UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
Departamento de Matemática
Mestrado profissional em Matemática

Teorema de Sturm:
Uma demonstração detalhada do Teorema de Sturm com Propriedades e Aplicações.

Por

Fabiano Neves Nader

Orientadora
Prof[a] Dr[a] Maria Eulália de Moraes Melo

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
Departamento de Matemática
Mestrado profissional em Matemática

Teorema de Sturm: Uma demonstração detalhada do Teorema de Sturm com Propriedades e Aplicações.

Dissertação de mestrado apresentado ao departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática

Fabiano Neves Nader

Recife
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Teorema de Sturm:
Uma demonstração detalhada do Teorema de Sturm com Propriedades e Aplicações.

Por

Fabiano Neves Nader

Dissertação submetida à homologação do Colegiado de Matemática, apresentado como um requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora:

____

Profª Drª Maria Eulália de Morais Melo
(DM-UFRPE)

Banca Examinadora:

____

Prof Dr Thiago Dias Oliveira Silva
(DM-UFRPE)

____

Prof Dr Marcelo Pedro dos Santos
(DM-UFRPE)

____

Prof Dr Eduardo Shirlippe Góes Leandro
(DM-UFPE)

À minha esposa Luciana.

Aos meus filhos Manuela e Mário.

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer aos meus pais, pois eles me deram os elementos que considero mais importantes na vida de um homem, que são os valores, o caráter, a educação e o sentimento de família e amizade. Sigo estes ideais que me foram passados, como regra para minha vida.

Não menos importante, agradeço a minha esposa, meu amor, que me deu dois lindos filhos que tanto me orgulho. Ela foi fundamental na elaboração e conclusão deste trabalho, me dando força nas horas difíceis.

Agradeço aos meus colegas de turma, que tornaram esse tempo de estudo mais agradável, principalmente aos amigos Diogo Lobo, Camila Mendonça e especialmente Walfrido Campos, que além dos momentos das aulas, também colaboraram com vários momentos de estudo, compartilhando materiais, conhecimentos e experiências.

Amigo é algo fundamental na vida de uma pessoa, graças a Deus posso dizer que tenho muitos. Alguns foram muito importantes para minha decisão de iniciar este mestrado. Um deles é o Mestre Kenji Chung, que me apresentou este curso e me incentivou a fazê-lo. O outro é o Mestre Aluízio Caldas que sempre disse que eu seria capaz de ser mais em termos acadêmicos.

Finalmente agradeço aos meus Professores, especialmente a minha Professora, Doutora Maria Eulália de Moraes Melo, pela sabedoria extrema, porém com muita humildade, pela paciência e doçura nas palavras de apoio, incentivando a todo momento a continuidade da minha formação e principalmente pelo exemplo em pessoa de que estudar é sempre bom em qualquer etapa da vida. Não esqueço as suas palavras “Gostaria que todos soubessem o quanto é bom aprender, eu estudo todos os dias e todos os dias aprendo algo mais”.

Agradeço a todos, que de alguma forma, me incentivaram com ações, palavras de apoio e gestos, que tiveram, muitas vezes sem saber, uma importância fundamental na finalização desta etapa da minha vida.

RESUMO

Este trabalho tem por finalidade construir toda a base teórica para a compreensão e utilização do Teorema de Sturm, que é uma ferramenta muito bem fundamentada para encontrar a quantidade de raízes reais de um polinômio com coeficientes reais. Durante o desenvolvimento desse estudo procurei ilustrar com exemplos e aplicações de forma bem detalhada para que alunos e professores tenham condições de entender e utilizar este belíssimo algoritmo.

PALAVRA-CHAVE: Variação, Sturm, Sequências, Raízes, Polinômios, Discriminantes.

ABSTRACT

This study aims to build the entire theoretical basis for the understanding and use of the Sturm theorem, which is a tool very well grounded to find the number of real roots of a polynomial with real coefficients. During the development of this study sought to illustrate with examples and applications in great detail so that students and teachers are able to understand and use this beautiful algorithm.

KEYWORD: Variation, Sturm sequences, roots, polynomials, Discriminants.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Jacques Charles François Sturm (Genebra, 29 de setembro de 1803 — Paris, 15 de dezembro de 1855) foi um matemático francês, de origem alemã. Sua família é originária de Estrasburgo e emigrou por volta de 1760.

Em 1818 Sturm começa a assistir as aulas da Academia de Genebra. Em 1819 a morte de seu pai o força a dar aulas para crianças de famílias ricas, para sustentar sua família. Em 1823 torna-se tutor do filho da Madame de Staël. No final do mesmo ano, Sturm permaneceria um curto período em Paris, acompanhando a família de seu tutorado. Foi então que decidiu, junto com seu colega de escola Jean-Daniel Colladon, tentar a sorte em Paris, onde conseguiu um emprego na *Bulletin universel*.

Em 1826 Sturm e Colladon realizaram a primeira determinação experimental da velocidade do som na água.

Em 1829 descobriu um teorema que diz respeito à determinação do número de raízes reais de uma equação numérica incluídas entre limites dados, o qual levou o seu nome e é o objeto de estudo deste trabalho.

No ano seguinte, Sturm acabou beneficiado com a revolução de 1830, visto que sua fé protestante deixou de ser um obstáculo para conseguir emprego em colégios públicos. No final daquele ano, foi indicado como professor de *Mathématiques Spéciales* do*collège Rollin*.

Foi escolhido para ser membro da Académie des Sciences em 1836, preenchendo a cadeira de André-Marie Ampère. Tornou-se *répétiteur* em 1838, e professor da École Polytechnique em 1840. Nesse mesmo ano, após a morte de Simeon Denis Poisson, foi indicado como professor de mecânica clássica da *Faculté des Sciences* de Paris.

Suas obras, *Cours d'analyse de l'école polytechnique* (1857-1863) e *Cours de mécanique de l'école polytechnique* (1861) publicadas após sua morte, ocorrida em Paris, foram constantemente republicadas.

Um dos mais aclamados trabalhos de Sturm, intitulado *Mémoire sur la résolution des équations numériques*, publicado em 1845, descreve um algoritmo eficiente para determinar o número de raízes reais de uma equação polinomial, com coeficientes reais, em um intervalo. Anteriormente o problema de determinar o número de raízes reais de uma equação havia sido tratado por Descartes, Rolle, Lagrange, Fourier e Cauchy, sendo este o primeiro a dar uma solução completa, embora não efetiva.

Vamos neste trabalho tecer uma base para o entendimento do Teorema de Sturm, seguido de sua demonstração e aplicações.

Para que precisamos saber se um polinômio possui raiz real? Esta pergunta possui várias respostas. Por exemplo, para determinarmos o domínio de uma função real de variável real onde haja restrições envolvendo zeros de polinômios ou para resolver inequações polinomiais, entre outras aplicações.

Capítulo 1 – Variação de uma sequência finita de números reais

1.1 Variação de uma sequência finita de números reais.

Seja dada uma sequência finita $A = (a_j) = (a_0, a_1, a_2, ..., a_n)$ com $n + 1$ números reais não todos nulos. Defina A^* como a sequência formada retirando-se os termos nulos de A. A variação da sequência A, Var(A) ou Var(a_j), é o número de vezes que elementos consecutivos tem sinais opostos, depois que quaisquer termos nulos de A forem removidos, ou seja Var(A) = Var(A). Também podemos dizer que Var(a_j) é o número de termos negativos da sequência $(a_k \cdot a_{k+1})$, onde os termos a_i são os termos da sequência A*.*

Exemplo 1.1.1:

$$A = (2, 8, -3, 0, 4, 0, 0, -2, -6) \Rightarrow A^* = (2, 8, -3, 4, -2, -6) \Rightarrow \mathrm{Var}(A) = 3$$

Exemplo 1.1.2:

$$B = (9, 12, 4, 3, 7, 1) \Rightarrow \mathrm{Var}(B) = 0$$

Exemplo 1.1.3:

$$C = (0, 0, 2, 0, 0, -9) \Rightarrow C^* = (2, -9) \Rightarrow \mathrm{Var}(C) = 1$$

Exemplo 1.1.4:

$$D = (-6, 0, 0, 0, 7, 0, -8) \Rightarrow D^* = (-6, 7, -8) \Rightarrow \mathrm{Var}(D) = 2$$

Observe que se tomarmos a sequência $(\alpha \cdot a_j)$, onde α é um número real não nulo, teremos a mesma variação de sinal da sequência (a_j).

Do exemplo 1.1.1 temos:

$$A = (2, 8, -3, 0, 4, 0, 0, -2, -6) \Rightarrow A^* = (2, 8, -3, 4, -2, -6) \Rightarrow \mathrm{Var}(A) = 3$$

logo,

$$(-1)\cdot A = (-2, -8, 3, 0, -4, 0, 0, 2, 6) \Rightarrow (-1)\cdot A^* = (-2, -8, 3, -4, 2, 6) \Rightarrow \mathrm{Var}[(-1)\cdot A] = 3$$

e também

$$3A = (-6, -24, 9, 0, -12, 0, 0, 6, 18) \Rightarrow 3A^* = (-6, -24, 9, -12, 6, 18) \Rightarrow \mathrm{Var}(3A) = 3$$

esse fato observado nos exemplos acima pode ser provado como se segue:

Seja dada uma sequência finita $A = (a_0, a_1, a_2, ..., a_n)$ de números reais não todos nulos e $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, tomemos $(\alpha \cdot a_j) = (\alpha \cdot a_0, \alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, ..., \alpha \cdot a_n)$. Pela definição Var($\alpha \cdot a_j$) é o número de termos negativos da sequência $(\alpha \cdot a_k \cdot \alpha \cdot a_{k+1}) = (\alpha^2 \cdot a_k \cdot a_{k+1})$, escrita após a remoção dos zeros, como α é um número real não nulo, $\alpha^2 > 0$, que nos leva a descobrir que o número de sinais negativos de $(\alpha \cdot a_j)$ é o mesmo de (a_j), portanto

$$\mathrm{Var}(\alpha \cdot a_j) = \mathrm{Var}(a_j).$$

Isso nos permitirá supor que um determinado termo $a_i \neq 0$ seja positivo, por exemplo, sem haver alteração na Var(a_j).

Note também que a Variação máxima de uma sequência de k + 1 termos é k.

Esta situação ocorre quando todos os termos sucessivos são opostos, ou seja, $a_i \cdot a_{i+1} < 0$, $\forall$ i, com $0 \leq i < k$. Tomemos a sequência A com k + 1 termos não nulos

$$A = (a_0, a_1, a_2, ..., a_k),$$

sabemos que Var(A) é dada pela quantidade de termos negativos da sequência

$$(a_0 \cdot a_1, a_1 \cdot a_2, a_2 \cdot a_3 ..., a_{k-1} \cdot a_k)$$

que possui k termos. Concluímos que, para uma sequência A com k + 1 termos não nulos, temos que a variação máxima para a sequência A é dada por $Var_{máx}(A) = k$, que ocorre quando todos os termos desta última sequência são negativos.

1.2 Variação de uma sequência finita de polinômios em um número real.

Seja $F = (f_0, f_1, ..., f_k)$, $f_j \in \mathbb{R}[x]$, uma sequência finita de polinômios com coeficientes reais, e seja α um número real. Se os números $f_j(\alpha)$ não são todos nulos, a variação da sequência F em α, $Var(F,\alpha)$ será definida como a variação de sequência de números reais $(f_0(\alpha), f_1(\alpha), ..., f_k(\alpha))$.

Exemplo 1.2.1:

$F = (x - 2, x^2 + x + 1, 2x^5 + 3, x^3 - 4)$

Para x = 0, a sequência $F(0) = (f_0(0), f_1(0), f_2(0) , f_3(0)) = (-2, 1, 3, -4) \rightarrow Var(F,0) = 2$

Para x = 2, a sequência $F(2) = (f_0(2), f_1(2), f_2(2) , f_3(2)) = (0, 7, 67, 4) \rightarrow Var(F,2) = 0$

1.3 Variação de uma sequência finita de polinômios em $+\infty$ e $-\infty$.

Definimos $Var(F,+\infty)$ como sendo a variação da sequência dos coeficientes líderes dos polinômios $f_i(t)$, que vem a ser a variação da sequência $(f_i(a))$, para $a >> 0$, ou seja, para um $a > 0$ muito grande, tão grande quanto necessário. Definimos $Var(F,-\infty)$ como sendo a variação da sequência dos coeficientes líderes dos polinômios $f_i(-t)$, que vem a ser a variação da sequência $(f_i(-a))$, para $a >> 0$.

Isso decorre de que o sinal de f(t) para $t >> 0$ depende exclusivamente do coeficiente líder de f, possuindo o mesmo sinal, mas o sinal de f(-t) para um $t >> 0$ depende do coeficiente líder de f e do seu grau, se o grau for par o sinal de f será igual ao do coeficiente líder, se for ímpar será o oposto do sinal do coeficiente líder.

Exemplo 1.3.1:

$F = (x - 2, x^2 + x + 1, -2x + 3, -x^4 - 4)$

Para $a >> 0$, temos que:

A Var(F,a) é igual a variação da sequência (1, 1, –2, –1), então $Var(F, +\infty) = 1$.

A Var(F,-a) é igual a variação da sequência (–1, 1, 2, –1), então $Var(F, -\infty) = 2$.

Capítulo 2 – A Sequência de Sturm

2.1 A Sequência de Sylvester de dois polinômios f, g $\in \mathbb{R}[x]$.

Sejam f e g dois polinômios de coeficientes reais, com grau(f) maior ou igual ao grau(g). Definimos a sequência de Sylvester de dois polinômios f e g como a sequência de polinômios $(f_0, f_1, f_2,..., f_k)$ sendo

$$f_0 = f,\ f_1 = g,\ f_2,\ \ldots,\ f_k$$

onde

$$f_{i+1} = -\,\mathrm{rem}(f_{i-1}, f_i)$$

onde $\mathrm{rem}(f_{i-1}, f_i)$ é o resto usual proveniente do algoritmo euclidiano da divisão de f_{i-1} por f_i e f_K é o último termo não nulo encontrado pelo algoritmo dado e portanto, um máximo divisor comum de f e g.

Sabemos da identidade proveniente do algoritmo de Euclides que,

$$f_{i-1} = f_i \cdot q_i + \mathrm{rem}(f_{i-1}, f_i) \quad \Rightarrow \quad f_{i-1} = f_i \cdot q_i - f_{i+1},\ 0 < i < k$$

Perceba que, por definição, f_{i+1} é o oposto de $\mathrm{rem}(f_{i-1}, f_i)$, note o sinal.

2.2 A Sequência de Sturm de um polinômio f $\in \mathbb{R}[x]$

A sequência de Sturm de um polinômio f $\in \mathbb{R}[x]$ é a sequência de Sylvester do par f, f', onde f' é a derivada de f.

Exemplo 2.2.1:

Seja

$$f(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8, \text{ então } f'(x) = 3x^2 + 2x - 10.$$

Dividindo $f = f_0$ por $f' = f_1$

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +\ x^2 & -\ 10x & +\ 8 & 3x^2 + 2x - 10 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -\dfrac{2x^2}{3} & +\dfrac{10x}{3} & & \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{9} \\ \hline
 & \dfrac{x^2}{3} & -\dfrac{20x}{3} & +\ 8 & \\
 & -\dfrac{x^2}{3} & -\dfrac{2x}{9} & +\dfrac{10}{9} & \\ \hline
 & & -\dfrac{62x}{9} & +\dfrac{82}{9} &
\end{array}$$

obtemos um quociente

$$q_1 = \frac{x}{3} + \frac{1}{9}$$

e um resto

$$\text{rem}(f_0, f_1) = -\frac{62x}{9} + \frac{82}{9}\,,$$

logo

$$f_2 = -\,\text{rem}(f_0, f_1) = \frac{62x}{9} - \frac{82}{9}$$

Dividindo f_1 por f_2

$$\begin{array}{r|l}
3x^2 \;+\; 2x \;-\; 10 & \frac{62x}{9} - \frac{82}{9} \\ \cline{2-2}
-\,3x^2 \;+\; \frac{123x}{31} \qquad & \frac{27x}{62} + \frac{1665}{1922} \\ \cline{1-1}
\frac{185x}{31} \;-\; 10 & \\
-\,\frac{185x}{31} \;+\; \frac{7585}{961} & \\ \cline{1-1}
-\frac{2025}{961} &
\end{array}$$

obtemos um quociente

$$q_2 = \frac{27x}{62} + \frac{1665}{1922}$$

e um resto

$$\text{rem}(f_1, f_2) = -\frac{2025}{961} \;\Rightarrow\; f_3 = -\,\text{rem}(f_1, f_2) = \frac{2025}{961}$$

Assim, a sequência de Sturm do polinômio $f(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ é:

$f_0 = f = x^3 + x^2 - 10x + 8$

$f_1 = f' = 3x^2 + x - 10.$

$f_2 = \dfrac{62x}{9} - \dfrac{82}{9}$

$f_3 = \dfrac{2025}{961}$

Para os próximos exemplos os cálculos para a obtenção dos restos euclidianos nas divisões dos polinômios ficarão subentendidos.

Exemplo 2.2.2:

Seja

$$f = x^4 + 4x^2 – 5, \text{ temos que } f' = 4x^3 + 8x.$$

Dividindo $f = f_0$ por $f' = f_1$ obtemos um resto

$$rem(f_0, f_1) = 2x^2 – 5, \text{ logo } f_2 = – rem(f_0, f_1) = – 2x^2 + 5$$

Dividindo f_1 por f_2 obtemos um resto

$$rem(f_1, f_2) = 18x, \text{ logo } f_3 = – rem(f_1, f_2) = – 18x$$

Dividindo f_2 por f_3 obtemos um resto

$$rem(f_2, f_3) = 5, \text{ logo } f_4 = – rem(f_3, f_3) = – 5$$

Assim, a sequência de Sturm do polinômio $f = x^4 + 4x^2 – 5$ é:

$f_0 = f = x^4 + 4x^2 – 5$

$f_1 = f' = 4x^3 + 8x$

$f_2 = - 2x^2 + 5$

$f_3 = - 18x$

$f_4 = - 5$

Exemplo 2.2.3:

Seja

$$f = x^4 + 4x^2 + 3, \text{ temos que } f' = 4x^3 + 8x.$$

Dividindo $f = f_0$ por $f' = f_1$ obtemos um resto

$$rem(f_0, f_1) = 2x^2 + 3, \text{ logo } f_2 = – rem(f_0, f_1) = – 2x^2 – 3$$

Dividindo f_1 por f_2 obtemos um resto

$$rem(f_1, f_2) = 2x, \text{ logo } f_3 = – rem(f_1, f_2) = – 2x$$

Dividindo f_2 por f_3 obtemos um resto

$$rem(f_2, f_3) = – 3, \text{ logo } f_4 = – rem(f_3, f_3) = 3$$

Assim, a sequência de Sturm do polinômio $f = x^4 + 4x^2 + 3$ é:

$f_0 = f = x^4 + 4x^2 + 3$

$f_1 = f' = 4x^3 + 8x$

$f_2 = - 2x^2 - 3$

$f_3 = - 2x$

$f_4 = 3$

Exemplo 2.2.4:

Seja

$$f = x^4 – x^2 + 2x + 2, \text{ temos que } f' = 4x^3 – 2x + 2.$$

Dividindo $f = f_0$ por $f' = f_1$ obtemos um resto

$$\mathrm{rem}(f_0, f_1) = -\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + 2 \text{ , logo } f_2 = – \mathrm{rem}(f_0, f_1) = \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} - 2 .$$

Dividindo f_1 por f_2 obtemos um resto

$$\mathrm{rem}(f_1, f_2) = 50x + 50, \Rightarrow f_3 = – \mathrm{rem}(f_1, f_2) = – 50x – 50 = – 50\cdot(x + 1).$$

Dividindo f_2 por f_3 obtemos um resto

$$\mathrm{rem}(f_2, f_3) = 0.$$

Como $\mathrm{rem}(f_2, f_3) = 0$ temos que $f_3 = – 50\cdot(x + 1)$ é um máximo divisor comum de $f_0 = f$ e $f_1 = f'$.

Assim, a sequência de Sturm do polinômio $f = x^4 – x^2 + 2x + 2$ é:

$f_0 = f = x^4 – x^2 + 2x + 2$

$f_1 = f' = 4x^3 – 2x + 2$

$f_2 = \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} - 2$

$f_3 = – 50x – 50$

Capítulo 3 – Teorema de Sturm

3.1 Teorema de Sturm

Teorema:

Seja* f $\in$ $\mathbb{R}$[x] *um polinômio sem raízes repetidas, sejam a, b $\in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, a < b, e suponhamos f(a) $\neq$ 0, f(b) $\neq$ 0, se a, b $\in \mathbb{R}$.

O número de zeros de f no intervalo [a,b] é a diferença

Var(F,a) – Var(F,b)

onde F é a sequência de Sturm de f.

Antes de provar o Teorema de Sturm, vamos fazer algumas observações.

3.1.1 Introdução

Seja f $\in$ $\mathbb{R}$[x], sem raízes repetidas, e seja F a sequência de Sturm de f. Para qualquer a $\in$ $\mathbb{R}$, se f(a) = 0 então f '(a) $\neq$ 0, esse fato decorre de que se a é raiz simples do polinômio f então f(a) = 0 e f pode ser escrito como f(x) = (x – a) $\cdot$ q(x), com q(a) $\neq$ 0, logo pela derivada do produto f '(x) = (x – a) $\cdot$ q '(x) + q(x), então f '(a) = (a – a)$\cdot$q'(a) + q(a) = q(a) $\neq$ 0, portanto se a é raiz simples f(a) = 0 e f '(a) $\neq$ 0. Portanto, a variação de sequência de Sturm está definida em qualquer ponto de $\mathbb{R}$. Provaremos o Teorema de Sturm estudando a função

$$\mathrm{Var}(F) : [a,b] \to \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$t \to \mathrm{Var}\,(F,t)$$

fazendo t percorrer o intervalo [a,b]. Mostraremos que quando t passar por um zero de f então Var(F,t) decai de uma unidade e que somente nessa situação poderá ocorrer uma mudança em Var(F,t). Disto resultará a afirmação do Teorema.

3.1.2 Resultados que serão utilizados

Para funções contínuas h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valem os seguintes resultados, bem conhecidos, que estão demonstrados no apêndice deste trabalho:

Teorema da Permanência do Sinal:

Se *h(c) $\neq$ 0 então existe β > 0 tal que, $\forall t \in [c - \beta,\ c + \beta]$, h(t) $\neq$ 0 e h(t) tem o mesmo sinal de h(c), isto é, h(c)$\cdot$h(t) > 0.*

Teorema do Valor Intermediário:

Suponhamos a < b, se *h(a)$\cdot$h(b) < 0 então existe um número real c, com a < c < b, tal que h(c) = 0.*

Toda função polinomial é derivável e sua derivada também é uma função polinomial.

3.1.3 Observações sobre a função variação $Var(F) : [a, b] \to \mathbb{N} \cup \{0\}$

Toda função polinomial não identicamente nula possui um número finito de zeros, e todos eles isolados. Ou seja: se c é um zero de f então existe $\beta > 0$ tal que no intervalo $[c - \beta, c + \beta]$ c é o único zero de f.

Portanto, se o valor $f_i(t)$ da função contínua polinomial f_i muda de sinal então t passa por um ponto c onde f_i se anula. Isto é garantido pelo Teorema do Valor Intermediário. Assim, as possíveis descontinuidades da função Var(F) só podem ocorrer nos pontos onde algum polinômio f_j da sequência F de Sturm de f se anula. De fato, temos:

Lema: Se para $t_1, t_2 \in]a,b[$, com $t_1 < t_2$, nós temos $Var(F,t_1) \neq Var(F,t_2)$, então existem i, $0 \leq i \leq k$ e c, $c \in [t_1, t_2]$, tais que $f_i(c) = 0$.

Se $f_j(t_1) = 0$ ou $f_j(t_2) = 0$, para algum j, não há o que provar. Suponhamos então que $f_j(t_1) \neq 0$, $\forall j$. Assim, as sequências

$[1] = (f_0(t_1)\cdot f_1(t_1), f_1(t_1)\cdot f_2(t_1), ..., f_{k-1}(t_1)\cdot f_k(t_1))$.

$[2] = (f_0(t_2)\cdot f_1(t_2), f_1(t_2)\cdot f_2(t_2), ..., f_{k-1}(t_2)\cdot f_k(t_2))$.

não têm termos nulos. Estamos supondo $Var(F,t_1) \neq Var(F,t_2)$. Suponhamos $Var(F,t_1) > Var(F,t_2)$. Então o número de termos negativos na sequência [1] é maior do que o número de termos negativos na sequência [2]. Portanto, existe i, $0 \leq i \leq k$, tal que

$$f_{i-1}(t_1) \cdot f_i(t_1) < 0 \quad , \quad f_{i-1}(t_2) \cdot f_i(t_2) > 0$$

Resulta que um dos polinômios f_j, $j = i - 1$ ou $j = i$ terá sinais diferentes em t_1 e t_2, quer dizer, $f_j(t_1) \cdot f_j(t_2) < 0$. Novamente, o Teorema do valor intermediário garante a existência de c, $t_1 < c < t_2$. tal que $f_j(c) = 0$.

Se $Var(F,t_1) < Var(F,t_2)$ o argumento é o mesmo. ■

Daí segue que a função $Var(F) : [a,b] \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ tem apenas um número finito de descontinuidades de primeira espécie é contínua por partes, e constante nos intervalos abertos onde é contínua.

Exemplo 3.1.1:

Dado o polinômio $f = f_0 = x^3 + x^2 - 10x + 8$, temos do exemplo 2.2.1 que a Sequência de Sturm para f é dada por

$$F = \left(x^3 + x^2 - 10x + 8; \quad 3x^2 + 2x - 10; \quad \frac{62x}{9} - \frac{82}{9}; \quad \frac{2025}{961} \right)$$

Como conhecemos as raízes de f, $x_1 = -4$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$, vamos ver como se comporta o gráfico da função $Var(F) : [-5,5] \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, cujo domínio contém as raízes de f.

$$Var(F,-5) = 3$$

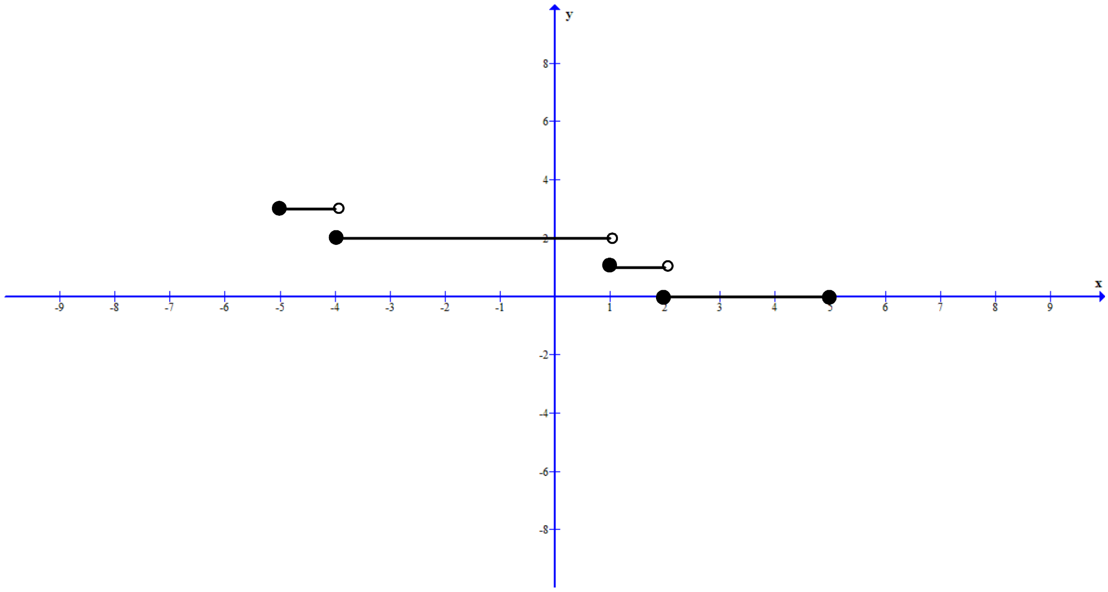
$$Var(F,-4) = 2$$

$$Var(F,0) = 2$$

Var(F,1) = 1

Var(F,2) = 0

Var(F,5) = 0



3.1.4 Retomando a prova do Teorema de Sturm

Agora iremos mostrar que:

A) Se i > 0, o anulamento de algum f_i num ponto c ∈]a,b[não tem qualquer efeito sobre a diferença Var(F,a) – Var(F,b).

Depois iremos mostrar que

B) Quando i = 0, isto é, quando $f_0(c) = f(c) = 0$, sendo c ∈]a,b[, então a variação Var(F,t) decresce exatamente uma unidade quando t passa por c.

Provemos a afirmação A.

Suponhamos que $f_i(c) = 0$, com i > 0. De acordo com a identidade proveniente do algoritmo de Euclides temos que $f_{i-1} = q_i \cdot f_i - f_{i+1}$, teremos

$$f_{i-1}(c) = - f_{i+1}(c).$$

Nós poderíamos ter $f_{i-1}(c) = f_{i+1}(c) = f_i(c) = 0$. Neste caso, como dois termos consecutivos da sequência de Sturm se anulariam em c, c ∈]a,b[, então todos os polinômios f_j da sequência de Sturm F do polinômio f também se anulariam em c. Isto é uma consequência de que, para i > 0,

$$f_{i-1} = q_i \cdot f_i - f_{i+1}.$$

Em particular, teríamos

$$f(c) = f'(c) = 0$$

e, portanto, c seria uma raiz múltipla do polinômio f. Pela hipótese inicial, f não tem raízes repetidas. Então esta possibilidade não ocorre.

Temos, portanto, $f_{i-1}(c)$ e $f_{i+1}(c)$ não nulos com sinais opostos.

Vejamos que neste caso o anulamento de f_i em c não irá causar mudança na variação Var(F,t) quando t passa por c.

Já sabemos que se num ponto $c \in\ ]a,b[$ temos $f_j(c) \neq 0$ então existe um número real positivo β suficientemente pequeno para que o sinal da função f_j, $sgn(f_j)$, permaneça constante na vizinhança $]c - \beta, c + \beta\ [$ de c, isto é garantido pelo Teorema da permanência do sinal.

Tomemos $\beta > 0$ suficientemente pequeno para garantir que em $[c - \beta, c + \beta]$ o único zero possível para f_j seja c (qualquer que seja j), isto é possível pois os zeros de um polinômio são todos isolados. Sejam t_1, t_2 tais que $c - \beta < t_1 < c < t_2 < c + \beta$, e vamos escrever as subsequências.

$$(f_{i-1}(t), f_i(t), f_{i+1}(t))$$

para $t = t_1$, $t = c$, $t = t_2$, respectivamente.

Os números reais não nulos $f_{i-1}(t_1)$, $f_{i-1}(c)$ e $f_{i-1}(t_2)$ têm o mesmo sinal, $f_{i+1}(t_1)$, $f_{i+1}(c)$ e $f_{i+1}(t_2)$ também são não nulos e tem o mesmo sinal, e $f_{i-1}(c)$ e $f_{i+1}(c)$ não são nulos e têm sinais opostos. Assim, vemos que as ocorrências possíveis para os sinais nas subsequências $(f_{i-1}(t), f_i(t), f_{i+1}(t))$, $t = t_1$, $t = c$, $t = t_2$, são as situações seguintes, apresentadas nas tabelas abaixo:

		$sgn(f_{i-1}(t))$	$sgn(f_i(t))$	$sgn(f_{i+1}(t))$
$t = t_1$	→	+	*	–
$t = c$	→	+	0	–
$t = t_2$	→	+	*	–

		$sgn(f_{i-1}(t))$	$sgn(f_i(t))$	$sgn(f_{i+1}(t))$
$t = t_1$	→	–	*	+
$t = c$	→	–	0	+
$t = t_2$	→	–	*	+

Vemos então claramente que o anulamento de f_i em c, $i > 0$, não irá provocar qualquer alteração em Var(F,t) quando t percorrer o intervalo $[t_1, t_2]$. De fato, qualquer que seja o sinal que irá substituir * nas tabelas acima, haverá uma única mudança de sinal nas subsequências.

$$(\ sgn(f_{i-1}(t_1)),\ sgn(f_i(t_1))\ ,\ sgn(f_{i+1}(t_1))\ )$$

$$(\ sgn(f_{i-1}(c)),\ sgn(f_i(c))\ ,\ sgn(f_{i+1}(c))\ )$$

$$(\ sgn(f_{i-1}(t_2)),\ sgn(f_i(t_2))\ ,\ sgn(f_{i+1}(t_2))\ )$$

e disto se conclui exatamente que a variação destas subsequências é a mesma.

Repetindo, os zeros dos polinômios f_i com $i > 0$ não afetam os valores da variação da sequência de Sturm de f.

Provemos agora a afirmação B.

Vamos examinar o que se passa com Var (F,t) quando t passa por um zero de f, que é o caso onde i = 0. Estamos supondo que c é uma raiz simples de f.

Como c é uma raiz simples do polinômio f, então $f'(c) \neq 0$. Podemos supor que $f'(c) = f_1(c) > 0$ multiplicando a sequência F por -1 se necessário. Assim, temos que f é estritamente crescente na vizinhança de c; escolhendo $\beta > 0$ suficientemente pequeno, e t_1, t_2 tais que $c - \beta < t_1 < c < t_2 < c + \beta$, teremos $f(t_1) < 0$ e $f(t_2) > 0$. (Fazemos a escolha de β de modo que não haja outros zeros de algum f_i no intervalo $]c - \beta, c + \beta[$.)

Portanto, Var(F,t) decresce exatamente uma unidade quando t passa por c e não muda quando f se anula. De fato, escrevendo as subsequências

$(f(t), f_1(t), f_2(t))$, $t = t_1$, $t = c$, $t = t_2$,

verificamos que a situação possível é a seguinte:

		$sgn(f_0(t))$	$sgn(f_1(t))$	$sgn(f_2(t))$
$t = t_1$	→	–	+	*
$t = c$	→	0	+	*
$t = t_2$	→	+	+	*

Resumindo, mostramos que:

A: Se c não é um zero de f então existe $\beta > 0$ tal que em $[c - \beta, c + \beta]$ a função Var(F) é constante.

B: Se c é um zero de f então existe $\beta > 0$ tal que

a) em $[c - \beta, c + \beta]$ o único zero de f é c.

b) se $c - \beta < t_1 < c < t_2 < c + \beta$ então $Var(F,t_1) - Var(F,t_2) = 1$

Assim, resulta que, fazendo t percorrer o intervalo [a,b] no sentido de a para b ,somente quando t passar por um zero de f pode ocorrer mudança no valor da variação de f em uma unidade. Segue a afirmação do Teorema de Sturm.

"*Dados um polinômio f sem raízes repetidas e a sequência de Sturm para o polinômio f, a diferença $Var(F, -\infty) - Var(F,+\infty)$ é igual a quantidade de raízes reais de f.*"

Observação: Suponhamos dado um polinômio qualquer $f \in \mathbb{R}[x]$, e desejamos saber quantas raízes reais distintas f possui. Determinamos a sequência de Sturm de f. obtendo o mdc(f,f') = d. Se d é uma constante, então f não tem raízes múltiplas. Se d é um polinômio de grau $n \geq 1$, então $g = \frac{f}{d}$ é um polinômio que só tem raízes simples, exatamente as mesmas de f. Podemos então aplicar o Teorema de Sturm ao polinômio g. A diferença

$$Var(G,-\infty) - Var(G,+\infty),$$

onde G é a sequencia de Sturm de g, fornece a resposta.

3.2 Exemplos de aplicações do Teorema De Sturm

Exemplo 3.2.1:

Dado o polinômio $f = f_0 = x^3 + x^2 - 10x + 8$, temos do exemplo 2.2.1 que:

$$f_0 = f = x^3 + x^2 - 10x + 8$$

$$f_1 = f' = 3x^2 + 2x - 10.$$

$$f_2 = \frac{62x}{9} - \frac{82}{9}$$

$$f_3 = \frac{2025}{961}$$

Seja $F = (f_0(t), f_1(t), f_2(t), f_3(t))$

Para $t = -a$, $a >> 0$, temos que a variação de F é a mesma da sequência:

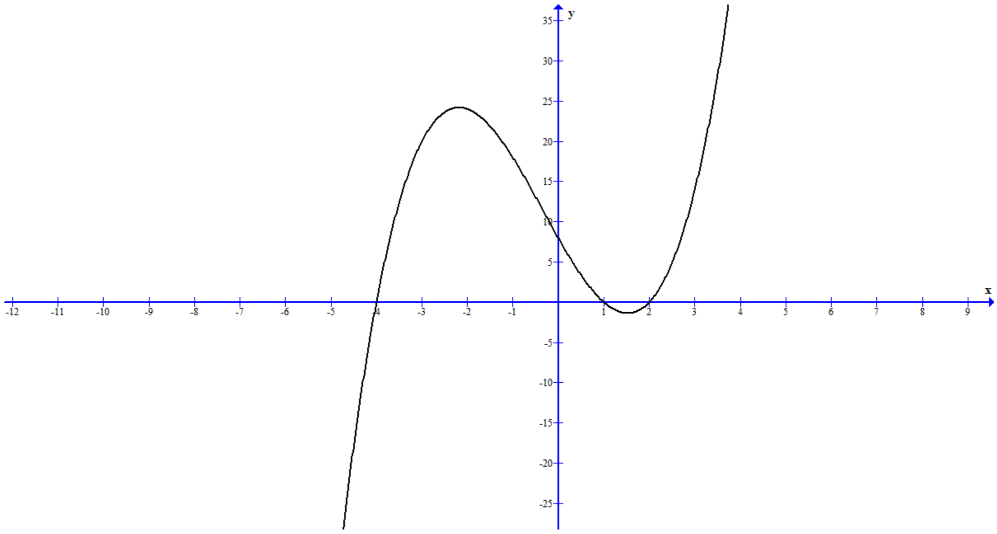
$(-a^3, +3a^2, -62a/9, +\frac{2025}{961})$, onde $Var(F, -\infty) = 3$.

Para $t = a$, $a >> 0$, temos que a variação de F é a mesma da sequência:

$(+a^3, +3a^2, +62a/9, +\frac{2025}{961})$, onde $Var(F,+\infty) = 0$.

A diferença $D = Var(F, -\infty) - Var(F,+\infty) = 3$. Segue que o polinômio f possui 3 raízes reais.

Vamos construir o gráfico do polinômio $f(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ para analisar geometricamente as suas raízes.



Verificamos pela análise do gráfico que este polinômio cúbico realmente possui três raízes reais distintas, pois intercepta o eixo das abscissas em três pontos distintos.

Exemplo 3.2.2:

Dado o polinômio

$f = x^4 + 4x^2 – 5$,

temos do exemplo 2.2.2 que:

$f_0 = f = x^4 + 4x^2 – 5$

$f_1 = f' = 4x^3 + 8x$

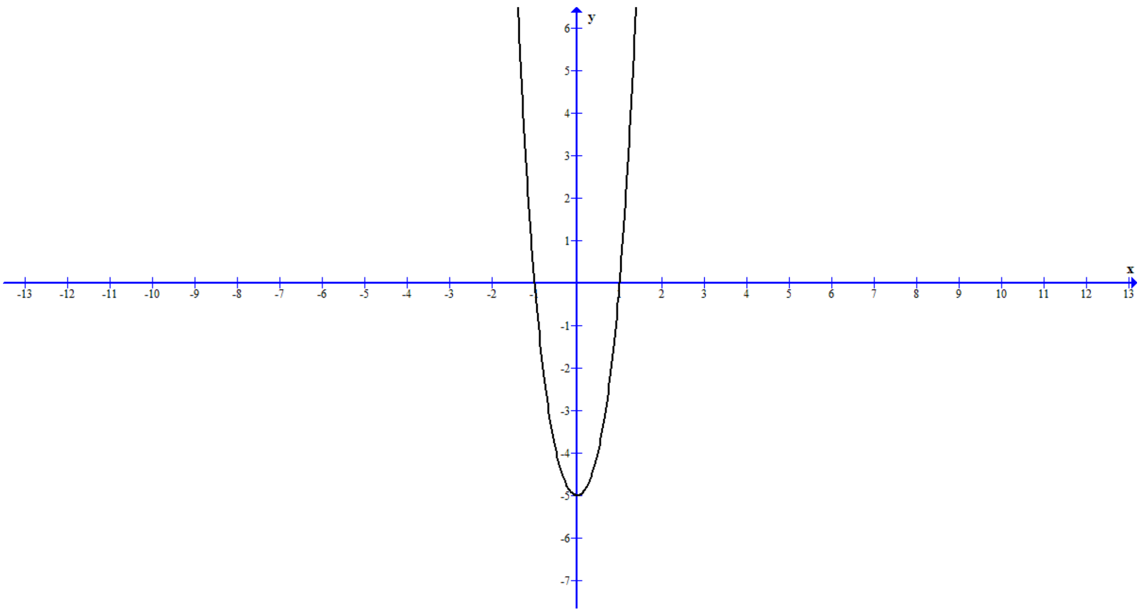
$f_2 = - 2x^2 + 5$

$f_3 = – 18x$

$f_4 = – 5$

A sequência dos sinais dos termos de $F = (f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$, para $x = – t$ com $t >> 0$ é (+,–, –, +, –) e para $x = t$ com $t >> 0$ é (+, +, –, –, –), onde $Var(F,-\infty) = 3$ e $Var(F,+\infty) = 1$, logo a diferença $D = Var(F,-\infty) – Var(F,+\infty) = 2$, que é o número de raízes reais de f. f possui duas raízes reais e duas complexas não reais conjugadas.

Construindo o gráfico do polinômio quártico $f = x^4 + 4x^2 – 5$, verificamos que este possui apenas duas raízes reais simples.



Exemplo 3.2.3:

Dado o polinômio

$f = x^4 + 4x^2 + 3$,

temos do exemplo 2.2.3 que:

$f_0 = f = x^4 + 4x^2 + 3$

$f_1 = f' = 4x^3 + 8x$

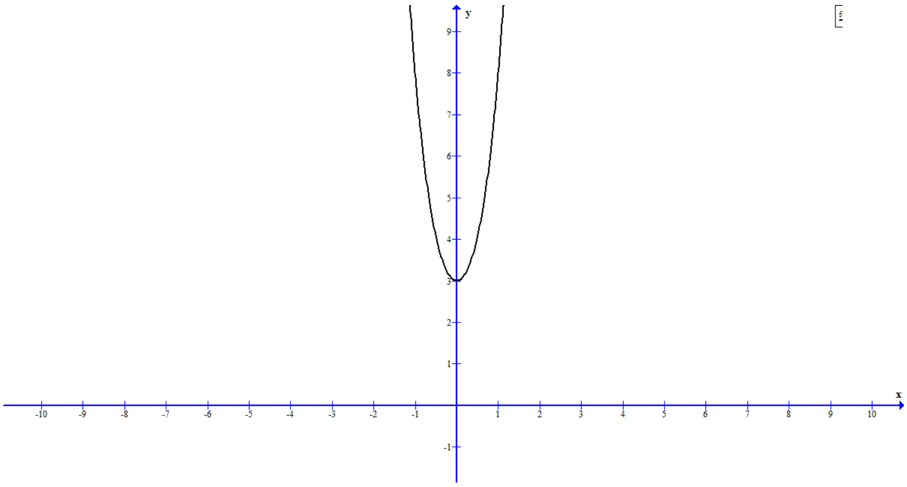
$f_2 = - 2x^2 - 3$

$f_3 = - 2x$

$f_4 = 3$

A sequência dos sinais dos termos da sequência $F = (f_0(t), f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)$, para $t < < 0$ é $(+,–, –, +, +)$ e para $t > > 0$ é $(+, +, –, –, +)$, onde $Var(F,-\infty) = 2$ e $Var(F,+\infty) = 2$, logo a diferença $D = Var(F,-\infty) – Var(F,+\infty) = 0$, que é o número de raízes reais de f, logo f não possui raiz real sendo todas complexas não reais.

Construindo o gráfico do polinômio quártico $f = x^4 + 4x^2 + 3$, verificamos que este não possui raiz real.



Exemplo 3.2.4:

Dado o polinômio

$$f = x^4 – x^2 + 2x + 2,$$

temos do exemplo 2.2.4 que:

$f_0 = f = x^4 – x^2 + 2x + 2$

$f_1 = f' = 4x^3 – 2x + 2$

$f_2 = \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} - 2$

$f_3 = – 50x – 50$

$f_4 = 0$

Como $f_4 = 0$, então um $mdc(f,f') = d = f_3 = – 50x – 50$. Obtemos $g_1 = \frac{f}{d} = \frac{f_0}{f_3} = -\frac{x^3}{50} - \frac{x^2}{50} - \frac{2}{50}$, que possui as mesmas raízes de $g = –50g_1 = x^3 + x^2 + 2$, sendo todas as raízes sem repetição, logo, aplicando o Teorema de Sturm para o polinômio g:

$g_0 = g = x^3 + x^2 + 2$

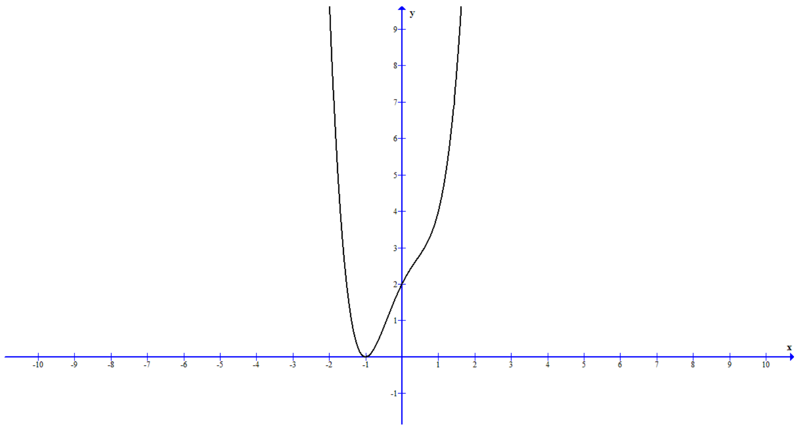
$g_1 = g' = 3x^2 + 2x$

$g_2 = \dfrac{2x}{9} - 2$

$g_3 = -261$

As sequências dos sinais dos termos de $G = (g_0(-t), g_1(-t), g_2(-t), g_3(-t))$, para $t >> 0$ é $(-, +, -, -)$ e de $G = (g_0(t), g_1(t), g_2(t), g_3(t))$, para $t >> 0$ é $(+, +, +, -)$, onde $Var(G,-\infty) = 2$ e $Var(G,+\infty) = 1$, logo a diferença $D = Var(G,-\infty) - Var(G,+\infty) = 1$, que é o número de raízes reais de g. Logo f só possui uma raiz real dupla, ou seja, duas raízes reais iguais e as outras duas raízes serão complexas não reais conjugadas.

Construindo o gráfico do polinômio quártico $f = x^4 - x^2 + 2x + 2$, verificamos que este realmente possui uma raiz real dupla.



Exemplo 3.2.5:

Dado o polinômio

$$f = x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2,$$

temos que:

$f_0 = f = x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2$

$f_1 = f' = 5x^4 - 6x^2 + 4x - 3$

$f_2 = \dfrac{4x^3}{5} - \dfrac{6x^2}{5} + \dfrac{12x}{5} - 2$

$f_3 = \dfrac{39x^2}{4} + 6x - \dfrac{63}{4}$

$f_4 = -\dfrac{800x}{169} + \dfrac{800}{169}$

Um máximo divisor comum de f e f' é igual a

$$d = f_4 = -\frac{800x}{169} + \frac{800}{169}.$$

Sabemos que f possui raiz repetida que é obtida de $f_4 = 0$, logo a raiz repetida é 1, então se dividirmos f por x – 1, eliminaremos esta raiz repetida e ficaremos com um polinômio com as mesmas raízes de f, porém sem repetição. Obtemos este polinômio

$$g = \frac{f}{x-1} = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2.$$

Logo, aplicando o Teorema de Sturm para g

$$g_0 = g = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$$

$$g_1 = g' = 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

$$g_2 = \frac{11x^2}{16} - \frac{7x}{8} + \frac{33}{16}$$

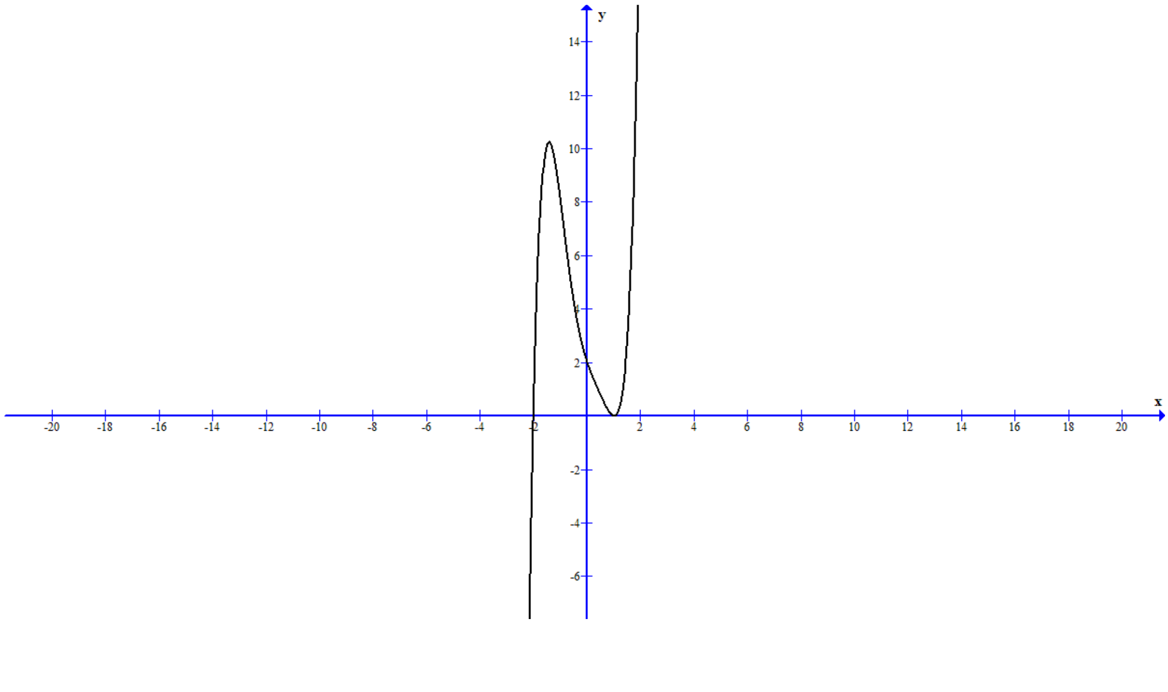
$$g_3 = \frac{448x}{121} + \frac{256}{11}$$

$$g_4 = -\frac{27225}{784}$$

A sequência dos sinais dos termos de $G = (g_0(-t), g_1(-t), g_2(-t), g_3(-t), g_4(-t))$, para $t >> 0$ é (+, –, +, –, –) e de $G = (g_0(t), g_1(t), g_2(t), g_3(t))$, para $t >> 0$ é (+, +, +, +, –), onde $Var(G,-\infty) = 3$ e $Var(G,+\infty) = 1$, logo a diferença $D = Var(G,-\infty) - Var(G,+\infty) = 2$. Logo g possui duas raízes reais e duas raízes complexas não reais conjugadas.

Concluímos que $f = x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2$ possui duas raízes reais iguais, uma raiz real simples e duas raízes complexas não reais conjugadas.

Construindo o gráfico do polinômio do quinto grau $f = x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2$, verificamos pela sua análise que este realmente possui duas raízes reais iguais, uma raiz real simples e duas raízes complexas não reais conjugadas.



Exemplo 3.2.6:

Determine o domínio mais amplo dentro dos reais da função real de variável real, definida por $f(x) = \sqrt{x^4 + 4x^2 + 3}$.

Descobrimos através do teorema de Sturm no exemplo 2.2.3 que o polinômio

$$x^4 + 4x^2 + 3$$

não possui raíz real. Como o coeficiente dominante é positivo, o sinal deste polinômio é sempre positivo, logo este polinômio não se anula nem admite valores negativos, então podemos afirmar que o domínio de f é o conjunto dos Reais.

Exemplo 3.2.7:

Verifique se a fração algébrica

$$\frac{x^3 + x^2 - 10x + 8}{x^4 + 4x^2 + 3}$$

pode ser simplificada.

Descobrimos através do teorema de Sturm no exemplo 2.2.1 que o polinômio

$$x^3 + x^2 - 10x + 8$$

só possui raízes reais e no exemplo 3.2.3 que o polinômio $x^4 + 4x^2 + 3$ só possui raiz não real.

Concluímos facilmente que os polinômios não possuem raízes em comum, logo esta fração algébrica não tem fatores polinomiais em comum, logo não pode ser simplificada.

Capítulo 4 – Discriminantes e Discriminadores

4.1 Discriminantes e Discriminadores para uma equação algébrica

A determinação das raízes de uma equação algébrica é um dos problemas fundamentais em álgebra. Aliás, o teorema fundamental da álgebra afirma que qualquer polinómio p(z) com coeficientes complexos de uma variável e de grau $n \geq 1$ admite alguma raiz complexa. Como normalmente as raízes são difíceis de obter, é frequente utilizar técnicas que permitam adquirir alguma informação sobre a sua natureza, ou seja, se são reais ou complexas não reais, sem as determinar. No cerne de algumas dessas técnicas surge a ideia de discriminante.

Definição:

O discriminante, denotado por Δ, do polinômio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 ,$$

cujas raízes são $x_1, x_2, \ldots, x_n$, é dado por

$$\Delta = \prod_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i \neq j}}^{n} (x_i - x_j) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{\substack{i=1 \\ j>i}}^{n} (x_i - x_j)^2.$$

Se Δ se anular, então o polinômio p tem no mínimo uma raiz com multiplicidade maior ou igual a dois.

Dada uma equação algébrica com coeficientes reais, chamaremos, informalmente, **discriminadores** da equação um conjunto de expressões, podendo ser unitário, todas em função dos coeficientes da equação, onde os sinais das mesmas determinam a quantidade de raízes reais da equação.

4.2 Obtenção do Discriminador para uma equação quadrática através do Teorema de Sturm

Dado um polinômio da forma $f = ax^2 + bx + c$, com coeficientes reais e a não nulo, temos que a sequência de Sturm para o polinômio f é $F = (f_0, f_1, f_2)$, onde:

$f_0 = f = ax^2 + bx + c$

$f_1 = f' = 2ax + b$

$f_2 = \dfrac{b^2}{4a} - c = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = \dfrac{\Delta}{4a}$, onde denotamos $\Delta = b^2 - 4ac$.

Queremos obter a sequência

$F(x) = (f_0(x), f_1(x), f_2(x))$.

Para $x = -t$, com $t >> 0$; vem que

$(at^2, -2at, \frac{\Delta}{4a})$, já vimos que var(f) = var(k.f) com k sendo um real não nulo, então fazendo k = 1/a temos $(t^2, -2t, \frac{\Delta}{4a^2})$, logo a sequência dos sinais dos termos é (+,–, sgn(Δ)).

Para x = t, com t > > 0; vem analogamente que $(t^2, 2t, \frac{\Delta}{4a^2})$, logo a sequência dos sinais dos termos é (+,+, sgn(Δ))

Note que o sinal do terceiro termo das duas sequências depende do valor de Δ, então faremos um estudo das variações em função do sinal de Δ.

A) Se $\Delta > 0$ então $Var(F, -\infty) = 2$ e $Var(F, \infty) = 0$, portanto a diferença

$$Var(F, -\infty) - Var(F, \infty) = 2,$$

logo o polinômio possui duas raízes reais distintas.

B) Se $\Delta < 0$ então $Var(F, -\infty) = 1$ e $Var(F, \infty) = 1$, portanto a diferença

$$Var(f, -\infty) - Var(f, \infty) = 0,$$

logo o polinômio não possui raízes reais, ou seja, possui duas raízes não reais conjugadas.

C) Se $\Delta = 0$ então $f_2 = 0$, logo o $MDC(f_0, f_1) = f_1$, teremos que a raiz de f_1, que é $x_1 = -\frac{b}{2a}$ também é raiz de f_0, como a soma das raízes de $f_0 = f = ax^2 + bx + c$ é $S = -\frac{b}{a}$, logo

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{b}{2a} + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{a} + \frac{b}{2a} = -\frac{b}{2a} = x_1$$

Logo o polinômio possui uma raiz real com multiplicidade dois, ou seja duas raízes reais iguais. Assim, o sinal do discriminador Δ determina a natureza das raízes da equação.

Concluímos que Δ é um discriminador da equação quadrática, suficiente para determinar a quantidade de raízes reais do polinômio quadrático e é exatamente o conhecido discriminante da equação polinomial do segundo grau obtido pela definição algébrica.

4.3 Obtenção dos Discriminadores para uma equação cúbica através do Teorema de Sturm

Sabemos que, para todo polinômio cúbico

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

com a, b, c e d reais e a não nulo, existe outro polinômio da forma

$$g(t) = t^3 + pt + q,$$

encontrado dividindo-o pelo coeficiente líder a e fazendo a substituição

$$x = t - \frac{b}{3},$$

com exatamente a mesma quantidade de raízes reais de f.

Dado $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, então:

$$p(t - \frac{b}{3a}) = a\left(t - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(t - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(t - \frac{b}{3a}\right) + d =$$

$$= a\left(t^3 - \frac{3b}{3a}t^2 + \frac{3b^2}{9a^2}t + \frac{b^3}{27a^3}\right) + b\left(t^2 - \frac{2b}{3a}t + \frac{b^2}{9a^2}\right) + c\left(t - \frac{b}{3a}\right) + d =$$

$$= at^3 - bt^2 + \frac{b^2}{3a}t + \frac{b^3}{27a^2} + bt^2 - \frac{2b^2}{3a}t + \frac{b^3}{9a^2} + ct - \frac{bc}{3a} + d =$$

$$= at^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)t + \frac{4b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d,$$

se dividirmos por a, teremos um polinômio com as mesmas raízes.

$$\frac{p\left(t - \frac{b}{3a}\right)}{a} = t^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)t + \frac{4b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a},$$

fazendo

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \text{ e } q = \frac{4b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$$

teremos:

$$g = t^3 + pt + q$$

Dado o polinômio $g = x^3 + px + q$, com p e q reais, temos que a sequência de Sturm do polinômio g é $G = (g_0, g_1, g_2, g_3)$, onde:

$$g_0 = f = x^3 + px + q$$

$$g_1 = f' = 3x^2 + p$$

$$g_2 = -\frac{2px}{3} - q$$

$$g_3 = -\frac{4p^3 + 27q^2}{4p^2} = -\frac{\Delta}{4p^2}$$

Onde denotamos

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2$$

Queremos obter

$G(t) = (g_0(t), g_1(t), g_2(t), g_3(t))$

para t = -a, com a > > 0; vem

$$(-a^3, 3a^2, \frac{2pa}{3}, -\frac{\Delta}{4p^2}),$$

cuja sequência dos sinais dos termos é (–, +, sgn(p), –sgn(Δ))

para t = a, a > > 0; vem

$$(a^3, 3a^2, -\frac{2pa}{3}, -\frac{\Delta}{4p^2}),$$

cuja sequência dos sinais dos termos é (+, +, –sgn(p), –sgn(Δ))

Observação: note que o sinal do terceiro termo das duas sequências depende de exclusivamente de p e o sinal do quarto termo das duas sequências depende de exclusivamente Δ. Então nesse caso os discriminadores da cúbica são p e Δ. Para sabermos a quantidade de raízes reais da cúbica $x^3 + px + q = 0$, devemos analisar os sinais dos discriminadores.

Se p > 0, teremos obrigatoriamente que $4p^3 + 27q^2 > 0$, logo Δ > 0, temos que:

a sequência dos sinais dos termos de G(+∞) é (+, +, –, –), logo Var(G, +∞) = 1.

a sequência dos sinais dos termos de G(-∞) é (–, +, +, –), logo Var(G, -∞) = 2.

A quantidade de raízes reais de f é 1.

Se p < 0 e $\Delta > 0$, temos:

a sequência dos sinais dos termos de G(+∞) é (+, +, +, –), logo Var(G, +∞) = 1.

a sequência dos sinais dos termos de G(-∞) é (–, +, –, –), logo Var(G, -∞) = 2.

A quantidade de raízes reais de f é 1.

Se p < 0 e $\Delta < 0$, temos:

a sequência dos sinais dos termos de G(+∞) é (+, +, +, +), logo Var(G, +∞) = 0.

a sequência dos sinais dos termos de G(-∞) é (–, +, –, +), logo Var(G, -∞) = 3.

A quantidade de raízes reais de f é 3.

Se $p = 0$ e $q \neq 0$, a equação é dada por:

$$x^3 + q = 0,$$

onde os zeros são as raízes cúbicas de $-q$, como $q \in \mathbb{R} - \{0\}$, teremos uma raiz real e duas raízes complexas não reais conjugadas.

Se $p = 0$ e $q = 0$, a equação é dada por:

$$x^3 = 0,$$

que possui a raiz real nula com multiplicidade três.

Note que, como no caso da equação polinomial de grau 2, o discriminador Δ coincide com o discriminante do polinômio cúbico $p(x) = x^3 + px + q$.

Exemplo 4.3.1:

Dado o polinômio cúbico

$$f = x^3 + x^2 - 10x + 8,$$

já vimos no exemplo 3.2.1 que este possui as três raízes reais. Vamos analisar agora a quantidade de raízes reais pelos seus discriminadores.

O primeiro passo é escrevê-lo na forma

$$g = t^3 + pt + q,$$

para isso devemos fazer a mudança de variável $x = t - \frac{1}{3}$, logo

$$f(t - \frac{1}{3}) = (t - \frac{1}{3})^3 + (t - \frac{1}{3})^2 - 10(t - \frac{1}{3}) + 8,$$

desenvolvendo obtemos

$$g(t) = t^3 - \frac{31}{3}t + \frac{308}{27},$$

onde temos que $p = -\frac{31}{3}$ e $q = \frac{308}{27}$. Sabemos que os discriminadores de $g = t^3 + pt + q$ são $p = -\frac{31}{3}$ e $\Delta = 4p^3 + 27q^2 = 4(-\frac{31}{3})^3 + 27(\frac{308}{27})^2 = -900$.

Como $p < 0$ e $\Delta < 0$, concluímos baseado no que foi estudado que f possui as três raízes reais.

4.4 Obtenção dos Discriminadores para uma equação quártica através do Teorema de Sturm

Utilizando o mesmo argumento que foi usado para a equação cúbica, ao analisarmos a quantidade de raízes reais da equação quártica

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

podemos dividir a equação pelo coeficiente líder e fazer a substituição

$$x = t - \frac{b}{4},$$

e encontraremos a equação

$$t^4 + pt^2 + qt + r = 0,$$

na variável t que possui a mesma quantidade de raízes reais que a equação em x.

Dado o polinômio

$$f = x^4 + px^2 + qx + r,$$

com p, q e r reais não nulos, temos que:

$$f_0 = f = x^4 + px^2 + qx + r$$

$$f_1 = f' = 4x^3 + 2px + q$$

$$f_2 = -\frac{px^2}{2} - \frac{3qx}{4} - r$$

$$f_3 = \left(\frac{8pr - 9q^2 - 2p^3}{4p^2}\right)x - \left(\frac{p^2q + 12qr}{p^2}\right) = \left(\frac{\Delta_3}{4p^2}\right)x - \left(\frac{p^2q + 12qr}{p^2}\right)$$

$$f_4 = \frac{p^2.\left(-27q^4 - 4p^3q^2 + 256r^3 - 128p^2r^2 + 144pq^2r + 16p^4r\right)}{4\left(8pr - 9q^2 - 2p^3\right)^2} = \frac{p^2.\Delta_4}{4\left(\Delta_3\right)^2}$$

Onde denotamos

$$\Delta_3 = 8pr - 9q^2 - 2p^3$$

$$\Delta_4 = -27q^4 - 4p^3q^2 + 256r^3 - 128p^2r^2 + 144pq^2r + 16p^4r$$

Queremos obter

$$(f_0(t), f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)).$$

Para t = -a, com a > > 0; vem

$$\left(a^4, -4a^3, -\frac{pa^2}{2}, -\left(\frac{\Delta_3}{4p^2}\right)a, \frac{p^2.\Delta_4}{4\left(\Delta_3\right)^2}\right),$$

cuja sequência dos sinais dos termos é $(+, -, -\text{sgn}(p), -\text{sgn}(\Delta_3), \text{sgn}(\Delta_4))$.

Para $t = a$, com $a >> 0$; vem

$$\left(a^4,\ 4a^3,\ -\frac{pa^2}{2},\ \left(\frac{\Delta_3}{4p^2}\right)a,\ \frac{p^2.\Delta_4}{4(\Delta_3)^2}\right),$$

cuja sequência dos sinais dos termos é $(+, +, -\text{sgn}(p), \text{sgn}(\Delta_3), \text{sgn}(\Delta_4))$.

Note que $\text{Var}(F,+\infty)$ e $\text{Var}(F,-\infty)$ depende exclusivamente de p, Δ_3 e Δ_4, por isso estes são os discriminadores da quártica.

Vamos analisar a quantidade de raízes reais de um polinômio quártico em função dos sinais dos discriminadores p, Δ_3 e Δ_4.

Como a sequência de Sturm $(f_0(t), f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t))$ possui cinco termos, já foi provado que a variação máxima da sequência é 4, que ocorre quando todos os termos sucessivos são opostos, ou seja

$$f_k(t) \,.\, f_{k+1}(t) < 0,\ \forall\ k, \text{ com } 0 \leq k \leq 3.$$

Para o polinômio $f = x^4 + px^2 + qx + r$, com p, q e r reais não nulos, possuir as quatro raízes reais devemos ter

$$\text{Var}(F,-\infty) - \text{Var}(F,+\infty) = 4.$$

Para isso é necessário que $\text{Var}(F,-\infty) = 4$ e $\text{Var}(F,+\infty) = 0$. Para $\text{Var}(F,-\infty) = 4$, que é a variação máxima da sequência F, todos os termos sucessivos de F devem ser opostos, logo para esta situação temos obrigatoriamente que

$$p < 0,\ \Delta_3 > 0 \text{ e } \Delta_4 > 0.$$

Note que nesta situação ocorrerá que $\text{Var}(F,+\infty) = 0$.

Logo a quártica $f = x^4 + px^2 + qx + r$ possui as quatro raízes reais, se e somente se, $p < 0$, $\Delta_3 > 0$ e $\Delta_4 > 0$.

Para o polinômio $f = x^4 + px^2 + qx + r$, com p, q e r reais não nulos, possuir duas raízes reais e duas não reais conjugadas devemos ter $\text{Var}(F,-\infty) - \text{Var}(F,+\infty) = 2$. Para isso podemos analisar 3 casos:

1º caso: $\text{Var}(F,-\infty) = 4$, o que não é possível pois se $\text{Var}(F,-\infty) = 4$ teremos $p < 0$, $\Delta_3 > 0$ e $\Delta_4 > 0$ onde já vimos que teremos $\text{Var}(F,+\infty) = 0$ e o polinômio terá as quatro raízes reais.

2º caso: $\text{Var}(F,-\infty) = 3$, para isso podemos ter:

2.1: $p > 0$, $\Delta_3 < 0$ e $\Delta_4 < 0$, que gera $\text{Var}(F,+\infty) = 1$, garantindo que a equação tem 2 raízes reais e duas não reais conjugadas.

2.2: $p < 0$, $\Delta_3 > 0$ e $\Delta_4 < 0$, que gera $\text{Var}(F,+\infty) = 1$, garantindo também que a equação tem 2 raízes reais e duas não reais conjugadas.

2.3: $p < 0$, $\Delta_3 < 0$ e $\Delta_4 < 0$, que gera Var(F,+∞) = 1, que também torna possível a equação ter 2 raízes reais e duas não reais conjugadas.

3º caso: Var(F,–∞) = 2, para isso podemos ter:

3.1: $p > 0$, $\Delta_3 < 0$ e $\Delta_4 > 0$, que gera Var(F,+∞) = 2, que torna a equação sem raízes reais.

3.2: $p > 0$, $\Delta_3 > 0$ e $\Delta_4 > 0$, que gera Var(F,+∞) = 2, que também torna a equação sem raízes reais.

3.3: $p < 0$, $\Delta_3 < 0$ e $\Delta_4 > 0$, que gera Var(F,+∞) = 2, que também torna a equação sem raízes reais.

Com este estudo dos sinais de p, Δ_3 e Δ_4 podemos concluir que:

A) O polinômio f possui as quatro raízes reais se e somente se $p < 0$, $\Delta_3 > 0$ e $\Delta_4 > 0$.

B) O polinômio f possui duas raízes reais e duas não reais conjugadas se e somente se $p < 0$, $\Delta_3 > 0$ e $\Delta_4 < 0$ ou $p < 0$, $\Delta_3 < 0$ e $\Delta_4 < 0$.

C) Em todas as outras possibilidades de sinais para p, Δ_3 e Δ_4, onde nenhum deles é nulo, a equação não possuirá raízes reais.

Novamente temos que o discriminador Δ_4 é o discriminante do polinômio quártico da forma $p(x) = x^4 + px^2 + qx + r$, porém observe que, diferentemente dos casos em que o grau do polinômio é 2 ou 3, o sinal de Δ_4, quando positivo, não nos permite concluir se p(x) tem quatro raízes complexas não reais distintas ou quatro raízes reais distintas.

Exemplo 4.4.1:

Dados os polinômios

$$f_1(x) = (x^2 + 1)\cdot(x^2 + 2) = x^4 + 3x^2 + 2$$

e

$$f_2(x) = (x^2 - 1)\cdot(x^2 - 2) = x^4 - 3x^2 + 2$$

Perceba que os valores de q em f_1 e em f_2 são nulos, ou seja, $q_1 = q_2 = 0$, que $r_1 = r_2 = 2$, e os valores de p são opostos $p_1 = 3$ e $p_2 = -3$, logo o valor de Δ_4 para f_1 e f_2 são iguais, segue que

$$\Delta_4 = -27q^4 - 4p^3q^2 + 256r^3 - 128p^2r^2 + 144pq^2r + 16p^4r$$

$$\Rightarrow$$

$$\Delta_4 = 256\cdot(2)^3 - 128\cdot(\pm 3)^2\cdot(2)^2 + 16\cdot(\pm 3)^4\cdot 2 = 32 > 0$$

É fácil perceber pela forma fatorada dos polinômios que f_1 possui quatro raízes complexas não reais distintas e f_2 possui quatro raízes reais distintas, porém analisando o valor do discriminante Δ_4 , que é o mesmo para os dois polinômios, nada podemos concluir.

Exemplo 4.4.2:

Dado o polinômio

$$f = x^4 + 4x^2 - 5,$$

já vimos no exemplo 3.2.2 que este possui duas raízes reais e duas não reais conjugadas. Agora vamos analisar a quantidade de raízes reais pelos seus discriminadores. Sabemos que os discriminadores de uma quártica na forma $x^4 + px^2 + qx + r$ são p, $\Delta_3 = 8pr - 9q^2 - 2p^3$ e $\Delta_4 = -27q^4 - 4p^3q^2 + 256r^3 - 128p^2r^2 + 144pq^2r + 16p^4r$, logo para o polinômio f temos que $p = 4$, $q = 0$ e $r = -5$, então:

$$p = 4 \Rightarrow p > 0$$

$$\Delta_3 = 8.4.(-5) - 9(0)^2 - 2(4)^3 = -288 \Rightarrow \Delta_3 < 0$$

$$\Delta_4 = -27.0^4 - 4.4^3.0^2 + 256(-5)^3 - 128.4^2(-5)^2 + 144.4.0^2.(-5) + 16.4^4.(-5) = -103680 \Rightarrow$$

$\Delta_4 < 0$.

Como $p > 0$, $\Delta_3 < 0$ e $\Delta_4 < 0$, podemos concluir pelo estudo dos seus discriminadores que f possui duas raízes reais e duas não reais conjugadas.

Exemplo 4.4.3:

Dado o polinômio $f = x^4 + 4x^2 + 3$, já vimos no exemplo 3.2.3 que este não possui raízes reais. Agora vamos analisar a quantidade de raízes reais pelos seus discriminadores. Sabemos que $p = 4$, $q = 0$ e $r = 3$, logo:

$$p = 4 \Rightarrow p > 0$$

$$\Delta_3 = 8.4.3 - 9(0)^2 - 2(4)^3 = -32 \Rightarrow \Delta_3 < 0$$

$$\Delta_4 = -27.0^4 - 4.4^3.0^2 + 256.3^3 - 128.4^2.3^2 + 144.4.0^2.3 + 16.4^4.3 = 37632 \Rightarrow \Delta_4 > 0.$$

Como $p > 0$, $\Delta_3 < 0$ e $\Delta_4 > 0$, podemos concluir pelo estudo dos seus discriminadores que f não possui raiz real.

APÊNDICE

Teorema da permanência do sinal

Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, seja a_0 um ponto de A. Dizemos que a função $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a_0 se f tem a seguinte propriedade.

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 : a \in A \text{ e } |a - a_0| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(a_0)| < \varepsilon$$

Se $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$ e se f é contínua em todo ponto de B dizemos que f é contínua em B.

Dado um polinômio $P \in \mathbb{R}[x]$, a função polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ associada é contínua em todo ponto $x_0 \in \mathbb{R}$.

Teorema:

Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função contínua. Se $h(c) \neq 0$ então existe $\delta > 0$ tal que em $[c - \delta, c + \delta]$ tem-se $h(t) \neq 0$ e $h(t)$ tem o mesmo sinal de $h(c)$, isto é $h(t) \cdot h(c) > 0$, $\forall\, t \in [c - \delta, c + \delta]$

Prova.

Como h é contínua em c para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, é possível escolher um $\delta > 0$ tal que

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |h(x) - h(c)| < \varepsilon.$$

Ou seja:

$$c - \delta < x < c + \delta \Rightarrow -\varepsilon + h(c) < h(x) < \varepsilon + h(c)$$

Se $h(c) > 0$, tome $\varepsilon = \dfrac{h(c)}{2}$. Existe $\delta > 0$ tal que

$$c - \delta < x < c + \delta \Rightarrow \frac{h(c)}{2} = -\frac{h(c)}{2} + h(c) < h(x)$$

logo

$$c - \delta < x < c + \delta \Rightarrow h(x) > 0.$$

Se $h(c) < 0$, tome $\varepsilon = -\dfrac{h(c)}{2}$. Existe $\delta > 0$ tal que

$$c - \delta < x < c + \delta \Rightarrow h(x) < h(c) - \frac{h(c)}{2} = \frac{h(c)}{2}$$

logo

$$c - \delta < x < c + \delta \Rightarrow h(x) < 0.$$

Teorema do valor intermediário

Seja h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função contínua. Sejam a, b $\in \mathbb{R}$, a < b. Se h(a) $\cdot$ h(b) < 0 então existe pelo menos um c $\in \mathbb{R}$, a < c < b, tal que h(c) = 0.

Prova.

Suponhamos h(a) < 0, h(b) > 0. Seja

$$A = \{ x \in [a,b] : h(x) < 0\}$$

Como $b \in A$, temos $A \neq \emptyset$. Afirmamos que nenhum elemento de A é cota superior de A. De fato, seja $\alpha \in A$. Como $h(\alpha) < 0$, vemos que $\alpha \neq b$, pois h(b) > 0. Então $\alpha < b$. Seja $\varepsilon = -h(\alpha) > 0$, como h é contínua em α, existe $\delta > 0$, bastante pequeno para que $[\alpha, \alpha + \delta] \subseteq [a,b]$ e tal que

$$x \in \,]\, \alpha, \alpha + \delta\, [\, \Rightarrow h(x) \in \,]\, h(\alpha) - \varepsilon, h(\alpha) + \varepsilon\, [$$

logo

$$x \in \,]\, \alpha, \alpha + \delta\, [\, \Rightarrow h(x) < \varepsilon + h(\alpha) = 0$$

Então todos os pontos do intervalo $[\alpha, \alpha + \delta]$ pertencem a

$$A = \{ x \in [a,b] : h(x) < 0\}.$$

Segue que α não é cota superior de A, há elementos em A superiores a α.

Seja agora c = *sup*A. Como o ponto c é aderente ao conjunto A, pois para qualquer conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ não vazio e superiormente limitado, sabemos que o número real *sup*X é aderente ao conjunto X, existe uma sucessão (x_n) de pontos de A tal que $\lim x_n = c$. Então

$$h(c) = h(\lim x_n) = \lim h(x_n)$$

porque a função h é continua. Mas como $x_n \in A$, $\forall$ n, logo, $h(x_n) < 0$, $\forall$ n, temos

$$h(c) = \lim h(x_n) \leq 0$$

Como c = *sup*A $\notin$ A, h(c) < 0 não ocorre. Então h(c) = 0.

Para o caso em que $h(\alpha) > 0$, h(b) < 0 o argumento é semelhante.

Raízes complexas conjugadas de uma equação polinomial com coeficientes reais

"***Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite como raiz o número complexo não real z = a + bi (b $\neq$ 0), então essa equação também admite como raiz o número $\overline{z}$ = a – bi, conjugado de z".***

Demonstração:

Seja a equação $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 = 0$ de coeficientes reais que admite a raiz z, isto é, P(z) = 0.

Provemos que $\overline{z}$ também é raiz dessa equação, isto é, $P(\overline{z}) = 0$:

Para esta demonstração vamos admitir as seguintes propriedades operatórias, considerando z, w $\in \mathbb{C}$, onde $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos.

1) $\left(\overline{z}\right)^n = \overline{z^n}$.

2) $k \cdot \overline{z} = \overline{k \cdot z}$, $k \in \mathbb{R}$.

3) $\overline{z} + \overline{w} = \overline{z + w}$.

Logo:

$$P(\overline{z}) = a_n \cdot \left(\overline{z}\right)^n + a_{n-1} \cdot \left(\overline{z}\right)^{n-1} + a_{n-2} \cdot \left(\overline{z}\right)^{n-2} + ... + a_1 \cdot \overline{z} + a_0 =$$

$$= a_n \cdot \overline{z^n} + a_{n-1} \cdot \overline{z^{n-1}} + a_{n-2} \cdot \overline{z^{n-2}} + ... + a_1 \cdot \overline{z} + a_0 =$$

$$= \overline{a_n \cdot z^n} + \overline{a_{n-1} \cdot z^{n-1}} + \overline{a_{n-2} \cdot z^{n-2}} + ... + \overline{a_1 \cdot z} + \overline{a_0} =$$

$$= \overline{a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + a_{n-2} \cdot z^{n-2} + ... + a_1 \cdot z + a_0} = \overline{P(z)} = \overline{0} = 0$$

Esse teorema mostra que em uma equação polinomial de coeficientes reais as raízes complexas não reais, se existirem, aparecem sempre aos pares.

Eliminação do termo de grau n – 1 em um polinômio de grau n

Dado $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_0 = 0$, uma equação polinomial de grau n. Se fizermos a substituição $x = t + \alpha$, é possível escolher um valor para α de modo que no novo polinômio em t, com o mesmo número de raízes reais que possui o polinômio p em x, tenha o coeficiente de grau n – 1 nulo. É fácil constatar que o valor de α deve ser expresso por $\alpha = -\frac{a_{n-1}}{n.a_n}$.

Se substituirmos $x = t - \frac{a_{n-1}}{n.a_n}$ na equação anterior obteremos

$$p(t) = a_n t^n + b_{n-2}t^{n-2} + ... + b_0 = 0.$$

Demonstração:

A soma das raízes de um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_0$ é dada de acordo com as relações de Girard por $S = x_1 + x_2 + ... + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$, onde $x_1, x_2, ..., x_n$ são as raízes de p. Se substituirmos $x_i = t_i + \alpha$, com α um número real, teremos um polinômio com soma de raízes

$$S = x_1 + x_2 + ... + x_n = t_1 + \alpha + t_2 + \alpha + ... + t_n + \alpha = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$t_1 + t_2 + ... + t_n + n\alpha = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

fazendo $t_1 + t_2 + ... + t_n = 0$, teremos que $n\alpha = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$, logo $\alpha = -\frac{a_{n-1}}{n.a_n}$.

Como $p(t) = a_n t^n + b_{n-1}t^{n-1} + b_{n-2}t^{n-2} + ... + b_0 = 0$ é um polinômio com soma das raízes igual a zero, pois $t_1 + t_2 + ... + t_n = 0$ então $S' = t_1 + t_2 + ... + t_n = -\frac{b_{n-1}}{a_n} = 0$, logo $b_{n-1} = 0$ e

$$p(t) = a_n t^n + b_{n-2}t^{n-2} + ... + b_0.$$

Note que o polinômio p(x) não possui as mesmas raízes que o polinômio p(t), porém como $x_i = t_i - \frac{a_{n-1}}{n.a_n}$, com $n, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R} - \{0\}$, então se $t_i \in \mathbb{R}$ segue que $x_i \in \mathbb{R}$ e se $t_i \notin \mathbb{R}$ segue que $x_i \notin \mathbb{R}$. Concluímos que a quantidade de raízes reais de p(x) é a mesma de p(t), logo sempre poderemos fazer esta alteração de variável para descobrir o número de raízes reais da equação p(x) = 0.

Mudança do coeficiente líder de um polinômio com coeficientes reais para a unidade

Também sabemos que se dividirmos um polinômio por um número real não nulo encontraremos outro polinômio com as mesmas raízes, portanto para a análise das raízes podemos dividir qualquer polinômio pelo seu coeficiente líder a fim de termos um polinômio de coeficiente líder unitário, ou seja, um polinômio Mônico.

Todo polinômio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_0,$$

com coeficientes reais e $a_n \neq 0$, pode ser representado na sua forma fatorada por

$$p(x) = a_n.(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

com $x_1, x_2, \ldots, x_n$ suas raízes complexas, logo:

$$q(x) = \frac{p(x)}{a_n} = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

é um polinômio com as mesmas raízes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de p(x).

Fórmula de Bhaskara

A fórmula de Bhaskara é uma fórmula resolutiva para as equações quadráticas, ou seja, da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c reais e a não nulo. A sua demonstração requer apenas conhecimentos básicos de fatoração. Segue sua demonstração:

Partindo de

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

vamos multiplicar ambos os membros por 4a, logo teremos:

$$4ax^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

vamos completar um trinômio quadrado perfeito adicionando b^2 em ambos os membros, logo teremos:

$$(2ax)^2 + 2.2ax.b + b^2 + 4ac = b^2$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$2ax = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}\ ,$$

onde chegamos na expressão:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ ,$$

que é a fórmula resolutiva da equação quadrática chamada fórmula de Bhaskara.

Fórmula de Cardano

A fórmula de Cardano é uma fórmula resolutiva para uma equação cúbica.

Dada uma equação geral do 3º grau, ou cúbica, na forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

com a, b, c e d reais e a não nulo, podemos dividi-la pelo coeficiente líder a e fazer uma mudança de variável usando x = $y - \frac{b}{3a}$, obtendo a equação

$$y^3 + py + q = 0,$$

cujas raízes são as mesmas da equação original adicionadas de uma constante real $k = \frac{b}{3a}$. Logo podemos generalizar a análise de qualquer equação cúbica escrevendo-a na forma

$$x^3 - px - q = 0.$$

Logo segue a demonstração:

Partindo do cubo da soma $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$, podemos por em evidência 3uv e obtermos:

$(u + v)^3 = u^3 + 3uv(u + v) + v^3$, logo podemos escrever esta expressão como:

$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$

Comparando esta última equação com $x^3 - px - q = 0$, percebemos que $x = u + v$ é uma raiz desta equação para $p = 3uv$ e $q = u^3 + v^3$. Logo se elevarmos a primeira ao cubo e isolarmos u^3v^3 obteremos $u^3v^3 = \frac{p^3}{27}$ e $v^3 + u^3 = q$, que nada mais é do que um problema para encontrar as raízes de uma equação do 2º grau, no caso u^3 e v^3, sabendo a soma e o produto das mesmas, no caso q e $\frac{p^3}{27}$ respectivamente.

A equação quadrática é dada por

$$t^2 - qt + \frac{p^3}{27} = 0,$$

cujas raízes são dadas por:

$$t_1 = u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} \text{ e } t_2 = v^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}},$$

logo temos que:

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} \text{ e } v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Sabendo que $x = u + v$ obtemos a famosa fórmula de Cardano:

$$x = u + v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Note que esta é a fórmula resolutiva para a equação

$$x^3 - px - q = 0,$$

logo para uma equação cúbica completa da forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

teremos que continuar a resolução para achar as suas raízes fazendo

$$r_n = x_n + \frac{b}{3a},$$

com r_n sendo as raízes da equação completa.

Método resolutivo para a equação quártica

A forma canônica da equação do 4º grau ou quártica é:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \text{ com } a \neq 0. \qquad (1)$$

Para eliminar o termo de grau 3 vamos fazer a substituição $x = y - \frac{b}{4a}$

$$a\left(y - \frac{b}{4a}\right)^4 + b\left(y - \frac{b}{4a}\right)^3 + c\left(y - \frac{b}{4a}\right)^2 + d\left(y - \frac{b}{4a}\right) + e = 0.$$

Desenvolvendo e ordenando pelas potências decrescentes de y obtemos:

$$ay^4 + \left(c - \frac{3b^2}{8a}\right)y^2 + \left(d - \frac{bc}{2a} + \frac{b^3}{8a^2}\right)y + \left(c - \frac{bd}{4a} + \frac{b^2c}{16a^2} - \frac{3b^4}{256a^3}\right) = 0$$

Se dividirmos ambos os membros por "a" obteremos a equação reduzida

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \qquad (2)$$

sendo seus coeficientes dados por

$$p = \frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2}$$

$$q = \frac{d}{a} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{b^3}{8a^3}$$

$$r = \frac{c}{a} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{3b^4}{256a^4}$$

Vamos somar e subtrair $2sy^2 + s^2$ ao primeiro membro de (2), por razões que se tornarão evidentes mais abaixo:

$$y^4 + py^2 + qy + r + 2sy^2 + s^2 - 2sy^2 - s^2 = 0$$

reordenando os termos, obtemos

$$y^4 + 2sy^2 + s^2 + py^2 - 2sy^2 + qy + r - s^2 = 0$$

logo, teremos a equação equivalente

$$(y^2 + s)^2 - [(2s - p)y^2 - qy + s^2 - r] = 0 \qquad (3)$$

Transformando a parcela $(2s - p)y^2 - qy + s^2 - r$ em produto de fatores lineares:

$$(2s - p)y^2 - qy + s^2 - r = (2s - p)\cdot(y - y')\cdot(y - y'')$$

em que y' e y'' são as soluções da equação do segundo grau

$$(2s - p)y^2 - qy + s^2 - r = 0$$

$$y' = \frac{q + \sqrt{p^2 - 4(2s - p)(s^2 - r)}}{2(2s - p)}$$

$$y'' = \frac{q - \sqrt{p^2 - 4(2s - p)(s^2 - r)}}{2(2s - p)}$$

Assim se o discriminante

$$q^2 - 4(2s - p)(s^2 - r) = -8s^3 + 4ps^2 + 8rs - 4pr + q^2$$

for nulo, significa que s verifica a cúbica:

$$8s^3 - 4ps^2 - 8rs + (4pr - q^2) = 0 \qquad (4)$$

então

$$y' = y'' = \frac{q}{2(2s - p)}$$

e

$$(2s - p)y^2 - qy + s^2 - r = (2s - p)\left(y - \frac{q}{2(2s - p)}\right)^2$$

pelo que a equação (3) se transforma

$$(y^2 + s)^2 - \left(y\sqrt{2s - p} - \frac{q}{2\sqrt{2s - p}}\right)^2 = 0$$

fatorando o primeiro membro obtemos a equação:

$$\left(y^2 + s + y\sqrt{2s - p} - \frac{q}{2\sqrt{2s - p}}\right)\left(y^2 + s - y\sqrt{2s - p} + \frac{q}{2\sqrt{2s - p}}\right) = 0$$

cujas soluções são as soluções das duas equações polinomiais de grau 2

$$y^2 + y\sqrt{2s - p} + s - \frac{q}{2\sqrt{2s - p}} = 0 \qquad (5)$$

e

$$y^2 - y\sqrt{2s - p} + s + \frac{q}{2\sqrt{2s - p}} = 0 \qquad (6)$$

As soluções da equação (5) são:

$$y_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2s - p} + \frac{1}{2}\sqrt{-2s - p + \frac{2q}{\sqrt{2s - p}}}$$

e

$$y_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2s-p} - \frac{1}{2}\sqrt{-2s-p+\frac{2q}{\sqrt{2s-p}}}$$

e as soluções da equação (6) são:

$$y_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2s-p} + \frac{1}{2}\sqrt{-2s-p-\frac{2q}{\sqrt{2s-p}}}$$

e

$$y_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2s-p} - \frac{1}{2}\sqrt{-2s-p-\frac{2q}{\sqrt{2s-p}}}$$

em que s é uma solução da equação cúbica auxiliar (4) que se repete

$$8s^3 - 4ps^2 - 8rs + (4pr - q^2) = 0\,.$$

As soluções da equação do 4º grau inicial (1) são pois

$$x_k = y_k - \frac{b}{4a}\ ,\ k \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Cálculo do discriminante algébrico da equação cúbica

Seja o polinômio $P(x) = x^3 + px + q$. Considerando x_1, x_2 e x_3 suas raízes complexas, temos a seguinte identidade:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 + px + q.$$

Derivando os dois lados da identidade, segue que:

$$(x - x_1)(x - x_2) + (x - x_1)(x - x_3) + (x - x_2)(x - x_3) = 3x^2 + p.$$

Substituímos as raízes de P(x) na última igualdade. Assim, obtemos:

$$P'(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) = 3(x_1)^2 + p \Rightarrow P'(x_1) = (-1)^2\cdot(x_2 - x_1)\cdot(x_3 - x_1)$$

$$P'(x_2) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) = 3(x_2)^2 + p \Rightarrow P'(x_2) = (-1)\cdot(x_2 - x_1)\cdot(x_3 - x_2)$$

$$P'(x_3) = (x_3 - x_1)\cdot(x_3 - x_2) = 3(x_3)^2 + p$$

Então o produto $P'(x_1) \cdot P'(x_2) \cdot P'(x_3)$ é igual a

$$(-1)^3\cdot(x_2 - x_1)^2\cdot(x_3 - x_1)^2\cdot(x_3 - x_2)^2 = [3(x_1)^2 + p]\cdot[3(x_2)^2 + p]\cdot[\,3(x_3)^2 + p]$$

Porém temos que o discriminante de uma equação polinomial é dado por

$$\Delta = \prod_{\substack{i=1\\ j=1\\ i\neq j}}^{n}(x_i - x_j) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{\substack{i=1\\ j>i}}^{n}(x_i - x_j)^2$$

logo para a cúbica temos que

$$\Delta = (-1)^3 \cdot (x_2 - x_1)^2 \cdot (x_3 - x_1)^2 \cdot (x_3 - x_2)^2$$

utilizando a identidade obtida de $P'(x_1) \cdot P'(x_2) \cdot P'(x_3)$, temos que

$$\Delta = [3(x_1)^2 + p] \cdot [3(x_2)^2 + p] \cdot [3(x_3)^2 + p]$$

$$\Delta = 27(x_1x_2x_3)^2 + 9p(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2) + 3p^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + p^3$$

Conhecemos as Relações de Girard para o polinômio cúbico da forma $P(x) = x^3 + px + q$:

(1) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

(2) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p$

(3) $x_1x_2x_3 = -q$

Elevando as equações (1), (2) e (3) ao quadrado encontramos as equações (4), (5) e (6):

(4) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 0$

(5) $x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + 2(x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2) = p^2$

(6) $x_1^2x_2^2x_3^2 = q^2$

Substituindo (2) em (4):

(7) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2p = 0 \;\Rightarrow\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2p$

Substituindo (1) e (3) em (5):

$x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + 2(x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2) = p^2 \qquad \Rightarrow$

$x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + 2\, x_1x_2x_3\, (x_1 + x_2 + x_3) = p^2 \qquad \Rightarrow$

$x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + 2(-q)(0) = p^2 \qquad \Rightarrow$

(8) $x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 = p^2$

Então, substituindo (3), (7) e (8) em Δ obtemos

$$\Delta = 27(x_1x_2x_3)^2 + 9p(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2) + 3p^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + p^3$$

$$\Delta = 27(-q)^2 + 9p(p^2) + 3p^2(-2p) + p^3$$

$$\Delta = 27q^2 + 9p^3 - 6p^3 + p^3$$

Finalmente, o discriminante algébrico para a equação cúbica é dado por

$$\boldsymbol{\Delta = 27q^2 + 4p^3}$$

Cálculo do discriminante algébrico da equação quártica

Seja o polinômio $P(x) = x^4 + px^2 + qx + r$. Considerando x_1, x_2, x_3 e x_4 suas raízes complexas, temos a seguinte identidade:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = x^4 + px^2 + qx + r.$$

Derivando os dois lados da identidade, segue que:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) + (x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) + (x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 4x^3 + 2px + q.$$

Substituímos as raízes de P(x) na última igualdade. Assim, obtemos:

$$P'(x_1) = (x_1 - x_2)\,(x_1 - x_3)\,(x_1 - x_4) = 4(x_1)^3 + 2px_1 + q \Rightarrow P'(x_1) = (-1)^3\cdot(x_2 - x_1)\cdot(x_3 - x_1)\cdot(x_4 - x_1)$$

$$P'(x_2) = (x_2 - x_1)\,(x_2 - x_3)\,(x_2 - x_4) = 4(x_2)^3 + 2px_2 + q \Rightarrow P'(x_2) = (-1)^2\cdot(x_2 - x_1)\cdot(x_3 - x_2)\cdot(x_4 - x_2)$$

$$P'(x_3) = (x_3 - x_1)\cdot(x_3 - x_2)\,(x_3 - x_4) = 4(x_3)^3 + 2px_3 + q \Rightarrow P'(x_3) = (-1)\cdot(x_3 - x_1)\cdot(x_3 - x_2)\,(x_4 - x_3)$$

$$P'(x_4) = (x_4 - x_1)\cdot(x_4 - x_2)\,(x_4 - x_3) = 4(x_4)^3 + 2px_4 + q$$

Então o produto $P'(x_1) \cdot P'(x_2) \cdot P'(x_3) \cdot P'(x_4)$ é igual a

$$(-1)^6\cdot(x_2 - x_1)^2\cdot(x_3 - x_1)^2\cdot(x_4 - x_1)^2\cdot(x_3 - x_2)^2\,(x_4 - x_2)^2\,(x_4 - x_3)^2 =$$

$$[4(x_1)^3 + 2px_1 + q] \cdot [\,4(x_2)^3 + 2px_2 + q] \cdot [\,4(x_3)^3 + 2px_3 + q] \cdot [\,4(x_4)^3 + 2px_4 + q]$$

Porém temos que o discriminante de uma equação polinomial é dado por

$$\Delta = \prod_{\substack{i=1\\ j=1\\ i\neq j}}^{n} (x_i - x_j) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{\substack{i=1\\ j>i}}^{n} (x_i - x_j)^2$$

logo para a quártica temos que

$$\Delta = (-1)^6\cdot(x_2 - x_1)^2\cdot(x_3 - x_1)^2\cdot(x_4 - x_1)^2\cdot(x_3 - x_2)^2\,(x_4 - x_2)^2\,(x_4 - x_3)^2$$

utilizando a identidade obtida de $P'(x_1) \cdot P'(x_2) \cdot P'(x_3) \cdot P'(x_4)$, temos que

$$\Delta = [4(x_1)^3 + 2px_1 + q] \cdot [\,4(x_2)^3 + 2px_2 + q] \cdot [\,4(x_3)^3 + 2px_3 + q] \cdot [\,4(x_4)^3 + 2px_4 + q]$$

Efetuando o produto acima vamos obter uma expressão na forma

$$\Delta = q^4 + c_3q^3 + c_2q^2 + c_1q + c_0$$

onde os coeficientes c_0, c_1, c_2 e c_3 são números reais expressos em função de p, x_1, x_2, x_3 e x_4.

Para calcularmos esses coeficientes vamos precisar das Relações de Girard e outras equações derivadas destas.

Conhecemos as Relações de Girard para o polinômio quártico da forma $P(x) = x^4 + px^2 + qx + r$:

(1) $\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

(2) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = p$

(3) $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -q$

(4) $x_1x_2x_3x_4 = r$

Elevando (1) ao quadrado obtemos

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) = 0$$

(5) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -2p$

Elevando (2) ao quadrado obtemos

$$x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2 + 2(x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_2x_4 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2^2x_4 + + x_1x_2x_3x_4 + x_1^2x_3x_4 + x_1x_2x_3^2 + x_1x_2x_3x_4 + x_1x_3^2x_4 + x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_4^2 + x_1x_3x_4^2 + x_2^2x_3x_4 + x_2x_3^2x_4 + x_2x_3x_4^2) = p^2 \Rightarrow$$

$$x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2 + 2(x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_2x_4 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2^2x_4 + + x_1x_2x_3x_4 + x_1^2x_3x_4 + x_1x_2x_3^2 + x_1x_2x_3x_4 + x_1x_3^2x_4 + x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_4^2 + x_1x_3x_4^2 + x_2^2x_3x_4 + x_2x_3^2x_4 + x_2x_3x_4^2 + x_1x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3x_4) = p^2 \Rightarrow$$

$$x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2 + 2[x_1(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) + x_2(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) + x_3(x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4) + x_4(x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4) - x_1x_2x_3x_4] = p^2 \Rightarrow$$

$$x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2 + 2[(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4) - x_1x_2x_3x_4] = p^2 \Rightarrow$$

$$x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2 + 2[(0)(-q) - r] = p^2$$

$$\Rightarrow$$

(6) $x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2 = p^2 + 2r$

Elevando (3) ao quadrado obtemos

$$x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2^2x_4^2 + x_1^2x_3^2x_4^2 + x_2^2x_2^2x_3^2 + 2(x_1^2x_2^2x_3x_4 + x_1^2x_2x_3^2x_4 + x_1x_2^2x_3^2x_4 + x_1^2x_2x_3x_4^2 + x_1x_2^2x_3x_4^2 + x_1x_2x_3^2x_4^2) = q^2 \Rightarrow$$

$$x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2^2x_4^2 + x_1^2x_3^2x_4^2 + x_2^2x_2^2x_3^2 + 2x_1x_2x_3x_4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + + x_3x_4) = q^2 \Rightarrow$$

$$x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2^2x_4^2 + x_1^2x_3^2x_4^2 + x_2^2x_2^2x_3^2 + 2rp = q^2 \quad \Rightarrow$$

(7) $x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2^2x_4^2 + x_1^2x_3^2x_4^2 + x_2^2x_2^2x_3^2 = q^2 - 2rp$

Elevando (4) ao quadrado obtemos

(8) $x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2 = r^2$

Fórmula de recorrência para encontrar a soma das k-ésimas potências das raízes do polinômio quártico da forma $P(x) = x^4 + px^2 + qx + r$. Definimos por

$$S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k + x_4^k$$

Sabemos que

$$x_1^4 + px_1^2 + qx_1 + r = 0$$

Logo

$$x_1^{4+k} + px_1^{2+k} + qx_1^{1+k} + rx_1^k = 0$$

Analogamente para as outras raízes temos

$$x_2^{4+k} + px_2^{2+k} + qx_2^{1+k} + rx_2^k = 0$$

$$x_3^{4+k} + px_3^{2+k} + qx_3^{1+k} + rx_3^k = 0$$

$$x_4^{4+k} + px_4^{2+k} + qx_4^{1+k} + rx_4^k = 0$$

Então se

$$S_\alpha = x_1^\alpha + x_2^\alpha + x_3^\alpha + x_4^\alpha$$

então teremos

$$(9) \qquad S_{4+k} + pS_{2+k} + qS_{1+k} + rS_k = 0$$

ora sabemos

$$S_{-1} = (x_1)^{-1} + (x_2)^{-1} + (x_3)^{-1} + (x_4)^{-1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4}{x_1x_2x_3x_4} = \frac{-q}{r}$$

$$S_0 = (x_1)^0 + (x_2)^0 + (x_3)^0 + (x_4)^0 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$S_1 = (x_1)^1 + (x_2)^1 + (x_3)^1 + (x_4)^1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$S_2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2 = -2p$$

Fazendo $k = -1$ na equação (9), teremos:

$$S_3 + pS_1 + qS_0 + rS_{-1} = 0$$

Logo,

$$S_3 + p\cdot 0 + q\cdot 4 + r\cdot \frac{-q}{r} = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$S_3 = -3q$$

Fazendo $k = 0$ na equação (9), teremos:

$$S_4 + pS_2 + qS_1 + rS_0 = 0$$

Logo,

$$S_4 + p\cdot(-2p) + q\cdot 0 + r\cdot 4 = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$S_4 = 2p^2 - 4r$$

Fazendo k = –2 na equação (9), teremos:

$$S_2 + pS_0 + qS_{-1} + rS_{-2} = 0$$

Substituindo S_2, S_0, e S_{-1} teremos:

$$-2p + 4p - \frac{q^2}{r} + rS_{-2} = 0$$

logo

$$S_{-2} = \frac{q^2}{r^2} - \frac{2p}{r}$$

Fazendo k = –3 na equação (9), teremos:

$$S_1 + pS_{-1} + qS_{-2} + rS_{-3} = 0$$

Substituindo S_1, S_{-1}, e S_{-2} teremos:

$$0 - \frac{pq}{r} + \frac{q^3}{r^2} - \frac{2pq}{r} + rS_{-3} = 0$$

logo

$$S_{-3} = \frac{3pq}{r^2} - \frac{q^3}{r^3}$$

Fazendo k = 2 na equação (9), teremos:

$$S_6 + pS_4 + qS_3 + rS_2 = 0$$

Substituindo S_4, S_3, e S_2 teremos:

$$S_6 + p(2p^2 - 4r) + q(-3q) + r(-2p) = 0$$

logo

$$S_6 = -2p^3 + 6rp$$

Cálculo do coeficiente c_0 de $\Delta = q^4 + c_3q^3 + c_2q^2 + c_1q + c_0$.

$c_0 = 16x_1x_2x_3x_4(p + 2x_1^2)\,(p + 2x_2^2)\,(p + 2x_3^2)\,(p + 2x_4^2)$

$c_0 = 16x_1x_2x_3x_4\,[p^4 + 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)p^3 + 4(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2)p^2$

$\quad + 8(x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2^2x_4^2 + x_1^2x_3^2x_4^2 + x_2^2x_2^2x_3^2)p + 16(x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2)]$

Substituindo as identidades (4), (5), (6), (7) e (8) em c_0 vamos obter

$$c_0 = 16 \cdot r \cdot [p^4 + 2(-2p)p^3 + 4(p^2 + 2r)p^2 + 8(q^2 - 2rp)p + 16(r^2)$$

Finalmente obtemos a expressão para c_0

$$\mathbf{c_0 = 16 \cdot r \cdot [p^4 - 8p^2r + 8pq^2 + 16r^2]}$$

Cálculo do coeficiente c_1 de $\Delta = q^4 + c_3q^3 + c_2q^2 + c_1q + c_0$.

$$c_1 = 8x_1x_2x_3 \cdot [p^3 + 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)p^2 + 4(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2)p + 8x_1^2x_2^2x_3^2] +$$

$$+ 8x_1x_2x_4 \cdot [p^3 + 2(x_1^2 + x_2^2 + x_4^2)p^2 + 4(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_4^2 + x_2^2x_4^2)p + 8x_1^2x_2^2x_4^2] +$$

$$+ 8x_1x_3x_4 \cdot [p^3 + 2(x_1^2 + x_3^2 + x_4^2)p^2 + 4(x_1^2x_3^2 + x_1^2x_4^2 + x_3^2x_4^2)p + 8x_1^2x_3^2x_4^2] +$$

$$+ 8x_2x_3x_4 \cdot [p^3 + 2(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)p^2 + 4(x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2)p + 8x_2^2x_3^2x_4^2]$$

Segue que:

$$c_1 = 8(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)p^3 + 16[x_1x_2x_3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_1x_2x_4(x_1^2 + x_2^2 + x_4^2) + x_1x_3x_4(x_1^2 + x_3^2 + x_4^2) + x_2x_3x_4(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)]p^2 + 32[x_1x_2x_3(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2) + x_1x_2x_4(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_4^2 + x_2^2x_4^2) + x_1x_3x_4(x_1^2x_3^2 + x_1^2x_4^2 + x_3^2x_4^2) + x_2x_3x_4(x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2)]p + 64(x_1^3x_2^3x_3^3 + x_1^3x_2^3x_4^3 + x_1^3x_3^3x_4^3 + x_2^3x_3^3x_4^3)$$

Logo,

$$c_1 = 8(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)p^3 + 16[x_1^3x_2x_3 + x_1x_2^3x_3 + x_1x_2x_3^3 + x_1^3x_2x_4 + x_1x_2^3x_4 + x_1x_2x_4^3 + x_1^3x_3x_4 + x_1x_3^3x_4 + x_1x_3x_4^3 + x_2^3x_3x_4 + x_2x_3^3x_4 + x_2x_3x_4^3]p^2 + 32[x_1^3x_2^3x_3 + x_1^3x_2x_3^3 + x_1x_2^3x_3^3 + x_1^3x_2^3x_4 + x_1^3x_2x_4^3 + x_1x_2^3x_4^3 + x_1^3x_3^3x_4 + x_1^3x_3x_4^3 + x_1x_3^3x_4^3 + x_2^3x_3^3x_4 + x_2^3x_3x_4^3 + x_2x_3^3x_4^3]p + 64(x_1^3x_2^3x_3^3 + x_1^3x_2^3x_4^3 + x_1^3x_3^3x_4^3 + x_2^3x_3^3x_4^3)$$

Vamos calcular o coeficiente de p^2 em c_1 que é dado por

$$16(x_1^3x_2x_3 + x_1x_2^3x_3 + x_1x_2x_3^3 + x_1^3x_2x_4 + x_1x_2^3x_4 + x_1x_2x_4^3 + x_1^3x_3x_4 + x_1x_3^3x_4 + x_1x_3x_4^3 + x_2^3x_3x_4 + x_2x_3^3x_4 + x_2x_3x_4^3) =$$

$$= 16x_1x_2x_3x_4\left(\frac{x_1^2}{x_4} + \frac{x_2^2}{x_4} + \frac{x_3^2}{x_4} + \frac{x_1^2}{x_3} + \frac{x_2^2}{x_3} + \frac{x_4^2}{x_3} + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_3^2}{x_2} + \frac{x_4^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} + \frac{x_3^2}{x_1} + \frac{x_4^2}{x_1}\right)$$

Sabemos da equação (4) que $x_1x_2x_3x_4 = r$, logo:

$$= 16r\left(x_1 + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_1^2}{x_3} + \frac{x_1^2}{x_4} + \frac{x_2^2}{x_1} + x_2 + \frac{x_2^2}{x_3} + \frac{x_2^2}{x_4} + \frac{x_3^2}{x_1} + \frac{x_3^2}{x_2} + x_3 + \frac{x_3^2}{x_4} + \frac{x_4^2}{x_1} + \frac{x_4^2}{x_2} + \frac{x_4^2}{x_3} + x_4 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4\right)$$

$$= 16r\left[\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right)x_1^2 + \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right)x_2^2 + \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right)x_3^2 + \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right)x_4^2 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\right]$$

Fatorando e substituindo a identidade (1), $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, encontramos:

$$= 16r\left[\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right)\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right)\right]$$

$$= 16r\left(\frac{x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4}{x_1x_2x_3x_4}\right)\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right)$$

Substituindo (3), (4) e (5), obtemos

$$16r\left(\frac{-q}{r}\right)(-2p)$$

logo o coeficiente de p^2 em c_1 é

$$32pq$$

Agora vamos calcular o coeficiente de p em c_1 que é dado por

$32(x_1^3x_2^3x_3 + x_1^3x_2x_3^3 + x_1x_2^3x_3^3 + x_1^3x_2^3x_4 + x_1^3x_2x_4^3 + x_1x_2^3x_4^3 + x_1^3x_3^3x_4 + x_1^3x_3x_4^3 + x_1x_3^3x_4^3 + x_2^3x_3^3x_4 + x_2^3x_3x_4^3 + x_2x_3^3x_4^3)$

Colocando $x_1x_2x_3x_4 = r$ em evidencia, encontramos:

$$32r\left(\frac{x_1^2x_2^2}{x_4} + \frac{x_1^2x_3^2}{x_4} + \frac{x_2^2x_3^2}{x_4} + \frac{x_1^2x_2^2}{x_3} + \frac{x_1^2x_4^2}{x_3} + \frac{x_2^2x_4^2}{x_3} + \frac{x_1^2x_3^2}{x_2} + \frac{x_1^2x_4^2}{x_2} + \frac{x_3^2x_4^2}{x_2} + \frac{x_2^2x_3^2}{x_1} + \frac{x_2^2x_4^2}{x_1} + \frac{x_3^2x_4^2}{x_1}\right)$$

=

$$32r\left[\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right)x_1^2x_2^2 - \frac{x_1^2x_2^2}{x_1} - \frac{x_1^2x_2^2}{x_2}\right] + 32r\left[\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right)x_1^2x_3^2 - \frac{x_1^2x_3^2}{x_1} - \frac{x_1^2x_3^2}{x_3}\right] +$$

$$+32r\left[\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right)x_1^2x_4^2 - \frac{x_1^2x_4^2}{x_1} - \frac{x_1^2x_4^2}{x_4}\right] + 32r\left[\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right)x_2^2x_3^2 - \frac{x_2^2x_3^2}{x_2} - \frac{x_2^2x_3^2}{x_3}\right] +$$

$$+32r\left[\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right)x_2^2x_4^2 - \frac{x_2^2x_4^2}{x_2} - \frac{x_2^2x_4^2}{x_4}\right] + 32r\left[\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right)x_3^2x_4^2 - \frac{x_3^2x_4^2}{x_3} - \frac{x_3^2x_4^2}{x_4}\right]$$

=

$$32r\left[\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right)\left(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2\right) - \right.$$

$$\left.\left(x_1x_2^2 + x_1^2x_2 + x_1x_3^2 + x_1^2x_3 + x_1x_4^2 + x_1^2x_4 + x_2x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_4^2 + x_2^2x_4 + x_3x_4^2 + x_3^2x_4\right)\right]$$

ora de (5) temos que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -2p$$

então

$$x_1^3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_1x_4^2 = -2px_1$$

$$x_1^2x_2 + x_2^3 + x_2x_3^2 + x_2x_4^2 = -2px_2$$

$$x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + x_3^3 + x_3x_4^2 = -2px_3$$

$$x_1^2x_4 + x_2^2x_4 + x_3^2x_4 + x_4^3 = -2px_4$$

Somando essas quatro equações teremos:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_1x_2^2 + x_1^2x_2 + x_1x_3^2 + x_1^2x_3 + x_1x_4^2 + x_1^2x_4 + x_2x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_4^2 + x_2^2x_3 + x_3x_4^2 + x_3^2x_4$$

$$=$$

$$-2p(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

Como sabemos de (1) que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ e que $S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = -3q$, temos que:

$$-3q + x_1x_2^2 + x_1^2x_2 + x_1x_3^2 + x_1^2x_3 + x_1x_4^2 + x_1^2x_4 + x_2x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_4^2 + x_2^2x_3 + x_3x_4^2 + x_3^2x_4 = 0$$

Então,

$$x_1x_2^2 + x_1^2x_2 + x_1x_3^2 + x_1^2x_3 + x_1x_4^2 + x_1^2x_4 + x_2x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_4^2 + x_2^2x_3 + x_3x_4^2 + x_3^2x_4 = 3q$$

Substituindo a identidade acima, S_{-1} e a identidade (6), no coeficiente de p em c_1 que é dado por

$$32r\left[\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)\left(x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_1^2x_4^2+x_2^2x_3^2+x_2^2x_4^2+x_3^2x_4^2\right)-\right.$$

$$\left.\left(x_1x_2^2+x_1^2x_2+x_1x_3^2+x_1^2x_3+x_1x_4^2+x_1^2x_4+x_2x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_4^2+x_2^2x_4+x_3x_4^2+x_3^2x_4\right)\right]$$

teremos:

$$32r\left[\left(\frac{-q}{r}\right)\left(p^2+2r\right)-3q\right] = 32r\left[\frac{-qp^2}{r}-5q\right]$$

finalmente, o coeficiente de p em c_1 é dado por:

$$-32(qp^2 + 5rq)$$

Agora vamos calcular o coeficiente independente de p, ou seja, de p^0 em c_1 que é dado por

$$64(x_1^3x_2^3x_3^3 + x_1^3x_2^3x_4^3 + x_1^3x_3^3x_4^3 + x_2^3x_3^3x_4^3)$$

Colocando $r = x_1^3x_2^3x_3^3x_4^3$ em evidência teremos

$$64r^3\left(\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}+\frac{1}{x_3^3}+\frac{1}{x_4^3}\right)$$

Substituindo S_{-3}, teremos: que coeficiente independente de p em c_1 que é dado por

$$64r^3\left(\frac{3pq}{r^2}-\frac{q^3}{r^3}\right)$$

Finalmente temos que coeficiente independente de p em c_1 que é dado por

$$64(3pqr - q^3)$$

Temos que:

$c_1 = 8(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)p^3 + 16[x_1^3x_2x_3 + x_1x_2^3x_3 + x_1x_2x_3^3 + x_1^3x_2x_4 + x_1x_2^3x_4 + x_1x_2x_4^3 + x_1^3x_3x_4 + x_1x_3^3x_4 + x_1x_3x_4^3 + x_2^3x_3x_4 + x_2x_3^3x_4 + x_2x_3x_4^3]p^2 + 32[x_1^3x_2^3x_3 + x_1^3x_2x_3^3 + x_1x_2^3x_3^3 + x_1^3x_2^3x_4 + x_1^3x_2x_4^3 + x_1x_2^3x_4^3 + x_1^3x_3^3x_4 + x_1^3x_3x_4^3 + x_1x_3^3x_4^3 + x_2^3x_3^3x_4 + x_2^3x_3x_4^3 + x_2x_3^3x_4^3]p + 64(x_1^3x_2^3x_3^3 + x_1^3x_2^3x_4^3 + x_1^3x_3^3x_4^3 + x_2^3x_3^3x_4^3)$

Logo

$$c_1 = 8(-q)p^3 + (32pq)p - 32(qp^2 + 5rq)p + 64(3pqr - q^3)$$

Finalmente obtemos o coeficiente s_1

$$\mathbf{c_1 = -8p^3q + 32pqr - 64q^3}$$

Cálculo do coeficiente c_2 em $\Delta = q^4 + c_3q^3 + c_2q^2 + c_1q + c_0$

$$c_2 = 4p^2 \cdot [x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4] +$$

$$+ 8p \cdot [x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_1^3x_3 + x_1x_3^3 + x_1^3x_4 + x_1x_4^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3 + x_3^3x_4 + x_3x_4^3] +$$

$$+ 16 \cdot [x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_1^3x_4^3 + x_2^3x_3^3 + x_2^3x_4^3 + x_3^3x_4^3]$$

Cálculo do coeficiente de p^2 em c_2, que é expresso por:

$$4 \cdot [x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4] = 4p$$

Cálculo do coeficiente de p em c_2, que é expresso por:

$$8 \cdot [x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_1^3x_3 + x_1x_3^3 + x_1^3x_4 + x_1x_4^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3 + x_3^3x_4 + x_3x_4^3]$$

para isso temos que

$$S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = -3q$$

logo

$$x_1^4 + x_1x_2^3 + x_1x_3^3 + x_1x_4^3 = -3qx_1$$

$$x_1^3x_2 + x_2^4 + x_2x_3^3 + x_2x_4^3 = -3qx_2$$

$$x_1^3x_3 + x_2^3x_3 + x_3^4 + x_3x_4^3 = -3qx_3$$

$$x_1^3x_4 + x_2^3x_4 + x_3^3x_4 + x_4^4 = -3qx_4$$

Somando as quatro identidades acima obtemos

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 +$$

$$+ x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_1^3x_3 + x_1x_3^3 + x_1^3x_4 + x_1x_4^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3 + x_2^3x_4 + x_2x_4^3 + x_3^3x_4 + x_3x_4^3$$

$$=$$

$$-3q(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

Como $S_4 = 2p^2 - 4r$ e $S_1 = 0$, teremos que

$$2p^2 - 4r +$$

$$+ x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_1^3x_3 + x_1x_3^3 + x_1^3x_4 + x_1x_4^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3 + x_2^3x_4 + x_2x_4^3 + x_3^3x_4 + x_3x_4^3 = 0$$

logo

$$x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_1^3x_3 + x_1x_3^3 + x_1^3x_4 + x_1x_4^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3 + x_2^3x_4 + x_2x_4^3 + x_3^3x_4 + x_3x_4^3$$

$$=$$

$$4r - 2p^2$$

Cálculo do coeficiente independente de p em c_2, que é expresso por:

$$16\cdot[\ x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_1^3x_4^3 + x_2^3x_3^3 + x_2^3x_4^3 + x_3^3x_4^3]$$

para isso temos que

$$S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = -3q$$

logo

$$x_1^6 + x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_1^3x_4^3 = -3qx_1^3$$

$$x_1^3x_2^3 + x_2^6 + x_2^3x_3^3 + x_2^3x_4^3 = -3qx_2^3$$

$$x_1^3x_3^3 + x_2^3x_3^3 + x_3^6 + x_3^3x_4^3 = -3qx_3^3$$

$$x_1^3x_4^3 + x_2^3x_4^3 + x_3^3x_4^3 + x_4^6 = -3qx_4^3$$

Somando as quatro identidades acima vamos obter

$$x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + x_4^6 + 2(x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_1^3x_4^3 + x_2^3x_3^3 + x_2^3x_4^3 + x_3^3x_4^3) = -3q(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3)$$

Como $S_6 = -2p^3 + 6rp + 3q^2$ e $S_3 = -3q$, teremos que

$$-2p^3 + 6rp + 3q^2 + 2(x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_1^3x_4^3 + x_2^3x_3^3 + x_2^3x_4^3 + x_3^3x_4^3) = -3q\cdot(-3q)$$

logo

$$x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_1^3x_4^3 + x_2^3x_3^3 + x_2^3x_4^3 + x_3^3x_4^3 = 3q^2 + p^3 - 3rp$$

Voltando ao cálculo do c_2:

$$c_2 = 4p^2\cdot[\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4\ ] +$$

$$+ 8p\cdot[\ x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_1^3x_3 + x_1x_3^3 + x_1^3x_4 + x_1x_4^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3 + x_3^3x_4 + x_3x_4^3\ ] +$$

$$+ 16\cdot[\ x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_1^3x_4^3 + x_2^3x_3^3 + x_2^3x_4^3 + x_3^3x_4^3]$$

Substituindo as identidades encontradas teremos

$$c_2 = 4p^2\cdot[\ p\ ] + 8p\cdot[\ 4r - 2p^2\ ] + 16\cdot[\ 3q^2 + p^3 - 3rp\ ]$$

Finalmente

$$\mathbf{c_2 = 4p^3 + 48q^2 - 16pr}$$

Cálculo do c_3:

$$c_3 = 2p(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 4(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3)$$

$$\Rightarrow$$

$$c_3 = 2p \cdot S_1 + 4 \cdot S_3$$

$$\Rightarrow$$

$$c_3 = 2p \cdot (0) + 4 \cdot (-3q)$$

Finalmente obtemos o valor de c_3

$$c_3 = -12q$$

Voltaremos ao que nos interessa determinar, que é o discriminante algébrico da quártica. Já vimos que ele é expresso por

$$\boldsymbol{\Delta = q^4 + c_3q^3 + c_2q^2 + c_1q + c_0}$$

foi calculado que

$c_0 = 16 \cdot r \cdot (p^4 - 8p^2r + 8pq^2 + 16r^2)$

$c_1 = -8p^3q + 32pqr - 64q^3$

$c_2 = 4p^3 + 48q^2 - 16pr$

$c_3 = -12q$

Logo, substituindo c_0, c_1, c_2 e c_3 em Δ, teremos

$$\Delta = q^4 - 12q \cdot q^3 + (4p^3 + 48q^2 - 16pr) \cdot q^2 + (-8p^3q + 32pqr - 64q^3) \cdot q + 16 \cdot r \cdot (p^4 - 8p^2r + 8pq^2 + 16r^2)$$

Desenvolvendo

$$\Delta = q^4 - 12q \cdot q^3 + 4p^3q^2 + 48q^4 - 16pq^2r - 8p^3q^2 + 32pq^2r - 64q^4 + 16p^4r - 144p^2r^2 + 144pq^2r + 256r^3$$

Obtendo, finalmente, a expressão para o discriminante algébrico da quártica

$$\boldsymbol{\Delta = -27q^4 - 4p^3q^2 + 256r^3 - 128p^2r^2 + 144pq^2r + 16p^4r}$$

CONCLUSÕES

Sei que há muito que se desenvolver sobre o tema, isto fica para um estudo futuro. Espero que este trabalho ajude professores e alunos a entender e aplicar o Teorema de Sturm, que é uma ferramenta belíssima para encontrar a quantidade de raízes reais de um polinômio de uma variável, servindo também aos professores para a elaboração de exercícios envolvendo polinômios.

Durante a elaboração deste trabalho demonstrei e desenvolvi exemplos sobre o Teorema de Sturm, explicando os pré-requisitos para seu entendimento. Introduzi a ideia de discriminadores, culminando na determinação dos mesmos para as equações cúbicas e quárticas, encontrando para estas as possibilidades de quantidades de raízes reais em função dos sinais dos seus discriminadores.

Fica evidente neste trabalho que os cálculos para a determinação da sequência de Sturm de um polinômio são muito longos e trabalhosos, principalmente para polinômios de grau muito grande, logo é necessário a elaboração de um modelo matemático computacional para se obter essa sequência. Com esta ferramenta poderemos rapidamente analisar a quantidade de raízes reais de um polinômio apenas conhecidos seus coeficientes. Esta elaboração fica como sugestão para um próximo trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LIMA, E.L. *Curso de Análise vol. 1*. IMPA, 2006

SOTTILE, F. *Real solutions to equations from geometry*, University lecture series AMS, 2011.

STURM, J. C. F. *Memoire sur la resolution das equations numériques*

www-fourier.ujf-grenoble.fr/eiserm/Enseignement/Sturm-memoire-transcrit.pdf

BASTOS, G. *Resolução de equações algébricas por radicais. Bienal da SBM.*

GONDIM, RODRIGO. MELO, MARIA EULÁLIA DE MORAES. RUSSO, FRANCISCO. *Equações algébricas e a teoria de Galois*, IMPA 2013.