



# Universidade Federal Rural de Pernambuco

Departamento de Física

*Recife - PE*

Simulação computacional e abordagem numérica para um modelo heterogêneo e adaptativo de distribuição de renda

**Alan de Andrade Santos**

Alan de Andrade Santos

**Simulação computacional e abordagem numérica para um modelo heterogêneo e adaptativo de distribuição de renda**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Física Aplicada do Departamento de Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

**Orientador: Prof. Pedro Hugo de Figueirêdo**

**UFRPE**

**Recife - PE**

**23 de agosto de 2016**

Ficha catalográfica

S237s Santos, Alan de Andrade  
Simulação computacional e abordagem numérica para um modelo heterogêneo e adaptativo de distribuição de renda / Alan de Andrade Santos; orientador: Pedro Hugo de Figueirêdo. – Recife, 2016.  
68 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Física Aplicada) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Física, Recife, 2016.  
Inclui referências.

1. Econofísica 2. Processos estocásticos 3. Distribuição de renda  
4. Taxação I. Figueirêdo, Pedro Hugo de, orientador II. Título

CDD 621

*“The essence of life is statistical  
improbability on a colossal scale.”*  
- Richard Dawkins.

## Agradecimentos

Antes de tudo, agradeço a minha família, em especial meus pais Cássia e Fernando. Agradeço em especial a Patrícia que está comigo nos bons e maus momentos. Agradeço meus grandes amigos que fiz na graduação Carlos, Geimson, Harrison e Japa que me proporcionaram tempos incríveis. Agradeço a Sara, David e Rodrigo, amigos que fiz no Programa de Pós Graduação em Física Aplicada da UFRPE. Agradeço aos professores da graduação da UFPE e do mestrado na UFRPE, em especial ao professor Pedro Hugo por toda paciência e colaboração com este trabalho. Por fim quero agradecer a CAPES pelo apoio financeiro.

Dedico esta, bem como todas as minhas demais conquistas, a todos os meus amigos e familiares, que desde muito cedo vem me apoiando e dando força para que eu continue seguindo em frente.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

Simulação computacional e abordagem numérica para um modelo heterogêneo  
e adaptativo de distribuição de renda

*Alan de Andrade Santos*

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de mestre em Física, defendida e aprovada por unanimidade em 27/06/2016 pela Comissão Examinadora.

Orientador:

---

Prof. Pedro Hugo de Figueirêdo

DF - UFRPE

Banca Examinadora:

---

Prof. Tiago Alessandro Espínola Ferreira

DEINFO - UFRPE

---

Prof<sup>ª</sup>. Viviane Moraes de Oliveira

DF - UFRPE

Dedico esta, bem como todas as minhas demais conquistas, a todos os meus amigos e familiares, que desde muito cedo vem me apoiando e dando força para que eu continue seguindo em frente.



# Resumo

Um dos principais objetivos no estudo da distribuição de renda  $P(m)$  é a caracterização das desigualdades associadas aos mecanismos de interação propostos nos modelos micro-econômicos. Uma forma de quantificar tais desigualdades é baseada no índice de Gini  $0 \leq G \leq 1$ , um parâmetro que indica máxima ( $G = 1$ ) e a mínima ( $G = 0$ ) concentração de recursos. Estudos recentes apontam que  $P(m)$  possui dois regimes distintos separados por uma escala  $m_c$ . O primeiro associado a pequenos valores de renda ( $m \leq m_c$ ) descrito por uma distribuição  $\Gamma(\alpha; \lambda)$  e um segundo relacionado ao regime de altas rendas ( $m > m_c$ ), representado por uma lei de potência com um expoente de Pareto  $1 \leq \nu \leq 3$ . Nesta dissertação introduzimos um modelo heterogêneo adaptativo a fim de descrever quantitativamente a relação entre a taxa de gasto média  $\omega$  dos agentes econômicos e o índice de Gini associado a distribuição. Nesta abordagem uma fração  $p_0$  de todos os agentes  $N$  são incapazes de modificar sua taxa de gasto, uma fração  $p_1$  modifica de forma positivamente correlacionada com seu nível de recursos e uma última fração  $p_2$  negativamente correlacionada. A fim de obter valores limitantes para os parâmetros  $(\alpha, \lambda, m_c, \nu)$  associados à distribuição de renda realizamos um cálculo numérico utilizando uma abordagem de maximização da entropia. Em seguida investigamos o impacto da taxação sobre a desigualdade de renda através de uma taxa de redistribuição  $p$ . Concluímos que o modelo onde coexistem agentes adaptáveis com diferentes características para taxa de gasto fornecem resultados próximos àqueles observados em dados reais. Num cenário de adaptação instantânea o valor máximo do índice de Gini  $[G_{max}]$  é inversamente proporcional a probabilidade de redistribuição. Por fim estabelecemos no espaço de parâmetros  $(G, \omega)$ , uma região limitada que corresponde aos dados reais extraídos do Banco Mundial para 139 países.

Palavras-chave: Econofísica, Processos estocásticos, Distribuição de renda,  
Taxação

# Abstract

A key feature of income distribution  $P(m)$  study is characterize the inequalities implied by microeconomic models based on the mechanisms of exchange of goods and services. One way to quantify such inequalities is based on the Gini index  $0 \leq G \leq 1$ , a parameter that sets the maximum ( $G = 1$ ) and minimum ( $G = 0$ ) concentration of resources. Current studies indicates that income distribution  $P(m)$  has two distinct regimes separated by a scale  $m_c$ . The first one associated to a low-regime income ( $m \leq m_c$ ) described by a gamma distribution  $\Gamma(\alpha; \lambda)$  and a second one related to a high-income regime ( $m > m_c$ ), mathematically represented by a power law function with a parameter  $1 \leq \nu \leq 3$ , usually called Pareto's exponent. In this work we introduce an adaptive heterogeneous model in order to describe quantitatively the relationship among the average expenditure rate  $\omega$  of economic agents, and the Gini index associated to the income distribution. In this approach a fraction  $p_0$  of all economic agents  $N$  do not modify their expenditure rates, a fraction  $p_1$  are able to modify their consumption rate positively correlated with their income and lastly a fraction  $p_2$  negatively. With the view to obtain boundaries values for income distribution parameters  $(\alpha, \lambda, m_c, \nu)$  we conduct a numeric calculation using an entropy maximization approach. After that we investigate the impact of taxation on inequality income distribution through a redistribution rate  $p$ . We conclude that the model where adaptive agents coexist with different characteristics for the expenditure rate  $\omega(m)$  provides results closer to real data producing Gini indexes and expenditure rates, emerging features of the dynamics. At the instantaneous adaptive scenario the maximum Gini index  $[G_{max}]$  is inversely proportional to taxation rate  $p$ . Moreover we can establish at the space parameters  $(G, \omega)$ , a limited region that corresponds to that observed in real data, taken from the World Bank to 139 countries.

**Keywords:** Econophysics, Stochastic processes, Income distribution, Taxation

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Ciências sociais e ciências naturais . . . . .	1
1.2	Distribuição de Renda . . . . .	4
1.3	Organização da Dissertação . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Modelos</b>	<b>7</b>
2.1	Modelos Homogêneos . . . . .	10
2.1.1	A. O Modelo de Angle . . . . .	11
2.1.2	B. O Modelo de Bennati . . . . .	12
2.1.3	C. O Modelo de Chakraborti e Chakrabarti . . . . .	13
2.1.4	D. O Modelo de Dragulescu e Yakovenko . . . . .	14
2.2	Modelos Heterogêneos . . . . .	15
2.3	O Modelo Heterogêneo e Adaptativo . . . . .	17
2.3.1	Modelo Heterogêneo e Adaptativo 1 (MHA-1) . . . . .	18
2.3.2	Modelo Heterogêneo e Adaptativo 2 (MHA-2) . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Índice de Gini</b>	<b>20</b>
3.1	Cálculo do Índice de Gini . . . . .	22
3.1.1	Distribuição separada por dois regimes . . . . .	22
3.1.2	Caso particular em que $\nu = 1$ . . . . .	26
3.1.3	Distribuição puramente lei de potência . . . . .	29

3.2	Cálculo da Entropia associada a distribuição de renda . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Resultados numéricos e de simulação para o Modelo Heterogêneo e Adaptativo</b>	<b>32</b>
4.1	O Modelo Heterogêneo . . . . .	32
4.1.1	Generalização do Modelo Heterogêneo e Adaptativo . . . . .	37
4.1.2	Modelo de três estados . . . . .	37
4.2	Cálculo Numérico . . . . .	39
4.3	Choques . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>50</b>
<b>A</b>	<b>Dados Reais</b>	<b>52</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>61</b>

# Lista de Símbolos

$\nu$	Expoente de Pareto
$m$	Nível de recursos
$m_c$	Nível de recursos que separa a distribuição de renda em dois regimes
$\bar{G}$	Índice de Gini médio para dados reais
$\Delta\bar{G}$	Desvio padrão do índice de Gini médio para dados reais
$[G]$	Índice de Gini médio para dados de simulação
$[G_{max}]$	Índice de Gini máximo médio para dados de simulação
$\bar{G}_{max}$	Índice de Gini máximo médio para regressão (Equação 4.15)
$\bar{G}_{min}$	Índice de Gini mínimo médio para regressão (Equação 4.15)
$[G(p_2 = 1)]$	Índice de Gini médio para simulação com agentes anti-correlacionados
$\bar{\omega}$	Taxa de gasto média para dados reais
$\Delta\bar{\omega}$	Desvio padrão da taxa de gasto média para dados reais
$[\omega]$	Taxa de gasto média para dados de simulação
$\langle\omega\rangle$	Taxa de gasto média para dados numéricos
$p_0$	Fração de agentes com inércia infinita
$p_1$	Fração de agentes positivamente correlacionados
$p_2$	Fração de agentes anti-correlacionados
$p$	Probabilidade de ocorrer uma taxação de recursos
$f$	Fração da renda retirada numa taxação

# Lista de Figuras

2.1	A Figura retirada de [11] exhibe a distribuição de renda dos Estados Unidos no ano de 2001. Percebe-se uma separação da distribuição em dois regimes. O primeiro representado por uma distribuição Gama, compreende pequenos valores de renda e concentra um grande número de indivíduos. Já o segundo, onde existe uma menor concentração de agentes, é representado por uma lei de potência, onde está localizado grandes valores de renda. . . . .	8
3.1	Figura extraída de [17]. Curva vermelha representando uma distribuição de renda exponencial e a curva preta representando uma distribuição de renda perfeitamente igualitária. . . . .	23
4.1	Valores médios para o índice de Gini $\bar{G}$ e taxa de gasto $\bar{\omega}$ para os dados reais (círculos pretos) [29, 30] de 139 países, no período 1998 – 2012, extraídos do Banco Mundial. Em destaque os países com maiores (vermelho) e menores (verde) índice de Gini e maiores (azul) e menores (rosa) taxas de gasto. . . .	35
4.2	Comportamento do índice de Gini $G$ e taxa de gasto $\omega$ para o Modelo Heterogêneo e Adaptativo-1 (curva verde) e Modelo Heterogêneo e Adaptativo-2 (curva vermelha) e dados reais (círculos pretos) extraídos do Banco Mundial para 139 países no período de 1998 a 2012. . . . .	36
4.3	Comportamento do índice de Gini $G$ e taxa de gasto $\omega$ para o caso em que temos apenas agentes capazes de se adaptar após uma negociação ( $\gamma_i = 0$ ) (curva laranja) e dados reais (círculos pretos) extraídos do Banco Mundial. .	38



4.4	Índice de Gini [ $G$ ] e taxa de gasto média [ $\omega$ ] para MHA-1, MHA-2, MHA formado unicamente por agentes com inércia nula e o Modelo de três estados.	39
4.5	Índice de Gini [ $G$ ] como função dos parâmetros $p_1$ e $p_2$ .	40
4.6	Taxa de gasto média [ $\omega$ ] como função dos parâmetros $p_1$ e $p_2$ .	41
4.7	Comparação entre as simulações do Modelo Heterogêneo e Adaptativo (curvas vermelha, verde e azul) com os resultados do cálculo numérico (curva laranja) e com a curva para o modelo homogêneo de Angle (curva preta).	43
4.8	Comportamento do índice de Gini como função da taxa de gasto média para os resultados numéricos (curva laranja) e dados reais (círculos pretos) [29, 30] para 145 países no período de 1998-2012.	44
4.9	Comportamento dos valores médios do índice de Gini e da taxa de gasto para diferentes probabilidades $p$ de haver uma taxação no sistema.	46
4.10	Comportamento do índice de Gini máximo [ $G_{max}$ ] como função da probabilidade $p$ de que ocorra uma redistribuição de recursos.	47
4.11	Comportamento do índice de Gini quando a fração de agentes que são anti correlacionados atinge $p_2 = 1.0$ em função da probabilidade $p$ de ocorrer uma taxação.	49
4.12	Comportamento dos valores médios do índice de Gini e da taxa de gasto para $p = 0.0$ (curva laranja) e $p = 1.0$ (curva rosa) comparados com dados reais (círculos pretos) [29, 30] para 139 países, no período de 1998-2012, extraídos do Banco Mundial.	49

# Lista de Tabelas

2.1	Quadro comparativo entre os modelos homogêneos para a distribuição de renda $P(m)$ , para o parâmetro $n(\omega)$ e para as taxas de gasto média $\bar{\omega}_i$ e $\bar{\omega}_j$ . . . . .	15
4.1	Valores médios para o índice de Gini $\bar{G}$ e taxa de gasto $\bar{\omega}$ para os dados reais de 139 países [29, 30], no período 1998 – 2012, extraídos do Banco Mundial. .	34
4.2	Valores iniciais e finais para os parâmetros $(\alpha, \lambda, m_c, \nu)$ que caracterizam a distribuição de renda $P(m)$ utilizados no cálculo numérico. . . . .	42
A.2	Valores médios para o índice de Gini $\bar{G}$ e taxa de gasto $\bar{\omega}$ para os dados reais de 139 países [29, 30]. . . . .	57

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Ciências sociais e ciências naturais

A econofísica é um campo de estudo interdisciplinar que utiliza-se de métodos de mecânica estatística, desenvolvidos por físicos, para abordar problemas de natureza econômica [1].

A expressão econofísica foi utilizada pela primeira vez bem recentemente, o termo foi introduzido pelo físico americano Harry Eugene Stanley, na conferência *Dynamics of Complex Systems*, realizada na Índia em 1995 [2]. Apesar do nome ter pouca idade, a união entre física e economia já vem de alguns séculos atrás.

O astrônomo belga Adolphe Quetelet (1796 – 1874) afirma a ideia de que as leis da física poderiam governar a economia e também o comportamento humano. No mesmo século XIX, o filósofo francês Auguste Comte (1798 – 1857), considerado o fundador da sociologia, introduz o termo “*physique sociale*” que pode ser entendido como sociofísica ou física social e a descreve como uma disciplina científica ao lado de astrofísica e geofísica [3].

Na primeira metade do século XIX, houve uma popularização da estatística social, que recolhia e estudava taxa de mortalidade, nascimento e casamento. Com isso, a estatística se tornou um método para analisar dados nas mais diversas áreas e isso inspirou os físicos James Clerk Maxwell (1831 – 1879), Ludwig Boltzmann (1844 – 1906) e Josiah Willard Gibbs (1839 – 1903) a desenvolver a mecânica estatística na segunda metade do século XIX. Vários economistas, como Alfred Marshall (1842-1924) e Francis Edgaworth (1845-

1926), baseados na mecânica estatística, formularam o conceito de que um sistema econômico poderia alcançar o equilíbrio como um sistema físico [2].

Concomitante ao longo do século XIX estabeleceu-se uma forte relação entre economia e ciências biológicas. Um belo exemplo é o de Charles Darwin (1809 – 1892) que inspirou-se no conceito de “*mão invisível*”, cunhado por Adam Smith (1723 – 1790), que dizia que numa economia de mercado, mesmo na ausência de uma entidade coordenadora, a interação entre os indivíduos parece resultar numa determinada ordem, para defender que a concorrência é a força oculta agindo por trás da adaptação biológica e seleção natural [3].

Outro exemplo da relação entre ciências biológicas e economia é o do matemático francês Louis Bachelier (1870 – 1946). Sob supervisão do grande físico e matemático Henri Poincaré (1854 – 1912), Bachelier publicou um trabalho intitulado de “*Teoria da Especulação*”, que foi publicado na revista *Annales Scientifiques de l’Ecole Normale Supérieure*, considerada uma das mais importantes revistas científicas francesas da época. A importância de seu trabalho é tão grande que a data de 29 de março de 1900, na qual foi publicado, é considerado o nascimento da matemática financeira. Louis inspirou-se nas ideias do Movimento Browniano do biólogo escocês Robert Brown (1773 – 1858) para introduzir o conceito de passeio aleatório para a modelagem matemática da movimentação de preços e avaliação de títulos em mercado de ações. O trabalho de Louis Bachelier trás uma análise inovadora dos mercados financeiros e têm grande estima tanto para finanças como para probabilidade. A partir da *Teoria da Especulação* surgem novos ramos de pesquisa com cálculo estocástico, tais como processos de Markov e processos de difusão além de outros [3–6].

É nesse contexto que Vilfredo Pareto (1848 – 1923), economista e sociólogo italiano, sucedeu o renomado economista francês Leon Walras (1834-1910), conhecido como o pai da Análise do Equilíbrio Geral, na escola de Lausanne de Economia. Pareto, que era engenheiro da Universidade de Turin, na Itália, trabalhou na área de construção civil e só depois de cinco anos trabalhando como engenheiro, substituiu Walras, em Lausanne. O italiano já se interessava por economia e política enquanto cursava engenharia em Turin, fazendo com que sua tese, intitulada de “*Os Princípios Fundamentais do Equilíbrio em Corpos Sólidos*”, fosse adiantada. Vilfredo publicou muitos artigos de filosofia e política e é considerado um dos pioneiros na utilização de métodos matemáticos para analisar problemas de natureza

econômica. Em seu trabalho, “*Cours d’économie politique*” [7, 8], Pareto introduz uma lei de distribuição de renda. Tal lei mostra que a renda e riqueza em uma sociedade não se distribui de forma aleatória e sim obedecendo uma Lei de Potência.

Apesar do cenário fértil, houve uma parada quase que total, no início do século XX, entre a interação da economia com as ciências naturais. Com raras exceções, durante quase 50 anos, a economia viveu afastada das ciências da natureza. Alguns fatores podem explicar esse isolamento. No início do século XX, as leis físicas foram revolucionadas pela teoria da relatividade e mecânica quântica, fazendo com que os físicos se dedicassem a esses problemas. No campo biológico, o início desse século foi marcado pela descoberta do primeiro antibiótico e isolamento do DNA [3].

A II Guerra Mundial também pode ter contribuído para esse isolamento. Estudos na área de bioquímica, criptografia, fontes alternativas de energia, farmacologia, tecnologia espacial dentre outros foram consideradas áreas de pesquisas mais importantes. Todos esses fatores contribuíram no sentido de desviar o foco da física e das ciências naturais das ciências sociais [3].

Paralelamente aos desenvolvimentos específicos em cada uma dessas áreas, na segunda metade do século XX, físicos desenvolveram a teoria de sistemas adaptativos complexos [9]. Esses sistemas são usualmente constituídos por um elevado número de elementos interagindo por meio de mecanismos não triviais e o comportamento dinâmico é autogerado como um resultado da estrutura interna através da dinâmica microscópica dos agentes individuais e é isso que o diferencia de um sistema dinâmico tradicional. Essa sistematização tem como exemplos os estudos de física na área biológica e econômica [3].

Estimulados por este ponto de vista, nas últimas 3 décadas, notou-se um aumento no interesse de físicos por problemas econômicos como mercado financeiro e distribuição de renda, basta notar o grande número de trabalhos publicados em revistas de física e economia (2424 artigos com o termo *econophysics* em seu título, publicados em revistas entre 1996 e 2016) [10]. Apesar dessa longa ligação, a primeira conferência sobre econofísica só foi acontecer em 1997, em Budapeste, porém a primeira conferência oficialmente reconhecida por uma sociedade profissional, a “*Application of Physics in Financial Analysis*” (APFA), só foi realizada em 1999, em Dublin. O sucesso da nova área fica comprovado com a realização

de outros *APFA*'s, com um aumento do interesse de físicos na área e na qualidade dos trabalhos apresentados [3].

## 1.2 Distribuição de Renda

Nesta dissertação estamos interessados em estudar sistemas econômicos compostos por muitos agentes, caracterizados por uma distribuição de renda. Um aspecto fundamental deste estudo é caracterizar as desigualdades impostas por modelos microscópicos com base nos mecanismos de troca de bens e serviços e quais características do sistema podem influenciar na distribuição de renda final. O índice de Gini  $G$  é um parâmetro bastante utilizado para quantificar essas desigualdades. Tal parâmetro está compreendido no intervalo  $0 \leq G \leq 1$ , onde  $G = 0$  representa mínima concentração de renda, ou seja, todos os indivíduos possuem mesma quantidade de recursos e  $G = 1$  representa máxima concentração de renda, ou seja, um único indivíduo possui todo o recurso daquela sociedade.

Diversos estudos [11–13] indicam que a distribuição de renda  $P(m)$  pode ser subdividida em dois regimes distintos separados por uma escala  $m_c$ . O primeiro associado a um regime de baixas rendas ( $m \leq m_c$ ) descrito por uma distribuição Gama e um segundo ligado a um regime de altas rendas ( $m > m_c$ ), matematicamente representado por uma lei de potência com um parâmetro  $1 \leq \nu \leq 2$ , usualmente denominado expoente de Pareto. Explicitamente:

$$P(m) = \begin{cases} (\beta m)^{n-1} e^{-\beta m} & , \quad m \leq m_c \\ m^{-(\nu+1)} & , \quad m > m_c \end{cases} \quad (1.1)$$

onde  $\beta$  representa o inverso do valor médio de renda para uma distribuição Gama completa.

Para garantir que a distribuição seja normalizada, temos o seguinte vínculo:

$$\int_0^{\infty} P(m) dm = \frac{\gamma(n, \beta m_c)}{\beta^n} + \frac{1}{\nu m_c^\nu} = 1. \quad (1.2)$$

onde

$$\gamma(n, \beta m_c) = \int_0^{m_c} (\beta m)^{n-1} e^{-\beta m} dm \quad (1.3)$$

Atualmente na literatura encontra-se um amplo espectro de modelos que descrevem diversos aspectos associados ao padrão da distribuição de renda de alguns países, como por exemplo o valor do expoente de Pareto ou se distribuição é separada em dois regimes [11, 14–16]. Em nossa investigação procuramos adicionar elementos que tornem com que essa descrição incorpore outras características tornando-se mais realísticas. Introduzimos “*choques*” no sistema e capacidade de adaptação relacionada com o nível de recursos de cada agente. Procuramos também averiguar a relação entre o índice de Gini  $G$  e a taxa de gasto média  $\langle \omega \rangle$  e a correlação entre renda e taxa de gasto, bem como desenvolvemos expressões analíticas para o índice de Gini e para a entropia associada a distribuição.

### 1.3 Organização da Dissertação

A dissertação está organizada da seguinte maneira: no Capítulo 2, apresentamos uma revisão dos principais modelos encontrados na literatura aplicados para investigar processos de distribuição de renda de diversos países.

No Capítulo 3, desenvolvemos expressões analíticas que relacionam os valores das taxas de gasto dos agentes com o índice de Gini para situações em que a distribuição de renda possua dois regimes.

No Capítulo 4, propomos mudanças no Modelo Heterogêneo Adaptativo [14, 17] de forma que em um mesmo sistema teremos 3 tipos de agentes caracterizados por uma adaptação que depende de seus níveis de renda. Inserimos também “*choques*” no sistema, permitindo uma redistribuição da quantidade total de recursos do mesmo, além de cálculos numéricos para os parâmetros que caracterizam uma distribuição de renda e por fim apresentamos os resultados e a discussão de nosso trabalho, assim como comparamos os resultados dos modelos obtidos

na literatura e do modelo heterogêneo adaptativo com os dados reais de países retirados do Banco Mundial.

No Capítulo 5, apresentamos a conclusão e as perspectivas de nosso trabalho.



# Capítulo 2

## Modelos

Os agentes econômicos recebem influência direta sobre a forma como os recursos são distribuídos na sociedade ou mercado no qual estão incluídos. A respeito disso, no final do século XVIII e início do século XIX, enquanto Bachelier aplicava métodos de mecânica estatística em mercados financeiros, também foram realizadas as primeiras investigações sobre modelos econômicos quantitativos. O italiano Vilfredo Pareto, que apesar de sua formação em ciências matemáticas e engenharia civil, coletou dados estatísticos de diversos países da Europa e indicou que a distribuição de renda e riqueza em uma sociedade parecia seguir uma lei de potência [2, 7, 8], descrita pela expressão

$$P(m) \propto m^{-(\nu+1)}, \quad (2.1)$$

onde  $\nu$  é o chamado expoente de Pareto e  $m$  representa a quantidade de recursos. Ainda segundo *Pareto* o expoente universal deveria ser aproximadamente  $\nu \simeq 1.5$ . Quando comparada com dados reais, a lei de potência apontada pelo economista italiano não apresentava resultados satisfatórios para intervalos de pequenas e médias rendas, embora para grandes valores de renda, os resultados fossem adequados.

Hoje concorda-se que  $\nu$  não é universal nem constante, ademais para diversos países a real distribuição de renda está separada em dois regimes [11], um de baixas rendas e outro para grandes valores de renda. O regime de pequenas rendas é caracterizado por uma distribuição Gama enquanto que o regime para altos valores de renda é definido por uma lei de potência.

De modo a exemplificar, a Figura (2.1) [11], apresenta a distribuição de renda para os Estados Unidos da América no ano de 2001.

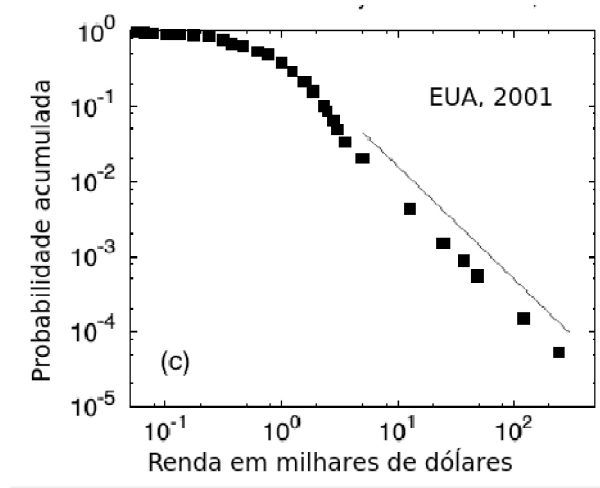


Figura 2.1: A Figura retirada de [11] exhibe a distribuição de renda dos Estados Unidos no ano de 2001. Percebe-se uma separação da distribuição em dois regimes. O primeiro representado por uma distribuição Gama, compreende pequenos valores de renda e concentra um grande número de indivíduos. Já o segundo, onde existe uma menor concentração de agentes, é representado por uma lei de potência, onde está localizado grandes valores de renda.

Com isso, baseado em modelos microscópicos, desde a década de 1980 [18, 19], a dinâmica computacional foi introduzida nas mais diversas pesquisas a fim de simular, em um sistema fechado, a troca de riquezas entre os agentes econômicos, obtendo, a partir de métodos estatísticos, importantes informações sobre a distribuição de renda. Nesta conjuntura, diversos modelos foram desenvolvidos a fim de obter novas distribuições de renda que ofereçam uma descrição mais adequada dos dados reais para que as desigualdades sociais sejam observadas e que políticas públicas sejam propostas a fim de mitigar ou diminuir os efeitos de tal desigualdade.

Em estreita ligação com modelos microscópicos geralmente construídos para descrever sistemas físicos, duas classes foram introduzidas com intenção de imitar um sistema econômico fechado. Os modelos que iremos revisar nesse capítulo foram inicialmente introduzidos em diferentes áreas de pesquisa, neles cada agente econômico possui uma quantidade  $m_i$  ( $m_i > 0$ ) de recursos, onde a quantidade de agentes  $N \{i = 1, 2, \dots, N\}$  é fixa. A cada passo de Monte

Carlo, a unidade  $i$ , troca com a unidade  $j$ , que foi escolhida aleatoriamente, uma fração  $\omega_i$  de seus recursos  $m_i$ . Durante a dinâmica, a quantidade total de recursos permanece constante

$$M = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (2.2)$$

Após a transação, as unidades  $i$  e  $j$  terão uma nova quantidade de recursos  $m_i(t+1)$  e  $m_j(t+1)$  respectivamente, que podem ser escritas como

$$\begin{cases} m_i(t+1) = m_i(t) + \Delta m, \\ m_j(t+1) = m_j(t) - \Delta m, \\ \Delta m = \omega_j(t)m_j - \omega_i(t)m_i, \end{cases} \quad (2.3)$$

onde a quantidade  $\Delta m$  pode ser interpretada como o fluxo efetivo de recursos em cada transação.

A forma da função  $\Delta m$  define a dinâmica estocástica subjacente. Alguns exemplos de interpretações e aplicações possíveis para esses modelos:

► Exemplo físico: Um gás com  $N$  partículas trocando energia. A cada colisão, um quantidade de energia  $\Delta E$  é trocada entre duas partículas aleatórias. O que produz uma distribuição de equilíbrio para a energia cinética  $f(E)$ .

► Análogo econômico: Uma sociedade com  $N$  agentes econômicos trocando uma quantidade de recursos. A cada interação, uma quantidade de recursos  $\Delta m$  é trocada entre dois agentes econômicos e ao final produz uma distribuição de renda fixa [20].

Diferentemente de sistemas econômicos reais, os sistemas estudados são ditos fechados, ou seja, a escala de tempo em que a dinâmica é realizada é suficientemente pequena para que o número de agentes  $N$  e a quantidade total de recursos  $M$  sejam mantidos constantes. Os modelos estudados também podem ser classificados como simétricos ou assimétricos. Um modelo é dito simétrico, quando a probabilidade  $\epsilon$  com a qual o agente  $i$  ou  $j$  perde uma quantidade de recursos é fixa e a quantidade de recursos trocados  $\Delta m$  satisfaz a relação:

$$\Delta m(m_i, m_j; \epsilon) = -\Delta m(m_j, m_i; \epsilon) \quad (2.4)$$

Da mesma maneira, um modelo é dito assimétrico, quando  $\epsilon$  for fixo e a quantidade de recursos trocados  $\Delta m$  satisfizer a relação:

$$\Delta m(m_i, m_j; \epsilon) \neq -\Delta m(m_j, m_i; \epsilon). \quad (2.5)$$

Se em uma interação entre dois agentes  $i$  e  $j$ , o montante total da troca de recursos  $\Delta m$  for inteiramente perdida por um agente e adquirida pelo outro, o modelo é denominado Modelo Unidirecional.

Os modelos são descritos através de uma série de parâmetros dos agentes econômicos. Definimos o parâmetro de poupança do  $i$ -ésimo agente  $\lambda_i$  ( $0 < \lambda_i < 1$ ), como sendo a fração mínima de recursos preservada durante uma transação. Em oposição ao parâmetro de poupança, temos para o  $i$ -ésimo agente, a taxa de consumo  $\omega_i$  ( $0 < \omega_i < 1$ ), que pode ser entendida como sendo a fração mínima de recursos que o agente está disposto a trocar [20].

Para estudar e elaborar tais tipos de modelos, é comum separá-los em duas classes distintas, uma dita homogênea e outra heterogênea. Na primeira classe (homogênea), que apresenta uma distribuição do tipo Gama e descreve o rendimento para baixos valores de renda, os agentes têm a mesma taxa de gasto  $\omega$  ( $0 < \omega < 1$ ), na segunda (heterogênea), que estabelece uma lei de potência e descreve o rendimento para grandes valores de renda, há uma única taxa de gasto  $\omega_i$ , específica para cada agente, ou no caso mais realista uma distribuição probabilística  $S(\omega)$ . Em ambos os casos, as taxas de gasto são definidas de forma exógena ao sistema. A seguir discutiremos cada uma destas classes.

## 2.1 Modelos Homogêneos

Inicialmente iremos tratar dos modelos homogêneos, onde todos os indivíduos são caracterizados pela mesma taxa de gasto  $\omega = 1 - \lambda$ .

### 2.1.1 A. O Modelo de Angle

O modelo de distribuição de renda, proposto por J. Angle em 1983 [11, 18], busca descrever como trocas individuais de recursos entre agentes econômicos produzem uma distribuição de riqueza “desarmoniosa”. É classificado, matematicamente, como modelo assimétrico e unidirecional, além de possuir uma dinâmica fortemente não-linear [20].

Para esse modelo, o módulo da variação da riqueza do  $i$ -ésimo agente é dado por:

$$|\Delta m| = \epsilon \omega m_i, \quad (2.6)$$

onde  $\epsilon$  é uma fração aleatória de  $m_i$  [ $\epsilon = \epsilon(m_i)$ ].

Se  $m_i < m_j$ , o agente  $i$  terá uma probabilidade  $p_0$  de perder seus recursos. Já se  $m_i > m_j$ , o agente  $j$  terá uma probabilidade  $1 - p_0$  de perder seus recursos.

A variação de recursos  $|\Delta m|$ , para o modelo de Angle, obedece a seguinte lei:

$$\Delta m = \eta(m_j - m_i)\epsilon\omega m_i - [1 - (m_j - m_i)]\epsilon\omega m_j, \quad (2.7)$$

onde  $\eta$  e  $\epsilon$  são variáveis aleatórias. O parâmetro  $\epsilon$  está compreendido no intervalo  $0 < \epsilon < 1$  e pode ser uniforme ou ter uma certa distribuição de probabilidade  $g(\epsilon)$ . Já  $\eta$  é uma variável dicotômica responsável pela unidirecionalidade do fluxo de recursos do modelo, podendo assumir dois valores: com uma probabilidade  $p_0$ ,  $\eta(m > 0) = +1$  ou com uma probabilidade  $1 - p_0$ ,  $\eta(m < 0) = 0$ . O valor de  $\eta = +1$  significa que o fluxo de recursos vai do agente  $i$  para o agente  $j$  e já se  $\eta = 0$ , a transferência de recursos se dá do agente  $j$  para o agente  $i$ .

O modelo apresenta um caso especial quando  $p_0 = 1/2$ . Nessa situação, todos os indivíduos tem a mesma chance de ganhar ou perder recursos. Nesta condição específica, a dinâmica utilizada pelo modelo resulta em uma distribuição de renda, no equilíbrio, representada por uma distribuição Gama:

$$P(m) = \beta \gamma_n(\beta m) = \frac{\beta}{\Gamma(n)} (\beta m)^{n-1} \exp(-\beta m) \quad (2.8)$$

onde

$$n \equiv \frac{D}{2} = \frac{1 + 2\lambda}{2(1 - \lambda)} = \frac{3 - 2\omega}{2\omega} \quad (2.9)$$

onde  $n$  é um número real compreendido no intervalo  $[1/2, \infty)$ . Já  $\beta$  é um parâmetro que faz o papel do inverso da renda média [21]. Perceba que quando  $n < 1$ , ou seja, quando  $\omega > 3/4$  ou  $\lambda < 1/4$ , a distribuição Gama diverge quando  $m$  tende a zero.

Podemos conceber dois análogos mecânicos para o modelo de Angle. O primeiro deles é com a interação de gotas de chuva. Uma gota de chuva, inicialmente com massa  $x_i$ , após várias interações ou choques, pode perder uma fração de sua massa inicial, passando a ter uma nova massa  $x_i(t+1) = x_i - \Delta x$ , onde  $\Delta x$  representa a fração de massa perdida. Por sua vez, essa quantidade é incorporada a uma nova gota que inicialmente possuía uma massa  $x_j$  e que após as interações ou colisões passa a ter uma massa  $x_j(t+1) = x_j + \Delta x$ . O outro análogo é visto quando percebe-se que na equação (2.9),  $D = 2n$  é a dimensão efetiva do sistema. Verifica-se também que a distribuição  $\gamma_n(\beta x) = \gamma_{D/2}(\beta x)$  corresponde a distribuição de equilíbrio a uma temperatura  $\beta^{-1}$  para a energia cinética de um gás ideal em  $D$  dimensões ou para a energia potencial de um Oscilador Harmônico  $D$ -dimensional [20].

### 2.1.2 B. O Modelo de Bennati

O modelo introduzido por E. Bennati [20] pode ser classificado como simétrico e unidirecional. No modelo, os agentes interagem e trocam quantidades constantes de recursos  $\Delta m$ . Se após as transações, seus recursos finais forem positivos [ $m_i(t+1) > 0$  e  $m_j(t+1) > 0$ ], o sistema é descrito pelas equações (2.3), onde

$$\Delta m(t+1) = \Delta m \tag{2.10}$$

ou seja, o fluxo de recursos trocado não depende da taxa de gasto. Caso  $m_i(t+1) < 0$  ou  $m_j(t+1) < 0$ , não ocorre transação.

Ao invés de um conjunto de partículas trocando energia após colisões, o modelo de Bennati é análogo a partículas trocando energia por emissão e absorção de quanta de luz a uma frequência constante  $\nu_0 = 2\pi\Delta m/h$ .

O modelo é descrito analiticamente pela distribuição de equilíbrio exponencial ou distri-

buição de Gibbs [21, 22]

$$P(m) = \frac{e^{-m/\langle m \rangle}}{\langle m \rangle} \quad (2.11)$$

onde  $\langle m \rangle$  é a quantidade de recursos médios.

O modelo de Bennati torna-se equivalente ao modelo de Angle quando  $n = \frac{D}{2} = 1$ .

Esse modelo diferencia-se dos demais já que é aditivo (ou seja,  $\Delta m$  é independente de  $m$ ) enquanto os outros modelos são multiplicativos ( $\Delta m \propto m$ ). [20]

### 2.1.3 C. O Modelo de Chakraborti e Chakrabarti

No modelo introduzido por Chakraborti e Chakrabarti [11, 20] a dinâmica de troca de recursos é semelhante a dos outros modelos e tem como regra geral a seguinte expressão:

$$\begin{cases} m_i(t+1) = \lambda m_i + \epsilon(1-\lambda)(m_i + m_j) \\ m_j(t+1) = \lambda m_j + \bar{\epsilon}(1-\lambda)(m_i + m_j) \end{cases} \quad (2.12)$$

onde  $\bar{\epsilon} = 1 - \epsilon$  e representa uma variável aleatória contida no intervalo (0,1). Esta regra se adequa a equação (2.3) caso:

$$\begin{cases} \Delta m = \omega(\bar{\epsilon}\omega_i - \epsilon m_j) - (1-\lambda)(\bar{\epsilon}m_i - \epsilon m_j) \\ \bar{\epsilon} + \epsilon = 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

Como no modelo de Angle a distribuição de recursos no equilíbrio é bem descrita pela distribuição Gama (2.8), entretanto o parâmetro  $n$  é dado por:

$$n_c(\omega) = n(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{2} = \frac{1+2\lambda}{1-\lambda} = \frac{3-2\omega}{\omega} \quad (2.14)$$

ou seja, é apenas o dobro do parâmetro  $n_A(\omega)$  [equação (2.9)] do modelo de Angle para  $p_0 = 1/2$ .

Para  $m \rightarrow 0$  a densidade de probabilidade é sempre finita e mesmo para o máximo valor da taxa de gasto  $\omega$  ( $\omega = 1$ ) ou para o mínimo valor do parâmetro de poupança  $\lambda$  ( $\lambda = 0$ ) a distribuição converge para a função exponencial  $P(m) = \beta e^{-\beta m}$ .

Embora exista uma relação entre os parâmetros  $n_A(\omega)$  e  $n_C(\omega)$ , podemos apontar algumas diferenças entre os modelos:

- Ao contrário do modelo de Angle, este não é unidirecional.
- O modelo é linear do ponto de vista da transferência de recursos.
- O componente estocástico está apenas associado ao parâmetro  $\epsilon$ .

Um análogo mecânico para o modelo de Chakraborti e Chakrabarti é um sistema composto por osciladores harmônicos com  $D = 2n$  graus de liberdade ou um gás ideal com  $D = 2n$  dimensões.

### 2.1.4 D. O Modelo de Dragulescu e Yakovenko

Ao contrário dos modelos de Angle e Bennati, o modelo proposto por Dragulescu e Yakovenko retrata trocas simétricas entre os agentes econômicos do mesmo modo como ocorre no modelo de Chakraborti e Chakrabarti. O modelo pode ser interpretado como uma reorganização aleatória da riqueza total inicial  $(m_i + m_j)$  de dois indivíduos e é definido pela seguinte regra geral:

$$\begin{cases} m_i(t+1) = \epsilon(m_i + m_j), \\ m_j(t+1) = \bar{\epsilon}(m_i + m_j), \\ \bar{\epsilon} + \epsilon = 1. \end{cases} \quad (2.15)$$

Combinando a equação (2.15) com a equação (2.3), temos:

$$\Delta m = \bar{\epsilon}m_i - \epsilon m_j, \quad (2.16)$$

onde  $\epsilon$  e  $\bar{\epsilon}$  são números aleatórios compreendidos no intervalo  $(0,1)$ .



Pode-se considerar o modelo introduzido por Dragulescu e Yakovenko como um caso particular do modelo de Chakraborti e Chakrabarti para o caso em que o parâmetro de poupança  $\lambda$  é nulo, ou seja, a taxa de gasto  $\omega$  é máxima ( $\lambda = 0$  e  $\omega = 1$ ).

Assim como nos casos do modelo de Angle, de Bennati e de Chakraborti e Chakrabarti (para  $n = 1$ ), a distribuição no equilíbrio é descrita por uma densidade puramente exponencial [20].

Um análogo mecânico para o modelo de Dragulescu e Yakovenko são as partículas de um gás que ao colidirem uma com as outras trocam uma certa quantidade de energia  $\Delta m$ .

Na tabela 2.1 apresentamos um resumo das principais propriedades dos modelos discutidos até esta seção. Na segunda coluna, indicamos a distribuição de equilíbrio associada a cada caso.

Modelo	$P(m)$	$n(\omega)$	$\bar{\omega}_i$	$\bar{\omega}_j$
Angle	Gama	$\frac{3-2\omega}{2\omega}$	$\eta(m_j - m_i)\epsilon$	$[1 - \eta(m_j - m_i)]\epsilon$
Bennati	Exponencial	1	$\epsilon$	$1 - \epsilon$
Chakraborti	Gama	$\frac{3-2\omega}{\omega}$	$(1 - \lambda_i)\epsilon$	$(1 - \epsilon)(1 - \lambda_i)$
Dragulescu	Exponencial	1	$\epsilon$	$1 - \epsilon$

Tabela 2.1: Quadro comparativo entre os modelos homogêneos para a distribuição de renda  $P(m)$ , para o parâmetro  $n(\omega)$  e para as taxas de gasto média  $\bar{\omega}_i$  e  $\bar{\omega}_j$ .

## 2.2 Modelos Heterogêneos

Passaremos a tratar nessa seção de modelos onde cada agente possui um taxa de consumo  $\omega_i = 1 - \lambda_i$  específica, distribuída de maneira uniforme no intervalo  $[0,1)$ .

Pode-se formular modelos heterogêneos correspondentes aos modelos homogêneos citados anteriormente. Para isso, podemos considerar o termo  $\omega m_i$  (ou  $\lambda m_i$ ) ao invés do fator  $\omega_i m_i$  (ou  $\lambda_i m_i$ ), onde o conjunto dos parâmetros  $\omega_i$  (ou  $\lambda_i$ ) é constante no tempo e específico para cada agente.

O resultado da dinâmica para a reformulação dos modelos de Angle e de Chakraborti e Chakrabarti apresenta uma distribuição exponencial para valores intermediários de  $m$  e uma distribuição lei de potência  $P(m) = m^{-(1+\nu)}$  para grandes valores de renda.

É possível reformular os modelos multiplicativos (todos citados acima com exceção do modelo de Bennati) utilizando a equação (2.3) [20], com o termo de fluxo de recursos dado por:

$$\Delta m = \hat{\omega}_i m_i - \hat{\omega}_j m_j, \quad (2.17)$$

onde  $\hat{\omega}_i$  e  $\hat{\omega}_j$  são variáveis estocásticas que indicam a real porcentagem de riqueza cedida pelos agentes  $i$  e  $j$ , respectivamente.

No modelo de Angle,  $\hat{\omega}_i$  e  $\hat{\omega}_j$  são funções independentes não-lineares das rendas  $m_i$  e  $m_j$  dos agentes e são escritas como:

$$\begin{cases} \hat{\omega}_i = \eta(m_j - m_i)\varepsilon\omega_i \\ \hat{\omega}_j = \eta(m_i - m_j)\varepsilon\omega_j, \end{cases} \quad (2.18)$$

onde  $\varepsilon$  é um número aleatório com densidade de probabilidade  $g(\varepsilon)$  e  $\eta(m > 0) = 1$  com probabilidade  $p_0$  e  $\eta(m < 0) = 0$  com probabilidade  $1 - p_0$  [20].

No modelo de Chakraborti e Chakrabarti, pode-se escrever  $\hat{\omega}_i$  e  $\hat{\omega}_j$  como [20]:

$$\begin{cases} \hat{\omega}_i = \varepsilon(1 - \lambda_i) \equiv \varepsilon\omega_i \\ \hat{\omega}_j = (1 - \varepsilon)(1 - \lambda_j) \equiv (1 - \varepsilon)\omega_j. \end{cases} \quad (2.19)$$

Quando todos  $\hat{\omega}_i \rightarrow 1$ , o modelo de Dragulescu e Yakovenko é obtido. [20]

## 2.3 O Modelo Heterogêneo e Adaptativo

Em todos os modelos tratados anteriormente as taxas de consumo  $\omega_i$  dos agentes são reguladas de maneira exógena. Como forma de contornar esta característica foi introduzido [14] um modelo microscópico, no qual, as trocas de riquezas entre os agentes está sujeita a um processo adaptativo, onde a taxa de consumo de cada agente pode ser regulada individualmente, em função de seu nível de recursos.

No Modelo Heterogêneo e Adaptativo (MHA), o sistema é fechado e composto por  $N$  agentes  $\{i\} = \{1, 2, \dots, N\}$ , cada agente possui uma quantidade de recursos  $m_i > 0$ , e a soma destes é a quantidade total de recursos  $M$  na sociedade. A taxa de gasto  $\omega_i$  ( $0 < \omega < 1$ ), parâmetro que estabelece a fração da quantidade de recursos que o agente  $i$  está disposto a trocar com o agente  $j$ , é atualizada a cada passo de Monte Carlo. Ao término de uma negociação, a quantidade final de recursos obtido por cada agente obedece as seguintes equações

$$\begin{cases} m_i(t+1) = m_i(t) + \Delta m_{ij} \\ m_j(t+1) = m_j(t) - \Delta m_{ij} \\ \Delta m_{ij} = \omega_j m_j - \omega_i m_i \end{cases} \quad (2.20)$$

Após cada transação computamos a variação percentual de recursos  $\alpha_i$  dos agentes.

$$\alpha_i \equiv \frac{m_i(t+1)}{m_i(t)}. \quad (2.21)$$

Assim, o MHA fica dividido em Modelo Heterogêneo e Adaptativo 1(MHA-1) e Modelo Heterogêneo e Adaptativo 2(MHA-2).

### 2.3.1 Modelo Heterogêneo e Adaptativo 1 (MHA-1)

Nesta situação, após uma negociação, o agente irá tender a conservar uma fração da quantidade de recursos restantes caso  $m_i(t+1) < m_i(t)$ , ou seja, se  $\alpha_i < 1$  haverá por parte do agente uma redução da taxa de gasto  $\omega_i(t) > \omega_i(t+1)$ . Caso o oposto ocorra, ou seja, se  $m_i(t+1) > m_i(t)$ , irá ocorrer um incremento na taxa de  $\omega_i(t+1) > \omega_i(t)$  ( $\alpha_i \geq 1$ ) na próxima interação. Portanto, a principal característica do MHA-1 é que os parâmetros de renda  $m_i$  e de taxa de consumo  $\omega_i$  são positivamente correlacionadas. Pode-se representar esse comportamento matematicamente através das seguintes equações:

$$\omega_i(t+1) = \begin{cases} \alpha\omega_i(t) & , \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha}\omega_i(t) + (1 - \frac{1}{\alpha}) & , \alpha \geq 1 \end{cases} \quad (2.22)$$

Observa-se também três situações limites:

1) Se depois de uma negociação um agente tiver  $m_i(t+1) \gg m_i(t)$ , sua atitude será aumentar a taxa de gasto  $\omega_i(t+1)$  para 1.

2) Caso após a transação ele tenha  $m_i(t) = m_i(t+1)$ , a taxa de gasto permanecerá constante  $\omega_i(t) = \omega_i(t+1)$ .

3) Por fim, terá  $\omega_i(t+1) \approx 0$  caso  $m_i(t) \gg m_i(t+1)$ .

### 2.3.2 Modelo Heterogêneo e Adaptativo 2 (MHA-2)

Nesta situação, se o agente, após uma transação, possuir  $m_i(t+1) > m_i(t)$ , ou seja se  $\alpha_i \geq 1$ , irá ocorrer um aumento da taxa de gasto  $\omega_i(t+1) > \omega_i(t)$ . Caso o contrário aconteça e após a transação  $m_i(t+1) < m_i(t)$  ( $\alpha_i < 1$ ), o agente também irá aumentar o parâmetro de troca  $\omega_i(t+1) > \omega_i(t)$  para a próxima interação. Assim se  $\alpha_i \geq 1$  os parâmetros renda

$m_i(t)$  e taxa de gasto  $\omega_i(t)$  são positivamente correlacionados e caso  $\alpha_i < 1$  os parâmetros são “negativamente” correlacionados, matematicamente:

$$\omega_i(t+1) = \begin{cases} \alpha\omega_i(t) + (1 - \alpha), & \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha}\omega_i(t) + (1 - \frac{1}{\alpha}), & \alpha \geq 1 \end{cases} \quad (2.23)$$

Da mesma maneira que foi observado no Modelo Heterogêneo e Adaptativo-1, pode-se observar três situações limites:

1) Se depois de uma negociação um agente tiver  $m_i(t+1) \gg m_i(t)$ , sua atitude será aumentar a taxa de gasto  $\omega_i(t+1)$  para 1.

2) Caso após a transação ele tenha  $m_i(t) = m_i(t+1)$ , a taxa de gasto não sofrerá mudança  $\omega_i(t) = \omega_i(t+1)$ .

3) Finalmente, terá  $\omega_i(t+1) = 1$  caso  $m_i(t) \gg m_i(t+1)$ .

Estes modelos produzem uma variedade de distribuições de renda com características monomodais, bimodais e com dois regimes dependendo da fração de agentes adaptáveis que constituem o sistema. No capítulo 3 desenvolvemos expressões analíticas para o índice de Gini, parâmetro comumente utilizado para a caracterização das desigualdades associadas às diferentes formas das distribuições de renda produzidas pelos modelos discutidos até o momento.

# Capítulo 3

## Índice de Gini

Ao longo das últimas duas décadas, os físicos têm-se dedicado ao problema da distribuição de renda  $P(r)$ . Uma característica fundamental deste estudo é caracterizar as desigualdades indicadas por modelos microscópicos, com base nos mecanismos de intercâmbio de bens e serviços. Uma forma de quantificar tais desigualdades baseia-se no índice de Gini  $0 \leq G \leq 1$  [23, 24], um parâmetro que define a máxima ( $G = 1$ ) e a mínima ( $G = 0$ ) concentração de recursos.

Neste capítulo iremos desenvolver expressões analíticas do índice de Gini  $G$  para um distribuição de renda puramente lei de potência e distribuições com dois regimes bem como suas entropias e suas derivadas.

As mais recentes análises [11–13, 23] indicam que a distribuição de renda  $P(r)$  fica bem caracterizada quando é dividida, por uma escala  $m_c$ , em dois regimes. O primeiro associado a um regime de baixa renda ( $r \leq m_c$ ) que é matematicamente representado por uma distribuição do tipo Gama e o segundo relacionado a um regime de altos valores de renda ( $r > m_c$ ) que é descrito por uma função lei de potência com um expoente  $1 \leq \nu \leq 3$ , conhecido usualmente como expoente de Pareto.

$$P(r) = \begin{cases} r^\alpha e^{-\lambda r} & , \quad r \leq m_c \\ r^{-(\nu+1)} & , \quad r > m_c \end{cases} \quad (3.1)$$

Inicialmente precisamos introduzir a definição das funções Gama incompleta inferior:

$$\gamma(n, m) \equiv \int_0^m x^{n-1} e^{-x} dx; \quad (3.2)$$

e superior:

$$\Gamma(n, m) \equiv \int_m^\infty x^{n-1} e^{-x} dx. \quad (3.3)$$

As funções  $\gamma(n, m)$  e  $\Gamma(n, m)$  possuem as seguintes propriedades:

$$\gamma(n, m) + \Gamma(n, m) = \Gamma(n), \quad (3.4)$$

$$\frac{d\gamma}{dm} = m^{n-1} e^{-m} \quad (3.5)$$

e

$$\gamma(n+1, m) = n\gamma(n, m) - m^n e^{-m}. \quad (3.6)$$

Precisamos garantir que a distribuição  $P(m)$  seja contínua e normalizada. De modo a garantir sua continuidade é necessário que no ponto  $r = m_c$ :

$$m_c^\alpha e^{-\lambda m_c} = m_c^{-(1+\nu)}. \quad (3.7)$$

Com isso, temos o seguinte vínculo:

$$\boxed{\frac{\lambda}{(1+\nu+\alpha)} m_c = \ln(m_c)} \quad (3.8)$$

Já para que seja normalizada é necessário que:

$$\int_0^\infty P(r) dr = 1 \quad (3.9)$$

Como a distribuição está separada em dois regimes, temos:

$$\int_0^{m_c} r^\alpha e^{-\lambda r} dr + \int_{m_c}^\infty r^{-(1+\nu)} dr = 1 \quad (3.10)$$

Portanto, temos mais um vínculo, desta vez associado com a normalização da distribuição:

$$\boxed{\frac{\gamma(\alpha+1, \lambda m_c)}{\lambda^{\alpha+1}} + \frac{1}{\nu m_c^\nu} = 1} \quad (3.11)$$

## 3.1 Cálculo do Índice de Gini

### 3.1.1 Distribuição separada por dois regimes

O índice de Gini pode ser calculado analiticamente através de duas quantidades paramétricas:

$$\boxed{X(m) = \frac{\int_0^m P(r) dr}{\int_0^\infty P(r) dr},} \quad (3.12)$$

que representa a fração de agentes com recursos inferior a  $m$  e

$$\boxed{Y(m) = \frac{\int_0^m rP(r) dr}{\int_0^\infty rP(r) dr},} \quad (3.13)$$

que representa a fração de recursos associada a população de  $X(m)$ .

Na Figura 3.1, a linha vermelha representa a distribuição de renda exponencial e a curva preta é a distribuição de renda sem nenhuma desigualdade. Área de concentração de renda é a região que fica compreendida entre as duas curvas e a área de máxima concentração é a região abaixo da curva preta.

O índice de Gini é definido como a razão entre a área de concentração de renda e a área de máxima concentração de renda:

$$\boxed{G \equiv 2 \int_0^1 (X - Y) dX} \quad (3.14)$$

Com essas informações, iremos iniciar nosso cálculo pelos denominadores de  $X(m)$  e  $Y(m)$ . Para o denominador de  $X(m)$ , que iremos chamá-lo de  $A_0$ , temos:

$$A_0 = \int_0^\infty P(r) dr = \int_0^{m_c} r^\alpha e^{-\lambda r} dr + \int_{m_c}^\infty r^{-(1+\nu)} dr, \quad (3.15)$$



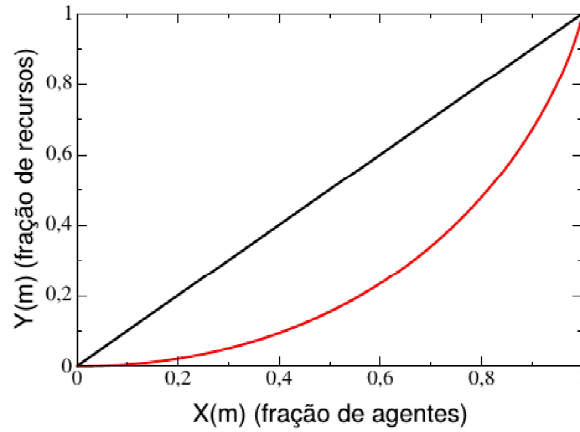


Figura 3.1: Figura extraída de [17]. Curva vermelha representando uma distribuição de renda exponencial e a curva preta representando uma distribuição de renda perfeitamente igualitária.

então,

$$A_0 = \frac{\gamma(\alpha+1, \lambda m_c)}{\lambda^{\alpha+1}} + \frac{1}{\nu m_c^\nu}. \quad (3.16)$$

Agora para o denominador de  $Y(m)$ , que será chamado de  $A_1$ , temos:

$$A_1 = \int_0^\infty r P(r) dr = \int_0^{m_c} r^{\alpha+1} e^{-\lambda r} dr + \int_{m_c}^\infty r^{-\nu} dr, \quad (3.17)$$

portanto,

$$A_1 = \frac{\gamma(\alpha+2, \lambda m_c)}{\lambda^{\alpha+2}} + \frac{m_c^{-(\nu-1)}}{(\nu-1)}. \quad (3.18)$$

Para o cálculo do numerador de  $X(m)$  temos dois casos. O primeiro quando  $r \leq m_c$  e o segundo quando  $r > m_c$ . Para  $r \leq m_c$ , temos:

$$\int_0^m r^\alpha e^{-\lambda r} dr = \frac{\gamma(\alpha+1, \lambda m)}{\lambda^{\alpha+1}} \quad (3.19)$$

e para o segundo caso ( $r > m_c$ ):

$$\int_0^m P(r) dr = \int_0^{m_c} r^\alpha e^{-\lambda r} dr + \int_{m_c}^m r^{-(1+\nu)} dr \quad (3.20)$$

e portanto

$$\int_0^m P(r) dr = \frac{\gamma(\alpha+1, \lambda m_c)}{\lambda^{\alpha+1}} + \frac{1}{\nu m_c^\nu} \left[ 1 - \left( \frac{m_c}{m} \right)^\nu \right] \quad (3.21)$$

Então:

$$X(m) = \begin{cases} \frac{1}{A_0} \frac{\gamma(\alpha+1, \lambda m)}{\lambda^{\alpha+1}} & , \quad r \leq m_c \\ \frac{1}{A_0} \left\{ \frac{\gamma(\alpha+1, \lambda m_c)}{\lambda^{\alpha+1}} + \frac{1}{\nu m_c^\nu} \left[ 1 - \left( \frac{m_c}{m} \right)^\nu \right] \right\} & , \quad r > m_c \end{cases} \quad (3.22)$$

Procedendo de forma similiar para a quantidade  $Y(m)$ , para o caso em que  $r \leq m_c$ , temos:

$$\int_0^m r P(r) dr = \int_0^m r^{\alpha+1} e^{-\lambda r} dr = \frac{\gamma(\alpha+2, \lambda m)}{\lambda^{\alpha+2}}. \quad (3.23)$$

Para caso em que  $r > m_c$ , a integral se divide em duas e ficamos com:

$$\int_0^m r P(r) dr = \int_0^{m_c} r^{\alpha+1} e^{-\lambda r} dr + \int_{m_c}^m r^{-\nu} dr, \quad (3.24)$$

portanto,

$$\int_0^m r P(r) dr = \frac{\gamma(\alpha+2, \lambda m_c)}{\lambda^{\alpha+2}} + \frac{1}{(\nu-1)m_c^{\nu-1}} \left[ 1 - \left( \frac{m_c}{m} \right)^{\nu-1} \right]. \quad (3.25)$$

Temos, então:

$$Y(m) = \begin{cases} \frac{1}{A_1} \frac{\gamma(\alpha+2, \lambda m)}{\lambda^{\alpha+2}} & , \quad r \leq m_c \\ \frac{1}{A_1} \left\{ \frac{\gamma(\alpha+2, \lambda m_c)}{\lambda^{\alpha+2}} + \frac{1}{(\nu-1)m_c^{\nu-1}} \left[ 1 - \left( \frac{m_c}{m} \right)^{\nu-1} \right] \right\} & , \quad r > m_c \end{cases} \quad (3.26)$$

A partir de agora, iremos reproduzir o cálculo do índice de Gini, inicialmente para o caso em que  $r \leq m_c$ .

Como a integral do índice de Gini é sobre a variável  $X$ , precisamos de  $dX$ . Usando a propriedade (3.5):

$$\frac{d\gamma}{dm} = m^{n-1} e^{-m},$$

temos:

$$\frac{dX}{dm} = \frac{1}{A_0} \frac{1}{\lambda^{\alpha+1}} \frac{d\gamma(\alpha+1, \lambda m)}{dm}, \quad (3.27)$$

logo,

$$dX = \frac{d\gamma(\alpha+1, \lambda m)}{A_0 \lambda^{\alpha+1}}. \quad (3.28)$$

Temos também:

$$(X - Y) = \frac{1}{A_0} \frac{\gamma(\alpha + 1, \lambda m)}{\lambda^{\alpha+1}} - \frac{1}{A_1} \frac{\gamma(\alpha + 2, \lambda m)}{\lambda^{\alpha+2}} \quad (3.29)$$

Podemos usar a propriedade (3.6):

$$\gamma(n + 1, m) = n\gamma(n, m) - m^n e^{-m},$$

no segundo termo da Equação (3.29):

$$\gamma(\alpha + 2, \lambda m) = (\alpha + 1)\gamma(\alpha + 1, \lambda m) - \lambda^{\alpha+1} e^{-\lambda m} m^{\alpha+1}. \quad (3.30)$$

logo:

$$\begin{aligned} \int_0^{m_c} (X - Y) dX &= \frac{1}{A_1 A_0 \lambda^{2\alpha+3}} \left[ \int_0^{m_c} \frac{\lambda A_1 \gamma(\alpha + 1, \lambda m)}{A_0} d\gamma(\alpha + 1, \lambda m) \right. \\ &\quad - (\alpha + 1) \int_0^m \gamma(\alpha + 1, \lambda m) d\gamma(\alpha + 1, \lambda m) \\ &\quad \left. + \int_0^{m_c} (\lambda m)^{\alpha+1} e^{-\lambda m} d\gamma(\alpha + 1, \lambda m) \right] \quad (3.31) \end{aligned}$$

Utilizando novamente a propriedade (3.6) identificamos:

$$d\gamma(\alpha + 1, \lambda m) = \frac{(\lambda m)^\alpha}{\lambda} e^{-\lambda m} d(\lambda m). \quad (3.32)$$

De modo que:

$$\int_0^{m_c} (X - Y) dX = \frac{1}{A_1 A_0 \lambda^{2\alpha+3}} \left\{ \left[ \frac{\lambda A_1}{A_0} - (\alpha + 1) \right] \frac{\gamma(\alpha + 1, \lambda m_c)^2}{2} + \frac{\gamma(2\alpha + 2, 2\lambda m_c)}{\lambda^{2\alpha+2}} \right\}. \quad (3.33)$$

Sabemos, de acordo com a Equação (3.14), que o índice de Gini é o duas vezes o resultado da Equação (3.33). Então, temos na Equação (3.34) a expressão analítica para o índice de Gini na região onde  $r \leq m_c$ :

$$G(r \leq m_c) = \frac{1}{A_1 A_0 \lambda^{2\alpha+3}} \left\{ \left[ \frac{\lambda A_1}{A_0} - (\alpha + 1) \right] \gamma(\alpha + 1, \lambda m_c)^2 + \frac{\gamma(2\alpha + 2, 2\lambda m_c)}{\lambda^{2\alpha+1}} \right\}. \quad (3.34)$$

Construímos de maneira equivalente a expressão para índice de Gini na região em que  $r > m_c$ . Temos que:

$$\boxed{dX = \frac{dm}{A_0 m^{\nu+1}}} \quad (3.35)$$

e

$$(X-Y) = \left[ \frac{\gamma(\alpha+1, \lambda m_c)}{A_0 \lambda^{\alpha+1}} - \frac{\gamma(\alpha+2, \lambda m_c)}{A_1 \lambda^{\alpha+2}} \right] + \frac{1}{m_c^\nu} \left\{ \frac{1}{A_0 \nu} \left[ 1 - \left( \frac{m_c}{m} \right)^\nu \right] - \frac{m_c}{A_1(\nu-1)} \left[ 1 - \left( \frac{m_c}{m} \right)^{\nu-1} \right] \right\}. \quad (3.36)$$

Dessa maneira,

$$\int_{m_c}^{\infty} (X-Y) dX = \frac{\lambda^{-(\alpha+2)}}{A_1 A_0 \nu m_c^\nu} \left[ \frac{A_1 \lambda}{A_0} \gamma(\alpha+1, \lambda m_c) - \gamma(\alpha+2, \lambda m_c) \right] + \frac{1}{2 A_0^2 \nu^2 m_c^{2\nu}} - \frac{m_c^{1-2\nu}}{A_0 A_1 \nu (2\nu-1)}. \quad (3.37)$$

Portanto, temos que o índice de Gini na região onde  $r > m_c$  é:

$$\boxed{G(r > m_c) = \frac{2\lambda^{-(\alpha+2)}}{A_1 A_0 \nu m_c^\nu} \left[ \frac{A_1 \lambda}{A_0} \gamma(\alpha+1, \lambda m_c) - \gamma(\alpha+2, \lambda m_c) \right] + \frac{1}{A_0^2 \nu^2 m_c^{2\nu}} - \frac{2m_c^{1-2\nu}}{A_0 A_1 \nu (2\nu-1)}}. \quad (3.38)$$

Dessa forma, o índice de Gini para um distribuição dividida em dois regimes é:

$$\boxed{G = G(r \leq m_c) + G(r > m_c)} \quad (3.39)$$

### 3.1.2 Caso particular em que $\nu = 1$

Uma característica singular, observada em diversas fontes da literatura [11, 25, 26], para o caso em que temos a distribuição mista, é o fato de termos como resultado dessas simulações o expoente de Pareto  $\nu = 1$ , que pode descrever uma distribuição de renda real. Dessa forma, torna-se interessante reproduzir o cálculo do índice de Gini para uma distribuição mista em que  $\nu = 1$ . Assim, a distribuição fica:

$$P(r) = \begin{cases} r^\alpha e^{-\lambda r} & , \quad r \leq m_c \\ r^{-2} & , \quad r > m_c \end{cases} \quad (3.40)$$

Mais uma vez iremos usar a Equação (3.14) para o cálculo do índice de Gini e por isso precisamos calcular as quantidades  $X(m)$ (3.12) e  $Y(m)$ (3.13). Novamente iremos iniciar

pelos integrais nos denominadores de  $X(m)$  ( $A_0$ ) e  $Y(m)$  ( $A_1$ ). Para o  $A_0$ , temos:

$$A_0 = \int_0^{\infty} P(r)dr = \int_0^{m_c} r^{\alpha} e^{-\lambda r} dr + \int_{m_c}^{\infty} r^{-2} dr, \quad (3.41)$$

logo

$$\boxed{A_0 = \frac{\gamma(\alpha+1, \lambda m_c)}{\lambda^{\alpha+1}} + \frac{1}{m_c}.} \quad (3.42)$$

Já para  $A_1$ , ficamos com:

$$A_1 = \int_0^{\infty} rP(r)dr = \int_0^{m_c} r^{\alpha+1} e^{-\lambda r} dr + \int_{m_c}^{\infty} r^{-1} dr, \quad (3.43)$$

dessa maneira,

$$A_1(\alpha, k, \lambda, m_c) = \frac{\gamma(\alpha+2, \lambda, m_c)}{\lambda^{\alpha+2}} + \int_{m_c}^k r^{-1} dr, \quad (3.44)$$

finalmente

$$\boxed{A_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} A_1(\alpha, k, \lambda, m_c).} \quad (3.45)$$

Para o cálculo do numerador de  $X(m)$  teremos dois casos ( $r \leq m_c$  e  $r > m_c$ ). Na situação em que  $r \leq m_c$  não teremos mudança. Então o numerador de  $X(m)$  quando  $r \leq m_c$  para o caso em que  $\nu = 1$  será o igual ao do caso geral Equação (3.19). Com relação ao caso em que temos  $r > m_c$ , ficamos com:

$$\int_0^m P(r)dr = \int_0^{m_c} r^{\alpha} e^{-\lambda r} dr + \int_{m_c}^m r^{-2} dr \quad (3.46)$$

portanto, o numerador de  $X(m)$  quando  $r > m_c$ , é:

$$\int_0^m P(r)dr = \frac{\gamma(\alpha+1, \lambda m_c)}{\lambda^{\alpha+1}} + \frac{1}{m_c} \left(1 - \frac{m_c}{m}\right). \quad (3.47)$$

Com isso, temos:

$$X(m) = \begin{cases} \frac{1}{A_0} \frac{\gamma(\alpha+1, \lambda m)}{\lambda^{\alpha+1}} & , \quad r \leq m_c \\ \frac{1}{A_0} \left[ \frac{\gamma(\alpha+1, \lambda m_c)}{\lambda^{\alpha+1}} + \frac{1}{m_c} \left(1 - \frac{m_c}{m}\right) \right] & , \quad r > m_c \end{cases} \quad (3.48)$$

Partindo para o cálculo do  $Y(m)$  vemos que o numerador no caso em que  $r \leq m_c$  também não se altera em relação ao caso geral. Dessa maneira, o numerador de  $Y(m)$  para o caso em que  $\nu = 1$  é a Equação (3.23), quando  $r > m_c$ , temos:

$$\int_0^m rP(r)dr = \int_0^{m_c} r^{\alpha+1} e^{-\lambda r} dr + \int_{m_c}^m r^{-2} dr, \quad (3.49)$$

Então, o numerador de  $Y(m)$ , quando  $r > m_c$ , é:

$$\int_0^m rP(r)dr = \frac{\gamma(\alpha + 2, \lambda m_c)}{\lambda^{\alpha+2}} + \ln\left(\frac{m}{m_c}\right). \quad (3.50)$$

Portanto, ficamos com:

$$Y(m) = \begin{cases} \frac{1}{A_1} \frac{\gamma(\alpha+2, \lambda m)}{\lambda^{\alpha+2}} & , \quad r \leq m_c \\ \frac{1}{A_1} \left[ \frac{\gamma(\alpha+2, \lambda m_c)}{\lambda^{\alpha+2}} + \ln\left(\frac{m}{m_c}\right) \right] & , \quad r > m_c \end{cases} \quad (3.51)$$

Para realizar o cálculo do índice de Gini, iremos dividir a conta em duas partes ( $r \leq m_c$  e  $r > m_c$ ). Para a primeira situação, temos:

$$(X - Y) = \frac{1}{A_0} \frac{\gamma(\alpha + 1, \lambda m)}{\lambda^{\alpha+1}} - \frac{1}{A_1} \frac{\gamma(\alpha + 2, \lambda m)}{\lambda^{\alpha+2}}. \quad (3.52)$$

e

$$dX = \frac{d\gamma(\alpha + 1, \lambda m)}{A_0 \lambda^{\alpha+1}}. \quad (3.53)$$

Com isso, a Equação (3.14), torna-se:

$$G(r \leq m_c) = 2 \int_0^{m_c} \frac{1}{A_0} \frac{\gamma(\alpha + 1, \lambda m)}{\lambda^{\alpha+1}} \frac{d\gamma(\alpha + 1, \lambda m)}{A_0 \lambda^{\alpha+1}} - \int_0^{m_c} \frac{1}{A_1} \frac{\gamma(\alpha + 2, \lambda m)}{\lambda^{\alpha+2}} \frac{d\gamma(\alpha + 1, \lambda m)}{A_0 \lambda^{\alpha+1}}. \quad (3.54)$$

Na Equação (3.54), podemos usar as propriedade (3.6) e (3.5):

$$\gamma(\alpha + 2, \lambda m) = (\alpha + 1)\gamma(\alpha + 1, \lambda m) - \lambda^{\alpha+1} e^{-\lambda m} m^{\alpha+1}, \quad (3.55)$$

$$d\gamma(\alpha + 1, \lambda m) = \frac{(\lambda m)^\alpha e^{-\lambda m}}{\lambda} d(\lambda m). \quad (3.56)$$

Assim, a expressão (3.57) representa o índice de Gini na região em que  $r \leq m_c$ :

$$G(r \leq m_c) = \frac{\gamma(\alpha+1, \lambda m_c)^2}{A_0^2 \lambda^{2\alpha+2}} \left[ 1 - (\alpha + 1) \frac{\lambda A_0}{A_1} \right] + \frac{2\gamma(2\alpha+2, 2\lambda m_c)}{A_0 A_1 \lambda^{2\alpha+4} 2^{2\alpha+2}}. \quad (3.57)$$

Para a região em que  $r > m_c$ , temos:

$$(X - Y) = \frac{1}{A_0} \left[ \frac{\gamma(\alpha + 1, \lambda m_c)}{\lambda^{\alpha+1}} + \frac{1}{m_c} \left( 1 - \frac{m_c}{m} \right) \right] - \frac{1}{A_1} \left[ \frac{\gamma(\alpha + 2, \lambda m_c)}{\lambda^{\alpha+2}} + \ln\left(\frac{m}{m_c}\right) \right] \quad (3.58)$$

e

$$dX = \frac{dm}{A_0 m^2}. \quad (3.59)$$

Desta forma, o índice de Gini no caso em que  $r > m_c$ , é:

$$G(r > m_c) = \frac{2}{A_0^2} \frac{\gamma(\alpha+1, \lambda m_c)}{\lambda^{\alpha+1} m_c} + \frac{1}{A_0^2 m_c^2} - 2 \frac{\gamma(\alpha+2, \lambda m_c)}{A_0 A_1 \lambda^{\alpha+2} m_c} - \frac{2}{A_0 A_1 m_c}. \quad (3.60)$$

Como devemos tomar o limite de  $A_1$  indo para infinito, temos que:

$$A_1 \rightarrow \infty. \quad (3.61)$$

Assim, para a região de baixa renda, o índice de Gini fica:

$$G(r \leq m_c) = \frac{\gamma(\alpha+1, \lambda m_c)^2}{A_0^2 \lambda^{2\alpha+2}}, \quad (3.62)$$

e na região para altos valores de renda, temos:

$$G(r > m_c) = \frac{2}{A_0^2} \frac{\gamma(\alpha+1, \lambda m_c)}{\lambda^{\alpha+1} m_c} + \frac{1}{A_0^2 m_c^2}. \quad (3.63)$$

Como

$$G = \lim_{k \rightarrow \infty} [G(r \leq m_c) + G(r > m_c)]. \quad (3.64)$$

Portanto, o índice de Gini para um distribuição mista com expoente de Pareto  $\nu = 1$ , é:

$$G = \frac{2}{A_0^2} \frac{\gamma(\alpha+1, \lambda m_c)}{\lambda^{\alpha+1} m_c} + \frac{1}{A_0^2 m_c^2} + \frac{\gamma(\alpha+1, \lambda m_c)^2}{A_0^2 \lambda^{2\alpha+2}}. \quad (3.65)$$

### 3.1.3 Distribuição puramente lei de potência

Para um distribuição de renda puramente lei de potência, temos a seguinte expressão:

$$P(r) = \begin{cases} 0 & , \quad r \leq m_c \\ \frac{\nu m_c^\nu}{r^{(1+\nu)}} & , \quad r > m_c \end{cases} \quad (3.66)$$

Para o cálculo do índice de Gini, precisamos das quantidades  $X(m)$  e  $Y(m)$ . Para a quantidade  $X(m)$ , temos:

$$X(m) = \int_0^m P(r) dr = \left[ 1 - \left( \frac{m_c}{m} \right)^\nu \right] \quad (3.67)$$

e para a quantidade  $Y(m)$ , ficamos com:

$$Y(m) = \frac{\int_0^m rP(r)dr}{\int_0^\infty rP(r)dr} = \left[ 1 - \left( \frac{m_c}{m} \right)^{\nu-1} \right]. \quad (3.68)$$

De acordo com a Equação (3.14), para o cálculo do índice de Gini, precisamos utilizar  $dX$ , e fazendo uso mais uma vez da propriedade (3.5), temos:

$$dX = \nu m_c^\nu \frac{dm}{m^{\nu+1}} \quad (3.69)$$

Portanto:

$$G_\nu = 2 \int_0^1 (X - Y)dX = \int_{m_c}^\infty \left[ \left( \frac{m_c}{m} \right)^{\nu-1} - \left( \frac{m_c}{m} \right)^\nu \right] \frac{\nu m_c^\nu}{m^{\nu+1}} dm \quad (3.70)$$

e conseqüentemente:

$$\boxed{G_\nu = \frac{1}{2\nu-1}}. \quad (3.71)$$

## 3.2 Cálculo da Entropia associada a distribuição de renda

Associado a distribuição de renda, temos 4 parâmetros ( $\lambda$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$  e  $m_c$ ) e dois vínculos (continuidade e normalização). É interessante possuímos mais vínculos, desta vez, relacionados com maximização da entropia associada a distribuição de renda.

Para o caso geral da distribuição separada em dois regimes desenvolvemos uma expressão analítica para a entropia  $S = S(\alpha, \lambda, m_c, \nu)$  da distribuição  $P(m)$  (Equação 3.1). Lembrando que:

$$\boxed{S(\alpha, \lambda, m_c, \nu) = - \int_0^\infty P(m) \ln[P(m)] dm} \quad (3.72)$$

Então, temos que:

$$S(\alpha, \lambda, m_c, \nu) = - \int_0^{m_c} m^\alpha e^{-\lambda m} [\alpha \ln(m) - \lambda m] dm + \int_{m_c}^\infty m^{-(1+\nu)} (1 + \nu) \ln(m) dm. \quad (3.73)$$

⋮



$$S = \frac{\gamma(\alpha + 2, \lambda m_c)}{\lambda^{\alpha+1}} + \frac{(1 + \nu)}{\nu m_c^\nu} \left[ \ln(m_c) + \frac{1}{\nu} \right] - \frac{\alpha}{\lambda^{\alpha+1}} \left[ \gamma(\alpha + 1, \lambda m_c) \ln(m_c) - \int_0^{m_c} \frac{\gamma(\alpha + 1, \lambda m)}{m} dm \right]. \quad (3.74)$$

Podemos usar, no último termo da Equação (3.74), a seguinte propriedade:

$$\gamma(\alpha + 1, \lambda m) = m^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{m^{n+1}}{(n + \alpha + 1)} \quad (3.75)$$

e

$$\int_0^{m_c} m^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{m^{n+1}}{(n + \alpha + 1)} \frac{\lambda^{n+1}}{m} dm = (\lambda m_c)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(\lambda m_c)^{n+1}}{(n + \alpha + 1)^2} \quad (3.76)$$

e como:

$$\int_0^{m_c} \frac{\gamma(\alpha + 1, \lambda m)}{m} dm = \int_0^{m_c} m^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{m^{n+1}}{(n + \alpha + 1)} \frac{\lambda^{n+1}}{m} dm \quad (3.77)$$

podemos escrever que:

$$S = \frac{\gamma(\alpha + 2, \lambda m_c)}{\lambda^{\alpha+1}} + \frac{(1 + \nu)}{\nu m_c^\nu} \left[ \ln(m_c) + \frac{1}{\nu} \right] + \frac{\alpha}{\lambda^{\alpha+1}} (\lambda m_c)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(\lambda m_c)^{n+1}}{(n + \alpha + 1)^2} \quad (3.78)$$

$$- \frac{\alpha}{\lambda^{\alpha+1}} \gamma(\alpha + 1, \lambda m_c) \ln(m_c).$$

Na busca de valor limitante para  $m_c$  que separa os dois regimes, derivamos a entropia em relação a  $m_c$ :

$$\boxed{\frac{\partial S(\alpha, \lambda, m_c, \nu)}{\partial m_c} = \lambda m_c^{\alpha+1} e^{-\lambda m_c} - (1 + \nu) \frac{\ln(m_c)}{m_c^{\nu+1}} - \alpha m_c^\alpha e^{-\lambda m_c} \ln(m_c) = 0.} \quad (3.79)$$

Afim de assegurar que temos um ponto de máximo, calculamos a segunda derivada da entropia:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial m_c^2} = e^{-\lambda m_c} \{ \alpha m_c^{\alpha-1} [\lambda \ln(m_c) m_c - \alpha \ln(m_c) - 1] + \lambda m_c^\alpha [1 + \alpha - \lambda m_c] \} - \frac{(\nu + 1)}{m_c^{\nu+2}} [1 + (-\nu - 1) \ln(m_c)] < 0. \quad (3.80)$$

Desta forma os parâmetros ( $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\nu$ , e  $m_c$ ) devem satisfazer os vínculos (3.8), (3.11), (3.79) e (3.80). No próximo capítulo iremos implementar um cálculo numérico para estimar uma possível região de validade para estes parâmetros.

# Capítulo 4

## Resultados numéricos e de simulação para o Modelo Heterogêneo e Adaptativo

### 4.1 O Modelo Heterogêneo

No Capítulo 2 foram apresentados os principais modelos que descrevem sistemas econômicos de diversas características encontrados na literatura, para que a partir disso, possamos ter uma melhor compreensão das propriedades que são responsáveis por formar as distribuições de renda em economias ditas fechadas. Dentro desse espectro de modelos, iremos voltar nossa atenção para o Modelo Heterogêneo e Adaptativo [14,17]. Como mencionado anteriormente, a taxa de gasto  $\omega$ , nos modelos convencionais, é um parâmetro definido de maneira exógena ao sistema, MHA foi proposto a fim de contornar esta característica. Neste modelo, a taxa de gasto  $\omega_i$  e propensão de poupança  $\lambda_i$  são parâmetros individuais dos agentes e não globais. Podemos introduzir um parâmetro, denominado de inércia  $\gamma_i$ , que está associado com a capacidade do indivíduo de modificar sua taxa de gasto e seu inverso  $\frac{1}{\gamma_i}$  pode ser entendido como o tempo médio de resposta. A troca de recursos entre os agentes está sujeita a um processo adaptativo e a taxa de consumo pode ser regulada a cada passo de Monte Carlo, de acordo com o nível de recursos do próprio agente [14]. Têm-se um número

fixo de  $N$  agentes e recursos  $M$ , onde dois agentes  $i$  e  $j$ , escolhidos aleatoriamente, trocam entre si uma fração  $\omega_i$  de seus recursos  $m_i$  de acordo com a seguinte regra:

$$\begin{cases} m_i(t+1) = m_i(t) + \Delta_{ij}, \\ m_j(t+1) = m_j(t) - \Delta_{ij}, \\ \Delta_{ij} = \omega_j(t)m_j - \omega_i(t)m_i. \end{cases} \quad (4.1)$$

Podemos entender a quantidade  $\Delta_{ij}$  como fluxo efetivo de recursos em cada transação.

No início da dinâmica cada agente possui um taxa de gasto  $\omega_i$  (uniformemente distribuída  $U [0, 1]$ ) e uma quantidade recursos ( $m_i = 1, \forall i$ ) fixa. Como os valores dessas grandezas são decorrentes da dinâmica, é interessante introduzir parâmetros globais que possam caracterizar o sistema, que são a taxa de gasto média  $\langle \omega \rangle$

$$\langle \omega \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N \omega_i}{N} \quad (4.2)$$

e o índice de Gini, calculado de forma operacional [27]

$$G = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i,j}^N |m_i - m_j|}{N \sum_i^N m_i}. \quad (4.3)$$

Em nossa abordagem trabalhamos com  $K$  amostras, diferentes configurações iniciais, e as equações (4.2) e (4.3) fornecem a média da taxa de gasto e o índice de Gini, respectivamente, para uma amostra. Portanto, de modo a avaliar o papel da heterogeneidade das condições iniciais das taxas de gasto adotaremos médias configuracionais para a taxa de gasto e para o índice de Gini, respectivamente dados por:

$$[\omega] \equiv \frac{1}{K} \sum_i^K \langle \omega_i \rangle. \quad (4.4)$$

$$[G] \equiv \frac{1}{K} \sum_i^K G_i. \quad (4.5)$$

As regras de interação, bem como a característica individual de cada agente, pretendem fornecer elementos que possam ser mais próximos àqueles observados em sistemas econômicos reais. Como descrito anteriormente, encontra-se na literatura modelos de naturezas distintas, como por exemplo, modelos em que a taxa de gasto  $\omega_i$  é a mesma para todos os indivíduos (homogêneo) [18], outros em que a taxa de gasto é uma propriedade individual de cada agente (heterogêneo) [13], alguns em que a taxa de gasto é escolhida de forma aleatória para cada agente a cada passo de Monte Carlo [28] e no caso do Modelo Heterogêneo e Adaptativo, em que a taxa de gasto dos indivíduos é regulada de acordo com seu nível de renda [14]. Com inspiração neste último caso descrito, simulamos duas “sociedades” distintas, a primeira em que temos indivíduos que possam sempre adaptar-se ao final de uma transação e a segunda onde temos agentes com três características diferentes e por fim comparar os resultados obtidos com dados reais extraídos do Banco Mundial [29, 30]. Nosso objetivo é estabelecer um quadro comparativo dos mecanismos de adaptação com os padrões de taxa de consumo e índice de Gini de dados reais extraídos do Banco Mundial [29, 30].

A Tabela (4.1) apresenta a média temporal do índice de Gini  $\bar{G}$  e da taxa de gasto  $\bar{\omega}$ , com os respectivos desvios padrão para 139 países durante o período 1998-2012, extraídos do Banco Mundial [29, 30]. Utilizando os mesmos dados, exibimos na Figura (4.1) o índice de Gini médio em função da taxa de gasto média e destacamos os 5 países com: maiores (vermelho) e menores (verde) índices de Gini e maiores (azul) e menores (rosa) taxas de gasto média. Os dados completos podem ser consultados no anexo A.

Países	$\bar{\omega}$	$\Delta\bar{\omega}$	$\bar{G}$	$\Delta\bar{G}$	$G_{max}$	$G_{min}$	$\omega_{max}$	$\omega_{min}$
139	0.8	0.1	0.40	0.09	0.66	0.25	0.97	0.55

Tabela 4.1: Valores médios para o índice de Gini  $\bar{G}$  e taxa de gasto  $\bar{\omega}$  para os dados reais de 139 países [29, 30], no período 1998 – 2012, extraídos do Banco Mundial.

Na sequência iremos expor os resultados do modelo e sua dinâmica. Para se obter os resultados a seguir foram realizadas simulações em um sistema contendo  $N = 10^3$  agentes onde a taxa de gasto  $\omega_i$  e o índice de Gini  $G$  foram obtidos após  $10^3$  passos de Monte Carlo (cada passo corresponde ao tempo necessário para que todos os agentes realizem pelo menos

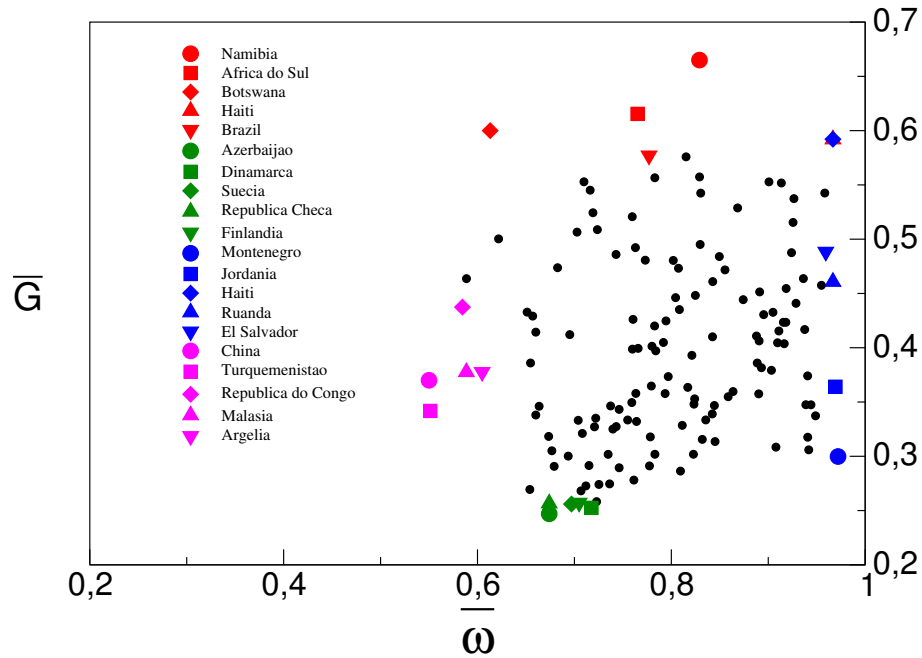


Figura 4.1: Valores médios para o índice de Gini  $\bar{G}$  e taxa de gasto  $\bar{\omega}$  para os dados reais (círculos pretos) [29,30] de 139 países, no período 1998 – 2012, extraídos do Banco Mundial. Em destaque os países com maiores (vermelho) e menores (verde) índice de Gini e maiores (azul) e menores (rosa) taxas de gasto.

uma interação), nessa altura, o sistema atinge o estado estacionário. A simulação foi repetida para  $K = 10^2$  configurações iniciais diferentes (amostras) e isso é representado pelas barras de erro.

Inicialmente iremos abordar os resultados obtidos pelo Modelo Heterogêneo e Adaptativo, para que possamos tecer comparações, na primeira simulação (MHA-1) os agentes que caracterizam a sociedade adaptam sua taxa de gasto  $\omega(m)$  positivamente correlacionada com sua renda  $m$  (agentes do tipo  $p_1$ ) ou possuem inércia infinita (agentes do tipo  $p_0$ ):

$$p_0 + p_1 = 1 \quad (4.6)$$

Na segunda simulação (MHA-2), os agentes adaptam sua taxa de gasto negativamente correlacionada com seu nível de recursos (agentes do tipo  $p_2$ ) ou possuem inércia infinita (agentes do tipo  $p_0$ ):

$$p_0 + p_2 = 1 \quad (4.7)$$

A Figura (4.2) exhibe o comportamento do índice de Gini  $G$  como função da taxa de gasto

média  $\langle \omega \rangle$  para as simulações do MHA-1 (curva verde) e do MHA-2 (curva vermelha) como quantidades emergentes do sistema. Também apresentamos simultaneamente valores médios para o índice de Gini e taxa de gasto associados a 139 países (círculos pretos) [29, 30], no período de 1998 a 2012. Percebe-se que os valores obtidos na simulação geram valores limites para taxa de gasto ( $\omega_{max} = 1$  e  $\omega_{min} = 0.18$ ) e índice de Gini ( $G_{max} = 0.74$  e  $G_{min} = 0.23$ ), o que é consistente com os dados reais.

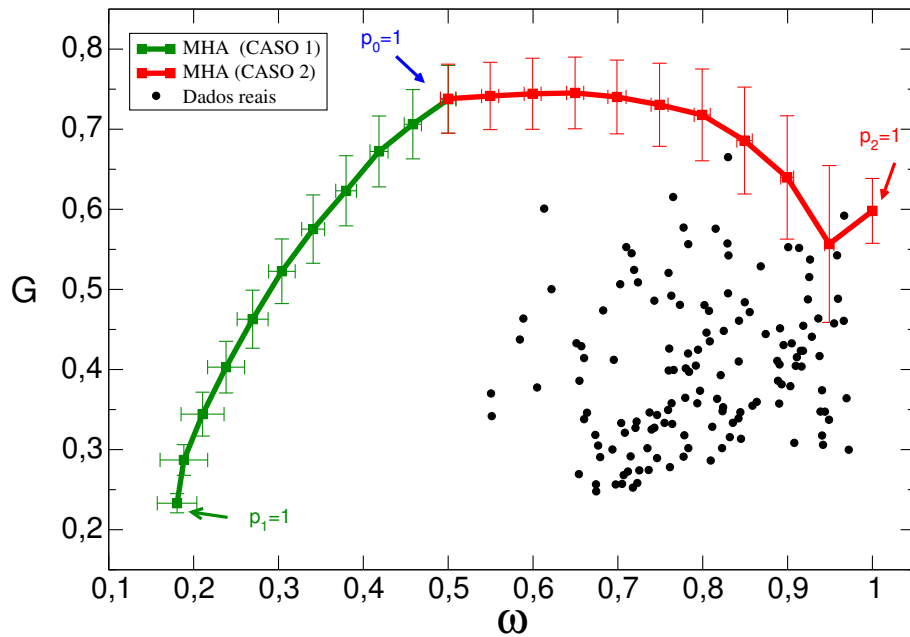


Figura 4.2: Comportamento do índice de Gini  $G$  e taxa de gasto  $\omega$  para o Modelo Heterogêneo e Adaptativo-1 (curva verde) e Modelo Heterogêneo e Adaptativo-2 (curva vermelha) e dados reais (círculos pretos) extraídos do Banco Mundial para 139 países no período de 1998 a 2012.

Além do fato de que o índice de Gini e a taxa de gasto média  $\langle \omega \rangle$  não são impostos de forma exógena, é importante notar que todos os pontos dos dados reais (círculos pretos) encontram-se delimitados dentro das curvas para as duas classes do Modelo Heterogêneo e Adaptativo.

### 4.1.1 Generalização do Modelo Heterogêneo e Adaptativo

Nesta seção iremos introduzir mudanças no Modelo Heterogêneo e Adaptativo de forma a obter uma descrição quantitativa entre a taxa de gasto média  $[\omega]$  e o índice de Gini  $[G]$  associado a distribuição de renda. Utilizando o mesmo protocolo, em nossa abordagem, teremos um sistema constituído por três classes de agentes econômicos. Uma fração  $p_0$  do total  $N$  de agentes são incapazes de modificar sua taxa de gasto, uma fração  $p_1$  modifica sua taxa de consumo positivamente correlacionada com seu nível de recursos e uma última fração  $p_2$  que modifica sua taxa de gasto negativamente correlacionada com sua renda.

Inicialmente, teremos uma situação em que apenas agentes que são capazes de se adaptar ( $\gamma_i = 0$ ) constituem o sistema, ou seja,

$$p_1 + p_2 = 1. \quad (4.8)$$

A Figura (4.3) mostra o comportamento do índice de Gini  $G$  como função da taxa de gasto média  $\omega$  para essa nova situação (curva laranja). Nota-se que este novo cenário proporciona um comportamento qualitativamente semelhante aos MHA1 e MHA2 com o aumento do índice de Gini e da taxa de gasto com a fração  $p_2$  de agentes negativamente correlacionados. Observa-se que os resultados  $\omega_{max} = 0.99$ ,  $\omega_{min} = 0.19$ ,  $G_{max} = 0.61$  e  $G_{min} = 0.23$ , restringem a região associada aos estados  $(G, \omega)$ . Mais uma vez, foi apresentado simultaneamente os dados reais (círculos pretos) do Banco Mundial.

De um total de 139 pontos (dados reais), apenas 3 encontram-se fora da região delimitada pela curva laranja, o que leva a um percentual de 97,8% dos países abaixo da curva para o Modelo Heterogêneo e Adaptativo constituído apenas por agentes com inércia nula.

### 4.1.2 Modelo de três estados

Para efeito de comparação, realizamos uma simulação onde estão presentes simultaneamente uma fração  $p_0$  de agentes com inércia infinita, outra fração  $p_1$  de agentes que adaptam-se sua taxa de gasto positivamente correlacionada com seu nível de recursos e por fim uma fração  $p_2$  de agentes que possuem taxa de gasto crescente. Dessa forma, nessa simulação,

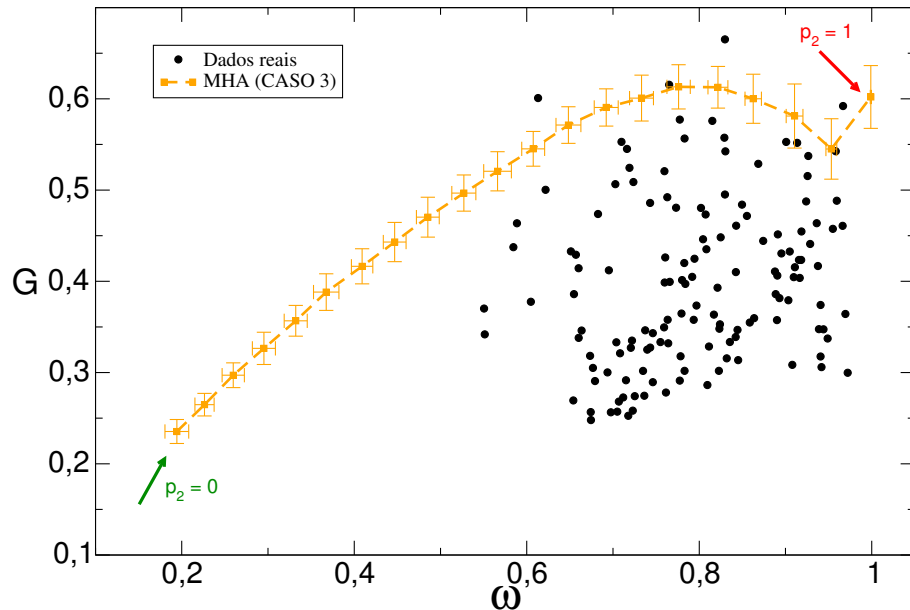


Figura 4.3: Comportamento do índice de Gini  $G$  e taxa de gasto  $\omega$  para o caso em que temos apenas agentes capazes de se adaptar após uma negociação ( $\gamma_i = 0$ ) (curva laranja) e dados reais (círculos pretos) extraídos do Banco Mundial.

temos:

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1 \quad (4.9)$$

A Figura (4.4) mostra a comparação entre os casos citados a cima: Modelo Heterogêneo e Adaptativo-1 (curva verde), Modelo Heterogêneo e Adaptativo-2 (curva vermelha), Modelo Heterogêneo e Adaptativo constituído apenas por agentes com inércia nula (curva laranja) e Modelo de três estados (quadrados azuis), que foi construído com 210 pontos. Observa-se que os pontos do Modelo de três estados preenchem a região entre as curvas verde, vermelha e laranja. Assim podemos dizer que o resultado mais próximo dos dados reais é o caso em que temos o MHA constituído apenas por agentes com inércia nula.

Para completude, mostramos nas Figuras (4.5) e (4.6) um gráfico tridimensional para o índice de Gini [ $G$ ] e taxa de gasto média [ $\omega$ ] em função dos parâmetros  $p_1$ , que é a fração de agentes que adaptam suas taxas de gasto positivamente correlacionada com seu nível de recursos e  $p_2$ , que é a fração de agentes anti correlacionados.

Nota-se que o índice de Gini cresce a medida que  $p_2$  aumenta, mas quando alcança-se o valor máximo de  $p_2$  existe uma queda no valor de  $G$ . Com relação a  $p_1$ , percebe-se que o



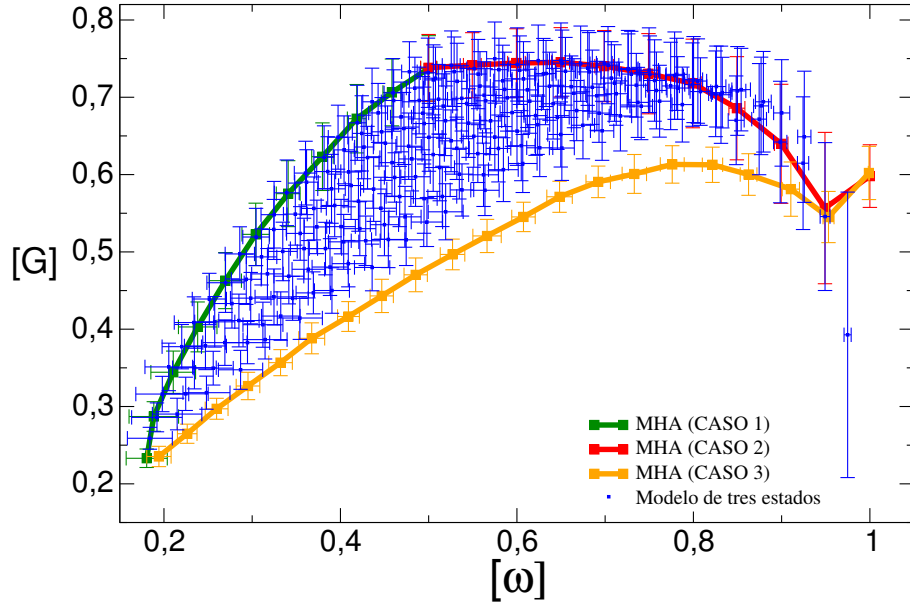


Figura 4.4: Índice de Gini  $[G]$  e taxa de gasto média  $[\omega]$  para MHA-1, MHA-2, MHA formado unicamente por agentes com inércia nula e o Modelo de três estados.

índice de Gini decresce enquanto que  $p_1$  aumenta. Com relação a taxa de gasto verifica-se que existe um crescimento monotônico com  $p_2$  e um decrescimento também monotônico com  $p_1$ .

## 4.2 Cálculo Numérico

De modo a confrontar os resultados obtidos pela simulação com a possível forma funcional da distribuição de renda de dois regimes apresentada no capítulo 3, desenvolvemos uma análise numérica. Dispondo das expressões analíticas conhecidas para os vínculos da distribuição, o índice de Gini, a entropia e suas derivadas, realizamos um cálculo numérico com o intuito de obter valores para os quatro parâmetros que configuram a distribuição de renda:  $P(m, \{\alpha, \lambda, m_c, \nu\})$ .

De acordo com Anand Banerjee e Victor Yakovenko [23] uma distribuição de renda, dividida em dois regimes, um exponencial e outro uma lei de potência, pode ser definida de acordo com a expressão:

$$P(r) = c \frac{e^{-(r_0/T)\arctan(r/r_0)}}{[1 + (r/r_0)^2]^{1+a/2b}}, \quad (4.10)$$

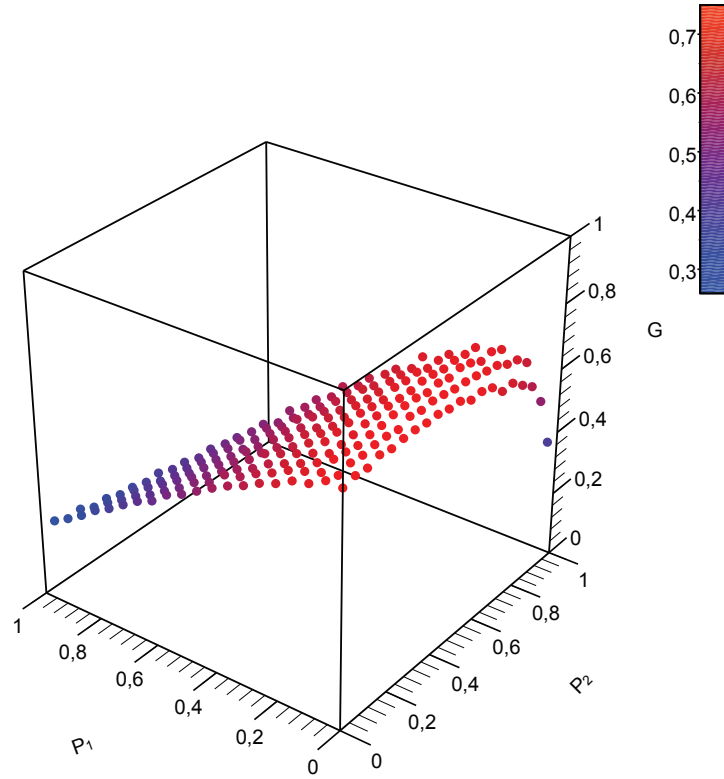


Figura 4.5: Índice de Gini [ $G$ ] como função dos parâmetros  $p_1$  e  $p_2$ .

onde  $r_0$  representa o ponto de separação entre os dois regimes ( $m_c$ ),  $(1 + \frac{a}{b})$  exerce a função do expoente de *Pareto* ( $\nu$ ) e  $T$  faz o papel da renda média ( $T = 1/\lambda$ ). Analisando a expressão (4.10) no limite em que  $r \ll r_0$ , temos que  $\arctan(r/r_0) \cong r/r_0$  e dessa forma, ficamos com uma distribuição caracterizada por uma lei exponencial:

$$P(r) \propto ce^{-r/T}. \quad (4.11)$$

Já no limite em que  $r \gg r_0$ , temos que  $[1 + (r/r_0)^2]^{1+a/2b} \cong r^{2+a/b}$  e portanto dispomos de uma distribuição descrita por uma lei de potência:

$$P(r) \propto r^{-(2+a/b)}. \quad (4.12)$$

Ainda no referido artigo, os autores estimam os parâmetros ( $T$ ,  $r_0$ ,  $a/b$ ) para dados extraídos do IRS (Internal Revenue Service) (Serviço de receita federal dos Estados Unidos

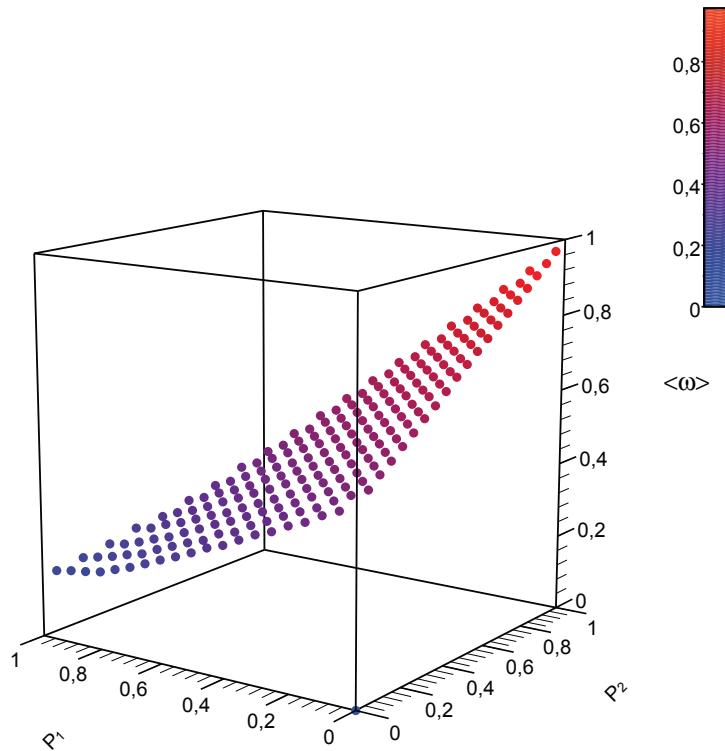


Figura 4.6: Taxa de gasto média  $\langle \omega \rangle$  como função dos parâmetros  $p_1$  e  $p_2$ .

da América durante o período de 1996-2007). De acordo com a expressão (4.10) e com dados fornecidos por [23] podemos estimar valores limites para os parâmetros da distribuição, percebemos que o valor da renda média ( $T$ ) é em torno 2.5 vezes menor do que o ponto de separação ( $r_0$ ) entre os dois regimes que caracterizam a distribuição de renda. A partir desta informação, extraímos os valores mínimos e máximos para o inverso da renda média ( $\lambda$ ), que seriam 0.25 e 5, respectivamente. Entretanto, em nossas investigações, percebemos que não foram encontrados pontos que satisfizessem os vínculos para um valor tão alto de  $\lambda$ , com isso, adotamos 2.0 como valor final. Para o expoente de *Pareto*, os valores encontrados na literatura [11] variam no intervalo (1, 3). Já para os parâmetros  $m_c$  e  $\alpha$ , iniciamos as investigações com um intervalo bastante amplo e observamos que certos valores desses parâmetros não atendiam aos vínculos da distribuição. A Tabela (4.2) mostra os valores iniciais e finais, utilizados no cálculo numérico, para os quatro parâmetros. Na busca pelas

raízes que satisfizessem as condições do problema, saíamos dos valores iniciais até os finais em passos de 0.01 para todos os parâmetros.

Parâmetro	Inicial	Final
$\alpha$	0.5	4.0
$\lambda$	0.1	2.0
$m_c$	0.5	10.0
$\nu$	1.1	3.1

Tabela 4.2: Valores iniciais e finais para os parâmetros  $(\alpha, \lambda, m_c, \nu)$  que caracterizam a distribuição de renda  $P(m)$  utilizados no cálculo numérico.

Uma vez estabelecidos os conjuntos de parâmetros que satisfazem os vínculos descritos no final da seção 3.2, podemos computar o valor do índice de Gini associado as respectivas distribuições.

Ao contrário do modelo homogêneo em que o índice de Gini é uma função explícita da taxa de gasto [17, 20],

$$G_{\Gamma}(\omega) = \frac{\Gamma\left(\frac{3-2\omega}{\omega}\right)}{2^{\frac{3-3\omega}{\omega}} \Gamma\left(\frac{3-2\omega}{2\omega}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2\omega}\right)}, \quad (4.13)$$

nosso cálculo numérico não é capaz fornecer tal relação. De modo a contornar este inconveniente podemos definir um “parâmetro de troca” efetivo que caracterize o sistema. Para tanto resolvemos numericamente a equação (4.13) obtendo  $\omega_{ef}$ .

Na Figura (4.7) apresentamos o comportamento do índice de Gini como função da taxa de gasto média para as simulações do MHA nos casos em que temos uma sociedade composta por agentes com inércia infinita e taxa de gasto positivamente correlacionada com o seu nível de recursos (curva verde), agentes com inércia infinita e taxa de gasto sempre crescente (curva vermelha), agentes com taxa de gasto positivamente correlacionada com o seu nível de recursos e agentes com taxa de gasto sempre crescente (curva azul) e os resultados do cálculo numérico (curva laranja). A curva preta corresponde ao comportamento do índice de

Gini como função da taxa de gasto média para o modelo de Angle (Equação 4.13), discutido no Capítulo 2.

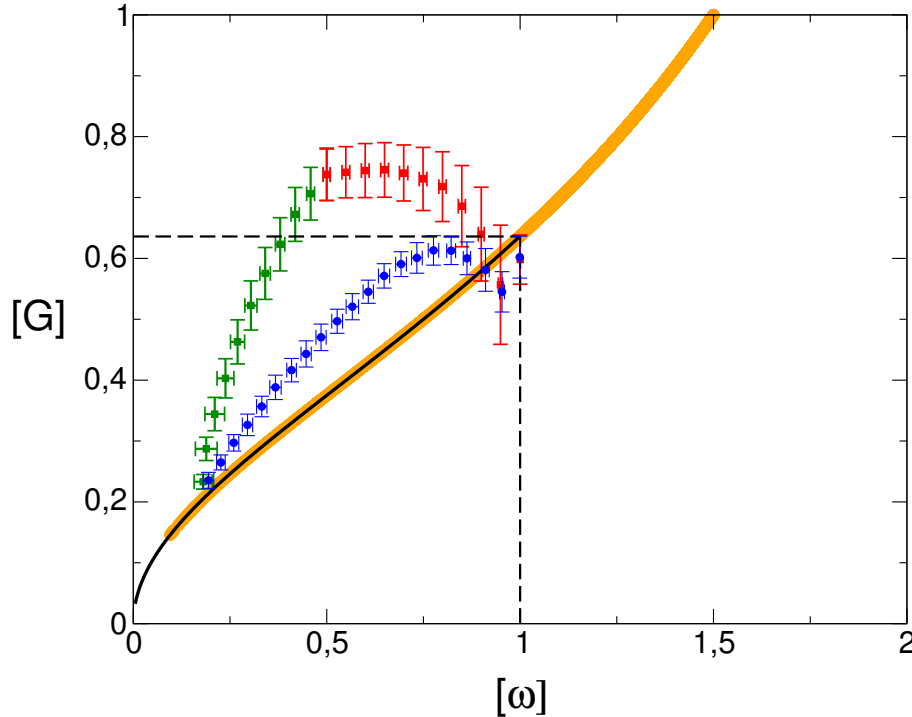


Figura 4.7: Comparação entre as simulações do Modelo Heterogêneo e Adaptativo (curvas vermelha, verde e azul) com os resultados do cálculo numérico (curva laranja) e com a curva para o modelo homogêneo de Angle (curva preta).

A curva laranja, que representa o comportamento do índice de Gini como função da taxa de gasto média para um modelo heterogêneo com uma distribuição separada em dois regimes, sobrepõe a curva preta, que representa o comportamento do índice de Gini para o modelo homogêneo. Nota-se que o caso da distribuição de 2 regimes definida no capítulo 3 fornece valores iniciais para índice de Gini  $G_{min} = 0.14$  e taxa de gasto  $\langle \omega_{min} \rangle = 0.09$  superiores aos os valores mínimos do índice de Gini e da taxa de gasto do Modelo Homogêneo ( $G_{min} = 0.03$ ,  $\langle \omega_{min} \rangle = 0.005$ ) e inferiores ao do Modelo Heterogêneo e Adaptativo ( $G_{min} = 0.18$ ,  $\langle \omega_{min} \rangle = 0.23$ ).

Apresentamos na figura (4.8) uma comparação do resultado numérico com dados reais [29, 30] para 145 países, desta vez incluindo países com taxa gasto maiores do que 1, no período 1998-2012.

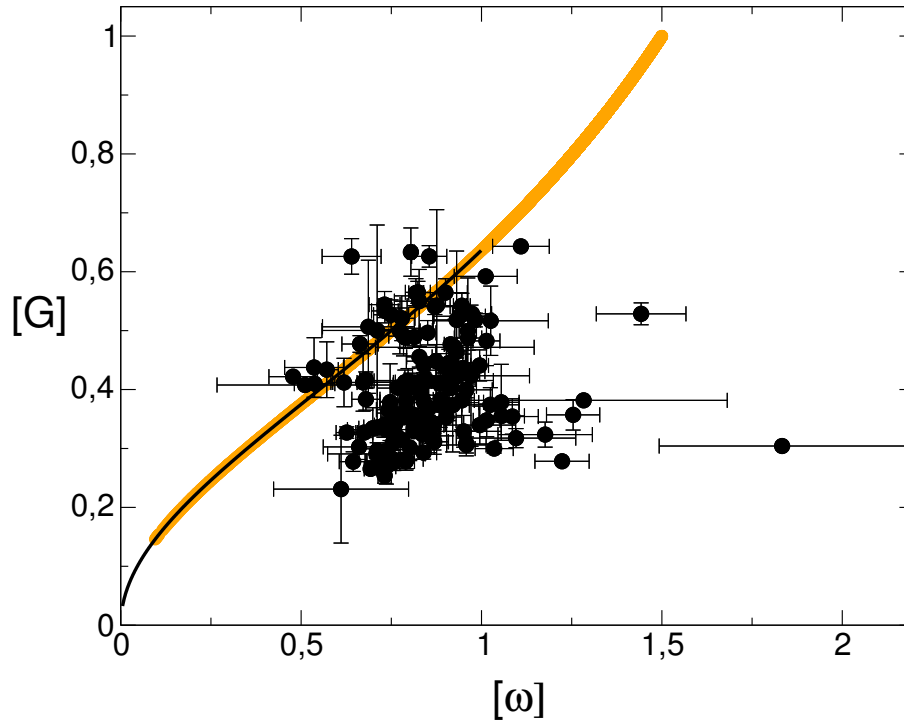


Figura 4.8: Comportamento do índice de Gini como função da taxa de gasto média para os resultados numéricos (curva laranja) e dados reais (círculos pretos) [29, 30] para 145 países no período de 1998-2012.

Nota-se que para a situação em que temos um modelo heterogêneo com uma distribuição separada em dois regimes, encontramos valores para  $G$  maiores do que o caso homogêneo ( $G_{max} = 0.63$ ). Para que isso seja possível é necessário que tenhamos valores para a taxa de gasto média maiores do que um ( $\langle \omega \rangle > 1$ ).

Já para o modelo homogêneo (curva preta) apenas seria possível obter valores da taxa de gasto média maiores do que 1 caso o sistema fosse aberto. Do ponto de vista da distribuição isso é possível pois um sistema com  $\omega = \frac{3}{2}$  teria um parâmetro de poupança de  $-\frac{1}{2}$ , o que produziria um índice de Gini  $G = 1$ .

### 4.3 Choques

Um dos objetivos do estudo da distribuição de renda é caracterizar as desigualdades apontadas por diversos modelos encontrados na literatura [20, 23, 28]. Outra questão que atrai o

interesse de diversos pesquisadores, é encontrar mecanismos que diminuam tais desigualdades e uma possível solução para este fato seria a aplicação de impostos sobre os indivíduos que constituem a “sociedade” [31–33]. Entretanto, ainda não há um consenso sobre o real efeito das taxações dentro do sistema.

Encontra-se na literatura, diversas análises estatísticas sobre o tema, como por exemplo para os Estados Unidos em que a taxaçoão sobre a população 10% mais rica não afetou consideravelmente o índice de Gini, em 2006 [31] ou no caso em que a taxaçoão indireta de impostos resulta em diminuição considerável da desigualdade, especificamente no Irã [33]. De um modo geral, dados reais indicam que a taxaçoão de recursos produz uma redução no índice de Gini. Por exemplo, análises conduzidas pela *OECD* (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico) apontam que ao longo da década de 2000 o índice de Gini foi em média 25% menor após aplicações de taxas para os 34 países membros da Organização [32].

A grande variedade de possíveis formas de taxaçoão, vinculadas ao nível de renda/consumo [34,35], ou o efeito de outras variáveis como o grau de escolaridade, como proposto por Orszag e colaboradores [31] não nos permite uma resposta conclusiva para o efeito de mecanismos externos sobre a desigualdade.

Uma vez considerado o panorama geral, podemos encontrar na literatura modelos de muitos agentes em sistemas econômicos fechados em que são investigados o impacto de regras de interação sobre a desigualdade de recursos [36], especificamente na referência [27], Iglesias e colaboradores propõem um mecanismo assimétrico de interação que confere uma probabilidade  $p$  de que o fluxo de recursos se dê do agente de maior para o de menor renda:

$$p = \frac{1}{2} + f \frac{|m_i(t) - m_j(t)|}{m_i(t) + m_j(t)} \quad (4.14)$$

onde  $f$  ( $0 \leq f \leq 1/2$ ) é um parâmetro que regula a probabilidade. Nesta situação o índice de Gini diminui monotonicamente com  $f$ , variando de  $G(f = 0) = 1$  a  $G(f = 1/2) = 1/2$ , o que corresponderia na última situação a um expoente de Pareto  $\nu = 3/2$ .

Nesta seção, o que iremos chamar de choques são redistribuições de renda no sistema. Introduzimos na simulação uma probabilidade  $p$  de ocorrer uma taxaçoão dos recursos. Ao ocorrer essa taxaçoão, uma fração  $f \sim U[0, 1]$  da renda de cada agente é retirada e depois

redistribuída uniformemente.

Em nosso modelo utilizamos um sistema constituído apenas por agentes capazes de se adaptar instantaneamente ( $p_1 + p_2 = 1$ ) e investigamos suas propriedades como função da probabilidade  $p$  ( $0 \leq p \leq 1$ ), obtendo curvas para os valores médios do índice de Gini e da taxa de gasto, como mostrado na figura (4.9). Assim como na figura (4.3), ao longo de uma mesma curva, a fração  $p_2$  de agentes anti correlacionados varia no intervalo  $0 \leq p_2 \leq 1$ .

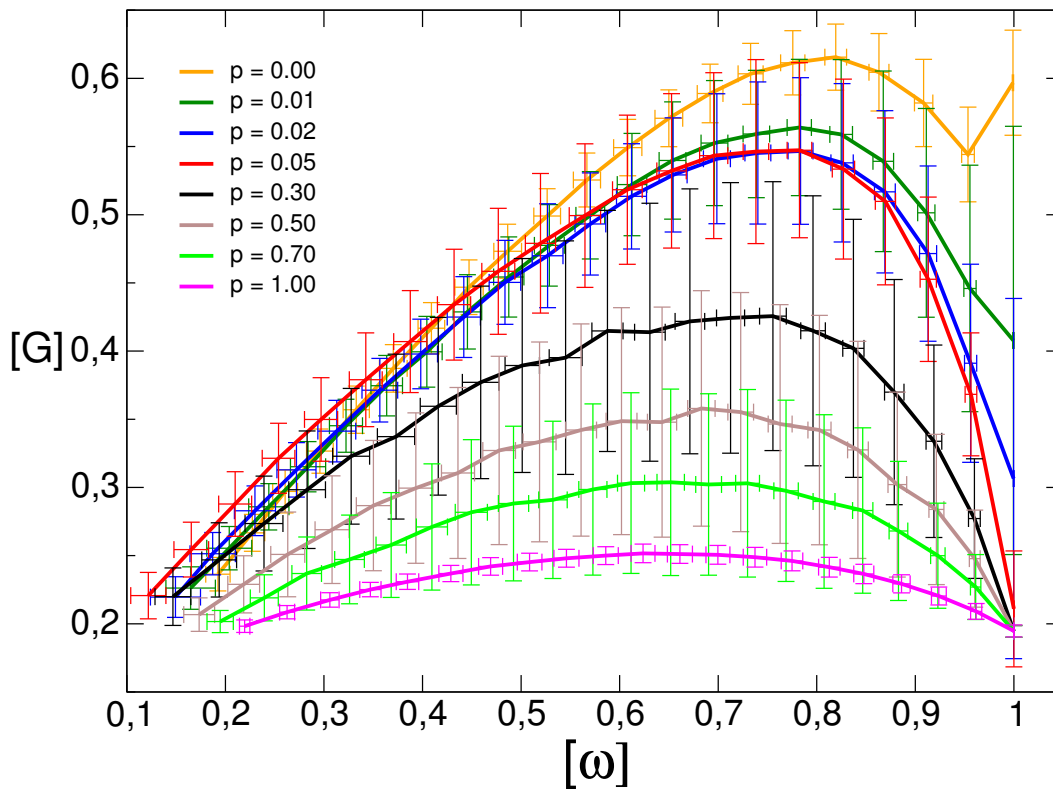


Figura 4.9: Comportamento dos valores médios do índice de Gini e da taxa de gasto para diferentes probabilidades  $p$  de haver uma taxação no sistema.

Observa-se que em todos os casos, independentemente da probabilidade de ocorrer uma taxação, o choque provoca uma diminuição do índice de Gini.

Na figura (4.10) mostramos a relação entre o valor máximo do índice de Gini para cada probabilidade  $p$ . Observamos que o gráfico apresenta duas regiões características, a primeira para  $p \leq 0,1$ , na qual  $[G_{max}]$  independe de  $p$  e a segunda, para  $p > 0,1$  em que  $[G_{max}]$  e  $p$



são inversamente proporcionais. No sub gráfico apresentamos o mesmo resultado em escala logarítmo-linear onde a curva azul contínua representa uma regressão na forma:

$$[G_{max}] = \frac{\bar{G}_{max}}{1 + \left(\frac{\bar{G}_{max}}{\bar{G}_{min}} - 1\right) p}, \quad (4.15)$$

e a linha tracejada laranja corresponde a transição entre os dois regimes. A aparente independência de  $[G_{max}]$  para  $p \leq 0.1$  está associada às improváveis ocorrências de eventos de redistribuição na escala de tempo utilizada em nossa simulação.

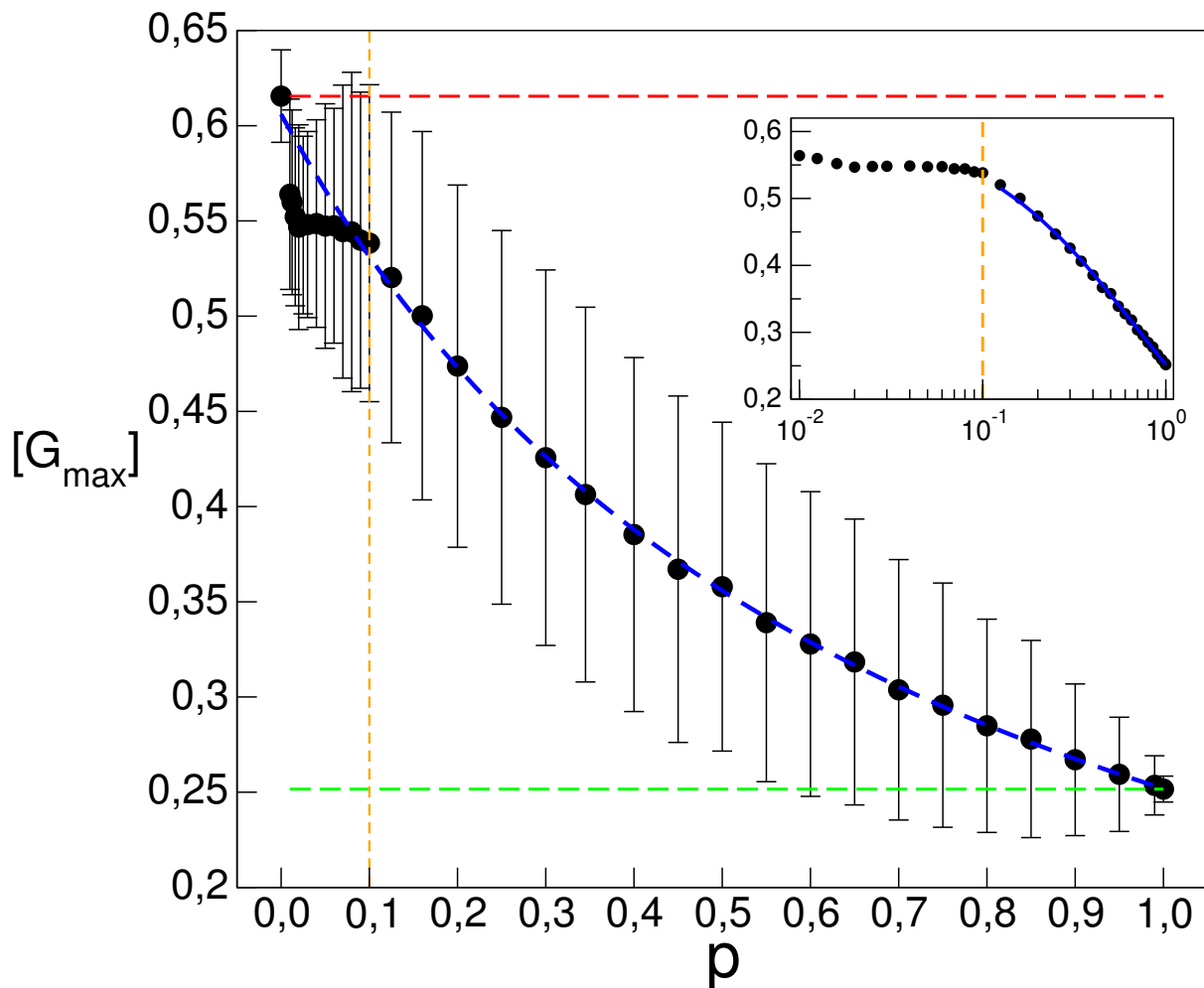


Figura 4.10: Comportamento do índice de Gini máximo  $[G_{max}]$  como função da probabilidade  $p$  de que ocorra uma redistribuição de recursos.

No gráfico principal a linha azul tracejada indica a extrapolação da regressão anterior entre

o valor mínimo do índice de Gini para o MHA (linha tracejada verde) e o valor máximo para o mesmo modelo (linha tracejada vermelha).

Os valores dos parâmetros da regressão valem respectivamente  $\bar{G}_{min} = 0.252 \pm 0.001$  e  $\bar{G}_{max} = 0.606 \pm 0.004$ . De posse desses valores, podemos obter a taxa de decrescimento de  $[G_{max}]$  em função de  $p$ :

$$\frac{d[G_{max}]}{dp} = -\frac{\bar{G}_{max} - \bar{G}_{min}}{\bar{G}_{min}\bar{G}_{max}} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\bar{G}_{max}}{\bar{G}_{min}} - 1\right)p\right]^2}. \quad (4.16)$$

Como  $p$  é a probabilidade de que ocorra uma taxação, seu inverso  $\tau = \frac{1}{p}$  pode ser compreendido como o tempo médio entre dois eventos. Desse modo, podemos obter a taxa de decrescimento de  $[G_{max}]$  em função do tempo necessário para que ocorra uma taxação:

$$\frac{d[G_{max}]}{d\tau} = -\frac{1}{\tau^2} \frac{dG}{dp}, \quad (4.17)$$

$$\frac{d[G_{max}]}{d\tau} = \frac{\bar{G}_{max} - \bar{G}_{min}}{\bar{G}_{min}\bar{G}_{max}} \frac{1}{\left[\tau + \left(\frac{\bar{G}_{max}}{\bar{G}_{min}} - 1\right)\right]^2} \quad (4.18)$$

Dessa maneira, podemos dizer que quanto mais rápido forem as taxações acompanhadas das redistribuições, menor será o índice de Gini. Da mesma forma, quanto maior o intervalo entre as taxações, menor será o decréscimo do índice de Gini.

Outra característica importante exibida na figura (4.9) diz respeito ao comportamento do índice de Gini  $G(p_2 = 1)$ , quando o sistema é constituído apenas por agentes que adaptam-se sempre aumentando sua taxa de consumo, em função da probabilidade  $p$  de ocorrer uma taxação no sistema. Na figura (4.11) exibimos  $G(p_2 = 1)$  como função de  $p$ , observamos que a partir de  $p = 0.08$ , o índice de Gini atinge um valor mínimo de 0.19. Portanto, podemos dizer que em um sistema constituído apenas por agentes anti correlacionados e que exista uma probabilidade de ocorrer uma taxação superior  $p = 0.08$ , o índice de Gini atingirá um valor mínimo com taxa de gasto média máxima.

Na figura (4.12) exibimos uma comparação dos casos extremos  $p = 0.0$  e  $p = 1.0$  com os dados reais para 139 países, no período de 1998 – 2012, extraídos do Banco Mundial.

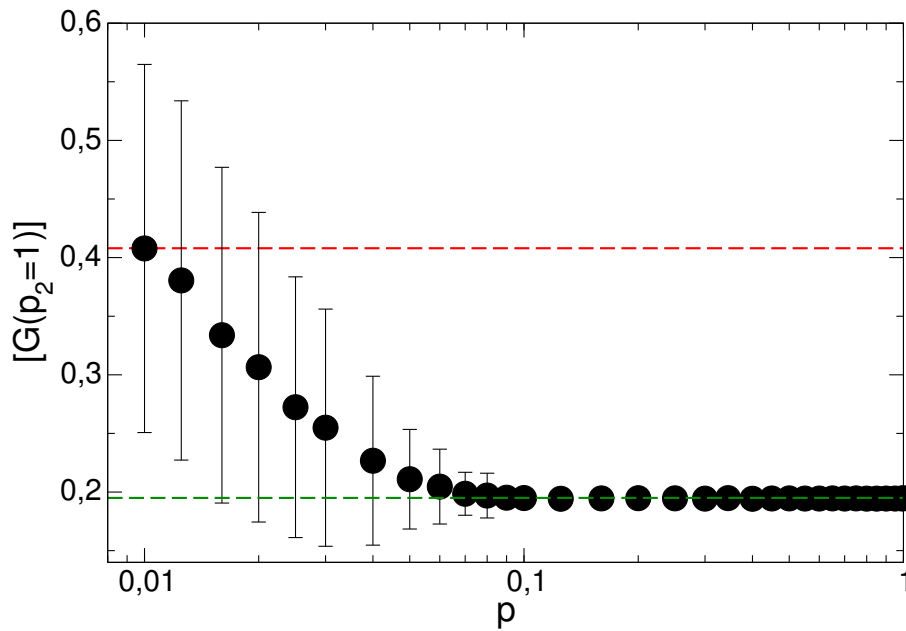


Figura 4.11: Comportamento do índice de Gini quando a fração de agentes que são anti correlacionados atinge  $p_2 = 1.0$  em função da probabilidade  $p$  de ocorrer uma taxaçã.

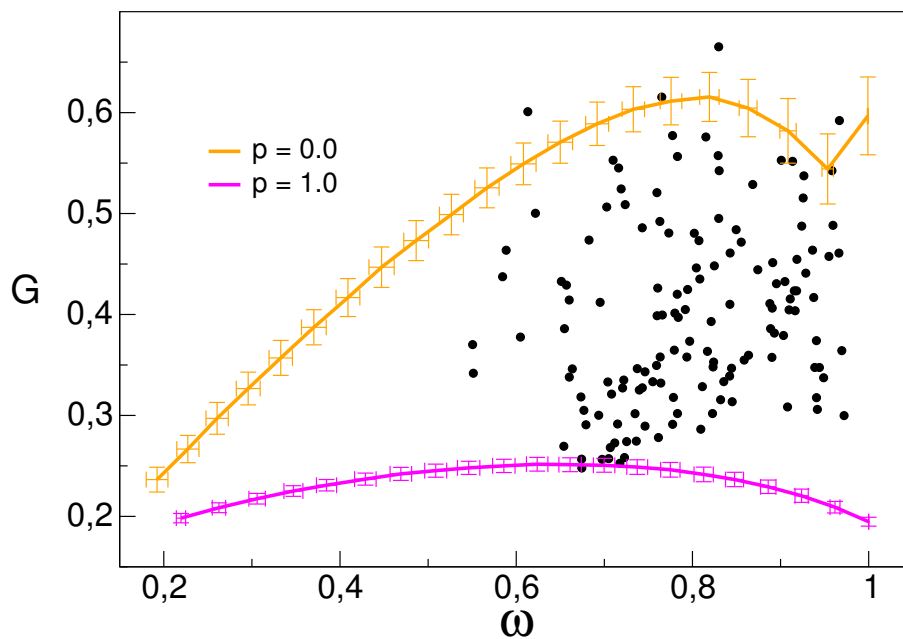


Figura 4.12: Comportamento dos valores médios do índice de Gini e da taxa de gasto para  $p = 0.0$  (curva laranja) e  $p = 1.0$  (curva rosa) comparados com dados reais (círculos pretos) [29, 30] para 139 países, no período de 1998-2012, extraídos do Banco Mundial.

# Capítulo 5

## Conclusão

A distribuição de renda  $m$  em países capitalistas possui características interessantes e universais. De forma geral, a distribuição  $P(m)$  possui dois regimes: abaixo de uma escala característica  $m_c$  é do tipo Gama e acima desta apresenta um decaimento do tipo lei de potência com expoente  $\nu$ . Em países avançados com a presença de uma grande classe média a escala  $m_c$  desloca-se para grandes valores de renda e o expoente  $\nu \lesssim 1.5$ , ao contrário do que ocorre com países em desenvolvimento como o Brasil, onde a concentração de renda é elevada com  $\nu \gtrsim 1.5$ . Essa lei de potência é interessante porque reflete uma certa invariância de escala no sistema. Em termos concretos, nesse regime de grandes rendas, não existe renda média, ou do ponto de vista estatístico, não há uma escala característica. Tal fenômeno de invariância de escala, detectado no século XIX, foi alvo de debates durante o século XX, pois parece refletir componentes básicos do sistema capitalista (uma vez que independe em grande parte das regiões geográficas e culturais dos diversos países envolvidos).

Do ponto de vista governamental, uma compreensão satisfatória da forma da distribuição de renda e dos parâmetros que quantificam o nível de concentração de recursos é necessária para que possam ser formuladas políticas públicas de planejamento social.

Nesta dissertação investigamos modelos de sistemas econômicos fechados de muitos agentes caracterizados por sua taxa de gasto (taxa de consumo) e mecanismos de adaptação. No Capítulo 3, desenvolvemos expressões analíticas para o índice de Gini associado a uma distribuição puramente lei de potência e vínculos para os parâmetros que caracterizam dis-

tribuições constituídas por dois regimes, o primeiro do tipo Gama associado ao regime de baixos níveis de renda e o segundo para altos valores de renda, matematicamente representado por um lei de potência com expoente  $\nu$ . Simultaneamente elaboramos expressões para a entropia associada a distribuição bem como suas derivadas.

No capítulo 4, implementamos um cálculo numérico que associado ao princípio da maximização da entropia forneceu os parâmetros que caracterizam a distribuição de renda constituída de 2 regimes. Esta metodologia nos permitiu estimar diretamente os valores extremos do índice de Gini e as taxas de gasto efetivas produzidas por estas distribuições.

Em seguida propomos duas situações para um Modelo Heterogêneo Adaptativo, a primeira onde apenas agentes com capacidade de se adaptar instantaneamente (inércia nula) constituíam o sistema e a segunda composta por agentes com inércia infinita e nula. Nos dois casos observamos um crescimento do índice de Gini  $[G]$  com a taxa de gasto média  $[\omega]$  com o aumento da fração ( $p_2$ ) de agentes adaptáveis anti correlacionados. A curva no espaço de parâmetros ( $[G], [\omega]$ ) delimita 97.8% dos valores associados a 139 países. Estes dados, extraídos do Banco Mundial, dizem respeito aos valores médios destes parâmetros no período de 1998 – 2012.

Posteriormente, introduzimos um procedimento de taxaço e redistribuição dos recursos e estudamos o efeito da frequência de taxaço  $p$  sobre o comportamento da relação ( $[G], [\omega]$ ). Os resultados preliminares apontam para um decréscimo do valor máximo do índice de Gini  $[G_{max}]$  com  $p$ , em particular para a situação em que  $p = 1$  obtemos o valor mínimo  $[\bar{G}_{min}] = 0.252$ . É importante ressaltar que na circunstância em que  $p_2 = 1$ , obtemos o menor valor global para o índice de Gini  $G = 0.19$  e máximo valor da taxa de gasto.

Por fim, como perspectiva, propomos mudanças no parâmetro responsável pela adaptação (inércia) dos agentes, como por exemplo relacioná-la com o seu nível de recursos ( $\gamma_i(m)$ ). Da mesma forma, é importante discutir outras possíveis formas de taxaço e redistribuição, introduzindo por exemplo uma relação direta com a renda dos agentes.

# Apêndice A

## Dados Reais

A seguir apresentaremos, na tabela A.1, valores médios para o Índice de Gini e taxa de gasto com seus respectivos desvios padrão para dados reais de 139 países, no período de 1998 - 2012, extraídos do Banco Mundial [29, 30].

N	País	$\bar{G}$	$\Delta G$	$\bar{\omega}$	$\Delta\omega$
1	Albânia	0.30	0.01	0.94	0.24
2	África do Sul	0.65	0.04	0.76	0.14
3	Alemanha	0.30	0.01	0.73	0.13
4	Angola	0.51	0.11	0.70	0.16
5	Argentina	0.48	0.03	0.77	0.14
6	Argélia	0.38	0.03	0.60	0.14
7	Armênia	0.34	0.04	0.95	0.22
8	Austrália	0.34	0.01	0.72	0.13
9	Áustria	0.29	0.03	0.72	0.13
10	Azerbaijão	0.25	0.09	0.67	0.21
11	Bangladesh	0.30	0.03	0.82	0.15
12	Belize	0.58	0.03	0.81	0.15
13	Benin	0.41	0.03	0.89	0.16
14	Bielorrússia	0.27	0.02	0.71	0.14

N	País	$\bar{G}$	$\Delta G$	$\bar{\omega}$	$\Delta\omega$
15	Bolívia	0.54	0.06	0.83	0.16
16	Botswana	0.60	0.04	0.61	0.11
17	Brasil	0.58	0.03	0.78	0.14
18	Bulgária	0.30	0.04	0.78	0.15
19	Bélgica	0.27	0.03	0.72	0.13
20	Burkina Faso	0.45	0.05	0.89	0.16
21	Butão	0.41	0.05	0.69	0.14
22	Cabo Verde	0.47	0.05	0.86	0.29
23	Camarões	0.42	0.02	0.79	0.14
24	Camboja	0.36	0.03	0.89	0.19
25	Canadá	0.33	0.01	0.74	0.14
26	Cazaquistão	0.30	0.03	0.68	0.16
27	Chade	0.41	0.02	0.91	0.22
28	Chile	0.54	0.02	0.72	0.12
29	China	0.37	0.05	0.55	0.11
30	Colômbia	0.56	0.02	0.78	0.14
31	Congo	0.44	0.00	0.87	0.16
32	Costa Rica	0.47	0.03	0.81	0.15
33	Costa do Marfim	0.40	0.03	0.78	0.14
34	Croácia	0.29	0.03	0.78	0.17
35	Dinamarca	0.25	0.01	0.72	0.13
36	Egito	0.32	0.01	0.83	0.15
37	EUA	0.40	0.02	0.78	0.14
38	El Salvador	0.49	0.04	0.96	0.17
39	Equador	0.52	0.03	0.76	0.14
40	Eslováquia	0.26	0.03	0.72	0.14
41	Eslovênia	0.27	0.03	0.71	0.16

N	País	$\bar{G}$	$\Delta G$	$\bar{\omega}$	$\Delta\omega$
42	Espanha	0.34	0.02	0.75	0.13
43	Estônia	0.33	0.04	0.70	0.16
44	Etiópia	0.33	0.05	0.83	0.15
45	Fiji	0.45	0.03	0.82	0.17
46	Filipinas	0.43	0.02	0.81	0.14
47	Finlândia	0.26	0.03	0.70	0.13
48	França	0.33	0.03	0.75	0.14
49	Gâmbia	0.49	0.02	0.92	0.17
50	Gana	0.38	0.03	0.89	0.17
51	Geórgia	0.40	0.01	0.91	0.21
52	Grécia	0.35	0.01	0.82	0.14
53	Guatemala	0.55	0.03	0.90	0.16
54	Guiana	0.48	0.05	0.80	0.18
55	Guiné	0.41	0.05	0.84	0.17
56	Guiné Bissau	0.41	0.09	0.94	0.23
57	Haiti	0.59	0.00	0.97	0.20
58	Holanda	0.30	0.02	0.69	0.12
59	Honduras	0.56	0.02	0.83	0.16
60	Hungria	0.27	0.02	0.74	0.15
61	Índia	0.33	0.01	0.72	0.13
62	Indonésia	0.32	0.03	0.67	0.11
63	Iémen	0.35	0.02	0.84	0.20
64	Iraque	0.29	0.01	0.68	0.19
65	Irlanda	0.35	0.02	0.66	0.13
66	Irã	0.43	0.03	0.65	0.15
67	Islândia	0.28	0.01	0.76	0.13
68	Israel	0.39	0.03	0.82	0.15



N	País	$\bar{G}$	$\Delta G$	$\bar{\omega}$	$\Delta\omega$
69	Itália	0.35	0.02	0.76	0.14
70	Jamaica	0.46	0.10	0.84	0.16
71	Japão	0.32	0.00	0.71	0.13
72	Jordânia	0.36	0.04	0.97	0.17
73	Laos	0.34	0.02	0.84	0.20
74	Letônia	0.32	0.04	0.74	0.16
75	Lituânia	0.33	0.03	0.81	0.17
76	Macedônia	0.38	0.05	0.89	0.18
77	Madagascar	0.42	0.04	0.91	0.17
78	Malawi	0.45	0.05	0.92	0.17
79	Maldivas	0.50	0.18	0.62	0.20
80	Mali	0.41	0.07	0.89	0.16
81	Malásia	0.46	0.03	0.59	0.10
82	Marrocos	0.40	0.01	0.76	0.13
83	Mauritânia	0.42	0.04	0.78	0.16
84	Maurícia	0.358	0.002	0.76	0.14
85	México	0.49	0.02	0.76	0.13
86	Moldávia	0.35	0.04	0.94	0.25
87	Mongólia	0.33	0.02	0.76	0.16
88	Montenegro	0.30	0.01	0.97	0.25
89	Moçambique	0.46	0.01	0.95	0.18
90	Namíbia	0.66	0.07	0.83	0.15
91	Nepal	0.35	0.06	0.86	0.17
92	Nicarágua	0.46	0.06	0.93	0.17
93	Níger	0.38	0.06	0.90	0.16
94	Nigéria	0.43	0.03	0.76	0.15
95	Noruega	0.27	0.02	0.65	0.12

N	País	$\bar{G}$	$\Delta G$	$\bar{\omega}$	$\Delta\omega$
96	Panamá	0.55	0.02	0.71	0.13
97	Papua-Nova Guiné	0.51	0.00	0.72	0.16
98	Paquistão	0.31	0.02	0.84	0.15
99	Paraguai	0.52	0.04	0.72	0.15
100	Peru	0.48	0.05	0.74	0.14
101	Polônia	0.32	0.03	0.78	0.15
102	Quirguistão	0.35	0.06	0.94	0.19
103	Quênia	0.48	0.06	0.85	0.16
104	Reino Unido	0.37	0.01	0.80	0.14
105	República Centro-Africana	0.54	0.09	0.93	0.17
106	República Checa	0.26	0.02	0.67	0.13
107	República Dominicana	0.49	0.02	0.83	0.15
108	República do Congo	0.44	0.05	0.58	0.13
109	Romênia	0.29	0.02	0.81	0.05
110	Ruanda	0.46	0.11	0.97	0.19
111	Rússia	0.38	0.06	0.65	0.13
112	Santa Lúcia	0.40	0.00	0.92	0.15
113	São Tomé e Príncipe	0.42	0.12	0.92	0.25
114	Seicheles	0.54	0.16	0.96	0.20
115	Senegal	0.43	0.06	0.90	0.16
116	Serra Leoa	0.37	0.03	0.94	0.18
117	Sérvia	0.31	0.02	0.91	0.21
118	Síria	0.36	0.00	0.79	0.16
119	Sri Lanka	0.36	0.04	0.82	0.15
120	Suazilândia	0.55	0.05	0.91	0.16
121	Sudão	0.35	0.00	0.82	0.16
122	Suécia	0.26	0.01	0.70	0.12

N	País	$\bar{G}$	$\Delta G$	$\bar{\omega}$	$\Delta\omega$
123	Suíça	0.34	0.02	0.66	0.12
124	Suriname	0.53	0.00	0.87	0.18
125	Tailândia	0.43	0.02	0.66	0.11
126	Tajiquistão	0.32	0.02	0.94	0.24
127	Tanzânia	0.36	0.02	0.86	0.17
128	Togo	0.44	0.93	0.03	0.16
129	Trinidad e Tobago	0.41	0.02	0.66	0.16
130	Tunísia	0.40	0.03	0.76	0.14
131	Turquemenistão	0.34	0.07	0.55	0.22
132	Turquia	0.40	0.02	0.79	0.14
133	Ucrânia	0.29	0.04	0.75	0.15
134	Uganda	0.43	0.03	0.90	0.16
135	Uruguai	0.45	0.02	0.80	0.14
136	Uzbequistão	0.35	0.08	0.74	0.15
137	Venezuela	0.47	0.03	0.68	0.13
138	Vietnã	0.36	0.01	0.78	0.15
139	Zâmbia	0.51	0.05	0.92	0.21

Tabela A.2: Valores médios para o índice de Gini  $\bar{G}$  e taxa de gasto  $\bar{\omega}$  para os dados reais de 139 países [29, 30].

# Referências Bibliográficas

- [1] R. Mantegna and H. E. Stanley. *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [2] Victor M. Yakovenko, J. Barkley Rosser Jr. Colloquium: Statistical mechanics of money, wealth, and income. *Reviews of Modern Physics*, 81:1703–1725, 2009.
- [3] A. Carbone, G. Kaniadakis, A.M. Scarfone. Where do we stand on econophysics? *Physica A*, 382:11–14, 2007.
- [4] Murad S. Taqqu. Bachelier and his times: A conversation with bernard bru. *Finance Stochast*, 5:3–32, 2001.
- [5] Jean-Michel Courtault, Yuri Kabanov, Bernard Bru, Pierre Crépel, Isabelle Lebon and Arnaud Le Marchand. Louis bachelier on the centenary of théorie de la spéculation. *Mathematical Financet*, 10:341–353, 2000.
- [6] Tânia Tomé and Mário José de Oliveira. *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade*. Edusp, 2014.
- [7] Ilan Gleiser. *Caos e Complexidade*. Campus, 2002.
- [8] Vilfredo Pareto. *Cours d'économie politique*. Librairie de l'Université, 1986.
- [9] Giorgio Parisi. Complex systems: a physicist's viewpoint. *Physica A*, 263:557–564, 1999.

- [10] Science direct. [http://www.sciencedirect.com/science?\\_ob=ArticleListURL&\\_method=list&\\_ArticleListID=-976665950&\\_sort=r&\\_st=13&view=c&md5=17b88af857c2bee47fef4aa3ad3b95e2&searchtype=a](http://www.sciencedirect.com/science?_ob=ArticleListURL&_method=list&_ArticleListID=-976665950&_sort=r&_st=13&view=c&md5=17b88af857c2bee47fef4aa3ad3b95e2&searchtype=a). Accessed: 2016-04-18.
- [11] AA Chatterjee and B K Chakrabarti. Kinetic exchange models for income and wealth distributions. *The European Physical Journal B*, 60:135–149, 2007.
- [12] Anindya S Chakrabarti. Modelling savings behavior of agents in the kinetic exchange models of market. arXiv:1006.5044, junho 2010.
- [13] M Patriarca, A Chakraborti, E Heinsalu, and G Germano. Relaxation in statistical many-agent economy models. *The European Physical Journal B*, 57:219–224, 2007.
- [14] L C da Silva Junior and P H de Figueirêdo. Income distribution: An adaptive heterogeneous model. *Physica A*, 395:275–282, 2014.
- [15] Abhijit Kar Gupta. Money exchange model and a general outlook. *Physica A*, 359:634–640, 2006.
- [16] Els Heinsalu and Marco Patriarca. Kinetic models of immediate exchange. arXiv:1505.01274v1, maio 2015.
- [17] Luiz Carlos da Silva Junior. *Efeitos de heterogeneidade e adaptabilidade sobre processos de distribuição de renda*. Dissertação de mestrado, Departamento de Física, Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2013.
- [18] J. Angle. The surplus theory of social stratification and the size distribution of personal wealth. *Social Forces*, 65:293–326, 1986.
- [19] J. Angle. The surplus theory of social stratification and the size distribution of personal wealth. *1983 Proceedings of the American Statistical Association, Social Statistics Section, American Statistical Association, Alexandria, VA*:395–400, 1983.
- [20] Marco Patriarca, Els Heinsalu, Anirban Chakraborti. The abcd’s of statistical many-agent economy models. arXiv:physics/0611245v1, novembro 2006.

- [21] M Patriarca, A Chakraborti, and K Kaski. Statistical model with a standard gama distribution. *Physical Review E*, 70, 2004.
- [22] M Patriarca, A Chakraborti, and K Kaski. Gibbs versus non-gibbs distributions in money dynamics. *Physica A*, 340:334–339, 2004.
- [23] Anand Banerjee and Victor M. Yakovenko. Universal patterns of inequality. *New Journal of Physics*, 12, 2010.
- [24] Gini coefficient. [http://en.wikipedia.org/wiki/Gini\\_coefficient](http://en.wikipedia.org/wiki/Gini_coefficient). Accessed: 2016-06-06.
- [25] AA Chatterjee and B K Chakrabarti. Ideal-gas-like market models with savings: Quenched and annealed cases. *Physica A*, 382:36–41, 2007.
- [26] AA Chatterjee, B K Chakrabarti and SS Manna. Pareto law in a kinetic model of market with random saving propensity. *Physica A*, 335:155–163, 2004.
- [27] G.M. Caon, S. Gonçalves and J.R. Iglesias. The unfair consequences of equal opportunities: Comparing exchange models of wealth distribution. *The European Physical Journal Special Topics*, 143:69–74, 2007.
- [28] M. Patriarca, A.Chakraborti, G. Germano. Influence of saving propensity on the power-law tail of the wealth distribution. *Physica A*, 369:723–736, 2006.
- [29] World bank. <http://data.worldbank.org/indicator/NE.CON.TETC.ZS/countries>. Accessed: 2016-03-01.
- [30] World bank. <http://data.worldbank.org/indicator/SI.POV.GINI/countries>. Accessed: 2016-03-01.
- [31] William G Gale, Melissa S Kearney and Peter R Orszag. Would a significant increase in the top income tax rate substantially alter income inequality? *Economic Studies*, September 2015.

- 
- [32] Organisation for Economic Co-operation and Development. Income inequality and growth: the role of taxes and transfers. *OECD Economics Department Policy Notes*, 9, 2012.
- [33] Impacts of taxation on inequality and income distribution in Iran. <http://en.intarmedia.ir/pages/download.aspx?mode=document&id=222>. Accessed: 2016-06-02.
- [34] David S Johnson, Timothy M Smeeding and Barbara B Torrey. Economic inequality through the prisms of income and consumption. *Economic inequality*, pages 11–24, 2005.
- [35] J Richard Aronson, Paul Johnson and Peter J Lambert. Redistributive effect and unequal income tax treatment. *The Economic Journal*, 104:262–270, 1994.
- [36] N Scafetta, B J West, S Picozzi. Pareto’s law: a model of human sharing and creativity. *cond-mat/0306579v2*, 2003.