Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Departamento De Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Método Húngaro e Aplicações

Carlos Eduardo Silva dos Santos

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Recife
Agosto de 2014

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA
Departamento de Matemática

Carlos Eduardo Silva dos Santos

Método Húngaro e Aplicações

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: *Maité Kulesza*

Recife
26 de Agosto de 2014

Dedico este trabalho aos meus pais, filha e noiva.

Agradecimentos

- Agradeço primeiramente a Deus por ser o autor da minha vida sempre me ajudando a vencer.

- A meus pais por todo o apoio e por serem muito importantes na minha formação como pessoa. Por me incentivarem e estarem sempre do meu lado.

- A minha filha que me orgulha e me dá forças pra continuar.

- A minha noiva que esteve sempre do meu lado me incentivando e compreendendo todo sacrifício e lutas que passei para chegar até aqui.

- Aos meus amigos que foram importantes nas horas difíceis dizendo pra não desistir.

- Aos amigos da minha turma do PROFMAT que tive o privilégio de conhecer e compartilhar diversas experiências, sendo em especial, Emerson Dantas, Josemar Claudino, Danilo Campos, Marcio Rodrigo, José Roberto e José Ferreira.

- Aos meus gestores José Marcos, Adriana de Biase, Marcia Albuquerque, Sandra Albuquerque e minha coordenadora Suely Souza que acompanharam, me incentivaram e compreenderam esta fase que estava passando.

- A minha orientadora, professora Maité Kulesza, por ter aceitado me orientar e pelas grandes ajudas e querer sempre que eu desse o meu melhor me guiando neste sentido.

- Ao professor Leon Denis da Silva que sugeriu o tema do trabalho e pela ajuda com o Latex.

- A Capes pelo incentivo financeiro.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar um método para resolução de problemas de alocação de tarefas. O método utilizado, dito método húngaro, é um algoritmo baseado na operação de matrizes. Serão mostrados alguns exemplos de sua utilização e as justificativas de cada passo do algoritmo. Além disso, pretende-se apresentar uma proposta de atividade utilizando este método com os alunos do ensino básico, de modo a envolvê-los em problemas matemáticos que estejam inseridos no contexto do problema de alocação de tarefas.

Palavras-chave: Alocação de tarefas, método húngaro, educação básica.

Abstract

The objective of this paper is to present a method for solving assignment problems. The method, said Hungarian method, is an algorithm based on the operation of matrices. Some examples of its use and the reasons for each step of the algorithm are shown. In addition, we intend to submit a proposal for activity using this method with elementary school students in order to involve them in math problems that are set within the context of the assignment problem.

Keywords: Assignment problem, hungarian method, basic education.

Sumário

Introdução

Cada vez mais depara-se com situações em que precisa-se tomar decisões a fim de obter melhores resultados na relação custo-benefício, como também obter ferramentas que facilitem estas escolhas.

Desta forma, tem-se por objetivo apresentar neste trabalho, um método que tem por finalidade a resolução de problemas de alocação de tarefas, o qual é um caso particular do problema de transporte. Este, por sua vez, visa encontrar uma melhor distribuição de produtos de uma certa origem para um destino, de maneira mais eficiente a fim de obter melhores ganhos.

O método que será usado neste trabalho é o Método Húngaro, um algoritmo de otimização sobre uma matriz-custo para o problema de alocação de tarefas. Esse método se deve aos Húngaros E. Egerváry e D. König.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos. No primeiro capítulo, serão apresentadas as definições do problema de transporte e do problema de alocação de tarefas. Também será apresentando o teorema da alocação ótima que é a ferramenta fundamental para justificar o Método Húngaro, temática central deste texto.

No segundo capítulo, o Método Húngaro será apresentado com todas as suas etapas, visando resolver os problemas de alocação, bem como os pré-requisitos para sua aplicação em determinados problemas.

Nos capítulos seguintes serão mostradas aplicações do algoritmo, com exemplificações sobre a temática levantada, objetivando uma melhor compreensão de suas etapas e buscando aproximar os exemplos de problemas do cotidiano.

No que diz respeito à educação básica de ensino, foi criada uma proposta pedagógica onde apresenta-se o método como um atrativo para despertar o envolvimento dos alunos da educação básica em situações problemas que envolvam a matemática de forma contextualizada.

Como apêndice a este trabalho, foi adicionado um exemplo de um problema de alocação de tarefas resolvido usando a função Solver do Excel. O método utilizado neste caso é o método Simplex.

CAPÍTULO 1

O problema de alocação de tarefas

Neste capítulo será apresentado o problema de alocação de tarefas, objeto central deste trabalho.

A **alocação de tarefas** é um caso particular do **problema de transporte** e consiste na distribuição de produtos de determinadas origens para certos destinos. Estas alocações podem ser feitas de várias formas, no entanto, existe pelo menos uma alocação que maximiza ou minimiza o custo da distribuição, chamada de **alocação ótima**. O objetivo deste trabalho é obter esta alocação.

Inicialmente será apresentado o problema de transporte. Considere os seguintes conjuntos:

- O conjunto dos m locais de oferta de um produto onde cada local de oferta i pode fornecer, no máximo, a_i unidades.
- O conjunto dos n locais de demanda para recebimento dos produtos, onde cada local de demanda j deve receber, pelo menos, b_j unidades.

Definição 1.1. *Denotamos por c_{ij} o* **custo** *para transportar cada unidade do ponto de oferta i para o ponto de demanda j.*

Definição 1.2. *A* **matriz-custo** *é a matriz C_{mxn} dada por:*

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

onde cada elemento c_{ij} é o custo para transportar cada produto da i-ésima origem ao j-ésimo destino.

Seja x_{ij} o número de unidades despachadas do local de oferta i para o local de demanda j.

Definição 1.3. *O* **problema de transporte** *trata de obter o mínimo da função*

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}, \tag{1.2}$$

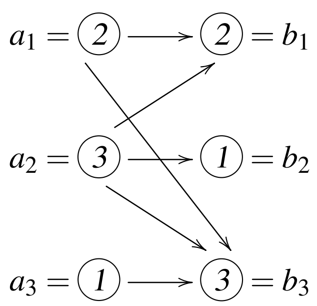
com as seguintes restrições de oferta e demanda abaixo:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \quad \leq a_i \quad (para\ i = 1,2,3,\dots,m), \tag{1.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \quad \geq b_j \quad (para\ j = 1,2,3,\dots,n). \tag{1.4}$$

Definição 1.4. *Se uma alocação é efetuada de modo a minimizar ou maximizar a função Z, ela é dita uma* **alocação ótima**.

Exemplo 1. *Sejam três origens* $(a_1, a_2$ e $a_3)$*, com as seguintes quantidades de produtos:* $a_1 = 2$*,* $a_2 = 3$ e $a_3 = 1$*. Sejam também três diferentes destinos* $(b_1, b_2$ e $b_3)$ *com as seguintes quantidades de armazenamento:* $b_1 = 2$*,* $b_2 = 1$ e $b_3 = 3$*. Uma possível distribuição desses produtos é dada pelo esquema abaixo:*



O esquema mostra que a partir das origens a_1, a_2 e a_3 *só poderão sair 2, 3* e *1 produtos, respectivamente, e que os destinos* b_1, b_2 e b_3 *só poderão receber 2, 1 e 3 destes produtos, respectivamente. Além disso, como as setas correspondem às distribuições realizadas, a matriz* x_{ij} *é dada por:*

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

verificadas as restrições:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{3} x_{1j} = 1+0+1 = 2 = a_1 \\ \sum_{j=1}^{3} x_{2j} = 1+1+1 = 3 = a_2 \\ \sum_{j=1}^{3} x_{3j} = 0+0+1 = 1 = a_3 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 1+1+0 = 2 = b_1 \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i2} = 0+1+0 = 1 = b_2 \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i3} = 1+1+1 = 3 = b_3 \end{cases}.$$

Esta é uma das possibilidades de alocação das origens para seus destinos mediante as restrições.

Definição 1.5. *Um problema de transporte é dito* **balanceado** *se*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{1.5}$$

Neste caso, a oferta cumpre toda a demanda.

Quando um problema não está balanceado é possível balanceá-lo. Em um caso, a capacidade de oferta é maior do que a demanda e em outro, a demanda é maior do que a capacidade de oferta.

Suponha que a diferença entre o somatório dos produtos ofertados pelo somatório das demandas dos destinos seja igual a d, ou seja,

$$d = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{1.6}$$

Este caso é solucionado com a criação de um ponto de demanda fictício com custos de transporte iguais a zero e demanda d.

Desta forma, o somatório dos produtos ofertados será igual ao somatório das demandas dos destinos depois de ser acrescentado d à demanda.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j + d. \tag{1.7}$$

Suponha, agora, que a diferença entre o somatório das demandas dos destinos pelo somatório dos produtos ofertados seja igual a f, ou seja,

$$f = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{1.8}$$

Este caso é solucionado com a criação de um ponto de oferta fictício com custos de transporte iguais a zero e oferta f. Dessa forma temos,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + f = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{1.9}$$

Neste trabalho será estudado o seguinte problema:

Definição 1.6. *Um problema de transporte balanceado com $a_i = 1$ e $b_j = 1$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$, e restrições*

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (\text{para } i = 1, 2, 3, \ldots, n), \tag{1.10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (\text{para } j = 1, 2, 3, \ldots, n) \tag{1.11}$$

é dito **problema de alocação de tarefas**.

Neste caso, como cada local de oferta fornece apenas uma unidade para cada local de demanda, as variáveis do problema são:

- $x_{ij} = 1$, se o local de oferta i fornece para o local de demanda j,
- $x_{ij} = 0$, caso contrário.

Logo, custo da alocação será dado pela soma

$$\sum_{j=1}^{n} c_{j_k j}, \tag{1.12}$$

onde os $c_{j_k j}$ são as entradas da matriz-custo referente às posições da alocação e os índices j_k são diferentes dois a dois.

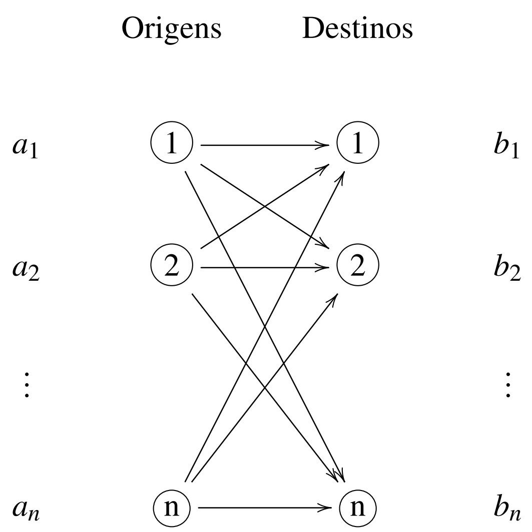
Observação 1.1. *Se a soma* (1.12) *for mínima ou máxima, esta alocação é dita* **alocação ótima** *para o problema.*

Observa-se que existem $n!$ maneiras distintas de fazer as devidas alocações das tarefas. Isso ocorre pois existem n maneiras de alocar a primeira tarefa, $n-1$ maneiras de alocar a segunda, $n-2$ maneiras de alocar a terceira e, assim por diante, dando um total de $n.(n-1).(n-2).(n-3)....3.2.1 = n!$ maneiras de alocar as tarefas. Esta alocação apresenta as seguintes restrições,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+\ldots+x_{1n} = 1 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+\ldots+x_{2n} = 1 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+\ldots+x_{3n} = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}+\ldots+x_{n1} = 1 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+\ldots+x_{n2} = 1 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+\ldots+x_{n3} = 1 \end{cases}$$

e é mostrada no esquema abaixo:



Exemplo 2. *Considere o seguinte exemplo do problema de alocação de tarefas:*

Uma faculdade pretende instalar ar-condicionado em três de seus prédios num período de uma semana e convida três firmas para submeter orçamentos para cada um dos prédios. Na tabela 2 aparecem os orçamentos em unidades de 1000 reais.

	Prédio 1	*Prédio 2*	*Prédio 3*
Firma 1	*53*	*96*	*40*
Firma 2	*47*	*87*	*41*
Firma 3	*60*	*92*	*36*

com a seguinte matriz-custo:

$$C = \begin{bmatrix} 53 & 96 & 40 \\ 47 & 87 & 41 \\ 60 & 92 & 36 \end{bmatrix}.$$

Como se trata de uma matriz 3x3, existem 6 alocações possíveis e pode-se listar todas as possibilidades. De posse das 6 combinações, soma-se os orçamentos de cada firma e obtém-se o orçamento total de menor custo para a faculdade.

De fato, tem-se as seguintes possibilidades:

Firma 1 → Prédio 1	*53*
Firma 2 → Prédio 2	*87*
Firma 3 → Prédio 3	*36*
Total	*176*

Firma 1 → Prédio 2	*96*
Firma 2 → Prédio 1	*47*
Firma 3 → Prédio 3	*36*
Total	*179*

Firma 1 → Prédio 3	*40*
Firma 2 → Prédio 1	*47*
Firma 3 → Prédio 2	*92*
Total	*179*

Firma 1 → Prédio 1	*53*
Firma 2 → Prédio 3	*41*
Firma 3 → Prédio 2	*92*
Total	*186*

Firma 1 → Prédio 2	*96*
Firma 2 → Prédio 3	*41*
Firma 3 → Prédio 1	*60*
Total	*197*

Firma 1→ Prédio 3	*39*
Firma 2 → Prédio 2	*67*
Firma 3 → Prédio 1	*60*
Total	*187*

Observe que a seguinte alocação de tarefas terá o menor custo dentre as demais:

Firma 1 → Prédio 1	*53*
Firma 2 → Prédio 2	*87*
Firma 3 → Prédio 3	*36*
Total	*176*

Observe também, que para esta escolha os valores de x_{ij} da matriz de alocação são dados por:

$$x_{ij} = 1 \text{ se } i = j, \quad \text{e} \quad x_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j.$$

Ou seja,

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $Z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij}$ *é a função a ser minimizada, o custo mínimo é dado pelo traço da matriz produto* CX^t. *Ou seja,*

$$mathrmMin(z) = \mathrm{tr}(CX^t).$$

Desta forma, tem-se que:

$$CX^t = \begin{bmatrix} 53 & 96 & 40 \\ 47 & 87 & 41 \\ 60 & 92 & 36 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 & 96 & 40 \\ 47 & 87 & 41 \\ 60 & 92 & 36 \end{bmatrix}.$$

Ficando com $\mathrm{Min}(Z) = 53 + 87 + 36 = 176.$

A questão que se apresenta agora é como obter esta alocação ótima, no caso em que o número de possibilidades torne inviável a verificação caso a caso. A seguir será apresentando um teorema que será fundamental para obter esta alocação.

Teorema 1.1. *(Alocação Ótima) Se um número real é somado ou subtraído de todas as entradas de uma linha ou coluna de uma matriz-custo, então uma alocação ótima para a matriz-custo resultante é também uma alocação ótima para a matriz-custo original.*

Prova:

Considere a matriz-custo original $C_{n\times n}$:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

Suponha que $c_{1_k1}, c_{2_k2}, \dots, c_{j_kj}, \dots, c_{n_kn}$ são as entradas da alocação ótima da matriz-custo original, onde os índices $1_k, 2_k, \dots, n_k$ são diferentes dois a dois. Desta forma, tem-se que o custo mínimo de alocação é a soma de todas as entradas acima citadas, ou seja,

$$S_o = c_{1_k1} + c_{2_k2} + \dots + c_{j_kj} + \dots + c_{n_kn}.$$

Seja S a soma das entradas de outra alocação qualquer. Como S_o é a alocação ótima, então $S_o \leq S$ para toda S dada.

Se um valor p real é adicionado a todas as entradas da coluna j da matriz-custo C, tem-se uma nova matriz C', a saber:

$$C' = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j}+p & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j}+p & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij}+p & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nj}+p & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} .$$

Neste caso, somando as entradas da matriz C' correspondentes às entradas da alocação ótima da matriz C, tem-se a seguinte soma:

$$S'_o = c_{1_k1} + c_{2_k2} + \ldots + (c_{j_kj} + p) + \ldots + c_{n_kn} = S_o + p.$$

Como o valor p foi somado a todas as entradas da coluna j, então todas as possíveis alocações serão acrescidas de p. Ou seja, se S' é a soma das entradas de uma alocação em C', então $S' = S + p$, onde S é a alocação na matriz C com as mesmas entradas que a alocação S' em C'.

Dessa forma, segue que:

$$S'_o = S_o + p \leq S + p = S'.$$

Logo, S' é alocação ótima da matriz-custo C' e possui as mesmas entradas que a alocação ótima da matriz-custo C, uma vez que qualquer uma das outras sequências de entradas de C' nos dão uma soma maior ou igual a $S_o + p$, pelo fato da soma mínima na matriz C ser S_o e em C' ter sido somado o valor de p a todas as entradas de uma coluna.

Com um argumento análogo, podemos mostrar que o resultado também se aplica se somarmos p a uma linha de C.

■

No capítulo seguinte, será apresentado um algoritmo para obter esta alocação ótima.

CAPÍTULO 2

O Método Húngaro

Este método foi apresentando em 1931, pelos húngaros E. Egerváry e D. König, Este último já havia, em 1916, demonstrado um teorema combinatório que serviu como base para a criação do algoritmo em questão. Em 1955, H. W. Kuhn, pesquisador húngaro de programação linear, fez uma homenagem em um de seus trabalhos aos descobridores do algoritmo, e a partir deste momento o método foi denominado de **Método Húngaro**. Tal método pode ser aplicado em diversos problemas de alocação de tarefas.

O método húngaro se baseia na seguinte ideia: Suponha que temos uma matriz-custo C_{nxn} com todas as entradas não negativas e que possua n zeros de tal forma que dois deles não estejam na mesma linha ou coluna. Desta forma, a alocação ótima terá soma nula.

Baseado nesta ideia e utilizando o Teorema da Alocação Ótima, será somando ou subtraído um número real de todas as entradas de uma linha ou coluna da matriz-custo a fim de obter os zeros necessários para se identificar de maneira mais clara a alocação ótima.

Antes de apresentar o Método Húngaro, observa-se que o problema deve estar nas seguintes condições:

1. Matriz-custo quadrada,

2. Entradas da matriz-custo inteiras,

3. Problema de minimização.

No entanto, caso o problema não esteja nestas condições, é possível colocá-lo de modo a verificá-las, como justificado abaixo:

- Para que a primeira condição seja satisfeita, basta introduzir uma tarefa ou uma instalação fictícia que não interfira no resultado final;

- Na verdade, esta condição é exigida para facilitar os cálculos computacionais, pois o método vale para qualquer número real. É aconselhável que as entradas sejam números inteiros por questão de arredondamento, soluciona-se este problema multiplicando a matriz-custo por uma potência conveniente de 10;

- Se o problema for de maximização, também se pode colocá-lo na forma conveniente. De fato, considere o conjunto de entradas da matriz-custo. É possível ordenar estes elementos de modo que o conjunto tenha um elemento mínimo q. Ao multiplicar os elementos deste conjunto por -1, a ordem se inverte e o elemento mínimo q será o máximo do novo conjunto. Ou seja, ao encontrar a alocação que minimiza o custo, estas entradas serão aquelas que maximizam o custo do problema original.

Os passos do Método Húngaro para uma dada matriz custo C_{nxn} são os seguintes:

1. Subtraia a menor entrada de cada linha de todas as entradas da mesma linha.

2. Subtraia a menor entrada de cada coluna de todas as entradas da mesma coluna.

3. Risque um traço ao longo de linhas e colunas de tal modo que todas as entradas zero da matriz-custo são riscadas e utilizando um número mínimo de traços.

4. **Teste de Otimalidade**

   (i) Se o número mínimo de traços necessários para cobrir os zeros é n, então uma alocação ótima de zeros é possível, o procedimento é encerrado.

   (ii) Se o número mínimo de traços necessários para cobrir os zeros é menor do que n, então ainda não é possível uma alocação ótima de zeros, continue com o Passo 5.

5. Determine a menor entrada não riscada por nenhum traço. Subtraia esta entrada de todas as entradas não riscadas e depois a some a todas as entradas riscadas tanto na horizontal como na vertical. Retome ao Passo 3.

A seguir, será apresentada a prova de cada passo do algoritmo acima.

Prova:

1. Pelo Teorema da Alocação Ótima, as entradas da alocação ótima serão mantidas após esta operação com a vantagem de que, após o Passo 1, em cada linha será criada, pelo menos, uma entrada zero e todas as outras entradas serão não negativas.

2. Analogamente ao passo anterior, cada coluna terá, pelo menos, uma entrada zero e todas as outras entradas serão não-negativas.

3. Existem diversas maneiras possíveis de riscar os zeros da matriz-custo. O importante é que este passo deve realizar o número mínimo de riscos possíveis, que neste caso deverá ser menor ou igual a n.

4. **Teste de Otimalidade**

(i) Esta etapa é crucial no algoritmo e é devida ao Teorema de König: *Se o número mínimo de traços que atravessam todos os zeros for n, temos uma alocação possível para cada linha ou coluna.*

A consequência é que se este número de traços for n, então existirá um conjunto de n entradas zero, tais que não haverá dois zeros na mesma linha ou coluna.

A demonstração do Teorema de König pode ser encontrada em [4].

(ii) Se o número mínimo de traços necessários para cobrir os zeros é menor do que n, então existem linhas e/ou colunas que não contém zeros. Ou seja, não é possível localizar a alocação ótima.

5. Este passo é justificado pela aplicação do Teorema da Alocação Ótima seguidamente. A prova deste passo será feita com um exemplo para melhor compreensão dos argumentos.

Suponha que m é o número de linhas e colunas riscadas e $c_{ij} = a > 0$ a menor entrada não riscada da matriz C dada abaixo:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & a & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

Para facilitar a visualização da prova, será tomado $m = 2$ e os traços serão representados pela cor vermelha dos elementos da matriz C.

Aplicando o Teorema da Alocação Ótima, soma-se a a todas as entradas das linhas e colunas riscadas, de modo que:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12}+a & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21}+a & c_{22}+2a & \dots & c_{2j}+a & \dots & c_{2n}+a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2}+a & \dots & a & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2}+a & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}. \tag{2.1}$$

Observe que às entradas com dois traços foram adicionadas $2a$, provenientes de uma adição à linha e outra à coluna.

Novamente pelo Teorema 1.1, subtrai-se a de todas as entradas da matriz anterior, resultando em:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11}-a & c_{12} & \dots & c_{1j}-a & \dots & c_{1n}-a \\ c_{21} & c_{22}+a & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1}-a & c_{i2} & \dots & 0 & \dots & c_{in}-a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}-a & c_{n2} & \dots & c_{nj}-a & \dots & c_{nn}-a \end{bmatrix}_{n\times n}. \tag{2.2}$$

Desta forma, verifica-se que estas operações são equivalentes a somar a a todas as entradas com dois traços e subtrair a de todas as entradas não riscadas e que o Teorema 1.1 garante que o Passo 5 mantém a alocação ótima nas mesmas entradas com a vantagem de gerar novas entradas zero.

Além disso, observa-se que a diferença entre todas as entradas da matriz custo inicial e a final é dada por:

$$-\left[m(na) - n^2 a\right] = na(n-m) > 0. \tag{2.3}$$

De fato, seja

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}$$

a soma de todas as entradas da matriz-custo. Somando as entradas da matriz (2.1), tem-se que:

$$\Sigma + m.(na).$$

Fazendo o mesmo com as entradas da matriz (2.2), segue que:

$$\Sigma + m.(na) - n^2 a.$$

Desta forma, a diferença entre a soma da matriz inicial e final, resulta em:

$$\Sigma - \left[\Sigma + m.(na) - n^2 a)\right] = -m.(na) + n^2 a = na(n-m) > 0 \quad \text{pois} \quad n > m.$$

Consequentemente, esta expressão nos garante que a soma das entradas da matriz-custo ao final deste passo está decrescendo. De modo que o processo é convergente e acaba após um número finito de iterações. Observe que a alocação ótima não é única. Portanto, poderá existir mais de uma matriz-custo que a represente.

CAPÍTULO 3

Exemplos e Aplicações

3.1 Exemplos

Nesta seção, serão apresentados exemplos de aplicação do Método Húngaro. Os traços serão representados por cores.

3.1.1 Exemplo 1 (Matriz quadrada e minimização)

O chefe do setor de uma fábrica quer distribuir a seus três funcionários a tarefa de operar três de suas máquinas que trabalham com produção. Para isso ele elaborou uma tabela constando o tempo em minutos que cada um leva para fabricação de 100 produtos executando cada máquina:

	Funcionário 1	Funcionário 2	Funcionário 3
Máquina 1	50	45	44
Máquina 2	44	50	45
Máquina 3	45	47	43

Qual máquina, cada funcionário deverá executar para que o tempo de produção seja o menor possível?

Solução:

A seguinte matriz-custo é a seguinte:

$$C = \begin{bmatrix} 50 & 45 & 44 \\ 44 & 50 & 45 \\ 45 & 47 & 43 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o Método Húngaro, tem-se:

Passo 1: Subtrai-se 44 da primeira linha, 44 da segunda e 43 da terceira linha:

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Passo 2: Como a primeira e terceira colunas contém elemento nulo, é subtraído apenas 1 da segunda coluna:

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Passo 3: Risca-se as entradas zero da matriz com um número mínimo de traços horizontais e verticais, onde os traços serão representados por cores:

$$C = \begin{bmatrix} \color{red}{6} & \color{red}{0} & \color{red}{0} \\ \color{green}{0} & \color{green}{5} & \color{green}{1} \\ \color{blue}{2} & \color{blue}{3} & \color{blue}{0} \end{bmatrix}.$$

Passo 4: Como o número mínimo de traços são três, tem-se uma alocação ótima de zeros:

$$C = \begin{bmatrix} 6 & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & 5 & 1 \\ 2 & 3 & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Logo, a distribuição ótima é:

Máquina 1–> Firma 2	45
Máquina 2 –> Firma 1	44
Máquina 3 –> Firma 3	43
Total	132

Com tempo total de 45 + 44 + 43 = 132 minutos.

3.1.2 Exemplo 2 (Matriz quadrada e minimização)

Uma empresa precisa realizar quatro obras distintas em estabelecimentos diferentes vinculados a esta empresa. Para isso é realizada a licitação de quatro empreiteiras que apresentaram seus orçamentos para cada obra, levando em conta o custo do deslocamento e o trabalho a ser realizado conforme quadro abaixo:

Orçamento (em unidades de mil reais)				
	Obra 1	Obra 2	Obra 3	Obra 4
Empreiteira 1	26	35	74	20
Empreiteira 2	26	36	72	22
Empreiteira 3	35	53	80	40
Empreiteira 4	38	48	81	41

Sabendo que cada empreiteira só poderá realizar uma obra, para qual obra deveria ser contratada cada empreiteira para minimizar o custo total das obras?

Solução:

A matriz-custo será dada por:

$$C = \begin{bmatrix} 26 & 35 & 74 & 20 \\ 26 & 36 & 72 & 22 \\ 35 & 53 & 80 & 40 \\ 38 & 48 & 81 & 41 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o Método Húngaro à matriz C, que é a matriz-custo para o problema, temos:

Passo 1: Subtrai-se 20 da primeira linha, 22 da segunda, 35 da terceira e 38 da quarta linha:

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 54 & 0 \\ 4 & 14 & 50 & 0 \\ 0 & 18 & 45 & 5 \\ 0 & 10 & 43 & 3 \end{bmatrix}.$$

Passo 2: Como a primeira e quarta coluna contém valores nulos, subtrai-se apenas 10 da segunda coluna e 43 da terceira:

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 11 & 0 \\ 4 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Passo 3: Riscam-se as entradas zero da matriz com um número mínimo de traços horizontais e verticais, onde os traços serão representados por cores:

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 11 & \color{blue}{0} \\ 4 & 4 & 7 & \color{blue}{0} \\ \color{green}{0} & \color{green}{8} & \color{green}{2} & \color{blue}{5} \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{3} \end{bmatrix}.$$

Passo 4: Como o número mínimo de traços usados no Passo 3 são três, esta ainda não é a alocação ótima de zeros.

Passo 5: Subtrai-se 4, que é a menor entrada não riscada da matriz de cada uma de suas entradas não riscadas e soma-se 4 às entradas riscadas tanto horizontal quanto verticalmente:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Volta ao Passo 3: Riscam-se as entradas zero da matriz com um número mínimo de traços horizontais e verticais, onde os traços serão representados por cores:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Passo 4: Como o número mínimo de traços são quatro, tem-se uma alocação ótima de zeros:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} & 3 & 0 \\ \mathbf{0} & 8 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 7 \end{bmatrix}.$$

Com isso, tem-se a seguinte distribuição ótima das empreiteiras para as obras:

Empreiteira	Obra
Empreiteira 1	Obra 4
Empreiteira 2	Obra 2
Empreiteira 3	Obra 1
Empreiteira 4	Obra 3

O custo total mínimo é 20 + 36+ 35 + 81 = 172, ou seja, R$ 172.000,00.

3.1.3 Exemplo 3 (Matriz quadrada e maximização)

Será elaborada a escalação de um time de futebol com os jogadores de um clube em que não se conhece suas habilidades nas possíveis posições em campo, apenas a do goleiro e do atacante. Pode-se trocar a posição dos jogadores a fim de obter um melhor desempenho do time na posição que ele melhor atua. Será feito um time com dez jogadores na linha. Para isso o técnico testa seus nove jogadores, uma vez que já é conhecida a habilidade do atacante, em cada posição e classifica-os com uma pontuação que varia de 0 a 25 para seu desempenho naquela posição.

Qual é a melhor escolha para as nove posições de modo a ter o melhor rendimento no jogo?

Abaixo segue a figura de um esquema 4-2-3-1 que o técnico quer montar com o time:

Figura 3.1 Esquema Tático

Segue a tabela com os valores obtidos, abaixo:

	Jog. 1	Jog. 2	Jog. 3	Jog. 4	Jog. 5	Jog. 6	Jog. 7	Jog. 8	Jog. 9
Zagueiro A	12	13	10	15	14	5	9	20	10
Zagueiro B	20	15	10	10	17	23	25	5	15
Meia A	13	14	10	15	15	5	8	20	10
Meia B	7	9	12	12	7	6	7	15	12
Meia C	5	6	8	8	5	4	5	10	7
Lateral A	10	10	12	15	9	7	8	7	8
Lateral B	12	9	9	10	10	5	7	13	9
Volante A	15	14	15	16	15	5	10	20	10
Volante B	5	6	8	8	5	4	5	10	7

Solução:

Tem-se aqui um problema de maximização e para isso todas as entradas são multiplicadas por -1 para tornar o problema de minimização e poder usar o Método Húngaro.

De modo que resulta na matriz-custo abaixo:

$$C = \begin{bmatrix} -12 & -13 & -10 & -15 & -14 & -5 & -9 & -20 & -10 \\ -20 & -15 & -10 & -10 & -17 & -23 & -25 & -5 & -15 \\ -13 & -14 & -10 & -15 & -15 & -5 & -8 & -20 & -10 \\ -7 & -9 & -12 & -12 & -7 & -6 & -7 & -15 & -12 \\ -5 & -6 & -8 & -8 & -5 & -4 & -5 & -10 & -7 \\ -10 & -10 & -12 & -15 & -9 & -7 & -8 & -7 & -8 \\ -12 & -9 & -9 & -10 & -10 & -5 & -7 & -13 & -9 \\ -15 & -14 & -15 & -16 & -15 & -5 & -10 & -20 & -10 \\ -5 & -6 & -8 & -8 & -5 & -4 & -5 & -10 & -7 \end{bmatrix}.$$

Passo 1: Subtrai-se -20 de todas as entradas da primeira linha da matriz, -25 da segunda, -20 da terceira, -15 da quarta, -10 da quinta, -15 da sexta, -13 da sétima, -20 da oitava e -10 da nona:

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 10 & 5 & 6 & 15 & 11 & 0 & 10 \\ 5 & 10 & 15 & 15 & 8 & 2 & 0 & 20 & 10 \\ 7 & 6 & 10 & 5 & 5 & 15 & 12 & 0 & 10 \\ 8 & 6 & 3 & 3 & 8 & 9 & 8 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 2 & 5 & 6 & 5 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 3 & 0 & 6 & 8 & 7 & 8 & 7 \\ 1 & 4 & 4 & 3 & 3 & 8 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 5 & 4 & 5 & 15 & 10 & 0 & 10 \\ 5 & 4 & 2 & 2 & 5 & 6 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Passo 2: Subtrai-se 1 de todas as entradas da primeira coluna, 4 da segunda, 2 da terceira, 0 da quarta, 3 da quinta, 2 da sexta, 0 da sétima, 0 da oitava e 3 da nona:

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 8 & 5 & 3 & 13 & 11 & 0 & 7 \\ 4 & 6 & 13 & 15 & 5 & 0 & 0 & 20 & 7 \\ 6 & 2 & 8 & 5 & 2 & 13 & 12 & 0 & 7 \\ 7 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 3 & 6 & 7 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 6 & 6 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 2 & 13 & 10 & 0 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Passo 3: Risca-se as entradas zero da matriz com um número mínimo de traços horizontais e verticais, onde os traços serão representados por cores:

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 8 & 5 & 3 & 13 & 11 & \color{red}{0} & \color{red}{7} \\ \color{blue}{4} & \color{blue}{6} & \color{blue}{13} & \color{blue}{15} & \color{blue}{5} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{red}{20} & \color{red}{7} \\ 6 & 2 & 8 & 5 & 2 & 13 & 12 & \color{red}{0} & \color{red}{7} \\ 7 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & \color{red}{0} & \color{red}{0} \\ \color{blue}{4} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{blue}{2} & \color{blue}{2} & \color{blue}{4} & \color{blue}{5} & \color{red}{0} & \color{red}{0} \\ \color{green}{4} & \color{green}{1} & \color{green}{1} & \color{green}{0} & \color{green}{3} & \color{green}{6} & \color{green}{7} & \color{red}{8} & \color{red}{4} \\ \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{blue}{2} & \color{blue}{3} & \color{blue}{0} & \color{blue}{6} & \color{blue}{6} & \color{red}{0} & \color{red}{1} \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 2 & 13 & 10 & \color{red}{0} & \color{red}{7} \\ \color{green}{4} & \color{green}{0} & \color{green}{0} & \color{green}{2} & \color{green}{2} & \color{green}{4} & \color{green}{5} & \color{red}{0} & \color{red}{0} \end{bmatrix}.$$

Passo 4 e 5: Como ainda não obteve-se nove traços, deve-se subtrair 1, que é a menor entrada não riscada, de todas as entradas não riscadas e somar o mesmo 1 às entradas riscadas por dois traços. Segue-se riscando todos os zeros da matriz com o menor número possível:

$$C = \begin{bmatrix} 6 & \color{blue}{2} & \color{green}{7} & 4 & 2 & 12 & 10 & \color{red}{0} & \color{red}{7} \\ \color{blue}{4} & \color{blue}{6} & \color{green}{13} & \color{blue}{15} & \color{blue}{5} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{red}{21} & \color{red}{8} \\ 5 & \color{blue}{1} & \color{green}{7} & 4 & 1 & 12 & 11 & \color{red}{0} & \color{red}{7} \\ 6 & \color{blue}{1} & \color{green}{0} & 2 & 4 & 6 & 7 & \color{red}{0} & \color{red}{0} \\ 4 & \color{blue}{0} & \color{green}{0} & 2 & 2 & 4 & 5 & \color{red}{1} & \color{red}{1} \\ \color{green}{4} & \color{blue}{1} & \color{green}{1} & \color{green}{0} & \color{green}{3} & \color{green}{6} & \color{green}{7} & \color{red}{9} & \color{red}{5} \\ \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{green}{2} & \color{blue}{3} & \color{blue}{0} & \color{blue}{6} & \color{blue}{6} & \color{red}{1} & \color{red}{2} \\ 3 & \color{blue}{1} & \color{green}{2} & 3 & 1 & 12 & 9 & \color{red}{0} & \color{red}{7} \\ 4 & \color{blue}{0} & \color{green}{0} & 2 & 2 & 4 & 5 & \color{red}{1} & \color{red}{1} \end{bmatrix}.$$

Passos 3, 4 e 5: Como o número de traços ainda é inferior a nove, prossegue-se com os passos. Subtrai-se 1 das entradas não riscadas e soma-se 1 às entradas riscadas por dois traços. Em seguida, riscam-se os zeros novamente:

$$
C = \begin{bmatrix}
5 & 2 & 7 & 3 & 1 & 11 & 9 & 0 & 7 \\
4 & 7 & 14 & 15 & 5 & 0 & 0 & 22 & 9 \\
4 & 1 & 7 & 3 & 0 & 11 & 10 & 0 & 7 \\
5 & 1 & 0 & 1 & 3 & 5 & 6 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\
4 & 2 & 2 & 0 & 3 & 6 & 7 & 10 & 6 \\
0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 6 & 6 & 2 & 3 \\
2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 11 & 8 & 0 & 7 \\
3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 1
\end{bmatrix}.
$$

Passos 3, 4 e 5: Ainda não obteve-se os nove traços, então continua-se o processo. Subtrai-se o 1 das entradas não riscadas e soma-se 1 às entradas com dois riscos. Em seguida, prosegue-se riscando os zeros:

$$
C = \begin{bmatrix}
4 & 2 & 7 & 2 & 1 & 10 & 8 & 0 & 7 \\
4 & 8 & 15 & 15 & 6 & 0 & 0 & 23 & 10 \\
3 & 1 & 7 & 2 & 0 & 10 & 9 & 0 & 7 \\
4 & 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\
4 & 3 & 3 & 0 & 4 & 6 & 7 & 11 & 7 \\
0 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 6 & 3 & 4 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 10 & 7 & 0 & 7 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1
\end{bmatrix}.
$$

Passos 3, 4 e 5: Como o número de traços ainda é inferior a nove, subtrai-se 2 que é a menor entrada não riscada e soma-se 2 às entradas riscadas com dois traços e, em seguida, riscam-se os zeros:

$$
C = \begin{bmatrix}
4 & 2 & 7 & 2 & 1 & 8 & 6 & 0 & 7 \\
6 & 10 & 17 & 17 & 8 & 0 & 0 & 25 & 12 \\
3 & 1 & 7 & 2 & 0 & 8 & 7 & 0 & 7 \\
4 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
4 & 3 & 3 & 0 & 4 & 4 & 5 & 11 & 7 \\
0 & 2 & 4 & 3 & 1 & 4 & 4 & 3 & 4 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 8 & 5 & 0 & 7 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}.
$$

Passos 3, 4 e 5: O número de traços que cobrem os zeros é oito, ou seja, inferoir a 9, então prosegue-se com os passos subtraindo 1 das entradas não riscadas e somando 1 às entradas com dois riscos e em seguida riscam-se os zeros:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 & 1 & 1 & 7 & 5 & 0 & 6 \\ 6 & 10 & 17 & 17 & 9 & 0 & 0 & 26 & 12 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & 0 & 7 & 6 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 5 & 4 & 5 & 12 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Passo 4: Observa-se que o número mínimo de traços utilizados para riscar todos os zeros é nove, ou seja é possível obter uma alocação ótima de zeros conforme matriz abaixo:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 & 1 & 1 & 7 & 5 & \mathbf{0} & 6 \\ 6 & 10 & 17 & 17 & 9 & 0 & \mathbf{0} & 26 & 12 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & \mathbf{0} & 7 & 6 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & 3 & 1 & \mathbf{0} \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & \mathbf{0} & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & \mathbf{0} & 5 & 4 & 5 & 12 & 7 \\ \mathbf{0} & 2 & 4 & 3 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Desta forma temos a seguinte distribuição dos jogadores para que o técnico tenha um melhor rendimento do time:

Jogador	**Posição**
Jogador 1	Lateral B
Jogador 2	Volante
Jogador 3	Volante
Jogador 4	Lateral A
Jogador 5	Meia A
Jogador 6	Meia C
Jogador 7	Zagueiro B
Jogador 8	Zagueiro A
Jogador 9	Meia B

3.1.4 Exemplo 4 (Matriz não quadrada e maximimização)

O professor de uma escola quer inscrever quatro de seus alunos num concurso de matemática que engloba os seguintes temas da Matriz de Referência de Matemática do Ensino Médio: Espaço e Forma, Grandezas e Medidas, Números e Operações/Álgebra e Funções e Tratamento da Informação. Cada prova terá um desses temas e cada aluno só poderá se inscrever em um único tema, uma vez que as provas ocorrerão simultaneamente. Para isso, ele seleciona cinco de seus melhores alunos e aplica um simulado com questões igualmente distribuídas entre os temas do concurso.

Sejam A, B, C, D e E os alunos. O professor elaborou uma tabela com as notas de 0 a 10 que cada aluno obteve em cada um dos temas do exame simulado:

	Tema 1	Tema 2	Tema 3	Tema 4
Aluno A	8	8	7	9
Aluno B	6	7	8	6
Aluno C	9	7	7	10
Aluno D	8	6	10	7
Aluno E	7	7	9	8

onde o Tema 1 é Espaço e Forma, o Tema 2 é Grandezas e Medidas, o Tema 3 é Números e Operações/Álgebra e o Tema 4 é Tratamento da Informação.

Em qual tema cada aluno fará a sua prova?

Solução:

Neste exemplo um dos alunos ficará de fora da prova pois, o professor só escolherá quatro. Para Aplicar o Método Húngaro, precisa-se criar uma coluna fictícia na matriz custo com valores nulos. Observa-se também que o problema é de maximização e para isso, multiplica-se todas as entradas da matriz por -1. Desta forma, fica-se com a seguinte matriz-custo:

$$C = \begin{bmatrix} -8 & -8 & -7 & -9 & 0 \\ -6 & -7 & -8 & -6 & 0 \\ -9 & -7 & -7 & -10 & 0 \\ -8 & -6 & -10 & -7 & 0 \\ -7 & -7 & -9 & -8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seguindo os passo do algoritmo, resulta que:

Passo 1: Subtrai-se -9 da primeira linha,-8 da segunda, -10 da terceira, -10 da quarta e -9 da quinta linha:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 10 \\ 2 & 4 & 0 & 3 & 10 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}.$$

Passo 2: Como a terceira e quarta colunas contém valores nulos, subtrai-se 1 da primeira coluna, 1 da segunda e 8 da quinta coluna:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Passo 3: Riscam-se as entradas zero da matriz com um número mínimo de traços horizontais e verticais, onde os traços serão representados por cores:

$$C = \begin{bmatrix} \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}2 & \color{red}0 & \color{red}1 \\ \color{green}1 & \color{green}0 & \color{red}0 & \color{green}2 & \color{green}0 \\ \color{blue}0 & \color{blue}2 & \color{red}3 & \color{blue}0 & \color{blue}2 \\ 1 & 3 & \color{red}0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & \color{red}0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Passo 4: Como o número mínimo de traços usados no Passo 3 são quatro, esta ainda não é a alocação ótima de zeros.

Passo 5: Subtrai-se 1, que é a menor entrada não riscada da matriz de cada uma de suas entradas não riscadas e soma-se 1 às entradas riscadas tanto horizontal quanto verticalmente:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Passo 3: Risca-se as entradas zero da matriz com um número mínimo de traços horizontais e verticais, onde os traços serão representados por cores:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Passo 4: Como o número mínimo de traços são cinco, tem-se uma alocação ótima de zeros. Verifica-se umas das alocações ótima na matriz abaixo:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & \mathbf{0} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ficando com a seguinte distribuição:

Alunos	**Tema**
Aluno A	Grandezas e Medidas
Aluno B	Não fará a prova
Aluno C	Espaço e Forma
Aluno D	Números e Operações/Álgebra
Aluno E	Tratamento da Informação

3.1.5 Exemplo 5 (Matriz quadrada e minimização)

O dono de um estabelecimento designou a três de seus empregados que realizassem alguns serviços de melhoria em sua casa de campo, como pintura das portas, cortar a grama e lavar a parte interna da casa. Para isso, perguntou a cada um quanto cobrariam por cada serviço. Abaixo seguem os valores dados, em reais.

	Cortar	Pintar	Lavar
Empregado 1	40	60	30
Empregado 2	37	75	27
Empregado 3	35	63	40

Para qual serviço cada um será enviado, para que o dono do estabelecimento tenha uma menor despesa?

Solução:

A questão nos dá a seguinte matriz-custo:

$$C = \begin{bmatrix} 40 & 60 & 30 \\ 37 & 75 & 27 \\ 35 & 63 & 40 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método Húngaro, tem-se:
Passo 1: Subtrai-se 30 da primeira linha, 27 da segunda e 35 da terceira linha:

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 0 \\ 10 & 48 & 0 \\ 0 & 28 & 5 \end{bmatrix}.$$

Passo 2: Como a primeira e terceira colunas tem elementos nulos, subtrai-se apenas 20 da segunda coluna:

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 10 & 28 & 0 \\ 0 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Passo 3: Riscam-se as entradas zero da matriz com um número mínimo de traços horizontais e verticais, onde os traços serão representados por cores:

$$C = \begin{bmatrix} \color{red}{10} & \color{red}{0} & \color{red}{0} \\ \color{green}{10} & \color{green}{28} & \color{green}{0} \\ \color{blue}{0} & \color{blue}{8} & \color{blue}{5} \end{bmatrix}.$$

Passo 4: Como o número mínimo de traços é três, tem-se uma alocação ótima de zeros:

$$C = \begin{bmatrix} 10 & \mathbf{0} & 0 \\ 10 & 28 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Fica-se com a seguinte distribuição dos serviços:

O empregado 1 pintará as postas, o empregado 2 lavará a casa e o empregado 3 cortará a grama, com custo total do serviço de R$122,00 (60 + 27 + 35).

3.2 Aplicações

Este método é de grande utilidade em vários tipos de problemas, abaixo serão elencados alguns deles:

3.2.1 Economia de custos

- Recursos Zootécnicos

A administração de recursos zootécnicos leva à tomada de decisões para se obter um melhor desempenho, tanto na maximização dos ganhos produtivos quanto na minimização dos recursos utilizados que levem a um bom retorno com baixo investimento.

Um exemplo a ser citado seria o seguinte: Considere três campos disponíveis para o pastejo, de modo que três rebanhos situam-se a diferentes distâncias de cada campo e que precisa-se alocar cada rebanho em campos distintos, percorrendo a menor distância possível.

Pode-se verificar a importância nos resultados deste exemplo, pois ele gera uma minimização de mão-de-obra para o deslocamento dos rebanhos e diminuição dos gastos com a alocação o que acarreta em maximização dos ganhos.

- Empresas

São diversas as empresas de diferentes ramos em que se necessita tomar decisões corretas na distribuição de seus recursos a fim de obter melhores retornos financeiros.

Como exemplo, tem-se:

1. Distribuição de maquinários a diferentes destinos visando menor custo com o transporte.
2. Distribuição de funcionários para operar máquinas distintas levando em conta a capacidade de produção de peças por cada operário em cada máquina.
3. Transferência de diretores de empresas para locais de trabalho diferentes observando os custos que cada um teria em cada local de destino.

3.2.2 Distribuição de disciplinas e horários da escola

Quando se trata de distribuir os professores nas suas disciplinas em horários específicos levando em conta suas restrições, o trabalho gerado é um tanto exaustivo, principalmente quando existem muitas salas de aula e muitas restrições nos horários. Para isso, ao longo do tempo foram sendo desenvolvidos métodos para solucionar esse problema de maneira mais fácil.

Dentre os métodos que foram desenvolvidos tem-se o Método Húngaro que foi aplicado para o problema de quadro de horários que se baseou na matriz de incidência de horários que se assemelha a matriz de incidência de transporte.

CAPÍTULO 4

Proposta Pedagógica

Objetivos:

- Aproximar os alunos da educação básica a situações do dia a dia em que se utiliza a matemática.
- Apresentar situações problemas envolvendo distribuição de tarefas para que o aluno busque estratégias para escolher qual a melhor distribuição a fim de obter maiores ganhos.
- Apontar a importância desse problema e as relações que pode-se construir com os conceitos matemáticos.

Público alvo:

- Alunos do 2º Ano do Ensino Médio

Conteúdo Abordado:

- Combinatória, Matrizes

Tempo de execução:

- 2 h/aula

Metodologia:

1. Apresentar uma situação problema e construir uma tabela com os dados e discutir com os alunos as possíveis combinações para a alocação das tarefas verificando qual a melhor escolha.
   - Os alunos farão uso do conceito de combinatória para resolução do problema.
2. Apresentar o método Húngaro para resolução do problema acima, mostrando sua eficácia no ganho de tempo.

Atividade:

Três alunos participaram da semana de matemática de sua escola e foram desafiados a apresentarem seus trabalhos em outras escolas. Sabendo que os três alunos moram em localidades distintas e que cada aluno apresentará seu trabalho em uma única escola. Qual a melhor distribuição desses alunos para que se tenha um menor custo com pagamento de locomoção, uma vez que eles partirão de suas residências?

Abaixo temos a tabela com os valores para levar cada aluno para cada escola:

	Escola 1	Escola 2	Escola 3
Aluno A	R$ 30,00	R$ 25,00	R$ 20,00
Aluno B	R$ 22,00	R$ 18,00	R$ 30,00
Aluno C	R$ 20,00	R$ 15,00	R$ 25,00

Apêndice

Recursos computacionais para resolução de problemas de alocação de tarefas

Cada vez mais os recursos tecnológicos vão aumentando e transformando o processo, que outrora era exaustivo, em maneiras mais rápidas e eficazes. O Método Húngaro para alocação de tarefas é um método que surgiu em uma época de poucos computadores e assim era realizado de maneira manual.

Como foi visto, o Método Húngaro trouxe consigo uma maneira mais prática e fácil de resolver os problemas de alocação, porém isto ainda pode ser aperfeiçoado com o implemento de recursos computacionais. Principalmente para casos em que os dados do problema são muito grandes.

Neste capítulo será vista uma maneira de resolução do problema de alocação utilizando-se do MS Excel rodado em Visual Basic. Abaixo, segue o passo a passo:

Considere, como exemplo, o seguinte problema:

Em uma empresa deve-se alocar quatro operários A, B, C e D para as máquinas X, Y, Z e K. Queremos saber qual é o tempo ótimo para que cada operário seja efetivo em sua respectiva máquina e também saber quanto dura um ciclo de produção total?

Abaixo serão mostradas as etapas a serem seguidas:

1. Cria-se uma tabela no Excel com os dados do problema. No caso, os valores de tempo em segundos de cada operário em cada uma das máquinas.

2. Faz-se uma nova tabela, igual à primeira, porém com seus valores nulos e no campo *Total,* utiliza-se a *auto-soma* tanto em linha como em coluna.

3. Cria-se um item de oferta e demanda todos iguais a um, uma vez que cada operário irá para um único destino.

4. Depois cria-se uma célula com a função *soma-produto*, que no nosso exemplo será na célula H19 com produto das matrizes dos valores da primeira e segunda tabela que foi criada.

Com as etapas acima fica-se com a seguinte configuração:

SEGUNDOS	MAQUINA				OFERTA
OPERARIOS	X	Y	Z	K	1
A	5	24	13	7	1
B	10	25	3	23	1
C	28	9	8	5	1
D	10	17	15	3	1
DEMANDA	1	1	1	1	

SEGUNDOS	MAQUINA				TOTAL	SINAL	OFERTA
OPERARIOS	X	Y	Z	K		=	1
A	1	0	0	0	1	=	1
B	0	0	1	0	1	=	1
C	0	1	0	0	1	=	1
D	0	0	0	1	1	=	1
TOTAL	1	1	1	1	20		
SINAL	=	=	=	=			
DEMANDA	1	1	1	1			

Figura 4.1

5. Agora, será utilizada a função *Solver*, que faz parte dos complementos do Excel para colocar as restrições e comandos para o funcionamento do programa.

    i. Como se trata de uma minimização seleciona-se o programa para opção *minimização*. Coloca-se também a célula da *soma-produto* H19 em *definir objetivo* e no campo *células variáveis*, as células da segunda tabela, ou seja, D15 a G18.

    ii. Adiciona-se algumas restrições, como o total na coluna igual à oferta e o total na linha igual à demanda.

6. Após este passo, em *Opções*, seleciona-se o item *Mostrar resultados de iterações* e clica-se em *Ok*. A página retornará para a anterior onde clica-se em *Resolver* e, em seguida, *Ok* e em *Continuar* até chegar ao resultado final.

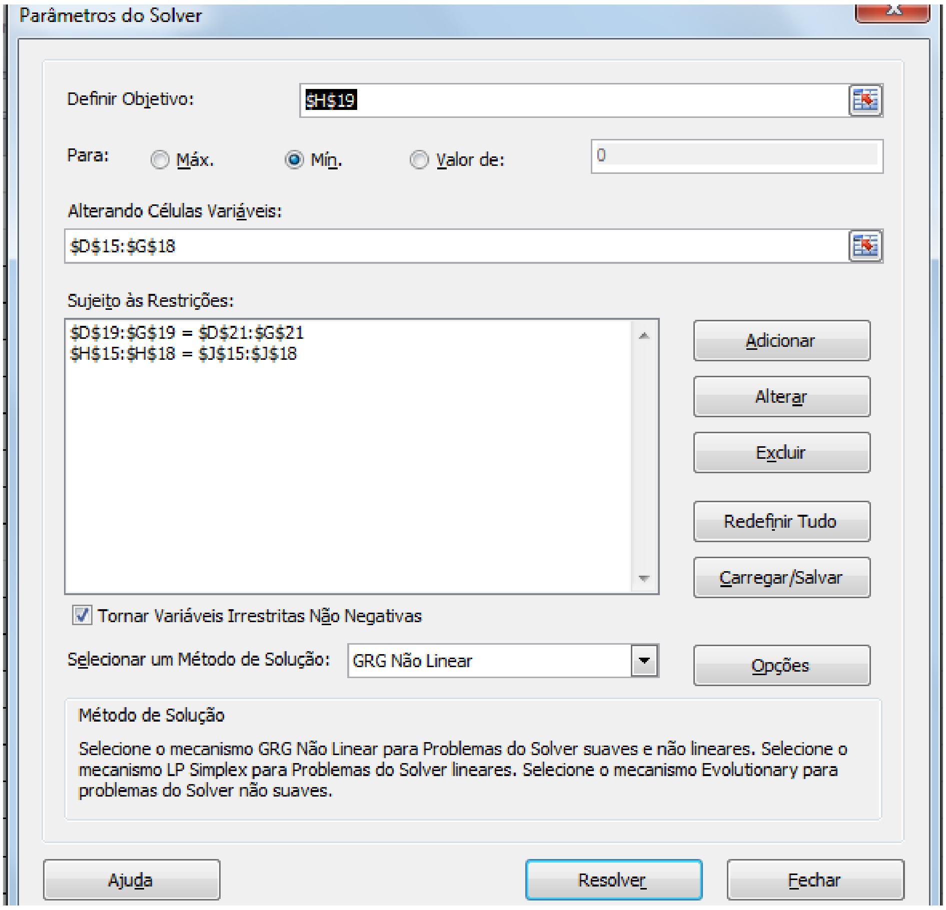

Parâmetros do Solver
Definir Objetivo:
$H$19
Para:
Máx.
Mín.
Valor de:
0
Alterando Células Variáveis:
$D$15:$G$18
Sujeito às Restrições:
$D$19:$G$19 = $D$21:$G$21
$H$15:$H$18 = $J$15:$J$18
Adicionar
Alterar
Excluir
Redefinir Tudo
Carregar/Salvar
Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas
Selecionar um Método de Solução:
GRG Não Linear
Opções
Método de Solução
Selecione o mecanismo GRG Não Linear para Problemas do Solver suaves e não lineares. Selecione o mecanismo LP Simplex para Problemas do Solver lineares. Selecione o mecanismo Evolutionary para problemas do Solver não suaves.
Ajuda
Resolver
Fechar

Figura 4.2

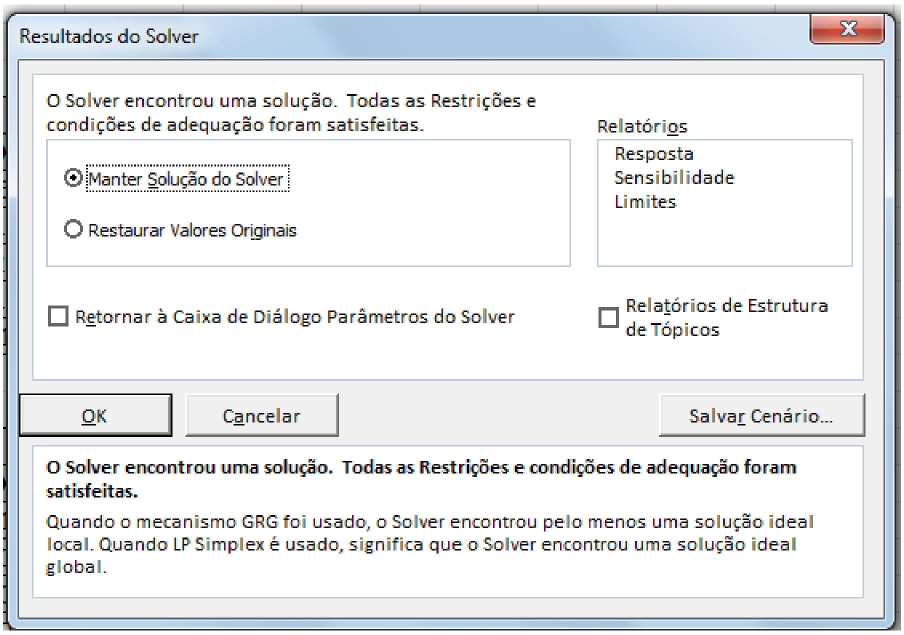


Figura 4.3

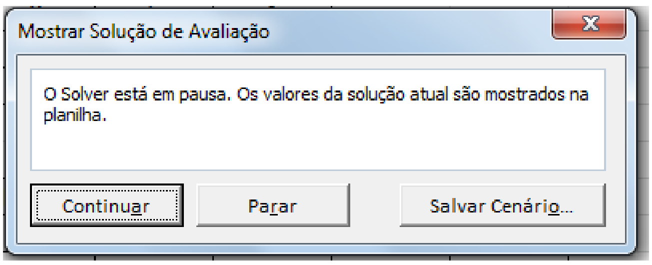


Figura 4.4

Desta forma, obtém-se a seguinte solução com o operário A na máquina X, operário B na máquina Z, operário C na máquina Y e operário D na máquina K, com tempo mínimo de 20 segundos com esta distribuição, conforme figura abaixo:

SEGUNDOS	MAQUINA				OFERTA
OPERARIOS	X	Y	Z	K	1
A	5	24	13	7	1
B	10	25	3	23	1
C	28	9	8	5	1
D	10	17	15	3	1
DEMANDA	1	1	1	1	

SEGUNDOS	MAQUINA				TOTAL	SINAL	OFERTA
OPERARIOS	X	Y	Z	K		=	1
A	1	0	0	0	1	=	1
B	0	0	1	0	1	=	1
C	0	1	0	0	1	=	1
D	0	0	0	1	1	=	1
TOTAL	1	1	1	1	20		
SINAL	=	=	=	=			
DEMANDA	1	1	1	1			

Figura 4.5

Observa-se que esse processo é o mesmo visto anteriormente, em que o resultado é o traço da matriz-produto. Ou seja:

$$\text{Min } Z = \text{tr}(CX^t) = \begin{bmatrix} 5 & 24 & 13 & 7 \\ 10 & 25 & 3 & 23 \\ 28 & 9 & 8 & 5 \\ 10 & 17 & 15 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 13 & 24 & 7 \\ 10 & 3 & 25 & 23 \\ 28 & 8 & 9 & 5 \\ 10 & 15 & 17 & 3 \end{bmatrix}$$

cuja soma é dada por: 5 + 3 + 9 + 3 = 20.

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, H. & RORRES, C. *Álgebra Linear com Aplicações*, 2000. Editora Bookman.

[2] FOGLIATTO, F. *Pesquisa Operacional*, Notas de aula, Universidade Federal do Rio Grande dol Sul.

[3] FONTES, F. F. da C. *Problema de Transporte*, Notas de aula, Universidade Federal Rural do Semi-Árido, 2009.

[4] KUHN, H. W. *The Hungarian Method for the Assignment Problem*, In: Naval Research Logistic Quartely, Vol.2, N.1 e 2, 1955, pp.83-97.

[5] LIRIA, V. *O Problema de Alocação de Tarefas*, Notas de aula. Universidade Federal Fluminense.

[6] MARINHO, L. B. *Método Húngaro - Análise e Técnicas de Algoritmos*, Notas de aula, Universidade Federal de Campina Grande.

[7] MORELATO JUNIOR, R. *Proposta de um Método de Alocação de Disciplinas em Sala de Aulas Baseada no Método Húngaro*, Dissertaçao de Mestrado em Engenharia de Produção, Faculdade de Engenharia Mecânica e de Produção, Uviversidade metodista de Piracicaba, UNIMEP, Santa Bárbara D'Oeste, 2003.

[8] REYES, J. *Modelo Método Húngaro no Excel*. Disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=DANDHopR2uE>. Acesso em: 26 de julho de 2014.

[9] RODRIGUES, L. B., VIEIRA, F. B. P. & AUGUSTINI, E. *O método Húngaro de Otimização para o Problema de Alocação de Tarefas*. Famat em Revista, Minas Gerais, Número 4, p.25-39, 2005.

Este volume foi tipografado em LaTeX na classe UFPEThesis (www.cin.ufpe.br/~paguso/ufpethesis).