



Universidade Federal Rural De Pernambuco

Departamento de Física

Pós Graduação em Física Aplicada

**Flutuações universais da condutância de Spin-Hall  
em uma cavidade caótica de Dirac**

Thiago Conrado de Vasconcelos

Recife - PE

19 de dezembro de 2016

Universidade Federal Rural De Pernambuco

Departamento de Física

Thiago Conrado de Vasconcelos

**Flutuações universais da condutância de Spin-Hall em  
uma cavidade caótica de Dirac**

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em  
Física Aplicada do Departamento de Física da Universi-  
dade Federal Rural de Pernambuco como requisito par-  
cial para obtenção do grau de Mestre em Física.*

Orientador: Prof. Dr. Anderson Luiz da Rocha e Barbosa

Recife - PE

22 de Fevereiro de 2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE  
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

V331f Vasconcelos, Thiago Conrado de  
Flutuações universais da condutância de Spin-Hall em uma  
cavidade caótica de Dirac / Thiago Conrado de Vasconcelos. –  
2016.  
108 f. : il.

Orientador: Anderson Luiz da Rocha e Barbosa.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de  
Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada,  
Recife, BR-PE, 2016.  
Inclui referências e apêndices.

1. Teoria de Matrizes Aleatórias 2. Técnica Diagramática  
3. Bilhar de Dirac 4. Flutuações Universais 5. Spintrônica 6. Efeito  
Hall de Spin 7. Efeito Hall Inverso de Spin I. Barbosa, Anderson Luiz  
da Rocha e, orient II. Título

CDD 530

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

Flutuações universais da condutância de Spin-Hall em uma cavidade caótica de Dirac

Thiago Conrado de Vasconcelos

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de mestre em Física, defendida e aprovada por unanimidade em 22 de fevereiro de 2016 pela Comissão Examinadora.

Orientador:

---

Prof. Dr. Anderson Luiz da Rocha e Barbosa  
UFRPE

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos  
UFPB

---

Prof. Dr. Roberto Lázaro Rodríguez Suárez  
PUC - CHILE

*Para a minha mãe, por absolutamente tudo.*

## Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família. Um agradecimento especial ao meu amor Raíza, que, está comigo para tudo que der e vier! Agradeço aos meus grandes amigos da graduação que me proporcionaram momentos magníficos nos bares da vida, valeu galera vocês também são partes da minha vida (Geimson, Carlos e Alan), não esquecendo também de Felipe e Edson cujo integraram também no mestrado na UFRPE um ano depois. Agradeço aos amigos que ganhei no mestrado, em especial Sara, David e Rodrigo que fizeram parte direta da minha turma, os momentos de alegria e de sofrimento é sempre melhor quando alguém sofre ou diverte junto com vocês, abraço a todos! Agradeço aos excelentes professores da UFRPE que tiveram paciência em nos ensinar as nada triviais cadeiras da pós graduação, mas em especial o agradecimento vai para o professor Anderson Luiz da Rocha e Barbosa que faz jus ao nome de Orientador. Agradeço aos amigos da infância, que sempre entenderam as minhas ausências devido aos meus estudos. Por fim quero dizer que sou uma superposição de todos vocês em minha vida, cada um contribui da sua maneira. Por fim quero agradecer a CAPES pelo apoio financeiro.

*“Eppur si muove.”*  
- Galileu Galilei

# Resumo

Ao longo dos últimos anos tem aumentado o interesse pelo estudo da spintrônica. O objetivo principal deste campo é detectar, manipular, criar e polarizar correntes de spin. Dentro deste tópico, se destaca o Efeito Hall (SHE) de Spin e Efeito Hall de Spin Inverso (ISHE). Neste trabalho investigamos analiticamente a flutuação universal da condutância de spin num ponto quântico caótico com simetria quiral a baixas temperaturas. Para isso, utilizamos a teoria de matrizes aleatória e a expansão do método diagramático. Mostramos que, quando a simetria de quiralidade é quebrada, a flutuação universal da condutância tem uma dispersão na ordem de  $\text{rms}[G_{sH}^f] \approx \sqrt{2} \times 0.18 e/4\pi$  e que, quando a simetria de quiralidade é preservada, a flutuação universal da condutância ocorre na ordem de  $\text{rms}[G_{sH}^q] \approx 0.283 e/4\pi$ , o que está de acordo com a literatura. Em nosso trabalho também investigamos o (ISHE), por meio de uma análise analítica utilizamos a expansão semi-clássica da condutância e mostramos que no limite semi-clássico vale a relação  $\text{rms}[G_{IsH}^q] = \sqrt{2} \times \text{rms}[G_{IsH}^f]$ .

**Palavras-chave:** Teoria de Matrizes Aleatórias, Técnica Diagramática, Bilhar de Dirac, Flutuações Universais, Spintrônica, Efeito Hall de Spin, Efeito Hall Inverso de Spin .



# Abstract

Throughout the latest years, the interest on Spintronics has increased. The principal purposes of the field are to detect, manipulate, create and polarize spin currents. Within this topic, it is possible to emphasize the Spin Hall Effect(SEH) and the Inverse Spin Hall Effect(ISEH). In this dissertation, we analytically investigate the universal fluctuation of the conductance of the spin in a chaotic quantum point with chiral symmetry at low temperatures. We used random matrices theory and the expansion of the diagrammatic method for that purpose. We showed that when the chirality is broken, the universal fluctuation of the conductance dispersion is in the order of  $\text{rms} \left[ G_{sH}^f \right] \approx 0.18e/4\pi$  and that when there is the preservation of the chiral symmetry, the universal fluctuation of the conductance dispersion occurs in the order of  $\text{rms} \left[ G_{sH}^q \right] \approx 0.283e/4\pi$  which coincides with the literature. We also worked on ISEH, through the analytical analysis with the semi-classic expansion of the conductance and showed that in the semi-classic limit the relation  $\text{rms} \left[ G_{sH}^q \right] = \sqrt{2} \times \text{rms} \left[ G_{sH}^f \right]$  is valid.

**Keywords:** Random Matrix Theory, Diagrammatic Method, Dirac Billiard, Universal Flutuactions , Spintronics, Spin Hall Effect, Inverse Spin Hall Effect.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Revisão Teórica</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução . . . . .	1
1.2	Física Mesoscópica . . . . .	4
1.2.1	Comprimentos Característicos e Regimes de Transportes . . . . .	5
1.2.2	Quantização da Condutância . . . . .	8
1.2.3	Flutuação Universal da Condutância . . . . .	9
1.3	Teoria de Landauer-Büttiker . . . . .	11
1.4	Matriz de Espalhamento e Teoria de Matrizes Aleatórias . . . . .	15
1.4.1	Matriz de Espalhamento . . . . .	16
1.4.2	Teoria de Matriz Aleatória . . . . .	20
1.5	Efeito Hall Clássico . . . . .	26
1.6	Efeito Hall de Spin e Efeito Hall Inverso de Spin . . . . .	28
1.7	Breve Introdução sobre os Capítulos . . . . .	34

<b>2</b>	<b>Efeito Hall de Spin fracionado em cavidades balísticas caóticas</b>	<b>36</b>
2.1	Introdução . . . . .	36
2.2	Efeito Hall de Spin numa cavidade caótica balística . . . . .	37
2.3	Cálculo dos coeficientes de transmissão para classes de ensembles de Wigner-Dyson . . . . .	41
2.3.1	Coeficientes de transmissão para o sistemas que a SRT é preservada . . . . .	42
2.3.2	Coeficientes de transmissão para o sistemas que a SRT é quebrada . . . . .	43
2.4	Cálculo da média da Corrente de Spin e Voltagem nos terminais Transversais . . . . .	44
2.5	Cálculo da variância da Corrente de Spin . . . . .	47
2.5.1	Variância da Corrente de Spin para o sistema em que a SRT é preservada . . . . .	47
2.5.2	Variância da Corrente de Spin para o sistema em que a SRT é quebrada . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Efeito Hall Quântico de Spin Quantizado num Bilhar Caótico de Dirac</b>	<b>55</b>
3.1	Introdução . . . . .	55
3.2	Efeito Hall Quântico de Spin em uma cavidade caótica de Dirac . . . . .	56
3.3	Cálculo dos coeficientes de transmissão para classe Quiral . . . . .	58
3.3.1	Coeficientes de transmissão para sistemas em que a SRT é preservada . . . . .	59
3.3.2	Coeficientes de transmissão para o sistemas em que a SRT é quebrada . . . . .	61
3.4	Cálculo da média da Corrente de Spin e Voltagem nos terminais Transversais . . . . .	63
3.5	Cálculo da Flutuação Universal da Corrente de Spin no sistema Quiral . . . . .	64

3.5.1	Variância da Corrente de Spin para o sistema em que a SRT é preservada	65
3.5.2	Variância da Corrente de Spin para o sistema em que a SRT é quebrada	66
3.6	Comparação entre a amplitude da UFC em um bilhar caótico de Dirac e um Bilhar caótico de Schrödinger . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Efeito Hall Inverso de Spin em cavidades mesoscópicas caóticas difusivas</b>	<b>72</b>
4.1	Introdução . . . . .	72
4.2	Efeito Hall Inverso de Spin para classe de simetria de Wigner Dyson . . . . .	76
4.2.1	Efeito Hall Inverso de Spin para classe de simetria de Wigner Dyson com a preservação da SRT . . . . .	81
4.2.2	Efeito Hall Inverso de Spin para classe de simetria de Wigner Dyson com a quebra da SRT . . . . .	83
4.3	Efeito Hall Inverso de Spin para classe de simetria Quiral . . . . .	88
4.3.1	Efeito Hall Inverso de Spin para classe de simetria Quiral com a preservação da SRT . . . . .	90
4.3.2	Efeito Hall Inverso de Spin para classe de simetria Quiral com a quebra da SRT . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>98</b>
<b>A</b>	<b>Média da Condutância de Spin-Hall para o sistema em que a SRT é preservada</b>	<b>99</b>

# Lista de Tabelas

1.1	Tabela de Cartan para os espaços simétricos[42]. Tabela mostrando a relação entre cada classe de simetria e o tipo de simetria que o sistema poderá apresentar, na tabela se houver quebra de simetria então abaixo da simetria estará o valor 0, se houver preservação da simetria haverá o valor $\pm 1$ . . . . .	22
1.2	Tabela de Cartan que representa a maneira que a matriz de espalhamento deverá ser decomposta em função de matrizes Unitárias, Ortogonais ou Simpléticas.[43] . . . . .	23

# Lista de Figuras

1.1	Nesta figura, temos a esquerda o elétron e a direita o planeta Terra ambos com um movimento angular. Como o planeta Terra é um corpo extenso dizemos que ele tem um momento angular, em nosso planeta esta rotação é responsável pela duração do dia, nos elétrons esta rotação é responsável por produzir o <i>spin</i> que poderá caracterizar a magnetização de um material. Notar que isso é uma analogia e que o spin não está vinculado a uma seta no espaço de coordenadas. . . . .	2
1.2	A figura mostra a <b>a)</b> escala de comprimento do material a baixas temperaturas. De acordo com a escala de comprimento podemos caracterizar o sistema como microscópico ( $L < \lambda_f$ ), mesoscópico ( $\lambda_f < L < \ell_\phi$ ) e macroscópico ( $L > \ell_\phi$ ). <b>b)</b> A caracterização do tipo de transporte eletrônico poderá ser balístico se ( $\lambda_f < L \ll \ell_m$ ) e <b>c)</b> difusivo se ( $\ell_m \ll L < \xi$ ). . . . .	7
1.3	A figura mostra a resistência variando com a tensão aplicada nos terminais, é possível ver que a variação da resistência é discreta. A figura foi retirada da referência [24]. . . . .	9
1.4	A Condutância do ponto de contato quântico varia de acordo com a voltagem aplicada na constrição. Observamos que há uma escada de condutância, revelando portanto a quantização da condutância em semicondutores. Figura retirada da referência [24]. . . . .	10

1.5	A figura <b>a)</b> mostra que existe um valor médio da condutância e que este valor médio está entre 372 e 373, porém esta medida não está livre de oscilações, e essas oscilações ocorrem independente do campo magnético. A amplitude da flutuação ao redor da média da condutância é chamada flutuação universal da condutância portanto existe <b>b)</b> uma distribuição da condutância numa região onde a medida mais provável é a média e existe algumas medidas que estão abaixo de 372 e acima de 373. O valor da flutuação universal da condutância é da ordem de $e^2/h$ . . . . .	11
1.6	A figura mostra que a condutância no Efeito Hall de Spin em poços quânticos de HgTe, a condutância tem flutuações quânticas em torno da média. Figura retirada da referência [29]. . . . .	12
1.7	A figura mostra um condutor mesoscópico ligado idealmente a dois terminais que tem dimensões muito maior que o condutor, dada uma $\Delta\mu$ cargas sai de T.1 e ao encontrar o condutor, parte das cargas são transmitidas a T.2 e parte voltam para T.1. . . . .	13
1.8	A figura mostra um ponto quântico caótico onde a função de onda da partícula é descrita pela equação de Schrödinger, portanto este ponto quântico pode ser chamado de Bilhar de Schrödinger. As setas da direita mostram que a partícula entra em baixo, percorre todo espaço de fase e sai no ponto de cima. Figura retirada de [32] . . . . .	16
1.9	A figura mostra um ponto quântico caótico onde a função de onda da partícula é descrita pela equação de Dirac. Portanto, este ponto quântico pode ser chamado de Bilhar de Dirac. Figura retirada de [34]. . . . .	17
1.10	Um condutor é ligado por contatos ideais a dois terminais, e existem 3 modos de propagação, $a$ representa as amplitudes de onda que entram no condutor e $b$ as amplitudes de onda que saem do condutor, a matriz de espalhamento $S$ desse sistema é do tipo $3 \times 3$ . . . . .	17

- 1.11 A figura é uma representação do Efeito Hall, quando uma corrente elétrica é submetida há um campo magnético  $\mathbf{B}$ , os elétrons sofrem desvios se acumulando na superfície do condutor, surgindo portanto uma tensão transversal chamada tensão Hall  $V_H$ , e devido a esta tensão surge naturalmente um fluxo de cargas entre as faces do condutor e portanto é possível determinar a resistência Hall  $R_H$  em função da espessura do condutor  $w$ . . . . . 27
- 1.12 A figura mostra o resultado do a) Efeito Hall Quântizado, observamos que para altos campos magnéticos e uma baixa temperatura a resistência hall converge para o mesmo valor, esta figura foi retirada da referência[45] e o resultado do b) Efeito Hall Quântico Fracionado, é possível observar com clareza um platô de resistência em  $\nu = 1/3$ , figura retirada da referência [46] . . . . . 29
- 1.13 A figura mostra que ao bombear a corrente de carga para um condutor existe a acumulação de spins com polarizações opostas nas extremidades opostas do condutor, ou seja, a corrente de carga gera uma corrente de spin e essa corrente de spin é diametralmente separada devido a polarização das cargas, este é o Efeito Hall de Spin. . . . . 30
- 1.14 A figura mostra que uma corrente de se propaga do reservatório 1 para a amostra, o reservatório 1 está polarizado com cargas com spin up, e entre o reservatório 2 e 3 é gerado uma diferença de potencial  $\Delta V = V_3 - V_2$  e essa diferença de potencial irá gerar a propagação de uma corrente eletrônica entre os terminais 2 e 3. . . . . 31



1.15	A linha tracejada representa a energia de fermi e a linha solida vertical representa a energia do sistema, a cor vermelha representa a energia total das cargas que estão com spin down e a cor azul representa a energia total das cargas que estão com spin up. a) A distribuição de energia nos terminais está em equilíbrio, como não existe desbalanceamento não vai ocorrer propagação da corrente de spin e então se faz necessário um desbalanceamento que está representado em b) com o desbalanceamento entre as energias das cargas com spin down e das cargas com spin up, então vai existir uma propagação de corrente polarizada, neste caso uma corrente pura de spin down. . . . .	32
1.16	Na figura mostra o fluxo de a)corrente pura de spin, $I_c = 0$ e $I_s \neq 0$ e b) representa corrente eletrônica pois $I_c \neq 0$ e $I_s \neq 0$ . . . . .	33
2.1	O esquema gráfico mostra uma cavidade caótica balística com 4 terminais. Neste sistema existe uma forte interação SO que proporciona uma corrente efetiva de carga transversal entre os guias 1 e 2. E portanto irá gerar uma corrente efetiva de spin longitudinal entre os guias 3 e 4. . . . .	38
2.2	Nesta figura podemos ver que o desvio padrão da corrente de spin para o caso simétrico $N_i = N$ começa de aproximadamente 0.21 para $N = 1$ , no qual é o regime quântico extremo e tende a aproximadamente 0.18 no regime semi-clássico $N \gg 1$ . . . . .	50
2.3	Os gráficos que apresentam as diversas flutuações universais para tipos de simetrias diferentes (a) caso totalmente simétrico (2.52) e (2.53), (b) caso referente ao item $i$ que tem a equação (2.57), (c) caso referente ao item $ii$ que tem a equação (2.59), (d) caso referente ao item $iii$ que tem a equação (2.61). . . . .	51
2.4	Os gráficos que apresentam as diversas flutuações universais para tipos de simetrias diferentes. . . . .	54

3.1	O esquema gráfico mostra uma cavidade caótica balística com 4 terminais. Neste sistema existe uma forte interação SO que proporciona uma corrente efetiva de carga transversal entre os guias 1 e 2. E portanto irá gerar uma corrente efetiva de spin longitudinal entre os guias 3 e 4. . . . .	56
3.2	A figura mostra a média (3.36) e a variância da corrente de spin (3.39) $J_i^\alpha$ para $i = 3, 4$ e $\alpha = x, y, z$ em função dos canais abertos $N$ . Os resultados analíticos são representados pelas linhas pretas e a simulação numérica pelos símbolos. Para o caso simétrico $N_i = N$ o triângulo para esquerda/direita representa $\text{var}[J_3^\alpha]/\text{var}[J_4^\alpha]$ para o caso assimétrico ( $N_1 = N_3 = 2N_2 = 2N_4 = N$ ) o círculo/quadrado representa $\text{var}[J_3^\alpha]/\text{var}[J_4^\alpha]$ e para todos os casos o triângulo para baixo/cima representa a média da corrente $\langle J_3^\alpha \rangle / \langle J_4^\alpha \rangle$ . . . . .	70
3.3	A figura mostra a Flutuação Universal da Condutância Quantizada de Spin, indo do regime quântico extremo (3.58) para o regime semi-clássico (3.54) assim como mostra a razão entre as Flutuações Universais para o sistema Quiral e para o sistema de Wigner Dyson, este gráfico confirma que quando existe quebra de quiralidade a razão tende $\sqrt{2}$ no regime semi-clássico (3.55). . . . .	71

- 4.1 Nesta figura mostramos que fixado uma diferença de potencial longitudinal entre os terminais 1 e 2, a corrente pura de carga longitudinal gerada na cavidade caótica  $J$  irá gerar uma corrente pura de spin transversal  $J^S$  entre os terminais 3 e 4, que por sua vez ao entrar na cavidade caótica onde está conectado os guias 5 e 6 irá gerar uma corrente de carga longitudinal entre esses guias. O primeiro efeito é chamado Efeito Hall de Spin, que é corrente de carga gerando corrente de spin, observe que a seta azul indica que existe corrente de spin up se deslocando para o terminal 4 e a seta vermelha indica que existe corrente de spin down se movimentando para o terminal 3, enquanto o segundo é chamado Efeito Hall Inverso de Spin, a corrente de spin up é bombeado para dentro da cavidade caótica gerando corrente de carga entre os terminais 5 e 6. Nesta figura conectamos os dois sistemas, porém o caso que foi analisado nos capítulos anteriores foi o caso de 4 terminais, enquanto o caso a ser analisado neste capítulo é o caso de 3 terminais. Não necessariamente as correntes de cargas entre os guias 2 e 3, e os guias 5 e 6 são iguais. . . . . 74
- 4.2 A figura mostra o modelo que estamos analisando, 3 reservatórios acoplados idealmente á uma cavidade caótica, o reservatório 1 com potencia  $V_1$  bombeia corrente pura de spin  $J^\alpha$  para dentro da cavidade caótica, devido a forte interação spin-órbita dentro da cavidade caótica irá gerar uma força eletromotriz entre os terminais 3 de potencial  $V_3$  e 4 de potencial  $V_4$  que conseqüentemente será gerada uma corrente efetiva de carga longitudinalmente  $J$  entre esses guias. Estamos interessados em calcular a amplitude da Flutuação Universal da Condutância de Spin no terminal 2  $G_2^\alpha$  ou 3  $G_3^\alpha$ , este fenômeno é chamado Efeito Hall Inverso de Spin. . . . . 76
- 4.3 Este gráfico mostra a convergência da Flutuação Universal da Condutância de Spin no Efeito Hall Inverso para o sistema simétrico, no caso em que todos os guias estão no regime semi-clássico  $N_1 = N_2 = N_3 = N \gg 1$ . A linha tracejada em preto é mostra o valor aproximado da convergência que é  $\text{rms}[G_j^\alpha] \approx 0.3043$  em unidades de  $\frac{e}{4\pi}$ . . . . . 82

- 4.4 Este gráfico mostra a convergência da Flutuação Universal da Condutância de Spin no Efeito Hall Inverso para o sistema em que apenas o guia 1 está no regime semi-clássico, ou seja, caso em que  $N_1 = N \gg 1$ . A linha tracejada em preto é o valor da convergência  $\text{rms}[G_j^\alpha]\sqrt{N} \approx 0.707$  em unidades de  $\frac{e}{4\pi}$ . . . . . 84
- 4.5 Este gráfico mostra a convergência da Flutuação Universal da Condutância de Spin no Efeito Hall Inverso para o sistema simétrico, no caso em que todos os guias estão no regime semi-clássico  $N_1 = N_2 = N_3 = N \gg 1$ . A linha azul mostra o resultado analítico da expressão (4.30), enquanto a linha tracejada em preto é mostra o valor aproximado da convergência que é  $\text{rms}[G_j^\alpha] \approx 0.304$  em unidades de  $\frac{e}{4\pi}$ . . . . . 85
- 4.6 Este gráfico mostra a convergência da Flutuação Universal da Condutância de Spin no Efeito Hall Inverso para o sistema em que apenas o guia 1 está no regime semi-clássico, ou seja, caso em que  $N_1 = N \gg 1$ . A linha vermelha mostra o resultado analítico da expressão (4.31), enquanto a linha tracejada em preto é o valor da convergência  $\text{rms}[G_j^\alpha] \approx 0.707\sqrt{N}$  em unidades de  $\frac{e}{4\pi}$ . . . . . 87
- 4.7 Este gráfico mostra a convergência da Flutuação Universal da Condutância de Spin no Efeito Hall Inverso para o sistema em que existe Quiralidade, neste sistema estamos no regime simétrico  $N_1 = N_2 = N_3 = N \gg 1$ . A linha tracejada em preto é o valor da convergência  $\text{rms}[G_j^\alpha] \approx 0.431$  este resultado está na ordem de  $e/4\pi$ . . . . . 92
- 4.8 Este gráfico mostra a convergência da Flutuação Universal da Condutância de Spin no Efeito Hall Inverso para o sistema em que existe quiralidade, neste caso apenas o guia 1 está no regime semi-clássico, ou seja, caso em que  $N_1 = N \gg 1$ . A linha tracejada em preto é o valor da convergência  $\text{rms}[G_j^\alpha]\sqrt{N} \approx 1.0$ . . . . . 93

4.9	Este gráfico mostra a convergência da Flutuação Universal da Condutância de Spin no Efeito Hall Inverso para o sistema simétrico, no caso em que todos os guias estão no regime semi-clássico $N_1 = N_2 = N_3 = N \gg 1$ . A linha azul mostra o resultado analítico da expressão (4.55), enquanto a linha tracejada em preto mostra o valor aproximado da convergência que é $\text{rms}[G_j^\alpha] \approx 0.304$ em unidades de $e/4\pi$ . . . . .	95
4.10	Este gráfico mostra a convergência da Flutuação Universal da Condutância de Spin no Efeito Hall Inverso para o sistema em que apenas o guia 1 está no regime semi-clássico, ou seja, caso em que $N_1 = N \gg 1$ . A linha vermelha mostra o resultado analítico da expressão (4.56), enquanto a linha tracejada em preto é o valor da convergência $\text{rms}[G_j^\alpha]\sqrt{N} \approx 0.707$ . O valor da condutância está em unidades de $e/4\pi$ . . . . .	96
A.1	O diagrama representa a equação (A.1). . . . .	99
A.2	A representação diagramática da média da equação (A.1). . . . .	100

# Capítulo 1

## Revisão Teórica

### 1.1 Introdução

Uma das mais importantes descobertas científicas do séc XIX foi a descoberta do elétron por Joseph John Thomson (J.J Thomson). Através desta, foi dado início ao entendimento da estrutura atômica. A manipulação de fluxos de cargas elétricas que impacta na eletrodinâmica, responsável também por aplicações tecnológicas utilizando a natureza da carga do elétron. Porém os elétrons tem outra característica muito importante que é a natureza do seu *spin*. As partículas dotadas de cargas podem conter *spin* que é assim como massa e carga elétrica uma grandeza física fundamental, ou seja, não pode ser derivada de nenhuma outra grandeza física[1]. O *spin* não tem nenhum análogo clássico, embora seja muito semelhante ao momento angular de um corpo rígido (que depende da sua massa e de sua velocidade angular) como podemos ver na figura (1.1).

Uma das características do *spin* é a sua quantização, ou seja, quando se mede o spin de uma partícula ele só poderá assumir valores discretos, dado por[1]

$$\vec{S}_i = \hbar\sqrt{s(s+1)} \hat{e}_i, \quad (1.1)$$

onde  $\hat{e}_i$  é um versor que aponta na direção que está orientado o *spin*,  $s$  é um número inteiro

0, 1, 2..., denominado número quântico de *spin*, e  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  é uma constante fundamental em física, chamada constante de Planck, em homenagem ao seu proponente Max Planck.

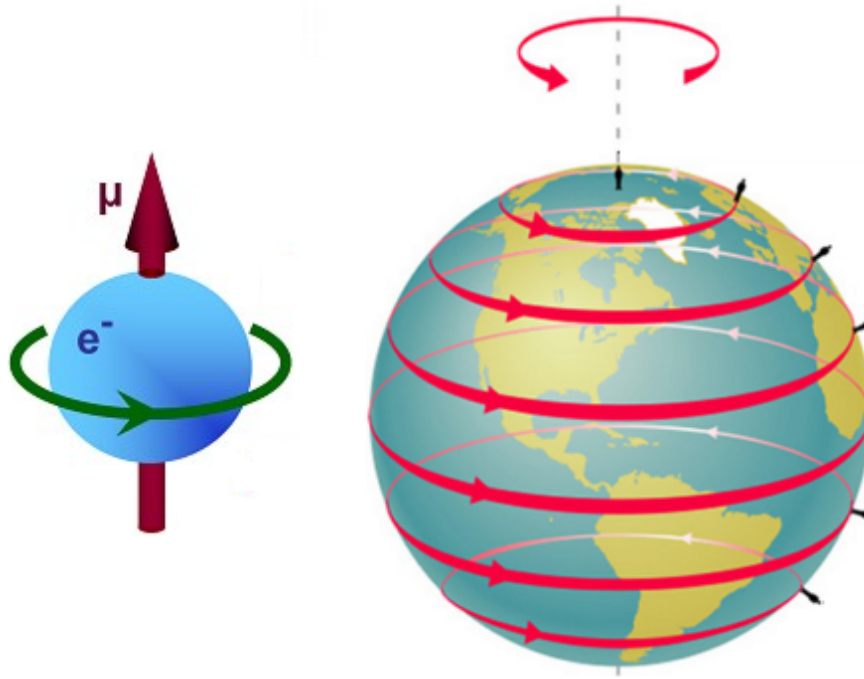


Figura 1.1: Nesta figura, temos a esquerda o elétron e a direita o planeta Terra ambos com um movimento angular. Como o planeta Terra é um corpo extenso dizemos que ele tem um momento angular, em nosso planeta esta rotação é responsável pela duração do dia, nos elétrons esta rotação é responsável por produzir o *spin* que poderá caracterizar a magnetização de um material. Notar que isso é uma analogia e que o *spin* não está vinculado a uma seta no espaço de coordenadas.

Durante muito tempo o *spin* do elétron ficou desconhecido, porém a década de 1920 foi crucial para pô-lo em evidência na teoria quântica. Uhlenbeck e Goudsmit[2] foram responsáveis por descobrir o *spin* do elétron analisando o famoso experimento de Stern-Gerlach[1] e utilizando o princípio da exclusão de Pauli[3]. A partir da descoberta do *spin* se fez necessário estudá-lo e ver possíveis aplicações práticas em nosso cotidiano. Com o passar dos anos, foi intensificando o estudo nessa área e foi criada a spintrônica que estuda maneiras de criar, detectar e manipular correntes puras de *spin*, o interesse intrínseco da

criação são aplicações tecnológicas[4]. A Spintrônica é uma área motivadora, pois a busca por dispositivos eletrônicos que funcionem a base de transporte de spin irá gerar uma revolução tecnológica com dispositivos que irão ter um grande poder de armazenamento e operar com baixo consumo de energia como por exemplo o computador quântico[[5],[6]]. O Efeito Hall de Spin tem gerado um grande interesse dentro da área de spintrônica[7], pois no SHE consegue-se manipular correntes puras de spin e sem a aplicação de um campo magnético. A corrente de spin pode ser transportada sem efeitos dissipativos, o que irá gerar dispositivos com baixa perdas de energia. O Efeito Hall de Spin já foi observado em isolantes topológicos [8], grafeno [9] e semicondutores [10]. O grafeno e os isolantes topológicos são conhecidos como materiais de Dirac e por isso apresentam a simetria quiral. Em materiais que apresentam quiralidade a condutância de spin-Hall é quantizada  $G_{sH}^q$  o que quer dizer que ela adquire múltiplos inteiros de  $e/4\pi$ [11]. Em materiais que não apresentam quiralidade a condutância é fracionada  $G_{sH}^f$ , o que quer dizer que ela apresenta valores múltiplos não inteiros de  $e/4\pi$ [12]. O nosso principal objetivo neste trabalho é calcular a flutuação universal da condutância de spin-Hall no efeito Hall de Spin em materiais de Dirac, um problema analítico que se encontra em aberto desde 2008.

Seguindo a literatura sobre Efeito Hall de Spin podemos observar que em 2006 W.Ren *et al.*[12] calcularam a Flutuação Universal da Condutância de Spin Hall. No trabalho foi feito uma simulação numérica, onde chegaram a conclusão que a dispersão da condutância adquire um valor aproximado igual  $\text{rms}(G_{sH}^f) \approx 0.18 \times e/4\pi$ . Este resultado foi confirmado um ano depois por Bardarson *et al.*[13] no qual utilizaram a teoria de matrizes aleatória[14] e o método diagramático[15] para confirmar, através de resultados analíticos, o resultado de W.Ren.

Em 2008, Qiao *et al.*[11] estudaram o Efeito Hall de Spin em materiais de Dirac, utilizando simulações numéricas para calcular a flutuação da condutância e chegaram ao valor universal  $\text{rms}(G_{sH}^q) = 0.285 \pm 0.005 \times e/4\pi$ . Recentemente, Barros fez uma extensão do método diagramático[[16],[17]], permitindo através da teoria de matrizes aleatórias, fazer cálculos exatos para sistemas que apresentam quiralidade, o que torna nosso trabalho possível. O nosso principal objetivo neste trabalho é a confirmação da flutuação universal da condutância



de spin-Hall  $\text{rms}(G_{sH}^q) = 0.283 \times e/4\pi$  que se mostra dentro da barra de erro da simulação numérica.

Um outro problema que foi abordado nesta dissertação foi o Efeito Hall Inverso de Spin[19], no qual nos baseamos na referência[20] para fazer os cálculos analíticos da flutuação da condutância de spin-Hall no efeito Hall inverso em materiais de Dirac. Para isso, utilizamos além da TMA[14] e extensão do método diagramático[16]. Também se fez necessário fazer uma expansão semi-clássica[21] com o objetivo de obter cálculos analíticos. Chegamos a conclusão que, em regimes de altas energias, a quiralidade do sistema é quebrada portanto, temos  $\text{rms}(G_{IsH}^q) = \sqrt{2} \times \text{rms}(G_{IsH}^f)$ .

## 1.2 Física Mesoscópica

Física mesoscópica é o ramo da física que estuda todos os sistemas que estão na interface do quântico e do macroscópico, ou seja, a física mesoscópica se encontra no meio dos dois regimes. O comprimento característico em física mesoscópica é muito grande comparado ao tamanho de um átomo porém muito pequeno comparado ao micrômetro[[22],[23]]. Esta escala intermediária pode ser descrita como uma quantidade de átomos que, juntos, formam uma dimensão da ordem de  $10^2 nm$  até  $10^3 nm$  que é o tamanho aproximado entre um vírus e uma bactéria[23]. É importante lembrar também que objetos macroscópicos, ao diminuírem de tamanho vão se tornando objetos mesoscópicos e, portanto, estão sujeitos a lei da mecânica quântica. Um bom exemplo é que ao medir a condutância de um sistema bidimensional escrevemos que[22]

$$G = \sigma \frac{W}{L}, \quad (1.2)$$

em que  $G$  é a condutância do material na ordem de  $\Omega^{-1}$ ,  $W$  é a largura do condutor e  $L$  é o comprimento do mesmo e  $\sigma$  é uma constante que depende do material que é feito o condutor. Portanto, a medida que diminuimos a sua largura a condutância do material tende a ser quantizada, e o sistema vai obedecer as leis da mecânica quântica.

### 1.2.1 Comprimentos Característicos e Regimes de Transportes

Como discutimos um dos fatores mais importantes na física mesoscópica são as escalas de comprimento no qual ocorre o transporte eletrônico. Dentre elas, temos

- 1) **Comprimento de Onda de de Broglie ( $\lambda$ ):** Relaciona a que energia cinética o elétron adquire características ondulatórias.

$$\lambda = \frac{2\pi}{\kappa} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}. \quad (1.3)$$

- 2) **Livre caminho médio ( $\ell_m$ ):** É o caminho que um elétron percorre antes de sofrer um espalhamento elástico, alterando o seu momento inicial ( $\vec{p}_0$ ). Ao mudar o seu momento inicial, ele muda apenas a direção do momento e preserva o seu módulo

$$|\vec{p}| = |\vec{p}_0|. \quad (1.4)$$

- 3) **Comprimento de coerência de fase ( $\ell_\phi$ ):** O comprimento de coerência é o caminho percorrido pelo elétron sem perder a sua natureza ondulatória. A coerência é uma medida da correlação entre as fases medidas em diferentes pontos de uma onda e pode ser escrita como

$$\ell_\phi = \sqrt{D\tau_\phi}, \quad (1.5)$$

onde  $D$  é chamado de coeficiente de difusão, e  $\tau_\phi$  é o tempo característico que é responsável pela perda de fase do elétron, chamado tempo de relaxação de fase.

- 4) **Dimensão do sistema:** O comprimento da amostra do sistema é um dos tamanhos característicos muito importantes em sistemas de transporte eletrônico.

- 5) **Comprimento de onda de Fermi ( $\lambda_f$ ):** Em um reservatório, nem todos os elétrons tem a mesma energia, e nem todos são responsáveis por gerar a corrente elétrica. Os responsáveis pelo transporte eletrônico são aqueles elétrons que estão próximo a energia de Fermi ( $\epsilon_f$ ). Estes elétrons que estão próximo a energia de Fermi têm um comprimento de onda característico chamado comprimento de onda de Fermi ( $\lambda_f$ ), escrito como

$$\lambda_f = \frac{2\pi}{\kappa_f} = \frac{h}{\sqrt{2m\epsilon_f}}. \quad (1.6)$$

- 6) **Comprimento magnético** ( $\ell_b$ ): Na presença de um campo magnético, as energias dos elétrons são quantizadas em níveis, chamados níveis de Landau, escrito como

$$\ell_b = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}. \quad (1.7)$$

- 7) **Comprimento de localização** ( $\xi$ ): Relacionado ao alcance da função de onda do elétron. Se a amostra for um bom condutor (metal, por exemplo), então a função de onda se estende ao longo de toda amostra (o elétron consegue percorrer toda a amostra). Caso a amostra seja um mal condutor (um isolante), o pico da função de onda será onde o elétron está localizado, e, a partir disso, a função de onda irá decaindo exponencialmente de tal forma que só podemos encontrar o elétron numa região confinada (que é o centro de localização).

De acordo com os comprimentos característicos acima, temos dois extremos. Partículas quânticas podem ser vistas como ondas, e, portanto, a partícula que perder a sua característica ondulatória ele não será considerado como partícula quântica. O comprimento ( $L$ ) de uma amostra mesoscópica tem que se enquadrar entre o regime quântico e o regime clássico, ou seja, se enquadrar entre o comprimento de coerência de fase ( $L = \ell_f$ ) dos elétrons e o comprimento de onda de Fermi ( $L = \lambda_f$ ). Então temos que, se o comprimento da amostra for menor que o comprimento de onda de Fermi ( $L < \lambda_f$ ), o sistema é microscópico; se o comprimento da amostra for maior que o comprimento de coerência de fase ( $L > \ell_\phi$ ), o sistema é macroscópico; Por último, se o sistema estiver entre os dois regimes ( $\lambda_f < L < \ell_\phi$ ) o sistema é mesoscópico. A distinção dos regimes de acordo com o comprimento característico está mostrado na figura (1.2).

Como estamos no sistema mesoscópico, então vamos caracterizar os tipos de regime como regime difusivo, regime balístico e regime localizado onde mostramos na figura (1.2) o regime balístico e o regime difusivo. De acordo com o comprimento ( $L$ ) característico do condutor em questão, temos que os regimes são caracterizados como

- i) Se o comprimento  $L$  estiver entre o comprimento de onda de Fermi  $\lambda_f$  e o comprimento de livre caminho médio  $\ell_m$  ( $\lambda_f < L \ll \ell_m$ ), dizemos que o regime em que

o transporte eletrônico se encontra é um regime balístico. Como por exemplo num transporte eletrônico que ocorre dentro de um ponto quântico.

ii) Se o comprimento  $L$  estiver entre o comprimento de livre caminho médio  $\ell_m$  e o comprimento de localização  $\xi$  ( $\ell_m \ll L < \xi$ ), dizemos que o regime em que o transporte eletrônico se encontra é um regime difusivo. Um exemplo é o transporte eletrônico que ocorre através de um fio quântico desordenado.

iii) Se o comprimento  $L$  estiver entre o comprimento de localização  $\xi$  e o comprimento de coerência de fase  $\ell_\phi$  ( $\xi \ll L < \ell_\phi$ ) dizemos que o regime em que o transporte eletrônico se encontra é um regime localizado.

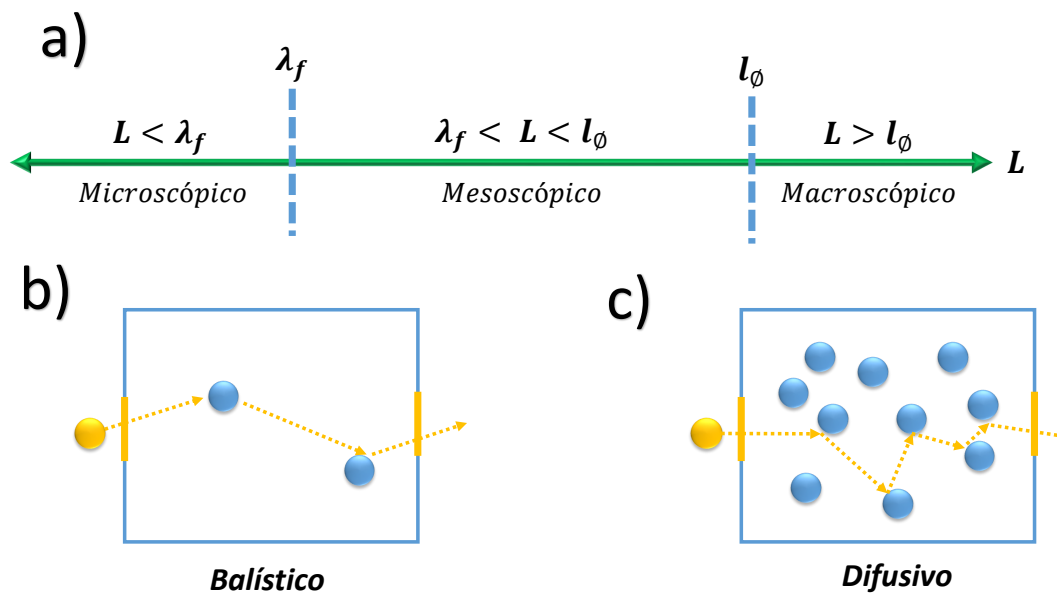


Figura 1.2: A figura mostra a **a)** escala de comprimento do material a baixas temperaturas. De acordo com a escala de comprimento podemos caracterizar o sistema como microscópico ( $L < \lambda_f$ ), mesoscópico ( $\lambda_f < L < l_\phi$ ) e macroscópico ( $L > l_\phi$ ). **b)** A caracterização do tipo de transporte eletrônico poderá ser balístico se ( $\lambda_f < L \ll \ell_m$ ) e **c)** difusivo se ( $\ell_m \ll L < \xi$ ).

### 1.2.2 Quantização da Condutância

Independente do regime de transporte, de acordo com a equação (1.2), temos que a medida que diminuimos a largura do condutor ( $W$ ) a condutância  $G \rightarrow 0$ . Porém, deve-se lembrar que, a medida que diminuimos sua largura, estamos consequentemente diminuindo o seu tamanho, então o condutor deverá deixar o seu regime clássico para o regime mesoscópico. Portanto, temos que levar em consideração a natureza ondulatória do elétron e suas consequências (como, por exemplo, tunelamentos quânticos), fazendo assim com que exista um valor mínimo de condutância, chamado quanta de condutância. A figura (1.3) e a figura (1.4), mostram que a medida que a constrição  $W$  diminui, a resistência e a condutância do condutor mudam de forma discreta.

A quantização da condutância foi observada experimentalmente em heteroestruturas semicondutoras de GaAs e AlGaAs [[24],[25]]. Devido a alta mobilidade dos elétrons nessas estruturas, o sistema é considerado como um Gás de Elétrons Bidimensional e o transporte eletrônico pode ser considerado balístico. A propagação ocorre unicamente dos elétrons que se encontram na superfície de Fermi.

Na figura (1.3) é mostrado um ponto de contato quântico onde o transporte do sistema é balístico. Seguindo a referência [24] a condutância desse sistema é tal que

$$G = \sum_{n=1}^{N_c} \frac{e^2}{\pi\hbar} \times n \quad (1.8)$$

onde  $N_c$  é o número de canais abertos na subbanda e este número é inteiro e menor que  $k_f W/\pi$  onde  $W$  é a largura da constrição. Então, de acordo com a equação (1.8), temos que a condutância ocorre para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , ou seja, quando  $n$  for um número inteiro, mostrando que houve a quantização da condutância. Na figura (1.4) podemos ver a quantização da condutância pois o valor da condutância muda em degraus com valores múltiplos inteiros de  $e^2/\pi\hbar = 2e^2/h$  onde o fator 2 vem do grau de liberdade do spin do elétron.

Porém se  $k_f W \gg 1$  esta equação se reduzirá a

$$G = G_0 \times \frac{2W}{\lambda_f}, \quad (1.9)$$

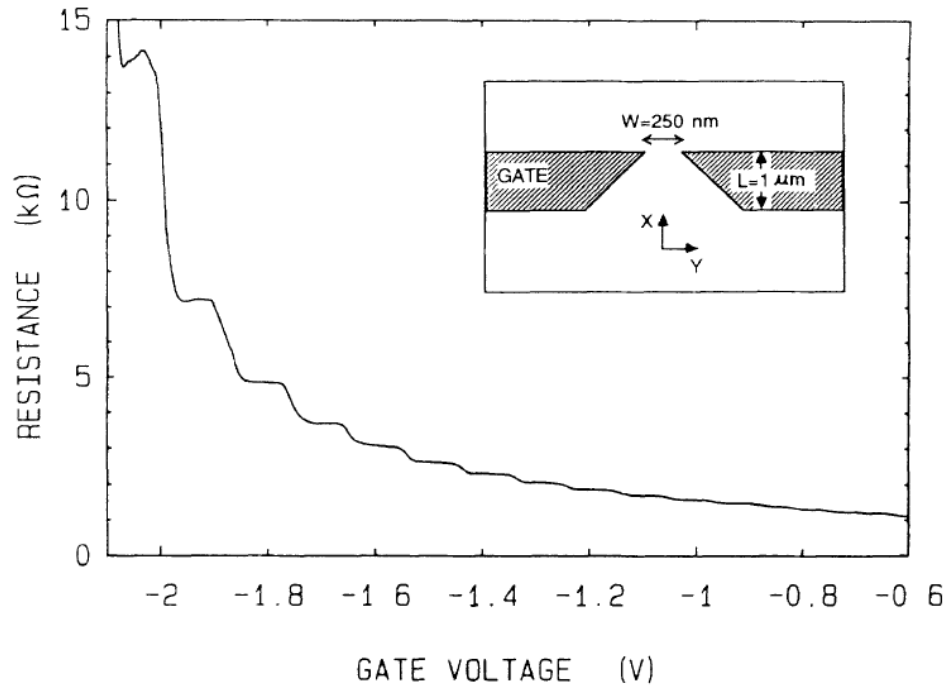


Figura 1.3: A figura mostra a resistência variando com a tensão aplicada nos terminais, é possível ver que a variação da resistência é discreta. A figura foi retirada da referência [24].

$\lambda_f$  é o comprimento de onda de fermi da ordem de  $30\text{nm}$ , e  $G_0$  é o quantum de condutância  $G_0 = \frac{2e^2}{h}$ , onde  $e$  é a carga do elétron, e  $h$  é a constante de planck. Como a condutância e a resistência são grandezas inversas entre si  $G = R^{-1}$ , então pode-se medir o valor da resistência,  $R = \frac{h}{2e}$  que é aproximadamente  $R \approx 13k\Omega$ . O efeito da quantização da condutância foi primeiramente observado em heteroestruturas semicondutoras de GaAs e Al-GaAs nas referências [[24],[25]].

### 1.2.3 Flutuação Universal da Condutância

Pouco antes de Wees *et al.*[24] observar a quantização da condutância, Lee e Stone[26] observaram que no regime de baixas temperaturas a condutância num metal apresenta um valor universal da ordem de  $e^2/h$ , essa é uma característica universal no transporte quântico.

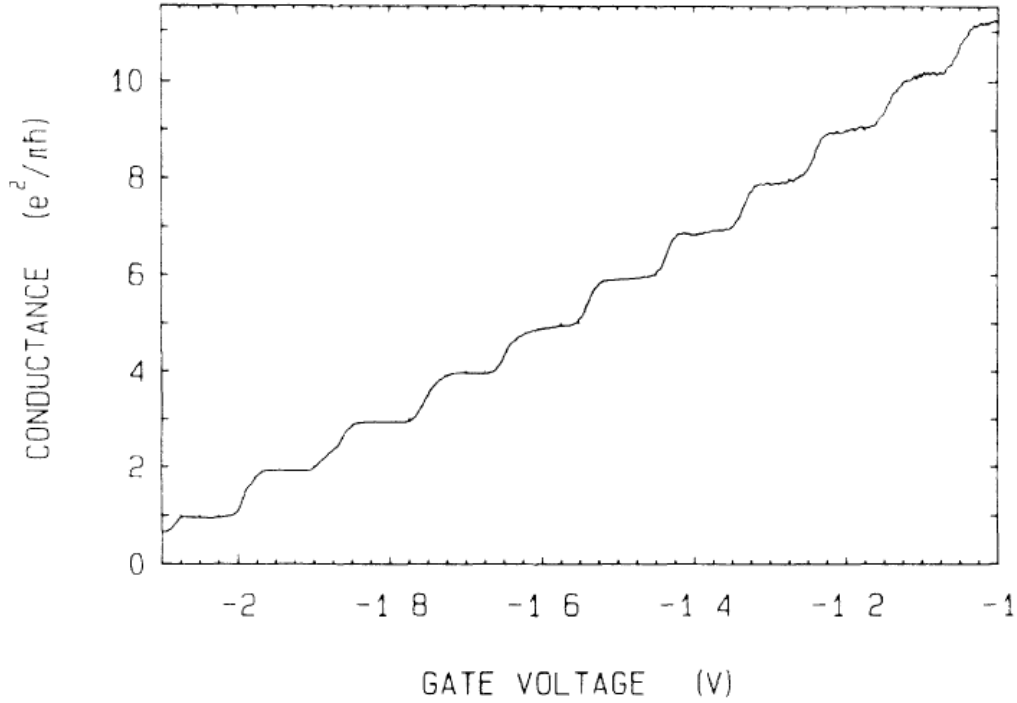


Figura 1.4: A Condutância do ponto de contato quântico varia de acordo com a voltagem aplicada na constrição. Observamos que há uma escada de condutância, revelando portanto a quantização da condutância em semicondutores. Figura retirada da referência [24].

Essa flutuação universal é causada por impurezas[27] dentro da amostra ou pela aplicação de um campo magnético[28] ver figura (1.5).

$$rms[G] = \sqrt{var(G)} = \sqrt{\langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2} \sim \frac{e^2}{h}, \quad (1.10)$$

onde o  $\langle G \rangle$  é a média da condutância e  $\langle G^2 \rangle$  é a média quadrática da condutância. O padrão de interferência causado pelo campo magnético da figura (1.5) apresenta o mesmo padrão de interferência causado pelas impurezas. A flutuação universal é calculada pelo desvio padrão da condutância dada pela equação (1.10).

Em nosso trabalho, também estudaremos sistemas com simetrias quirais, e esses sistemas são formados pelos materiais de Dirac, no qual dentro desses materiais encontramos principalmente o grafeno e os isolantes topológicos. Portanto, é interessante mostrar flutuações universais em materiais de Dirac. Na figura (1.6) vemos que existe um valor médio

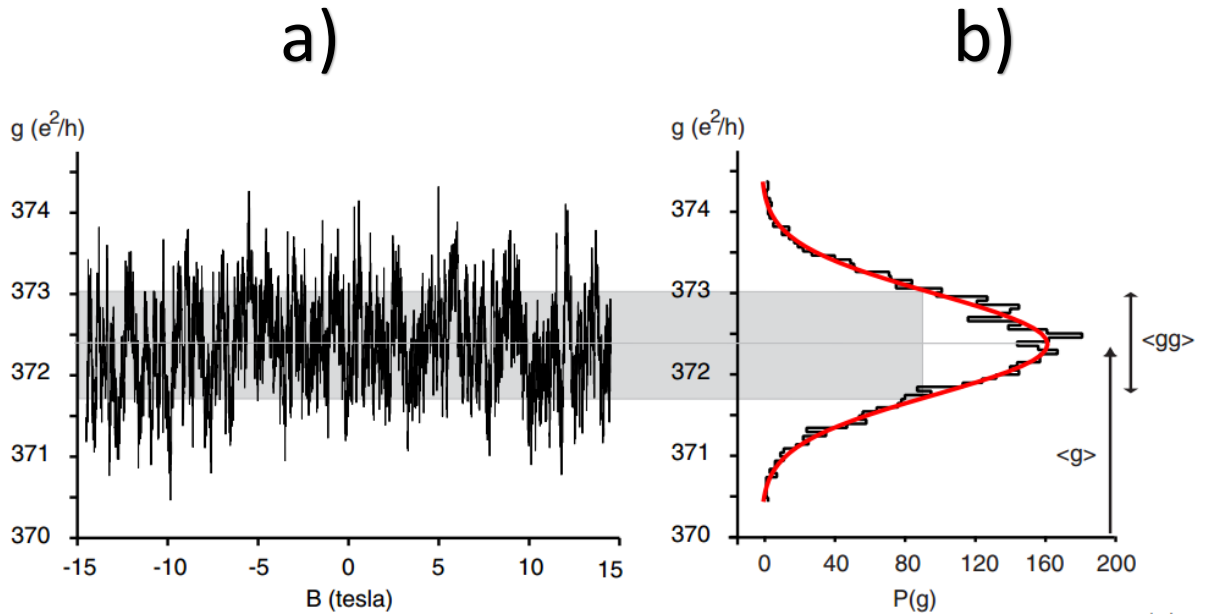


Figura 1.5: A figura **a)** mostra que existe um valor médio da condutância e que este valor médio está entre 372 e 373, porém esta medida não está livre de oscilações, e essas oscilações ocorrem independente do campo magnético. A amplitude da flutuação ao redor da média da condutância é chamada flutuação universal da condutância portanto existe **b)** uma distribuição da condutância numa região onde a medida mais provável é a média e existe algumas medidas que estão abaixo de 372 e acima de 373. O valor da flutuação universal da condutância é da ordem de  $e^2/h$

da condutância e pequenas flutuações existem ao redor desse valor, essas flutuações são as Flutuações Universais da Condutância.

### 1.3 Teoria de Landauer-Büttiker

Nesta seção, iremos discutir a teoria de Landauer-Buttiker, a qual fornece a quantização da condutância vista na equação (1.9). Para isso, iremos seguir a referência [22]. No mo-



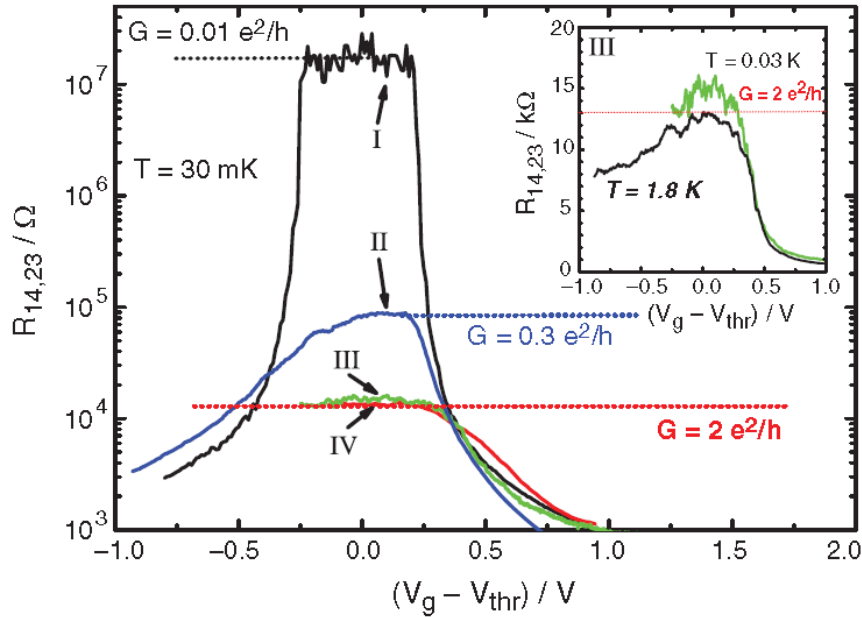


Figura 1.6: A figura mostra que a condutância no Efeito Hall de Spin em poços quânticos de HgTe, a condutância tem flutuações quânticas em torno da média. Figura retirada da referência [29].

delo proposto o transporte eletrônico é balístico, portanto para um transporte desse tipo é necessário fazer 3 considerações iniciais,

- i) O contato entre o terminal e o guia é ideal, então não existe reflexões entre os terminais e o contato,
- ii) O condutor é balístico, então não existe reflexões dentro do próprio condutor,
- iii) O transporte ocorre a baixas temperaturas, todos os elétrons responsáveis pela corrente se encontram no nível de fermi.

Para fazer uma dedução da fórmula de Landauer, vamos analisar a figura (1.7) que mostra um condutor conectado idealmente a dois terminais com potenciais diferentes  $\mu_1$  e  $\mu_2$ . Dado a diferença de potencial entre eles  $\Delta\mu = \mu_2 - \mu_1$  irá surgir uma corrente do terminal 1 (T.1) para o terminal 2 (T.2). A corrente elétrica que sai do T.1 para o T.2 chamada  $I_1^+$ , ao

encontrar um condutor parte da corrente é transmitida para T.2 chamada  $I_2^+$  e parte da corrente é refletida para T.1 chamada  $I_1^-$ . Se o condutor for ideal,  $I_1^- = 0$ , porém, sempre existirá uma probabilidade de transmissão  $T$  e uma probabilidade de reflexão  $R$  dos elétrons ao encontrar o condutor.

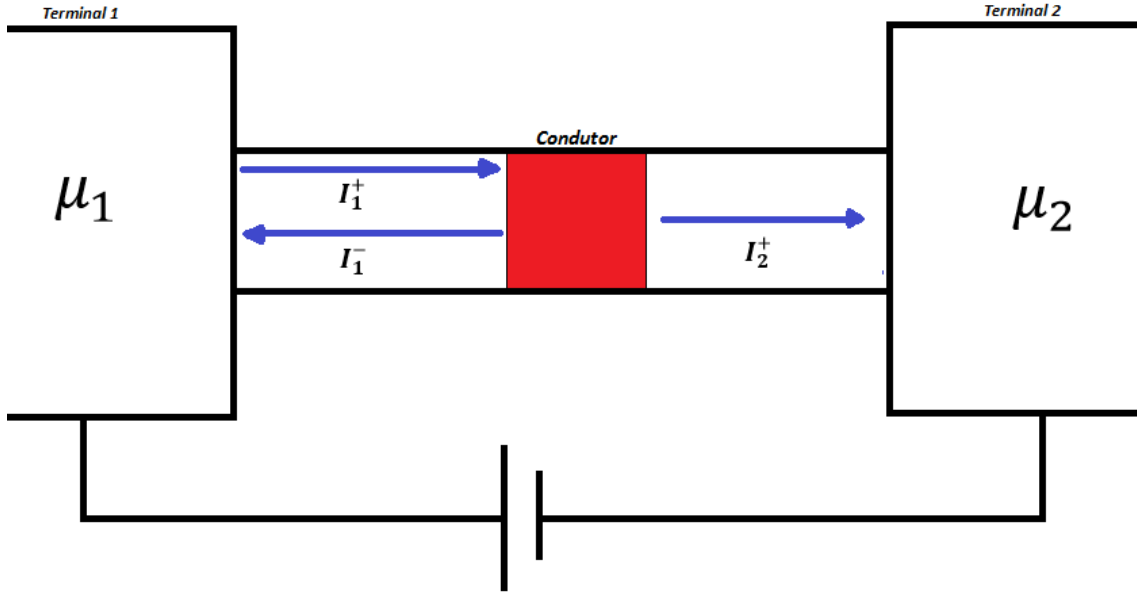


Figura 1.7: A figura mostra um condutor mesoscópico ligado idealmente a dois terminais que tem dimensões muito maior que o condutor, dada uma  $\Delta\mu$  cargas sai de T.1 e ao encontrar o condutor, parte das cargas são transmitidas a T.2 e parte voltam para T.1.

Podemos dizer que corrente que passa em cada terminal é dada por

$$I = G \times \Delta V, \quad (1.11)$$

onde pode-se escrever  $G$  em função do número de modos transversais ( $M$ ) que encontra-se aberto em cada guia e em função da probabilidade de Transmissão( $T$ )/Reflexão( $1 - T$ ) do elétron passar pelo condutor,

$$G = \frac{2e^2}{h} \times MT, \quad (1.12)$$

e, como o transporte eletrônico está no nível de Fermi, então  $\lambda_f < W$ , portanto  $M$  é

$$M = \text{int} \left( \frac{2W}{\lambda_f} \right). \quad (1.13)$$

Utilizando a relação entre potencial químico e tensão,  $\mu_i = eV_i$  a corrente de transmissão que passa no terminal 1 é escrita utilizando a equação (1.11) e (1.12). Temos que  $I_1^+$  em função de  $\mu$  é dada por

$$I_1^+ = \frac{2e}{h} \times M\Delta\mu, \quad (1.14)$$

onde  $T = 1$  pois não existe reflexões entre os terminais e o guia, e  $\Delta V = \Delta\mu/e$ . A corrente  $I_2^+$  é dada por

$$I_2^+ = \frac{2e}{h} \times MT\Delta\mu, \quad (1.15)$$

onde  $T$  é a probabilidade de transmissão do elétron atravessar o condutor. Pela sua lei de conservação, a carga total refletida será dado pela subtração da equação (1.14) da equação (1.15), e a corrente  $I_1^-$  fica escrita como

$$I_1^- = \frac{2e}{h} \times M(1 - T)\Delta\mu. \quad (1.16)$$

Poderíamos olhar o termo  $(1 - T)$  na equação como a probabilidade do elétron ser refletido ao passar pelo condutor, já que ao somar todas as probabilidades de ocorrer um evento o resultado é 1, então como só existe a probabilidade  $T$  do elétron passar pelo condutor ( $T$ ) e a probabilidade dele ser refletido  $R$ , então  $T + R = 1$  o que nos leva á  $R = 1 - T$ .

A corrente efetiva que passa do condutor é dada pela equação (1.15), que depende exclusivamente da probabilidade de transmissão ( $T$ ), da diferença de potencial químico que está conectado o condutor e do número total de canais que se encontra aberto no guia, portanto se pensarmos num condutor conectado a 3 terminais, teríamos que a corrente efetiva no terminal 1

$$I_1 = \frac{2e}{h} \times [T_{21}\mu_1 - T_{12}\mu_2 + T_{31}\mu_1 - T_{13}\mu_3], \quad (1.17)$$

no terminal 2

$$I_2 = \frac{2e}{h} \times [T_{12}\mu_2 - T_{21}\mu_1 + T_{32}\mu_2 - T_{23}\mu_3], \quad (1.18)$$

no terminal 3

$$I_3 = \frac{2e}{h} \times [T_{13}\mu_3 - T_{31}\mu_1 + T_{23}\mu_3 - T_{32}\mu_2]. \quad (1.19)$$

Como a probabilidade de um elétron passar do guia  $i$  para o guia  $j$  é  $T_{ij}$  e esta probabilidade é a mesma se o elétron passar do guia  $j$  para o guia  $i$ , então  $T_{ij} = T_{ji}$ . Portanto, podemos

escrever o potencial químico em função da tensão aplicada em cada terminal ( $\mu_i = eV_i$ ) e generalizar a equação da corrente acima para um terminal  $p$  qualquer,

$$I_p = G_0 \times \sum_p [T_{pq} (V_p - V_q)]. \quad (1.20)$$

Para calcularmos a condutância, utilizamos a fórmula de Landauer[30]

$$G = G_0 \times \sum_{pq} |t_{pq}|^2, \quad (1.21)$$

onde  $t_{pq}$  são os coeficientes de transmissão.

Clássicamente, a resistência para um fio ideal é zero. Portanto, sua condutância seria infinita. Porém o fato da condutância num fio ideal ser finita sempre irá existir uma resistência, mesmo que exista um contato perfeito entre o condutor e o reservatório. Esta resistência, é chamada resistência de contato, e ela é inevitável.

## 1.4 Matriz de Espalhamento e Teoria de Matrizes Aleatórias

A teoria de matrizes aleatórias[31] é uma teoria consolidada e vem tendo uma vasta aplicação em transportes eletrônicos em que a dinâmica da partícula durante o transporte é caótica[[14],[27],[17]]. Nestes sistemas, não interessa o grau de desordem nem a composição molecular mas, apenas simetrias fundamentais, como simetria de reversão temporal, simetria de subrede/quiral, simetria partícula buraco, e simetria de rotação de spin.

Os dispositivos eletrônicos modernos em que podemos aplicar a TMA são as cavidades balísticas caóticas. Estas cavidades balísticas são também conhecidas como pontos quânticos caóticos, ou Bilhares caóticos de Schrödinger como podemos ver na figura (1.8) que mostra uma heterojunção de GaAs-AlGaAs. Nestes bilhares, a função de onda da partícula no bilhar é descrito pela equação de Schrödinger[1].

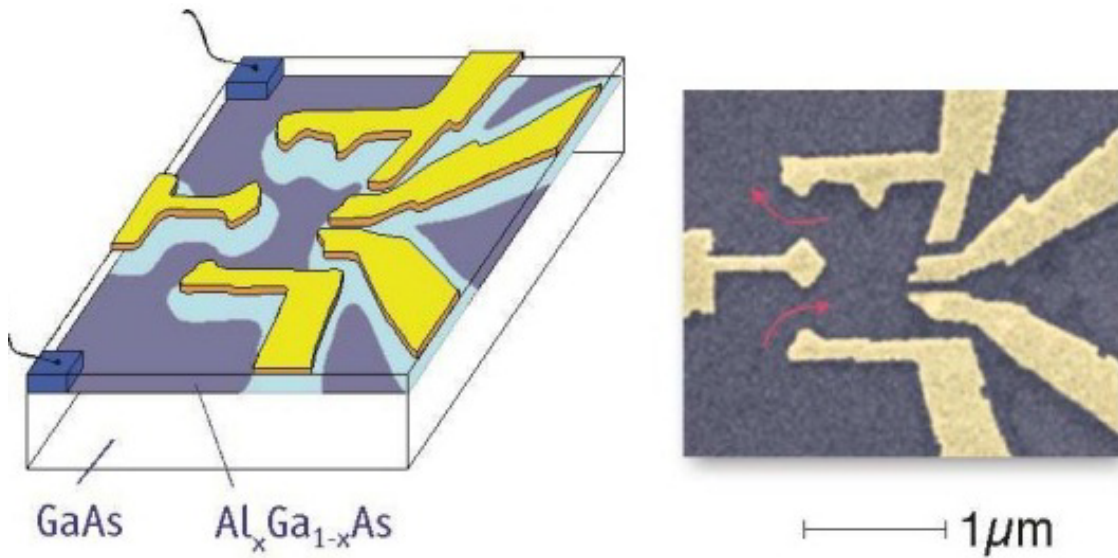


Figura 1.8: A figura mostra um ponto quântico caótico onde a função de onda da partícula é descrita pela equação de Schrödinger, portanto este ponto quântico pode ser chamado de Bilhar de Schrödinger. As setas da direita mostram que a partícula entra em baixo, percorre todo espaço de fase e sai no ponto de cima. Figura retirada de [32]

O transporte eletrônico também pode ocorrer em um bilhar quântico conhecido como Bilhar caótico de Dirac, como grafeno ou isolantes topológicos figura (1.9). Nestes materiais a função de onda das partículas são descritas pela equação de Dirac[33].

### 1.4.1 Matriz de Espalhamento

O transporte eletrônico através de condutores pode ser caracterizado pelas matriz de espalhamento  $S$  do sistema. A matriz de espalhamento conecta as amplitudes das ondas que entram no condutor e as amplitudes das ondas que saem desse condutor[[22],[35]].

Na figura (1.10), mostramos um condutor que está conectado a 2 terminais e tem 3 modos de propagação de onda, as amplitudes de propagação que entram no condutor são representadas pela letra  $\mathbf{a}_i$ , onde  $\mathbf{a}$  representa a amplitude de entrada, e  $\mathbf{i}$  representa em qual modo está se propagando a onda. Portanto como temos 3 modos de propagação teremos,  $\mathbf{a}_1$ ,

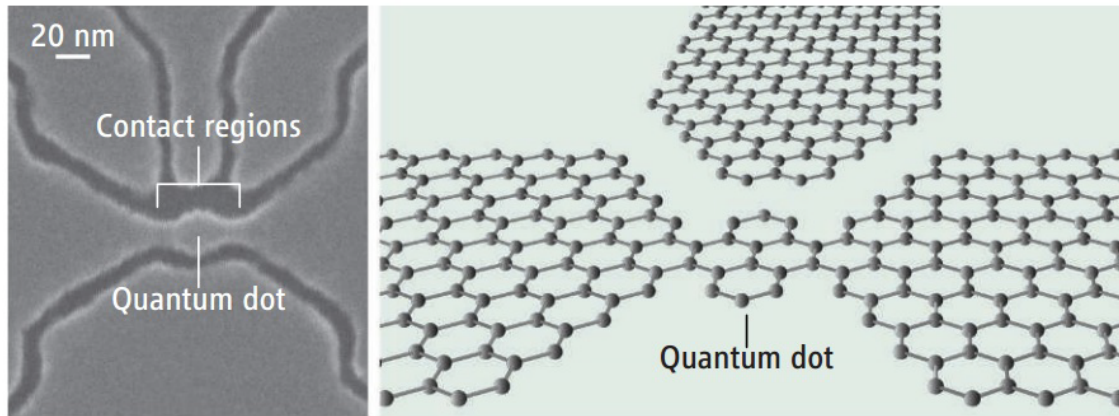


Figura 1.9: A figura mostra um ponto quântico caótico onde a função de onda da partícula é descrita pela equação de Dirac. Portanto, este ponto quântico pode ser chamado de Bilhar de Dirac. Figura retirada de [34].

$a_2$ , e  $a_3$  e as amplitudes de propagação que saem do condutor são representadas pela letra  $b_i$ , onde  $b$  representa a amplitude de saída, analogamente  $b_1$ ,  $b_2$ , e  $b_3$ .

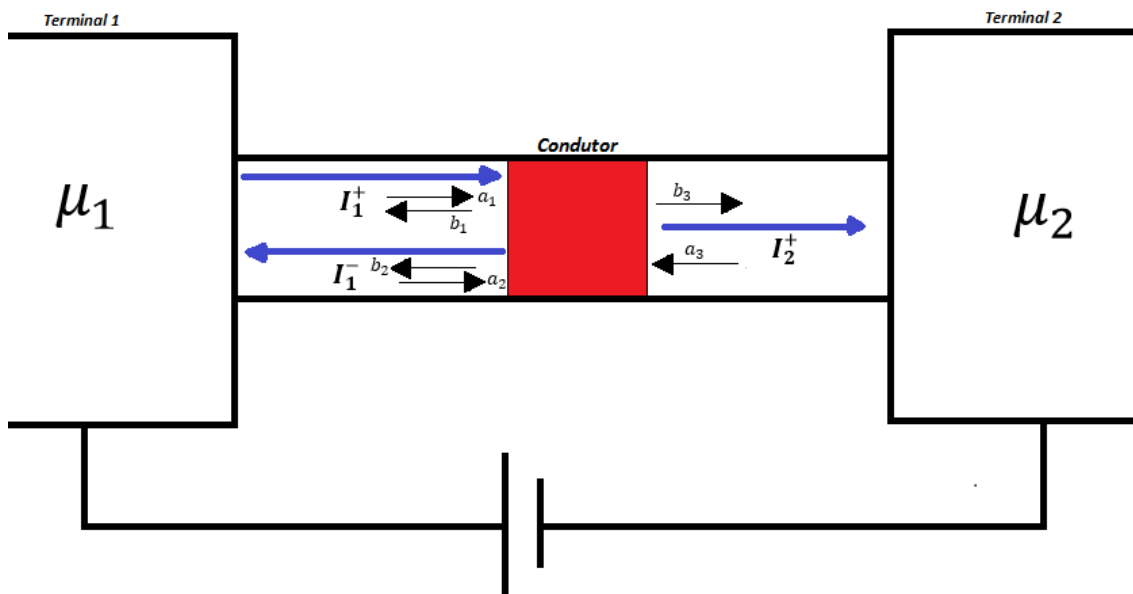


Figura 1.10: Um condutor é ligado por contatos ideais a dois terminais, e existem 3 modos de propagação,  $a$  representa as amplitudes de onda que entram no condutor e  $b$  as amplitudes de onda que saem do condutor, a matriz de espalhamento  $S$  desse sistema é do tipo  $3 \times 3$ .

Ao escrever as amplitudes das ondas de saída em função das amplitudes das ondas de entrada, temos

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

onde  $s_{ij}$  são números que representam o espalhamento da função de onda.

A probabilidade de transmissão  $T_{pq}$  é obtida pelo módulo quadrado da magnitude que corresponde ao seu elemento na matriz de espalhamento,

$$T_{pq} = |s_{pq}|^2. \quad (1.23)$$

Isso representa a probabilidade que um elétron tem de passar de um guia  $p$  para o guia  $q$ ,  $0 < |s_{pq}|^2 < 1$ , e então a probabilidade de reflexão,

$$R_{pq} = |r_{pq}|^2 = 1 - T_{pq} = 1 - |s_{pq}|^2. \quad (1.24)$$

A matriz de espalhamento  $\mathbf{S}$  sempre será uma matriz quadrada do tipo  $M \times M$ , que depende do número de canais abertos no guia a que o condutor está conectado, portanto podemos generalizar a equação (1.22), da seguinte forma

$$[\mathbf{b}] = [\mathbf{S}]_{M \times M} [\mathbf{a}], \quad (1.25)$$

onde  $[\mathbf{b}]$  é o vetor coluna que representa a amplitude das ondas de saída do condutor e  $[\mathbf{a}]$  é o vetor coluna que representa a amplitude das ondas de entrada no condutor. A matriz de espalhamento sempre irá trazer todas as informações necessárias referente ao transporte eletrônico do sistema.

Pela lei da conservação da carga, temos que se somarmos todas as amplitudes das ondas que entram no condutor terá que ser igual as amplitudes das ondas que saem, pois, caso contrário, a corrente elétrica total não seria igual a soma da corrente transmitida com a corrente refletida. Dessa forma, podemos escrever

$$\sum_m |a_m|^2 = \sum_m |a_m| |a_m^\dagger| = \sum_m |b_m|^2 = \sum_m |b_m| |b_m^\dagger|, \quad (1.26)$$

de onde concluímos que

$$|a||a|^\dagger = |b||b|^\dagger, \quad (1.27)$$

então podemos utilizar a equação (1.25) e escrever

$$|b| = |S||a| \quad (1.28)$$

e

$$|b|^\dagger = |a|^\dagger |S|^\dagger \quad (1.29)$$

multiplicando (1.28) e (1.29) temos

$$|b|^\dagger |b| = |a|^\dagger |S|^\dagger |S| |a| \quad (1.30)$$

portanto o que nos leva a concluir que a relação (1.26) só é verdadeira se

$$S^\dagger S = \mathbf{1}, \quad (1.31)$$

portanto concluímos que a matriz de espalhamento é unitária[22]. Como a matriz é unitária, então

$$S^\dagger = S^{-1}, \quad (1.32)$$

em termos dos elementos da matriz  $S$

$$\sum_{m=1}^{M_T} |s_{mn}|^2 = \sum_{m=1}^{M_T} |s_{nm}|^2, \quad (1.33)$$

a transmissão entre dois guias quaisquer é a mesma independente do espalhamento for de um guia  $n$  para um guia  $m$  ou inverso.

Podemos separar a matriz de espalhamento (que é responsável pela transmissão do transporte eletrônico) em blocos

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

$r, r'$  são as matrizes de reflexão enquanto  $t, t'$  são as matrizes de transmissão.

Podemos relacionar a condutância de Landauer com os blocos de transmissão da matriz de espalhamento[[22],[36],[14],[15]]

$$G = G_0 \times \text{Tr}(tt^\dagger). \quad (1.35)$$



Quando a matriz de espalhamento for simétrica ela irá descrever fenômenos que preservam a simetria de reversão temporal[1], portanto

$$SS^* = \mathbf{1}, \quad (1.36)$$

$$S = S^T, \quad (1.37)$$

onde o termo sobrescrito quer dizer que a matriz de espalhamento é transposta. A equação (1.37) satisfaz a condição de reversão temporal. Caso seja aplicado um campo magnético no sistema, essa condição de simetria é quebrada e não podemos mais escrever a equação (1.37), ficando apenas com a condição de unitariedade da matriz de espalhamento, equação (1.31). Outra simetria da matriz de espalhamento é quando leva-se em conta o grau de liberdade do spin dos elétrons. Para esse caso, os elementos da matriz de espalhamento  $s_{ij}$  na equação (1.22) serão quatérnions[15]. Portanto, dependendo do problema a matriz de espalhamento deverá satisfazer uma simetria, porém para todos os problemas a condição de conservação de carga é sempre satisfeita. Essas simetrias da matriz de espalhamento serão utilizadas na aplicação da teoria de matrizes aleatórias em transporte eletrônico.

### 1.4.2 Teoria de Matriz Aleatória

A teoria de matrizes aleatória (TMA)[31] foi utilizado pela primeira vez em física nuclear com Wigner na década de 50, utilizou-se o conceito de distribuição estatística para entender a distribuição do espaçamento dos níveis de energia de núcleos de átomos pesados. Em átomos pesados existe uma grande quantidade de cargas distribuída ao longo das órbitas, portanto para analisar a distribuição dos níveis de energia, Wigner utilizou distribuição estatística, e ensembles de matrizes aleatórias[37]. Em seguida Dyson, estabeleceu os fundamentos matemáticos da teoria de matrizes aleatórias[38], sendo o responsável pela classificação dos ensembles de acordo com a dependência de simetrias, como simetria de reversão temporal e simetria de rotação de spin. A TMA refere-se a universalidade dos transportes[27], os fenômenos são considerados universais, no sentido que não dependem do tamanho da amostra ou do grau de desordem do sistema, depende apenas de algumas simetrias.

Primeiramente na TMA foram introduzidas três classes de ensembles por Wigner e Dyson[[37],[38]], essas classes são caracterizadas de acordo com a presença ou quebra de simetrias fundamentais com simetria de reversão temporal (SRT) e simetria de rotação de spin (SRS), simetria de sub-rede (SLS) e simetria partícula-buraco (PHS). Em seguida foram introduzidas mais 3 classes de ensembles por Shuryak[39] e Verbaarschot[40]. Com estas 3 classes foi possível observar fenômenos em sistemas que tem redes bipartidas como são os sistemas quirais. Esses sistemas preservam a simetria PHS, por isso com a introdução dessas novas três classes houve uma expansão da aplicação da TMA, pois nas classes introduzidas anteriormente por Wigner e Dyson a PHS não é preservada, logo não era suficiente para estudar sistemas com quiralidade. Por fim foi introduzida mais 4 classes de ensemble por Altland e Zimbauer[41] onde foi aplicada a sistemas em contato com supercondutores.

Todas as classes são representadas na tabela (1.1), nesta tabela relacionamos a classe de simetria com os seus respectivos ensembles, cada ensemble é representado por um índice de simetria  $\beta$ , e relacionamos os ensembles com os exemplos físicos que tem um sistema, na coluna que mostra os exemplos físicos temos que quando  $\mathbf{B} = 0$  o sistema não apresenta campo magnético, quando  $\mathbf{SC} = 0$  o sistema não apresenta supercondutividade e  $\mathbf{SO} = 0$  o sistema não apresenta uma forte interação spin-órbita, portanto podemos ver na tabela (1.1) que os ensembles que estão na classe de Altland-Zimbauer podem descrever sistemas com supercondutividade, e todos os ensembles da classe quiral apresenta SLS que é uma característica intrínseca de sistemas com quiralidade.

A tabela (1.2) é muito importante para o estudo de transporte eletrônico através da teoria de Matriz aleatória, pois ela vai conectar a matriz de espalhamento do sistema com as classes de simetria em que cada sistema se encontra, portanto a partir dessa conexão poderemos decompor a matriz de espalhamento a fim de simplificar o problema e então teremos uma ferramenta matemática poderosa para fazer cálculos analíticos.

De acordo com a teoria de Matriz aleatória, como podemos ver nas tabelas (1.1) e (1.2) existem 10 ensembles para descrever todas as 3 classes de simetria, em nosso problema utilizamos as classes de Wigner Dyson e a Classe Quiral. Os termos  $\Sigma_z$  e  $\mathbf{J}$  da tabela (1.2)

Classe de Simetria	Ensemble	$\beta$	SRT	PHS	SLS	Exemplos Físicos
Wigner Dyson	A (Unitário)	2	0	0	0	$\mathbf{B} = 0, \mathbf{SC} = 0$
	AI (Ortogonal)	1	+1	0	0	$\mathbf{B} = 0, \mathbf{SO} = 0, \mathbf{SC} = 0$
	AII (Simplético)	4	-1	0	0	$\mathbf{B} = 0, \mathbf{SO} \neq 0, \mathbf{SC} = 0$
Quiral	AIII (Unitário)	2	0	0	1	$\mathbf{B} \neq 0, \mathbf{SC} = 0$
	BDI (Ortogonal)	1	+1	+1	1	$\mathbf{B} = 0, \mathbf{SO} = 0, \mathbf{SC} = 0$
	CII (Simplético)	4	-1	-1	1	$\mathbf{B} = 0, \mathbf{SO} \neq 0, \mathbf{SC} = 0$
Altland-Zimbauer	D	2	0	+1	0	$\mathbf{B} \neq 0, \mathbf{SO} \neq 0, \mathbf{SC} \neq 0$
	C	2	0	-1	0	$\mathbf{B} \neq 0, \mathbf{SO} = 0, \mathbf{SC} \neq 0$
	DIII	1	-1	+1	1	$\mathbf{B} = 0, \mathbf{SO} \neq 0, \mathbf{SC} \neq 0$
	CI	4	+1	-1	1	$\mathbf{B} = 0, \mathbf{SO} = 0, \mathbf{SC} \neq 0$

Tabela 1.1: Tabela de Cartan para os espaços simétricos[42]. Tabela mostrando a relação entre cada classe de simetria e o tipo de simetria que o sistema poderá apresentar, na tabela se houver quebra de simetria então abaixo da simetria estará o valor 0, se houver preservação da simetria haverá o valor  $\pm 1$ .

são dados por

$$\Sigma_z = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{N_T} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{N_T} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}_{N_T} \\ \mathbf{1}_{N_T} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

### TMA para a classe de simetria de Wigner Dyson

Para a classe de Wigner Dyson temos 3 ensembles e podemos dizer de acordo com a tabela (1.1) que os sistemas físicos que essa classe pode representar são:

- (i) Preservando a simetria de reversão temporal, não existindo a simetria partícula buraco e nem a simetria de subrede, o campo magnético externo é nulo  $\mathbf{B} = 0$ , o ensemble que descreve a matriz de espalhamento do sistema é o ensemble circular ortogonal (ECO), representado pelo índice de simetria  $\beta = 1$ .

Classe de Simetria	Ensemble	$\beta$	$\mathbf{U}$	$\mathbf{S}$
Wigner Dyson	A (Unitário)	2	$\mathbf{U}(N)$	$\mathbf{S} = \mathbf{U}$
	AI (Ortogonal)	1	$\mathbf{U}(N)$	$\mathbf{S} = \mathbf{U}^T \mathbf{U}$
	AII (Simplético)	4	$\mathbf{U}(2N)$	$\mathbf{S} = \mathbf{J} \mathbf{U}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{U}$
Quiral	AIII (Unitário)	2	$\mathbf{U}(2N)$	$\mathbf{S} = \Sigma_z \mathbf{U}^\dagger \Sigma_z \mathbf{U}$
	BDI (Ortogonal)	1	$\mathbf{SO}(2N)$	$\mathbf{S} = \Sigma_z \mathbf{U}^T \Sigma_z \mathbf{U}$
	CII (Simplético)	4	$\mathbf{S}_p(4N)$	$\mathbf{S} = \Sigma_z \mathbf{U}^\dagger \Sigma_z \mathbf{U}$
Altland-Zimbauer	D	2	$\mathbf{SO}(2N)$	$\mathbf{S} = \mathbf{U}$
	C	2	$\mathbf{S}_p(2N)$	$\mathbf{S} = \mathbf{U}$
	DIII	1	$\mathbf{SO}(4N)$	$\mathbf{S} = \mathbf{J} \mathbf{U}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{U}$
	CI	4	$\mathbf{S}_p(4N)$	$\mathbf{S} = \Sigma_z \mathbf{U}^\dagger \Sigma_z \mathbf{U}$

Tabela 1.2: Tabela de Cartan que representa a maneira que a matriz de espalhamento deverá ser decomposta em função de matrizes Unitárias, Ortogonais ou Simpléticas.[43]

- (ii) Simetria de reversão temporal quebrada devido a um campo magnético não nulo  $\mathbf{B} \neq 0$ , não existindo a simetria partícula buraco e nem a simetria de subrede, o ensemble que descreve a matriz de espalhamento do sistema é o ensemble circular unitário (ECU), representado pelo índice de simetria  $\beta = 2$ .
- (iii) Preservando a simetria de reversão temporal, não existindo a simetria partícula buraco e nem a simetria de subrede, o campo magnético externo é nulo  $\mathbf{B} = 0$ , havendo uma forte interação spin-órbita  $\mathbf{SO} \neq 0$  o ensemble que descreve a matriz de espalhamento do sistema é o ensemble circular simplético (ECS), representado pelo índice de simetria  $\beta = 4$ .

Para um simples condutor ligado a dois terminais a matriz de espalhamento do sistema terá um tamanho  $N_T \times N_T$ , onde  $N_T = N_1 + N_2$ , escrevendo em termos dos coeficientes de transmissão e reflexão temos

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} r_{11} & t_{12}^\dagger \\ t_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

a condutância pode ser dada pela fórmula de Landauer (1.35),

$$\frac{G}{G_0} = \text{Tr} \left( t_1 t_2^\dagger \right) = \text{Tr} \left( \mathbf{C}_1 S \mathbf{C}_2 S^\dagger \right) \quad (1.40)$$

As matrizes  $\mathbf{C}_1$  e  $\mathbf{C}_2$  são chamadas matrizes projeções,

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{N_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{N_2} \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

as matrizes projeção são sempre matrizes que obedecem a seguinte operação de multiplicação  $\text{Tr}(\mathbf{C}_i \times \mathbf{C}_j) = \delta_{ij}$ , e cujo traço é sempre não nulo,  $\text{Tr}(\mathbf{C}_i) = N_i$  que significa o número de canais abertos no guia  $i$ . Com isso, seguindo as referências[[15],[16]] podemos chegar que a média da condutância para as três classes de Wigner Dyson é

$$\langle G \rangle = G_0 \times \frac{N_1 N_2}{N_T - 1 + 2/\beta}, \quad (1.42)$$

e a variância da condutância,

$$\text{var}[G] = G_0^2 \times \frac{2N_1 N_2 (N_1 - 1 + 2/\beta) (N_2 - 1 + 2/\beta)}{\beta (N_T - 1 + 4/\beta) (N_T - 2 + 2/\beta) (N_T - 1 + 2/\beta)^2}, \quad (1.43)$$

em que  $\beta$  representa o índice de simetria de cada classe.

### TMA para a classe de simetria Quiral

Para a classe de Quiral também temos 3 ensembles, e os sistemas físicos que representam essa classe são

- (1) Preservando a Simetria de Reversão temporal, a simetria partícula buraco a simetria de subrede, tendo o campo magnético externo nulo  $\mathbf{B} = 0$ , e sem interação spin-órbita  $\mathbf{SO} = 0$ , o ensemble que descreve a matriz de espalhamento do sistema é o ensemble circular ortogonal quiral (chECO), representado pelo índice de simetria  $\beta = 1$ . De acordo com a tabela (1.2) a matriz de espalhamento poderá ser decomposta matrizes ortogonais.

- (2) A simetria de reversão temporal quebrada devido a um campo magnético não nulo  $\mathbf{B} \neq 0$ , não existindo a simetria partícula buraco e preservando a simetria de subrede, o ensemble que descreve a matriz de espalhamento do sistema é o ensemble circular unitário quirial (chECU), representado pelo índice de simetria  $\beta = 2$ . E de acordo com a tabela (1.2) a matriz de espalhamento deverá ser decomposta em matrizes unitárias.
- (3) Preservando a simetria de reversão temporal, assim como a simetria partícula buraco e simetria de subrede, o campo magnético externo é nulo  $\mathbf{B} = 0$ , havendo uma forte interação spin-órbita  $\mathbf{SO} \neq 0$  o ensemble que descreve a matriz de espalhamento do sistema é o ensemble circular simplético quirial (chECS), representado pelo índice de simetria  $\beta = 4$ . E de acordo com a tabela (1.2) a matriz de espalhamento deverá ser decomposta em matrizes.

A grande diferença entre a classe de Wigner Dyson para a classe quirial é a presença da simetria de subrede, que é intrínseca para materiais de Dirac. Para a classe de Altland-Zirnbauer existem mais 4 ensembles, porém não foi objeto de estudo deste dissertação, que nos limitamos apenas o problema em materiais sem supercondutividade.

Para sistemas quirais a matriz de espalhamento deverá satisfazer a seguinte relação[40]

$$S = \Sigma_z S^\dagger \Sigma_z \quad (1.44)$$

esta relação é a responsável pela introdução da quiralidade na matriz de espalhamento. Portanto a matriz de espalhamento na equação (1.40) deverá ser decomposta de acordo com a tabela (1.2), satisfazendo a equação (1.44) e a expressão irá assumir a seguinte forma

$$\frac{G}{G_0} = \text{Tr}(tt^\dagger) = \text{Tr}(\Sigma_z U C_1 U^\dagger \Sigma_z U C_2 U^\dagger) \quad (1.45)$$

segundo a referência[[15],[16]] podemos chegar que a média da condutância para as três classes Quirais é

$$\langle G \rangle = G_0 \times \frac{4\beta N_1 N_2 N_T}{(\beta N_T + 1)(2N_T - 1)}, \quad (1.46)$$

o qual  $\beta$  representa o índice de simetria de cada classe.

## 1.5 Efeito Hall Clássico

O Efeito Hall foi descoberto em 1879 por Edwin Herbert Hall[44] na época do seu doutorado. Na figura (1.11) temos um semicondutor submetido a um campo elétrico  $\mathbf{E}_x$ , a corrente elétrica longitudinal  $i$  flui dentro dele da esquerda para direita e os elétrons estão com uma velocidade de deriva  $v$  no sentido da corrente, quando não existe campo magnético as partículas seguem quase em linha reta exceto pelas colisões devido as impurezas no semicondutor. Porém quando se coloca um campo magnético (para dentro do plano do papel) constante e perpendicular ao fluxo da corrente elétrica, irá gerar um deslocamento das cargas devido a força magnética (força de Lorentz) e esta cargas irá se acoplar na face de baixo do semicondutor. A força de Lorentz é dada por

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (1.47)$$

e no equilíbrio temos que a força de Lorentz é igual a força eletrostática que ocorre transversalmente no semicondutor,

$$q\mathbf{E} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.48)$$

se  $w$  é a espessura do semicondutor, então existe uma diferença de potencial dado por  $V_H$  entre a placa superior e placa inferior do semicondutor, essa ddp é chamado de tensão Hall e podemos escrever a equação (1.48) em função da tensão Hall

$$q\frac{V_H}{w} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.49)$$

como o ângulo entre  $\mathbf{B}$  e a velocidade de deriva  $v$  é  $90^\circ$ , então conseguimos encontrar a tensão Hall simplesmente por

$$V_H = vwB \quad (1.50)$$

onde esta tensão pode ser medida com um simples voltímetro. Conhecendo o valor da tensão Hall é possível medir a velocidade de deriva  $v$  dos elétrons que se propagam no semicondutor, pois a densidade de corrente é dado por

$$j = \eta qv, \quad (1.51)$$

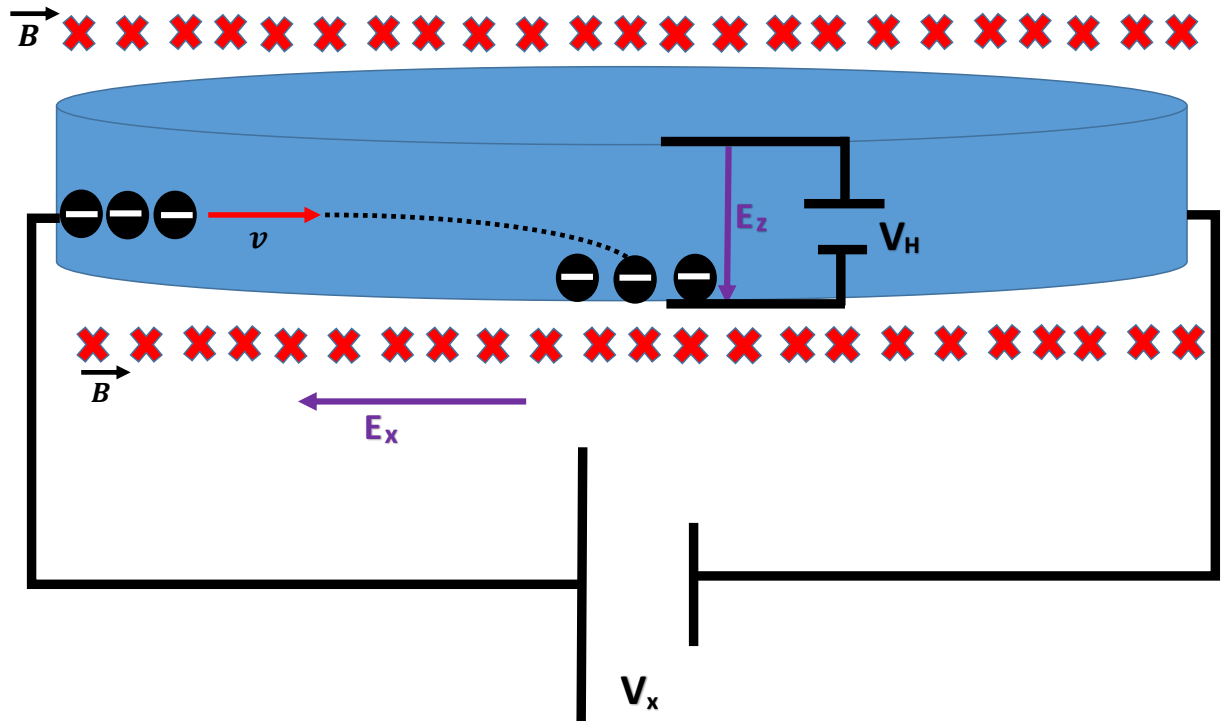


Figura 1.11: A figura é uma representação do Efeito Hall, quando uma corrente elétrica é submetida há um campo magnético  $\mathbf{B}$ , os elétrons sofrem desvios se acumulando na superfície do condutor, surgindo portanto uma tensão transversal chamada tensão Hall  $V_H$ , e devido a esta tensão surge naturalmente um fluxo de cargas entre as faces do condutor e portanto é possível determinar a resistência Hall  $R_H$  em função da espessura do condutor  $w$ .

onde  $j$  é a densidade de corrente e  $\eta$  é a concentração de cargas, podemos relacionar a tensão Hall com a densidade de corrente  $j$ , substituindo  $v$  da equação (1.51) na equação (1.50), então temos que a tensão Hall em função da densidade de corrente é

$$V_H = \frac{jwB}{q\eta} \quad (1.52)$$

os elétrons ao sair da placa inferior para a placa superior encontram uma resistência que é chamada de resistência Hall, dado por

$$R_H = \frac{V_H}{i}, \quad (1.53)$$



onde temos que a resistência Hall, aumenta linearmente com a tensão Hall mantida constante a corrente  $i$ .

Note que de acordo com a equação (1.52) a tensão Hall aumenta linearmente com o campo magnético, e de acordo com a equação (1.53) por consequência a resistência Hall também aumenta linearmente com o campo magnético mantendo constante a corrente longitudinal. Porém em 1980 Klitzing e seus colaboradores[45] estudando o Efeito Hall em filmes finos semicondutores com um alto campo magnético  $B = 18T$  e a baixas temperaturas  $T = 1.5K$  descobriram que a tensão não era linear com o campo magnético, ao invés de ser linear descobriram que a tensão Hall  $V_H$  apresentava uma série de patos, ou seja, eles descobriram que  $V_H$  era quantizada, e se isso é verdade então a resistência Hall  $R_H$  também é quantizada, a quantização da resistência é dado por

$$R_H = \frac{V_H}{i} = \frac{h}{e^2} \times \frac{1}{n} \quad (1.54)$$

em que os valores de  $n$  observado por Klitzing eram números inteiros positivos ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), para  $n = 1$  temos o valor de  $25.781\Omega$ , como podemos observar na figura (1.12), o valor encontrado no experimento de Klitzing[45] foi de  $\approx 6.4k\Omega$ .

Em 1982 Daniel Tsui e colaboradores[46], investigaram o efeito Hall em semicondutores de altas pureza e descobriram que o valor de  $n$  eram valores não inteiros, eram razões entre números primos entre si, ou seja, eram frações por isso que a descoberta de Klitzing é conhecida como de Efeito Hall Quântizado e a descoberta de Tsui é conhecida como Efeito Hall Quântizado Fracionado como podemos observar na figura (1.12)[[45],[46]]. Klitzing e Tsui ganharam o prêmio nobel respectivamente em 1985 e 1988.

## 1.6 Efeito Hall de Spin e Efeito Hall Inverso de Spin

O Efeito Hall de Spin (SHE)[[7], [47], [48], [49], [50]] e o Efeito Hall Quântico de Spin (SQHE)[[9], [51]] origina-se devido ao bombeamento de correntes polarizadas de spin dentro de um condutor ou semicondutor com uma forte interação spin-órbita, a diferença é que o

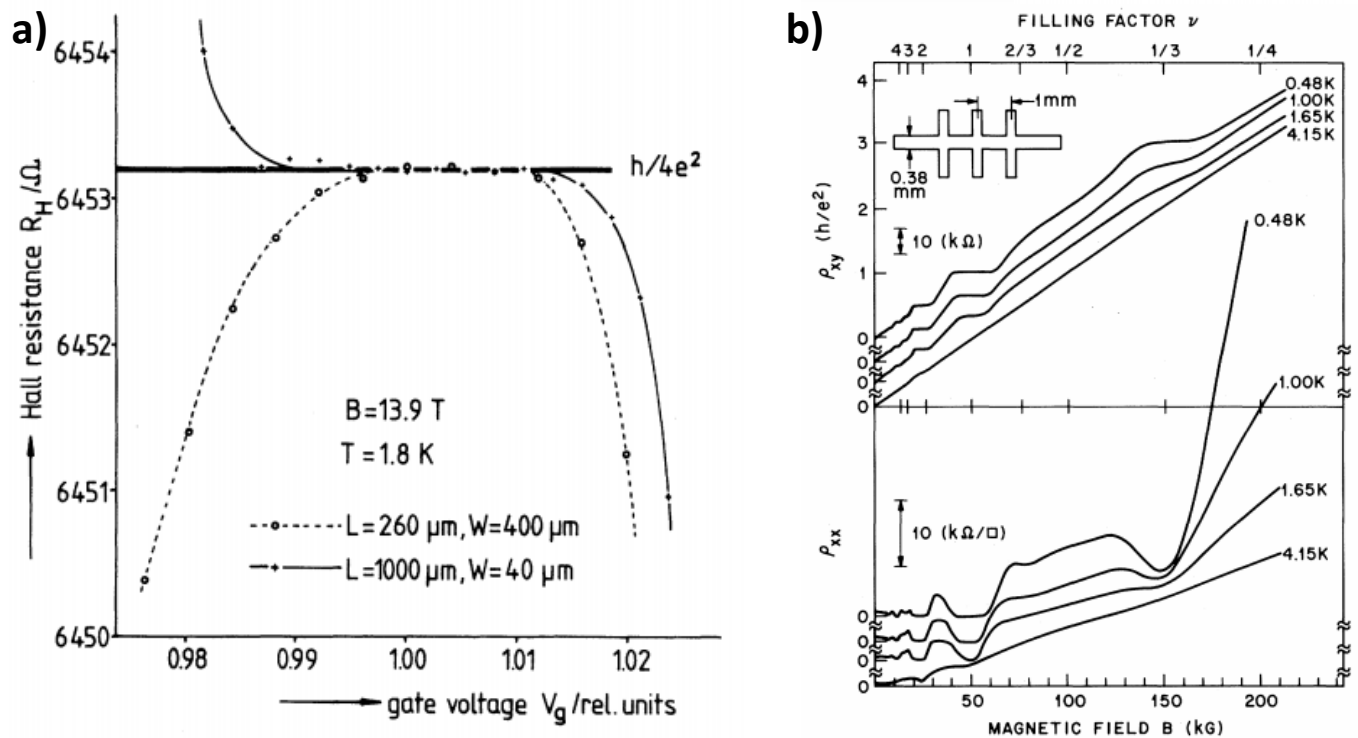


Figura 1.12: A figura mostra o resultado do a) Efeito Hall Quântizado, observamos que para altos campos magnéticos e uma baixa temperatura a resistência hall converge para o mesmo valor, esta figura foi retirada da referência[45] e o resultado do b) Efeito Hall Quântico Fracionado, é possível observar com clareza um platô de resistência em  $\nu = 1/3$ , figura retirada da referência [46]

SQHE ocorre em materiais de Dirac, onde ocorre o efeito da quantização da condutância. O SHE foi previsto em 1971 por Dyakonov e Perel[[50], [52]]. Apesar do SHE ser previsto em 1971 levou 33 anos para que fosse pela primeira vez comprovado experimentalmente, o SHE foi observado por dois grupos distintos, o primeiro grupo a observar o efeito foi o Awschalom *et al.*[48] em 2004 e o outro grupo foi Sinova *et al.*[49] em 2005.

O SHE e o SQHE ocorre quando uma corrente elétrica passando através de uma amostra consegue acumular spin com polarizações opostas nas laterais diametralmente opostas da amostra como podemos ver na figura (1.13). Caso a superfície seja cilíndrica o spin fica

circulando ao redor da aplicação da corrente de carga como ocorre com as linhas de campo magnético produzido por uma corrente elétrica. A acumulação induzida de spin é proporcional a corrente de carga que percorre a amostra, e a separação de cargas com spin opostos em direções opostas foi confirmada experimentalmente[[48], [49]].

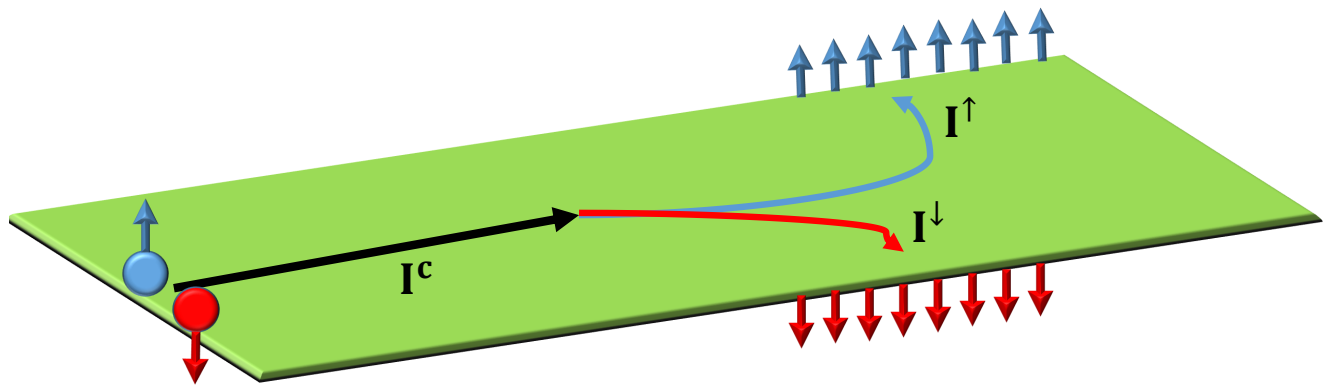


Figura 1.13: A figura mostra que ao bombear a corrente de carga para um condutor existe a acumulação de spins com polarizações opostas nas extremidades opostas do condutor, ou seja, a corrente de carga gera uma corrente de spin e essa corrente de spin é diametralmente separada devido a polarização das cargas, este é o Efeito Hall de Spin.

O termo SHE foi introduzido em 1999 [47], este termo foi introduzido pois o SHE é similar ao Efeito Hall Clássico, porém com duas diferenças, o SHE não se faz necessário a aplicação de um campo magnético para ocorrer a acumulação de spin, pelo contrário, inserindo um campo magnético perpendicular a direção de propagação do spin é destruída a polarização de spin, a forte interação spin-órbita é responsável por fazer com que as partículas percorram toda a cavidade com o spin polarizado, ou seja, o comprimento de relaxação de spin  $L_s$  tem

que ser maior que o comprimento da amostra.

Outro efeito muito importante na área da spintrônica é o Efeito Hall Inverso de Spin (ISHE) que ocorre quando uma corrente de spin longitudinal gera uma corrente de carga transversal, à corrente de spin e a corrente de carga é medida diretamente através da tensão dc com um multímetro no laboratório, o efeito está indicado na figura (1.14).

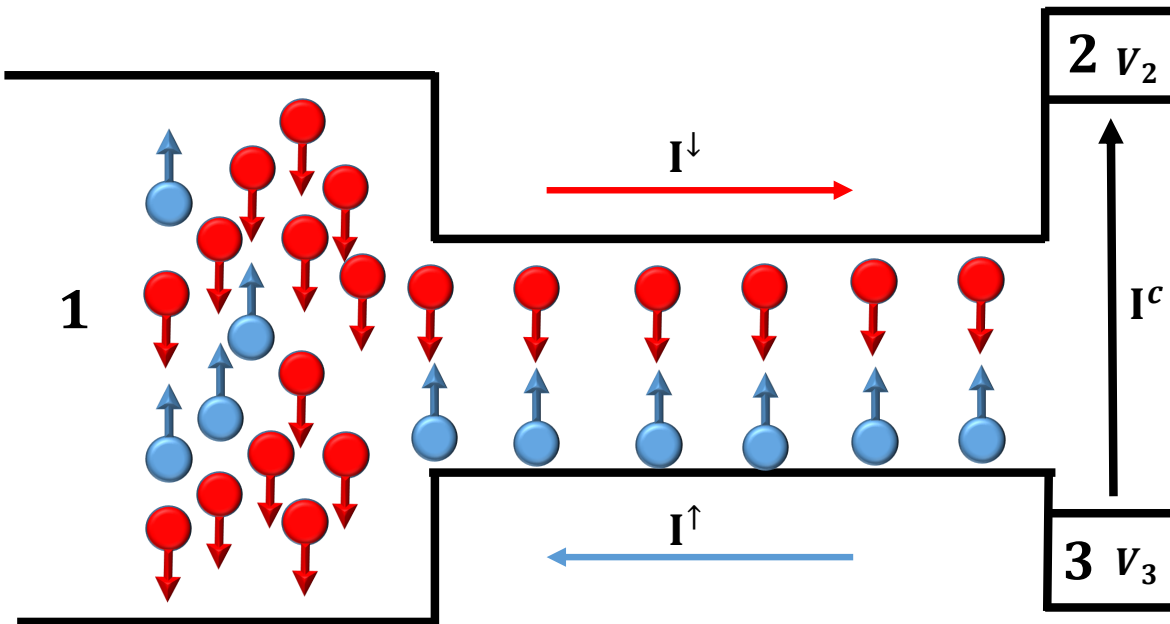


Figura 1.14: A figura mostra que uma corrente de spin se propaga do reservatório 1 para a amostra, o reservatório 1 está polarizado com cargas com spin up, e entre o reservatório 2 e 3 é gerado uma diferença de potencial  $\Delta V = V_3 - V_2$  e essa diferença de potencial irá gerar a propagação de uma corrente eletrônica entre os terminais 2 e 3.

Vemos que no reservatório 1 da figura (1.14) existem mais cargas polarizadas com spin down, isso ocorre pois dentro do reservatório existem cargas polarizadas nas duas direções a energia das cargas com spin up é dado por  $\mu^\uparrow$  e a energia das cargas com spin down é dado

por  $\mu^\downarrow$ , portanto temos que o potencial do reservatório 1 é escrito como

$$\Delta\mu = \mu_1^\downarrow - \mu_1^\uparrow, \quad (1.55)$$

como os reservatórios 2 e 3 não têm cargas polarizadas com spin numa direção preferencial então  $\mu_2 = \mu_3 = 0$ . Na figura (1.15) podemos ver a banda de energia dos reservatórios 1, 2 e 3. O desbalanceamento dos níveis de energia das cargas com spin up e spin down leva a corrente de spin.

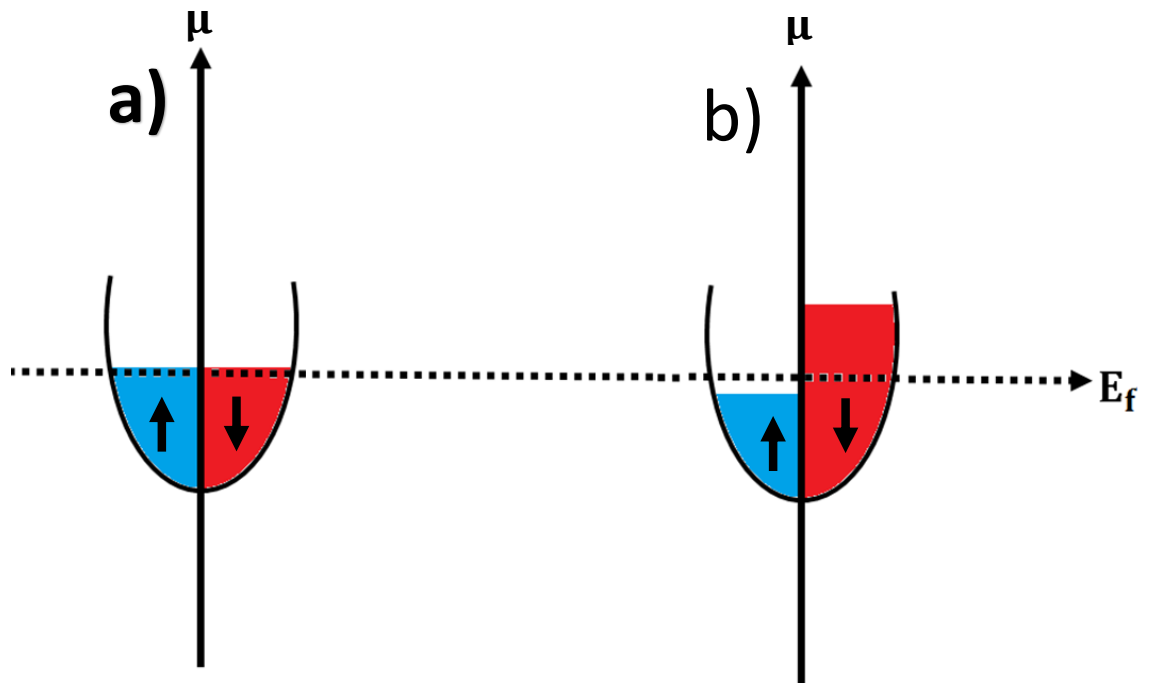


Figura 1.15: A linha tracejada representa a energia de Fermi e a linha sólida vertical representa a energia do sistema, a cor vermelha representa a energia total das cargas que estão com spin down e a cor azul representa a energia total das cargas que estão com spin up. a) A distribuição de energia nos terminais está em equilíbrio, como não existe desbalanceamento não vai ocorrer propagação da corrente de spin e então se faz necessário um desbalanceamento que está representado em b) com o desbalanceamento entre as energias das cargas com spin down e das cargas com spin up, então vai existir uma propagação de corrente polarizada, neste caso uma corrente pura de spin down.

Podemos dizer que a corrente de spin de um sistema é dado por

$$I_s = I^\uparrow - I^\downarrow, \quad (1.56)$$

onde se predominar o fluxo de elétrons com spin up ( $I^\uparrow$ ) será gerado uma corrente efetiva pura de spin up e se predominar a o fluxo de elétrons com spin down ( $I^\downarrow$ ) será gerado uma corrente efetiva pura de spin down. Portanto a corrente de carga total num sistema é dado por

$$I_c = I^\uparrow + I^\downarrow, \quad (1.57)$$

de acordo com a equação (1.56) e (1.57), no ISHE poderemos bombear uma amostra com corrente pura de spin, então teremos que a corrente de carga é nula ( $I_s \neq 0$  e  $I_c = 0$ ) ou podemos bombear uma amostra com corrente de spin junto com corrente de carga ( $I_s \neq 0$  e  $I_c \neq 0$ ), as relações podemos ver na figura (1.16). O primeiro a fazer medidas experimentais

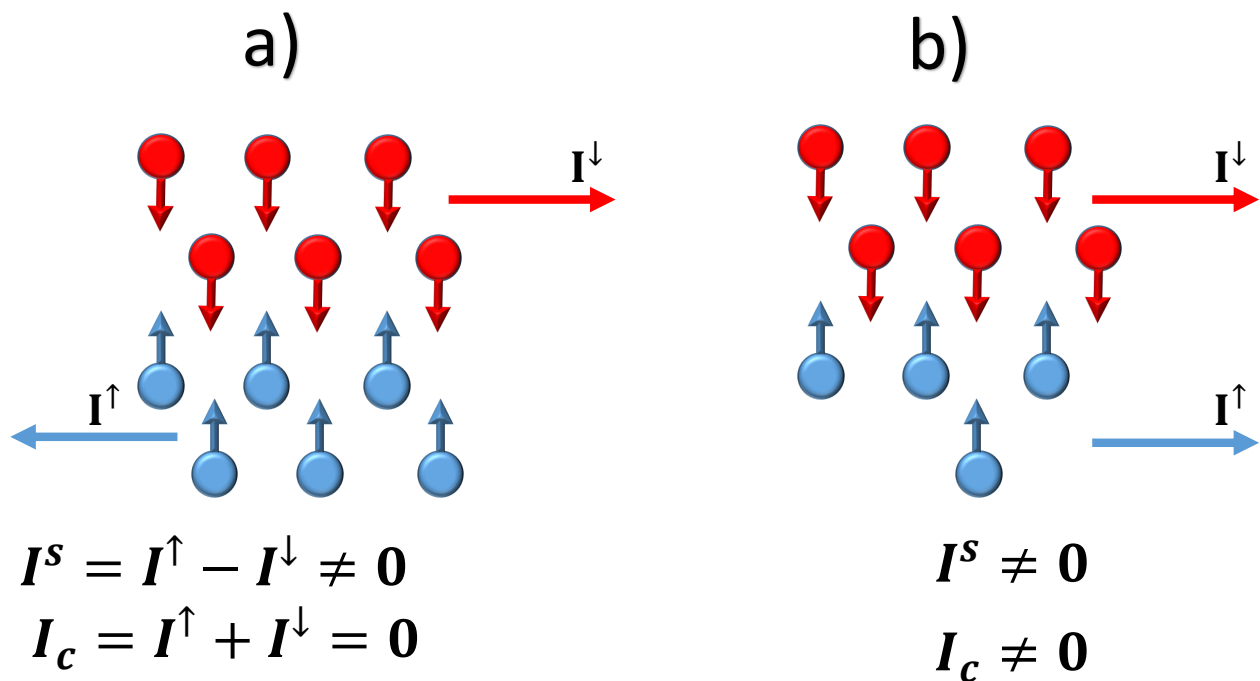


Figura 1.16: Na figura mostra o fluxo de a) corrente pura de spin,  $I_c = 0$  e  $I_s \neq 0$  e b) representa corrente eletrônica pois  $I_c \neq 0$  e  $I_s \neq 0$ .

do ISHE foi em 2005 por Azevedo *et al.*[18] no qual realizaram as primeiras medidas de tensões

elétricas de geradas por spin pumping em 2006 Saitoh *et al.*[19] fizeram um bombeamento de spin de um meio ferromagnético para um meio condutor não magnético. Pode-se criar corrente de carga através de corrente de spin por spin pumping, e efeito Seebeck de Spin, este último efeito foi observado em 2008 por Uchida e seus colaboradores[53] que é o transporte de corrente de spin devido à um gradiente de temperatura e este gradiente de temperatura gera uma tensão nos terminais do condutor levando então a propagação de corrente pura de spin que ao penetrar no condutor irá gerar uma corrente eletrônica.

O SHE é um fenômeno de transporte de spin que foi previsto a muito tempo [[50], [52]], porém foi bastante estudado nas últimas décadas em materiais 2D [[48], [49]] e 3D [54] e o ISHE foi visto em materiais semicondutores[[55], [56], [57]] e condutores[[58], [59]]. Compreender e aplicar estes temas é promissor tanto na parte experimental pelas vastas aplicações tecnológicas [[59],[60]] quanto na área teórica para compreender melhor a interação do spin em sólidos.

## 1.7 Breve Introdução sobre os Capítulos

Neste capítulo introdutório foi apresentado uma breve revisão dos conceitos de física mesoscópica como os comprimentos característicos, vimos como foi abordado o problema da quantização da condutância e que existe uma flutuação quântica em torno da média de uma medida. Vimos a teoria de Landauer-Buttiker sobre transporte de cargas e vimos como a TMA se conecta com transporte eletrônico através da matriz de espalhamento. Vimos o Efeito Hall Clássico, Efeito Hall Quântico, Efeito Hall de Spin e Efeito Hall Inverso de Spin. No capítulo 2 será apresentada uma revisão do artigo do Bardarson[13], cujo objetivo é calcular a flutuação universal da condutância de Spin-Hall e comprovar a simulação numérica feita por Ren e seus colaboradores[12] no ano anterior.

No capítulo 3 será apresentado nosso resultado para a Flutuação Universal da condutância de Spin-Hall porém em sistemas com simetria quiral, e comprovamos analiticamente o resultado obtido por Qiao e seus colaboradores[11] em uma simulação numérica estudando o Efeito

Hall de Spin em materiais de Dirac.

No capítulo 4 faremos uma revisão do artigo de Adagideli *et al.*[20] que mostra a flutuação universal da condutância de Spin no ISHE portanto utilizaremos o mesmo método do capítulo 3 para calcular a flutuação universal da condutância de spin para o ISHE em sistemas com simetria quiral.

Finalizando a dissertação, no capítulo 5 apresentaremos nossas conclusões deste trabalho e perspectivas de trabalhos futuros. Utilizando os possíveis resultados dos cálculos feitos neste trabalho e outros problemas que poderão ser abordados.



# Capítulo 2

## Efeito Hall de Spin fracionado em cavidades balísticas caóticas

### 2.1 Introdução

Neste capítulo iremos apresentar uma revisão do trabalho propostos por J. H. Bardson e seus colaboradores, o qual trata do Efeito Hall de Spin fracionado[13] em cavidades caóticas balísticas com uma forte interação SO.

Ao contrário do Efeito Hall clássico que separa cargas positivas de cargas negativas quando ocorre uma corrente eletrônica transversal, no Efeito Hall de Spin não estamos interessados no transporte eletrônico. Queremos separar cargas polarizadas com spins em sentidos opostos, para isso se faz necessário uma corrente transversal de carga em um sistema com forte interação SO, e essa corrente transversal de carga irá produzir uma corrente de spin longitudinal pura.

## 2.2 Efeito Hall de Spin numa cavidade caótica balística

O dispositivo eletrônico analisado é uma cavidade caótica balística conectado a quatro terminais como podemos ver na figura 2.1. Partimos da equação de Landauer-Buttiker, introduzindo o grau de liberdade de spin para calcular a corrente de spin que flui no  $i$ -ésimo terminal, dado por[61]

$$I_i^\alpha = \frac{e^2}{h} \sum_{j,\alpha'} \tau_{i,j}^{\alpha\alpha'} (V_i - V_j). \quad (2.1)$$

os coeficientes  $\tau_{ij}^{\alpha\alpha'}$  são chamados de coeficientes de transmissão, que são obtidos através da soma das amplitudes de probabilidades de transmissão de um elétron que está num estado de spin  $\alpha$  no guia  $i$  para passar para um estado de spin  $\alpha'$  no guia  $j$ . Os  $V_i$  e  $V_j$  são os potenciais efetivos dos guias e  $\alpha = 0, x, y, z$  é a direção em que está orientado o spin. Quando  $\alpha = 0$  estaremos falando explicitamente de corrente efetiva de carga, ou seja, não estaremos observando a corrente de spin.

O problema que iremos atacar, é um problema no qual apenas um dos reservatórios está polarizado, então  $\alpha' = 0$ . Por simplificação de notação, será omitido o  $\alpha'$  sobrescrito dos coeficientes  $\tau^{\alpha 0} = \tau^\alpha$ .

Utilizando a equação (2.1), podemos chegar as expressões abaixo, que são as expressões para a corrente de carga e spin em cada terminal

$$I_1^\alpha = \frac{e^2}{h} [\tau_{12}^\alpha (V_1 - V_2) + \tau_{13}^\alpha (V_1 - V_3) + \tau_{14}^\alpha (V_1 - V_4)], \quad (2.2)$$

$$I_2^\alpha = \frac{e^2}{h} [\tau_{21}^\alpha (V_2 - V_1) + \tau_{23}^\alpha (V_2 - V_3) + \tau_{24}^\alpha (V_2 - V_4)], \quad (2.3)$$

$$I_3^\alpha = \frac{e^2}{h} [\tau_{31}^\alpha (V_3 - V_1) + \tau_{32}^\alpha (V_3 - V_2) + \tau_{34}^\alpha (V_3 - V_4)], \quad (2.4)$$

$$I_4^\alpha = \frac{e^2}{h} [\tau_{41}^\alpha (V_4 - V_1) + \tau_{42}^\alpha (V_4 - V_2) + \tau_{43}^\alpha (V_4 - V_3)], \quad (2.5)$$

no qual os sub-índices 1, 2, 3 e 4 representam a corrente de spin em cada um dos quatros guias.

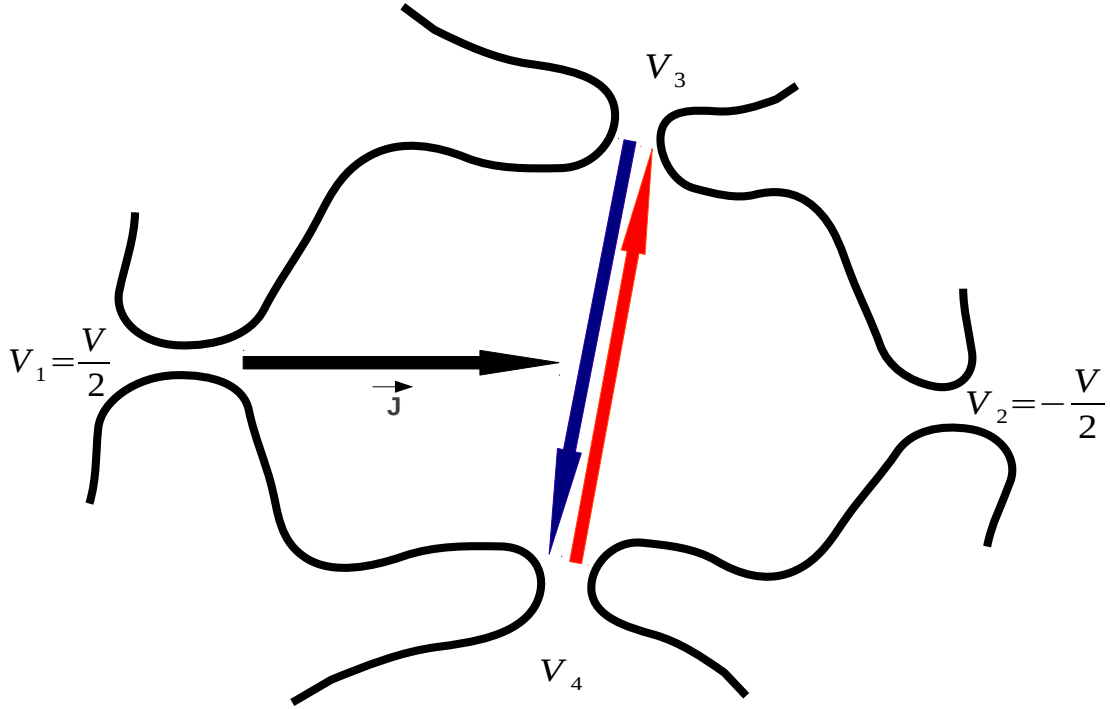


Figura 2.1: O esquema gráfico mostra uma cavidade caótica balística com 4 terminais. Neste sistema existe uma forte interação SO que proporciona uma corrente efetiva de carga transversal entre os guias 1 e 2. E portanto irá gerar uma corrente efetiva de spin longitudinal entre os guias 3 e 4.

O modelo proposto é tal que as tensões  $V_3$  e  $V_4$  são ajustadas para que não haja corrente efetiva de carga nos guias 3 e 4 respectivamente então  $I_3^0 = I_4^0 = 0$ , conseqüentemente a lei da conservação de carga nos diz que toda corrente efetiva pura de carga que sai do guia 1 é a mesma corrente efetiva pura de carga que passa para o guia 2, dessa maneira temos que,  $I_1^0 = -I_2^0 = I$ , fazendo a subtração da equação (2.2) pela equação (2.3) e substituindo  $V_1 = \frac{V}{2}$  e  $V_2 = -\frac{V}{2}$ , em cada equação, temos

$$2I = \frac{e^2}{h} \left[ \frac{V}{2} (\tau_{12}^0 + \tau_{13}^0 + \tau_{14}^0 + \tau_{21}^0 + \tau_{23}^0 + \tau_{24}^0 + \tau_{12}^0 + \tau_{21}^0) + V_3 (\tau_{23}^0 - \tau_{13}^0) + V_4 (\tau_{24}^0 - \tau_{14}^0) \right] \quad (2.6)$$

Utilizando a conservação da probabilidade de transmissão,  $2N_i\delta_{\alpha 0} = \sum_{j=1}^4 \tau_{ij}^\alpha$ , na equação (2.6), podemos finalmente obter a expressão para o resultado da corrente de carga  $I$

$$2I = \frac{e^2}{h} \left[ \frac{V}{2}(2N_1 - \tau_{11}^0 + 2N_2 - \tau_{22}^0 + \tau_{21}^0 + \tau_{12}^0) + V_3(\tau_{23}^0 - \tau_{13}^0) + V_4(\tau_{24}^0 - \tau_{14}^0) \right]. \quad (2.7)$$

Devido a corrente de carga ser nula nos guias 3 e 4, iremos utilizar as expressões (2.4) e (2.5) juntamente com a conservação da probabilidade de transmissão para obter as expressões para a corrente de spin no guia 3 ( $I_3^\alpha$ ) e no guia 4 ( $I_4^\alpha$ ), com isso obtemos o resultado da corrente de spin  $I_3^\alpha$ :

$$\begin{aligned} I_3^\alpha &= \frac{e^2}{h} \left[ \frac{V}{2}(\tau_{32}^\alpha - \tau_{31}^\alpha) + V_3(\tau_{31}^\alpha + \tau_{32}^\alpha + \tau_{34}^\alpha) + V_4(-\tau_{34}^\alpha) \right] \\ &= \frac{e^2}{h} \left[ \frac{V}{2}(\tau_{32}^\alpha - \tau_{31}^\alpha) - V_3(2N_3 - \tau_{33}^\alpha) - V_4(\tau_{34}^\alpha) \right], \end{aligned} \quad (2.8)$$

e o resultado da corrente  $I_4^\alpha$  ficará

$$\begin{aligned} I_4^\alpha &= \frac{e^2}{h} \left[ \frac{V}{2}(\tau_{42}^\alpha - \tau_{41}^\alpha) + V_3(-\tau_{43}^\alpha) + V_4(\tau_{41}^\alpha + \tau_{42}^\alpha + \tau_{43}^\alpha) \right] \\ &= \frac{e^2}{h} \left[ \frac{V}{2}(\tau_{42}^\alpha - \tau_{41}^\alpha) - V_3(\tau_{43}^\alpha) - V_4(2N_4 - \tau_{44}^\alpha) \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Iremos dividir as equações (2.7), (2.8) e (2.9) por  $V$ , afim de normalizar o potencial, transformando  $V_i$  em  $\bar{V}_i$  que é a nomenclatura que será utilizada daqui em diante.

$$\bar{V}_3 = \frac{V_3}{V} \quad \text{e} \quad \bar{V}_4 = \frac{V_4}{V} \quad (2.10)$$

Além disso utilizamos a definição de densidade de corrente adimensional tal que

$$J_i^\alpha = \frac{h}{e^2} \frac{I_i^\alpha}{V}, \quad (2.11)$$

portanto substituindo as expressões (2.7), (2.8), (2.9) e (2.10) na equação (2.11) podemos escrever as equações da densidade de corrente que flui em cada guia. A densidade de corrente de carga que flui no guia 1 e 2 é dado por

$$2J = \frac{\bar{V}}{2}(2N_1 - \tau_{11}^0 + 2N_2 - \tau_{22}^0 + \tau_{21}^0 + \tau_{12}^0) + \bar{V}_3(\tau_{23}^0 - \tau_{13}^0) + \bar{V}_4(\tau_{24}^0 - \tau_{14}^0), \quad (2.12)$$

a densidade de corrente que flui no guia 3 é dado por

$$J_3^\alpha = \frac{\bar{V}}{2}(\tau_{32}^\alpha - \tau_{31}^\alpha) - \bar{V}_3(\tau_{33}^\alpha) - \bar{V}_4(\tau_{34}^\alpha), \quad (2.13)$$

e a densidade de corrente no guia 4

$$J_4^\alpha = \frac{\bar{V}}{2}(\tau_{42}^\alpha - \tau_{41}^\alpha) - \bar{V}_3(\tau_{43}^\alpha) - \bar{V}_4(\tau_{44}^\alpha). \quad (2.14)$$

Note que podemos utilizar as equações (2.12), (2.13) e (2.14) para construir a matriz densidade de corrente  $3 \times 3$  abaixo

$$\begin{bmatrix} 2J \\ J_3^\alpha \\ J_4^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2N_1 - \tau_{11}^0 + 2N_2 - \tau_{22}^0 + \tau_{12}^0 + \tau_{21}^0) & (\tau_{23}^0 - \tau_{13}^0) & (\tau_{24}^0 - \tau_{14}^0) \\ & (\tau_{32}^\alpha - \tau_{31}^\alpha) & (2N_3 - \tau_{33}^\alpha) & (-\tau_{34}^\alpha) \\ & (\tau_{42}^\alpha - \tau_{41}^\alpha) & (-\tau_{43}^\alpha) & (2N_4 - \tau_{44}^\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ \bar{V}_3 \\ \bar{V}_4 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Nota-se que quando estivermos falando de corrente de spin  $\alpha \neq 0$ , caso estivermos falando de corrente de carga  $\alpha = 0$ . Desta forma podemos chegar as tesões  $\bar{V}_3$  e  $\bar{V}_4$  utilizando as equações (2.13) e (2.14) com a condição de ajustar a tensão 3 e 4 para que seja satisfeita a condição de que as correntes transversais efetivas de carga sejam nulas ( $J_3^0 = J_4^0 = 0$ ), satisfazendo esta condição, temos que

$$-\bar{V}_3(2N_3 - \tau_{33}^0) + \bar{V}_4(\tau_{34}^0) = \frac{1}{2}(\tau_{32}^0 - \tau_{31}^0), \quad (2.16)$$

e

$$\bar{V}_3(\tau_{43}^0) - \bar{V}_4(2N_4 - \tau_{44}^0) = \frac{1}{2}(\tau_{42}^0 - \tau_{41}^0). \quad (2.17)$$

Multiplicando a equação (2.16) por  $\frac{2N_4 - \tau_{44}^0}{\tau_{34}^0}$ , temos

$$\frac{-\bar{V}_3(2N_3 - \tau_{33}^0)(2N_4 - \tau_{44}^0)}{\tau_{34}^0} + \bar{V}_4(2N_4 - \tau_{44}^0) = \frac{1(\tau_{32}^0 - \tau_{31}^0)(2N_4 - \tau_{44}^0)}{2(\tau_{34}^0)} \quad (2.18)$$

somando-se a equação (2.17) com a equação (2.18) teremos

$$\bar{V}_3 \left( \frac{(\tau_{43}^0 \tau_{34}^0) - (2N_3 - \tau_{33}^0)(2N_4 - \tau_{44}^0)}{\tau_{34}^0} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\tau_{34}^0(\tau_{42}^0 - \tau_{41}^0) + (\tau_{32}^0 - \tau_{31}^0)(2N_4 - \tau_{44}^0)}{\tau_{34}^0} \right)$$

onde podemos isolar  $\bar{V}_3$  e por fim, obter a expressão da tensão no terminal 3:

$$\bar{V}_3 = \frac{1}{2} \frac{\tau_{34}^0(\tau_{42}^0 - \tau_{41}^0) + (\tau_{32}^0 - \tau_{31}^0)(2N_4 - \tau_{44}^0)}{(\tau_{43}^0 \tau_{34}^0) - (2N_3 - \tau_{33}^0)(2N_4 - \tau_{44}^0)}, \quad (2.19)$$

substituindo a equação (2.19) na equação (2.17), encontramos  $\bar{V}_4$  abaixo

$$\bar{V}_4 = \frac{1}{2} \frac{\tau_{43}^0(\tau_{32}^0 - \tau_{31}^0) + (\tau_{42}^0 - \tau_{41}^0)(2N_3 - \tau_{33}^0)}{(\tau_{43}^0 \tau_{34}^0) - (2N_3 - \tau_{33}^0)(2N_4 - \tau_{44}^0)}. \quad (2.20)$$

## 2.3 Cálculo dos coeficientes de transmissão para classes de ensembles de Wigner-Dyson

Neste tópico vamos calcular a média e a covariância dos coeficientes de transmissão, pois com isso é possível calcular a média das tensões transversais das equações (2.19) e (2.20) e também é possível calcular a média e a dispersão da corrente de spin da equação (2.13) e (2.14). Para isso será utilizado o método diagramático proposto por Brouwer e Beannakker[15]. A partir deste método foi possível obter o valor exato da flutuação universal da corrente de spin.

Os coeficientes de transmissão são definidos por

$$\tau_{ij}^\alpha = \mathbf{Tr}[\sigma_i \otimes tt^\dagger], \quad (2.21)$$

em que  $\sigma_i$  é a matriz de pauli,

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

representando a direção de propagação do spin e  $tt^\dagger$  representa a parte de probabilidade de transmissão do problema. Como o problema apresenta uma forte interação SO, com total quebra de SRS, então de acordo com a teoria de matrizes aleatórias o sistema é bem descrito pelo ensemble circular simplético ECS[27].

A equação (2.21) pode ser reescrita em termos das matrizes projeções  $C_i$  e  $C_j$  e da matriz de espalhamento  $S$ , porém com o grau de liberdade do spin que os canais podem apresentar.

$$\tau_{ij}^\alpha = \mathbf{Tr}[C_i^\alpha S C_j^0 S^\dagger], \quad (2.23)$$

onde temos que  $\mathbf{Tr}(C_i^\alpha C_j^0) = 2N_i \delta_{ij} \times \delta_{\alpha 0}$ . É fácil verificar essa propriedade pois, o operador projeção  $C_i^\alpha$  é dado por

$$\begin{aligned}
C_1^\alpha &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \sigma_\alpha; & C_2^\alpha &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{N_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \sigma_\alpha; \\
C_3^\alpha &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1}_{N_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \sigma_\alpha; & C_4^\alpha &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1}_{N_4} \end{bmatrix} \otimes \sigma_\alpha
\end{aligned} \tag{2.24}$$

onde  $N_i$  é o número de canais abertos nos guias, ao tirar o traço do produto entre eles, por exemplo, verificamos que  $\text{Tr}(C_1^\alpha C_3^\beta) = 2N_1 \delta_{13} \times \delta_{\alpha\beta}$ , pois

$$\text{Tr}(C_1^\alpha C_3^\beta) = \text{Tr} \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{N_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1}_{N_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \sigma_\alpha \sigma_\beta \right] = 2N_1 \delta_{13} \times \delta_{\alpha\beta} \tag{2.25}$$

portanto podemos calcular a média dos coeficientes de transmissão (2.23).

### 2.3.1 Coeficientes de transmissão para o sistemas que a SRT é preservada

Na equação (2.23) a matriz de espalhamento  $S$  é uma matriz simplética de acordo com a tabela de Cartan, tabela (1.2), ou seja, faz parte do ensemble de Wigner-Dyson que é representada pelo ensemble circular simplético (ECS) onde não há quebra da SRT e uma forte interação SO.

$$\tau_{ij}^\alpha = \text{Tr}[C_i^\alpha U C_j^0 U^\dagger]. \tag{2.26}$$

Para a média da probabilidade de transmissão é possível mostrar que

$$\langle \tau_{ij}^\alpha \rangle = 2\delta_{\alpha 0} \frac{(N_i N_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} N_i)}{(N_T - \frac{1}{2})}. \tag{2.27}$$

Onde temos que  $N_T$  é o número total de guias abertos,  $N_T = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$ .

Para calcular o segundo momento, temos:

$$\langle \tau_{ij}^\alpha \tau_{kl}^\beta \rangle = \langle \mathbf{Tr}[C_i^\alpha U C_j^0 U^T] \mathbf{Tr}[C_k^\beta U C_l^0 U^T] \rangle. \quad (2.28)$$

Calculado o segundo momento e a média das transmissões de probabilidade, podemos calcular a covariância:

$$\text{covar}[\tau_{ij}^\alpha, \tau_{kl}^\beta] = \langle \tau_{ij}^\alpha \tau_{kl}^\beta \rangle - \langle \tau_{ij}^\alpha \rangle \langle \tau_{kl}^\beta \rangle. \quad (2.29)$$

No qual podemos obter o seguinte resultado generalizado<sup>1</sup>[13]

$$\begin{aligned} \text{covar}[\tau_{ij}^\alpha, \tau_{kl}^\beta] &= \frac{4\delta_{\alpha\beta}}{N_T(2N_T - 1)^2(2N_T - 3)} [N_i N_j (N_T - 1)(2N_T - 1)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\delta_{\alpha 0}) \\ &+ \delta_{\alpha 0}(N_i N_k \delta_{ij}\delta_{kl} - 2N_i N_k N_l \delta_{ij} - 2N_i N_j N_k \delta_{kl} + 4N_i N_j N_k N_l) \\ &- N_i N_T (2N_T - 1)\delta_{ijkl} + (2N_T - 1)[N_i N_l \delta_{ijk} + N_i N_k \delta_{ijl}\delta_{\alpha 0} + N_i N_j (\delta_{ikl} \\ &+ \delta_{jkl}\delta_{\alpha 0}) - N_i N_j N_l (\delta_{ik} + \delta_{jk}\delta_{\alpha 0}) - N_i N_j N_k \delta_{\alpha 0} (\delta_{il} + \delta_{jl})] \end{aligned} \quad (2.30)$$

para este cálculo foi preciso 24 diagramas, onde cada diagrama representa uma equação com um peso que obedece a uma certa relação de recorrência, para mais detalhes sobre os cálculos sugerimos a referencia [[15],[16]].

### 2.3.2 Coeficientes de transmissão para o sistemas que a SRT é quebrada

Na equação (2.23) a matriz de espalhamento  $S$  é uma matriz unitária e de acordo com a tabela de Cartan é representada pelo ensemble circular unitário (ECU) em que há quebra da SRT devido a aplicação de um campo magnético externo.

$$\tau_{ij}^\alpha = \mathbf{Tr}[C_i^\alpha U C_j^0 U^\dagger]. \quad (2.31)$$

<sup>1</sup>Os cálculos para obter as equações (2.27) e (2.30) não serão apresentados em detalhes nesta dissertação. Sugerimos ao leitor as referências [[15],[16]] para maiores detalhes.



Para a média da probabilidade de transmissão temos

$$\langle \tau_{ij}^\alpha \rangle = 2\delta_{\alpha 0} \frac{N_i N_j}{N_T}. \quad (2.32)$$

Para calcular o segundo momento, temos:

$$\langle \tau_{ij}^\alpha \tau_{kl}^\beta \rangle = \langle \mathbf{Tr}[C_i^\alpha U C_j^0 U^\dagger] \mathbf{Tr}[C_k^\beta U C_l^0 U^\dagger] \rangle. \quad (2.33)$$

Calculado o segundo momento e a média das transmissões de probabilidade, podemos calcular a covariância:

$$\text{covar}[\tau_{ij}^\alpha, \tau_{kl}^\beta] = \langle \tau_{ij}^\alpha \tau_{kl}^\beta \rangle - \langle \tau_{ij}^\alpha \rangle \langle \tau_{kl}^\beta \rangle. \quad (2.34)$$

No qual podemos obter o seguinte resultado generalizado<sup>2</sup>

$$\text{covar}[\tau_{ij}^\alpha, \tau_{kl}^\beta] = \frac{4N_i N_j}{N_T(N_T^2 - 1)} [2\delta_{\alpha 0} \delta_{\beta 0} N_k (2N_T N_l + \delta_{jl}) + \delta_{\alpha\beta} \delta_{ik} (N_T \delta_{jl} + 2N_l)] \quad (2.35)$$

para este cálculo foi preciso apenas 4 diagramas, onde cada diagrama representa uma equação com um peso que obedece a uma certa relação de recorrência, para mais detalhes sobre os diagramas assim como os pesos e as relações de recorrência ver [[15],[16]].

## 2.4 Cálculo da média da Corrente de Spin e Voltagem nos terminais Transversais

Neste momento será utilizada as equações da secção anterior afim de calcular a voltagem transversal nos guias 3 e 4, a partir das equações (2.19) e (2.20), tomando a média sobre essas equações podemos obter

$$\langle \bar{V}_3 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\text{covar}[\tau_{34}^0 \tau_{42}^0] - \text{covar}[\tau_{34}^0 \tau_{41}^0] + 4N_4 \langle \tau_{32}^0 \rangle - \text{covar}[\tau_{32}^0 \tau_{44}^0] - 4N_4 \langle \tau_{31}^0 \rangle + \text{covar}[\tau_{31}^0 \tau_{44}^0]}{\text{covar}[\tau_{43}^0 \tau_{34}^0] - 16N_3 N_4 + 4N_3 \langle \tau_{44}^0 \rangle + 4N_4 \langle \tau_{33}^0 \rangle - \text{covar}[\tau_{33}^0 \tau_{44}^0]}, \quad (2.36)$$

---

<sup>2</sup>Os cálculos para obter as equações (2.32) e (2.35) não serão apresentados em detalhes nesta dissertação. Sugerimos ao leitor as referências [[15],[16]] para maiores detalhes.

e

$$\langle \bar{V}_4 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\text{covar}[\tau_{43}^0 \tau_{32}^0] - \text{covar}[\tau_{43}^0 \tau_{31}^0] + 4N_4 \langle \tau_{42}^0 \rangle - \text{covar}[\tau_{42}^0 \tau_{33}^0] - 4N_4 \langle \tau_{41}^0 \rangle + \text{covar}[\tau_{41}^0 \tau_{33}^0]}{\text{covar}[\tau_{43}^0 \tau_{34}^0] - 16N_3 N_4 + 4N_3 \langle \tau_{44}^0 \rangle + 4N_4 \langle \tau_{33}^0 \rangle - \text{covar}[\tau_{33}^0 \tau_{44}^0]}.$$
(2.37)

Para o sistema com SRT iremos substituir as equações (2.27) e (2.30) nas equações (2.36) e (2.37), afim de obter o resultado exato para a média das tensões transversais nos guias 3 e 4 respectivamente

$$\langle \bar{V}_3 \rangle = \langle \bar{V}_4 \rangle = \frac{1}{2} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$$
(2.38)

Para a sistema onde a SRT é quebrada devido á um campo magnético externo iremos substituir as equações (2.32),(2.35) nas equações (2.36) e (2.37), afim de obter o resultado exato para a média das tensões transversais

$$\langle \bar{V}_3 \rangle = \langle \bar{V}_4 \rangle = \frac{1}{2} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$$
(2.39)

A primeira conclusão que tiramos é que para a classe de Wigner Dyson, a média da tensão é a mesma, independente da SRT do problema, a aplicação de um campo magnético externo não interfere na tensão transversal. É importante notar que quando os guias 1 e 2 são simétricos, ou seja, têm o mesmo números de canais abertos ( $N_1 = N_2$ ),  $\langle \bar{V}_3 \rangle = \langle \bar{V}_4 \rangle = 0$ .

Utilizando a equação (2.15), temos que a média sobre cada corrente de spin  $J_i^\alpha$  é escrita como:

$$\langle J_i^\alpha \rangle = \frac{1}{2} (\langle \tau_{i2}^\alpha \rangle - \langle \tau_{i1}^\alpha \rangle) - \sum_{j=3,4} (\langle \tau_{ij}^\alpha \rangle \langle \bar{V}_j \rangle),$$
(2.40)

portanto a média da corrente de spin para o guia 3 e 4 respectivamente é:

$$\langle J_3^\alpha \rangle = \frac{1}{2} (\langle \tau_{32}^\alpha \rangle - \langle \tau_{31}^\alpha \rangle) - [(\langle \tau_{33}^\alpha \rangle \langle \bar{V}_3 \rangle) + (\langle \tau_{34}^\alpha \rangle \langle \bar{V}_4 \rangle)],$$
(2.41)

e

$$\langle J_4^\alpha \rangle = \frac{1}{2} (\langle \tau_{42}^\alpha \rangle - \langle \tau_{41}^\alpha \rangle) - [(\langle \tau_{43}^\alpha \rangle \langle \bar{V}_3 \rangle) + (\langle \tau_{44}^\alpha \rangle \langle \bar{V}_4 \rangle)].$$
(2.42)

Utilizando as equações (2.27), (2.32) e (2.38) calculamos a média da corrente de spin, substituindo essas equações nas equações (2.41) e (2.42), então

$$\langle J_i^\alpha \rangle = 0.$$
(2.43)

ou seja a média da corrente de spin nos guias 3 e 4 são nulas, isso vale tanto para sistemas que preservam a SRT quanto para o sistema em que a simetria é quebrada. Porém mesmo que a média seja nula, sempre irá existir flutuações quânticas em torno da média, dessa forma queremos saber o quanto a corrente de spin pode flutuar em torno do zero, para isso precisamos obter a sua dispersão.

Para obter a dispersão da corrente de spin é necessário obter o segundo momento da corrente da corrente de spin, o segundo momento da corrente é definido

$$\langle J_i^\alpha J_k^\beta \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \left[ (\tau_{i2}^\alpha - \tau_{i1}^\alpha) - \sum_{j=3,4} (\tau_{ij}^\alpha \bar{V}_j) \right] \frac{1}{2} \left[ (\tau_{k2}^\beta - \tau_{k1}^\beta) - \sum_{l=3,4} (\tau_{kl}^\beta \bar{V}_l) \right] \right\rangle. \quad (2.44)$$

No qual podemos encontrar:

$$\begin{aligned} \langle J_i^\alpha J_k^\beta \rangle &= \left\langle \frac{1}{4} (\tau_{i2}^\alpha - \tau_{i1}^\alpha) (\tau_{k2}^\beta - \tau_{k1}^\beta) - \frac{1}{2} \left[ (\tau_{i2}^\alpha - \tau_{i1}^\alpha) \sum_{l=3,4} (\tau_{kl}^\beta \bar{V}_l) \right] - \frac{1}{2} \left[ (\tau_{k2}^\beta - \tau_{k1}^\beta) \sum_{j=3,4} (\tau_{ij}^\alpha \bar{V}_j) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j,l=3,4} (\tau_{ij}^\alpha \bar{V}_j) (\tau_{kl}^\beta \bar{V}_l) \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Da equação (2.43), temos que a média da corrente é zero, portanto podemos utilizar a equação (2.45) para calcular a covariância da corrente

$$\begin{aligned} \text{covar}[J_i^\alpha, J_k^\beta] &= \frac{1}{4} (\langle \tau_{i2}^\alpha \tau_{k2}^\beta \rangle - \langle \tau_{i2}^\alpha \tau_{k1}^\beta \rangle - \langle \tau_{i1}^\alpha \tau_{k2}^\beta \rangle + \langle \tau_{i1}^\alpha \tau_{k1}^\beta \rangle) - \langle \tau_{i2}^\alpha \tau_{k3}^\beta \rangle \langle \bar{V}_3 \rangle - \langle \tau_{i2}^\alpha \tau_{k4}^\beta \rangle \langle \bar{V}_4 \rangle + \langle \tau_{i1}^\alpha \tau_{k3}^\beta \rangle \langle \bar{V}_3 \rangle \\ &\quad + \langle \tau_{i1}^\alpha \tau_{k4}^\beta \rangle \langle \bar{V}_4 \rangle + \langle \tau_{i3}^\alpha \tau_{k3}^\beta \rangle \langle \bar{V}_3^2 \rangle + \langle \tau_{i4}^\alpha \tau_{k4}^\beta \rangle \langle \bar{V}_4^2 \rangle + 2 \langle \tau_{i3}^\alpha \tau_{k4}^\beta \rangle \langle \bar{V}_3 \rangle \langle \bar{V}_4 \rangle. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Quando  $\alpha = \beta$  e  $i = k$ , temos que

$$\begin{aligned} \text{var}[J_i^\alpha] &= \frac{1}{4} \sum_{j=1,2} \text{var}[\tau_{ij}^\alpha] - \frac{1}{2} \sum_{j=1,2} \text{covar}[\tau_{i1}^\alpha, \tau_{i2}^\alpha] \\ &\quad + \sum_{j=3,4} (\text{var}[\tau_{ij}^\alpha] \langle \bar{V}_j^2 \rangle + \text{covar}[(\tau_{i1}^\alpha - \tau_{i2}^\alpha), \tau_{ij}^\alpha] \langle \bar{V}_j \rangle) + 2 \text{covar}[\tau_{i3}^\alpha, \tau_{i4}^\alpha] \langle \bar{V}_3 \rangle \langle \bar{V}_4 \rangle \end{aligned} \quad (2.47)$$

ou seja, a covariância se torna a variância quando os índices e sub-índices são iguais.

## 2.5 Cálculo da variância da Corrente de Spin

Nesta seção iremos mostrar o principal resultado obtido no artigo do Bardarson[13], onde foi mostrado que a dispersão da Corrente de Spin é da ordem de  $\text{rms}[J_j^\alpha] \approx 0.18$  e que a flutuação universal da condutância de spin-Hall (UFC) é  $\text{rms}[G_{sH}^\alpha] \approx 0.18 \times \frac{e}{4\pi}$  no regime balístico para sistemas em que a SRT é preservada. Assim como também iremos mostrar que este resultado não se altera para sistemas em que a SRT é quebrada.

### 2.5.1 Variância da Corrente de Spin para o sistema em que a SRT é preservada

Para se calcular a variância da corrente de spin devemos substituir as equações (2.27) referente as médias dos coeficientes de transmissão, assim como as equações (2.30) referente a covariância desses coeficientes, assim como utilizar a equações (2.38) que se refere as tensões transversais. Substituindo todos esses resultados na equação (2.47), podemos encontrar a covariância da corrente de spin nos guias transversais.

A corrente de spin no guia 3,

$$\text{var}[J_3^\alpha] = \frac{4(N_T - 1)N_1N_2N_3}{(N_T)(2N_T - 1)(2N_T - 3)(N_1 + N_2)}, \quad (2.48)$$

enquanto a corrente de spin no guia 4,

$$\text{var}[J_4^\alpha] = \frac{4(N_T - 1)N_1N_2N_4}{(N_T)(2N_T - 1)(2N_T - 3)(N_1 + N_2)}. \quad (2.49)$$

É importante lembrar que no modelo proposto não existe corrente de spin nos guias longitudinais, portanto a variância da corrente de spin gerado em um guia  $j$  transversal pode ser generalizada como:

$$\text{var}[J_j^\alpha] = \frac{4(N_T - 1)N_1N_2N_j}{(N_T)(2N_T - 1)(2N_T - 3)(N_1 + N_2)}. \quad (2.50)$$

para  $j = 3, 4$  e  $\alpha = x, y, z$ .

Apartir da equação (2.50), podemos fazer análises de alguns casos relevantes. O primeiro caso a ser analisado é o caso simétrico que ocorre quando todos os guias tem o mesmo número de canais abertos, ou seja  $N_i = N$ , isso quer dizer que substituindo  $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = N$  e  $N_T = 4N$  na equação (2.50) e obtemos

$$\text{var}[J_j^\alpha] = \frac{1}{2} \frac{(4N-1)N}{(8N-1)(8N-3)}, \quad (2.51)$$

que é a equação analítica exata para o caso simétrico.

Iremos observar dois regimes fundamentais do problema, o regime semi-clássico (altas energias) e o regime quântico extremo (baixas energias). Para o regime clássico, todos os guias tem muitos canais abertos, ou seja,  $N \gg 1$ . Para o regime quântico, há apenas 1 canal aberto em cada guia.

- i) O regime quântico extremo, acontece quando  $N = 1$ , substituindo na equação (2.50) temos que o desvio padrão é

$$\text{rms}[J_j^\alpha] = \sqrt{\text{var}[J_j^\alpha]} = \frac{\sqrt{210}}{70} \approx 0.21 \quad (2.52)$$

- ii) O regime semi-clássico, acontece quando  $N \gg 1$ , fazendo esta análise na equação (2.50) temos que o desvio padrão é

$$\text{rms}[J_j^\alpha] = \sqrt{\text{var}[J_j^\alpha]} = \frac{\sqrt{2}}{8} \approx 0.18 \quad (2.53)$$

O desvio padrão da corrente de spin inicia em aproximadamente 0.21 no regime quântico extremo e tende ao valor aproximado de 0.18 como podemos ver na figura (2.2), tipicamente este valor é da ordem de  $\frac{e^2 V}{h}$  no limite em que o número de canais abertos vão aumentando.

É possível apartir da dispersão da corrente de spin, conseguimos chegar a expressão para a UFC para isso iremos voltar da corrente adimensional para a corrente de spin,

$$I^\alpha = \frac{\hbar e^2 V}{2 h} J^\alpha = \frac{e}{4\pi} eV J^\alpha = \frac{e}{4\pi} \times \mu J^\alpha \quad (2.54)$$

onde é introduzido a acumulação de spin  $\mu$ , por fim chegamos a relação entre a condutância de spin, com a corrente de spin e o fator de acumulação de spin

$$G^\alpha = \frac{I^\alpha}{\mu^\alpha} = J^\alpha \times \frac{e}{4\pi}. \quad (2.55)$$

Um dos fatores mais importantes em sistemas mesoscópicos balísticos e difusivos é a (UFC) que ocorre apenas no regime semi-clássico. A partir da equação (2.53) e fazendo a transformação da corrente de spin para a condutância de spin das equações (2.54) e (2.55) podemos obter que a amplitude da UFC é

$$\text{rms}[G_{sH}^f] \approx 0.18 \times \frac{e}{4\pi} \quad (2.56)$$

o índice sobrescrito  $f$  se refere que neste sistema a condutância poderá ter qualquer valor não inteiro, por isso dizemos que esta UFC é a UFC para o regime em que a condutância é fracionada. Este é o principal resultado obtido por Bardarson[13], pois seu cálculo analítico concordou com os resultados obtidos por Ren[12], no qual conseguiu através de uma simulação numérica mostrar que sistemas que apresentam uma condutância fracionada tem uma amplitude de UFC é  $\approx 0.18 \times \frac{e}{4\pi}$ , e este resultado nos motivou bastante, pois o mesmo grupo em 2008[11] fizeram uma simulação numérica porém em materiais de Dirac, e até o presente momento não havia nenhuma explicação analítica para o resultado da simulação.

A flutuação universal da corrente não acontece para casos apenas simétricos, existe casos anti-simétricos no qual ainda irá existir uma flutuação universal, porém a tendência é que para cada tipo de caso irá existir flutuação da corrente em outros valores, porém sempre preservando as características do sistema.

Nestes casos abaixo será discutido alguns casos de sistemas não simétricos, para tal, se faz necessário substituição direta na equação (2.50)

- i) Caso no qual os guias longitudinais são fixos  $N_1 = N_2 = N$  e os transversais são dobrados  $N_3 = N_4 = 2N$ . Neste caso os guias transversais são anti-simétrico com os guias longitudinais, porém os guias transversais e longitudinais são simétricos entre si.

$$\text{var}[J_j^\alpha] = \frac{2N(6N-1)}{9(12N-1)(4N-1)}, \quad (2.57)$$

Onde temos que a dispersão da corrente de spin acontece

$$\text{rms}[J_j^\alpha] \approx 0.17. \quad (2.58)$$

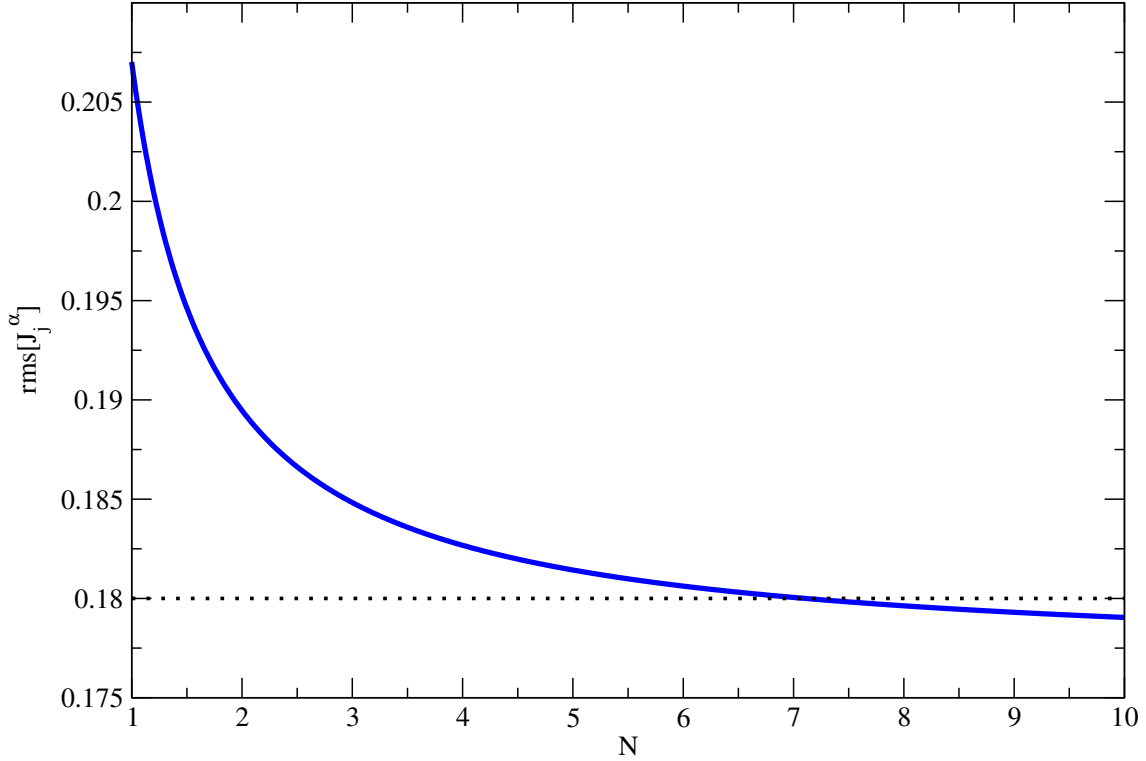


Figura 2.2: Nesta figura podemos ver que o desvio padrão da corrente de spin para o caso simétrico  $N_i = N$  começa de aproximadamente 0.21 para  $N = 1$ , no qual é o regime quântico extremo e tende a aproximadamente 0.18 no regime semi-clássico  $N \gg 1$ .

neste sistema, o caso oposto, em que  $N_1 = N_2 = 2N$  e  $N_3 = N_4 = N$ , se comporta de igual maneira, não existe diferença entre as duas flutuações.

ii) Caso em que os guias 1 e 3 são fixos  $N_1 = N_3 = N$  e 2 e 4 são dobrados  $N_2 = N_4 = 2N$ .

$$\text{var}[J_j^\alpha] = \frac{8N(6N-1)}{27(12N-1)(4N-1)}, \quad (2.59)$$

temos que a dispersão da corrente de spin acontece

$$\text{rms}[J_j^\alpha] \approx 0.19. \quad (2.60)$$

iii) Caso em que os guias 1 e 3 são dobrados  $N_1 = N_3 = 2N$  e 2 e 4 são fixos  $N_2 = N_4 = N$ , que é o caso oposto ao item (ii).

$$\text{var}[J_j^\alpha] = \frac{4N(6N-1)}{27(12N-1)(4N-1)} \quad (2.61)$$

temos que a dispersão da corrente de spin acontece

$$\text{rms}[J_j^\alpha] \approx 0.14. \quad (2.62)$$

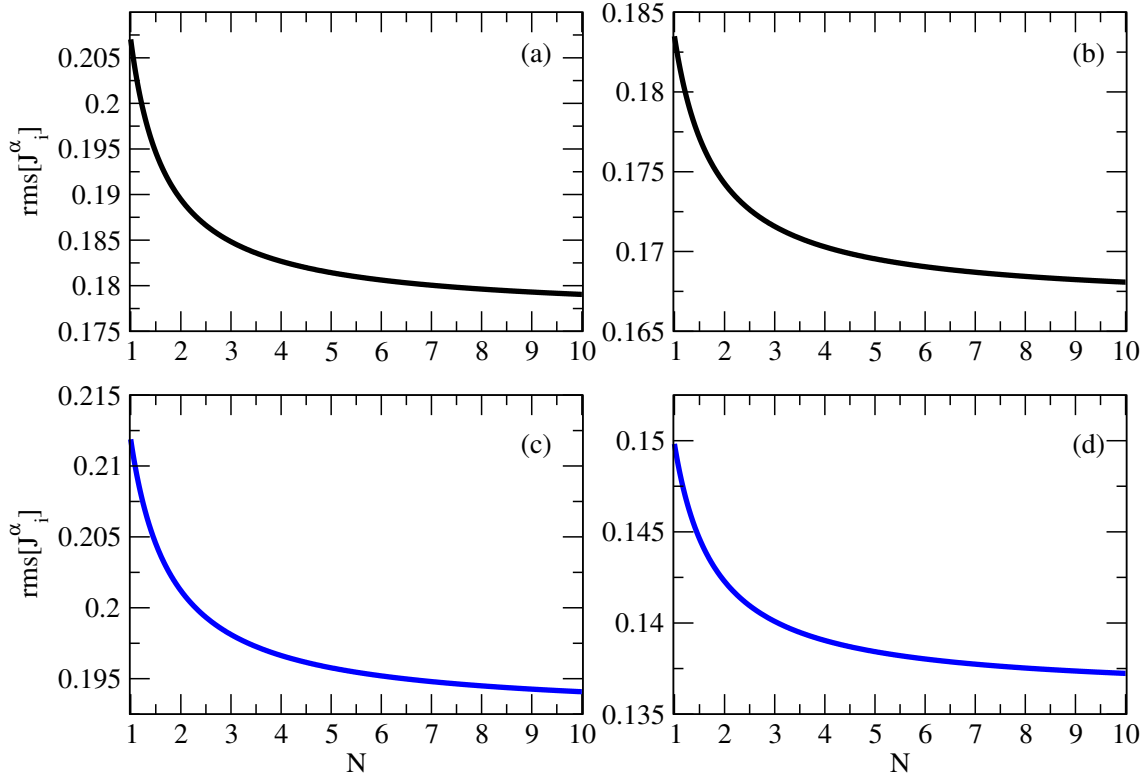


Figura 2.3: Os gráficos que apresentam as diversas flutuações universais para tipos de simetrias diferentes (a) caso totalmente simétrico (2.52) e (2.53), (b) caso referente ao item  $i$  que tem a equação (2.57), (c) caso referente ao item  $ii$  que tem a equação (2.59), (d) caso referente ao item  $iii$  que tem a equação (2.61).

esses 3 casos, juntamente com o caso totalmente simétrico está resumido na figura 2.3.

## 2.5.2 Variância da Corrente de Spin para o sistema em que a SRT é quebrada

Usando as médias e variância dos coeficientes de transmissão para o sistema em que SRT é quebrada (2.32) e (2.35) e as médias das tensões transversais  $\langle \bar{V}_3 \rangle$  e  $\langle \bar{V}_4 \rangle$  (2.39), juntamente



com a fórmula da variância da corrente de spin podemos calcular a variância da corrente de spin nos guias transversais (2.47), para o guia 3 temos

$$\text{var}[J_3^\alpha] = \frac{4N_1N_2N_3}{(2N_T + 1)(2N_T - 1)(N_1 + N_2)}, \quad (2.63)$$

enquanto a variância da corrente de spin no guia 4,

$$\text{var}[J_4^\alpha] = \frac{4N_1N_2N_4}{(2N_T + 1)(2N_T - 1)(N_1 + N_2)}, \quad (2.64)$$

portanto a variância da corrente de spin gerado em um guia  $j$  transversal pode ser generalizada como:

$$\text{var}[J_j^\alpha] = \frac{4N_1N_2N_j}{(2N_T + 1)(2N_T - 1)(N_1 + N_2)}. \quad (2.65)$$

Sobre o sistema podemos fazer uma análise de duas simetrias muito importante, quando todos os guias tem o mesmo número de canais abertos este regime é chamado de regime simétrico, isso quer dizer que  $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = N$ , portanto podemos substituir  $N_i = N$  e  $N_T = 4N$  na equação (2.65), impondo essas condições podemos encontrar a equação exata para a variância da corrente no regime simétrico

$$\text{var}[J_j^\alpha] = \frac{1}{2} \frac{4N^2}{(8N - 1)(8N + 1)}. \quad (2.66)$$

Sobre o sistema podemos analisar dois regimes:

- i) O regime quântico extremos, acontece quando  $N = 1$ , ou seja, cada guia tem apenas 1 canal aberto

$$\text{rms}[J_j^\alpha] \approx 0.18. \quad (2.67)$$

- ii) O regime semi-clássico, acontece no limite em que  $N \gg 1$ , ou seja, o número de canais é discretamente aumentado igualmente em cada guia

$$\text{rms}[J_j^\alpha] \approx 0.18. \quad (2.68)$$

Notemos que quando a SRT é quebrada, a amplitude da UFC praticamente não é alterada em seu regime semi-clássico.

Nestes casos abaixo será discutido alguns casos de sistemas não simétricos, para tal, se faz necessário substituição direta na equação (2.65)

- i) Caso no qual os guias longitudinais são fixos  $N_1 = N_2 = N$  e os transversais são dobrados  $N_3 = N_4 = 2N$ . Neste caso os guias transversais são anti-simétrico com os guias longitudinais, porém os guias transversais e longitudinais são simétricos entre si.

$$\text{var}[J_j^\alpha] = \frac{4N^2}{(12N-1)(12N+1)}, \quad (2.69)$$

Onde temos que a flutuação universal acontece

$$\text{rms}[J_j^\alpha] \approx 0.17. \quad (2.70)$$

neste sistema, o caso oposto, em que  $N_1 = N_2 = 2N$  e  $N_3 = N_4 = N$ , se comporta de igual maneira, não existe diferença entre as duas flutuações.

- ii) Caso em que os guias 1 e 3 são fixos  $N_1 = N_3 = N$  e 2 e 4 são dobrados  $N_2 = N_4 = 2N$ .

$$\text{var}[J_j^\alpha] = \frac{16}{3} \frac{N^2}{(12N-1)(12N+1)}, \quad (2.71)$$

temos que a flutuação universal acontece

$$\text{rms}[J_j^\alpha] \approx 0.19. \quad (2.72)$$

- iii) Caso em que os guias 1 e 3 são dobrados  $N_1 = N_3 = 2N$  e 2 e 4 são fixos  $N_2 = N_4 = N$ , que é o caso oposto ao item (ii).

$$\text{var}[J_j^\alpha] = \frac{8}{3} \frac{N^2}{(12N-1)(12N+1)} \quad (2.73)$$

temos que a flutuação universal acontece

$$\text{rms}[J_j^\alpha] \approx 0.14. \quad (2.74)$$

Neste capítulo fizemos uma revisão geral do Efeito Hall de Spin Fracionado, este efeito é chamado fracionado pois a condutância de spin-Hall é quantizada em números não inteiros.

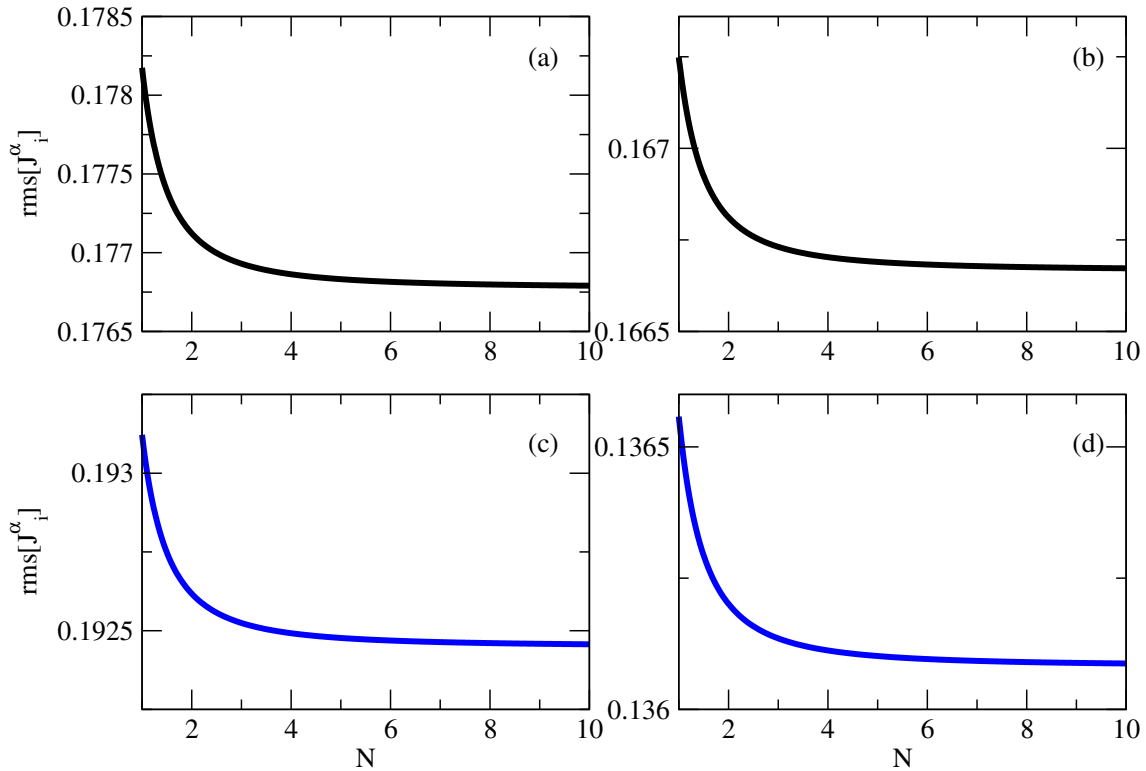


Figura 2.4: Os gráficos que apresentam as diversas flutuações universais para tipos de simetrias diferentes.

Neste capítulo reproduzimos o artigo do Bardarson[13] e para isso foi utilizado os Ensembles de Wigner Dyson que em teoria de matrizes aleatória é aplicado a sistemas metálicos, e utilizamos como ferramenta matemática a técnica diagramática. Em nosso próximo capítulo iremos tratar do Efeito Hall de Spin Quantizado que ocorre em sistemas quirais. Os materiais que são representado pela equação de Dirac na mecânica quântica são chamados quirais, os mais importantes são o grafeno e isolantes topológicos, para isso nós iremos utilizar os ensembles quirais e como ferramenta matemática uma extensão do método diagramático afim de calcular a amplitude da UFQC (Flutuação Universal da Condutância Quantizada).

# Capítulo 3

## Efeito Hall Quântico de Spin Quantizado num Bilhar Caótico de Dirac

### 3.1 Introdução

Neste capítulo iremos analisar o Efeito Hall de Spin Quantizado (SHE), utilizando a teoria de espalhamento, ou seja, analisando novas simetrias do sistema. Nossa maior motivação vem do trabalho de Zhenhua Qiao e os seus colaboradores [11], no qual fizeram uma simulação numérica e estudaram o problema do Efeito Hall Quântico de Spin no Grafeno (QSHE) e mostraram que este apresenta uma flutuação universal da condutância (UQSFC) que é da ordem de rms  $[G_{QH}^q] \approx 0.285 \pm 0.005 \times e/4\pi$ . Em nosso trabalho foi utilizado a teoria de matrizes aleatória assim como a expansão do Método Diagramático proposto por Barros[16] e mostramos que o valor exato para rms  $[G_{QH}^q] \approx 0.283 \times e/4\pi$ , concordando com os resultados numéricos obtidos por Zhenhua Qiao [11].

## 3.2 Efeito Hall Quântico de Spin em uma cavidade caótica de Dirac

O dispositivo eletrônico analisado é uma cavidade caótica de Dirac balística, feita de um material de Dirac, conectado idealmente a quatro terminais, como podemos ver na figura 3.1.

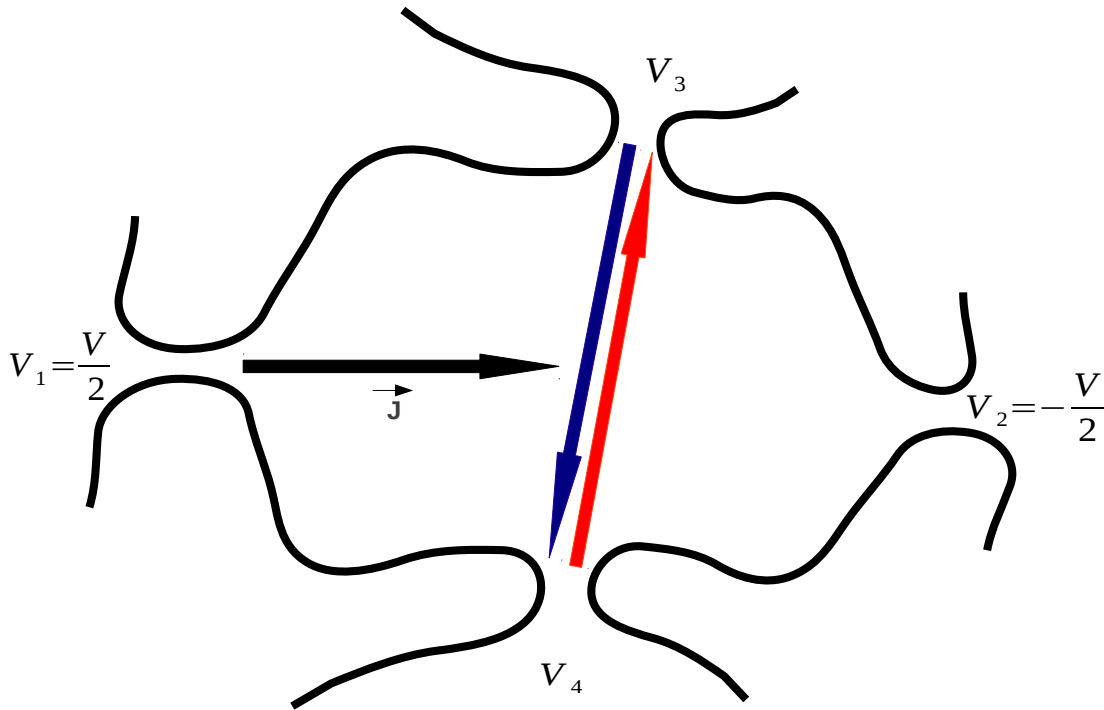


Figura 3.1: O esquema gráfico mostra uma cavidade caótica balística com 4 terminais. Neste sistema existe uma forte interação SO que proporciona uma corrente efetiva de carga transversal entre os guias 1 e 2. E portanto irá gerar uma corrente efetiva de spin longitudinal entre os guias 3 e 4.

Novamente partiremos da equação de Landauer-Buttiker introduzindo o grau de liberdade de spin para calcular a corrente de spin que flui em cada terminal, no  $i$ -ésimo terminal a

equação pode ser escrita como

$$I_i^\alpha = \frac{e^2}{h} \sum_{j,\alpha'} \tau_{i,j}^{\alpha\alpha'} (V_i - V_j), \quad (3.1)$$

então é importante notar que os cálculos realizados neste capítulo é o mesmo do capítulo anterior, porém apenas com uma única diferença neste caso a conservação da probabilidade de transmissão, é dada por  $2 \times 2N_i \delta_{\alpha 0} = \sum_{j=1}^4 \tau_{ij}^\alpha$ . O fator de 2 multiplicando a conservação da probabilidade de transmissão vem do fato que estamos neste momento trabalhando num material de Dirac e esses materiais tem simetrias que podem ser chamadas de simetria de espelho ou simetria de subrede ou simetria quiral, e devido a esta simetria o espaço do problema é dobrado  $N \rightarrow 2N$ . Esta simetria de quiralidade é encontrada em materiais de Dirac, como os isolantes topológicos que tem redes quadradas e também o grafeno que por sua vez tem rede hexagonal(igual a um favo de mel). Substituindo a conservação de probabilidade, temos que a matriz densidade de corrente da equação (2.15) se transforma em

$$\begin{bmatrix} 2J \\ J_3^\alpha \\ J_4^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4N_1 - \tau_{11}^0 + 4N_2 - \tau_{22}^0 + \tau_{12}^0 + \tau_{21}^0) & (\tau_{23}^0 - \tau_{13}^0) & (\tau_{24}^0 - \tau_{14}^0) \\ & (\tau_{32}^\alpha - \tau_{31}^\alpha) & (4N_3 - \tau_{33}^\alpha) & (-\tau_{34}^\alpha) \\ & (\tau_{42}^\alpha - \tau_{41}^\alpha) & (-\tau_{43}^\alpha) & (4N_4 - \tau_{44}^\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ \bar{V}_3 \\ \bar{V}_4 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Nota-se que quando estivermos falando de corrente de spin  $\alpha \neq 0$ , caso estivermos falando de corrente de carga  $\alpha = 0$ , dessa forma podemos chegar as tensões  $\bar{V}_3$  e  $\bar{V}_4$  do mesmo modo em que fizemos no capítulo anterior. A tensão nos terminais transversais é

$$\bar{V}_j = \frac{1}{2} \frac{\tau_{ji}^0(\tau_{i2}^0 - \tau_{i1}^0) + (\tau_{j2}^0 - \tau_{j1}^0)(4N_i - \tau_{ii}^0)}{(\tau_{43}^0 \tau_{34}^0) - (4N_3 - \tau_{33}^0)(4N_4 - \tau_{44}^0)}, \quad (3.3)$$

onde  $j = 3, 4$ . Note que a equação (3.2) é a mesma da (2.15), modificando apenas o espaço  $N \rightarrow 2N$  devido a simetria quiral.

### 3.3 Cálculo dos coeficientes de transmissão para classe Quiral

Neste tópico vamos calcular a média e a covariância dos coeficientes de transmissão, pois com isso é possível calcular a média das tensões transversais das equações (3.3) e também é possível calcular a média e a dispersão da corrente de spin da equação (3.2). Para isso será utilizado a expansão do método diagramático proposto Barros[16]. A partir deste método foi possível obter o valor exato da flutuação universal da corrente de spin.

Os coeficientes de transmissão são definidos por

$$\tau_{ij}^\alpha = \mathbf{Tr}[\sigma_i \otimes tt^\dagger], \quad (3.4)$$

em que  $\sigma_i$  é a matriz de Pauli,

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

representa a direção de propagação do spin e  $tt^\dagger$  representa a parte de probabilidade de transmissão do problema. Como o problema apresenta uma forte interação SO, com total quebra de SRS, e apresenta uma simetria de subrede então podemos ver na tabela (2.1) que de acordo com a teoria de matrizes aleatórias o sistema é bem descrito pelo ensemble circular simplético quiral (chECS) ou ensemble circular unitário quiral (chECU)[27].

A equação (3.4) é reescrita em termos das matrizes projeções  $C_i$  e  $C_j$  e da matriz de espalhamento  $S$ , porém com o grau de liberdade do spin que os canais podem apresentar

$$\tau_{ij}^\alpha = \mathbf{Tr}[C_i^\alpha S C_j^0 S^\dagger], \quad (3.6)$$

onde temos que  $\mathbf{Tr}(C_i^\alpha C_j^0) = 2 \times 2N_i \delta_{ij} \times \delta_{\alpha 0}$ . Onde novamente o fator de 2 aparece devido a simetria quiral. Podemos verificar essa propriedade pois, o operador projeção  $C_i^\alpha$  é dado por

$$\begin{aligned}
C_1^\alpha &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{2N_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \sigma_\alpha; & C_2^\alpha &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{2N_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \sigma_\alpha; \\
C_3^\alpha &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1}_{2N_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \sigma_\alpha; & C_4^\alpha &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1}_{2N_4} \end{bmatrix} \otimes \sigma_\alpha
\end{aligned} \tag{3.7}$$

ao tirar o traço do produto entre eles, por exemplo, verificamos que  $\text{Tr} \left( C_1^\alpha C_3^\beta \right) = 2 \times 2N_1 \delta_{13} \times \delta_{\alpha\beta}$ , pois

$$\text{Tr} \left( C_1^\alpha C_3^\beta \right) = \text{Tr} \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2N_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1}_{2N_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \sigma_\alpha \sigma_\beta \right] = 2 \times 2N_1 \delta_{13} \times \delta_{\alpha\beta} \tag{3.8}$$

portanto podemos calcular a média dos coeficientes de transmissão (3.6) calculando os traços das matrizes.

### 3.3.1 Coeficientes de transmissão para sistemas em que a SRT é preservada

A matriz de espalhamento na equação (3.6), satisfaz a seguinte relação de anti-comutação devido a simetria quiral

$$S = \Sigma_z S^\dagger \Sigma_z, \quad \Sigma_z \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N_T} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{N_T} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

onde temos que  $N_T$  é o número total de canais abertos no problema,  $N_T = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$ .

A matriz de espalhamento deve ser decomposta em termos de matrizes simpléticas de tamanho  $2N_T \times 2N_T$ , onde  $S = \Sigma_z U^T \Sigma_z U$ , onde  $U^T$  são matrizes ortogonais com as entradas



sendo números reais para satisfazer a relação de anticomutação (3.9). Portanto (3.6) será reescrita como

$$\tau_{ij}^\alpha = \mathbf{Tr}[\Sigma_z U C_i^\alpha U^T \Sigma_z U C_j U^T]. \quad (3.10)$$

de onde para calcular a média, variância e covariância dos coeficientes de transmissão foi utilizado o método proposto por Barros[16]. Tomando a média sobre a equação (3.10), chegamos a seguinte expressão para a média da probabilidade de transmissão<sup>1</sup>

$$\langle \tau_{ij}^\alpha \rangle = -\delta_{\alpha 0} \frac{N_T(16N_i N_j - 4\delta_{ij} N_i) + 4\delta_{ij} N_i}{(2N_T - 1)(N_T + 1)}. \quad (3.11)$$

Então podemos extrair que:

- i) Para um sistema simétrico onde todos os guias apresentam o mesmo número de canais abertos, temos que:

$$\langle \tau_{ii}^\alpha \rangle = -\delta_{\alpha 0} \frac{N_T(16N_i^2 - 4N_i) + 4N_i}{(2N_T - 1)(N_T + 1)}. \quad (3.12)$$

- ii) Para um sistema assimétrico onde os guias tem número de canais abertos diferente, temos que:

$$\langle \tau_{ij}^\alpha \rangle = \delta_{\alpha 0} \frac{16N_T N_i N_j}{(2N_T - 1)(N_T + 1)}. \quad (3.13)$$

Para calcular o segundo momento, temos:

$$\langle \tau_{ij}^\alpha \tau_{kl}^\beta \rangle = \langle \mathbf{Tr}[\Sigma_z U C_i^\alpha U^T \Sigma_z U C_j U^T] \mathbf{Tr}[\Sigma_z U C_k^\beta U^T \Sigma_z U C_l U^T] \rangle. \quad (3.14)$$

Calculado o segundo momento e a média das transmissões de probabilidade, podemos calcular a covariância:

$$\text{covar}[\tau_{ij}^\alpha, \tau_{kl}^\beta] = \langle \tau_{ij}^\alpha \tau_{kl}^\beta \rangle - \langle \tau_{ij}^\alpha \rangle \langle \tau_{kl}^\beta \rangle. \quad (3.15)$$

onde para se calcular a covariância dos coeficientes de transmissão se fez necessário áduos 11.025 diagramas, porém devido a algumas relações, 6.300 são não nulos, dessa forma aqui ficamos impossibilitado de generalizar a equação da covariância<sup>2</sup>. Porém para o caso específico em que  $\alpha = \beta$  e  $i = k$  mostramos abaixo os resultados necessário e suficientemente

<sup>1</sup>Detalhes do cálculo pode ser visto no Apêndice **A** desta dissertação.

<sup>2</sup>Alguns dos diagramas podem ser visto no Apêndice **A**. O arquivo do programa matemático utilizado para manipular as equações tem na ordem de centenas de paginas

importante para o cálculo da variância da corrente de spin, média sobre os guias transversais e posteriormente a UQSFC para o sistema Quiral

$$1) \quad \text{covar}[\tau_{ii}^\alpha, \tau_{ii}^\alpha] = \frac{(128N_iN_T)(N_T - N_i)(4N_iN_T - 2N_T - 3)}{(4N_T + 3)(16N_T^2 - 1)(2N_T - 3)(2N_T - 1)}, \quad (3.16)$$

$$2) \quad \text{covar}[\tau_{ij}^\alpha, \tau_{il}^\alpha] = \frac{(128N_iN_T)(-4N_jN_lN_T)}{(4N_T + 3)(16N_T^2 - 1)(2N_T - 3)(2N_T - 1)}, \quad (3.17)$$

$$3) \quad \text{covar}[\tau_{ij}^\alpha, \tau_{ij}^\alpha] = \frac{(128N_iN_T)(N_j(4N_T^2 - 4N_jN_T - 2N_T - 3))}{(4N_T + 3)(16N_T^2 - 1)(2N_T - 3)(2N_T - 1)}, \quad (3.18)$$

$$4) \quad \text{covar}[\tau_{ii}^\alpha, \tau_{il}^\alpha] = \frac{(128N_iN_T)(-N_l(4N_iN_T - 2N_T - 3))}{(4N_T + 3)(16N_T^2 - 1)(2N_T - 3)(2N_T - 1)}, \quad (3.19)$$

$$5) \quad \text{covar}[\tau_{ij}^\alpha, \tau_{ii}^\alpha] = \frac{(128N_iN_T)(-N_j(4N_iN_T - 2N_T - 3))}{(4N_T + 3)(16N_T^2 - 1)(2N_T - 3)(2N_T - 1)}, \quad (3.20)$$

a partir das 5 equações a cima podemos substituir  $i, j$  e  $l$  para poder encontrar cada co-variância do coeficientes de transmissão que será necessária para calcular a corrente de spin e as voltagens transversais.

### 3.3.2 Coeficientes de transmissão para o sistemas em que a SRT é quebrada

A relação de anti-comutação discutida na secção anterior é satisfeita em toda simetria quiral, portanto para sistemas em que a SRT é quebrada ela também é satisfeita. A matriz de espalhamento é decomposta em termos de matrizes unitárias de tamanho  $2N_T \times 2N_T$ , onde  $S = \Sigma_z U^\dagger \Sigma_z U$ , e  $U^\dagger$  são matrizes unitárias com as entradas sendo números complexos, portanto (3.6) poderá ser reescrita como

$$\tau_{ij}^\alpha = \mathbf{Tr}[\Sigma_z U C_i^\alpha U^\dagger \Sigma_z U C_j U^\dagger]. \quad (3.21)$$

de onde para calcular a média, variância e covariância dos coeficientes de transmissão foi utilizado o método proposto por Barros[16] utilizando a equação (3.21).

Para a média da probabilidade de transmissão chegamos a simples equação

$$\langle \tau_{ij}^\alpha \rangle = \delta_{\alpha 0} \frac{4(16N_i N_j N_T - \delta_{ij} N_i)}{(N_T - 1)(N_T + 1)}. \quad (3.22)$$

Naturalmente podemos analisar sistemas simétricos e anti-simétricos, da maneira em que a média dos coeficientes de transmissão pode ser escrita como

i) Para um sistema simétrico onde os guias tem número de canais diferentes, temos que:

$$\langle \tau_{ij}^\alpha \rangle = \delta_{\alpha 0} \frac{4N_i(16N_i N_T - 1)}{(N_T - 1)(N_T + 1)}, \quad (3.23)$$

ii) Para um sistema assimétrico onde os guias tem número de canais diferentes, temos que:

$$\langle \tau_{ij}^\alpha \rangle = \delta_{\alpha 0} \frac{64N_i N_j N_T}{(N_T - 1)(N_T + 1)}, \quad (3.24)$$

Para calcular o segundo momento, temos:

$$\langle \tau_{ij}^\alpha \tau_{kl}^\beta \rangle = \langle \mathbf{Tr}[\Sigma_z U C_i^\alpha U^\dagger \Sigma_z U C_j U^\dagger] \mathbf{Tr}[\Sigma_z U C_k^\beta U^\dagger \Sigma_z U C_l U^\dagger] \rangle. \quad (3.25)$$

A covariância:

$$\text{covar}[\tau_{ij}^\alpha, \tau_{kl}^\beta] = \langle \tau_{ij}^\alpha \tau_{kl}^\beta \rangle - \langle \tau_{ij}^\alpha \rangle \langle \tau_{kl}^\beta \rangle. \quad (3.26)$$

onde para se calcular a covariância dos coeficientes de transmissão se fez necessário apenas 216 diagramas e para a média apenas 2 diagramas, apesar de ser muito pouco comparado a secção anterior, ficamos impossibilitados de escrever a equação geral para a covariância.

Os resultados necessário e suficientemente importantes:

1)

$$\text{covar}[\tau_{ii}^\alpha, \tau_{ii}^\alpha] = \frac{32N_i(N_T - N_i)(8N_i N_T - 3)}{(16N_T^2 - 9)(16N_T^2 - 1)}, \quad (3.27)$$

2)

$$\text{covar}[\tau_{ij}^\alpha, \tau_{il}^\alpha] = \frac{256N_T N_i N_j N_l}{(16N_T^2 - 9)(16N_T^2 - 1)}, \quad (3.28)$$

3)

$$\text{covar}[\tau_{ij}^\alpha, \tau_{ij}^\alpha] = \frac{32N_i N_j (8N_T^2 - 8N_j N_T - 3)}{(16N_T^2 - 9)(16N_T^2 - 1)}, \quad (3.29)$$

4)

$$\text{covar}[\tau_{ij}^\alpha, \tau_{ii}^\alpha] = \frac{32N_i N_j (8N_i N_T - 3)}{(16N_T^2 - 9)(16N_T^2 - 1)}, \quad (3.30)$$

a partir das 4 equações a cima podemos substituir  $i, j$  e  $l$  para poder encontrar cada co-variância do coeficientes de transmissão que será necessária para calcular a corrente de spin e as voltagens transversais.

### 3.4 Cálculo da média da Corrente de Spin e Voltagem nos terminais Transversais

Nesta secção iremos tomar média sobre a equação da corrente de spin (3.2), assim como a equação da tensão transversal (3.3)

$$\langle \bar{V}_i \rangle = \frac{1}{2} \frac{\text{covar}[\tau_{ij}^0, \tau_{j2}^0] - \text{covar}[\tau_{ij}^0, \tau_{j1}^0] + 4N_4 \langle \tau_{i2}^0 \rangle - \text{covar}[\tau_{i2}^0, \tau_{jj}^0] - 4N_4 \langle \tau_{i1}^0 \rangle + \text{covar}[\tau_{i1}^0, \tau_{jj}^0]}{\text{covar}[\tau_{43}^0, \tau_{34}^0] - 16N_3 N_4 + 4N_3 \langle \tau_{44}^0 \rangle + 4N_4 \langle \tau_{33}^0 \rangle - \text{covar}[\tau_{33}^0, \tau_{44}^0]}, \quad i \neq j = 3, 4 \quad (3.31)$$

Para a sistema com SRT iremos substituir as equações (3.11) e as possíveis combinações da equação (3.15) na equação (3.31), afim de obter o resultado exato para a média das tensões transversais nos guias 3 e 4 respectivamente

$$\langle \bar{V}_3 \rangle = \langle \bar{V}_4 \rangle = \frac{1}{2} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}, \quad (3.32)$$

onde este valor também não muda se a SRT é quebrada. Portanto concluímos que independente da classe de simetria que encontra o sistema Wigner Dyson ou Quiral, a média da tensão é a mesma (2.38) e (3.32), assim como a SRT não interfere na tensão transversal.

Tomando a média sobre cada corrente de spin  $J_i^\alpha$

$$\langle J_i^\alpha \rangle = \frac{1}{2}(\langle \tau_{i2}^\alpha \rangle - \langle \tau_{i1}^\alpha \rangle) - \sum_{j=3,4} (\langle \tau_{ij}^\alpha \rangle \langle \bar{V}_j \rangle), \quad (3.33)$$

para o guia 3 e 4 respectivamente é:

$$\langle J_3^\alpha \rangle = \frac{1}{2}(\langle \tau_{32}^\alpha \rangle - \langle \tau_{31}^\alpha \rangle) - [(\langle \tau_{33}^\alpha \rangle \langle \bar{V}_3 \rangle) + (\langle \tau_{34}^\alpha \rangle \langle \bar{V}_4 \rangle)], \quad (3.34)$$

e

$$\langle J_4^\alpha \rangle = \frac{1}{2}(\langle \tau_{42}^\alpha \rangle - \langle \tau_{41}^\alpha \rangle) - [(\langle \tau_{43}^\alpha \rangle \langle \bar{V}_3 \rangle) + (\langle \tau_{44}^\alpha \rangle \langle \bar{V}_4 \rangle)]. \quad (3.35)$$

De maneira análoga a média da corrente de spin é nula

$$\langle J_i^\alpha \rangle = 0. \quad (3.36)$$

Existe corrente efetiva, porém na média é nula, isso vale tanto para sistemas que preservam a SRT quanto para o sistema em que não preservam essa simetria, por este motivo também se faz necessário saber a dispersão da corrente de spin, o quanto o valor flutua ao redor do zero, para isso utilizaremos a equação (2.46) e (2.47) da covariância e variância assim como da corrente de spin.

### 3.5 Cálculo da Flutuação Universal da Corrente de Spin no sistema Quiral

Nesta secção iremos mostrar o principal resultado do nosso trabalho, que é a Flutuação Universal da Corrente de Spin para sistemas que possui a simetria de Quiralidade(CHS), assim como iremos mostrar a Flutuação Universal da Condutância de Spin Quantizada(UQSCF) e discutimos o que acontece quando quebramos a simetria de quiralidade para sistemas em que se preserva SRT assim como sistemas em que existe a quebra da SRT. Este trabalho foi motivado por ser um problema analítico em aberto desde 2008[11], e com ele foi possível submeter o nosso artigo.

### 3.5.1 Variância da Corrente de Spin para o sistema em que a SRT é preservada

Sistemas em que preservam a SRT tem um campo magnético externo nulo porém conseguem quebrar a simetria de rotação de spin devido há uma forte interação spin-órbita, ou seja, o elétron percorre todo o espaço sem perder a direção de propagação do spin, um sistema desse tipo está clássificado na tabela (1.2) por um ensemble simplético quirral (chECS). Para o cálculo da variância da corrente de spin iremos utilizar a equação (2.47) e será substituída a equação (3.12) e (3.13) referente as médias dos coeficientes de transmissão, assim como as equações (3.16) até (3.20) referente a covariância desses coeficientes, assim como utilizar a equação (3.32) que se refere as tensões transversais. Substituindo todos esses resultados na equação (2.47), podemos encontramos a variância da corrente de spin nos guias transversais.

i) A variância da corrente de Spin no guia 3

$$\text{var}[J_3^\alpha] = \frac{128N_T(4N_T^2 - 2N_T - 3)N_1N_2N_3}{(4N_T + 3)(16N_T^2 - 1)(2N_T - 3)(2N_T - 1)(N_1 + N_2)}, \quad (3.37)$$

ii) A variância da corrente de Spin no guia 4

$$\text{var}[J_4^\alpha] = \frac{128N_T(4N_T^2 - 2N_T - 3)N_1N_2N_4}{(4N_T + 3)(16N_T^2 - 1)(2N_T - 3)(2N_T - 1)(N_1 + N_2)}, \quad (3.38)$$

portanto podemos generalizar a variância da corrente de spin dos guias transversais

$$\text{var}[J_i^\alpha] = \frac{128N_T(4N_T^2 - 2N_T - 3)(N_1N_2N_i)}{(4N_T + 3)(16N_T^2 - 1)(2N_T - 3)(2N_T - 1)(N_1 + N_2)} \quad (3.39)$$

lembrando que  $i = 3, 4$  pois corrente de spin só ocorre nos guias transversais e  $\alpha = x, y, z$  que é a direção em que está orientado o spin dos elétrons. A variância da corrente de spin da equação (3.39), refere-se a equação exata da corrente pura de spin para a classe de simetria Quiral (Ch) para o sistema em que SRT é preservada, para obtê-la foi necessário árduos cálculos discutidos nas secção anteriores. A equação (2.46) é o resultado geral para a covariância da corrente de spin, e  $\text{covar}[J_j^\alpha, J_k^\beta] = 0$  se  $\alpha \neq \beta$  e  $j \neq k$  também em sistemas com simetrias quirais.

Abaixo será discutido um caso em que o sistema não é simétrico, para tal, se faz necessário substituição direta na equação (3.39). Substituindo  $N_1 = N_3 = 2N_2 = 2N_4 = N$ , neste caso os guias transversais e longitudinais são anti-simétrico entre si. A equação para o guia 3 é

$$\text{var}[J_3^\alpha] = \frac{1024}{3} \frac{N^3(48N^2 - 4N - 1)}{(8N + 1)(576N^2 - 1)(4N - 1)(12N - 1)}, \quad (3.40)$$

onde podemos ter que a variação da corrente de spin para o guia 3 no regime quântico ( $N_i = N$ )

$$\text{var}[J_j^\alpha] \approx 0.086, \quad (3.41)$$

enquanto no regime semi-clássico

$$\text{var}[J_j^\alpha] \approx 0.075. \quad (3.42)$$

A equação para o guia 4 é dada por

$$\text{var}[J_4^\alpha] = \frac{512}{3} \frac{N^3(48N^2 - 4N - 1)}{(8N + 1)(576N^2 - 1)(4N - 1)(12N - 1)}, \quad (3.43)$$

onde podemos temos que a variação da corrente de spin para o guia 4 no regime quântico ( $N_i = N$ )

$$\text{var}[J_j^\alpha] \approx 0.043, \quad (3.44)$$

enquanto no regime semi-clássico

$$\text{var}[J_j^\alpha] \approx 0.037. \quad (3.45)$$

todos esses resultados são discutido na figura(3.2) referente aos nossos cálculos analíticos e simulação numérica.

### 3.5.2 Variância da Corrente de Spin para o sistema em que a SRT é quebrada

Para sistemas em que a SRT é quebrada e existindo a quebra da simetria de rotação de spin devido há uma forte interação spin-órbita, podemos observar na tabela (1.2) que o sistema é descrito por um ensemble unitário quiral (chECU). Nesta secção iremos substituir

as equações (3.22) e (3.23) referente as médias dos coeficientes de transmissão, assim como as equações (3.27) até (3.30) referente ao segundo momento dos coeficientes de transmissão e a equação (3.32) referente as tensões transversais na equação da variância da corrente de spin (2.47).

A corrente de Spin no guia 3,

$$\text{var}[J_3^\alpha] = \frac{32N_1N_2N_3(8N_T^2 - 3)}{(16N_T^2 - 9)(16N_T^2 - 1)(N_1 + N_2)}, \quad (3.46)$$

enquanto a corrente de spin no guia 4,

$$\text{var}[J_4^\alpha] = \frac{32N_1N_2N_4(8N_T^2 - 3)}{(16N_T^2 - 9)(16N_T^2 - 1)(N_1 + N_2)}, \quad (3.47)$$

portanto a variância da corrente de spin gerado em um guia j transversal pode ser generalizada como:

$$\text{var}[J_j^\alpha] = \frac{32N_1N_2N_j(8N_T^2 - 3)}{(16N_T^2 - 9)(16N_T^2 - 1)(N_1 + N_2)}. \quad (3.48)$$

Variância da corrente no regime simétrico

$$\text{var}[J_j^\alpha] = \frac{16N^2(128N^2 - 3)}{(256N^2 - 9)(256N^2 - 1)}. \quad (3.49)$$

i) O regime quântico extremo

$$\text{rms}[J_j^\alpha] \approx 0.18 \quad (3.50)$$

ii) O regime semi-clássico

$$\text{rms}[J_j^\alpha] \approx 0.18. \quad (3.51)$$

Notemos que quando a SRT é quebrada, o sistema já começa em seu regime semi-clássico e quando a SRT é quebrada a flutuação universal para o sistema Quiral e para o sistema de Wigner Dyson é a mesma.



### 3.6 Comparação entre a amplitude da UFC em um bilhar caótico de Dirac e um Bilhar caótico de Schrödinger

Iremos agora comparar o nosso resultado com o resultado discutido no capítulo anterior que é a variância da corrente de spin para a classe de Wigner Dyson, portanto, as correntes irão ser diferenciadas com índices subscrito wd (para a classe Wigner-Dyson) e ch (para a classe Quiral). A equação da corrente pura de spin, para a classe de simetria WD é dada pela equação (2.53).

Da equação (3.39) obtemos para o caso simétrico  $N_i = N$  que a equação da variância da corrente de spin é dada por

$$\text{var}[J_i^\alpha]_{ch} = \frac{256N^3(64N^2 - 8N - 3)}{(16N + 3)(256N^2 - 1)(8N - 3)(8N - 1)} \quad (3.52)$$

analisando os dois regimes fundamentais do problema, o regime semi-clássico (para altas energias  $N \gg 1$ ) e o regime puramente quântico (para baixas energias  $N = 1$ ) na equação (3.52), temos que a variância no regime semi-clássico é

$$\text{var}[J_i^\alpha]_{ch} = \frac{1}{16} \quad (3.53)$$

e as sua dispersão

$$\text{rms}[J_i^\alpha]_{ch} = \sqrt{\frac{1}{16}} = 0.2500 \quad (3.54)$$

Notemos que a transformação da equação (2.53) para a equação (3.54) é só multiplicar apenas por  $\sqrt{2}$

$$\text{rms}[J_i^\alpha]_{ch} = \sqrt{2} \times \text{rms}[J_i^\alpha]_{wd} \quad (3.55)$$

esta multiplicação muda totalmente a simetria do problema, e isto já era de se esperar, pois para muitos guias a simetria de quiralidade é quebrada. Na figura (3.3) mostramos a convergência da equação (3.52), e para grande números de canais abertos mostramos que a relação da equação (3.55) é confirmada. Então será que para o caso puramente quântico

conseguimos sair da simetria de WD para a simetria Ch apenas multiplicando o resultado por um fator de  $\sqrt{2}$ ?

Esta foi a motivação que tivemos para analisar este problema. Pois em 2008 Qiao e seus colaboradores[11] mostraram em sua simulação para o QSHE a flutuação universal da condutância para o regime puramente quântico, ou seja, todos os guias tem apenas 1 canal aberto é

$$\text{rms}[G_{sH}^q] = 0.285 \pm 0.005 \times \frac{e}{4\pi} \quad (3.56)$$

e quando a simetria de quiralidade é quebrada, eles conseguiram retomar ao resultado de WD mostrando que a amplitude de flutuação da condutância é  $\text{rms}[G_{wd}] \sim 0.18 \times \frac{e}{4\pi}$ .

Analisando o regime puramente quântico da equação (3.52)  $N_i = N = 1$ , temos que

$$\text{var}[J_i^\alpha]_{ch} = 0.0800 \quad (3.57)$$

e as suas dispersão

$$\text{rms}[J_i^\alpha]_{ch} = \sqrt{\text{var}[J_i^\alpha]_{ch}} = 0.283 \quad (3.58)$$

Então a amplitude de flutuação universal da condutância quantizada de spin para a simetrias quiral, no regime quântico extremo é

$$\text{rms}[G_{sH}^q] = 0.283 \times \frac{e}{4\pi} \quad (3.59)$$

Notemos que não conseguimos sair do caso extremamente quântico para a simetria de WD (2.56), para a simetria Ch apenas multiplicando por um fator de  $\sqrt{2}$ , pois  $\sqrt{2} \times \text{rms}[G_{sH}^f] \approx 0.292 \times \frac{e}{4\pi}$ , o que de fato está completamente fora da barra de erro da equação (3.56).

Por tanto nosso resultado analítico se encontra dentro da barra de erro encontrada por Qiao[11] e seus colaboradores em 2008 e a Flutuação Universal da Condutância Quantizada de Spin para a simetria Quiral é  $\text{rms}[G_{sH}^q] \approx 0.283 \times \frac{e}{4\pi}$ , além de que para grande números de canais abertos existe a quebra de quiralidade, este é o resultado mais importante do nosso trabalho e com ele foi possível publicar o nosso artigo, para tal foi necessário simulações numéricas e cálculos analíticos.

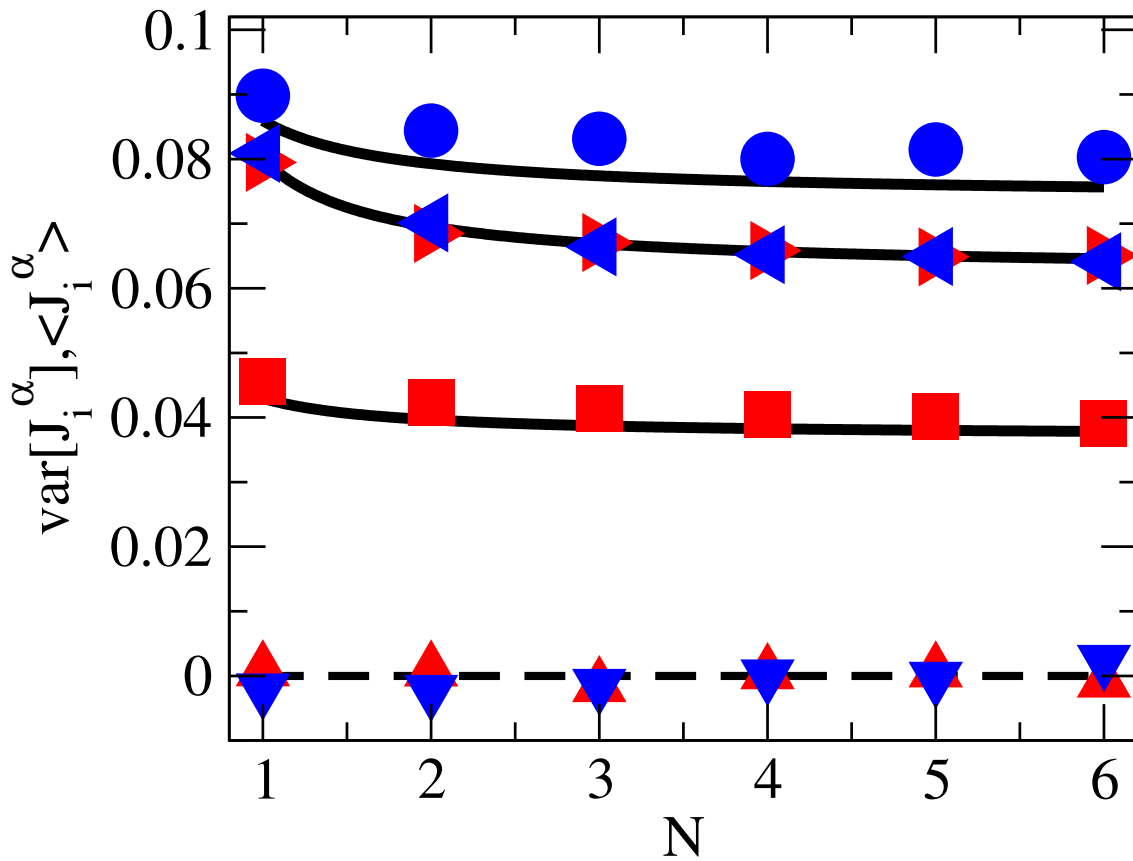


Figura 3.2: A figura mostra a média (3.36) e a variância da corrente de spin (3.39)  $J_i^\alpha$  para  $i = 3, 4$  e  $\alpha = x, y, z$  em função dos canais abertos  $N$ . Os resultados analíticos são representados pelas linhas pretas e a simulação numérica pelos símbolos. Para o caso simétrico  $N_i = N$  o triângulo para esquerda/direita representa  $\text{var}[J_3^\alpha]/\text{var}[J_4^\alpha]$  para o caso assimétrico ( $N_1 = N_3 = 2N_2 = 2N_4 = N$ ) o círculo/quadrado representa  $\text{var}[J_3^\alpha]/\text{var}[J_4^\alpha]$  e para todos os casos o triângulo para baixo/cima representa a média da corrente  $\langle J_3^\alpha \rangle / \langle J_4^\alpha \rangle$ .

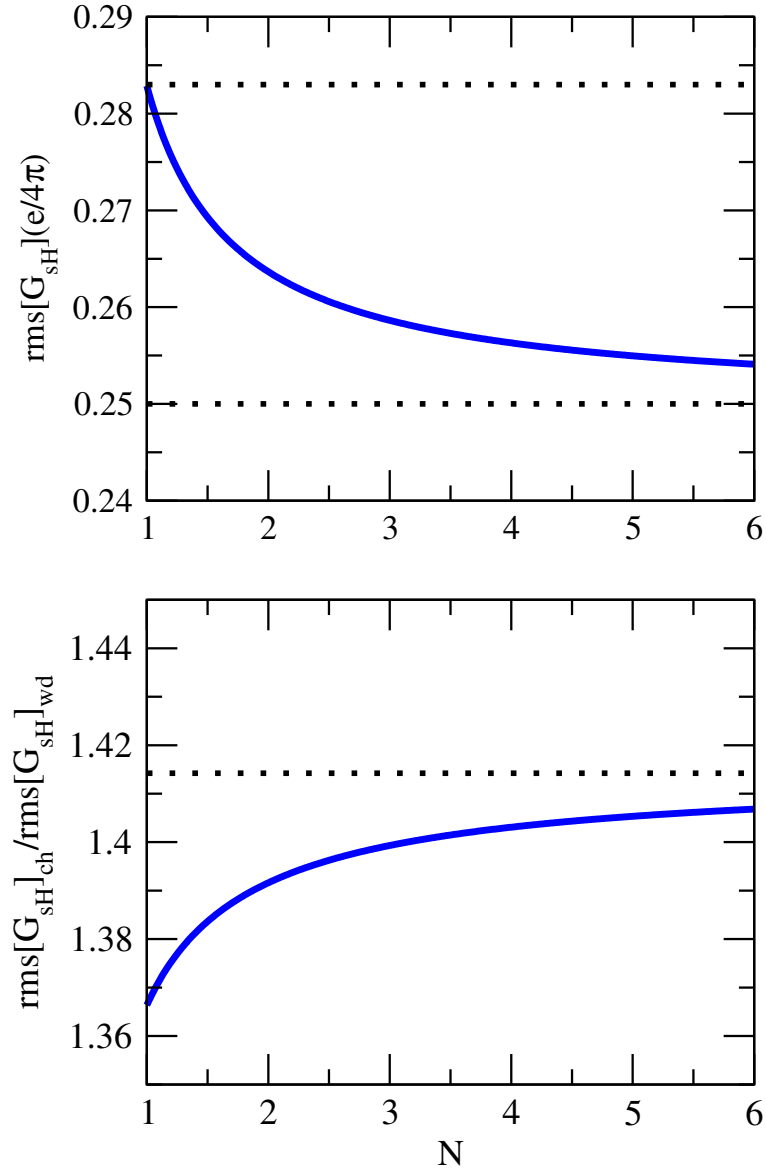


Figura 3.3: A figura mostra a Flutuação Universal da Condutância Quantizada de Spin, indo do regime quântico extremo (3.58) para o regime semi-clássico (3.54) assim como mostra a razão entre as Flutuações Universais para o sistema Quiral e para o sistema de Wigner Dyson, este gráfico confirma que quando existe quebra de quiralidade a razão tende  $\sqrt{2}$  no regime semi-clássico (3.55).

# Capítulo 4

## Efeito Hall Inverso de Spin em cavidades mesoscópicas caóticas difusivas

### 4.1 Introdução

Nos capítulos anteriores (2 e 3) foi discutido o Efeito Hall de Spin em cavidades balísticas caóticas, que ocorre quando uma corrente pura de carga consegue gerar uma corrente pura de spin devido a uma forte interação SO, por este motivo podemos utilizar a equação de Landauer-Buttiker (2.1) para poder calcular a corrente de spin do sistema  $I_j^\alpha$  e então determinar a amplitude da flutuação universal da condutância fracionada  $\text{rms}[G_{sH}^f]$  (em casos onde o sistema tem a classe de Wigner Dyson) ou a amplitude da flutuação universal da condutância quantizada  $\text{rms}[G_{sH}^q]$  (em sistemas em que a classe é Quiral). Através de modelos teóricos chegamos a expressões analíticas exatas para a média e dispersão da condutância de spin afim de calcular a amplitude da flutuação universal, que é o resultado em que mostra o quanto o valor medido da condutância de spin flutua entorno da sua média. Em contrapartida, experimentalmente medir a condutância de spin diretamente do efeito Hall de Spin

é extremamente difícil, então o que se faz é o efeito Hall Inverso de Spin, ou seja, um reservatório com cargas que tem o spin polarizado numa direção previamente definida bombeia para dentro de uma cavidade caótica com uma forte interação spin-órbita, de tal forma que a partir deste bombeamento de spin será gerado uma diferença de potencial entre os reservatórios transversais ao reservatório que está bombeando corrente de spin, e a partir dessa diferença de potencial será gerado uma corrente de carga entre esses reservatórios transversais, fazendo com que a condutância de spin  $G_{I_sH}^\alpha$  possa ser medida indiretamente através da corrente de carga e as tensões nos reservatórios transversais.

No modelo da referência [20] o transporte eletrônico ocorre numa cavidade caótica com uma forte interação spin-órbita e o comprimento de relaxação de spin é maior que o comprimento de livre caminho médio da partícula dentro do cavidade caótica, isso diz que a carga percorre toda cavidade caótica com o spin alinhado. O dispositivo eletrônico analisado é conectado idealmente a 3 guias e podemos bombear uma corrente pura de spin do guia 1 para dentro da cavidade no qual irá produzir uma diferença de potencial entre os guias 2 e 3, gerando portanto uma corrente efetiva de carga entre esses guias, assim é possível se fazer uma medida indireta da condutância de spin.

Portanto podemos medir a condutância de spin da seguinte maneira, injetar para dentro da cavidade corrente pura de spin, com isso teremos que  $I_1^\alpha \neq 0$  e  $I_1^0 = 0$ , pela lei de conservação de carga teremos que  $I_2^0 = -I_3^0 = I$ , portanto a corrente que passa entre os terminais 2 e 3 só pode ter sido gerada devido a corrente de spin que provém do guia 1. Nosso objetivo é calcular a Flutuação Universal da Condutância de Spin  $G_j^\alpha$  (UFSC) e Flutuação Universal da Condutância Quântizada de Spin  $G_j^\alpha$  (UQFSC), o sub-índice  $j$  se refere ao terminal que está se medindo a condutância, que só poderá ser o terminal transversal ao terminal responsável por bombear a corrente de spin para dentro da cavidade caótica, por exemplo na figura (4.1) poderá ser o terminal 4 ou o terminal 5.

Assim como nos capítulos passados o índice responsável por dizer a direção de propagação do spin é o  $\alpha = 0, x, y, z$  e quando  $\alpha = 0$  estamos analisando a corrente efetiva de carga. Podemos indicar ler o artigo[20] que foi referência para o nosso trabalho.

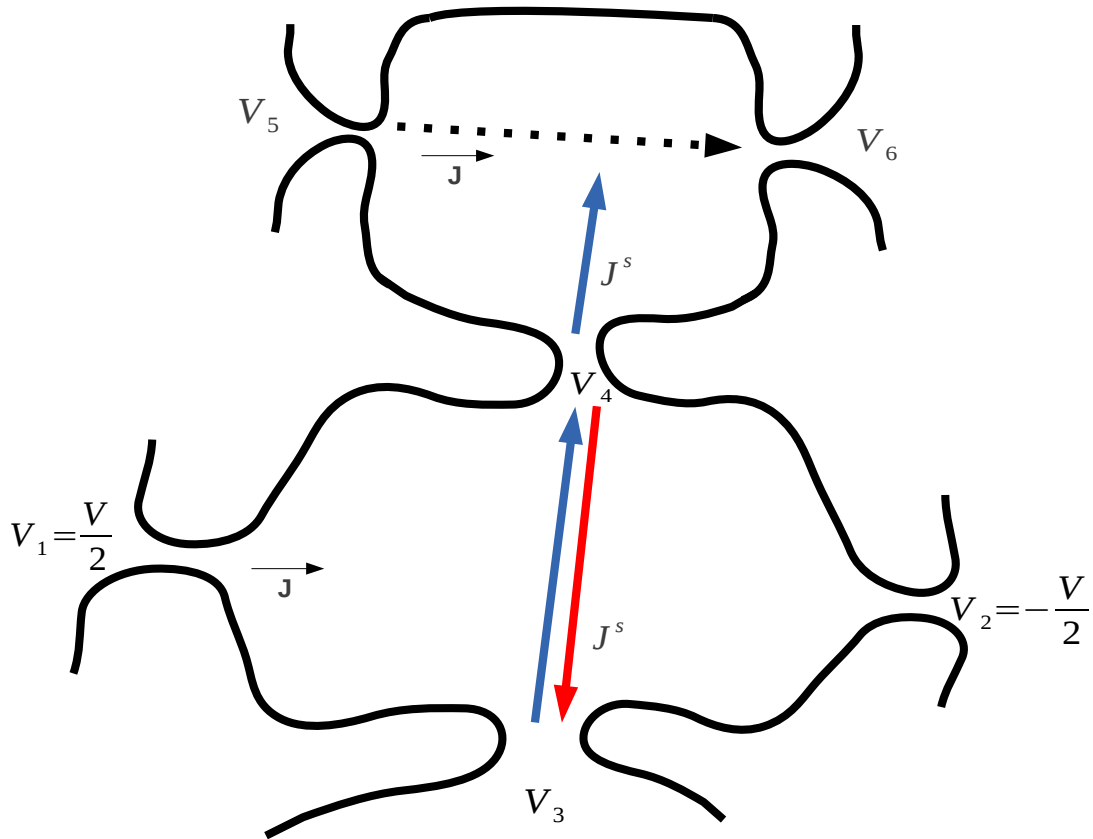


Figura 4.1: Nesta figura mostramos que fixado uma diferença de potencial longitudinal entre os terminais 1 e 2, a corrente pura de carga longitudinal gerada na cavidade caótica  $J$  irá gerar uma corrente pura de spin transversal  $J^s$  entre os terminais 3 e 4, que por sua vez ao entrar na cavidade caótica onde está conectado os guias 5 e 6 irá gerar uma corrente de carga longitudinal entre esses guias. O primeiro efeito é chamado Efeito Hall de Spin, que é corrente de carga gerando corrente de spin, observe que a seta azul indica que existe corrente de spin up se deslocando para o terminal 4 e a seta vermelha indica que existe corrente de spin down se movimentando para o terminal 3, enquanto o segundo é chamado Efeito Hall Inverso de Spin, a corrente de spin up é bombeado para dentro da cavidade caótica gerando corrente de carga entre os terminais 5 e 6. Nesta figura conectamos os dois sistemas, porém o caso que foi analisado nos capítulos anteriores foi o caso de 4 terminais, enquanto o caso a ser analisado neste capítulo é o caso de 3 terminais. Não necessariamente as correntes de cargas entre os guias 2 e 3, e os guias 5 e 6 são iguais.

No modelo, figura (4.2), temos uma cavidade caótica conectado a 3 guias ideais, o guia 1 será responsável por bombear para a cavidade caótica exclusivamente uma corrente de spin  $I_1^\alpha \neq 0$ , onde esta corrente irá se acumular e gerar uma diferença de potencial entre os terminais 2 e 3, desse modo irá ocorrer uma passagem de corrente entre estes terminais, de modo que se encerrarmos o bombeamento da corrente de spin, irá acabar com a corrente eletrônica entre os guias 2 e 3, então podemos dizer que esta corrente eletrônica é criada exclusivamente devido ao acúmulo de spin do guia 1 para dentro da cavidade caótica.

A condutância de spin na cavidade é definida por

$$G_j^\alpha = \frac{I_j}{\mu^\alpha}, \quad (4.1)$$

onde o sub-índice  $j$  refere-se ao guia que estamos calculando a condutância  $j = 2, 3$  enquanto  $\mu^\alpha$  refere-se a diferença de potencial químico devido a diferença de energia entre os spins up e os spin down dentro do reservatório,  $\mu^\alpha = \mu^\uparrow - \mu^\downarrow$ , essa diferença de potencial devido ao spin leva a um bombeamento de spin do reservatório para dentro da cavidade caótica, esse bombeamento de spin levará a uma oscilação de campo magnético  $\mathbf{B}$  e conseqüentemente irá induzir uma força eletromotriz entre os reservatórios 2 e 3, levando então a uma corrente eletrônica  $I_{2,3}^0$  entre esses guias. No modelo temos que  $\mu^\alpha = 0$  para os guias 2 e 3, pois nesses reservatórios as cargas não estão polarizadas com spin numa direção determinada, sendo assim se não há bombeamento de corrente de spin para dentro da cavidade caótica proveniente desses dois reservatórios então não existe propagação de corrente de spin ao longo desses guias  $I_2^\alpha = I_3^\alpha = 0$ .

Nas próximas seções iremos analisar a amplitude da flutuação universal da condutância de spin no Efeito Hall Inverso de Spin  $G_{ISH}$  para as classes de Wigner Dyson e Quiral, dentro dessas classes iremos analisar regimes em que existe a preservação SRT e casos onde existe quebra da SRT.



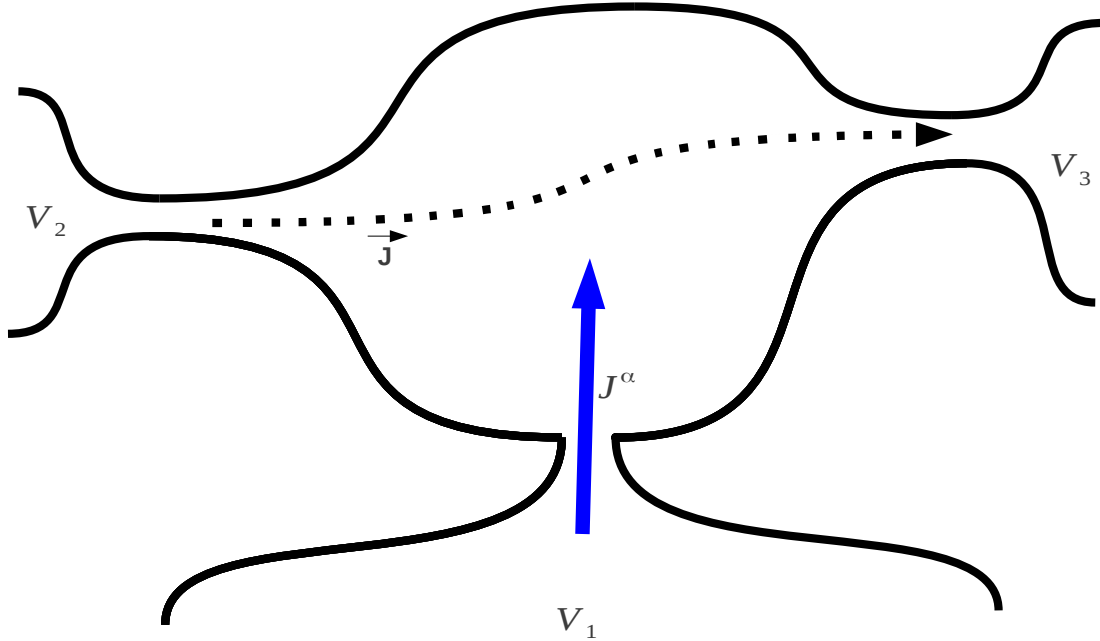


Figura 4.2: A figura mostra o modelo que estamos analisando, 3 reservatórios acoplados idealmente á uma cavidade caótica, o reservatório 1 com potencia  $V_1$  bombeia corrente pura de spin  $J^\alpha$  para dentro da cavidade caótica, devido a forte interação spin-órbita dentro da cavidade caótica irá gerar uma força eletromotriz entre os terminais 3 de potencial  $V_3$  e 4 de potencial  $V_4$  que consequentemente será gerada uma corrente efetiva de carga longitudinalmente  $J$  entre esses guias. Estamos interessados em calcular a amplitude da Flutuação Universal da Condutância de Spin no terminal 2  $G_2^\alpha$  ou 3  $G_3^\alpha$ , este fenômeno é chamado Efeito Hall Inverso de Spin.

## 4.2 Efeito Hall Inverso de Spin para classe de simetria de Wigner Dyson

Nesta secção iremos calcular a amplitude da Flutuação Universal da Condutância de Spin utilizando a Classe de Wigner Dyson com SRT e com a quebra da SRT, para isso iremos

utilizar o mesmo método e resultados obtidos no capítulo 2, nesta secção iremos apenas reproduzir os resultados obtidos por Adagideli e colaboradores em seu artigo[20] no qual foi a nossa maior motivação para estudar o Efeito Hall Inverso de Spin, pois já havíamos estudado o Efeito Hall de Spin. No artigo eles tratam do caso de gerar corrente de carga através de corrente pura de spin.

A equação de Landauer e Buttiker (2.1) pode ser escrita em função da acumulação de spin  $\mu_i$

$$I_i^\alpha = \frac{e^2}{h} \sum_{j,\alpha'} \tau_{i,j}^{\alpha\alpha'} (\mu_i - \mu_j) \quad (4.2)$$

onde podemos também utilizar o termo de conservação de probabilidade discutida nos capítulos anteriores, para escrever a corrente de spin em cada terminal em função do números de canais abertos em cada guia ( $N_1$ ,  $N_2$  e  $N_3$ )

$$I_1^\alpha = \frac{e}{h} \sum_{\beta} (2N_1 \delta_{\alpha\beta} - \tau_{11}^{\alpha\beta}) \mu_1^\beta - \frac{e}{h} \sum_{\beta} (\tau_{12}^{\alpha\beta} \mu_2^\beta + \tau_{13}^{\alpha\beta} \mu_3^\beta), \quad (4.3)$$

$$I_2^\alpha = \frac{e}{h} \sum_{\beta} (2N_2 \delta_{\alpha\beta} - \tau_{22}^{\alpha\beta}) \mu_2^\beta - \frac{e}{h} \sum_{\beta} (\tau_{21}^{\alpha\beta} \mu_1^\beta + \tau_{23}^{\alpha\beta} \mu_3^\beta), \quad (4.4)$$

$$I_3^\alpha = \frac{e}{h} \sum_{\beta} (2N_3 \delta_{\alpha\beta} - \tau_{33}^{\alpha\beta}) \mu_3^\beta - \frac{e}{h} \sum_{\beta} (\tau_{31}^{\alpha\beta} \mu_1^\beta + \tau_{32}^{\alpha\beta} \mu_2^\beta). \quad (4.5)$$

generalizando

$$I_i^\alpha = \frac{e}{h} \sum_{\beta} (2N_i \delta_{\alpha\beta} - \tau_{ii}^{\alpha\beta}) \mu_i^\beta - \frac{e}{h} \sum_{j \neq i, \beta} \tau_{ij}^{\alpha\beta} \mu_j^\beta. \quad (4.6)$$

onde  $\beta$  também é uma direção de orientação do spin  $\beta = 0, x, y, z$  e  $\tau_{ij}^{\alpha\beta}$  são as amplitudes de probabilidade

$$\tau_{ij}^{\alpha\beta} = \mathbf{Tr}[C_i^\alpha S C_j^\beta S^\dagger], \quad (4.7)$$

e a matriz de espalhamento  $S$  será decomposta de acordo com a tabela (1.2) dependendo da classe de simetria.

Para efeitos de simplificação, no modelo não existe estados mistos, ou seja, o reservatório é polarizado e só poderá sair, ou cargas polarizadas com o spin em uma única direção

$\beta = \alpha \neq 0$ , ou poderá sair cargas não polarizadas  $\beta = \alpha = 0$ , então a equação (4.6) poderá ser reescrita como parte dependendo de  $\beta$  e parte para  $\beta = 0$

$$I_i^\alpha = \frac{e}{h}(2N_i\delta_{\alpha 0} - \tau_{ii}^{\alpha 0})\mu_i^0 - \frac{e}{h} \sum_{j \neq i} \tau_{ij}^{\alpha 0} \mu_j^0 + \frac{e}{h} \sum_{\beta \neq 0} (2N_i\delta_{\alpha\beta} - \tau_{ii}^{\alpha\beta})\mu_i^\beta - \frac{e}{h} \sum_{j \neq i, \beta \neq 0} \tau_{ij}^{\alpha\beta} \mu_j^\beta. \quad (4.8)$$

utilizando a condição que apenas é bombeado spin do canal 1 para a cavidade caótica, então não existe acumulação de spin nos terminais 2 e 3, então  $\mu_2^\beta = \mu_3^\beta = 0$ , satisfazendo esta condição podemos escrever que para  $\beta = 0$  a acumulação de spin é escrito em função da voltagem do canal  $\mu_i^0 = eV_i$ , sob estas condições podemos calcular a corrente de spin que flui no guia 1

$$I_1^\alpha = \frac{e^2}{h}(2N_1\delta_{\alpha 0} - \tau_{11}^{\alpha 0})V_1 + \frac{e}{h} \sum_{\beta \neq 0} (2N_1\delta_{\alpha\beta} - \tau_{11}^{\alpha\beta})\mu_1^\beta, \quad (4.9)$$

assim como a corrente de carga que flui no guia 2

$$I_2^0 = I_2 = -\frac{e^2}{h}\tau_{21}^{00}V_1 - \frac{e}{h} \sum_{\beta \neq 0} \tau_{21}^{0\beta} \mu_1^\beta, \quad (4.10)$$

e a corrente de carga que flui no guia 3

$$I_3^0 = I_3 = -\frac{e^2}{h}\tau_{31}^{00}V_1 - \frac{e}{h} \sum_{\beta \neq 0} \tau_{31}^{0\beta} \mu_1^\beta, \quad (4.11)$$

dessa maneira podemos generalizar a corrente de carga para o guia  $j = 2, 3$

$$I_j^0 = I_j = -\frac{e^2}{h}\tau_{j1}^{00}V_1 - \frac{e}{h} \sum_{\beta \neq 0} \tau_{j1}^{0\beta} \mu_1^\beta. \quad (4.12)$$

O objetivo principal é calcular a condutância (4.1), para isso precisamos da corrente eletrônica (4.12) em função da acumulação de spin, então iremos primeiramente encontrar o valor de  $V_1$  afim de deixar a condutância apenas em função dos coeficientes de transmissão e aplicar TMA[31] assim como o método diagramático[15], como foi feito em capítulos anteriores desta dissertação. Para tal vamos lembrar que no modelo não é permitido que exista corrente efetiva de carga entre o reservatório 1 e a cavidade caótica, utilizando esta condição da equação (4.9) quando  $\alpha = 0$ , temos

$$I_1^0 = I_1 = 0 = \frac{e^2}{h}(2N_1 - \tau_{11}^{00})V_1 - \frac{e}{h} \sum_{\beta \neq 0} \tau_{11}^{0\beta} \mu_1^\beta \quad (4.13)$$

portanto encontramos a relação entre o potencial e os coeficientes de transmissão

$$V_1 = \frac{1}{e} \sum_{\beta \neq 0} \frac{\tau_{11}^{0\beta} \mu_1^\beta}{(2N_1 - \tau_{11}^{00})} \quad (4.14)$$

substituindo (4.14) na equação (4.12) achamos a corrente de carga em função dos coeficientes de transmissão

$$I_j = -\frac{e}{h} \sum_{\beta \neq 0} \left( \frac{\tau_{11}^{0\beta} \tau_{j1}^{00}}{2N_1 - \tau_{11}^{00}} + \tau_{j1}^{0\beta} \right) \mu^\beta. \quad j=2, 3 \quad (4.15)$$

como  $\beta$  é a direção de propagação do spin, e o problema não tem spins propagando em mais de uma direção, logo podemos retirar o termo de soma assim como substituir  $\beta = \alpha$ , e substituir na equação (4.1) para calcular a condutância de spin nos guias 2 e 3

$$G_j^\alpha = -\frac{e}{h} \left( \frac{\tau_{11}^{0\alpha} \tau_{j1}^{00}}{2N_1 - \tau_{11}^{00}} + \tau_{j1}^{0\alpha} \right) m^\alpha \quad j=2, 3. \quad (4.16)$$

onde o termo  $m^\alpha$  é a magnetização do sistema, e usamos  $\mu^\beta = \mu m^\alpha$ . A figura 4.2 mostra que quem está bombeando spin para dentro da cavidade caótica é o reservatório 1. E para obter a média da condutância de spin foi feita uma expansão semi-clássica, em artigos anteriores[21] foi mostrado que em sistemas de três terminais podemos fazer uma expansão semi-clássica para a condutância  $G_j^\alpha$  e este resultado só é válido para quando o sistema tem grande números de canais abertos  $N_T = N_1 + N_2 + N_3 \gg 1$  e com isso, apenas os termos de ordem de  $[N_T^0]$  irá contribuir para média e variância da condutância, portanto podemos expandir a condutância e analisar termos de primeira ordem.

Expressando a média da condutância (4.16) em termos da média dos coeficientes de probabilidade de transmissão, temos

$$\langle G_j^\alpha \rangle = -\frac{e}{h} \left( \frac{(2\langle \tau_{11}^{0\alpha} \rangle \langle \tau_{j1}^{00} \rangle) (2N_1 - \langle \tau_{11}^{00} \rangle) + \langle \tau_{11}^{0\alpha} \rangle \langle \tau_{j1}^{00} \rangle \langle \tau_{11}^{00} \rangle}{(2N_1 - \langle \tau_{11}^{00} \rangle)^2} + \langle \tau_{j1}^{0\alpha} \rangle \right). \quad (4.17)$$

Como temos que a média só depende da média dos coeficientes de transmissão, então podemos substituir diretamente as equações (2.27), (2.32) que se refere a média das amplitudes de probabilidades de transmissão para a classe de Wigner Dyson, com a presença de SRT e com a quebra de SRT, como utilizamos o mesmo método discutido nos capítulo 2 desta dissertação, então chegamos a conclusão

$$\langle G_j^\alpha \rangle = 0. \quad (4.18)$$

a média é nula para todos independente se existir ou não SRT. Portanto se faz necessário calcular a dispersão da condutância, que irá mostrar o quanto existe de flutuação em torno da média. Para calcular a dispersão precisamos calcular  $\langle\langle G_j^\alpha \rangle^2\rangle$ , onde será utilizado a expansão semi-clássica, porém como a expressão fica extremamente grande, iremos dividir em dois fatores,

$$\langle\langle G_j^\alpha \rangle^2\rangle = \langle\langle G_j^\alpha \rangle \langle G_j^\alpha \rangle\rangle = \frac{A}{B}, \quad (4.19)$$

onde temos que o termo A pode é dado por

$$\begin{aligned} A = & \langle\tau_{11}^{00}\rangle^4 \text{var} [\tau_{j1}^{\alpha\alpha}] + 16N_1^4 \text{var} [\tau_{j1}^{\alpha\alpha}] - 8N_1 \langle\tau_{11}^{00}\rangle \langle\tau_{11}^{\alpha\alpha}\rangle \langle\tau_{j1}^{00}\rangle \text{covar} [\tau_{j1}^{00}, \tau_{11}^{\alpha\alpha}] \\ & + 4N_1 \langle\tau_{11}^{00}\rangle \langle\tau_{11}^{\alpha\alpha}\rangle \langle\tau_{j1}^{00}\rangle \text{covar} [\tau_{j1}^{00}, \tau_{11}^{00}] + 2\langle\tau_{11}^{00}\rangle^2 \langle\tau_{11}^{\alpha\alpha}\rangle \langle\tau_{j1}^{00}\rangle \text{covar} [\tau_{j1}^{00}, \tau_{11}^{\alpha\alpha}] \\ & - 2\langle\tau_{11}^{00}\rangle^2 \langle\tau_{11}^{\alpha\alpha}\rangle \langle\tau_{j1}^{00}\rangle \text{covar} [\tau_{j1}^{00}, \tau_{11}^{00}] + 12N_1 \langle\tau_{11}^{00}\rangle^2 \langle\tau_{11}^{\alpha\alpha}\rangle \text{covar} [\tau_{j1}^{\alpha\alpha}, \tau_{j1}^{00}] \\ & + 12N_1 \langle\tau_{11}^{00}\rangle^2 \langle\tau_{j1}^{00}\rangle \text{covar} [\tau_{j1}^{\alpha\alpha}, \tau_{11}^{\alpha\alpha}] - 8N_1 \langle\tau_{11}^{00}\rangle^2 \langle\tau_{j1}^{00}\rangle \text{covar} [\tau_{11}^{00}, \tau_{j1}^{\alpha\alpha}] \\ & - 4N_1 \langle\tau_{11}^{00}\rangle \langle\tau_{11}^{\alpha\alpha}\rangle^2 \text{var} [\tau_{j1}^{00}] - 24N_1^2 \langle\tau_{11}^{00}\rangle \langle\tau_{11}^{\alpha\alpha}\rangle \text{covar} [\tau_{j1}^{\alpha\alpha}, \tau_{j1}^{00}] \\ & - 4N_1 \langle\tau_{11}^{00}\rangle \langle\tau_{j1}^{00}\rangle^2 \text{var} [\tau_{11}^{\alpha\alpha}] + 4N_1 \langle\tau_{11}^{00}\rangle \langle\tau_{j1}^{00}\rangle^2 \text{covar} [\tau_{11}^{\alpha\alpha}, \tau_{11}^{00}] \\ & - 24N_1^2 \langle\tau_{11}^{00}\rangle \langle\tau_{j1}^{00}\rangle \text{covar} [\tau_{j1}^{\alpha\alpha}, \tau_{11}^{\alpha\alpha}] + 8N_1^2 \langle\tau_{11}^{00}\rangle \langle\tau_{j1}^{00}\rangle \text{covar} [\tau_{11}^{00}, \tau_{j1}^{\alpha\alpha}] \\ & + 8N_1^2 \langle\tau_{11}^{\alpha\alpha}\rangle \langle\tau_{j1}^{00}\rangle \text{covar} [\tau_{j1}^{00}, \tau_{11}^{\alpha\alpha}] + \langle\tau_{11}^{\alpha\alpha}\rangle^2 \langle\tau_{j1}^{00}\rangle^2 \text{var} [\tau_{11}^{00}] - 8N_1 \langle\tau_{11}^{00}\rangle^3 \text{var} [\tau_{j1}^{\alpha\alpha}] \\ & - 2\langle\tau_{11}^{00}\rangle^3 \langle\tau_{11}^{\alpha\alpha}\rangle \text{covar} [\tau_{j1}^{\alpha\alpha}, \tau_{j1}^{00}] - 2\langle\tau_{11}^{00}\rangle^3 \langle\tau_{j1}^{00}\rangle \text{covar} [\tau_{j1}^{\alpha\alpha}, \tau_{11}^{\alpha\alpha}] \\ & + 2\langle\tau_{11}^{00}\rangle^3 \langle\tau_{j1}^{00}\rangle \text{covar} [\tau_{11}^{00}, \tau_{j1}^{\alpha\alpha}] + 24N_1^2 \langle\tau_{11}^{00}\rangle^2 \text{var} [\tau_{j1}^{\alpha\alpha}] + \langle\tau_{11}^{00}\rangle^2 \langle\tau_{11}^{\alpha\alpha}\rangle^2 \text{var} [\tau_{j1}^{00}] \\ & + \langle\tau_{11}^{00}\rangle^2 \langle\tau_{j1}^{00}\rangle^2 \text{var} [\tau_{11}^{\alpha\alpha}] - 2\langle\tau_{11}^{00}\rangle^2 \langle\tau_{j1}^{00}\rangle^2 \text{covar} [\tau_{11}^{\alpha\alpha}, \tau_{11}^{00}] - 32N_1^3 \langle\tau_{11}^{00}\rangle \text{var} [\tau_{j1}^{\alpha\alpha}] \\ & + 4N_1^2 \langle\tau_{11}^{\alpha\alpha}\rangle^2 \text{var} [\tau_{j1}^{00}] + 16N_1^3 \langle\tau_{11}^{\alpha\alpha}\rangle \text{covar} [\tau_{j1}^{\alpha\alpha}, \tau_{j1}^{00}] + 4N_1^2 \langle\tau_{j1}^{00}\rangle^2 \text{var} [\tau_{11}^{\alpha\alpha}] \\ & + 16\langle\tau_{j1}^{00}\rangle \text{covar} [\tau_{j1}^{\alpha\alpha}, \tau_{11}^{\alpha\alpha}], \end{aligned} \quad (4.20)$$

enquanto B é simplesmente

$$B = (\langle\tau_{11}^{00}\rangle - 2N_1)^4. \quad (4.21)$$

após calcular a média e o segundo momento, podemos calcular a variância da condutância de spin, assim como sua dispersão que é a amplitude da flutuação universal da condutância de spin

$$\text{rms} [G_j^\alpha] = \sqrt{\text{var} [G_j^\alpha]} = \sqrt{\langle\langle G_j^\alpha \rangle^2\rangle - \langle G_j^\alpha \rangle^2} = \sqrt{\langle\langle G_j^\alpha \rangle^2\rangle}, \quad (4.22)$$

pois em todos os casos  $\langle G_j^\alpha \rangle$  é nulo, portanto a amplitude da flutuação universal da condutância de spin depende exclusivamente do segundo momento (4.19).

### 4.2.1 Efeito Hall Inverso de Spin para classe de simetria de Wigner Dyson com a preservação da SRT

Para sistemas em que não há campo magnético ( $\mathbf{B}=\mathbf{0}$ ) a SRT é preservada, como a cavidade caótica tem uma forte interação SO, de acordo com TMA na tabela (1.1) o ensemble que descreve o sistema é o ECS. Para calcular a variância e covariância dos coeficientes de probabilidade de transmissão da equação (4.19) foi utilizado o método diagramático discutido no capítulo 2 e os resultados são substituição direta da equação (2.30). Com os resultados obtidos podemos substituir nas equações (4.20) e (4.21) para calcular a variância da condutância de spin e portanto podemos escrever a variância da condutância de spin no guia 2 e 3, dado pelas seguintes expressões

$$\text{var}[G_2^\alpha] = \frac{4N_1N_2(N_1N_2 + N_2^2 + 2N_2N_3 + N_3^2 - 2N_2 - N_3)}{N_T(N_2 + N_3)(2N_T - 1)(2N_T - 3)}, \quad (4.23)$$

e

$$\text{var}[G_3^\alpha] = \frac{4N_1N_3(N_1N_3 + N_3^2 + 2N_2N_3 + N_2^2 - 2N_3 - N_2)}{N_T(N_2 + N_3)(2N_T - 1)(2N_T - 3)}, \quad (4.24)$$

onde,  $N_T$  é o número total de canais abertos, como o nosso problema precisa apenas de 3 guias abertos, então o número total de canais  $N_T = N_1 + N_2 + N_3$ .

Para este sistema, iremos novamente analisar dois casos, o primeiro caso é o regime simétrico ( $N_1 = N_2 = N_3 = N \gg 1$ ) que também foi analisado nos capítulos anteriores. O segundo caso é quando apenas o guia 1 que é responsável por bombear corrente de spin para dentro da cavidade caótica se encontra no regime semi clássico ( $N_2 = N_3 = 1$  e  $N_1 = N \gg 1$ ), de ambas as formas estaremos satisfazendo a expansão semi-clássica ( $N_T \gg 1$ ).

Substituindo  $N_1 = N_2 = N_3 = N$ , nas equações (4.23) ou (4.24) teremos a expressão analítica exata para o regime simétrico para a dispersão da condutância de spin num guia

transversal  $j = 2, 3$

$$\text{rms}[G_j^\alpha] = \sqrt{\text{var}[G_j]} = \sqrt{\frac{2}{9} \frac{N(5N-3)}{(6N-1)(2N-1)}} = \sqrt{\frac{5}{54}} \approx 0.30 \times \frac{e}{4\pi}. \quad (4.25)$$

lembrando que esta equação é válida para o regime semi-clássico, ou seja, foi tomado o limite quando cada guia tem muitos canais abertos ( $N \gg 1$ ). A figura (4.3) mostra o resultado analítico da expressão (4.25), a linha tracejada preta mostra a convergência, o seu valor é aproximadamente 0.304, enquanto a linha azul mostra que enquanto aumentamos o número de canais a dispersão irá se aproximando do seu valor universal.

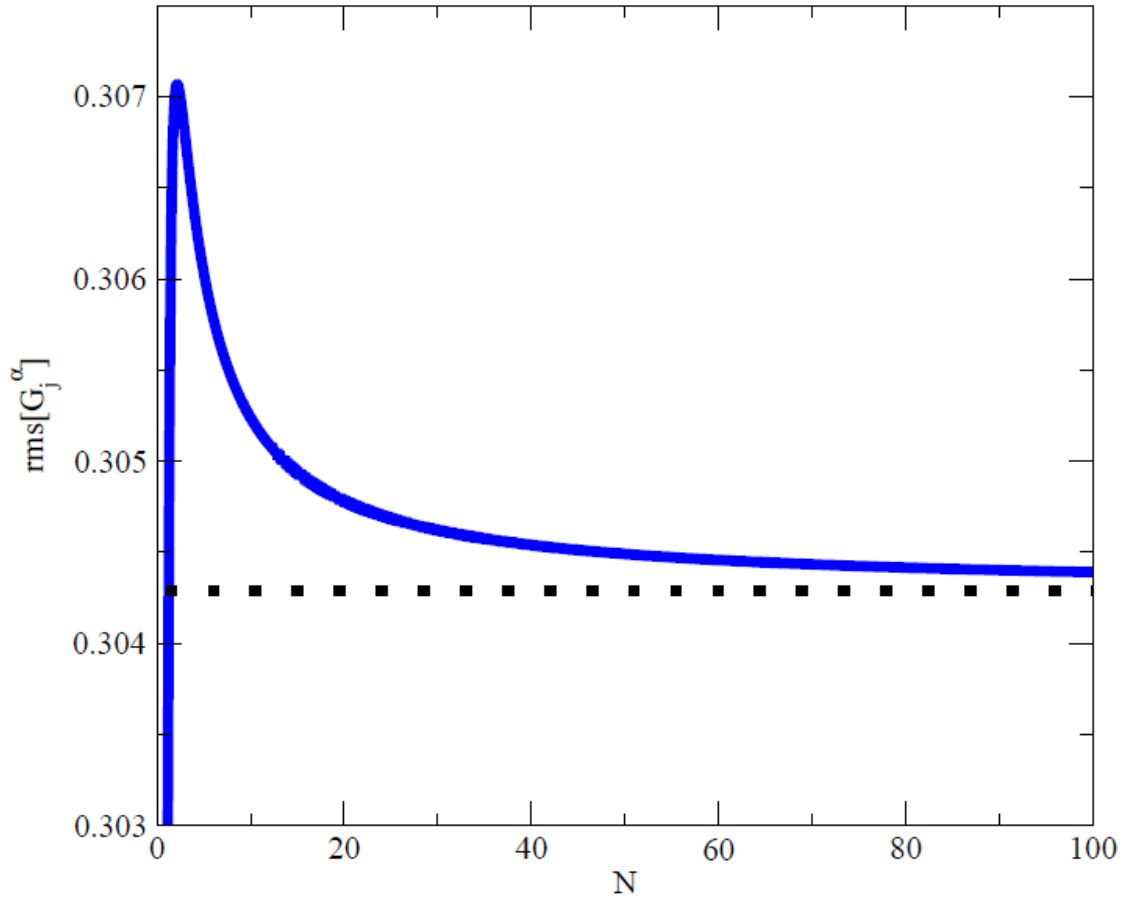


Figura 4.3: Este gráfico mostra a convergência da Flutuação Universal da Condutância de Spin no Efeito Hall Inverso para o sistema simétrico, no caso em que todos os guias estão no regime semi-clássico  $N_1 = N_2 = N_3 = N \gg 1$ . A linha tracejada em preto é mostra o valor aproximado da convergência que é  $\text{rms}[G_j^\alpha] \approx 0.3043$  em unidades de  $\frac{e}{4\pi}$ .

Enquanto o regime em que apenas o guia 1 está no regime semi-clássico a equação (4.23) ou (4.24) se torna

$$\text{rms} [G_j^\alpha] = \sqrt{\text{var} [G_j]} = \sqrt{\frac{2N(N+1)}{(N+2)(2N+3)(2N+1)}}, \quad (4.26)$$

observe que no regime discutido a cima a dispersão da condutância é proporcional a  $N^{-1/2}$ , e por isso a flutuação tenderá á,

$$\text{rms} [G_j^\alpha] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{\sqrt{N}} 0.71 \times \frac{e}{4\pi}. \quad (4.27)$$

A figura (4.4) mostra a tendência do resultado analítico da expressão (4.27), a linha tracejada preta mostra a convergência, o seu valor é aproximadamente 0.707, enquanto a linha vermelha mostra que enquanto aumentamos o número de canais a dispersão irá se aproximando do seu valor universal.

Nesta subsecção e na próxima iremos sempre utilizar linhas sólidas azul para o sistema simétrico e linha sólida vermelha para o sistema no qual apenas o guia 1 está no regime semi-clássico. Em todos os casos no eixo das abscissas mostra o número de canais que são abertos em cada guia, enquanto o eixo das ordenadas mostra a dispersão da condutância de spin num terminal  $j = 2, 3$ . Iremos também mostrar a amplitude da Flutuação Universal da Condutância Fracionada, pois já vimos que sistemas em que não existe a presença da simetria Quiral o sistema terá uma condutância fracionada e iremos calcular a amplitude da flutuação da condutância fracionada no efeito Hall inverso de spin ( $G_{IsH}^f$ ).

## 4.2.2 Efeito Hall Inverso de Spin para classe de simetria de Wigner Dyson com a quebra da SRT

Sistemas em que há quebra da SRT ocorre devido a um campo magnético externo aplicado ( $\mathbf{B} \neq 0$ ) existindo também a quebra da simetria de rotação de spin devido a uma forte interação SO, de acordo com a TMA podemos ver na tabela (1.1) que o ensemble que descreve o sistema é Ensemble Circular Unitário(ECU). Para calcular novamente as possíveis médias, variâncias e covariância dos coeficientes de probabilidade de transmissão com a nova restrição



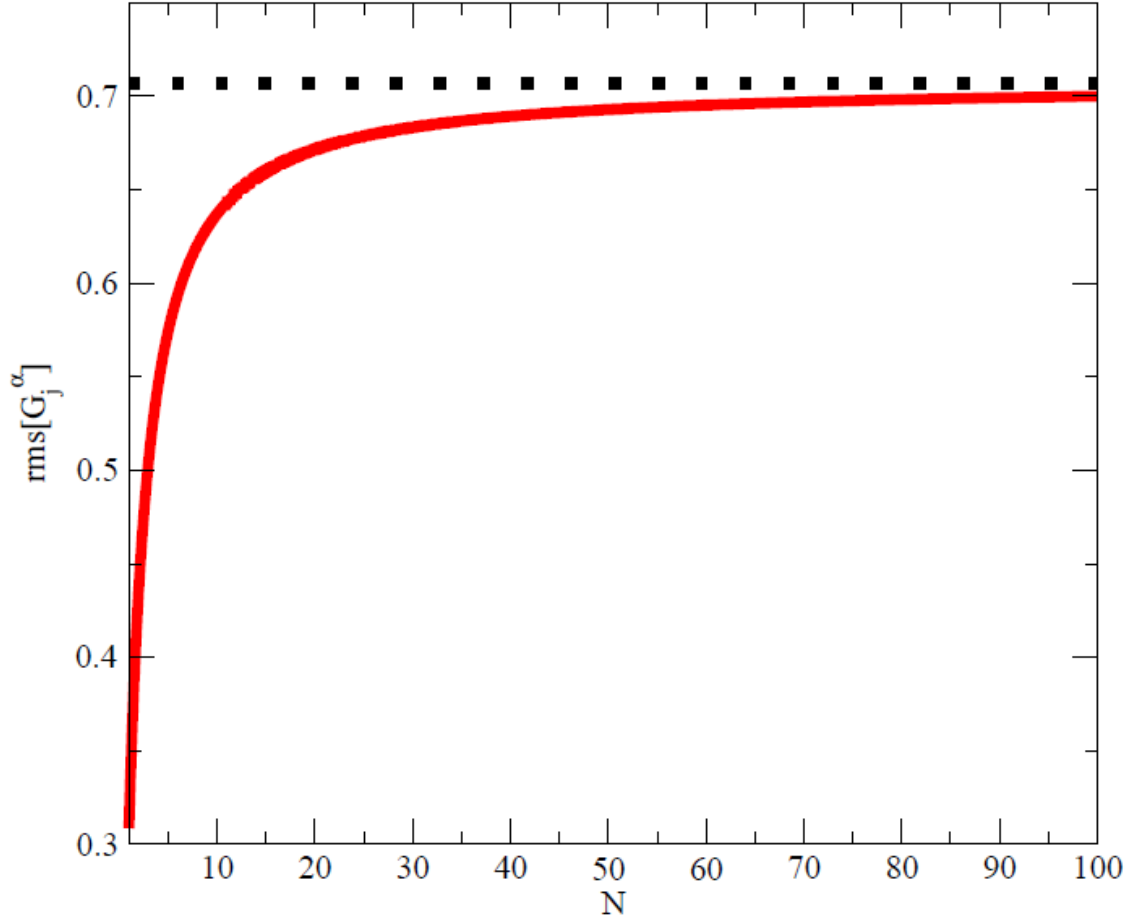


Figura 4.4: Este gráfico mostra a convergência da Flutuação Universal da Condutância de Spin no Efeito Hall Inverso para o sistema em que apenas o guia 1 está no regime semi-clássico, ou seja, caso em que  $N_1 = N \gg 1$ . A linha tracejada em preto é o valor da convergência  $\text{rms}[G_j^\alpha]\sqrt{N} \approx 0.707$  em unidades de  $\frac{e}{4\pi}$ .

utilizado o método diagramático discutido no capítulo 2 assim como os resultados obtidos são substituições diretas das equações (2.32) e (2.35) nas equações (4.20) e (4.21) portanto a variância da condutância de spin no guia 2 e 3, dado pelas equações

$$\text{var}[G_2^\alpha] = \frac{4N_1N_2(N_1N_2 + N_2^2 + 2N_2N_3 + N_3^2)}{N_T(N_2 + N_3)(4N_T^2 - 1)} \quad (4.28)$$

e

$$\text{var}[G_3^\alpha] = \frac{4N_1N_3(N_1N_3 + N_2^2 + 2N_2N_3 + N_3^2)}{N_T(N_2 + N_3)(4N_T^2 - 1)} \quad (4.29)$$

onde,  $N_T$  é o número total de guias abertos.

Para o regime simétrico a expressão para a dispersão da condutância de spin num guia transversal  $j = 2, 3$  (4.28) ou (4.29) será

$$\text{rms}[G_j^\alpha] = \sqrt{\text{var}[G_j]} = \sqrt{\frac{10}{3} \frac{N^2}{(36N^2 - 1)}} = \sqrt{\frac{5}{54}} \approx 0.30 \times \frac{e}{4\pi}, \quad (4.30)$$

lembrando que esta equação é válida para o regime semi-clássico ( $N \gg 1$ ).

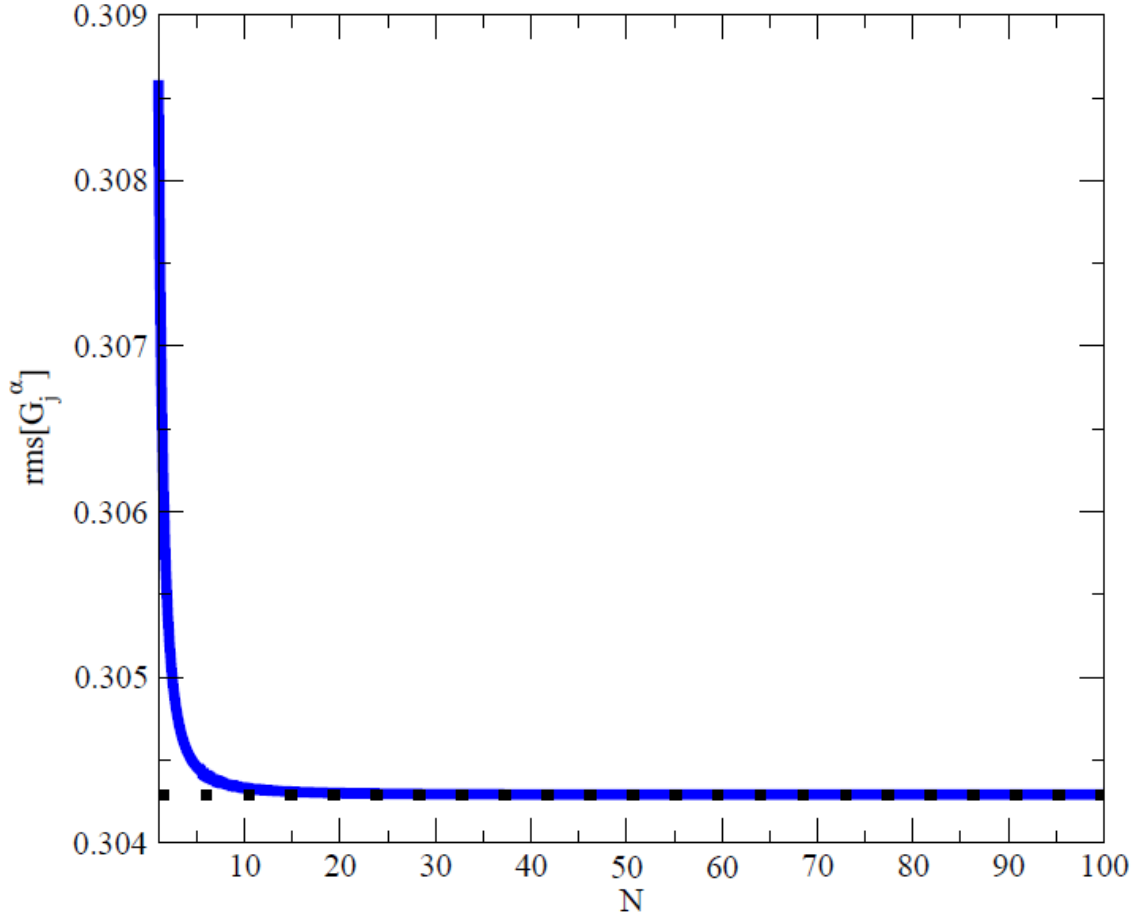


Figura 4.5: Este gráfico mostra a convergência da Flutuação Universal da Condutância de Spin no Efeito Hall Inverso para o sistema simétrico, no caso em que todos os guias estão no regime semi-clássico  $N_1 = N_2 = N_3 = N \gg 1$ . A linha azul mostra o resultado analítico da expressão (4.30), enquanto a linha tracejada em preto é mostra o valor aproximado da convergência que é  $\text{rms}[G_j^\alpha] \approx 0.304$  em unidades de  $\frac{e}{4\pi}$ .

Enquanto o regime em que apenas o guia 1 está no regime semi-clássico a equação (4.28)

ou (4.29) se torna

$$\text{rms} [G_j^\alpha] = \sqrt{\text{var} [G_j]} = \sqrt{\frac{2N(N+4)}{(N+2)(2N+3)(2N+5)}}, \quad (4.31)$$

observe que novamente no mesmo regime da subsecção anterior a dispersão da condutância é proporcional a  $N^{-1/2}$ , e por isso a amplitude da flutuação tenderá á

$$\text{rms} [G_j^\alpha] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{\sqrt{N}} 0.71 \times \frac{e}{4\pi}. \quad (4.32)$$

Nesta secção (4.2) calculamos a amplitude da flutuação universal da condutância de spin para a classe de Wigner Dyson, e vimos que com a expansão semi-clássica ( $N_T \gg 1$ ) podemos obter dois sistemas principais, o sistema simétrico quando todos os guias estão no regime semi-clássico ( $N_1 = N_2 = N_3 \gg 1$ ) e o sistema que apenas o guia que bombeia spin para dentro do reservatório está no regime semi-clássico ( $N_2 = N_3 = 1, N_1 \gg 1$ ). Entretanto apenas para o sistema simétrico existe uma convergência natural (4.25) e (4.30) e para o sistema em que apenas o guia 1 está no regime semi-clássico a dispersão da condutância é proporcional a  $N^{-1/2}$  (4.26) e (4.31). Entretanto queremos números universais que caracterizem o Efeito Hall Inverso de Spin para a classe de Wigner Dyson e para isso iremos tirar a razão entre as equações que apresentam a preservação da SRT (4.25) e que existe quebra da SRT (4.30) ambos para o caso simétrico. Iremos utilizar uma nova notação, será adicionado um índice subscrito nas condutâncias de  $G_P^\alpha$  e  $G_Q^\alpha$  no qual  $P$  representa a preservação da SRT e  $Q$  representa a quebra da SRT.

Para o regime simétrico temos que a razão entre as equações (2.45) e (4.30) é dado por

$$\frac{\text{rms} [G_P^\alpha]}{\text{rms} [G_Q^\alpha]} = 1. \quad (4.33)$$

lembrando que foi possível obter o resultado fazendo com que há muitos canais abertos em cada guia  $N \gg 1$ .

E a razão entre as equações que apenas o guia 1 está no regime semi-clássico é dado pela razão entre as equações (4.26) para o caso que apresenta SRT e (4.31) para o caso em que SRT é quebrada. Fizemos a razão entre elas pois dessa maneira a expressão fica proporcional

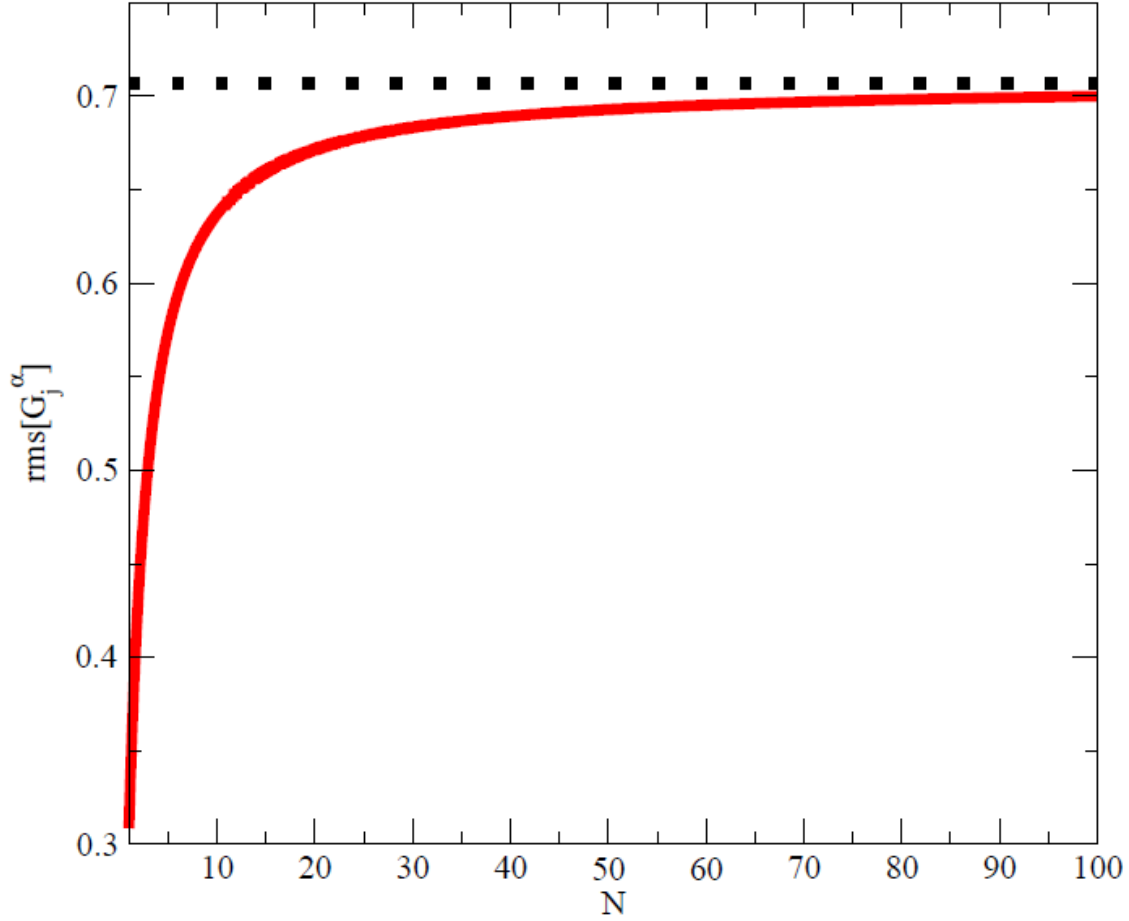


Figura 4.6: Este gráfico mostra a convergência da Flutuação Universal da Condutância de Spin no Efeito Hall Inverso para o sistema em que apenas o guia 1 está no regime semi-clássico, ou seja, caso em que  $N_1 = N \gg 1$ . A linha vermelha mostra o resultado analítico da expressão (4.31), enquanto a linha tracejada em preto é o valor da convergência  $\text{rms}[G_j^\alpha] \approx 0.707\sqrt{N}$  em unidades de  $\frac{e}{4\pi}$ .

a  $N^0$  e quando  $N_1 = N \gg 1$  também irá convergir naturalmente á um valor universal. Para o regime que apenas o guia 1 está no regime semi-clássico temos que a razão entre as equações (4.26) e (4.31) é dado por

$$\frac{\text{rms}[G_P^\alpha]}{\text{rms}[G_Q^\alpha]} = 1 \quad (4.34)$$

lembrando que  $N_2 = N_3 = 1$  e  $N_1 = N \gg 1$  e observe que a equação (4.34) converge naturalmente, pois tanto a equação (4.26) e (4.31) cai com fator de  $N^{-1/2}$ , portanto quando tiramos a razão a equação fica com ordem de  $N^0$ , o que leva a uma convergência direta

quando tomamos o regime semi-clássico.

### 4.3 Efeito Hall Inverso de Spin para classe de simetria Quiral

Nesta secção iremos calcular a amplitude Flutuação Universal da Condutância Quântizada de Spin utilizando a Classe Quiral com a SRT e com a quebra da SRT, para isso utilizamos o mesmo método discutidos no capítulo 3 desta dissertação assim como os resultados obtidos. Nesta secção iremos mostrar exclusivamente os nossos resultados obtidos para o Efeito Hall Inverso de Spin. Com os resultados obtidos nesta secção, podemos comparar com os resultados obtidos na secção anterior e analisar a diferença entre dois tipos de regimes, o Efeito Hall Inverso de Spin em materiais metálicos que são representado em Teoria de Matrizes Aleatória pela classe de Wigner Dyson e o Efeito Hall Inverso de Spin em materiais de Dirac que são representados em Teoria de Matrizes Aleatórias pela Classe Quiral, podendo haver também Efeito Hall Inverso de Spin em materiais super condutores, porém estes últimos materiais não foram analisados, analisar a diferenças entre essas classes é muito importante pois artigos anteriores[11] nos remetem ao fato que apenas quando existe quiralidade no sistema é que a condutância é quantizada, enquanto não existir quiralidade a condutância é fracionada, então precisamos saber qual é a Flutuação Universal quando existe quantização para isso é necessário que nosso sistema tenha quiralidade. Assim também iremos mostrar que quando existe a quebra da simetria quiral no regime simétrico temos que a razão entre a flutuação universal da condutância com reversão temporal e com a quebra de reversão temporal é multiplicada por um fator de 2, como vimos no capítulo 3, também iremos apresentar uma nova universalidade que pode distinguir a Classe Quiral da Classe de Wigner Dyson quando o sistema tem apenas o guia 1 no regime semi-clássico.

Partiremos novamente da equação de Landauer-Buttiker,

$$I_i^\alpha = \frac{e^2}{h} \sum_{j,\alpha'} \tau_{i,j}^{\alpha\alpha'} (\mu_i - \mu_j) \quad (4.35)$$

onde podemos também utilizar o termo de conservação de probabilidade, porém neste caso teremos que introduzir os efeitos de quiralidade no problema, na secção 3, foi discutido que quando temos quiralidade o espaço é dobrado, logo  $N \rightarrow 2 \times N$ .

Fazendo os mesmos cálculos a equação do potencial ficará,

$$V_1 = \frac{1}{e} \sum_{\beta \neq 0} \frac{\tau_{11}^{0\beta} \mu_1^\beta}{(4N_1 - \tau_{11}^{00})} \quad (4.36)$$

e a equação da corrente de carga

$$I_j = -\frac{e}{h} \sum_{\beta \neq 0} \left( \frac{\tau_{11}^{0\beta} \tau_{j1}^{00}}{4N_1 - \tau_{11}^{00}} + \tau_{j1}^{0\beta} \right) \mu^\beta. \quad j=2,3. \quad (4.37)$$

Substituindo as equações, encontramos a condutância de spin para a classe quiral

$$G_j^{s1} = -\frac{e}{h} \left( \frac{\tau_{11}^{0\alpha} \tau_{j1}^{00}}{4N_1 - \tau_{11}^{00}} + \tau_{j1}^{0\alpha} \right) m^\alpha \quad j=2,3. \quad (4.38)$$

Para encontrar a média da condutância (4.38) também foi utilizado a expansão semi-clássica e os resultados das médias dos coeficientes de transmissão do capítulo 3, com isso temos que a média é nula também independente da SRT

$$\langle G_j \rangle = 0. \quad (4.39)$$

Como a média é nula, podemos novamente calcular a flutuação em torno da média, dado pela dispersão, para isso precisamos do segundo momento da condutância, utilizando novamente a expansão semi-clássica temos que o segundo momento é dado por

$$\langle G_j^2 \rangle = \frac{A'}{B'}, \quad (4.40)$$

onde temos que o termo  $A'$  pode é dado por

$$\begin{aligned}
A' = & \langle \tau_{11}^{00} \rangle^4 \text{var} [\tau_{j1}^{\alpha\alpha}] + 256N_1^4 \text{var} [\tau_{j1}^{\alpha\alpha}] - 16N_1 \langle \tau_{11}^{00} \rangle \langle \tau_{11}^{\alpha\alpha} \rangle \langle \tau_{j1}^{00} \rangle \text{covar} [\tau_{j1}^{00}, \tau_{11}^{\alpha\alpha}] \quad (4.41) \\
& + 8N_1 \langle \tau_{11}^{00} \rangle \langle \tau_{11}^{\alpha\alpha} \rangle \langle \tau_{j1}^{00} \rangle \text{covar} [\tau_{j1}^{00}, \tau_{11}^{00}] + 2 \langle \tau_{11}^{00} \rangle^2 \langle \tau_{11}^{\alpha\alpha} \rangle \langle \tau_{j1}^{00} \rangle \text{covar} [\tau_{j1}^{00}, \tau_{11}^{\alpha\alpha}] \\
& - 2 \langle \tau_{11}^{00} \rangle^2 \langle \tau_{11}^{\alpha\alpha} \rangle \langle \tau_{j1}^{00} \rangle \text{covar} [\tau_{j1}^{00}, \tau_{11}^{00}] + 24N_1 \langle \tau_{11}^{00} \rangle^2 \langle \tau_{11}^{\alpha\alpha} \rangle \text{covar} [\tau_{j1}^{\alpha\alpha}, \tau_{j1}^{00}] \\
& + 24N_1 \langle \tau_{11}^{00} \rangle^2 \langle \tau_{j1}^{00} \rangle \text{covar} [\tau_{j1}^{\alpha\alpha}, \tau_{11}^{\alpha\alpha}] - 16N_1 \langle \tau_{11}^{00} \rangle^2 \langle \tau_{j1}^{00} \rangle \text{covar} [\tau_{11}^{00}, \tau_{j1}^{\alpha\alpha}] \\
& - 8N_1 \langle \tau_{11}^{00} \rangle \langle \tau_{11}^{\alpha\alpha} \rangle^2 \text{var} [\tau_{j1}^{00}] - 96N_1^2 \langle \tau_{11}^{00} \rangle \langle \tau_{11}^{\alpha\alpha} \rangle \text{covar} [\tau_{j1}^{\alpha\alpha}, \tau_{j1}^{00}] \\
& - 8N_1 \langle \tau_{11}^{00} \rangle \langle \tau_{j1}^{00} \rangle^2 \text{var} [\tau_{11}^{\alpha\alpha}] + 8N_1 \langle \tau_{11}^{00} \rangle \langle \tau_{j1}^{00} \rangle^2 \text{covar} [\tau_{11}^{\alpha\alpha}, \tau_{11}^{00}] \\
& - 96N_1^2 \langle \tau_{11}^{00} \rangle \langle \tau_{j1}^{00} \rangle \text{covar} [\tau_{j1}^{\alpha\alpha}, \tau_{11}^{\alpha\alpha}] + 32N_1^2 \langle \tau_{11}^{00} \rangle \langle \tau_{j1}^{00} \rangle \text{covar} [\tau_{11}^{00}, \tau_{j1}^{\alpha\alpha}] \\
& + 32N_1^2 \langle \tau_{11}^{\alpha\alpha} \rangle \langle \tau_{j1}^{00} \rangle \text{covar} [\tau_{j1}^{00}, \tau_{11}^{\alpha\alpha}] + \langle \tau_{11}^{\alpha\alpha} \rangle^2 \langle \tau_{j1}^{00} \rangle^2 \text{var} [\tau_{11}^{00}] - 16N_1 \langle \tau_{11}^{00} \rangle^3 \text{var} [\tau_{j1}^{\alpha\alpha}] \\
& - 2 \langle \tau_{11}^{00} \rangle^3 \langle \tau_{11}^{\alpha\alpha} \rangle \text{covar} [\tau_{j1}^{\alpha\alpha}, \tau_{j1}^{00}] - 2 \langle \tau_{11}^{00} \rangle^3 \langle \tau_{j1}^{00} \rangle \text{covar} [\tau_{j1}^{\alpha\alpha}, \tau_{11}^{\alpha\alpha}] \\
& + 2 \langle \tau_{11}^{00} \rangle^3 \langle \tau_{j1}^{00} \rangle \text{covar} [\tau_{11}^{00}, \tau_{j1}^{\alpha\alpha}] + 96N_1^2 \langle \tau_{11}^{00} \rangle^2 \text{var} [\tau_{j1}^{\alpha\alpha}] + \langle \tau_{11}^{00} \rangle^2 \langle \tau_{11}^{\alpha\alpha} \rangle^2 \text{var} [\tau_{j1}^{00}] \\
& + \langle \tau_{11}^{00} \rangle^2 \langle \tau_{j1}^{00} \rangle^2 \text{var} [\tau_{11}^{\alpha\alpha}] - 2 \langle \tau_{11}^{00} \rangle^2 \langle \tau_{j1}^{00} \rangle^2 \text{covar} [\tau_{11}^{\alpha\alpha}, \tau_{11}^{00}] - 256N_1^3 \langle \tau_{11}^{00} \rangle \text{var} [\tau_{j1}^{\alpha\alpha}] \\
& + 16N_1^2 \langle \tau_{11}^{\alpha\alpha} \rangle^2 \text{var} [\tau_{j1}^{00}] + 128N_1^3 \langle \tau_{11}^{\alpha\alpha} \rangle \text{covar} [\tau_{j1}^{\alpha\alpha}, \tau_{j1}^{00}] + 16N_1^2 \langle \tau_{j1}^{00} \rangle^2 \text{var} [\tau_{11}^{\alpha\alpha}] \\
& + 16 \langle \tau_{j1}^{00} \rangle \text{covar} [\tau_{j1}^{\alpha\alpha}, \tau_{11}^{\alpha\alpha}],
\end{aligned}$$

enquanto  $B'$  é simplesmente

$$B' = (\langle \tau_{11}^{00} \rangle - 4N_1)^4. \quad (4.42)$$

assim podemos calcular a amplitude da flutuação universal da condutância de spin

$$\text{rms} [G_j] = \sqrt{\text{var} [G_j]} = \sqrt{\langle G_j^2 \rangle - \langle G_j \rangle^2} = \sqrt{\langle G_j^2 \rangle}, \quad (4.43)$$

pois em todos os casos  $\langle G_j \rangle$  é nulo, portanto a flutuação universal da condutância de spin depende exclusivamente do segundo momento (4.40).

### 4.3.1 Efeito Hall Inverso de Spin para classe de simetria Quiral com a preservação da SRT

A preservação da SRT ocorre pois o campo magnético externo é nulo ( $\mathbf{B}=0$ ), juntamente como o fato do sistema apresentar quebra de Rotação de Spin, devido há uma forte interação

Spin Órbita, pela TMA podemos ver na tabela (1.1) que o ensemble que descreve o sistema é o Ensemble Circular Simplético Quiral (chECS). Para calcular a média, variância e covariância dos coeficientes de probabilidade de transmissão da equação (4.40) foi utilizado os resultados do capítulo 3 substituindo direto as equações (3.11) e (3.15). Com isso podemos calcular a dispersão da condutância de spin (4.43) entre o guia 2 e 3. O resultado da variância da condutância de spin é extremamente grande, portanto novamente iremos dividir em duas partes, chamaremos o numerador da expressão de  $M_2$ , dessa forma temos que a equação da variância da corrente de spin no guia 2 é

$$\text{var} [G_2^\alpha] = \frac{128N_1N_2N_T(M_2)}{(N_2 + N_3)(4N_T + 3)(16N_T^2 - 1)(2N_T - 3)(2N_T - 1)} \quad (4.44)$$

onde  $M_2$  é

$$\begin{aligned} M_2 &= 12N_2N_3N_T + 4N_1^2N_2 + 8N_1N_2^2 + 4N_1N_3^2 + 4N_2^3 + 4N_3^3 - 4N_1N_2 \\ &- 2N_1N_3 - 4N_2^2 - 6N_2N_3 - 2N_3^2 - 6N_2 - 3N_3 \end{aligned} \quad (4.45)$$

enquanto a variância da corrente de spin no guia 3 é

$$\text{var} [G_3^\alpha] = \frac{128N_1N_3N_T(M_3)}{(N_2 + N_3)(4N_T + 3)(16N_T^2 - 1)(2N_T - 3)(2N_T - 1)} \quad (4.46)$$

onde  $M_3$  é

$$\begin{aligned} M_3 &= 12N_2N_3N_T + 4N_1^2N_3 + 4N_1N_2^2 + 8N_1N_3^2 + 4N_2^3 + 4N_3^3 - 2N_1N_2 - 4N_1N_3 \\ &- 2N_2^2 - 6N_2N_3 - 4N_3^2 - 3N_2 - 6N_3 \end{aligned} \quad (4.47)$$

onde,  $N_T = N_1 + N_2 + N_3$ .

Para analisar o regime simétrico iremos substituir  $N_1 = N_2 = N_3 = N$  na equação (4.44) ou (4.46) portanto a expressão para a dispersão da condutância de spin num guia transversal  $j = 2, 3$  será

$$\text{rms} [G_j^\alpha] = \sqrt{\frac{64N^3(20N^2 - 6N - 3)}{(4N + 1)(144N^2 - 1)(2N - 1)(6N - 1)}} = \sqrt{\frac{5}{27}} \approx 0.43 \times \frac{e}{4\pi}. \quad (4.48)$$

lembrando que esta equação é válida para o regime semi-clássico ( $N \gg 1$ ). Este resultado está representado na figura (4.7) onde a linha sólida azul mostra a expressão analítica exata



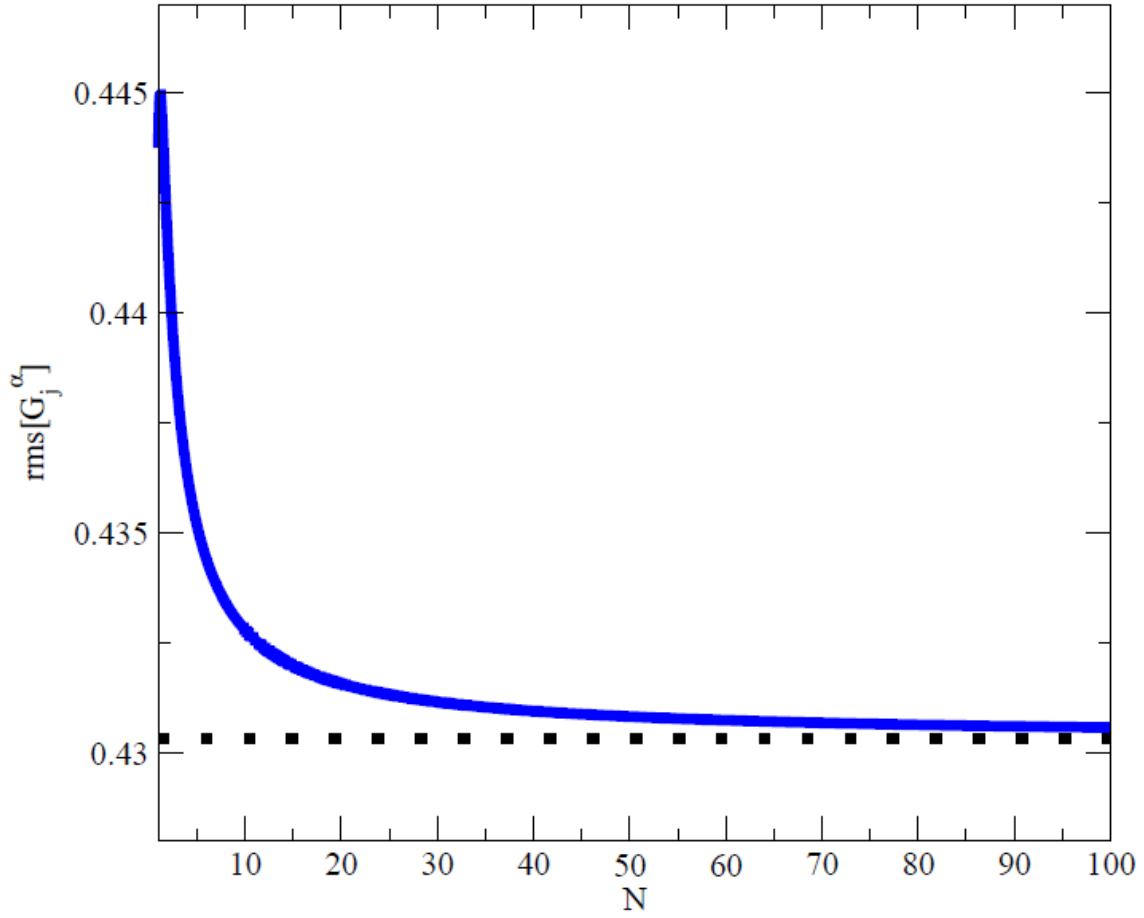


Figura 4.7: Este gráfico mostra a convergência da Flutuação Universal da Condutância de Spin no Efeito Hall Inverso para o sistema em que existe Quiralidade, neste sistema estamos no regime simétrico  $N_1 = N_2 = N_3 = N \gg 1$ . A linha tracejada em preto é o valor da convergência  $\text{rms}[G_j^\alpha] \approx 0.431$  este resultado está na ordem de  $e/4\pi$ .

da equação (4.48), mostramos que a medida que o número de canais abertos vão aumentando a dispersão da condutância vai convergindo suavemente ao seu valor universal que é aproximadamente 0.431.

Para o regime em que apenas o guia 1 está no regime semi-clássico iremos substituir  $N_2 = N_3 = 1$  e  $N_1 = N \gg 1$  na equação (4.44) ou (4.46) para encontrar a dispersão da condutância num guia transversal  $j = 2, 3$

$$\text{rms}[G_j^\alpha] = \sqrt{\frac{64N(N+2)(4N^2+18N+11)}{(4N+11)(4N+9)(2N+1)(2N+1)(4N+7)}}, \quad (4.49)$$

observe que no regime discutido acima a dispersão da condutância é proporcional a  $N^{-1/2}$ , e por isso a flutuação irá tenderá á,

$$\text{rms} [G_j^\alpha] = \frac{1}{\sqrt{N}} \times \frac{e}{4\pi}. \quad (4.50)$$

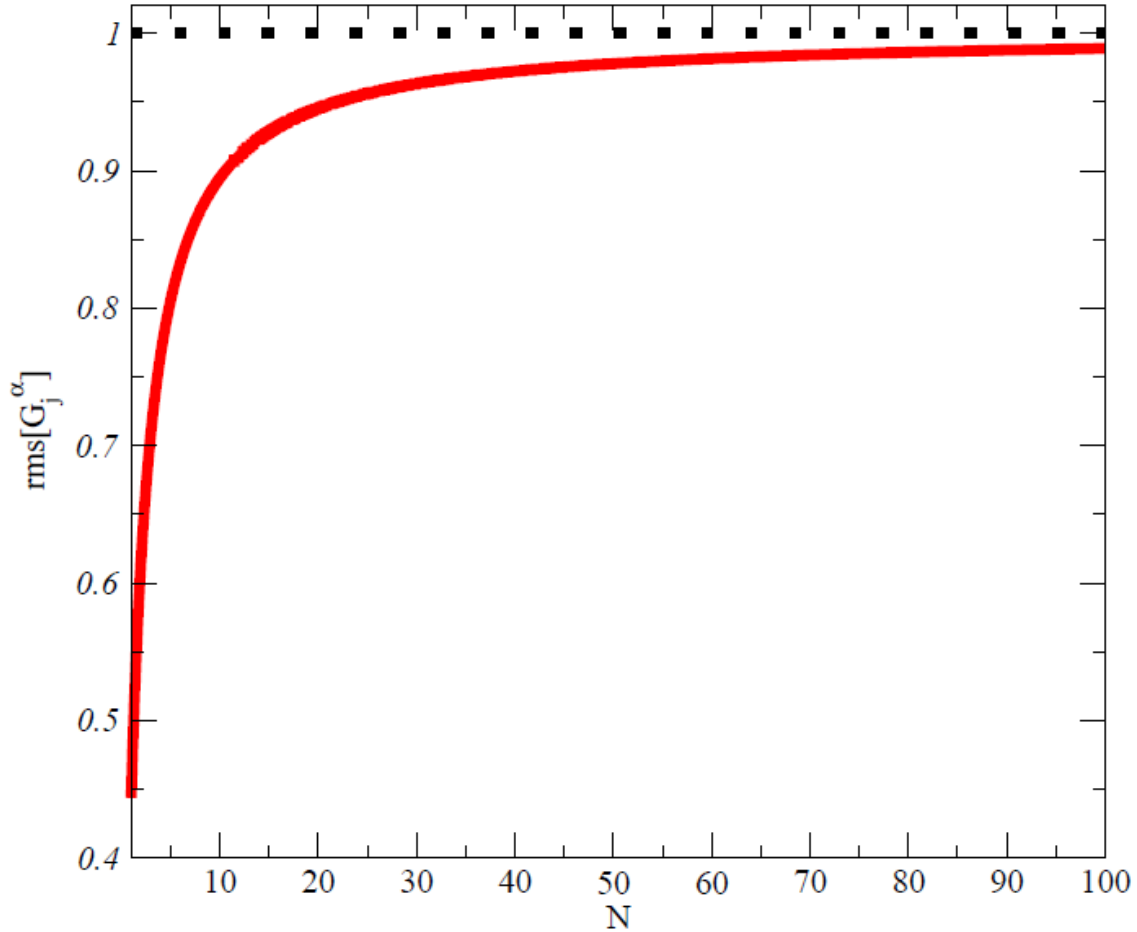


Figura 4.8: Este gráfico mostra a convergência da Flutuação Universal da Condutância de Spin no Efeito Hall Inverso para o sistema em que existe quiralidade, neste caso apenas o guia 1 está no regime semi-clássico, ou seja, caso em que  $N_1 = N \gg 1$ . A linha tracejada em preto é o valor da convergência  $\text{rms}[G_j^\alpha] \sqrt{N} \approx 1.0$

Nesta secção e na próxima secção iremos mostrar a Flutuação Universal Quântizada da Condutância, pois já vimos que apenas sistemas em que existe a presença da simetria Quiral o sistema terá a  $G_{I_sH}^q$ , ou seja, terá a Flutuação Universal da Condutância Quantizada de Spin no Efeito Hall Inverso.

### 4.3.2 Efeito Hall Inverso de Spin para classe de simetria Quiral com a quebra da SRT

Para o sistema em que não existe SRT ocorre devido há um campo magnético não nulo ( $\mathbf{B} \neq 0$ ), na cavidade caótica existe a quebra de SRS por causa da forte interação SO, de acordo com a TMA na tabela (1.1) podemos ver que o ensemble que descreve o sistema é o ensemble circular unitário quiral (chECU). Nesta secção iremos substituir os resultados da equações do capítulo 3 para a média (3.22) e covariância (3.26) dos coeficientes de transmissão.

A equação da variância da condutância de spin para o sistema em que existe quebra de SRT é

$$\text{var} [G_2^\alpha] = \frac{32N_1N_2(M'_2)}{(N_2 + N_3)(16N^2 - 9)(16N^2 - 1)}, \quad (4.51)$$

onde  $M'_2$  é

$$M'_2 = 24N_TN_2N_3 + 8N_1^2N_2 + 16N_1N_2^2 + 8N_1N_3^2 + 8N_2^3 + 8N_3^3 - 6N_2 - 3N_3, \quad (4.52)$$

enquanto a variância da corrente de spin no guia 3 é

$$\text{var} [G_3^\alpha] = \frac{32N_1N_3(M'_3)}{(N_2 + N_3)(16N^2 - 9)(16N^2 - 1)}, \quad (4.53)$$

$M'_3$  é dado por

$$M'_3 = 24N_TN_2N_3 + 8N_1^2N_3 + 16N_1N_3^2 + 8N_1N_2^2 + 8N_2^3 + 8N_3^3 - 6N_3 - 3N_2, \quad (4.54)$$

onde,  $N_T = N_1 + N_2 + N_3$ .

Substituindo as conduções para satisfazer o regime simétrico ( $N_1 = N_2 = N_3 = N$ ) na expressão (4.51) ou (4.53), encontramos a expressão para a dispersão da condutância de spin num guia transversal  $j = 2, 3$

$$\text{rms} [G_j^\alpha] = \sqrt{\frac{16}{3} \frac{N^2(40N^2 - 3)}{(16N^2 - 1)(144N^2 - 1)}} = \sqrt{\frac{5}{54}} \approx 0.30 \times \frac{e}{4\pi}. \quad (4.55)$$

Enquanto o regime em que apenas o guia 1 está no regime semi-clássico ( $N_1 = N$ ) a expressão (4.51) se torna

$$\text{rms} [G_j^\alpha] = \sqrt{\frac{16N(8N^2 + 48N + 55)}{(4N + 11)(4N + 5)(4N + 9)(4N + 7)}}, \quad (4.56)$$

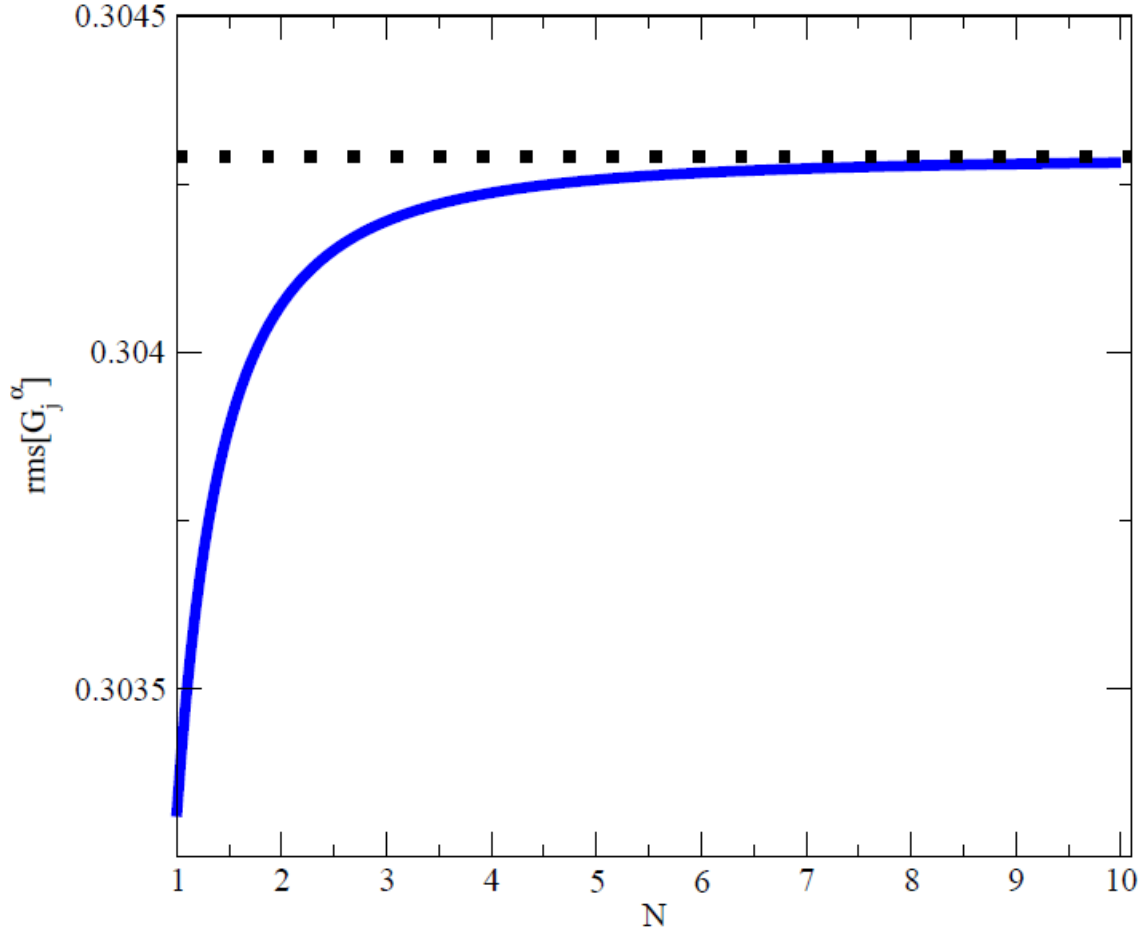


Figura 4.9: Este gráfico mostra a convergência da Flutuação Universal da Condutância de Spin no Efeito Hall Inverso para o sistema simétrico, no caso em que todos os guias estão no regime semi-clássico  $N_1 = N_2 = N_3 = N \gg 1$ . A linha azul mostra o resultado analítico da expressão (4.55), enquanto a linha tracejada em preto mostra o valor aproximado da convergência que é  $\text{rms}[G_j^\alpha] \approx 0.304$  em unidades de  $e/4\pi$ .

observe que novamente no mesmo regime da subsecção anterior a dispersão da condutância é proporcional a  $N^{-1/2}$ , e por isso a flutuação tenderá á,

$$\text{rms} [G_j^\alpha] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{2}} \approx \frac{0.70}{\sqrt{N}} \times \frac{e}{4\pi}. \quad (4.57)$$

Nesta secção calculamos a flutuação universal da condutância de spin para a classe Quiral, e vimos que com a expansão semi-clássica ( $N_T \gg 1$ ) podemos obter dois sistemas principais, o sistema simétrico e o sistema que apenas o guia que bombeia spin para dentro do reservatório

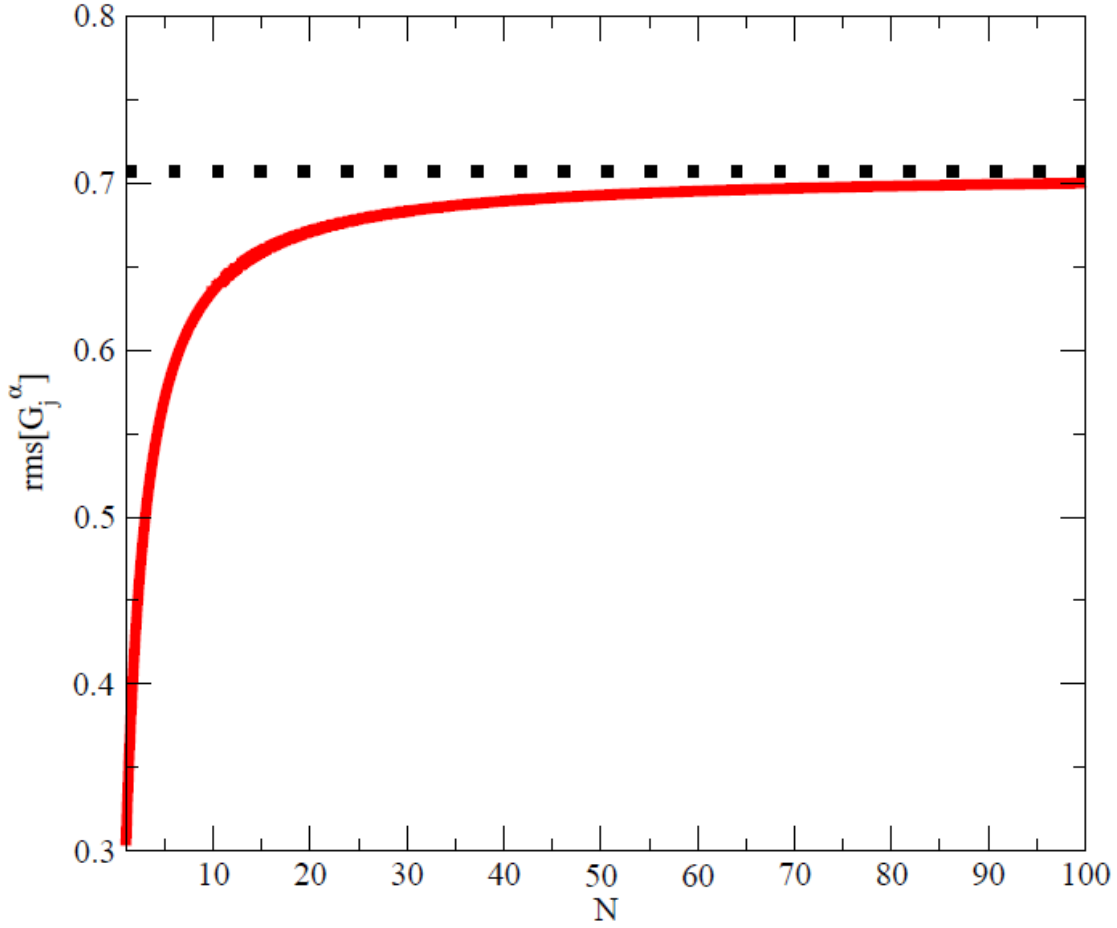


Figura 4.10: Este gráfico mostra a convergência da Flutuação Universal da Condutância de Spin no Efeito Hall Inverso para o sistema em que apenas o guia 1 está no regime semi-clássico, ou seja, caso em que  $N_1 = N \gg 1$ . A linha vermelha mostra o resultado analítico da expressão (4.56), enquanto a linha tracejada em preto é o valor da convergência  $\text{rms}[G_j^\alpha]\sqrt{N} \approx 0.707$ . O valor da condutância está em unidades de  $e/4\pi$ .

está no regime semi-clássico, entretanto apenas para o sistema simétrico a convergência é natural (4.48) e (4.55), enquanto o outro sistema a dispersão é proporcional a  $N^{-1/2}$  (4.50) e (4.57). Da mesma maneira feita com a classe de Wigner Dyson, não estamos interessados diretamente nessas equações, queremos comparar os números universais que caracterizem o Efeito Hall Inverso de Spin para a classe Quiral e que consiga distinguir muito bem a classe de Wigner Dyson, para isso novamente iremos fazer a razão entre as equações (4.48) e (4.55) ambas para o regime simétrico e a razão entre as equações (4.50) e (4.57) ambas

para o regime que apenas o guia 1 está no limite semi-clássico. Será adicionado um índice subscrito nas condutâncias de  $G_{chP}^\alpha$  e  $G_{chQ}^\alpha$  no qual  $chP$  representa a preservação da SRT para o sistema Quiral e  $chQ$  representa a quebra da SRT para o sistema Quiral.

Para o regime simétrico temos que a razão entre as equações (4.48) e (4.55) é dado por

$$\frac{\text{rms}[G_{chP}^\alpha]}{\text{rms}[G_{chQ}^\alpha]} = \sqrt{2} \approx 1.41. \quad (4.58)$$

lembrando que  $N \gg 1$ .

Para o regime que apenas o guia 1 está no regime semi-clássico temos que a razão entre as equações (4.50) e (4.57) é dado por

$$\frac{\text{rms}[G_{chP}^\alpha]}{\text{rms}[G_{chQ}^\alpha]} = \sqrt{2} \approx 1.41. \quad (4.59)$$

lembrando que sempre para ver a convergência tomamos o limite que  $N_1 = N \gg 1$  e observe que a equação (4.59) agora converge naturalmente, pois tanto a equação (4.50) e (4.57) era proporcional a  $N^{-1/2}$ , portanto quando tiramos a razão a equação fica com ordem de  $N^0$ , o que leva a uma convergência direta quando tomamos o regime semi-clássico.

Portanto chegamos a conclusão que a relação entre a classe Quiral e a classe de Wigner Dyson é

$$\frac{\text{rms}[G_{chP}^\alpha]}{\text{rms}[G_{chQ}^\alpha]} = \sqrt{2} \times \frac{\text{rms}[G_P^\alpha]}{\text{rms}[G_Q^\alpha]}, \quad (4.60)$$

em todos os casos do limite semi-clássico existe um fator de  $\sqrt{2}$  entre a classe com simetria Quiral e a classe com simetria de Wigner Dyson que está de acordo com a equação (3.55) do Efeito Hall de Spin.

# Capítulo 5

## Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho obtemos resultados analíticos de flutuações universais da condutância de Spin-Hall em uma cavidade caótica de Dirac. Mostramos que a expressão para a dispersão da corrente de spin no Efeito Hall de Spin numa cavidade caótica de Dirac é diferente da corrente de spin no Efeito Hall de Spin numa cavidade caótica de Schrödinger, e isto é muito importante pois vemos que no regime quântico extremo, onde apenas 1 canal é aberto em cada guia, a flutuação universal da corrente de spin difere em ambos sistemas, e com isso a flutuação universal da condutância também é diferente. Foi visto que no regime semi-clássico onde cada guia tem vários canais abertos a variância da condutância dos ensembles quirais converge para o dobro da variância da condutância dos ensembles de Wigner-Dyson.

Analisamos analiticamente também a condutância no Efeito Hall Inverso de Spin em uma cavidade caótica de Dirac, e também foi visto que a condutância dos ensembles quirais é o dobro da condutância dos ensembles de Wigner-Dyson. Com base no trabalho feito, fica faltando analisar o Efeito Hall de Spin e o Efeito Hall de Spin Inverso em supercondutores utilizando a classe de Altland-Zimbauer, com os nossos resultados podemos calcular a flutuação universal do ângulo Hall ( $\theta_{sH}$ )[[62],[63][64]] que mostra a eficiência da “transformação” de corrente pura de spin em corrente de carga no Efeito Hall Inverso de Spin tanto em cavidades caóticas de Schrödinger quanto em cavidades caóticas de Dirac.

# Apêndice A

## Média da Condutância de Spin-Hall para o sistema em que a SRT é preservada

Primeiramente vamos lembrar que podemos escrever a equação da condutância para sistemas quirais com a preservação da SRT da seguinte forma,

$$\frac{G}{G_0} = \text{Tr} [\Sigma_z U C_i^\alpha U^T \Sigma_z U C_j^0 U^T] \quad (\text{A.1})$$

e seguindo as referências [[15],[16]], podemos escrever a equação (A.1) como um diagrama de acordo com a figura abaixo. onde  $\Sigma_z$  é a equação (1.38),  $C_i^\alpha$  e  $C_j$  são os projetores.

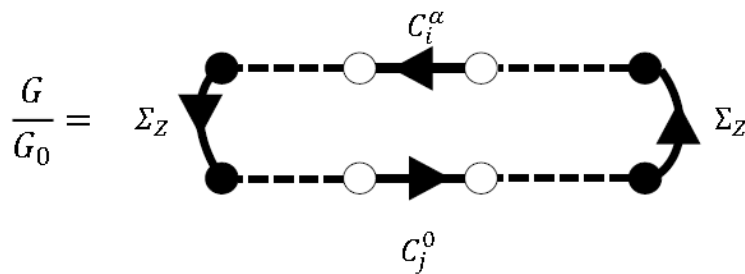


Figura A.1: O diagrama representa a equação (A.1).



Para encontrar a média da equação (A.1), é preciso encontrar todas as possíveis combinações do diagrama da figura (A.1), seguindo algumas regras que pode ser encontrada nas referências [[15],[16]], portanto podemos ver na figura (A.2) que a média da condutância é dado por e então nós podemos fazer os cálculos e chegar a seguinte expressão da média da

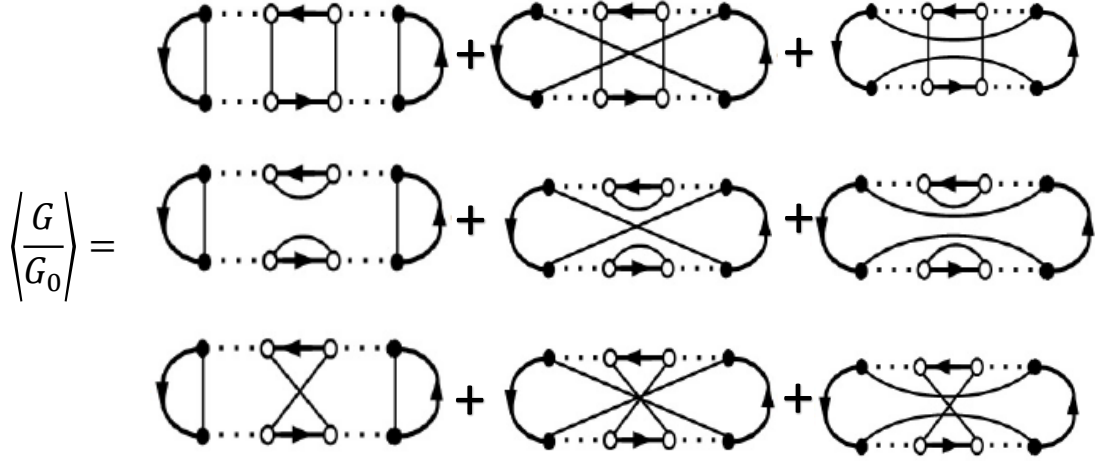


Figura A.2: A representação diagramática da média da equação (A.1).

condutância

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{G}{G_0} \right\rangle = & V_{1,1} [(\text{Tr}(\Sigma_z))^2 \times \text{Tr}(C_i^\alpha C_j^0) + \text{Tr}(\Sigma_z^2) \times \text{Tr}(C_i^\alpha) \text{Tr}(C_j^0) + \text{Tr}(\Sigma_z^2) \times \text{Tr}(C_i^\alpha C_j^0)] + \\
& V_2 [(\text{Tr}(\Sigma_z))^2 \times \text{Tr}(C_i^\alpha C_j^0) + (\text{Tr}(\Sigma_z))^2 \times \text{Tr}(C_i^\alpha) \text{Tr}(C_j^0) + \text{Tr}(\Sigma_z^2) \times \text{Tr}(C_i^\alpha) \text{Tr}(C_j^0)] \\
& + V_2 [3\text{Tr}(\Sigma_z^2) \times \text{Tr}(C_i^\alpha C_j^0)], \tag{A.2}
\end{aligned}$$

onde  $V_2$  e  $V_{1,1}$  são as relações de recorrência que pode ser visto nas referências [[15],[16]]. Para o nosso problema seria necessário 11.025 diagramas dos quais 6.300 não são nulos, portanto desenhar os diagramas essa quantidade grande de diagramas é uma tarefa muito árdua. Conseguimos fazer uma análise do método sem a necessidade de desenhar os diagramas, para isso foi dado nome a cada ponto do diagrama que representa a função, como a função é representado por 4 pontos pretos e 4 pontos brancos, então os nomes dados aos pontos pretos foram  $\Sigma_1^C$ ,  $\Sigma_1^B$ ,  $\Sigma_2^C$  e  $\Sigma_2^B$ , onde o  $C$  (Cima) e  $B$  (baixo) representa a posição em que o

ponto preto está e 1 ou 2 representa se é o primeiro ou o segundo ponto preto no diagrama e  $\Sigma$  é a matriz que o ponto preto representa, analogamente temos 4 pontos brancos, e os nomes dado a eles são  $Ci_1^C$ ,  $Ci_2^C$ ,  $Cj_1^B$  e  $Cj_2^B$ , onde  $Ci$  e  $Cj$  são os projetores, note que em cima só existe  $Ci$  e em baixo só existe  $Cj$ , o que está de acordo com o diagrama da figura (A.2), portanto tomar a média é fazer todas as possíveis combinações das letras de acordo com a mesma regra utilizada para o diagrama, então utilizando um software matemático simples ele me da as seguintes combinações

- 1) A combinação  $[\Sigma_1^C, \Sigma_1^B][\Sigma_2^C, \Sigma_2^B][Ci_1^C, Cj_1^B][Ci_2^C, Cj_2^B]$  nos dá a seguinte equação

$$V_{1,1} (\text{Tr} (\Sigma_z))^2 \times \text{Tr} (C_i^\alpha C_j^0) \quad (\text{A.3})$$

- 2) A combinação  $[\Sigma_1^C, \Sigma_1^B][\Sigma_2^C, \Sigma_2^B][Ci_1^C, Ci_2^C][Cj_1^B, Cj_2^B]$  nos dá a seguinte equação

$$V_2 (\text{Tr} (\Sigma_z))^2 \times \text{Tr} (C_i^\alpha) \text{Tr} (C_j^0) \quad (\text{A.4})$$

- 3) A combinação  $[\Sigma_1^C, \Sigma_1^B][\Sigma_2^C, \Sigma_2^B][Ci_1^C, Cj_2^B][Ci_2^C, Cj_1^B]$  nos dá a seguinte equação

$$V_2 (\text{Tr} (\Sigma_z))^2 \times \text{Tr} (C_i^\alpha) \text{Tr} (C_j^0) \quad (\text{A.5})$$

- 4) A combinação  $[\Sigma_1^C, \Sigma_2^B][\Sigma_2^C, \Sigma_1^B][Ci_1^C, Cj_1^B][Ci_2^C, Cj_2^B]$  nos dá a seguinte equação

$$V_2 \text{Tr} (\Sigma_z^2) \times \text{Tr} (C_i^\alpha C_j^0) \quad (\text{A.6})$$

- 5) A combinação  $[\Sigma_1^C, \Sigma_2^B][\Sigma_2^C, \Sigma_1^B][Ci_1^C, Ci_2^C][Cj_1^B, Cj_2^B]$  nos dá a seguinte equação

$$V_2 \text{Tr} (\Sigma_z^2) \times \text{Tr} (C_i^\alpha) \text{Tr} (C_j^0) \quad (\text{A.7})$$

- 6) A combinação  $[\Sigma_1^C, \Sigma_2^B][\Sigma_2^C, \Sigma_1^B][Ci_1^C, Cj_2^B][Ci_2^C, Cj_1^B]$  nos dá a seguinte equação

$$V_{1,1} \text{Tr} (\Sigma_z^2) \times \text{Tr} (C_i^\alpha C_j^0) \quad (\text{A.8})$$

- 7) A combinação  $[\Sigma_1^C, \Sigma_2^C][\Sigma_1^B, \Sigma_2^B][Ci_1^C, Cj_1^B][Ci_2^C, Cj_2^B]$  nos dá a seguinte equação

$$V_2 \text{Tr} (\Sigma_z^2) \times \text{Tr} (C_i^\alpha C_j^0) \quad (\text{A.9})$$

8) A combinação  $[\Sigma_1^C, \Sigma_2^C][\Sigma_1^B, \Sigma_2^B][C_{i_1}^C, C_{i_2}^C][C_{j_1}^B, C_{j_2}^B]$  nos dá a seguinte equação

$$V_{1,1} (\text{Tr} (\Sigma_z))^2 \times \text{Tr} (C_i^\alpha) \text{Tr} (C_j^0) \quad (\text{A.10})$$

9) A combinação  $[\Sigma_1^C, \Sigma_2^C][\Sigma_1^B, \Sigma_2^B][C_{i_1}^C, C_{j_2}^B][C_{i_2}^C, C_{j_1}^B]$  nos dá a seguinte equação

$$V_2 \text{Tr} (\Sigma_z^2) \times \text{Tr} (C_i^\alpha C_j^0) \quad (\text{A.11})$$

onde os itens (1-3) representa a primeira coluna da figura (A.2), os itens de (3-6) representa a 2º coluna e os itens de (7-9) represente a 3º coluna, somando as equações (A.3) até (A.9) recuperamos a média da condutância, dada pela equação (A.2). Para a variância da condutância foram 6.300 combinações, com mais de 300 paginas de análise, por isso é impossível botar nesta dissertação.

# Referências Bibliográficas

- [1] Napolitano, J.; Sakurai, J. J. **Mecânica Quântica Moderna**, tradução técnica: Sílvio Renato Dahmen, 2ed.-Porto Alegre, 2013.
- [2] S. A. Goudsmit, G. E. Uhlenbeck. **Spinning Electrons and the Structure of Spectra**. *Nature*, 117:264-265, 1926.
- [3] W. Pauli. **Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren**. *Z. Phys.* 31:765-783, 1925.
- [4] I. Zutic, J. Fabian e S. de Sarma. **Spintronics: Fundamentals and applications**. *Rev. Mod. Phys.* 76: 323 2004.
- [5] G. Prinz. **Magnetoelectronics**. *Science*. 282:1660, 1998.
- [6] S. A. Wolf *et al.* **Spintronics: A Spin-Based Electronics Vision for the Future**. *Science*. 294:1488, 2001.
- [7] J. Sinova *et al.* **Universal Intrinsic Spin Hall Effect**. *Phys. Rev. Lett.*, 92:126603-126606, 2004.
- [8] S. Murakami, N. Nagaosa e S. C. Zhang. **Dissipationless quantum spin current at room temperature** *Science*, 301:1348-1351 2003.
- [9] C. L. Kane e E. J. Mele. **Quantum Spin Hall Effect in Graphene**. *Phys. Rev. Lett.*, 95:226801-226804, 2005.

- [10] B.A. Bernevig e S.C. Zhang. **Quantum Spin Hall Effect**. *Phys. Rev. Lett.* 96:106802, 2006.
- [11] Zhenhua Qiao, Jian Wang, Yadong Wei e Hong Guo. **Universal Quantized Spin-Hall Conductance Fluctuations in Graphene**. *Phys. Rev. Lett.* 101, 016804 (2008).
- [12] Wein Ren, Zhenhua Qiao, Jian Wang, Qingfeng Sun, e Hong Guo. **Universal Spin-Hall Conductance Fluctuations in Two Dimensions** *Phys. Rev. Lett.* 97, 066603 (2006).
- [13] J. H. Bardarson, I. Adagideli, e Ph. Jacquod. **Mesoscopic Spin Hall Effect**. *Phys. Rev. Lett* 98:196601 2007.
- [14] BEENAKKER, C. W. J. **Applications of random matrix theory to condensed matter and optical physics**. arXiv:0904.1432v2, 2009.
- [15] BEENAKKER, C.W. J.; BROUWER, P.W. **Diagrammatic method of integration over the unitary group, with applications to quantum transport in mesoscopic systems**. *J. Math. Phys.* 37,4904, 1996.
- [16] BARROS, M. S. M. **Método Diagramático Aplicado ao Biliar de Dirac Caótico**. Tese de mestrado, UFRPE, 2014.
- [17] BARROS, M. S. M. *et al.* **Open chaotic Dirac billiards: Weak(anti) localization, conductance fluctuations and decoherence**. *Phys. Rev. B.* 88:245133 2013.
- [18] A. Azevedo, L. H. Vilela-Leao, R. L. Rodriguez-Suarez, A. B. Oliveira, and S. M. Rezende. **dc effect in ferromagnetic resonance: Evidence of the spin-pumping effect?**. *J. Appl. Phys.* 97, 10C715 2005.
- [19] E. Saitoh, M. Ueda, H. Miyajima e G. Tatara. **Conversion of spin current into charge current at room temperature: Inverse spin-Hall effect**. *App. Phys. Lett.* 88:182509 2006
- [20] I. Adagideli, J. H. Bardarson e Ph. Jacquod. **Electrical probing of the spin conductance of mesoscopic cavities**. *J. Phys.: Condens. Matter* 21:155503 2009.

- [21] Robert S. Whitney, Philippe Jacquod, e Cyril Petitjean. **Dephasing in quantum chaotic transport: A semiclassical approach.** *Physical Review B* 77:045315 2008.
- [22] DATTA, S. **Electronic Transport in Mesoscopic Systems.** Cambridge, University Press 1995.
- [23] Y. Nazarov e Y. Blanter. **Quantum Transport.** Cambridge University Press, 2009.
- [24] Vas Wees, B. J. *et al.* **Quantized Conductance of Point Contacts in a Two-Dimensional Electron Gas.** *Phys. Rev. Lett.* 60:848-850, 1988.
- [25] D. Wharam *et al.* **One-Dimensional Transport and the Quantization of Ballistic Resistance.** *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 21:209?214, 1988.
- [26] P. A. Lee e A. Douglas Stone. **Universal Conductance Fluctuations in Metals.** *Phys. Rev. Lett.* 55:1622?1625, 1985.
- [27] C. W. J. Beenakker. **Random-matrix theory of quantum transport.** *Rev.Mod. Phys.* 69:731?808, 1997.
- [28] P. Mohanty e R. A. Webb. **Anomalous Conductance Distribution in Quasi- One-Dimensional Gold Wires: Possible Violation of the One-Parameter Scaling Hypothesis.** *Phys. Rev. Lett.* 88:146601, 2002.
- [29] M. Köning *et al.* **Quantum Spin Hall Insulator State in HgTe Quantum Wells** *Science*, 318:766-770 2007.
- [30] R. Landauer, *Phys. Lett.* 85A:91 1981.
- [31] Mehta, M. L. **Random Matrices.** 688 p. ISBN: 0-12-088409-7, 2004.
- [32] KOUWENHOVEN, L. P.; MARCUS, C. M. **Quantum dots.** *Phys. World*, pag. 35, junho, 1998.
- [33] GREINER, W. **Relativistic quantum mechanics: wave equations.** 3 ed., Spring, (1990).
- [34] WESTERVELT, R. M. **Graphene nanoelectronic.** *Science*, 320:324325, 2008.

- [35] MELLO, P. A.; KUMAR, N. **Quantum Transport in Statistical Fluctuations**. Oxford University Press, New York 2004.
- [36] BARBOSA, A. L. R. **Estatística de Contagem de Carga e Efeitos de Interferência em Sistemas Mesoscópicos**. Tese, UFPE, 2009.
- [37] E. P. Wigner. **Characteristic Vectors of Bordered Matrices With Infinite Dimensions**. *Annals of Mathematics*. 62(3):548-564, 1955.
- [38] Dyson, F. J. **Statistical Theory of the Energy Levels of Complex Systems. I**. *Journal of Mathematical Physics*, 3(1):140-156, 1962.
- [39] E. V. Shuryak e J. J. M. Verbaarschot. **Random matrix theory and spectral sum rules for the Dirac operator in QCD**. *Nucl. Phys. A*. 560:306 1993;
- [40] J. Verbaarschot. **Spectrum of the QCD Dirac operator and chiral random matrix theory**. *Phys. Rev. Lett.* 72:2531 1994.
- [41] A. Altland e M. R. Zirnbauer. **Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures**. *Phys. Rev. B* 55:1142 1997.
- [42] JACQUOD, J. M. P.; WHITNEY, R. S.; BÜTTIKER, M. **Onsager relations in coupled electric, thermoelectric, and spin transport: The tenfold way**. *Phys. Rev. B*. 86, 155118, 2012.
- [43] KAMENEV, A.; NISHIGAKI, S. M.; GANGARDT, D. M. **Correlation functions of the bc calogero-sutherland model**. *J. Phys. A: Math. Gen.* 36, 2003.
- [44] E. H. Hall. **On a New Action of the Magnet on Electric Currents**. *American Journal of Mathematics*, 2:287-292 1879.
- [45] K. v. Klitzing, G. Dorda e M. Pepper. **New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance**. *Phys. Rev. Lett.*, 45:494-497 1980.
- [46] D. C. Tsui, H. L. Stormer, e A. C. Gossard. **Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit**. *Phys. Rev. Lett.* 48:1559 1982.

- [47] J.E. Hirsch. **Spin Hall Effect**. *Phys. Rev. Lett.* 83, 1834 1999
- [48] Y. K. Kato, R. C. Myers, A. C. Gossard e D. D. Awschalom. **Observation of the Spin Hall Effect in Semiconductors** *Science*, 306:1910-1913 2004.
- [49] J. Wunderlich, B. Kaestner, J. Sinova, e T. Jungwirth. **Experimental Observation of the Spin-Hall Effect in a Two-Dimensional Spin-Orbit Coupled Semiconductor System**. *Phys. Rev. Lett.*, 94:047204-047207, 2005.
- [50] M. I. Dyakonov e V. I. Perel. **Possibility of orientating electron spins with current**. *Sov. Phys. JETP Lett.* 13: 467 1971.
- [51] B. A. Bernevig, T. L. Hughes e S. C. Zhang. **Quantum spin Hall insulator state in HgTe quantum wells**. *Science*, 314:1757-1761, 2006.
- [52] M. I. Dyakonov e V. I. Perel. **Current-induced spin orientation of electrons in semiconductors**. *Phys. Lett. A.* 35: 459 1971.
- [53] K. Uchida, S. Takahashi, K. Harii, W. Koshibae, K. Ando, S. Maekawa, and E. Saitoh. **Observation of the spin Seebeck effect**. *Nature* 455:07321 2008.
- [54] V. Sih, R.C. Myers, Y. K. Kato, W.H. Lau, A.C. Gossard, e D.D. Awschalom. **Spatial imaging of the spin Hall effect and current-induced polarization in two-dimensional electron gases**. *Nature Physics* 1:31 2005.
- [55] A.A. Bakun, B.P. Zakharchenya, A.A. Rogachev, M.N. Tkachuk, e V.G. Fleisher. **Observation of a surface photocurrent caused by optical orientation of electrons in a semiconductor**. *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 40:464 1984.
- [56] M.N. Tkachuk, B.P. Zakharchenya, e V.G. Fleisher, *Zh. Eksp. Teor. Fiz. Pis'ma*, 44:47 1986.
- [57] H. Zhao, E. J. Loren, H. M. van Driel, e A. L. Smirl. **Coherence Control of Hall Charge and Spin Currents**. *Phys. Rev. Lett.* 96:246601 2006.
- [58] S.O. Valenzuela e M. Tinkham. **Direct electronic measurement of the spin Hall effect**. *Nature* 442:176 2006.



- [59] T. Kimura, Y. Otani, T. Sato, S. Takahashi, e S. Maekawa. **Room-Temperature Reversible Spin Hall Effect.** *Phys. Rev. Lett.* 98:156601 2007.
- [60] N.P. Stern, S. Ghosh, G. Xiang, M. Zhu, N. Samarth, e D.D. Awschalom. **Current-Induced Polarization and the Spin Hall Effect at Room Temperature.** *Phys. Rev. Lett.* 97:126603 2006.
- [61] BÜTTIKER, M. **Four-Terminal Phase-Coherent Conductance.** *Phys. Rev. Lett.* 57:1761 1986.
- [62] J. B. S. Mendes, O. Alves Santos, L. M. Meireles, R. G. Lacerda, L. H. Vilela-Leão, F. L. A. Machado, R. L. Rodríguez-Suárez, A. Azevedo e S. M. Rezende. **Spin-Current to Charge-Current Conversion and Magnetoresistance in a Hybrid Structure of Graphene and Yttrium Iron Garnet.** *Phys. Rev. Lett.* 115:226601 2015.
- [63] J. Balakrishnan *et al.* **Giant spin Hall effect in graphene grown by chemical vapour deposition.** *Nature Communications*, 5:4748 (2014).
- [64] W. Zhang, M. B. Jungfleisch, W. Jiang, John E. Pearson e A. Hoffmann. **Spin pumping and inverse Rashba-Edelstein effect in NiFe/Ag/Bi and NiFe/Ag/Sb.** *J. Appl. Phys.* 117, 17C:727 2015.

# Universal spin Hall conductance fluctuations in chaotic Dirac quantum dots

T. C. Vasconcelos,<sup>1</sup> J. G. G. S. Ramos,<sup>2</sup> and A. L. R. Barbosa<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Departamento de Física, Universidade Federal Rural de Pernambuco, 52171-900 Recife, Pernambuco, Brazil*

<sup>2</sup>*Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, 58051-970 João Pessoa, Paraíba, Brazil*

(Received 17 October 2015; revised manuscript received 12 February 2016; published 11 March 2016)

We present complete analytical and numerical results that demonstrate the anomalous universal fluctuations of the spin Hall conductance in chiral materials such as graphene and topological insulators. We investigate both the corresponding fluctuations, the universal fractionated and the universal quantized, and also the open channel orbital number crossover between the two regimes. In particular, we show that the Wigner-Dyson symmetries do not properly describe such conductances and the preponderant role of the chiral classes on the Dirac quantum dots. The results are analytical and solve outstanding issues.

DOI: [10.1103/PhysRevB.93.115120](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.93.115120)

## I. INTRODUCTION

The electronic transport through diffusive and ballistic mesoscopic devices has long been the subject of many theoretical [1,2] and experimental investigations [3]. The mesoscopic transport engenders some peculiar physical features [1,2], with special focus on universal conductance fluctuations (UCFs) [4–7]. The UCFs occur owing to quantum interferences and chaotic scattering processes, which give rise to the sample-to-sample fluctuations of charge conductances. It was found that in metals and semiconductors the electronic transport description is accommodated in Wigner-Dyson universal classes in the framework of random matrix theory (RMT) [1,8]. The universal classes are characterized by the presence or absence of two fundamental symmetries of nature: time-reversal (TRS) and spin-rotation symmetries (SRS) [8].

However, the control [9] of novel Dirac materials (such as graphene and topological insulators) introduces new fundamental symmetries, such as chiral/sublattice/mirror (CHS) and particle-hole symmetries, which became protagonists of a myriad of interesting quantum effects [10]. Accordingly, novel RMT ensembles emerge, which are known as chiral [11] and Atland-Zimbauer [12] universal classes. The chiral universal classes can be applied to bipartite systems, such as hexagonal and square lattices, whose main examples are graphene structures and topological insulators, respectively. There are three chiral classes: a chiral circular orthogonal ensemble (chCOE), characterized by the presence of CHS, TRS, and SRS ( $\beta = 1$ ), a chiral circular unitary ensemble (CUE), which preserves CHS and has the TRS broken by an external magnetic field ( $\beta = 2$ ), and a chiral circular symplectic ensemble (chCSE), which is characterized by the presence of CHS, TRS, and has the SRS broken by a strong spin-orbit interaction (SOI) ( $\beta = 4$ ). Moreover, Atland-Zimbauer universal classes can be applied to electronic devices in contact with a superconductor.

With the generation and control of pure spin current through mesoscopic devices, investigations on its universal fluctuations became very compelling [13]. Motivated by Ref. [14], which found the survival of the spin Hall effect (SHE) in disordered two-dimensional (2D) mesoscopic devices, Ren *et al.* [15] show numerically, using tight-binding Hamiltonian models, that diffusive mesoscopic samples with strong SOI exhibit universal fractionated spin Hall conductance fluctuations (UFSCFs). The authors find a universal amplitude given by

$\text{rms}[G_{\text{SH}}^f] \approx 0.18e/4\pi$ . In order to give an explanation in the framework of RMT, Bardarson *et al.* [16] used a Landauer-Büttiker approach and a Wigner-Dyson universal class with strong SOI to obtain an analytical expression for UFSCFs of a chaotic quantum dot, confirming the result of Ref. [15].

Furthermore, the 2D Dirac material exhibits the famous *quantized* spin Hall effect, which means that spin Hall conduction  $G_{\text{SH}}^q$  takes only integer multiples of  $e/4\pi$  [17,18]. Motivated by this novel feature, Qiao *et al.* [19] show numerically, using three tight-binding Hamiltonian models, that diffusive 2D Dirac samples with and without strong SOI exhibit universal quantized spin Hall conductance fluctuations (UQSCFs) with an amplitude given by  $\text{rms}[G_{\text{SH}}^q] = 0.285 \pm 0.005e/4\pi$ , which does not follow the conventional value obtained in Refs. [15,16]. In recent work, Choe and Chang [20] study electronic transport numerically in a 2D Dirac device with strong SOI and CHS. Nevertheless, their studies were not enough to reach a definitive understanding of the behavior in terms of a UQSCF obtained in Ref. [19]. Thus, an understanding of UFSC remains open to date.

In this paper, we investigate analytically the UQSCF in a chaotic quantum dot with CHS, also known as a chaotic Dirac quantum dot [21,22], at low temperature. We assume a preserved TRS, SRS broken by a strong SOI (chCSE), and a mean dwell time of electrons in the quantum dot that is larger than the SOI time,  $\tau_{\text{dwell}} \gg \tau_{\text{so}}$ . We identified two regimes: The first one, when the CHS is broken, gives rise to the UFSCF and exhibits an amplitude  $\text{rms}[G_{\text{SH}}^f] \approx \sqrt{2} \times 0.18e/4\pi$ ; The second one, when CHS is preserved, gives rise to the UQSCF, which assumes an amplitude  $\text{rms}[G_{\text{SH}}^q] \approx 0.283e/4\pi$ . The last is in agreement with Ref. [19].

## II. THEORETICAL FRAMEWORK

We consider a multiterminal 2D device with CHS symmetry where the electrons flow under the influence of a strong SOI at low temperature. The 2D device is connected by ideal point contacts to four independent electronic reservoirs, as depicted in Fig. 1. We use the Landauer-Büttiker approach to write the  $\alpha$ -direction spin-resolved current through the terminals as [23]

$$I_i^\alpha = \frac{e^2}{h} \sum_{j,\alpha'} \tau_{i,j}^{\alpha\alpha'} (V_i - V_j). \quad (1)$$

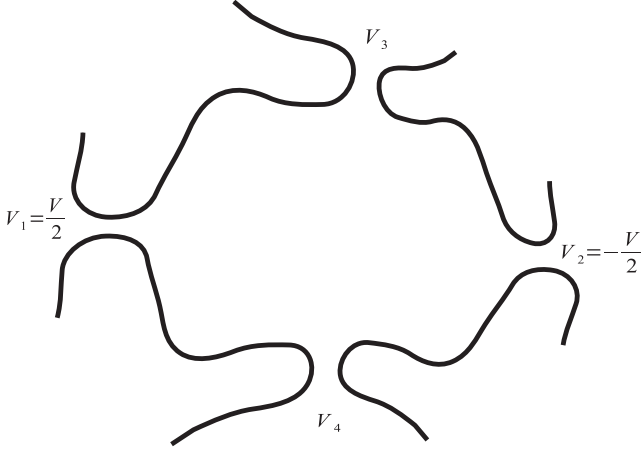


FIG. 1. A chaotic Dirac quantum dot connected through four leads to electron reservoirs with spin resolution. The 1 and 2 leads have specific potentials,  $V/2$  and  $-V/2$ , while the 3 and 4 leads have potentials adjusted in a way that prevents the charge current from flowing. Therefore, a charge current between the 1 and 2 leads induces a spin current between the 3 and 4 leads.

The spin-dependent transmission coefficients can be obtained through  $\tau_{i,j}^{\alpha\alpha'} = \sum_{m \in i, n \in j} |\mathcal{S}_{m,\alpha;n,\alpha'}|^2$ , where  $\alpha$  and  $\alpha'$  are the spin projections in the  $\alpha = x, y, z$  direction and  $\mathcal{S}$  is the scattering matrix of order  $2\bar{N}_T \times 2\bar{N}_T$ . The  $\mathcal{S}$  matrix describes the transport of electrons through the chaotic Dirac quantum dot. The total number of open orbital scattering channels is  $\bar{N}_T = 2N_T = \sum_{i=1}^4 2N_i$ , where  $2N_i$  is the number of open channels in the  $i$ th lead point contact and the factor 2 came from two sublattices of the Dirac materials [24].

An applied bias voltage  $V$  between longitudinal electrodes 1 and 2 gives rise to a longitudinal electronic current  $I$  and, due to the *quantized* spin Hall effect, to spin currents  $I_i^\alpha = I_i^1 - I_i^2 \neq 0$  at the transversal contacts 3 and 4 with  $\alpha = x, y, z$  [25], as depicted in Fig. 1. Moreover, we consider the absence of net electric charge current at the transverse 3 and 4 leads, i.e.,  $I_i^0 = I_i^1 + I_i^2 = 0$ . Therefore, the charge conservation implies  $I = I_1^0 = -I_2^0$ . Using those constraints in Eq. (1), it was shown in Ref. [16] that the transversal spin currents can be written as

$$J_i^\alpha = \frac{1}{2}(\tau_{i2}^\alpha - \tau_{i1}^\alpha) - \sum_{j=3,4} \tau_{ij}^\alpha \bar{V}_j, \quad (2)$$

for which we introduce the dimensionless currents  $J = h/e^2(I/V)$  and the effective transverse voltages  $\bar{V}_i = V_i/V$ , given by

$$\bar{V}_i = \frac{1}{2} \frac{\tau_{ij}^0(\tau_{j2}^0 - \tau_{j1}^0) + (\tau_{i2}^0 - \tau_{i1}^0)(4N_j - \tau_{jj}^0)}{\tau_{43}^0\tau_{34}^0 - (4N_3 - \tau_{33}^0)(4N_4 - \tau_{44}^0)}, \quad (3)$$

where here  $i, j = 3, 4$  with  $i \neq j$ .

### III. RANDOM MATRIX THEORY

Our calculation consists in the obtention of the average and the fluctuation amplitude of transversal spin currents, Eq. (2), for a chaotic Dirac quantum dot, within the framework of RMT. Therefore, the spin-dependent transmission coefficient can be written in an appropriate way through the following

relation,

$$\tau_{ij}^\alpha = \text{Tr}[\mathcal{P}_i^\alpha \mathcal{S} \mathcal{P}_j^0 \mathcal{S}^\dagger], \quad \alpha = 0, x, y, z \quad (4)$$

where the scattering matrix  $\mathcal{S}$  is a member of the chCSE ensemble, which means the system preserves the TRS (absence of magnetic field) and the SRS is broken by strong SOI [11]. The matrix  $\mathcal{P}_i^\alpha = \mathcal{P}_i \otimes \sigma^\alpha$  represents a projector operator over the  $i$ th terminal. Its dimension is  $2\bar{N}_T \times 2\bar{N}_T$  and its entries are  $(\mathcal{P}_i^\alpha)_{m\mu, n\nu} = \delta_{mn} \sigma_{\mu\nu}^\alpha$ , while  $\sum_{j=1}^{i-1} 2N_j < m < \sum_{j=1}^i 2N_j$  and 0 otherwise [16]. The  $\sigma^0$  and  $\sigma^\alpha$  are the identity matrix and Pauli matrices, respectively.

The scattering matrix of Eq. (4) has an additional CHS symmetry, implying it satisfies the following commutation relation [10],

$$\mathcal{S} = \Sigma_z \mathcal{S}^\dagger \Sigma_z, \quad \Sigma_z \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{\bar{N}_T} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{\bar{N}_T} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

at the Dirac point (null Fermi energy). To obtain the average of Eq. (4), it is convenient to decompose  $\mathcal{S}$  as a function of the  $\mathcal{U}$  matrix, which is a symplectic matrix of order  $2\bar{N}_T \times 2\bar{N}_T$ , as  $\mathcal{S} = \Sigma_z \mathcal{U}^\dagger \Sigma_z \mathcal{U}$ , as can be seen in Ref. [26]. Hence, Eq. (4) can be rewritten as

$$\tau_{ij}^\alpha = \text{Tr}[\mathcal{P}_i^\alpha \mathcal{U}^\dagger \Sigma_z \mathcal{U} \mathcal{P}_j^0 \mathcal{U}^\dagger \Sigma_z \mathcal{U}], \quad \alpha = 0, x, y, z. \quad (6)$$

Using the method of Ref. [22], developed for diagrammatic integration over chaotic Dirac quantum dots, we calculate the average and covariance of the spin-dependent transmission coefficient of Eq. (6). First, for the average of Eq. (6), we obtain

$$\langle \tau_{ij}^\alpha \rangle = 4\delta_{\alpha 0} \frac{N_T(4N_i N_j - \delta_{ij} N_i) + \delta_{ij} N_i}{(2N_T - 1)(2N_T + 1)}. \quad (7)$$

Equation (7) is quite distinct from the result of Ref. [16], which studied the UFSCF of a Schrödinger (Wigner-Dyson) chaotic quantum dot. Second, following the same method of Ref. [22], the covariance of Eq. (6) reads

$$\text{covar}[\tau_{ij}^\alpha, \tau_{kl}^\beta] = \langle (\tau_{ij}^\alpha - \langle \tau_{ij}^\alpha \rangle)(\tau_{kl}^\beta - \langle \tau_{kl}^\beta \rangle) \rangle$$

and prompted us to find 11 025 diagrams, of which 6300 are non-null. Therefore, the overall result for the covariance of the spin-dependent transmission coefficient involves 6300 terms and the algebraic final expression is cumbersome. Nevertheless, for the relevant configuration wherein  $\alpha = \beta \neq 0$  and  $i = k$ , the general expression simplifies to

$$\frac{\text{covar}[\tau_{ij}^\alpha, \tau_{il}^\alpha]}{D} = \begin{cases} (N_T - N_i)(4N_i N_T - 2N_T - 3), & i = j = l, \\ -4N_j N_i N_T, & i \neq j \neq l, \\ N_j(4N_T^2 - 4N_j N_T - 2N_T - 3), & i \neq j = l, \\ -N_i(4N_i N_T - 2N_T - 3), & i = j \neq l, \\ -N_j(4N_i N_T - 2N_T - 3), & i = l \neq j, \end{cases} \quad (8)$$

where  $D = \frac{128N_i N_T}{(4N_T + 3)(16N_T^2 - 1)(2N_T - 3)(2N_T - 1)}$ .

#### IV. UNIVERSAL SPIN HALL CONDUCTANCE FLUCTUATIONS

We begin by using Eq. (7) to obtain the ensemble average of the transverse spin currents of Eq. (2). The result is

$$\langle J_i^\alpha \rangle = \frac{1}{2} (\langle \tau_{i2}^\alpha \rangle - \langle \tau_{i1}^\alpha \rangle) - \sum_{j=3,4} \langle \tau_{ij}^\alpha \rangle \langle \bar{V}_j \rangle = 0, \quad (9)$$

as expected even for  $i = 3, 4$  and  $\alpha = x, y, z$ . The ensemble average of the effective transverse voltages, Eq. (3), is obtained with the previous spin-dependent transmission coefficient general result for the covariance. We obtain

$$\langle \bar{V}_{3,4} \rangle = \frac{1}{2} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}. \quad (10)$$

The same expression was obtained in Ref. [16], indicating that the effective transverse voltage is CHS independent.

Although the transversal spin current ensemble average vanishes, Eq. (10) establishes an effective non-null transverse voltage. Accordingly, the transversal spin current  $J_i^\alpha$  assumes finite values. The amplitude of the fluctuations of  $J_i^\alpha$  is given by [16]

$$\begin{aligned} \text{var}[J_i^\alpha] &= \frac{1}{4} \sum_{j=1,2} \text{var}[\tau_{ij}^\alpha] - \frac{1}{2} \sum_{j=1,2} \text{covar}[\tau_{i1}^\alpha, \tau_{i2}^\alpha] \\ &+ \sum_{j=3,4} (\text{var}[\tau_{ij}^\alpha] \langle \bar{V}_j^2 \rangle + \text{covar}[(\tau_{i1}^\alpha - \tau_{i2}^\alpha), \tau_{ij}^\alpha] \langle \bar{V}_j \rangle) \\ &+ 2 \text{covar}[\tau_{i3}^\alpha, \tau_{i4}^\alpha] \langle \bar{V}_3 \rangle \langle \bar{V}_4 \rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

Substituting Eqs. (8) and (10) in Eq. (11), we obtain the following expression,

$$\begin{aligned} \text{var}[J_i^\alpha] &= \frac{128 N_i N_1 N_2 N_T (4 N_T^2 - 2 N_T - 3)}{(4 N_T + 3)(16 N_T^2 - 1)(2 N_T - 3)(2 N_T - 1)(N_1 + N_2)}, \end{aligned} \quad (12)$$

which is the main result of our work. Equation (12) is quite distinct from the main result of Ref. [16], and reveals the full difference between the spintronics of a chaotic Dirac (CHS) quantum dot and a chaotic Schrödinger (Wigner-Dyson) quantum dot. In Fig. 2, we plot the average (9) and variance (12) of transverse spin current  $J_i^\alpha$  for  $i = 3, 4$  and  $\alpha = x, y, z$  as a function of both symmetric open leads,  $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = N$ , and asymmetric open leads,  $N_1 = N_3 = 2N_2 = 2N_4 = N$ .

Using Eq. (12), we can analyze two relevant regimes of the chaotic Dirac quantum dots: the first one for the broken CHS, Eq. (5), and the second one when it is preserved. In accordance with Refs. [27,28], the CHS is relevant for the systems at zero Fermi energy and/or if there are few open channels in the leads. However, if the Fermi energies are away from zero and/or if there are many open channels in the terminals, the Wigner-Dyson universality classes and the chiral universality classes lead presumably to the same results.

We first investigate the setup with broken CHS employed whenever the system has a large number of open channels or high Fermi energy. For this system, we fix symmetric terminals,  $N_1 = N_3 = N_2 = N_4 = N$ , from the general result

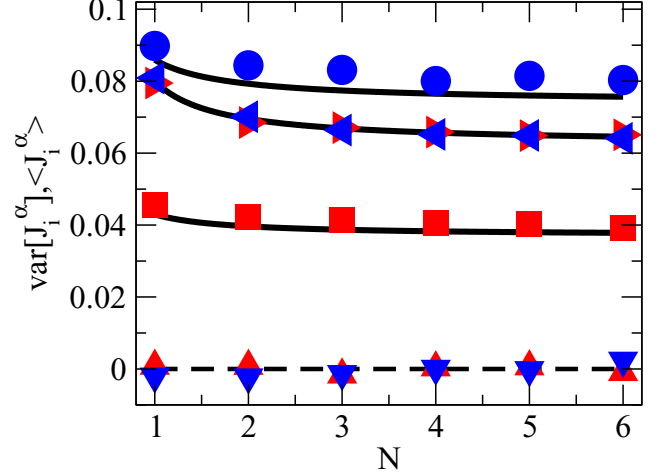


FIG. 2. Average (9) and variance (12) of transverse spin current  $J_i^\alpha$  for  $i = 3, 4$  and  $\alpha = x, y, z$  as a function of open channels  $N$ . The analytical results are represented by solid lines, while the numeric simulations, obtained by RMT, are represented by the symbols. Symmetric terminals ( $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = N$ ):  $\text{var}[J_3^\alpha]$  (triangle left), and  $\text{var}[J_4^\alpha]$  (triangle right). Asymmetric terminals ( $N_1 = N_3 = 2N_2 = 2N_4 = N$ ):  $\langle J_3^\alpha \rangle$  (triangle up),  $\langle J_4^\alpha \rangle$  (triangle down),  $\text{var}[J_3^\alpha]$  (square), and  $\text{var}[J_4^\alpha]$  (circle).

with a large number of open channels  $N \gg 1$  in Eq. (12), and we obtain  $\text{var}[J_i^\alpha] = 2 \times 1/32$ . Therefore, the spin current fluctuates universally with amplitude  $\text{rms}[I_3^z] = 0.25e^2V/h$ , which can be used to write the universal fluctuations of transversal spin conductance as

$$\text{rms}[G_{\text{SH}}^f] \approx \sqrt{2} \times 0.18 \frac{e}{4\pi}. \quad (13)$$

In this regime, the universal conductance fluctuations has an amplitude  $\sqrt{2}$  times higher than the result obtained in Refs. [15,16] for the Wigner-Dyson universality classes. Furthermore, the result is in agreement with Ref. [19] when the Fermi energies are  $|E| > 1$  and with the studies concerning the universal conductance fluctuations in the two-dimensional topological insulators with strong SOI of Ref. [20].

However, without the CHS symmetry (Wigner-Dyson ensembles), the universal fluctuations of the transversal spin conductance of a chaotic Dirac quantum dot does not describe the result obtained in Ref. [19], i.e.,  $\text{rms}[G_{\text{SH}}^q] = (0.285 \pm 0.005)e/4\pi$ , complying only if the number of channels is very small (quantized). For this reason, we fix from our general analytical result a small number of channels in order to preserve the CHS. Using a symmetric configuration with  $N_1 = N_3 = N_2 = N_4 = 1$ , known as a high quantum regime, in Eq. (12), we obtain  $\text{rms}[I_3^z] \approx 0.283e^2V/h$ . The result can be rewritten in terms of the universal fluctuations of transversal spin conductance as

$$\text{rms}[G_{\text{SH}}^q] \approx 0.283 \frac{e}{4\pi}, \quad (14)$$

which is agreement with Ref. [19] if the Fermi energies are  $|E| < 1$ . In the top panel of Fig. 3, we plot the universal fluctuations of transversal spin conductance as a function of

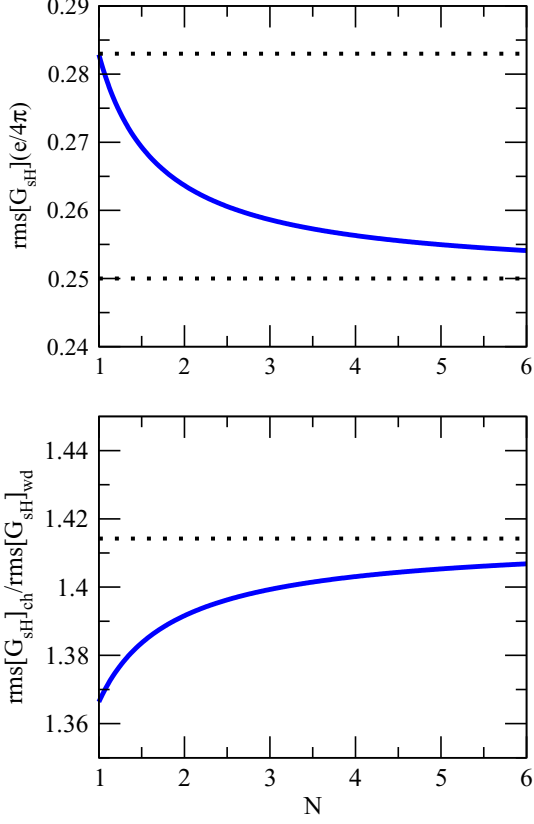


FIG. 3. Top: The universal fluctuations of transversal spin conductance plotted as an open channel crossover from Eq. (14) to Eq. (13). Bottom: The ratio between universal fluctuations of transversal spin conductances of the chiral universal classes and the one of the Wigner-Dyson universal classes ( $\text{rms}[G_{\text{SH}}]_{\text{ch}}/\text{rms}[G_{\text{SH}}]_{\text{wd}}$ ); the  $\sqrt{2}$  limit as a function of  $N$ .

$N$ , which shows the break of CHS as an open channel crossover from Eq. (14) to Eq. (13).

Importantly, the result of Eq. (14) for the the variance of transversal spin current is incompatible with the one of Ref. [16], obtained for the Wigner-Dyson universal classes. In a high quantum regime, the result of Ref. [16] multiplied for  $\sqrt{2}$  yields  $\sqrt{2} \times \text{rms}[G_{\text{SH}}]_{\text{wd}} \approx 0.292e/4\pi$ , which is therefore outside the error bar of the tight-binding simulation of Ref. [19] that is valid for graphene and other chiral systems. In the bottom panel of Fig. 3, we depict the ratio between universal fluctuations of transversal spin conductances of the chiral universal classes and the Wigner-Dyson ones. Notice the ratio ( $\text{rms}[G_{\text{SH}}]_{\text{ch}}/\text{rms}[G_{\text{SH}}]_{\text{wd}}$ ) tends to  $\sqrt{2}$  as a function of  $N$  from the general analytical result.

## V. NUMERIC SIMULATION

In order to confirm the analytical results, Eqs. (9) and (12), we use numerical simulations from the RMT [11]. The massless Dirac Hamiltonian satisfies the following anticommutation relation [10,11]

$$\mathcal{H} = -\lambda_z \mathcal{H} \lambda_z, \quad \lambda_z = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{2M} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{2M} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

The  $\mathcal{H}$  matrix has dimension  $4M \times 4M$ . The anticommutation relation, Eq. (15), implies a Hamiltonian member that can be written as

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{T} \\ \mathcal{T}^\dagger & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

The quaternionic  $\mathcal{T}$ -matrix block of the  $\mathcal{H}$  matrix has dimension  $2M \times 2M$ . The RMT establishes that the entries of the  $\mathcal{T}$  matrix have a Gaussian distribution

$$P(\mathcal{T}) \propto \exp \left\{ -\frac{2M}{\lambda^2} \text{Tr}(\mathcal{T}^\dagger \mathcal{T}) \right\}, \quad (17)$$

where  $\lambda = 4M\Delta/\pi$  is the variance related to the electronic single-particle level spacing  $\Delta$ . The Hamiltonian model for the scattering matrix can be written as [29]

$$\mathcal{S} = \mathbf{1} - 2\pi i \mathcal{W}^\dagger (\epsilon - \mathcal{H} + i\pi \mathcal{W} \mathcal{W}^\dagger)^{-1} \mathcal{W}, \quad (18)$$

which satisfies Eq. (5). The  $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_4)$  matrix is a  $4M \times 2\bar{N}_T$  deterministic matrix, describing the coupling of the resonances states of the chaotic Dirac quantum dot with the propagating modes in the four terminals. This deterministic matrix satisfies the nondirect process, i.e., the orthogonality condition  $\mathcal{W}_p^\dagger \mathcal{W}_q = \frac{1}{\pi} \delta_{p,q}$  holds. Accordingly, we consider the relation  $\lambda_z \mathcal{W} \Sigma_z = \mathcal{W}$ , indicating the scattering matrix is symmetric (5). We consider the system on the Dirac point ( $\epsilon = 0$ ), and, to ensure the chaotic regime and consequently the universality of the observable, the number of resonances inside the quantum dot is large ( $M \gg N_T$ ).

The numerical simulations produce Fig. 2, which shows symbols obtained through  $25 \times 10^3$  realizations compared with the analytical results, Eqs. (9) and (12). We use the  $\mathcal{T}$  matrices, with dimension  $800 \times 800$  ( $M = 400$ ), and the corresponding  $\mathcal{H}$  matrices with dimension  $1600 \times 1600$  (1600 resonances).

## VI. CONCLUSIONS

To summarize, we present a complete analytical study of UQSCFs of a chaotic Dirac quantum dot in the framework of RMT for the chiral universal symmetries in the absence of magnetic field. We show that the effective transverse voltage is CHS independent, Eq. (10). Moreover, in the regime of broken CHS, the UFSCFs exhibit a value  $\text{rms}[G_{\text{SH}}^f] \approx \sqrt{2} \times 0.18e/4\pi$ . However, the system with preserved CHS exhibits a UQSCF with amplitude  $\text{rms}[G_{\text{SH}}^f] \approx 0.283e/4\pi$ , which is in agreement with the numerical simulation of Ref. [19]. We can conclude that the quantized spin Hall effect in the absence of magnetic field is described by chiral universal classes in the framework of RMT. Perspectives of our work include the study of the universal classes of the UQSCFs in the presence of magnetic field, preserving the particle-hole symmetry.

## ACKNOWLEDGMENT

This work was partially supported by CNPq, CAPES, and FACEPE (Brazilian Agencies).

- [1] C. W. J. Beenakker, *Rev. Mod. Phys.* **69**, 731 (1997).
- [2] P. A. Mello and N. Kumar, *Quantum Transport in Mesoscopic Systems: Complexity and Statistical Fluctuations* (Oxford University Press, Oxford, U.K., 2004).
- [3] T. Heinzel, *Mesoscopic Electronics in Solid State Nanostructures* (Wiley-VCH, Weinheim, 2007).
- [4] B. L. Altshuler, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **41**, 530 (1985) [*JETP* **41**, 648 (1985)].
- [5] P. A. Lee and A. D. Stone, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1622 (1985); P. A. Lee, A. D. Stone, and H. Fukuyama, *Phys. Rev. B* **35**, 1039 (1987).
- [6] J. G. G. S. Ramos, D. Bazeia, M. S. Hussein, and C. H. Lewenkopf, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 176807 (2011).
- [7] A. L. R. Barbosa, M. S. Hussein, and J. G. G. S. Ramos, *Phys. Rev. E* **88**, 010901(R) (2013).
- [8] M. L. Mehta, *Random Matrices* (Academic, New York, 1991).
- [9] T. O. Wehling, A. M. Black-Schaffer, and A. V. Balatsky, *Adv. Phys.* **63**, 1 (2014).
- [10] P. Jacquod, R. S. Whitney, J. Meair, and M. Buttiker, *Phys. Rev. B* **86**, 155118 (2012).
- [11] E. V. Shuryak and J. J. M. Verbaarschot, *Nucl. Phys. A* **560**, 306 (1993); J. Verbaarschot, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2531 (1994).
- [12] A. Altland and M. R. Zirnbauer, *Phys. Rev. B* **55**, 1142 (1997).
- [13] I. Zutíć, J. Fabian, and S. Das Sarma, *Rev. Mod. Phys.* **76**, 323 (2004).
- [14] B. K. Nikolić, L. P. Zârbo, and S. Souma, *Phys. Rev. B* **72**, 075361 (2005); E. M. Hankiewicz, L. W. Molenkamp, T. Jungwirth, and J. Sinova, *ibid.* **70**, 241301(R) (2004); L. Sheng, D. N. Sheng, and C. S. Ting, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 016602 (2005).
- [15] W. Ren, Z. Qiao, J. Wang, Q. Sun, and H. Guo, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 066603 (2006).
- [16] J. H. Bardarson, I. Adagideli, and Ph. Jacquod, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 196601 (2007).
- [17] C. L. Kane and E. J. Mele, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 226801 (2005).
- [18] D. A. Abanin, P. A. Lee, and L. S. Levitov, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 176803 (2006).
- [19] Z. Qiao, J. Wang, Y. Wei, and H. Guo, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 016804 (2008).
- [20] D.-H. Choe, and K. J. Chang, *Sci. Rep.* **5**, 10997 (2015).
- [21] L. A. Ponomarenko, F. Schedin, M. I. Katsnelson, R. Yang, E. W. Hill, K. S. Novoselov, and A. K. Geim, *Science* **320**, 356 (2008).
- [22] M. S. M. Barros, A. J. Nascimento Júnior, A. F. Macedo-Junior, J. G. G. S. Ramos, and A. L. R. Barbosa, *Phys. Rev. B* **88**, 245133 (2013).
- [23] M. Buttiker, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1761 (1986).
- [24] C. W. J. Beenakker, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1337 (2008).
- [25] J. G. G. S. Ramos, A. L. R. Barbosa, D. Bazeia, M. S. Hussein, and C. H. Lewenkopf, *Phys. Rev. B* **86**, 235112 (2012).
- [26] S. M. Nishigaki, D. M. Gangardt, and A. Kamenev, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 3137 (2003).
- [27] S. Gnuzmann and B. Seif, *Phys. Rev. E* **69**, 056219 (2004).
- [28] J. Wurm, K. Richter, and I. Adagideli, *Phys. Rev. B* **84**, 205421 (2011); J. Wurm, A. Rycerz, I. Adagideli, M. Wimmer, K. Richter, and H. U. Baranger, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 056806 (2009).
- [29] C. Mahaux and H. A. Weidenmuller, *Shell Model Approach to Nuclear Reactions* (North-Holland, Amsterdam, 1969).