UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

MATRIZES CIRCULANTES: APLICAÇÃO NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS

por

ALIOMAR SANTOS CAVALCANTI

Orientadora

Profª.Drª.Bárbara Costa da Silva

Recife

Novembro - 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

MATRIZES CIRCULANTES:
APLICAÇÃO NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

ALIOMAR SANTOS CAVALCANTI

Recife

Novembro - 2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

C376m Cavalcanti, Aliomar Santos
Matrizes circulantes: aplicação na resolução de equações polinomiais / Aliomar Santos Cavalcanti. – 2016.
52 f. : il.

Orientadora: Bárbara Costa da Silva.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Recife, BR-PE, 2016.
Inclui referências e apêndice(s).

1. Matrizes 2. Equações 3. Circulantes 4. Polinômios I. Silva, Bárbara Costa da, orient. II. Título

CDD 510

ALIOMAR SANTOS CAVALCANTI

Matrizes Circulantes: Aplicação na Resolução de Equações Polinomiais

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 08/11/2016

BANCA EXAMINADORA

Bárbara Costa da Silva

Profª Drª Bárbara Costa da Silva (Orientador(a))– UFRPE

Nicolás Caro Montoya

Prof. Dr. Jorge Nicolás Caro Montoya – DMAT-UFPE

Thiago Dias Oliveira Silva

Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva– PROFMAT/UFRPE

À minha esposa Elma.

Aos meus filhos Alessandra e Eduardo.

Aos meus netos Kauane e Heitor.

Aos meus pais.

Agradecimentos

Ao meu Deus, por estar sempre presente nos momentos de alegrias e dificuldades.

À minha esposa Elma, pela compreensão, apoio e incentivo incondicionais que sempre me deu.

À minha família, pois, sem ela não teria conseguido vencer mais esta batalha.

À Universidade Federal Rural de Pernambuco, em especial ao Departamento de Matemática, por ter dado todas as condições necessárias para a realização do presente trabalho.

A todos os meus professores do mestrado que, direta ou indiretamente, contribuíram para que eu pudesse chegar até aqui.

Agradeço aos meus colegas de turma, pelos momentos agradáveis que me proporcionaram em sala de aula.

Meu agradecimento especial vai para a minha professora e orientadora, Dr.ª Bárbara Costa da Silva, pelo seu grande conhecimento matemático, sua competência e dedicação com que conduziu a minha orientação.

À CAPES, pelo apoio financeiro, sem o qual dificilmente conseguiria chegar até aqui.

Enfim, fica aqui os meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que contribuíram, de alguma forma, para que esse sucesso pudesse acontecer.

Resumo

Os estudos sobre vários tipos de equações motivaram e motivam muitos matemáticos em todo o mundo. Grande parte dos célebres matemáticos entre os anos de 1400 e 1700 deram grandes contribuições ao estudo das equações algébricas. Resolver uma equação já era um desafio desde o início do conhecimento matemático.

Neste trabalho, apresentamos uma técnica para resolver equações polinomiais, de até o quarto grau, que utiliza as matrizes circulantes e conhecimentos básicos de álgebra linear. Ao longo do trabalho fazemos um apanhado histórico dos tópicos envolvidos, além de ilustrarmos toda a dissertação com exemplos.

Por fim, apresentamos uma sequência didática com o conteúdo do nosso trabalho, que sugerimos ser desenvolvida em cinco dias de aulas com três horas de aula por dia, com o objetivo de melhor preparar os alunos para a vida universitária.

Palavras-chave: Matrizes, Equações, Circulantes, Polinômios.

Abstract

Studies on many sorts of equations motivated and still motivate many mathematicians around the world. Most of the well-known mathematicians from the years 1400 to 1700 gave huge contributions to the study of algebraic equations. Solving equations was already a challenge since the beginning of the mathematical knowledge.

In this paper, a technique is presented to solve polynomial equations up to fourth order, that use the circulating matrixes and basic knowledge of linear algebraic. Throughout this work we will collect the history of involved topics besides illustrating this entire dissertation with examples.

Finally, a didactical sequence of our paper's content will be presented, that we suggest to be developed in five days of classes within three hours of lessons a day, aiming at improving student's preparation for the academic life.

Keywords: Matrixes, Equations, Circulating, Polynomials.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

"É possível determinar as raízes de equações polinomiais utilizando-se matrizes? "

Nosso trabalho irá mostrar que é possível sim, utilizando-se as chamadas *matrizes circulantes*, um caso particular da matriz de Toeplitz também conhecida como matriz das diagonais constantes criada por Otto Toeplitz.[1]

De forma geral, as equações de primeiro e segundo graus são estudadas durante o ensino fundamental nas nossas escolas. Na maioria das vezes as equações de segundo grau são ensinadas através da memorização de uma fórmula, conhecida como fórmula de Bhaskara, para determinar as raízes de forma automática sem entender porque se obtém o resultado correto com esse procedimento. Por vezes, alguns professores não se dão sequer ao trabalho de orientar os alunos a verificar o resultado obtido, limitando-os a aceitar que é assim que se determinam as raízes e pronto. Dessa forma o aluno fica desestimulado a continuar estudando resolução de equações. Ao ingressar no ensino médio, às vezes, alguns alunos perguntam se existe fórmula para resolver equações de grau maior que dois (terceiro grau, quarto grau, etc), quando então o professor lhes diz que existem fórmulas para resolver equações de terceiro grau e de quarto grau, mas, é muito complicado.

O objetivo do nosso trabalho é apresentar aos professores e alunos do ensino médio uma forma de resolução de equações, de grau menor que cinco, que utiliza as matrizes circulantes. Esse procedimento de resolução independe do grau da equação e faz uma conexão entre as equações dos diversos graus.

Por trabalhar com matrizes, essa forma de resolução é indicada para alunos do ensino médio, permitindo que nessa etapa de sua formação possa ser feita a correção da falha de

[1] Otto Toeplitz foi um matemático judeu alemão que trabalhou na análise funcional. Ele estudou matemática na Universidade de Breslau onde obteve um doutorado em geometria algébrica, em 1905. Em 1906 Toeplitz chegou à Universidade de Göttingen, que era então o principal centro matemático do mundo, e ele permaneceu lá por sete anos.

ensinamento das equações de segundo grau no ensino fundamental.

Esse trabalho está dividido em quatro partes, sendo três capítulos e um apêndice. O primeiro capítulo contém tópicos que não fazem mais parte dos parâmetros curriculares do ensino médio, a saber: números complexos, matrizes e determinantes. O objetivo desse capítulo é trazer à tona o conhecimento necessário para o bom entendimento do nosso tema. Desta forma, encontraremos neste capítulo, definições, exemplos e propriedades relacionadas com os tópicos.

No segundo capítulo trabalhamos alguns conceitos de álgebra linear, lembrando sempre que nosso público alvo são os alunos e professores do ensino médio. Assim apresentamos os conceitos de autovalores e autovetores a partir de conceitos relacionados a matrizes, determinantes, sistemas lineares e raízes de equações polinomiais. É também nesse capítulo que definimos as matrizes circulantes e estudamos as propriedades que tornam esse tipo de matriz um agente facilitador para o cálculo das raízes de polinômios de grau menor que cinco. Ainda nesse capítulo apresentamos a forma de encontrar raízes de equações de grau menor que cinco usando matrizes circulantes, sendo esta a parte principal desta dissertação.

No terceiro capítulo apresentamos uma sequência didática e uma lista de exercícios, com o objetivo de incentivar professores do ensino médio a propor minicursos com esse tema.

No apêndice apresentamos o princípio da indução finita, muito utilizado nas demonstrações de propriedades e teoremas e o conteúdo programático do Enem[2].

[2]Exame Nacional do Ensino Médio

Capítulo 1

PRELIMINARES

Neste capítulo serão abordados alguns assuntos de matemática que são fundamentais para o entendimento do nosso trabalho. Eles não fazem parte do conteúdo programático do Enem (apresentado no apêndice), nem dos parâmetros curriculares do ensino médio. E como, sem eles, não será possível desenvolver o tema proposto, achamos por bem fazê-lo.

É evidente que, de cada um, vamos apresentar apenas o essencial para a boa compreensão do nosso tema.

1.1 Números Complexos

O estudo dos *números complexos* vem do estudo das equações do terceiro grau, ou cúbicas. Antes do grande "descobridor" dos complexos, Bombelli, todos os discriminantes de equações de segundo grau e de outros graus, quando negativos, eram apenas desconsiderados, e o problema ao qual a equação estava atrelada era considerado sem solução.

O primeiro indício de um "surgimento" dos complexos viria com Cardano, ao resolver uma equação do segundo grau, em sua famosa obra Ars Magna, de 1545. Num problema ele pretendia achar o ponto dentro de um segmento que vale dez e o produto dos dois segmentos formados forme 40. Ele chama, então, os segmentos formados pelo ponto de x e $10 - x$. Então, formando uma equação ele tem $x \cdot (10 - x) = 40$, ou seja,
$-x^2 + 10 \cdot x - 40 = 0$. As soluções dessa equação são $5 \pm \sqrt{-15}$. Cardano, se preparando para considerar seu problema sem solução, já que a raiz é de um número negativo, reparou que $(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 25 - (-15) = 40$. Que era a solução que ele desejava. Ele,

então, chamou esses resultados obtidos de soluções sofísticas da equação, já que elas eram, como o próprio disse, tão sutis quanto inúteis.

Mas o real idealizador dos números complexos, se podemos dizer, é o italiano seguidor de Cardano, Raphael Bombelli. Bombelli, como admirador de Cardano, leu totalmente sua publicação. Mas, descontente com alguns detalhes, ele resolveu publicar seu próprio (e influente) estudo: *l'Algebra*. Nesse estudo, Bombelli se depara com uma equação cúbica, $x^3 = 15x + 4$, cuja solução seria $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Mas, como vemos, a raiz quadrada dentro da cúbica é negativa, fazendo o número não "existir". Mas, logo após, ele percebe que 4 também é uma solução da equação cúbica proposta. Então, Bombelli tem uma ideia para aquele problema: ele considera que, mesmo que imaginariamente, haja um número da forma $a + \sqrt{-b}$ que seja a raiz cúbica de $2 + \sqrt{-121}$, e também um número $a - \sqrt{-b}$, que seja raiz cúbica de $2 - \sqrt{-121}$. Com esses números, ele pensa que esses satisfaçam a $(a + \sqrt{-b}) + (a - \sqrt{-b}) = 4$. E, para sua felicidade, ele acha $a = 2$. Daí, ele deduz que $b = 1$, ao voltar à equação principal. Então ele tem que $2+\sqrt{-1} = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$. E ele finalmente conclui que seu achado é revolucionário. Como ele diz em sua obra, ele tinha em mente que a "tal" imaginária sempre "existisse" (é meio paradoxal mesmo). Daí, ele já parte para as regras de multiplicação da unidade imaginária em sua obra. Para se ter uma ideia, o pensamento de Bombelli da unidade imaginária só seria formalizado quase 60 anos depois, quando Girard introduziu o símbolo $\sqrt{-1}$. Já o popular símbolo i só seria introduzido 105 anos depois de *l'Algebra*, por Leonhard Euler. (vide [Polcino], RPM 24)

1.1.1 Definições básicas e propriedades

Chama-se *conjunto dos números complexos*, e representa-se por $\mathbb{C}$, o conjunto de pares ordenados (a, b) de números reais onde valem as definições:

I) Igualdade: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$.

II) Adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

III) Multiplicação: $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$.

Observações:

1) O par ordenado $(a, 0)$ representa o número real a, ou seja, $(a, 0) = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Isto nos mostra que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

2) O par ordenado $(0, 1)$ é chamado de *unidade imaginária* e representado por i, ou seja, $(0, 1) = i$ e $i^2 = -1$.

Note que, pela definição (III), temos
$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (a, b), \text{ sendo } a \in \mathbb{R} \text{ e } b \in \mathbb{R}.$$

Dado um número complexo $z = (a, b)$, temos

$$\begin{aligned} z = (a, b) &= (a, 0) + (0, b) \\ &= (a, 0) + (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) \\ &= (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1). \end{aligned}$$

Como: $(a, 0) = a, (b, 0) = b$ e $(0, 1) = i$, podemos escrever o número complexo $z = (a, b)$ na forma $z = a + b \cdot i$, que é chamada de *forma algébrica* de z.
Desta forma, podemos dizer que:

Chama-se *número complexo* todo expressão da forma $z = a+b\cdot i, \{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $i^2 = -1, i$ é um *número não real* chamado de *unidade imaginária.* O número a é chamado de *parte real* de $z[Re(z)]$ e o número b é chamado de *parte imaginária* de $z[Im(z)]$.

Se $b = 0$, o número complexo $a + b \cdot i$ é um *número real.* Mais ainda, se a é um número real ele também é um número complexo pois podemos escrever $a = a + 0 \cdot i$, justificando que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Se $a = 0$ e $b \neq 0$, o número complexo $a + b \cdot i$ é chamado de *imaginário puro.*

Exemplo 1.1.1. $z_1 = 2 + 3 \cdot i$ *(*número imaginário*; $a = 2$ e $b = 3$)*

$z_2 = -4 \Rightarrow z_2 = -4 + 0 \cdot i$ *(número real; $a = -4$ e $b = 0$)*

$z_3 = 5 \cdot i \Rightarrow z_3 = 0 + 5 \cdot i$ *(número imaginário puro; $a = 0$ e $b = 5$)*

Operações com números complexos (+, .)

Para quaisquer números complexos $z_1 = a + b \cdot i$ e $z_2 = c + d \cdot i$, $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, temos:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d) \cdot i$$

$$z_1 . z_2 = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i$$

Todo número complexo pode ser representado num plano, chamado de *plano de Argand – Gauss*, por um ponto $P = (a, b)$, chamado *afixo* de $z = a + b \cdot i = (a, b)$.

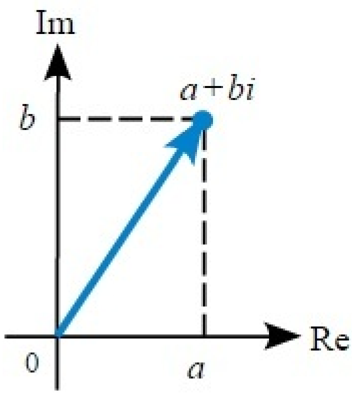

Figura 1.1: Representação do número complexo $z = a + b \cdot i$ no plano de Argand-Gauss

Nesse plano o eixo x é chamado de *eixo real* e o eixo y é chamado de *eixo imaginário*. Nos exemplos anteriores podemos escrever:

$z_1 = 2 + 3 \cdot i = (2, 3)$

$z_2 = -4 \Rightarrow z_2 = -4 + 0 \cdot i = (-4, 0)$

$z_3 = 5 \cdot i \Rightarrow z_3 = 0 + 5 \cdot i = (0, 5)$

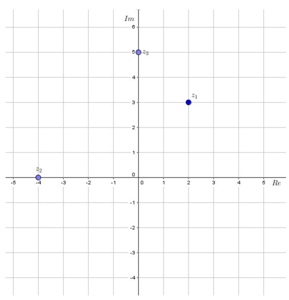

Figura 1.2: Representação dos números complexos no plano de Argand-Gauss

Usando a representação de um número complexo no plano de Argand- Gauss podemos obter uma nova representação de um número complexo chamada de *Forma Trigonométrica* ou *Polar* de um número complexo.

Seja $z = a + b \cdot i$ e denote $P = (a, b)$ o seu *afixo*.

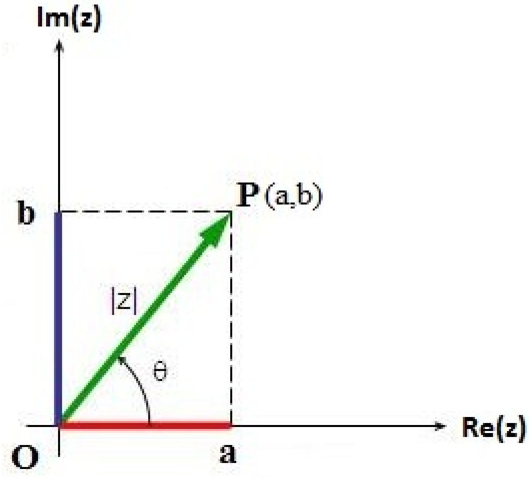

Figura 1.3: Módulo e argumento de um número complexo

Considere θ o ângulo formado pelo eixo real e a semirreta $\vec{OP}$. Observe que $\cos\theta = \dfrac{a}{|\vec{OP}|}$ e $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{|\vec{OP}|}$. Logo, podemos escrever $z = a + b \cdot i = |\vec{OP}| \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$.

Notação: θ é chamado de *argumento* de z e $|\vec{OP}| = \sqrt{a^2 + b^2}$, denotado por $|z| = \rho$, é chamado de *módulo* do número complexo z, logo, $z = a + b \cdot i = \rho(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$.

Definição: Seja $z = a + b \cdot i$ um número complexo, chama-se *conjugado* de z, e indica-se por $\overline{z}$, o número complexo $\overline{z} = a - b \cdot i$.

É possível mostrar que para um número complexo z, temos:

I) $z + \overline{z} = 2a$

II) $z - \overline{z} = 2b \cdot i$

III) $\overline{\overline{z}} = z$

IV) $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

V) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

1.1.2 Operações na forma trigonométrica

1. Multiplicação de números complexos na forma trigonométrica.

   Sejam $z = \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$ e $w = \lambda(\cos\varphi + i \cdot \text{sen}\varphi)$ dois números complexos na forma trigonométrica. Então

$$zw = \rho\lambda[\cos(\theta+\varphi) + i \cdot \text{sen}(\theta+\varphi)].$$

   De fato,

$$\begin{aligned} zw &= \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)\lambda(\cos\varphi + i \cdot \text{sen}\varphi) \\ &= \rho\lambda(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)(\cos\varphi + i \cdot \text{sen}\varphi) \\ &= \rho\lambda[(\cos\theta\cos\varphi) + (i \cdot \cos\theta\,\text{sen}\varphi) + (i \cdot \text{sen}\theta\cos\varphi) + (i^2 \cdot \text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi)] \\ &= \rho\lambda[\underbrace{(\cos\theta\cos\varphi - \text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi)}_{cosseno\ \ da\ \ soma} + i \cdot \underbrace{(\text{sen}\theta\cos\varphi + \text{sen}\varphi\cos\theta)}_{seno\ \ da\ \ soma}] \\ &= \rho\lambda[\cos(\theta+\varphi) + i \cdot \text{sen}(\theta+\varphi)]. \end{aligned}$$

   Observação:

   A fórmula anterior pode ser estendida, utilizando o Princípio da Indução Finita, para o produto de mais de dois números complexos do modo que segue. Sejam $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \cdot \text{sen}\theta_1), z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \cdot \text{sen}\theta_2), z_3 = \rho_3(\cos\theta_3 + i \cdot \text{sen}\theta_3), \ldots, z_n = \rho_n(\cos\theta_n + i \cdot \text{sen}\theta_n)$, então

$$z_1 z_2 z_3 \cdots z_n = \rho_1\rho_2\rho_3\cdots\rho_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_n) + i \cdot \text{sen}(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_n)].$$

   Vejamos:

   (I) A fórmula é válida para $n = 1$, pois

$$z_1 = \rho_1[\cos(\theta_1) + i \cdot \text{sen}(\theta_1)].$$

   (II) A fórmula é válida para $n = 2$, pois

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1+\theta_2)].$$

(III) Suponha a fórmula válida para $n = k$, provemos que ela vale para $n = k + 1$.

$z_1 z_2 z_3 \cdots z_k = \rho_1 \rho_2 \rho_3 \cdots \rho_k [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_k) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_k)]$.

$z_1 \cdots z_k z_{k+1} = \rho_1 \cdots \rho_k \rho_{k+1} [\cos(\theta_1 + \cdots + \theta_k + \theta_{k+1}) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 + \cdots + \theta_k + \theta_{k+1})]$.

Portanto a fórmula é válida para todo n inteiro e $n \geq 1$.

2. Divisão de números complexos na forma trigonométrica.

   Sejam $z = \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$ e $w = \lambda(\cos\varphi + i \cdot \text{sen}\varphi)$ dois números complexos na forma trigonométrica, com $w \neq 0$. Então

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{\lambda} \cdot [\cos(\theta - \varphi) + i \cdot \text{sen}(\theta - \varphi)].$$

   De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{z}{w} &= \frac{z}{w} \cdot \frac{\overline{w}}{\overline{w}} \\
&= \frac{\rho(\cos\theta + i.\,\text{sen}\theta)\lambda(\cos\varphi - i \cdot \text{sen}\varphi)}{|w|^2} \\
&= \frac{\rho(\cos\theta + i.\,\text{sen}\theta)\lambda[\cos(-\varphi) + i \cdot \text{sen}(-\varphi)]}{|\lambda|^2} \\
&= \frac{\rho\lambda}{\lambda^2}[\cos(\theta - \varphi) + i \cdot \text{sen}(\theta - \varphi)] \\
&= \frac{\rho}{\lambda}[\cos(\theta - \varphi) + i \cdot \text{sen}(\theta - \varphi)].
\end{aligned}$$

As fórmulas de De Moivre[1]

3. Potenciação de Números Complexos (1^a *Fórmula de De Moivre*)

   Seja $z = \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$ um número complexo não nulo.

   Na secção anterior vimos que o produto de n números complexos $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ é dado por

$z_1 z_2 z_3 \cdots z_n = \rho_1 \rho_2 \rho_3 \cdots \rho_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_n) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_n)]$.

[1]Abraham De Moivre nasceu na província de Champagne na França em 26/05/1667 e faleceu em Londres em 27/11/1754. Foi um matemático francês, famoso pelas fórmulas que levam seu nome que relaciona os números complexos com a trigonometria e por seus trabalhos na distribuição normal e na teoria das probabilidades.

Podemos obter a enésima potência de z fazendo $z_1 = z_2 = z_3 = \cdots = z_n = z$ na igualdade anterior, obtendo a equação

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(n\theta)]$$

que é conhecida como a 1ª fórmula de De Moivre.

4. Radiciação de Números Complexos (2^a *Fórmula de De Moivre*)

Dado um número complexo z, dizemos que o número w é uma *enésima raiz* de z, se, e somente se,

$$w^n = z, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \tag{1.1}$$

Seja $z = \rho(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$ o número complexo $z = a + b \cdot i$ em sua *forma trigonométrica* e seja w uma de suas *raízes enésimas*.

$$w = \lambda(\cos\varphi + i \cdot \operatorname{sen}\varphi). \tag{1.2}$$

Pela definição (1.1), se aplicarmos a 1ª Fórmula de De Moivre, obteremos:

$$w^n = \lambda^n[\cos(n\varphi) + i \cdot \operatorname{sen}(n\varphi)]$$
$$w^n = z = \rho(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta).$$

Desta última igualdade, temos que

$$\lambda^n = \rho \Rightarrow \lambda = \sqrt[n]{\rho}, \tag{1.3}$$

para o qual $\sqrt[n]{\rho}$ é a raiz enésima do número real positivo ρ, e

$$\begin{cases} \cos(n\varphi) = \cos\theta \\ \operatorname{sen}(n\varphi) = \operatorname{sen}\theta \end{cases}.$$

Ou seja,

$$n\varphi = \theta + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.4}$$

Como φ é o argumento de w, este deve pertencer ao intervalo $[0, 2\pi[$.

Se substituirmos (1.3) e (1.4) em (1.2), obteremos

$$w = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right].$$

Esta é a 2ª Fórmula de De Moivre para cálculos de radiciação de números complexos na forma trigonométrica.

Observe que se $0 \leqslant k < n$ teremos $\dfrac{\theta}{n} \leqslant \varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} < \dfrac{\theta}{n} + 2\pi$.

Logo, temos pelo menos n valores para o arco φ que não são côngruos.

Por outro lado, $k \geqslant n$ ou $k < 0$ temos $k = nq + r$, $q \in \mathbb{Z}$ e $0 \leqslant r < n$(princípio fundamental da divisão).

Daí

$$\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \varphi = \frac{\theta + 2(nq + r)\pi}{n} = \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2r\pi}{n}\right) + 2q\pi.$$

Ou seja, φ é um arco côngruo ao arco $\dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2r\pi}{n}, 0 \leqslant r < n.$

Portanto, k deve variar de 0 a $n - 1$ dando origem a n raízes distintas de z que, a partir de agora, serão denominadas por w_k.

Exemplo 1.1.2. *Dado um número complexo $z = -8 - 8\sqrt{3} \cdot i$, vamos determinar as raízes quartas deste número e representá-las no Plano de Argand – Gauss.*

Sendo $z = -8 - 8\sqrt{3} \cdot i$, temos que

$$a = -8 \quad e \quad b = -8\sqrt{3},$$

portanto

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-8\sqrt{3})^2} = \sqrt{64 + 192} = \sqrt{256} = 16$$

e

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2} \quad e \quad \text{sen}\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{-8\sqrt{3}}{16} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Fazendo redução ao primeiro quadrante, temos:

Um ângulo θ_1 localizado no 1º quadrante que possui

$$\text{sen}(\theta_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad e \quad \cos(\theta_1) = \frac{1}{2},$$

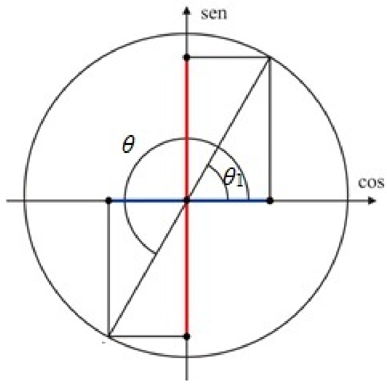

Figura 1.4: Círculo trigonométrico

é o ângulo $\theta_1 = \dfrac{\pi}{3}$. *Portanto* $\theta = \pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$.

Logo

$$z = 16\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right].$$

Aplicando a 2º Fórmula de De Moivre, podemos calcular as raízes quarta de z:

$$\omega_k = \sqrt[4]{16}\left[\cos\left(\frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right)\right].$$

Isto é,

$$\omega_k = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi + 3k\pi}{6}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi + 3k\pi}{6}\right)\right].$$

Atribuímos valores para k:

$k = 0$

$$\begin{aligned}\omega_0 &= 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{6}\right)\right]\\ &= 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\\ &= 2\left[\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\end{aligned}$$

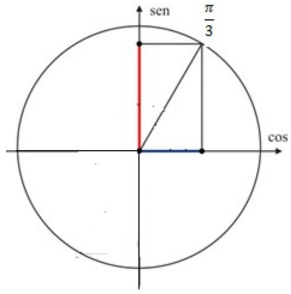

Figura 1.5: Arco do primeiro quadrante

$k = 1$

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 2\left[\cos\left(\frac{2\pi + 3\pi}{6}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi + 3\pi}{6}\right)\right] \\
&= 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] \\
&= 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right]
\end{aligned}$$

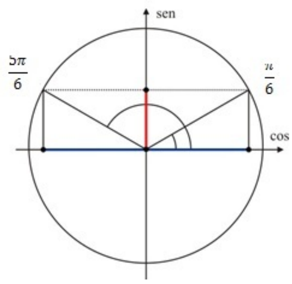

Figura 1.6: Arco do segundo quadrante

$k = 2$

$$\begin{aligned}
\omega_2 &= 2\left[\cos\left(\frac{2\pi + 6\pi}{6}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi + 6\pi}{6}\right)\right] \\
&= 2\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right] \\
&= 2\left[-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right]
\end{aligned}$$

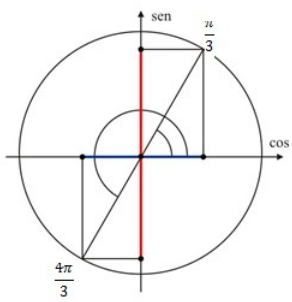

Figura 1.7: Arco do terceiro quadrante

$k = 3$

$$\begin{aligned}\omega_3 &= 2\left[\cos\left(\frac{2\pi + 9\pi}{6}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi + 9\pi}{6}\right)\right]\\ &= 2\left[\cos\left(\frac{11\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{3}\right)\right]\\ &= 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\right]\end{aligned}$$

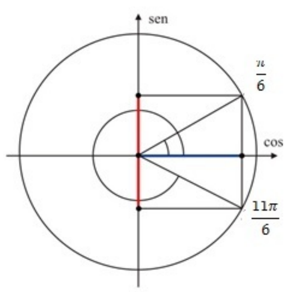

Figura 1.8: Arco do quarto quadrante

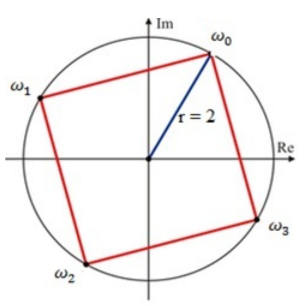

Figura 1.9: Quadrado inscrito à circunferência

De um modo geral, as afixos z de um complexo $z \neq 0$ são vértices de um polígono regular de n lados, inscrito à circunferência de raio $r = \sqrt[n]{\rho}$ e centrada na origem do Plano Complexo.

Exemplo 1.1.3. *Encontre as raízes complexas do polinômio $z^n - 1 = 0$.*

Temos $z^n - 1 = 0 \Rightarrow z^n = 1 \Rightarrow z = \sqrt[n]{1}$.

Sendo $1 = 1 + 0 \cdot i$, *então* $\rho = |z| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ *e*

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{0}{1} = 0 \quad e \quad \cos(\theta) = \frac{1}{1} = 1.$$

Portanto, $\theta = 0$.

Fazendo uso da segunda fórmula de De Moivre, temos

$$\omega_k = \sqrt[n]{1}\left[\cos\left(\frac{0 + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{0 + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

para o qual $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Assim,

$$\begin{aligned}
k = 0 \Rightarrow \omega_0 &= \cos\left(\frac{0\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{0\pi}{n}\right) \\
k = 1 \Rightarrow \omega_1 &= \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\
k = 2 \Rightarrow \omega_2 &= \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{n}\right) \\
k = 3 \Rightarrow \omega_3 &= \cos\left(\frac{6\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi}{n}\right) \\
&\vdots \\
k = n-1 \Rightarrow \omega_{n-1} &= \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right).
\end{aligned}$$

Note que o $|\omega_i| = 1, \forall i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$ *e os argumentos das raízes estão em PA de razão* $\frac{2\pi}{n}$, *isso nos diz que os afixos dessas raízes são pontos do plano complexo que estão sobre uma circunferência de raio* $1(\sqrt[n]{\rho} = \sqrt[n]{1} = 1)$ *e a divide em n partes iguais. Logo esses afixos são vértices de um polígono regular de n lados.*

Para $n = 3$

$$\omega_0 = \cos\left(\frac{0\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{0\pi}{3}\right)$$
$$\omega_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$\omega_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

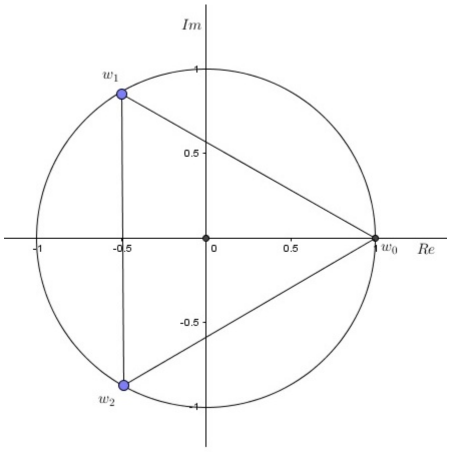

Figura 1.10: Afixos das raízes de $z^3 - 1 = 0$; Triângulo equilátero inscrito na circunferência

Para $n = 4$

$$\omega_0 = \cos\left(\frac{0\pi}{4}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{0\pi}{4}\right)$$
$$\omega_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{4}\right)$$
$$\omega_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{4}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{4}\right)$$
$$\omega_3 = \cos\left(\frac{6\pi}{4}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi}{4}\right)$$

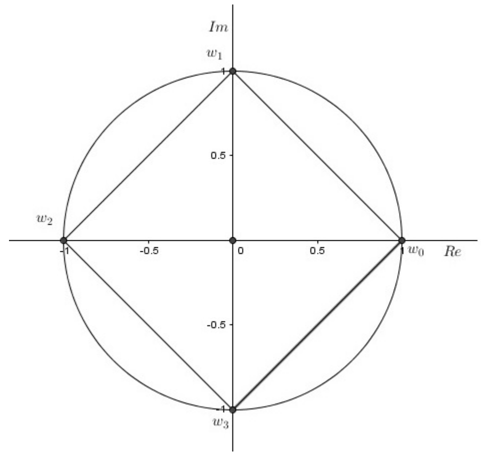

Figura 1.11: Afixos das raízes de $z^4 - 1 = 0$; Quadrado inscrito na circunferência

Para $n = 5$

$$\omega_0 = \cos\left(\frac{0\pi}{5}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{0\pi}{5}\right)$$
$$\omega_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$
$$\omega_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$
$$\omega_3 = \cos\left(\frac{6\pi}{5}) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right.$$
$$\omega_4 = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{5}\right)$$

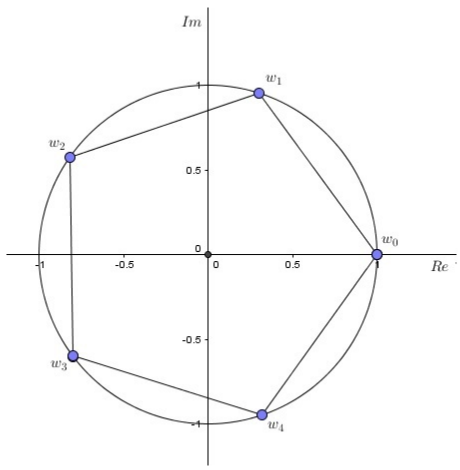

Figura 1.12: Afixos das raízes de $z^5 - 1 = 0$; Pentágono regular inscrito na circunferência

Para $n = 6$

$$\omega_0 = \cos\left(\frac{0\pi}{6}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{0\pi}{6}\right)$$
$$\omega_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{6}\right)$$
$$\omega_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{6}\right)$$
$$\omega_3 = \cos\left(\frac{6\pi}{6}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi}{6}\right)$$
$$\omega_4 = \cos\left(\frac{8\pi}{6}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{6}\right)$$
$$\omega_5 = \cos\left(\frac{10\pi}{6}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{10\pi}{6}\right).$$

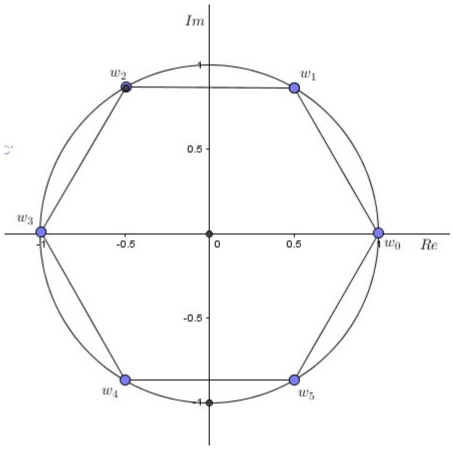

Figura 1.13: Afixos das raízes de $z^6 - 1 = 0$; Hexágono regular inscrito na circunferência

Observe que se

$$\omega_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

então

$$(\omega_1)^k = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \omega_k.$$

Para o qual, a segunda igualdade decorre da 1^a *fórmula de De Moivre.*

1.2 Matrizes

1.2.1 Definição e representação

Chama-se matriz a toda tabela de elementos dispostos em filas horizontais e verticais que são chamadas de linhas e colunas respectivamente. Esses elementos podem ser números reais, imaginários, funções ou até mesmo outras matrizes.

A representação de dados de problemas na forma de matrizes não só organiza esses dados como simplifica a representação desses problemas.

Representamos uma matriz colocando os dados da tabela entre parênteses ou entre colchetes. Vejamos alguns exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -9 & 5 & 7 & 32 \\ -1 & 6 & 3 & 19 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 13 \\ -7 & 10 & 5 \\ 9 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

A matriz A tem uma linha e três colunas, dizemos que ela é de ordem 1×3.

A matriz B tem duas linhas e quatro colunas, dizemos que ela é de ordem 2×4.

A matriz C tem três linhas e três colunas, dizemos que ela é de ordem 3×3.

Em alguns momentos, para explicitar a quantidade de linhas e colunas de uma matriz A, usamos a notação $A = A_{m\times n}$. Onde m é o número de linhas de A e n é o número de colunas. Nesse caso, diremos que a matriz $A = A_{m\times n}$ é de ordem ou tamanho $m \times n$ (lê-se: m por n). No caso em que $m = n$, usaremos também a notação A_n para representar a matriz A.

Se uma matriz A tem m linhas e n colunas sua representação pode ser

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}.$$

No elemento genérico a_{ij}, i representa a linha e j representa a coluna às quais pertence o elemento, onde $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Exemplo 1.2.1.

$$A_{3\times4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -3 & 0 & 9 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Nessa matriz o elemento a_{23} significa o número que se encontra na segunda linha e na terceira coluna, ou seja, $a_{23} = 7$.

Exemplo 1.2.2. *(UF – RJ) Antônio, Bernardo e Cláudio saíram para tomar chope, de bar em bar, tanto no sábado quanto no domingo.*

As matrizes a seguir resumem quantos chopes cada um consumiu e como a despesa foi dividida:

$$S = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

S refere-se às despesas de sábado e D às de domingo.

Cada elemento a_{ij} nos dá o número de chopes que i pagou para j, sendo Antônio o número 1, Bernardo o número 2 e Cláudio o número 3 (a_{ij} representa o elemento da linha i, coluna j de cada matriz).

Assim, no sábado Antônio pagou 4 chopes que ele próprio bebeu, 1 chope de Bernardo e 4 de Cláudio (primeira linha da matriz S).

a) Quem bebeu mais chope no fim de semana?

b) Quantos chopes Cláudio ficou devendo para Antônio?

As primeiras colunas das matrizes S e D representam os chopes que Antônio bebeu no sábado e no domingo respectivamente, as segundas colunas representam os chopes que Bernardo bebeu no final de semana e as terceiras colunas representam os chopes bebidos por Cláudio no final de semana, portanto: Antônio bebeu 14 chopes $(4+0+3+5+0+2)$, Bernardo bebeu 13 chopes $(1+2+1+5+3+1)$ e Cláudio bebeu 15 chopes $(4+0+5+3+0+3)$, assim quem bebeu mais chopes foi Cláudio. As primeiras linhas das matrizes S e D representam o que Antônio pagou para ele mesmo e para os outros dois, as segundas linhas representam o que Bernardo pagou para ele mesmo e para os outros dois e as terceiras linhas representam o que Cláudio pagou para ele mesmo e para os outros dois.

Sendo assim, Antônio pagou para Cláudio 7 chopes $(4+3)$ *e Cláudio pagou para Antônio 5 chopes* $(3+2)$*, portanto Cláudio está devendo 2 chopes para Antônio.*

Duas matrizes $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B_{p\times q} = [b_{ij}]_{p\times q}$ são iguais, $A = B$, se tiverem a mesma quantidade de linhas $(m = p)$ e a mesma quantidade de colunas $(n = q)$ e ainda os elementos correspondentes iguais $(a_{ij} = b_{ij})$.

Exemplo 1.2.3.

$$\begin{bmatrix} 2 & \cos 0 & \sqrt{9} \\ 4 & 1 & 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2^2 & \ln e & 5! \end{bmatrix}$$

1.2.2 Tipos de matrizes

Considere a matriz $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$. Como já dissemos, ela apresenta m linhas e n colunas. Dependendo dessa quantidade de linhas e colunas atribuímos alguns nomes especiais, a saber:

1. Matriz Nula

   Definição 1.2.4. *Dizemos que uma matriz* $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$ *é a* ***matriz nula*** *de ordem* $m \times n$ *se* $a_{ij} = 0$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ *e* $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

   Exemplo 1.2.5.

   $$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad B_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Matriz Coluna

   Definição 1.2.6. *Se a matriz* $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$ *só tiver uma coluna, ou seja, se* $n = 1$*, ela é chamada de* ***matriz coluna***.

   Exemplo 1.2.7.

   $$A_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}; \quad B_{2\times 1} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

3. Matriz Linha

Definição 1.2.8. *Se a matriz* $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$ *só tiver uma linha, ou seja, se* $m = 1$, *ela é chamada de* ***matriz linha****.*

Exemplo 1.2.9.

$$A_{1\times 3} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}; \quad B_{1\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Matriz Quadrada

Definição 1.2.10. *Se a matriz* $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$ *apresentar o número de linhas igual ao número de colunas* ($m = n$)*, ela é chamada de* ***matriz quadrada****.*

Exemplo 1.2.11.

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & -9 \\ -3 & 5 & 8 \end{bmatrix}; \quad B_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad C_{1\times 1} = \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix}$$

Numa matriz quadrada $A_{n\times n} = [a_{ij}]_{n\times n}$, define-se:

- Diagonal Principal

  Definição 1.2.12. ***Diagonal principal*** *é o conjunto de elementos* a_{ij} *com* $i = j$, *ou seja,* $\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}\}$.

- Traço

  Definição 1.2.13. ***Traço*** *é a soma dos elementos da diagonal principal, isto é,*

$$T = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}.$$

- Diagonal Secundária

  Definição 1.2.14. ***Diagonal secundária*** *é o conjunto de elementos* a_{ij} *com* $i + j = n + 1$, *ou seja,* $\{a_{1n}, a_{2(n+1)}, a_{3(n-2)}, \ldots, a_{n1}\}$.

5. Matriz Diagonal

Definição 1.2.15. *Uma matriz quadrada é denominada* ***matriz diagonal*** *se* $a_{ij} = 0$ *para* $i \neq j$.

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

6. Matriz Escalar

   Definição 1.2.16. *Uma matriz diagonal que tem todos os elementos da diagonal principal iguais entre si é chamada de* ***matriz escalar****.*

   Exemplo 1.2.17. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

7. Matriz Identidade(ou Unidade)

   Definição 1.2.18. *Uma matriz escalar que tem todos os elementos da diagonal principal iguais a 1 é chamada de* ***matriz identidade(ou unidade)****, ou seja,* $a_{ii} = 1$.

   Exemplo 1.2.19.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Matriz Triangular Superior

   Definição 1.2.20. *Uma matriz quadrada que tem todos os elementos abaixo da diagonal principal iguais a zero, isto é,* $a_{ij} = 0$ *se* $i > j$ *é chamada de* ***matriz triangular superior****.*

   Exemplo 1.2.21.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 10 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & t \end{bmatrix}$$

9. Matriz Triangular Inferior

Definição 1.2.22. *Uma matriz quadrada que tem todos os elementos acima da diagonal principal iguais a zero, isto é,* $a_{ij} = 0$ *se* $i < j$ *é chamada de* ***matriz triangular inferior***.

Exemplo 1.2.23.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & 9 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} x & 0 \\ z & t \end{bmatrix}$$

10. Matriz Simétrica

Definição 1.2.24. *Uma matriz quadrada, com entradas reais ou complexas, é chamada de* ***matriz simétrica*** *se* $a_{ij} = a_{ji}$.

Exemplo 1.2.25.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 2 & 4 & 6 \\ -7 & 6 & 5 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & k \end{bmatrix}$$

11. Matriz Antissimétrica

Definição 1.2.26. *Uma matriz quadrada, com entradas reais ou complexas, é chamada de* ***matriz antissimétrica*** *se* $a_{ij} = -a_{ji}$.

Note que se A é uma matriz antissimétrica então os elementos da diagonal principal são todos nulos, pois o único número que é igual ao seu oposto é o zero.

Exemplo 1.2.27. $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -6 \\ -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

1.2.3 Operações com matrizes e suas propriedades

1. Soma ou adição de matrizes

   A adição de matrizes é definida somente para matrizes de mesmo tamanho. Se A e B são duas matrizes de mesmo tamanho $m \times n$, a soma destas duas matrizes, denotada $A+B$, é também uma matriz $m \times n$, cujo elemento na posição ij é definido como sendo a soma dos elemento de A e B que ocupam a posição ij. Ou seja, se $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B_{m\times n} = [b_{ij}]_{m\times n}$, então $C = A + B$ é a matriz $[c_{ij}]_{m\times n}$, definida por $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

   Exemplo 1.2.28. *Ao utilizar matrizes, surge naturalmente a necessidade de efetuarmos certas operações. Por exemplo, consideremos as tabelas, que descrevem a produção de grãos em dois anos consecutivos.*

Região	Soja	Feijão	Arroz	Milho
Região A	3000	200	400	600
Região B	700	350	700	100
Região C	1000	100	500	800

Tabela 1.1: Produção de grãos (em milhares de toneladas) durante o primeiro ano

Região	Soja	Feijão	Arroz	Milho
Região A	5000	50	200	0
Região B	2000	100	300	300
Região C	2000	100	600	600

Tabela 1.2: Produção de grãos (em milhares de toneladas) durante o segundo ano

Se quisermos montar uma tabela que dê a produção por produto e por região nos dois anos conjuntamente, teremos que somar os elementos correspondentes das duas tabelas anteriores.

$$\begin{bmatrix} 3000 & 200 & 400 & 600 \\ 700 & 350 & 700 & 100 \\ 1000 & 100 & 500 & 800 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5000 & 50 & 200 & 0 \\ 2000 & 100 & 300 & 300 \\ 2000 & 100 & 600 & 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8000 & 250 & 600 & 600 \\ 2700 & 450 & 1000 & 400 \\ 3000 & 200 & 1100 & 1400 \end{bmatrix}.$$

Ou seja,

Região	Soja	Feijão	Arroz	Milho
Região A	8000	250	600	600
Região B	2700	450	1000	400
Região C	3000	200	1100	1400

Tabela 1.3: Produção de grãos (em milhares de toneladas) durante os dois anos

Exemplo 1.2.29. *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \pi & -3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 3 \\ 10^6 & 4 \end{bmatrix},$$

então

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \pi & -3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 3 \\ 10^6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & \sqrt{2}+1 \\ \pi + 3 & 0 \\ 1 + 10^6 & 7 \end{bmatrix}.$$

2. Multiplicação ou produto de uma Matriz por um Escalar

   Um escalar é qualquer número complexo (real ou imaginário).

   Se A é uma matriz $m \times n$ e α é um escalar, então o produto da matriz A pelo escalar α, denotado por αA, é também uma matriz $m \times n$, cujo elemento na posição ij é definido como sendo o produto do elemento de A que ocupa a posição ij pelo escalar α. Então, $C = \alpha A$ é a matriz $[c_{ij}]_{m \times n}$ definida por $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

   Exemplo 1.2.30. *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 24 & 6 & 8 \\ 0 & -10 & 26 \end{bmatrix}$ *e* $\alpha = 1,5$*, então*

$$\alpha A = 1,5 \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 24 & 6 & 8 \\ 0 & -10 & 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7,5 \\ 36 & 9 & 12 \\ 0 & -15 & 39 \end{bmatrix}.$$

3. Multiplicação ou produto de Matrizes

O produto de duas matrizes está definido quando o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda. Se $A = [a_{ik}]_{m\times p}$ e $B = [b_{kj}]_{p\times n}$, então $C = AB$ é a matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ definida por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

A notação de somatório é utilizada para evitar escrever expressões grandes, resumindo-as em um símbolo curto. A expressão acima significa que os índices i, j são mantidos fixos, enquanto que o índice k varia desde $k = 1$ até $k = p$; em outras palavras,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

Para encontrarmos o elemento ij do matriz produto AB, multiplicamos cada um dos elementos da i-ésima linha de A pelo correspondente elemento da j-ésima coluna de B (como as linhas de A têm o mesmo número de elementos que as colunas de B, não sobram nem faltam elementos) e somamos os p produtos obtidos.

Exemplo 1.2.31. *(Covest – PE) Eric necessita de complementos das vitaminas A e C. Diariamente precisa de pelo menos 63 unidades de A e no mínimo 55 unidades de C. Ele pode escolher entre os compostos I e II, que apresentam, por cápsula, as características abaixo:*

Composto	Vitamina A	Vitamina C	Valor R$
I	7 unidades	4 unidades	0,70
II	4 unidades	5 unidades	0,50

Tabela 1.4: Características dos compostos I e II

Qual o gasto mínimo diário de Eric, em reais, com os compostos I e II?

Vamos calcular x unidades do composto I e y unidades do composto II de modo a satisfazer as condições do problema.

O gasto feito com a compra dessas unidades é dado por $G(x, y) = 0,70 \cdot x + 0,50 \cdot y$.

O produto de matrizes abaixo representa a situação apresentada pelo problema.

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 63 \\ 55 \end{bmatrix}.$$

Esse produto de matrizes pode ser representado pelo sistema

$$\begin{cases} 7x + 4y \geq 63 \\ 4x + 5y \geq 55 \end{cases}$$

que tem solução dada por $x \geq 5$ *e* $y \geq 7$.

Logo o gasto mínimo de Eric é $R\$7,00 \quad [G(5,7) = 0,70 \cdot 5 + 0,50 \cdot 7 = 7,00]$, *e pode ser representado na forma matricial abaixo.*

$$G_M = \begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,70 \\ 0,50 \end{bmatrix} = 7,00$$

.

Exemplo 1.2.32. *Suponhamos que um jornal esportivo, o Brasil, circule em todo o país. Seu preço varia de acordo com o Estado em que é vendido, pois leva-se em consideração a distância ao Estado de São Paulo, onde ele é produzido.*

CIDADE	PREÇO (R$)
SÃO PAULO	1,50
BELO HORIZONTE	2,00
SALVADOR	2,60
RECIFE	3,00

Tabela 1.5: Preço do jornal por cidade

As bancas de jornal "Leia Já", que distribuem o jornal Brasil, fazem parte de uma rede com sede em São Paulo e filiais em Belo Horizonte, Salvador e Recife.

O proprietário da rede decidiu, durante uma semana, fazer um levantamento sobre a arrecadação gerada pelas vendas do jornal Brasil, a fim de estimar qual fração dessa receita representam as vendas do domingo.

Na semana em que foi realizado o levantamento, foram vendidas as seguintes quantidades:

	NÚMERO DE EXEMPLARES VENDIDOS	
CIDADE	DE SEGUNDA-FEIRA À SÁBADO	DOMINGO
São Paulo	248	46
Belo Horizonte	93	32
Salvador	62	29
Recife	57	25

Tabela 1.6: Vendas por cidades e dias da semana

a) Qual foi a receita obtida pelas vendas de Brasil de segunda-feira a sábado nessas cidades? E aos domingos?

b) Que fração da receita semanal representa as vendas do domingo?

Resolução:

a) De acordo com as tabelas anteriores, a arrecadação de segunda-feira a sábado pode ser assim calculada:

$248 \cdot 1,50 + 93 \cdot 2,00 + 62 \cdot 2,60 + 57 \cdot 3,00 = 890,20.$

Podemos representar o produto acima pelo produto de uma matriz linha por uma matriz coluna.

$$\begin{bmatrix} 248 & 93 & 62 & 57 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,50 \\ 2,00 \\ 2,60 \\ 3,00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 890,20 \end{bmatrix}.$$

A arrecadação de domingo é calculada como segue:

$46 \cdot 1,50 + 32 \cdot 2,00 + 29 \cdot 2,60 + 25 \cdot 3,00 = 283,40.$

$$\begin{bmatrix} 46 & 32 & 29 & 25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,50 \\ 2,00 \\ 2,60 \\ 3,00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 283,40 \end{bmatrix}.$$

Os cálculos anteriores nos sugerem que devemos construir duas matrizes:

a matriz "vendas", $\begin{bmatrix} 248 & 93 & 62 & 57 \\ 46 & 32 & 29 & 25 \end{bmatrix}$ *e a matriz "preços",* $\begin{bmatrix} 1,50 \\ 2,00 \\ 2,60 \\ 3,00 \end{bmatrix}$ *indicando assim um processo para se multiplicar matrizes. A matriz resultante corresponde à arrecadação da semana:*

$$\begin{bmatrix} 248 & 93 & 62 & 57 \\ 46 & 32 & 29 & 25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,50 \\ 2,00 \\ 2,60 \\ 3,00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 890,20 \\ 283,40 \end{bmatrix}.$$

Esse exemplo facilita a compreensão da definição formal de produto de matrizes vista anteriormente.

b) A fração que representa a arrecadação do domingo em relação à receita semanal é $\dfrac{283,40}{890,20+283,40} = \dfrac{283,40}{1.173,60} = \dfrac{1.417}{5.868} = 0,2415 = 24,15\%.$

Exemplo 1.2.33. *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 4}.$$

Então

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 \\ 13 & 5 & -3 & 22 \end{bmatrix}.$$

Note que BA não está definida, pois o número de colunas de B não é igual ao número de linhas de A.

4. Matriz Transposta

Dada uma matriz $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$, podemos obter uma matriz $A^t = [b_{ij}]_{n\times m}$ cujas linhas são as colunas de A, isto é, $b_{ij} = a_{ji}$. A^t é chamada de transposta de A.

Exemplo 1.2.34.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} \quad ; \quad A^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}.$$

A seguir iremos apresentar algumas propriedades das operações com matrizes.

Como esse assunto não é o objetivo principal do nosso trabalho, vamos apresentar essas propriedades sem suas demonstrações.

Proposição 1.2.35. *Sejam A, B e C matrizes de ordem $m \times n$. Então a soma de matrizes satisfaz às seguintes propriedades:*

1) Comutatividade: $A + B = B + A$

2) Associatividade: $A + (B + C) = (A + B) + C$

3) Existência de Elemento Neutro:
Definindo a matriz nula $\boldsymbol{0}_{m\times n}$ como sendo a matriz

$$\boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

temos $A + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + A = A$.

4) Existência de Elemento Simétrico:
Definindo a matriz $-A$ como sendo $-A = (-1)A$, temos, $A + (-A) = \boldsymbol{0}$.

A existência do simétrico para qualquer matriz permite definir a operação de subtração de matrizes: $A - B = A + (-B)$.

Proposição 1.2.36. *Sejam A, B e C matrizes definidas de forma conveniente para que as operações indicados estejam definidas, e seja α um escalar. Então o produto de matrizes satisfaz às seguintes propriedades:*

1) *Associatividade:* $A(BC) = (AB)C$

2) *Distributividade:* $A(B + C) = AB + AC; (A + B)C = AC + BC$

3) *Existência de Elemento Neutro:*

Se A é uma matriz de ordem $m \times n$, sejam I_n e I_m as matrizes identidade de ordem n e m respectivamente. Logo

$$I_m \cdot A = A \cdot I_n = A.$$

Observações:

1) *O produto de matrizes não é comutativo.*

Exemplo 1.2.37. *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. *Temos*

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & 16 \\ 7 & 16 \end{bmatrix} \quad e \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 14 & 5 \\ 1 & 26 & 7 \end{bmatrix}.$$

2) *Podemos ter $AB = \mathbf{0}$ sem que $A = \mathbf{0}$ ou $B = \mathbf{0}$.*

Exemplo 1.2.38. *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. *Temos*

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Proposição 1.2.39. *Sejam A e B matrizes definidas de forma conveniente para que as operações indicadas estejam definidas, e α e β escalares. Então a multiplicação por escalar satisfaz às seguintes propriedades:*

1) *Associatividade:*

$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

2) Distributividade:

$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

3) Existência de Elemento Neutro:

$1A = A$

Não faz sentido falar em comutatividade para esta operação, já que ela envolve operandos de naturezas completamente diferentes; um é um número, enquanto que o outro é uma matriz.

Proposição 1.2.40. *Sejam A e B matrizes definidas de forma conveniente para que as operações indicadas estejam definidas, e seja α um escalar. Então:*

1) $(A^t)^t = A$

2) $(A + B)^t = A^t + B^t$

3) $(AB)^t = B^t.A^t$

4) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$

1.3 Sistemas e Matrizes

Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

com $a_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, números reais (ou complexos).
Uma solução do sistema acima é uma n-úpla de números $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisfaz simultaneamente estas m equações.

Podemos escrever o sistema acima na forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ou $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, para o qual, $\mathbf{A}$ é a matriz dos coeficientes, $\mathbf{X}$ é a matriz das incógnitas e $\mathbf{B}$ é a matriz dos termos independentes, ou seja,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \ \text{e} \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Uma outra matriz que podemos associar ao sistema é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

que chamamos matriz ampliada do sistema. Cada linha dessa matriz é simplesmente uma representação abreviada da equação correspondente do sistema.

1.4 Determinantes

Determinante de uma matriz quadrada é uma função, $det : M(n) \to \mathbb{C}$, que associa cada matriz quadrada do conjunto das matrizes quadradas de ordem n, a um número do conjunto dos números complexos.

O Professor Manoel Paiva, na sua *coleção de matemática para o ensino médio* (vol. 2, cap. 7, pág. 265), cita que a teoria dos determinantes surgiu no século XVII, quase simultaneamente no Japão e na Europa. No Japão, o matemático Takakazu Seki Kowa ($1642 - 1708$), publicou, em 1683, na sua obra *Kake Fukudai No Ho*, um método geral para o cálculo de determinantes. Na Europa, também em 1683, o matemático alemão Gottfried Wilhelm von Leibniz ($1646 - 1716$), escreveu ao matemático francês Guillaume François Antoine, marquês de L'Hospital ($1661 - 1704$), sobre um novo tipo de cálculo, que hoje se chama determinante, usado na classificação de sistemas lineares.

Os Professores: Abramo Hefez e Cecília S. Fernandez, afirmam, em seu livro *Introdução à Álgebra Linear* (Coleção PROFMAT, cap. 4, pág. 117), que os determinantes são de múltipla utilidade. Servem para dar um critério para invertibilidade de matrizes e um método para o cálculo da matriz inversa, caso exista. Em Geometria, aparecem como a área de um paralelogramo e o volume de um paralelepípedo. Em Análise, está presente nos teoremas: da Função Inversa, da Função Implícita e da Mudança de Variáveis. Por meio dos determinantes, define-se a importante noção de polinômio característico de uma matriz, que será visto no próximo capítulo do nosso trabalho e será fundamental para o desenvolvimento do nosso tema.

Seja A uma matriz quadrada de ordem n e considere A_{ij} a matriz obtida de A eliminando-se a linha i e a coluna j. O determinante de A é um número, indicado por $\det A$, definido indutivamente por:

$i)\, \det A = \det[a_{11}] = a_{11}$

$ii)\, \det A = \det[a_{ij}]_n =$

$(-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}$

Note que o determinante de uma matriz (quadrada) é um número obtido através de operações envolvendo todas as entradas da matriz.

A expressão

$$\det A = \det[a_{ij}]_n = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}$$

também é conhecida como regra de Laplace para o cálculo do determinante de uma matriz $A = [a_{ij}]_n$.

Observe que a definição está sendo apresentada usando-se uma linha i da matriz, porém poderá ser usada uma fila qualquer da matriz (linha ou coluna).

Exemplo 1.4.1. *Calcular o determinante da matriz* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

Desenvolvendo pela linha 1:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Desenvolvendo agora pela coluna 1:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{2+1} a_{21} \det A_{21} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Veja que os resultados são iguais.

Exemplo 1.4.2. *Calcular o determinante da matriz* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Desenvolvendo pela linha 1:

$$\begin{aligned} \det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} \det A_{13} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Desenvolvendo agora pela coluna 2:

$$\begin{aligned} \det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & \\ &= (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + (-1)^{2+2} a_{22} \det A_{22} + (-1)^{3+2} a_{32} \det A_{32} \\ &= -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{32}a_{11}a_{23} + a_{32}a_{13}a_{21}. \end{aligned}$$

Veja que os resultados são iguais.

Exemplo 1.4.3. *Supondo que se pretende que um salário O numa empresa seja calculado à custa da divisão de dois fatores X e Z e que deve ser retirada a contribuição para a segurança social S. Represente o determinante que permite operacionalizar o cálculo desse salário.*

$$O = \frac{X}{Z} - S \Rightarrow O = \frac{X}{1} \quad \frac{1}{Z} - S \cdot 1 \Rightarrow O = \begin{vmatrix} X & S \\ 1 & \dfrac{1}{Z} \end{vmatrix}.$$

Existe um teorema, conhecido como **REGRA DE CRAMER**, que determina a resolução de um sistema de equações lineares $A \cdot X = B$, de ordem $n \times n$, através de determinantes. (Apresentaremos o teorema sem demonstração).

Teorema 1.4.4. *Se $detA \neq 0$, então o sistema $A \cdot X = B$ tem uma única solução dada por*

$$x_j = \frac{detA_j}{detA}, \quad 1 \leq j \leq n$$

onde A_j representa a matriz obtida de A substituindo a sua j-ésima coluna pela única coluna de B.

Exemplo 1.4.5. *Utilizaremos esse teorema para resolver o sistema*

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 0 \\ x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_n = -1. \end{cases}$$

Temos que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como $detA = 8 \neq 0$, $detA_1 = 8$, $detA_2 = 28$ e $detA_3 = -24$, a Regra de Cramer nos dá

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \tfrac{7}{2} \quad e \quad x_3 = -3.$$

Exemplo 1.4.6. *Mostre que o determinante de uma matriz Triangular Superior (ou inferior) é o produto dos elementos da diagonal principal.*

Seja a matriz $A = [a_{ij}]_n$*, tal que* $a_{ij} = 0$ *se* $i < j$*,*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Para o caso de $a_{ij} = 0$ *se* $i > j$ *é idêntico.*

Podemos verificar essa propriedade pelo P.I.F. (Princípio da Indução Finita).

(I) *A propriedade é válida para* $n = 1$*:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} = a_{11}.$$

(II) *Suponha a propriedade válida para* $n = k$*:*

$$A_{kk} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_{kk} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix},$$

$$detA_{kk} = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{kk}.$$

Vamos mostrar que ela é válida para $n = k + 1$*. A matriz* A *de ordem* $(k + 1)$ *está representada abaixo.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} & 0 \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & a_{(k+1)3} & \cdots & a_{(k+1)k} & a_{(k+1)(k+1)} \end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo o determinante de A pela última coluna, temos

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{(k+1)+(k+1)} a_{(k+1)(k+1)} \det A_{(k+1)(k+1)} \\ &= 1 \cdot a_{(k+1)(k+1)} \cdot a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{kk} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{kk}a_{(k+1)(k+1)}. \end{aligned}$$

Portanto a propriedade é válida para todo $n \geq 1$. Temos

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Exemplo 1.4.7. *Se* $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$*, então*

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} = 8 \cdot 7 = 56.$$

Se $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$*, então*

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60.$$

–

Capítulo 2

ELEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAR

Neste capítulo iremos apresentar inicialmente algumas definições, proposições e teoremas que servirão de ferramenta para desenvolver um procedimento de resolução de equações polinomiais de grau menor que cinco, utilizando matrizes circulantes. Este procedimento de resolução será apresentado, para cada grau, através de exemplos.

2.1 Polinômio característico de uma matriz

Definição 2.1.1. *Um polinômio é uma expressão que pode ser apresentada na forma*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

em que $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ *são chamados de coeficientes e* x *é uma indeterminada.*

Definição 2.1.2. *Chama-se grau de um polinômio* $[gr(p)]$ *ao maior expoente da variável entre os termos de coeficientes não nulos.*

Observações:

1) Se um polinômio tiver todos os coeficientes nulos ele é chamado de polinômio nulo.

2) O grau do polinômio nulo não está definido.

3) O coeficiente não nulo da variável de maior expoente é chamado de coeficiente dominante ou coeficiente líder.

Definição 2.1.3. *Dizemos que o número complexo α é uma raiz do polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, se o número complexo*

$$p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0$$

for igual a 0.

*Seja A uma matriz quadrada de ordem n, com elementos reais. Definimos o **polinômio característico de** A como sendo*

$$p_A(x) = \det(xI - A),$$

onde I representa a matriz identidade de ordem n. Note que o grau do polinômio característico de uma matriz A é igual à ordem de A.

*As raízes do polinômio característico de A são chamadas de **autovalores de** A. Apesar da matriz A ser uma matriz real, e portanto os coeficientes de $p(x)$ são reais, consideraremos as raízes de $p_A(x)$ no conjunto dos números complexos. Pelo teorema fundamental da álgebra, temos que $p_A(x)$ possui n raízes, sendo n a ordem de A e o grau do polinômio característico. Observe que não necessariamente todas as raízes são distintas.*

Se A é uma matriz quadrada de ordem n e λ é um autovalor de A, temos que $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$, e isto é equivalente a dizer que o sistema linear homogêneo

$$(\lambda I - A) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

possui uma solução não trivial.

*Se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ é uma solução não trivial de (2.1) chamamos x de **autovetor de** A associado ao autovalor λ.*

Exemplo 2.1.4. *Dada as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$*, calcule o polinômio característico, os autovalores e os autovetores de* A *e de* B.

Temos, pela definição, que o polinômio característico de A *é*

$$p_A(x) = \det(xI - A) = \det \begin{bmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{bmatrix} = x^2 - 1.$$

Para encontrar os autovalores de A *devemos determinar as raízes do polinômio característico, daí,*

$$p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1.$$

Agora que encontramos os autovalores da matriz A *podemos determinar os seus autovetores resolvendo o sistema (2.1).*

Para $\lambda = 1$

$$(1.I - A) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y.$$

Logo todas as soluções são da forma $(x, x) \in \mathbb{C}^2$.

Para $\lambda = -1$ *o sistema*

$$(-1.I - A) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -x = y.$$

Logo todas as soluções são da forma $(x, -x) \in \mathbb{C}^2$.

Assim, os autovetores de A são da forma $(x, x), (x, -x), x \in \mathbb{C}$ *e* $x \neq 0$.

Repetiremos os cálculos acima para a matriz B.

$$p_B(x) = \det(xI - B) = \det \begin{bmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ -1 & 0 & x \end{bmatrix} = x^3 - 1.$$

Logo o polinômio característico de B é $p_B(x) = x^3 - 1$.

Os autovalores de B são as raízes de ordem 3 da unidade, ou seja,

$$\lambda = 1, \lambda = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Determinando os autovetores temos:

para $\lambda = 1$*:*

$$(1.I - A) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo os autovetores são da forma $(x, x, x) \in \mathbb{C}^3$.

Para $\lambda = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$*:*

$$\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.I - A\right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} & -1 \\ -1 & 0 & \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo todas as soluções são da forma $\left(x, \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}x, \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}x\right) \in \mathbb{C}^3$.

Para $\lambda = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$*:*

$$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.I-A\right)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & -1 \\ -1 & 0 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo todas as soluções são da forma $\left(x, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x\right) \in \mathbb{C}^3$.

Portanto os autovetores de B *são da forma* (x, x, x), $\left(x, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right)$ *e* $\left(x, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x\right)$ *com* $x \in \mathbb{C}$.

2.2 Matrizes Circulantes

Nesta secção iremos falar um pouco sobre matrizes circulantes e algumas de suas propriedades.

Lembramos que o objetivo principal deste trabalho é aplicar essa belíssima teoria na resolução de equações polinomiais de grau menor que 5 e, portanto, não iremos nos estender muito sobre essa teoria. Focaremos estritamente nos resultados que nos darão embasamento teórico para alcançar nosso objetivo principal.

Uma matriz circulante C *é uma matriz quadrada, com elementos reais, em que cada linha* i *é formada por um deslocamento cíclico de* $i-1$ *posições, para a direita, de um mesmo vetor* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

$$C = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} & a_0 & a_1 \\ a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \end{bmatrix}.$$

Notação: *Denotamos uma matriz circulante* C *por* $C(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, *onde* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ *são os elementos da sua primeira linha.*

Exemplo 2.2.1.

$$C(a,b)=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix};\quad C(a,b,c)=\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix};\quad C(a,b,c,d)=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{bmatrix}.$$

Representamos por C_n a matriz circulante, de ordem n, dada por $C_n = C(0,1,0,\dots,0)$, ou seja,

$$C_n=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

Exemplo 2.2.2. *Seja $C_n = C(0,1,0,\dots,0)$, mostre que $p_{C_n}(x) = x^n - 1$.*

Para $n = 2$ e $n = 3$ já foi feito no exemplo 2.1.4. Para $n > 3$, temos

$$p_{C_n}(x)=\det(xI-C_n)=\det\begin{bmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{bmatrix}_n.$$

Usando a regra de Laplace para calcular o determinante, considerando a enésima linha, temos

$$p_{C_n}(x)=a_{n1}(-1)^{n+1}\det\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}+a_{nn}(-1)^{n+n}\det\begin{bmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{bmatrix}.$$

Como as duas matrizes acima são triangulares, segue do exemplo 1.4.6 que

$$p_{Cn}(x) = -1(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} + x(-1)^{2n}x^{n-1} \Rightarrow p_{Cn}(x) = x^n - 1.$$

Com esse exemplo podemos concluir que os autovalores de C_n são as raízes enésimas da unidade.

O próximo resultado nos diz que dada uma matriz circulante qualquer $C(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ podemos escrevê-la como combinação linear da matriz circulante $C_n = C\underbrace{(0, 1, 0, \ldots, 0)}_{(n-upla)}$, isto é,

$$C(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) = a_0 I + a_1 C_n + a_2 C_n^2 + a_2 C_n^3 + \cdots + a_{n-1} C_n^{n-1}.$$

Proposição 2.2.3. *Qualquer que seja a matriz circulante $C = C(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ vale que o polinômio $q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$ satisfaz*

$$C = q(C_n) = a_0 I + a_1 C_n + a_2 C_n^2 + a_3 C_n^3 + \cdots + a_{n-1} C_n^{n-1}.$$

Prova: Temos

$$C = a_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} +$$

$$a_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + a_{n-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$C = a_0 C(1, 0, 0, \ldots, 0) + a_1 C(0, 1, 0, \ldots, 0) + a_2 C(0, 0, 1, \ldots, 0) + \cdots + a_{n-1} C(0, 0, 0, \ldots, 1).$

Para concluir a demonstração basta mostrar que

$C_n^i = C(0, 1, 0, \ldots, 0)^i = C(0, 0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{coordenada \quad (i+1)}, \ldots, 0).$

Sejam

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$$

$$e_3 = (0, 0, 1, \ldots, 0)$$

$$\vdots$$

$$e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1),$$

os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Observe que $C_n = C(e_2)$, logo

$$C_n^2 = C_n C_n \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{C_n} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{C_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{C_n^2},$$

ou seja,

$$C_n^2 = C(0, 0, \underbrace{1}_{3^{\text{o}} \quad termo}, \ldots, 0) = C(e_3).$$

$$C_n^3 = C_n^2 C_n \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{C_n^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{C_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{C_n^3},$$

ou seja,

$$C_n^3 = C(0, 0, 0, \underbrace{1}_{4^{\text{o}} \quad termo}, \ldots, 0) = C(e_4).$$

Suponha válida a igualdade abaixo:

$$C_n^i = C(0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{(i+1)^{\text{o}} \quad termo}, \ldots, 0) = C(e_{i+1}).$$

Então

$$C_n^{i+1} = C_n^i C_n = C(0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{(i+2)^{\text{o}} \quad termo}, \ldots, 0) = C(e_{i+2}).$$

Portanto, a propriedade é válida para todo $i \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.2.4. *Sejam* $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$, $C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $q(x) = a + bx + cx^2$.

Temos que,

$$q(C_3) = aI + bC_3 + cC_3^2 \Rightarrow q(C_3) = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$q(C_3) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} = A.$$

O próximo resultado, apesar de sua simplicidade, é de extrema importância para o nosso estudo.

Proposição 2.2.5. *Sejam A uma matriz quadrada de ordem n, $X \in \mathbb{C}^n$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Se $AX = \lambda X$, então $A^n X = \lambda^n X, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Essa propriedade pode ser verificada pelo Princípio da Indução Finita (P.I.F.)

(I) A propriedade é válida para $n = 1$, pois:

$$A^1 X = \lambda^1 X \Rightarrow AX = \lambda X$$

(II) Suponha a propriedade válida para $n = k$:

$$A^k X = \lambda^k X.$$

Vamos provar que a mesma vale para $n = k + 1$. De fato,

$$A^{k+1} X = A^k (AX) = A^k.(\lambda X) = \lambda.(A^k X) = \lambda.(\lambda^k X) = \lambda^{k+1} X.$$

Logo, a propriedade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 2.2.6. *Sejam $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ e $C = C(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ uma matriz circulante. Então todos os autovalores de C são da forma $q(\lambda)$, onde λ é autovalor de C_n e $q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$.*

Demonstração. Seja λ um autovalor de C_n e seja X um autovetor associado ao autovalor λ. Então

$$(\lambda I - C_n)X = 0 \Leftrightarrow C_n X = \lambda X.$$

Logo

$$\begin{aligned}
[q(\lambda)I - C]X &= [q(\lambda)I - (a_0 I + a_1 C_n + a_2 C_n^2 + a_3 C_n^3 + \cdots + a_{n-1} C_n^{n-1})]X \\
&= q(\lambda)X - (a_0 I + a_1 C_n + a_2 C_n^2 + a_3 C_n^3 + \cdots + a_{n-1} C_n^{n-1})X \\
&= q(\lambda)X - (a_0 X + a_1 C_n X + a_2 C_n^2 X + a_3 C_n^3 X + \cdots + a_{n-1} C_n^{n-1} X) \\
&= q(\lambda)X - (a_0 X + a_1 \lambda X + a_2 \lambda^2 X + a_3 \lambda^3 X + \cdots + a_{n-1} \lambda^{n-1} X) \\
&= q(\lambda)X - (a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \cdots + a_{n-1} \lambda^{n-1})X \\
&= q(\lambda)X - q(\lambda)X = 0.
\end{aligned}$$

Visto que

$$C_n X = \lambda X,\ C_n^2 X = \lambda^2 X,\ C_n^3 X = \lambda^3 X,\ \ldots, C_n^{n-1} X = \lambda^{n-1} X.$$

Mostraremos agora que dado um autovalor σ de C então existe um autovalor λ de C_n tal que $\sigma = q(\lambda)$.

Considere o polinômio

$$r(x) = q(x) - \sigma$$

de grau $n-1$. Pelo teorema fundamental da aritmética podemos escrever

$$r(x) = a_{n-1} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (x - \mu_i)$$

onde μ_i são as raízes complexas do polinômio $r(x)$.

Seja $y \neq 0$ um autovetor de C associado ao autovalor σ. Daí,

$$C \cdot y = \sigma \cdot y \Leftrightarrow (C - \sigma I) \cdot y = 0.$$

Assim a matriz $C - \sigma I$ é não invertível.

Note que

$$r(C_n) = q(C_n) - \sigma I = C - \sigma I = a_{n-1} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (C_n - \mu_i I).$$

Como $C - \sigma I$ é uma matriz não inversível, então para algum $i = 1, 2, \ldots, n-1$, a matriz $C_n - \mu_i I$ é não inversível. Logo μ_i é autovalor de C_n. Sendo μ_i uma raiz do polinômio

$$r(x) = q(x) - \sigma,$$

então

$$0 = r(\mu_i) = q(\mu_i) - \sigma \Rightarrow q(\mu_i) = \sigma.$$

$\square$

Como vimos no exemplo 1.1.3, considere $\omega_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ uma raiz da unidade de ordem n. Segue que todas as raízes do polinômio característico de C_n são da forma ω_1^i com $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Logo, dada qualquer matriz circulante $C = C(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ todas as raízes do polinômio característico de C são da forma $q(\omega_1^i) = a_0 + a_1\omega_1^i + a_2(\omega_1^i)^2 + a_3(\omega_1^i)^3 + \cdots + a_{n-1}(\omega_1^i)^{n-1}$.

Exemplo 2.2.7. *Considere a matriz* $C = C(1,2,1,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ *cujo polinômio característico é*

$$p_C(x) = \det(xI - C) = x^4 - 4x^3 - 20x^2 - 4x - 21$$

e tem associado a ela o polinômio $q(x) = 1 + 2x + x^2 + 3x^3$.

Note que as raízes de $p_C(x)$ *são:*

$q(\omega_1^0) = q(1) = 1 + 2.1 + 1^2 + 3.1^3 = 7$, *pois*

$$p_C(7) = 7^4 - 4.7^3 - 20.7^2 - 4.7 - 21 = 0$$

$q(\omega_1^1) = q(i) = 1 + 2.i + i^2 + 3.i^3 = -i$, *pois*

$$p_C(-i) = (-i)^4 - 4.(-i)^3 - 20.(-i)^2 - 4.(-i) - 21 = 0$$

$q(\omega_1^2) = q(-1) = 1 + 2.(-1) + (-1)^2 + 3.(-1)^3 = -3$, *pois*

$$p_C(-3) = (-3)^4 - 4.(-3)^3 - 20.(-3)^2 - 4.(-3) - 21 = 0$$

$q(\omega_1^3) = q(-i) = 1 + 2.(-i) + (-i)^2 + 3.(-i)^3 = i$, *pois*

$$p_C(i) = i^4 - 4.i^3 - 20.i^2 - 4.i - 21 = 0.$$

2.3 Matrizes Circulantes na resolução de equações polinomiais de grau < 5

Utilizaremos agora o que foi mostrado nas secções anteriores para resolver equações de grau menor que cinco através das matrizes circulantes. Mas antes, vamos explicar porque podemos usar as matrizes circulantes e em que isso facilita o cálculo das raízes.

Primeiro note que dada qualquer matriz circulante conhecemos todas as raízes do seu polinômio característico.

Dado um polinômio de grau $n < 5$ que desejamos conhecer as suas raízes, podemos supor que este polinômio é o polinômio característico de uma matriz circulante de ordem n (igual ao grau do polinômio), simplesmente porque sabemos todas as raízes deste polinômio característico.

Então, passamos do problema de encontrar raízes ao problema de encontrar a solução de um sistema de equações obtido pela igualdade de polinômios.

Vejamos como funciona:

Seja $p(x)$ um polinômio do qual se deseja encontrar as raízes.

- Em primeiro lugar, substituiremos a variável x do polinômio $p(x)$ por outra variável, y por exemplo, de modo a eliminar o coeficiente de grau $(n-1)$, de acordo com o procedimento descrito abaixo.

  Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots + a_0 = 0$, uma equação polinomial de grau n.

  Substituindo $x = y + \alpha$ em $p(x)$, podemos escolher um valor conveniente para α de modo que o novo polinômio, na variável y, seja desprovido do termo de grau $(n-1)$, ou seja, o coeficiente do termo de grau $(n-1)$ é igual a zero.

  Vejamos:

  Vamos relembrar a fórmula do desenvolvimento do Binômio de Newton.

$$(y+\alpha)^n = \binom{n}{0} y^n \alpha^0 + \binom{n}{1} y^{n-1}\alpha^1 + \binom{n}{2} y^{n-2}\alpha^2 + \cdots + \binom{n}{n} y^0 \alpha^n$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}, \forall i = 0, 1, \ldots, n.$$

Vamos agora substituir x por $y+\alpha$ no polinômio $p(x)$ acima, obtendo então um novo polinômio na variável y:

$$\begin{aligned}
p(y) &= a_n(y+\alpha)^n + a_{n-1}(y+\alpha)^{n-1} + a_{n-2}(y+\alpha)^{n-2} + a_{n-3}(y+\alpha)^{n-3} + \cdots + a_0 \\
&= a_n(y^n + ny^{n-1}\alpha^1 + \cdots + \alpha^n) + a_{n-1}(y^{n-1} + \cdots + \alpha^{n-1}) + \cdots + a_0 \\
&= a_n y^n + (a_n.n.\alpha + a_{n-1})y^{n-1} + \cdots + a_0.
\end{aligned}$$

Como queremos que o coeficiente do termo de grau $(n-1)$ seja zero, temos

$$a_n.n.\alpha + a_{n-1} = 0.$$

Logo

$$\alpha = -\frac{a_{n-1}}{na_n}.$$

Fazendo $x = y - \dfrac{a_{n-1}}{na_n}$ na equação polinomial inicial obteremos

$$p(y) = a_n y^n + b_{n-2}y^{n-2} + \cdots + b_0 = 0.$$

Note que o polinômio $p(x)$ não tem as mesmas raízes que $p(y)$, mas, existe uma bijeção entre as raízes destes polinômios, pois $x_i = y_i - \dfrac{a_{n-1}}{na_n}$.

- Calcula-se o polinômio característico da matriz circulante $C = C(0,b), C(0,b,c)$ ou $C = C(0,b,c,d)$ associada ao polinômio $p(y)$, dependendo do grau de $p(y)$, e a cada matriz circulante associa-se um polinômio da forma $q(y) = by, q(y) = by + cy^2$ ou $q(y) = by + cy^2 + dy^3$, respectivamente.

  Justificativa para a escolha da matriz circulante:

  Seja uma matriz $A_n = A$. Prova-se que o polinômio característico de A é dado por $p_A(y) = det(yI - A) = y^n - tr(A)y^{n-1} + a_{n-2}y^{n-2} + a_{n-3}y^{n-3} + \cdots + (-1)^n det(A)$. (*Introdução à Álgebra Linear*, Coleção PROFMAT, cap. 9, pág. 256). Como, no nosso caso, a matriz A é circulante, ou seja, $A = C(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, o traço de A é dado por $tr(A) = n \cdot a_0$. Como queremos que o coeficiente do termo de grau $(n-1)$ seja zero, deve ocorrer $tr(A) = n \cdot a_0 = 0$. Devemos ter $a_0 = 0$, já que n não pode ser zero por se tratar da ordem da matriz.

- Faz-se $p_C(y) = p(y)$ e resolve-se o sistema a fim de determinar as entradas da matriz circulante.

- A solução desse sistema de equações nos fornece os valores dos coeficientes do polinômio $q(y) = by, q(y) = by + cy^2$ ou $q(y) = by + cy^2 + dy^3$, dependendo do grau do polinômio $p(y)$.

- Pelo teorema 2.2.6 os autovalores de C (raízes de $p(y) = 0$) são os valores de $q(\lambda)$, sendo λ os autovalores da matriz circulante C_n, onde n é o grau de $p(y)$.

- De posse das raízes de $p(y)$, substitui-se essas raízes na expressão da mudança de variável, obtendo-se assim as raízes de $p(x)$.

2.3.1 Equações do segundo grau

Exemplo 2.3.1. *Encontre as raízes de* $p(x) = x^2 - 5x + 6$.

Fazendo $x = y + \dfrac{5}{2}$ *obtemos* $p(y) = y^2 - \dfrac{1}{4}$.

Considere a matriz circulante $C = C(0, b)$. *O polinômio característico de* C *é o polinômio*

$$p_C(y) = \det(yI - C) = \det \begin{bmatrix} y & -b \\ -b & y \end{bmatrix} = y^2 - b^2.$$

Fazendo $p_C(y) = p(y)$, *obteremos*

$$b^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow b = \pm\frac{1}{2}.$$

Por conveniência adotaremos $b > 0$.

Assim a matriz circulante $C = C(0, \frac{1}{2})$ *é tal que o seu polinômio característico é igual ao polinômio dado.*

Considere $q(y) = by = \dfrac{1}{2}y$.

Como $p_{C_2}(\lambda) = \lambda^2 - 1$ *e* ± 1 *são as raízes desse polinômio, segue que* $q(1)$ *e* $q(-1)$ *são as raízes de* $p_C(y) = p(y)$.

Portanto as raízes de $p(y) = y^2 - \dfrac{1}{4}$ *são* $y_1 = \dfrac{1}{2}$ *e* $y_2 = -\dfrac{1}{2}$. *Assim* $x_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2} = 3$ *e* $x_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2} = 2$.

Exemplo 2.3.2. *Encontre as raízes de* $p(x) = x^2 - 4x + 5$.

Fazendo $x = y + 2$, *obtemos* $p(y) = y^2 + 1$.

Considere a matriz circulante $C = C(0, b)$. O polinômio característico de C é o polinômio

$$p_C(y) = \det(yI - C) = \det \begin{bmatrix} y & -b \\ -b & y \end{bmatrix} = y^2 - b^2.$$

Fazendo $p_C(y) = p(y)$, obtemos $b^2 = -1 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{-1} = \pm i$.

Por conveniência adotaremos $b > 0$.

Assim a matriz circulante $C = C(0, i)$ é tal que o seu polinômio característico é igual ao polinômio dado.

Considere $q(y) = by = iy$.

Como $p_{C_2}(\lambda) = \lambda^2 - 1$ e $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ são as raízes desse polinômio, segue que $q(1)$ e $q(-1)$ são as raízes de $p_C(y) = p(y)$.

Portanto as raízes de $p(y) = y^2 + 1$ são $y_1 = i$ e $y_2 = -i$. Assim $x_1 = i + 2$ e $x_2 = -i + 2$.

Forma geral: seja um polinômio de segundo grau, $p(x) = x^2 + \alpha x + \beta$.

Fazendo $x = y - \dfrac{\alpha}{2}$ efetuamos a mudança de variável, obtendo $p(y) = y^2 + \dfrac{4\beta - \alpha^2}{4}$.

Considere a matriz circulante $C = C(0, b)$.

O polinômio característico de C é o polinômio

$$p_C(y) = \det(yI - C) = \det \begin{bmatrix} y & -b \\ -b & y \end{bmatrix} = y^2 - b^2.$$

Fazendo $p_C(y) = p(y)$,temos

$$b^2 = \frac{\alpha^2 - 4\beta}{4} \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{\frac{\alpha^2 - 4\beta}{4}}.$$

Por conveniência adotaremos $b > 0$.

Assim a matriz circulante $C = C(0, \sqrt{\dfrac{\alpha^2 - 4\beta}{4}})$ é tal que seu polinômio característico é igual ao polinômio dado.

Considere $q(y) = by = \sqrt{\dfrac{\alpha^2 - 4\beta}{4}}y$.

Pelo teorema 2.2.6 os autovalores de C (raízes de $p(y) = 0$) são os valores de $q(\lambda)$, sendo λ os autovalores da matriz circulante $C_2 = C(0, 1)$, ou seja, as raízes quadradas da unidade ($\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$).

Então temos:

$$q(-1) = -\sqrt{\frac{\alpha^2 - 4\beta}{4}} = y_1.$$

$$q(1) = \sqrt{\frac{\alpha^2 - 4\beta}{4}} = y_2.$$

Como $x = y - \dfrac{\alpha}{2}$, temos:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{\alpha^2 - 4\beta}{4}} - \frac{\alpha}{2}.$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{\alpha^2 - 4\beta}{4}} - \frac{\alpha}{2}.$$

2.3.2 Equações do terceiro grau

Exemplo 2.3.3. *Determine as raízes de* $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Fazendo $x = y - \dfrac{(-6)}{3} = y + 2$, *vem*

$$p(y) = (y+2)^3 - 6(y+2)^2 + 11(y+2) - 6 \Rightarrow p(y) = y^3 - y.$$

Vamos associar a ele a matriz circulante $C = C(0, b, c)$ *e* $q(y) = by + cy^2$ *o polinômio associado a* C.

Determinando o polinômio característico de C, *temos*

$$p_C(y) = \det(yI - C) = \det \begin{bmatrix} y & -b & -c \\ -c & y & -b \\ -b & -c & y \end{bmatrix} = y^3 - (3bc)y - b^3 - c^3.$$

Fazendo $p_C(y) = p(y)$, *temos*

$$\begin{cases} -3bc = -1 \\ -b^3 - c^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc = \dfrac{1}{3} \\ b^3 + c^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^3c^3 = \dfrac{1}{27} \\ b^3 + c^3 = 0 \end{cases}$$

Note que b^3 *e* c^3 *são as raízes da equação* $t^2 - 0t + \dfrac{1}{27} = 0$. *Logo*

$$t^2 = -\frac{1}{27} \Rightarrow t = \pm\frac{i}{\sqrt{27}}.$$

Então

$$t_1 = b^3 = +\frac{i}{\sqrt{27}} \Rightarrow b = \sqrt[3]{\frac{i}{\sqrt{27}}}$$

$$\frac{i}{\sqrt{27}} = \frac{1}{\sqrt{27}}[cos(\frac{\pi}{2}) + isen(\frac{\pi}{2})]$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{27}}}[cos(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}) + isen(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3})]; k \in \{0, 1, 2\}.$$

Fazendo $k = 0$, *obtemos*

$$b = \frac{1}{\sqrt[6]{27}}[cos(\frac{\pi}{6}) + isen(\frac{\pi}{6})]$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2} + i.\frac{1}{2}) = \frac{3 + \sqrt{3}.i}{6}.$$

Como $bc = \frac{1}{3}$, *vem* $c = \dfrac{1}{3.(\frac{3+\sqrt{3}.i}{6})} = \dfrac{2}{3 + \sqrt{3}.i} = \dfrac{3 - \sqrt{3}.i}{6}$, *e*

$$q(y) = by + cy^2 = (\frac{3 + \sqrt{3}.i}{6}).y + (\frac{3 - \sqrt{3}.i}{6}).y^2.$$

Como $p_{C_3}(\lambda) = \lambda^3 - 1$ *e* $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ *e* $\lambda_3 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ *são as raízes desse polinômio, segue que* $q(\lambda_1), q(\lambda_2)$ *e* $q(\lambda_3)$ *são as raízes de* $p_C(y) = p(y)$.

Logo

$$\begin{aligned}
y_1 &= q(\lambda_1) = (\frac{3 + \sqrt{3}.i}{6}).1 + (\frac{3 - \sqrt{3}.i}{6}).1^2 = 1\\
y_2 &= q(\lambda_2) = (\frac{3 + \sqrt{3}.i}{6}).(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}) + (\frac{3 - \sqrt{3}.i}{6}).(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2})^2 = -1\\
y_3 &= q(\lambda_3) = (\frac{3 + \sqrt{3}.i}{6}).(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}) + (\frac{3 - \sqrt{3}.i}{6}).(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2})^2 = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, como $x = y + 2$, *temos*

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_1 + 2 = 1 + 2 = 3.\\
x_2 &= y_2 + 2 = -1 + 2 = 1.\\
x_3 &= y_3 + 2 = 0 + 2 = 2.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.3.4. *Encontre as raízes de* $p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1$.

Fazendo $x = y - \dfrac{(-3)}{3} = y + 1$, *vem*

$$p(y) = (y+1)^3 - 3(y+1)^2 - 3(y+1) - 1 \Rightarrow p(y) = y^3 - 6y - 6.$$

Considere a matriz circulante $C = C(0, b, c)$ *e* $q(y) = by + cy^2$ *o polinômio associado a* C. *Segue que o polinômio característico de* C *é:*

$$p_C(y) = \det(yI - C) = \det \begin{bmatrix} y & -b & -c \\ -c & y & -b \\ -b & -c & y \end{bmatrix} = y^3 - (3bc)y - b^3 - c^3.$$

Fazendo $p_C(y) = p(y)$, *temos*

$$\begin{cases} -3bc = -6 \\ -b^3 - c^3 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc = 2 \\ b^3 + c^3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^3c^3 = 8 \\ b^3 + c^3 = 6 \end{cases}$$

Note que b^3 *e* c^3 *são as raízes da equação* $t^2 - 6t + 8 = 0$. *Então*

$$t_1 = 2 \quad e \quad t_2 = 4.$$

Daí

$$t_1 = b^3 = 2 \Rightarrow b = \sqrt[3]{2}.$$

Como $bc = 2$, *obteremos*

$$c = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4}.$$

Segue que $q(y) = \sqrt[3]{2}y + \sqrt[3]{4}y^2$.

Como $p_{C_3}(\lambda) = \lambda^3 - 1$ *e* $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ *e* $\lambda_3 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ *são as raízes desse polinômio, segue que* $q(\lambda_1), q(\lambda_2)$ *e* $q(\lambda_3)$ *são as raízes de* $p_C(y) = p(y)$.

Então as raízes de $p(y)$ *são:*

$$\begin{aligned} y_1 &= q(\lambda_1) = \sqrt[3]{2}.1 + \sqrt[3]{4}.1^2 = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \\ y_2 &= q(\lambda_2) = \sqrt[3]{2}\lambda_2 + \sqrt[3]{4}(\lambda_2)^2 = \frac{1}{2}[(-\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}) + i\sqrt{3}(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})] \\ y_3 &= q(\lambda_3) = \sqrt[3]{2}\lambda_3 + \sqrt[3]{4}(\lambda_3)^2 = \frac{1}{2}[(-\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}) - i\sqrt{3}(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})]. \end{aligned}$$

Portanto, as raízes de $p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$ *são:*

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + 1 = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \\ x_2 &= y_2 + 1 = \frac{1}{2}[(2 - \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}) + i\sqrt{3}(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})] \\ x_3 &= y_3 + 1 = \frac{1}{2}[(2 - \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}) - i\sqrt{3}(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})]. \end{aligned}$$

Formal geral: Vamos transformar $p(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ na forma $p(y) = y^3 + py + q$, eliminando-se o termo de 2º grau em $p(x)$. Para isso, devemos fazer a substituição de x por $\left(y - \dfrac{\alpha}{3}\right)$.

Dado $p(y) = y^3 + py + q$, vamos associar a ele a matriz circulante $C = C(0, b, c)$ e $q(y) = by + cy^2$ o polinômio associado a C.

Determinando o polinômio característico de C, temos

$$p_C(y) = \det(yI - C) = \det \begin{bmatrix} y & -b & -c \\ -c & y & -b \\ -b & -c & y \end{bmatrix} = y^3 - (3bc)y - b^3 - c^3.$$

Fazendo $p_C(y) = p(y)$, vem

$$\begin{cases} -3bc = p \\ -b^3 - c^3 = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc = -\dfrac{p}{3} \\ b^3 + c^3 = -q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^3c^3 = -\dfrac{p^3}{27} \\ b^3 + c^3 = -q \end{cases}$$

Note que b^3 e c^3 são as raízes da equação $t^2 + qt - \dfrac{p^3}{27} = 0$, que resolvida nos dá como raízes, t_1 e t_2.

$$t_1 = b^3 = \frac{-p + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \Rightarrow b = \sqrt[3]{\left(\frac{-p + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}\right)}.$$

Depois de determinado o valor de b, que é o cálculo da raiz cúbica do número complexo $\left(\dfrac{-p + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}\right)$, determinamos o valor de c considerando que $bc = -\dfrac{p}{3}$.

$$c = -\frac{p}{3}\left(\frac{2}{-p + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}\right).$$

Determinados os valores de b e c podemos escrever $q(y)$:

$$q(y) = \left(\frac{-p + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}\right)y - \frac{p}{3}\left(\frac{2}{-p + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}\right)y^2.$$

Como $p_{C_3}(\lambda)=\lambda^3-1$ e $\lambda_1=1, \lambda_2=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ e $\lambda_3=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ são as raízes desse polinômio, segue que $q(\lambda_1), q(\lambda_2)$ e $q(\lambda_3)$ são as raízes de $p_C(y)=p(y)$.

As raízes de $p(y)$ são:

$$\begin{aligned}
y_1 &= q(\lambda_1)=\left(\frac{-p+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}\right)(1)-\frac{p}{3}\left(\frac{2}{-p+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}\right)(1)^2\\
y_2 &= q(\lambda_2)=\left(\frac{-p+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}\right)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{p}{3}\left(\frac{2}{-p+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}\right)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2\\
y_3 &= q(\lambda_3)=\left(\frac{-p+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}\right)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{p}{3}\left(\frac{2}{-p+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}\right)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Para determinar as raízes de $p(x)$ é suficiente substituir y_1, y_2 e y_3 em $x=y-\dfrac{\alpha}{3}$ obtendo assim x_1, x_2 e x_3.

2.3.3 Equações do quarto grau

Exemplo 2.3.5. *Determine as raízes de* $p(x)=x^4-4x^3-20x^2-4x-21$.

Fazendo $x=y+\dfrac{4}{4}=y+1$, *obtemos* $p(y)=y^4-26y^2-52y-48$.

Vamos igualar a esse polinômio o polinômio característico da matriz $C=C(0,b,c,d)$.

O polinômio característico de C *é dado por*

$$p_C(y)=\det(yI-C)=\det\begin{bmatrix} y & -b & -c & -d\\ -d & y & -b & -c\\ -c & -d & y & -b\\ -b & -c & -d & y\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow p_C(y)=y^4-(4bd+2c^2)y^2-4c(b^2+d^2)y+(c^4-b^4-d^4-4bdc^2+2b^2d^2).$$

Igualando esse polinômio característico a $p(y)$, *temos*

$$\begin{cases} 4bd+2c^2=26\\ 4c(b^2+d^2)=52\\ c^4-b^4-d^4-4bdc^2+2b^2d^2=-48\end{cases}$$

Temos $bd=\dfrac{13-c^2}{2}$ *e* $b^2+d^2=\dfrac{13}{c}$, *substituindo na terceira equação, obtemos*

$$c^4-(b^2+d^2)^2-4bdc^2+4b^2d^2=-48 \Rightarrow c^4-\left(\frac{13}{c}\right)^2-4c^2\left(\frac{13-c^2}{2}\right)+4\left(\frac{13-c^2}{2}\right)^2=-48$$

$$\Rightarrow 4c^6-52c^4+217c^2-169=0.$$

Fazendo $c^2=t$, vem

$$4t^3-52t^2+217t-169=0.$$

Daí

$$\begin{cases} 4bd+2c^2=26 \\ 4c(b^2+d^2)=52 \\ c^4-b^4-d^4-4bdc^2+2b^2d^2=-48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bd=\dfrac{13-c^2}{2} \\ b^2+d^2=\dfrac{13}{c} \\ c^2=t \\ 4t^3-52t+217t-169=0 \end{cases}$$

Resolvendo-se essa equação do terceiro grau (procedimento já visto no item 2.3.2), encontraremos $t_1=1, t_2=6+\frac{5}{2}i, t_3=6-\frac{5}{2}i$.

Tomaremos $t_1=1$, logo

$$c=1, \quad bd=6, \quad b^2+d^2=13.$$

Como $b^2d^2=36$ e $b^2+d^2=13$, temos que b^2 e d^2 são as raízes da equação $z^2-13z+36=0$, logo $b^2=4$ e $d^2=9$, daí, $b=\pm2$ e $d=\pm3$.

Sendo $bd=6$, para $b=2$ teremos $d=3$.

Sendo $1, i, -1$ e $-i$ as raízes quartas da unidade e $q(y)=2y+1y^2+3y^3$, então as raízes de $p(y)$ são:

$$\begin{aligned} y_1 &= q(1)=2.1+1.1^2+3.1^3=6 \\ y_2 &= q(i)=2.i+1.i^2+3.i^3=-1-i \\ y_3 &= q(-1)=2.(-1)+1.(-1)^2+3.(-1)^3=-4 \\ y_4 &= q(-i)=2.(-i)+1.(-i)^2+3.(-i)^3=-1+i. \end{aligned}$$

Substituindo essas raízes em $x = y + 1$, encontraremos as raízes de $p(x)$:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + 1 = 7 \\ x_2 &= y_2 + 1 = -i \\ x_3 &= y_3 + 1 = -3 \\ x_4 &= y_4 + 1 = i. \end{aligned}$$

Exemplo 2.3.6. *Encontre as raízes do polinômio $p(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$.*

Fazendo $x = y + \dfrac{10}{4} = y + \dfrac{5}{2}$, em p(x) obtemos $p(y) = y^4 - \dfrac{5}{2}y^2 - 0y + \dfrac{9}{16}$.

Vamos igualar a esse polinômio a matriz $C = C(0, b, c, d)$.

O polinômio característico de C é dado por

$$p_C(y) = \det(yI - C) = \det \begin{bmatrix} y & -b & -c & -d \\ -d & y & -b & -c \\ -c & -d & y & -b \\ -b & -c & -d & y \end{bmatrix}$$

$$p_C(y) = y^4 - (4bd + 2c^2)y^2 - 4c(b^2 + d^2)y + (c^4 - b^4 - d^4 - 4bdc^2 + 2b^2d^2).$$

Igualando esse polinômio característico a $p(y)$, temos

$$\begin{cases} 4bd + 2c^2 = \dfrac{5}{2} \\ 4c(b^2 + d^2) = 0 \\ c^4 - b^4 - d^4 - 4bdc^2 + 2b^2d^2 = \dfrac{9}{16} \end{cases}$$

De $4c(b^2 + d^2) = 0$, temos $c = 0$ ou $b^2 + d^2 = 0$.

Para $c = 0$, obtemos

$$\begin{cases} 4bd = \dfrac{5}{2} \\ -b^4 - d^4 + 2b^2d^2 = \dfrac{9}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bd = \dfrac{5}{8} \\ -(b^2 + d^2)^2 + 4b^2d^2 = \dfrac{9}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2d^2 = \dfrac{25}{64} \\ b^2 + d^2 = \pm 1 \end{cases}$$

Os valores de b^2 e d^2 são as raízes da equação $t^2 - t + \dfrac{25}{64} = 0$, ou seja,

$$t_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}i \quad e \quad t_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{8}i.$$

Portanto

$$b^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}i \quad e \quad d^2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{8}i \Rightarrow$$
$$b = \pm\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{8}i} \quad e \quad d = \pm\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{3}{8}i}.$$

Cálculo de b:

$$Seja \quad z = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}i: \quad \rho = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{3}{8})^2} = \frac{5}{8} \quad e \quad \begin{cases} \operatorname{sen}(\theta) = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5} \\ \cos(\theta) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}} = \frac{4}{5} \end{cases}$$
$$z = \rho(cos\theta + isen\theta) = \frac{5}{8}(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i)$$
$$w_k = \sqrt{z} = \sqrt{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right)\right]$$
$$w_k = \sqrt{\frac{5}{8}}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right)\right]; k \in \{0, 1\}$$
$$Para \quad k = 0 \quad \Rightarrow w_0 = \sqrt{\frac{5}{8}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right].$$

Sabemos que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}} \quad e \quad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}}.$$

Como $\operatorname{sen}(\theta) > 0$ *e* $\cos(\theta) > 0$, *então* $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ *e portanto* $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$. *Logo* $\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2}) > 0$ *e* $\cos(\frac{\theta}{2}) > 0$.

Daí

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$
$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$
$$w_0 = \sqrt{\frac{5}{8}}\left(\frac{3\sqrt{10}}{10} + i\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = \frac{\sqrt{10}}{4}\left(\frac{3\sqrt{10}}{10} + i\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}i.$$

Cálculo de d:

Sendo $bd = \frac{5}{8}$, *fazendo* $b = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}i$ *teremos*

$$d=\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}i}=\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}i}\cdot\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i}{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i}=\frac{\frac{5}{8}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i\right)}{\frac{5}{8}}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i.$$

Determinação do polinômio $q(y)$:

$$q(y)=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}i\right)y+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i\right)y^3.$$

As raízes de $p_C(y)=p(y)$ são:

$$\begin{aligned}
y_1 &= q(1)=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}i\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i\right)=\frac{3}{2}\\
y_2 &= q(i)=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}i\right)i+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i\right)i^3=-\frac{1}{2}\\
y_3 &= q(-1)=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}i\right)(-1)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i\right)(-1)^3=-\frac{3}{2}\\
y_4 &= q(-i)=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)(-i)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i\right)(-i)^3=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto, as raízes de $p(x)$ são:

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_1+\frac{5}{2}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=\frac{8}{2}=4\\
x_2 &= y_2+\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=\frac{4}{2}=2\\
x_3 &= y_3+\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=\frac{2}{2}=1\\
x_4 &= y_4+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=\frac{6}{2}=3.
\end{aligned}$$

Forma geral:

Considere o polinômio do quarto grau $p(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$.

Fazendo a substituição de x por $\left(y-\dfrac{\alpha}{4}\right)$ em $p(x)$, obtemos o polinômio

$$p(y)=y^4+py^2+qy+r.$$

Admitiremos que os coeficientes (p,q,r) não sejam todos nulos, para evitar o caso trivial $p(y)=y^4$.

Admitamos a matriz circulante $C=C(0,b,c,d)$.

O polinômio característico de C é dado por

$$
\begin{aligned}
p_C(y) &= \det(yI - C) \\
&= \det \begin{bmatrix} y & -b & -c & -d \\ -d & y & -b & -c \\ -c & -d & y & -b \\ -b & -c & -d & y \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$p_C(y) = y^4 - (4bd + 2c^2)y^2 - 4c(b^2 + d^2)y + (c^4 - b^4 - d^4 - 4bdc^2 + 2b^2d^2).$$

Igualando esse polinômio característico a $p(y)$, temos

$$
\begin{cases}
4bd + 2c^2 = -p \\
4c(b^2 + d^2) = -q \\
c^4 - b^4 - d^4 - 4bdc^2 + 2b^2d^2 = r
\end{cases}
$$

Observe que da primeira e segunda equações podemos escrever bd e $b^2 + d^2$ em função de c e então reescrever a terceira equação em função de c.

$$c^4 - (b^2 + d^2)^2 - 4bdc^2 + 4b^2d^2 = r \Rightarrow c^4 - \frac{q^2}{16c^2} + \frac{(p + 2c^2)^2}{4} + (2c^2 + p)c^2 = r$$

$$\Rightarrow c^6 + \frac{p}{2}c^2 + \left(\frac{p^2 - 4r}{16}\right)c^2 - \frac{q^2}{64} = 0.$$

Fazendo $c^2 = t$, obteremos uma equação de terceiro grau em t,

$$t^3 + \frac{p}{2}t^2 + \left(\frac{p^2 - 4r}{16}\right)t - \frac{q^2}{64} = 0.$$

Daí

$$
\begin{cases}
4bd + 2c^2 = -p \\
4c(b^2 + d^2) = -q \\
c^4 - b^4 - d^4 - 4bdc^2 + 2b^2d^2 = r
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
bd = \dfrac{-p - 2c^2}{4} \\
b^2 + d^2 = \dfrac{-q}{4c} \\
c^2 = t \\
t^3 + \dfrac{p}{2}t^2 + \left(\dfrac{p^2 - 4r}{16}\right)t - \dfrac{q^2}{64} = 0
\end{cases}
$$

Uma solução dessa equação de grau 3 nos fornece um valor de c^2 e daí, substituindo esse valor na expressão de bd e $b^2 + d^2$ descobriremos os valores de b e d, determinando assim, o polinômio $q(y)$. Substituindo os autovalores de C_4 que são $1, i, -1, -i$ em $q(y) = by + cy^2 + dy^3$ encontraremos as raízes de $p(y)$. Ou seja,

$$\begin{aligned} q(1) &= b + c + d = y_1 \\ q(-1) &= -b + c - d = y_2 \\ q(i) &= bi - c - di = i(b - d) - c = y_3 \\ q(-i) &= -bi - c + di = i(d - b) - c = y_4. \end{aligned}$$

Substituindo-se agora cada y_i em $x_i = y_i - \frac{a}{4}(i = 1, 2, 3, 4)$ encontraremos as raízes de $p(x)$, terminando assim, a resolução da equação do quarto grau.

2.3.4 Equações de grau maior ou igual a cinco

Descoberta a fórmula para equação quártica, muitos matemáticos achavam que só seria uma questão de tempo para encontrar a resposta da equação de quinto grau aplicando a técnica de redução de grau, pois não é difícil ver que a transformação

$$x = z - \frac{a_{n-1}}{n.a_n}$$

converte qualquer equação completa de grau n da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

em uma equação de grau n em $\mathbb{Z}$, faltando o termo de grau $n - 1$.

Um médico chamado Paolo Ruffini (1765 – 1822), em 1803, 1805 e 1813 deu uma prova incompleta, ou melhor, sem muito rigor matemático, considerando impossível a solução por radicais para equações maiores ou iguais ao quinto grau.

Niels Henrik Abel (1802-1829), tendo verificado este trabalho de Ruffini, conseguiu provar por meio da álgebra clássica a insolubilidade dessas equações por radicais. Em 1832, Evariste Galois (1811-1832) provou, antes de um duelo de pistola que o levaria à morte, a impossibilidade para as equações de grau maior ou igual a cinco terem soluções por radicais, sendo a demonstração feita por meio da álgebra moderna.

[Wellington José Ferreira, Curso de Matemática, Universidade Católica de Brasília]

Capítulo 3

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Apresentaremos neste capítulo uma sequência didática, com o conteúdo desenvolvido no nosso trabalho, destinada aos alunos do terceiro ano do ensino médio com o objetivo de melhor prepará-los para alguns vestibulares do país, como por exemplo: Ita, Fuvest e outros. Em particular, para que os alunos que pretendem cursar a área de exatas ingressem no ensino superior em melhores condições de acompanhar os cursos.

3.1 [1º dia de aula] - NÚMEROS COMPLEXOS

(Duração: 3 horas)

3.1.1 Objetivos

Dar aos alunos uma visão mais ampla do universo dos números levando-os a reconhecer os números reais como subconjunto do conjunto dos números complexos($\mathbb{C}$). Para tanto, aproveitamos a curiosidade dos alunos sobre a resolução de equações do segundo grau, utilizando a fórmula de Bhaskara, nas quais o discriminante é negativo. Uma vez introduzido o conceito de números complexos, os alunos deverão ser capazes de reconhecer as formas de representação e efetuar operações com esses números.

3.1.2 Conteúdos apresentados

- Definição de números complexos.
- Potências de i.
- Forma algébrica e forma trigonométrica.
- Operações com números complexos: na forma algébrica e na forma trigonométrica.

3.1.3 Metodologia

Iniciaremos com a resolução de uma equação do segundo grau que tenha discriminante negativo, usando a fórmula de Bhaskara. Usaremos como argumento de nossa exposição a raiz quadrada desse discriminante, visto que, até então, o aluno encerrava a resolução dessas equações, por entender que essa raiz quadrada não pertencia ao conjunto universo adotado, o conjunto $\mathbb{R}$. Em seguida, introduziremos a unidade imaginária i e a definição de números complexos. Na sequência da exposição dos conteúdos da nossa aula serão resolvidos vários exemplos com o objetivo de fixar bem o conteúdo.

3.1.4 Procedimento avaliativo

A avaliação será feita da seguinte forma: Os alunos se dividirão em grupos para resolver exercícios propostos com posterior exposição, através da qual será analisado o aprendizado.

Tempo estimado: 1 hora.

3.2 [2º dia de aula] - MATRIZES

(Duração: 3 horas)

3.2.1 Objetivos

Ao final desta aula os alunos deverão ser capazes de: representar genericamente uma matriz, construir matrizes a partir da sua lei de formação, reconhecer os tipos de matrizes e seus elementos, e realizar as operações entre elas.

3.2.2 Conteúdos apresentados

- Conceito e operações com matrizes.
- Propriedades das operações com matrizes.
- Resolução de exercícios sobre as operações destacando a multiplicação de matrizes.

3.2.3 Metodologia

Será apresentado o conceito de matriz através da organização de dados de uma observação, em forma de tabela, e destacadas as vantagens dessa representação. Utilizarei para tal, algumas situações, como por exemplo: a organização dos alunos em sala de aula, os dígitos de um teclado de celular, a utilização de dados no /Excel], entre outros. Dando sequência, apresentaremos as operações e suas propriedades através da resolução de exemplos.

3.2.4 Procedimento avaliativo

Os alunos se dividirão em grupos para resolver exercícios propostos com posterior exposição, através da qual será analisado o aprendizado. (Sugestão: exercícios 1 e 2 da lista de exercícios).

Tempo estimado: 1 hora.

3.3 [3º dia de aula] - DETERMINANTES

(Duração: 3 horas)

3.3.1 Objetivos

Os objetivos dessa aula são: ensinar aos alunos como calcular determinante de matriz de ordem 2 e ordem 3 e reconhecer que um determinante pode ser desenvolvido a partir de qualquer linha ou coluna e aplicar a definição para calcular determinante a partir da fila mais conveniente.

3.3.2 Conteúdos apresentados

- Definição de determinante.
- Mostrar que o determinante de uma matriz quadrada pode ser encontrado fazendo uso de qualquer fila (linha ou coluna).
- Cálculo de determinantes de ordem 2 e de ordem 3 (Regra de Sarrus).
- Resolução de sistemas de equações lineares 2×2 e 3×3 fazendo uso de determinantes.

3.3.3 Metodologia

Iniciaremos a aula mostrando como fazer o cálculo de determinante de ordem 2 e de ordem 3 (regra de Sarrus). Em seguida, apresentaremos a definição de determinante de qualquer ordem (teorema de Laplace). Na sequência, mostraremos a aplicação dos determinantes na resolução de sistemas de equações lineares $n \times n$ através da regra de Cramer.

3.3.4 Procedimento avaliativo

Os alunos se dividirão em grupos para resolver exercícios propostos com posterior exposição, através da qual será analisado o aprendizado. (Sugestão: exercícios 3, 4, 5 e 6 da lista de exercícios).

Tempo estimado: 1 hora.

3.4 [4º dia de aula] - RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 2º E 3º GRAUS

(Duração: 3 horas)

3.4.1 Objetivos

Revisar com os alunos a resolução de equações do segundo grau, através da fórmula de Bhaskara, e ensinar a resolver equações de 2º e 3º graus usando o procedimento das matrizes circulantes.

3.4.2 Conteúdos apresentados

- A fórmula de Bhaskara.
- Comparação da resolução de equações do 2º grau usando a fórmula de Bhaskara e matriz circulante.
- Estender a resolução de equações do 2º grau usando matriz circulante para a resolução de equações do 3º grau.

3.4.3 Metodologia

Começaremos com a apresentação da fórmula de Bhaskara para resolver equações do 2º grau, em seguida introduziremos o conceito de matriz circulante na resolução dessas equações, destacando a facilidade quando se usa esse segundo método. Dando sequência à nossa aula, estenderemos esse método das matrizes circulantes para a resolução de equações do 3º grau através de exemplos.

3.4.4 Procedimento avaliativo

Os alunos se dividirão em grupos para resolver exercícios propostos com posterior exposição, através da qual será analisado o aprendizado. (Sugestão: exercícios 7, 8 e 9 da lista de exercícios).

Tempo estimado: 1 hora.

3.5 [5º dia de aula] - RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 4º GRAU

(Duração: 3 horas)

3.5.1 Objetivos

Ensinar aos alunos a resolver equações do 4º grau através do método apresentado na aula anterior, matrizes circulantes, levando-os a perceber que esse método é único para qualquer equação de até o 4º grau.

3.5.2 Conteúdos apresentados

- Apresentação da resolução de equações do 4º grau usando as matrizes circulantes.

3.5.3 Metodologia

Começaremos fazendo uma breve revisão sobre a aula passada e, em seguida, estenderemos o método das matrizes circulantes para a resolução das equações do 4º grau através de exemplos.

3.5.4 Procedimento avaliativo

Os alunos se dividirão em grupos para resolver exercícios propostos com posterior exposição, através da qual será analisado o aprendizado. (Sugestão: exercício 10 da lista de exercícios).

Tempo estimado: 1 hora.

Lista de exercícios

Propomos uma lista de exercícios para ser trabalhada junto com a sequência didática.

01) (UFRJ) Uma confecção vai fabricar 3 tipos de roupas utilizando 3 materiais diferentes. Considere a matriz A abaixo, onde cada elemento a_{ii} representa quantas unidades de material j serão empregados para fabricação de roupas do tipo i.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Quantas unidades de material 3 serão empregados na confecção de uma roupa tipo 2?
b) Calcule o total de unidades do material 1 que será empregado para fabricar cinco roupas do tipo 1, quatro roupas do tipo 2 e duas roupas do tipo 3.

02) (COVEST) Um nutricionista pretende misturar três tipos de alimentos (A, B e C) de modo que a mistura resultante contenha 3600 unidades de vitaminas, 2500 unidades de minerais e 2700 unidades de gorduras.
Consulte a tabela abaixo e diga qual quantidade de cada alimento deve compor a mistura.

	Vitaminas	Minerais	Gorduras
A	40	100	120
B	80	50	30
C	120	50	60

Tabela 3.1: Tipos de alimentos e misturas

03) Resolver em $\mathbb{R}$ a equação

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & x+2 & 1 & 3 \\ 5 & 10 & x & 9 \\ 4 & 8 & 4 & x-1 \end{bmatrix} = 0$$

04) De quantas maneiras diferentes é possível trocar R$ 20,00 por notas de R$ 1,00, R$ 2,00 e R$ 5,00, com pelo menos uma nota de cada um desses valores?

05) Resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + 7y = 12 \end{cases}$$

06) Resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + z = 14 \end{cases}$$

07) Um estudo concluiu que para compensar a poluição produzida por carros e ônibus seria necessário plantar 1 árvore para cada 1000 km percorridos de carro e 5 árvores a cada 1000 km percorridos de ônibus. Um ecologista fez uma viagem de 4000 km percorrendo uma parte de carro e o restante de ônibus. Se ele plantou 16 árvores para compensar a poluição produzida, quantos quilômetros ele percorreu de carro e de ônibus?

08) Resolver a equação $x^2 - 6x + 13 = 0$

09) Resolver a equação $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$

10) Resolver a equação $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 = 0$

Respostas

01) a) 3 unidades; **b)** 33 unidades

02) A = 10 g; B = 10 g; C = 20 g

03) $S = \{4, 5, 9\}$

04) 13 maneiras diferentes

05) $S = \{-1, 2\}$

06) $S = \{0, 5, -1\}$

07) a) Carro: 1000 km; **b)** Ônibus: 3000 km

08) $S = \{3 + 2i, 3 - 2i\}$

09) $S = \{2, 3, 4\}$

10) $S = \{2, 3, i, -i\}$

–

Apêndice A

P.I.F. e Programa do Enem

Este apêndice está dividido em duas partes: A primeira, [A], trata do P.I.F. (Princípio da Indução Finita), procedimento muito útil na demonstração de propriedades e a segunda, [B], apresenta o conteúdo programático do Enem com o objetivo de mostrar a ausência dos tópicos apresentados no primeiro capítulo.

[A] - Princípio da Indução Finita

O princípio da indução finita (P.I.F.), ou princípio da indução matemática, é um procedimento matemático muito utilizado nas demonstrações de propriedades. Existem outras maneiras de se fazer essas demonstrações, porém, o princípio da indução finita é, com certeza, mais uma ferramenta disponível, muito útil e um grande facilitador.

Uma explicação muito interessante sobre esse princípio pode ser vista no livro *Indução Matemática* do professor Abrahmo Hefez:

"É preciso ter clareza que a Indução Matemática é diferente da indução empírica das ciências naturais, em que é comum, após um certo número, necessariamente finito, de experimentos, enunciar leis gerais que governam o fenômeno em estudo. Essas leis são tidas como verdades, até prova em contrário. Na matemática, não há lugar para afirmações verdadeiras até prova em contrário. A Prova por Indução Matemática trata de estabelecer que determinada sentença aberta sobre os naturais é sempre verdadeira.

A indução empírica foi batizada, de modo irônico, pelo matemático, filósofo e grande humanista inglês do século passado, Bertrand Russell (1872-1970), de indução galinácea, com base na seguinte historinha:

Havia uma galinha nova no quintal de uma velha senhora. Diariamente, ao entardecer, *a boa senhora levava milho às galinhas. No primeiro dia, a galinha, desconfiada, esperou que a senhora se retirasse para se alimentar. No segundo dia, a galinha, prudentemente, foi se alimentando enquanto a senhora se retirava. No nonagésimo dia, a galinha, cheia de intimidade, já não fazia caso da velha senhora. No centésimo dia, ao se aproximar a senhora, a galinha, por indução, foi ao encontro dela para reclamar o seu milho. Qual não foi a sua surpresa quando a senhora pegou-a pelo pescoço com a intenção de pô-la na panela. "*

Proposição A.0.1. *Seja n um número natural que possui uma propriedade $P(n)$. $P(n)$ é verdadeira para todo número natural, se e somente se, forem verificadas as seguintes condições:*
$(I)P(1)$ é verdadeira.
(II) Se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ também é verdadeira.

Exemplo A.0.2. *Seja n um número natural. Prove, usando o princípio da indução finita, a seguinte propriedade $P(n)$: A soma dos n primeiros números naturais é dada pela expressão $\dfrac{n(n+1)}{2}$.*

Resolução A.0.3. *Devemos provar que*

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

. (I) $P(1)$ é verdadeira, pois

$$1=\frac{1(1+1)}{2}$$

(II)Suponha $P(k)$ verdadeira, ou seja

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

Vamos provar que $P(k+1)$ também é verdadeira.
De fato,

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\end{aligned}$$

Portanto, a propriedade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

[B] - Conteúdo das provas do Enem

O conteúdo das provas do Enem é definido a partir de matrizes de referência.

Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias:

Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.

H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

H5 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a com-preensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.

H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7 - Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

H29 - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

(http://download.inep.gov.br/educacao basica/enem/downloads/2012/matriz referencia enem.pdf)

Conteúdo Programático de Matemática e Suas Tecnologias

Conhecimentos numéricos: operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.

Conhecimentos geométricos: características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.

Conhecimentos de estatística e probabilidade: representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade. Conhecimentos algébricos: gráficos e funções; funções algébricas do 1.º e do 2.º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.

Conhecimentos algébricos/geométricos: plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.

(https://www.infoenem.com.br/matematica-e-suas-tecnologias/)

Referências

[1] Boldrini, José Luis. et.al. Álgebra Linear. 3. ed. São Paulo: Harper Row do Brasil, 1980.

[2] Iezzi, Gelson. et.al. Matemática: Ciência e Aplicações. v.2. 1.ed. São Paulo: Atual, 2001.

[3] Iezzi, Gelson. et.al. Matemática: Ciência e Aplicações. v.3. 1.ed. São Paulo: Atual, 2001.

[4] Paiva, Manoel Rodrigues. Matemática.v.3. 2. Ed. São Paulo: Moderna,2010.

[5] Kra, Irvin; Simanca, Santiago R. On Circulant Matrices. Notices on the AMS. v. 59. n. 3. March, 2012. Disponível em: <http://www.ams.org/notices/201203/rtx120300368p.pdf>. Acesso em: 18.nov. 2015.>

[6] Kalman, Dan; White, James E.. Polynomial Equations and Circulant Matrices. © THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA [Monthly 108. November 2001. Disponível em: <http://www1.american.edu/cas/mathstat/People/kalman/pdffiles/circulant.pdf>. Acesso em: 18.nov.2015.

[7] Matriz Circulante. Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Matriz circulante>. Acesso em: 18.ago.2015.>

[8] Demonstração da 2ª fórmula de De Moivre. O Baricentro da Mente. Disponível em: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2010/05/demonstracao-da-2-formula-de-de-moivre 05.html>. Acesso em: 18.ago.2015.>

[9] HEFEZ, Abramo; Fernandez, Cecília de Souza. Introdução à Álgebra Linear. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.