Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Departamento De Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

A FUNÇÃO EXPONENCIAL

Emerson de Oliveira Dantas

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Recife
Agosto de 2014

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA
Departamento de Matemática

Emerson de Oliveira Dantas

A Função Exponencial

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: *Dr. Rodrigo José Gondim Neves*

Recife
22 de Agosto de 2014

Dedico este trabalho à Deus, o autor da minha vida.

Agradecimentos

- Agradeço primeiramente a Deus por ter me permitido ir além do que eu poderia um dia sonhar.

- A minha amada esposa Tamires Dantas pela paciência, compreensão e carinho que teve comigo sempre e principalmente durante esses dois anos do mestrado, as minhas princesinhas Eduarda Dantas e Emily Dantas pelos sorrisos.

- Aos meus pais Edmilson de M. Dantas e Maria da Paz de O. Dantas pela minha criação correta, que permitiu eu me tornar o homem que sou hoje.

- A minha sogra Luzia e meu sogro Moacir pela confiança e oração.

- Ao meu irmão Edmilson de M. Dantas Jr, minha referência na área acadêmica, pelas orientações e por me guiar pelo melhor caminho, mesmo distante, esteve sempre por perto. A minha querida cunhada Raquel Dantas e meu lindo sobrinho Oliver Dantas.

- A minha tia Dinalva Prazeres por todo carinho e apoio.

- As minhas cunhadas Missilene, Jaqueline e Débora e suas lindas crianças que sempre me trazem alegria.

- Ao meu primo-irmão Pedro Vitor, sua esposa Joana e seu filho Vitor por todo apoio e motivação.

- Aos meus amigos de sempre Felipe, Lucas, Wil e toda turma da Elite, aos colegas de curso, aos quais tive o privilégio de ter convivido ao longo desses dois anos, em especial a Danilo Campos, Josemar Claudino, Carlos Eduardo, Carlos Alberto, José Ferreira, Márcio Rodrigo e José Roberto que acompanharam de perto todas as minhas angustias e sempre me apoiaram.

- As minhas Gestoras Bruna Rafaela, Maria Aparecida, Eunice, Severina e a minha supervisora Euélia Gonçalves pela compreensão.

- Ao competente corpo docente do programa PROFMAT da UFRPE e, em particular, ao Profº Dr. Rodrigo Gondim, pela compreensão e apoio ao abraçar a ideia deste trabalho comigo.

- A CAPES pelo incentivo financeiro.

- A SBM e ao IMPA pelo brilhante projeto oferecido.

A mente que se abre a uma nova idéia jamais voltará ao seu tamanho original

—ALBERT EINSTEIN

Resumo

Este trabalho tem por motivação a Equação Funcional de Cauchy f(x + y) = f(x).f(y), característica da Função Exponencial. Para chegarmos a essa equação iniciaremos o nosso estudo pelas definições e demonstrações das Propriedades da Potência de Expoente Real, destacando o caso em que a Potência tem Expoente Irracional, além de fazermos uma proposta pedagógica sobre o ensino de Potenciação, Caracterização da Função Exponencial e Equação Funcional Linear de Cauchy.

Palavras-chave: Álgebra, Potenciação, Função Exponencial, Equação Funcional de Cauchy

Abstract

This work is motivated by the Cauchy Functional Equation f (x + y) = f (x) .f (y), characteristic of the exponential function. To arrive at this equation we will begin our study of the definitions and statements of the Exponent Properties Real Power, particularly in the case in which the power exponent is irrational, besides doing a pedagogical proposal on teaching potentiation, Characterization of the Exponential Function and Functional Equation Linear Cauchy.

Keywords: Algebra, potentiation, Exponential Function, Cauchy Functional Equation

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

No 6° ano do Ensino Fundamental é apresentado ao aluno a idéia de multiplicação com fatores iguais, sendo definida assim a idéia de potência com expoente natural, fazendo uso de suas propriedades. Já no 7° ano e 8° ano, é transmitido ao aluno a idéia de potência de expoente inteiro, e no 9° ano as potências de expoente racional.

Nota-se nos livros didáticos o estudo das potências de expoente real omitindo a idéia de potências de expoente irracional, já que a mesma não é apresentada no Ensino Fundamental e é apenas citada no Ensino Médio, pelo fato de ser um caso com uma certa complexidade.

No Ensino Médio, mais precisamente no 1° ano é estudado o conceito de função com domínio real e suas propriedades, apresentando ao aluno além de outras funções, as funções Exponenciais e Logarítmicas.

O presente trabalho tem como objetivo o estudo da Função Exponencial com domínio real. No capítulo 1, estudaremos e demonstraremos as propriedades da potências a^x, para x natural, inteiro ou racional, além de analisar livros didáticos no que se refere à potência de expoente irracional.

No capítulo 2, estudaremos a Função Exponencial trazendo sua existência, caracterização e demonstrando suas propriedades, fazendo o estudo da função com domínio real, notando assim a importância do estudo das propriedades da potência com expoente racional e a análise do caso em que a potência tem expoente irracional.

Enfim, no capítulo 3 traremos uma proposta pedagógica para aplicação do material estudado em nosso texto, dividindo esta proposta em blocos de aulas, sendo os blocos Potenciação, Caracterização da Função Exponencial e Equação Funcional Linear de Cauchy.

CAPÍTULO 1

Potências de Números Reais

Neste capítulo, será definida a ferramenta fundamental ao nosso estudo sobre Funções Exponenciais. Com a definição de potências de números reais, dividindo o estudo em Potências de expoente natural, inteiro, racional, potências de expoente irracional e provando suas propriedades.

1.1 Potências de Expoente Natural

Definição 1.1. *Seja a um número real positivo e diferente da unidade ($a > 0$ e $a \neq 1$) para todo $a \in \mathbb{N}$, a potência a^x, de base a e expoente x é definida como o produto de x fatores iguais a a. Para $a = 1$, teremos que a potência reduz-se à unidade, ou seja, $1^x = 1$; por outro lado, as condições $a > 0$ e $a \neq 1$ permitem considerar $0 < a < 1$ e $a > 0$. Note ainda que a potência a^x é definida para todos os valores naturais de x. Nesse primeiro momento estudaremos a potência a^x com $a > 0$ e $a \neq 1$, sendo x natural. Observe que para $x = 1$, como não há produto de um só fator, põe-se $a^1 = a$, por definição. Definiremos indutivamente a^x por $a^0 = 1$ e $a^{x+1} = a^x \cdot a$.*

Propriedades:

$[P_1]$ Para qualquer $x, y \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ e $a, b \neq 1$. Tem-se que $a^x.a^y = a^{x+y}$.

Note que $a^x.a^y = \underbrace{(a.a...a)}_{xfatores}.\underbrace{(a.a...a)}_{yfatores} = \underbrace{a.a...a}_{x+yfatores} = a^{x+y}$.

Segue-se que para $x_1, x_2, ..., x_k$ quaisquer, vale

$a^{x_1}.a^{x_2}...a^{x_k} = a^{x_1+x_2+...+x_k}$.

$[P_2]$ Para qualquer $x, y \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ e $a, b \neq 1$. Tem-se que $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ (com $a \neq 0$ e $x \geqslant y$)

Como $x \geqslant y$, podemos fazer $x = y + z$ ($z \geqslant 0$).

Para $z = 0$, temos $x = y$. Ou seja,

$\dfrac{a^x}{a^x} = 1 = a^0 = a^{x-x}$.

Para $z > 0$, teremos

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{a^{y+z}}{a^y} = \frac{a^y.a^z}{a^y} = a^z = a^{x-y}.$$

$[P_3]$ Para qualquer $x, y \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ e $a, b \neq 1$. Tem-se que $(a.b)^x = a^x.b^x$.

$$(a.b)^x = (a.b).(a.b)...(a.b) = \underbrace{(a.a...a)}_{x fatores}.\underbrace{(b.b...b)}_{x fatores} = a^x.b^x.$$

$[P_4]$ Para qualquer $x, y \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ e $a, b \neq 1$. Tem-se que $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)...\left(\frac{a}{b}\right)}_{x fatores} = \underbrace{\left(\frac{a.a...a}{b.b...b}\right)}_{x fatores} = \frac{a^x}{b^x}.$$

$[P_5]$ Para qualquer $x, y \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ e $a, b \neq 1$. Tem-se que $(a^x)^y = a^{x.y}$.

Observando $[P_1]$ e tomando um caso particular em que, $x_1 = x_2 = ... = x_k = x$, teremos $a^{x_1} \cdot a^{x_2} \cdot ... \cdot a^{x_y} = a^{x_1+x_2+...+x_y} = a^{x+x+...+x} = \underbrace{(a.a...a)}_{(y.x) fatores} = (a^x)^y = a^{x \cdot y}$.

1.2 Potências de Expoente Inteiro

Observe que, se $x \geqslant 0$, o significado da potência a^x já foi definido na seção 1.1, estudaremos agora o caso em que $x < 0$.

Iniciaremos nossa análise de potência de expoente inteiro definindo a^x, se x é negativo. Pondo $a \neq 0$, $-x' = x \in \mathbb{Z}$ e $x' > 0$. A motivação da definição adotada é a manutenção da propriedade $[P_1]$.

$$a^0 = a^{x-x} = a^{x+(-x)} = a^x.a^{-x}, \text{ ou seja, } 1 = a^x.a^{-x} \; 1 = a^{-x'}.a^{x'} \; a^{-x'} = \frac{1}{a^{x'}} = a^x$$

Quando x é negativo e igual a $-x'$, tem-se $a^x = \frac{1}{a^{x'}}$ por definição como visto anteriormente, quando x tende para $-\infty$, x' tende para $+\infty$, $a^{x'}$ tende para $+\infty$ e seu inverso, a^x, tende para zero:

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

Propriedades:

$[P_1]$ Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$ e $a, b \in \mathbb{R}^*$. Tome $x = x'$ e $y = y'$ com $x', y' \in \mathbb{N}$. Teremos: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

$$a^x \cdot a^y = a^{-x'} \cdot a^{-y'} = \left(\frac{1}{a^{x'}}\right) \cdot \left(\frac{1}{a^{y'}}\right) = \left(\frac{1}{a^{x'+y'}}\right) = a^{-(x'+y')} = a^{-(-x-y)} = a^{x+y}.$$

$[P_2]$ Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$ e $a, b \in \mathbb{R}^*$. Tome $x = x'$ e $y = y'$ com $x', y' \in \mathbb{N}$. Teremos: $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{a^{-x'}}{a^{-y'}} = \frac{a^{y'}}{a^{x'}}.$$

Caso 1: Se $y' = x'$, então

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{a^{y'}}{a^{x'}} = \frac{a^{x'}}{a^{x'}} = 1 = a^0 = a^{y'-x'} = a^{-y+x} = a^{x-y}$$

Caso 2: Se $y' > x'$, então $y' = x' + F$, com $F \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{a^{y'}}{a^{x'}} = \frac{a^{x'+F}}{a^{x'}} = \frac{a^{x'}.a^F}{a^{x'}} = a^F = a^{y'-x'} = a^{-y+x} = a^{x-y}.$$

Caso 3: Se $y' < x'$, então $x' = y' + w$,com $w \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{a^{y'}}{a^{x'}} = \frac{a^{y'}}{a^{y'+w}} = \frac{a^{y'}}{a^{y'}.a^w} = \frac{1}{a^w} = \frac{1}{a^{(x'-y')}} = a^{-(x'-y')} = a^{-x'+y'} = a^{x-y}.$$

$[P_3]$ Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$ e $a, b \in \mathbb{R}^*$. Tome $x = x'$ e $y = y'$ com $x', y' \in \mathbb{N}$. Teremos: $(a.b)^x = a^x.b^x$

$$(a.b)^x = (a.b)^{-x'} = \frac{1}{(a.b)^{x'}} = \underbrace{\left(\frac{1}{a.a...a}\right)}_{x' fatores} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{b.b...b}\right)}_{x' fatores} = \frac{1}{a^{x'}.b^{x'}} = a^{-x'}.b^{-x'} = a^x.b^x.$$

$[P_4]$ Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$ e $a, b \in \mathbb{R}^*$. Tome $x = x'$ e $y = y'$ com $x', y' \in \mathbb{N}$. Teremos: $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \left(\frac{a}{b}\right)^{-x'} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{x'}} = \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdots \left(\frac{a}{b}\right)}_{x' fatores}} = \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{a.a...a}{b.b...b}\right)}_{x' fatores}} = \frac{b.b...b}{\underbrace{a.a...a}_{x' fatores}} =$$

$$= \frac{b^{x'}}{a^{x'}} = b^{x'}.a^{-x'} = b^{-x}.a^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

$[P_5]$ Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$ e $a, b \in \mathbb{R}^*$. Tome $x = x'$ e $y = y'$ com $x', y' \in \mathbb{N}$. Teremos: $(a^x)^y = a^{x.y}$.

$$(a^x)^y = \left(a^{-x'}\right)^{-y'} = \left(\frac{1}{a^{x'}}\right)^{-y'} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{x'}}\right)^{y'}} = (a^{x'})^{y'} = \underbrace{(a^{x'}.a^{x'}...a^{x'})}_{(y')fatores} =$$
$$= a^{x'+x'+...x'} = a^{x'.y'} = a^{(-x).(-y)} = a^{x.y}.$$

1.3 Potências de Expoente Racional

Vejamos agora que sentido pode ser dado à potência a^x, quando $x = \frac{m}{n}$ é um número racional com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, permanecendo válida a propriedade $a^x.a^y = a^{x+y}$.

$(a^x)^n = \underbrace{(a^x.a^x...a^x)}_{nfatores} = a^{x+x+...+x} = a^{x.n} = a^m.$

Logo, a^x é um número real positivo cuja n-ésima potência é igual a a^m, por definição esse número é $\sqrt[n]{a^m}$. Com isso, temos a definição da potência a^x, com $\frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ de forma única, dada por:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Neste ponto foram utilizados os seguintes lemas da radiciação:

Sejam a, b números reais positivos e $m, n \in \mathbb{N}$, com $m, n > 1$.

Lema 1.1. $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$

Demonstração:

$\sqrt[n]{a} = \alpha \Rightarrow \alpha^n = a$

$\sqrt[n]{b} = \beta \Rightarrow \beta^n = b$

Com isso,

$a.b = \alpha^n.\beta^n = (\alpha.\beta)^n \Rightarrow \alpha.\beta = \sqrt[n]{a.b}.$

Porém, sabe-se que:

$\alpha.\beta = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.$

Logo,

$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}.$

Lema 1.2. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$

Para essa demonstração, tomaremos a, b números reais positivos e b$\neq$ 0:
$\sqrt[n]{a} = \alpha \Rightarrow \alpha^n = a$

$\sqrt[n]{b} = \beta \Rightarrow \beta^n = b$

Com isso,

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha^n}{\beta^n} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Porém, sabe-se que

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Logo,

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Lema 1.3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

Demonstração:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \alpha \Rightarrow (a^n)^m = a^{n.m} = a \Rightarrow \alpha = \sqrt[n.m]{a}.$$

Com isso,

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \alpha \text{ e } \sqrt[n.m]{a} = \alpha.$$

Sendo assim, temos

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}.$$

Propriedades:

Para as seguintes demonstrações das propriedades da potenciação com expoente racional, tome $x = \frac{m}{n}$ e $y = \frac{r}{s}$, com $m, r \in \mathbb{Z}$ e $n, s \in \mathbb{Z}^*$.

$[P_1]$ Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$ tem-se $a^x.a^y = a^{x+y}$.

Demonstração:
Temos que

$a^x.a^y = a^{\frac{m}{n}} \,.\, a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{s.m}{s.n}} \,.\, a^{\frac{n.r}{n.s}} = (\sqrt[n.s]{a^{m.s}}).(\sqrt[n.s]{a^{n.r}})$.

Pelo Lema 1.1, segue que

$(\sqrt[n.s]{a^{m.s}})\cdot(\sqrt[n.s]{a^{n.r}}) = \sqrt[n.s]{a^{m.s+n.r}} = a^{\frac{m.s+n.r}{n.s}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}} = a^x.a^y$.

$[P_2]$ Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$ tem-se $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

Demonstração

$\frac{a^x}{a^y} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{r}{s}}} = \frac{a^{\frac{m.s}{n.s}}}{a^{\frac{r.n}{s.n}}} = \frac{\sqrt[n.s]{a^{m.s}}}{\sqrt[n.s]{a^{r.n}}}$

Pelo Lema 1.2, segue que

$$\frac{\sqrt[n.s]{a^{m.s}}}{\sqrt[n.s]{a^{r.n}}} = \sqrt[n.s]{\frac{a^{m.s}}{a^{r.n}}}.$$

Logo, como $m.s$ e $r.n$ são números inteiros, utilizaremos $[P_2]$ e com isso, teremos

$$\sqrt[n.s]{\frac{a^{m.s}}{a^{r.n}}} = \sqrt[n.s]{a^{m.s-r.n}} = a^{\frac{m.s-r.n}{n.s}} =$$
$$= a^{\left(\frac{m.s}{n.s}\right)-\left(\frac{r.n}{n.s}\right)} = a^{\left(\frac{m}{n}\right)-\left(\frac{r}{s}\right)} = a^{x-y}.$$

$[P_3]$ Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$, tem-se $(a.b)^x = a^x.b^x$.

Demonstração:

$(a.b)^x = (a.b)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a.b)^m}$

Como $m \in \mathbb{Z}$, utilizaremos $[P_3]$ para potências de expoentes inteiros, fazendo

$\sqrt[n]{(a.b)^m} = \sqrt[n]{a^m.b^m}$.

que pelo Lema 1.1, segue que

$$\sqrt[n]{a^m.b^m} = \sqrt[n]{a^m}.\sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}}.b^{\frac{m}{n}} = a^x.b^x.$$

$[P_4]$ Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$ tem-se $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

Demonstração:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$$

Como $m \in \mathbb{Z}$, utilizaremos $[P_4]$ para potências de expoentes inteiros, fazendo

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}}$$

Fazendo uso do Lema 1.2, temos que

$$\sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \frac{a^x}{b^x}.$$

$[P_5]$ Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$ tem-se $(a^x)^y = a^{x.y}$.

Demonstração:

$$(a^x)^y = a^{\left(\frac{m}{n}\right).\left(\frac{r}{s}\right)} = \sqrt[s]{(\sqrt[n]{a^m})^r} = \sqrt[s]{\underbrace{(\sqrt[n]{a^m}).\sqrt[n]{a^m}...(\sqrt[n]{a^m})}_{r fatores}} = \sqrt[s]{\sqrt[n]{\underbrace{a^m.a^m...a^m}_{r fatores}}} =$$

Fazendo uso do lema 1.3, segue que

$$\sqrt[s]{\sqrt[n]{\underbrace{a^m.a^m...a^m}_{r fatores}}} = \sqrt[s.n]{\underbrace{a^m.a^m...a^m}_{r fatores}}$$

Como $m \in \mathbb{Z}$, utilizaremos a definição para potências de expoentes inteiros, segue que

$$\sqrt[s.n]{\underbrace{a^m.a^m...a^m}_{r fatores}} = \sqrt[s.n]{(a^m)^r}$$

Como $m, r \in \mathbb{Z}$, utilizaremos $[P_5]$ para potências de expoentes inteiros, com isso

$$\sqrt[s.n]{(a^m)^r} = \sqrt[s.n]{a^{m.r}} = a^{\frac{m.r}{s.n}} = a^{\left(\frac{m}{n}\right).\left(\frac{r}{s}\right)} = a^{x.y}.$$

As potências a^r, com expoente racional, mesmo sabendo que não contém todos os números reais positivos, estão espalhadas por todo $\mathbb{R}_+$, sendo $a \neq 1$. Isso é o que será demonstrado no lema a seguir.

Lema 1.4. *Fixado o número a real positivo e diferente da unidade, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.*

Demonstração: [7],

Dados $0 < \alpha < \beta$, acharemos $r \in \mathbb{Q}$ tal que a potência a^r pertença ao intervalo $[\alpha, \beta]$, ou seja, $\alpha \leq a^r \leq \beta$. Suporemos a e α maiores do que 1. Os demais casos podem ser demonstrados de maneira análoga. Como as potências de expoente natural de números maiores do que 1 crescem acima de qualquer cota prefixada, podemos considerar os números naturais M e n tais que

$$\alpha < \beta < a^M \text{ e } 1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n.$$

Da última relação decorrem sucessivamente

$$1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M} \text{ e } 0 < a^M.(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha$$

Com isso,

$$\frac{m}{n} \leq M \Rightarrow 0 < a^{\frac{m}{n}}.(a^{\frac{1}{n}} < \beta - \alpha \Leftrightarrow 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha.$$

Logo, as potências

$$a^0 = 1, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{2}{n}}, ..., a^M$$

são extremos de intervalos consecutivos, com comprimentos menores que $\beta - \alpha$ do intervalo $[\alpha, \beta]$. Como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, pelo menos um desses extremos, digamos $a^{\frac{m}{n}} \supset [\alpha, \beta]$.

1.4 Potências de Expoente Irracional

O estudo de potenciação no Ensino Fundamental II vem como base e sustentação para o ensino das Funções Exponenciais e Logarítmicas no Ensino Médio. A posteriori notaremos que a função exponencial está definida com domínio real, ou seja, potências com expoentes racionais ou irracionais, o primeiro caso já foi estudado nas seções 1.1, 1.2 e 1.3. Devemos então estudar o caso em que temos potências de expoente irracional. Nesta seção traremos algumas definições, enunciaremos e demonstraremos teoremas que servirão de suporte para compreensão de como calcular potências de expoente irracional.

Definição 1.2. **(Sucessão)**: *Sucessão de números reais (ou sequência de números reais) é uma aplicação*

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Adotamos para este tipo de aplicação uma notação diferente da utilizada para as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Pondo, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = x_n$$

escrevemos

$$(x_n)$$

para designar a sucessão

$$f(n) \to \mathbb{R}$$

$$n \to f(n) = x_n.$$

Ou escrevemos

$$(x_1, x_2, x_3, ..., x_n).$$

Definição 1.3. (Convergência): *Sejam dados um número real L e uma sucessão (a_n) de números reais. Dizemos que L é o limite da sucessão, ou seja, que a sucessão converge para L se a seguinte proposição é verdadeira:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

Teorema 1.4.1. *Seja dado $a \in \mathbb{R}, a > 0$, e seja (r_n), $0 < r_n < 1$, uma sucessão de números racionais positivos convergente para zero. Então*

$$\lim_{n \to \infty} a^{r_n} = 1$$

Demonstração do Teorema 1.4.1: [10]

Definição 1.4. (Supremo):

Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e não-vazio. Um número $b \in \mathbb{R}$ chama-se o supremo do conjunto X quando é a menor das cotas superiores de X, mais explicitamente, b é o supremo de X quando cumpre as duas condições:

$[S_1]$: *Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;*

$[S_2]$: *Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$ então $b \leq c$.*

A condição S_2 admite a seguinte reformulação:

$[S_{2'}]$: *Se $c < b$ então existe $x \in X$ com $c < x$.*

Com efeito, $S_{2'}$ diz que nenhum número real menor do que b pode ser cota superior de X. Às vezes se exprime $S_{2'}$ assim: para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $b - \varepsilon < x$.

Escrevemos $b = supX$ para indicar que b é o supremo do conjunto X.

Teorema 1.4.2. *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração:[8]

Seja (x_n) monótona, digamos não decrescente, limitada. Escrevamos $X = \{x_1, ..., x_n, ...\}$ e $a = supX$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior de X. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Assim, $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < a + \varepsilon$ e daí $\lim x_n = a$.

Semelhantemente, se (x_n) é não-crescente, limitada então $\lim x_n$ é o ínfimo do conjunto de valores x_n.

Teorema 1.4.3. *Sejam dados $a \in \mathbb{R}_+, a \neq 1$ e seja dado $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Seja (r_n) uma sucessão monótona de racionais convergindo para x. Então a sucessão (a^{r_n}) é convergente. Se (r'_n) é outra sucessão monótona de racionais convergindo para x, então $(a^{r_n} - a^{r'_n})$ converge para zero, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r'_n}$.*

Demonstração:

Suponha (r_n) crescente, $a > 1$ e $r_1 < r_2 < r_3 < ... < x < r$, sendo $r \in \mathbb{Q}$,

Sendo fixado $r > x$, das propriedades das potências com expoente racional, teremos

$$a^{r_1} < a^{r_2} < a^{r_3} < ... < a^r.$$

Como a^{r_n} é uma sequência monótona (crescente) e limitada. Pelo teorema 1.4.2 (Apêndice), a^{r_n} converge.

Faremos agora a demonstração da seguinte afirmação:

Se (r_n) e (r'_n) são sucessões de números racionais positivos e convergem ambas para o mesmo limite $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $x > 0$ então as sucessões (a^{r_n}) e $(a^{r'_n})$ convergentes, terão o mesmo limite.

Escrevemos então,

$$\frac{(a^{r_n})}{(a^{r'_n})} = a^{r_n - r'_n}.$$

Por hipótese, a sucessão de números racionais $(r_n - r'_n)$ converge para zero. Logo,pelo teorema 1.4.1 teremos

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n - r'_n} = 1.$$

Como as sucessões a^{r_n} e $a^{r'_n}$ são convergentes (convergindo para limites não nulos), resulta que

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n}.$$

Como queríamos demonstrar.

Com isso,

Definição 1.5. *Seja $a \in \mathbb{R}_+, a \neq 1$ e $x \in \mathbb{R}$, temos que $a^x = \lim\limits_{n \to \infty} a^{r_n}$ para qualquer sequência monótona $r_n \longrightarrow x$.*

Será observado na próxima seção que os livros didáticos analisados usam esta definição.

1.5 Análise de Livros Didáticos

Nesta seção faremos uma análise de como é abordado pelos autores de livros didáticos o assunto de potenciação, quando se trata de expoentes irracionais.

1.5.1 Matemática Contexto e Aplicações

> *Vamos agora dar uma idéia de como caracterizar, por exemplo, $2^{\sqrt{2}}$ Sendo tomadas aproximações racionais do número irracional $\sqrt{2}$, que são:*
>
> *1; 1,4 ; 1,41 ; 1,414; ... Se aproximam de $\sqrt{2}$.*
>
> *e temos definidas as potências com expoente racional*
>
> $2^1, 2^{1,4}, 2^{1,41}, 2^{1,414}, \ldots$ *Se aproximam de $2^{\sqrt{2}}$.*
>
> *Sendo assim obtida, por aproximação de racionais, a potência, com x irracional e a real positivo (sempre que a^x for possível em $\mathbb{R}$). Uma observação importante é que a^x é sempre um número real positivo.*"[1]

Nota-se que o autor desenvolve uma idéia vaga sobre o tema sem as devidas preliminares, ou seja, é dada uma idéia ao leitor de uma aproximação sem a prévia definição do que seria a mesma. Observa-se também que os valores são lançados ao texto sem um "passo-a-passo"no que diz respeito aos cálculos dessas aproximações.

Sugere-se ao autor que informe ao leitor o motivo de serem tomadas tais aproximações, que as faça por excesso e por falta e exponha o passo-a-passo dos cálculos dessas aproximações.

1.5.2 Matemática para escola de hoje

> *"Será dada apenas uma noção do que seja essa potência. Antes, entretanto, convém lembrar: número irracional é todo número que, quando escrito na forma decimal, apresenta um número infinito de casas decimais sem contudo formar períodos, como as dízimas periódicas. Assim, por exemplo $\pi = 3,1415...$; $\sqrt{2} =$ 1,41421...;$\sqrt{3} = 1,73205...$, são números irracionais.*
>
> *Tome um número real $a > 0$ e um número irracional α, existe um único número a^α que é a potência de base a e expoente irracional α.*
>
> *Seja, por exemplo, a potência $5^{\sqrt{3}}$ com base $a = 5$ e expoente irracional $\alpha = \sqrt{3}$:*

$$
\begin{array}{ccc}
 & \sqrt{3} & \\
1 & & 2 \\
1{,}7 & & 1{,}8 \\
1{,}73 & & 1{,}74 \\
1{,}732 & & 1{,}733 \\
\searrow & & \swarrow \\
 & \sqrt{3} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
 & 5^{\sqrt{3}} & \\
5^{1} & & 5^{2} \\
5^{1{,}7} & & 5^{1{,}8} \\
5^{1{,}73} & & 5^{1{,}74} \\
5^{1{,}732} & & 5^{1{,}733} \\
\searrow & & \swarrow \\
 & 5^{\sqrt{3}} &
\end{array}
$$

Note que a potência fica definida por um par de sequências numéricas cujos valores vão se aproximando de um único valor, que é $5^{\sqrt{3}}$.

Outros exemplos de potência de base real positiva com expoente irracional, temos 2^{π}, $3^{\sqrt{2}}$, $5^{\sqrt{7}}$, *e* $\pi^{\sqrt{3}}$.

Sabemos, então, que a potência a^{α} *só fica definida para* $a > 0$.

Se $a < 0$, *o símbolo* a^{α} *não tem sentido.*

Se $a = 0$, *o símbolo* $a^{\alpha} = 0$, *para* α *irracional e positivo. Se* $\alpha < 0$, *o símbolo* 0^{α} *não tem significado.*

Se $a = 1$, *então,* $a^{\alpha} = 1$ *qualquer que seja o valor irracional de* α.

As cinco propriedades vistas para potências com expoente inteiro continuam válidas para potências com expoentes irracional e de base não-negativa. (salvo as restrições em (P_2) e (P_5))."[3]

O autor inicia o tema (potência de expoente irracional) com a observação que será dada apenas uma noção, porém, sabe-se que posteriormente a função exponencial será definida para domínios irracionais, sendo assim, essa seção é de grande importância e deveria ter uma atenção especial. Mesmo notando que serão analisadas as aproximações do que se refere os números irracionais, o autor deveria fazer cálculos, mesmo que fosse utilizada a calculadora em sua explanação, para que o leitor tivesse a idéia da aproximação.

Sugere-se ao autor que estimule o leitor a fazer os cálculos das aproximações expostas com auxílio de uma calculadora, fazendo com que o leitor acompanhe a idéia que está sendo transmitida. Que seja informado no texto que tais aproximações foram obtidas por excesso e por falta e que sejam expostos os resultados das potências calculadas.

1.5.3 Fundamentos de Matemática Elementar

"Sejam um número real $a > 0$ e um número irracional α , podemos construir, com base nas potências de expoente racional, um único número real positivo a^{α} que é potência de base a e expoente irracional α.

Seja por exemplo a potência $3^{\sqrt{2}}$. Sabendo quais são os valores racionais aproximados por falta ou por excesso de $\sqrt{2}$, obtemos em correspondência os valores aproximados, por falta e por excesso de $3^{\sqrt{2}}$ (potências de base 3 e expoente racional, já definidas):

$$\underbrace{\begin{array}{cc} A_1 & A_2 \\ 1 & 2 \\ 1{,}4 & 1{,}5 \\ 1{,}41 & 1{,}42 \\ 1{,}414 & 1{,}4115 \\ 1{,}4142 & 1{,}4243 \end{array}}_{\sqrt{2}}$$

$$\underbrace{\begin{array}{cc} B_1 & B_2 \\ 3^{1} & 3^{2} \\ 3^{1,4} & 3^{1,5} \\ 3^{1,41} & 3^{1,42} \\ 3^{1,414} & 3^{1,4115} \\ 3^{1,4142} & 3^{1,4243} \end{array}}_{3^{\sqrt{2}}}$$

Definição

Sejam $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e um número irracional; consideremos os conjuntos:

$A_1 = \{r \in \mathbb{Q}/r < \alpha\}$ *e* $A_2 = \{s \in \mathbb{Q}/s > \alpha\}$

Notemos que:

a) Todo número de A_1 é menor que qualquer número de A_2 ;

b) Existem dois racionais r e s tais que $r < \alpha < s$ e a diferença $s - r$ é menor que qualquer número positivo arbitrário.

Em correspondência aos conjuntos A_1 e A_2 , consideremos os conjuntos

$B_1 = \{a^r/r \in A_1\}$ e $B_2 = \{a^s/s \in A_2\}$

Se $a > 0$, demonstra-se que:

a) Todo número de B_1 é menor que qualquer número de B_2 ;

b) Existem dois números a^r e a^s tais que a diferença a^r - a^s é menor que qualquer número positivo arbitrário.

Nessas condições, dizemos que a^r e a^s são aproximações por falta e por excesso, respectivamente, de a^α e que B_1 e B_2 são classes que definem a^α.

Se $a = 0$ e α é irracional e positivo, daremos a seguinte definição especial $0^\alpha = 0$

Observações:

a) Se $a = 1$, então $1^\alpha = 1$, $\forall\alpha$ irracional.

b) Se $a < 0$ e α é irracional e positivo, então o símbolo a^α não tem significado.

Exemplos: $(-2)^{\sqrt{2}}$, $(-5)^{\sqrt{3}}$ e $(-\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$ não tem significado.

c) Se α é irracional e negativo $(a < 0)$, então 0^α não tem significado.

d) Para potências de expoente irracional são válidas as propriedades $[P_1]$ a $[P_5]$."[4]

Nota-se que o autor tenta transmitir a idéia de potências de expoente irracional baseando-se em aproximações por falta e por excesso de potências com a mesma base proposta inicialmente, sem trazer ao leitor os cálculos que foram feitos até chegar a aproximação dita como uma boa aproximação.

Sugere-se ao autor que sejam expostos os cálculos dessa aproximação dita como uma boa aproximação, fazendo com que o leitor siga o desenvolvimento da idéia e que em suas observações seja detalhado o porque de tais potências não terem significados para expoentes irracionais.

1.5.4 Logaritmos

Os números reais podem ser racionais ou irracionais. Os racionais tem a forma $\frac{p}{q}$ com p e q inteiros, sendo $q > 0$, e caracterizam-se por quando serem transformados em frações decimais, terem desenvolvimento finito e periódico. Os números números irracionais, como $\sqrt{2}, \sqrt{3}$, π etc. Esses não podem ser escritos na forma $\frac{p}{q}$ de dois inteiros, pois o seu desenvolvimento decimal não é finito e nem periódico. Quando é escrito o número π na forma decimal, digamos 3,141592, estamos dando apenas uma aproximação(neste caso, porque foi tomada 6 casas decimais, o erro cometido é menor do que 0,000001). E o que significa, afinal de contas, uma potência com expoente irracional? Que significa, por exemplo, $10^{\sqrt{2}}$? Essas são perguntas cruciais, é possível explicar satisfatoriamente o significado de uma potência com expoente irracional. Por exemplo $10^{\sqrt{2}}$ é definido assim: tomam-se os valores $1,4; 1,41; 1,414$ etc., aproximações racionais do número irracional $\sqrt{2}$. Os números $10^{1,4}, 10^{1,41}, 10^{1,414}$ etc. são valores aproximados de $10^{\sqrt{2}}$, tanto mais próximo forem tomados o número racional r de $\sqrt{2}$, mais próximo estará $10^{\sqrt{r}}$ de $10^{\sqrt{2}}$. O desenvolvimento sistemático da teoria das potências de expoente racional e irracional é um processo longo e tedioso.[6]

O autor não desenvolve potências de expoente irracional, tomando a definição da função exponencial e sim, tomando a definição da função exponencial como inversa do logaritmo. Sua proposta pedagógica para o ensino de logaritmo está intimamente relacionada à identidade

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

No livro, o autor desenvolve a teoria sem necessidade de utilização de integrais, provando as propriedades dos logaritmos a partir de fatos geométricos relacionados a área das faixas de hipérbole sob o gráfico da função $f(t) = \frac{1}{t}$.Como apresentamos na Figura 1.1.

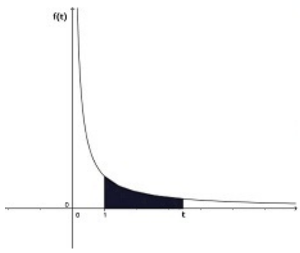

Figura 1.1 Área das faixas de hipérbole

Do nosso ponto de vista, tal abordagem é pouco viável no Ensino Médio atualmente, por fatores socioculturais.

1.5.5 Matemática: Ciência, linguagem e tecnologia

Dados um número real a ($a > 0$) e o número irracional m, podemos calcular a^m por aproximação, com base nas potências de expoente racional.

Veja, por exemplo, como calcular a potência $2^{\sqrt{3}}$. Inicialmente, aproximamos o valor de $\sqrt{3}$ por falta e por excesso, conforme o quadro abaixo.

Tabela 1.1 Aproximações para $\sqrt{3}$

Por falta	Por excesso
1	2
1,7	1,8
1,73	1,74
1,732	1,733
...	...
$\sqrt{3} = 1,7320508...$	

Observe que, quanto mais casas decimais usarmos, mais os valores se aproximarão de $\sqrt{3}$.

Agora, definiremos o valor da potência $2^{\sqrt{3}}$ utilizando os valores aproximados para $\sqrt{3}$. Para realizar esses cálculos, podemos utilizar uma calculadora científica.

Tabela 1.2 Potências de Expoente Real

Por falta	Por excesso
$2^1 = 2$	$2^2 = 4$
$2^{1,7} = 3,249009585...$	$2^{1,8} = 3,482202253...$
$2^{1,73} = 3,317278183...$	$2^{1,74} = 3,340351677...$
$2^{1,732} = 3,321880096$	$2^{1,733} = 3,324183446$
...	...
$2^{\sqrt{3}} = 3,321997085...$	

Observe ainda que, ao usarmos valores mais próximos de $\sqrt{3}$ no expoente, os valores das potências se aproximam de $2^{\sqrt{3}}$. Com isso, obtemos, por aproximação, a potência a^m . Como as propriedades mencionadas anteriormente valem para potências com expoentes racionais e irracionais, valem consequentemente, para potências com expoente real, ou seja, para base $a \in \mathbb{R}_+^*$ e para o expoente $m \in \mathbb{R}$.[13]

É observada a preocupação do autor em transmitir o "passo-a-passo"das aproximações por excesso e por falta a partir de uma calculadora científica. O autor não faz uma análise extensa sobre o que diz respeito a potências com expoentes irracionais, porém traz uma boa idéia sobre o tema, já que estamos analisando em nível médio.

Sugerimos esse texto como apoio aos alunos do ensino médio e o tomaremos como base quando citarmos as potências com expoentes irracionais.

CAPÍTULO 2

Função Exponencial

Neste capítulo, será definida e caracterizada a Função Exponencial com domínio real utilizando as propriedades definidas e demonstradas no capítulo 1.

Definição 2.1. *Seja a um número real positivo, que por conveniência consideraremos diferente da unidade($a > 0$ e $a \neq 1$).A função exponencial de base a, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, representada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:*

1) $a^x.a^y = a^{x+y}$;

2) $a^1 = a$;

3) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$.

Note que para $a = 0$, tem-se uma função nula, ou seja,$f(x) = 0^x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Para $a = 1$ temos uma função constante $f(1) = 1^x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Esses casos serão desconsiderados, Serão analisados então os casos em que $0 < a < 1$ e $a > 1$.

2.1 Significado da Função Exponencial Definida Com Expoente Irracional

Nesta seção estudaremos o significado da função exponencial $y = a^x$ para x irracional.

[15] Qual o significado de a^x se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$? Por exemplo, qual o significado de $2^{\sqrt{3}}$ ou 5^{π}?

Querendo ajudar a responder a essa questão, observemos o gráfico da função $y = 2^x$, com $x \in \mathbb{Q}$. Temos a representação desse gráfico na Figura 2.1.

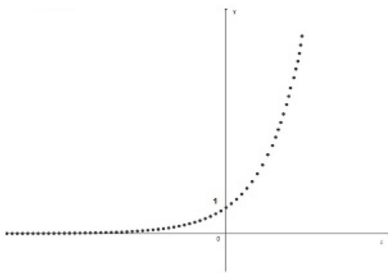

Figura 2.1 $f(x) = 2^x$ com $x \in \mathbb{Q}$

Agora, queremos estender o domínio de $y = 2^x$ para incluir os números irracionais, ou seja, fazer $x \in \mathbb{R}$.

Note que no gráfico da Figura 2.1, existem buracos que correspondem aos valores irracionais de x. Para preenchermos esses buracos precisamos definir $f(x) = 2^x$, onde $x \in \mathbb{R}$, sendo f uma função crescente. Em particular, sabendo que o número $\sqrt{3}$ satisfaz

$$1,7 < \sqrt{3} < 1,8$$

devemos ter

$$2^{1,7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,8}.$$

e sabemos o significado de $2^{1,7}$ e $2^{1,8}$, pois $1,7$ e $1,8$ são números racionais. Da mesma maneira, usando melhores aproximações para $\sqrt{3}$, obtemos melhores aproximações para $2^{\sqrt{3}}$:

$$1,73 < \sqrt{3} < 1,74 \Rightarrow 2^{1,73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,74}$$
$$1,732 < \sqrt{3} < 1,733 \Rightarrow 2^{1,732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,7333}$$
$$1,7320 < \sqrt{3} < 1,7321 \Rightarrow 2^{1,7320} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,7321}$$
$$1,73205 < \sqrt{3} < 1,73206 \Rightarrow 2^{1,73205} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,73206}$$

Continuando com essa idéia, pode-se mostrar que há exatamente um número maior que todos os números

$$2^{1,7}, 2^{1,73}, 2^{1,732}, 2^{1,7320}, 2^{1,73205}, \ldots.$$

e menor que todos os números

$$2^{1,8}, 2^{1,74}, 2^{1,733}, 2^{1,7321}, 2^{1,73206}, \ldots.$$

Definimos então, $2^{\sqrt{3}}$ como esse número. Usando um processo de aproximação podemos calculá-lo com seis casas decimais:

$$2^{\sqrt{3}} = 3,321997.$$

De maneira análoga, podemos definir 2^x (ou a^x, se $a > 0$), onde x é um número irracional qualquer. A Figura 2.2 mostra como todos os buracos da Figura 2.1 foram preenchidos completando assim o gráfico da função $f(x) = 2^x$, com $x \in \mathbb{R}$.

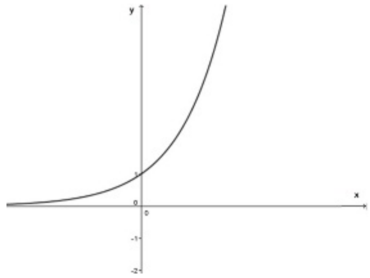

Figura 2.2 $f(x) = 2^x$ com $x \in \mathbb{R}$

2.2 A Equação Funcional de Cauchy

Nesta seção faremos uma análise da Equação Funcional de Cauchy $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, afim de mostrar a existência da Função Exponencial. A base dessa seção são os artigos Engel, Klaus-Jochen [2] e German Lozada [9].

A Equação Funcional Clássica a ser estudada é:

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y). \tag{1}$$

Iniciaremos mostrando que $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suponha $f(x_0) = 0$.

Sendo $f(x) = f(x_0 + x - x_0) =$

$= f(x_0) \cdot f(x - x_0) =$

$= 0 \cdot f(x - x_0) = 0$.

Com isso, teríamos que $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, solução particular em que f é a função identicamente nula, o que é uma contradição.

Faremos então, $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. E extrairemos de (1) o máximo de informações possíveis, sem suposições.

(2) Para $y = 0$, temos:

$f(x+0) = f(x) \cdot f(0)$

ou seja,

$f(x) = f(x) \cdot f(0) \Rightarrow f(0) = 1$, pois $f(x) \neq 0$.

(3) Para $y = -x$, obtemos:

$f(x-x) = f(x) \cdot f(-x)$

$f(0) = f(x) \cdot f(-x)$

$1 = f(x) \cdot f(-x)$

$f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

Agora, limitaremos nossa atenção para $x > 0$.

(4) $x = y$, obtemos:

$f(2x) = f(x) \cdot f(x) = f(x)^2$.

Agora, provaremos por indução em n que

$f(nx) = f(x)^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

i) Para $n = 1$, tem-se

$f(nx) = f(1 \cdot x) = [f(x)]^1 = [f(x)]^n$.

ii) Consideremos por hipótese de indução válida para $n = k \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$f(kx) = [f(x)]^k.$$

Verificaremos agora para $n = k+1$.

iii) Para $n = k+1$, tem-se

$f((k+1)x) = f(kx) \cdot f(x) = [f(x)]^k \cdot f(x) = [f(x)]^{k+1}$

dos itens (i) e (ii) tem-se $f(nx) = [f(x)]^n; \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Agora dividiremos o nosso estudo sobre a equação funcional em casos, observe:

$[C_1]$ $n \in \mathbb{N}$:

$f(n) = f(1 \cdot n) = [f(1)]^n$

Fazendo $f(1) = a$, teremos então,

$f(n) = a^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

$[C_2]$ $m \in \mathbb{Z}$:

Se $m > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{N}$, já visto em $[C_1]$.

Se $m < 0$, então $m = -n$ com $n \in \mathbb{N}$, segue que

$f(m) = f(-n) = \dfrac{1}{f(n)} = \dfrac{1}{a^n} = a^{-n} = a^m$, fazendo uso das propriedades estudadas na seção 1.2.

$[C_3]$ $x \in \mathbb{Q}$:

Para o caso racional $x = \dfrac{m}{n}$, isto é, $n \cdot x = m \cdot 1$, por (4) obtemos

$f(n \cdot x) = f(m \cdot 1)$.

$[f(x)]^n = [f(1)]^m$, e

$f(x) = \sqrt[n]{[f(1)]^m}$. (5)

Tomando $f(1) = a$, com $a \in \mathbb{R}$, logo

$f(x) = a^{\frac{m}{n}}$, ou seja,

$f(x) = a^x$ para x racional. Que é tudo que podemos concluir sem pressupostos adicionais.

$[C_4]$ $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$: [7]

O fato da função exponencial ser crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$, resultará que existe uma única maneira de definir o valor $f(x) = a^x$ quando x é irracional. Para fixar as idéias, suporemos $a > 1$. Então, a^x tem a seguinte propriedade:

$$r < x < s \ \ (r, s \in \mathbb{Q}) \ \ \Rightarrow \ \ a^r < a^x < a^s.$$

Ou seja, a^x é um número real cujas aproximações por falta são a^r, com $r < x$, $r \in \mathbb{Q}$, e cujas aproximações por excesso são a^s, com $x < s$, $s \in \mathbb{Q}$. Não podem existir dois números reais diferentes, digamos $A < B$, com a propriedade acima. Se existirem tais A e B teríamos

$$r < x < s \ \ (r, s \in \mathbb{Q}) \ \ \Rightarrow \ \ a^r < A < B < a^s.$$

e então, o intervalo $[A, B]$ não conteria nenhuma potência de a com expoente racional, contrariando o Lema 1.4.

Portanto, quando x é irracional, a^x é o (único) número real cujas aproximações por falta são as potências a^r, com r racional menor do que x e cujas aproximações por excesso são as potências a^s, com s racional menor do que x.

2.3 Propriedades da Função Exponencial $(a > 1)$

Nesta seção enunciaremos e demonstraremos as propriedades da Função Exponencial, observando a restrição a $x \in \mathbb{Q}$ tem como imagem uma potência de expoente racional como as estudadas no capítulo 1.

$[P_1]$ Qualquer que seja x, $a^x > 0$ a função exponencial é positiva para todos os valores reais de x . Resulta da definição dada sobre potências.

$[P_2]$ Se x é positivo, $a^x > 1$, se x é negativo, então, $a^x < 1$.

Lema 2.1. *Se $b \neq 1$ e $m \geq 1$ (inteiro natural), $b^m - 1$ tem o sinal de $b - 1$.*

Demonstração: [11]

Tem-se que

$$b^m - 1 = (b-1).(b^{m-1} + b^{m-2} + ... + 1)$$

como $(b^{m-1} + b^{m-2} + ... + 1)$ é positivo, concluímos que o primeiro membro tem sinal de $b - 1$, e reciprocamente.

Com isso, segue que

I) Se x é inteiro positivo, exemplo, $x = m, a^m - 1$ tem o sinal de $a - 1$ e, por ser $a > 1$, resulta

$$a^m - 1 > 0 \ ; \ a^m > 1.$$

II) Se x é racional positivo, exemplo, $x = \frac{m}{n}$ (com m e n inteiros positivos), conclui-se que

$$a^{\frac{m}{n}} - 1 = (a^{\frac{1}{n}})^m - 1$$

tem o sinal de $a^{\frac{1}{n}} - 1$ e esta diferença tem o sinal de

$$(a^{\frac{1}{n}})^m - 1 = a - 1.$$

por força do Lema 2.1

Tomando por hipótese, $a > 1$, então,

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} > 1.$$

III) Se x é negativo, pondo $x = -x'(x' > 0)$, temos que

$$a^x = \frac{1}{a^{x'}}$$

e, (pelo caso anterior) $a^{x'} > 1$, será $a^x < 1$.

$[P_3]$ A função a^x $(a > 1)$ cresce com x.

Tome x_0 um valor de x e suponha ser racional e $x_0 \pm h$ com $(h > 0)$ um valor da vizinhança de x_0 . Fazendo

$$f(x) = a^x.$$

Resulta, respectivamente, $f(x_0) = a^{x_0}$ $f(x_0 - h) = a^{x_0 - h}$ $f(x_0 + h) = a^{x_0 + h}$.

Sendo assim,

I) $f(x_0 - h) - f(x_0) = a^{x_0 - h} - a^{x_0} = a^{x_0}.(a^{-h} - 1)$;

II) $f(x_0 + h) - f(x_0) = a^{x_0 + h} - a^{x_0} = a^{x_0}.(a^h - 1)$.

Ora, $a^{x_0} > 0$ e pela propriedade anterior, $a^{-h} < 1$; $a^h > 1$.

As igualdades I) e II) mostram que

$$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h).$$

Com isso, concluímos que $f(x) = a^x$ é crescente para qualquer valor racional x_0 de x.

$[P_4]$ A função a^x $(a > 1)$ cresce indefinidamente com x e tende para zero quando x decresce indefinidamente:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0.$$

Segue a demonstração para x racional.

I) Se x é inteiro e positivo, com $a > 1$, escreve-se

$$a = 1 + h; (h > 0)$$

utilizando as leis do desenvolvimento binomial, temos

$$a^x = (1+h)^x = 1 + xh + ... + h^x.$$

O que nos faz concluir que

$$a^x > 1 + xh.$$

Ora, sabemos que $1 + xh$ é infinitamente grande com x. Logo, a desigualdade acima nos mostra que a^x também é infinitamente grande com x.

II) Se x é racional positivo e p é o maior inteiro contido em x,

$$p < x < p + 1.$$

A desigualdade $p < x$, pelo fato da função exponencial ser crescente, permite escrever

$$a^p < a^x.$$

Ora, quando x aumenta indefinidamente, o mesmo acontece com p e como

$$\lim_{p \to +\infty} a^p = +\infty$$

conclui-se que

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty.$$

III) Se x é negativo e igual a $-x'$, tem-se $a^x = \dfrac{1}{a^{x'}}$. Quando tende para $-\infty$, x' tende para $+\infty$, $a^{x'}$ tende para $+\infty$ e o seu inverso,a^x , tende para zero:

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0.$$

$[P_5]$ Quando x tende a zero, a^x tende para 1 , isto é, a função a^x é continua para $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} a^x = a^0 = 1; \quad (a > 1).$$

Observe que:

I) Se x tende para 0 , por valores positivos, $x > 0$ implica

$$a^x > a^0; (a^x > 1)$$

Por outro lado, a^x pode tornar-se inferior a $1+\varepsilon$, com ε positivo e arbitrário; tomando $x = \dfrac{1}{y}$, a desigualdade

$$a^x < 1+\varepsilon$$

ou

$$a^{\frac{1}{y}} < 1+\varepsilon.$$

é verificada conjuntamente com

$$a < (1+\varepsilon)^y.$$

e esta é, de fato, possível $[P_4]$: basta que seja y suficientemente grande e, portanto, x suficientemente pequeno.

II)Se x tende para 0, por valores negativos, pondo $x = -x'(x' > 0)$, da igualdade

$$a^x = \frac{1}{a^{x'}},$$

conclui-se que $a^{x'}$ tende para 1 e o mesmo acontece com seu inverso a^x.

Em suma,

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1; (a > 1).$$

$[P_6]$ A função exponencial $a^x(a > 1)$ é uma função contínua para todo valor x_0 de x . Com efeito, se x_0 é um valor de x tem-se

$$K = a^{x_0+h} - a^{x_0} = a^{x_0}.a^h - a^{x_0} = a^{x_0}.(a^h - 1).$$

Ora, a^{x_0} é constante positiva; portanto, atendendo à propriedade anterior, resulta:

$$\lim_{h\to 0} K = a^{x_0}. \lim_{h\to 0}(a^h - 1) = a^{x_0}.(1-1) = 0.$$

O acréscimo k da função tende para zero com o acréscimo h da variável: a função é contínua para $x = x_0$.

Conclusão: a função $a^x(a > 1)$ é definida e contínua para todos os valores reais de x ; cresce de 0 a $+\infty$ quando x cresce de $-\infty$ a $+\infty$.

2.4 Caracterização da Função Exponencial

Nesta seção serão enunciados e demonstrados teoremas que caracterizam a função exponencial.

Teorema 2.4.1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua. São válidas as seguintes afirmações:*

I) $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;
II) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;
III) $f(x+y) = f(x).f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.
Demonstração: [7]

Provaremos as implicações $(1) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (1)$. A fim de demonstrar que $(1) \Longrightarrow (2)$ observamos inicialmente que a hipótese (1) acarreta que, para todo número racional $r = \frac{m}{n}$ (com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbf{N}$) temos que $f(rx) = f(x)^r$.

Observando o número racional $r = \frac{m}{n}$, segue que $m = r.n$, então podemos escrever

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m$$

com isso,

$$f(rx)^n = f(x)^m$$
$$f(rx) = \sqrt[n]{f(x)^m}$$
$$f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}}.$$

Como $\dfrac{m}{n} = r$, temos

$$f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r = f(rx).$$

Logo, se fizermos $f(1) = a$, teremos $f(r) = f(r.1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Para completar a demonstração que $(1) \Longrightarrow (2)$suponhamos, a fim de fixar as idéias que f seja crescente, logo $1 < f(0) < f(1) = a$. Podemos admitir, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Digamos, por exemplo, que seja $f(x) < a^x$. (O caso $f(x) > a^x$ seria tratado de maneira análoga.) Pelo Lema 1.4, existe um número racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, sendo $f(x) < f(r)$ concluímos que $x < r$. Por outro lado, temos também $a^r < a^x$, logo $r < x$. Por esta contradição, concluímos que $(1) \Longrightarrow (2)$.

Afim de demonstrar $(2) \Longrightarrow (3)$ observaremos primeiro a nossa hipótese,

$f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$,como $f(x) = a^x$, temos que

$f(x+y) = a^{x+y} = a^x.a^y = f(x).f(y)$ com isso, concluímos que $(2) \Longrightarrow (3)$.

A demonstração $(3) \Longrightarrow (1)$ já foi vista em 2.1(4).

E assim concluímos a prova das implicações $(1) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (1)$.

Teorema 2.4.2. *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ dependa apenas de h , mas não de x . Então, se $b = g(0)$ e $a = \frac{g(1)}{g(0)}$, tem-se $g(x) = b.a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: [7]

A hipótese feita acima equivale a supor que $\varphi(h) = \dfrac{g(x+h)}{g(x)}$ independe de x. Fazendo $f(x) = \dfrac{g(x)}{b}$, onde $b = g(0)$, f contínua monótona injetiva, com $\dfrac{f(x+h)}{f(x)}$ independe de x e, agora, com $f(0) = 1$. Então, pondo $x = 0$ na relação $\varphi(h) = \dfrac{f(x+h)}{f(x)}$, obtemos $\varphi(h) = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Vemos assim que a função monótona injetiva f cumpre $f(x+h) = f(x).f(h)$, ou seja $f(x+y) = f(x).f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Segue-se então do teorema 2.4.1 que $f(x) = a^x$, logo $g(x) = b.f(x) = b.a^x$, como queríamos demonstrar.

Teorema 2.4.3. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua satisfazendo $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. Seja $f(1) = a > 0, f(1) \neq 1$. Então $f(x) = a^x$.*

Demonstração:
Se $x \in \mathbb{Q}$ já está definido.

Se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, tome r_n uma sucessão qualquer de números racionais positivos convergindo para o irracional positivo x dado.

Consideremos a sucessão (a^{r_n}), que é convergente, de acordo com o Teorema 1.4.1.

O Teorema 1.4.1 garante que o $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ não depende da sucessão (r_n) escolhida, desde que (r_n) seja convergente para o número irracional x dado.

Diremos então

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^x = f(x).$$

CAPÍTULO 3

Proposta Pedagógica

Neste capítulo será exposta uma proposta de sequência de aulas, subdividida em três blocos de aulas, voltada ao primeiro ano do Ensino Médio, contemplando os conteúdos de Potenciação,Caracterização da Função Exponencial e a Equação Funcional Linear de Cauchy.Para desenvolver esses conteúdos, iniciaremos sempre com uma questão proposta sobre o assunto.

3.1 Proposta Potenciação

Nesta seção traremos uma Proposta Pedagógica com base no Capítulo 1 de nosso trabalho.

3.1.1 Problema Proposto:

Em 1983, a segunda fase da Fuvest-USP[16] propôs a seguinte questão:

O número $x = [(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}]^{\sqrt{2}}$ é racional.

a)Usando propriedades das potências, calcule x.

b) Prove que existem dois números irracionais α e β tais que α^{β} é racional.

3.1.2 Bloco 1: 4 aulas

3.1.3 Duração

- 4 horas/aula (3h e 20min).

3.1.4 Objetivos

- Entender o conceito de Potência de Expoente Racional, reconhecendo a necessidade da existência de Potências de Expoente Irracional.

- Resolver situações-problema que envolvam potências de números reais, com expoente racional ou irracional.

3.1.5 Pré-requisito

- Conjuntos Numéricos.

3.1.6 Público-alvo

- Alunos do 1º ano do Ensino Médio.

3.1.7 Metodologia

- Inicialmente traremos ao aluno um problema proposto 3.1.1 presente na prova da 2ª fase Fuvest-USP [16], instigando o aluno a tirar conclusões sobre a referida questão.
- Será revisado os principais conceitos de Potências de Expoente Racional, fazendo a dedução de cada uma de suas propriedades.
- Será transmido aos alunos a importância de Potências de Expoente Irracional, fazendo cálculos desse tipo de potências a partir de convergência com o uso da calculadora baseado no material de Ribeiro, Jackson [13].
- Após cada assunto abordado junto a turma serão respondidos exercícios sobre o referido assunto.
- Enfim, faremos a resolução do problema proposto.

3.1.8 Resolução do Problema Proposto 3.1.1

O item a) é bastante elementar, usaremos a seguinte propriedade de potência:
$[P_5]$ $(a^x)^y = a^{x.y}$
$x = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{4}}) = (\sqrt{2})^2 = 2.$

Para o item b), será necessário um raciocínio mais eficaz. É importante ressaltar que em grande parte dos casos, o desenvolvimento do item a) é útil no item b).

Não sabemos, num primeiro momento se $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ é racional ou irracional. Mas:
Se $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ for racional, o problema está resolvido, com $\alpha = \sqrt{2}$ e $\beta = \sqrt{2}$.
Se $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ for irracional, façamos $\alpha = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ e $\beta = \sqrt{2}$ e assim, $\alpha^{\beta} = 2$, portanto racional.

A parte curiosa é conseguir provar que os números α e β existem, sem saber quem são. A título de curiosidade : $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ é irracional e tem valor aproximado $1,6325$.

3.2 Proposta Caracterização da Função Exponencial

Nesta seção traremos uma Proposta Pedagógica com base no Capítulo 2 de nosso trabalho.

3.2.1 Problema Proposto:

Em 2003, O ITA-SP [5] em seu vestibular propôs a seguinte questão:

Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não constante e tal que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Das afirmações:

I. $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
II. $f(nx) = [f(x)]^n, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
III. f é par.
é(são) verdadeira(s):
(A) apenas I e II.
(B) apenas II e III.
(C) apenas I e III.
(D) todas.
(E) Nenhuma.

3.2.2 Bloco 2: 4 aulas

3.2.3 Duração

- 4 horas/aula (3h e 20min).

3.2.4 Objetivos

- Definir, compreender e aplicar as três propriedades da Função Exponencial.
- Identificar as principais características de uma função exponencial.
- Resolver situações-problema relacionados à definição, propriedades e características de uma função exponencial.

3.2.5 Pré-requisitos

- Classificação de funções,
- Princípio da indução finita,
- Propriedades da potenciação.

3.2.6 Público-alvo

- Alunos do 1º ano do Ensino Médio.

3.2.7 Metodologia

- Inicialmente traremos ao aluno um problema proposto 3.2.1 presente na prova do vestibular ITA-SP, instigando o aluno a tirar conclusões sobre a referida questão.
- Será definida a função exponencial, citando toda importância do estudo da potenciação como base para nossa definição, fazendo assim a demonstração de suas propriedades.
- Será exposto o teorema 2.2.1 (caracterização de funções exponenciais) e demonstrado suas afirmações a partir da indução finita.

- Após cada assunto abordado junto à turma serão respondidos exercícios sobre o referido assunto.

- Enfim, faremos a resolução do problema proposto 3.2.1.

3.2.8 Resolução do Problema Proposto 3.2.1

Observemos que $f(a) \neq 0, \forall a \in \mathbb{R}$, pois, de outra forma
$f(x) = f(x-a+a) =$
$= f(x-a) \cdot f(a) =$
$= f(x-a) \cdot 0 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$,
contrariando a hipótese de f não ser constante. Assim sendo,
I) Verdadeira, pois
$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) =$
$= f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) =$
$= [f\left(\frac{x}{2}\right)]^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, visto que $f\left(\frac{x}{2}\right) \in \mathbb{R}^*$.
II) Verdadeira, questão demonstrada por indução finita na seção 2.1, item (4).
III) Falsa.
1) De $f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \Rightarrow f(0+0) = f(0) \cdot f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ (não serve) ou $f(0) = 1$
2) $f(0) = f(-x+x) = f(-x) \cdot f(x) = 1 \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)}$
3) Se f fosse par , teríamos $f(-x) = -\frac{1}{f(x)} = f(x) \Rightarrow f(x) = 1$ ou $f(x) = -1$, contrariando a hipótese de ser "não constante".
Com isso, a alternativa correta é a letra A.

3.3 Proposta Equação Funcional Linear de Cauchy

3.3.1 Problema Proposto:

Em 1982, a IMO [12] propôs a seguinte questão:
A função $f(n)$ é definida para inteiros positivos e toma valores inteiros não-negativos. $f(2) = 0, f(3) > 0, f(9999) = 3333$, e para cada m,n:

$$f(m+n) - f(m) - f(n) = 0 \text{ } ou \text{ } 1.$$

Determinar $f(1982)$.

3.3.2 Bloco 2: 2 aulas

3.3.3 Duração

- 2 horas/aula (1h e 40 min).

3.3.4 Objetivos

- Compreender a Equação Funcional Linear de Cauchy.
- Identificar as principais características da Equação Funcional Linear de Cauchy.
- Resolver o proplema proposto relacionado a Equação Funcional estudada.

3.3.5 Pré-requisitos

- Classificação de funções:
- Propriedades da Função Afim.

3.3.6 Público-alvo

- Alunos do 1º ano do Ensino Médio.

3.3.7 Metodologia

- Inicialmente traremos ao aluno um problema proposto 3.3.1 presente na Olímpiada Internacional de Matemática, instigando o aluno a tirar conclusões sobre a referida questão.
- Será enunciado a Equação Linear de Cauchy, citando toda importância do estudo das Equações Funcionais.
- Tentaremos explorar ao máximo a equação sem qualquer suposição.
- Estudaremos individualmente os casos em que x é inteiro ou racional e faremos algumas suposições como f ser contínua e f ser monótona.
- Após todo estudo será respondida o problema proposto 3.3.1.

3.3.8 Equação Funcional Linear de Cauchy

Esta seção foi abordada a partir de estudos sobre artigos relacionados ao tema, como S. Banach [14] e W. Sierpi´nski [17].

A Equação Funcional Linear de Cauchy é

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{1}$$

Primeiro, tentamos extrair de (1) o máximo de informação possível, sem qualquer adicionais suposições. $y = 0$ nos dá $f(x) = f(x) + f(0)$, isto é,

$$f(0) = 0. \tag{2}$$

Para $y = -x$ obtemos $0 = f(x) + f(-x)$, ou

$$f(x) = -f(-x). \tag{3}$$

Agora limitaremos nossa atenção para $x > 0$. Para $y = x$, obtemos $f(2x) = 2f(x)$, e por indução,

$$f(nx) = nf(x); \forall x \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

O caso racional $x = \frac{m}{n}$, isto é, $n \cdot x = m \cdot 1$, por (4) obtemos $f(n \cdot x) = f(m \cdot 1)$, $nf(x) = mf(1)$, e

$$f(x) = \frac{m}{n} \cdot f(1). \tag{5}$$

Se colocarmos $f(1) = c$, em seguida, a partir de $(2), (3), (5)$, obtemos $f(x) = cx$ para x racional, que é tudo o que se pode começar sem pressupostos adicionais.

(a) Suponhamos que f é contínua. Se x é irracional, então nós escolhemos uma seqüência racional x_n com limite x. Devido à continuidade de f, temos

$$f(x) = \lim_{x_n \to x} f(x_n) = \lim_{x_n \to x} c \cdot x_n = c \cdot x$$

.

então, temos que $f(x) = c \cdot x$ para todo x.

(b) Seja f monótona crescente. Se x é irracional, então optamos por uma crescente e uma sequência decrescente r_n e R_n números racionais, de que convergem em direção x. Então nós temos

$$c \cdot r_n = f(r_n) \leq f(x) \leq f(R_n) = c \cdot R_n$$

.

Para $n \to \infty$, $c \cdot R_n$ e $c \cdot r_n$ convergem para $c \cdot x$. Assim $f(x) = c \cdot x$ para todo x.

3.3.9 Resolução do Problema Proposto 3.3.1

Temos que $f(m+n)-f(m)-f(n)=0$ ou 1 e $f(2)=0$.

Com isso,

$f(1+1)-f(1)-f(1)=0$ ou 1

$f(2)-f(1)-f(1)=0$ ou 1.

Se $f(2)-f(1)-f(1)=0$, teremos:

$f(2)=2\cdot f(1) \Leftrightarrow 0=2\cdot f(1) \Leftrightarrow f(1)=0$.

Se $f(2)-f(1)-f(1)=1$, teremos:

$f(2)=1+2\cdot f(1) \Leftrightarrow 0=1+2\cdot f(1) \Leftrightarrow f(1)=-\dfrac{1}{2}$.

Porém, f não admite valores negativos, então $f(1)=0$.

Temos ainda que

$f(2+1)-f(2)-f(1)=0$ ou 1.

logo,

$f(3)=0$ ou $f(3)=1$.

Como $f(3)>0$, temos que $f(3)=1$.

Sabemos ainda que $f(9999)=3333$.

Nota-se que $f(9999)=f(3\cdot 3333)=3333$.

Provaremos então, por indução finita que $f(3\cdot n)\geq n$.

$i)$ Para $n=1$, temos:

$$f(3\cdot 1)=1.$$

$ii)$ Considere válida a hipótese para um certo $n=k$, ou seja

$$f(3\cdot k)=k.$$

$iii)$ Mostraremos agora para $n=k+1$, ou seja,

$$f(3\cdot(k+1))\geq k+1$$

temos que

$$f(3\cdot(k+1))=f(3k+3)$$

porém,

$$f(3k+3)-f(3k)-f(3)=0 \ \ ou \ \ 1.$$

$$f(3k+3)-f(3k)-1=0 \ \ ou \ \ 1.$$

sendo assim,

$$f(3k+3)=1+f(3k).$$

como $f(3k)\geq k$, temos que

$$f(3k+3)\geq k+1$$

ou

$$f(3k+3) = 1+1+f(3k)$$
$$f(3k+3) = 2+f(3k).$$

Como $f(3k) \geq k$, temos que

$$f(3k+3) \geq k+2 \geq k+1$$

como queríamos demonstrar.

Daí, se a desigualdade é estrita para algum n, então é assim para todos os naturais menores que n também.

Como $f(9999) = 3333$, deduzimos que $f(3n) = n, \forall n \leq 3333$.

Pela condição dada temos:

$3 \cdot f(n) \leq f(3n) \leq 3 \cdot f(3n) + 2$, portanto

$f(n) = \lfloor \frac{3n}{3} \rfloor = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. Para $n \leq 3333$. Em particular, $f(1982) = \lfloor \frac{1982}{3} \rfloor = 660$.

Observação: $\lfloor n \rfloor = x$, significa que x é o maior inteiro, menor ou igual a n.

Referências Bibliográficas

[1] Dante, L. R. Matemática Contexto e Aplicações. 5.ed. São Paulo: Ática, 2011.

[2] Engel, Klaus-Jochen; Nagel, Rainer. One-parameter semigroups for linear evolution equations. Graduate Texts in Mathematics, 194. Springer-Verlag, New York, 2000. xxii+586 pp. ISBN: 0-387-98463-1.

[3] Facchini, Walter. Matemática para a Escola de Hoje, São Paulo: FTD, 2006.

[4] Iezzi, G; Dolce, O; Murakami, C. Fundamentos de Matemática Elementar, Vol.2, 3.ed, Atual,2004.

[5] Instituto Tecnológico da Aeronáutica, vestibular 2003.

[6] Lima, E. L. Logaritmos, Rio de Janeiro, IMPA,1991.

[7] Lima, E. L. A matemática do ensino médio /Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado. - vol. 1 - 6. ed. - Rio de Janeiro: SBM 2006.

[8] Lima, Elon Lages. Análise Real: Funções de uma variável - vol. 1 - 8. ed. - Rio de Janeiro: IMPA 2006.

[9] Lozada-Cruz, G. Da Equação Funcional de Cauchy aos Sistemas Dinâmicos Lineares Finito Dimensionais. São Paulo, 2006.

[10] Melo, Maria Eulalia de Moraes, Hinojosa.J. Números Reais, Recife, Ed. Universitária da UFRPE, 2013.

[11] Nova Brasil Editora, Álgebra: Matemática Comercial e Financeira, Vol.1, 1983.

[12] International Mathematical Olympiad,1982.

[13] Ribeiro, Jackson. Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia. 1.ed, São Paulo, Scipione, 2012.

[14] S. Banach, Sur l?équation fonctionnelle f(x+y) = f(x)+f(y), Fundamenta Mathematicae,1 (1920), available at http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/fm/fm1/fm1115.pdf.

[15] Stewart, J. Cálculo. 6.ed. São Paulo, 2011.

[16] Universidade de São Paulo, 1983.

[17] W. Sierpi´nski, Sur l?´equation fonctionnelle f(x+y) = f(x)+f(y), Fundamenta Mathematicae,1(1920), available at http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/fm/fm1/fm1114.pdf.

Este volume foi tipografado em LaTeX na classe UFPEThesis (www.cin.ufpe.br/~paguso/ufpethesis).