



**Universidade Federal Rural de Pernambuco**  
**Departamento de Estatística e Informática**  
**Programa de Pós-Graduação em Informática Aplicada**

# **Análise não linear de sinais de EEG: uma aplicação de redes complexas**

Rohgi Toshio Meneses Chikushi

**Recife**

Agosto de 2014

Rohgi Toshio Meneses Chikushi

# **Análise não linear de sinais de EEG: uma aplicação de redes complexas**

Orientador: Prof. Dr. Catão Temístocles de Freitas Barbosa

Coorientador: Profa. Dra. Silvana Bocanegra

Dissertação de mestrado apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Informática Aplicada da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Informática Aplicada.

Recife

Agosto de 2014

Ficha catalográfica

C534a Chikushi, Rohgi Toshio Meneses  
Análise não linear de sinais de EEG: uma aplicação de  
redes complexas / Rohgi Toshio Meneses Chikushi. - Recife,  
2014.  
80 f. : il.

Orientador: Catão Temistocles de Freitas Barbosa.  
Dissertação (Mestrado em Informática Aplicada) –  
Universidade Federal Rural de Pernambuco,  
Departamento de Estatística e Informática, Recife, 2014.  
Referências.

1. Dinâmica não linear 2. EEG 3. Eletroencefalograma  
4. Series temporais 5. Redes complexas 6. Epilepsia  
I. Barbosa, Catão Temistocles de Freitas, orientador II. Título

CDD 004


**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA APLICADA**

**Análise não linear de sinais de EEG: uma aplicação de redes complexas**


**AUTOR (Rohgi Toshio Meneses Chikushi)**


Dissertação julgada adequada para obtenção do título de mestre em Informática Aplicada, defendida e aprovada por unanimidade em 29/08/2014 pela Comissão Examinadora.


Orientador:

  
Prof. Dr. Catão Temístocles de Freitas Barbosa  
Universidade Federal Rural de Pernambuco  
DEINFO- UFRPE

Banca Examinadora:

  
Prof. Dr. Aluizio Fausto Ribeiro Araújo  
Universidade Federal de Pernambuco  
CIN – UFPE

  
Profa. Dr(a). Silvana Bocanegra  
Universidade Federal Rural de Pernambuco  
DEINFO- UFRPE

  
Prof. Dr. Tiago Alessandro Espínola Ferreira  
Universidade Federal Rural de Pernambuco  
DEINFO- UFRPE

À meus pais, Margarida (in  
memoriam) e Akihiko;  
À minha pequena Hannah;  
À minha amada Alessandra, pela  
paciência e dedicação;  
E a Socorro Bezerra, pelo despertar  
de uma nova consciência.

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, que evocado ou não sempre está presente.

Agradeço a minha família, pelo apoio e sacrifícios em prol de um futuro promissor.

A minha esposa Alessandra, pela dedicação, paciência e companheirismo.

Aos meus orientadores Catão e Silvana por toda a ajuda necessária no projeto do mestrado.

Ao meu grande amigo Márcio pelo auxílio na revisão do texto e aos debates, apesar do seu tempo apertado.

A todos os meus colegas e professores do DEINFO, estatísticos ou computeiros, que compartilharam essa caminhada na pós-graduação.

E a CAPES pelo apoio financeiro.

# Resumo

O eletroencefalograma (EEG) ainda é uma ferramenta importante no diagnóstico de distúrbios neurológicos. Como técnica de registro, oferece uma excelente resolução temporal, capturando instantaneamente a atividade cerebral. Estudos recentes em dinâmica não linear sugerem que séries temporais como o EEG podem ser transformadas em redes complexas por meio de mapeamentos como o método de visibilidade e o de recorrência. Essas redes, em analogia à rede neuronal, representam as características de complexidade dinâmica do sistema nervoso. Neste trabalho, transformamos sinais de EEG em redes complexas derivadas da reconstrução dos espaços de fase, com base no conceito de recorrência. A aplicação de redes complexas na análise não linear da dinâmica da atividade cerebral, possibilitou diferenciar estados normais e epiléticos por meio da comparação das medidas topológicas dessas redes. Identificamos diferenças significativas ao compararmos os registros de EEG em condições normais e epiléticas usando as métricas das redes e concluímos que a transformação do EEG em redes complexas fornece um grande número de parâmetros úteis para caracterização e possível diagnóstico dos estados do comportamento cerebral normal e epilético.

# Abstract

The electroencephalogram (EEG) is still an important tool in the diagnosis of neurodiseases. As recording technique offers an excellent temporal resolution, instantly capturing brain electrical activity. Recent studies suggest that non-linear dynamic time series as EEG can be transformed into complex networks by the methods of visibility graph and the recurrence network. The builded complex network allows many parameters or network metrics to characterize normal and epleptics. In this work, we transform EEG signals to complex networks and identify the metrics to find statistical diferences between normal and epleptical groups. We show that exist significant statistical differences in the network metrics from the normals and epileptics conditions. We conclude that the transformation of the EEG signal in complex networks provide a helpful tool to diagnostic the brain states.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Apresentação . . . . .	1
1.2	Objetivos e contribuições . . . . .	3
1.3	Organização do trabalho . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Revisão bibliográfica</b>	<b>4</b>
2.1	Sistemas complexos . . . . .	4
2.2	O cérebro como sistema complexo . . . . .	5
2.3	Eletroencefalograma . . . . .	8
2.4	Análise não linear de séries temporais . . . . .	9
2.4.1	Tempo de defasagem . . . . .	11
2.4.2	Dimensão de imersão . . . . .	14
2.5	Diagrama de recorrência . . . . .	17
2.6	Fundamentos de redes complexas . . . . .	18
2.6.1	Propriedades de redes complexas . . . . .	20
2.6.2	Modelos de Redes Complexas . . . . .	26
2.7	Mapeamento de séries temporais em redes . . . . .	30

2.8	Redes complexas no estudo do cérebro . . . . .	32
2.9	Considerações finais . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Mapeando o EEG em redes complexas</b>	<b>34</b>
3.1	Introdução . . . . .	34
3.2	Processamento das séries temporais . . . . .	37
3.3	Modelagem das redes . . . . .	37
3.4	Comparação entre grupos de redes . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Resultados e Discussão</b>	<b>45</b>
4.1	Análise dos resultados . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Conclusão e Trabalhos Futuros</b>	<b>57</b>
5.1	Conclusões . . . . .	57
5.2	Contribuições e Dificuldades . . . . .	58
5.3	Trabalhos Futuros . . . . .	59

# Lista de Tabelas

2.1	Descrição da frequência e amplitude dos ritmos oscilatórios. . . . .	9
4.1	Médias( $\mu$ ) e desvios ( $\sigma$ ) das métricas das redes obtidas nas condições: olhos abertos (OA) e fechados (OF), registro no hemisfério oposto após a remoção cirurgica da região epileptogênica no hipocampo (HO), registro da atividade epileptogênica durante a convulsão (AE) e na região epileptogênica do hipocampo (RE). . . . .	51
4.2	Temos na tabela o $P$ -valor (P) e as estatísticas do teste Kolmogorov-Smirnov (KS). . . . .	53
4.3	Comparação dois-a-dois das métricas das redes dos grupos nas diferentes condições usando o teste post-hoc de Dunn, com $\alpha = 0.05$ . Os níveis de significância são: (ns) - não significante, (*) significante, (**) muito significante e (***) extremamente significante. . . . .	55

# Lista de Figuras

2.1	Ilustração do cérebro. . . . .	6
2.2	Ilustração de um neurônio e das conexões sinápticas. . . . .	7
2.3	Ilustração dos ritmos oscilatórios <i>Alfa</i> , <i>Beta</i> , <i>Delta</i> e <i>Theta</i> . . . . .	8
2.4	Séries temporais das componentes $x$ , $y$ e $z$ do sistema de Lorenz, para $\sigma = 10$ , $r = 8$ , $\beta = 8/3$ e $\Delta t = 0.01$ . . . . .	11
2.5	Espaço de fase do sistema de Lorenz, obtido a partir das séries da Figura 2.4.	12
2.6	Qualidade das reconstruções do espaço de fase para $\tau = 1$ , $\tau = 3$ , $\tau = 6$ , $\tau = 12$ , $\tau = 24$ e $\tau = 48$ . . . . .	13
2.7	Ilustração do método dos falsos vizinhos próximos. Modificado de [25]. . . . .	15
2.8	Espaço de fase do sistema de Lorenz e a sua respectiva reconstrução. A figura da esquerda representa a plotagem de 5.000 pontos com as coordenadas $x$ , $y$ e $z$ . Na figura da direita, temos o espaço de fase reconstruído, usando apenas a coordenada $x$ do sistema, com $\tau = 6$ . . . . .	16
2.9	Diagrama de recorrência do sistema 2.4, definido com raio $r = 5$ . A figura (A) representa o processo de construção da matriz vista na figura (B) [29]. . . . .	18
2.10	Exemplos de diagramas de recorrência para um sistema periódico (A), caótico (B) e ruído branco (C) [29]. . . . .	19
2.11	Ilustração das pontes de Königsberg antes de 1875 e o respectivo grafo de Euler [73]. . . . .	19
2.12	Rede com diferentes níveis de conectividade [27]. . . . .	24

2.13	Subredes de k-cores. A figura apresenta a sobreposição de níveis com 1-core, 2-core e 3-core [27]. . . . .	25
2.14	(A) Ilustração do modelo aleatório de Erdős e Rényi. (B) A distribuição da conectividade associada [73]. . . . .	27
2.15	(A) Modelo mundo pequeno de Watts e Strogatz. (B) A respectiva distribuição da conectividade. Este modelo apresenta um número elevado de ciclos de ordem três [73]. . . . .	28
2.16	O procedimento de Watts e Strogatz transforma uma rede regular em uma rede aleatória com o mesmo número de vértices. Para uma probabilidade $p = 0$ , a rede permanece inalterada. Com o aumento de $p$ , a rede torna-se mais desordenada até atingir a completa aleatoriedade quando $p = 1$ . . . . .	29
2.17	(A) Rede gerada pelo modelo de Barabási e Albert. (B) A distribuição da conectividade segue uma lei de potência [73]. . . . .	29
2.18	Diagramas de recorrência obtidos do sistema de Lorenz por dois métodos distintos, usados para o mapeamento de redes complexas. Figuras obtidas e modificadas de [29]. . . . .	30
2.19	Redes mapeadas a partir dos diagramas de recorrência da Figura 2.18. Figuras obtidas e modificadas de [29]. . . . .	31
2.20	Exemplo do mapeamento de Lacasa [49]. . . . .	32
3.1	Ilustração do procedimento de mapeamento dos sinais de EEG em redes complexas. . . . .	36
3.2	Ilustração do procedimento de agrupamento dos estados do espaço de fase. . . . .	39
3.3	Apresentação da construção de uma rede pela aplicação do algoritmo sobre os estados do espaço de fase reconstruído de uma série dos dados experimentais. . . . .	44
4.1	(A), (B), (C), (D) e (E) são amostras de registros do EEG de pacientes nas condições OA, OF, HO, AE e RE, respectivamente. . . . .	46

4.2	Os gráficos da esquerda apresentam a função de informação mútua média referentes aos sinais de EEG da Figura 4.1. Na direita, os respectivos gráficos da estimação da dimensão de imersão. . . . .	48
4.3	A esquerda estão os espaços de fase reconstruídos referentes às condições dos registos OA, OF, HO, AE e RE. A direita, encontram-se as respectivas redes complexas mapeadas sobre os espaços de fase. . . . .	49

# Lista de abreviaturas

AE - atividade epiléptica

EEG - eletroencefalograma

FA - função de autocorrelação

FIMM - função de informação mútua média

FNN - método dos falsos vizinhos próximos

HO - formação hipocampal do hemisfério oposto à zona epileptogênica

MCD - método das coordenadas defasadas

MEG - magnetoencefalografia

OA - indivíduos saudáveis como olhos abertos

OF - indivíduos saudáveis como olhos fechados

RE - região epileptogênica

RM - ressonância magnética

RMf - ressonância magnética funcional

RQA - análise quantificada de recorrência

$\ell$  - caminho médio

$bc$  - centralidade de intermediação

$cc_r$  - centralidade de proximidade

$cc$  - coeficiente de agrupamento

$k$  - conectividade

$\rho$  - densidade

$\ell_{max}$  - diâmetro da rede

$H$  - entropia da rede

$s$  - força

$k_c$  -  $k$ -cores

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Apresentação

O cérebro é constituído de modo interdependente por uma rede de neurônios com elevada complexidade. Interpretado como um sistema complexo, apresenta aspectos subjacentes à coexistência e à alternância entre ordem e desordem na evolução de relações entre redes neuronais [64, 66]. Assim, muitos fenômenos cerebrais são descritos como não lineares [81], e a aplicação de métodos advindos da teoria dos sistemas dinâmicos não lineares constitui os recursos atuais para identificar propriedades relevantes à sua compreensão.

A avaliação da atividade neurológica está consolidada por métodos que geralmente usam imagens, como a ressonância magnética (RM), a ressonância magnética funcional (RMf) e a magnetoencefalografia (MEG), associados ao eletroencefalograma (EEG). Embora as técnicas de registro por imagens ofereçam excelente resolução anatômica, os tempos de varredura para capturar essas imagens são da ordem de vários minutos, impossibilitando a representação instantânea da dinâmica da atividade elétrica cerebral, alcançada pelo EEG [7, 26].

O EEG, criado em 1929 pelo psiquiatra austríaco Hans Berger [43], é um método não invasivo para mensuração da atividade cerebral humana. Os sinais de EEG são fundamentais para diagnosticar patologias [81], como as epilepsias, o mal de Alzheimer, além de outras doenças do cérebro. No campo da neurociência [47], o EEG é utilizado para avaliação cognitiva e fisiológica, com aplicações ligadas à interface cérebro-máquina [7] e às terapias de



reabilitação com próteses. As primeiras aplicações da análise não linear no estudo do EEG foram realizadas em 1985, por Rapp *et al.* [71], e por Babloyantz *et al.* [9]. Até então, uma abordagem reducionista [81] dificultava a compreensão de todos os mecanismos neurofisiológicos que surgem do cérebro como um sistema complexo, devido à complexa rede neuronal que constitui as diferentes áreas cerebrais.

Em geral, pode-se analisar o EEG por meio dos seguintes métodos: inspeção visual, ainda muito utilizada na área médica, identificação de ritmos oscilatórios e da análise não linear de séries temporais. Esse último, representa o método de maior aplicação para o estudo da atividade cerebral, em especial, relacionado à atividade epiléptica. Com o objetivo de ampliar o ganho de informação sobre o funcionamento do cérebro, outras abordagens procuram identificar a atividade cerebral por meio do estudo da dinâmica estrutural.

Recentemente, redes complexas [5, 28, 49] têm sido aplicadas à neurociência [89, 26], no sentido de determinar parâmetros que caracterizem estados de diferentes regiões do cérebro. Essas redes são obtidas por meio das correlações de atividades neuronais entre diferentes regiões cerebrais, ou de grafos originados do método de visibilidade [49, 14] ou pelo espaço de fase reconstruído [28]. Bhaduri e Ghosh[14] apresentaram um trabalho recente usando redes de visibilidade [49] de dados já estudados e disponibilizados por Andrzejak *et al.* [70]. Embora em seu estudo Andrzejak evidencie a utilidade da análise não linear para obtenção de informações dos registros disponibilizados, esta abordagem está restrita ao uso de parâmetros do campo da dinâmica não linear, já bem estabelecida no estudo da dinâmica do EEG [81] por meio de um conjunto restrito de medidas.

Trabalhos que aplicam a abordagem de redes complexas na investigação de sistemas dinâmicos ainda encontram-se em desenvolvimento [94, 95, 92, 49, 28, 29]. No caso experimental, como o da neurociência, está relacionada à dinâmica funcional de regiões do cérebro de acordo com a literatura [38, 26, 89].

Nesta pesquisa, utilizam-se sinais de EEG, os mesmos de Bhaduri e Ghosh, como séries temporais para obter as redes complexas mapeadas sobre os espaços de fase reconstruídos em indivíduos saudáveis como olhos abertos (OA), em indivíduos saudáveis como olhos fechados (OF), na região epileptogênica (RE) e na formação hipocampal do hemisfério oposto à zona epileptogênica (HO) de pacientes nos intervalos fora da crise epiléptica e durante a atividade epiléptica (AE). A razão do uso de redes complexas está justificada na grande variedade de métricas fornecidas e na captura de diferentes padrões dinâmicos [28, 49] dos diferentes

estados cerebrais aqui estudados.

## 1.2 Objetivos e contribuições

Este trabalho analisa o comportamento dinâmico de registros de EEG em condições normais e epiléticas para identificar padrões que auxiliem possíveis diagnósticos. Para isso, aplicam-se os métodos da análise não linear de séries temporais, de modo a reconstruir os respectivos espaços de fase; em seguida, mapeiam-se os estados em redes complexas. Uma vez obtidas as redes e determinadas as métricas, aplicam-se os testes estatísticos para identificar diferenças significativas entre os grupos de registros.

Assim, o objetivo será identificar padrões do EEG para diagnosticar condições normais e epiléticas a partir das métricas de redes complexas, com objetivos específicos assim definidos:

- reconstruir os espaços de fase das séries temporais do EEG;
- transformar os espaços de fase em redes complexas;
- calcular as métricas das redes; e
- utilizar testes estatísticos para analisar as médias das métricas e identificar diferenças significativas entre os grupos de registros.

## 1.3 Organização do trabalho

Este trabalho está organizado do seguinte modo: o Capítulo 2 apresenta os fundamentos para a realização da pesquisa, como sistemas complexos, funcionamento do cérebro humano e EEG, os métodos da análise não linear de séries temporais, redes complexas e os modelos de mapeamento de séries em redes. No Capítulo 3, estão a descrição dos dados usados no projeto, os passos para o tratamento das séries temporais dos registros de EEG, a modelagem das redes complexas, a obtenção das métricas e a explanação dos métodos estatísticos usados para a análise. A discussão dos resultados encontra-se no Capítulo 4. As conclusões, dificuldades e contribuições são dissertadas no Capítulo 5.

# Capítulo 2

## Revisão bibliográfica

Este capítulo apresenta os principais conceitos necessários ao desenvolvimento da pesquisa. A Seção 2.1 introduz as noções básicas sobre sistemas complexos. Na Seção 2.2, são descritas algumas características do cérebro e das redes neuronais que o constituem, a sua compreensão como sistema complexo e os conceitos da dinâmica não linear de forma introdutória. As origens e características do EEG são abordadas na Seção 2.3. Os procedimentos de análise não linear aplicados a séries temporais para reconstrução de espaços de fase são discutidos na Seção 2.4. Na Seção 2.5, introduzimos o conceito de recorrência dos espaços de fase e as técnicas usadas para construir diagramas de recorrência. Os modelos de redes complexas e as métricas usadas neste trabalho são apresentadas na Seção 2.6. Por fim, na Seção 2.7, temos a descrição dos mapeamentos usados para transformar séries temporais em redes complexas e trabalhos relacionados ao estudo do EEG.

### 2.1 Sistemas complexos

Muitos fenômenos complexos na natureza são descritos como não lineares [81]. A análise e a modelagem desses fenômenos a partir do paradigma dos sistemas complexos constituem um novo ramo de pesquisa científica na atualidade [66]. Embora recente, a aplicação de métodos da análise da dinâmica não linear vem apresentando não só resultados promissores na identificação de medidas invariantes da dinâmica de sistemas constituídos por milhares de entidades autônomas [17] como também a representação de modelos significativos da estrutura e comportamento desses sistemas [5, 28]. Geralmente, os sistemas complexos são

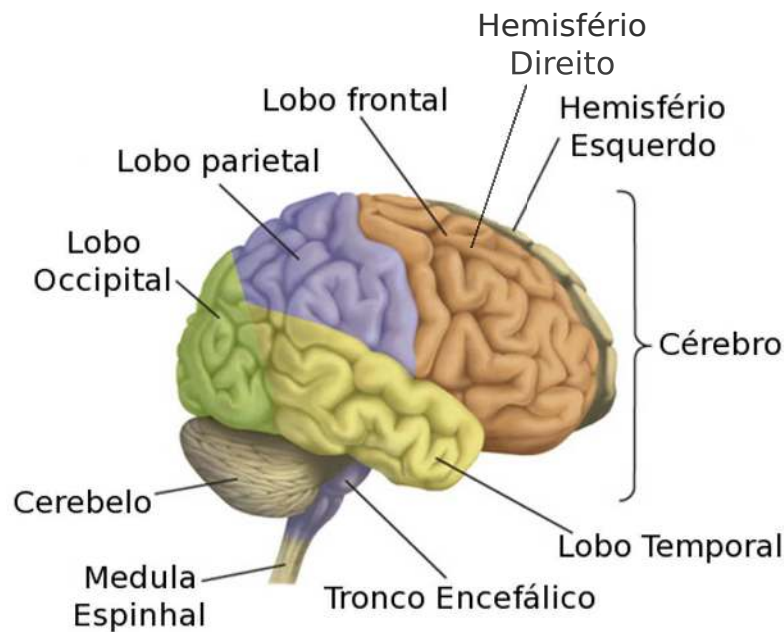
encontrados em diferentes níveis de organização e constituem conglomerados que vão desde estruturas moleculares [55] até sociedades [60]. Exemplos como a World Wide Web [45], em que cada *site* está conectado a milhares de outros por meio de *hiperlinks*, a cadeia alimentar [21] em um determinado ecossistema, as relações sociais entre indivíduos [27, 16] e os mercados e as relações entre as empresas [57] são apenas alguns dos vários sistemas que apresentam características de sistemas complexos.

A dinâmica desses sistemas evolui por meio de interações entre milhares de unidades, gerando um efeito de ordem-desordem com comportamento regular e previsível, ou por mudanças bruscas e aleatórias devido a pequenas perturbações [66]. Desse modo, alterações entre aleatoriedade e comportamento regular são peculiaridades do sistema na sua totalidade [64].

Além disso, a partir de interações mútuas entre os seus componentes, propriedades emergentes podem ser identificadas, mas não inferidas, pela análise das características restritas das suas partes [19, 66]. Isso significa que todas as interações entre agentes externos e as unidades constituintes diferem do comportamento individual de cada unidade isoladamente, caracterizando um fator proporcional não linear. Assim, métodos advindos principalmente da física estatística e da teoria dos sistemas dinâmicos não lineares [82, 66, 48, 17] vêm sendo empregados no estudo de sistemas complexos.

## 2.2 O cérebro como sistema complexo

O cérebro é provavelmente o sistema mais complexo conhecido e estudado, definido como uma das estruturas mais complexas do corpo humano [66]. Compreende a região do córtex do encéfalo onde, além do cérebro, se encontram o cerebelo e o tronco encefálico. O córtex cerebral está dividido em dois hemisférios, conectados um ao outro via uma estrutura chamada *corpus callosum*, e cada hemisfério está dividido em quatro lobos, a saber, frontal, parietal, occipital e temporal [37] (veja a Figura 2.1). Essas áreas, por si, já constituem uma estrutura complexa. O córtex em particular, onde muitas áreas diferentes podem ser identificadas, é formado por camadas, dobradas no espaço do crânio. As demais áreas são constituídas por vários núcleos. A estrutura cerebral está organizada de modo interdependente por uma rede de neurônios de elevada complexidade devido à alta conectividade entre um neurônio e os seus vizinhos.

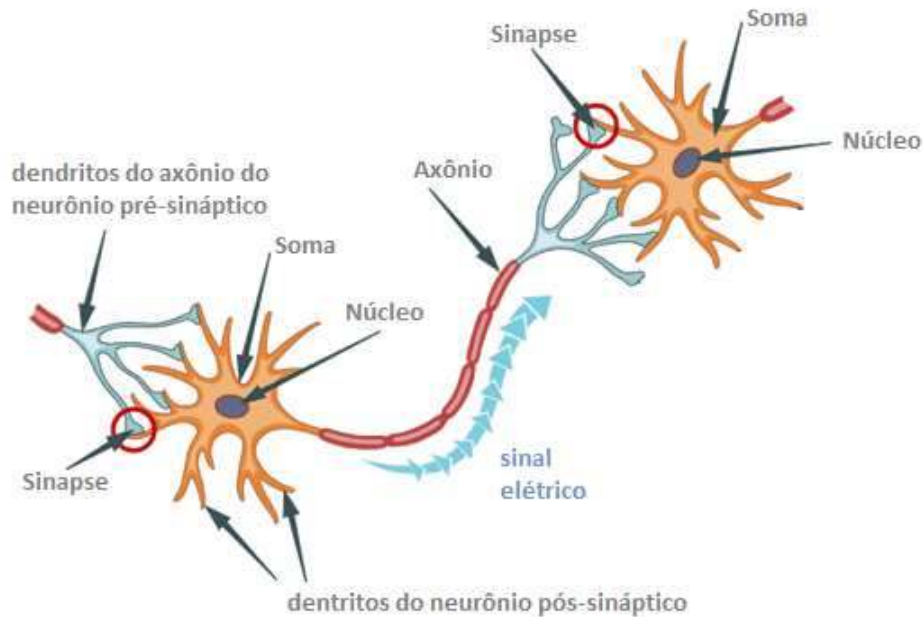


**Figura 2.1:** O cérebro humano [37].

Cada neurônio tem a função de receber, armazenar e processar informações emitidas em pulsos elétricos, recebidos e transmitidos por intermédio de redes neuronais. A estrutura básica de um neurônio é composta por dendritos, axônio e soma (veja a Figura 2.2). O axônio de um dado neurônio encontra-se conectado em dendritos de outros neurônios por meio de uma conexão sináptica responsável pela transmissão de sinais que poderão ser propagados, dependendo da intensidade dos sinais elétricos vindos dos demais dendritos. Os neurônios encontram-se conectados a milhares de outros que serão excitados ou inibidos em diferentes modulações quando um dendrito pós-sináptico recebe o pulso elétrico emitido pelo soma do neurônio pré-sináptico transmitido pelo seu axônio. A ativação de um único neurônio provocará uma reação nos neurônios circunvizinhos, e a estimulação de diferentes regiões cerebrais, resultado dessa ativação, pode estar relacionada a funções como memória, pensamento, sensação, interpretadas como reações emergentes de um sistema complexo [66].

O cérebro, interpretado como um sistema complexo, apresenta aspectos subjacentes, em maior ou menor grau, à coexistência e à alternância entre ordem e desordem na evolução entre os estados cerebrais [64, 66]. Assim, a aplicação de métodos advindos da teoria dos sistemas dinâmicos não lineares constituem os recursos para identificar propriedades relevantes nas transições, predição e evolução dos estados [11, 18, 17].

Com o desenvolvimento da teoria dos sistemas dinâmicos não lineares, tornou-se possível o estudo de padrões e auto-organização das redes neuronais que constituem o cérebro [81].



**Figura 2.2:** Ilustração de um neurônio e das conexões sinápticas.

Segundo Kantz [48] e Strogatz [82], caos é o comportamento aperiódico de longo prazo em um sistema determinístico com sensibilidade às condições iniciais, definido a partir das seguintes características:

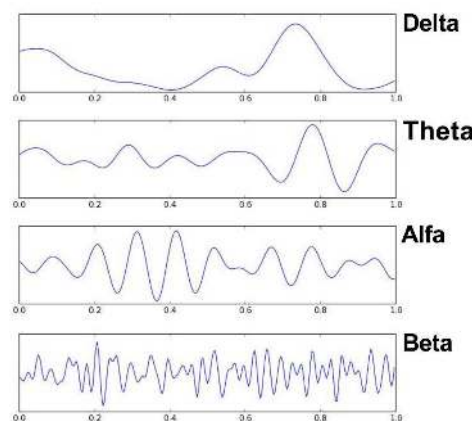
- presença de trajetórias que não convergem a pontos fixos;
- comportamento irregular intrínseco à não linearidade do próprio sistema, mesmo sem um componente estocástico;
- pequenas mudanças em trajetórias inicialmente próximas provocarão mudanças futuras com proporções exponenciais.

Em teoria, um sistema dinâmico é descrito por um estado e uma dinâmica, nos quais pequenas causas não necessariamente geram pequenos efeitos. O estado é determinado por todos os valores das  $n$ -variáveis em um dado instante de tempo, representados no espaço  $n$ -dimensional denominado espaço de fase. A dinâmica é determinada por um conjunto de leis ou equações que descrevem a evolução dos estados ao longo do tempo, sendo não linear no caso de equações não lineares. A evolução do sistema corresponde à série de estados no espaço de fase, definida pelas trajetórias que conectam consecutivamente esses estados.

## 2.3 Eletroencefalograma

O EEG foi um dos primeiros métodos não invasivos para mensuração da atividade cerebral humana. Em 1875, o fisiologista inglês Richard Caton [24] obteve os primeiros registros da atividade elétrica neuronal capturados diretamente do córtex de animais. Em 1929, o psiquiatra austríaco Hans Berger, realizando estudos [43] com seres humanos sobre os estados de sono e vigília, demonstrou que a atividade elétrica cerebral poderia ser lida diretamente no escalpe por meio de eletrodos, sem necessidade cirúrgica.

A técnica captura padrões de ondas na superfície cerebral por meio de impulsos elétricos gerados pela oscilação rítmica dos neurônios. Os padrões característicos são identificados de acordo com a sua frequência, amplitude, forma e local de origem, estando sujeitos a sofrerem atenuações devido a passagem pelo crânio, interferências por ruídos causados pelo movimento do globo ocular, atividade muscular ou interferência técnica (ruídos da rede elétrica ou erros na colocação dos eletrodos). Tradicionalmente, com o objetivo de interpretar a atividade rítmica que ocorre no córtex cerebral, os ritmos oscilatórios são categorizados genericamente na dimensão tempo-frequência como *Alfa*, *Beta*, *Delta* e *Theta*, ilustrados na Figura 2.3 e descritos resumidamente na Tabela 2.1. Além dessa abordagem, o sinal de eletroencefalograma também é objeto de estudo no campo interdisciplinar da análise da dinâmica não linear do cérebro [81].



**Figura 2.3:** Ilustração dos ritmos oscilatórios *Alfa*, *Beta*, *Delta* e *Theta*.

As primeiras aplicações da análise não linear no estudo do EEG foram realizadas em 1985 por Rapp *et al.* [71], na investigação da atividade neuronal do córtex motor de um macaco e pelos trabalhos de Babloyantz *et al.* [9], com as primeiras observações desse tipo de medida do EEG durante o sono de humanos. Até então, uma abordagem reducionista dificultava

Ritmo	Frequência (Hz)	Amplitude ( $\mu V$ )	Descrição
Delta ( $\delta$ )	0.1 a 4	100 a 200	Ocorre em algumas doenças do cérebro; está relacionado ao sono profundo.
Theta ( $\theta$ )	4 a 8	50 a 100	Está relacionado a situações de estresse mental, também é observado logo após o despertar e imediatamente antes de dormir; verificado no estado de sonolência.
Alfa ( $\alpha$ )	8 a 13	30 a 50	Observado quando o indivíduo mantém os olhos fechados, necessariamente com baixa atividade mental e relaxamento físico. Esforço mental e atenção visual provocam atenuações e até bloqueiam esse ritmo.
Beta ( $\beta$ )	13 a 30	< 30	Associado à atividade de concentração.

**Tabela 2.1:** Descrição da frequência e amplitude dos ritmos oscilatórios.

a compreensão de todos os mecanismos neurofisiológicos que surgem do cérebro como um sistema complexo, devido à complexa rede neuronal que conecta as diferentes áreas cerebrais. Como consequência, a teoria de sistemas dinâmicos não lineares e as suas aplicações, como dimensão e entropia, tem inserido novas técnicas, conceitos e ferramentas na análise de padrões emergentes da sincronização das redes neuronais cerebrais, padrões esses observados nos dados de EEG.

A aplicação multidisciplinar da dinâmica não linear tem caracterizado a dinâmica cerebral como não linear. Por conseguinte, o EEG vem sendo tratado como um sistema não linear caótico, apontando que a dinâmica da atividade cerebral é determinística. Essa afirmação baseia-se na reconstrução do espaço de fase da série temporal que constitui o EEG.

## 2.4 Análise não linear de séries temporais

Uma série temporal é uma sequência ordenada de valores de uma variável  $y(t)$ , obtidos em intervalos de tempos  $t_k$  [85]:

$$Z_t = \{Z_t \in \mathbb{R} | t = 1, 2, 3, \dots, N\}. \quad (2.1)$$

A análise de séries temporais possui diferentes focos de abordagens, dependendo da área de estudo [15]. Os recursos computacionais atuais permitem estudar séries temporais por meio de técnicas que capturam a não linearidade dos dados [64, 80]. Diferente da análise linear, em que um conjunto de métodos pode ser usado para descrever as relações lineares com um número reduzido de parâmetros, a abordagem não linear realiza uma avaliação menos reducionista da dinâmica subjacente [64]. Entretanto, a sua aplicação necessita de considerações sutis em decorrência da alta sensibilidade a distorções nos dados [78], situação em que as técnicas lineares são mais robustas.



Pesquisas recentes [94, 95, 92, 49, 28, 29] apontam uma nova forma de identificar medidas através de modelos de redes que mapeiam os estados dos sistemas nos seus vértices. Essa nova abordagem transfere a análise dos dados do fenômeno da dimensão tempo-frequência para a estrutura topológica de uma rede complexa em que métodos advindos da teoria dos grafos, mecânica estatística e sistemas não lineares são aplicados para identificar características que venham contribuir para o ganho de informação com o propósito de compreender o fenômeno em estudo.

No contexto não linear, os dados das séries são obtidos a partir da evolução de sistemas dinâmicos. Tais sistemas são constituídos por um sistema de equações não lineares, tendo o tempo como variável independente. Em geral, duas categorias principais de sistemas dinâmicos são definidas a partir do tipo de variável que designa o tempo. Aqueles em que a variável tempo é contínua ( $t \in \mathbb{R}$ ) são descritos por sistemas de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{2.2}$$

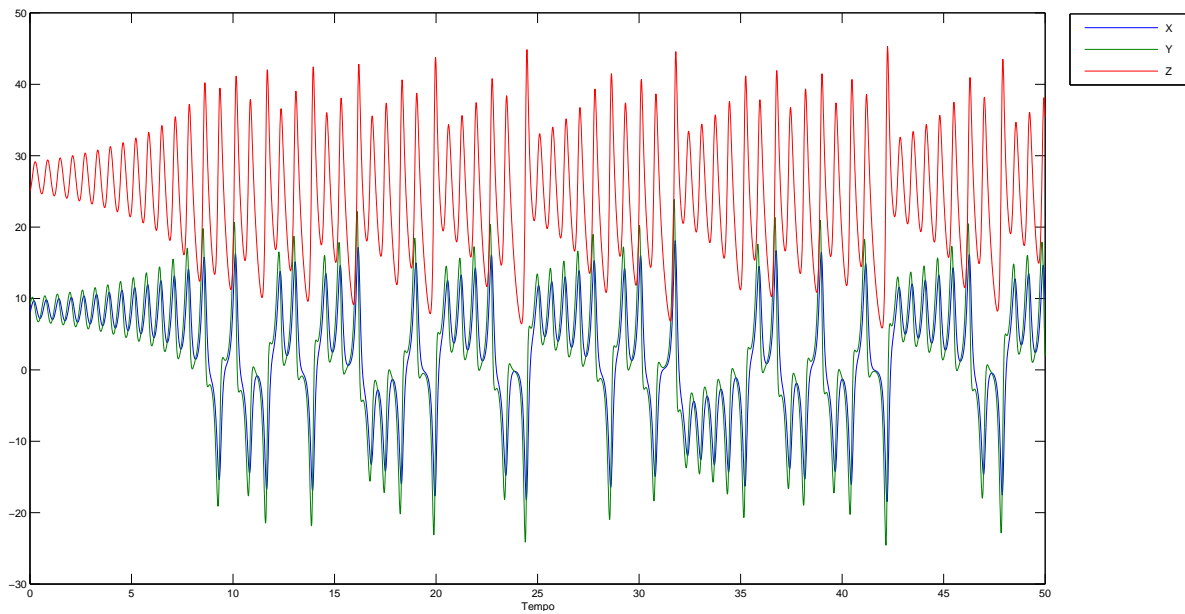
em que  $(x_1, \dots, x_n)$  são as variáveis dependentes do tempo e  $f_1, \dots, f_n$  são as funções do fluxo  $n$ -dimensional. Quando o tempo é tomado como variável discreta ( $t \in \mathbb{N}$ ), temos um sistema dinâmico discreto:

$$\begin{aligned} x_{1t} &= f_1(x_{1t-1}, \dots, x_{nt-1}), \\ &\vdots \\ x_{nt} &= f_n(x_{1t-1}, \dots, x_{nt-1}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Um exemplo de sistema dinâmico contínuo não linear é dado pelo sistema de Lorenz[50]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(-x + y) \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta z + xy. \end{aligned} \tag{2.4}$$

A dinâmica do sistema lorenziano é exemplificada na Figura 2.4, em que observamos as flutuações das variáveis  $x, y$  e  $z$  em função do tempo. O conjunto de estados percorrido pelo sistema ao longo do tempo constitui a trajetória ou órbita do sistema. As órbitas de estados são representadas em um espaço de estado ou fase, constituído por um conjunto de pontos do  $\mathbb{R}^n$ , tendo como componetes, as variáveis do sistema ao longo da evolução temporal.

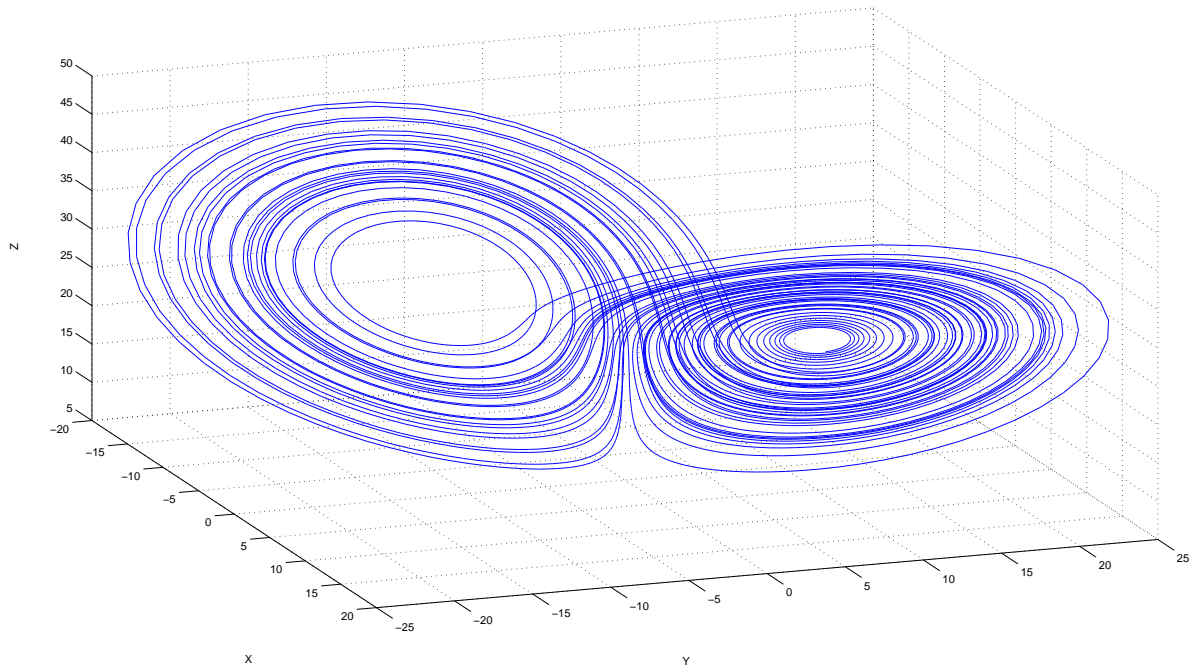


**Figura 2.4:** Séries temporais das componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$  do sistema de Lorenz, para  $\sigma = 10$ ,  $r = 8$ ,  $\beta = 8/3$  e  $\Delta t = 0.01$ .

A Figura 2.5 apresenta o espaço de fase do sistema de Lorenz obtido pela plotagem da evolução das variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  ao longo do tempo. Por ser um modelo teórico, todas as variáveis encontram-se disponíveis para serem utilizadas na construção do espaço de fase. Experimentalmente, para dados extraídos de problemas reais, não há uma maneira de identificar *a priori* a forma das equações de evolução nem as variáveis de estados. Nesse caso, observa-se uma única variável dependente [48] em uma série temporal em que são aplicadas técnicas para identificar a dimensão e a reconstrução do espaço de estados em um espaço de fase topologicamente aproximado ao original [48, 80].

### 2.4.1 Tempo de defasagem

A reconstrução do espaço de fase está implicitamente relacionada com a escolha do tempo de defasagem  $\tau$ , definido como o intervalo de tempo adicionado a série temporal para obter um conjunto de vetores que representem uma aproximação do espaço de fase original. Em teoria, qualquer valor pode ser utilizado para esse parâmetro [80]. Entretanto, deve-se levar em consideração um valor apropriado. Tipicamente, valores pequenos apresentam uma reconstrução achatada ou comprimida, enquanto valores maiores produzem muito espalhamento. Desse modo, a medida estimada deve representar topologicamente o sistema original de forma apropriada. Na Figura 2.6, veem-se espaços de fases reconstruídos com diferentes



**Figura 2.5:** Espaço de fase do sistema de Lorenz, obtido a partir das séries da Figura 2.4.

tempos de defasagem.

Takens [83] e Packard *et al.* [67] demonstraram que, em vez de usar derivadas,  $\frac{dy(t)}{dt}$ ,  $\frac{d^2y(t)}{dt^2}$ ,  $\dots$ , ou equações de diferença,

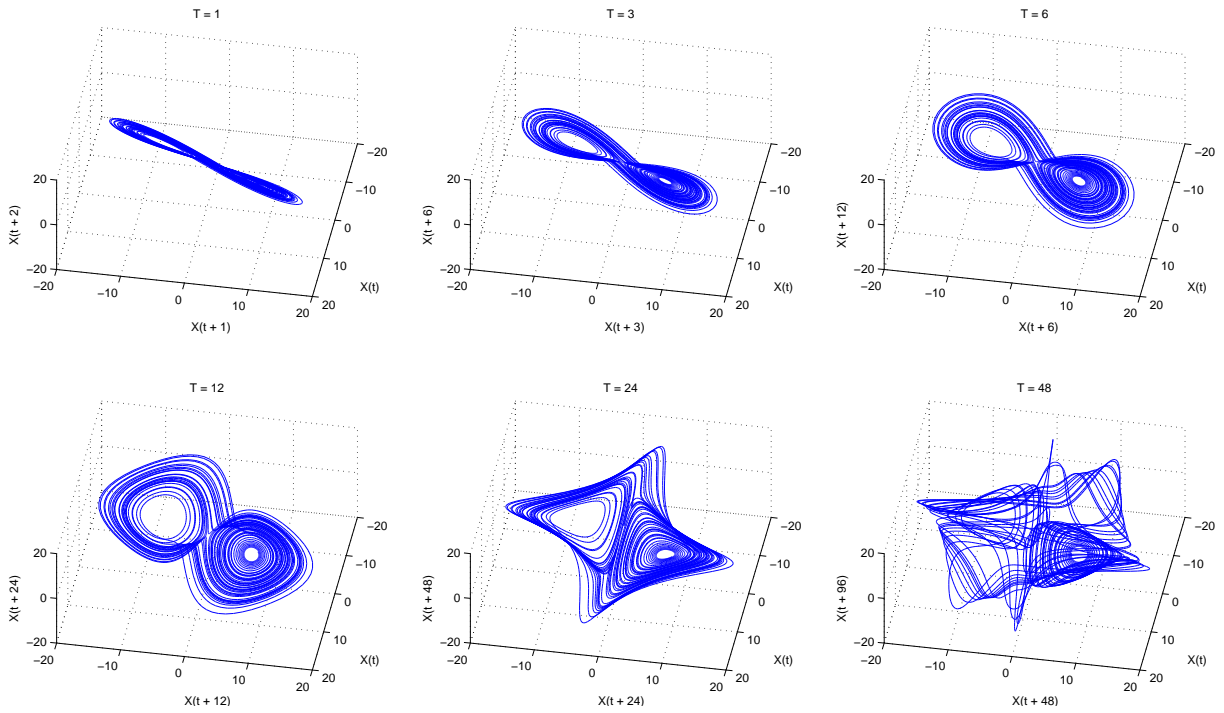
$$\frac{dy}{dt} \simeq \frac{y(t + \tau) - y(t)}{\tau}, \tau \rightarrow 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} \simeq \frac{y(t + 2\tau) - 2y(t + \tau) + y(t)}{\tau^2}, \tau \rightarrow 0, \quad (2.6)$$

$$\vdots \quad (2.7)$$

como as variáveis que constituem o espaço, se podem usar diretamente valores defasados de uma série temporal  $y(t)$ ,  $y(t + \tau)$ ,  $y(t + 2\tau)$ ,  $\dots$ , constituída por um conjunto infinito de pontos, obtidos com ausência de ruído. Takens provou que o espaço de fase reconstruído é topologicamente equivalente ao espaço de fase original, fundamentando o método das coordenadas defasadas.

Os dois métodos mais usados na estimação do tempo de defasagem  $\tau$  são a função de autocorrelação (FA) [42] e a função de informação mútua média (FIMM) [39]. A estimação de  $\tau$  pode ser sugerida pelo primeiro mínimo local da função de informação mútua média,



**Figura 2.6:** Qualidade das reconstruções do espaço de fase para  $\tau = 1$ ,  $\tau = 3$ ,  $\tau = 6$ ,  $\tau = 12$ ,  $\tau = 24$  e  $\tau = 48$ .

ou pelo primeiro zero da função de autocorrelação. A função de informação mútua média, defini por:

$$I(\tau) = \sum_{n=1}^N P(x_n, x_{n+\tau}) \log_2 \frac{P(x_n, x_{n+\tau})}{P(x_n)P(x_{n+\tau})}, \quad (2.8)$$

atua como uma função de correlação não linear sobre os dados de uma série temporal [39]. Define-se  $I(\tau)$  como a quantidade de informação obtida sobre  $x_n$  a partir da observação de  $x_{n+\tau}$ , de modo a identificar o quão suficientemente são independentes entre si, ainda mantendo um mínimo de correlação, a ponto de servirem como coordenadas de um vetor defasado no tempo [39, 6]. Uma dificuldade subjacente a esse método é a necessidade de estimar-se previamente as distribuições de probabilidade conjunta  $P(x_n, x_{n+\tau})$ , e as probabilidades  $P(x_n)$  e  $P(x_{n+\tau})$  dos estados do sistema [80].

A função de autocorrelação  $\rho(\tau)$  representa o grau de semelhança existente em uma série ao longo do tempo [10]:

$$\rho(\tau) = \frac{\sum_{n=1}^N (x_{n+\tau} - \bar{x})(x_n - \bar{x})}{\sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2}. \quad (2.9)$$

Essa função estima a medida da dependência linear em um mesmo sinal defasado e pode ser

utilizada como uma primeira estimativa [77]. Em uma série com comportamento estritamente aleatório,  $\rho(\tau)$  apresenta um valor unitário para  $\tau = 0$ , sendo praticamente nula a função para qualquer outro valor. A autocorrelação também apresenta comportamento periódico quando aplicada a uma série periódica. Caso a série apresente um comportamento quase periódico,  $\rho(\tau) \rightarrow 0$  à medida que  $\tau \rightarrow \infty$  [22]. O menor valor de  $\tau$  para  $\rho(\tau) \leq 0$  é uma estimação suficiente para determinar o tempo de defasagem. Para alguns sistemas simples, a aplicação da função de autocorrelação resulta em uma pobre reconstrução, mas suficiente na maioria dos casos [80].

### 2.4.2 Dimensão de imersão

O primeiro passo para analisar os dados é reconstruir o espaço de fase para identificar a dinâmica do sistema. Uma forma de identificar uma dimensão  $\mathbb{R}^n$  para reconstrução do espaço de fase é por meio do método das coordenadas defasadas (MCD) [75, 67, 83] e do método dos falsos vizinhos próximos (FNN) [56], em que a cada reconstrução em uma dimensão específica observa-se a sua consistência; não obtendo uma definição plausível, eleva-se a dimensão, e o procedimento é repetido até alcançar uma representação aceitável. A Figura 2.8 mostra a reconstrução do espaço de fase usando apenas a variável  $x$  do sistema lorenziano.

O teorema de imersão de Taken [83] e os trabalhos Grebogi *et al.* [59] apontam as condições suficientes para reconstrução do espaço de fase. A reconstrução é obtida pela segmentação dos dados da série  $y(t)$  em grupos de vetores de estado  $\phi_t$  por meio da defasagem  $\tau$ , com dimensão  $n$  igual à dimensão de imersão desejada:

$$\begin{aligned}\phi_0 &= (y_{(0+0\tau)}, y_{(0+1\tau)}, \dots, y_{(0+(n-1)\tau)}) , \\ \phi_1 &= (y_{(1+0\tau)}, y_{(1+1\tau)}, \dots, y_{(1+(n-1)\tau)}) , \\ \phi_2 &= (y_{(2+0\tau)}, y_{(2+1\tau)}, \dots, y_{(2+(n-1)\tau)}) , \\ &\vdots \\ \phi_t &= (y_{(t+0\tau)}, y_{(t+1\tau)}, \dots, y_{(t+(n-1)\tau)}) .\end{aligned}\tag{2.10}$$

Cada vetor representa um estado em que são calculadas distâncias em relação aos seus vizinhos, denotados por  $\phi'_t$ :

$$\phi'_t = (y'_{(t+0\tau)}, y'_{(t+1\tau)}, \dots, y'_{(t+(n-1)\tau)}) .\tag{2.11}$$

Em seguida, incrementa-se a dimensão  $\mathbb{R}^{n+1}$ , obtendo os vetores de estados  $\Phi_t$  e  $\Phi'_t$  referentes aos vetores  $\phi_t$  e  $\phi'_t$  respectivamente, em uma nova imersão:

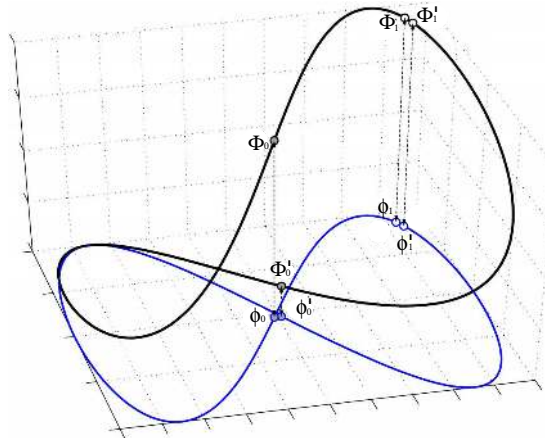
$$\Phi_t = (y_{(t+0\tau)}, y_{(t+1\tau)}, \dots, y_{(t+(n-1)\tau)}, y_{(t+n\tau)}), \quad (2.12)$$

$$\Phi'_t = (y'_{(t+0\tau)}, y'_{(t+1\tau)}, \dots, y'_{(t+(n-1)\tau)}, y'_{(t+n\tau)}), \quad (2.13)$$

e novamente, calculam-se as distâncias. A diferença da distância entre duas dimensões consecutivas é definida por:

$$\|\Phi'_t - \Phi_t\|^2 - \|\phi'_t - \phi_t\|^2 = (y'_{(t+n\tau)} - y_{(t+n\tau)})^2. \quad (2.14)$$

Após o incremento da dimensão, pontos próximos que forem distanciados serão contabilizados como falsos vizinhos. Esse procedimento é conhecido como o método dos falsos vizinhos próximos [56], referência para muitos métodos de estimação da dimensão de imersão [80]. A Figura 2.7 ilustra o procedimento do método dos falsos vizinhos próximos, em que temos uma reconstrução na dimensão bidimensional representada pela órbita em azul, como os estados  $\phi_0$  e  $\phi_1$  e seus respectivos vizinhos  $\phi'_0$  e  $\phi'_1$ . Após o incremento dimensional, representado pela órbita em preto, nota-se as respectivas projeções dos pontos  $\phi_0$ ,  $\phi_1$ ,  $\phi'_0$  e  $\phi'_1$  da dimensão anterior definidos como  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Phi'_0$  e  $\Phi'_1$  na nova dimensão. Os estados  $\phi_0$  e  $\phi'_0$  são contabilizados como falsos vizinhos, suas respectivas projeções  $\Phi_0$  e  $\Phi'_0$  na dimensão seguinte são distanciadas. As projeções  $\Phi_1$  e  $\Phi'_1$  dos estados  $\phi_1$  e  $\phi'_1$ , permanecem próximas, evidenciando vizinhos verdadeiros.



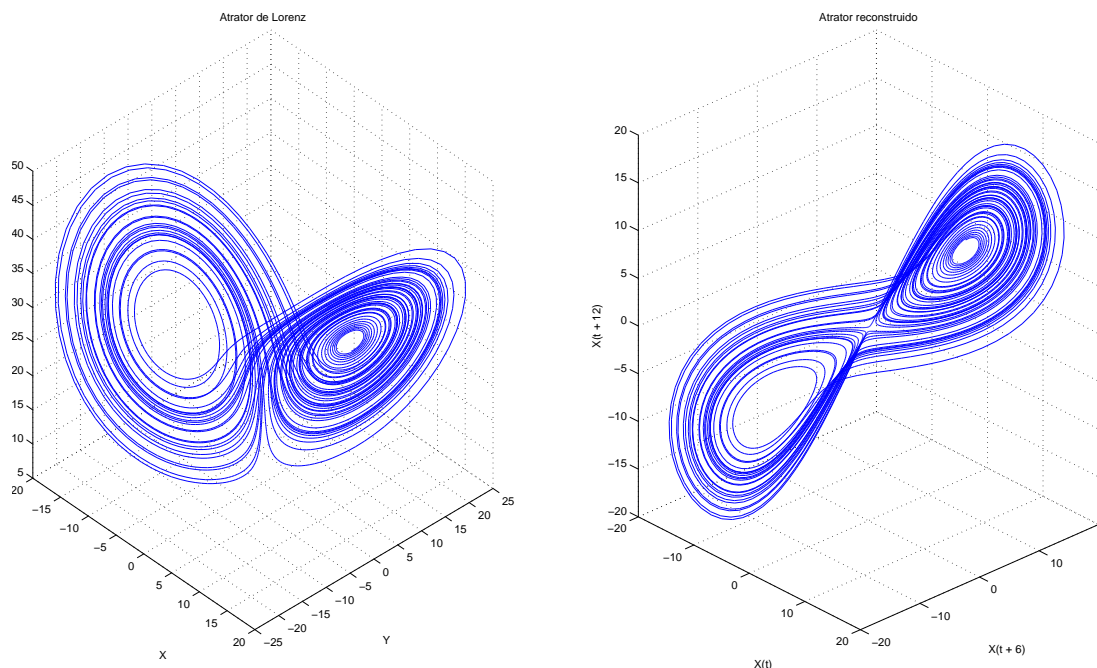
**Figura 2.7:** Ilustração do método dos falsos vizinhos próximos. Modificado de [25].

Basicamente, dois pontos são falsos vizinhos se:

$$\frac{|y'_{(t)+n\tau} - y_{(t)+n\tau}|}{\|\phi'_{t'} - \phi_t\|} \geq \varepsilon; \quad (2.15)$$

sendo  $\varepsilon$  muito pequeno, vizinhos legítimos serão contabilizados como falsos. Entretanto, vizinhos falsos serão omitidos por valores muito grandes de  $\varepsilon$ . A melhor dimensão de imersão consiste em eliminar, a cada incremento dimensional, interseções entre as órbitas do espaço de fase e progressivamente atingir uma dimensão que apresente estabilidade na distância entre seus estados.

Cada distância de um vizinho  $\phi'_t$  de um estado  $\phi_t$  será comparada sistematicamente com outra distância obtida na dimensão seguinte, definida por  $\Phi_t$  e  $\Phi'_t$ . Pares realmente vizinhos permanecerão próximos com o incremento da dimensão, estabelecendo uma consistência em relação ao ajuste no espaço. Embora eficaz, esse método é sensivelmente influenciado por ruídos nos dados [56]; além disso, a escolha de  $\varepsilon$  será um critério subjetivo, trata-se de uma medida a ser estimada pela distribuição espacial dos estados [80].



**Figura 2.8:** Espaço de fase do sistema de Lorenz e a sua respectiva reconstrução. A figura da esquerda representa a plotagem de 5.000 pontos com as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Na figura da direita, temos o espaço de fase reconstruído, usando apenas a coordenada  $x$  do sistema, com  $\tau = 6$ .

## 2.5 Diagrama de recorrência

A visualização de espaços de fase com alta dimensionalidade restringe-se a uma projeção no espaço de duas ou três dimensões. Entretanto, o estudo do fenômeno de recorrência de estados tem-se tornado uma área de interesse, principalmente devido ao desenvolvimento do diagrama de recorrência introduzido por Eckmann *et al.* [31] para visualizar recorrências de estados em espaços de fase com dimensões elevadas.

Partindo da construção de um diagrama bidimensional, diferentes tipos de sistemas podem ser caracterizados a partir de propriedades recorrentes dos estados do sistema [62]. O diagrama de recorrência é uma matriz  $R$ , em que  $R_{i,j} = 1$  se o estado  $\phi_j$  é vizinho de  $\phi_i$ ; do contrário,  $R_{i,j} = 0$ . Na sua forma original [31], somente os  $k$ -vizinhos mais próximos de um estado particular do espaço de fase são considerados. Uma das vantagens do método está na possibilidade de comparar diferentes sistemas pela taxa de recorrência:

$$RR = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} R_{i,j}. \quad (2.16)$$

Outra maneira de definir a vizinhança de um estado  $\phi_i$  é usar um raio  $r$  como limiar [29],

$$R_{i,j}(r) = H(r - |\phi_i - \phi_j|). \quad (2.17)$$

Em que  $|\phi_i - \phi_j|$  é a distância euclidiana:

$$|\phi_i - \phi_j| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_{(i+(k-1)\tau)} - y_{(j+(k-1)\tau)})^2}. \quad (2.18)$$

E  $H(t)$  é a função degrau unitária:

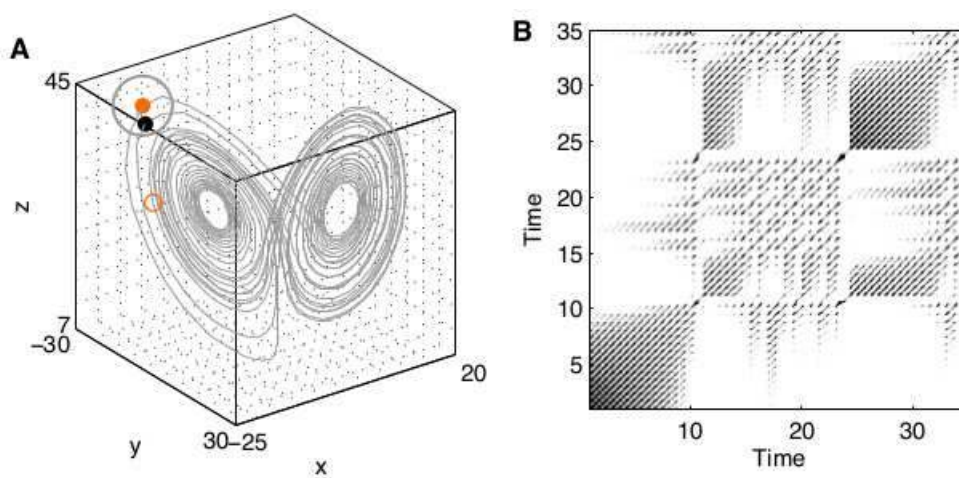
$$H(t) = \begin{cases} 1, (t \geq 0); \\ 0, (t < 0). \end{cases} \quad (2.19)$$

A aplicações de técnicas que possibilitem a introdução de medidas de complexidade para distinção e identificação de características em diagramas de recorrência popularizam-se em decorrência da análise quantificada de recorrência (RQA) [87]. A sua popularidade está relacionada à eficiência em quantificar diferenças de sistemas complexos e à estimação de medidas dinâmicas invariantes [65]. A Figura 2.9 apresenta o processo de construção de uma



matriz de recorrência por meio de um espaço de fase reconstruído, usando o critério de raio de vizinhança. Um estado  $\phi_i$  no tempo  $i$  (ponto vermelho) é recorrente a um estado vizinho  $\phi'_j$  no tempo  $j$  (ponto preto) quando a trajetória do espaço de fase está na sua vizinhança  $r$  (círculo cinza). Estados dentro da vizinhança são marcados com valor 1 na matriz de recorrência e com zero, caso contrário (círculo vermelho fora do círculo cinza).

Além da descrição da evolução da dinâmica não linear de espaços de fase reconstruídos, o diagrama de recorrência também permite identificar séries temporais de diferentes sistemas, como o periódico, o caótico e o ruído branco, exemplificados na Figura 2.10.

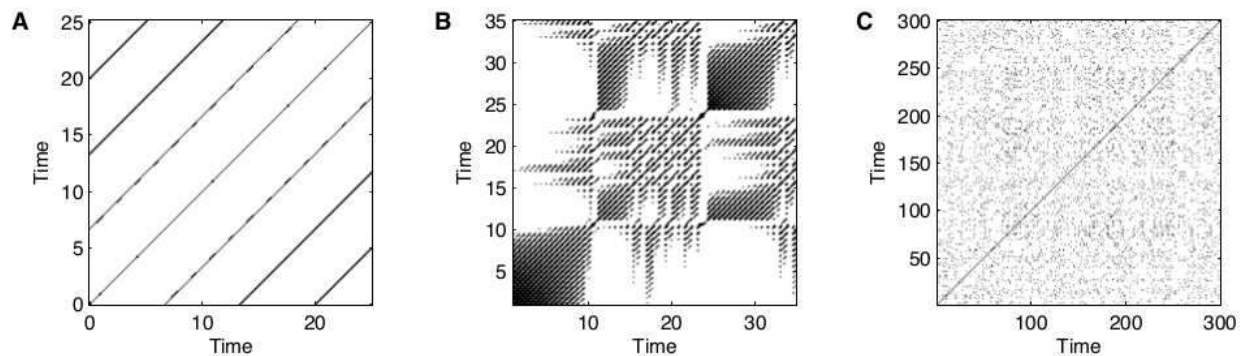


**Figura 2.9:** Diagrama de recorrência do sistema 2.4, definido com raio  $r = 5$ . A figura (A) representa o processo de construção da matriz vista na figura (B) [29].

Devido à característica da matriz de recorrência possibilitar a sua conversão em uma matriz de adjacência, a análise de um sistema complexo por meio de um diagrama de recorrência possibilita a construção e o estudo de redes complexas relacionados ao espaço de fase do sistema, uma aplicação promissora, principalmente à contribuição da análise e identificação de propriedades em espaços de fase reconstruídos com alta dimensionalidade [29].

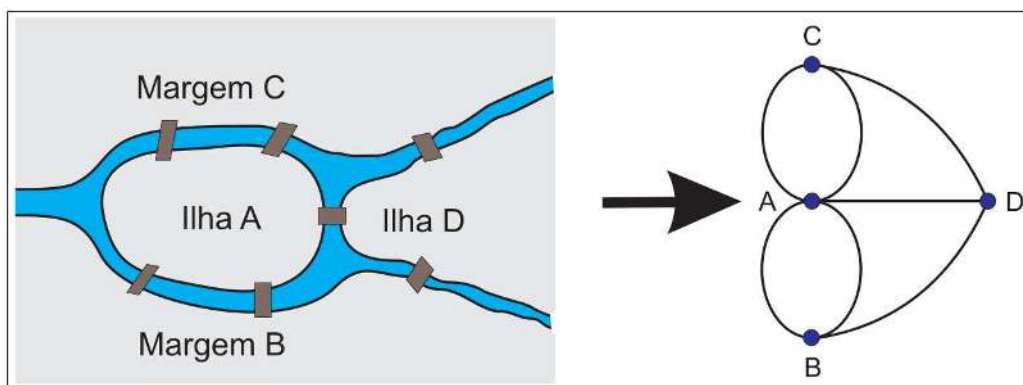
## 2.6 Fundamentos de redes complexas

A teoria dos grafos nasceu durante a solução do problema das sete pontes de Königsberg. O desafio era determinar se alguém poderia visitar quatro regiões interligadas por sete pontes, de modo que, cada ponte fosse cruzada apenas uma única vez. Esse problema foi solucionado por Leonhard Euler [33] por meio de um engenhoso modelo matemático que representava as



**Figura 2.10:** Exemplos de diagramas de recorrência para um sistema periódico (A), caótico (B) e ruído branco (C) [29].

regiões como vértices e as pontes como arestas, demonstrando em seguida, que o problema não tinha solução. Inicialmente, tratava-se de um modelo estático com poucas aplicações práticas[52].



**Figura 2.11:** Ilustração das pontes de Königsberg antes de 1875 e o respectivo grafo de Euler [73].

Com os trabalhos de Paul Erdős e Alfred Rényi [32], surge um novo conceito que combinava a teoria dos grafos com a teoria da probabilidade para o tratamento de grafos aleatórios, conhecido como redes complexas. Na década de 50, aplicações práticas da teoria das redes complexas foram usadas pela sociologia para analisar redes de interações sociais [36], demonstrando que a teoria pode ser usada como ferramenta para análise de dados empíricos [73]. Após os trabalhos relacionados ao estudo das redes complexas publicados por Duncan Watts e Steven Strogatz [30], Albert-László Barabási e Réka Albert [12], os grafos passaram a ser a base matemática da nova teoria das redes complexas [90].

Desde então, redes complexas foram usadas para modelagem e simulação [52, 86, 74, 55]. Em 1967, Stanley Milgram [58] descobriu uma importante propriedade presente em redes sociais

por meio de um experimento com envio de cartas, demonstrando que a distância média entre duas pessoas nos Estados Unidos é próxima de seis. Com a evolução dos conceitos adquiridos em diversas áreas de aplicação, a teoria de redes complexas passou a divergir da teoria dos grafos em três aspectos [73]:

- está relacionada com a modelagem de redes reais, por meio de análise de dados empíricos;
- as redes não são estáticas, mas evoluem no tempo, modificando sua estrutura;
- não são consideradas apenas objetos topológicos, mas constituem estruturas onde processos dinâmicos podem ser simulados.

A estrutura de uma rede representa algum tipo de interação por meio de um conjunto  $R(V, E)$ , onde  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$  representa o conjunto de vértices ou nós da rede, e  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_M\}$  define o conjunto de conexões ou arestas que conectam pares de vértices. Em muitas redes, as conexões são associadas com pesos para representar distância, capacidade, tráfego ou alguma outra medida de ligação entre dois vértices. Neste caso, a informação adicional é representada por um conjunto  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_M\}$ , sendo a rede definida por  $R(V, E, W)$  [88, 73]. Além de pesos, as conexões podem ser orientadas ou não orientadas, dependendo da noção de sentido de entrada ou saída em um dado vértice.

Uma rede pode ser armazenada por meio de listas, guardando apenas os pares de vértices  $(v_i, v_j)$  conectados. Para conexões com pesos, uma lista com três elementos será usada para guardar a informação extra,  $(v_i, v_j, w_{ij})$ . Além disso, em redes com conexões orientadas, a ordem dos vértices da lista deve ser levada em consideração. Uma alternativa ao uso de listas para representar computacionalmente uma rede complexa é a construção de matrizes de adjacências. Por meio de uma matriz  $A$ , cada elemento  $a_{ij} \neq 0$  representará a conexão entre os vértices  $(v_i, v_j)$ . Assim como as listas, as matrizes podem ser usadas para representar conexões com pesos e orientações entre os pares de vértices.

### 2.6.1 Propriedades de redes complexas

As redes complexas apresentam diferentes topologias dependendo das leis que regem a sua evolução. Conhecendo a estrutura da rede é possível determinar quais aspectos topológicos

podem ser usados para classificar estas redes a partir de medidas estruturais que forneçam valores estatisticamente semelhantes [73]. A seguir, são apresentadas as medidas e propriedades usadas neste trabalho.

### Conectividade ( $k$ )

O grau de conectividade  $k_i$  de um dado vértice  $v_i$  é obtido pelo número de conexões representadas por  $n$  arestas  $e_j$  ligadas a  $v_i$ . Define-se essa medida, em uma rede não orientada, como a seguir:

$$k_i = \sum_{j=1}^n e_j. \quad (2.20)$$

A conectividade é uma medida utilizada para caracterizar um determinado tipo de rede por meio da sua distribuição, identificando nas configurações das conexões alguma forma aleatória ou uma lei de formação. Com as medidas locais  $k_i$ , define-se uma medida global  $\langle k \rangle$  calculada pela média amostral do número de conexões entre os vértices. Essa medida é conhecida como conectividade média da rede,

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i. \quad (2.21)$$

A soma dos graus dos vértices  $k_i$  da rede será o dobro do número efetivo de arestas  $M$ ,  $\sum_{i=1}^N k_i = 2M$ . Assim, a conectividade média pode ser determinada por  $\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i = \frac{2M}{N}$ .

### Força ( $s$ )

Para redes com pesos, é possível determinar a força de um vértice  $v_i$ . Esta medida utiliza os pesos  $w_{ij}$  das conexões adjacentes,

$$s_i = \sum_{j=1}^N w_{ij}. \quad (2.22)$$

Uma medida global pode ser obtida pela força média da rede,

$$\langle s \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i. \quad (2.23)$$

Em geral, estas medidas servem para identificar vértices altamente conectados e quantificar densidades de conexões, determinando a robustez ou vulnerabilidade de uma rede [68].

### Densidade ( $\rho$ )

Usando a quantidade total de vértices e conexões, pode-se definir a densidade  $\rho$  de conectividade da rede. Considerando uma rede completamente conectada, onde cada vértice está conectado a todos os outros, tem-se  $k_i = N - 1$  para qualquer  $i$ . Além disso, o número total de arestas é definido, ou seja,  $N(N - 1)/2$ . Assim, a densidade é obtida pelo quociente entre a quantidade  $M$  de arestas contidas na rede, e a suposta quantidade total de aresta com todos os vértices conectados. Dessa forma:

$$\rho = \frac{M}{N(N - 1)/2} = \frac{\langle k \rangle}{N - 1}. \quad (2.24)$$

### Entropia ( $H$ )

Esta medida representa o grau de heterogeneidade de uma rede [51]. É um conceito importante da teoria da informação [20] e da termodinâmica, relacionado a desordem de um sinal ou sistema. A entropia,

$$H = - \sum_{i=1}^n P(k_i) \log P(k_i), \quad (2.25)$$

definida em uma função da conectividade ( $k_i$ ), em que  $P(k_i)$  é a respectiva probabilidade de conectividade. Está relacionada a robustez de redes complexas [8].

### Menor caminho médio ( $\ell$ ) e diâmetro da rede ( $\ell_{max}$ )

Um aspecto importante de uma rede é a distância entre dois vértices. Esses vértices podem ser adjacentes ou estarem conectados por uma sequência de vértices intercalados por arestas. Define-se um caminho, como o conjunto de vértices e arestas conectados de forma adjacente e sem repetições. Por exemplo, as arestas  $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}$  formam um caminho de  $v_1$  até  $v_5$ .

Em uma rede com arestas sem peso e não direcionadas, o comprimento do menor caminho é o tamanho do caminho com o menor número de arestas. No caso de redes com pesos, as arestas podem representar distâncias físicas, onde a distância total será a soma dos pesos. O comprimento do menor caminho  $d_{ij}$  entre dois vértices  $v_i$  e  $v_j$  é o menor comprimento entre todos os possíveis caminhos que conectam estes vértices.

Uma matriz de distâncias  $D$  é usada para representar a distância entre todos os pares de vértices da rede em seus elementos  $d_{ij}$ , e o maior valor  $d_{max}$  encontrado na matriz será o diâmetro da rede. A média entre os valores de todos os elementos da matriz  $D$  define o menor caminho médio  $\ell$ , onde

$$\ell = \frac{1}{N(N-1)/2} \sum_i^{N-1} \sum_j^{N-1} d_{ij}, i \neq j. \quad (2.26)$$

Para o cálculo da distância, são considerados apenas componentes conectados, caso contrário  $d_{i,j} \rightarrow \infty$ . O menor caminho médio  $\ell$  desempenha um papel fundamental no transporte e comunicação numa rede. Como esse valor diverge com a existência de componentes desconectados, limita-se o cálculo apenas a pares de vértices pertencentes ao maior componente conectado da rede [30].

Em redes de grande escala, o menor caminho médio é muito pequeno comparado ao diâmetro da rede [63]. Estas redes tendem a apresentar um crescimento logarítmico de  $N$ , muito maior que  $\ell$ . Esse fenômeno, conhecido como efeito mundo pequeno, foi observado primeiramente por Milgram em seu experimento social e destaca a possibilidade de existir apenas um pequeno número de vértices intermediários entre dois vértices.

### **Coeficiente de agrupamento ( $cc$ )**

Redes complexas como as redes sociais, apresentam uma alta ocorrência de pequenas sub-redes formadas por três vértices totalmente conectados. Estes conglomerados, chamados também de transitividade, indicam a probabilidade de dois amigos quaisquer A e B terem um amigo C em comum [73]. O coeficiente de agrupamento para uma rede não direcionada é definido pela razão do número de arestas  $m$  entre os vizinhos de um dado vértice  $v_i$ , e o número máximo de arestas entre esses vizinhos. Supondo que  $v_i$  tenha  $n$  vizinhos, e todos

os vizinhos estão conectados entre si, o número máximo de conexões ou arestas é dado por  $n(n-1)/2$ . Assim, o valor do coeficiente de agrupamento  $C_i$  do vértice  $v_i$  é definido por:

$$cc_i = \frac{2m}{n(n-1)/2}. \quad (2.27)$$

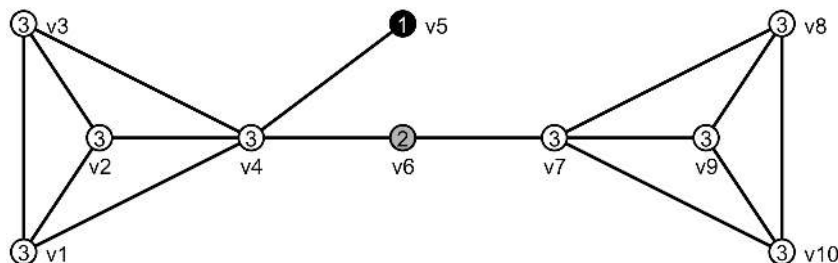
O coeficiente de agrupamento está definido somente para vértices com conectividade maior que um. Desse modo, assumindo que todos os coeficientes estavam definidos, pode-se obter o coeficiente de agrupamento médio da rede:

$$\langle cc \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i. \quad (2.28)$$

Além dessa definição, existem outras definições relacionadas à conectividade hierárquica dos vértices [72] e à redes com pesos [4] ou direcionadas [35].

### k-cores ( $k_c$ )

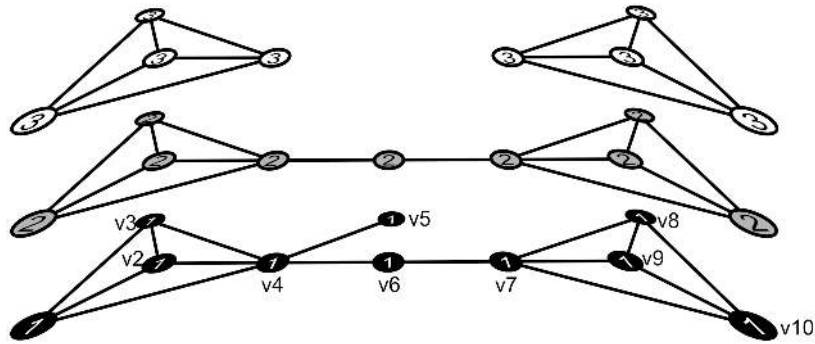
A distribuição da conectividade pode revelar uma concentração de conexões em torno de um dado vértice. Entretanto, para identificar a existência de conglomerados de alta conectividade, faz-se a decomposição da rede na maior sub-rede possível onde todos os vértices apresentem uma dada conectividade  $k$  [46, 27]. Estes conglomerados são conhecidos como  $k$ -cores, onde  $k$  representa a menor conectividade dentro do conglomerado.



**Figura 2.12:** Rede com diferentes níveis de conectividade [27].

Um  $k$ -core irá conter todos os vértices que apresentem no mínimo conectividade de nível  $k$ . A Figura 2.12 exibe uma rede com o valor da conectividade dos respectivos vértices. Como pode ser visto na Figura 2.13, cada nível superior é obtido pela remoção dos vértices que

possuem nível de conectividade abaixo do respectivo  $k$ -core. Por exemplo, o conglomerado  $2$ -core será constituído por todos os vértice com conectividade igual ou superior a dois, no agrupamento  $3$ -core estarão os vértices com conectividade mínima igual a três, e assim sucessivamente.



**Figura 2.13:** Subredes de  $k$ -cores. A figura apresenta a sobreposição de níveis com  $1$ -core,  $2$ -core e  $3$ -core [27].

Uma característica a ser observada em redes com conglomerados, está relacionada a identificação do componente conexo que apresenta a maior quantidade de vértices, conhecido como componente gigante da rede. Na Figura 2.13 o agrupamento  $3$ -core apresenta dois componentes disjuntos. Desse modo, algumas medidas relacionadas com a distância entre vértices devem ser criteriosamente escolhidas de modo a considerar esse tipo de situação. Em geral, o componente gigante será usado para o cálculo de medidas relacionadas com distâncias na rede.

### Centralidade de Proximidade ( $cc_r$ )

Com o conceito de distância, pode-se definir uma medida de proximidade para indicar o quanto um vértice está afastado de outros na rede. A centralidade de proximidade [76] de um vértice  $v_i$  é dada pelo inverso da soma das distâncias desse vértice em relação a todos os demais. Ou seja,

$$cc(v_i) = \frac{1}{\sum_{j=1}^N d_{ij}}. \quad (2.29)$$

Considerando a menor distância quando  $d_{ij} = 1$  (vértice diretamente conectado), para uma rede com  $N$  vértices, sendo  $N - 1$  o número máximo de vizinhos, define-se o maior valor



para esta medida por  $cc_{max}(v_i) = \frac{1}{N-1}$ . Esta medida exprime a facilidade de uma informação chegar ao vértice  $v_i$ . Evidentemente, vértices com elevada centralidade de proximidade apresentam uma configuração com alta conectividade. A partir da centralidade de proximidade máxima, define-se uma medida relativa,

$$cc_r(v_i) = \frac{cc(v_i)}{cc_{max}(v_i)} = \frac{N-1}{\sum_{j=1}^N d_{ij}}. \quad (2.30)$$

### Centralidade de Intermediação ( $bc$ )

Esta medida revela a significância de um vértice ou aresta na composição de caminhos entre outros vértices. A centralidade de intermediação [40], embora baseada em interligações entre pares de vértices, pode ser aplicada em redes com componentes desconexos. O conceito de intermediação parcial, influência que um dado vértice  $v_k$  pode exercer sobre os seus pares, é definido como:

$$b_{ij}(v_k) = \begin{cases} 0, (d_{ij} = \infty); \\ \frac{g_{ij}(v_k)}{g_{ij}}, (d_{ij} \neq \infty); \end{cases} \quad (2.31)$$

onde  $g_{ij}(v_k)$  é a quantidade de caminhos entre  $v_i$  e  $v_j$  que passam por  $v_k$ , e  $g_{ij}$  a quantidade total de caminhos entre  $v_i$  e  $v_j$ . A soma de todas as intermediações parciais denota a centralidade de intermediações

$$bc(v_k) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij}(v_k), i, j \neq k, \quad (2.32)$$

indicando o potencial do vértice  $v_k$  para controlar o fluxo de informações entre pares de vértices da rede.

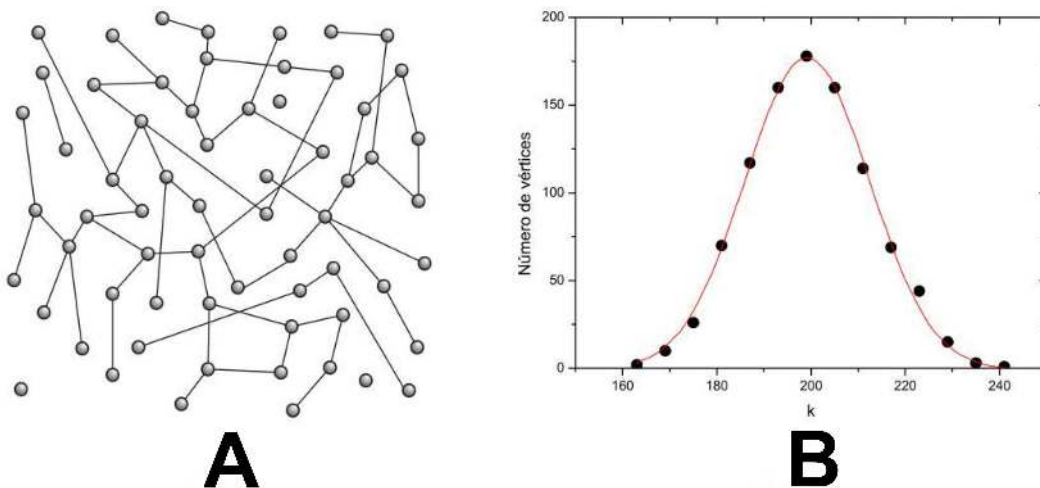
### 2.6.2 Modelos de Redes Complexas

A modelagem de redes complexas tem contribuído para o estudo das características estruturais de diversas redes reais. Embora exista uma variedade de modelos encontrados na literatura, os modelos de rede regular, aleatória, mundo pequeno, e livre de escala constituem

importantes categorias estruturais para a identificação do tipo de modelo de rede [73, 17]. Entretanto, de modo geral, a maioria dos modelos construídos de redes reais apresentam comportamento híbrido [53].

O modelo mais simples de ser construído é representado por uma rede regular onde cada vértice está ligado a todos os demais com o mesmo número de arestas ou conexões. Uma rede desse tipo está completamente conectada, tendo o maior coeficiente de agrupamento  $cc_{max} = 1$ , o menor caminho médio  $\ell = 1$  e número de arestas  $M = N(N - 1)/2$ . Uma rede regular não apresenta o efeito mundo pequeno e o comprimento do menor caminho médio  $\ell \rightarrow \infty$  quando  $N \rightarrow \infty$ .

As redes aleatórias, propostas por Erdős e Rényi, possuem pares de vértices conectados a partir de uma probabilidade  $p$ . Nesse modelo, uma rede é construída com um conjunto de  $N$  vértices totalmente desconectados; a cada iteração, dois vértices são sorteados e conectados como pares de vértices considerados uma única vez. Para  $p = 0.0$ , a rede será totalmente desconectada, e com  $p = 1.0$  todos os vértices estarão conectados e a rede será regular. Uma ilustração do modelo aleatório de Erdos e Rényi pode ser visto na Figura 2.14. Quando o número  $N$  de vértices é grande e a conectividade média constante, a distribuição de conectividade é do tipo Poisson.

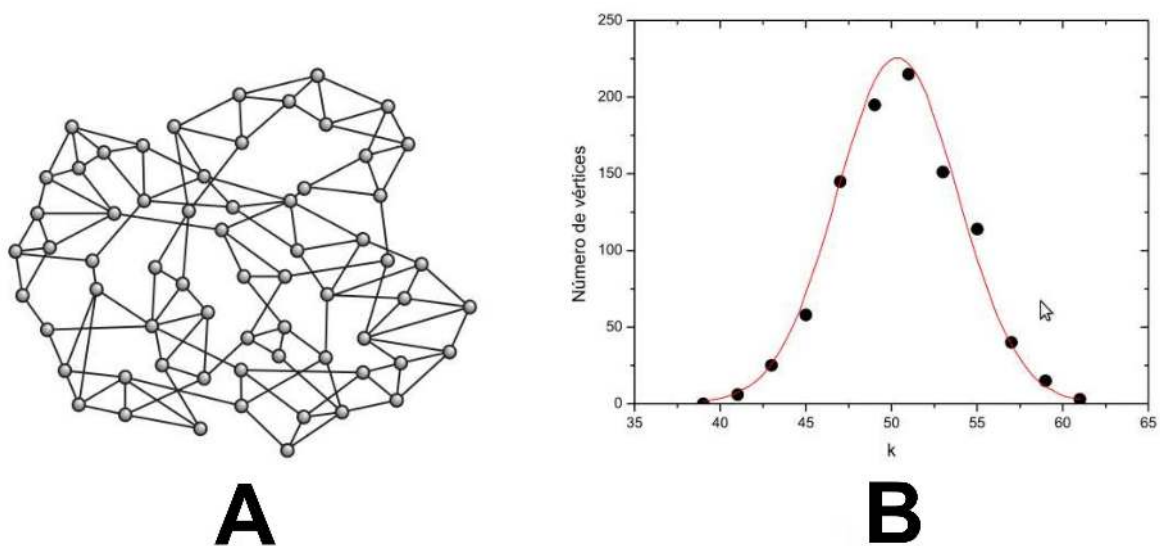


**Figura 2.14:** (A) Ilustração do modelo aleatório de Erdős e Rényi. (B) A distribuição da conectividade associada [73].

Watts e Strogatz sugeriram um modelo alternativo aos modelos de redes regulares e aleatórias por observarem que as redes reais não eram completamente regulares ou aleatórias. Conhecido como mundo pequeno de Watts e Strogatz em analogia ao fenômeno descoberto por

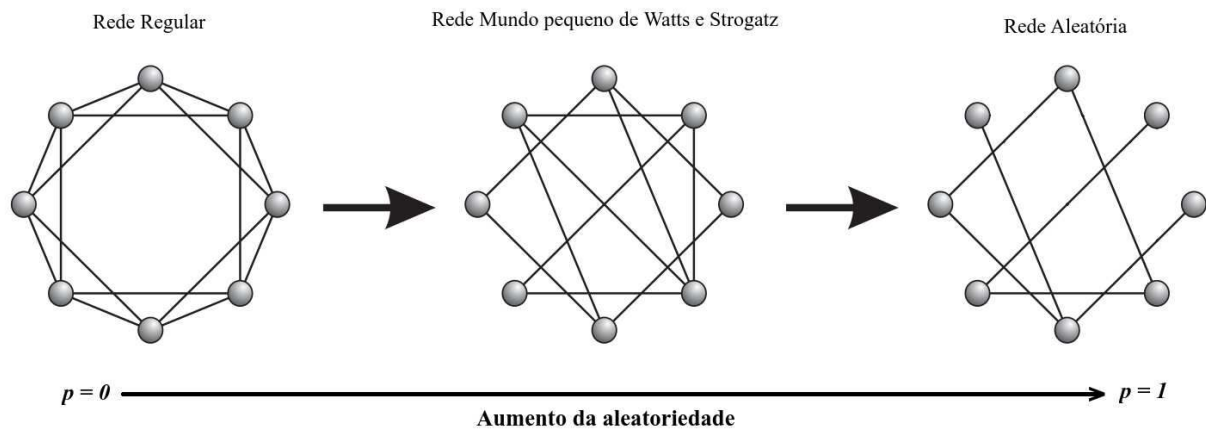
Milgram, esse modelo consiste em reconectar uma das extremidades de uma aresta de uma rede regular a um novo vértice escolhido aleatoriamente com uma dada probabilidade  $p$ . A Figura 2.15 ilustra o modelo de mundo pequeno, apresentando uma quantidade significativa de ciclos de ordem três, com sua respectiva distribuição de conectividade que apresenta uma forma gaussiana.

O processo de reconexão transforma uma rede regular em uma rede aleatória, além disso, a presença de caminhos fechados ou ciclos de ordem três é muito maior que em redes aleatórias como a mesma quantidade de vértices e conexões. Para a probabilidade  $p = 0.0$  a rede será completamente regular apresentando alta quantidade de ciclos de ordem três e com menor caminho médio elevado. Uma rede com  $p = 1.0$  será aleatória, apresentando baixa quantidade de ciclos de ordem três e caminho médio. Este modelo situa-se entre uma característica de completa regularidade e a aleatoriedade, como ilustrado na Figura 2.16.



**Figura 2.15:** (A) Modelo mundo pequeno de Watts e Strogatz. (B) A respectiva distribuição da conectividade. Este modelo apresenta um número elevado de ciclos de ordem três [73].

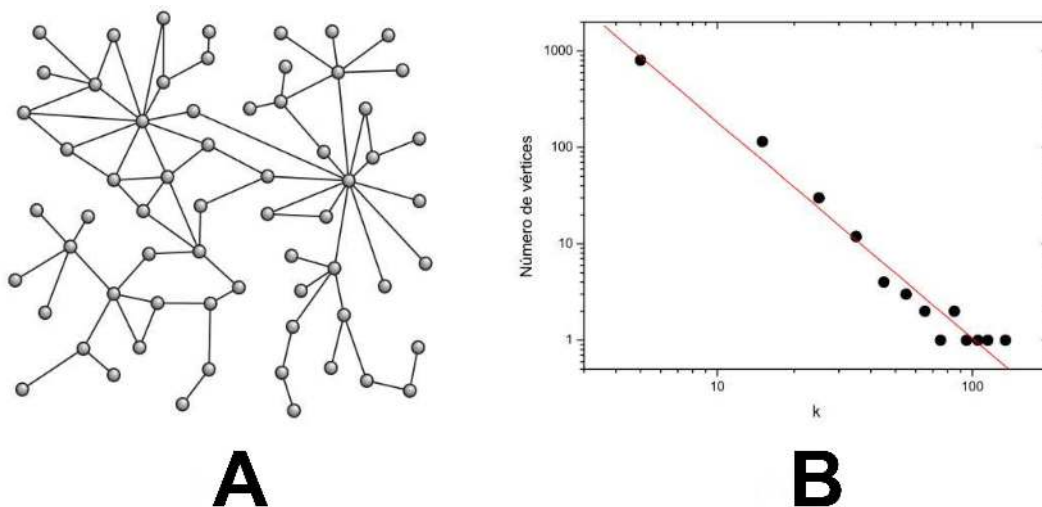
Os trabalhos de Watts e Strogatz apresentaram uma limitação do modelo aleatório de Erdős e Rényi para representar redes reais, no caso, a ausência de ciclos de ordem três presentes em modelos empíricos. Com os trabalhos de Barabási e Albert, ficou demonstrado que há leis que definem a estrutura de redes reais, descartando a aleatoriedade na composição estrutural dessas redes. A distribuição do número de conexões  $P(k)$  em função do grau de conectividade  $k$  segue uma lei de potência [54] de acordo com a equação:  $P(k) \propto k^{-\gamma}$ . Apresentando baixa frequência de vértices com alta conectividade e alta frequência de vértices com grau de



**Figura 2.16:** O procedimento de Watts e Strogatz transforma uma rede regular em uma rede aleatória com o mesmo número de vértices. Para uma probabilidade  $p = 0$ , a rede permanece inalterada. Com o aumento de  $p$ , a rede torna-se mais desordenada até atingir a completa aleatoriedade quando  $p = 1$ .

conectividade unitário. Devido a essa distribuição de conexões, esse modelo é chamado livre de escala.

Como exemplo de rede livre de escala, temos a Figura 2.17 (a), com vértices centrais de alta conectividade e um conjunto periférico de vértices com apenas uma conexão. Essa estrutura, característica de redes livres de escala, está presente em redes reais como as de computadores. Na Figura 2.17 (b) é apresentada a distribuição de lei de potência representada no gráfico duplo logaritmo do número de vértices em função do grau  $k$  ou conectividade.

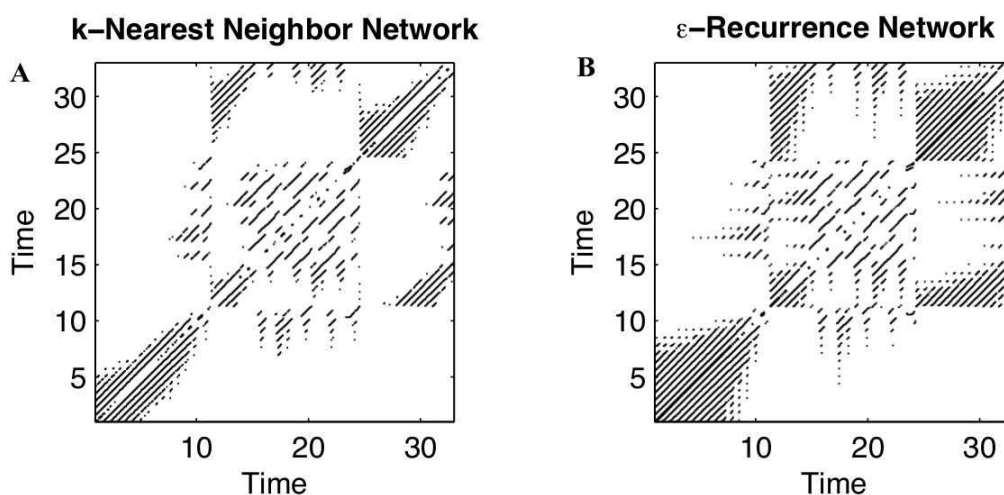


**Figura 2.17:** (A) Rede gerada pelo modelo de Barabási e Albert. (B) A distribuição da conectividade segue uma lei de potência [73].

Pode-se construir uma rede livre de escala iniciando com um pequeno número de vértices  $N$ , adicionando a cada passo um novo vértice com  $M$  arestas que se conecta aos vértices presentes na rede. A probabilidade de um vértice da rede ser escolhido em uma conexão com o novo vértice é proporcional ao seu grau de conectividade. Desse modo, vértices com maior número de conexões tendem a receber arestas de novos vértices com maior frequência.

## 2.7 Mapeamento de séries temporais em redes

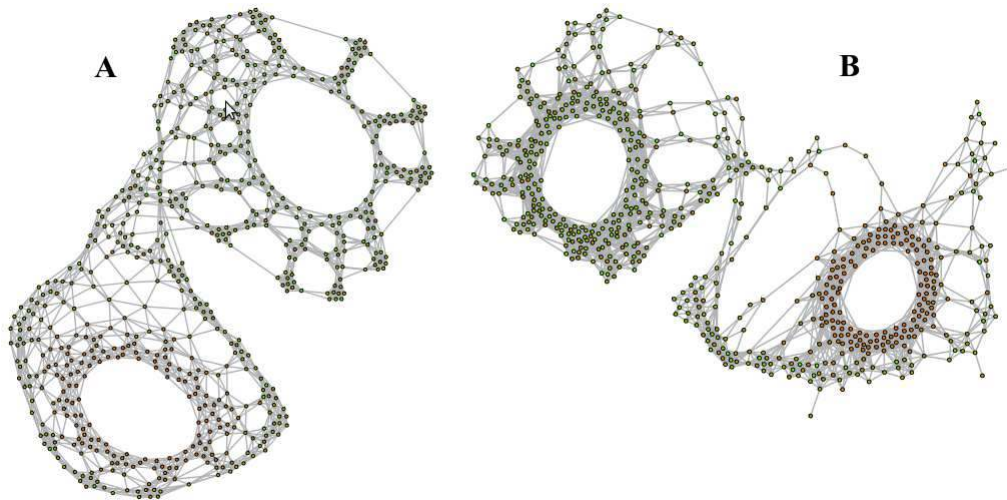
O trabalho pioneiro na utilização de redes complexas para a análise de séries temporais foi idealizado por Zhang e Small [94]. O procedimento consiste em dividir a série temporal em  $n$  ciclos disjuntos de acordo com seus mínimos ou máximos locais para serem representados como vértices de uma rede. Os autores consideram dois tipos de séries temporais: a primeira trata-se de uma série periódica acrescida de ruído. O segundo tipo, trata-se da evolução da coordenada  $x$  do sistema de equações diferenciais ordinárias de Rössler, um modelo de sistema dinâmico teórico como o de Lorenz, utilizado como padrão para avaliar a diferença entre outros modelos. Eles mostraram que séries periódicas com ruído correspondem a redes aleatórias e séries temporais caóticas produzem o efeito mundo pequeno e apresentam característica livre de escala.



**Figura 2.18:** Diagramas de recorrência obtidos do sistema de Lorenz por dois métodos distintos, usados para o mapeamento de redes complexas. Figuras obtidas e modificadas de [29].

A Figura 2.18 apresenta dois diagramas de recorrência obtidos do sistema de Lorenz por dois métodos distintos [29] usados na construção das redes apresentadas na Figura 2.19. A Figura

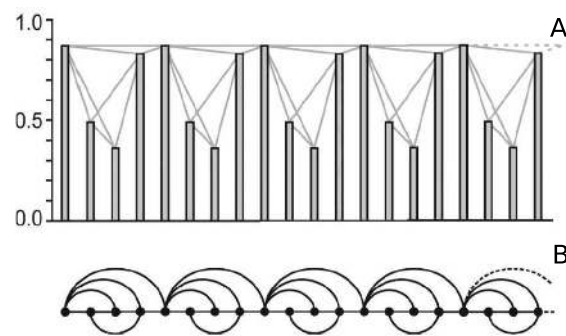
2.18 (A) ilustra uma matriz de recorrência definida pelo método *k-nearest neighbor*, onde cada estado  $\phi_i$  será conectado assimetricamente a seus  $k$ -vizinhos mais próximos  $\phi_j$ , com  $k$  sendo o número máximo de vizinhos. A Figura 2.18 (B) apresenta uma outra configuração usando um limiar  $\varepsilon$  como raio de vizinhança definido na equação (2.17). As respectivas redes, apresentadas na Figura 2.19, foram construídas usando as matrizes de recorrência mapeadas como matrizes de adjacências.



**Figura 2.19:** Redes mapeadas a partir dos diagramas de recorrência da Figura 2.18. Figuras obtidas e modificadas de [29].

Outro método para converter séries em redes foi proposto por Lacasa *et al.* [49]. Esse mapeamento utiliza o conceito de visibilidade, de maneira que, a série temporal é considerada uma paisagem onde cada pico da série é um vértice tratado como um elevado. Uma conexão é determinada se a partir de um dado elevado for possível visualizar outros elevados na sequência temporal. Assim, séries periódicas são convertidas em redes regulares, séries aleatórias em redes aleatórias e séries temporais caóticas em redes livre de escala. Na Figura 2.20 é apresentada a aplicação ilustrativa do método sobre uma série temporal com amplitudes das flutuações normalizadas entre 0 e 1. As amplitudes são os vértices conectados entre si, como visto na Figura 2.20 (A). A rede correspondente é apresentada na Figura 2.20 (B).

Após os trabalhos de Zhang e Small [94] e Lacasa *et al.* [49], outros mapeamentos foram sugeridos [29]. Uma abordagem utilizando a reconstrução do espaço de fase foi apresentada por Xu *et al.* [92]; Marwan *et al.* [61] mostraram uma abordagem relacionada com as propriedades de recorrência; Hirata *et al.* [44] propuseram a construção de redes com pesos por meio de uma matriz de distâncias e a reprodução da série original de modo reversível. Esses trabalhos evidenciam que, independente do mapeamento utilizado, séries temporais



**Figura 2.20:** Exemplo do mapeamento de Lacasa [49].

com características distintas serão convertidas em redes com diferentes topologias. Permitindo a classificação do espaço de fase por meio de propriedades mensuradas nas redes [28, 51, 34, 22].

## 2.8 Redes complexas no estudo do cérebro

Redes complexas [5, 28, 49] têm sido aplicadas à neurociência [89, 26] para determinar parâmetros que caracterizem estados de diferentes regiões do cérebro. Essas redes podem ser obtidas por meio das correlações de atividades neuronais entre diferentes regiões cerebrais; e também pelo método de visibilidade [49, 14] ou pelo método de recorrência do espaço de fase reconstruído [28] aplicados aos sinais de EEG.

Em um trabalho recente, Bhaduri e Ghosh [14] apresentaram uma análise usando redes de visibilidade [49] dos dados aqui tratados, já estudados e disponibilizados por Andrzejak *et al.* [70]. Embora em seu estudo Andrzejak evidencie a utilidade da análise não linear para obtenção de informações dos registros disponibilizados, esta abordagem está restrita ao uso de parâmetros do campo da dinâmica não linear, já bem estabelecida no estudo da dinâmica do EEG [81]. Entretanto, trabalhos que aplicam a abordagem de redes complexas na investigação de sistemas dinâmicos ainda encontram-se em desenvolvimento [94, 95, 92, 49, 28, 29], e no caso experimental, estão relacionados à dinâmica funcional de regiões do cérebro como em [38, 26, 89]. Desse modo, o trabalho de Bhaduri e Ghosh [14] foi tomado como referência comparativa para a análise dos resultados, devido às características passíveis de comparação entre o método de redes de visibilidade e o das redes de recorrência.

## 2.9 Considerações finais

Esse capítulo apresentou os fundamentos que norteiam esta dissertação cuja a finalidade é a reconstrução do espaço de fase e a transformação deste numa rede complexa. Para a reconstrução do espaço de fase, os principais conceitos são a dimensão de imersão e o tempo de defasagem, necessários para obter o espaço de fase do EEG. Em seguida, definiu-se o diagrama de recorrência necessário para a modelagem das redes complexas. Os fundamentos teóricos das redes complexas foram: a teoria dos grafos como origem do estudo das redes, as medidas topológicas e os modelos de redes. Subsequentemente, apresentou-se os conceitos fundamentais para o mapeamento das séries temporais em redes complexas e as suas aplicações na neurociência.



# Capítulo 3

## Mapeando o EEG em redes complexas

Serão descritos neste capítulo, os métodos, técnicas e ferramentas empregadas na pesquisa. A Seção 3.1 descreve de modo geral a aquisição dos registros de EEG, sua características, as ferramentas usadas no processamento destes registros e os conceitos subjacentes ao mapeamento das séries temporais em redes complexas. A análise das séries e as respectivas reconstruções dos espaços de fase são explanadas na Seção 3.2. O mapeamento usado para modelar as redes complexas e a obtenção das respectivas métricas são apresentados na Seção 3.3. Os procedimentos estatísticos usados na categorização dos resultados são brevemente explanados na Seção 3.4 e detalhados no Capítulo 4.

### 3.1 Introdução

Este trabalho apresenta uma análise de diferentes tipos de séries temporais, originadas do EEG de humanos, usando métricas obtidas de redes complexas mapeadas sobre os estados das respectivas reconstruções dos espaços de fase. As séries obtidas, são amostras disponibilizados por Andrzejak *et al.* [70] no site [69] do *Epilepsy Center* situado em Bonn, Alemanha. Os dados estão organizados em cinco conjuntos (denominados A,B,C,D e E), contendo 100 segmentos monocanais de 23.6 segundos cada. Esses segmentos foram selecionados de uma amostragem multicanal e contínua de EEG, após inspeção visual e remoção de artefatos como movimento ocular e atividades musculares.

Os segmentos de EEG dos conjuntos A e B foram selecionados após registros na superfície

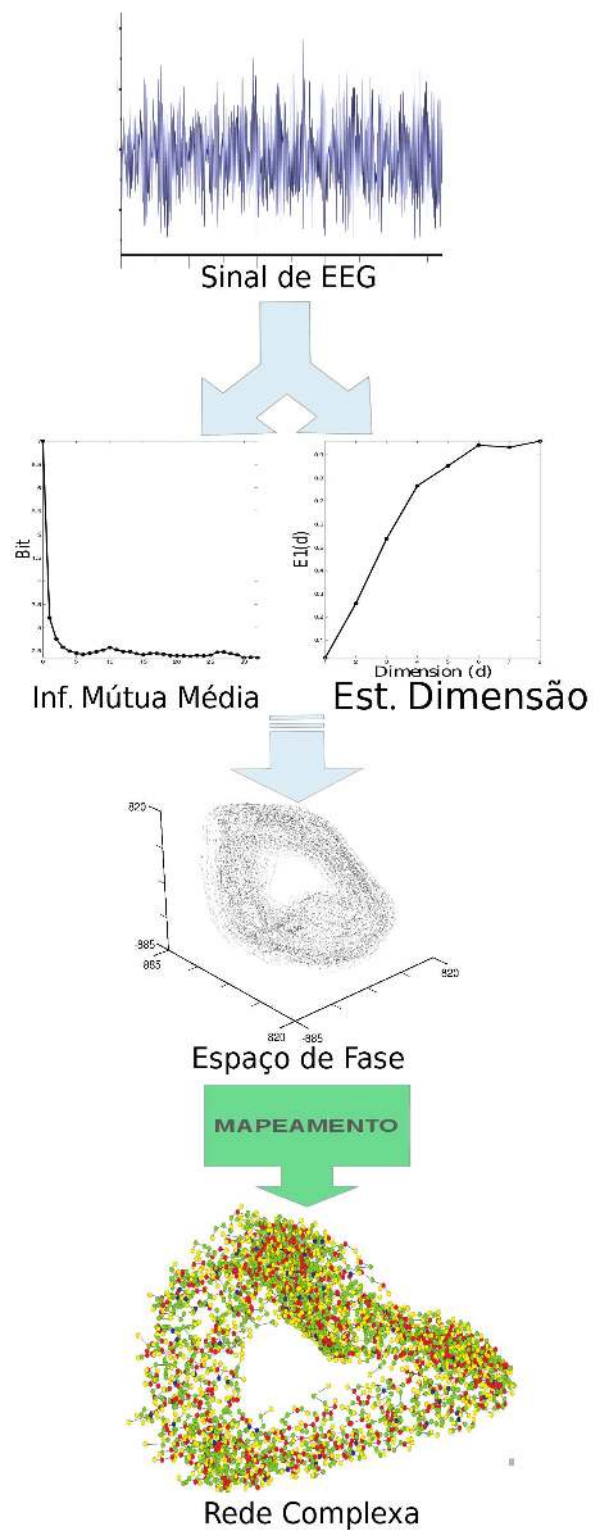
do escalpo de cinco sujeitos saudáveis, com os olhos abertos (OA) e fechados (OF) respectivamente, usando um esquema padrão de colocação dos eletrodos. Os conjuntos C, D e E, são registros de EEG para diagnóstico pré-cirúrgico selecionados de cinco indivíduos, os quais tinham conseguido o controle da convulsão após a remoção da zona epileptogênica na região do hipocampo. C e D são registros intracranianos, obtidos respectivamente, da formação hipocampal do hemisfério oposto (HO) do cérebro de pacientes no intervalo livre de crises, e da região epiléptogênica (RE). E, é o registro do EEG durante a atividade epiléptica de convulsão (AE).

Para o estudo dos dados, foram implementados algoritmos utilizando o *MatLab* [2] com o auxílio do pacote *TSTOOL* [3] versão 1.2 usado na análise não linear das séries. A plotagem das redes, assim como o cálculo de medidas topológicas, foram obtidas com o *Pajek* [13] versão 3.07. Em seguida, as medidas foram comparadas usando testes estatísticos com o software *GraphPad InStat* versão 3.05 [1].

O critério de recorrência tomado como ponto de partida para o mapeamento está baseado no trabalho de Xu *et al.* [92], e será descrito posteriormente. Para alcançar um modelo de rede definida como um componente gigante, garantindo a inclusão de todos os estados como vértices da rede, e assim, a consistência do cálculo das medidas obtidas entre as redes, sucessivos agrupamentos são aplicados por meio de estrutura de conjunto disjuntos [84] para conectar todos os estados a partir do critério da menor distância. Após a obtenção das medidas topológicas das redes, foram estabelecidos testes de comparação entre os resultados dos cinco conjuntos.

A Figura 3.1 ilustra as etapas do procedimento para transformar os sinais de EEG em redes complexas. Após a reconstrução do espaço de fase, aplica-se recursivamente um mapeamento fundamentado no critério de recorrência de modo a converter os estados desse espaço reconstruído em vértices de uma rede constituída por conglomerados de vértices hierarquicamente conectados. Para esses vértices ou conglomerados, o critério de conectividade é definido pela menor distância dada pelo vizinho mais próximo.

As seções seguintes descrevem os procedimentos adotados no tratamento e análise das séries, os critérios para a obtenção das listas de adjacências e construção das redes, e o estabelecimento dos testes aplicados na análise dos resultados.



**Figura 3.1:** Ilustração do procedimento de mapeamento dos sinais de EEG em redes complexas.

## 3.2 Processamento das séries temporais

Conforme visto na seção 2.4.2, o primeiro passo para a análise não linear de séries temporais é encontrar a dimensão de imersão para reconstruir o espaço de fase. O artigo [70] sugere a aplicação de um filtro passa-baixa de 40Hz como etapa inicial no tratamento dos dados. Mesmo assim, analisou-se os sinais de EEG numa faixa maior de amostragem (100Hz) sem artefatos fisiológicos, obtendo dessa forma todas as ondas originadas da atividade elétrica do cérebro.

A primeira etapa foi aplicar o algoritmo de estimação do passo de reconstrução. O algoritmo do pacote TSTOOL [3] utiliza o primeiro mínimo local da função de informação mútua média como estimativa para este parâmetro. Um método prático para determinar a dimensão de imersão é descrito por Cao [23] e implementado no pacote TSTOOL [3]. Apesar do método estimar satisfatoriamente dimensões elevadas, este parâmetro foi limitado explicitamente com teto na dimensão 8. Para cada realização, foram padronizados 1000 pontos de amostra, com o uso de 3 vizinhos mais próximos. O procedimento foi executado para os 100 segmentos de cada grupo, totalizando o processamento de 500 séries. Em seguida, com o passo de reconstrução e a dimensão de imersão estimados, os respectivos espaços de fase foram reconstruídos.

## 3.3 Modelagem das redes

Para a construção das redes foi usado um mapeamento a partir do critério de conectividade definido por Xu *et al.* [92]. Em seu trabalho, cada estado do espaço de fase representa um vértice da rede, sendo as arestas definidas pelos  $k$ -vizinhos mais próximos. Diferente da versão original, onde um número fixo de vizinhos é estabelecido, adotou-se aqui o critério de raio de vizinhança para garantir maior variabilidade em medidas relacionadas com o grau de conectividade  $k$ . Além disso, um raio distinto foi estabelecido para cada estado, definido pela menor distância encontrada usando a distância do vizinho mais próximo.

Embora o critério de raio de vizinhança apresente maior variabilidade da medida de conectividade, as medidas relacionadas com distância ( $\ell$ ) ainda são prejudicadas devido a existência de componentes disjuntos. Uma solução rápida seria adotar o maior componente conectado da rede para obter tais medidas. Entretanto, essa decisão levaria a inconsistências na com-

paração de medidas da própria rede e na análise comparativa de redes distintas. Como solução, utiliza-se um componente gigante de rede construído sobre o espaço de fase.

A primeira etapa do mapeamento da rede está descrita no Algoritmo 1, onde são definidos previamente a matriz de distâncias  $D$ , contendo as distâncias entre todos os estados, a matriz de adjacência  $M$  (sendo  $|X|$  a cardinalidade do vetor  $X$ ), a lista de conjuntos disjuntos  $C$  onde serão armazenados os conglomerados de vértices a cada recursão da chamada  $UnirConjuntos(C)$  e o mapeamento inicial de todos os estados como vértices pertencentes, individualmente, a cada conjunto unitário da lista.

A matriz de distâncias  $D$  é definida pelas distâncias entre todos os estados, mapeados como vértices, e definidas individualmente como  $D_{i,j}$ . Ou seja, a distância do estado  $X_i$  ao estado  $X_j$  será armazenada no elemento  $D_{i,j}$ . Caso os estados  $X_i$  e  $X_j$  estejam de acordo com o critério, a matriz  $M$  representará a conexão entre esses dois estados pelo elemento  $M_{i,j}$ . Inicialmente todos os elementos da matriz  $M$  estão definidos como -1 indicando uma distância inválida no começo do processo. A lista  $C$  é iniciada associando um único estado  $X_i$  a cada elemento  $C_i$ , de modo que, a cardinalidade  $|C|$  diminui à medida que conglomerados de vértices são construídos. O procedimento encerra quando  $|C| = 1$ , indicando que todos os vértices encontram-se conectados a um único componente.

---

**Algorithm 1** Procedimento geral para agrupamento dos conjuntos disjuntos.

---

**function** AGRUPAMENTO

$C \leftarrow \{\}$  ▷ Lista de conjuntos disjuntos.

$D_{|X| \times |X|}$  ▷ Matriz de distâncias entre todos os estados do espaço de fase.

$M_{|X| \times |X|}$  ▷ Matriz de Adjacência com todos os elementos iguais a -1.

**for** cada estado  $X_i \in$  espaço de fase **do**

$C_i \leftarrow X_i$  ▷ Atribui um estado a um conjunto na lista de conjuntos disjuntos.

**end for**

$UnirConjuntos(C)$  ▷ Realiza sucessivos agrupamentos recursivamente.

**end function**

---

Na Figura 3.2 temos a ilustração do mapeamento realizados pelos algoritmos. A Figura 3.2 (A) apresenta 18 estados, os quais, serão mapeados em vértices pertencentes a conjuntos disjuntos unitários ( $C_i$ ). Após a definição dos conjuntos iniciais ( $C_1$  a  $C_{18}$ ), calcula-se a distância dos vizinhos mais próximos para cada conjunto conforme descrito no algoritmo 2, e assim, define-se um raio de vizinhança individual  $r_i$ .

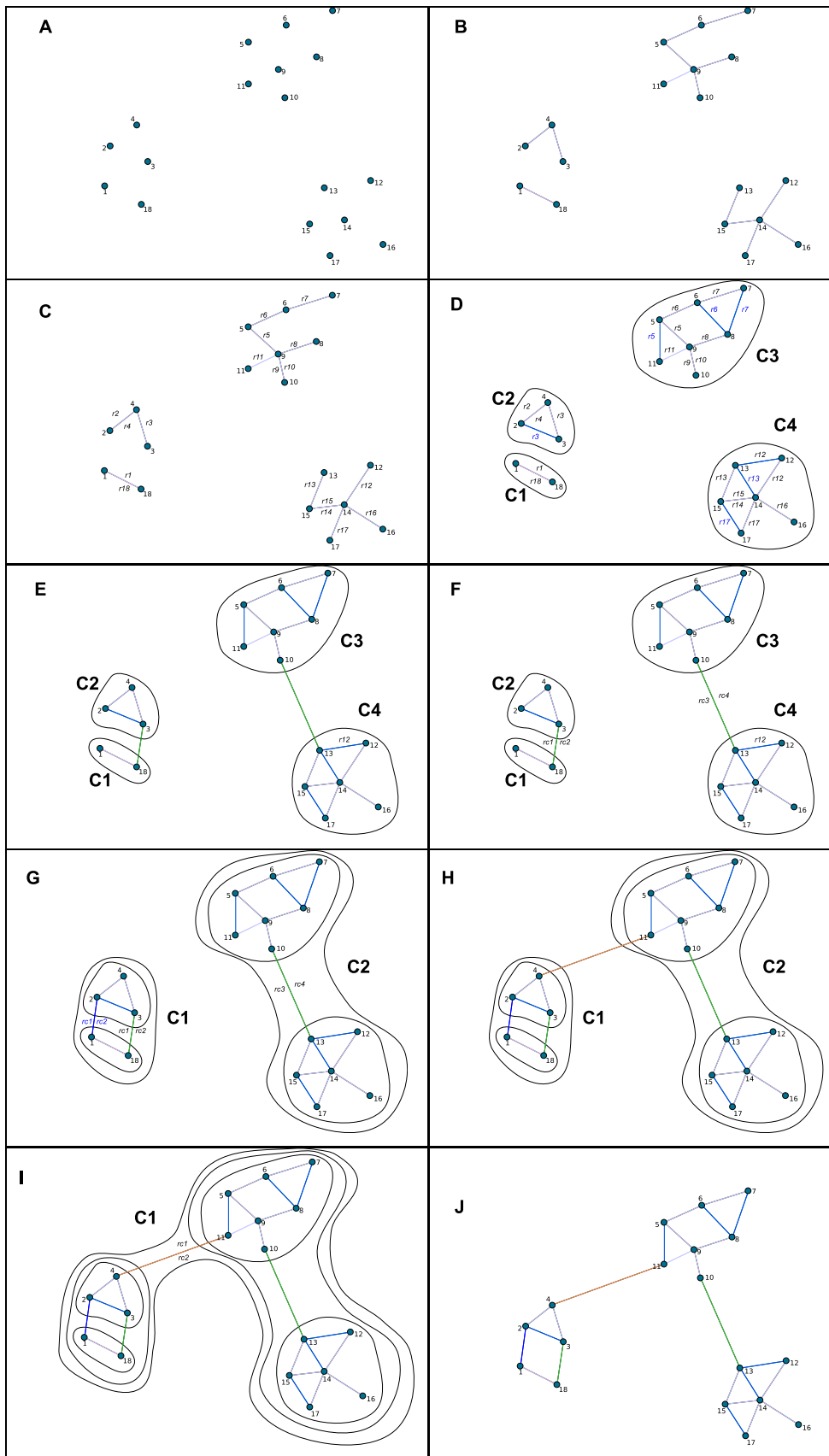


Figura 3.2: Ilustração do procedimento de agrupamento dos estados do espaço de fase.

---

**Algorithm 2** Distância entre dois conjuntos disjuntos.

---

**function** DISTANCIAENTRECONJUNTOS( $C_v, C_u$ )

$w \leftarrow \infty$

**for** cada  $v \in C_v$  **do**

**for** cada  $u \in C_u$  **do**

**if**  $w > D_{v,u}$  **then**

$w \leftarrow D_{v,u}$

    ▷ Guarda a distância entre os vértices  $v$  e  $u$ .

**end if**

**end for**

**end for**

**return**  $w$

  ▷ Menor distância encontrada entre os conjuntos disjuntos  $C_v$  e  $C_u$ .

**end function**

---

O raio  $r_i$ , ilustrado na Figura 3.2 (C), é definido pela menor distância dentre as distâncias obtidas ( Figura 3.2 (B)) para todos os elementos pertencentes aos demais conjuntos. A função *DistanciaEntreConjuntos*( $C_v, C_u$ ), mostrada no Algoritmo 2, calcula a distância entre dois conjuntos a partir do par de vértices com menor distância. Para isso, a função calcula a distância de todas as combinações entre os pares de vértices dos conjuntos  $C_v, C_u$  para encontrar o par com a menor distância. Vale salientar a possibilidade de existir mais de um par de vértices com a menor distância.

Conforme o Algoritmo 3, mesmo que esses conjuntos contenham mais que um elemento (Figura 3.2 (B), (E) e (H)), a função *RaiosDeVizinhanca*( $C$ ) calcula a distância entre dois conjuntos utilizando o par de vértices mais próximos pertencentes a cada conjunto. Apesar de existir  $N - 1$  distâncias para um dado conjunto  $C_i$  retornadas pela função, apenas o par de conjuntos com menor distância fornecerá o raio de vizinhança. Como exemplo, temos a distância entre os estados 9 e 10, tratados inicialmente como conjuntos disjuntos unitários, onde a distância para 10 foi a menor entre todas calculadas para os demais conjuntos.

Com o raio de vizinhança definido, os vértices extremos serão assimetricamente conectados, ou seja, sem conexões duplas, como descrito pelo Algoritmo 4. A função *ValidarConjuntos*( $C_v, C_u, \varepsilon, L$ ) valida os pares de vértices que ligam os conjuntos  $C_v$  e  $C_u$ , inserindo-os na lista  $L$  se somente se as distâncias entre esses vértices são menores que  $\varepsilon$  e ainda não estejam na lista.

---

**Algorithm 3** Raios de vizinhança definidos pelo vizinho mais próximo.

---

**function** RAIOSDEVIZINHANCA( $C$ )

$r \leftarrow \{\}$

▷ Lista de raios de vizinhança.

**for**  $i \leftarrow 1$  até  $|C|$  **do**

$r_i \leftarrow \infty$

**for**  $j \leftarrow 1$  até  $|C|$  **do**

**if**  $i \neq j$  **then**

$d \leftarrow \text{DistanciaEntreConjuntos}(C_i, C_j)$

**if**  $r_i > d$  **then**

$r_i \leftarrow d$  ▷ Guarda a distância do vizinho  $C_j$  mais próximo de  $C_i$  em  $r_i$ .

**end if**

**end if**

**end for**

**end for**

**return**  $\{r_1, r_2, \dots, r_{|C|}\}$

**end function**

---

**Algorithm 4** Valida a conectividade de conjuntos dentro de um raio  $\varepsilon$ .

---

**function** VALIDARCONJUNTOS( $C_v, C_u, \varepsilon, L$ )

**for** cada  $v \in C_v$  **do**

**for** cada  $u \in C_u$  **do**

//Valida e evita guardar subconjuntos duplicados de vertices.

**if**  $|u - v| \leq \varepsilon$  e  $\{u, v\} \notin L$  **then**

//Apenas guarda (não conecta) um subconjunto de vértices.

$L.\text{guarde}(\{u, v\})$

**end if**

**end for**

**end for**

**end function**

---



---

**Algorithm 5** Une os conjuntos por meio do raio de vizinhança.

---

**function** UNIRCONJUNTOS( $C$ )

**if**  $|C| = 1$  **then**  $\triangleright$  Encerra o procedimento caso exista apenas um conjunto disjunto.

*Fim!*

**end if**

$r \leftarrow \{\}$

$\triangleright$  Lista de raios de vizinhança.

$L \leftarrow \{\}$

$\triangleright$  Lista de subconjuntos de dois elementos.

$r \leftarrow$  RaiosDeVizinhanca( $C$ )

**for** cada  $C_v \in C$  **do**

**for** cada  $C_u \in C$  **do**

ValidarConjuntos( $C_v, C_u, r_v, L$ )

**end for**

**end for**

**for** cada  $\{u, v\} \in L$  **do**

$M_{u,v} \leftarrow D_{u,v}$   $\triangleright$  Define a distância como peso da aresta na matriz de adjacência.

**end for**

UnirConjuntos( $C$ )

**end function**

---

Como ilustrado na Figura 3.2 (C), os raios  $r_9$  e  $r_{10}$  têm o mesmo tamanho, assim, os vértices  $v_9$  e  $v_{10}$  compartilham uma única conexão por serem vizinhos mais próximos um do outro. Caso exista outros elementos dentro do raio de vizinhança, esses também serão conectados, como em  $r_3, r_5, r_6, r_7$  e  $r_{17}$  (Figura 3.2 (D)).

O Algoritmo 5 ( *UnirConjuntos*( $C$ )), conecta todos os estados já validados, definindo as respectivas conexões na matriz de adjacência  $M$ . Após as conexões dos conjuntos unitários iniciais, outros conjuntos disjuntos serão formados, constituindo subredes desconexas, as quais, serão agrupadas recursivamente de modo semelhante.

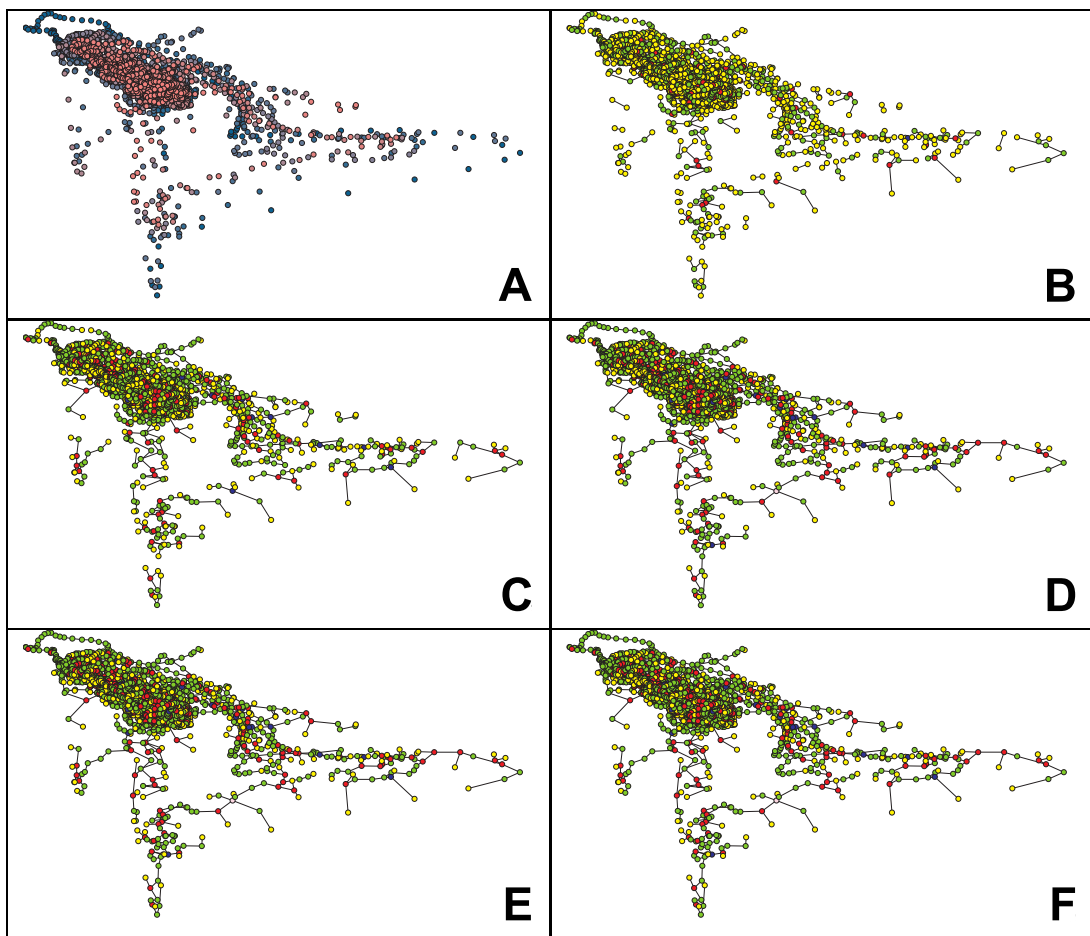
A Figura 3.2 (D) apresenta o resultado parcial do procedimento de conexão dos conjuntos unitários iniciais, nota-se a redução do número de conjuntos ( $C_1$  a  $C_4$ ), bem como, o aumento do número de elementos em cada um deles. A Figura 3.2 (E) apresenta as menores distâncias obtidas entre os novos conjuntos  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$ . Nesse caso, a definição do raio de vizinhança tem maior complexidade devido a quantidade de distâncias a serem comparadas entre os elementos de todos os conjuntos. Entretanto, o procedimento assemelha-se à

etapa anterior, com a distinção que, caso exista mais pares de vértices com distância igual ao raio de vizinhança, eles também serão conectados, como ilustrado na Figura 3.2 (G) em  $rc_1$  e  $rc_2$ . As Figuras 3.2 (H) e 3.2 (I) apresentam a última iteração para a construção do componente gigante da rede, visto na Figura 3.2 (J).

As etapas do algoritmo de agrupamento aplicado a uma série temporal de EEG dos dados experimentais podem ser vistas na Figura 3.3. A Figura 3.3 (A) exhibe os estados do espaço de fase reconstruído, tratados como vértices de conjuntos disjuntos como explicado anteriormente. O gradiente de cores, identifica o quão próximo do início dos dados da série os componentes do estado estão localizados, ou seja, estados que são definidos próximo ao início da série serão mais escuros que aqueles formados próximo a parte final.

As Figuras 3.3 (B) a (F), exibem o processo recursivo de conexões. Nota-se a cada etapa (B, C, D, E e F), o progresso da união de conjuntos disjuntos por vértices que obtém novas arestas. Nesse caso, cada cor representa o grau de conectividade do respectivo vértice, variando de 1 a 5, representados pelas cores amarelo, verde, vermelho, azul e cinza respectivamente. Vale salientar que a cada recorrência, o número de conjuntos disjuntos é reduzido, no pior caso, à metade da quantidade anterior, encerrando a construção do componente gigante sobre os estados do espaço de fase com no máximo  $\lceil \lg |C| \rceil$  passos.

Realizado o mapeamento, as respectivas listas de adjacências são produzidas usando as distâncias  $D_{u,v}$  como pesos para cada aresta  $(u,v)$  contidas na matriz de adjacência  $M$ . Com as listas de adjacências definidas, os valores das métricas discutidas na Seção 2.6.1 são obtidas com o programa Pajek [13], desenvolvido por Vladimir Batagelj e Andrej Mrvar para análise e visualização de redes extensas. Além disso, as respectivas médias foram calculadas para cada das medida em todas as redes.



**Figura 3.3:** Apresentação da construção de uma rede pela aplicação do algoritmo sobre os estados do espaço de fase reconstruído de uma série dos dados experimentais.

### 3.4 Comparação entre grupos de redes

Com as médias das métricas das redes, aplica-se o teste de normalidade de Kolmogorov-Smirnov (KS) [79]. Os testes de comparação entre as médias foram realizados usando o teste não paramétrico de Kruskal-Wallis (KW) [79], quando essas não seguem uma distribuição normal. Em seguida, o teste post-hoc de Dunn [79] foi usado para evidenciar quais pares de condições dos registros do comportamento cerebral são significativamente diferentes. Quando a distribuição das médias segue uma distribuição normal, utiliza-se o teste de análise de variância (ANOVA), seguido do teste post-hoc de Tukey-Kramer [91]. A aplicação dos testes estatísticos foi realizada com o software *GraphPad InStat* versão 3.05 [1].

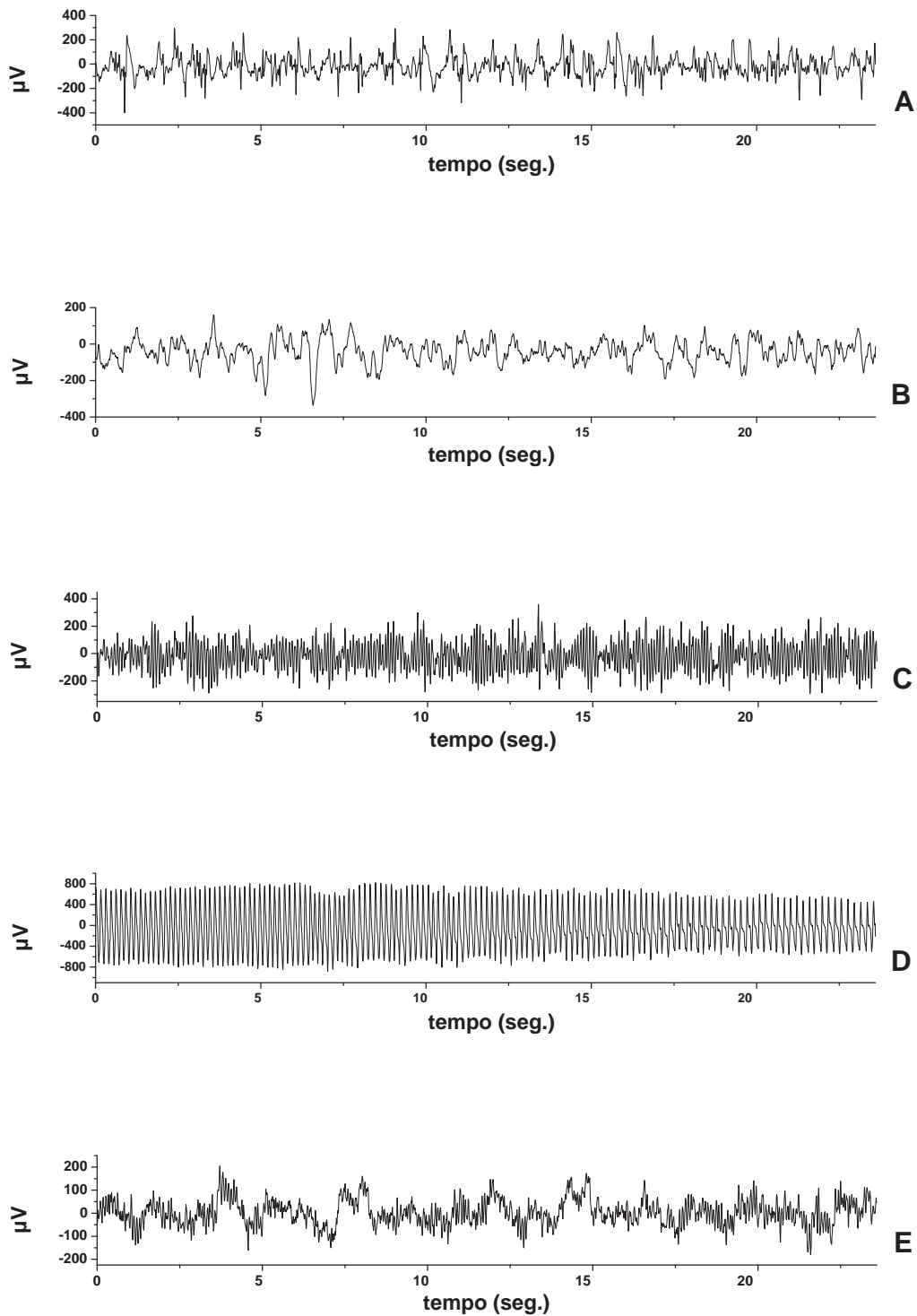
# Capítulo 4

## Resultados e Discussão

Neste capítulo serão explanadas as etapas da metodologia aplicada para obter as métricas das redes, bem como, a investigação das diferentes condições dos registros de EEG. Para tanto, serão apresentados os resultados da aplicação dos métodos de reconstrução do espaço de fase, do mapeamento das redes complexas, cálculo de métricas, testes estatísticas para comparação das características encontradas e suas respectivas análises.

### 4.1 Análise dos resultados

Em um trabalho recente, Bhaduri e Ghosh [14] apresentaram uma análise usando redes de visibilidade [49] dos dados aqui tratados, já estudados e disponibilizados por Andrzejak *et al.* [70]. Embora em seu estudo Andrzejak evidencie a utilidade da análise não linear para obtenção de informações dos registros disponibilizados, esta abordagem está restrita ao uso de parâmetros do campo da dinâmica não linear, já bem estabelecida no estudo da dinâmica do EEG [81]. Entretanto, trabalhos que aplicam a abordagem de redes complexas na investigação de sistemas dinâmicos ainda encontram-se em desenvolvimento, e no caso experimental, estão relacionados à dinâmica funcional de regiões do cérebro como em [38, 26, 89]. Desse modo, o trabalho de Bhaduri e Ghosh foi tomado como principal referência comparativa para a análise apresentada a seguir, devido as características passíveis de comparação entre o método de redes de visibilidade e as redes de recorrência.

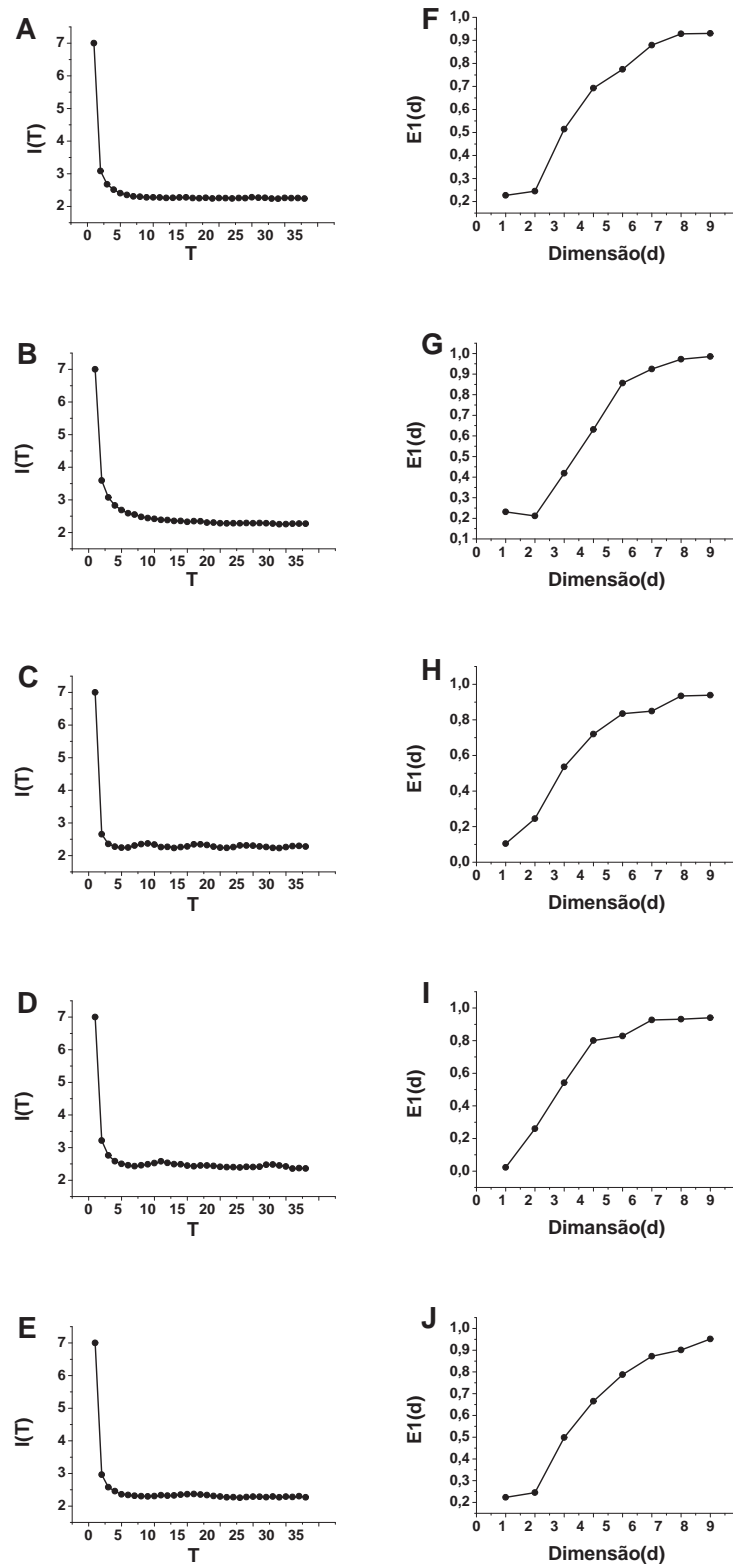


**Figura 4.1:** (A), (B), (C), (D) e (E) são amostras de registros do EEG de pacientes nas condições OA, OF, HO, AE e RE, respectivamente.

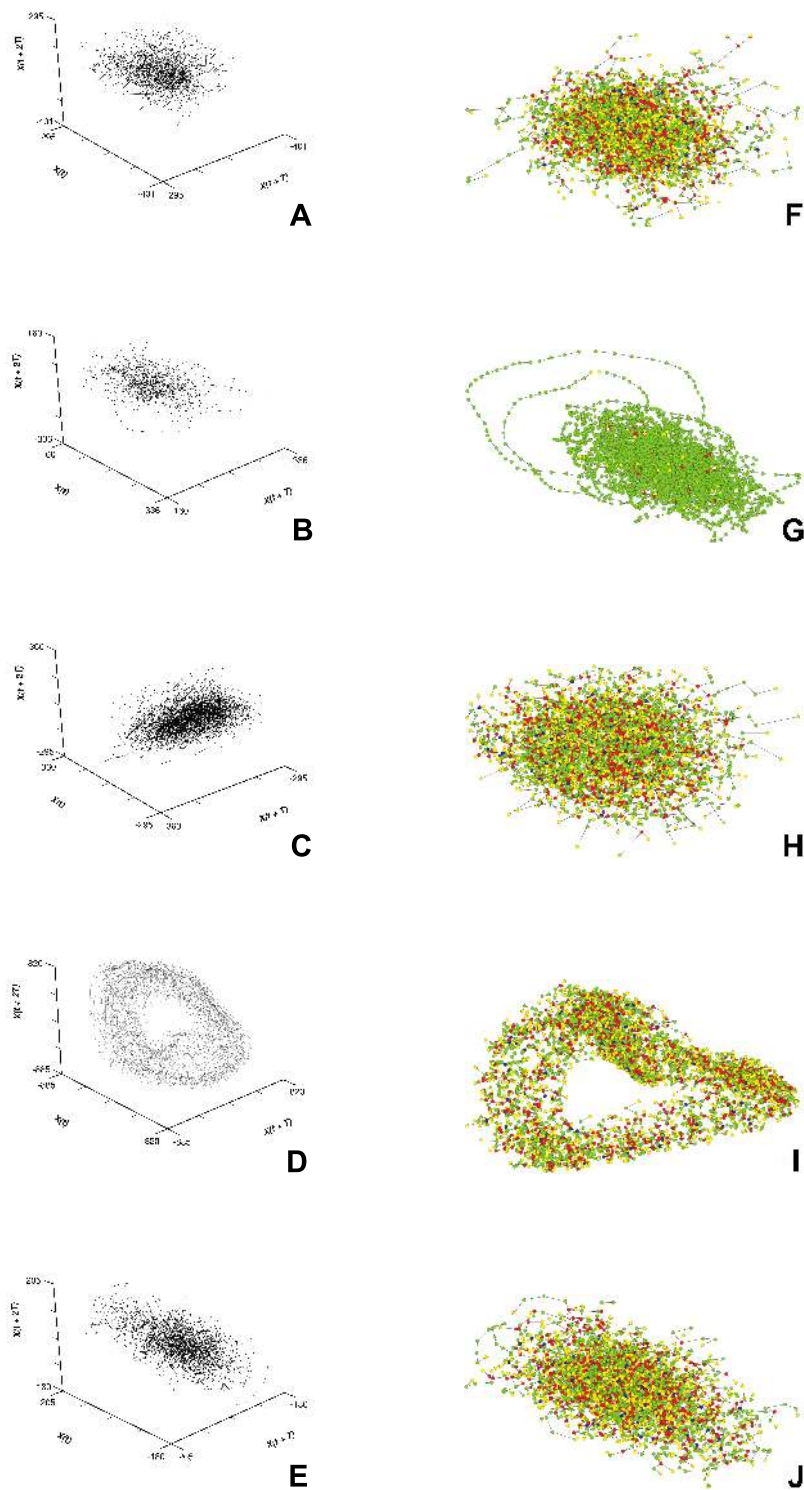
O primeiro passo na avaliação dos registros foi uma inspeção visual das séries de EEG para identificar as peculiaridades subjacentes a cada condição. A Figura 4.1 apresenta amostras representativas dos registros dos diferentes grupos nas seguintes condições: (A) - indivíduos saudáveis como olhos abertos (OA); (B) - indivíduos saudáveis como olhos fechados (OF); (C) - formação hipocampal do hemisfério oposto à zona epileptogênica (HO); (D) - atividade epiléptica (AE) e (E) - região epileptogênica (RE). Após essa primeira avaliação, foram aplicados os métodos para definir os parâmetros da reconstrução do espaço de fase.

A Figura 4.2 mostra os gráficos obtidos dos cinco grupos de registros para a definição da dimensão de imersão e do passo de reconstrução. De modo geral, para estimar a dimensão de imersão (Figura 4.2 (F), (G), (H), (I) e (J)), precisamos primeiro determinar o passo de reconstrução usando o primeiro mínimo local da função de informação mútua média, mostradas nos gráficos da Figura 4.2 (A), (B), (C), (D) e (E). Para esse propósito, foi utilizado o pacote TSTOOL [3] no MatLab [2] para processar as cem amostras de todos os grupos, totalizando quinhentos gráficos para cada parâmetro (dimensão de imersão e passo de reconstrução). Os valores médios e desvios da dimensão de imersão foram  $3,3673 \pm 0,6480$  respectivamente, enquanto os respectivos valores para o passo de reconstrução foram  $7,6826 \pm 2,4950$ . Com a estimação do passo de reconstrução e a definição da dimensão de imersão, os respectivos espaços de fase foram reconstruídos.

Como alguns valores da dimensão de imersão ficaram acima da dimensão topológica do espaço tridimensional, uma vez que, dimensões superiores não podem ser visualizadas graficamente, padronizamos de modo semelhante a outros trabalhos na literatura [80, 77, 28, 82, 34] a dimensão de imersão no espaço tridimensional com a finalidade de constatar visualmente diferentes regimes dinâmicos, tais como o caótico, o periódico e o aleatório. Esta restrição não seria necessária no caso do uso de redes complexas mapeadas sobre o espaço de fase, pois as medidas topológicas das redes ainda poderiam ser obtidas. Entretanto, espaços de alta dimensionalidade podem estar relacionados a distorções nos dados ou em estimações de baixa acurácia [80].



**Figura 4.2:** Os gráficos da esquerda apresentam a função de informação mútua média referentes aos sinais de EEG da Figura 4.1. Na direita, os respectivos gráficos da estimação da dimensão de imersão.



**Figura 4.3:** A esquerda estão os espaços de fase reconstruídos referentes às condições dos registros OA, OF, HO, AE e RE. A direita, encontram-se as respectivas redes complexas mapeadas sobre os espaços de fase.



As Figuras 4.3 (A) e (B), apresentam as amostras dos espaços de fase reconstruídos nas condições OA e OF, enquanto as Figuras 4.3 (F) e (G) são as suas respectivas redes correspondentes. Nas Figuras 4.3 (C), (D) e (E) temos respectivamente, os espaços de fase reconstruídos nas condições HO, AE e RE, com suas redes correspondentes nas Figuras 4.3 (H), (I) e (J). As redes obtidas assemelham-se àquelas encontradas em trabalhos correlatos [41, 93, 29, 92, 94], com espaços de fases reconstruídos de modelos teóricos. Além desses, outros métodos que não usam a reconstrução do espaço de fase [49, 14] encontraram redes topologicamente semelhantes.

A diferença aqui, em relação aos trabalhos que usam o método do espaço de fase reconstruído, é a sua aplicação em dados reais de series temporais de EEG. E dessa forma, validá-lo em estudos experimentais. Bhaduri e Ghosh [14] apresentaram uma análise usando redes de visibilidade [49] dos mesmos dados aqui tratados, atestando a possibilidade de seu uso em estudos empíricos. Entretanto, o método de redes de recorrência aqui utilizado estabelece outros parâmetros para a análise das séries registradas. Para as diferentes condições, foram determinadas as medidas paramétricas das redes complexas, tais como: conectividade ( $k$ ),  $k$ -cores ( $k_c$ ), centralidade de proximidade ( $cc_r$ ), força ( $s$ ), centralidade de intermediação ( $bc$ ), entropia da rede ( $H$ ), densidade ( $\rho$ ), coeficiente de agrupamento ( $cc$ ), caminho médio ( $\ell$ ) e diâmetro da rede ( $\ell_{max}$ ). Além disso, a síntese dos resultados baseia-se nos valores obtidos das métricas e de suas estatísticas, apresentadas em tabelas.

A Tabela 4.1 apresenta as médias e desvios das métricas nas condições OA, OF, HO, AE e RE, calculadas para as métricas:  $k$ ,  $k_c$ ,  $cc_r$ ,  $s$ ,  $bc$ ,  $H$ ,  $\rho$ ,  $cc$ ,  $\ell$  e  $\ell_{max}$ . A avaliação das médias das métricas necessitou de uma análise estatística mais rigorosa, pois ao observar apenas os desvios padrões, não foi possível constatar diferenças significativas de modo acurado. As análises estatísticas são apresentadas na Tabela 4.2 e na Tabela 4.3.

Condições de registro do EEG.

 $(\mu \pm \sigma)$ 

Métricas	OA	OF	HO	RE	AE
$\langle k \rangle$	$2.04449 \pm 0.037$	$2.04592 \pm 0.042$	$2.02001 \pm 0.011$	$2.00240 \pm 0.004$	$2.04497 \pm 0.020$
$\langle k_c \rangle$	$1.20387 \pm 0.091$	$1.20673 \pm 0.099$	$1.13813 \pm 0.048$	$1.03480 \pm 0.040$	$1.22104 \pm 0.051$
$\langle cc_r \rangle$	$0.01212 \pm 0.002$	$0.01284 \pm 0.002$	$0.01413 \pm 0.002$	$0.01123 \pm 0.002$	$0.01361 \pm 0.002$
$\langle s \rangle$	$20.99867 \pm 27.360$	$17.32220 \pm 9.260$	$22.81077 \pm 7.988$	$136.72623 \pm 138.650$	$14.06366 \pm 2.710$
$\langle bc \rangle$	$0.02181 \pm 0.006$	$0.02060 \pm 0.006$	$0.01805 \pm 0.002$	$0.02361 \pm 0.005$	$0.01867 \pm 0.002$
$\langle H \rangle$	$0.50452 \pm 0.040$	$0.49868 \pm 0.069$	$0.51037 \pm 0.008$	$0.51080 \pm 0.018$	$0.51527 \pm 0.007$
$\langle \rho \rangle$	$5.02E - 04 \pm 8.79E - 06$	$5.02E - 04 \pm 1.09E - 05$	$4.94E - 04 \pm 2.74E - 06$	$4.91E - 04 \pm 1.94E - 06$	$5.01E - 04 \pm 4.89E - 06$
$\langle cc \rangle$	$0.02748 \pm 0.019$	$0.02796 \pm 0.021$	$0.01385 \pm 0.007$	$0.00211 \pm 0.003$	$0.02904 \pm 0.011$
$\langle \ell \rangle$	$89.81332 \pm 24.150$	$84.81735 \pm 22.770$	$74.74157 \pm 9.806$	$97.19151 \pm 21.950$	$77.24444 \pm 9.328$
$\langle \ell_{max} \rangle$	$239.69000 \pm 78.210$	$227.17000 \pm 74.260$	$179.8800 \pm 28.440$	$249.9200 \pm 69.4900$	$192.5600 \pm 29.060$

**Tabela 4.1:** Médias ( $\mu$ ) e desvios ( $\sigma$ ) das métricas das redes obtidas nas condições: olhos abertos (OA) e fechados (OF), registro no hemisfério oposto após a remoção cirúrgica da região epileptogênica no hipocampo (HO), registro da atividade epileptogênica durante a convulsão (AE) e na região epileptogênica do hipocampo (RE).

Na Tabela 4.2 temos os resultados das estatística dos testes de Kolmogorov-Smirnov e o  $P$ -valor, avaliados para os valores das médias das métricas das redes, considerando o parâmetro de significância  $\alpha = 0.05$  para as amostras de tamanho  $n = 100$ . Vale salientar que as médias das métricas para algumas condições apresentaram valores de  $P > 0.10$ , indicando que estas seguem uma distribuição normal.

Como apresentado na Tabela 4.2, a centralidade de proximidade relativa ( $cc_r$ ) foi uma exceção onde todas as condições dos registros de EEG passaram no teste de normalidade. Assim, o teste de ANOVA foi aplicado no lugar do teste de Kruskal-Wallis para identificar diferenças significativas entre as condições dos registro para essa medida. A estatística do teste post-hoc de Tukey-Kramer definiu  $P < 0.05$  para  $q > 3.859$ , com  $\alpha = 0.05$ . Para as demais métricas, os valores médios da maioria das condições comparadas não se ajustaram a uma distribuição normal, validando o uso de testes estatísticos não paramétricos.

Após o teste de normalidade, as distribuições não normais das médias das métricas foram submetidas ao teste estatístico não paramétrico de Kruskal-Wallis, devido os valores médios das métricas serem muito próximos. Assim, condições distintas foram identificadas em todas as métricas estudadas, levantando a possibilidade de comparações significativas entre elas.

Com os testes estatísticos de normalidade relacionados aos valores da Tabela 4.2, foi obtido  $P < 0.0001$ , considerado extremamente significativo e indicando que todos os valores médios das métricas são diferentes. Para identificar o nível de significância na comparação das diferentes condições (OA, OF, HO, AE e RE), o teste post-hoc de Dunn foi aplicado para cada uma das métricas:  $k$ ,  $k_c$ ,  $cc_r$ ,  $s$ ,  $bc$ ,  $H$ ,  $\rho$ ,  $cc$ ,  $\ell$  e  $\ell_{max}$ . Os respectivos níveis de significância e o  $P$ -valor são mostrados na Tabela 4.3.

Condições de registro do EEG.										
<i>P KS</i>										
Métricas	OA	OF	HO	RE	AE					
$\langle k \rangle$	0.0073	0.168	0.0017	0.188	> 0.10	0.075	< 0.0001	0.241	0.0034	0.179
$\langle k_c \rangle$	> 0.10	0.074	> 0.10	0.088	> 0.10	0.088	0.0026	0.182	0.0581	0.133
$\langle cc_r \rangle$	> 0.10	0.084	> 0.10	0.118	> 0.10	0.104	> 0.10	0.080	> 0.10	0.073
$\langle s \rangle$	< 0.0001	0.310	0.0349	0.142	0.0136	0.158	< 0.0001	0.223	> 0.10	0.098
$\langle bc \rangle$	0.0019	0.186	< 0.0001	0.245	> 0.10	0.069	> 0.10	0.084	> 0.10	0.101
$\langle H \rangle$	< 0.0001	0.292	< 0.0001	0.4108	0.0295	0.145	0.0001	0.220	> 0.10	0.120
$\langle \rho \rangle$	0.0019	0.187	0.0002	0.213	0.0698	0.130	0.0002	0.215	0.0004	0.206
$\langle cc \rangle$	0.0451	0.138	0.0136	0.158	> 0.10	0.100	< 0.0001	0.236	0.0126	0.159
$\langle \ell \rangle$	0.0025	0.183	< 0.0001	0.240	> 0.10	0.070	> 0.10	0.082	> 0.10	0.102
$\langle \ell_{max} \rangle$	0.0045	0.175	0.0001	0.219	> 0.10	0.048	> 0.10	0.087	> 0.10	0.119

**Tabela 4.2:** Temos na tabela o *P*-valor (*P*) e as estatísticas do teste Kolmogorov-Smirnov (*KS*).

Pode-se constatar pela Tabela 4.3, que as condições OA e OF não são significativamente diferentes para todas as métricas, indicando que as redes apresentam um comportamento dinâmico semelhantes durante as flutuações da atividade elétrica cerebral. Comparando o registro OA com HO, constatou-se diferenças extremamente significantivas ( $P < 0.001$ ) para todas as métricas (visto na coluna OAxHO da Tabela 4.3), com exceção da entropia ( $H$ ) que foi não significante ( $P > 0.05$ ). Em relação a OA e RE, a distinção pela centralidade de proximidade ( $cc_r$ ) foi significativa, com ( $P < 0.05$ ), sendo a centralidade de intermediação ( $bc$ ), entropia da rede ( $H$ ), caminho médio ( $\ell$ ) e diâmetro da rede ( $\ell_{max}$ ) não significantes ( $P > 0.05$ ). As demais métricas foram extremamente significantes ( $P < 0.001$ ), como visto na coluna OAxRE da Tabela 4.3. De forma contrária, entre as condições OA e AE, a maioria das métricas tiveram significância oposta em relação à coluna OAxRE da Tabela 4.3, exceto a centralidade de proximidade ( $cc_r$ ), extremamente significante ( $P < 0.001$ ) e a força ( $s$ ) que foi apenas significante ( $p < 0.05$ ). As demais métricas foram extremamente significantes ( $P < 0.001$ ) (coluna OAxAE da Tabela 4.3).

Em relação a comparação do grupo OF com HO (coluna OF x HO da Tabela 4.3), constatou-se semelhanças estatísticas com OAxHO na Tabela 4.3 para todas as métricas observadas. Entretanto, na comparação do OF com RE com relação a coluna OAxRE da Tabela 4.3, os parâmetros relacionados a centralidade de proximidade ( $cc_r$ ), centralidade de intermediação ( $bc$ ) e caminho médio ( $\ell$ ) foram extremamente significante ( $P < 0.001$ ) (visto em OFxRE na Tabela 4.3). Comparando o grupo OF e AE (coluna OFxAE da Tabela 4.3) com os valores da coluna OAxAE, constata-se que as diferenças encontradas na centralidade de proximidade ( $cc_r$ ) e força ( $s$ ), foram não significantes ( $P > 0.05$ ), enquanto na centralidade de intermediação ( $bc$ ) e no caminho médio ( $\ell$ ) foram significantes ( $P < 0.05$ ), já a entropia da rede ( $H$ ) foi muito significante ( $P < 0.01$ ).

Na comparação entre os grupos HO e RE cirurgiados, com exceção da entropia da rede ( $H$ ) que foi não significante ( $P > 0.05$ ), todas as métricas foram extremamente significantes ( $P < 0.001$ ) como apresentado na coluna HOxRE da Tabela 4.3. No caso da comparação entre HO e AE (coluna HOxAE da Tabela 4.3), as métricas centralidade de proximidade ( $cc_r$ ), caminho médio ( $\ell$ ) e o diâmetro da rede ( $\ell_{max}$ ) foram não significantes ( $P > 0.05$ ), as demais foram extremamente significante ( $P < 0.001$ ). Na coluna HOxAE da Tabela 4.3 temos a análise de diferenças entre região epileptogênica (RE) e atividade epiléptica (AE), que apresentou não significância apenas em diâmetro da rede ( $\ell_{max}$ ), as métricas restantes foram extremamente significantes ( $P < 0.001$ ).

Comparação das condições de registro do EEG.

Métricas	P e (Significância)									
	OA x OF	OA x HO	OA x RE	OA x AE	OF x HO	OF x RE	OF x AE	HO x RE	HO x AE	RE x AE
$\langle k \rangle$	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)
$\langle k_c \rangle$	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)
$\langle cc_r \rangle$	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)	P<0.05 (*)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)
$\langle s \rangle$	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)	P<0.05 (*)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)
$\langle bc \rangle$	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)	P<0.05 (*)	P<0.001 (***)	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)
$\langle H \rangle$	P>0.05 (ns)	P>0.05 (ns)	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)	P>0.05 (ns)	P>0.05 (ns)	P<0.01 (**)	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)
$\langle \rho \rangle$	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)
$\langle cc \rangle$	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)
$\langle \ell \rangle$	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)	P<0.05 (*)	P<0.001 (***)	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)
$\langle \ell_{max} \rangle$	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)	P>0.05 (ns)	P<0.001 (***)	P<0.001 (***)	P>0.05 (ns)	P>0.05 (ns)

**Tabela 4.3:** Comparação dois-a-dois das métricas das redes dos grupos nas diferentes condições usando o teste post-hoc de Dunn, com  $\alpha = 0.05$ .

Os níveis de significância são: (ns) - não significante, (\*) significante, (\*\*) muito significante e (\*\*\*) extremamente significante.

Ao observar os grupos das condições (OA e OF), cirurgiados (HO e RE) e (AE), nota-se que os grupos normais não apresentam diferenças estatísticas para as métricas, indicando que o fechamento dos olhos durante o registro do EEG não modifica a dinâmica da atividade elétrica da rede neuronal subjacente. Esta mesma semelhança estatística é observada entre os grupos normais (OA e OF) e cirurgiado (HO), indicando que o registro do EEG na região epiléptica cirurgiada é diferente tanto do registro (OA) quanto (OF). Por outro lado, observamos diferenças ao comparar os grupos normais (OA e OF) e o grupo (RE) onde a diferença foi observada nas métricas centralidade de proximidade ( $cc_r$ ), centralidade de intermediação ( $bc$ ) e diâmetro da rede ( $\ell_{max}$ ), indicando que OA e OF são semelhantes estatisticamente entre si e que a cirurgia produziu uma diferença na dinâmica da rede registrada no hemisfério oposto (HO) em relação a cada grupo normal independentemente. Essa mesma diferença estatística foi observada na comparação dos grupos normais (OA e OF) e da atividade epiléptica (AE).

Por fim, comparando os grupos cirurgiados (HO e RE) com (AE), observamos que os registros (HO) e (RE) não apresentaram alterações na complexidade das redes, uma vez que a entropia da rede ( $H$ ) não foi estatisticamente diferente. Ao se comparar os grupos cirurgiados (HO e RE) com (AE), o grupo cirurgiado (HO) apresentou um maior número de métricas com diferenças não significativas, ( $\ell_{max}$ ) e ( $\ell$ ). Enquanto (RE) apenas uma única métrica não apresentou alteração estatística ( $\ell_{max}$ ). Isto indica que a alteração produzida entre os grupos cirurgiados (HO e RE) e a atividade epiléptica (AE) na complexidade que é observado na entropia ( $H$ ) não foi suficiente para alterar o diâmetro da rede.

Assim como no trabalho de Bhaduri e Ghosh [14], a aplicação das redes complexas como uma técnica quantitativa para distinguir diferentes padrões da atividade cerebral apresentou resultados bastante promissores. Apesar do procedimento aqui descrito utilizar outra metodologia para a construção das redes, ficou evidente que em ambos os métodos, seja o de redes de visibilidade ou de recorrência, as propriedades dinâmicas subjacentes serão capturadas pela estrutura topológica das redes. O método aqui utilizado obteve conclusões semelhantes às de Bhaduri e Ghosh [14] em relação ao estudo comparativo das diferentes condições (OA,OF,HO,RE e AE), com o diferencial da riqueza de detalhes da análise comparativa devido a quantidade de métricas obtidas das redes modeladas sobre os estados dos espaços de fase reconstruídos, enquanto o método de visibilidade foi focalizado no estudo da multifractalidade a complexidade da rede a partir de um único parâmetro que é o coeficiente de Hurst.

# Capítulo 5

## Conclusão e Trabalhos Futuros

Neste último capítulo estão as conclusões acerca do uso das médias das redes complexas obtidas do mapeamento dos registros de EEG. Também serão apresentados, as contribuições, dificuldades encontradas e os trabalhos futuros a serem desenvolvidos.

### 5.1 Conclusões

Neste trabalho transformamos as amostras de EEG nas condições normais, cirurgiados e com atividade epilética em redes complexas a partir dos espaços de fase reconstruídos e determinamos as suas métricas topológicas: conectividade ( $k$ ),  $k$ -cores ( $k_c$ ), centralidade de proximidade relativa ( $cc_r$ ), força ( $s$ ), centralidade de intermediação ( $bc$ ), entropia da rede ( $H$ ), densidade ( $\rho$ ), coeficiente de agrupamento Watts-Strogatz ( $cc_{ws}$ ), transitividade ( $cc_t$ ), caminho médio ( $\ell$ ) e diâmetro da rede ( $\ell_{max}$ ). Constatamos que as médias das métricas foram capazes de encontrar diferença entre os grupos normais, cirurgiado de epilepsia e com atividade epilética da seguinte forma:

- todas as métricas demonstraram que os grupos com olhos abertos e fechados não são estatisticamente diferentes.
- em torno de 90% das métricas dos grupos normais (OA e OF) foram diferentes da condição (HO).
- 60% das métricas na condição (OA) e 80% das métricas na condição (OF), apresenta-



ram diferenças estatística em relação à condição (RE).

- 60% e 40% foram significativamente diferentes para as condições (OA) e (OF) respectivamente quando comparados com o grupo (AE).
- As métricas para os grupos cirurgiados (HO e RE) encontrados aqui diferiram em 90%.
- A diferença estatística das métricas dos grupos cirurgiados (HO e RE) e com atividade epiléptica (AE) foram de 60% e 90% para os grupos cirurgiados de epilepsia e do lado oposto a cirurgia respectivamente.

O uso de métricas topológicas de redes complexas modeladas sobre espaços de fase mostrou-se consistente quanto a captura e quantificação da dinâmica subjacente a atividade cerebral em diferentes condições. Devido a similaridade dos resultados relacionados a outras metodologias de modelagem de redes, bem como a constatação de sua eficácia em mapear regimes dinâmicos em diferentes topologias, esta técnica apresenta potencial para a análise de diagnósticos. Então, concluímos que as métricas de redes complexas obtidas de séries temporais como o EEG de grupos normais, cirurgiados e com atividade epiléptica podem ser usadas como parâmetro para diagnosticar um EEG normal e epiléticos.

## 5.2 Contribuições e Dificuldades

As contribuições desse trabalho são:

- Como constatado, a aplicação de redes complexas na análise de registros de EEG pode contribuir para diagnosticar condições patológicas do funcionamento do cérebro. Além disso, padrões cognitivos podem ser estudados com o uso desta técnica, contribuindo para novas abordagens de mapeamento das funções cerebrais, possibilitando estudos futuros em comparações das medidas topologias destas redes com redes funcionais de regiões do cérebro.
- Desenvolvimento da literatura em relação a aplicações de redes complexas no estudo de séries temporais experimentais como o EEG, visto o limitado número de referência bibliográfica. Colaborando desse modo, na evolução ou refutação do mapeamento de séries temporais em redes complexas como opção do estudo da dinâmica cerebral.

Apesar dos resultados promissores, encontrou-se a seguintes dificuldade:

- Por ser uma metodologia ainda recente, tanto a literatura com modelos teóricos quanto àquelas aplicadas a dados experimentais são escassas quando tomadas no contexto da dinâmica não linear de séries temporais, principalmente em relação ao funcionamento cerebral. Assim, trabalhos correlatos que possibilitem análises comparativas ainda são raros.

### 5.3 Trabalhos Futuros

- Aplicação de outros métodos de reconstrução do espaço de fase para dimensões elevadas, de modo a permitir uma análise comparativa segura entre condições representadas em diferentes dimensões com o uso das métricas das redes reconstruídas.
- Otimização do processo de mapeamento, bem como, a automação na identificação de padrões para classificação posterior das características encontradas.
- Realizar estudo comparativo entre diferentes métodos de mapeamentos de séries temporais em redes complexas, além de implementar ferramentas que facilitem este tipo de análise.

# Referências Bibliográficas

- [1] Graphpad instat. Disponível em: <<http://www.graphpad.com/scientific-software/instat/>>. Acesso em: 12 out. 2013.
- [2] Mathworks - matlab and simulink for technical computing. Disponível em: <<http://www.mathworks.com/products/matlab/>>. Acesso em: 12 out. 2013.
- [3] Tstool home page. Disponível em: <<http://www.physik3.gwdg.de/tstool/>>. Acesso em: 12 out. 2013.
- [4] R. Pastor-Satorras A. Barrat, M. Barthélemy and A. Vespignani. The architecture of complex weighted networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 101(11):3747–3752, 2004.
- [5] Barabási A.-L. *Linked: how everything is connected to everything else and what it means for business, science, and everyday life*. Plume, New York, 2002.
- [6] H. D. I. Abarbanel. *Analysis of observed chaotic data*. Springer-Verlag, Institute for Nonlinear Science, 1995.
- [7] A. P. Azevedo. Estudo do sinal eletroencefalográfico (eeg) aplicado a interfaces cérebro-computador com uma abordagem de reconhecimento de padrões. dissertação de mestrado. Master's thesis, Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), Vitória, ES, 09 2005.
- [8] C. Guo B. Wang, H. Tang and Z. Xiu. Entropy optimization of scale-free networks robustness to random failures. arXiv:cond-mat/0506725, 2005.
- [9] Nicolis C. Babloyantz A, Salazar JM. Evidence of chaotic dynamics of brain activity during the sleep cycle. *Phys Lett A*, 111:152–156, 1985.

- 
- [10] J. P. Baker, G. L.; Gollub. *Chaotic dynamics: an introduction*. Cambridge University Press, New York, 1996.
- [11] Y. Bar-Yam. *Dynamics of complex systems*. Perseus Books, Cambridge, 2003.
- [12] Albert-László Barabási and Réka Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286, 1999.
- [13] A. Batagelj, V.; Mrvar. Pajek: program for large network analysis. 1998. Disponível em: <<http://vlado.fmf.uni-lj.si/pub/networks/pajek/>>. Acesso em: 12 out. 2013.
- [14] D. Bhaduri, S.; Ghosh. Electroencephalographic data analysis with visibility graph technique for quantitative assessment of brain dysfunction. *Clinical EEG and Neuroscience*, pages 1–6, 2014.
- [15] Jens Timmer Björn Schelter, Matthias Winterhalder. *Handbook of Time Series Analysis*. Wiley-VCH, Freiburg, 2006.
- [16] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chaves, and D.U. Hwang. Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports*, 424:175–308, 2006.
- [17] Nino Boccara. *Modeling Complex Systems*. Springer, New York, 2004.
- [18] Danail Bonchev and Dennis H. Rouvray. *Complexity in Chemistry, Biology, and Ecology*. Springer, New York, 2005.
- [19] Terry Bossomaier and David Green. *Complex Systems*. Cambridge University Press, New York, 2007.
- [20] L. Brillouin. *Science and Information Theory*. Dover Edition, 2013.
- [21] Stouffer D. B. Amaral-L. A. N. Camacho, J. Quantitative analysis of the local structure of food webs. *Journal of Theoretical Biology*, 246, 2007.
- [22] A.S.L.O Campanharo. *Dualidade entre análise de séries temporais e de redes complexas*. PhD thesis, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, University of Bergen, São José dos Campos, March 2011.
- [23] Liangyue Cao. Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series. *Physica D*, 110:43–50, 1997.

- [24] R. Caton. The electrical currents of the brain. *Journal 2*, page 278, 1875.
- [25] David Chelidze. Statistical characterization of nearest neighbors to reliably estimate minimum embedding dimension. Technical report, IDETC/CIE, 2014.
- [26] Pathmanathan J-Bianchi MT Westover MB Wison L Cash SS. Chu CJ, Kramer MA. Emergence of stable functional networks in long-term human electroencephalography. *J Neurosci.*, 32(8):2703–13, 2012.
- [27] Wouter de Nooy, Andrej Mrvar, and Vladimir Batagelj. *Exploratory Network Analysis with Pajek*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [28] R. V. Donner, Y. Zou, J. F. Donges, N. Marwan, and J. Kurths. Recurrence networks - a novel paradigm for nonlinear time series analysis. *New Journal of Physics 12*, 033025:doi:10.1088/1367-2630/12/3/033025, 2010.
- [29] Reik V. Donner and M. Small. Recurrence-based time series analysis by means of complex network methods. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(04):1019–1046, 2011.
- [30] Duncan Watts e Steven Strogatz. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, 393, 1998.
- [31] Kamphorst J.O. Ruelle D. Eckmann, J.P. Recurrence plots of dynamical systems. *Europhys*, 4:973–977, 1987.
- [32] P. Erdős and A. Rényi. On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, 5:17–60, 1959.
- [33] L. Euler. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 8:128–140, 1736.
- [34] K. Poljansek-F. Bono F. Strozzi, J.M. Zaldívar and E. Gutiérrez. From complex networks to time series analysis and viceversa: Application to metabolic networks. Technical report, JRC, 2009.
- [35] G Fagiolo. Clustering in complex directed networks. *Physical Review E*, 76, 026107, 2007.
- [36] S. Wasserman; K. Faust. *Social Network Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

- 
- [37] A. Ferreira. *Uma proposta de interface cérebro-computador para comando de cadeiras de rodas*. PhD thesis, Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), Vitória, ES, 12 2008.
- [38] V. L.; Vasconcelos N. A. P.; Miranda J. G. V.; Tort A. B. L.; Sidarta R. Filho, D. G. A.; Santos. An investigation of hebbian phase sequences as assembly graphs. *Front Neural Circuits*, doi:10.3389/fncir.2014.00034, 2014.
- [39] A. Fraser and H. Swinney. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Phys. Rev. A*, 33:1134–1140, 1986.
- [40] L. C. Freeman. Set of measures of centrality based on betweenness. *Sociometry*, v. 40, n. 1:35–41, 1977.
- [41] Jin N. Gao Z. Complex network from time series based on phase space reconstruction. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, doi: 10.1063/1.3227736, 2009.
- [42] Gregory C. Reinsel George E. P. Box, Gwilym M. Jenkins. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Wiley, New Jersey, 2008.
- [43] L. F. Haas. Hans berger (1873-1941), richard caton (1842-1926), and electroencephalography. *Journal of Neurology, Neurosurgery and Psychiatry*, 74(1):9, 2003.
- [44] Horai S. Kzuyuki A. Hirata, Y. Reproduction of distance matrices and original time series from recurrence plots and their applications. *European Physical Journal Special Topics*, 164:13–22, 2008.
- [45] B. A. Huberman. *The laws of the web: patterns in the ecology of information*. MIT Press, Cambridge, USA, 2001.
- [46] Alain Barrat Alessandro Vespignani José Ignacio Alvarez-Hamelin, Luca Dall’Asta. k-core decomposition: a tool for the visualization of large scale networks. *arXiv:cs.NI/0511007*, 2005.
- [47] J.H.; Jessel T.M Kandel, E.C.; Schwartz. *Principles of Neural Sciences*. McGraw Hill Inc., New York, EUA, 2000.
- [48] H. Kantz and T Schreiber. *Nonlinear time series analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

- 
- [49] L. Lacasa, B. Luque, F. Ballesteros, J. Luque, and J. C Nuno. From time series to complex networks: The visibility graph. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 150, 2008.
- [50] E. N Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, 20, 1963.
- [51] Gonzalo Travieso P. R. Villas Boas Luciano da F. Costa, Francisco A. Rodrigues. Characterization of complex networks: A survey of measurements. *Advances in Physics*, 56:167–242, 2007.
- [52] A.L. Barábasi M. E. J. Newman and editors D. J. Watts. *The Structure and Dynamics of Networks*. Princeton University Press, Princeton, 2006.
- [53] E. A. Leicht M. E. J. Newman. Mixture models and exploratory analysis in networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 104 n. 23:9564–9569, 2007.
- [54] D Malamud, B. D.; Turcotte. Self-affine time series: measures of weak and strong persistence. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 80:173–196, 1999.
- [55] Sneppen K. Maslov, S. Specificity and stability in topology of protein networks. *Science*, 296, 2002.
- [56] Reggie Brown Matthew B. Kennel and Henry D. I. Abarbanel. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometric construction. *Physical Review A*, 45:3403–3411, 1992.
- [57] Robert A. Meyers. *Complex Systems in Finance and Econometrics*. Springer, USA, 2011.
- [58] S. Milgran. The small world problem. *Psychology Today*, 1(1):60-67, 1967.
- [59] Edward Ott Tim Sauer Mingzhou Ding, Ceslo Grebogi and James A. Yorke. Plateau onset for correlation dimension: when does it occur? *Physical Review Letters*, 70:3872–3875, 1993.
- [60] Melanie Mitchell. *Complexity: a guided tour*. Oxford University Press, New York, 2009.
- [61] J. F.; Zou Y.; Donner R. V.; Kurths J N. Marwan, Donges. Complex network approach for recurrence analysis of time series. *Physics Letters A*, 373:4246–4254, 2009.

- [62] M. Thiel J. Kurths N. Marwan, M. C. Romano. Recurrence plots for the analysis of complex systems. *Physics Reports*, 438(5-6):237–329, 2007.
- [63] M. E. J. Newman. The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, 45, n. 2:167–256, 2003.
- [64] Gregorie Nicolis and Catherine Nicolis. *Foundations of Complex Systems: Nonlinear Dynamics, Statistical Physics, Information and Prediction*. World Scientific Publishing, 2007.
- [65] Mamen Romano Norbert Marwan and Marco Thiel. Recurrence plots and cross recurrence plots. Disponível em: <<http://http://www.recurrence-plot.tk/>>. Acesso em: 05 nov. 2013.
- [66] H. Moysés Nussenzveig. *Complexidade e caos*. UFRJ/Copea, Rio de Janeiro, 2008.
- [67] Crutchfield J. Farmer D. Packard, N. and R. Shaw. Geometry from a time series. *Phys. Rev. Lett.*, 45:712–715, 1981.
- [68] H. Jeong R. Albert and A.-L. Barabási. Error and attack tolerance of complex networks. *Nature*, 406:378-382, 2000.
- [69] Florian Mormann Christoph Rieke Peter David Ralph G. Andrzejak, Klaus Lehnertz and Christian E. Elger. Department of epileptology at the university hospital of bonn. Disponível em: <<http://epileptologie-bonn.de/>>. Acesso em: 05 nov. 2013.
- [70] Florian Mormann Christoph Rieke Peter David Ralph G. Andrzejak, Klaus Lehnertz and Christian E. Elger. Indications of nonlinear deterministic and finite-dimensional structures in time series of brain electrical activity: Dependence on recording region and brain state. *Physical Review E*, 64,061907, 2001.
- [71] Albano AM Deguzman GC Greenbaum NN. Rapp PE, Zimmerman ID. Dynamics of spontaneous neural activity in the simian motor cortex: the dimension of chaotic neurons. *Physics Letters A*, 110:335–338, 1985.
- [72] E. Ravasz and A. L. Barabási. Hierarchical organization in complex networks. *Physical Review E*, 67:026112, 2003.
- [73] F. A. Rodrigues. *Caracterização, classificação e análise de redes complexas*. PhD thesis, Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2007.



- [74] F. A. Rodrigues and L. da F. Costa. Surviving opinions in sznajd models on complex networks. *International Journal of Modern Physics C*, 16(11), 2005.
- [75] D. Ruelle. Ergodic theory of differentiable dynamical systems. *Mathématique of the Institut des Hautes Études Scientifiques*, 5:27, 1979.
- [76] G. Sabidussi. The centrality index of a graph. *Psychometrika*, 31:581–603, 1966.
- [77] M. A. Savi. *Dinâmica Não-linear e Caos*. e-papers, Rio de Janeiro, 2006.
- [78] T. Schreiber. Interdisciplinary application of nonlinear time series methods. *Physics Reports*, 1998.
- [79] S Siegel. *Estatística não-paramétrica para as ciências do comportamento*. McGraw-Hill, Brasil, 1975.
- [80] Michael Small. *Applied Nonlinear Time Series Analysis: Applications in Physics, Physiology and Finance*. World Scientific Publishing, 2005.
- [81] C.J. Stam. Nonlinear dynamical analysis of eeg and meg: Review of an emerging field. *Clinical Neurophysiology*, 116, 2005.
- [82] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. World Scientific Publishing, 2005.
- [83] Floris Takens. Detecting strange attractors in turbulence. *Lecture Notes in Mathematics*, 898:366–381, 1981.
- [84] Ronald L. Rivest Clifford Stein Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson. *Algoritmos: teoria e prática*. Elsevier, Rio de Janeiro, 2012.
- [85] M. H. Trauth. *MATLAB Recipes for Earth Sciences*. Springer-Verlag, Germany, 2006.
- [86] G. Travieso and L. da F. Costa. Spread of opinions and proportional voting. *Physical Review E*, 74(3), 2006.
- [87] Giuliani A. Zbilut J.P. Webber C.L. Trulla, L.L. Recurrence quantification analysis of the logistic equation with transients. *Phys. Lett. A*, 223:225, 1996.
- [88] Thomas Erlebach Ulrik. Brandes. *Network Analysis: Methodological Foundations*. Springer, Germany, 2005.

- 
- [89] Stam CJ. van Straaten EC. Structure out of chaos: functional brain network analysis with eeg, meg, and functional mri. *European Neuropsychopharmacology*, 23:7–18, 2013.
- [90] A. M. Vera. *Propriedades de redes complexas de telecomunicações*. PhD thesis, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 12 2011.
- [91] S Weinberg, S; Abramowitz. *Data analysis for the behavioral sciences using SPSS*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [92] X. Xu, J. Zhang, and M. Small. Superfamily phenomena and motifs of networks induced from time series. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 105, 2008.
- [93] Liu G. Yang H. Self-organized topology of recurrence-based complex networks. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, doi: 10.1063/1.4829877, 2013.
- [94] J. Zhang and M. Small. Complex network from pseudoperiodic time series: Topology versus dynamics. *Physical Review Letters*, 96, 2006.
- [95] J. Zhang, J. Sun, X. Luo, K. Zhang, T. Nakamura, and M Small. Characterizing pseudoperiodic time series through the complex network approach. *Physica D*, 237:2856–2865, 2008.