UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
Departamento de Matemática

Média Aritmética Ponderada:
Um estudo detalhado da influência dos pesos no posicionamento da média.

Propriedades e Aplicações.

Por
Diogo José Lopes Lôbo Leite

Dissertação Apresentada Como Requisito Parcial
Para a Obtenção do
Grau de Mestre em Matemática

Agosto de 2014

Média Aritmética Ponderada:
Um estudo detalhado da influência dos pesos no posicionamento da média.

Propriedades e Aplicações.

Por
Diogo José Lopes Lôbo Leite

Dissertação Apresentada Como Requisito
Para a Obtenção do
Grau de Mestre em Matemática

Agosto de 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
Departamento de Matemática

Média Aritmética Ponderada:
Um estudo detalhado da influência dos pesos no posicionamento da média.
Propriedades e Aplicações.

Por
Diogo José Lopes Lôbo Leite

Dissertação submetida à homologação do Colegiado de Matemática, apresentado como um requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: ______________________________

Prof[a] Dr[a] Rodrigo Neves Gondim

À minha esposa
Luciana Lôbo
Aos meus filhos
Beatriz e João Pedro.

AGRADECIMENTOS

A minha mãe. O começo de tudo. A primeira a acreditar em mim. Aquela que sempre me apoiou em meus lançamentos incertos. Que sempre se propôs a correr os riscos comigo. Aquela que sempre se fez lugar seguro para uma possível volta. Aquela que não me fez intimidar diante das incertezas. Aquela que me fez inteligente ao me fazer conviver com as incertezas de forma leve e tranquila. Que me ensinou o verdadeiro sentido da fé. Que sempre esteve do lado certo, independente se era lá onde eu estava. Aquela que me fez acreditar que tudo vai dar certo.

Ao meu Pai. Ao seu modo de demonstrar amor. A extrema certeza de seu amor para comigo. Por não gostar de vaidades. Por gostar das pessoas. Por todos poderem dizer em alto e bom tom: "É uma pessoa boa. Lucílio é ótimo". Por suas imperfeições. Por ser diferente. Por ligar sempre para gente, quando a gente só faz correr. Por nos ensinar a ser simples. Por ter sempre um música nova na agulha para encantar sua neta. Por ser compositor da vida. Da vida ao seu modo. Por não se preocupar com os problemas pequenos.

À minha irmã. Por ter sido instrumento para reflexão. Por, mesmo sem querer, mostrar que tem coisas mais importantes que um título. Pelo modo peculiar de amar. Pela sabedoria da frase: "O bom é inimigo do ótimo". Pela presença não linear, porém determinante.

À minha esposa. Luciana. Ao seu amor Luciana. A minha flor. Aos olhos que vivem sorrindo. Ao riso tão lindo. À canção de paz. A aquela que um dia me disse: "Admiração é um requisito essencial para se iniciar o amor". Saiba o quanto isso é verdade. Saiba o quanto te amo, ou seja, o quanto te admiro. Quando eu crescer, queria ser como você. Por me forçar a ser cada dia melhor. Por me fazer acreditar no meu espaço. Por me esperar em minhas ausências constantes. Por compreender minhas falhas. Por estar ao meu lado. Por apostar em mim. Por fazer o dobro, enquanto faço metade. Por ser diferente. Pela autenticidade. Por ser mil em uma. Por ser aquilo que não posso perder. Por ser referência. Conviver com você, torna tudo mais fácil. Pela leveza e sofisticação. Por preferir ser feliz...

A todos que merecem um lugar aqui. Aqueles que se sentem um pedaço disso tudo...

"Um dia Posso até pagar por isso
O impossível é meu mais antigo vício
Ou então
Um delírio do meu coração
Que vê as coisas
Onde as coisas não estão
Tão certo
Como flores no deserto"
Hebert Viana

RESUMO

O conceito de Média Aritmética é bastante simples e utilizado em diversas situações do cotidiano. Porém, a concepção que é fundamentalmente ensinada é a de Média Aritmética como uma divisão igualitária, com ênfase na utilização, pouco reflexiva, dos algoritmos que calculam este tipo de média. O presente trabalho amplia o conceito de Média Aritmética para a ideia de ponto de equilíbrio, estudando as potencialidades do tema e suas mais diversas aplicações na matemática e em outras áreas do conhecimento. Na ampliação desse conceito, apresenta-se uma proposta para o cálculo das médias a partir de sua interpretação geométrica. Tal interpretação se torna possível após estudo detalhado da influência dos pesos no posicionamento da média e nas propriedades decorrentes da ampliação do conceito. A aprendizagem da essência torna possível a descoberta de atalhos para a resolução de questões associadas ao tema. Ressalte-se que o cálculo mental e o pensamento proporcional são importantes meios para o exercício da cidadania, uma vez que elementos físicos ou eletrônicos para realizar tais procedimentos podem estar indisponíveis. Além disso, ao fim do Ensino Médio, os alunos que desejam ingressar na universidade precisam se submeter à prova do Novo Enem, exame em que o tempo de resolução das questões se torna parte da avaliação, dado o alto número de questões. O trabalho apresenta uma abordagem múltipla e efetiva, capaz de contribuir na formação de estudantes e professores através de uma aprendizagem significativa.

ABSTRACT

The concept of Arithmetic Mean is quite simple and used in various situations of everyday life. However, the concept that is fundamentally taught is Arithmetic Mean as an equal division, with little reflective usage of the algorithms that calculate such average. The present study extends the concept of Arithmetic Mean for the idea of equilibrium point, studying the potential of the topic and its various applications in mathematics and in other areas of knowledge. Expanding this concept, a proposal for calculating means from its geometric interpretation is presented. Such an interpretation becomes possible after detailed study of the influence of weights in mean position and resulting properties from the expansion of the concept. Learning the essence makes possible the discovery of shortcuts to the resolution of issues associated with the topic. It is emphasized that mental arithmetic and proportional thinking are important means for the exercise of citizenship, since physical or electronic elements to perform such procedures may be unavailable. Moreover, in the end of high school, students who wants to be admitted in university must be submited to *Novo Enem* proof, in which resolution time of the issues becomes part of the evaluation, given the high number of questions. The paper presents a multipronged and effective approache, able to contribute to students and teachers formation through a significant learning approach.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

Sumário

INTRODUÇÃO

O presente trabalho se pauta na simplicidade dos conceitos matemáticos de Razão, Proporcionalidade e de Médias, mais especificamente, a Média Aritmética Ponderada. A preocupação inicial foi avaliar a relevância do tema, já que se trata de uma dissertação de Mestrado. Será que posso dissertar sobre algo tão simples? Será que é tão simples assim? Será que é preciso inserir uma Matemática Avançada para qualificar o projeto?

Como o trabalho de Conclusão de Curso do PROFMAT tem como objetivo contribuir com a melhoria do Ensino Básico em Matemática, decidimos, eu e minha orientadora, comprar o desafio de falar sobre o trivial. Algo muito difícil, uma vez que todos, mesmo que minimamente, têm uma noção a respeito do tema. Por outro lado, a dificuldade que as pessoas, inclusive professores de matemática, têm em compreender o significado real dos principais conceitos matemáticos nos fez acreditar na relevância do tema. Tal dificuldade pode ser comprovada pelo excesso de “algebrismos” utilizados na resolução de problemas elementares. Coisas que podiam ser feitas “de cabeça”, são normalmente feitas com uma série de receitas prontas, que acabam por não contemplar um dos aspectos mais importante da Matemática, que é desenvolver o raciocínio.

A aquisição, com a conclusão das disciplinas do Mestrado, de uma base matemática mais sólida proporcionou a coragem de escrever sobre algo que, após diversas pesquisas, nunca vi publicado. Outra dificuldade deixada em segundo plano para trazer a público algo que percebi, por mais elementar que seja, quando iniciava a profissão e que vem me ajudando a resolver problemas que podem ser modelados através de uma Média Ponderada, de uma forma rápida e eficiente. Minimizando processos e tempo. Valorizando, entre outros aspectos, o cálculo mental, tão importante para um melhor exercício da cidadania. Nem sempre é possível pegar um papel e uma caneta para fazer as contas.

A meta é apresentar como os pesos associados aos valores de uma distribuição influenciam no posicionamento da média entre esses valores, além das boas e reais aplicações desse resultado na Matemática e em outras Áreas. É comum escutar: “Quanto maior o peso de um valor, mais a média se aproxima dele”. Mas, fica a pergunta: se aproxima como? Será que têm alguma lógica? Muitos já sabem como, mas poucos utilizam o resultado em seu favor, preferindo realizar os cálculos algébricos convencionais. A formalização deste estudo pode, portanto, contribuir para utilização consciente e eficaz dos resultados que serão apresentados, detalhadamente em 5 (cinco) capítulos.

No capítulo 1, discutiremos o conceito de Razão e de Proporcionalidade, ferramentas essenciais para um melhor entendimento dos resultados principais deste trabalho. A tentativa é de maximizar as aplicações do conceito, através de um entendimento adequado e que valorize não apenas as definições, mas sim as principais interpretações envolvidas, que proporcionam as mais diversas e relevantes aplicações. Um bom “pensamento proporcional” pode contribuir para uma menor “algebrização”, favorecendo um fortalecimento da capacidade aritmética e a otimização do tempo de resolução de problemas. Vale lembrar que o tempo é fator de extrema importância na principal avaliação nacional do Ensino Médio, a prova do Novo Enem. Quanto mais se entende, menos se escreve e mais se economiza tempo.

No Capítulo 2, apresentaremos o conceito geral de Média e enfatizaremos a abordagem na Média Aritmética Ponderada. Toda a formalização matemática necessária será construída e destacada, a fim de dar a sustentação adequada ao tema principal do trabalho. Começaremos mostrando como a média entre dois valores reais se posiciona entre eles e discutindo alguns problemas bem simples, buscando o entendimento da influência dos pesos em tal posicionamento para posterior aplicação em situações relevantes da Matemática e de outras Áreas. Apesar das maiores aplicações serem para o caso de dois valores, estenderemos o estudo para o caso de n valores.

Depois dos aspectos teóricos e formais desenvolvidos, nos demais capítulos, a partir do entendimento da influência dos pesos no posicionamento da média, será enfocado as aplicações da Média Ponderada na Matemática, nas outras Ciências e no Cotidiano. Abriremos espaço para discussão de diversas questões de vestibular que versam sobre essa média, na tentativa de otimizar o tempo de resolução. Faremos, ainda, uma ponte entre as ideia apresentadas e o jogo de equilibrar pesos do software Gangorra Interativa, uma boa alternativa à experimentação inicial tanto quanto a consolidação do tema apresentado.

No mais, esperamos que o trabalho venha a contribuir trazendo significado a conceitos simples que nem sempre são bem desenvolvidos e enfatizados, sendo uma alternativa viável para resolução de problemas e entendimento de situações das mais diversas esferas.

1. O CONCEITO DE RAZÃO E DE PROPORCIONALIDADE

Já no Ensino Fundamental, são discutidos os conceitos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Este tema de extrema importância não pode ser bem compreendido e assimilado sem o entendimento adequado de razões e proporções. A preocupação, nesse momento, não é a de definir razão. Mas sim, de trazer significados reais e clareza quanto às suas aplicações. Ao perguntar a vários alunos o que é razão entre dois números (ou grandezas) "a" e "b", a maioria define de forma taxativa:

A razão entre dois números(ou grandezas) "a" e "b" é dada pelo quociente $\frac{a}{b}$.

A questão é que a pergunta recorrente: E para que serve? Normalmente fica sem resposta ou são dadas respostas que não evidenciam a maior capacidade do conceito. Isso pode ser um indício do tratamento descontextualizado do tópico, com ênfase na definição de razão e, posterior, aplicação em exercícios cujo objetivo é calcular a razão e não refletir o grande significado da ferramenta.

Sobre o indício de um tratamento descontextualizado do tema, para Carraher, Carraher e Schliemann (1986),

> *É possível que a educação matemática atual esteja desenvolvendo nos estudantes uma definição da situação de resolução de problemas que não os estimule a refletir sobre o significado dos problemas, mas apenas a tentar descobrir a operação correta. Se considerarmos a prática atual de ensino através de instrução sobre modelo matemático, seguida de uma série de exercícios em que deve ser aplicado, devemos reconhecer que essa prática pode, de fato, conduzir ao não aproveitamento das habilidades lógico-matemáticas dos alunos. Não é habitual a apresentação de problemas aos alunos em que se propõe que eles descubram uma forma de solução; ao contrário, o habitual é a apresentação de problemas para que os alunos apliquem um algoritmo que acabaram de aprender ou, ao final do semestre ou ano, nas avaliações, a apresentação de problemas para que os alunos apliquem, dentre os modelos ensinados no período, aquele que for apropriado à solução. (p. 598)*

Vale lembrar que o principal objetivo do ensino de Matemática não é fazer com que os alunos reproduzam modelos ou utilizem ferramentas de forma mecânica. Mas sim que os alunos, bem estimulados, possam refletir sobre o significado dos principais tópicos, desenvolvendo a autonomia em seus processos cognitivos.

Polya (1985) ressalta que:

> *A Matemática não é um esporte para espectadores: não pode ser apreciada e aprendida sem participação ativa, de modo que o principio da aprendizagem ativa é particularmente importante para nós, matemáticos professores, tanto mais se tivermos como objetivo principal, ou como um dos objetivos mais importantes, ensinar as crianças a pensar. (p. 13)*

De forma mais direta e enfática, a percepção de Polya apresentada, é ratificada em Spinillo (apud MARTINS, 2007):

> *os educadores precisam desenvolver uma compreensão conceitual da proporção, evitando a visão simplista e errônea de que esse conceito consiste num tópico ou "matéria" do currículo da matemática que precisa ser "passado" para o aluno, onde o ensino de algoritmos (como a regra de três, por exemplo) é o cerne do processo de aprendizagem. As operações envolvidas na solução da regra de três (multiplicação e divisão) são consideradas muito simples pelos professores, o que lhes dá a impressão de que o tópico pode ser ensinado rapidamente. A regra de três acaba sendo ensinada apenas como um algoritmo que é uma forma conveniente de se organizar os dados de um problema. Muitas vezes o professor acaba não valorizando a riqueza e importância desse conteúdo, que se torna para o aluno a decoreba mecanizada de como organizar e calcular tal algoritmo. Embora os cálculos envolvidos na solução da regra de três sejam bastante simples, ela consiste num modelo matemático completo, que provavelmente não é compreendido suficientemente através do ensino que vem sendo tradicionalmente feito. (p. 20)*

A critica apresentada à forma como se trabalham as proporções e regras de três cabe perfeitamente, de forma equivalente, à forma como se trabalha o conceito de razão. Este tópico não é simples, apenas a sua representação, mas o lidar com razões é com certeza bastante difícil para o aluno. As grandezas razão como densidade, velocidade são todas de alta dificuldade para a criança. Juntar dois líquidos de densidades diferentes e saber a densidade final é uma tarefa bastante difícil, pois lida com grandezas intensivas. Diante das dificuldades apresentadas, o conceito desta ferramenta, seu entendimento e sua aplicação, não pode ficar em segundo plano em troca de uma forma evidente de organizar dados de forma precisa, através da linguagem matemática.

O conceito de razão é importante para decodificar textos para a linguagem matemática e organizar dados, mas traz como um dos significados mais importantes a noção de comparação de números e/ou grandezas. Significado pouco abordado quando se leciona o tema nas séries iniciais. Tomar a razão entre dois números e/ou grandezas é, em essência, relacioná-los, compará-los. O grande poder da razão é que ela não está preocupada com valores absolutos, mas sim com os valores relativos. Não importa, a priori, saber quanto se tem de um e quanto se tem do outro. Esse objetivo é secundário. O principal objetivo é que o aluno possa compreender quanto um é maior que o outro ou entender que para tantas unidades do primeiro, é necessário ter tantas unidades do segundo. Os valores absolutos tornam-se secundários no desenvolvimento do conceito.

1.1. Em algumas situações clássicas da Matemática

Um bom entendimento do conceito propicia resolver problemas clássicos de forma rápida e eficiente. Tentaremos agora trabalhar o significado em algumas situações matemáticas bastante conhecidas:

1) Considere a afirmação: A razão entre dois números “a” e “b” é de 1 para 3. É comum a imediata tradução:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$$

O que é incomum é a percepção que o grande objetivo deste dado não é informar quanto vale “a” e quanto vale “b”, ou seja, o que está em jogo não é descobrir os valores absolutos para “a” e “b”. O importante, essencial, é que, para que a igualdade seja verdadeira, podemos ter: a = 1 e b = 3; a = 2 e b = 6; a = 3 e b = 9; ou ainda a = 1,2 e b = 3,6; ou seja, “a” e “b” podem ser quaisquer valores desde que operados e simplificados adequadamente possam resultar em uma fração equivalente à fração ordinária um terço, ou melhor, que “a” e “b” sejam tais que “b” seja sempre o triplo de “a” para qualquer valor inicialmente escolhido. Nessa análise, fica evidenciado que o importante é a relação estabelecida entre as incógnitas. Dessa forma, podemos escrever, matematicamente, o que foi exposto da seguinte forma:

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{3}\therefore\frac{a}{b}=\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\frac{1,2}{3,6}=\ldots=\frac{1.x}{3.x}, \text{ para qualquer x real.}$$

Assim, fica claro a relação existente entre as incógnitas. Diante deste contexto, sugerimos as seguintes traduções:

a) “a” e “b” são quaisquer números desde que operados e simplificados adequadamente possam resultar em uma fração equivalente à fração ordinária um terço.

b) para cada 1(uma) unidade de “a”, temos o equivalente a 3(três) unidades em “b”.

c) se “a” equivale a “x” vezes 1(uma) unidade, “b” equivale as mesmas “x” vezes 3(três) unidades. Ou seja $\frac{a}{b}=\frac{1}{3}$ equivale a a = x e b = 3x. Evidenciando que para cada “a” arbitrário, “b” deve ser o triplo deste valor para respeitar a relação estabelecida.

d) para cada 4 unidades distribuídas, “a” fica com 1(uma) enquanto “b” fica com 3(três).

Em todas as traduções fica explícita a relação entre as incógnitas. A ideia de comparação. Pela escolha feita, fica fácil ler quanto um é maior que o outro. Nem sempre isso é tão evidente.

2) Considere a afirmação: A razão entre dois números “a” e “b” é de 4 para 5. É comum a imediata tradução:

$$\frac{a}{b}=\frac{4}{5}$$

Mas uma boa interpretação seria: para que a igualdade seja verdadeira, podemos ter a = 4 e b = 5; a = 8 e b = 10; a = 12 e b = 15; ou ainda a = 2 e b = 2,5; ou seja, “a” e “b” podem ser quaisquer valores desde que operados e simplificados adequadamente possam resultar em uma fração equivalente à fração ordinária quatro quintos, ou melhor, que “a” e “b” sejam tais que para cada 4 unidades de “b” tenha-se sempre 5 unidades em “a”. Ideia de Proporção. Nessa análise, fica evidenciado que o importante é a relação estabelecida entre as incógnitas. Dessa forma, podemos escrever, matematicamente, o que foi exposto da seguinte forma:

$$\frac{a}{b}=\frac{4}{5}\therefore\frac{a}{b}=\frac{4}{5}=\frac{8}{10}=\frac{12}{15}=\frac{2}{2,5}=...=\frac{4.x}{5.x}$$, para qualquer x real.

Assim, fica claro a relação existente entre as incógnitas e a partir desta sugerimos as seguintes interpretações:

a) “a” e “b” são quaisquer números desde que operados e simplificados adequadamente possam resultar em uma fração equivalente à fração ordinária quatro quintos.

b) para cada 4(quatro) unidades de “a”, temos o equivalente a 5(cinco) unidades em “b”.

c) se “a” equivale a “x” vezes 4(quatro) unidades, “b” equivale as mesmas “x” vezes 5(unidades) unidades. Ou seja $\frac{a}{b}=\frac{4}{5}$ equivale a a = 4x e b = 5x. Evidenciando que para cada “x” arbitrário, “a” e “b” respeitam a relação estabelecida.

d) para cada 9 unidades distribuídas, “a” fica com 4(quatro) enquanto “b” fica com 5(cinco).

Em todas as traduções fica explícita a relação entre as incógnitas. A noção de comparação. Pela escolha feita, não fica fácil ler quanto um é maior que o outro. Mas a relação de proporcionalidade continua evidenciada.

3) Considere agora o seguinte problema clássico: Em uma sala de aula, a razão entre o número de moças e rapazes é de 4 para 3. Se o total de alunos é igual a 98, quantas são as moças?

O objetivo aqui é apresentar algumas formas de resolução que podem evidenciar como tema é trabalhado. Evoluiremos de uma simples decodificação dos dados para a linguagem matemática, seguido de uma resolução metódica e pouco reflexiva para uma resolução que utilize apenas as operações de multiplicação e divisão a partir de uma compreensão mais significativa das informações com ênfase no conceito de razão. Seguem as formas:

a) esta forma foi apresentada por uma aluna concluinte do Ensino Médio:

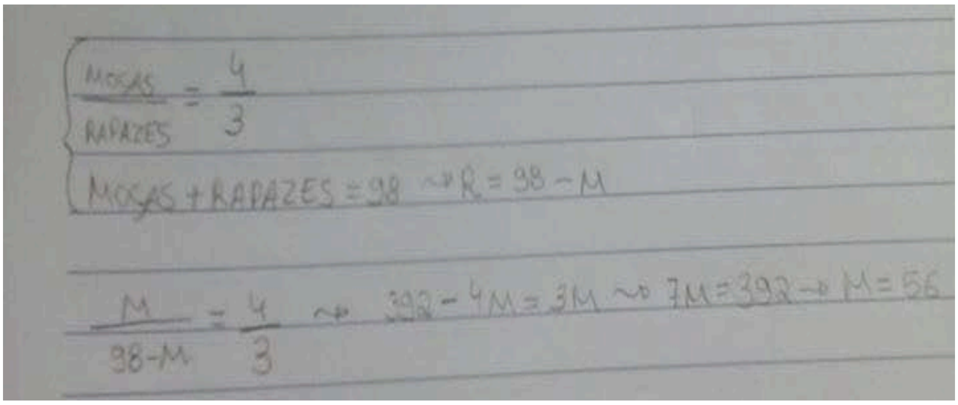


Figura 1 – Resolução de uma aluna.

A resolução apesar de correta, utiliza passos que poderiam ser descartados em favor de uma resolução mais imediata, dada a simplicidade do problema.

b) esta forma faz uso de uma visão apresentada anteriormente:

Considere M e R, respectivamente, o número de moças e rapazes na turma. Temos que:

$$\frac{M}{R}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow M = 4 \cdot x \text{ e } R = 3 \cdot x$$

Assim, como $M + R = 98$, temos:

$$4x + 3x = 98$$

$7.x = 98$ equivale a $x = 14$ e, portanto, $M = 56$.

Apesar de, a quantidade de passos ser praticamente a mesma da resolução anterior, essa quantidade poderia ser abreviada para $7x = 98 \Rightarrow x = 14 \Rightarrow M = 56$, a partir da análise adequada das informações presentes no texto.

c) esta maneira interpreta a razão de uma forma bem qualitativa:

A razão entre Moças e Rapazes equivale a $\frac{M}{R} = \frac{4}{3}$.

Este dado pode ser entendido como:

A cada 4 moças, temos 3 rapazes.

Ou seja, a cada 7 alunos, 4 são moças.

O que aponta para uma regra de três simples e direta dada a equivalência:

Alunos	*Moças*
7	3
98	m

Resolvendo, teríamos m = 56.

d) esta forma interpreta muito bem o dado em forma de razão, apontando para uma resolução simplesmente aritmética (que podia ser feita apenas com cálculo mental), a partir da interpretação que remete ao conceito e não apenas à definição de razão. Segue a resolução apresentada um aluno concluinte do Ensino Médio.

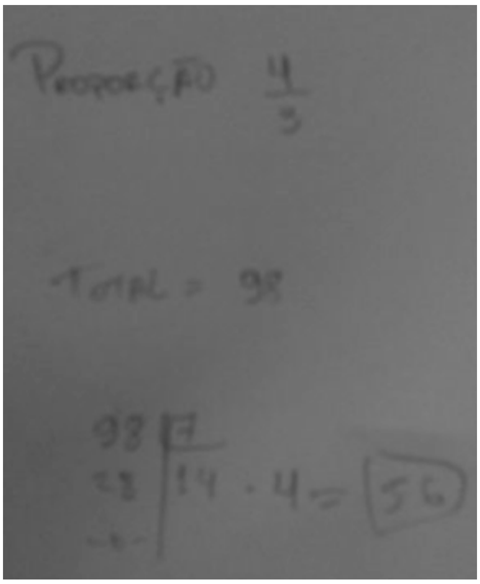


Figura 2 – Resolução de um aluno.

Fica explícito que o aluno interpretou corretamente, em seu favor, a razão fornecida, admitindo determinada proporção entre moças e rapazes. Apesar de não explicitar, ele percebeu que para cada grupo de 7 pessoas, 4 dessas eram moças. Dessa forma, dividiu 98 por 7 para ver quantos grupos de 7 pessoas haviam. Encontrou como resultado 14 e multiplicou esse valor por 4, já que cada grupo possui 4 moças.

Esta resolução, se aprimorada, a padrões formais é equivalente a:

A razão entre Moças e Rapazes equivale a $\frac{M}{R} = \frac{4}{3}$.

Isso pode ser entendido como:

A cada 7 alunos, 4 são moças.

Ou ainda, de forma mais objetiva,

$$M = \frac{4}{7} \cdot (ToTAL) \therefore M = \frac{4}{7} \cdot (98) \therefore M = 56$$

Assim para achar o número de moças basta dividir o total por 7 e depois multiplicar por 4.

Podemos observer que as últimas resoluções deixam claro um bom entendimento do conceito e o desenvolvimento de um “pensamento proporcional”, propiciam uma resolução, a partir de um cálculo mental, utilizando apenas os operadores de multiplicação e divisão. O objetivo não é abolir os processos algébricos, mas sim utilizá-los quando eles são mais eficientes e/ou necessários. Quando um simples pensamento aritmético é incapaz de chegar ao resultado do problema.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1998), o desenvolvimento do raciocínio proporcional é um dos objetivos do ensino da matemática. Também neste mesmo documento, a proporcionalidade é apontada como um conceito matemático fundamental, um princípio geral do conhecimento matemático, que deve ser desenvolvido articulado com múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando possibilitar ao aluno a compreensão ampla deste saber.

Pudemos observar que uma boa abordagem deste tema tão simples, pode trazer significados, que transcendem uma mera decodificação de linguagens e pode, ainda, desenvolver o raciocínio proporcional, que é de extrema importância, como apontou anteriormente o PCN (1998). Como em muitas situações, as variações são dadas de forma proporcional, uma compreensão ampla do tema é sinônimo de vantagem.

1.2. Em situações contextualizadas da Matemática e da Química

Apresentaremos agora uma série de exemplos dos mais diversos vestibulares em que a concepção de razão e proporcionalidade estão inseridas. Seguem os exemplos:

1) [Matemática] Misturando suco concentrado líquido e água na proporção de uma parte de suco para três de água, fizemos 24 litros de refresco. Se tivéssemos misturado a mesma quantidade de suco concentrado, na proporção de duas partes de suco para cinco de água, quantos litros de refresco teríamos conseguido fazer?

Resolução.

Inicialmente:

O fato de que foi feito 24 litros de refresco

misturando uma parte de suco (S) para três de água (A)

pode ser entendido como $\frac{S}{A} = \frac{1}{3}$.

Assim, para cada 4 unidades de refresco (R), temos uma unidade de suco.

Ou seja, $S = \frac{1}{4} \cdot R \Leftrightarrow S = \frac{1}{4} \cdot 24 \Leftrightarrow S = 6$

Posteriormente:

Misturando a mesma quantidade de Suco (S = 6),

na proporção de duas partes de suco(S) para cinco de água(A),

poderia ser traduzida como $\frac{S}{A} = \frac{2}{5}$.

Assim, para cada 7 unidades de refresco (R), temos duas unidades de suco.

Ou seja, $S = \frac{2}{7} \cdot R \Leftrightarrow 6 = \frac{2}{7} \cdot R \Leftrightarrow R = 21$.

Importante observar que ao informar a relação entre os componentes da mistura, fica implícito a relação de cada componente com o total. Facilitando assim a resolução do problema. Caberia a seguinte interpretação do problema:

Inicialmente, uma parte de suco para 3 partes de água implica que 4 partes equivalem a 24 litros de refresco e, portanto, cada parte equivale a 6 litros. Daí, 6 litros de suco foram misturados. Posteriormente, esses mesmos 6 litros de suco serão misturados na proporção de 2 partes de suco para 5 partes de água, implicando em 7 partes de refresco.
Como as 2 partes de suco equivalem a 6 litros, cada parte equivale a 3 litros.
E, assim, as 7 partes de refresco equivalem a 21 litros.

Esse raciocínio explicitado, embasado no bom conhecimento dos conceitos associados, permite o aluno resolver o problema a partir do uso exclusivo de um cálculo mental apurado. Tudo que foi escrito poderia ter sido feito "na cabeça" até obtenção do resultado final.

2) [Matemática] Segue uma questão do Novo Enem, em que aparece a noção de escala:

(Enem 2011) Para uma atividade realizada no laboratório de Matemática, um aluno precisa construir uma maquete da quadra de esportes da escola que tem 28 m de comprimento por 12 m de largura. A maquete deverá ser construída na escala de 1 : 250. Que medidas de comprimento e largura, em cm, o aluno utilizará na construção da maquete?
a) 4,8 e 11,2
b) 7,0 e 3,0
c) 11,2 e 4,8
d) 28,0 e 12,0
e) 30,0 e 70,0

Resolução.

A resolução desta questão passa pelo entendimento de uma importante razão, a escala.
Sendo a escala(E) uma razão entre as medidas do desenho(d) e as reais(r), temos que:

$$E = \frac{d}{r}.$$

Assim informar que $E = 1:250 = \frac{1}{250}$*, pode ser traduzido que a cada unidade no desenho,*

temos 250 unidades no real.

Ficando explicito que as medidas reais são 250 vezes maiores que as medidas do desenho.

Ou seja, dadas as medidas no desenho, multiplicamos por 250 para obter as medidas reais

e, no caso contrário,

dadas as medidas reais, dividiremos por 250 para obter as medidas no desenho.

Como foi dado as medidas reais, para obter as medidas no desenho, basta:

28 : 250 = 0,112 m = 11,2 cm

12 : 250 = 9,048 m = 4,8 cm.

Mais um exemplo em que o bom entendimento do conceito, pode acarretar uma resolução eficaz, através de operações de multiplicação e/ou divisão. A maioria dos alunos acabam armando equações ou regras de três para resolver o problema, a partir da mera decodificação das informações.

3) [Química] O gás carbônico é uma substância formada de carbono e oxigênio na proporção 3:8 em peso. Qual o peso do oxigênio contido numa quantidade de gás carbônico igual a 132 g ?

Resolução.

Interpretando adequadamente a razão apresentada no enunciado, temos que:

A cada 3g de carbono, tem-se 8g de oxigênio.

Logo, a cada 11g de gás carbônico temos 8g de oxigênio.

Daí o total de oxigênio em 132g de gás carbônico dado por:

$$O = \frac{8}{11} \cdot 132g \therefore O = 96g\ .$$

4) [Química] Segue um exemplo de uma questão do Novo Enem, em que aparece a noção matemática de razão em importantes conceitos químicos:

(Enem 2010)Ao colocar um pouco de açúcar na água e mexer até a obtenção de uma só fase, prepara-se uma solução. O mesmo acontece ao se adicionar um pouquinho de sal à água e misturar bem. Uma substância capaz de dissolver o soluto é denominada solvente; por exemplo, a água é um solvente para o açúcar, para o sal e para várias outras substâncias. A figura a seguir ilustra essa citação.

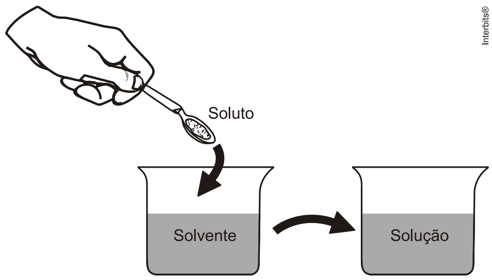


Figura 3 – Imagem da Questão.

Suponha que uma pessoa, para adoçar seu cafezinho, tenha utilizado 3,42g de sacarose (massa molar igual a 342 g/mol) para uma xícara de 50 mℓ do líquido. Qual é a concentração final, em mol/ℓ, de sacarose nesse cafezinho?

a) 0,02

b) 0,2

c) 2

d) 200

e) 2000

Resolução.

Fazendo uma interpretação matemática dos dados da questão,

foi apresentada a massa molar (MM) da Sacarose,

razão que expressa quantos gramas de estão presentes em 1 mol de Sacarose.

Assim: $MM = \frac{g}{mol} = \frac{342}{1}$. *Essa razão é equivalente a:*

$$MM = \frac{g}{mol} = \frac{342}{1} = \frac{34,2}{0,1} = \frac{3,42}{0,01}.$$

Ou seja, 3,42g de Sacarose utilizados equivalem a 0,01mol.

Como essa quantidade será dissolvida em 50ml ou 0,05l,

temos que a concentração em mol/l, solicitada é de:

$$C = \frac{mol}{l} = \frac{0,01}{0,05} = \frac{1}{5} = \frac{0,2}{1}$$

Portanto, a cada 1l, temos 0,2 mol. Logo a concentração é de 0,2mol/l.

Observa-se que a modificação da representação, mantendo a mesma razão, facilitou a resolução da questão, uma vez que os dados fornecidos poderiam ser ajustados de forma aritmética simples. Um bom leitor, interpretador dos dados, poderia resolver essa questão facilmente através do cálculo mental, respeitando as condições impostas pelas razões.

1.3. Grandezas Diretamente e Inversamente Proporcionais

Como uma das mais importantes aplicações dos conceitos de razão e de proporcionalidade, apresentaremos as definições de Grandezas Diretamente Proporcionais e de Grandezas Inversamente Proporcionais.

Vale ressaltar que este tópico muitas vezes é explicado em segundo plano, quando o professor explica os métodos de resolução das regras de três simples: direta e inversa. Proporcionando assim, erros conceituais gravíssimos. A maioria dos alunos acredita que quando uma grandeza aumenta e a outra também, estamos diante de grandezas diretamente proporcionais. Da mesma forma, quando uma aumenta e outra diminui, estamos de frente de grandezas inversamente proporcionais. Não existe preocupação, por parte da maioria, em investigar o tipo de variação, ou de comprovar a proporcionalidade direta ou inversa.

Ao explicar esse tópico, ao resolver questões convencionais de regra de três, assume-se, mesmo que de forma inconsciente, que existe proporcionalidade e, para diferenciar, se esta é direta ou inversa, basta fazer a seguinte pergunta: Quanto maior um grandeza, maior ou menor fica a outra? A depender da resposta, define-se o tipo de proporcionalidade.

De acordo com os PCN:

> *Para compreensão da proporcionalidade é preciso também explorar situações em que as relações não sejam proporcionais − contra-exemplos. O aluno poderá desenvolver essa noção ao analisar a natureza da interdependência de duas grandezas em situações-problema em que elas sejam diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não-proporcionais. (BRASIL, 1998, p 84-85)*

Comentando sobre o prejuízo causado neste tipo de abordagem, explicitamos o fato de o conceito de razão ser deixado em segundo plano, em favorecimento da aplicação de modelos práticos. Desta forma, os alunos aprendem erradamente o que significa duas grandezas serem diretamente ou inversamente proporcionais. Assume-se uma consequência da definição, como a própria definição. Por exemplo, nas grandezas diretamente proporcionais, o fato de uma aumentar e a outra também não é a definição e sim uma consequência dela.

O aprendizado de forma errada, colabora com os seguintes tipos de erro apresentados:

1) Imagine a seguinte situação: Numa corrida de táxi, paga-se R$ 5,00 pela bandeirada e mais R$ 3,00 por km rodado. Variando o preço em função do número de quilômetros, produz-se a seguinte tabela:

km	**Preço(R$)**
0	5
1	8
2	11
3	14
4	17
...	...

Tabela 1 – Variação de Grandezas

Observando os valores apresentados, podemos concluir que as grandezas são diretamente proporcionais?

Neste caso, a maioria alunos responde sim. E não levam em consideração que, apesar da dependência entre o número de quilômetros e o preço existir e fazer que o aumento de uma variável produza aumento na outra, a relação de dependência não é de proporcionalidade.

2) Se um zelador gasta 3h para limpar um salão circular de 2m de raio, quanto tempo levaria para limpar um outro salão de 4m de raio?

Muitos cometem o erro de afirmar que o tempo é de 6h, já que o raio dobrou, fazendo com que o tempo também dobre. Tal raciocínio está embasado no fato de se achar que quando uma grandeza aumenta e a outra também, temos um caso de proporcionalidade direta.

É fácil ver que o tempo aqui não é proporcional ao raio, mas sim ao tamanho do salão que pode ser quantificado pela área.

Justificada a necessidade de apresentação adequada das definições de proporcionalidade direta e inversa, a fim de um melhor entendimento e, consequente, minimização de erros. Seguem as definições, transcristas de Ávila (1986):

i) Definição 1: Diz-se que duas variáveis (ou grandezas) x e y são proporcionais, mais especificamente, diretamente proporcionais se estiverem assim relacionadas: $y = k.x$ ou $y/x = k$, onde k é uma constante positiva, chamada constante de proporcionalidade.

ii) Definição 2: Diz-se que as variáveis (ou grandezas) x e y são inversamente proporcionais se $x.y = k$, onde k é uma constante positiva (constante de proporcionalidade).

Interpretando as definições, temos:

a) No caso da definição 1, para que a razão se preserve constante, se o valor de uma grandeza for multiplicada por um fato “p”, o valor correspondente da outra grandeza também terá que ser multiplicado pelo mesmo fator “p”. E dessa forma, como consequência, caso uma aumente, a outra também irá aumentar.

b) No caso da definição 2, para que o produto se preserve contante, se o valor de uma grandeza for multiplicada por um fator “p”, o valor correspondente da outra grandeza terá que ser dividida pelo mesmo fator “p”. E dessa forma, como consequência, caso uma aumente, a outra irá diminuir.

Ainda sobre as definições apresentadas, podemos fazer as seguintes apreciações:

a) No caso da definição 1, sejam x_1 e x_2 dos valores tais que $\frac{x_1}{x_2} = \frac{a}{b}$, temos que, se y_1 e y_2 são os valores correspondentes a x_1 e x_2, respectivamente, $\frac{y_1}{y_2} = \frac{a}{b}$.

b) No caso da definição 2, sejam x_1 e x_2 dos valores tais que $\frac{x_1}{x_2} = \frac{a}{b}$, temos que, se y_1 e y_2 são os valores correspondentes a x_1 e x_2, respectivamente, $\frac{y_1}{y_2} = \frac{b}{a}$. Ou seja, sejam x e y grandezas inversamente proporcionais, se dois valores de "x" estiverem na proporção de "a" para "b", então os valores correspondentes de "y" estarão na proporção de "b" para "a".

Devido à trivialidade do que foi apresentado, as interpretações não serão justificadas. Nos limitaremos a apresentar situações em que elas podem ser utilizadas. Seguem as situações:

1) Força(F) e Aceleração(a) são Grandezas Diretamente Proporcionais, caso a massa(m) seja considerada constante. Pois, da Física, já se sabe que: F = m.a, ou seja, $\frac{F}{a} = m(constante)$. Verificando um determinado caso, para m = 5kg, produzimos a seguinte tabela:

Força (em N)	**Aceleração(m/s^2)**
5	1
10	2
15	3
20	4
25	5
...	...

Tabela 2 – Grandezas Diretamente Proporcionais.

De fato, são grandezas diretamente proporcionais, pois: $\frac{F}{a} = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = \frac{20}{4} = \frac{25}{5} = ... = 5$.

Enfatizando as diversas análises, temos que:

a) Quando “F” varia de 5 para 10 (é multiplicado por 2), “a” varia de 1 para 2 (é também multiplicado por 2).

b) Quando “F” varia 50% (de 10 para 15), “a”também varia de 50% (de 2 para 3).

c) A razão entre o segundo e quinto valor de “F” é igual a $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$. Exatamente a razão entre o segundo e o quinto valor de “a”.

1) Velocidade Média(V) e tempo(t) são Grandezas Inversamente Proporcionais, caso a distância(d) seja considerada constante. Pois, da Física, já se sabe que: $V = \frac{d}{t}$, ou seja, V.t = d(constante). Verificando um determinado caso, para m = 60m, produzimos a seguinte tabela:

Velocidade (em m/s)	**Tempo(s)**
2	30
3	20
4	15
5	12
6	10
...	...

Tabela 3 – Grandezas Inversamente Proporcionais.

De fato, são grandezas inversamente proporcionais, pois:

$$V \cdot t = 2.30 = 3.20 = 4.15 = 5.12 = 6.10 = ... = 60.$$

Enfatizando as possíveis traduções, temos que:

a) Quando “V” varia de 2 para 4 (é multiplicado por 2), “t” varia de 30 para 15 (é dividido por 2).

b) Quando “V” varia 50%, ou seja, é multiplicado por 1,50 (de 2 para 3), “t” é dividido por 1,50 (de 30 para 20). Vale lembra aqui que a operação inversa de aumentar 50%, não é diminuir 50%.

c) A razão entre o segundo e quarto valor de “V” é igual a $\frac{3}{5}$. Exatamente a razão inversa entre o segundo e o quarto valor de “t” que é $\frac{20}{12} = \frac{5}{3}$.

Essa abordagem, traz significados concretos sobre o raciocínio proporcional e como ele pode ser utilizado, no caso de Grandezas Diretamente e Inversamente Proporcionais e será, juntamente com o conceito de razão bem desenvolvido, base de sustentação para o tema principal do trabalho que é a influência dos pesos no posicionamento da Média Aritmética Ponderada. Além de prevenir possíveis erros conceituais que os alunos poderiam cometer na Matemática e em outras áreas, como a Física e a Química, devido a abordagem inconsistente, por vezes empregada, por seus professores e que estão presentes também nos livros didáticos.

2. MÉDIA ARITMÉTICA

Segundo Pollatsek, Lima e Well (1981), a média aritmética não é só o conceito mais básico da Estatística e da ciência experimental, é também o mais utilizado na vida cotidiana das pessoas. Em geral, ao fazermos inferências tanto no campo acadêmico como na vida cotidiana, utilizamos a média ou a comparação entre médias.

Pesquisa feita por Strauss e Bichler (1988) mostrou que os alunos têm um domínio satisfatório quando se trata de utilizar o algoritmo da média, porém revelam as dificuldades de compreensão em relação aos diferentes aspectos que emergem do conceito de média.

Isso pode se dever ao fato de que a média aritmética, assim como outras ideias da Matemática, são tratadas com ênfase na parte procedimental, em detrimento ao entendimento de seus significados e propriedades importantes.

Vamos destacar aqui duas concepções importantes da média aritmética. A primeira se refere a divisão igualitária, em que o valor da média aritmética representa um conjunto de dados como se todos os valores fossem iguais. Neste caso, evidenciamos uma forte ligação com o procedimento de cálculo em que somam-se todos os valores (normalmente distintos) e divide-se pelo número total de valores. Já a segunda, entende a média aritmética como um ponto de equilíbrio. Posicionando todos os valores em uma reta orientada, com seus respectivos pesos, a média aritmética corresponderia ao ponto que equilibraria todos os valores em torno dela.

Van de Walle (2000) indica que, para se entender a primeira concepção de média, se inicie com um gráfico de barras onde as barras com diferentes comprimentos se transformem em barras com o mesmo comprimento, havendo uma compensação, ou seja, retira-se de umas para colocar em outras.

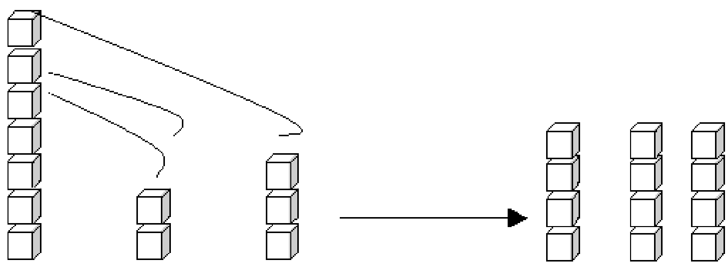


Figura 4 – Média Aritmética.

Fica claro que encontrar a média é encontrar um número de cubinhos que substitua os números de cubinhos iniciais, preservando o total de cubinhos. De forma genérica, para retirar a média entre vários valores reais, bastaria encontrar um número que substituísse todos os valores iniciais, mas preservando a soma inicial de todos os valores.

A média aritmética é, portanto, uma medida que "resume e representa um conjunto de dados em um único valor". (CARZOLA e SANTNA, 2006, p.18)

Essa primeira noção será utilizada na definição formal de média aritmética que será apresentada. Adiante, daremos uma maior ênfase à segunda, quando estudaremos a influência dos pesos no posicionamento da média aritmética ponderada.

2.1. Definição de Média Aritmética

Após apresentar algumas compreensões intuitivas de média, traremos agora uma possível definição formal de média aritmética, baseada na primeira percepção apresentada. Segue a definição:

Seja a sequência finita de "n" números reais ($a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n$), define-se, como média aritmética de todos os termos da sequência, o número real M, tal que:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n = \underbrace{M + M + M + M + M + \ldots + M}_{n \quad vezes}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n = n \cdot M$$

$$\Leftrightarrow$$

$$M = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n}{n}$$

A última igualdade é a mais utilizada, mas, dada a equivalência, utilizaremos qualquer uma delas a depender da conveniência. Dada a definição acima, podemos verificar a seguinte propriedade:

$$\min\{a_i\} \le M \le \max\{a_i\} \quad , \quad 1 \le i \le n$$

Segue a demonstração:

Sem perda de generalidade, considere $\min\{a_i\} = a_1$ e $\max\{a_i\} = a_n$. Assim, temos:

$$\underbrace{a_1 + a_1 + a_1 + \ldots + a_1}_{n \quad vezes} \quad \le \quad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \quad \le \quad \underbrace{a_n + a_n + a_n + \ldots + a_n}_{n \quad vezes}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$n \cdot a_1 \le a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \le n \cdot a_n \,.$$

Como $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n = n \cdot M$, temos que:

$$n \cdot a_1 \le n \cdot M \le n \cdot a_n \,.$$

Dividindo todos os membros por n:

$$a_1 \le M \le a_n \;\Leftrightarrow\; \min\{a_i\} \le M \le \max\{a_i\} \quad , \quad 1 \le i \le n \quad .$$

Essa propriedade nos leva a crer que a média aritmética pode ser entendida como valor intermediário entre dois extremos, sendo essa média igual aos extremos quando os extremos forem iguais. Ao estudar adiante a influência dos pesos no posicionamento da média aritmética ponderada, estaremos constatemente retomando essa propriedade.

Vale ressaltar que a existência de vários a_i com valores iguais, aponta para substituição desses vários a_i, por um deles associado a um peso, que representa o número de vezes que esse valor deve ser repetido. Portanto, a soma de vários a_i de mesmos valor equivale a multiplicação de um desses a_i pelo seu respectivo peso. É o que veremos no próximo item.

2.2. A Média Aritmética Ponderada (MAP)

A noção de que peso pode ser entendido como o número de vezes que determinado valor de uma sequência se repete não é única, pois esse peso não é, necessariamente, um valor discreto. Em determinados contextos, pode ser um número real associado a um certo valor. Uma possível definição de Média Aritmética Ponderada é apresentada a seguir:

Seja a sequência finita de "n" números reais, com n > 1, (a_1, a_2, a_3, ... , a_n), e p_1, p_2, p_3, ..., p_n pesos(pertencentes aos reais) associados a a_1, a_2, a_3, ... , a_n, respectivamente, com $a_1 < a_2 < a_4 < ... < a_n$, a Média Aritmética Ponderada é um número real M tal que:

$$a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + a_3 \cdot p_3 + ... + a_n \cdot p_n = M \cdot p_1 + M \cdot p_2 + M \cdot p_3 + ... + M \cdot p_n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + a_3 \cdot p_3 + ... + a_n \cdot p_n = M \cdot (p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$M = \frac{a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + a_3 \cdot p_3 + ... + a_n \cdot p_n}{(p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n)}$$

Da mesma forma, a última igualdade é a mais conhecida. Mas, dada a equivalência, utilizaremos qualquer uma delas a depender da conveniência. Foi considerado que $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq ... \neq a_n$. E, para facilitar, futuramente, o entendimento do posicionamento da média entre os valores extremos, foi admitido que estes valores estão ordenados em ordem crescente segundo seus índices.

A propriedade destacada no item anterior continua valendo, de forma equivalente, para essa definição. Como em nossa definição $a_1 < a_n$, temos que:

$$a_1 < M < a_n \text{, n > 1}$$

Assim a média aritmética ponderada também pode ser entendida como um valor intermediário entre os valores extremos.

2.3. O Posicionamento da Média Aritmética Ponderada entre dois Valores

Definidos os pré-requisitos básicos nos itens e capítulos anteriores, vamos discutir agora como a Média Aritmética Ponderada (Valor Intermediário) se posiciona entre dois valores e qual a influência dos pesos no posicionamento desta média, objetivo principal deste trabalho.

Para isso, começaremos com alguns exemplos elementares de um problema motivador. Esses exemplos foram ponto de partida para a busca de uma posterior formalização. Neles, faremos o cálculo comum da média e posicionaremos o valor encontrado entre os extremos, respeitando as distâncias a estes valores.

No que chamaremos de interpretação geométrica, estarão indicados os valores extremos, seus respectivos pesos em parênteses, o valor da média encontrada e, acima da reta, as distâncias da média aos valores extremos.

Nos comentários de cada exemplo, todas a afirmações são verdadeiras e serão formalmente provadas posteriormente.

Seguem os exemplos, baseados no seguinte problema motivador:

Numa turma a média das notas dos rapazes(m_R) é igual a 4, enquanto a média das notas moças(m_M) é igual a 8. Seja M o número de moças e R o número de rapazes, calcule a média das notas da turma se...

Antes de partimos para cada caso, interpretamos que para calcular a média das notas da turma, é necessário somar todas as notas das moças com todas as notas dos rapazes e depois dividir pela quantidade de pessoas na turma. De fato, não temos as notas reais de cada moça e de cada rapaz, mas, ao informar a média das notas das moças e a média das notas dos rapazes, podemos concluir que a soma das notas das moças é igual a (m_M) multiplicado por M e que a soma das notas dos rapazes é (m_R) multiplicado por R, já a média aritmética substitui todos os valores preservando a soma deles. Assim, a media das notas da turma, para todos os casos, é dada por:

$$M_{TURMA} = \frac{m_R \cdot R + m_M \cdot M}{R + M}$$

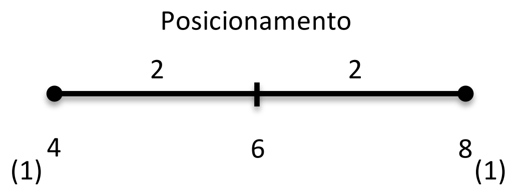
Dessa forma, fica evidente que a média da turma é média aritmética ponderada (abreviaremos para MAP em algumas situações) entre os valores (m_R) e (m_M), com pesos respectivamente iguais a R e M. Escreveremos o texto anterior, a partir desse ponto, em linguagem matemática, da seguinte forma: M_{TURMA} = MAP(m_R, m_M), com pesos R e M.

Seguem os casos:

1) M = 1 e R = 1.

$$M_{TURMA} = \frac{4 \cdot 1 + 8 \cdot 1}{1+1} = \frac{4+8}{2} = 6$$

x

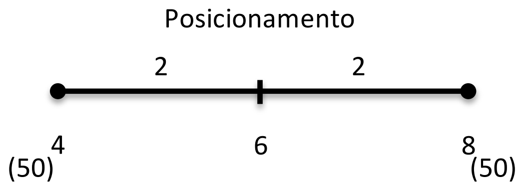


Percebemos que, ao tomar ambos os pesos iguais a 1, a média das notas da turma foi igual a média aritmética simples. E esta, se posicionou exatamente no meio entre os valores. Pesos iguais implicando em distâncias dos valores até a média iguais.

2) M = 50 e R = 50.

$$M_{TURMA} = \frac{4 \cdot 50 + 8 \cdot 50}{50+50} = \frac{4 \cdot 1 + 8 \cdot 1}{1+1} = \frac{4+8}{2} = 6$$

x

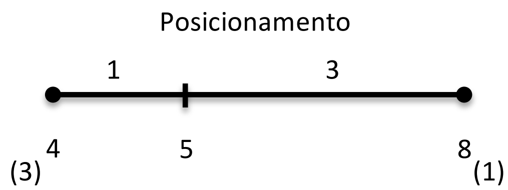


Percebemos que, ao tomar ambos os pesos iguais a 50, a média das notas da turma, também, foi igual a média aritmética simples. E esta, se posicionou, também, exatamente no meio entre os valores. Pesos iguais implicando em distâncias dos valores até a média iguais. Neste momento, começamos a conjecturar que a importância dos pesos não está em seus valores absolutos, mas sim, em seus valores relativos. O que importaria seria a razão entre eles. Para verificar que pesos iguais, proporcionam distâncias em torno da média iguais, bastaria fazer os cálculos tomando M = x e R = x.

3) M = 1 e R = 3.

$$M_{TURMA} = \frac{4 \cdot 3 + 8 \cdot 1}{3+1} = \frac{20}{4} = 5$$

x

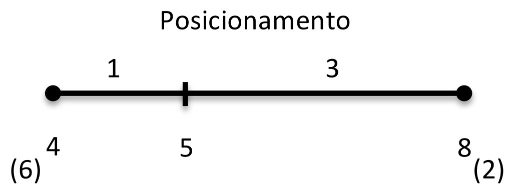


Seria natural perceber que quanto maior o peso de um determinado valor, mais a média se aproximaria dele. Mas se aproxima como? Quanto maior o peso, menor a distância. Indício de proporcionalidade inversa entre peso e distância em torno da média. Para este exemplo, verdade! Já que o produto do peso pela distância para cada valor extremo é igual. Observaremos adiante que isso vale para todos os casos. Neste caso específico, a razão entre os pesos é de 3 para 1 e a razão entre as respectivas distâncias é de 1 para 3 (Proporcionalidade Inversa).

4) M = 2 e R = 6.

$$M_{TURMA} = \frac{4 \cdot 6 + 8 \cdot 2}{6+2} = \frac{4 \cdot 3 + 8 \cdot 1}{3+1} = \frac{20}{4} = 5$$

x

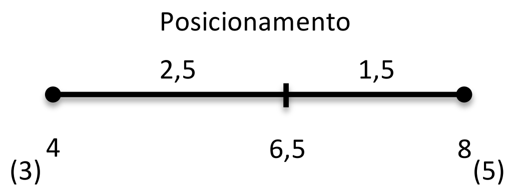


Percebemos que, comparando com o exemplo anterior, ao tomar os pesos multiplicados por 2, na mesma razão, a média das notas da turma, também, foi igual. Posicionando-se da mesma forma entre os valores extremos. O produto do peso pela distância para cada valor extremo, também, é igual. Nossa conjectura da importância dos pesos em seus valores relativos vai se confirmando. O produto do peso pela distância para cada valor extremo é, novamente, igual. Neste caso específico, a razão entre os pesos é de 6 para 2 (3 para 1) e a razão entre as respectivas distâncias é de 1 para 3 (Proporcionalidade Inversa).

5) M = 5 e R = 3.

$$M_{TURMA} = \frac{4 \cdot 3 + 8 \cdot 5}{3+5} = \frac{52}{8} = 6{,}5$$

x



Neste último exemplo, percebemos tudo o que foi assumido como verdade nos exemplos anteriores. Quanto maior o peso de um valor, mais a média se aproxima deste valor. Essa aproximação respeita o fato de o peso e distância em torno da média de cada valor serem grandezas inversamente proporcionais, já que o produto entre os valores correspondentes é constante. No caso específico, os pesos estão na razão de 3 para 5, enquanto que as distâncias estão na razão de 2,5 para 1,5 (25 para 15 ou 5 para 3).

Além disso, nas interpretações geométricas apresentadas, poderíamos destacar a média aritmética como ponto de equilíbrio. Esta passa a ser entendida como o ponto intermediário que equilibra pesos. Encontrar a média seria equivalente, na física, por exemplo, a encontrar onde posicionar o apoio para que uma barra de peso uniforme fique equilibrada na presença de dois pesos posicionados em suas extremidades.

Após essas observações iniciais e sem prova do que foi conjecturado, concentraremos esforços para mostrar os 2 resultados essenciais para o nosso estudo:

1) Pesos e distâncias em torno da média são grandezas inversamente proporcionais.
2) Os pesos podem ser simplificados, ou seja, o que importa é a razão entre eles.

Para mostrar, utilizaremos a seguinte definição de média aritmética ponderada, já mostrada, adaptada para o caso n = 2:

$$a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 = M \cdot p_1 + M \cdot p_2$$

Para demonstrar a afirmação 2, tome p um número real e divida ambos os membros por p, temos:

$$a_1 \cdot \left(\frac{p_1}{p}\right) + a_2 \cdot \left(\frac{p_2}{p}\right) = M \cdot \left(\frac{p_1}{p}\right) + M \cdot \left(\frac{p_2}{p}\right)$$

Percebemos que M fica inalterado ao dividir ambos os membros por p e podemos assumir que tanto faz tomar pesos iguais a p_1 e p_2 como tomar pesos iguais a $\left(\frac{p_1}{p}\right)$ e $\left(\frac{p_2}{p}\right)$.

Fica, portanto, provado que a simplificação dos pesos não altera a média, ou seja, o importante é a razão entre eles. Este fato, permite diminuir os cálculos aritméticos ao se calcular a média aritmética ponderada.

Para demonstrar a afirmação 2, segue os passos detalhados:

$$a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 = M \cdot p_1 + M \cdot p_2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a_2 \cdot p_2 - M \cdot p_2 = M \cdot p_1 - a_1 \cdot p_1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(a_2 - M) \cdot p_2 = (M - a_1) \cdot p_1$$

Como na definição inicial tomamos $a_1 < a_2$ e $a_1 < M < a_2$, temos que:

$a_2 - M = d_2$, distância de a_2 até a média e

$M - a_1 = d_{1,}$ distância de a_2 até a média.

E assim:

$$(a_2 - M) \cdot p_2 = (M - a_1) \cdot p_1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$d_2 \cdot p_2 = d_1 \cdot p_1$$

$$\Leftrightarrow$$

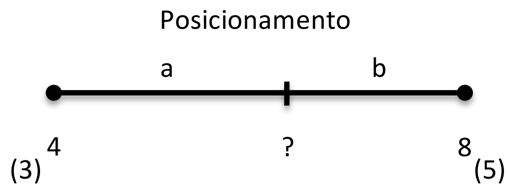
$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

Fica, portanto, provado que Pesos e Distâncias em torno da média são Grandezas Inversamente Proporcionais. Logo, se os pesos estão em determinada razão, as distâncias obedecem a razão inversa. Dessa forma, na interpretação geométrica, podemos posicionar a média dividindo a distância entre os valores extremos de maneira inversamente proporcional aos pesos.

O ganho interpretativo, na resolução das questões do assunto, ficará evidenciado no capítulo 4. Ao se entender que o problema pode ser modelado através de uma média ponderada, dada a relação entre os pesos, pode-se posicionar a média a partir da relação entre as distâncias. Ou o contrário, dada a relação entre as distâncias, pode-se inferir rapidamente a relação entre os pesos.

Para um melhor entendimento do que ficou provado, retomaremos o exemplo 5) do problema motivador, apresentando uma alternativa ao cálculo algébrico da média. Segue:

5) M = 5 e R = 3.



De acordo com a nova ideia de média apresentada, a de ponto de equilíbrio, temos que:

i) se a razão entre os pesos é de 3 para 5, a razão entre as distâncias a e b deve ser de 5 para 3, que equivale a a = 5x e b = 3x. Dessa forma, como a distância entre os extremos é igual a 4, temos 5x + 3x = 4 o que implica em x = 0,5; a = 2,5 e b = 1,5. Portanto, a média das notas da turma fica posicionada na posição 4 + 2,5 = 6,5.

ii) De uma outra forma, como a distância entre os valores extremos é igual a 4 e a razão entre as distâncias a e b ,em torno da média, é de 5 para 3, temos que $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$. Um bom entendimento dessa razão permite inferir que a cada 8 unidades distribuídas entre a e b, a recebe 5. Logo, $a=\frac{5}{8}\cdot 4$. Ou seja, a = 2,5. E, portanto, a média das notas da turma é igual a 4 + 2,5 = 6,5.

Essa modelagem permite resolver problemas de médias ponderadas de forma muito objetiva e eficiente, utilizando operações matemáticas elementares.

Em ambas as abordagens, a do cálculo formal e a da interpretação geométrica, o cálculo mental pode ser utilizado. Mas, na segunda, as operações envolvidas são mais objetivas. Além disso, a primeira forma acaba sendo, muitas vezes, um processo meramente mecânico e pouco reflexivo. A segunda maneira aponta para uma compreensão mais ampla do conceito de média e utiliza essa compreensão para tornar mais objetiva a resolução.

Apesar do nosso posicionamento em favor da objetividade da interpretação geométrica. Talvez ele seja questionável. Não esteja tão claro. Afim de defender nosso posicionamento, apresentaremos um problema equivalente ao problema motivador dos 5 exemplos, mudando os dados e a pergunta e compararemos as formas de resolução. Segue o problema:

Numa turma a média das notas dos rapazes(m_R) é igual a 4, enquanto a média das notas das moças(m_M) é igual a 8. Seja M o número de moças e R o número de rapazes, calcule a porcentagem de rapazes na turma, se...

Antes de analisar os casos detalhadamente, do entendimento do problema motivador, a média das notas da turma (M_{TURMA}) é um valor intermediário entre a média das notas dos rapazes e a média das notas das moças, influenciado pelos respectivos pesos. Em cada caso compararemos a resolução de um aluno concluinte do Ensino Médio ou professor com a nossa proposta. Seguem os casos:

1) $M_{TURMA} = 6$

Segue a resolução de uma aluna, que esta se preparando para o vestibular:

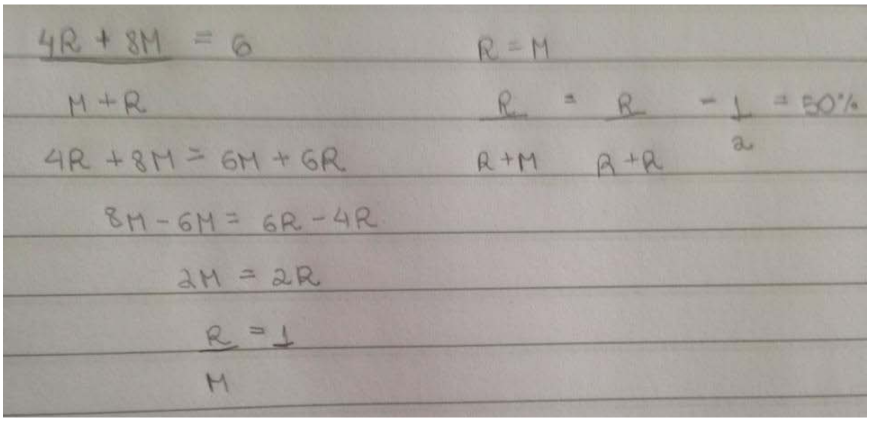


Figura 5 – Resolução de uma aluna.

A resolução, apesar de correta, aponta para utilização imediata do algoritmo que calcula a média aritmética ponderada, aparentemente de forma pouco reflexiva. Uma vez que o entendimento de média como ponto de equilíbrio permitiria inferir, sem cálculos, que o fato da média ter se posicionado exatamente no meio entre 4 e 8, garante que os pesos (quantidade de rapazes e moças, respectivamente) são iguais já que as distâncias da média aos extremos são iguais. Vale destacar ainda que a resolução é extremamente longa para um problema muito simples dada a escolha dos valores.

2) $M_{TURMA} = 5$

Segue a resolução de um professor de matemática do Ensino Médio:

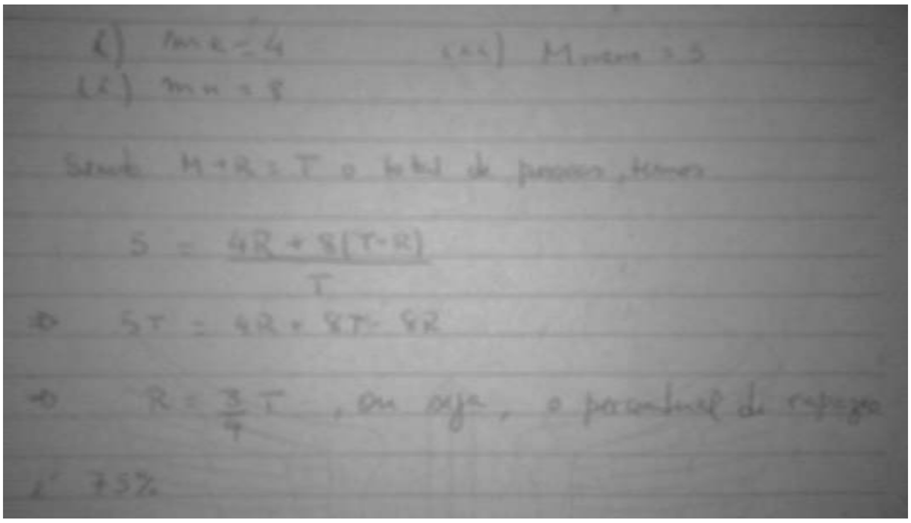


Figura 6 – Resolução de um professor.

Após o envio da resolução, por parte do professor, foi questionado se ele sempre resolvia dessa forma ou se utilizava outras alternativas. Segue a resposta:

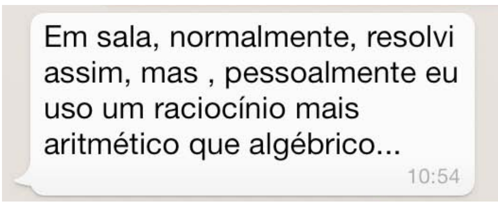
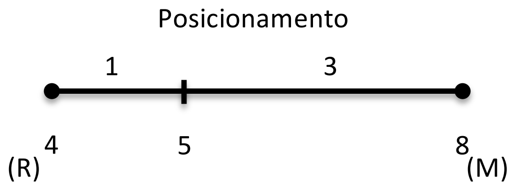


Figura 7 – Resposta do professor.

Essa resposta mostra que o professor, aparentemente, resolve a questão da forma com que os alunos estão mais acostumados. O que, a priori, facilitaria o entendimento por parte deles. Apesar de não descrever que tipo de raciocínio aritmético é utilizado por ele, provavelmente, o docente não acha importante apresentar aos alunos. A resolução correta da questão já é suficiente, apesar do número de passos envolvidos. Vale destacar que as resoluções apresentadas no primeiro caso, pela aluna, e no segundo, pelo professor são bastante semelhantes. Segue a nossa proposta:



(i)

Como as distâncias, em torno da média, estão na razão de 1 para 3,

temos que a razão entre os pesos R e M é dada por:

$$\frac{R}{M} = \frac{3}{1},$$

Assim, a cada 3 (três) rapazes, temos 1 (uma) moça.

E, portanto, os rapazes representam três quartos da turma, ou seja, 75%.

(ii)

Como os pesos se distribuem, entre R e M,

na razão inversa de como as distâncias em torno da média são distribuídas,

podemos concluir diretamente que:

$$R = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%,$$

em que o denominador "4" representa a distância total a ser distribuída e

o numerador "3" representa a distância da média ao outro extremo de peso M.

Ou seja, para calcular o peso percentual R,

basta tomar a razão entre

a distância da média ao outro extremo de peso M e a distância total.

O que se discute aqui não é a facilidade, mas sim o tamanho da resolução. Vale a pena ter um entendimento mais amplo do conceito de médias, além daquele que usa o algoritmo convencional de cálculo como principal ferramenta, a fim de abreviar os processos? Apresentaremos nos próximos capítulos diversas aplicações nas mais diversas áreas que ratificam a opinião de que vale a pena ampliar o conceito em favor de uma resolução menor. Apenas um professor, entre os 17 professores que apresentaram uma resolução, resolveu conforme nossa proposta. Segue a resolução apresentada:

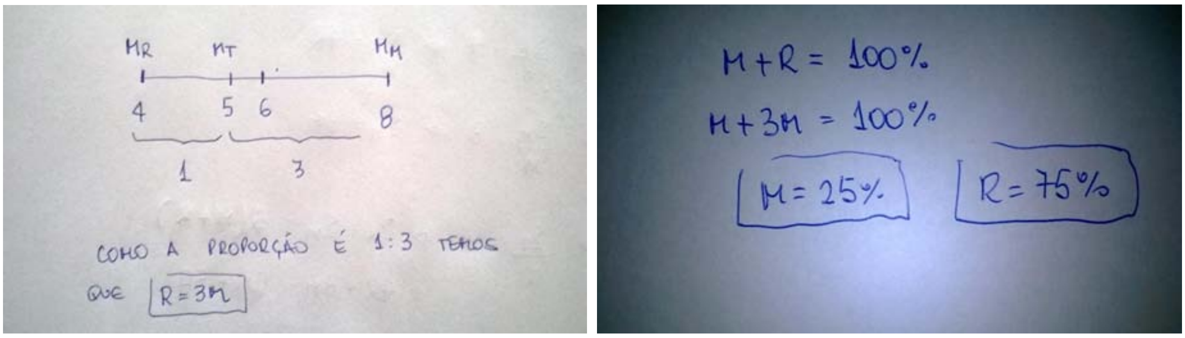


Figura 8 – Resposta do professor.

2) $M_{TURMA} = 7,5$

Segue a resolução de um aluno, que esta se preparando para o vestibular:

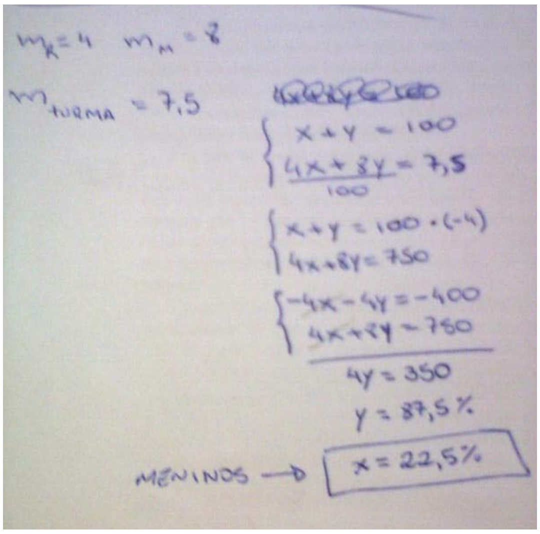
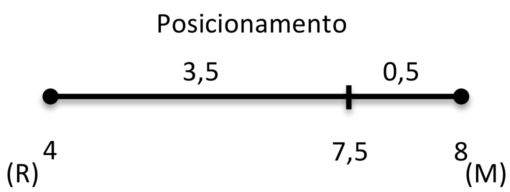


Figura 9 – Resolução do aluno.

Sem muitos comentários, resolução equivalente as outras, com a mudança de que foi estipulado um total de 100 pessoas já que o problema pede o percentual. O aluno acabou cometendo um pequeno erro ao subtrair 100 – 87,5 = 12,5. Segue nossa proposta, apenas para uma melhor fixação dos conceitos desenvolvidos:



(i)

Como as distâncias, em torno da média, estão na razão de 3,5 para 0,5;

temos que a razão entre os pesos R e M é dada por:

$$\frac{R}{M} = \frac{0,5}{3,5} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7},$$

Assim, a cada 1 (um) rapaz, temos 7 (sete) moças.

E, portanto, os rapazes representam um oitavo da turma, ou seja, 12,5%.

(ii)

Como os pesos se distribuem, entre R e M,

na razão inversa de como as distâncias em torno da média são distribuídas,

podemos concluir diretamente que:

$$R = \frac{0,5}{4} = \frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%,$$

em que o denominador "4" representa a distância total a ser distribuída e

o numerador "0,5" representa a distância da média ao outro extremo de peso M.

Ou seja, para calcular o peso percentual R,

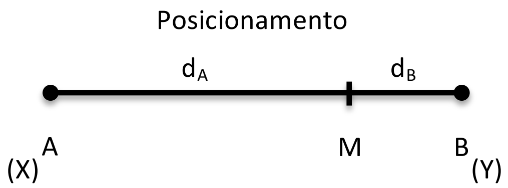
basta tomar a razão entre

a distância da média ao outro extremo de peso M e a distância total.

Após a exposição do problema motivador na "forma inversa" e a comparação das resoluções convencionais com a nossa proposta, passamos a ter mais convicção da relevância da ampliação do entendimento de média, uma vez que os processos de resolução se mostram mais atraentes devido a simplicidade das operações envolvidas. Mesmo que estudássemos apenas o caso da influência dos pesos no posicionamento da média aritmética para o caso n = 2, ainda sim nos posicionaríamos a favor da relevância por conta das enormes possibilidades de aplicação que serão apresentadas.

Em síntese, apresentaremos uma situação genérica, baseada na interpretação geométrica. Segue:

Considere dois valores A e B, A < B, com pesos X e Y, respectivamente e seja M = MAP(A, B), com pesos X e Y. Considere ainda d_A e d_B, respectivamente, as distâncias dos extremos A e B até a média M e d = B – A, a distância entre os valores A e B. A partir do modelo abaixo, podemos tirar as seguintes conclusões:



1) Pesos e Distâncias até a média são Grandezas Inversamente Proporcionais, ou seja, $X \cdot d_A = Y \cdot d_B$

2) Dados A, B, X e Y, temos que:

$$M = A + d_A \text{, em que } d_A = \frac{Y}{(X+Y)} \cdot d$$

ou

$$M = B - d_B \text{, em que } d_B = \frac{X}{(X+Y)} \cdot d .$$

3) Dados A, B e M, temos que os pesos percentuais X e Y são dados por:

$$X = \frac{d_B}{d} \cdot 100 \text{ e } Y = \frac{d_A}{d} \cdot 100 .$$

Deixaremos a demonstração das afirmações 2 e 3 com base na afirmação 1, que já foi demonstrada, a cargo do leitor. Apresentamos a situação genérica a fim de que fique claro que esse método é sempre possível de utilizado e está baseado em conceitos bem fundamentados. Nosso objetivo não é a utilização dessas “fórmulas” para abreviar as resoluções. O fundamental é internalizar os conceitos para utilização deles de forma bem natural e não mecanizada. Como sugestão, o professor não deve mostrar essa situação genérica a fim de fornecer fórmulas práticas aos alunos. Seria interessante que os alunos pudessem utilizá-las mesmo sem conhecê-las, a partir de um aprendizado significativo das ideias fundamentais envolvidas.

2.4. Extensão do Posicionamento da Média para n Valores

A partir de um contra exemplo simples, podemos verificar que o fato de pesos e distâncias até a média serem Grandezas Inversamente Proporcionais não vale para qualquer quantidade n de valores. A proporcionalidade inversa que foi essencial para o posicionamento da média no caso n = 2, não pode ser utilizada para qualquer caso. Segue o contra-exemplo:

Sejam 1, 4 e 7 valores reais com pesos 1, 2 e 3, respectivamente. Calcule a Média Aritmética Ponderada.

Segue a resolução convencional:

$M = MAP(1,4,7)$, com pesos 1, 2 e 3.

$$\Leftrightarrow$$

$$M = \frac{1\cdot 1 + 4\cdot 2 + 7\cdot 3}{1+2+3} = \frac{30}{6} = 5\,.$$

Seja d_{XM}, a distância de um valor X até a média, temos:

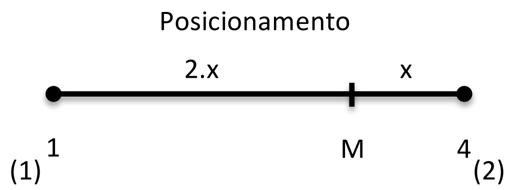
1) Para X = 1, com peso 1, temos $d_{1M} = 4$.
2) Para X = 4, com peso 2, temos $d_{4M} = 1$
3) Para X = 7, com peso 3, temos $d_{4M} = 2$

Percebemos que o produto peso por distância até a média não é o mesmo. Logo a proporcionalidade inversa está descartada para o posicionamento da média.

Baseados na definição fundamental de que média aritmética é um número que substitui todos os valores da amostra preservando a soma deles, a alternativa encontrada para posicionar a média, a partir da abstração de média como ponto de equilíbrio, foi a de fazer essa substituição em partes.

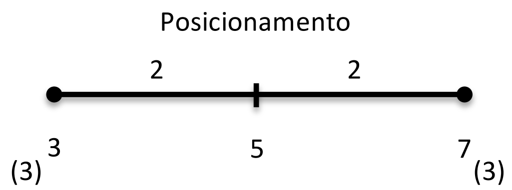
Para esse caso específico, poderíamos substituir dois valores escolhidos arbitrariamente, pela média aritmética ponderada entre eles. E, em seguida tirar a média aritmética ponderada entre o valor encontrado anteriormente, com peso equivalente a soma dos pesos dos dois valores escolhidos inicialmente, e o terceiro valor, com seu respectivo peso. Segue os passos para posicionamento da média:

a) Escolhidos inicialmente os valores 1 e 4, com pesos 1 e 2, respectivamente, temos:



Como a distância entre os extremos é igual a 3, temos 2x + x = 3 o que implica em x = 1.
Portanto, a média fica posicionada na posição M = 1 + 2.1 = 3.

b) Calculando agora a média entre
o valor 3 encontrado, com peso igual a 3 (soma 1 + 2)
e o valor 7, de peso também igual a 3, temos:



Como os pesos são iguais, a média é o ponto médio entre 3 e 7. Ou seja, 5.

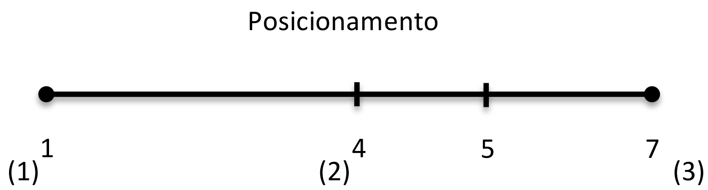
Dessa forma, a média para n valores poderia ser calculada, de forma análoga, ao apresentado, realizando "n – 1" passos. A prova, por indução, desta afirmação fica a cargo do leitor que achar necessário. Optamos por não fazê-la, já que é bastante intuitiva. Apontamos aqui para a possibilidade de posicionamento da média, mesmo que em etapas.

A priori, o cálculo convencional parece ser mais adequado, mas imagine uma situação ilustrativa em que se precise tirar a média entre 10 valores com seus respectivos pesos. Uma boa escolha (aquela em que um simples cálculo mental obtém o resultado) de alguns grupos de 2 valores, para serem substituídos pela respectiva média com pesos acumulados, poderia proporcionar uma diminuição nos cálculos a serem efetuados.

Portanto, apontar uma possibilidade de resolução em etapas pode ser uma boa alternativa. Vale lembrar que se os 10 valores forem “grandes”, os produtos pelos respectivos pesos vai gerar contas enormes. Uma vantagem da interpretação geométrica bem aplicada em pares é que ele leva em consideração a distância entre os valores. Mesmo para valores grandes, podemos ter diferenças pequenas.

Fica claro que o objetivo não é escolher o melhor método, mas sim ter mais ferramentas e possibilidades para utilização do método mais adequado para cada caso, além de fortalecer os recursos envolvidos em cada método.

Retomando, o exemplo resolvido e posicionando a média entre todos os valores envolvidos, teríamos:



Seja d_{XM} , a distância de um valor X até a média, temos:

1) Para X = 1, com peso 1, temos $d_{1M} = 4$.
2) Para X = 4, com peso 2, temos $d_{4M} = 1$
3) Para X = 7, com peso 3, temos $d_{4M} = 2$

Observe que: a soma dos produtos das distâncias (até a média) pelos respectivos pesos a esquerda e a direita da média é a mesma. Ou seja, $1.4 + 2.1 = 3.2$, que equivale a $1.4 + 2.1 - 3.2 = 0$ ou, ainda, $1.4 + 2.1 + 3.(-2) = 0$.

Da Física, o momento de cada força (peso) é dado pelo produto da força (peso) pela respectiva distância até o ponto de apoio. Temos ainda que, para uma barra ficar equilibrada a soma de todos os momentos de todas as forças (pesos) deve ser igual a zero. Para isso ser verdade, assumimos que forças de lados opostos ao ponto de apoio tem distâncias com sinais opostos.

Se essa conjectura valer independente do valor de n, na física, poderemos resolver problemas de equilíbrio numa barra de comprimento dado, assumindo que cada peso está em uma posição de um intervalo real de comprimento equivalente ao tamanho da barra e que a posição do ponto de apoio será a média aritmética ponderada entre todas as posições em que as forças estão posicionadas, com pesos equivalentes as intensidades das respectivas forças.

Além disso, o conceito de média aritmética, como ponto de equilíbrio, ficará estendida para n valores.

Precisamos então provar que a seguinte afirmação:

1) Seja uma sequência finita de "n" números reais, com n > 1, (a_1, a_2, a_3, ... , a_n); p_1, p_2, p_3, ..., p_n pesos associados a a_1, a_2, a_3, ... , a_n, respectivamente, com $a_1 < a_2 < a_4 < ... < a_n$ e M, a Média Aritmética Ponderada entre esses valores. A soma dos produtos das distâncias até a média, de cada a_i, pelos respectivos pesos é igual a zero.

Para provar tal afirmação, partiremos da definição de média apresentada:

$$a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + a_3 \cdot p_3 + ... + a_n \cdot p_n = M \cdot p_1 + M \cdot p_2 + M \cdot p_3 + ... + M \cdot p_n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(a_1 \cdot p_1 - M \cdot p_1) + (a_2 \cdot p_2 - M \cdot p_2) + (a_3 \cdot p_3 - M \cdot p_3) + ... + (a_n \cdot p_n - M \cdot p_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(a_1 - M) \cdot p_1 + (a_2 - M) \cdot p_2 + (a_3 - M) \cdot p_3 + ... + (a_n - M) \cdot p_n = 0$$

Considerando $d_i = (a_i - M)$, a distância de cada a_i até média, temos:

$$d_1 \cdot p_1 + d_2 \cdot p_2 + d_3 \cdot p_3 + ... + d_n \cdot p_n = 0$$

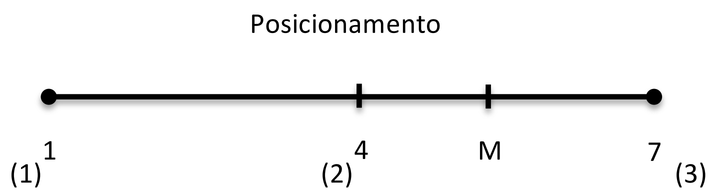
A depender do posicionamento da média, alguns d_i serão positivos e outros negativos. Para efeito de entendimento, quando a_i estiver a direita de M ($a_i > M$) a distância será positiva e, caso contrário, negativa. Para $a_i = M$, distância nula.

Fica, portanto, provada a afirmação. Dessa prova, podemos afirmar, de maneira equivalente, que a soma dos produtos das distâncias absolutas até a média, de cada a_i, pelos respectivos pesos a direita e a esquerda da média são iguais.

Só a título de ilustração, retomaremos mais uma vez o exemplo inicial, para calcular a média, a partir do resultado demonstrado. Segue o exemplo acompanhado da nova possibilidade de resolução (inspirada no entendimento de ponto de equilíbrio da física):

Sejam 1, 4 e 7 valores reais com pesos 1, 2 e 3, respectivamente. Calcule a Média Aritmética Ponderada.

Encontrar a média solicitada é equivalente a encontrar a posição M, tal que a afirmação que acaba de ser provada seja verdadeira. Considere o desenho ilustrativo, em que M foi posicionado de maneira arbitrária.



Assim:

$$1.(1 - M) + 2.\,(4 - M) + 3.(7 - M) = 0$$

Resolvendo, encontramos M = 5.

Terminamos então toda a fundamentação teórica acerca do posicionamento da média aritmética ponderada e partiremos para os próximos capítulos em que serão estudadas as aplicações dos resultados aqui encontrados e das ideias desenvolvidas.

Nosso objetivo foi ampliar o conceito, a fim de proporcionar, a partir da modelagem assumida, as ferramentas adequadas para a resolução de problemas de diversas áreas.

3. APLICAÇÕES DA MÉDIA ARITMÉTICA PONDERADA

Existem vários obstáculos para uma boa aprendizagem matemática. Talvez o principal causa esteja ligada à maneira tradicional como a Matemática é ensinada. Rosa Neto (1994, p.41) descreve esse modelo da seguinte forma:

> *Infelizmente, entre nós, o ensino da matemática fica quase que apenas nos níveis de conhecimento e utilização de métodos e procedimentos, isto é, o aluno aprende a terminologia e as fórmulas e treina fazer substituições para resolver problemas de rotina. A matemática fica transformada em algo rígido, acabado, chato, sem finalidade. O aluno usa apenas a memória; não desenvolve as habilidades de extrapolar, raciocinar, criar. Não tem o prazer da descoberta. Ficam faltando elementos para seu desenvolvimento integral.*

A fim de minimizar os obstáculos de aprendizagem, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) apontam favoravelmente para a contextualização da seguinte forma:

> *É preciso lembrar que a contextualização deve ser vista como um dos instrumentos para a concretização da ideia de interdisciplinaridade e para favorecer a atribuição de significados pelo aluno no processo de ensino e aprendizagem. A articulação da Matemática ensinada no ensino médio com temas atuais da ciência e da tecnologia é possível e necessária. Deve-se observar que as articulações com as práticas sociais não são as únicas maneiras de se favorecer a atribuição de significados a conceitos e a procedimentos matemáticos, pois isso igualmente é possível, em muitos casos, com o estabelecimento de suas conexões com outros conceitos e procedimentos matemáticos importantes.*

A contextualização também aparece como boa alternativa nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Os PCN+ (2002) ratificam que:

> *Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de*

> *competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação.*

Com base no que foi apresentado nos documentos oficiais, o objetivo desse capítulo é apresentar situações contextualizadas para a utilização da Média Aritmética na Matemática e em outras áreas, a fim de favorecer o processo de ensino-aprendizagem. A tentativa é tornar o ensino desse tema menos procedimental e distante da realidade dos alunos. Algumas pontes já foram feitas no capítulo anterior e agora serão retomadas com maior ênfase.

3.1. Aplicações na Matemática

Apresentaremos agora algumas aplicações no âmbito de outros tópicos da Matemática em que a média aritmética pode se tornar um recurso. A priori, escolheremos situações mais objetivas para facilitar a aplicação mais direta, mas lembramos que estas podem ser estendidas para situações mais complexas. Seguem:

1) Na Geometria Analítica.

Quando queremos dividir um segmento em determinada razão, dados as coordenadas dos extremos do segmento, podemos utilizar uma média ponderada para cálculo das coordenadas do ponto divisor. Para um melhor entendimento, segue uma breve revisão deste tópico, disponível em www.somatematica.com.br/emedio/retas/retas2.php. Acesso em 05 de março de 2014.

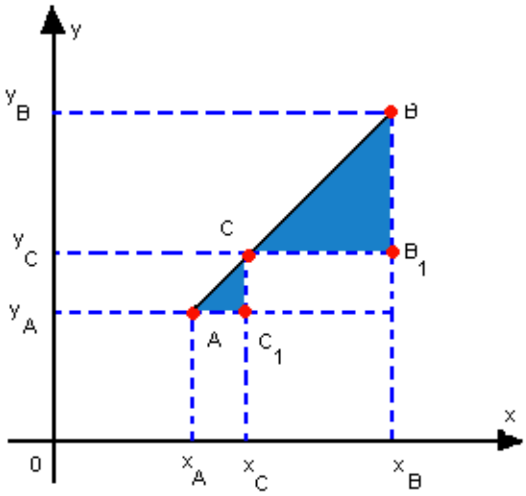
Razão de secção

Dados os pontos **A**(x_A, y_A), **B**(x_B, y_B), **C**(x_C, y_C) de uma mesma reta $(A \neq B \neq C)$, o ponto C divide $\overline{AB}$ numa determinada razão, denominada *razão de secção* e indicada por:

$$r_c = \frac{AC}{CB}$$

em que $r_c \in \mathbb{R} - \{-1\}$, pois se $\frac{AC}{CB} = -1$, então A = B.

Observe a representação a seguir:



Como o $\Delta ACC \cong \Delta CBB$, podemos escrever:

$$r_c = \frac{AC}{CB} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C}$$

Figura 10 – Razão de Secção

Como pudemos observar, a razão de secção é calculada de forma análoga tanto para a coordenada x quanto para y. No exemplo a seguir, calcularemos apenas a coordenada x de duas maneiras. A primeira mais convencional e a segunda usando as noções desenvolvidas no capítulo anterior.

Quais as coordenadas do ponto **P,** que divide o segmento de extremos **A(1,** 7) e **B(6,** -3) na razão 2/3?

primeira maneira:

A razão de secção do ponto P, em relação ao segmento AB, é dado por:

$$r_P = \frac{AP}{PB} = \frac{x_P - x_A}{x_B - x_P}$$

Substituindo os dados do exemplo, temos:

$$\frac{2}{3} = \frac{x_P - 1}{6 - x_P} \Leftrightarrow 12 - 2 \cdot x_P = 3 \cdot x_P - 3 \Leftrightarrow 5 \cdot x_P = 15 \Leftrightarrow x = 3$$

segunda maneira:

Como as distâncias até o ponto P estão na razão AP para PB igual a 2 para 3 (E a divisão no eixo x se faz na mesma razão), podemos considerar que a coordenada x_P, pode ser calculada a partir da média aritmética ponderada entre as coordenadas x_A e x_B com respectivos pesos na razão 3 para 2. Logo,

$x_P = MAP(x_A, x_B)$, com pesos 3 e 2.

$$x_P = \frac{1 \cdot 3 + 6 \cdot 2}{3 + 2} = 5$$

Calculamos a média no segundo caso de maneira convencional, com objetivo de formalizar que um problema de razão de secção pode ser um problema de média aritmética ponderada, caso o ponto esteja entre os pontos A e B, ou seja, a razão de secção seja positiva. Uma vez formalizado, fica a cargo do leitor a utilização da interpretação geométrica, caso julgue necessário.

2) Função Afim

É comum situações em que, dadas as informações acerca de dois pontos que definem a função, precisamos encontrar informações do valor da função em um terceiro ponto, como no exemplo a seguir.

Se uma função f, do primeiro grau, é tal que f(1) = 190 e f(50) = 2.052, Quanto vale f(20)?

primeiro modo (mais tradicional):

Como f é uma função de primeiro grau, f(x) = a.x + b. Assim:

$$f(1) = 190 \quad \therefore \quad a + b = 190$$
$$f(50) = 2052 \quad \therefore \quad 50 \cdot a + b = 2052$$

Resolvendo o sistema apresentado, encontraríamos:

$$a = 38, \quad b = 152 \quad e \quad f(x) = 38 \cdot x + 152$$

Logo,

f(20) = 38.20 + 152 = 912.

Vale destacar que um melhor entendimento das ideias envolvidas na aprendizagem significativa do tópico, proporcionaria uma resoluçãoo mais breve, enfatizando a proporcionalidade existente entre a variação de x e a variação de y.

segundo modo:

Ilustrando a situação, temos:

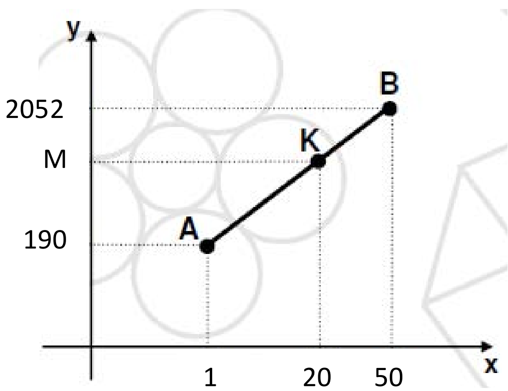


Figura 11 – Função Afim

Observe que M = f(20) é um valor intermediário entre 190 e 2052. Logo, pode ser entendido, nesse contexto como média aritmética ponderada entre 190 e 2052.

Para o cálculo desta média é necessário conhecer os pesos.

Mas estes estão na razão inversa das distâncias.

Como as variações na variável y estão na mesma razão das variações na variável x e essa última está na razão de 19 (igual a 20 – 1) para 30 (igual a 50 – 20), os pesos associados a 190 e 2052 estão na razão 30 para 19.

Concluimos que:

M = MAP(190, 2052), com pesos 30 e 19.

$$M = \frac{190 \cdot 30 + 2052 \cdot 19}{30 + 19} = 912.$$

Calculamos a média na segunda maneira de maneira convencional, com objetivo de formalizar que o problema pode ser resolvido a partir de uma média aritmética ponderada.

Essa resolução acabou ficando grande já que ainda estavámos justificando a aplicação.

A interpretação geométrica das médias, facilitaria os cálculos neste caso.

3) Progressões Aritméticas

Como as progressões aritméticas podem ser modeladas a partir de funções do primeiro grau, o caso em que são fornecidas informações de dois termos distantes para encontrar informações de um terceiro pode ser resolvido, da mesma forma que o exemplo anterior. Resolveremos, utilizando a concepção de médias desenvolvida:

Numa PA, temos que $a_4 = 13$ e $a_{20} = 61$. determine o a_{50}.

Tome o $a_{20} = 61$ como o resultado da média aritmética ponderada entre o a_4 e o a_{50}.

Para determinar respectivos os pesos,

basta observar a razão entre as distâncias expressa pelos índices.

Essa razão é de 16 (igual a 20 – 4) para 30 (igual a 50 – 20), assim a razão entre os pesos é de 30 para 16, ou seja, 15 para 8.

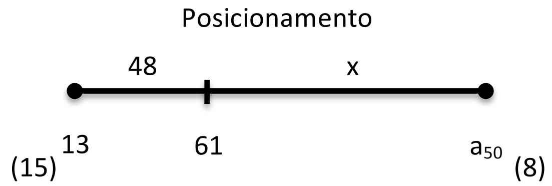
Assim:

$a_{20} = MAP(a_4, a_{50})$, com pesos 15 e 8.

Ou seja,

$$a_{20} = \frac{a_4 \cdot 15 + a_{50} \cdot 8}{23} \therefore 61 = \frac{13 \cdot 15 + a_{50} \cdot 8}{23} \therefore a_{50} = 161$$

Utilizando a interpretação geométrica, faríamos:



Assim, como a razão entre os pesos está na razão inversa entre as distâncias, temos que:

$$\frac{15}{8} = \frac{x}{48}$$

Daí x = 90 e a_{50} = 61 + 90 =151.

Mais uma vez, a interpretação geométrica tornou os cálculos mais simples.

3.2. Aplicações em outras Áreas

De acordo as Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio e as Orientações Teórico-metodológicas para o Ensino Médio da Secretaria Estadual de Educação de Pernambuco, a contextualização do conteúdo nas salas de aula, através de situações problemas deve ser enfatizada, isto é, buscando utilizações no mundo real para uma ideia matemática e nunca o contrário. Uma forma de atender a essa recomendação é buscar aplicações do conteúdo

Matemático em outras áreas do conhecimento. Neste tópico, colocaremos a média como importante ferramenta na resolução de problemas da Química e da Física. Segue:

1) Mistura de Soluções, de mesmo soluto, sem Reação Química

Quando misturamos "n" soluções de mesmo soluto, obtemos uma nova solução de concentração (C_f) intermediária às concentrações (C_1, C_2, …, C_n) das soluções misturadas. Nesse caso, a massa total de soluto da solução final será a soma das massas dos solutos das soluções iniciais. Da mesma forma, o volume final (V_f) será a soma dos volumes (V_1, V_2, … , V_n) das soluções iniciais. Consequentemente, após o desenvolvimento adequado dos pensamentos químicos envolvidos, temos:

$$C_f = \frac{C_1V_1 + C_2V_2 + \ldots + C_nV_n}{V_1 + V_2 + \ldots + V_n}$$

Analisando o resultado acima, matematicamente, podemos concluir que a concentração final (C_f) é uma média aritmética ponderada entre as concentrações iniciais (C_1, C_2, …, C_n) das soluções misturadas, em que os volumes (V_1, V_2, … , V_n) das soluções iniciais atuam como respectivos pesos. Dessa forma:

C_f = MAP(C_1, C_2, …, C_n), com pesos V_1, V_2, … , V_n.

Dado o entendimento das ideias acima mencionadas, seguem alguns exemplos acompanhados de devida resolução:

Exemplo1. Misturando-se 20mL de solução de NaCℓ, de concentração 6,0mol/L, com 80mL de solução de NaCℓ, de concentração 2,0mol/L, são obtidos 100mL de solução de NaCℓ, de concentração, em mol/L, igual a:

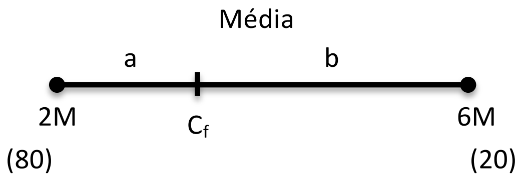
a) 1,4

b) 2,8

c) 4,2

d) 5,6

Este exemplo satisfaz todas as condições mencionadas no item, logo a concentração final será uma média aritmética ponderada entre as concentrações iniciais. Para cálculo desta média, utilizaremos a interpretação geométrica de média como ponto de equilíbrio. Segue abaixo duas formas de resolução:



(i) Se a razão entre os pesos é de 80 para 20 (4 para 1), a razão entre as distâncias a e b deve ser de 1 para 4, que equivale a a = x e b = 4x. Dessa forma, como a distância entre os extremos é igual a 4, temos x + 4x = 4 o que implica em x = 0,8; a = 0,8 e b = 3,2. Portanto, a média fica posicionada na posição 2 + 0,8 = 2,8M.

(ii) De uma outra forma, como a distância entre os valores extremos é igual a 4 e a razão entre as distâncias a e b ,em torno da média, é de 20 para 80, temos que $\frac{a}{b} = \frac{20}{80}$. Um bom entendimento dessa razão permite inferir que a cada 100 unidades distribuídas entre a e b, a recebe 20. Logo, $a = \frac{20}{100} \cdot 4$. Ou seja, a = 0,8. E, portanto, a média é igual a 2 + 0,8 = 2,8.

Neste caso, a resolução convencional utilizando o algoritmo da média também levaria a uma pequena, rápida e eficaz resolução.

Exemplo2. Um analista necessita de 100 mL de uma solução aquosa de NaCℓ 0,9 % (m/v). Como não dispõe do sal puro, resolve misturar duas soluções de NaCℓ(aq): uma de concentração 1,5 % (m/v) e outra de 0,5 % (m/v). Calcule o volume de cada solução que deverá ser utilizado para o preparo da solução desejada.

Este exemplo satisfaz todas as condições mencionadas no item, logo a concentração final é uma média aritmética ponderada entre as concentrações iniciais. Utilizando a interpretação geométrica de média como ponto de equilíbrio podemos abreviar o processo de resolução. Segue abaixo duas formas de resolução, para devida comparação:

(i)

Considere A: solução 1 e B: solução 2. Segue:

$$1)\ C_A V_A + C_B V_B = CV$$

$$1{,}5V_A + 0{,}5V_B = 0{,}9.100$$

$$1{,}5V_A + 0{,}5V_B = 90$$

$$2)\ V_A + V_B = 100$$

$$V_A = 100 - V_B$$

Então, substituindo 2) em 1), temos:

$$1{,}5(100 - V_B) + 0{,}5V_B = 90$$

$$150 - 1{,}5.V_B + 0{,}5V_B = 90$$

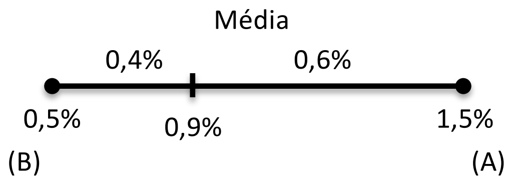
Assim,

$V_B = 60$ mL e $V_A = 100 - 60 = 40$ mL.

Os volumes deverão ser de 40 mL e de 60 mL.

(ii)

Como a concentração final é uma média entre as concentrações iniciais, temos:



Como as distâncias, em torno da média, estão na razão de 0,4 para 0,6;

temos que a razão entre os pesos B e A é dada por:

$$\frac{B}{A} = \frac{0{,}6}{0{,}4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2},$$

Assim, a cada 3 (três) unidades para B, temos 2 (duas) unidades para A.

Como A + B = 100,

temos que B = $\frac{3}{5} \cdot 100 = 60$ e A = $\frac{2}{5} \cdot 100 = 40$.

Neste caso, a segunda forma utiliza um processo muito mais aritmético do que algébrico, possibilitando contas mais simples e mais rápidas, dada uma boa interpretação do conceito de média.

2) Mistura de gases, a uma mesma temperatura, com pressões e volumes distintos.

Vejamos a figura abaixo, na qual dois balões interligados por um tubo de volume desprezível possui uma torneira de contato. Esses balões possuem dois gases A e B, a uma mesma temperatura, com volumes respectivos V_A e V_B ; e pressões respectivas P_A e P_B. Pela figura vemos que a torneira está fechada.

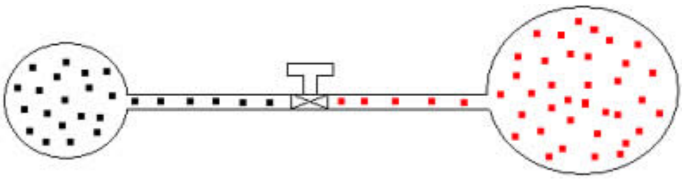


Figura 12 – Balões de gás com torneira fechada.

Posteriormente, se abrirmos a torneira, veremos que os gases se misturam, como mostra a ilustração abaixo:

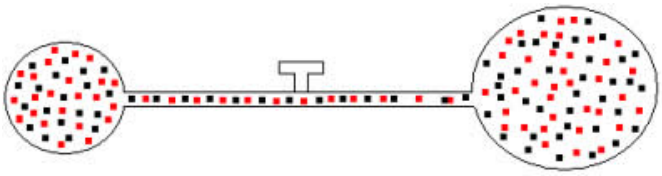


Figura 13 – Balões de gás com torneira aberta.

Para essa mistura, temos que a pressão final (P_F), com base em leis da química e da física, obedece a seguinte relação:

$$P_F \cdot (V_A + V_B) = P_A \cdot V_A + P_B \cdot V_B \Leftrightarrow P_F = \frac{P_A \cdot V_A + P_B \cdot V_B}{(V_A + V_B)}$$

Ou seja,

P_F = MAP(P_A, P_B), com pesos V_A, V_B.

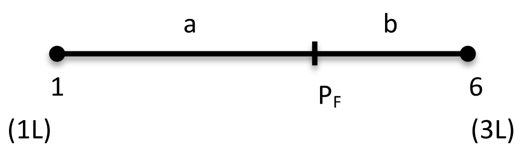
Esta relação pode ser estendida a uma mistura de “n” gases, nas mesmas condições.

Dado o entendimento apresentado acima, segue alguns exemplos acompanhados da devida resolução:

Exemplo1. (UFPE) Dois recipientes encontram-se ligados por um válvula, inicialmente fechada. No recipiente menor , com volume de 1L , encontra-se gás carbônico na pressão de 1,0 atm. No recipiente maior , com volume de 3L, encontra-se gás oxigênio na pressão de 6,0 atm. Considerando que a válvula é aberta e os dois gases se misturam, ocupando o volume dos dois recipiente, podemos afirmar que:

a) a pressão parcial do gás carbônico será 0,25 atm.
b) a pressão parcial do gás oxigênio será de 4,5 atm .
c) a pressão total no interior dos recipientes será de 7,0 atm.
d) a pressão total no interior dos recipientes será de 4,75 atm.
e) a pressão de interior do recipiente maior será menor que a pressão no interior do menor.

Para resolver essa questão, bastaria calcular a pressão final dos gases após a mistura. Como essa pressão, a partir do que foi exposto no item, é uma média aritmética ponderada entre as pressões iniciais, em que os pesos são os volumes ocupados por cada gás, utilizando a interpretação geométrica, temos que:



Se a razão entre os pesos é de 1 para 3, a razão entre as distâncias a e b deve ser de 3 para 1, que equivale a: a = 3x e b = x. Dessa forma, como a distância entre os extremos é igual a 5, temos 3x + x = 5 o que implica em x = 1,25; a = 3,75 e b = 1,25. Portanto, a média fica posicionada na posição 1 + 3,75 = 4,75.

Neste caso, a resolução convencional utilizando o algoritmo da média também levaria a uma pequena, rápida e eficaz resolução.

Exemplo2. Nos recipientes A e B da figura, temos dois gases, X e Y, nas pressões 3 atm e 1 atm, respectivamente, à temperatura ambiente (constante). O volume do tubo que liga A e B é desprezível e o volume do recipiente A é de 30 litros. Se a pressão final do conjunto, depois de se abrir a torneira do tubo de união, é igual a 1,5 atm, qual o volume em litros do recipiente B?

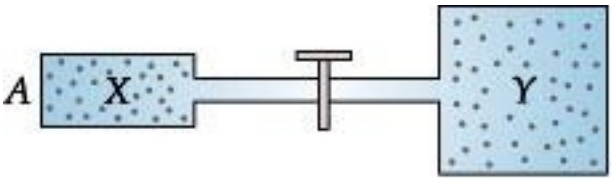
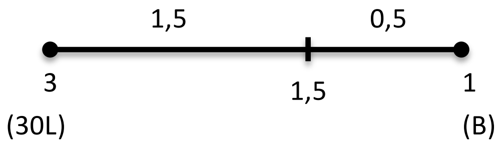


Figura 14 – Recipientes Acoplados

Como pressão final, a partir do que foi exposto no item, é uma média aritmética ponderada entre as pressões iniciais, em que os pesos são os volumes ocupados por cada gás, utilizando a interpretação geométrica, temos que:



Como as distâncias, em torno da média, estão na razão de 1,5 para 0,5;

temos que a razão entre os pesos 30 e B é dada por:

$$\frac{30}{B}=\frac{0,5}{1,5}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3},$$

Assim, B = 90 litros.

Vale salientar a praticidade da resolução, que despreza processos algébricos convencionais.

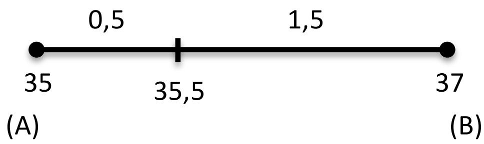
3) Massa Atômica de um elemento químico.

Os elementos químicos podem possuir vários **isótopos** (mesmo número atômico porém massa diferente), mas não seria viável representá-los todos na tabela periódica. Por isso, as massas atômicas que vemos nessas tabelas são médias aritméticas ponderadas das massas dos diversos isótopos estáveis existentes no universo que esse elemento químico possui.

Dada essa definição, observe o seguinte exemplo:

Exemplo: O elemento cloro apresenta os isotopos ^{35}Cl e ^{37}Cl, apenas. Sabendo que a massa atômica do cloro é 35,50u. Determine os percentuais de casa isótopo do cloro.

Como a massa atômica é dada pela média aritmética ponderada das massa dos isotopos existentes em que os pesos são as quantidades existentes na natureza, temos que:



Como as distâncias, em torno da média, estão na razão de 0,5 para 1,5;

temos que a razão entre os pesos A e B é dada por:

$$\frac{A}{B} = \frac{1,5}{0,5} = \frac{15}{5} = \frac{3}{1},$$

Assim, a cada 3 (três) unidades de A, temos 1 (uma) unidade de B.

Logo, os percentuais de cada isótopo são:

$$A = \frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$$

e

$$B = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%.$$

Por meio de uma simples observação, a luz dessa nova interpretação das médias, pode-se chegar aos percentuais de cada isótopo na natureza, através de um cálculo mental.

4) Centro de Massa em uma Barra.

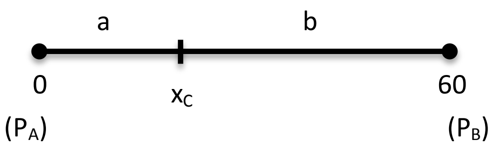
Encontrar o centro de massa de uma barra de comprimento L e peso desprezível, com pesos p_1, p_2, ..., p_n posicionados ao longo de toda extensão da barra é equivalente a encontrar a posição de um ponto de apoio tal que o somatório de todos os momentos dos pesos posicionados em relação ao ponto de apoio seja igual a zero. Admitindo que cada peso p_i está posicionado numa posição x_i, com $0 \le x_i \le L$, temos que a posição x_C do ponto de apoio (centro de massa) é dada por:

$$x_C = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

Como demonstrado no capítulo 2, sendo x_C a média aritmética ponderada, está garantido que o somatório dos produtos dos pesos (p_i) pelas respectivas distâncias (x_i - x_C) em torno da média seja igual a zero. Seguem alguns exemplos:

Exemplo1. Determine a posição do centro de massa *C* do sistema formado por duas partículas de massas m_A e m_B, fixas nas extremidades de uma barra de peso desprezível, no caso em que $m_A = 2.m_B$.

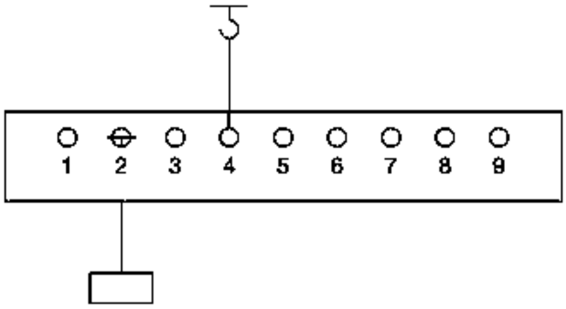
Adotando $x_A = 0$ e $x_B = 60$, com pesos tais que $p_A = 2.p_B$, já que $m_A = 2.m_B$, temos que a posição x_C do centro de massa é dado pela média aritmética ponderada entre x_A e x_B, com pesos p_A e p_B, respectivamente. Utilizando a interpretação geométrica, temos que:



Se a razão entre os pesos é de 2 para 1 ($p_A = 2.p_B$), a razão entre as distâncias a e b deve ser de 1 para 2, que equivale a: a = x e b = 2x. Dessa forma, como a distância entre os extremos é igual a 60, temos x + 2x = 60 o que implica em x = 20; a = 20 e b = 40. Portanto, a média fica posicionada na posição 0 + 20 = 20.

Neste caso, a resolução convencional utilizando o algoritmo da média também levaria a uma pequena, rápida e eficaz resolução.

Exemplo2. (Unifor-CE) Uma tábua homogênea, de 1,00 m de comprimento, tem 10 divisões de 10 cm, marcadas por 9 traços numerados de 1 a 9. A tábua, de massa 1,0 kg, foi pendurada por um fio ligado ao traço número 4, como está indicado no esquema.



Para mantê-la na posição horizontal foi pendurado um massor exatamente sobre o traço número 2. A massa desse massor é, em kg, igual a:

a) 0,25

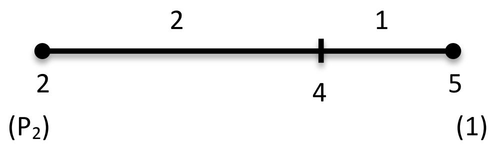
b) 0,40

c) 0,50

d) 0,60

e) 0,90

Como a tábua é homogênea, a massa de 1kg se localiza no centro dela (posição 5). A posição 4 pode ser considerada a média aritmética ponderada entre as posições 2 e 5, com pesos respectivamente iguais a p_2 e 1, respectivamente. Uma vez que esta posição será o ponto de equilíbrio. Fazendo a interpretação geométrica, temos:



Como as distâncias, em torno da média, estão na razão de 2 para 1;

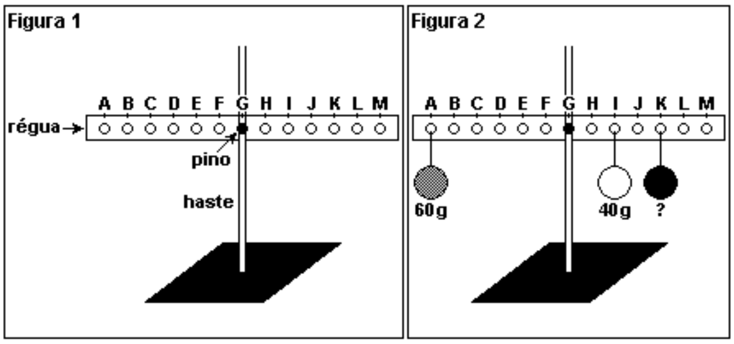
temos que a razão entre os pesos p_2 e 1 é dada por:

$$\frac{p_2}{1} = \frac{1}{2},$$

Assim, $2.p_2 = 1$ e $p_2 = 0{,}5$kg.

Exemplo3. (Uerj 2006) Para demonstrar as condições de equilíbrio de um corpo extenso, foi montado o experimento na figura 1, em que uma régua, graduada de A a M, permanece em equilíbrio horizontal, apoiada no pino de uma haste vertical.

Um corpo de massa 60g é colocado no ponto A e um corpo de massa 40g é colocado no ponto I, conforme ilustrado na figura 2.



Para que a régua permaneça em equilíbrio horizontal, a massa (m), em gramas, do corpo que deve ser colocado no ponto K, é de:

a) 90

b) 70

c) 40

d) 20

Na figura, como a régua está em equilíbrio horizontal, a média está localizada no ponto G. Das propriedades estudadas, a soma dos produtos dos pesos (massas) pelas respectivas distâncias em relação a média a direita e a esquerda da média devem ser iguais. Assim:

$$60.6 = 40.2 + m.4 \Leftrightarrow 4m + 80 = 360 \Leftrightarrow 4m = 280 \Leftrightarrow m = 70.$$

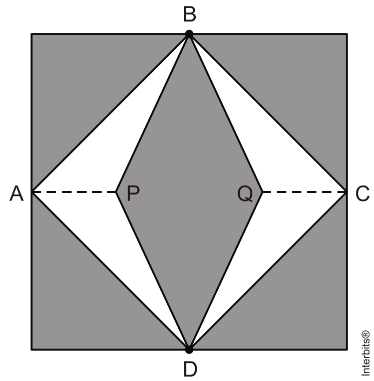
Vale salientar que as massas assumem a função de pesos nos dois exemplos anteriores já que, os todos pesos, do ponto de vista físico, poderiam ser divididos pela aceleração da gravidade, resultando nas massas. Como os pesos são importantes pelos valores relativos, as massas representam bem este papel.

4. QUESTÕES DE VESTIBULAR

Neste tópico, apresentaremos algumas questões de importantes vestibulares em que a interpretação geométrica das médias, a partir da influência dos pesos no posicionamento da média poderia contribuir para abreviar os processos de resolução.

Faremos uma comparação entre as resoluções publicadas, seja pela banca oficial do concurso ou divulgada em algum site não oficial, com a nossa proposta de resolução. Em nossa proposta, teremos o objetivo de encontrar a resposta correta, mesmo que isso aconteça por eliminação das incorretas. Para identificar as incorretas, utilizaremos as ideias de média que foram objeto de estudo no presente trabalho. Seguem os exemplos:

1) (Enem 2012) Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.



Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem 1/4 da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R\$ 30,00 o m^2, e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R\$ 50,00 o m^2.

De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

a) R\$ 22,50

b) R\$ 35,00

c) R\$ 40,00

d) R\$ 42,50

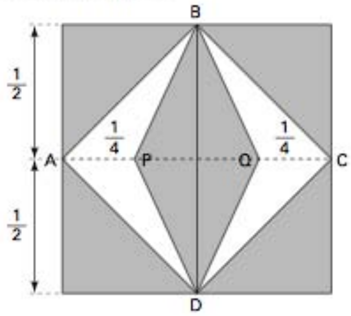
e) R\$ 45,00

Segue uma resolução, disponível em http://veja.abril.com.br/educacao/slider-questoes-enem/graficos/pdf/questoes-160.pdf, com acesso em 19 de Abril de 2014:

Sejam A_s e A_c, respectivamente, área sombreada e área clara.
O custo dos materiais usados na fabricação de um vitral é dado por:

$$C = 30 \cdot A_s + 50 \cdot A_c$$

Observe a figura:



Nela,

$A_c = 4 \cdot A_{APB}$, onde A_{APB} indica a área do triângulo APB.

$$A_c = 4 \cdot \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{2}$$

$$A_c = \frac{1}{4} m^2$$

Dessa forma, A_s pode ser calculada do seguinte modo:

$$A_s = 1^2 - \frac{1}{4}$$

$$A_s = \frac{3}{4} m^2$$

Então,

$$C = 30 \cdot \frac{3}{4} + 50 \cdot \frac{1}{4}$$

$\therefore \quad C = 35$ reais

Resposta: B

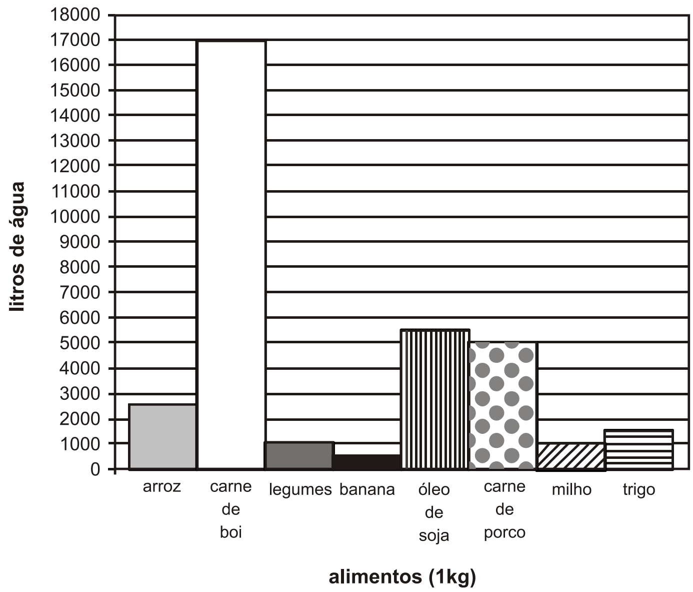
Figura 15 - Resolução Questão 1

Apesar de correta, a resolução se apresenta muito longa, já que foi necessário calcular quantos metros quadrados em cada região para avaliar de forma exata o custo por m^2 do conjunto.

Uma alternativa a esta resolução está na observação que o custo por m^2 do conjunto deve ser um valor intermediário entre R$ 30,00 (100% Sombreado) e R$ 50,00 (100% Claro), em que as áreas das respectivas regiões representam os respectivos pesos. Esta simples observação já elimina a letra a). Caso as áreas das regiões sombreada fossem iguais, o custo por m^2 do conjunto seria R$ 40,00 (ponto médio do intervalo entre 30 e 50 reais). Como visivelmente, a área sombreada é maior que a clara, resta que o custo por m^2 deve ser menos que R$ 40,00. O que aponta exclusivamente para a alternativa b).

Vale observar que a boa percepção de média aritmética como valor intermediário entre dois extremos posicionado de acordo com os respectivos pesos, abreviaria o encontro do gabarito da questão, uma vez que não seria necessário encontrar o valor exato das áreas envolvidas.

2) (Enem cancelado 2009) Nos últimos anos, o aumento da população, aliado ao crescente consumo de água, tem gerado inúmeras preocupações, incluindo o uso desta na produção de alimentos. O gráfico mostra a quantidade de litros de água necessária para a produção de 1 kg de alguns alimentos.



Com base no gráfico, para a produção de 100 kg de milho, 100 kg de trigo, 100 kg de arroz, 100 kg de carne de porco e 600 kg de carne de boi, a quantidade média necessária de água, por quilograma de alimento produzido, é aproximadamente igual a

a) 415 litros por quilograma.
b) 11.200 litros por quilograma.
c) 27.000 litros por quilograma.
d) 2.240.000 litros por quilograma.
e) 2.700.000 litros por quilograma.

Segue uma resolução desta questão da prova do Novo Enem Cancelado em 2009, disponível em http://pt.slideshare.net/mariainesmachado/resoluo-da-prova-cancelada-do-enem-2009-pela-equipe-dos-professores-do-anglovestibulares , com acesso em 19 de Abril de 2014:

Alimento	Litros de água p/ 1kg	kg	Total de litros de água
Milho	1.000	100	100.000
Trigo	1.500	100	150.000
Arroz	2.600	100	260.000
Carne de porco	5.000	100	500.000
Carne de boi	17.000	600	10.200.000
		1.000	11.210.000

Assim, para a produção descrita, a quantidade média necessária de água por quilograma de alimento produzido é aproximadamente igual a 11.200 litros.

Resposta: B

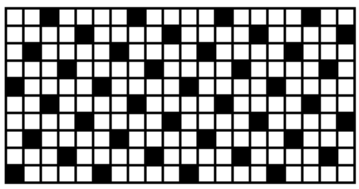
Figura 16 - Resolução da Questão 2

A resolução apresenta os dados relevantes ao cálculo da média solicitada de forma bem organizada e realiza, ao pé da letra, todos os cálculos necessários para se encontrar o valor exato da média.

Uma alternativa a este cálculo, seria a simples observação que a média entre os valores apresentados deveria ser um valor intermediário entre 1.000 (Milho) e 17.000 (Carne de boi). Logo a única alternativa possível seria a letra b). Isto pode apontar para a falta de clareza do conceito de média por parte de quem elaborou o item ou para sua intencionalidade em beneficiar os alunos que perceberam a propriedade mencionada.

Mais uma vez uma boa observação do conceito principal de média faria o aluno chegar ao gabarito da questão sem a necessidade dos cálculos a partir do algoritmo convencional e pouco reflexivo.

3) (Enem 2005) Um pátio de grandes dimensões vai ser revestido por pastilhas quadradas brancas e pretas, segundo o padrão representado a seguir, que vai ser repetido em toda a extensão do pátio.



As pastilhas de cor branca custam R$ 8,00 por metro quadrado e as de cor preta, R$ 10,00. O custo por metro quadrado do revestimento será de

a) R$ 8,20

b) R$ 8,40

c) R$ 8,60

d) R$ 8,80

e) R$ 9,00

Segue uma resolução apresentada pelo site do Super Professor, com endereço eletrônico www.sprweb.com.br :

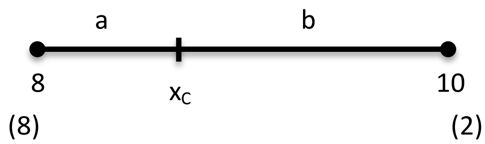
De acordo com o padrão apresentado, há 10.20 = 200 pastilhas, sendo 40 pretas e 160 brancas. Portanto, o custo do metro quadrado será de

$$\frac{40}{200}\cdot 10+\frac{160}{200}\cdot 8=\text{R\$ } 8{,}40.$$

A resolução apresentada admite de forma implícita que as 200 pastilhas equivalem a uma área de $1m^2$. Mais uma vez a utilização da média aparece em segundo plano.

Uma boa alternativa a esta resolução está na observação que o custo por m^2 do conjunto deve ser um valor intermediário entre R$ 8,00 (100% Branco) e R$ 10,00 (100% Preto), em que as áreas das respectivas regiões representam os respectivos pesos. Como o importante não é o valor absoluto entre os pesos mas sim a relação entre eles, é fácil perceber que, em cada coluna, a cada 2 pretos, existem 8 brancos.

Utilizando a interpretação geométrica, temos:



Se a razão entre os pesos é de 8 para 2 (4 para 1), a razão entre as distâncias a e b deve ser de 1 para 4, que equivale a: a = x e b = 4x. Dessa forma, como a distância entre os extremos é igual a 2, temos x + 4x = 2 o que implica em x = 0,4; a = 0,4 e b = 1,6. Portanto, a média fica posicionada na posição 8 + 0,4 = 8,4.

Já foi definido, no capítulo 2, que:

$$a=\left(\frac{2}{2+8}\right).(10-8)=0{,}4$$

Assim, ficaria mais evidente, mentalmente, que a média é 8,4.

4) (Enem PPL 2012) Uma aluna registrou as notas de matemática obtidas nos 3 primeiros bimestres do ano letivo e seus respectivos pesos no quadro a seguir.

Bimestre	**Nota**	**Peso**
1	2,5	1
2	5,8	2
3	7,4	3

Ela ainda não sabe qual será sua nota de matemática no quarto bimestre, mas sabe que o peso dessa nota na média final é 4. As notas variam de zero a dez, sendo permitida apenas uma casa na parte decimal (caso contrário, a nota será arredondada, usando como critério "se o algarismo da segunda casa decimal é maior ou igual a 5, então o algarismo na primeira casa decimal será acrescido de uma unidade"). A média final mínima para aprovação na escola dessa aluna é 7. Se ela obtiver média final inferior a 7, precisará realizar uma outra prova que substitua a menor das notas bimestrais, de modo a alcançar a média 7 (mantidos os mesmos pesos anteriores).
Se essa aluna precisar realizar uma prova para substituir a nota que obteve no primeiro bimestre, e tal nota precisar ser igual a 4,8, é porque a nota que ela obteve no quarto bimestre foi

a) 2,3.
b) 7,3.
c) 7,9.
d) 9,2.
e) 10,0.

Segue uma resolução apresentada pelo site do Super Professor, com endereço eletrônico www.sprweb.com.br :

Se x foi a nota obtida no quarto bimestre, então

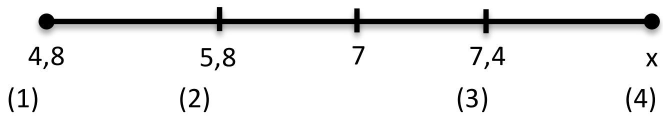
$$7 = \frac{4,8 \cdot 1 + 5,8 \cdot 2 + 7,4 \cdot 3 + x \cdot 4}{1 + 2 + 3 + 4} \Leftrightarrow 4x = 70 - 38,6$$
$$\Leftrightarrow x \cong 7,9.$$

Tal resolução apresenta a utilização do algoritmo convencional utilizado para o cáculo de médias aritméticas ponderadas para 4 (quatro) valores, com a substituição correta dos valores apresentados na questão e seguidos de alguns passos principais para chegar ao resultado exato. A maioria das contas está apenas indicada. Caberia ao aluno fazê-las.

Uma boa alternativa a fim de minimizar as contas, seria a de utilizar a média como ponto de equilíbrio, já que a média final foi fornecida. Ao se trabalhar com os pesos e as respectivas distâncias em torno da média, os cálculos ficariam menores.

Dessa forma, o somatório dos produtos dos pesos pelas respectivas distâncias em torno da média deve ser zero. Organizando os dados, temos:

Posicionamento



Assim, aplicando propriedade acima, temos:

$$(4{,}8 - 7).1 + (5{,}8 - 7).2 + (7{,}4 - 7).3 + (x - 7).4 = 0$$

$$(-2{,}2) + (-2{,}4) + (1{,}2) + 4.(x - 7) = 0,$$

dividindo todos por 4, teríamos:

$$(-0{,}55) + (-0{,}6) + (0{,}3) + (x - 7) = 0$$

$$x - 7 = 0{,}85$$

$$x = 7{,}85.$$

Como todos os cálculos foram detalhados, a resolução aparenta ser grande. Mas os cálculos escritos nela poderiam ter sido feitos mentalmente preservando a propriedade que a soma dos produtos dos pesos pelas respectivas distâncias dos valores em torno da média é igual a zero.

5) (UFPE) Em um exame a média aritmética de todos os alunos foi 4,5, enquanto a média dos alunos aprovados foi 5,3 e a dos reprovados foi 3,9. Indique o inteiro mais próximo do percentual dos alunos reprovados.

Segue a resolução apresentada pela Covest:

Sejam a e r o número de alunos aprovados e reprovados, respectivamente.

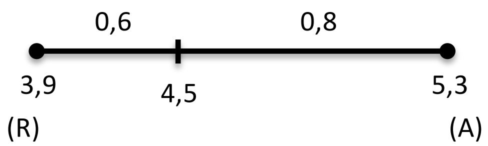
Temos que a soma de todas as notas é igual a 4,5(a+r) e também igual a 5,3a+3,9r.

Daí, 0,6r = 0,8a ou a = 3r/4.

O percentual de reprovados foi $\frac{100r}{a+r} = \frac{100r}{3r/4+r} = 400/7 = 57{,}1$.

A resolução utiliza a definição formal de médias e se apresenta de forma bem técnica, podendo ser considerada de difícil acesso ao aluno.

Uma alternativa seria utilizar a interpretação geométrica, a fim de abreviar o processo, já que esta interpretação permite o encontro do percentual solicitado a partir de uma simples observação. Segue a interpretação:



A partir do que foi exposto no capítulo 2, poderíamos encontrar o peso percentual R da seguinte forma:

$$R = \left(\frac{0{,}8}{0{,}6+0{,}8}\right).100\% = 57{,}14\%$$

Ou, como as distâncias, em torno da média, estão na razão de 0,6 para 0,8; temos que a razão entre os pesos A e B é dada por:

$$\frac{R}{A} = \frac{0{,}8}{0{,}6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3},$$

Assim, a cada 4 (quatro) unidades de R, temos 3 (três) unidade de A. Logo, os percentuais são:

$$R = \frac{4}{7} = 0{,}5714 = 57{,}14\% \text{ e } B = \frac{3}{7} = 0{,}4286 = 42{,}86\%.$$

6) (UFPE) Em um exame a média aritmética de todos os alunos foi **5,2**, enquanto a média dos aprovados foi **5,9** e a dos reprovados foi **4,3**. Descoberto um erro na elaboração de uma das questões, a banca resolveu adicionar **1,0** à nota de cada um dos alunos. Observou-se

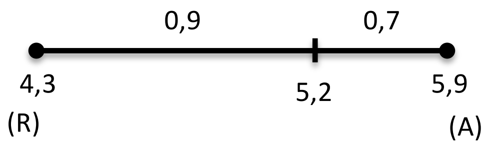
então que a média dos aprovados subiu para **6,5** e a dos reprovados subiu para **4,8**. Sabendo-se que o número de alunos que participaram do exame é inferior a **300**, calcule o número de alunos que inicialmente estavam reprovados, mas que foram aprovados depois do acréscimo às notas.

Segue a resolução apresentada pela Covest:

Sejam A, a o número de alunos aprovados antes e depois de adicionado um ponto às notas e N o número de alunos presentes ao exame. Então 5,2N = 5,9A+4,3(N-A) ou 0,9N = 1,6A. Temos também 6,2N = 6,5a+4,8(N-a) ou 1,4N = 1,7a. Segue que A = 9N/16 e a = 14N/17. Então N é divisível por 16.17 = 272. Como N < 300, temos N = 272, A = 9.17 = 153, a = 14.16 = 224 e a diferença vale 224-153 = 71.

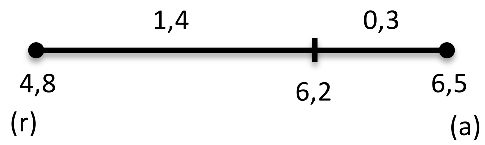
Uma alternativa a resolução apresentada, utiliza a interpretação geométrica para inferir as razões entre os pesos e diminuir o algebrismo utilizado na resolução anterior. Segue:

Antes do Acréscimo - Reprovados (R) e Aprovados (A)



Da organização dos dados acima, podemos inferir que R = 7.x e A = 9.x.
Daí R + A = 16.x

Depois do Acréscimo - Reprovados (r) e Aprovados (a)



Da organização dos dados acima, podemos inferir que r = 3.y e a = 14.y.

Daí r + a = 17.y

Assim, como o total de pessoas é igual antes e após o acréscimo do ponto,
este total (T) é dado por T = 16.x = 17.y, com x e y inteiros.
Assim:
T é múltiplo de 16 e de 17.
Como T < 300, resta T = 16.17 = 272, x = 17 e y = 16.
E, portanto:
a - A = 14.16 - 9.17 = 71.

Para provar de que x e y são inteiros, como sugestão, tome x = p/7 e y = q/3.
Substitua em R = 7.x, A = 9.x, r = 3.y e a = 14.y. E conclua.

7) (Unicamp 2014) O peso médio (média aritmética dos pesos) dos 100 alunos de uma academia de ginástica é igual a 75 kg. O peso médio dos homens é 90 kg e o das mulheres é 65 kg. Quantos homens frequentam a academia?

Segue uma resolução apresentada pelo site do Super Professor, com endereço eletrônico www.sprweb.com.br :

Sejam $\bar{p}_h = 90\,\text{kg}$ e $\bar{p}_m = 65\,\text{kg}$, respectivamente,
o peso médio dos homens e o peso médio das mulheres. Logo,

$$\bar{p}_h = \frac{S_h}{h} \Leftrightarrow S_h = 90h$$

e

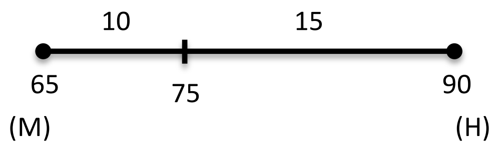
$$\bar{p}_m = \frac{S_m}{100-h} \Leftrightarrow S_m = 65(100-h),$$

sendo h o número de homens, S_h a soma dos pesos dos homens e S_m a soma dos pesos das mulheres.

Portanto, como o peso médio dos 100 alunos é igual a 75kg, temos

$$\frac{90h + 65(100 - h)}{100} = 75 \Leftrightarrow 18h + 13(100 - h) = 1500$$
$$\Leftrightarrow h = 40.$$

Utilizando a interpretação geométrica, temos:



A partir do que foi exposto no capítulo 2, poderíamos encontrar o peso percentual H da seguinte forma:

$$H = \left(\frac{10}{10+15}\right).100\% = 40\%$$

Logo, como o total é de 100 pessoas, H = 40.

Fica evidente que o bom entendimento da média permite abreviar os cálculos convencionais, principalmente quando a incógnita em questão é o peso de um determinado valor.

8) (Espm 2013) A nota final de um concurso é dada pela média aritmética das notas de todas as provas realizadas. Se um candidato conseguiu x notas 8, x + 1 notas 6 e x - 1 notas 5 e sua nota final foi 6,5 , o número de provas que ele realizou foi:

a) 6

b) 9

c) 7

d) 5

e) 12

Segue uma resolução apresentada pelo site do Super Professor, com endereço eletrônico www.sprweb.com.br :

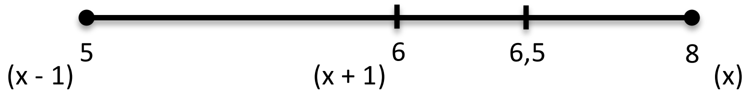
A nota final do candidato é tal que

$$6,5 = \frac{8x + 6(x+1) + 5(x-1)}{x + x + 1 + x - 1} \Leftrightarrow 19x + 1 = 19,5x$$
$$\Leftrightarrow x = 2.$$

Por conseguinte, o número de provas que o candidato realizou foi

$$x + (x+1) + (x-1) = 3x = 3 \cdot 2 = 6.$$

Uma outra forma, utilizando a interpretação geométrica das médias, seria bem interessante. Segue a proposta:



Pela propriedade apresentada no capítulo 2, temos que a soma dos produtos dos pesos dos valores pelas respectivas distâncias em torno da média a direita e a esquerda da média são iguais. Daí:

1,5.(x - 1) + 0,5.(x + 1) = 1,5.x,

dividindo ambos os lados por 0,5, temos:

3.(x - 1) + (x + 1) = 3.x

x = 2.

Assim, o total de provas é 6.

9) Na fabricação de uma bebida chamada Porto, misturam-se duas outras bebidas chamadas conhaque e vinho. Sabendo-se que o teor alcoólico do conhaque é 42%, do vinho 12% e do Porto 18%, qual a percentagem aproximada de conhaque na mistura?

a) 10%

b) 20%

c) 30%

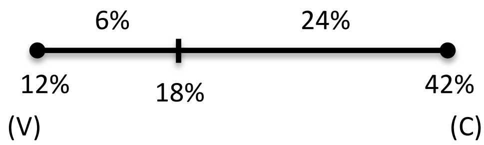
d) 40%

e) 50%

Talvez a melhor alternativa de resolução, está na observação que o teor alcoólico final deve ser um valor intermediário entre 12% (100% Vinho) e 42% (100% Conhaque), em que as quantidades de cada bebida representam os respectivos pesos. Dessa forma:

18% = MAP(12%, 42%), com pesos V e C.

Utilizando a interpretação geométrica, temos:



Se a razão entre as distâncias é de 6 para 24 (1 para 4), a razão entre os pesos V e C deve ser de 4 para 1, que equivale a: C = x e V = 4x. Dessa forma, como o total de bebida é 100%, temos x + 4x = 100% o que implica em x = 20%; C = 20% e V = 80%.

Já foi definido, no capítulo 2, que:

$$C = \left(\frac{6}{6+24}\right).100\% = 20\%$$

Assim, ficaria mais evidente, mentalmente, que a porcentagem de conhaque é de 20%.

10) (UFRN) 150 ml de ácido clorídrico (HCl) de molaridade desconhecida são misturados a 350 ml do mesmo ácido a 2 M, dando uma solução de 2,9 M. Qual a molaridade do ácido inicial?

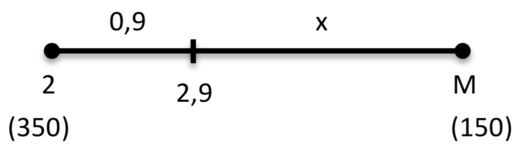
a) 3,0

b) 4,0

c) 5,0

d) 2,37

Como a concentração final é uma média aritmética entre as concentrações iniciais, em que as quantidades representam os respectivos pesos, temos, a partir da interpretação geométrica, a seguinte situação:



Se a razão entre os pesos é de 350 para 150 (7 para 3), a razão entre as distâncias 0,9 e x deve ser tal que:

$$\frac{0,9}{x} = \frac{3}{7},$$

Dessa forma, 3x = 6,3 o que implica em x = 2,1. Portanto, M fica posicionado na posição 2,9 + 2,1 = 5.

5. A GANGORRA INTERATIVA

A fim de desenvolver uma habilidade de cálculo mental para otimização do tempo nas resoluções de problemas de médias, a partir das propriedades desenvolvidas nesse trabalho, sugerimos o software livre gangorra interativa como uma boa possibilidade.

Esta gangorra interativa pode ser encontrada para devida manipulação e aprendizado em http://www.proativa.vdl.ufc.br/oa/gangorra/gangorra.html . Ela opera com diferentes pesos e variação da distância do peso para o ponto de equilíbrio a fim de atingir o equilíbrio horizontal.

Como a posição do ponto de equilíbrio representa a média aritmética ponderada entre as demais posições dados seus respectivos pesos, com lápis e papel, ficaria fácil calcular corretamente que pesos colocar e em quais posições. Nosso objetivo é que você utilize bem as propriedades estudadas sobre o posicionamento da média para dois valores, a partir da relação inversa entre peso e distância em torno da média, para resolver corretamente cada desafio proposto pelo objeto de aprendizagem.

No caso de ser necessário mais de dois valores para atingir o equilíbrio horizontal da gangorra, deve-se respeitar que a soma dos produtos dos pesos pelas respectivas distâncias em torno da média a direita e a esquerda do ponto de apoio são iguais.

Apresentaremos dois exemplos seguidos da devida solução a fim de ilustrar o que acaba de ser exposto. Seguem os exemplos:

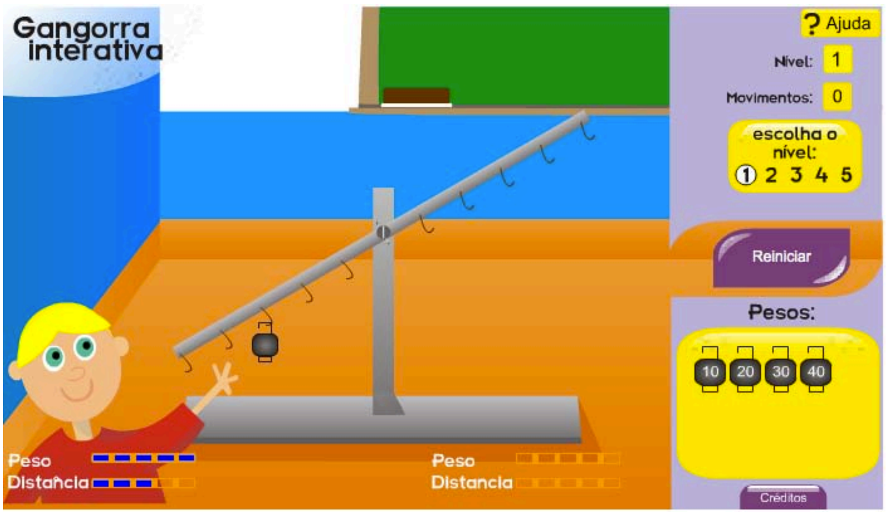


Figura 17 - Gangorra Interativa 1

No nível 1, devemos escolher um peso para posicionar de forma atingir o equilíbrio horizontal mencionado com o peso 50 que está posicionado a esquerda do ponto de apoio a uma distância de 3 unidades dele. Uma possibilidade de solução está abaixo:

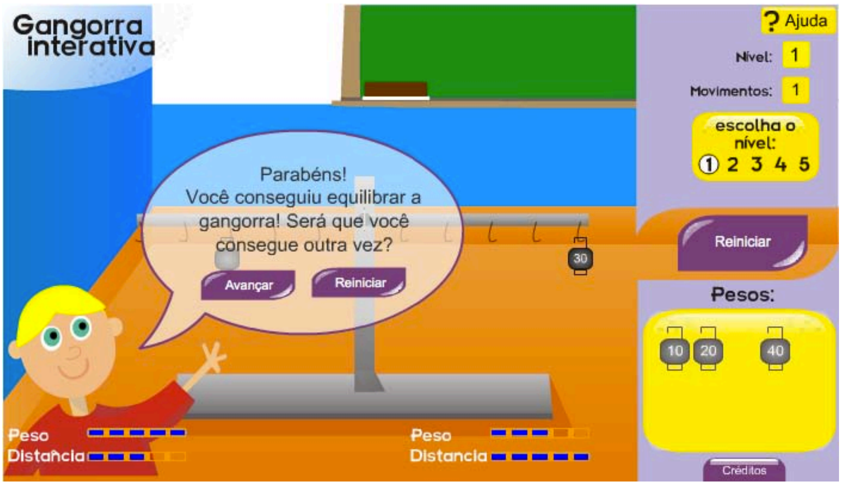


Figura 18 - Solução da Gangorra Interativa 1

Como se pode observar na figura 18, uma solução foi posicionar o peso 30 a uma distância de 5 unidades do ponto de apoio a direita dele. Essa distribuição respeita a propriedade que a razão entre os pesos devem ser a razão inversa entre as distâncias destes pesos até o ponto de apoio.

No nível 3, a priori não sabemos qual peso está posicionado na posição indicada na imagem. Tanto pode ser o de 20 quanto o de 50. A partir de testes, decobrimos qual é o peso e posicionamos adequadamente os pesos para atingir o equilíbrio horizontal almejado

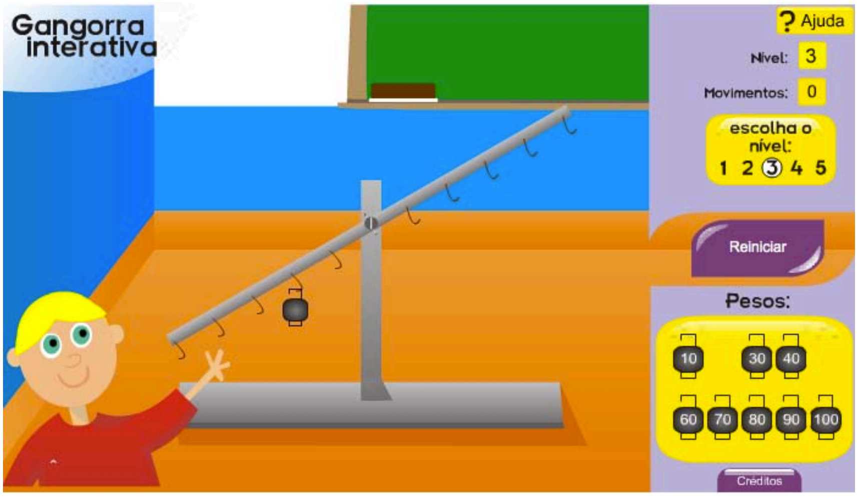


Figura 19 - Gangorra Interativa 2

Se fosse o de 20, estaria em equilíbrio, após um movimento, com o de 40 na posição indicada abaixo:

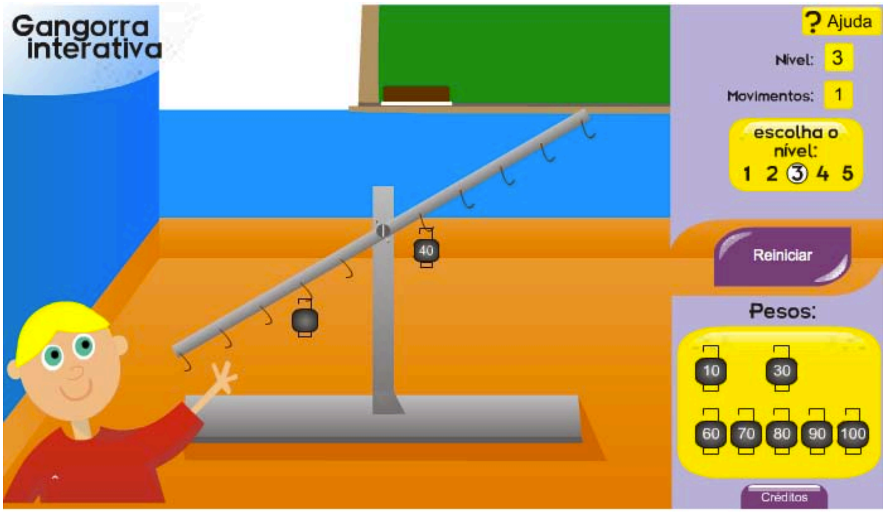


Figura 20 - Teste da Gangorra Interativa 2

Logo o peso desconhecido tem que ser o de 50. Segue abaixo uma possibilidade de atingir o equilíbrio:

Figura 21 - Solução da Gangorra Interativa 2

Como afirmamos acima, a figura 21 aponta para uma possibilidade de resolução. Seria possível atingir o equilíbrio com menos movimentos? Observe que nesta posição de equilíbrio temos que o somatório dos produtos dos pesos pelas distâncias ao ponto de apoio a direita e a esquerda deste ponto são iguais já que $50.2 = 10.1 + 30.3$. Existem outras formas de equilibrar? Pratique ao máximo a fim de desenvolver o cálculo mental que pode ajudar a resolução das questões convencionais a respeito de médias ou de centro de massa de uma barra. Já que os conceitos se confundem ao nosso favor.

Fica aqui ressaltada a análise interdisciplinar do tema e como a tecnologia pode ser útil ao aprendizado. Não aquela utilizada para reforçar metodologias tradicionais e pouco eficazes, mas sim aquela que leva o aluno a experenciar e internalizar conceitos importantes da matemática e de outras áreas do conhecimento.

Como sugestão, para cada situação de equilíbrio encontrada na Gangorra Interativa o aluno poderia pesquisar ou criar um problema contextualizado em que a solução seja equivalente a encontrada no experimento.

6. CONCLUSÃO

O presente trabalho foi realizado em poucos dias de escrita em comparação aos anos de experiência e reflexões profundas a respeito do tema e suas possíveis implicações. A cada parágrafo concluído, uma nova possibilidade de aplicação. A cada capítulo finalizado, um novo entendimento. O que tornou concluir, aparentemente, a parte mais difícil.

Concluo, portanto, porque uma hora temos que dar um tempo. Deixar que novas ideias, novos desdobramentos surjam. Concluo com a certeza de que muito pode ser acrescentado em um momento futuro. Dou fim a um trabalho incompleto, mas que pode contribuir significativamente com a formação de alunos e professores em busca de uma melhor Educação para o nosso país.

Apesar da trivialidade do tema, as pesquisas desenvolvidas e explicitadas ao longo das quase cem páginas do desenvolvimento apresentaram uma ampliação do conceito de Média Aritmética. Ficou evidente a riqueza do entendimento desta média como ponto de equilíbrio, tão pouco abordada nos livros didáticos e por nossos professores que quase sempre, como de costume, definem apenas a Média com a noção de divisão igualitária, tão importante em diversos contextos, mas pouco eficazes em outros.

Fica após o trabalho a possibilidade de usar a ferramenta adequada a cada situação. A interpretação geométrica, a partir do entendimento de Média como ponto de equilíbrio, ressaltou a influência dos pesos no posicionamento da Média. E como eles interagem com esse posicionamento.

Vale lembrar que para dois valores distintos, a média pôde ser entendida como um valor intermediário entre eles posicionado de tal forma que a razão entre os pesos de cada um dos valores é a razão inversa entre as distâncias de cada um dos valores em torno da média. Assim, se os pesos dos valores extremos estão na razão de 2 para 3, as distâncias dos respectivos valores em torno da média estará na razão de 3 para 2. O que, a partir do entendimento adequado do conceito de razão, permite posicionar de forma simples e objetiva a média entre os extremos. Caso a média já esteja posicionada entre os dois extremos, fica simples inferir os pesos de cada extremo. Talvez essa seja a maior contribuição do presente estudo.

Essa análise para média entre dois valores, possibilita a utilização eficaz de um pensamento proporcional além do desenvolvimento de uma atitude investigativa e que possibilita o desenvolvimento de raciocínio, em detrimento a utilização de algoritmos e processos longos e pouco reflexivos.

A extensão da interpretação para mais de dois valores, perdeu a ideia de proporção inversa entre pesos e distâncias, mas trouxe outras contribuições como: 1) o fato de poder tirar a média para "n" valores fazendo agrupamentos dois a dois que faciltem os cálculos, fazendo valer a proporcionalidade inversa entre pesos e médias quando se tenta substituir dois valores pelo valor médio. E, 2) o fato de o somatório dos produtos pesos dos valores pelas respectivas distância em torno da média ser igual a zero quando se admite a distância como a diferença entre cada valor e a média, nessa ordem. Este segundo fato, fez a ponte entre a posição da média com a posição do ponto de apoio para equilibrar um corpo extenso em posição horizontal. A posição do ponto de apoio pode ser obtida, que pode ser obtida como média aritmética ponderada, é entendida como posição do centro de massa do corpo extenso na Física.

Diversas aplicações, em diversas áreas, vieram a tona, como a concentração final de uma substância, cujos solutos não reagem entre si, é um valor intermediário entre as concentrações iniciais preexistentes, em que os pesos são as respectivas quantidades de cada substância. Essa ideia pode ser estendida para qualquer problema que lide com a noção intuitiva de concentração. Caso as "concentrações" sejam em R$/m^2, os pesos aqui seriam as áreas de cada região. Caso as "concentrações" sejam em m/s, os pesos de cada valor seria a quantidade de segundos em cada velocidade. E a velocidade Média, Média Aritmética Ponderada entre as velocidades iniciais, associadas a seus respectivos pesos.

Em todas essas aplicações, a ferramenta da interpretação geométrica, de média como ponto de equilíbrio, se mostrou de forma muito valiosa. Abreviando processos e culminando com uma resolução mais direta e objetiva de diversas questões de vestibular. Como todos sabem, o tempo hoje faz parte da avaliação mais importante do país para o Ensino Médio, o Novo Enem. Cabe aos professores e aos alunos aprenderem estratégias mais eficazes de resolução. Aprender a essência para descobrir atalhos. Sempre apoiado em uma construção consistente dos conceitos matemáticos. Em nosso trabalho, as triviais razões, proporções e médias.

Ao final apontamos para uma possibilidade de desenvolvimento de um pensamento aritmético mais aguçado a partir da utilização da gangorra interativa, recheada de conceitos importantes das mais diversas áreas. Uma oportunidade para encantar os alunos com uma possibilidade real e relevante para uma melhor compreensão do conceito de Média que não se resuma a somar e dividir por tanto. Os problemas de Equilíbrio da Física podem e devem ser problemas motivadores.

Deixamos como sugestão, para trabalhos futuros, a criação de uma sequência didática para um desenvolvimento adequado das abstrações e propriedades aqui desenvolvidas a luz de uma teoria de Educação Matemática, mais formal e menos tácita. Por enquanto, vale as experiências no intuito de acertar e a criatividade dos professores e alunos na abordagem do tema.

O trabalho que aqui se finaliza, teve objetivo apontar para esse novo olhar primeiramente, já que a literatura apresenta poucos trabalhos na área.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRANTES, P., SERRAZINA, L., & OLIVEIRA (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

ANJOS, D.; GITIRANA, V. Exploração do conceito de média nos em livros didáticos das séries finais do Ensino Fundamental. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2. 2008. Recife. **Anais...** Recife: UFRPE, 2008. Disponível em: <http://www.ded.ufrpe.br/sipemat/anais.html>. Acesso em: 10, set. 2008.

ÁVILA, G. Razões, proporções e regra de três. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n. 8, p 1-8, 1986.

BERNAL, M. M. Estudo do objeto proporção: elementos de sua organização matemática como objeto a ensinar e como objeto ensinado. 2004. 242f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianopólis. 2004.

BOYER, C – "História da Matemática" – trad. Elza Gomide, Ed. Edgar Blücher Ltda, São Paulo, 1974.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC, 2006. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf.>

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática (3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental)**. Brasília: SEF/MEC, 1998.

BRASIL, Secretaria de Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio): Parte III - Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ ciencian.pdf> Acessado no dia 25 de Junho de 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretária da Educação Média e Tecnologia. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): Ensino Médio. Brasília 1999.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental, Brasília: MEC/SEF, 1998.

CAZORLA, I. M. Média aritmética: um conceito prosaico e complexo. *Anais do IX Seminário de Estatística Aplicada*, Rio de Janeiro, 2003.

CASTRO-FILHO, J. A. FREIRE, R. S.; MACEDO, L. N.; SALES, G. L.; OLIVEIRA, E. M. *Gangorra Interativa*: um objeto de aprendizagem para os conceitos de grandezas inversamente proporcionais. Workshop de informática Educativa – WIE, Campo Grande/MS, 2006.

COSTA DA FONTE, A. Médias, desigualdades e problemas de otimização. 2013. 61f. Trabalho de Conclusão (Mestrado Profissional) - Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife. 2013

DRUCK, S. **A crise no ensino de matemática no Brasil.** *Revista do Professor de Matemática.* v. 53, n. 53, p. 01- 05, 2004.

EVES, H. – "Introdução à História da Matemática" – trad. Hygino H. Domingues, Editora da UNICAMP, 1995

MAGINA, S.; CAZORLA, I.; GITIRANA, V.; GUIMARÃES, G. Concepções e concepções alternativas de média: Um estudo comparativo entre professores e alunos do Ensino Fundamental. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/er/nspe2/04.pdf> Acesso em 20 de Abril de 2014.

MARQUES, M; GITIRANA, V; GUIMARAES, G. Compreensões de Alunos e Professores sobre Média Aritmética. Disponível em: <http://www.redalyc.org/pdf/2912/291222113006.pdf> Acesso em 20 de Abril de 2014.

NETO, Ernesto Rosa. **Didática da Matemática.** São Paulo: Ática, 1994.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Base curricular comum para as redes públicas de ensino de Pernambuco**: Matemática/ Recife, SE. 2008. Disponível em: http://www.educação.pe.gov/diretorio/bccmat.pdf

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Orientações Teórico-Metodológicas – ensino médio.** Recife: SE. 2008. Disponível em: http://www.educação.pe.gov/diretorio/matematica_03.pdf

SAD, Lígia A. **Educação Matemática: unidade na história e nos objetivos educacionais.** In: ANAIS do VII EPEM, São Paulo – SP: junho de 2004, p. 1-5.