

Neilson Ferreira de Lima

**Modelo de distribuição de probabilidade aplicada a  
modelagem dos índices das bolsas de valores mundiais  
inspirada na teoria cinética do gás ideal e teoria da  
colisão**

Recife-PE

Agosto de 2016



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO**  
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA**

**Modelo de distribuição de probabilidade aplicada a modelagem dos índices das bolsas de valores mundiais inspirada na teoria cinética do gás ideal e teoria da colisão**

**Área de concentração: Biometria e Estatística Aplicada**

**Orientador: Prof. Dr. Tiago Alessandro Espínola Ferreira**

**Coorientador: Prof. Dr. Cícero Carlos Ramos de Brito**

**Recife-PE**

**Agosto de 2016**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE  
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

L732m Lima, Neílson Ferreira de

Modelo de distribuição de probabilidade aplicada a modelagem dos índices das bolsas de valores mundiais inspirada na teoria cinética do gás ideal e teoria da colisão / Neílson Ferreira de Lima. – 2016.  
74 f. : il.

Orientador: Tiago Alessandro Espínola Ferreira.

Coorientador: Cícero Carlos Ramos de Brito.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco,  
Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada,  
Recife, BR-PE, 2016.

Inclui referências e apêndice(s).

1. Gas ideal 2. Taxa de retorno 3. Lei de potencia 4. Função densidade de probabilidade 5. Ajuste I. Ferreira, Tiago Alessandro Espínola, orient. II. Brito, Cícero Carlos Ramos de, coorient. III. Título

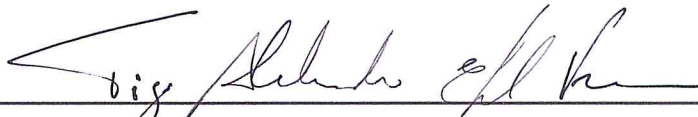
CDD 574.018

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA E ESTATÍSTICA APLICADA

Modelo de distribuição de probabilidade aplicada a modelagem dos índices das  
bolsas de valores mundiais inspirada na teoria cinética do gás ideal e teoria da  
colisão

Neilson Ferreira de Lima

Orientador:



Prof. Dr. Tiago Alessandro Espínola Ferreira  
Orientador

Banca examinadora:



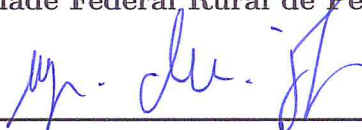
Prof. Dr. Paulo Salgado Gomes de Mattos Neto  
Universidade Federal de Pernambuco



Prof. Dr. Pedro Hugo de Figueirêdo  
Universidade Federal Rural de Pernambuco



Profª Dra. Tatijana Stosic  
Universidade Federal Rural de Pernambuco



Prof. Dr. Moacyr Cunha Filho  
Universidade Federal Rural de Pernambuco

*Este trabalho é dedicado a minha família (pais, esposa e filho),  
porque é fruto de muito trabalho em conjunto,  
e agora, desfrutamos desta conquista.*

# Agradecimentos

A gratidão é uma qualidade, uma ação de quem é grato, é um reconhecimento de uma pessoa por alguém que lhe prestou um benefício, um auxílio ou um favor. O Agradecimento é o reconhecimento e declaração de se estar grato por algo dado ou feito por outrem, é a manifestação da gratidão. Certo dia li na bíblia sagrada (Lucas 17.11-19) que Jesus Cristo curou dez homens leprosos, mas só um voltou para agradecer o milagre recebido. Aprendo com isso que poucos são os que se lembram de agradecer, por isso quero sempre fazer parte destes poucos que agradecem.

Agradeço, primeiramente, a Deus na divindade de Jesus Cristo pela vida, porque ele é a minha vida e o doador da vida, e sem ele, reconheço que não tenho vida. É por Jesus que existimos e nos vemos, é por Jesus que temos perdão e redenção das nossas almas, é por tudo isto, e tudo mais que não dá para escrever no espaço limitado que temos, que manifesto minha gratidão e agradecimento a Deus, autor de toda vida.

Aos meus pais Severino José de Lima e Maria das Graças, minha profunda e sincera gratidão. Pois foram eles que me ensinaram o caminho que devia trilhar, e fizeram mais do que podiam para facultar a oportunidade de crescer na vida acadêmica e profissional. Afirmo que valeu apenas os puxões de orelhas e as surras (disciplinas, punições aplicadas na infância e adolescência) que levei de meus pais para me endireitar na vida.

A minha lindíssima esposa, Alba Cecília, meus agradecimentos, porque sempre me apoiou e incentivou minhas conquistas. Agradeço por seus cuidados na minha alimentação e saúde.

Ao meu lindo filho Nicolás pelos bons momentos de alegria que vivenciamos durante esta tese.

Aos meus irmãos Natanael, Niedja e Nadadja e aos meus lindos sobrinhos Suellen, Náthally, Mariana, Sophia e Miguel (o caçulinha) que são fontes de alegria para mim.

Agradeço aos demais membros desta grande família: Avós, tios, primos, sogra e cunhados.

Ao nosso mui estimado orientador Prof. Dr. Tiago Alessandro Espínola Ferreira, porque me apoiou e concedeu a oportunidade de trabalhar em suas pesquisas. Obrigado Professor pela sua paciência, orientação e disposição em nos atender e ajudar.

Ao meu co-orientador Prof. Dr. Cícero Carlos Ramos de Brito, porque me ajudou e colaborou para o enriquecimento desta tese.

Ao meus pastores Anísio Francisco e Manoel Anísio pela compreensão e apoio da minha dedicação a esta tese, pois nunca se opuseram aos meus estudos, pelo contrário, sempre incentivaram ao progresso.

Aos meus amigos Paulo Salgado pelo fornecimento dos dados para esta pesquisa e esclarecimento de dúvidas, Manoel Rivelino pela companhia nos estudos, a Prof. Maria José (Diretora da Escola Alberto Luiz Russo) e todos os demais que não vou citar porque são muitos.

Aos professores do programa de pós-graduação em biometria e estatística aplicada, porque muito contribuíram para o nosso crescimento.

A Universidade Federal Rural de Pernambuco e ao programa de Biometria e Estatística Aplicada que foi onde cresci academicamente desde minha graduação.

Aos servidores técnicos administrativos, em particular ao secretário do programa Marco Santos, aos prestadores de serviços gerais que limpam o ambiente do DEINFO para estudarmos.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Agradeço a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho de tese.

*“E não vos conformeis a este mundo,  
mas transformai-vos pela renovação da vossa mente,  
para que experimenteis qual seja a boa,  
agradável, e perfeita vontade de Deus.”*

*(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*

*“O temor do Senhor é a instrução da sabedoria,  
e diante da honra vai a humildade.”*

*(Bíblia Sagrada, Provérbios 15.33)*



# Resumo

Os índices das bolsas de valores servem como um termômetro para o mercado de ações, e também, é baseado nestes índices que investidores ou pesquisadores avaliam as economias e os mercados dos países, pois, por esses índices é possível estudar as oscilações, rentabilidade, decrescimento e crescimento dos investimento nas bolsas de valores. Com isto em foco, o objetivo desta tese foi desenvolver uma modelagem estatística, inspirada na teoria cinética dos gases e teoria da colisão, para construir um modelo probabilístico, baseada na taxa de retorno, que ajustassem os índices das bolsas de valores mundiais. O modelo de probabilidade proposto nesta pesquisa foi comparado com a lei de potência e com a distribuição exponencial de probabilidade. O novo modelo ajustou melhor os índices das bolsas de valores, e, explica melhor o comportamento dos mercados financeiros quando comparado aos trabalhos que tratam das distribuições exponenciais e das leis de potências.

**Palavras-chaves:** Gás Ideal. taxa de retorno. lei de potência. função densidade de probabilidade. ajuste.

# Abstract

The indices of stock exchanges serve as a thermometer for the stock market and it is, also, based on these indices that investors and researchers evaluate the economies and markets of countries, therefore, for these indices is possible to study the oscillations, profitability, decrease and growth of investment in stock exchanges. With this focus, the objective of this thesis was to develop a statistical model, inspired by the kinetic theory of gases and the theory of collision, to construct a probabilistic model based on rate of return, which could adjust the indices of global stock exchanges. The model proposed probability in this study was compared with the power of law and the exponential probability distribution. The new model better adjusted indexes of stock exchanges, and better explains the behavior of financial markets when compared to studies dealing with exponential distributions and power laws.

**Key-words:** Ideal Gas. return rate. power law. probability density function. adjustment.

# Lista de Figuras

Figura 1 – Série temporal do índice francês CAC 40 na Figura 1(a) e a série de retorno na Figura 1(b) . . . . .	10
Figura 2 – Descreve-se no gráfico a probabilidade de uma partícula sofrer uma colisão entre a energia $E$ e $E + dE$ . . . . .	16
Figura 3 – Comparação do ajuste entre os modelos $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$ (nos gráficos (a), (c) e (e)) e a lei de potência $y = aE^{-b}$ (nos gráficos (b), (d) e (f)) em diferentes escalas: linear (a) e (b), semi-log (c) e (d) e log-log (d) e (e) para o índice alemão DAX. . . . .	25
Figura 4 – Comparação do ajuste entre os modelos $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$ (nos gráficos (a), (c) e (e)) e a lei de potência $y = aE^{-b}$ (nos gráficos (b), (d) e (f)) em diferentes escalas: linear (a) e (b), semi-log (c) e (d) e log-log (d) e (e) para o índice brasileiro Ibovespa . . . . .	26
Figura 5 – Coeficiente de determinação, $R^2$ , dos ajustes das funções $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$ e $y = aE^{-b}$ . . . . .	28
Figura 6 – Comparação do ajuste entre os modelos $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$ (nos gráficos (a), (c) e (e)) e a função densidade exponencial $f(E) = \alpha e^{-\alpha E}$ (nos gráficos (b), (d) e (f)) em diferentes escalas: linear (a) e (b), semi-log (c) e (d) e log-log (d) e (e) para o índice alemão DAX. . . . .	29
Figura 7 – Comparação do ajuste entre os modelos $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$ (nos gráficos (a), (c) e (e)) e a função densidade de probabilidade exponencial $f(E) = \alpha e^{-\alpha E}$ (nos gráficos (b), (d) e (f)) em diferentes escalas: linear (a) e (b), semi-log (c) e (d) e log-log (d) e (e) para o índice brasileiro Ibovespa . . . . .	30
Figura 8 – Ajuste do índice e da taxa de retorno do DAX alemão pela função $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$ e $W_1(E) = -\alpha\beta E^{\beta-1}ke^{-\alpha E^\beta}$ respectivamente. . . . .	33
Figura 9 – Ajuste da taxa de retorno do Ibovespa pela função $W_1(E) = -\alpha\beta E^{\beta-1}ke^{-\alpha E^\beta}$ . . . . .	33
Figura 10 – gráfico da fdp $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$ para diferentes valores de $\beta$ e $\alpha = 0.5$ . . . . .	36
Figura 11 – gráfico da fdp $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$ para diferentes valores de $\beta$ e $\alpha = 1.0$ . . . . .	37
Figura 12 – gráfico da fdp $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$ para diferentes valores de $\beta$ e $\alpha = 1.5$ . . . . .	37
Figura 13 – gráfico da fdp $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$ para diferentes valores de $\beta$ e $\alpha = 2$ . . . . .	37
Figura 14 – gráfico da fdp $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$ para diferentes valores de $\beta$ e $\alpha = 3$ . . . . .	38
Figura 15 – gráfico da fdp $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$ para diferentes valores de $\beta$ e $\alpha = 10$ . . . . .	38

- Figura 16 – gráfico da constante de normalização  $k$ , do modelo fdp  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$ ,  
em função de  $\alpha$  para diferentes valores de  $\beta$ . . . . . 38
- Figura 17 – gráfico da constante de normalização  $k$ , do modelo fdp  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$ ,  
em função de  $\beta$  para diferentes valores de  $\alpha$ . . . . . 39
- Figura 18 – gráfico da fdp  $f(x)$  para diferentes valores de  $\alpha$  e  $\beta$  . . . . . 42

## Lista de tabelas

Tabela 1	– Coeficiente de determinação- $R^2$ e $RMSE$ dos modelos $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$ e lei de potência ( $y = aE^{-b}$ ) para os índices das bolsas de valores . . .	27
Tabela 2	– Valores dos parâmetros do modelo $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$ e da lei de potência ( $y = aE^{-b}$ ) para os índices das bolsas de valores . . . . .	28
Tabela 3	– Coeficiente de determinação- $R^2$ e $RMSE$ dos modelos $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$ e a função densidade exponencial ( $f(E) = \alpha e^{-\alpha E}$ ) para os índices das bolsas de valores . . . . .	31
Tabela 4	– Valores dos parâmetros do modelo $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$ e da densidade da exponencial ( $f(E) = \alpha e^{-\alpha E}$ ) para os índices das bolsas de valores . . .	31
Tabela 5	– Valores dos parâmetros $\alpha$ , $\beta$ e da constante normalização $k$ do modelo $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$ e da taxa de ganho $W_1(E) = -\alpha\beta E^{\beta-1}ke^{-\alpha E^\beta}$ . . . . .	33
Tabela 6	– Algumas distribuições discretas ou contínuas de probabilidade. . . . .	55

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução	1
1.2	Motivação	2
1.3	Objetivo	3
1.4	Estrutura da tese	3
<b>2</b>	<b>Revisão de Literatura</b>	<b>5</b>
2.1	Introdução	5
2.2	Sistema complexo	5
2.3	Teoria cinética dos gases	5
2.3.1	Evolução histórica da teoria cinética dos gases	6
2.3.2	Teoria cinética dos gases ideais	8
2.3.3	A lei dos gases ideais	8
2.4	Séries Temporais	9
2.5	Distribuição de probabilidade e classe de distribuição de probabilidade	13
2.5.1	Distribuição de Boltzmann	13
2.5.2	A distribuição de Maxwell-Boltzmann	14
2.5.3	Medida de Gibbs	14
<b>3</b>	<b>Modelagem Proposta</b>	<b>15</b>
3.1	Introdução	15
3.2	Teoria da colisão	16
3.3	Analogia com o mercado financeiro	17
3.4	Materiais ou dados	18
3.5	Metodologia	18
<b>4</b>	<b>Resultados e Discussões</b>	<b>22</b>
4.1	Introdução	22
4.2	Distribuição Exponencial Expandida Generalizada	22
4.2.1	Comparação entre os ajustes das funções exponencial expandida generalizada e a lei de potência aplicadas aos índices das bolsas de valores mundiais	23
4.2.2	Comparação entre os ajustes das funções exponencial expandida generalizada e a densidade exponencial aplicadas aos índices das bolsas de valores mundiais	28

4.2.3	Taxa de retorno $W(E)$ dos índices financeiros . . . . .	32
4.2.4	Interpretação dos parâmetros $\alpha$ e $\beta$ do modelo proposto . . . . .	34
4.2.5	Construção da distribuição proposta a partir de princípios estatísticos teóricos . . . . .	39
4.2.5.1	Propriedades estatísticas para a classe exponencial expandida generalizada . . . . .	42
5	Conclusão . . . . .	44
5.1	Contribuição e trabalhos futuros . . . . .	45
	Referências Bibliográficas . . . . .	46
	Apêndices . . . . .	54
	APÊNDICE A Algumas distribuições de probabilidades . . . . .	55

# 1 Introdução

## 1.1 Introdução

Entender, estudar e investigar a dinâmica dos mercados acionários tem sido a ocupação e o interesse de muitos pesquisadores e cientistas de diversas áreas da ciência (Matemática, Física, Estatística, Economia, etc.). Isto deve-se ao fato de que a economia do mundo gira entorno das bolsas de valores espalhadas em diversos países, onde a economia destes estão diretamente ligadas ao desempenho destas bolsas. Pela análise dos índices das bolsas de valores é possível observar as oscilações das economias dos países, visto que o índice de uma bolsa de valores serve como um termômetro da economia medindo as oscilações das ações das empresas que constitui tal índice.

O estudo dos mercados financeiros existe a décadas, e, até mesmo, a séculos. Porém, na década de 90 (1990) [Stanley et al. 1996], pesquisadores de física, com interesse em economia, propuseram um novo ramo da ciência, a Econofísica, onde modelos de física, em particular da mecânica estatística, são aplicados a sistemas econômicos. Vê-se o termo Econofísica no artigo de H. Eugene Stanley intitulado *Anomalous fluctuations in the dynamics of complex systems: from DNA and physiology to econophysics* [Stanley et al. 1996].

Um dos objetivos dos pesquisadores ao estudar os mercados financeiros é encontrar ou construir um modelo físico-matemático que explique o comportamento dos mercados, mais especificamente o processo estocástico do retorno (volatilidade). Em particular, há uma busca por modelos de predição capazes de definir a dinâmica do mercado por processos estatísticos que forneçam as propriedades deste mercado. Pesquisadores tem usado exaustivamente lei de potência [Dragulescu e Yakovenko 2001, Fama 1965, Gabaix et al. 2003, Drăgulescu e Yakovenko 2001] para ajustar os retornos nas bolsas de valores e também para investigar distribuição de rendas e riquezas. Gabaix [Gabaix et al. 2003] utilizou lei de potência para acompanhar as flutuações nos mercados financeiros, leis de potências, também, foram observadas na Bolsa de valores de São Paulo [Gleria, Matsushita e Silva 2002].

No ano de 1900, Bachelier [Bachelier 1900] usou uma distribuição Gaussiana para modelar o processo estocástico dos retornos; Mandelbrot [Mandelbrot 1963] propôs e realizou o ajuste dos retornos por uma distribuição de Levi; François M. Login [Longin 1996]



analisou os valores extremos dos retornos do índice americano New York Stock Exchange-NYSE e mostrou que os valores máximo e mínimo do retorno segue uma distribuição de Fréchet.

Mais recentemente, De Mattos Neto *et al* [Neto et al. 2011], em um trabalho publicado no ano de 2011, mostrou que existe uma analogia entre a dinâmica dos mercados e o comportamento de um gás ideal. De Mattos Neto usou uma distribuição exponencial (função densidade de probabilidade-fdp) para ajustar o retorno dos índices das bolsas de valores, considerando que a taxa de decaimento era contante. Aqui esta taxa será considerada não mais constante, mas sim uma função da energia do sistema, sendo essa taxa definida formalmente no capítulo 3.

## 1.2 Motivação

O mercado de ações é um ambiente público onde são negociadas ações e opções de ações. Tais negociações podem ocorrer nas bolsa de valores. São nas bolsas de valores que ocorrem grande parte das operações do mercado acionário, estando nestas uma fração considerável do equilíbrio econômico de um país e até do mundo. Cada bolsa possui um índice, através dos quais são capturados os movimentos das ações de uma determinada bolsa de valores; o índice funciona como um termômetro para a bolsa e através dele se acompanha a tendência da bolsa (de alta ou de baixa) em cada instante de tempo. Ele, também, pode vir a servir como referencial de rentabilidade para fundos e carteiras de ações.

Os índices podem englobar as ações mais negociadas no mercado de um setor específico, as de maior ou menor capitalização ou mesmo aquelas que se diferenciam em algum aspecto (índice de dividendos, governança corporativa ou sustentabilidade Empresarial por exemplo). Eles podem se referir a um mercado específico, um grupo de mercados ou uma região (como mercados emergentes, desenvolvidos, BRICs, etc).

Foram estas funções do índice, entre outras supra citadas, que nos motivaram a estudar e investigar os índices das bolsas de valores mundiais. Um outro motivo, foi o interesse e curiosidade de construir um modelo de densidade de probabilidade, baseado na taxa de retorno, que ajustasse os índices das bolsas de valores do mundo, visto que muitos pesquisadores [Bachelier 1900, Stanley et al. 1996, Gabaix et al. 2003] aplicaram esforços para construir tal modelo.

## 1.3 Objetivo

Foi no impulso das motivações acima que nossa meta principal objetivou o estudo e análise das séries de retorno de mercados financeiros, bem como desenvolver uma modelagem estatística (função densidade de probabilidade) inspirada no comportamento de um gás ideal com interações fracas entre suas partículas mediadas basicamente por processos de colisões.

Os objetivos específicos são enumerados a seguir:

- Estudar os conceitos e metodologia da Econofísica;
- Estudar da teoria dos gases e teoria da colisão;
- Pesquisar os dados dos índices das bolsas de valores dos mercados financeiros mundiais;
- Construir uma função de densidade de probabilidade das séries de retorno dos índices dos mercados financeiros mundiais;
- Gerar classe de distribuição de probabilidades que sejam aplicadas aos índices das bolsas de valores;
- Analisar a taxa de variabilidade dos índices das bolsas de valores;
- Comparar o modelo construído com os já existentes;

## 1.4 Estrutura da tese

Esta tese está organizada em cinco capítulos da seguinte maneira:

**Capítulo 1– Introdução:** Neste capítulo foi apresentado sinteticamente a problemática, as razões deste trabalho de tese e o objetivo geral e específico; foi introduzido o conceito de índice e bolsa de valores, bem como a importância do índice para os investidores no mercado de ações.

**Capítulo 2– Revisão de Literatura:** Neste capítulo será abordado alguns conceitos e definições de sistema complexo, teoria cinética dos gases, séries temporais, processos estocásticos e algumas distribuições de probabilidades.

**Capítulo 3– Modelagem Proposta:** Neste capítulo será discorrido sobre a teoria da colisão, analogia entre o mercado financeiro com a teoria da colisão, os materiais ou dados de trabalho desta pesquisa e a metodologia.

**Capítulo 4– Resultado e Discussão:** Neste capítulo serão discutidos os resultados teóricos e aplicados alcançados pelos modelos de probabilidades e a lei de potência.

**Capítulo 5– Conclusão:** Neste capítulo será apresentado o desfecho dos resultados alcançados bem como alguns trabalhos futuros a serem desenvolvidos.

## 2 Revisão de Literatura

### 2.1 Introdução

Neste Capítulo são apresentados alguns conceitos, definições e métodos estatísticos para avaliação de modelos. É discorrido sobre a teoria cinética dos gases em particular sobre o gás ideal, sistemas complexos, classes de probabilidades e distribuições de probabilidades.

### 2.2 Sistema complexo

A teoria de sistemas complexos ou teoria da complexidade é um termo empregado para descrever abordagem científica e filosófica de diversos fenômenos, tais como genético, social e econômico. O substantivo *complexidade* é oriundo do latim, *complexus*, que significa entrelaçado ou torcido junto. Um sistema é dito complexo quando é composto de diversas partes, essas partes ou componentes interagem entre si. A natureza e o mundo estão cercados de sistemas complexos, sejam eles sociais, políticos ecológicos, financeiros ou econômicos, físicos, cibernéticos, biológico, entre outros. Tais sistemas têm diversas características em comum. Eles são termodinamicamente abertos, isto é, trocam energia com o seu ambiente; são compostos de um grande número de componentes distintos; os componentes do sistema interagem entre si de forma não linear e exibem um alto grau de heterogeneidade no tempo e no espaço. Portanto, sistemas complexos são caracterizados por propriedades emergentes, interação em multiescalas, comportamento inesperado e auto-organização. Dentre tantos sistemas complexo pode se citar o mercado financeiro com propriedades emergentes e difícil de analisar [Dragulescu e Yakovenko 2001, Fama 1965, Gabaixa et al. 2007, Gleria, Matsushita e Silva 2002, Asai, McAleer e Medeiros 2012].

### 2.3 Teoria cinética dos gases

Os gases são formados por um grande número de partículas (moléculas ou átomos) esféricas e pequenas quando comparadas com as dimensões em recipiente macroscópico e volume  $V$  onde o gás está contido. Amostras gasosas não têm formas permanentes nem volumes definidos, porque tendem a preencher completamente os recipientes onde são colocadas, tais amostras gasosas têm alta compressibilidade e nas mesmas condições

exercem aproximadamente a mesma pressão sobre um recipiente. A Teoria Cinética dos gases explica essas e outras propriedades das amostras gasosas a partir de um modelo microscópico em que uma amostra de gás [Gas Properties] é descrita como composta de um grande número de partículas em contínuo movimento, colidindo umas com as outras e com as paredes do recipiente.

### 2.3.1 Evolução histórica da teoria cinética dos gases

A teoria cinética dos gases tem sua origem em tempos remotos [Loeb 2004, Niaz 2000, Extrand 2016], desde meados do século XII alguns cientistas aplicaram tempo, esforço e dedicação para estudar o comportamento de diversos fenômenos associado a partículas microscópicas [Ghosh et al. 2016, Fouvry, Chavanis e Pichon 2016]. Por carência de recursos tecnológicos estas pesquisas caminharam lenta e até questionadas por outros físicos e químicos quanto a veracidade de tais descobertas.

Pode-se ver na literatura [Chalmers 2016] que o celebre químico irlandês, Robert Boyle, efetuou várias pesquisas sobre o comportamento elástico do ar, estas pesquisas resultou numa publicação de seu livro, *New Experiments Physico-Mechanicall, Touching the Spring of the Air, and its Effects*, no ano de 1660. Boyle [West 2004] propôs uma explicação teórica para a elasticidade do ar comparando-o a ‘uma pilha de pequenos corpos, caindo uns sobre os outros’, em que estes corpos eram considerados como sendo molas, ou novelos de lã empilhados uns sobre os outros, porém sem movimento independente. Boyle, também, demonstrou, usando um barômetro de mercúrio, que as pessoas e coisas estão sob um mar de ar que os comprime com uma pressão igual a de uma coluna d’água de 10 metros de altura, isto é, a pressão atmosférica. Este fato deu origem ao conceito de pressão que antes não era usado, e Boyle ilustrou a existência da relação entre a pressão e o volume de ar contido num recipiente como sendo inversamente proporcional.

Robert Boyle afamou-se na história, principalmente, por causa da lei que estabeleceu, a Lei de Boyle, também conhecida de lei das relações entre pressão e volume dos gases a temperatura constante. Por essa lei se conclui que o produto da pressão  $p$  de um gás ideal pelo volume  $v$  é sempre constante, levando em conta a mesma temperatura. Outra contribuição de Boyle para o estudo dos gases, que passaram a ser chamados de fluidos elásticos, foi a constatação que a viscosidade de um gás não depende de sua densidade.

A relação entre pressão e volume de um gás foi estabelecida por Boyle [Praveen et al. 2016, Murialdo et al. 2016], contudo ele não conseguiu descobrir de que forma é a força existente entre átomos. Então após as publicações das pesquisas de Boyle, Isaac Newton usou a relação entre pressão e volume para obter uma hipótese sobre as forças interatômicas; para Newton, havia uma força repulsiva com intensidade inversamente

proporcional à distância que separa os átomos.

Havia uma hipótese de que os átomos eram como molas ligadas entre si, Daniel Bernoulli discordou desta hipótese e propôs uma teoria a fim de explicar a pressão que um gás exerce [Beysens et al. 2005, Arghir, Alsayed e Nicolas 2002]. Sua teoria fundamentava-se na analogia dos átomos com esferas rígidas (bolas de bilhar) que se chocam frequentemente por estarem em movimento, sendo que a sucessão de choques contra as paredes de um recipiente é que produz a pressão. Bernoulli, também, supôs que calor é nada mais que movimento de átomos, e isto não foi aceito pelos cientistas de sua época, pois estes acreditavam na existência do éter e discordavam da ideia de que os átomos pudessem voar livremente pelo espaço. Devido ao fato das ideias de Newton sobre a interação entre átomos serem aceitas por volta do século XIX, a teoria cinética proposta por Bernoulli foi quase esquecida. Mas depois de um avanço na física a teoria cinética dos gases ressurgiu.

Com a queda da teoria do calórico e sua substituição pela teoria dinâmica do calor ressurgiu uma situação propícia a teoria cinética dos gases [Ezzat, Karamany e El-Bary 2016]. Rudolf Clausius [Ray e Majumder 2016] foi um dos físicos notáveis do século XIX, suas contribuições mais importantes foram a formulação da segunda lei da termodinâmica e o desenvolvimento da teoria mecânica do calor sobre as bases do conceito de entropia. Em 1957 [Lucia 2016] foi publicado seu primeiro artigo sobre a teoria cinética dos gases, onde o conceito de átomos comportando-se como esferas rígidas foi usado para então obter a pressão e a temperatura do gás em função da velocidade das moléculas. Em um segundo artigo, Clausius introduziu o conceito do caminho livre médio de uma partícula com a finalidade de dar um tratamento matemático ao fenômeno da condução de calor em gases. Este conceito também foi usado para derrubar as objeções que eram feitas contra a teoria cinética.

Assim como Clausius [Lucia 2016], outros cientistas acreditavam que as moléculas de um gás, depois de sucessivos choques, adquiriam uma velocidade comum entre elas. Contudo, James Clerk Maxwell [Mauel et al. 2016] discordava desta afirmação e propôs uma hipótese na qual as numerosas colisões entre as moléculas no gás, ao invés de igualar as velocidades de todas as moléculas, produziria uma distribuição estatística das velocidades na qual todas as velocidades poderiam ocorrer, com uma probabilidade conhecida. As pesquisas de Maxwell sobre a teoria cinética, além de ajudarem a estabelecer as bases para a mecânica estatística moderna, concluíram que a viscosidade de um gás independe de sua densidade, convencendo muitos cientistas que ainda não haviam aceito a teoria cinética dos gases.

### 2.3.2 Teoria cinética dos gases ideais

Um gás ideal [Salinas 1997, Nova, Bacchi e Reichardt 1996] é um modelo idealizado para o comportamento de um gás, isto é, um gás teórico composto de um conjunto de partículas pontuais movendo-se aleatoriamente e não interagindo entre si, exceto quando se chocam via colisão perfeitamente elástica. Já os os gases reais [Deb e Agrawal 1995] são todos os gases existentes na natureza, salvo quando estão em condições de pressão e de temperatura particulares e nestes casos são considerados aproximadamente, para efeitos apenas de cálculos facilitados, como gases ideais. Em condições ambientais normais tais como a temperatura e pressão padrão, a maioria dos gases reais comportam-se qualitativamente como um gás ideal.

O modelo do gás ideal é explorado tanto na dinâmica Newtoniana (“teoria cinética”) como na mecânica quântica (como um “gás em uma caixa”) [Leschke, Sobolev e Spitzer 2016, Campbell, Sprowl e Árnadóttir 2016, Bhaduri e Dijk 2016]. O modelo de gás ideal também é usado para modelar o comportamento de elétrons em um metal (no modelo de Drude e no modelo do elétron livre) [Shen e Yang 2016], e é um dos mais importantes modelos em mecânica estatística [Bhaduri e Dijk 2016]. Existem três classes básicas de gases ideais: o clássico ou gás ideal de Maxwell-Boltzmann, o gás de Bose quântico ideal, composto de bósons, e o gás de Fermi quântico ideal, composto de férmions [Fenech et al. 2016, Leschke, Sobolev e Spitzer 2016].

### 2.3.3 A lei dos gases ideais

As variáveis temperatura, pressão e densidade conhecidas como variáveis de estado, são relacionadas nos gases pela chamada lei dos gases ideais [Bhaduri e Dijk 2016, Campbell, Sprowl e Árnadóttir 2016]. Por definição, um gás ideal segue a teoria cinética dos gases, isto é, um gás ideal é formado de um número muito grande de pequenas partículas, as moléculas ou átomos, que tem um movimento rápido e aleatório, sofrendo colisões perfeitamente elásticas (conservação do momento e da energia cinética). Além disso, o tamanho das moléculas são tão pequenas e desprezíveis que as forças de atração entre elas são omissíveis. Embora a lei dos gases tenha sido deduzida para gases ideais, ela dá uma descrição razoavelmente precisa do comportamento da atmosfera, que é uma mistura de muitos gases. A lei dos gases pode ser expressa pela Equação (2.1) de estado como

$$PV = nRT \tag{2.1}$$

Esta equação descreve a relação entre a pressão ( $P$ ) e volume ( $V$ ), a temperatura ( $T$ ) e a quantidade ( $n$  em moles,  $1\text{mol} = 6,022 \cdot 10^{23}$ ) de um gás ideal,  $R = 0,0820574587\text{L} \cdot$

$atm \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$  é a constante universal dos gases perfeitos [Bagnato, Muniz e Bagnato 1995]. A Equação geral dos gases ideais para uma mesma massa molar é descrita pela Equação (2.2), onde  $P_1, V_1$  e  $T_1$  é a pressão, volume e temperatura absoluta em kelvins no instante 1 e  $P_2, V_2$  e  $T_2$  é a pressão, volume e temperatura no instante 2 para um mesmo sistema, esta é uma combinação das lei de Boyle, Charles e Gay-Lussac.

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \quad (2.2)$$

A lei de Charles [Sabin et al. 2011], a pressão constante, afirma que o volume e a temperatura são diretamente proporcionais entre si. Já a lei de Boyle [Brunetto, Oliveira e Júnior 2005], a temperatura constante, estabelece que a pressão e o volume são inversamente proporcionais. E, a lei de Gay-Lussac [Thomson 2007], a volume constante, fixa uma proporcionalidade direta entre a temperatura e a pressão. No entanto, em geral, esta lei não é válida para um gás real. Considerando as forças e volumes intermoleculares finitos se obtém uma equação de estado para os gases reais, a Equação (2.3) de Van Der Waals [Lemes, Oliveira e Braga 2010], em que  $P, V, T, R,$  e  $n$  correspondem a pressão, volume, temperatura absoluta em Kelvin, constante universal dos gases perfeitos e o número de mols respectivamente, os parâmetros  $a$  e  $b$  são determinados empiricamente pela natureza do gás, o parâmetro  $a$  está relacionado com as forças de atração intermoleculares e o parâmetro  $b$  com o volume molecular.

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \quad (2.3)$$

## 2.4 Séries Temporais

Uma sequência de eventos ou observações ordenadas segundo algum índice de medida é denominada de série temporal [Lima 2012, Silva, Guimarães e Tavares 2008]. Este índice pode ser o tempo, volume, espaço, profundidade entre outros. Uma série temporal pode ser discreta, continua ou multivariada. Pode-se ainda definir uma série temporal (Figura 1) como um conjunto ordenado  $Z_t$  com os seus elementos pertencente ao conjunto dos números reais ( $\mathfrak{R}$ ),  $t = 1, 2, 3, \dots, N$  é o índice cronológico e  $N$  é o total de observações, simbolicamente

$$Z_t = \{z_t \in \mathfrak{R} \mid t = 1, 2, 3, \dots, N\}.$$

Se a série temporal é contínua, então suas observações são feitas continuamente, daí pode-se definir o conjunto  $T = \{t \mid t_1 < t < t_2; t, t_1, t_2 \in \mathfrak{R}\}$  e a série temporal contínua



é representada por  $\{Z_t|t \in T\}$ . Na série temporal multivariada é observado  $k$  variáveis simultaneamente quer essas variáveis sejam discretas, contínuas ou mistas, por exemplo, em determinado dia no instante  $t$  é medido a temperatura, a velocidade do vento e a precipitação pluviométrica, neste caso foram observadas três variáveis.

Uma série temporal pode ser estocástica ou determinística. Uma série temporal é dita determinística se seus valores são determinados por uma função matemática ou algum critério de formação de sequência numérica, por exemplo, imagine uma série que é formada segundo a equação  $Z_t = t^3 + t(t - 1)$ , aqui se tem uma série determinística. Se uma série temporal é uma sequência de termos aleatório, então ela é chamada de estocástica, ou seja, seus valores podem ser descritos em termos de uma distribuição de probabilidades, ou ainda através de uma função matemática do tipo  $Z_t = t^3 + t(t - 1) + a_t$ , em que  $a_t$  é um termo aleatório. Os gráficos da Figura 1 são exemplos de séries temporais estocásticas.

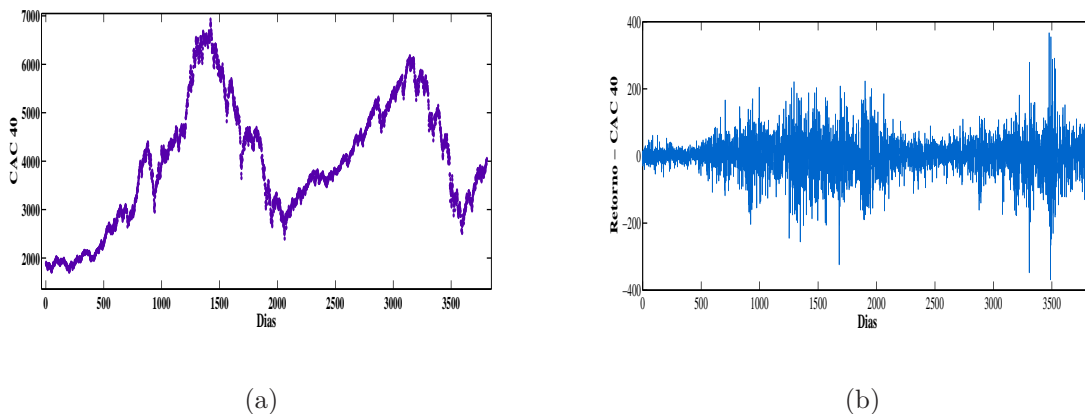


Figura 1 – Série temporal do índice francês CAC 40 na Figura 1(a) e a série de retorno na Figura 1(b)

Áreas da ciência tais como economia, econofísica, astronomia, astrofísica, medicina (eletrocardiograma, eletroencefalograma), estatística, física, química, matemática, Meteorologia (precipitação pluviométrica, temperatura diária, velocidade do vento) entre outros ramos científicos, usam séries temporais para analisar, prever e fazer inferências sobre determinado fenômeno [Mandelbrot 1963, Asai, McAleer e Medeiros 2012, Bachelier 1900, Bordignon, Caporin e Lisi 2007, Dragulescu e Yakovenko 2001, Eberlein, Keller e Prause 1998, Gu e Zhou 2010]. No dia a dia há diversos exemplos de séries temporais:

1. Cotação diária do principal índice da bolsa de valores do Brasil;
2. Registro da temperatura e velocidade do vento no arquipélago Pernambucano de Fernando de Noronha;

3. Medição dos batimentos cardíacos por minuto de um atleta;
4. Registros anuais de mortes acidentais de condutores de motocicletas na cidade do Recife;
5. Número de divórcios bienais na cidade de Vitória de Santo Antão;
6. Observação mensal da inflação nos últimos cinco anos no Brasil;
7. Quantidade de artigos publicados anualmente pelos professores do Departamento de estatística e informática da Universidade Federal Rural de Pernambuco;
8. Variação diária do euro em relação a moeda real.

Diversas estatísticas ou fatos estilizados (eventos ou características constatados empiricamente, por exemplo, a taxa de juros anual da poupança ou a tendências de crescimento de uma empresa) podem ser encontrados em uma série temporal. Na série de retorno, uma série de diferenças temporais de duas observações ( $Z_t$  e  $Z_{t-k}$ ), pode ser encontrada alguns fatos estilizados como:

1. Valores extremos: o mínimo ( $Z_{(1)}$ ) e o máximo ( $Z_{(n)}$ ) de uma série de tamanho  $n$ , ou *outliers*;
2. Amplitude: diferença entre o máximo ( $Z_{(n)}$ ) e o mínimo ( $Z_{(1)}$ );
3. Tendência: é um padrão que uma janela temporal inclina a seguir, deste modo, tem-se tendência de crescimento ou decrescimento;
4. Sazonalidade: é um fenômeno que ocorre a cada  $k$  período na série temporal. Pode-se citar como sazonal as compras feitas no dia das mães ou Natal. Há a sazonalidade aditiva e a multiplicativa. Na aditiva a série tem flutuações sazonais aproximadamente constantes. Na multiplicativa o tamanho das flutuações sazonais variam;
5. Heterocedasticidade: a série tem variâncias diferentes para as observações;
6. Homocedasticidade: variâncias constantes na série temporal;

Muitas análises sobre a série de retorno é encontrada na literatura [Wang et al. 2009, Mantegna e Stanley 2000, Yamasaki et al. 2005, Plerou et al. 2000] com o objetivo de quantificar a volatilidade num dado intervalo de tempo; para isto, pesquisadores utilizam uma Equação semelhante a fórmula da série de retorno ( $\Delta Z = Z_t - Z_{t-1}$ ) [Neto et al.

2011, Neto et al. 2013] descrita abaixo, no qual  $G(t)$  é a amplitude das flutuações e  $\Delta t$  é o intervalo de amostragem.

$$G(t) = \ln Z_{t+\Delta t} - \ln Z_t \cong \frac{Z_{t+\Delta t} - Z_t}{Z_t} \quad (2.4)$$

Várias análises e estudos são realizados com base nas séries de retornos [McCauley e Gunaratne 2003, Queiros, Anteneodo e Tsallis 2005, Plerou et al. 2004, Yamasaki et al. 2005, Fama 1965], e, grande parte da comunidade científica da Econofísica [Liu et al. 1999] tem ajustado tais dados por lei de potência [Dragulescu e Yakovenko 2001, Fama 1965, Gabaix et al. 2003, Gabaixa et al. 2007, Goldstein, Morris e Yen 2004, Queiros, Anteneodo e Tsallis 2005, Plerou et al. 2004]. Uma lei de potência é uma relação entre duas variáveis  $X = x$  e  $Y = y$  como descrito na Equação (2.5)

$$y = ax^b \quad (2.5)$$

Uma das vantagens de ajustar fenômenos por meio dessa relação é que se trata de uma simples proporção que depende de dois parâmetros  $a$  e  $b$ , no qual  $a$  é a constante de proporcionalidade e  $b$  é o expoente da lei de potência. Diversos problemas na natureza são ajustados por uma lei de potência, observa-se aplicação da lei de potência nas emissões de gases de efeito estufa [Pueyo e Fearnside 2011], em sistemas complexos [Gleria, Matsushita e Silva 2004], em microbiologia [Cunha et al. 2008], nas séries temporais de mercados acionários [Queiros, Anteneodo e Tsallis 2005, Fama 1965, Goldstein, Morris e Yen 2004, Neto et al. 2011] entre outros [Mantegna e Stanley 1995, Gabaixa et al. 2007, Selcuk 2004, Gopikrishnan et al. 1999].

Leis de potências também são aplicadas em séries de retornos por pesquisadores da área de econofísica [Mantegna e Stanley 2000, Mantegna e Stanley 1995, Gabaixa et al. 2007, Queiros, Anteneodo e Tsallis 2005] com o objetivo de analisar flutuações de índices, preços de ações de companhias e volatilidades dos mercados acionários. Através da aplicação deste modelo matemático (lei de potência) muitas estatísticas são visualizadas: taxa de retorno, densidade e distribuição de probabilidade nas caudas e em diversas janelas da série temporal dos retornos. Leis de potência foram observadas nas bolsas de São Paulo [Gleria, Matsushita e Silva 2002], Milão [Mantegna 1991], em taxas de câmbio [Figueiredo et al. 2003, Müller et al. 1990] e na volatilidade dos mercados acionários [Andersen et al. 2001, Liu et al. 1999].

## 2.5 Distribuição de probabilidade e classe de distribuição de probabilidade

A teoria da probabilidade é a base da qual toda estatística é desenvolvida, e vem sendo construída ao longo dos séculos [Casella e Berger 2002, Finetti 1979, Barlow e Proschan 1975, Miller, Freund e Johnson 1965, Papoulis e Pillai 2002]. Tal teoria, fornece meios de modelar fenômenos aleatórios. Usando teorias probabilísticas é possível modelar a altura, massa corpórea, renda per capita, quantidade de filhos do sexo masculino, entre outros, de uma população, isto é, construir um modelo univariado ou multivariado de probabilidade que forneça informação de quão provável é um determinado evento acontecer.

### 2.5.1 Distribuição de Boltzmann

Pode-se citar entre os muitos modelos ou distribuição de probabilidade existentes, a distribuição de Boltzmann, também chamada de distribuição de Gibbs. Tal distribuição, na mecânica estatística, é uma distribuição de probabilidade, medida de probabilidade ou distribuição de frequência das partículas em um sistema sobre vários estados possíveis. A distribuição é expressa na forma

$$F(\text{estado}) \propto e^{-\frac{E}{k_B T}} \quad (2.6)$$

em que  $E$  é o estado da energia (que varia de estado para estado),  $k_B$  é a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura termodinâmica.

A distribuição de Boltzmann fornece a probabilidade de que um sistema mudará de um determinado estado como uma função da energia do estado e da temperatura do sistema. Isto é dado por

$$p_i = \frac{e^{-\varepsilon_i/k_B T}}{\sum_{i=1}^M e^{-\varepsilon_i/k_B T}} \quad (2.7)$$

em que  $p_i$  é a probabilidade do estado  $i$ ,  $\varepsilon_i$  a energia do estado  $i$ ,  $k_B$  a constante de Boltzmann,  $T$  a temperatura do sistema, e  $M$  o número de estados possíveis acessíveis ao sistema. A distribuição mostra que estados com menor energia sempre terá uma maior probabilidade de serem ocupados do que os estados com maior energia.

A razão de uma distribuição de Boltzmann calculada para dois estados é conhecida como o *fator de Boltzmann*, e, caracteristicamente, só depende da diferença de energia dos estados.

$$\frac{F(\text{Estado}_2)}{F(\text{Estado}_1)} = e^{\frac{E_1 - E_2}{k_B T}} \quad (2.8)$$

A distribuição de Boltzmann não deve ser confundida com a distribuição de Maxwell-Boltzmann. A primeira dá a probabilidade de que um sistema estará em um determinado estado, como uma função da energia desse estado. Quando aplicado às partículas, tais como átomos ou moléculas, ela mostra a distribuição de partículas sobre os estados de energia. A distribuição de Maxwell-Boltzmann é utilizada para descrever as velocidades das partículas em gases ideais.

### 2.5.2 A distribuição de Maxwell-Boltzmann

A distribuição de Maxwell-Boltzmann é dada pela função

$$f(v) = \sqrt{\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^3} 4\pi v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}, \quad (2.9)$$

em que  $m$  é a massa da partícula,  $k_B T$  é o produto da constante de Boltzmann pela temperatura termodinâmica e  $v$  a velocidade da partícula em um dado instante.

A integral da função de densidade de probabilidade [Wang, Li e Ding 2016, Griffiths 2016, Shakil, Kibria e Singh 2016, Hill et al. 2016] dá a probabilidade, por unidade de velocidade, de encontrar uma partícula com uma velocidade próxima a  $v$ . A fdp é simplesmente a distribuição de Maxwell dada na Equação 2.10, com o parâmetro de distribuição  $a = \sqrt{k_B T/m}$ . Na teoria das probabilidades a distribuição de Maxwell-Boltzmann é uma distribuição Qui-quadrado com três graus de liberdade e parâmetro de escala  $a = \sqrt{k_B T/m}$ .

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2 e^{-x^2/(2a^2)}}{a^3}, \quad a > 0, \quad x \in (0; \infty) \quad (2.10)$$

### 2.5.3 Medida de Gibbs

Em matemática, a medida Gibbs, em homenagem a Josiah Willard Gibbs, é uma medida de probabilidade freqüentemente vista em muitos problemas da teoria da probabilidade e mecânica estatística. É uma generalização do conjunto canônico de sistemas infinitos. O conjunto canônico dá a probabilidade de o sistema  $X$  estar no estado  $x$  (equivalente, da variável aleatória  $X$  tem valor  $x$ ) como

$$P(X = x) = \frac{1}{Z(\beta)} \exp(-\beta E(x)). \quad (2.11)$$

$E(x)$  é uma função do espaço de estados para os números reais; em aplicações físicas,  $E(x)$  é interpretado como a energia da configuração  $x$ . O parâmetro  $\beta$ , em física, é o inverso da temperatura. A constante normalizadora  $Z(\beta)$  é a função de partição.

## 3 Modelagem Proposta

### 3.1 Introdução

O mercado de ações ou bolsa de valores é uma entidade pública utilizada para a negociação de ações (papéis de empresas) ou derivativos a um determinado preço que é acordado entre compradores e vendedores [Cabrera-Paniagua et al. 2015, Moreno-Lázaro 2015, Abdulhadi, Shetty e Alshamali 2015]. O mercado acionário é uma das principais fontes para uma empresa arrecadar dinheiro, porque as ações são listadas e negociadas em diversas bolsas de valores pelo mundo. Esse artifício permite que o capital de uma determinada organização seja aberto, ou que ela aumente o capital através da venda de ações de propriedade da empresa num mercado público.

Mercados econômicos de altas volatilidades chamados de mercados “quentes”, e os de baixa volatilidade de mercados “frios”. Esses comportamentos de volatilidade é visto nos mercados mundiais [Neto et al. 2011]. Os mercados quentes possuem uma volatilidade maior causada normalmente pela instabilidade, ou insegurança da economia de um dado país. Geralmente, esses mercados são encontrados nos países em desenvolvimento [Abiad et al. 2015, Custom 2016]. Os mercados frios, normalmente, são encontrados em países estabelecidos que dão confiança aos investidores externos, tornando o mercado mais estável, ou menos volátil.

A volatilidade [Mantegna e Stanley 2000, Asai, McAleer e Medeiros 2012, Bordignon, Caporin e Lisi 2007] é uma medida estatística de espalhamento dos retornos para uma dada ação ou índice de mercado em relação a um valor médio. Esse valor pode ser estimado usando alguma medida de dispersão, como média de diferenças, variância ou desvio padrão calculada em torno das séries de retornos de uma ação. Estudos [Matia et al. 2004, McCauley e Gunaratne 2003, Silva, Prange e Yakovenko 2004, Silva e Yakovenko 2007] mostraram que a fdp da série de retornos também pode ser bem ajustada por uma distribuição exponencial. Matia *et al* [Matia et al. 2004] observou que a fdp do mercado indiano é bem ajustado por uma distribuição exponencial, enquanto que a fdp da volatilidade dos mercados americanos seguem uma lei de potência. O trabalho de Matia sugere que existam, de fato, duas classes de mercados governados por diferentes leis.

A função de densidade de probabilidade é muito abordada na literatura porque descreve a relação entre altas e baixas volatilidades. Tal relação é justamente o que ca-

racteriza se um mercado é “quente” ou “frio”, já que em mercados em desenvolvimento existe uma maior probabilidade da ocorrência de eventos extremos, retratado por grande variabilidade na volatilidade. Esta análise pode ser usada para entender a dinâmica dos mercados e fornecer novas ideias sobre as flutuações econômicas, eventos extremos como falhas e valorização de alta no valor dos mercados de ações e evolução temporal do dinheiro [Mantegna e Stanley 2000, Yamasaki et al. 2005, Wang et al. 2009, Plerou et al. 2000, Andersen et al. 2001, Silva e Yakovenko 2005].

## 3.2 Teoria da colisão

Considere uma partícula com uma velocidade  $v$ , seja  $P(E)$  a probabilidade dessa partícula sobreviver até uma energia  $E$  sem sofrer colisão. Desse modo, quando a energia  $E \rightarrow 0$  a probabilidade  $P(0) \rightarrow 1$ , ou seja, a partícula tem chance de 100% de sobreviver sem sofrer colisão. De outra maneira, a probabilidade  $P(E)$  de sobrevivência diminui quando a energia  $E$  aumenta. E assim  $P(E) \rightarrow 0$  quando  $E \rightarrow \infty$ . O gráfico de uma função de sobrevivência  $P(E)$  versus  $E$  tem a forma da Figura 2

Para descrever a colisão, será considerado  $W(E)dE$  a probabilidade de uma partícula sofrer uma colisão entre a energia  $E$  e  $E+dE$ , Figura 2. Desta maneira  $W(E)$  é a probabilidade, por unidade de energia, da partícula sofrer uma colisão ou a taxa de retorno. Considerar-se-á que a probabilidade  $W(E)$  é independente de  $v$ . Contudo, em geral,  $W(E)$  pode depender da velocidade  $v$  (ou energia) da partícula em particular considerada, tal que  $W(E)=W(v)$ .

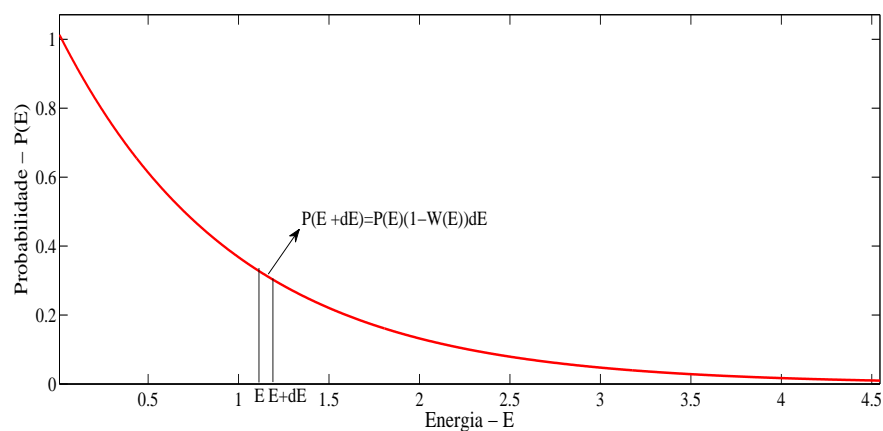


Figura 2 – Descreve-se no gráfico a probabilidade de uma partícula sofrer uma colisão entre a energia  $E$  e  $E + dE$

Conhecendo a probabilidade  $W(E)$  é possível calcular a probabilidade de sobrevi-

vência  $P(E)$ . Isto pode ser feito da seguinte maneira: a probabilidade de uma partícula sobreviver a uma energia  $E + dE$  sem sofrer colisão é igual a probabilidade de uma partícula sobreviver a uma energia  $E$  sem sofrer colisão, multiplicada pela probabilidade de não sofrer colisão entre o intervalo de energia  $E$  e  $E + dE$ . A Equação (3.1) descreve este fenômeno

$$P(E + dE) = P(E)(1 - W(E)dE) \quad (3.1)$$

da Equação (3.1) segue que

$$P(E) + \frac{dP(E)}{dE}dE = P(E) - P(E)W(E)dE$$

ou

$$\frac{1}{P(E)} \frac{dP(E)}{dE} = -W(E) \quad (3.2)$$

Entre as colisões, a velocidade  $v$  da partícula não muda, deste modo a probabilidade  $W(E)$ , se é considerada uma função de  $v$ , pode ser considerada uma constante independente da energia. A integral da Equação (3.2) é imediata e dada por

$$\ln P(E) = -W(E)E + \text{constante}$$

ou

$$P(E) = a \exp(-W(E)E)$$

a constante de integração  $a$  pode ser determinada pela condição que  $P(0) = 1$ . Portanto  $a = 1$ , e

$$P(E) = \exp(-W(E)E) \quad (3.3)$$

### 3.3 Analogia com o mercado financeiro

Todas as partículas têm uma velocidade, ou uma energia, que podem ser comparadas com os preços das ações ou com o capital aplicado nas bolsas de valores. Então, se uma partícula pode mudar sua energia (ou velocidade), da mesma forma uma ação pode ter seu preço alterado. Estas mudanças nos preços das ações têm o mesmo comportamento



da mudança na energia (ou velocidade) de uma partícula. Dessa forma estamos usando a teoria das colisões para explicar como estas mudanças de energia (ou velocidade) ocorrem no mercado financeiro. Por essa teoria, entendemos que quanto mais capital se tenha no mercado menor é a probabilidade de permanecer com seu capital inalterado sem sofrer perdas ou ganhos de capital até uma energia  $E$ . Semelhantemente quanto menor o capital que um agente tenha no mercado maior é a probabilidade dele permanecer com seu capital inalterado. E se essa energia for mínima, quando  $E \rightarrow 0$ , então  $P(E) \rightarrow 1$ .

### 3.4 Materiais ou dados

Os dados deste trabalho são as séries temporais dos índices diários das principais bolsas de valores mundiais no período de Janeiro de 1995 a Janeiro de 2010 dos seguintes países: Brasil (Índice da Bolsa de Valores de São Paulo-Ibovespa), Malásia (*Kuala Lumpur Stock Exchange-KLSE*), Hong Kong (*Hang Seng*), México (Índice de Preços e Cotações-IPC), Singapura (*Straits Times Index-STI*), Espanha (*Iberia Index-IBEX 35*), França (*Cotation Assistée en Continu-CAC 40*), Alemanha (*DAX 30*), Japão (*Nikkei 225*), Inglaterra (*FTSE 100*), Estados Unidos da América (*Dow Jones Industrial Average-DJIA*, *National Association of Securities Dealers Automated Quotations-NASDAQ e S&P500*), Suíça (*Swiss Market Index-SMI*) e Austrália (*Austrian Traded Index-ATX*). Os dados estão disponíveis no site <http://br.financas.yahoo.com/>.

### 3.5 Metodologia

No artigo intitulado *Théorie de la spéculation* [Bachelier 1900] de autoria de Bachelier, é proposto o movimento Browniano para modelar o processo estocástico dos retornos. Tendo como base o teorema do limite central, Bachelier concluiu que o retorno sobre uma escala de tempo  $\Delta t$  segue uma Distribuição Gaussiana. Outras análises realizadas por Fama [Fama 1965], Mantegna e Stanley [Mantegna e Stanley 1995] e Mandelbrot [Mandelbrot 1963] mostram que a série de retornos pode ser aproximada por uma distribuição de Levy. Usando dados de uma das mais negociadas ações do índice New York Stock Exchange-NYSE, François M. Longin [Longin 1996] analisou os valores extremos dos retornos e mostrou empiricamente que os valores máximo e mínimo dos retornos segue uma distribuição de Fréchet. Ernst Eberlein et al [Eberlein, Keller e Prause 1998] investigou os preços dos ativos por um novo modelo, uma distribuição hiperbólica. E, Sílvio Queiróz [Queiros, Anteneodo e Tsallis 2005] propôs o ajuste para a série de retornos diária do índice Dow Jones Industrial por uma distribuição q-Gaussiana, porque em suas observações empírica esta teve melhor ajuste que a gaussiana. Podobnik et al [Podobnik et

al. 2009] analisaram o logaritmo da taxa de retorno anual dos índices New York Stock Exchange (NYSE), National Association of Securities Dealers Automated Quotations-NASDAQ, S&P 500 e Inglaterra (FTSE) e inferiram que a taxa de crescimento segue uma lei de potência. Diante de tantas pesquisas e abordagens, ainda não há uma explicação consolidada para explicar a dinâmica dos mercados de ações.

Distribuições exponenciais, também, foram utilizadas para descrever as séries de retorno [Dragulescu e Yakovenko 2000, Drăgulescu e Yakovenko 2001, Dragulescu e Yakovenko 2001, McCauley e Gunaratne 2003, Silva, Prange e Yakovenko 2004, Silva e Yakovenko 2007, Laherrere e Sornette 1998]. Rama Cont *et al.* [Cont, Potters e Bouchaud 1997] propuseram o uso da Distribuição Exponencial truncada para analisar a série de retornos. Laherrere e Sornette [Laherrere e Sornette 1998] ajustaram as distribuições dos retornos das ações com uma distribuição exponencial alongada. Takayasu [Takayasu *et al.* 2000] aplicou a distribuição exponencial alongada para ajustar a taxa de retorno em dados econômicos. Kim e Yoon [Kim e Yoon 2003] usou uma exponencial alongada para estudar o comportamento dinâmico dos títulos futuros da Korean Futures Exchange market—KOFEX. E, Yakovenko [Drăgulescu e Yakovenko 2001] usou dados de impostos e do censo nos Estados Unidos—EUA a fim de demonstrar que a distribuição de renda individual no EUA é exponencial e a cauda uma lei de potência [Drăgulescu e Yakovenko 2001].

Num trabalho recente realizado por Mattos Neto intitulado *Market volatility modelling for short time window* [Neto *et al.* 2011] foi observado que a dinâmica dos mercados de ações pode ser modelada por um gás ideal. Neste artigo foi considerada uma função exponencial para se ajustar a função de densidade de probabilidade (fdp) dos retornos, tomando como base uma aproximação, que a taxa de decaimento da fdp é constante. Mas, em experimentos foi constatado que a taxa de decaimento da fdp não é uma constante. Diante disto, este trabalho tem o objetivo de investigar a distribuição que melhor se ajusta aos retornos com base na taxa de retorno como uma função da energia do sistema.

Um gás ideal é um modelo teórico que consiste de um conjunto de partículas que se movem aleatoriamente [Chatterjee e Chakrabarti 2007, Neto *et al.* 2011, Neto *et al.* 2013, Skrdla 2009]. A interação entre as partículas desse gás é fraca ou quase inexistente. Assim, se o mercado de ações é composto por agentes ou ações que podem ser vistos como partículas [Neto *et al.* 2011, Neto *et al.* 2013], então há duas hipóteses que podem ser usadas para explicar a dinâmica dos mercados. A primeira é a hipótese do *random walk* [Mills 2003, Sitte e Sitte 2002], essa suposição afirma que as partículas não interagem umas com as outras. Essa hipótese é uma formalização matemática que física e intuitivamente passa a ideia de vários passos consecutivos, sendo cada uma numa direção aleatória. Essa

formalização é descrita na Equação (3.4)

$$Z_t = Z_{t-1} + r_t \quad (3.4)$$

Em que  $Z_t$  é a observação atual e  $Z_{t-1}$  é a observação imediatamente anterior a  $Z_t$  e  $r_t$  é um termo de ruído seguindo uma distribuição normal com média zero e desvio padrão  $\sigma$ ,  $r_t \sim N(0, \sigma^2)$ .

A segunda é a hipótese do passeio não aleatório [Bachelier 1900, Malkiel 2003], que afirma que as partículas interagem fracamente entre si. Desse modo, qualquer que seja a abordagem o mercado pode ser visto como um modelo generalizado de um gás ideal [Skrdla e Robertson 2005]. Dessa maneira, a partir da suposição que o mercado de ações é constituído por partículas (agentes), pode-se considerar duas alternativas: ou essas partículas não interagem entre si (hipótese *random walk*) [Sitte e Sitte 2002], ou interagem fracamente (hipótese de não existir um *random walk*). Assim, a velocidade ou energia de uma molécula num modelo de gás ideal pode ser comparado com o preço das ações. Essas mudanças são observadas quando a fdp das séries de retornos é analisada. Na descrição clássica, esta fdp segue a distribuição de Maxwell-Boltzmann que define a distribuição de energia (velocidade) de cada partícula. A distribuição de Maxwell-Boltzmann é definida pela Equação (3.5)

$$P(E) = ae^{-E/(k_b T)} \quad (3.5)$$

em que o coeficiente  $a$  é uma constante,  $k_b$  a constante de Boltzmann,  $E$  a energia (velocidade) das partículas e  $T$  a temperatura do sistema no gás ideal.

Baseado na teoria do gás ideal [Neto et al. 2011, Neto et al. 2013], foi proposto uma distribuição de probabilidade que ajuste as séries de retornos [Gopikrishnan et al. 1999, Gabaix et al. 2003] dos índices dos mercados de ações dos países supra citados, ou seja, uma função densidade de probabilidade (fdp) Equação (3.6)

$$p(E) = ke^{-\alpha E^\beta} \quad (3.6)$$

sendo  $k$  uma constante normalizadora,  $\alpha$  e  $\beta$  são os parâmetros a serem ajustados, com  $\alpha$  e  $\beta$  tomando valores no conjunto dos números reais,  $E$  é a energia/retorno no mercado financeiro. Nesta análise a série de retorno é definida para cada índice como

$$G(t) = \frac{|\ln(Z_{t+\Delta t}) - \ln(Z_t)|}{\delta} \quad (3.7)$$

em que  $\Delta t = 1$  dia,  $Z_t$  é o valor do índice de mercado no tempo  $t$  e  $\delta$  é o desvio padrão de  $|\ln(Z_{t+\Delta t}) - \ln(Z_t)|$ .

As séries  $G(t)$  foram ajustadas pelas funções (fdp) do novo modelo proposto (Equação (3.6)) e pela lei de potência  $y = ax^k$ .

Depois comparou-se o ajuste do modelo proposto, Equação (3.6), com a lei de potência e com a distribuição exponencial; a estatística considerada foi a raiz quadrada do erro quadrático médio-RMSE. O ajuste foi feito usando o algoritmo *Trust Region - TR*. O método de TR, também conhecido como método de passo restrito, é uma estratégia iterativa para solução de problemas de otimização com o objetivo de obter convergência global e aproveitar, ao máximo, as propriedades de convergência local dos métodos de busca linear. Afim de obter soluções ótimas, O *Trust Region* utiliza uma função de ajuste. Quando o algoritmo TR encontra um ajuste para a função objetiva, a região é expandida, tentando encontrar uma nova região promissora para solucionar o problema. Por outro lado, se o ajuste não é bom, a região é contraída, e o algoritmo busca outras regiões que possa solucionar o problema.

Depois destas análise, verificou-se a taxa de variação das séries  $G(t)$  para cada índice de mercados financeiros, a taxa de variação foi modelada diferenciando-se a Equação (3.6) da seguinte forma:

$$P(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$$

Diferenciando  $P(E)$  tem-se

$$\frac{dP(E)}{dE} = ke^{-\alpha E^\beta} (-\alpha\beta E^{\beta-1}) \quad (3.8)$$

dividindo-se a Equação acima por  $P(E)$  segue que

$$\frac{1}{P(E)} \frac{dP(E)}{dE} = -\alpha\beta E^{\beta-1}$$

e,

$$\frac{1}{P(E)} \frac{dP(E)}{dE} = W(E) = -\alpha\beta E^{\beta-1}$$

Portanto,

$$W(E) = -\alpha\beta E^{\beta-1} \quad (3.9)$$

é a taxa de variação de energia( $E$ )/retorno relativa ao ponto  $P(E)$ , ou simplesmente a taxa de variação. Observe que  $W(E)$  é uma função de  $E$ , e não uma constante.

## 4 Resultados e Discussões

### 4.1 Introdução

Neste capítulo são apresentadas as análises e os resultados da pesquisa deste tese. Na secção 4.2.1 é apresentado a comparação entre os ajustes das funções exponencial expandida generalizada e a lei de potência, aplicadas aos índices das bolsas de valores mundiais. Na secção 4.2.2 se discorre sobre a comparação entre os ajustes da função exponencial expandida generalizada e a densidade exponencial aplicadas aos índices das bolsas de valores mundiais. Nas demais secções são apresentados os resultados da taxa de ganho, as interpretações dos parâmetros do modelo de probabilidade proposto, baseado na teoria do gás ideal, e as propriedades estatísticas da densidade de probabilidade.

### 4.2 Distribuição Exponencial Expandida Generalizada

A fim de construir um modelo probabilístico, baseado na teoria cinética do gás ideal e na teoria da colisão, que se ajustasse aos índices das bolsas de valores mundiais, foi construído empiricamente um modelo de função densidade de probabilidade indicado por  $f(x) = ke^{-\alpha x^\beta}$ . Este modelo foi aplicado aos índices das bolsas de valores mundiais: Brasil (Índice da Bolsa de Valores de São Paulo-Ibovespa), Malásia (Kuala Lumpur Stock Exchange-KLSE), Hong Kong (Hang Seng), México (Índice de Preços e Cotações-IPC), Singapura (Straits Times Index-STI), Espanha (Iberia Index-IBEX 35), França (Cotation Assistée en Continu-CAC 40), Alemanha (DAX 30), Japão (Nikkei 225), Inglaterra (FTSE 100), Estados Unidos da América (Dow Jones Industrial Average-DJIA, National Association of Securities Dealers Automated Quotations-NASDAQ e S&P500), Suíça (*Swiss Market Index-SMI*) e Austrália (Austrian Traded Index-ATX). Estes dados são de 15 anos, isto é de 1995 a 2010. Em seguida, foi comparado os ajustes entre  $f(x) = ke^{-\alpha x^\beta}$  e a lei de potência  $y = ax^{-b}$ , e entre  $f(x) = ke^{-\alpha x^\beta}$  e a densidade exponencial dada por  $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ .

Vê-se na literatura que o comportamento geral da função densidade de probabilidade dos retornos é do tipo exponencial, mas quando se analisa os valores extremos o

comportamento é típico uma lei de potência. Assim expandindo  $f(x) = ke^{-\alpha x^\beta}$  segue que

$$f(x) = ke^{-\alpha x^\beta} = k \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \alpha^n x^{\beta n} \right]$$

para os valores de  $n \rightarrow \infty$  e  $x \rightarrow \infty$ ,  $f(x) \rightarrow ax^{-b}$ . Isto é,  $f(x) = ke^{-\alpha x^\beta}$  tenderá a uma lei de potência para valores grandes de  $n$  e  $x$ .

A função  $f(x) = ke^{-\alpha x^\beta}$  é uma função densidade de probabilidade, pois satisfaz as condições de uma fdp. Demonstração:

(i)  $f(x) \geq 0$

De fato, para qualquer valor de  $x$ , segue que  $f(x) = ke^{-\alpha x^\beta} \geq 0$ , pois  $k > 0$ . Também  $k$  é uma constante normalizadora dada por

$$k = \frac{1}{\int_0^{\infty} ke^{-\alpha x^\beta} dx}, \quad x \geq 0$$

(ii)  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

De fato,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} ke^{-\alpha x^\beta} dx = \frac{\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^\beta} dx}{\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^\beta} dx} = 1$$

#### 4.2.1 Comparação entre os ajustes das funções exponencial expandida generalizada e a lei de potência aplicadas aos índices das bolsas de valores mundiais

Foi interessante a comparação do ajuste entre o modelo proposto nesta tese,  $f(x) = ke^{-\alpha x^\beta}$  com a lei de potência,  $y = ax^{-b}$ , devido as aplicações desta lei no mercado financeiro [Dragulescu e Yakovenko 2001, Fama 1965, Gabaix et al. 2003, Gabaix et al. 2007, Goldstein, Morris e Yen 2004, Gleria, Matsushita e Silva 2002], e também, por existir outros modelos que ajustam índices financeiros de bolsas de valores do mundo inteiro.

Para a construção dos gráficos apresentados nestas e outras secções seguintes foi feita a substituição  $X = E$ , em que  $E$  representa a energia no sistema ou o retorno.

Nos gráficos (a), (c) e (e) da Figura 3 está representado o ajuste da série de retorno do índice alemão (DAX) pela fdp  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  nas escalas linear, semi-log e log-log respectivamente. Nos gráficos (b), (d) e (f) da Figura 3 o ajuste pela lei de potência  $y = aE^{-b}$  nas escalas linear, semi-log, e log-log. Observa-se visualmente que o ajuste

pela função  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  é mais aderente aos dados que o ajuste realizado pela lei de potência  $y = aE^{-b}$  para o índice DAX em todas as escalas (linear-(a) e (b), semi-log-(c) e (d), log-log-(e) e (f)). O ajuste por  $f(E)$ , obteve um coeficiente de determinação  $R^2 = 0.9991$  e a raiz do erro quadrático médio- $RMSE = 0.0077$ , enquanto o ajuste pela lei de potência teve  $R^2 = 0.9957$  e  $RMSE = 0.0167$ , o que nos leva a concluir que  $f(E)$  tem uma explicação da variabilidade maior do que a lei de potência.

Outros trabalhos [[Matia et al. 2004](#), [Fama 1965](#), [Gabaixa et al. 2007](#)] apresentam a lei de potência como uma função para ajustar os índices de países de economia desenvolvida, e em particular o índice alemão DAX. Contudo, nesta pesquisa está sendo proposto o modelo  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  como uma função densidade de probabilidade para ajustar tal índice, visto que teve um maior coeficiente de determinação ( $R^2$ ) para o ajuste do que a lei de potência quando comparado todo espectro de energia  $E$ . Mas se considerar os efeitos extremos, então a lei de potência tem melhor aderência aos dados no ajuste.

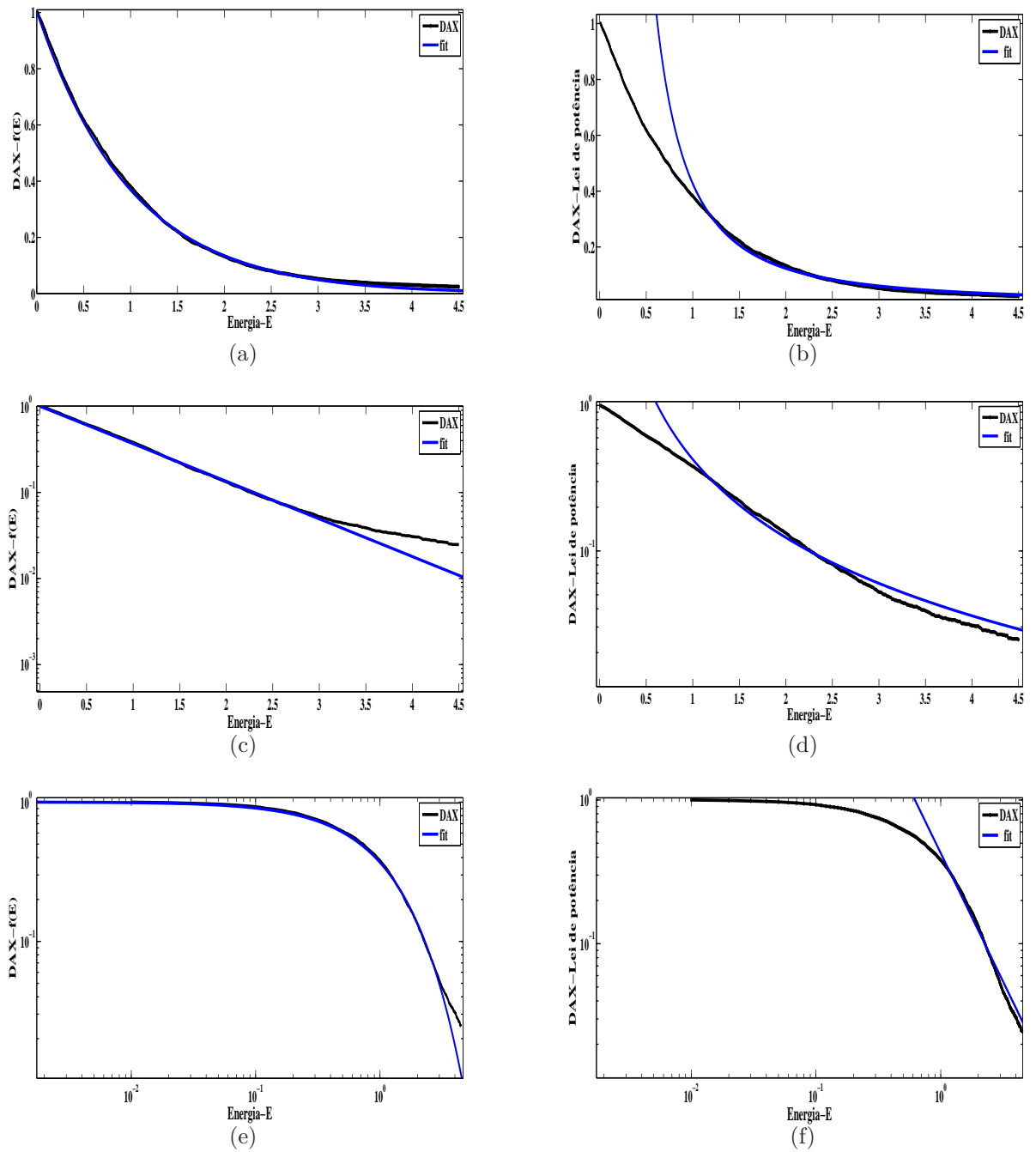


Figura 3 – Comparação do ajuste entre os modelos  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  (nos gráficos (a), (c) e (e)) e a lei de potência  $y = aE^{-b}$  (nos gráficos (b), (d) e (f)) em diferentes escalas: linear (a) e (b), semi-log (c) e (d) e log-log (d) e (e) para o índice alemão DAX.



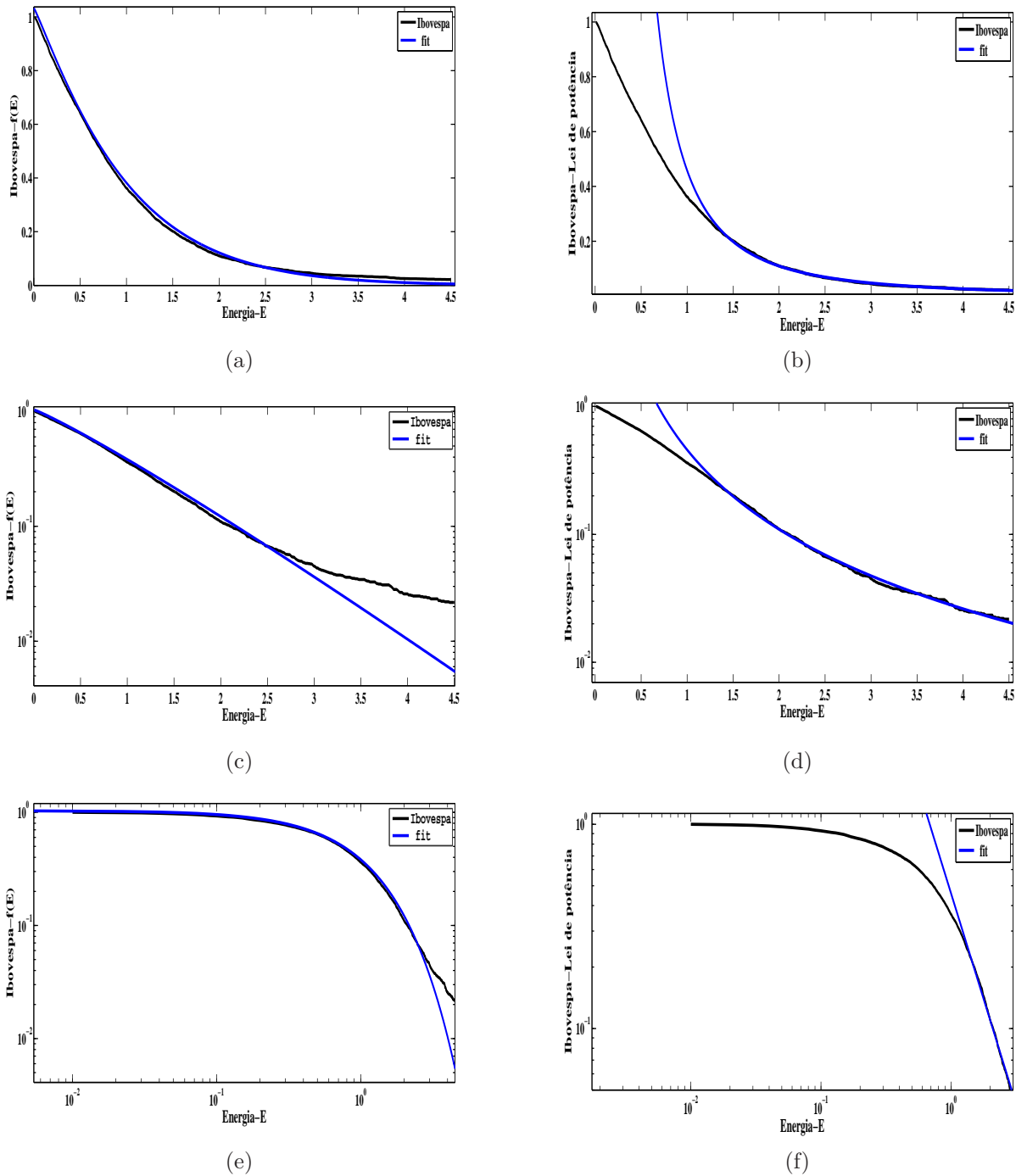


Figura 4 – Comparação do ajuste entre os modelos  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  (nos gráficos (a), (c) e (e)) e a lei de potência  $y = aE^{-b}$  (nos gráficos (b), (d) e (f)) em diferentes escalas: linear (a) e (b), semi-log (c) e (d) e log-log (d) e (e) para o índice brasileiro Ibovespa

A função  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  comparada com a lei de potência tem melhor aderências no ajuste dos índices de países de economia desenvolvida, e também, os países de econo-

Tabela 1 – Coeficiente de determinação- $R^2$  e  $RMSE$  dos modelos  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  e lei de potência ( $y = aE^{-b}$ ) para os índices das bolsas de valores .

Índices	$R^2_{f(E)}$	$RMSE_{f(E)}$	$R^2_y$	$RMSE_y$	$R^2_{f(E)} - R^2_y$	$RMSE_{f(E)} - RMSE_y$
ATX	0.9933	0.0202	0.9786	0.0361	0.0147	-0.0159
CAC	0.9974	0.0132	0.9952	0.0180	0.0022	-0.0048
DAX	0.9991	0.0077	0.9957	0.0167	0.0034	-0.0090
DJIA	0.9958	0.0162	0.9880	0.0274	0.0078	-0.0112
FTSE	0.9987	0.0092	0.9936	0.0204	0.0051	-0.0112
HANG SENG	0.9996	0.0046	0.9946	0.0179	0.0050	-0.0133
IBEX	0.9980	0.0115	0.9884	0.0279	0.0096	-0.0164
IBOV	0.9966	0.0152	0.9961	0.0163	0.0005	-0.0011
IPC	0.9977	0.0122	0.9960	0.0163	0.0017	-0.0039
KLSE	0.9928	0.0188	0.9892	0.0231	0.0036	-0.0043
NASDAQ	0.9989	0.0085	0.9859	0.0298	0.0130	-0.0213
NIKKEI	0.9958	0.0170	0.9850	0.0321	0.0108	-0.0151
SMI	0.9977	0.0123	0.9969	0.0142	0.0008	-0.0019
S&P500	0.9894	0.0254	0.9871	0.0281	0.0023	-0.0027
STI	0.9918	0.0227	0.9904	0.0246	0.0014	-0.0019

mia em desenvolvimento ou emergente como é o caso do Ibovespa no Brasil (Figura 4), IPC no México, e o KLSE na Malásia. Observando a Tabela 1, vê-se que  $f(E)$  explica 99.66% da variabilidade do Ibovespa, enquanto  $y = aE^{-b}$  explica 99.61%; isto resulta em uma diferença de 0,05% de explicação. Para os índices IPC e KLSE uma explicação da variabilidade de 99.77% e 99.28% respectivamente, considerando  $f(E)$ , e 99.60% e 98.92% respectivamente, considerando a lei de potência. Observe que, de fato,  $f(E)$  explica melhor a variabilidade dos dados que a lei de potência. Obsevando a Tabela 1 e a Figura 5, o índice que teve maior coeficiente de determinação, considerando  $f(E)$ , foi HANG SENG com  $R^2 = 0.9996 = 99.96\%$  e o menor coeficiente de determinação foi de S&P500,  $R^2 = 0.9894 = 98.94\%$ .E, O coeficiente de determinação médio  $\overline{R^2}$  para todos os índices foi de  $\overline{R^2} = 0.9962 = 99.62\%$ . Considerando a lei de potência  $y = ax^{-b}$ , o índice ATX da Áustria teve menor  $R^2$ ,  $R^2 = 0.9786 = 97.86\%$  e o índice SMI da suíça o maior  $R^2$ ,  $R^2 = 0.9969 = 99.69\%$ , já o coeficiente de determinação médio foi de  $\overline{R^2} = 0.9907 = 99.07\%$ .

Na Figura 5 está ilustrado os coeficientes de determinação dos 15 índices da Tabela 1, na mesma ordem que aparece nesta Tabela. Observe, novamente, que o ajuste realizado por  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  é superior para todos os índices quando comparado com a lei de potência  $y = aE^{-b}$ .

A função densidade de probabilidade (fdp) é de grande utilidade, e em particular para este trabalho de pesquisa, o modelo proposto  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$ , porque por este modelo é possível fazer predição e previsão para os índices de mercados financeiros.

Na Tabela 2 está os valores dos parâmetros do modelo  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  e da lei de potência ( $y = aE^{-b}$ ) para os índices das bolsas de valores considerados nesta tese. Vê-se

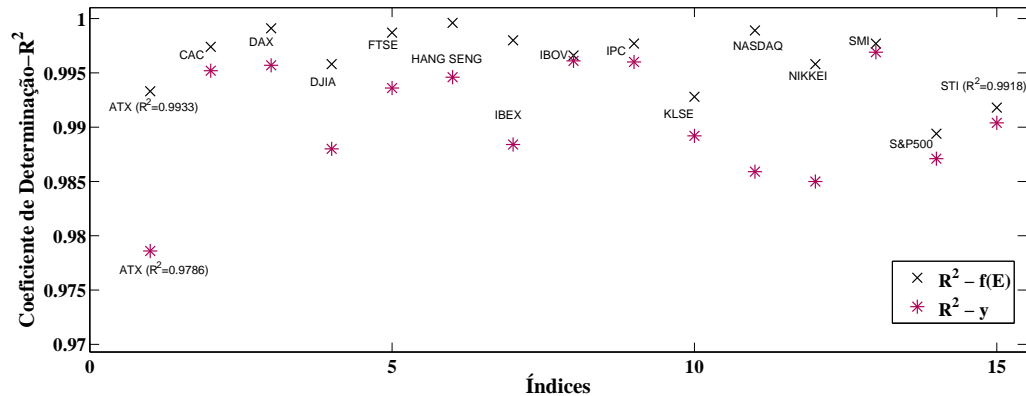


Figura 5 – Coeficiente de determinação,  $R^2$ , dos ajustes das funções  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  e  $y = aE^{-b}$ .

Tabela 2 – Valores dos parâmetros do modelo  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  e da lei de potência ( $y = aE^{-b}$ ) para os índices das bolsas de valores .

Índices	$f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$		$y = aE^{-b}$	
	$\beta$	$\alpha$	$b$	$a$
ATX	0.8512	1.3270	1.0000	0.2000
CAC	1.0450	0.9786	1.764	0.4188
DAX	1.0030	1.0010	1.787	0.4265
DJIA	0.9873	1.0870	1.469	0.3000
FTSE	0.9560	1.1000	1.5720	0.3486
HANGSENG	0.7743	1.4530	1.6800	0.3434
IBEX	1.0600	0.9529	1.4600	0.3535
IBOV	1.1040	0.9957	2.0640	0.4582
IPC	1.0610	0.9787	1.759	0.4048
KLSE	0.3287	4.1900	1.2000	0.1964
NASDAQ	0.8636	1.1910	1.3770	0.3272
NIKKEI	1.0910	0.9126	1.516	0.3770
SMI	1.0560	0.9988	1.929	0.4427
S&P500	1.0090	1.0720	1.1840	0.2000
STI	1.0310	1.0490	1.455	0.3000

que os valores numéricos destes parâmetros são distintos 1 a 1 para cada índice das bolsas de valores.

#### 4.2.2 Comparação entre os ajustes das funções exponencial expandida generalizada e a densidade exponencial aplicadas aos índices das bolsas de valores mundiais

De forma análoga a secção anterior, nesta é apresentada a comparação entre a distribuição exponencial expandida generalizada  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  e a distribuição exponencial  $f(E) = \alpha e^{-\alpha E}$ . Pode-se observar na Figura 6 e na Tabela 3 que a função proposta nesta tese,  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$ , tem maior explicação da variabilidade dos índices mundiais das bolsas de valores que a distribuição exponencial  $f(E) = \alpha e^{-\alpha E}$ , porque o coeficiente de variação  $R^2$  associado ao modelo proposto foi maior que o  $R^2$  associado a distribuição exponencial para todos os índices das bolsas de valores. De outro modo, pode-se considerar o  $RMSE$  dos ajustes propostos por esses modelos. Visto que o  $RMSE$  do modelo  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  foi menor do que o  $RMSE$  do modelo exponencial  $f(E) = \alpha e^{-\alpha E}$

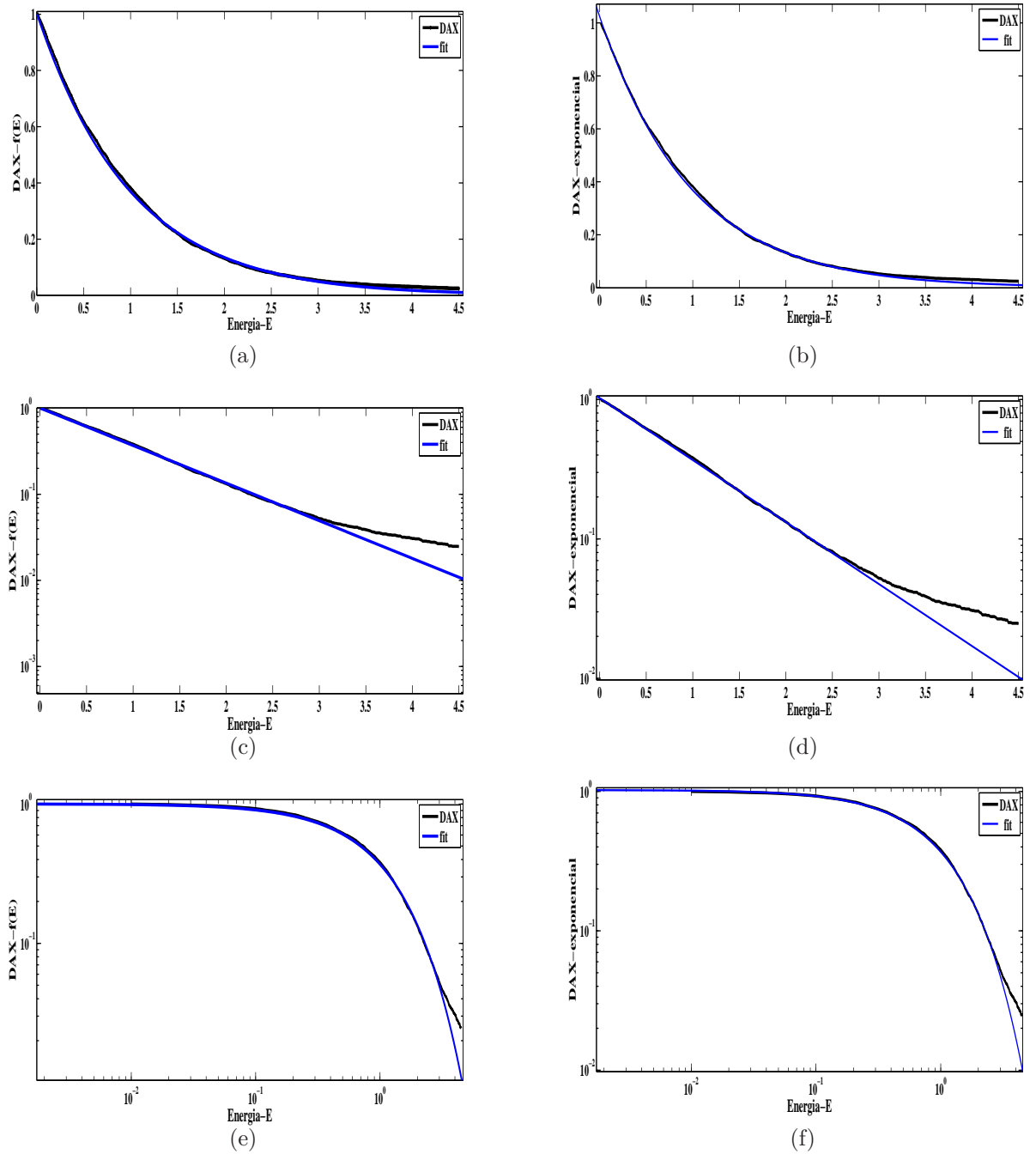


Figura 6 – Comparação do ajuste entre os modelos  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  (nos gráficos (a), (c) e (e)) e a função densidade exponencial  $f(E) = \alpha e^{-\alpha E}$  (nos gráficos (b), (d) e (f)) em diferentes escalas: linear (a) e (b), semi-log (c) e (d) e log-log (d) e (e) para o índice alemão DAX.

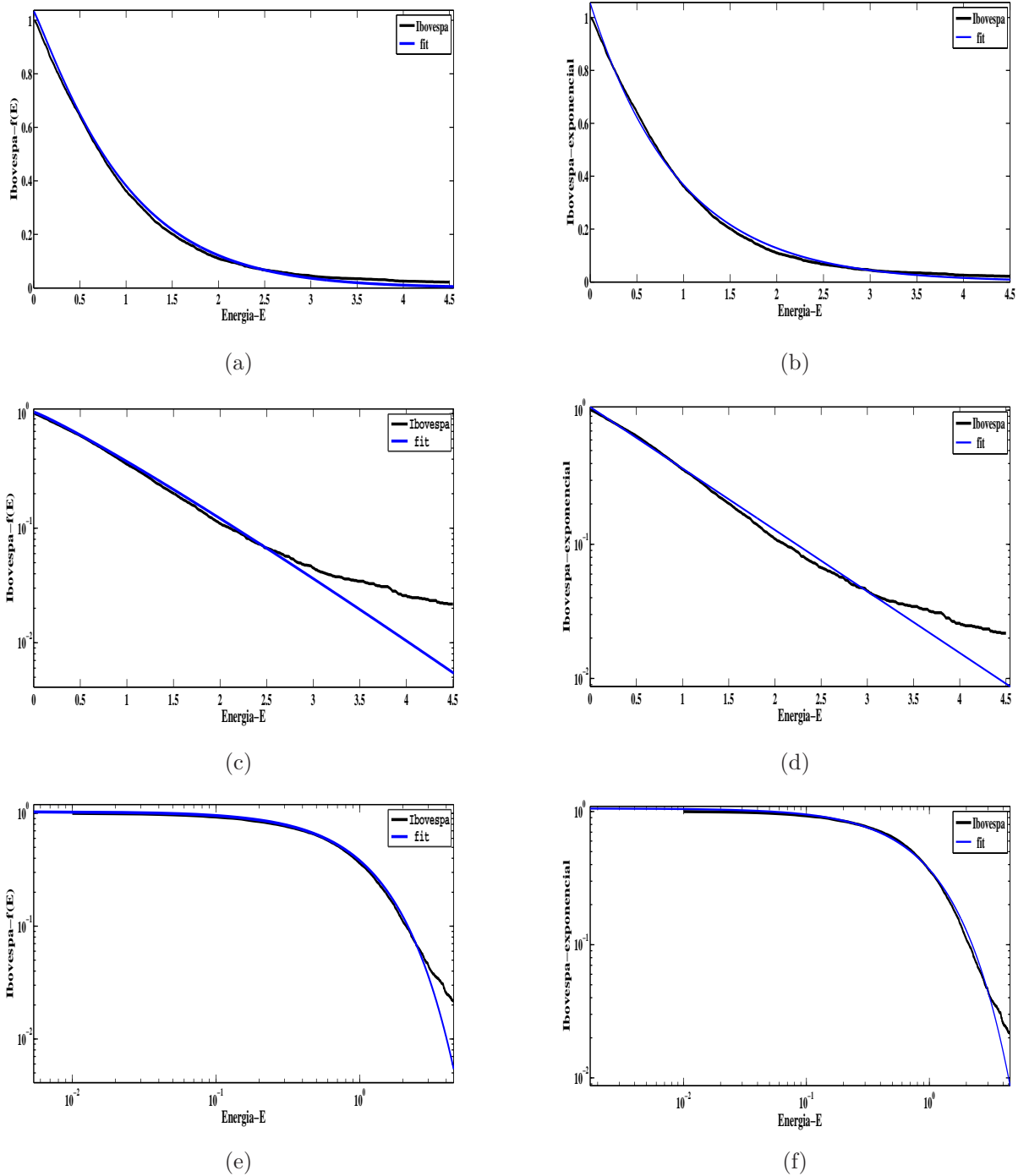


Figura 7 – Comparação do ajuste entre os modelos  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  (nos gráficos (a), (c) e (e)) e a função densidade de probabilidade exponencial  $f(E) = \alpha e^{-\alpha E}$  (nos gráficos (b), (d) e (f)) em diferentes escalas: linear (a) e (b), semi-log (c) e (d) e log-log (d) e (e) para o índice brasileiro Ibovespa

Na Figura 6 está ilustrado o gráfico do índice alemão DAX em três escalas (linear, semi-log e log-log) e o ajuste desse índice pelas distribuições  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  nas subfiguras

Tabela 3 – Coeficiente de determinação- $R^2$  e  $RMSE$  dos modelos  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  e a função densidade exponencial ( $f(E) = \alpha e^{-\alpha E}$ ) para os índices das bolsas de valores .

Índices	$R^2_{f(E)}$	$RMSE_{f(E)}$	$R^2_{\alpha e^{-\alpha E}}$	$RMSE_{\alpha e^{-\alpha E}}$	$R^2_{f(E)} - R^2_{\alpha e^{-\alpha E}}$	$RMSE_{f(E)} - RMSE_{\alpha e^{-\alpha E}}$
ATX	0.9933	0.0202	0.9861	0.0292	0.0072	-0.0090
CAC	0.9974	0.0132	0.9972	0.0137	0.0002	-0.0005
DAX	0.9991	0.0077	0.9988	0.0088	0.0003	-0.0011
DJIA	0.9958	0.0162	0.9934	0.0203	0.0024	-0.0040
FTSE	0.9987	0.0092	0.9984	0.0103	0.0003	-0.0011
HANGSENG	0.9996	0.0046	0.9930	0.0204	0.0066	-0.0157
IBEX	0.9980	0.0115	0.9972	0.0136	0.0008	-0.0021
IBOV	0.9966	0.0152	0.9955	0.0174	0.0011	-0.0022
IPC	0.9977	0.0124	0.9809	0.0355	0.0168	-0.0231
KLSE	0.9928	0.0188	0.8673	0.0810	0.1255	-0.0621
NASDAQ	0.9989	0.0085	0.9988	0.0085	0.0001	-0.0001
NIKKEI	0.9958	0.0170	0.9946	0.0192	0.0012	-0.0022
SMI	0.9977	0.0123	0.9957	0.0167	0.0020	-0.0043
S&P500	0.9894	0.0254	0.9876	0.0276	0.0018	-0.0021
STI	0.9918	0.0227	0.9832	0.0325	0.0086	-0.0098

8(a), 6(c) e 6(e) e o ajuste por  $f(E) = \alpha e^{-\alpha E}$  nas subfiguras 6(b), 6(d) e 6(f). Este resultado para o índice DAX mostra quão significativo é o ajuste pela distribuição exponencial expandida generalizada.

Na Tabela 4 está os valores dos parâmetros do modelo  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  e da densidade da exponencial ( $f(E) = \alpha e^{-\alpha E}$ ) para os índices das bolsas de valores. Observa-se que os valores numéricos dos parâmetros são muitos próximos uns dos outros. Por exemplo, para o índice alemão DAX se tem valor de  $\beta = 1.0030$  e o valor de  $\alpha = 1.0240$ , considerando neste último caso a fdp  $f(E) = \alpha e^{-\alpha E}$ .

Tabela 4 – Valores dos parâmetros do modelo  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  e da densidade da exponencial ( $f(E) = \alpha e^{-\alpha E}$ ) para os índices das bolsas de valores .

Índices	$f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$		$f(E) = \alpha e^{-\alpha E}$
	$\beta$	$\alpha$	$\alpha$
ATX	0.8512	1.3270	1.0200
CAC	1.0450	0.9786	1.048
DAX	1.0030	1.0010	1.0240
DJIA	0.9873	1.0870	0.9600
FTSE	0.9560	1.1000	1.0380
HANGSENG	0.7743	1.4530	0.9977
IBEX	1.0600	0.9529	1.0100
IBOV	1.1040	0.9957	1.0000
IPC	1.0610	0.9787	0,9000
KLSE	0.3287	4.1900	0.9309
NASDAQ	0.8636	1.1910	1.0010
NIKKEI	1.0910	0.9126	1.0420
SMI	1.0560	0.9988	0,9800
S&P500	1.0090	1.0720	0.9300
STI	1.0310	1.0490	0.9070

### 4.2.3 Taxa de retorno $W(E)$ dos índices financeiros

Uma outra vantagem de ajustar os índices das bolsas de valores pelo modelo  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  é que podemos enxergar a taxa de ganho ou perda dos índices como uma função da energia ( $E$ ) ou retorno, isto é, a taxa de retorno  $W(E)$  que pode ser descrita pela função  $W(E) = (-\alpha\beta E^{\beta-1})$ . Mattos [Neto et al. 2011], ajustou os índices das bolsas de valores por uma função exponencial e considerou a taxa de retorno como uma constante. Contudo, é observado empiricamente que a taxa não é uma constante, Figura 8(b), mas sim uma função do retorno. Por isso se afirmou que é mais vantajoso o modelo  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  que a função exponencial apresentado por Mattos [Neto, Ferreira et al. 2012, Neto et al. 2011].

Na Figura 8(b) está o gráfico da taxa de retorno do índice DAX alemão (linha preta) ajustado pela função  $W_1(E) = -\alpha\beta E^{\beta-1}ke^{-\alpha E^\beta}$  (linha vermelha), bem como o ajuste do índice DAX na Figura 8(a) pela função  $f(E)$ . É notável pelo gráfico da Figura 8(b) que o índice DAX decresceu (-0.52), equilibrou-se e cresceu (0.51) tendendo a uma taxa de equilíbrio constante. Neste ajuste foi obtido para a taxa média do retorno um coeficiente de variação  $R^2 = 0.9977$  e um  $RMSE = 0.0119$ , isto é,  $W(E)$  consegue explicar 99.77% da variabilidade da taxa média de retorno.

De forma semelhante, na Figura 9 está o gráfico da taxa de retorno (linha preta) do Ibovespa. O gráfico da Figura 9(b) foi obtido da Figura 9(a). Para obter este gráfico (9(b)) foi calculado a média móvel da taxa do Ibovespa com 35 pontos; o mesmo foi feito para o índice DAX na Figura 8(b). A função  $W(E)$  realizou um ajuste (linha vermelha) com coeficiente de variação  $R^2 = 0.9547$  e  $R^2 = 0.9947$  para os gráficos das Figuras 9(a) e 9(b) respectivamente. O que está representado na Figura 9(b) é o valor esperado da taxa de retorno para cada ponto ( $E$ ); observe que para a taxa, o ajuste ( $R^2 = 0.9947$  e  $RMSE = 0.0181$ ) foi maior considerando a média móvel dos retornos; isto nos leva a inferir que considerar a média da taxa de retorno é uma estatística interessante para um ajuste mais preciso.  $W(E)$ , também, pode ser usado para prever as taxas de ganho ou ganho médio de um investidor na bolsa de valores.

Na Tabela 5 está representado os valores dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e da constante normalização  $k$  do modelo  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  e da taxa de ganho  $W_1(E) = -\alpha\beta E^{\beta-1}ke^{-\alpha E^\beta}$ , bem como o coeficiente de determinação ( $R^2$ ) e a raiz do erro quadrático médio ( $RMSE$ ) para os índices das bolsas de valores.  $R_t^2$  mede o ajuste ou a variabilidade explicada por  $W(E)$  aplicada a taxa de retorno e  $RMSE_t$  é o erro associado, enquanto  $R_s^2$  mede a variabilidade explicada por  $W(E)$ , considerando alisamento com 35 pontos aplicado a taxa de retorno, e  $RMSE_s$  é o erro associado, considerando o alisamento da taxa.

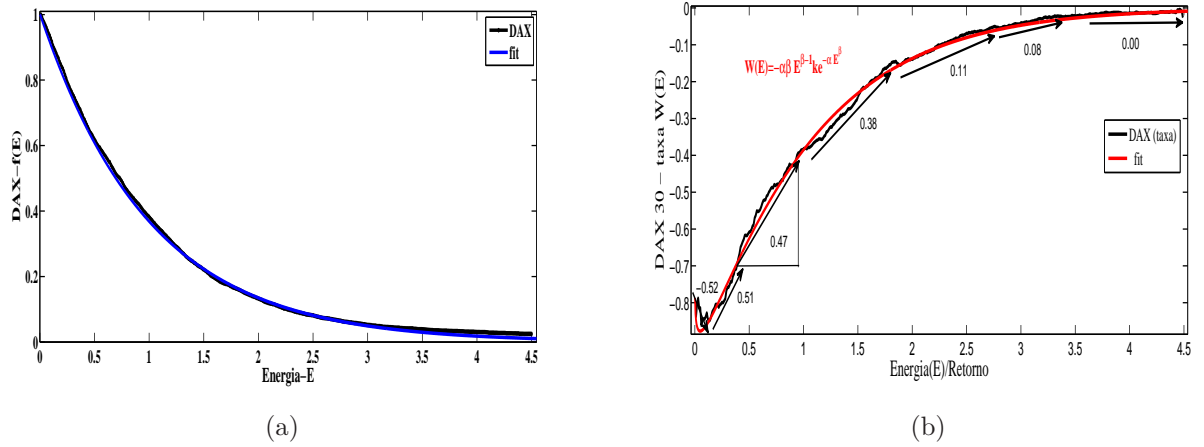


Figura 8 – Ajuste do índice e da taxa de retorno do DAX alemão pela função  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  e  $W_1(E) = -\alpha\beta E^{\beta-1}ke^{-\alpha E^\beta}$  respectivamente.

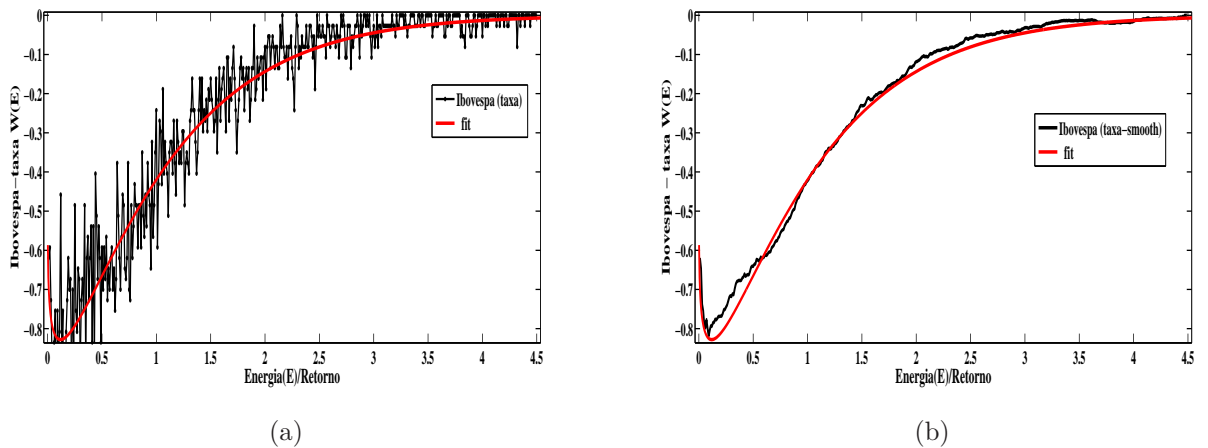


Figura 9 – Ajuste da taxa de retorno do Ibovespa pela função  $W_1(E) = -\alpha\beta E^{\beta-1}ke^{-\alpha E^\beta}$

Tabela 5 – Valores dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e da constante normalização  $k$  do modelo  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  e da taxa de ganho  $W_1(E) = -\alpha\beta E^{\beta-1}ke^{-\alpha E^\beta}$ .

Índices	$k$	$\alpha$	$\beta$	$R_t^2$	$RMSE_t$	$R_s^2$	$RMSE_s$
ATX	1.2827	1.3270	0.8512	0.9707	0.0491	0.9936	0.0222
CAC	0.9969	0.9786	1.0450	0.9523	0.0551	0.9955	0.0162
DAX	1.0020	1.0010	1.0030	0.9581	0.0530	0.9977	0.0119
DJIA	1.0820	1.0870	0.9873	0.9623	0.0529	0.9970	0.0143
FTSE	1.0830	1.1000	0.9560	0.9537	0.0573	0.9971	0.0137
HANG SENG	1.3958	1.4530	0.7743	0.9609	0.0566	0.9959	0.0177
IBEX	0.9776	0.9529	1.0600	0.9565	0.0533	0.9983	0.0099
IBOV	1.0336	0.9957	1.1040	0.9546	0.0557	0.9947	0.0181
IPC	1.0029	0.9787	1.0610	0.9529	0.0565	0.9931	0.0206
KLSE	12.3488	4.1900	0.3287	0.9857	0.0427	0.9945	0.0255
NASDAQ	1.1364	1.1910	0.8636	0.9489	0.0603	0.9976	0.0124
NIKKEI	0.9504	0.9126	1.0910	0.9515	0.0544	0.9934	0.0191
SMI	1.0206	0.9988	1.0560	0.9549	0.0559	0.9961	0.0156
SP500	1.0754	1.0720	1.0090	0.9601	0.0561	0.9944	0.0198
STI	1.0610	1.0490	1.0310	0.9527	0.0601	0.9955	0.0179



É notável pela Tabela 5 que o ajuste ( $R_s^2$ ), considerando o alisamento dos dados com uma média móvel, é muito maior que o ajuste ( $R_t^2$ ), que não considera o alisamento, para todos os índices. A taxa do índice IBEX (Espanha) sobressaiu dos demais índices no ajuste, teve um  $R_s^2 = 0.9983$  e  $RMSE_s = 0.0099$ , enquanto o IPC (México) teve o menor coeficiente de ajuste,  $R_s^2 = 0.9931$  e  $RMSE_s = 0,0206$ . Agora, olhando para  $R_t^2$ , ver-se que o índice KLSE (Malásia) sobressaiu dos demais com  $R_t^2 = 0.9857$  e  $RMSE_t = 0.0427$ , e o índice Nasdaq (Estados Unidos) teve o menor  $R_t^2 = 0, .9489$  e maior  $RMSE = 0.0603$

Na Figura 9(b) há um ponto de mínimo global, este ponto pode ser considerado o ponto de equilíbrio no mercado acionário, isto é, o ponto onde receitas e custos são iguais. Neste ponto de equilíbrio o investidor não tem lucro e nem perda, acima deste ponto o investidor tem lucro, mas abaixo deste ponto tem perdas. Do ponto de vista do gás ideal este é o ponto de equilíbrio térmico das partículas ou moléculas.

#### 4.2.4 Interpretação dos parâmetros $\alpha$ e $\beta$ do modelo proposto

Nesta seção discorre-se sobre a interpretação dos parâmetros do modelo proposto  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  aplicado aos índices dos mercados das bolsas de valores mundiais.

Como o modelo  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  é uma função densidade de probabilidade, então  $k$  é uma constante de normalização, de fato, pois

$$\int_0^{\infty} ke^{-\alpha E^\beta} dE = 1$$

isolando  $k$ , segue que

$$k = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\alpha E^\beta} dE} \quad (4.1)$$

ou seja,  $k$  é uma combinação dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ .

Observando o comportamento do parâmetro  $\alpha$  nos gráficos das Figuras 10 a 15, entendemos, quando comparado com a teoria da colisão e do gás ideal, que  $\alpha$  é inversamente proporcional a temperatura ou energia das partículas no sistema, isto é  $\alpha \propto 1/T$ , onde  $T$  é a temperatura média do sistema de partículas. Isso significa que quanto maior for o parâmetro  $\alpha$  para um dado  $\beta$  as partículas ou moléculas terão menos energia ou velocidade, conseqüentemente a probabilidade de as partículas sobreviverem sem sofrer colisão entre uma energia  $E$  e  $E + dE$  será maior; ou ainda, afirma-se que quanto maior for  $\alpha$  para um  $\beta$  fixo, menor é a probabilidade de as partículas sofrerem colisão entre a energia  $E$  e  $E + dE$ ; com isso, o  $\alpha$  é proporcional ao inverso da energia das partículas, isto é, quanto maior energia, maior a probabilidade de as partículas sofrerem colisão entre uma energia  $E$  e  $E + dE$ .

Considerando a hipótese de que o mercado acionário tem um comportamento semelhante a de um gás ideal, então o parâmetro  $\alpha$  está relacionado inversamente com a velocidade ou rapidez entre as negociações no mercado de ações. Se  $\alpha$  está relacionado com a velocidade das partículas de um gás ideal, então  $\alpha$  está relacionado inversamente com a energia cinética das partículas de um gás ideal [Neto et al. 2011]. Diante disto é possível afirmar que o parâmetro  $\alpha$  está relacionado com a volatilidade do gás ideal. Assim, em analogia com o mercado de ações o parâmetro  $\alpha$  está relacionado inversamente com a volatilidade no mercado [Neto, Ferreira et al. 2012].

O parâmetro  $\beta$  é um parâmetro de forma. Para  $\beta = 1$  se tem a distribuição exponencial de probabilidade, isto pode ser visto na Figura 11 para  $\beta = 1$  (curva vermelha). Também é possível mostrar que para  $\beta = 1$  tem-se a distribuição exponencial de probabilidade de parâmetro  $k = \alpha$ , veja:

$$f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$$

considerando  $\beta = 1$ , segue que

$$f(E) = ke^{-\alpha E} \quad (4.2)$$

daí,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty ke^{-\alpha E} dE &= 1 \\ k &= \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\alpha E} dE} = \frac{1}{\lim_{E \rightarrow \infty} \frac{e^{-\alpha E}}{-\alpha} - \lim_{E \rightarrow 0} \frac{e^{-\alpha E}}{-\alpha}} \\ k &= \frac{1}{1/\alpha} = \alpha \end{aligned}$$

Para  $\beta \geq M$ , com  $M \in \mathfrak{R}$  e  $M$  muito grande, então  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  tende a uma distribuição uniforme de probabilidade, isto pode ser visto empiricamente nos gráficos das Figuras 10, 11, 12, 13, 14 e 15. A distribuição  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  será uma distribuição uniforme da seguinte forma

$$f(E) = \begin{cases} 1, & E \in [0, 1] \\ 0, & E > 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

Demonstração: Dado

$$f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}, \quad E \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \quad (4.4)$$

Temos pela equação 4.3 que

$$f(E) = ke^{-\alpha E^\beta} = 1$$

para  $E \in [0, 1]$  e

$$f(E) = ke^{-\alpha E^\beta} = 0$$

para  $E > 1$ .

Considerando  $E \in [0, 1]$ , então

$$f(E) = ke^{-\alpha E^\beta} = 1$$

$$ke^{-\alpha E^\beta} = 1$$

$$k = \frac{1}{e^{-\alpha E^\beta}}$$

logo,  $f(E) = 1$ .

Quando  $\beta$  é muito grande, então  $k \rightarrow 1$  para qualquer valor de  $\alpha$ , observe os gráficos das Figuras 16 e 17.

O parâmetro  $\beta$ , considerando a teoria da colisão e do gás ideal, pode ser interpretado como sendo o indicador da distribuição das energias cinéticas ou velocidades das partículas. Para  $\beta = 1$ , a energia das partículas se distribuem segundo uma distribuição exponencial de parâmetro  $\alpha$ . Para  $\beta$  muito grande a distribuição das energias das partículas se distribuem uniformemente.

Assim, considerando o mercado acionário, em analogia com o gás ideal, o parâmetro  $\beta$  apontará a distribuição de probabilidade que descreve quão provável é uma ação ter seu preço alterado, em outras palavras quão provável é o retorno dos acionistas no mercado.

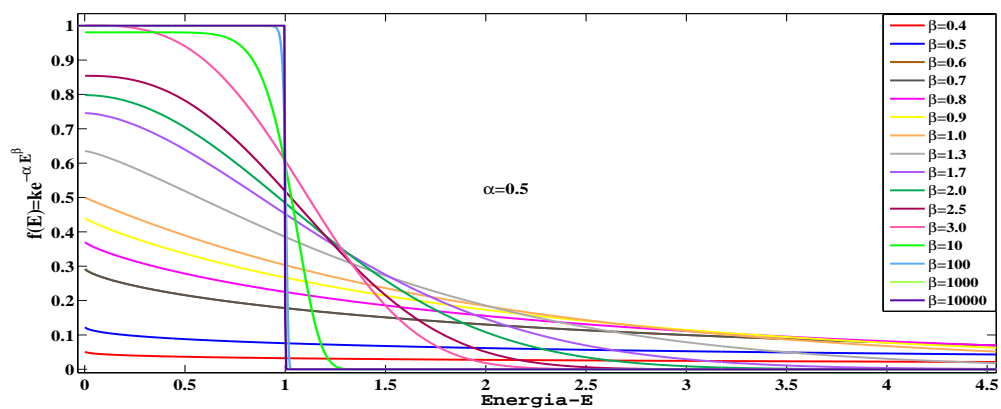


Figura 10 – gráfico da fdp  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  para diferentes valores de  $\beta$  e  $\alpha = 0.5$

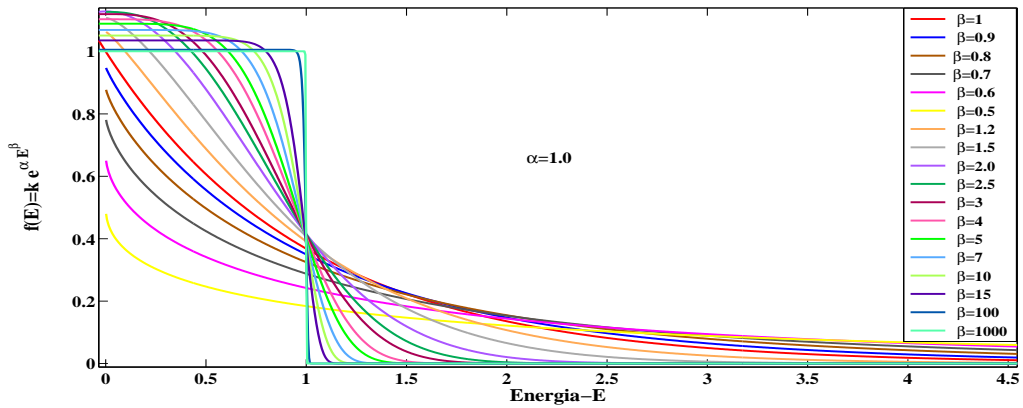


Figura 11 – gráfico da fdp  $f(E) = k e^{-\alpha E^\beta}$  para diferentes valores de  $\beta$  e  $\alpha = 1.0$

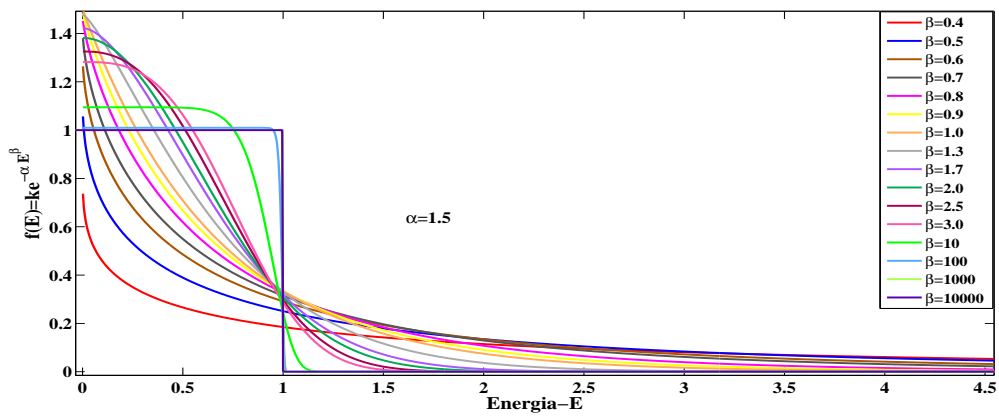


Figura 12 – gráfico da fdp  $f(E) = k e^{-\alpha E^\beta}$  para diferentes valores de  $\beta$  e  $\alpha = 1.5$

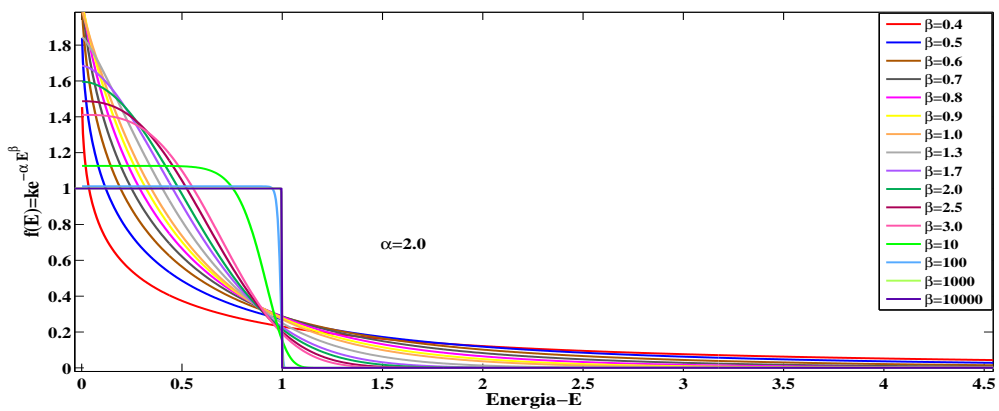


Figura 13 – gráfico da fdp  $f(E) = k e^{-\alpha E^\beta}$  para diferentes valores de  $\beta$  e  $\alpha = 2$

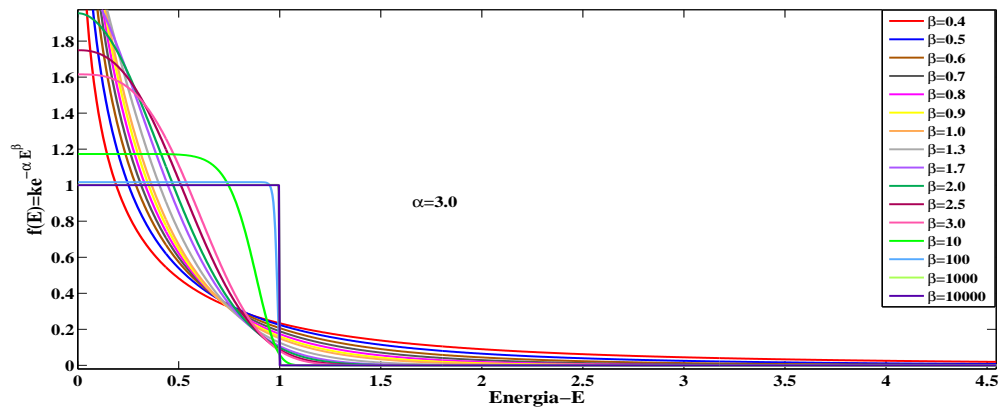


Figura 14 – gráfico da fdp  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  para diferentes valores de  $\beta$  e  $\alpha = 3$

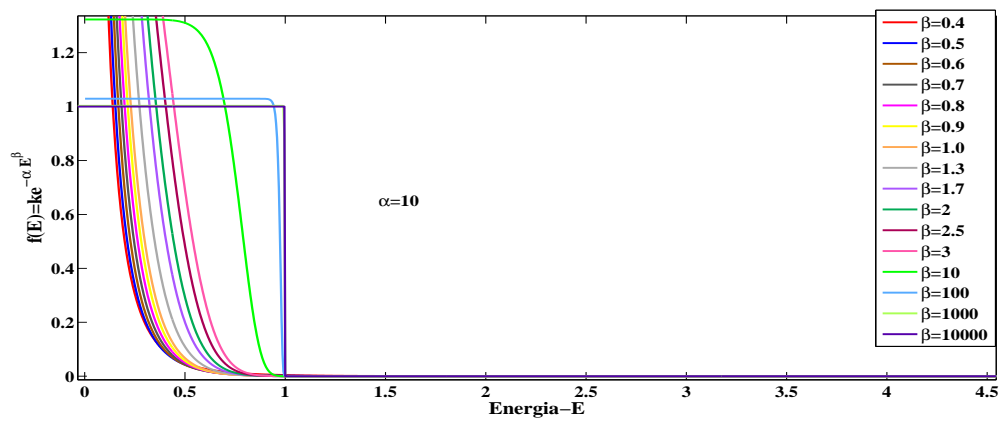


Figura 15 – gráfico da fdp  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  para diferentes valores de  $\beta$  e  $\alpha = 10$

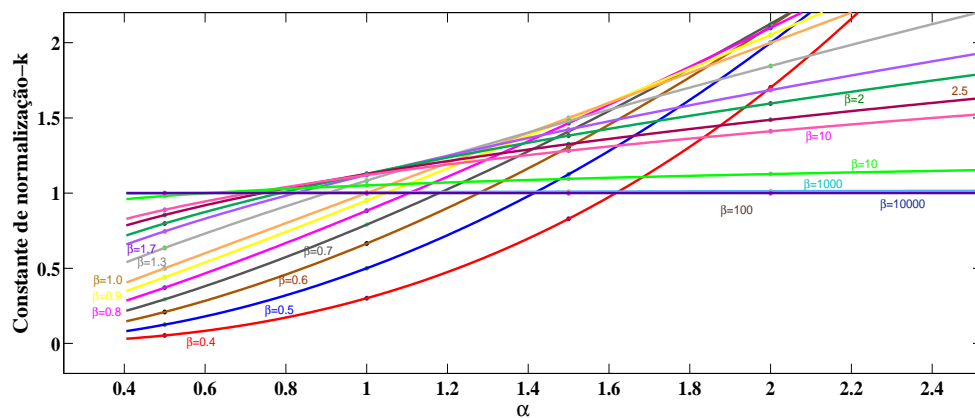


Figura 16 – gráfico da constante de normalização  $k$ , do modelo fdp  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$ , em função de  $\alpha$  para diferentes valores de  $\beta$ .

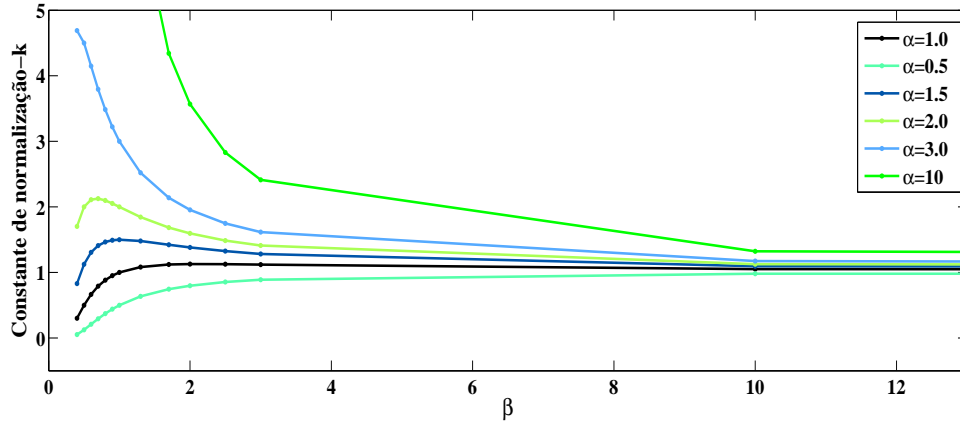


Figura 17 – gráfico da constante de normalização  $k$ , do modelo fdp  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$ , em função de  $\beta$  para diferentes valores de  $\alpha$ .

#### 4.2.5 Construção da distribuição proposta a partir de princípios estatísticos teóricos

A função densidade de probabilidade  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  aplicada aos índices mundiais das bolsas de valores foi construída de forma experimental, contudo existe outra maneira de se construir a mesma função de densidade. Para isto construímos uma classe de distribuição de probabilidade [Richter 2016, Chu e Kardar 2016, Katzur e Kamps 2016] descrita pela Equação (4.5) e (4.6), e, a partir dessa classe, tomando  $\lambda = 1$ , gerou-se a fdp  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$ , a classe denominada de *distribuição exponencial expandida exponenciada* ou *distribuição exponencial expandida generalizada*, esta classe está descrita na Equação (4.5)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ [G(x)]^\lambda, & x \geq 0, \lambda > 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

em que

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x ke^{-\alpha t^\beta} dt, & \alpha > 0, \beta > 0, \lambda > 0 \text{ e } x \geq 0 \end{cases}$$

Reescrevendo a Equação 4.5, obtém-se

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \left[ \int_0^x ke^{-\alpha t^\beta} dt \right]^\lambda, & \alpha > 0, \beta > 0 \text{ e } x \geq 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Observe que  $F(x)$  e  $G(x)$  são FDA's.

**Demonstração:**

$$(i) \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = 0.$$

Por definição  $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = G(-\infty) = 0$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x k e^{-\alpha t^\beta} dt,$$

Mas  $k$  é uma constante normalizadora dada por

$$k = \frac{1}{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t^\beta} dt}$$

então,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x k e^{-\alpha t^\beta} dt = k \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-\alpha t^\beta} dt = \frac{1}{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t^\beta} dt} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t^\beta} dt = 1$$

$$(iii) \text{ Se } x_1 \leq x_2, \text{ então } G(x_1) \leq G(x_2)$$

$$G(x_1) = \int_0^{x_1} k e^{-\alpha t^\beta} dt$$

$$G(x_2) = \int_0^{x_2} k e^{-\alpha t^\beta} dt$$

Continuando,

$$G(x_1) \leq G(x_2)$$

$$\int_0^{x_1} k e^{-\alpha t^\beta} dt \leq \int_0^{x_2} k e^{-\alpha t^\beta} dt,$$

como  $x_1 \leq x_2$ , segue que

$$G(x_1) \leq G(x_2) = \int_0^{x_2} k e^{-\alpha t^\beta} dt = \int_0^{x_1} k e^{-\alpha t^\beta} dt + \int_{x_1}^{x_2} k e^{-\alpha t^\beta} dt,$$

em que

$$\int_{x_1}^{x_2} k e^{-\alpha t^\beta} dt \geq 0$$

logo, se  $x_1 \leq x_2$ , então  $G(x_1) \leq G(x_2)$ .

$$(iv) \lim_{x \rightarrow x_0^+} G(x) = G(x_0).$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \int_0^x k e^{-\alpha t^\beta} dt$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \int_0^x k e^{-\alpha t^\beta} dt$$

$$\int_0^{x_0} k e^{-\alpha t^\beta} dt = G(x_0)$$

Para  $F(x)$

- (i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$   
 Por definição  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [G(x)]^\lambda = \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) \right]^\lambda = 1,$$

- (iii) Se  $x_1 \leq x_2$ , então  $F(x_1) \leq F(x_2)$

Tem-se que,

$$F(x_1) = [G(x_1)]^\lambda = \left[ \int_0^{x_1} ke^{-\alpha t^\beta} dt \right]^\lambda$$

$$F(x_2) = [G(x_2)]^\lambda = \left[ \int_0^{x_2} ke^{-\alpha t^\beta} dt \right]^\lambda$$

Daí,

$$F(x_1) \leq F(x_2)$$

$$\left[ \int_0^{x_1} ke^{-\alpha t^\beta} dt \right]^\lambda \leq \left[ \int_0^{x_2} ke^{-\alpha t^\beta} dt \right]^\lambda$$

$$= \left[ \int_0^{x_1} ke^{-\alpha t^\beta} dt + \int_{x_1}^{x_2} ke^{-\alpha t^\beta} dt \right]^\lambda,$$

Mas

$$\int_{x_1}^{x_2} ke^{-\alpha t^\beta} dt \geq 0,$$

o que prova a desigualdade.

- (iv)  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} [G(x)]^\lambda = \left[ \lim_{x \rightarrow x_0^+} G(x) \right]^\lambda = \left[ \lim_{x \rightarrow x_0^+} \int_0^x ke^{-\alpha t^\beta} dt \right]^\lambda$$

$$= \left[ \int_0^{\lim_{x \rightarrow x_0^+} x} ke^{-\alpha t^\beta} dt \right]^\lambda = \left[ \int_0^{x_0} ke^{-\alpha t^\beta} dt \right]^\lambda = [G(x_0)]^\lambda = F(x_0)$$

Derivando  $F(x)$ , obtém-se a fdp,  $f(x)$ , da variável  $X$ , Equação 4.7,

$$F'(x) = f(x) = \lambda [ke^{-\alpha x^\beta}] \left[ \int_0^x ke^{-\alpha t^\beta} dt \right]^{\lambda-1} \quad (4.7)$$



Para  $\lambda = 1$ , a fdp se reduz a Equação 4.8

$$f(x) = ke^{-\alpha x^\beta} \quad (4.8)$$

sendo  $k$  uma constante normalizadora e  $\alpha$  e  $\beta$  parâmetros reais positivos. Na Figura 18 está ilustrado alguns gráficos de  $f(x)$  para valores de  $\alpha$  e  $\beta$  diversos.

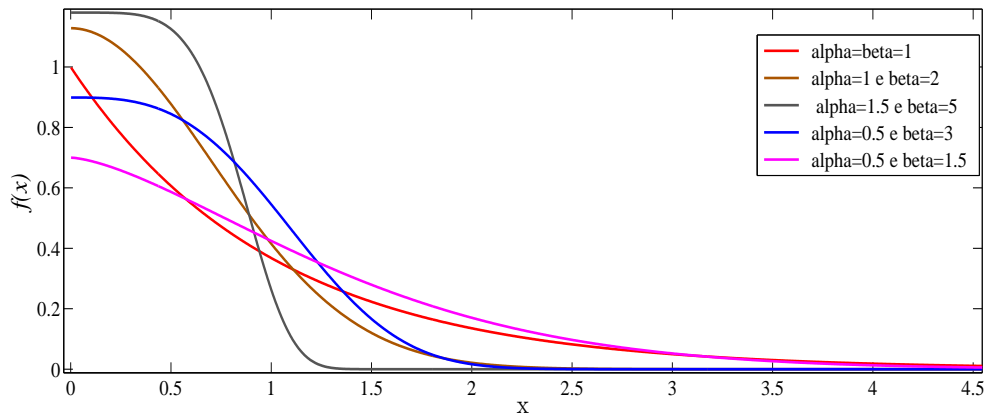


Figura 18 – gráfico da fdp  $f(x)$  para diferentes valores de  $\alpha$  e  $\beta$

#### 4.2.5.1 Propriedades estatísticas para a classe exponencial expandida generalizada

Agora será calculado algumas propriedades estatísticas para a classe exponencial expandida generalizada, tais como os momentos de ordem  $r = 1, 2, 3, \dots$  da variável  $X$ , definido por  $E(X^r)$ , desde que essa quantidade exista, o momento central de ordem  $r$ , definido por  $E[(X - \mu)^r]$ , caso essa quantidade exista e  $E(X) = \mu < \infty$ , e o momento absoluto de ordem  $r$  da variável  $X$  definido por  $E(|X|^r)$ , função geradora de momentos e função característica, entre outras propriedades.

Para o caso abordado, tem-se

(i) Momento de ordem  $r$

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ x^r \lambda [ke^{-\alpha x^\beta}] \left[ \int_0^x ke^{-\alpha t^\beta} dt \right]^{\lambda-1} \right\} dx$$

$$E(X^r) = \lambda k^\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ x^r \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \alpha^n x^{\beta n} \right] \left[ \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \alpha^n x^{\beta n} \right) dt \right]^{\lambda-1} \right\} dx$$

Para  $r = 1$ , em particular, tem-se o valor esperado da variável  $X$ , e conseqüentemente a média da distribuição, isto é,  $\mu = E(X^1)$

(ii) Momento central de ordem  $r$

$$E[(X - \mu)^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^r f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ (x - \mu)^r \lambda [ke^{-\alpha x^\beta}] \left[ \int_0^x ke^{-\alpha t^\beta} dt \right]^{\lambda-1} \right\} dx$$

$$E[(X - \mu)^r] = \lambda k^\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ (x - \mu)^r \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \alpha^n x^{\beta n} \right] \left[ \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \alpha^n x^{\beta n} \right) dt \right]^{\lambda-1} \right\} dx$$

Para  $r = 2$ , obtém-se o momento central de ordem 2, isto é a variância de  $X$

$$Var(X) = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$$

A raiz quadrada da variância é o desvio-padrão ( $\sqrt{\sigma^2} = \sigma$ ).

O coeficiente geral para a classe exponencial expandida generalizada é dado por

$$C_r = \frac{E[(X - \mu)^r]}{\sigma^r}$$

Se  $r = 3$ , então se tem o coeficiente de assimetria. Se  $r = 4$ , tem-se o coeficiente de curtose.

(iii) Momento absoluto de ordem  $r$

$$E(|X|^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ |x|^r \lambda [ke^{-\alpha x^\beta}] \left[ \int_0^x ke^{-\alpha t^\beta} dt \right]^{\lambda-1} \right\} dx$$

$$E(|X|^r) = \lambda k^\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ |x|^r \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \alpha^n x^{\beta n} \right] \left[ \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \alpha^n x^{\beta n} \right) dt \right]^{\lambda-1} \right\} dx$$

(iv) Função geradora de momentos

$$M_X(t_1) = E(e^{t_1 X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1 x} f(x) dx$$

$$M_X(t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ e^{t_1 x} \lambda [ke^{-\alpha x^\beta}] \left[ \int_0^x ke^{-\alpha t^\beta} dt \right]^{\lambda-1} \right\} dx$$

$$M_X(t_1) = \lambda k^\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ e^{t_1 x} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \alpha^n x^{\beta n} \right] \left[ \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \alpha^n x^{\beta n} \right) dt \right]^{\lambda-1} \right\} dx$$

(v) Função característica

$$\varphi_X(t) = E(e^{it_1 X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it_1 x} f(x) dx$$

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ e^{it_1 x} \lambda [ke^{-\alpha x^\beta}] \left[ \int_0^x ke^{-\alpha t^\beta} dt \right]^{\lambda-1} \right\} dx$$

$$\varphi_X(t) = \lambda k^\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ e^{it_1 x} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \alpha^n x^{\beta n} \right] \left[ \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \alpha^n x^{\beta n} \right) dt \right]^{\lambda-1} \right\} dx$$

## 5 Conclusão

Neste capítulo são apresentados os desfechos dos resultados do estudo dos índices das bolsas de valores mundiais e os trabalhos a serem desenvolvidos futuramente.

Os mercados de ações são de fundamental importância para a economia de um país, cada país possui pelo menos um índice de bolsa de valores, por exemplo, no Brasil temos o Ibovespa, nos Estados Unidos a NYSE, Nasdaq, etc. Os índices dos mercados acionistas servem como um termômetro que medem as oscilações dos valores das ações e também da própria economia. Por essas e outras razões os mercados de ações são observados por pesquisadores de vários países afim de estudar, investigar e analisar tais mercados.

Nesta tese tivemos o objetivo principal de construir um modelo de probabilidade, baseado na taxa de retorno, que modelasse os índices das bolsas de valores dos países Brasil (Índice da Bolsa de Valores de São Paulo-Ibovespa), Malásia (*Kuala Lumpur Stock Exchange-KLSE*), Hong Kong (*Hang Seng*), México (Índice de Preços e Cotações-IPC), Singapura (*Straits Times Index-STI*), Espanha (*Iberia Index-IBEX 35*), França (*Cotation Assistée en Continu-CAC 40*), Alemanha (*DAX 30*), Japão (*Nikkei 225*), Inglaterra (*FTSE 100*), Estados Unidos da América (*Dow Jones Industrial Average-DJIA*, *National Association of Securities Dealers Automated Quotations-NASDAQ* e *S&P500*), Suíça (*Swiss Market Index-SMI*) e Austrália (*Austrian Traded Index-ATX*). Tal objetivo foi alcançado e propomos o modelo de densidade de probabilidade  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$ .

Inferiu-se das análises feitas apresentadas no capítulo 4, resultado e discussão, que o modelo proposto  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  explicou melhor a variabilidade dos retornos dos índices das bolsas de valores que a distribuição exponencial e a lei de potência para todos os índices. Mas quando considerado os valores extremos é preferível a lei de potência a exponencial ou ao modelo proposto.

O parâmetro  $\alpha$  do modelo  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  está relacionado inversamente com a volatilidade no mercado acionário, de forma que quanto maior o valor de  $\alpha$  menor a volatilidade dos mercados de ações. Enquanto o parâmetro  $\beta$  está relacionado com a forma da distribuição e com a uniformidade dos mercados. Assim, Quanto maior for o parâmetro  $\beta$  mais uniforme é o mercado de ações.

Ao derivar a função  $f(E) = ke^{-\alpha E^\beta}$  obtém-se  $f'(E) = W_1(E) = -\alpha\beta E^{\beta-1}ke^{-\alpha E^\beta}$ , a taxa de variação por unidade de energia de  $f(E)$ , e por meio de  $W_1(E)$  é possível

modelar a taxa de retorno  $W(E) = -\alpha\beta E^{\beta-1}$  em função da energia  $E$ . Também, por meio de  $W_1(E)$  é possível identificar o ponto de equilíbrio no mercado de ações. Deste ponto de equilíbrio inferi-se que o investidor está em uma situação neutra no mercado, pois não teve ganho, mas também não teve perdas.

## 5.1 Contribuição e trabalhos futuros

Este trabalho tem sua contribuição para entendermos a dinâmica dos índices das bolsas de valores dos mercados mundiais baseada na teoria cinética do gás ideal e da colisão de partículas. Também, foi contribuído com a teoria das probabilidades, porque foi apresentado um modelo de função densidade de probabilidade para ajustar tais índices. Através do modelo proposto é possível verificar que a taxa de retorno é função da energia do sistema, e não uma constante.

Diante do trabalho exposto, ainda tem outros trabalhos futuros que pode ser explorado:

1. Comparar a dinâmica do gás real com o mercado financeiro;
2. Comparar a dinâmica do gás de Fermi com o mercado financeiro;
3. Fazer as comparações dos ajustes utilizando outros algoritmos como o Levenberg-Marquardt, Gauss-Newton entre outros;
4. Fazer a análise feita nesta tese para outros períodos de tempo;
5. Usar a classe gerada nesta tese para obter outras distribuições de probabilidades que ajuste os índices das bolsas de valores;
6. Gerar novas classes de probabilidades afim de obter outras distribuições para ajuste dos índices;
7. Testar os modelos gerados nesta tese para outros índices.

## Referências Bibliográficas

- ABDULHADI, D. A.; SHETTY, S.; ALSHAMALI, M. Stock market behavior: A fractal analysis of saudi stock exchange. **International Journal of Business**, Premier Publishing, Inc., v. 20, n. 1, p. 64, 2015.
- ABIAD, A.; BLUEDORN, J.; GUAJARDO, J.; TOPALOVA, P. The rising resilience of emerging market and developing economies. **World Development**, Elsevier, v. 72, p. 1–26, 2015.
- ANDERSEN, T. G.; BOLLERSLEV, T.; DIEBOLD, F. X.; LABYS, P. The distribution of realized exchange rate volatility. **Journal of the American statistical association**, Taylor & Francis, v. 96, n. 453, p. 42–55, 2001.
- ARGHIR, M.; ALSAYED, A.; NICOLAS, D. The finite volume solution of the reynolds equation of lubrication with film discontinuities. **International journal of mechanical sciences**, Elsevier, v. 44, n. 10, p. 2119–2132, 2002.
- ASAI, M.; MCALEER, M.; MEDEIROS, M. Modelling and forecasting noisy realized volatility. **Computational Statistics and Data Analysis**, v. 56, p. 217 – 230, 2012.
- BACHELIER, L. **Théorie de la spéculation**. [S.l.]: Gauthier-Villars, 1900.
- BAGNATO, L.; MUNIZ, S.; BAGNATO, V. Verificação experimental da lei dos gases usando um balao de borracha submerso. **Rev. Bras. Ens. Fis**, v. 17, n. 1, p. 104–106, 1995.
- BARLOW, R. E.; PROSCHAN, F. **Statistical theory of reliability and life testing: probability models**. [S.l.], 1975.
- BEYSENS, D.; CHATAIN, D.; EVESQUE, P.; GARRABOS, Y. High-frequency driven capillary flows speed up the gas-liquid phase transition in zero-gravity conditions. **Physical review letters**, APS, v. 95, n. 3, p. 034502, 2005.
- BHADURI, R. K.; DIJK, W. van. Semiclassical and quantum description of an ideal bose gas in a uniform gravitational field. **Physics Letters A**, Elsevier, 2016.
- BORDIGNON, S.; CAPORIN, M.; LISI, F. Generalised long-memory garch models for intra-daily volatility. **Computational Statistics and Data Analysis**, v. 51, p. 5900–5912, 2007.
- BRUNETTO, R. S.; OLIVEIRA, A. C.; JÚNIOR, M. R. F. Equipamento experimental para determinação de dados pvt para sistemas gasosos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 27, n. 3, p. 363–367, 2005.

- CABRERA-PANIAGUA, D.; CUBILLOS, C.; VICARI, R.; URRÁ, E. Decision-making system for stock exchange market using artificial emotions. **Expert Systems with Applications**, Elsevier, v. 42, n. 20, p. 7070–7083, 2015.
- CAMPBELL, C. T.; SPROWL, L. H.; ÁRNADÓTTIR, L. Equilibrium constants and rate constants for adsorbates: Two-dimensional (2d) ideal gas, 2d ideal lattice gas, and ideal hindered translator models. **The Journal of Physical Chemistry C**, ACS Publications, v. 120, n. 19, p. 10283–10297, 2016.
- CASELLA, G.; BERGER, R. L. **Statistical inference**. [S.l.]: Duxbury Pacific Grove, CA, 2002. v. 2.
- CHALMERS, A. Viewing past science from the point of view of present science, thereby illuminating both: Philosophy versus experiment in the work of robert boyle. **Studies in History and Philosophy of Science Part A**, Elsevier, v. 55, p. 27–35, 2016.
- CHATTERJEE, A.; CHAKRABARTI, B. K. Ideal-gas-like market models with savings: Quenched and annealed cases. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 382(1), p. 36–41, 2007.
- CHU, S.; KARDAR, M. Probability distributions for directed polymers in random media with correlated noise. **arXiv preprint arXiv:1605.04298**, 2016.
- CONT, R.; POTTERS, M.; BOUCHAUD, J.-P. Scaling in stock market data: stable laws and beyond. In: **Scale invariance and beyond**. [S.l.]: Springer, 1997. p. 75–85.
- CUNHA, T. M.; CASTRO, F. P. de; BARRETO, P. L. M.; BENEDET, H. D.; PRUDÊNCIO, E. S. Avaliação físico-química, microbiológica e reológica de bebida láctea e leite fermentado adicionados de probióticos. **Semina: Ciências Agrárias**, v. 29, n. 1, p. 103–116, 2008.
- CUSTOM, G. I. The quarterly review of economics and finance. Citeseer, v. 59, p. 1–14, 2016.
- DEB, K.; AGRAWAL, R. B. Simulated binary crossover for continuous search space. **Complex systems**, [Champaign, IL, USA: Complex Systems Publications, Inc., c1987-, v. 9, n. 2, p. 115–148, 1995.
- DRAGULESCU, A.; YAKOVENKO, V. M. Statistical mechanics of money. **The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems**, Springer, v. 17, n. 4, p. 723–729, 2000.
- DRĂGULESCU, A.; YAKOVENKO, V. M. Evidence for the exponential distribution of income in the usa. **The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems**, Springer, v. 20, n. 4, p. 585–589, 2001.
- DRAGULESCU, A.; YAKOVENKO, V. M. Exponential and power-law probability distributions of wealth and income in the united kingdom and the united states. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 299, p. 213–221, 2001.

- DRĂGULESCU, A.; YAKOVENKO, V. M. Exponential and power-law probability distributions of wealth and income in the united kingdom and the united states. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 299, n. 1, p. 213–221, 2001.
- EBERLEIN, E.; KELLER, U.; PRAUSE, K. New insights into smile, mispricing, and value at risk: The hyperbolic model. **The Journal of Business**, v. 71, n. 3, p. 371–405, July 1998.
- EXTRAND, C. W. Origins of wetting. **Langmuir**, ACS Publications, 2016.
- EZZAT, M. A.; KARAMANY, A. S. E.; EL-BARY, A. Electro-thermoelasticity theory with memory-dependent derivative heat transfer. **International Journal of Engineering Science**, Elsevier, v. 99, p. 22–38, 2016.
- FAMA, E. F. Problems with fitting to the power-law distribution. **Journal of Business**, v. 38, p. 34–105, 1965.
- FENECH, K.; DYKE, P.; PEPPLER, T.; LINGHAM, M.; HOINKA, S.; HU, H.; VALE, C. Thermodynamics of an attractive 2d fermi gas. **Physical review letters**, APS, v. 116, n. 4, p. 045302, 2016.
- FIGUEIREDO, A.; GLERIA, I.; MATSUSHITA, R.; SILVA, S. D. Autocorrelation as a source of truncated lévy flights in foreign exchange rates. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 323, p. 601–625, 2003.
- FINETTI, B. D. Theory of probability. a critical introductory treatment. 1979.
- FOUVRY, J.-B.; CHAVANIS, P.-H.; PICHON, C. Functional integral approach to the kinetic theory of inhomogeneous systems. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 459, p. 117–128, 2016.
- GABAIX, X.; GOPIKRISHNAN, P.; PLEROU, V.; STANLEY, H. E. A theory of power-law distributions in financial market fluctuations. **Nature**, v. 423, p. 267–270, 2003.
- GABAIXA, X.; GOPIKRISHNANB, P.; PLEROUB, V.; STANLEY, E. A unified econophysics explanation for the power-law exponents of stock market activity. **Physica A**, v. 382, p. 81–88, 2007.
- GAS Properties. Disponível em: < [http : //phet.colorado.edu/en/simulation/gas – properties](http://phet.colorado.edu/en/simulation/gas-properties) >. Acessado em: 26jun.2015.
- GHOSH, A.; CHATTERJEE, A.; INOUE, J.-i.; CHAKRABARTI, B. K. Inequality measures in kinetic exchange models of wealth distributions. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 451, p. 465–474, 2016.
- GLERIA, I.; MATSUSHITA, R.; SILVA, S. D. Scaling power laws in the sao paulo stock exchange. **Economics Bulletin**, v. 7, n. 3, p. 1–12, 2002.

GLERIA, I.; MATSUSHITA, R.; SILVA, S. d. Sistemas complexos, criticalidade e leis de potência. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 26, n. 2, p. 99–108, 2004.

GOLDSTEIN, M.; MORRIS, S.; YEN, G. Problems with fitting to the power-law distribution. **The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems**, v. 41(2), p. 255–258, 2004.

GOPIKRISHNAN, P.; PLEROU, V.; AMARAL, L. A. N.; MEYER, M.; STANLEY, H. E. Scaling of the distribution of fluctuations of financial market indices. **Physical Review E**, APS, v. 60, n. 5, p. 5305, 1999.

GRIFFITHS, R. Lancaster distributions and markov chains with multivariate poisson–charlier, meixner and hermite–chebycheff polynomial eigenfunctions. **Journal of Approximation Theory**, Elsevier, v. 207, p. 139–164, 2016.

GU, G.-F.; ZHOU, W.-X. Detrending moving average algorithm for multifractals. **PHYSICAL REVIEW E**, v. 82, p. 011136–1 – 011136–8, 2010.

HILL, T.; GREEN, P.; CAMMARANO, A.; NEILD, S. Fast bayesian identification of a class of elastic weakly nonlinear systems using backbone curves. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 360, p. 156–170, 2016.

KATZUR, A.; KAMPS, U. Classification into kullback–leibler balls in exponential families. **Journal of Multivariate Analysis**, Elsevier, v. 150, p. 75–90, 2016.

KIM, K.; YOON, S.-M. Dynamical behavior of continuous tick data in futures exchange market. **Fractals**, World Scientific, v. 11, n. 02, p. 131–136, 2003.

LAHERRERE, J.; SORNETTE, D. Stretched exponential distributions in nature and economy: “fat tails”? with characteristic scales. **The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems**, Springer, v. 2, n. 4, p. 525–539, 1998.

LEMES, N. H.; OLIVEIRA, J. M.; BRAGA, J. P. Cálculo do volume na equação de van der waals pelo método de cardano. **Quim. Nova**, SciELO Brasil, v. 33, n. 6, p. 1325–1329, 2010.

LESCHKE, H.; SOBOLEV, A. V.; SPITZER, W. Large-scale behaviour of local and entanglement entropy of the free fermi gas at any temperature in memory of enrico fermi (1901–1954) on the occasion of the birthday of the ideal fermi gas. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, IOP Publishing, v. 49, n. 30, p. 30LT04, 2016.

LIMA, N. F. de. **Modelagem de mercados inspirada em gases ideais e teoria da colisão**. Dissertação (mestrado) — Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), Programa de Pós-Graduação em biometria e estatística aplicada, Recife - PE, 2012.

LIU, Y.; GOPIKRISHNAN, P.; STANLEY, H. E. et al. Statistical properties of the volatility of price fluctuations. **Physical Review E**, APS, v. 60, n. 2, p. 1390, 1999.

LOEB, L. B. **The kinetic theory of gases**. [S.l.]: Courier Corporation, 2004.



LONGIN, F. M. The asymptotic distribution of extreme stock market returns. **The Journal of Business**, v. 69, n. 3, p. 383–408, Jul 1996.

LUCIA, U. Second law considerations on the third law: From boltzmann and loschmidt paradox to non equilibrium temperature. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 444, p. 121–128, 2016.

MALKIEL, B. G. **A Random Walk Down Wall Street, Completely Revised and Updated Edition**. 2003.

MANDELBROT, B. The variation of certain speculative prices. **The Journal of Business**, v. 36, p. 394–419, 1963.

MANTEGNA, R. N. Levy walks and enhanced diffusion in milan stock exchange. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 179, n. 2, p. 232–242, 1991.

MANTEGNA, R. N.; STANLEY, H. E. Scaling behaviour in the dynamics of an economic index. **NATURE**, v. 376, p. 46–49, 1995.

MANTEGNA, R. N.; STANLEY, H. E. **An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance**. [S.l.]: Cambridge University Press USA, 2000. New York.

MATIA, K.; PAL, M.; SALUNKAY, H.; STANLEY, H. E. Scale-dependent price fluctuation: Analysis of the indian stock market. **EUROPHYSICS LETTERS**, v. 66, n. 6, p. 909–914, 2004.

MAUEL, M. E. et al. Announcement: The 2015 james clerk maxwell prize for plasma physics. **Physics of Plasmas (1994-present)**, AIP Publishing, v. 23, n. 5, p. 055401, 2016.

MCCAULEY, J. L.; GUNARATNE, G. H. An empirical model of volatility of returns and option pricing. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 329, p. 178–198, 2003.

MILLER, I.; FREUND, J. E.; JOHNSON, R. A. **Probability and statistics for engineers**. [S.l.]: Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1965. v. 1110.

MILLS, T. C. **The Econometric Modelling of Financial Time Series**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003.

MORENO-LÁZARO, J. The stock exchange, the state and economic development in mexico, 1932-1976. **Revista de Historia Económica/Journal of Iberian and Latin American Economic History (New Series)**, Cambridge Univ Press, v. 33, n. 02, p. 321–350, 2015.

MÜLLER, U. A.; DACOROGNA, M. M.; OLSEN, R. B.; PICTET, O. V.; SCHWARZ, M.; MORGENEGG, C. Statistical study of foreign exchange rates, empirical evidence of a price change scaling law, and intraday analysis. **Journal of Banking & Finance**, Elsevier, v. 14, n. 6, p. 1189–1208, 1990.

- MURIALDO, M.; STADIE, N. P.; AHN, C. C.; FULTZ, B. A generalized law of corresponding states for the physisorption of classical gases with cooperative adsorbate-adsorbate interactions. **The Journal of Physical Chemistry C**, ACS Publications, 2016.
- NETO, P. S. de M.; CAVALCANTE, G. D.; MADEIRO, F.; FERREIRA, T. A. E. An ideal gas approach to classify countries using financial indices. **Physica A**, v. 392, p. 177 – 183, 2013.
- NETO, P. S. G. d. M.; FERREIRA, T. A. E. et al. **Um Método para análise de mercados de ações utilizando séries temporais de índices financeiros**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2012.
- NETO, P. S. G. de M.; SILVA, D. A.; FERREIRA, T. A. E.; CAVALCANTE, G. D. Market volatility modeling for short time window. **Physica A**, v. 390, p. 3444 – 3453, 2011.
- NIAZ, M. A rational reconstruction of the kinetic molecular theory of gases based on history and philosophy of science and its implications for chemistry textbooks. **Instructional Science**, Springer, v. 28, n. 1, p. 23–50, 2000.
- NOVA, N. V.; BACCHI, O.; REICHARDT, K. Potencial da água no sistema solo-planta estimado através da fase de vapor. **Scientia Agricola**, SciELO Brasil, v. 53, n. 1, p. 194–194, 1996.
- PAPOULIS, A.; PILLAI, S. U. **Probability, random variables, and stochastic processes**. [S.l.]: Tata McGraw-Hill Education, 2002.
- PLEROU, V.; GOPIKRISHNAN, P.; GABAIX, X.; STANLEY, H. E. On the origin of power-law fluctuations in stock prices. **Quantitative Finance**, v. 4, p. C11–C15, 2004.
- PLEROU, V.; GOPIKRISHNAN, P.; ROSENOW, B.; AMARAL, L. A.; STANLEY, H. E. Econophysics: financial time series from a statistical physics point of view. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 279, n. 1, p. 443–456, 2000.
- PODOBNIK, B.; HORVATIC, D.; PETERSEN, A. M.; STANLEY, H. E. Quantitative relations between risk, return and firm size. **Europhysics letters**, v. 85, p. 500003, March 2009.
- PRAVEEN, K.; RAJINIGANTH, M.; ARUN, A.; SAHOO, P.; MURTY, S. S. A novel technique towards deployment of hydrostatic pressure based level sensor in nuclear fuel reprocessing facility. **Review of Scientific Instruments**, AIP Publishing, v. 87, n. 2, p. 025111, 2016.
- PUEYO, S.; FEARNSIDE, P. M. Emissões de gases de efeito estufa dos reservatórios de hidrelétricas: Implicações de uma lei de potência. **Oecologia Australis**, v. 15, n. 2, p. 114–127, 2011.

QUEIROS, S. M. D.; ANTENEODO, C.; TSALLIS, C. Power-law distributions in economics: a nonextensive statistical approach. **Proceedings of SPIE**, v. 5848, p. 151, 2005.

RAY, A.; MAJUMDER, S. K. Concavity of maximum entropy through modified burg's entropy subject to its prescribed mean. **International Journal of Mathematics in Operational Research**, Inderscience Publishers (IEL), v. 8, n. 4, p. 393–405, 2016.

RICHTER, W.-D. Exact inference on scaling parameters in norm and antinorm contoured sample distributions. **Journal of Statistical Distributions and Applications**, Springer Berlin Heidelberg, v. 3, n. 1, p. 1, 2016.

SABIN, G. P.; PRESTES, O. D.; MARTINS, M. L.; ADAIME, M. B.; ZANELLA, R. Aumento da resposta analítica por meio da otimização do sistema de injeção sem divisão de fluxo em cromatografia gasosa empregando a lei dos gases ideais. **Quim. Nova**, SciELO Brasil, v. 34, n. 3, p. 414–418, 2011.

SALINAS, S. R. **Introdução a Física Estatística Vol. 09**. [S.l.]: Edusp, 1997.

SELCUK, F. Financial earthquakes, aftershocks and scaling in emerging stock markets. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 333, p. 306–313, 2004.

SHAKIL, M.; KIBRIA, B. G.; SINGH, J. N. A new family of distributions based on the generalized pearson differential equation with some applications. **Austrian Journal of Statistics**, v. 39, n. 3, p. 259–278, 2016.

SHEN, L.; YANG, W. Quantum mechanics/molecular mechanics method combined with hybrid all-atom and coarse-grained model: Theory and application on redox potential calculations. **Journal of chemical theory and computation**, ACS Publications, v. 12, n. 4, p. 2017–2027, 2016.

SILVA, A. C.; PRANGE, R. E.; YAKOVENKO, V. M. Exponential distribution of financial returns at mesoscopic time lags: a new stylized fact. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 344, p. 227–235, 2004.

SILVA, A. C.; YAKOVENKO, V. M. Temporal evolution of the thermal and superthermal income classes in the usa during 1983 to 2001. **Europhysics Letters**, v. 69(2), p. 3004, 2005.

SILVA, A. C.; YAKOVENKO, V. M. Stochastic volatility of financial markets as the fluctuating rate of trading: An empirical study. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 382, p. 278–295, 2007.

SILVA, M. I.; GUIMARÃES, E. C.; TAVARES, M. Previsão da temperatura média mensal de uberlândia, mg, com modelos de séries temporais. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, SciELO Brasil, v. 12, n. 5, p. 480–485, 2008.

SITTE, R.; SITTE, J. Neural networks approach to the random walk dilemma of financial time series. **Applied Intelligence**, v. 16(3), p. 163–171, 2002.

SKRDLA, P. J. Crystallizations, solid - state phase transformations and dissolution behavior explained by dispersive kinetic models based on a maxwell - boltzmann distribution of activation energies: Theory, applications, and practical limitations. **J. Phys. Chem. A**, v. 113, p. 9329–9336, 2009.

SKRDLA, P. J.; ROBERTSON, R. T. Semiempirical equations for modeling solid - state kinetics based on a maxwell - boltzmann distribution of activation energies: Applications to a polymorphic transformation under crystallization slurry conditions and to the thermal decomposition of agmno<sub>4</sub> crystals. **J. Phys. Chem. B**, v. 109, n. 21, p. 10611–10619, 2005.

STANLEY, H. E.; AFANASYEV, V.; AMARAL, L.; BULDYREV, S.; GOLDBERGER, A.; HAVLIN, S.; LESCHHORN, H.; MAASS, P.; MANTEGNA, R. N.; PENG, C.-K. et al. Anomalous fluctuations in the dynamics of complex systems: from dna and physiology to econophysics. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 224, n. 1, p. 302–321, 1996.

TAKAYASU, H.; TAKAYASU, M.; OKAZAKI, M. P.; MARUMO, K.; SHIMIZU, T. Fractal properties in economics. **arXiv preprint cond-mat/0008057**, 2000.

THOMSON, W. On an absolute thermometric scale founded on carnot's theory of the motive power of heat and calculated from regnaut's observations. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 29, n. 4, p. 487–490, 2007.

WANG, F.; YAMASAKI, K.; HAVLIN, S.; STANLEY, H. E. Return intervals approach to financial fluctuations. In: **Complex Sciences**. [S.l.]: Springer, 2009. p. 3–27.

WANG, Y.; LI, X.; DING, X. Probabilistic framework of visual anomaly detection for unbalanced data. **Neurocomputing**, Elsevier, 2016.

WEST, J. B. Robert boyle's landmark book of 1660 with the first experiments on rarified air. **Journal of Applied Physiology**, American Physiological Society, v. 98, n. 1, p. 31–39, 2004. ISSN 8750-7587. Disponível em: <<http://jap.physiology.org/content/98/1/31>>.

YAMASAKI, K.; MUCHNIK, L.; HAVLIN, S.; BUNDE, A.; STANLEY, H. E. Scaling and memory in volatility return intervals in financial markets. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, v. 102, p. 9424–9428, 2005.

## Apêndices

# APÊNDICE A – Algumas distribuições de probabilidades

Tabela 6 – Algumas distribuições discretas ou contínuas de probabilidade.

Distribuições discretas	Função de probabilidade
<i>Bernoulli</i> ( $p$ ), $p \in (0, 1)$	$p^x q^{1-x}$ , $x = 0, 1$ ; $q = 1 - p$
<i>Binomial</i> ( $n, p$ )	$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ , $x = 0, 1, \dots, n$
<i>Hipergeométrica</i> ( $m, n, r$ )	$\frac{\binom{m}{k} \binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$ $k = \max \{0, r - (n - m)\}, \dots, \min \{r, m\}$
<i>Poisson</i> ( $\lambda$ ), $\lambda > 0$	$\frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$ , $x = 0, 1, 2, \dots$
<i>Geométrica</i> ( $p$ ) #de fracassos anteriores	$pq^x$ , $x = 0, 1, 2, \dots$
<i>Geométrica</i> ( $p$ ) #de ensaios para ...	$pq^{x-1}$ , $x = 1, 2, \dots$
<i>Binomial Negativa</i> ( $r, p$ ) #de fracassos anteriores	$\binom{x+r-1}{r-1} p^r q^x$ , $x = 0, 1, 2, \dots$
<i>Binomial Negativa</i> ( $r, p$ ) #de ensaios para ...	$\binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$ , $x = r, r+1, \dots$
<i>Uniforme discreta</i>	$P(X = x N) = \frac{1}{N}$ , $x = 1, 2, \dots, N$
<i>Rademacher</i>	$\begin{cases} 1/2, & k = -1; \\ 1/2, & k = 1; \\ 0, & \text{outros} \end{cases}$
<i>Beta – Binomial</i> ( $k n, \alpha, \beta$ )	$\binom{n}{k} \frac{B(k+\alpha, n-k+\beta)}{B(\alpha, \beta)}$ , $k = 0, 1, \dots, n$
<i>Poisson Binomial</i> ( $p$ ) $p \in (0, 1)_n$ $n$ ensaios de <i>Bernoulli</i>	$\sum_{A \in F_k} \prod_{i \in A} p_i \prod_{j \in A^c} (1 - p_j)$ , $k = 0, 1, \dots, n$

<p><i>Hipergeométrica</i>  <i>não – central de Fisher</i>  <math>x \in [x_{min}, x_{max}]</math>, <math>N = m_1 + m_2</math>  <math>x_{min} = \max(0, n - m_2)</math>,  <math>x_{max} = \min(n, m_1)</math>  <math>m_1, m_2 \in \{0, 1, 2, \dots\}</math>  <math>n \in [0, N)</math>, <math>\omega \in \mathfrak{R}_+</math></p>	$\frac{\binom{m_1}{x} \binom{m_2}{n-x} \omega^x}{P_0},$ <p>em que <math>P_0 = \sum_{y=x_{min}}^{y=x_{max}} C_y^{m_1} C_{n-y}^{m_2} \omega^y</math></p>
<p><i>Hipergeométrica</i>  <i>não – central de Wallenius</i>  <math>x \in [x_{min}, x_{max}]</math>, <math>N = m_1 + m_2</math>  <math>x_{min} = \max(0, n - m_2)</math>,  <math>x_{max} = \min(n, m_1)</math>  <math>m_1, m_2 \in \{0, 1, 2, \dots\}</math>  <math>n \in [0, N)</math>, <math>\omega \in \mathfrak{R}_+</math></p>	$C_x^{m_1} C_{n-x}^{m_2} \int_0^1 (1 - t^{\omega/D})^x (1 - t^{1/D})^{n-x} dt,$ <p>em que <math>D = \omega(m_1 - x) + (m_2 - n + x)</math></p>
<p><i>Beta Negativa Binomial</i>  <math>X \sim \text{BNB}(r, \alpha, \beta)</math> <math>\alpha, \beta &gt; 0</math>  <math>k \in \{0, 1, 2, \dots\}</math>.</p>	$\frac{\Gamma(r+k) B(\alpha+r, \beta+k)}{k! \Gamma(r) B(\alpha, \beta)}$ <p><math>r &gt; 0</math>, <math>r \in \mathfrak{R}</math></p>
<p><i>Boltzmann</i></p>	<p><math>F(\text{estado}) \propto e^{-\frac{E}{kT}}</math>  <math>E</math> – estado da energia  <math>kT</math> – constante da distribuição</p>
<p><i>Medida de Gibbs</i></p>	$P(X = x) = \frac{1}{Z(\beta)} \exp(-\beta E(x)).$
<p><i>Borel</i>(<math>\mu</math>), <math>\mu \in [0, 1]</math></p>	$\frac{e^{-\mu n} (\mu n)^{n-1}}{n!}, \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\}$
<p><i>Binomial negativa</i>  <i>estendida</i>(<math>k; m, r, p</math>)  <math>0 &lt; p \leq 1</math>, <math>-m &lt; r &lt; -m + 1</math></p>	$f(k; m, r, p) = \frac{\binom{k+r-1}{k} p^k}{(1-p)^{-r} - \sum_{j=0}^{m-1} \binom{j+r-1}{j} p^j}$ <p><math>k \in N</math>, <math>k \geq m</math></p>
<p><i>logarítimica</i>(<math>k, p</math>)  <math>0 &lt; p &lt; 1</math>, <math>k \in \{1, 2, \dots\}</math></p>	$\frac{-1}{\ln(1-p)} \frac{p^k}{k}$
<p><i>Conway – Maxwell – Poisson</i>  (<math>x, \lambda, \nu</math>)  <math>x = 0, 1, 2, \dots</math> <math>\lambda &gt; 0</math> e <math>\nu \geq 0</math></p>	$\frac{\lambda^x}{(x)_{(\nu)}} \frac{1}{Z(\lambda, \nu)}$ $Z(\lambda, \nu) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(j!)^\nu}.$
<p><i>Poisson condicional ou</i>  <i>positiva</i>(<math>k, \lambda</math>) <math>k = 1, 2, \dots</math></p>	$g(k; \lambda) = P(X = k   k > 0) = \frac{\lambda^k}{(e^\lambda - 1)k!}$
<p><i>Skellam</i>(<math>k; \mu_1, \mu_2</math>) <math>\mu_1 \geq 0</math>,  <math>\mu_2 \geq 0</math>, <math>k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots</math></p>	$f(k; \mu_1, \mu_2) = e^{-(\mu_1 + \mu_2)} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{k/2} I_k(2\sqrt{\mu_1 \mu_2})$ <p><math>I_k</math> é a função de Bessel modificada</p>

<p><i>Multinomial</i>  <math>(x_1, \dots, x_n; n, p_1, \dots, p_k,)</math>  <math>n &gt; 0 \quad \sum_{i=1}^k p_i = 1</math></p>	$P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k}$ $X_i \in \{0, \dots, n\} \quad \sum X_i = n$
<b>Distribuições contínuas</b>	<b>Função densidade de probabilidade</b>
<i>uniforme</i> ( $a, b$ ) $a < b$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$
<i>Arcoseno</i>	$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad x \in [a, b]$
<i>Beta</i> ( $\alpha, \beta$ ), $\alpha, \beta > 0$	$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, \quad 0 \leq x \leq 1$
<i>logit - Normal</i> ( $\mu, \sigma$ ) $\mu \in \Re \quad \sigma > 0$	$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \frac{1}{x(1-x)} e^{-\frac{(\text{logit}(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad 0 < x < 1$
<i>Irwin - Hall</i>	$f_X(x; n) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (x-k)^{n-1}$ $x \in [0, n]$
<i>Bates</i> ( $x; n, a, b$ ) <i>suporte</i> : $x \in [a, b]$	$\begin{cases} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{x-a}{b-a} - k/n\right)^{n-1} \text{sgn}\left(\frac{x-a}{b-a} - k/n\right), \\ 0, \quad x \notin [a, b] \end{cases}$ <p><i>sgn</i> é a função sinal</p>
<i>Kumaraswamy</i> ( $a, b$ ) $a, b > 0$	$f(x; a, b) = abx^{a-1}(1-x^a)^{b-1}, \quad x \in [0, 1]$
<i>Raised cosine</i> ( $\mu, s$ ) $\mu, s > 0$	$f(x; \mu, s) = \frac{1}{2s} \left[ 1 + \cos\left(\frac{x-\mu}{s}\pi\right) \right]$ $x \in [\mu - s, \mu + s]$
<i>Reciprocal</i> ( $a, b$ ) $0 < a < b, \quad a, b \in \Re$	$f(x; a, b) = \frac{1}{x[\log_e(b) - \log_e(a)]}$ $a \leq x \leq b, \quad a > 0$
<i>Triangular</i> ( $a, b, c$ ) $a \in (-\infty, \infty)$ $a < b, \quad a \leq c \leq b$ <i>suporte</i> : $a \leq x \leq b$	$\begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, & a \leq x < c, \\ \frac{2}{b-a}, & x = c \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}, & c < x \leq b \\ 0, & b < x \end{cases}$
<i>Normal</i> ( $\mu, \sigma^2$ ) $\sigma^2 > 0, \quad -\infty < \mu < \infty$	$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
<i>versão 1</i> <i>Normal generalizada</i> ( $\mu, \alpha, \beta$ ) $\mu$ : parâmetro de localização, $\alpha$ : parâmetro de escala, $\beta$ : parâmetro de forma	$\frac{\beta}{2\alpha \Gamma(\frac{1}{\beta})} e^{-\left(\frac{ x-\mu }{\alpha}\right)^\beta}, \quad x \in (-\infty; +\infty)$



<p>versão2</p> <p>Normal generalizada(<math>\xi, \alpha, \kappa</math>)</p> <p>Parâmetros :</p> <p><math>\xi \in \mathfrak{R}</math> : locação</p> <p><math>\alpha &gt; 0</math> : escala</p> <p><math>\kappa \in \mathfrak{R}</math> : forma</p> <p>suporte :</p> <p><math>x \in (-\infty, \xi + \alpha/\kappa), \kappa &gt; 0</math></p> <p><math>x \in (-\infty, \infty), \kappa = 0</math></p> <p><math>x \in (\xi + \alpha/\kappa; +\infty), \kappa &lt; 0</math></p>	$\frac{\phi(y)}{\alpha - \kappa(x - \xi)}, \text{ onde}$ $y = \begin{cases} -\frac{1}{\kappa} \log \left[ 1 - \frac{\kappa(x - \xi)}{\alpha} \right] & \kappa \neq 0 \\ \frac{x - \xi}{\alpha} & \kappa = 0 \end{cases}$ <p><math>\phi</math> é a fdp da normal padrão</p>
<p>normal truncada(<math>\mu, \sigma, a, b</math>)</p> <p>Notação :</p> <p><math>\xi = \frac{x - \mu}{\sigma}, \alpha = \frac{a - \mu}{\sigma},</math></p> <p><math>\beta = \frac{b - \mu}{\sigma}, Z = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)</math></p> <p><math>\mu \in \mathfrak{R}</math> – média</p> <p><math>\sigma^2</math> – variância</p> <p>suporte : <math>a \leq x \leq b</math></p> <p><math>\phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}\xi^2)</math></p>	$f(x; \mu, \sigma, a, b) = \frac{\frac{1}{\sigma} \phi(\frac{x - \mu}{\sigma})}{\Phi(\frac{b - \mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a - \mu}{\sigma})}$ <p>ou</p> $f(x; \mu, \sigma, a, b) = \frac{\phi(\xi)}{\sigma Z}$
<p><math>U</math> – quadrática(<math>a, b, \alpha, \beta</math>)</p> <p><math>\beta = \frac{b+a}{2}, \alpha = \frac{12}{(b-a)^3}</math></p>	$f(x; a, b, \alpha, \beta) = \alpha (x - \beta)^2, \quad x \in [a, b]$
<p>von Mises(<math>\mu, \kappa</math>)</p> <p><math>\mu \in \mathfrak{R}, \kappa &gt; 0</math></p>	$f(x   \mu, \kappa) = \frac{e^{\kappa \cos(x - \mu)}}{2\pi I_0(\kappa)}$
<p>Wigner semicircle(<math>R</math>), <math>R &gt; 0</math></p>	$f(x) = \frac{2}{\pi R^2} \sqrt{R^2 - x^2}$
<p>Beta Prime(<math>\alpha, \beta</math>)</p>	$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1+x)^{-\alpha-\beta}}{B(\alpha, \beta)}$
<p>chi(<math>k</math>), <math>k &gt; 0</math></p> <p><math>k</math> – grau de liberdade</p>	$\frac{2^{1-k/2} x^{k-1} e^{-x^2/2}}{\Gamma(k/2)}$ <p><math>x \in [0, \infty)</math></p>
<p>chi não – central(<math>k, \lambda</math>), <math>\lambda &gt; 0</math></p>	$f(x; k, \lambda) = \frac{e^{-\frac{x^2 + \lambda^2}{2}} x^k \lambda}{(\lambda x)^{k/2}} I_{k/2-1}(\lambda x)$
<p>Qui – quadrado(<math>k</math>), <math>k = 1, 2, \dots</math></p>	$\frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma(\frac{k}{2})} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$
<p>Inversa – qui – quadrado(<math>\nu</math>),</p> <p><math>\nu &gt; 0</math></p>	$f_1(x; \nu) = \frac{2^{-\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)} x^{-\nu/2-1} e^{-1/(2x)}$ <p>ou</p> $f_2(x; \nu) = \frac{(\nu/2)^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)} x^{-\nu/2-1} e^{-\nu/(2x)}$ <p><math>x \in [0, \infty)</math></p>
<p>Dagum(<math>a, b, p</math>)</p> <p><math>a, b, p &gt; 0</math></p>	$f(x; a, b, p) = \frac{ap}{x} \left( \frac{(\frac{x}{b})^{ap}}{((\frac{x}{b})^{ap} + 1)^{p+1}} \right), \quad x > 0$
<p>Exponencial(<math>\lambda</math>), <math>\lambda &gt; 0</math></p>	$\lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$

<i>Fisher – Snedecor</i> ( $d_1, d_2$ ) $d_1, d_2 > 0, x > 0$	$\frac{1}{B(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2})} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{\frac{d_1}{2}} x^{\frac{d_1}{2}-1} \left(1 + \frac{d_1}{d_2}x\right)^{-\frac{d_1+d_2}{2}}$
<i>Fisher's z</i> ( $d_1, d_2$ ), $d_1, d_2 > 0$	$\frac{2d_1^{d_1/2}d_2^{d_2/2}}{B(d_1/2, d_2/2)} \frac{e^{d_1x}}{(d_1e^{2x}+d_2)^{(d_1+d_2)/2}}$ $x \in (-\infty, +\infty)$
<i>normal dobrada</i> ( $\mu, \sigma$ ) $\mu \in \mathfrak{R}, \sigma > 0$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $x \in [0, \infty)$
<i>Fréchet</i> ( $\alpha, s, m$ ) $\alpha, s > 0, m \in \mathfrak{R}$	$\frac{\alpha}{s} \left(\frac{x-m}{s}\right)^{-1-\alpha} e^{-\left(\frac{x-m}{s}\right)^{-\alpha}}$ $x > m$
<i>Gamma</i> ( $\alpha, \beta$ ) $\alpha, \beta > 0$	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, x > 0$
<i>Erlang</i> ( $k, \lambda$ ) $k = 1, 2, \dots, \lambda > 0$	$f(x; k, \lambda) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$ $x \in [0, \infty)$
<i>Gamma – inversa</i> ( $\alpha, \beta$ ) $\alpha, \beta > 0$	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{-\beta}{x}\right), x > 0$
<i>Gamma generalizada</i> ( $a, d, p$ ) $a, d, p > 0$	$\frac{\gamma(d/p, (x/a)^p)}{\Gamma(d/p)}, x > 0$
<i>Pareto generalizada</i> ( $\mu, \sigma, \xi$ ) $\mu, \xi \in \mathfrak{R}, \sigma > 0$	$f_{(\xi, \mu, \sigma)}(x) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \frac{\xi(x-\mu)}{\sigma}\right)^{\left(-\frac{1}{\xi}-1\right)}$ $x \geq \mu \ (\xi \geq 0)$ $\mu \leq x \leq \mu - \sigma/\xi \ (\xi < 0)$
<i>Gamma/Gompertz</i> ( $b, s, \beta$ ) $b, s, \beta > 0$	$f(x; b, s, \beta) = \frac{bse^{bx}\beta^s}{(\beta-1+e^{bx})^{s+1}}, x > 0$
<i>Gompertz</i> ( $\eta, b$ ) $\eta, b > 0$	$f(x; \eta, b) = b\eta e^{bx} e^\eta \exp(-\eta e^{bx})$ $x \geq 0$
<i>Wald</i> ( $\mu, \lambda$ ) $\mu, \lambda > 0$	$\left[\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right]^{1/2} \exp\frac{-\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2x}, x > 0$
<i>Lévy</i> ( $\mu, c$ ) $\mu \in \mathfrak{R}, c > 0$	$f(x; \mu, c) = \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \frac{e^{-\frac{c}{2(x-\mu)}}}{(x-\mu)^{3/2}}$ $x \in [\mu, \infty)$
<i>Log – Cauchy</i> ( $\mu, \sigma$ ) $\mu \in \mathfrak{R}, \sigma > 0$	$\frac{1}{x\pi} \left[\frac{\sigma}{(\ln x - \mu)^2 + \sigma^2}\right], x > 0$
<i>Log – Laplace</i> ( $\mu, b$ )	$f(x \mu, b) = \frac{1}{2bx} \exp\left(-\frac{ \ln x - \mu }{b}\right)$
<i>Log – logistic</i> ( $\alpha, \beta$ ) $\alpha, \beta > 0$	$\frac{(\beta/\alpha)(x/\alpha)^{\beta-1}}{(1+(x/\alpha)^\beta)^2}, x \geq 0$
<i>Lomax</i> ( $\lambda, \alpha$ ) $\lambda, \alpha > 0$	$\frac{\alpha}{\lambda} \left[1 + \frac{x}{\lambda}\right]^{-(\alpha+1)}, x \geq 0$

<i>Nakagami</i> ( $m, \Omega$ ) $m, \Omega > 0$	$\frac{2m^m}{\Gamma(m)\Omega^m} x^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} x^2\right), \quad x > 0$
<i>Pareto</i> ( $\alpha, \mu, \gamma$ ) $\alpha, \gamma > 0, \quad \mu \in \mathfrak{R}$	<p><i>Tipo 1</i> : <math>\left[\frac{x}{\sigma}\right]^{-\alpha}, \quad x &gt; \alpha</math></p> <p><i>tipo 2</i> : <math>\left[1 + \frac{x-\mu}{\sigma}\right]^{-\alpha}, \quad x &gt; \mu</math></p> <p><i>Lomax</i> : <math>\left[1 + \frac{x}{\sigma}\right]^{-\alpha}, \quad x &gt; 0</math></p> <p><i>tipo 3</i> : <math>\left[1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{1/\gamma}\right]^{-1}, \quad x &gt; \mu</math></p> <p><i>tipo 4</i> : <math>\left[1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{1/\gamma}\right]^{-\alpha}, \quad x &gt; \mu</math></p>
<i>Rayleigh</i> ( $\sigma$ ), $\sigma > 0$	$\frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad x \geq 0$
<i>Rice</i> ( $\nu, \sigma$ ), $\nu \geq 0, \sigma > 0$	$\frac{x}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-(x^2+\nu^2)}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{x\nu}{\sigma^2}\right), \quad x > 0$
<i>Weibul</i> ( $\lambda, k$ ) $\lambda, k > 0,$	$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$
<i>Cauchy</i> ( $x_0, \gamma$ ) $x_0 \in \mathfrak{R}, \quad \gamma > 0$	$\frac{1}{\pi\gamma \left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
<i>Gumbel</i> ( $\mu, \beta$ ) $\mu \in \mathfrak{R}, \quad \beta > 0$	$\frac{1}{\beta} e^{-(z+e^{-z})}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$ $z = \frac{x-\mu}{\beta}$
<i>Hyperbolic</i> ( $\mu, \alpha, \beta, \delta, \gamma$ ) $\mu, \alpha, \beta, \delta \in \mathfrak{R}$ $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$	$\frac{\gamma}{2\alpha\delta K_1(\delta\gamma)} e^{-\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2} + \beta(x-\mu)}$ $x \in (-\infty; +\infty)$ <i><math>K_\lambda</math> - função Bessel</i>
<i>Laplace</i> ( $\mu, \beta$ ) $\mu \in \mathfrak{R}, \quad \beta > 0$	$\frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{ x-\mu }{\beta}\right), \quad x \in (-\infty; +\infty)$
<i>Johnson <math>S_U</math></i> ( $\gamma, \xi, \delta, \lambda$ ) $\gamma, \xi, \delta, \lambda > 0$	$\frac{\delta}{\lambda\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)^2}} e^{-\frac{1}{2}(\gamma + \delta \sinh^{-1}\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right))^2}, \quad x \in \mathfrak{R}$
<i>hyperbolic secant</i>	$\frac{1}{2} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{2} x\right), \quad x \in (-\infty; +\infty)$
<i>Logística</i> ( $\mu, s$ ) $\mu, s > 0$	$\frac{e^{-\frac{x-\mu}{s}}}{s \left(1 + e^{-\frac{x-\mu}{s}}\right)^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
<i>t - Student</i> ( $\nu$ ) $\nu > 0$	$\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$