{t}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{v_{l,n}(E)v_{l,n}(E')}} \\ &\times ([v_{l,n}(E) + v_{l,n}(E')][\exp ix_l(k_{l,n}(E') - k_{l,n}(E))\hat{a}_n^{\dagger l}(E)\hat{a}_n^l(E') \\ &- \exp ix_l(k_{l,n}(E) - k_{l,n}(E'))\hat{b}_n^{\dagger l}(E)\hat{b}_n^l(E')] \\ &+ [v_{l,n}(E) - v_{l,n}(E')][\exp -ix_l(k_{l,n}(E) - k_{l,n}(E'))\hat{a}_n^{\dagger l}(E)\hat{b}_n^l(E') \\ &- \exp ix_l(k_{l,n}(E') - k_{l,n}(E))\hat{b}_n^{\dagger l}(E)\hat{a}_n^l(E')]). \end{aligned}$$

Para simplificar a equação acima, assumimos que as partículas apresentam velocidade próximo a velocidade de Fermi. Desta forma, podemos assumir que  $v_{l,n}(E) \simeq v_{l,n}(E')$ , simplificando a equação acima da seguinte forma

$$\hat{I}_l(x, t) = \frac{e}{\hbar} \int \int dE dE' \exp \left[ i(E - E') \frac{t}{\hbar} \right] [\hat{a}_n^{\dagger l}(E)\hat{a}_n^l(E') - \hat{b}_n^{\dagger l}(E)\hat{b}_n^l(E')]. \quad (1.18)$$

Seguindo a referência [12] é possível relacionar os operadores criação e aniquilação com os elementos da matriz espalhamento da seguinte forma

$$\hat{a}_n^{\dagger l}(E)\hat{a}_n^l(E') - \hat{b}_n^{\dagger l}(E)\hat{b}_n^l(E') = \sum_{\alpha, \beta, \kappa, m, n} \hat{a}_m^{\dagger \alpha}(E) [\delta_{\alpha, l} \delta_{\beta, l} \delta_{m, n} \delta_{\kappa, n} - (S^\dagger)_{mn}^{\alpha l}(E) S_{n\kappa}^{l\beta}(E')] \hat{a}_\kappa^\beta(E'). \quad (1.19)$$

Substituindo a equação (1.19) na equação (1.18) obtemos

$$\hat{I}_l(x, t) = \frac{e}{\hbar} \int \int dE dE' \exp \left[ i(E - E') \frac{t}{\hbar} \right] [\hat{a}_m^{\dagger \alpha}(E) A_{m\kappa}^{\alpha\beta}(l; E, E') \hat{a}_\kappa^\beta(E')], \quad (1.20)$$

onde

$$A_{m\kappa}^{\alpha\beta}(l; E, E') = [\delta_{\alpha, l} \delta_{\beta, l} \delta_{m, \kappa} (S^\dagger)_{mn}^{\alpha l}(E) S_{n\kappa}^{l\beta}(E')]. \quad (1.21)$$

### 1.4.1 Condutância ( $G$ )

No regime linear a condutância é obtida da seguinte forma

$$G = \lim_{V_0 \rightarrow 0} \frac{\langle I \rangle}{V}. \quad (1.22)$$

Devido ao sistema ser considerado em equilíbrio, são representados pela mesma distribuição de Fermi para os reservatórios, a média do operador criação e aniquilação se igualam. Então podemos utilizar a identidade para a média da corrente [12, 33]

$$\langle \hat{a}_m^\dagger(E) \hat{a}_k^\beta(E') \rangle = \delta_{\alpha,\beta} \delta_{m,\kappa} \delta(E - E') f_\alpha(E), \quad (1.23)$$

onde  $f_\alpha(E) = (1 + \exp(-E/k_B T))^{-1}$  é a função de Fermi que representa a distribuição dos elétrons nos reservatórios. Substituindo a equação (1.23) na equação (1.20) obtemos

$$\langle \hat{I}_l \rangle = \frac{e}{\hbar} \sum_\alpha \sum_m \int dE A_{mm}^{\alpha\alpha}(l; E) f_\alpha(E). \quad (1.24)$$

Dispondo-se da relação da equação (1.21) e aproveitando da unitariedade da matriz espalhamento, a corrente para 2 terminais assume a forma

$$\langle \hat{I} \rangle = \frac{e}{\hbar} \int dE \text{Tr}(tt^\dagger) [f_1(E) - f_2(E)]. \quad (1.25)$$

onde  $f_1(E) = f(E - E_F - eV)$  e  $f_2(E) = f(E - E_F)$ . Tomando o regime linear e aplicando o teorema fundamental do cálculo, obtemos

$$G = \frac{e^2}{\hbar} \int dE \left( -\frac{\partial f(E - E_F)}{\partial E} \right) \text{Tr}(t(E)t^\dagger(E)). \quad (1.26)$$

Tomando o limite  $T \rightarrow 0$  a derivada da função de Fermi se transforma numa função delta de Dirac  $\frac{\partial f(E - E_F)}{\partial E} = \delta(E - E_F)$ , finalmente a equação (1.26) assume a forma

$$G = \frac{e^2}{\hbar} \text{Tr}(tt^\dagger), \quad (1.27)$$

que é a formula de Landauer-Büttiker.

### 1.4.2 As flutuações temporais da corrente

A potência do ruído de disparo se origina das flutuações dependentes do tempo e estão intimamente ligadas a quantização das cargas. Toda vez que observamos um pico da corrente significa que uma partícula foi conduzida no guia, gerando flutuações temporais na corrente



### 1.4.3 Potência do ruído de disparo ( $P$ )

Tomando o limite para baixas frequências ( $w \rightarrow 0$ ) na equação (??), a densidade espectral assume a forma

$$P = \frac{2e^2}{h} \sum_{\alpha\beta} \sum_{m\kappa} \int dE A_{m\kappa}^{\alpha\beta}(E, E) A_{\kappa m}^{\beta\alpha}(E, E) f_{\alpha}(E) [1 - f_{\beta}(E)]. \quad (1.28)$$

A equação (1.28) pode ser reescrita em termos da matriz espalhamento, a qual é dada por

$$P = \frac{2e^2}{h} \int dE \{ [f_1(1 - f_1) + f_2(1 - f_2)] Tr(t^{\dagger} t r^{\dagger} r) + [f_1(1 - f_1) + f_2(1 - f_2)] Tr(t^{\dagger} t)^2 Tr(t^{\dagger} t r^{\dagger} r) \}. \quad (1.29)$$

Admitindo o sistema no regime de resposta linear, a equação (1.29) assume a forma

$$P = \frac{2e^3 V}{h} Tr(t^{\dagger} t r^{\dagger} r). \quad (1.30)$$

Novamente usufruindo da unitariedade da matriz espalhamento a equação (1.30), adquire a forma

$$P = \frac{2e^3 V}{h} Tr[t^{\dagger} t (1 - t^{\dagger} t)], \quad (1.31)$$

que é conhecido como potência do ruído de disparo.

Na próxima seção mostraremos como adaptar o formalismo para a obtenção dos observáveis de transporte numa junção metal normal-supercondutor para o caso normal-supercondutor semelhantes aos utilizados no caso normal [12, 16].

## 1.5 Estruturas híbridas: Junções metal normal-supercondutor ( $NS$ )

Devido a reflexão de Andreev na interface NS devemos levar em conta os graus de liberdades de elétrons e buracos na matriz espalhamento. Por exemplo, a matriz de reflexão pode ser descrita na forma

$$r = \begin{pmatrix} r_{ee} & r_{eh} \\ r_{he} & r_{hh} \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

onde os índices  $e$  e  $h$  representam elétron e buraco, respectivamente. O bloco de reflexão  $r_{pq}$  tem o índice  $q$  representando o tipo de partícula que incide na junção NS, enquanto  $p$  o tipo de partícula que é refletido.

As amplitudes de incidência  $\hat{a}_{e,h}$  e saída  $\hat{b}_{e,h}$  estão relacionados com a matriz  $r$  da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_e \\ \hat{b}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{ee} & r_{eh} \\ r_{he} & r_{hh} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_e \\ \hat{a}_h \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

As equações (1.12) e (1.13) são reescritas na forma matricial como se segue

$$\hat{\Psi}(\vec{r}, t) = \int dE \exp\left(-iE\frac{t}{\hbar}\right) \frac{\chi(y, E)}{\sqrt{2\pi\hbar v(E)}} \left[ \begin{pmatrix} \hat{a}_e \\ \hat{a}_h \end{pmatrix} \exp(ik_F z) + \begin{pmatrix} \hat{b}_e \\ \hat{b}_h \end{pmatrix} \exp(-ik_F z) \right], \quad (1.34)$$

$$\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}, t) = \int dE \exp\left(iE\frac{t}{\hbar}\right) \frac{\chi^*(y, E')}{\sqrt{2\pi\hbar v(E')}} \left[ \begin{pmatrix} \hat{a}_e^\dagger & \hat{a}_h^\dagger \end{pmatrix} \exp(-ik_F z) + \begin{pmatrix} \hat{b}_e^\dagger & \hat{b}_h^\dagger \end{pmatrix} \exp(ik_F z) \right]. \quad (1.35)$$

Substituindo as equações (1.34) e (1.35) no operador corrente, equação (1.11), podemos demonstrar que

$$\hat{I}_l = \frac{e}{2\pi\hbar} \sum_{\alpha\beta} \int \int dE dE' \exp\left[i(E - E')\frac{t}{\hbar}\right] \text{Tr}[\hat{a}_\alpha^\dagger A_{\alpha\beta}(E, E') \hat{a}_\beta(E')], \quad (1.36)$$

onde a matriz  $A(E, E')$  é dada por

$$A(E, E') = \Lambda - r^\dagger \Lambda r(E'). \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

### 1.5.1 Condutância ( $G_{NS}$ )

A condutância para o caso normal-supercondutor ocorre no regime linear equação (1.22). Neste caso a média dos operadores dados por

$$\langle \hat{a}_\alpha^\dagger(E) \hat{a}_\beta(E) \rangle = \delta_{\alpha\beta} \delta(E - E') f_\alpha(E). \quad (1.38)$$

Substituindo a equação (1.38) na (1.36) obtemos a média do operador corrente na forma

$$\langle I \rangle = \frac{e}{2\pi\hbar} \sum_{\alpha} \int dE \text{Tr}[A_{\alpha\alpha} f_\alpha], \quad (1.39)$$

A expressão para condutância de uma junção normal-supercondutor é obtida substituindo a equação (1.39) na equação (1.22) resultando

$$G_{NS} = \frac{e^2}{\pi\hbar} \text{Tr}[r_{he}^\dagger r_{he}]. \quad (1.40)$$

### 1.5.2 Potência do ruído de disparo ( $P_{NS}$ )

Para calculamos a potência do ruído de disparo substituindo as equações (1.35) e (1.34) na equação (1.28) e reescrevemos a mesma na forma

$$P(0) = \frac{2e^2}{h} \sum_{\alpha\beta} \int dE \text{Tr}[A_{\alpha\beta}(E, E)A_{\beta\alpha}(E, E)]f_\alpha(E)(1 - f_\beta(E)). \quad (1.41)$$

Substituindo a definição da matriz  $A$ , equação (1.37), na equação (1.41), obtemos

$$P = \frac{8e^2}{h} \int dE \text{Tr}[r_{he}^\dagger r_{he} r_{he}^\dagger r_{he}] [f_e(1 - f_e) + f_h(1 - f_e) + f_e(1 - f_h) + f_h(1 - f_h)]. \quad (1.42)$$

Tomando  $T \rightarrow 0$  a equação (1.42) se reduz

$$P = \frac{8e^3}{h} |V| \text{Tr}[r_{he}^\dagger r_{he} r_{hh}^\dagger r_{hh}]. \quad (1.43)$$

Utilizando da unitariedade da matriz espalhamento, a equação (1.43) pode ser escrita na seguinte forma

$$P = \frac{4e^3}{\pi\hbar} |V| \text{Tr}[r_{he}^\dagger r_{he} (1 - r_{he}^\dagger r_{he})]. \quad (1.44)$$

## 1.6 Teoria de matrizes aleatórias

A teoria de matrizes aleatórias (TMA) assumiu um papel importante na área da física matemática na década de 1960. Pesquisadores como Wigner, Dyson, Mehta e Gaudin obtiveram destaque no desenvolvimento da teoria e na aplicação em suas pesquisas [35, 36, 4]. A TMA foi inicialmente aplicada em estudos do comportamento das distribuições dos níveis de energia em núcleos pesados medidos em reações nucleares e ganhou destaque na década de 80, como uma ferramenta no estudo de sistemas quânticos caóticos[37].

A TMA é fortemente afetada por simetrias fundamentais do hamiltoniano como reversão temporal (SRT), rotação de spin (SRS), quiral/subrede (SSR) e partícula buraco (SPH). A

presença ou ausência dessas simetrias leva a dez classes de universalidade que seguem uma relação 1 a 1 com a tabela de Cartan de espaços simétricos [38]. Estas classes podem ser divididas em três categorias: Wigner-Dyson [39, 40], Quiral [41] e BdG [38]. Em transporte quântico as classes Wigner-Dyson são apropriadas no estudo de condutores desordenados convencionais e cavidades caóticas balísticas. A classe Quiral se aplica a sistemas com simetria de subrede e as classes BdG são apropriadas para sistemas supercondutores [42, 39]. A tabela (1.1) representa a classificação dos ensembles da TMA.

Classe de simetria	Ensemble	SRT	PHS	SRS	SSR
Wigner Dyson	A(unitária)	0	0	0	0
	AI(ortogonal)	1	0	0	0
	AII(simplética)	1	0	0	0
Quiral	AII(unitária)	0	0	1	1
	BDI(ortogonal)	1	1	1	1
	CII(simplética)	1	1	1	1
Altland-Zimbauer	D	1	1	0	0
	C	1	1	0	0
	DIII	1	1	1	0
	CI	1	1	1	0

Tabela 1.1: Classes de simetria da teoria de matrizes aleatórias. Onde 0 e 1 representa a ausência e presença das simetrias, respectivamente.

Na abordagem da TMA para o estudo de propriedades estatísticas de transporte em pontos quânticos caóticos é modelada por uma matriz aleatória pertencente a um dos dez ensembles circulares [4]. Em fios desordenados a modelagem é feita a partir da matriz de transferência.

### 1.6.1 Teoria de matrizes aleatórias aplicada a uma junção normal-supercondutor topológico

A matriz de reflexão  $r$  responsável por representar o espalhamento no caso normal-supercondutor topológico apresenta a mesma estrutura do caso normal-supercondutor, equação (1.45), que assume a forma [35, 36]

$$r = \begin{pmatrix} r_{ee} & r_{eh} \\ r_{he} & r_{hh} \end{pmatrix}. \quad (1.45)$$

O sistema apresenta simetria quiral pelo ensemble circular (BDI), podendo ser vista na tabela (1.1). As propriedades de simetria das matrizes aleatórias para o caso de uma junção normal-supercondutor topológico apresentam simetria partícula buraco e quiral como se segue

$$\tau_x r(-E) \tau_x = \begin{cases} r^*(E), & \text{(simetria } e-h) \\ r^\dagger(E), & \text{simetria quiral,} \end{cases} \quad (1.46)$$

que resultam nas identidades

$$r_{ee} = r_{hh}^* = r_{ee}^T, \quad r_{he} = r_{eh}^* = r_{he}^\dagger. \quad (1.47)$$

A matriz  $r$  pode ser decomposta da seguinte forma

$$r = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma & \Lambda \\ \Lambda^T & \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^T & 0 \\ 0 & U^\dagger \end{pmatrix}, \quad (1.48)$$

onde  $U$  representa uma matriz unitária  $N \times N$ . Por sua vez  $\Gamma$  e  $\Lambda$  são matrizes  $N \times N$  definidas respectivamente por

$$\Gamma = \bigoplus_{m=1}^M \begin{pmatrix} \cos(\alpha_m) & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_m) \end{pmatrix} \bigoplus \mathcal{O}_{|Q|} \bigoplus \mathbb{1}_\zeta. \quad (1.49)$$

$$\Lambda = \pm \bigoplus_{m=1}^M \begin{pmatrix} 0 & -i \sin(\alpha_m) \\ i \sin(\alpha_m) & 0 \end{pmatrix} \bigoplus \mathbb{1}_{|Q|} \bigoplus \mathcal{O}_\zeta. \quad (1.50)$$

Onde  $\mathbb{1}_n$ ,  $\mathcal{O}_n$  representam respectivamente matriz unitária e matriz nula. O índice  $\zeta = 1$  ocorre quando  $N - |Q|$  resulta em um número ímpar,  $\zeta = 0$  ocorre quando  $N - |Q|$  resulta

em um número par. Por sua vez  $M = \frac{(N-|Q|-\zeta)}{2}$  e  $-\frac{\pi}{2} < \alpha_r \leq \frac{\pi}{2}$ . Comparando a equação (1.45) com equação (1.48) encontramos

$$r_{he} = (U\Lambda U^\dagger)^T. \quad (1.51)$$

Substituindo a equação (1.51) na equação (1.40) obtemos a expressão para a condutância na forma

$$g \equiv \frac{G}{G_0} = |Q| + 2 \sum_{m=1}^M R_m. \quad (1.52)$$

Onde  $R = \sin^2(\alpha_m)$  representa o autovalores da matriz  $r_{he}$ , que por sua vez apresentam um índice 2 multiplicando o somatório por questão da degenerescência dos autovalores. A variável  $Q$  representa o número quântico topológico representado por

$$Q = Tr[r_{he}] \quad (1.53)$$

A potência do ruído de disparo é obtida a parti da substituição da equação (1.51) na equação (1.44) resultando na forma

$$p = 2 \sum_{m=1}^M R_m - 2 \sum_{m=1}^M R_m^2. \quad (1.54)$$

### 1.6.2 Média da condutância e potência do ruído de disparo numa junção normal-supercondutor

A média da condutância para o caso normal-supercondutor topológico com simetria quiral pode ser encontrada na referência [9]. Para este resultado foi utilizado a integral de Selberg, que tem solução em função do parâmetro topológico  $Q$  e o número de canais  $N$  que assumindo a forma

$$\langle g \rangle = \frac{N(N-1) + Q^2}{2N-1}. \quad (1.55)$$

além de termos a variância [9] na forma

$$\text{var}(g) = \frac{4(N^2 - Q^2)(N^2 - Q^2 - 2N + 1)}{(2N-1)^2(2N+1)(2N-3)}. \quad (1.56)$$

A média da potência do ruído de disparo pode ser encontrada na referência [43]. Para o cálculo foi utilizando o método diagramático, obtendo o resultado na forma [43]

$$\langle p \rangle = \frac{(N-Q)(N-1-Q)(N+Q)(N-1+Q)}{(2N-3)(2N-1)(2N+1)}. \quad (1.57)$$

## 1.7 Nesta dissertação

Neste capítulo foram expostos os conceitos básicos da física mesoscópica com o objetivo de deduzimos os principais observáveis de transporte via a teoria de matrizes aleatórias (TMA). Para o caso no espalhamento gerando em uma junção de um metal normal com um supercondutor, onde a reflexão de Andreev rege transporte nesses tipos junções com supercondutores. Finalizamos com uma breve introdução a respeito dos supercondutores topológicos e pontos quânticos balísticos [44, 14, 13].

No capítulo 2 iremos abordar os cálculos das distribuições de condutância e potência de ruído de disparo para Ensemble Wigner-Dyson [45]. Utilizaremos a interpretação via teoria de matrizes aleatórias (TMA).

No capítulo 3 iremos calcular as distribuições de probabilidade da condutância e da potência do ruído de disparo para o caso normal-supercondutor topológico, calculando a distribuição de probabilidade da condutância e potência do ruído de disparo, em função do número quântico topológico  $Q$  [9, 5]. Mais uma vez utilizaremos a interpretação via teoria de matrizes aleatórias TMA.

No capítulo 4 apresentaremos as conclusões a respeito do que foi desenvolvido nesta dissertação e perspectivas para trabalhos futuros. No apêndice A encontraremos o procedimento de expansão do delta de Dirac, uma revisão breve de conceitos estatístico e uso da função delta para distribuições de grandezas de interesse. No apêndice B encontramos os procedimentos lógicos aplicados na mudança de variáveis em nossas distribuições.

# Capítulo 2

## Distribuições de probabilidade da condutância em um bilhar quântico Wigner-Dyson

### 2.1 introdução

Neste capítulo calcularemos as distribuições de probabilidade da condutância e potência de ruído de disparo de um bilhar quântico caótico, o qual estatisticamente é descrito pelos ensembles de Wigner-Dyson no contexto da Teoria de Matrizes Aleatórias [45, 46]. Para os casos em que o sistema apresenta simetria de reversão temporal (SRT) representado por ( $\beta = 1$ ) e ausência por ( $\beta = 2$ ).

### 2.2 Distribuição de probabilidade da condutância no ensemble Wigner-Dyson

A função distribuição densidade probabilidade conjunta  $P_\beta(\tau_n)$ , onde  $\tau_n$  representa os autovalores da matriz  $[tt^\dagger]$  [45] é dada pela expressão

$$P_\beta(\tau_1, \dots, \tau_N) = C_\beta \prod_{a < b}^N |\tau_a - \tau_b|^\beta \prod_n^N \tau_n^{\frac{\beta-2}{2}}. \quad (2.1)$$



onde  $C_\beta$  é o fator de normalização da função de probabilidade,  $N$  representa o número de canais abertos. A condutância de um sistema normal dada pela equação (1.27) pode ser reescrita da seguinte forma

$$g = \sum_{i=1}^N \tau_i. \quad (2.2)$$

Através da equação (2.1), obtemos a função densidade probabilidade

$$P_\beta(\tau) = C_\beta \tau^{\frac{\beta}{2}-1}. \quad (2.3)$$

A equação densidade de probabilidade da condutância, obtida através da equação (A.21), assume a forma

$$P(g) = \int_0^1 d\tau \delta(g - \tau) P_\beta(\tau). \quad (2.4)$$

O suporte da distribuição é o intervalo  $[0, 1]$ , onde  $\tau$  representa a probabilidade de uma partícula ser conduzida pelo canal.

A função densidade de probabilidade representada pela equação (2.3) assume

$$P_1(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\tau}}. \quad (2.5)$$

Através da substituição da equação (2.5) na equação (2.4), temos a distribuição da condutância na forma

$$P_1(g) = \frac{1}{2\sqrt{g}}. \quad (2.6)$$

Os cálculos das distribuições para o bilhar quântico de Wigner são semelhantes ao caso desenvolvido acima. Contudo no caso  $N = 2$   $\beta = 1$  se diferencia por ser necessário uma mudança de variáveis que pode ser encontrada no apêndice B.

Temos as distribuições de probabilidade da condutância representadas pelas expressões

$$N = 1 : P(g) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{g}}, & \text{se } \beta = 1, \\ 1, & \text{se } \beta = 2. \end{cases} \quad (2.7)$$

$$N = 2 : P(g) = \begin{cases} \frac{3}{4}g, & \text{se } g < 1. \\ \frac{3}{2}(g - 2\sqrt{g-1}), & \text{se } 1 < g < 2, \text{ se } \beta = 1, \\ 2(1 - |1 - g|)^3, & \text{se } \beta = 2. \end{cases} \quad (2.8)$$

Podemos encontrar as representações das distribuições de probabilidade da condutância na figura 2.1.

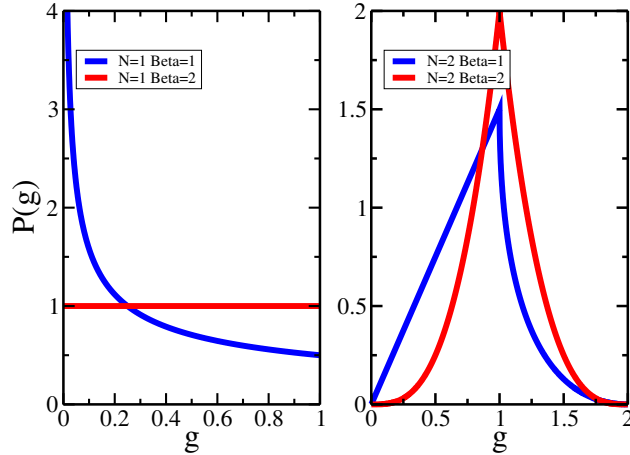


Figura 2.1

A tabela 2.1 contém o valor da Média da condutância em função do número de canais e ausência/presença da SRT.

$\langle g \rangle$	$\beta = 1$	$\beta = 2$
$N = 1$	0,300	0,500
$N = 2$	0,750	1

Tabela 2.1: Média da condutância em função da ausência ou presença da simetria de reversão temporal para os diferentes números de canais.

A tabela 2.2 contém o valor da variância da condutância em função do número de canais e ausência/presença da SRT.

Os resultados das distribuições de probabilidade da condutância, média e da variância foram obtidos primeiramente por Baranger e Mello [46]. Uma revisão detalhada pode ser encontrada na referência [45].

$var(g)$	$\beta = 1$	$\beta = 2$
$N = 1$	0,900	0,400
$N = 2$	0,180	0,067

Tabela 2.2: Média da condutância em função da ausência ou presença da simetria de reversão temporal para os diferentes números de canais.

### 2.3 Distribuição de probabilidade da potência do ruído de disparo

A potência do ruído de disparo apresenta sua origem das flutuações temporais da corrente que está intimamente ligada a quantização da carga, já que toda vez que uma partícula é detectada é detectado um pico na medida da condutância. Podemos reescrever a potência do ruído de disparo, equação (1.31), em funções dos autovalores da matriz  $tt^\dagger$  na forma

$$p = \sum_n \tau_n (1 - \tau_n). \tag{2.9}$$

A função densidade probabilidade da potência do ruído de disparo é escrita em função dos autovalores de transmissão da matriz espalhamento. Utilizando a equação (A.24) escrevemos a distribuição em função da potência do ruído de disparo para o caso de  $N$  canais que assume a forma

$$P(p) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 d\tau_1 \cdots d\tau_n \delta(f(p) - p) P_\beta(\tau_1, \dots, \tau_n). \tag{2.10}$$

As distribuições de probabilidade da potência do ruído de disparo para os caso  $N = 1, 2$  assumem a forma

$$N = 1 : P(g) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2(1-4p)}} \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{1-4p}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-4p}}}, & \text{se } \beta = 1, \\ \frac{2}{\sqrt{1-4p}}, & \text{se } \beta = 2. \end{cases} \tag{2.11}$$

$$N = 2 : P(g) = \begin{cases} 6 \sin^{-1} \left( \frac{2p}{(-1+2p)} \right) (-1 + 2p) & \text{se } 0 \leq p \leq \frac{1}{4} \\ 3\pi(1 - 2p) & \text{se } \frac{1}{4} \leq p \leq \frac{1}{2}, \text{ se } \beta = 2. \end{cases} \tag{2.12}$$

Podemos encontrar as representações das distribuições de probabilidade da condutância na figura 2.2.

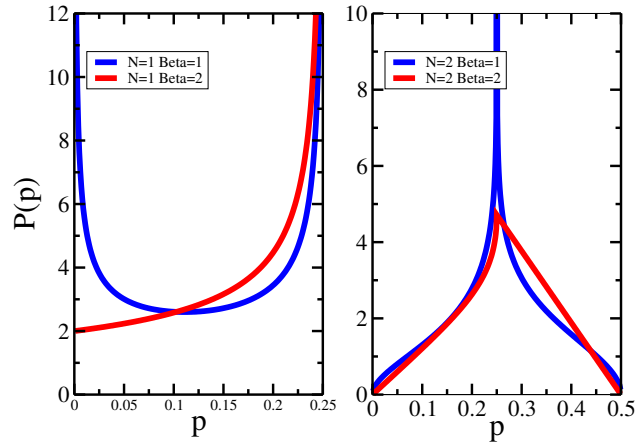


Figura 2.2: Distribuição da potência do ruído de disparo para os casos  $N = 1, 2$  em função da ausência ou presença da SRT.

No caso da Média da potência do ruído de disparo em função do número de canais e ausência/presença da SRT podem ser encontradas na tabela 2.1.

$\langle p \rangle$	$\beta = 1$	$\beta = 2$
$N = 1$	0,133	0,167
$N = 2$	0,256	0,267

Tabela 2.3: Média da potência do ruído de disparo em função da ausência ou presença da simetria de reversão temporal para os diferentes números de canais.

A tabela 2.4 contém o valor da variância da potência do ruído de disparo em função do número de canais e ausência/presença da SRT.

$Var(p)$	$\beta = 1$	$\beta = 2$
$N = 1$	0,008	0,006
$N = 2$	0,105	0,260

Tabela 2.4: Variância da potência do ruído de disparo em função da ausência ou presença da simetria de reversão temporal para os diferentes números de canais.

# Capítulo 3

## Condutância de uma Junção normal-supercondutor topológico com Simetria Quiral

Neste capítulo iremos calcular as distribuições da probabilidade da condutância e potência do ruído de disparo e suas respectivas médias e variâncias para junção metal normal com um supercondutor topológico em função do número quântico topológico  $Q$  [9][5].

A função densidade de probabilidade para junção normal-supercondutor topológico apresenta a forma geral[5]

$$P(R_n) \propto \prod_{n=1}^M R_n^{\zeta - \frac{1}{2}} (1 - R_n)^{|Q|} \prod_{i < j=1}^M (R_i - R_j)^2. \quad (3.1)$$

onde  $R_n$  representa os autovalores da matriz  $r_{eh} r_{eh}^\dagger$ , onde  $R_n \in [0, 1]$ . Por sua vez  $|Q| \in \mathbb{Z}$  tem significado de um número quântico topológico que representa o número de estados protegidos no supercondutor. O índice  $\zeta = 1$  ocorre quando  $N - |Q|$  resulta em um número ímpar e  $\zeta = 0$  ocorre quando  $N - |Q|$  resulta em um número par. Aqui  $M$  representa a dupla degenerescência dos autovalores que se repelem de forma quadrática, definido por

$$M = \frac{(N - |Q| - \zeta)}{2}. \quad (3.2)$$

### 3.1 Distribuição de Probabilidade da Condutância

Nesta seção vamos recuperar as distribuições de probabilidade da condutância para o caso normal-supercondutor topológico obtidos anteriormente pela referência [9] para os casos  $N = 1, 2, 3, 4$ . E por fim como primeira contribuição da dissertação o caso  $N = 5$ .

Para que esta dissertação apresente uma leitura dinâmica iremos calcular o caso a distribuição da condutância para o caso  $N = 1$  e  $|Q| = (0, 1)$ , que apresenta o mesmo roteiro para obtenção das outras distribuições da condutância ou a potência do ruído de disparo. Contudo nos casos  $(N=4/Q=0), (N=5/Q=0)$  e  $(N=5/Q=1)$  são obtidos a parti na mudança de variáveis que está exemplificada no apêndice B, encontrado o resultado para estes casos de forma numérica.

A partir da equação (3.1) podemos obter a densidade de probabilidade para  $Q = (0, 1)$ , a qual é dada por

$$P(R) = 1. \quad (3.3)$$

Substituindo a equação (3.3) na (A.24) resulta na integral que define a distribuição de probabilidade da condutância na forma

$$P(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} dR \delta(g - (2R + |Q|)). \quad (3.4)$$

A equação (3.4) tem como solução

$$P(g) = \delta(g - |Q|). \quad (3.5)$$

A média da condutância assume

$$\langle g \rangle = |Q|. \quad (3.6)$$

enquanto a variância assume o valor

$$\text{var}(g) = 0. \quad (3.7)$$

As distribuições de probabilidade da condutância quando o sistema apresenta o número de canais para os caso  $N = 1, 2, 3, 4, 5$  em função do parâmetro topológico  $|Q|$  assumem a forma

$$\begin{aligned}
 N = 1 : P(g) &= \delta(g - |Q|), \\
 N = 2 : P(g) &= \begin{cases} \delta(g - |Q|), & \text{se } |Q| = 1, 2, \\ (\sqrt{8g})^{-1}, & \text{se } |Q| = 1. \end{cases} \\
 N = 3 : P(g) &= \begin{cases} \delta(g - |Q|), & \text{se } |Q| = 2, 3, \\ \frac{3}{16}\sqrt{2}(3-g)(\sqrt{g-1})^{-\frac{1}{2}}, & \text{se } |Q| = 1, \\ \frac{3}{8}(\sqrt{2g})\theta(2-g), & \text{se } |Q| = 0. \end{cases} \\
 N = 4 : P(g) &= \begin{cases} \delta(g - |Q|), & \text{se } |Q| = 3, 4, \\ \frac{15}{128}\sqrt{2}(4-g)^2(g-2)^{-\frac{1}{2}}\theta(3-g), & \text{se } |Q| = 2, \\ \frac{15}{32}\sqrt{2}(3-g)\sqrt{g-1}^{\frac{1}{2}}\theta(g-1)\theta(3-g), & \text{se } |Q| = 1, \\ \frac{45}{512}\pi g^2 - \frac{45}{128} \left[ \sqrt{2}(4-g)\sqrt{g-2} + g^2 \arctan \sqrt{\frac{1}{2}(g-2)} \right] \theta(g-2), & \text{se } |Q| = 0. \end{cases} \\
 N = 5 : P(g) &= \begin{cases} \delta(g - |Q|), & \text{se } |Q| = 4, 5, \\ \frac{15}{128}\sqrt{2}(g-3)(g-2)^{-\frac{1}{2}}, & \text{se } |Q| = 3, \\ \frac{105}{256}\sqrt{2}(g-4)^2(g-2)^{\frac{1}{2}}, & \text{se } |Q| = 2, \\ \frac{1575(g-1)^2(97-34g+g^2)\pi}{262144}\theta(g-1)\theta(3-g) \\ - \frac{1557\sqrt{2}}{262144}(g^2 - 34g - 47) + \sqrt{2}(g-1)^2(4(5-g)\sqrt{g-3} \times \\ (g^2 - 34g + 97)(\tan^{-1}(\sqrt{\frac{g-3}{2}}) - \sin^{-1}(\frac{2}{g-1}))), & \text{se } |Q| = 1, \\ \frac{525}{32768}g^4\pi\theta(2-g) - \frac{525}{16384}(1024 - 1280g + 544g^2 - 88g^3 + g^4s \\ g^4)(\sin^{-1}(\sqrt{\frac{g-2}{g}}) - \sin^{-1}(\frac{2}{g})), & \text{se } |Q| = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

As médias da condutância se encontram na tabela 3.1 e a variância está disposta na tabela 3.2 ambas em função do parâmetro topológico  $|Q|$ .

As distribuições calculadas para o caso  $N = 5$  representa um resultado inédito desta dissertação.



$\langle g \rangle$	$ Q  = 0$	$ Q  = 1$	$ Q  = 2$	$ Q  = 3$	$ Q  = 4$	$ Q  = 5$
$N = 1$	0	1	-	-	-	-
$N = 2$	0,236	1	2	-	-	-
$N = 3$	0,248	1,400	2	3	-	-
$N = 4$	1,714	1,857	2,286	3	4	-
$N = 5$	2,222	2,333	2,667	3,222	4	5

Tabela 3.1: Média da condutância em função do parâmetro topológico  $|Q|$  para os diferentes números de canais.

$var(g)$	$ Q  = 0$	$ Q  = 1$	$ Q  = 2$	$ Q  = 3$	$ Q  = 4$	$ Q  = 5$
$N = 1$	0	0	-	-	-	-
$N = 2$	0,130	0	0	-	-	-
$N = 3$	0,010	0,183	0	0	-	-
$N = 4$	0,261	0,217	0,108	0	0	-
$N = 5$	0,256	0,231	0,162	0,072	0	0

Tabela 3.2: Variância da condutância em função do parâmetro topológico  $|Q|$  para os diferentes números de canais.

## 3.2 Distribuição de Probabilidade da potência do ruído de disparo

Nesta seção encontramos a distribuição de probabilidade da potência do ruído de disparo, média e variância com números de canais  $N = 1, 2, 3, 4, 5$  variando o parâmetro topológico  $|Q|$ . Os resultados obtidos nesta seção são contribuições inéditas dessa dissertação.

$$\begin{aligned}
N = 1 : P(p) &= \delta(p), \\
N = 2 : P(p) &= \begin{cases} \delta(p), & \text{se } |Q| = 1, 2, \\ \frac{1}{4} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-2p}}+\sqrt{1+\sqrt{1-2p}}}{\sqrt{|-1+2p|}\sqrt{p}}, & \text{se } |Q| = 0. \end{cases} \\
N = 3 : P(p) &= \begin{cases} \delta(p), & \text{se } |Q| = 2, 3, \\ \frac{3}{16} \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-2p}}(1+\sqrt{1-2p})+\sqrt{1-\sqrt{1-2p}}(1-\sqrt{1-2p})}{\sqrt{|-1+2p|}\sqrt{p}}, & \text{se } |Q| = 1, \\ \sqrt{\frac{18}{64}} \left( \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-2p}}+\sqrt{1-\sqrt{1-2p}}}{\sqrt{|-1+2p|}} \right), & \text{se } |Q| = 0. \end{cases} \\
N = 4 : P(p) &= \begin{cases} \delta(p), & \text{se } |Q| = 3, 4, \\ \frac{15}{64} \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-2p}}(1-p+\sqrt{1-2p})+\sqrt{1-\sqrt{1-2p}}(1-p-\sqrt{1-2p})}{\sqrt{|-1+2p|}\sqrt{p}}, & \text{se } |Q| = 2, \\ \frac{15\sqrt{2}}{32} \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-2p}}(1-\sqrt{1-2p})+\sqrt{1-\sqrt{1-2p}}(1+\sqrt{1-2p})}{\sqrt{|-1+2p|}}, & \text{se } |Q| = 1. \end{cases} \\
N = 5 : P(p) &= \begin{cases} \delta(p), & \text{se } |Q| = 4, 5, \\ -\frac{35}{256} \left( \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-2p}}[\sqrt{1-2p}(2-p)+3p+2]+\sqrt{1+\sqrt{1-2p}}[\sqrt{1-2p}(p-2)+3p+2]}{\sqrt{p}} \right), & \text{se } |Q| = 3, \\ \frac{15\sqrt{2}}{128} \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-2p}}(1-p-\sqrt{1-2p})+\sqrt{1-\sqrt{1-2p}}(1-p+\sqrt{1-2p})}{\sqrt{|-1+2p|}}, & \text{se } |Q| = 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

As médias da potência do ruído de disparo estão dispostos na tabela 3.3.

$\langle p \rangle$	$ Q  = 0$	$ Q  = 1$	$ Q  = 2$	$ Q  = 3$	$ Q  = 4$	$ Q  = 5$
$N = 1$	0	0	-	-	-	-
$N = 2$	0,267	0	0	-	-	-
$N = 3$	0,343	0,228	0	0	-	-
$N = 4$	0,229	0,381	0,190	0	0	-
$N = 5$	0,289	0,260	0,367	0,162	0	0

Tabela 3.3: Média da potência do ruído de disparo em função do parâmetro topológico  $|Q|$  para os diferentes números de canais.

A distribuição da potência do ruído de disparo para os casos  $N = (1, 2, 3, 4, 5)$  são contribuições desta dissertação. Para os casos em que obtemos o resultado numérico para potência do ruído de disparo ( $N = 4/Q = 0$ ) e ( $N = 5/Q = (0, 1)$ ) não aplicamos a

A variância da potência do ruído de disparo em função do número topológico  $|Q|$  está disposta na tabela 3.4.

$var(p)$	$ Q  = 0$	$ Q  = 1$	$ Q  = 2$	$ Q  = 3$	$ Q  = 4$	$ Q  = 5$
$N = 1$	0	0	-	-	-	-
$N = 2$	0,030	0	0	-	-	-
$N = 3$	0,030	0,031	0	0	-	-
$N = 4$	0,010	0,015	0,028	0	0	-
$N = 5$	0,008	0,006	0,016	0,024	0	0

Tabela 3.4: Variância da potência do ruído de disparo em função do parâmetro topológico  $|Q|$  para os diferentes números de canais.

propriedade da expansão da função delta de Dirac, pois ela só é útil para caso em que a variável do argumento da função delta está na forma linear.

### 3.3 Discussão: Junção normal-supercondutor topológico com simetria quiral

O comportamento da distribuição de probabilidade da condutância em uma junção NS nos casos  $N = (2, 3, 4e5)$  podem ser observadas na figura (3.1). A distribuição de probabilidade da condutância para junção NS se comporta como condutor normal no caso em que  $Q = 0$ , contudo quando  $N = Q$  ou  $N - 1 = Q$  a junção apresenta uma distribuição de probabilidade típica de supercondutor, figura (3.1). Com o aumento do parâmetro topológico que o valor médio da condutância aumenta e a variância diminui até obter o comportamento de um supercondutor.

As distribuições de probabilidade para a potência do ruído de disparo estão representadas de forma gráfica na figura (3.2). Para a potência do ruído de disparo observamos as distribuições assumem a forma típica de um condutor normal para o caso  $Q = 0$ . Quando  $Q = N$  ou  $Q = N - 1$  o sistema apresenta ausência da potência do ruído de disparo, tendo a junção NS comportando se como um supercondutor. Com aumento do valor do número

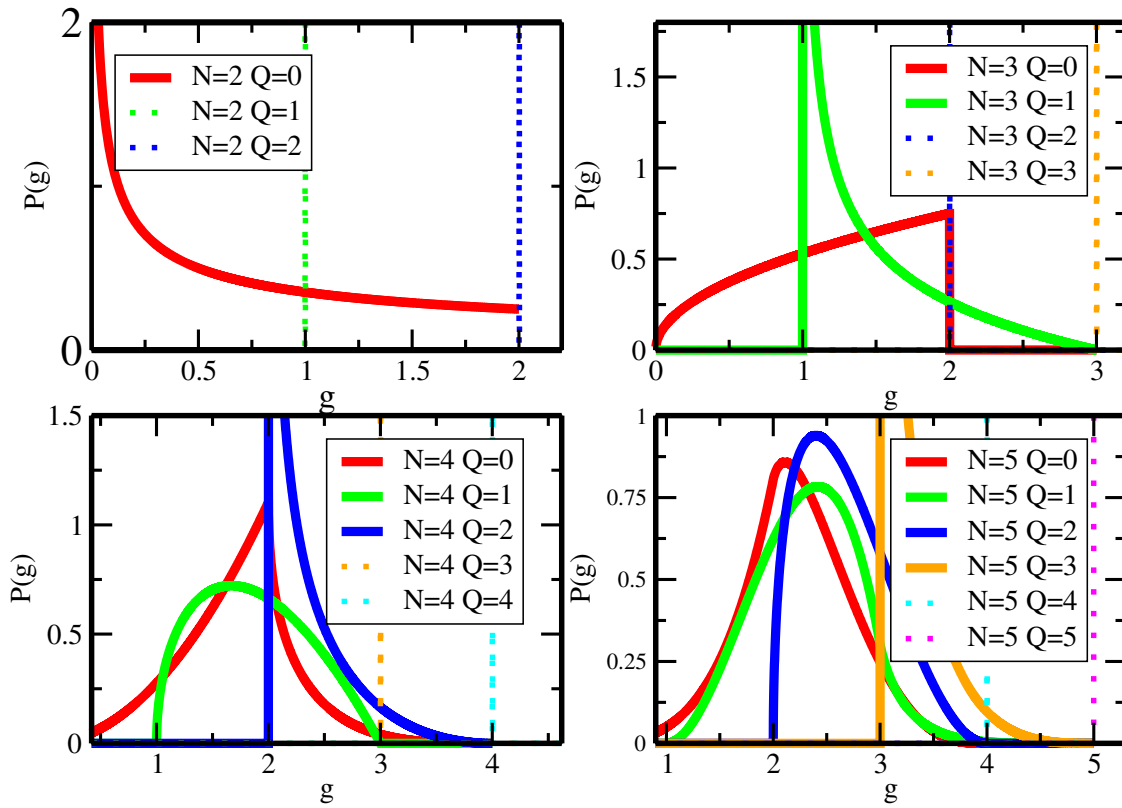


Figura 3.1: Distribuição da condutância para o caso  $N = 2, 3, 4, 5$  com a cor vermelha para os casos  $Q = 0$ , verde para  $Q = 1$ , Azul para  $Q = 2$ , laranja para  $Q = 3$ , Azul claro para  $Q = 4$  e rosa para  $Q = 5$ .

quântico topológico  $Q$  a média da potência do ruído de disparo diminui até assumir o valor zero.

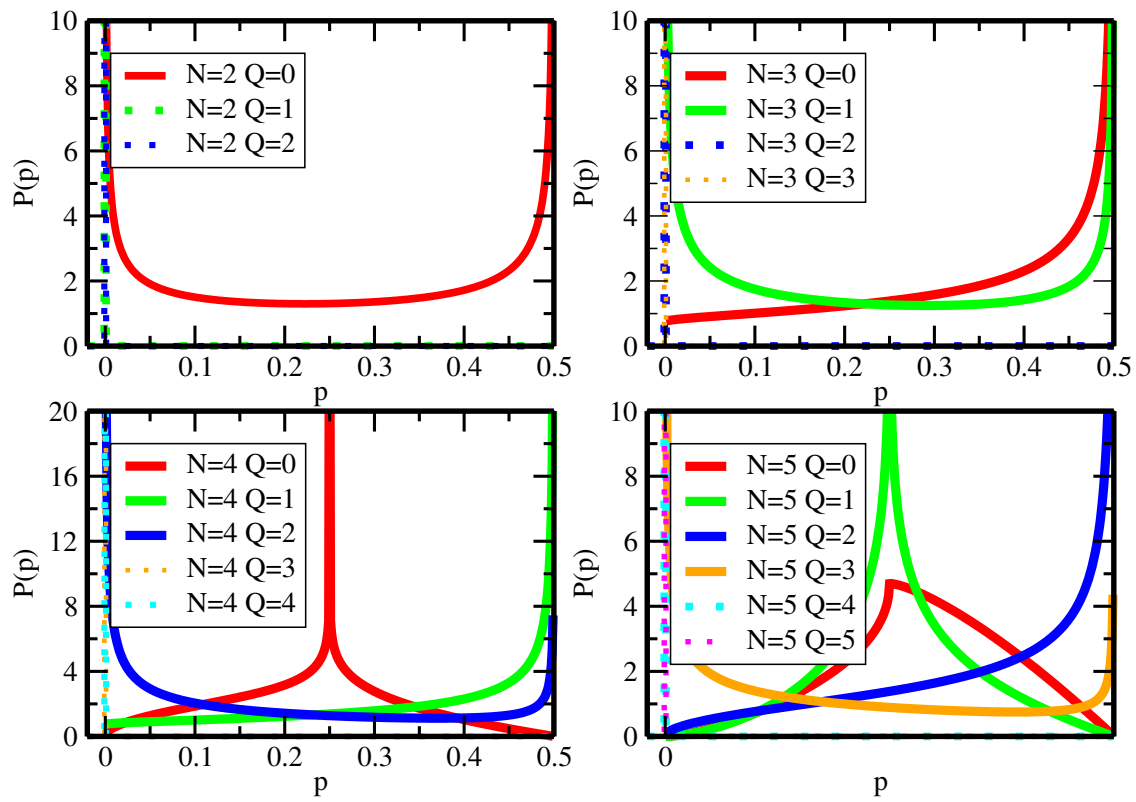


Figura 3.2: Distribuição da potência do ruído de disparo para o caso  $N = 2, 3, 4e5$  com a cor vermelha para os casos  $Q = 0$ , verde para  $Q = 1$ , Azul para  $Q = 2$  e laranja para  $Q = 3$ .

# Capítulo 4

## Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação estudamos as distribuições de probabilidades da potência do ruído de disparo numa junção metal normal-supercondutor topológico com simetria quiral, mais especificamente a classe BDI. Os observáveis de transporte em sistemas topológicos apresentam correlação com o número quântico topológico  $Q$ .

Beenakker e colaboradores realizaram um estudo da distribuição da condutância numa junção normal-supercondutora obtendo resultados analíticos [9]. No entanto não foi observado na literatura nenhum estudo relacionado a potência do ruído de disparo, desta forma, fomos motivados a estudar a estatística da potência do ruído de disparo em função do número quântico topológico  $Q$  para estes tipos de junções.

Nossa abordagem ocorreu via teoria de matrizes aleatórias e reproduzimos as expressões analíticas para distribuição de probabilidade da condutância para os casos  $N = 1, 2, 3, 4$  e contribuímos com o caso  $N = 5$ . Para potência do ruído de disparo obtivemos os casos  $N = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Como perspectivas de estudos futuros, podemos analisar as distribuições de probabilidade da potência do ruído de disparo para as classes D e DIII [5].

# Apêndice A

## Expansão da função delta de Dirac

Usando as propriedades da expansão da função delta de Dirac  $\delta(x)$ , iremos transformar uma distribuição de duas variáveis  $(x_1, x_2)$ , em uma única variável  $(x_2)$ , Sendo  $g = x_1 + x_2$ .

Para exemplificamos o uso da propriedade da expansão delta de Dirac a equação (A.19), tendo uma função probabilidade dada por:

$$P(g) = \int_0^1 \int_0^1 \delta(g - x_1 - x_2)P(x_1, x_2)dx_1dx_2 \quad (\text{A.1})$$

$$\delta(x - g(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{g'(x_n)} \quad (\text{A.2})$$

Onde  $x_n$  são as raízes da equação  $(x - x_n)$ . Organizando a parte da integral do delta de Dirac da equação da distribuição probabilidade, reaparece no formato:

$$P(g) = \int_0^1 \int_0^1 \delta(g - x_1 - x_2)P(x_1, x_2)dx_1dx_2 \quad (\text{A.3})$$

Simplificamos de maneira que apareça na forma abaixo.

$$\delta(g - x_1 - x_2) = \delta(x_1 - (g - x_2)) \quad (\text{A.4})$$

Em seguida redefinimos o intervalo de integração:  $(0 < g - x_2 < 1) \times -1 \rightarrow (0 > x_2 - g > -1) + g \rightarrow (g > x_2 > -1 + g)$

$$P(g) = \int_0^1 \int_0^1 \delta(x_1 - (g - x_2))P(x_1, x_2)dx_1dx_2 \quad (\text{A.5})$$

$$P(g) = \int_{g-1}^g P(g - x_2, x_2) dx_2 \quad (\text{A.6})$$

Encontramos então uma função de uma única variável, tendo vital importância este método ao longo deste trabalho, tornando nosso problema mais simples, utilizando o procedimento para simplificar o cálculo das funções distribuições acumuladas.

## A.1 Teoria da probabilidade

A probabilidade está relacionada a chance de observação de um certo fenômeno, que denominamos evento, pertencendo ao espaço amostral  $s$  representando o conjunto de todos os possíveis resultados. Seja um evento  $x_n$  observado  $m$  vezes em  $n$  realizações, temos uma probabilidade  $P(x_i)$  definida por

$$P(x_n) = \frac{m}{n}. \quad (\text{A.7})$$

O sistema é representado por variáveis estocásticas, existe uma indeterminação no processo de medida por conta da aleatoriedade do sistema. A probabilidade de ocorrência de uma variável estocástica ou variável aleatória é dado pela equação (A.7) obtida através do experimento associada a uma sequência de observações do resultado da variável  $x$ , onde  $x \in \mathbb{R}$ . Há conceitos probabilísticos importantes para a interpretação estatística que serão utilizados ao longo deste trabalho, são elas:

- A função distribuição acumulada (f.d.a) [48] que representaremos pela expressão  $F_x(x)$ , associa a probabilidade da ocorrência dos possíveis eventos a um intervalo numa reta ou em um conjunto de dados.

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x P_x(x') dx'. \quad (\text{A.8})$$

- A função densidade probabilidade (f.d.p) relaciona a probabilidade a um ponto na reta ou ainda a um conjunto de elementos, representado pela expressão  $P_x(x)$ . Que nada é mais do que a derivada da f.d.a como podemos observa

$$P_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx}. \quad (\text{A.9})$$



### A.1.1 Momentos

Os momentos são grandezas estatísticas importantes, pois armazenam informações da distribuição do conjunto das possíveis configurações do fenômeno estudado. A definição do momento de  $n$ -ésima ordem é dada por

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^n P_x(x). \quad (\text{A.10})$$

Alguns momentos apresentam nomes específicos na estatística. Quando assumimos a função (A.10) com  $n = 1$ , obtemos o primeiro momento da variável estocástica  $x$ , denominada como média  $\langle x \rangle$ . A média nos fornece o evento que apresenta a maior chance de ser observada em um certo número de repetições num fenômeno aleatório, figura (A.1). A média ou primeiro momento é dado por

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x P_x(x). \quad (\text{A.11})$$

Quando  $n = 2$  na equação (A.10), obtemos o segundo momento que está relacionado a dispersão de probabilidade, figura (A.1), tendo relação com a largura da distribuição da variável estocástica  $x$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 P_x(x). \quad (\text{A.12})$$

Tendo em posse do primeiro e segundo momentos, equações (A.11) e (A.12), encontramos a variância

$$\text{var}(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2. \quad (\text{A.13})$$

A variância é a medida de dispersão definida como a média do quadrado dos desvio dos elementos em relação à média, pode ser observado na equação (A.13).

Podemos também ter sistemas que envolvam múltiplas variáveis estocásticas que preservam as propriedades f.d.a e f.d.p anteriormente mencionadas. Para um melhor entendimento vamos se restringir ao caso com duas variáveis dada por

$$P_{(x,y)}(\chi, y) = \int_{-\infty}^{\chi} dx \int_{-\infty}^y dy P_{(x,Y)}(x, y). \quad (\text{A.14})$$

Onde a f.d.p satisfaz a relação de normalização

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy P_{(x,Y)}(x, y) = 1. \quad (\text{A.15})$$

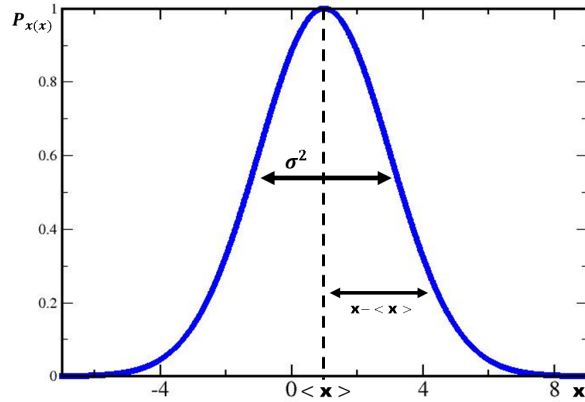


Figura A.1: Representação gráfica da média e variância de uma variável estocástica  $x$ .

Podemos reduzir equação (A.14) a distribuição de uma variável, realizando a integral em todo espaço da variável  $y$ , ocasiona uma distribuição apenas em  $x$  na forma

$$P_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy P_{(x,Y)}(x, y). \quad (\text{A.16})$$

Os momentos para o caso de multivariável, definidos pela equação (A.10) assume a forma análoga

$$\langle x^n y^m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy x^n y^m P_{(x,Y)}(x, y). \quad (\text{A.17})$$

Nas configurações do sistema em que a variável em função das variáveis estocásticas, por exemplo  $Z = G(x, y)$ , sendo  $Z$  função de  $x$  e  $y$ , a distribuição da probabilidade da função  $Z$  assume

$$P_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(Z - G(x, y)) P_{(x,Y)}(x, y). \quad (\text{A.18})$$

### A.1.2 Generalização da função delta de Dirac para o cálculo de funções distribuições de probabilidade

Em geral queremos a distribuição da variável  $g(x)$ , contudo sabemos a distribuição da variável aleatória  $x$ , como então encontrar a distribuição da grandeza  $g(x)$ ? Fazemos uso da função delta de Dirac para executar tal artimanha.

Para construirmos a justificativa para o uso da função delta de Dirac partimos de algo básico. Dados dois eventos  $P(A)$  e  $P(B)$  a probabilidade de  $B$  condicionada a  $A$  é represen-

tado por

$$P(B|A) \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \quad (\text{A.19})$$

Esta definição motiva a próxima, que é a densidade de probabilidade de  $P(y)$  condicionada a ocorrência de  $P(x)$

$$P_{(Y|x)}(y) \equiv \frac{P_{X|Y}(x, y)}{P_x(x)}. \quad (\text{A.20})$$

simplicamos a distribuição para uma única variável, basta calcular a integral em relação a todas variáveis do sistema exceto a variável que seja interesse a f.d.a seja função, escolhemos por exemplo em função da variável  $y$

$$P_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{X|Y}(x, y) dx = \int_{x=-\infty}^{+\infty} P_{Y|x}(y) f_x(x) dx. \quad (\text{A.21})$$

Vamos ao caso em a variável  $y = g(x)$  que tem como significado a função de probabilidade condicionada, que está escrita em função de  $x$  dado por

$$P_{Y|x}(y) = \delta(y - g(x)). \quad (\text{A.22})$$

A equação (A.22) é uma função densidade probabilidade, já que a sua integral em todo espaço  $x$  tem como resultado 1. Vamos então calcular  $P_Y(y)$  que representa a função densidade probabilidade em função de  $y$  assume a forma

$$P_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} P_{Y|x}(y) P_X(x) dx = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \delta(y - g(x)) P_x(x) dx. \quad (\text{A.23})$$

De forma geral, sendo  $w = P(x_1, \dots, x_i)$ , conhecendo a distribuição conjunta  $(x_1, \dots, x_i)$ , aplicamos uma densidade marginal assim como na equação (A.21), montamos no formato da equação (A.23), obtemos a generalização como

$$P_w(w) = \int_{x_1=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{x_i=-\infty}^{+\infty} \delta(w - f(x_1, \dots, x_i)) P_{X_1, \dots, X_i}(x_1, \dots, x_i) dx_1 \dots dx_i \quad (\text{A.24})$$

# Apêndice B

## Mudança de variáveis

Nossos casos calculados de forma numérica, a expiração para mudanças de variáveis foi encontrado da referência [49], para o caso em que  $N = 2$  a potência do ruído de disparo de Wigner-Dyson e o normal-supercondutor, caso em que o número de canais assume  $M = 2$ , a função densidade probabilidade no caso de Wigner-Dyson tem como variável  $\tau_i$  que representa o  $i$ -ésimo autovalor da matriz espalhamento, no caso normal supercondutor topológico tem como o  $i$ -ésimo autovalor da matriz reflexo a variável  $R_i$ . No exemplo desenvolvido abaixo utilizaremos a variável  $\tau$ , apresentando o caso mais geral. A princípio temos a função densidade probabilidade na forma, tanto para o caso Wigner-Dyson ou Normal-supercondutor (que basta substituir  $\tau_i \rightarrow R_i$ ),

$$P'_\beta(\tau_1, \tau_2) = C_\beta |\tau_1 - \tau_2|^\beta (\tau_1 \tau_2)^\mu [(1 - \tau_1)(1 - \tau_2)]^\eta \quad (\text{B.1})$$

Para calcularmos a função que define a distribuição para a potência do ruído de disparo resolvemos a integral que surge a parti da equação (A.24),

$$P(p) = \int_0^1 d\tau_1 \int_0^1 d\tau_2 \delta(p - \tau_1(1 - \tau_1) - \tau_2(1 - \tau_2)) P'_\beta(\tau_1, \tau_2), \quad (\text{B.2})$$

Para solução da integral B.1, realizamos uma primeira mudança de variável, substituímos  $x_i = \tau_i(1 - \tau_i)$  com  $i = 1, 2$ . Resolvemos a equação abaixo:

$$-\tau_i^2 + \tau_i - x_i = 0, \quad (\text{B.3})$$

Encontramos as raízes em função de  $\tau_i$  na forma,

$$\tau_i = \frac{1 + \sigma_i \sqrt{1 + 4x_i}}{2},$$

Onde  $\sigma = \pm$ . Nessa transformada obtemos no intervalo  $0 \leq x_i \leq \frac{1}{4}$ . Se faz necessário calcular a função inversa obtendo,

$$x_i = \tau_i - \tau_i^2 \rightarrow \tau_i = x_i - x_i^2$$

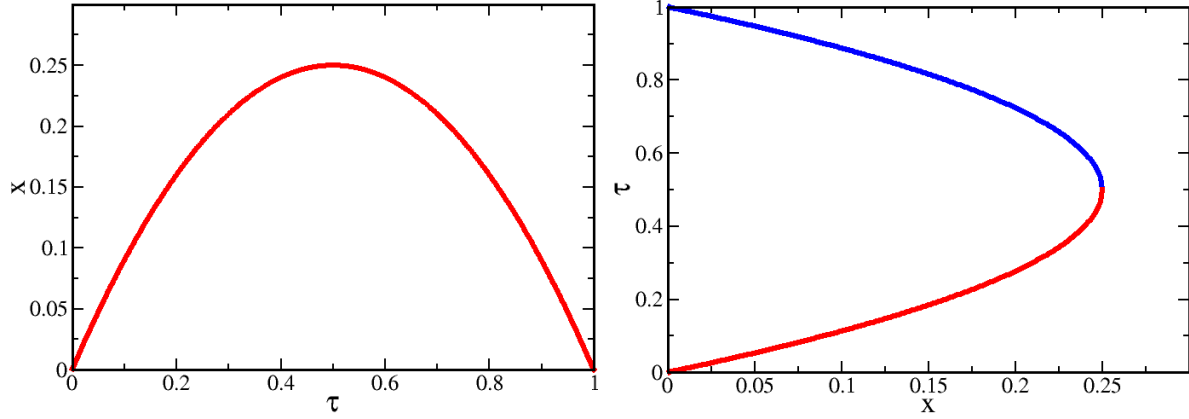


Figura B.1: Potência do ruído de disparo  $p = \tau(1 - \tau)$  e a função inversa  $\tau = \tau(p)$ . Temos a regiãoes da função inversa apresentada em cores diferentes:  $\tau^{(+)}$  (azul) e  $\tau^{(-)}$  (vermelho).

Temos o quadrado com intervalos  $[0, 1/4] \times [0, 1/4]$  no plano  $x_1 x_2$ , no plano  $\tau_1 \tau_2$  temos o domínio  $[0, 1] \times [0, 1]$  como ilustra a figura B.2.

Região I:

$$\begin{aligned} |\tau_1^- - \tau_2^-| &= \frac{1}{2} |\sigma_1^- \sqrt{1 - 4x_1} + \sigma_2^- \sqrt{1 - 4x_2}| \\ &= \frac{1}{2} |\sigma_1^- \sigma_1^- \sqrt{1 - 4x_1} + \sigma_1^- \sigma_2^- \sqrt{1 - 4x_2}| \\ &= \frac{1}{2} |\sqrt{1 - 4x_1} - \sigma_1^- \sigma_2^- \sqrt{1 - 4x_2}| \end{aligned}$$

note que  $\sigma_1^- \sigma_1^- = \sigma_1^+ \sigma_1^+ = 1$ .

$$\begin{aligned} \tau_1^- \tau_2^- &= \frac{1}{4} |(1 + \sigma_1^- \sqrt{1 - 4x_1})(1 + \sigma_2^- \sqrt{1 - 4x_2})| \\ &= \frac{1}{4} |(1 - \sqrt{1 - 4x_1})(1 - \sqrt{1 - 4x_2})| \end{aligned}$$

Região II:

$$|\tau_1^+ - \tau_2^-| = \frac{1}{2} |\sqrt{1 - 4x_1} - \sigma_1^+ \sigma_2^- \sqrt{1 - 4x_2}| = \frac{1}{2} |\sqrt{1 - 4x_1} - \sqrt{1 - 4x_2}|$$

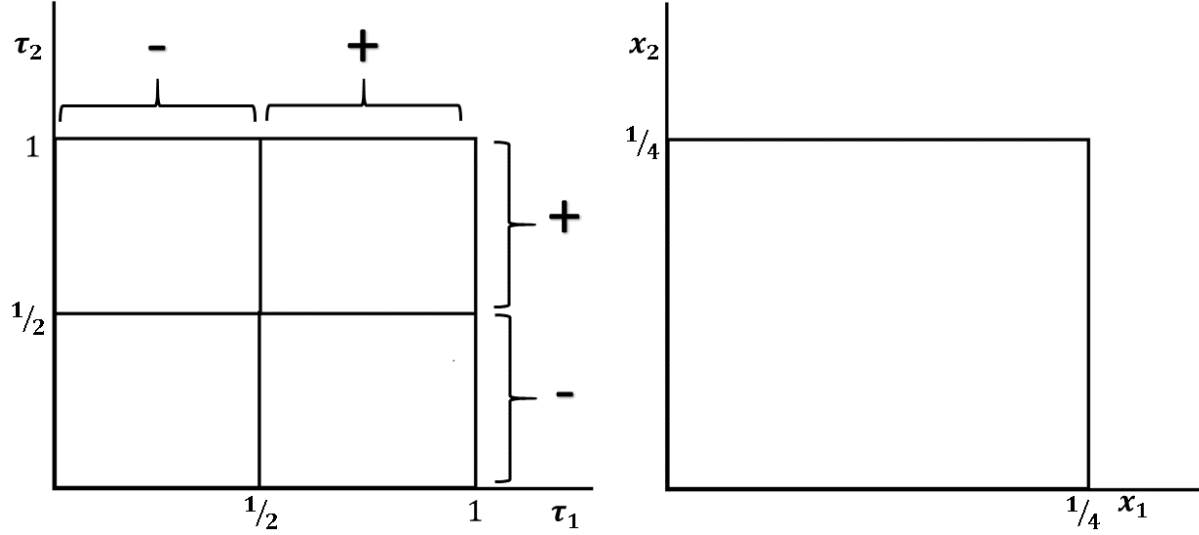


Figura B.2: Intervalo das variáveis  $(\tau_1, \tau_2)$  a esquerda, intervalo das variáveis  $(x_1, x_2)$  a direita.

$$\tau_1^+ \tau_2^- = \frac{1}{4} |(1 + \sqrt{1 - 1 - 4x_1})(1 - \sqrt{1 - 1 - 4x_2})|$$

Região III:

$$|\tau_1^+ - \tau_2^+| = \frac{1}{2} |\sqrt{1 - 4x_1} + \sqrt{1 - 4x_2}|$$

$$\tau_1^+ \tau_2^+ = \frac{1}{4} |(1 + \sqrt{1 - 1 - 4x_1})(1 + \sqrt{1 - 1 - 4x_2})|$$

Região IV:

$$|\tau_1^- - \tau_2^+| = \frac{1}{2} |\sqrt{1 - 4x_1} + \sqrt{1 - 4x_2}|$$

$$\tau_1^- \tau_2^- = \frac{1}{4} |(1 + \sqrt{1 - 1 - 4x_1})(1 + \sqrt{1 - 1 - 4x_2})|$$

A jacobiana fica na forma:

$$\text{Det}|J| = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \tau_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \tau_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \tau_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\sqrt{1-4x_1}} \times -4 \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\sqrt{1-4x_2}} \times -4 \right) \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}|J| = \frac{1}{\sqrt{(1 - 4x_1)(1 - 4x_2)}} \quad (\text{B.4})$$

No geral nossa função distribuição conjunta,

$$f_{(\sigma_1, \sigma_2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2^{\beta+2\mu+2\eta}} \frac{|\sqrt{1-4x_1} + \sigma_1\sigma_2\sqrt{1-4x_2}|^\beta}{\sqrt{(1-4x_1)(1-4x_2)}} (1 + \sigma_1\sqrt{1-1-4x_1})^\mu \\ \times (1 + \sigma_2\sqrt{1-1-4x_2})^\mu (1 - \sigma_1\sqrt{1-1-4x_1})^\eta (1 - \sigma_2\sqrt{1-1-4x_2})^\eta$$

Em nossas novas variáveis reescrevemos nossa distribuição do ruído,

$$W(p) = \int_0^{\frac{1}{4}} dx_1 \int_0^{\frac{1}{4}} dx_2 \delta(p - x_1 - x_2) p_{(-,-)}(x_1, x_2) \\ + \int_0^{\frac{1}{4}} dx_1 \int_0^{\frac{1}{4}} dx_2 \delta(p - x_1 - x_2) p_{(+,+)}(x_1, x_2) \\ + 2 \int_0^{\frac{1}{4}} dx_1 \int_0^{\frac{1}{4}} dx_2 \delta(p - x_1 - x_2) p_{(-,-)}(x_1, x_2)$$

No último termo da integral apresenta um fator multiplicativo 2 pois a *IV* e *II* são semelhantes. Em seguida vamos executar uma segunda mudança de variável,

$$u = x_1 + x_2 \tag{B.5}$$

$$v = x_1 - x_2 \tag{B.6}$$

As mudanças de variáveis representadas nas equações (B.5) e (B.6) geram uma nova relação nos intervalos de integração que estão representados na figura(B.3). Onde encontramos as variáveis antigas em função das novas,

$$x_1 = \frac{u+v}{2} \\ x_2 = \frac{u-v}{2} \tag{B.7}$$

A jacobiana fica na forma:

$$\text{Det}|J| = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \tag{B.8}$$

A função com as novas variáveis,

$$f_{(\sigma_1, \sigma_2)}(u, v) = \frac{c_N}{2^{\beta+2\mu+2\eta}} \frac{|\sqrt{1-2(u+v)} - \sigma_1\sigma_2\sqrt{1-2(u+v)}|^\beta}{\sqrt{[1-2(u+v)][1-2(u-v)]}} \left(1 + \sigma_1\sqrt{1-2(u+v)}\right)^\mu \\ \times \left(1 + \sigma_2\sqrt{1-2(u+v)}\right)^\mu \left(1 - \sigma_1\sqrt{1+2(u+v)}\right)^\eta \left(1 - \sigma_2\sqrt{1-2(u+v)}\right)^\eta$$

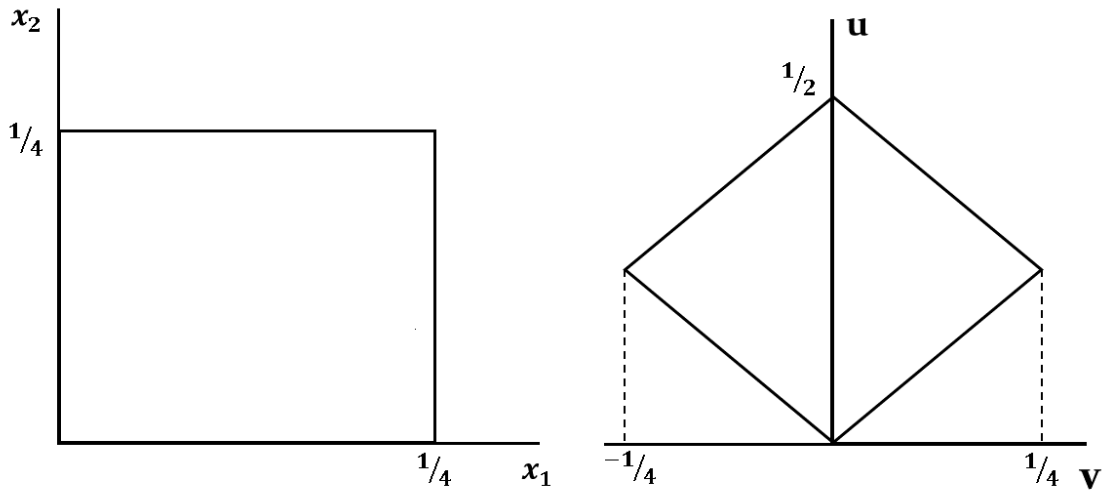


Figura B.3: Intervalo das variáveis  $(x_1, x_2)$  a esquerda, intervalo das variáveis  $(u, v)$  a direita.

Nossa distribuição conjunta assume,

$$\begin{aligned}
 P(p) &= \frac{1}{2} \int \int_{\Omega} dudv \delta(p-u) f_{(\sigma_1, \sigma_2)}(u, v) \\
 &+ \frac{1}{2} \int \int_{\Omega} dudv \delta(p-u) f_{(\sigma_1, \sigma_2)}(u, v) \\
 &+ \int \int_{\Omega} dudv \delta(p-u) f_{(\sigma_1, \sigma_2)}(u, v)
 \end{aligned}$$

Temos os novos espaços de integração que são,

curva *I*:

$$v = u \tag{B.9}$$

Curva *II*:

$$v = u \tag{B.10}$$

Curva *III*:

$$v = \frac{1}{2} + u \tag{B.11}$$

Curva *IV*:

$$v = \frac{1}{2} + u \tag{B.12}$$



Note que as regiões *III* e *IV*, assim como *I* e *II* são semelhantes em questão do sinal da equação. Temos a integral na região  $\Omega$ :

$$\int \int_{\Omega} dudv = 2 \int_0^{\frac{1}{4}} du \int_0^v dv + 2 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} du \int_0^{\frac{1}{2}-u} dv, \quad (\text{B.13})$$

A distribuição da potência do disparo representado,

$$W(p) = (I_1 + I_2 + I_3). \quad (\text{B.14})$$

Observamos as relações,

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{4}} du \delta(p-u) \int_0^u dv f_{(-,-)}(u,v) + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} du \delta(p-u) \int_0^{\frac{1}{2}-u} dv f_{(-,-)}(u,v) \quad (\text{B.15})$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{1}{4}} du \delta(p-u) \int_0^u dv f_{(+,+)}(u,v) + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} du \delta(p-u) \int_0^{\frac{1}{2}-u} dv f_{(+,+)}(u,v) \quad (\text{B.16})$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{1}{4}} du \delta(p-u) \int_{-u}^u dv f_{(+,-)}(u,v) + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} du \delta(p-u) \int_{u-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-u} dv f_{(+,-)}(u,v) \quad (\text{B.17})$$

Simplificando nossa equação (B.14),

$$\begin{aligned} W(p) &= \int_0^{\frac{1}{4}} du \delta(p-u) \int_0^u dv f_{(-,-)}(u,v) \\ &+ \int_0^{\frac{1}{4}} du \delta(p-u) \int_0^u dv f_{(+,+)}(u,v) \\ &+ \int_0^{\frac{1}{4}} du \delta(p-u) \int_{-u}^u dv f_{(+,-)}(u,v) \end{aligned}$$

Para distribuição da potência do ruído de disparo no intervalo  $0 \leq p \leq \frac{1}{4}$ .

$$\begin{aligned} W(p) &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} du \delta(p-u) \int_0^{\frac{1}{2}-u} dv f_{(-,-)}(u,v) \\ &+ \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} du \delta(p-u) \int_0^{\frac{1}{2}-u} dv f_{(+,+)}(u,v) \\ &+ \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} du \delta(p-u) \int_{u-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-u} dv f_{(+,-)}(u,v) \end{aligned}$$

Para distribuição da potência do ruído de disparo no intervalo  $\frac{1}{4} \leq p \leq \frac{1}{2}$  redefinimos o intervalo de integração  $p \rightarrow \frac{1}{2} - p$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] <http://www.lorentz.leidenuniv.nl/beenakkr/mesoscopics..> Acessado em 19 de novembro de 2017.
- [2] S. Datta. *Electronic transport in mesoscopic systems (cambridge studies in semiconductor physics and microelectronic engineering)*. Cambridge University Press, 1997.
- [3] C. W. J. Beenakker. Random-matrix theory of majorana fermions and topological superconductors. *Rev. Mod. Phys.*, 87:1037–1066, Sep 2015.
- [4] C. W. J. Beenakker. Random-matrix theory of quantum transport. *Rev. Mod. Phys.*, 69:731–808, Jul 1997.
- [5] C. W. J. Beenakker, J. P. Dahlhaus, M. Wimmer, and A. R. Akhmerov. Random-matrix theory of andreev reflection from a topological superconductor. *Phys. Rev. B*, 83:085413, Feb 2011.
- [6] C. W. J. Beenakker. Why does a metal-superconductor junction have a resistance? *ARXIV*, 10(16):1999–2006, 1999.
- [7] D. K. Ferry, S. M. Goodnick, and J. Bird. *Transport in Nanostructures*. Cambridge University Press, 2009.
- [8] Y. Imry. *Introduction to Mesoscopic Physics (Mesoscopic Physics and Nanotechnology)*. Oxford University Press, 2008.
- [9] M. Diez, J. P. Dahlhaus, M. Wimmer, and C. W. J. Beenakker. Andreev reflection from a topological superconductor with chiral symmetry. *Phys. Rev. B*, 86:094501, Sep 2012.

- 
- [10] S. R. PEREZ. *Fenômenos de transporte coerente em sistemas Mesoscópicos*. PhD thesis, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE-Brazil, 2009.
- [11] A. F. Macedo-Junior and A. M. S. Macêdo. Universal transport properties of asymmetric chiral quantum dots. *Phys. Rev. B*, 77:165313, Apr 2008.
- [12] Ya.M. Blanter and M. Büttiker. Shot noise in mesoscopic conductors. *Physics Reports*, 336(1):1 – 166, 2000.
- [13] M. Büttiker. Four-terminal phase-coherent conductance. *Phys. Rev. Lett.*, 57:1761–1764, Oct 1986.
- [14] R. Landauer. Electrical resistance of disordered one-dimensional lattices. *The Philosophical Magazine: A Journal of Theoretical Experimental and Applied Physics*, 21(172):863–867, 1970.
- [15] C. W. J. Beenakker. Quantum transport in semiconductor-superconductor microjunctions. *Phys. Rev. B*, 46:12841–12844, Nov 1992.
- [16] M. J. M. Jong and C. W. J. Beenakker. Doubled shot noise in disordered normal-metal<sup>∞</sup>superconductor junctions. *Phys. Rev. B*, 49:16070–16073, Jun 1994.
- [17] A. P SANTOS. Propriedades universais de transporte em cavidades da classe bdg. Master’s thesis, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, PE-Brazil, 2011.
- [18] S. Charpentier, L. Galletti, G. Kunakova, R. Arpaia, Y. Song, R. Baghdadi, S. Min Wang, A. Kalaboukhov, E. Olsson, and F. and et al. Tafuri. Induced unconventional superconductivity on the surface states of bi2te3 topological insulator. *Nature Communications*, 8(1), Dec 2017.
- [19] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs. Quantized hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Phys. Rev. Lett.*, 49:405–408, Aug 1982.
- [20] Xiao-Gang Wen. Topological orders and edge excitations in fractional quantum hall states. *Advances in Physics*, 44(5):405–473, 1995.

- [21] Sato M. and Y. Ando. Topological superconductors: a review. *Reports on Progress in Physics*, 80(7):076501, 2017.
- [22] C. L. Kane and E. J. Mele. Quantum spin hall effect in graphene. *Phys. Rev. Lett.*, 95:226801, Nov 2005.
- [23] M. Z. Hasan and C. L. Kane. Colloquium: Topological insulators. *Rev. Mod. Phys.*, 82:3045–3067, Nov 2010.
- [24] S. B. Chung, X. Qi, J. Maciejko, and S. Zhang. Conductance and noise signatures of majorana backscattering. *Phys. Rev. B*, 83:100512, Mar 2011.
- [25] G. Strübi, W. Belzig, M. Choi, and C. Bruder. Interferometric and noise signatures of majorana fermion edge states in transport experiments. *Phys. Rev. Lett.*, 107:136403, Sep 2011.
- [26] A. P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki, and A. W. W. Ludwig. Classification of topological insulators and superconductors in three spatial dimensions. *Phys. Rev. B*, 78:195125, Nov 2008.
- [27] Alexei Kitaev, Vladimir Lebedev, and Mikhail Feigel'man. *Periodic table for topological insulators and superconductors*. AIP, 2009.
- [28] B. Collins and P. Śniady. Integration with respect to the haar measure on unitary, orthogonal and symplectic group. *Communications in Mathematical Physics*, 264(3):773–795, Jun 2006.
- [29] I. C. Fulga, F. Hassler, A. R. Akhmerov, and C. W. J. Beenakker. Scattering formula for the topological quantum number of a disordered multimode wire. *Phys. Rev. B*, 83:155429, Apr 2011.
- [30] M. P. Anantram and S. Datta. Current fluctuations in mesoscopic systems with andreev scattering. *Phys. Rev. B*, 53:16390–16402, Jun 1996.
- [31] I.S. OLIVEIRA and V.L.B. DE JESUS. *Introdução a Física do Estado Sólido*. LIVRARIA DA FÍSICA, 2005.

- [32] Griffiths, D. J. . *Introduction to Eletrodynamics 3rd Edition*. Prentice Hall, New Jersey, USA, 1999.
- [33] A. M. S Macêdo. Propriedades universais de transporte em pontos quânticos com simetria quiral. Master's thesis, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE-Brazil, 2001.
- [34] L. L. Sohn and L. P. Kouwenhoven. *Mesoscopic Electron Transport (Nato Science Series E:)*. Springer, 1997.
- [35] M. L. Mehta. *Random matrices, volume 142, third edition (pure and applied mathematics)*. Academic Press, 2004.
- [36] P. J. Forrester. *Log-gases and random matrices (lms-34) (London mathematical society monographs)*. Princeton University Press, 2010.
- [37] T. Timberlake. Random numbers and random matrices: Quantum chaos meets number theory. *American Journal of Physics*, 74(6):547–553, 2006.
- [38] A. Altland and M. R. Zirnbauer. Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures. *Phys. Rev. B*, 55:1142–1161, Jan 1997.
- [39] F. J. Dyson. Statistical theory of the energy levels of complex systems. i. *Journal of Mathematical Physics*, 3(1):140–156, 1962.
- [40] E. P. Wigner. *Characteristics vectors of bordered matrices with infinite dimensions I*. *Annals of Mathematics*, 1957.
- [41] J. Verbaarschot. Spectrum of the qcd dirac operator and chiral random matrix theory. *Phys. Rev. Lett.*, 72:2531–2533, Apr 1994.
- [42] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Phys. Rev. Lett.*, 52:1–4, Jan 1984.
- [43] E. M. A. Alves. Fator fano de uma junção normal-supercondutor com simetria chiral. Master's thesis, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, PE-Brazil, 2017.

- 
- [44] R. Landauer. Spatial variation of currents and fields due to localized scatterers in metallic conduction (and comment). *Journal of Mathematical Physics*, 37(10):5259–5268, 1996.
- [45] Mello, P. A. and Kumar, n. . *Quantum transport in mesoscopic systems: complexity and statistical fluctuations*. Oxford university Press Inc., Oxford, Reino Unido, 2004.
- [46] H. U. Baranger and P. A. Mello. Mesoscopic transport through chaotic cavities: A random s-matrix theory approach. *Phys. Rev. Lett.*, 73:142–145, Jul 1994.
- [47] K.A. Muttalib and Y. Chen. Distribution function for shot noise in wigner-dyson ensembles. *International Journal of Modern Physics B*, 10(16):1999–2006, 1996.
- [48] Reichl, L. E. . *A Modern Course in Statistical Physics*. Wiley-VCH Verlag GmbH, Weinheim, Germany, 2009.
- [49] C.A. Souza Filho. *Cavidades balísticas caóticas e funções simétricas: resultados exatos para a estatística de contagem de carga*. PhD thesis, Tese de mestrado, Departamento de Física-UFRPE, Recife, -PE-Brazil, 2013.