UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS – MESTRADO
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO

Avaliação dos efeitos de uma seqüência didática na concepção de ensino-aprendizagem e na construção do conceito de homotetia em licenciandos de Matemática

Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade

Recife, Fevereiro de 2005

Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade

Avaliação dos efeitos de uma seqüência didática na concepção de ensino-aprendizagem e na construção do conceito de homotetia em licenciandos de Matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências (PPGEC), da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino das Ciências

Mestrando: Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade
Orientadora: Heloisa Flora Brasil Nóbrega Bastos, PhD

Recife, Fevereiro de 2005

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS – MESTRADO
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO

Avaliação dos efeitos de uma seqüência didática na concepção de ensino-aprendizagem e na construção do conceito de homotetia em licenciandos de Matemática

Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora composta pelos seguintes professores:

Heloisa Flora Brasil Nóbrega Bastos, PhD
Orientadora

Franck Bellemain, PhD
1º Examinador UFPE

Claudia Helena Dezotti, PhD
2ª Examinadora UFRPE

Josinalva Estacio Menezes, PhD
3ª Examinadora UFRPE

Dissertação aprovada no dia 28/02/2005 no Departamento de Educação da UFRPE.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelas inúmeras oportunidades que nos oferece de progredir. Através do convívio com pessoas de pontos de vistas antagônicos, nos ensina a tolerância e o respeito. Nos momentos de dor, nos ensina que é preciso uma mudança interior. Nos momentos de dificuldades, nos ensina a humildade, a compaixão e resignação.

Agradeço pelo apoio da minha família: aos meus pais Bonifácio Andrade e Maria José Andrade; aos meus irmãos, Ulisses Andrade, Max Andrade, Rita Andrade e Ines Andrade; à minha namorada, Paula Chaves.

À professora Heloisa Flora Brasil Nóbrega Bastos, pela competência e dedicação com as quais sempre me orientou. Pelo seu exemplo, como educadora, que nos faz sentir orgulho da profissão que abraçamos e perceber a importância dessa carreira.

À professora Josinalva Estacio Menezes, por seu apoio e sugestões que contribuíram para elaboração dessa dissertação.

Ao professor Franck Bellemain, pelas orientações e sugestões para o aperfeiçoamento da dissertação.

À professora Claudia Helena Dezotti pelas sugestões e participação na banca examinadora.

Ao professor Glauco Reinaldo Ferreira de Oliveira, pelas importantes contribuições para a realização desta dissertação.

Aos nossos amigos e amigas do Departamento de Física e Matemática, em especial ao professor Cícero Monteiro de Souza pelo seu incentivo à realização do Mestrado.

Às amigas e aos amigos que fazem parte deste mestrado, por seu apoio e incentivo.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos os efeitos da aplicação de uma seqüência didática, baseada nos princípios da teoria das situações didáticas proposta por Brousseau, sobre a construção do conceito de homotetia e sobre a concepção de ensino-aprendizagem de licenciandos em Matemática. A seqüência didática foi aplicada na disciplina Desenho Geométrico, oferecida no 6º período do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE). Como metodologia, elaboramos uma pesquisa qualitativa baseada na engenharia didática, composta por quatro etapas: análises preliminares, concepção e análise a priori, experimentação e análise a posteriori e validação. Para a construção da seqüência, utilizamos um programa de Geometria Dinâmica (Tabulae) e instrumentos de desenhos tradicionais (compasso, régua etc). Os resultados indicam que a proposta pedagógica utilizada na seqüência foi considerada mais estimulante ao aprendizado do que a forma tradicional, o que levou a mudanças de uma concepção de ensino-aprendizagem tradicional para a construtivista. Constatamos, também, que os alunos não conheciam o conceito de homotetia. Durante a seqüência, eles conseguiram identificar, além de relações intrafigurais, relações interfigurais presentes na homotetia e aplicá-las na construção de figuras homotéticas. Ao contrário de outras metodologias, em que os conceitos são memorizados e, logo depois esquecidos, os resultados indicam que, neste caso, esses foram gradativamente construídos e incorporados de maneira significativa pelos alunos.

ABSTRACT

In this work, we study the effects of a didactic sequence, based on principles held by Brousseau's theory of didactic situations, on the construction of the concept of homothety and on the conception of teaching and learning held by mathematics student teachers. The didactic sequence was applied in Geometric Drawing, a discipline offered in the 6th semester of mathematics teacher education course at Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE). As a methodology, we elaborated a qualitative research based on didactic engineering, composed by four stages: preliminary analyses, conception and analysis a priori, experimentation and analysis a posteriori and validation.To construct the sequence we used a software of dynamic geometry (Tabulae) and instruments of traditional drawings (compasses, ruler etc). The results indicate that the pedagogic proposal used in the sequence was considered more stimulant to learning than the traditional method, what led to changes on the traditional teaching-learning conception towards a constructivist conception. We also verified that students didn't know the homothety concept. During the sequence they were able to identify interfigural besides intrafigural relationships present in the homothety as well as to apply them in the construction of homothetic figures. Unlike other methodologies in which concepts are memorized and soon forgotten, the results indicate that in this case concepts were built gradually and significantly incorporated by students.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MEC Ministério da Educação
PCN Parâmetros Curriculares Nacionais

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Geometria é relevante para compreender outros ramos da Matemática e outras áreas do conhecimento. Ela está presente no dia-a-dia das pessoas, nas representações do homem, na televisão, na Internet, nas profissões. A sua origem precede a escrita e nos remete à Pré-História. Nesse período, o homem primitivo desenvolveu as primeiras formas de representação dos seus desejos e crenças. Os desenhos e figuras do homem neolítico "sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruências e simetria, que em essência são partes da geometria elementar" (BOYER, 1996, p.5).

Desde a sua origem distante aos nossos dias, a Geometria continua sendo importante nas atividades humanas. Lorenzato (1995) ressalta em suas idéias a relevância da Geometria, ao afirmar:

- É necessária na resolução de situações da vida que precisam do desenvolvimento do pensamento geométrico e do raciocínio visual;
- Atua como fator facilitador na resolução de questões em diversas áreas do conhecimento humano;
- Tem um grande papel na formação das pessoas, pois, sem ela, "a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das idéias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida" (ibid., p.5);
- É relevante no cotidiano, quando trabalhamos com conceitos de paralelismo, perpendicularismo, congruência, semelhança, proporcionalidade, medição (comprimento, área, volume), simetria;
- É necessária "ao desenvolvimento da criança, pois inúmeras situações escolares requerem percepção espacial, tanto em Matemática (por exemplo: algoritmos, medições, valor posicional, séries, seqüências ...) como na Leitura e Escrita" (ibid., p.6).

Essas afirmações destacam a importância da Geometria e de seu conhecimento, sobretudo, no ensino escolar, em que serve de base para o desenvolvimento humano. Ela deve ser vista pelos educadores como necessária ao desenvolvimento cognitivo dos alunos, como uma área do conhecimento que se liga a diversas outras áreas, facilitando muitas vezes o entendimento de conceitos abstratos. A esse respeito, Pavanelo (2002, p. 78) afirma que a Geometria é importante para a formação do aluno, uma vez que ela permite o "desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender o que é imediatamente sensível". Daffer e Post (1980 apud PAVANELO, 2002, p. 78) consideram a Geometria "como o ramo da Matemática mais adequado para o desenvolvimento de capacidades intelectuais como a percepção espacial, a criatividade, o raciocínio hipotético-dedutivo". Thom (1971 apud PAVANELO, 2002, p.79) afirma que "a Geometria pode ser um intermediário único entre a língua e o formalismo matemático e que o estágio do pensamento geométrico pode ser um estágio impossível de se omitir no desenvolvimento normal da atividade humana".

Apesar da relevância da Geometria, ao longo de anos ela foi deixada de lado, o que prejudicou em muito a formação dos alunos nos Ensino Fundamental, Médio e, posteriormente, no Ensino Superior. Entre as diversas razões para isso, alguns autores apontam para a influência do movimento conhecido como "Matemática Moderna" e a sua excessiva preocupação em "aproximar a Matemática pura da escola", que vem a comprometer "o ensino do cálculo, da Geometria e das medidas" (BRASIL, 2000, p. 21). A deficiência dos professores de Matemática também contribui para esse quadro, uma vez que muitos deles não conhecem a Geometria ou dela têm um domínio limitado, o que provavelmente os leva a não ensiná-la.

Essa constatação pode ser vista em inúmeros levantamentos. Em uma pesquisa realizada por Lorenzato, em 1993, intitulada "os porquê matemáticos dos alunos e as respostas dos professores" (LORENZATO, 1995), temos um retrato desse grave quadro. O estudo foi realizado com 255 professores que possuíam cerca de 10 anos de experiência docente e que ensinavam da 1ª à 4ª série. Foram aplicadas 8 questões, propostas por alunos, que envolviam a Geometria plana (conceito de ângulo, paralelismo, perpendicularismo, círculo, perímetro, área e volume). O resultado foi lastimável. Nenhuma resposta estava correta.

Pavanelo (2002) aponta outras pesquisas, como a realizada por Pirola, em 1995, com alunos de uma escola no interior de São Paulo, e em 2000, com alunos do Curso de Licenciatura em Ciências, com habilitação em Matemática. A primeira pesquisa foi aplicada a 30 alunos de 7.ª série, 1.º e 3.º colegiais. Tomando como exemplo uma questão sobre paralelogramos, constatou-se que 46% dos alunos do terceiro ano, 56% dos alunos do primeiro ano e 70% dos alunos da sétima série não responderam à pergunta. Tal resultado demonstra o desconhecimento dessa figura geométrica, que deveria ser conhecida e estudada desde as séries iniciais do Ensino Fundamental. Na pesquisa com os licenciandos, foram selecionados 90 estudantes de 1.º, 2.º e 3.º anos. As questões envolviam o conhecimento de área, perímetro e volume. Apesar do resultado superior à pesquisa realizada na escola, as deficiências foram ainda consideráveis. Uma das questões pedia o volume de um cubo, sendo conhecida a área de uma das faces: 33% dos alunos ou não responderam ou demonstraram que não sabiam como resolver a questão. Em uma outra questão, em que se deveria determinar as medidas dos lados de um retângulo, tendo como um dos elementos a área dessa figura, o resultado foi pior: 42% deixaram em branco ou afirmaram que não sabiam resolver, 14% usaram os conceitos de maneira errônea e apenas 34% responderam de maneira adequada.

Os livros didáticos são apontados por Lorenzato (1995, p. 4) como um outro problema. Na maior parte deles, a Geometria é apresentada como "um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligado de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica; noutros, a Geometria é reduzida a meia dúzia de formas banais do mundo físico". Além disso, a "Geometria quase sempre é apresentada na última parte do livro, aumentando a probabilidade dela não vir a ser estudada por falta de tempo letivo"[1](Idem).

Os problemas com o ensino da Geometria se estendem até os cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática. Nesses cursos, segundo algumas pesquisas (PAVANELO, 2002), os conteúdos de Geometria são pouco ensinados. Isso faz com que muitos professores não se achem em condições de ensiná-la. Para Lorenzato (1995, p.4), o professor que não conhece Geometria se coloca em um dilema: "tentar ensinar Geometria sem conhecê-la ou então não ensiná-la".

Apesar dos problemas com o ensino da Geometria, nos últimos anos, vêm ocorrendo mudanças para modificar esse quadro. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) organizam os conteúdos de Matemática do Ensino Fundamental em quatro grandes blocos: números e operações, espaço e forma, grandezas e medidas e tratamento da informação. Desse modo, a Geometria, representada pelo bloco espaço e forma, passa a ser mais valorizada. Conforme apresentado nos PCN de Matemática (BRASIL, 2000, p.55) "Os

[1] Atualmente isso vem mudando, sobretudo pelas avaliações do MEC do livro didático e das orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental, porque por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar de forma organizada, o mundo em que vive". Esse conteúdo não está dissociado, mas interligado aos números e operações e grandezas e medidas. Através dessas ligações, é possível pensar nas aplicações da Matemática nos diversos contextos do cotidiano. Segundo os PCN (BRASIL, 2000, p.56), "o trabalho com noções geométricas contribui para aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa".

Dentre os diversos conteúdos da Geometria, a ênfase nas transformações possibilita o estudo dessa disciplina de forma dinâmica, fazendo com que se observem as regularidades e propriedades geométricas. Sobre esse assunto, Miguel (1986 apud ARAÚJO, 2000, p. 12) afirma: "dentre as várias definições da Geometria, uma se impõe: a do estudo das propriedades dos objetos e das transformações a que estes podem ser submetidos".

As transformações geométricas estão presentes nas recomendações do MEC por meio dos PCN para o Ensino Fundamental. Os PCN, quando tratam do bloco espaço e forma, afirmam (BRASIL, 1998, p. 51):

> Deve destacar-se também nesse trabalho a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes

No Ensino Fundamental, é válido ressaltar o estudo das transformações por homotetia. Elas constituem um caso particular de semelhança em que os lados correspondentes são paralelos. Nelas, o aluno pode desenvolver os conceitos de semelhança e congruência. O estudo da homotetia possibilita ao educando explorar as grandezas lineares e angulares, como também os números e razões numéricas. Dessa forma, o conteúdo interliga o bloco espaço e forma com os números e operações e grandezas e medidas. As transformações por homotetia são recomendadas pelos PCN para o quarto ciclo do Ensino Fundamental. Porém, os conteúdos relacionados à homotetia como razão e proporção, ampliação e redução, semelhança e congruência fazem parte dos demais ciclos do Ensino Fundamental e da primeira série do Ensino Médio. Tendo em vista a importância das homotetias, ela foi eleita como foco em nossa pesquisa.

Além do conhecimento do quê ensinar, o professor de Matemática deveria ter uma formação que contemplasse o como ensinar. Para isso, ele deveria, ao longo de sua formação, ter uma perfeita articulação entre os conhecimentos matemáticos e os conhecimentos pedagógicos recentes. Esses últimos são resultantes de inúmeras pesquisas que apontam para o aperfeiçoamento da prática docente e uma formação que reflita as atuais necessidades em nossa sociedade. Combinar o saber matemático com o saber pedagógico é relevante na construção do saber ensinar Matemática. Nesse processo, o licenciando terá que passar de uma prática pedagógica que foi formada ao longo da sua vida (desde o Ensino Fundamental às vivências na universidade), para uma nova concepção, que articule o saber pedagógico adquirido no curso de licenciatura com o saber matemático. Esse processo pode levar a diferentes posturas, como, por exemplo, pensar que o que se aprendeu nas disciplinas pedagógicas é adequado para o ensino dos conteúdos dessas disciplinas, mas que não serve para ensinar Matemática; considerarem-se válidos esses conhecimentos, mas não saber como aplicá-los em um outro contexto. Uma forma de mudar a concepção de ensino é a vivência de uma prática que combine o saber matemático com o saber pedagógico. Procuramos, nesta pesquisa, avaliar os efeitos de tal prática, tomando por base uma seqüência didática construída com elementos da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (1986).

Para a construção de uma seqüência didática em Geometria, é necessário definir a forma como os alunos atuarão na sala de aula. O uso de uma prática pedagógica em que o aluno possa manipular instrumentos de desenho e construir as suas próprias conclusões através dessa manipulação é bastante rico no ensino de Geometria. Trata-se de uma prática contemplada pelas correntes pedagógicas contemporâneas sendo, inclusive, recomendada pelo MEC nos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ela pode ser feita através de instrumentos de desenho tradicionais, como transferidor, compasso, régua graduada, esquadros, ou por meio de instrumentos de desenho em um ambiente computacional.

As construções com régua e compasso são apontadas pelos PCN como importantes em atividades como "visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações." (BRASIL, 1998, p. 51).

Além disso, o computador oferece, hoje, diversos *softwares* educacionais que permitem uma exploração que, por meio dos instrumentos tradicicionais, não era possível até então. O MEC, através dos PCN, recomenda o uso do computador e afirma que "as tecnologias, em suas diferentes formas e uso, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas conseqüências no cotidiano das pessoas" (BRASIL, 1998, p. 43). O uso de tais recursos "pode ser um grande aliado do desenvolvimento cognitivo dos alunos, principalmente na medida em que possibilita o desenvolvimento de um trabalho que se adapta a distintos ritmos de aprendizagem e permite que o aluno aprenda com seus erros" (Idem). No ensino de Matemática, o computador torna-se um "meio para desenvolver autonomia pelo uso de *softwares* que possibilitem pensar, refletir e criar soluções" (ibidem., p. 44).

Existem inúmeras pesquisas que apontam para o emprego da informática no ensino de Geometria e, mais especificamente, no ensino das transformações geométricas (ARAÚJO, 2000; SOUZA, 2001; PRETTI, 2002; SILVA, 2003). Nessas pesquisas, foi utilizado um *software* de Geometria Dinâmica, o Cabri-géomètre. Utilizamos um outro *software* de Geometria Dinâmica, o Tabulae, em desenvolvimento no Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Selecionamos o Tabulae pelo custo mais adequado à nossa realidade. Ele oferece inúmeros recursos encontrados no Cabri-géomètre. A interface gráfica do Tabulae, no entanto, é diferente da encontrada no outro *software*. Entre as inúmeras vantagens da adoção desse tipo de programa, temos a exploração das propriedades que dão significado à homotetia e que podem ser preservadas pelo programa, uma maior velocidade na construção das figuras e a exploração das invariante em uma transformação por homotetia. Esses programas de Geometria Dinâmica, como veremos na fundamentação teórica, diferenciam-se de outros *softwares* voltados ao ensino. Eles não são apenas mais um meio para o ensino de Geometria; constituem-se numa nova maneira de pensar e refletir sobre a Geometria e o seu ensino.

1.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Atualmente, um dos problemas no ensino da Matemática é o conhecimento deficiente que os professores de Ensino Fundamental e Médio têm na área de Geometria. Um outro problema apontado por Pires (2000) é a falta de articulação entre o saber Matemático e o conhecimento pedagógico, o que leva a uma prática de ensino que não corresponde às atuais tendências na educação. Esta pesquisa remete a duas questões: o uso de uma seqüência de atividades sobre homotetia, com utilização dos princípios da teoria das situações didáticas propostos por

Brousseau (1986), facilita construir o conceito de homotetia? Ao utilizar essa metodologia, os licenciandos mudam seus conceitos sobre o papel do professor no ensino de Matemática?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

Avaliar os efeitos de uma seqüência didática sobre a construção do conceito de homotetia e do papel do professor com alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UFRPE.

1.2.2 Objetivos específicos

- Identificar:
  - As concepções prévias dos alunos sobre o papel do professor na sala de aula;
  - Os conhecimentos prévios sobre homotetia.
- Avaliar:
  - A implementação de uma seqüência didática que contemple algumas noções necessárias à construção do conceito de homotetia;
  - A mudança das concepções dos licenciandos sobre os conceitos geométricos estudados e sobre o processo de ensino-aprendizagem.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Esta dissertação apresenta, ainda, Fundamentação Teórica, Metodologia, Resultados e Considerações finais.

A Fundamentação Teórica está dividida em quatro partes: o saber matemático (homotetia), o saber pedagógico, o uso de recursos no ensino de Geometria e o ensino de homotetia. Na primeira parte, fazemos uma introdução ao conceito de homotetia, que foi desenvolvido na seqüência didática. Na segunda parte, tratamos da didática da Matemática e, em especial, a teoria das situações didáticas (BROUSSEAU, 1986) que servirá de base para a intervenção na sala de aula. Na terceira parte, que trata dos recursos no ensino de Geometria, tratamos dos recursos utilizados na seqüência didática, os materiais de desenhos e o computador. Na última parte, tratamos do ensino de homotetia, apresentando um breve relato sobre as diferentes fases de desenvolvimento da geometria e a sua repercussão no ensino das transformações geométricas, em especial, das homotetias. Tomando por base pesquisas no ensino desse conteúdo, expusemos orientações relevantes para a construção da seqüência didática.

Na Metodologia, apresentamos as características da amostra, a metodologia de pesquisa utilizada, a forma como foram organizadas as atividades, os instrumentos utilizados em cada etapa e o cronograma das atividades.

Uma vez definida a metodologia, passamos para a etapa que contempla os resultados, que foram divididos em cada um dos aspectos abordados nesta pesquisa (mudança na concepção de ensino e construção do conceito de homotetia). As normas para elaboração da dissertação de mestrado, do Programa de Pós-graduação em Ensino das Ciências, sugerem a apresentação dos resultados na forma de dois artigos. Dessa maneira, os resultados sobre as mudanças na concepção de ensino-aprendizagem foram apresentados na forma de artigo. Em função da extensão dos resultados sobre a construção do conceito de homotetia, estes foram integrados ao texto da dissertação. Pelas normas do mestrado, os artigos podem se apresentar como anexos ou no corpo da dissertação após a Metodologia (no capítulo Resultados). Com vistas à uniformização, incluímos essas duas partes, que tratam dos resultados, no corpo da dissertação no capítulo Resultados.

No último capítulo, apresentamos as conclusões e as contribuições dessa pesquisa. Estes foram divididos em: a construção do conceito de homotetia, mudanças na concepção de ensino-aprendizagem e articulação em uma seqüência didática do conhecimento pedagógico e matemático.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo foi organizado em quatro partes, em que se apresentam:

- Saber Matemático: Homotetia (O que ensinar?);
- Conhecimento pedagógico (Como ensinar?);
- Recursos utilizados no ensino de geometria (Com o que ensinar?). Nessa parte, tratamos dos instrumentos tradicionais (régua, compasso etc) e os instrumentos computacionais (Geometria Dinâmica);
- O ensino de homotetia. Nesta última parte, tratamos das mudanças epistemológicas no ensino de geometria e o seu efeito no ensino das homotetias. Ela engloba também pesquisas sobre o ensino das transformações geométricas e recomendações destas que foram utilizadas na seqüência didática.

2.1 SABER MATEMÁTICO: HOMOTETIA

Esta parte da fundamentação teórica foi dividida em cinco outras. Na primeira, tratamos das semelhanças e congruências. A homotetia é um caso particular de semelhança em que o paralelismo é preservado. Ela, em alguns casos pode ser uma congruência. Podemos também empregar a homotetia nas ampliações e reduções de figuras, por isso, na segunda parte, apresentamos algumas noções do que é uma ampliação e redução. A homotetia é uma transformação geométrica e o seu estudo está inserido dentro do ensino das transformações geométricas. Assim, as transformações são abordadas na terceira parte. A quarta parte trata especificamente das transformações por homotetia. Na última parte, apresentamos as recomendações do MEC, através dos PCN, para o ensino de homotetia. Nos cursos de licenciatura, é importante conhecer as recomendações do MEC para o Ensino Fundamental e Médio deste conteúdo. Na seqüência didática, procuramos observar essas recomendações. Em função desses esclarecimentos, esta parte foi dividida em:

- Semelhanças e congruências;
- Ampliações e reduções;
- Transformações geométricas;
- Homotetia;

- Recomendações do MEC para as transformações por homotetia no Ensino Fundamental.

2.1.1 Semelhanças e congruências

Quando temos duas figuras semelhantes, como os quadriláteros ABCD e EFGH (figura 1), podemos observar as seguintes características:

- Os vértices correspondentes são ditos homólogos. Assim, podemos dizer que o vértice E é o homólogo do vértice A. Assim como: B de F; C de G; D de H.
- São lados homólogos: $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$; $\overline{BC}$ e $\overline{FG}$; $\overline{CD}$ e $\overline{GH}$; $\overline{DA}$ e $\overline{HE}$.
- Os lados homólogos possuem uma razão constante chamada de razão de semelhança. Podemos dizer então que: $\overline{AB}/\overline{EF} = \overline{BC}/\overline{FG} = \overline{CD}/\overline{GH} = \overline{DA}/\overline{HE} = K$.

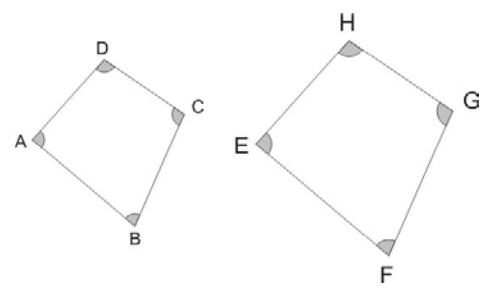


Figura 1 - Quadriláteros semelhantes

Um caso particular da semelhança é a congruência. Nela, a razão de semelhança é igual a 1. Na congruência, a medida dos ângulos e a medida dos lados não se altera. Dessa forma, duas figuras congruentes possuem a mesma medida dos lados e dos ângulos.

Quando duas figuras semelhantes estão dispostas de tal forma que os seus lados homólogos são paralelos, elas são ditas homotéticas (CARVALHO, 1967, p. 56). As homotetias podem ser utilizadas para ampliar e reduzir figuras. A seguir, apresentaremos algumas noções de ampliação e redução de figuras.

2.1.2 Ampliação e redução de figuras

Os objetos da natureza e as construções humanas nem sempre são passíveis de serem representados em seu tamanho natural. Ao representarmos um objeto com dimensões reduzidas, como uma representação de uma casa através de uma maquete ou detalhe bidimensional de uma casa em um papel[2], podemos estar aplicando uma redução de figuras. Contudo, nem toda representação reduzida constitui uma redução. Um objeto, ao ser reduzido ou ampliado, deve manter uma proporção constante dos seus elementos com a figura original. Segundo Imenes (1998, p.15), ampliação é “aumentar sem deformar a figura”. Para Imenes (ibid., p.271), redução “é o contrário de ampliação” ou seja, diminuir sem deformar a figura.

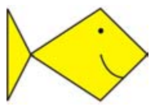


Figura 2 – Desenho original

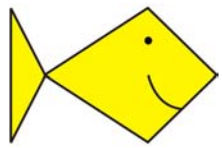


Figura 3 - Ampliação por semelhança

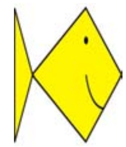


Figura 4 – Transformação usando escalas diferentes (não se trata de ampliação ou redução)

Nas figuras 2, 3 e 4, temos dois exemplos de transformações geométricas. A figura 2 foi ampliada gerando a figura 3. Na ampliação e na redução, são mantidas constantes as proporções entre os lados, e os ângulos correspondentes possuem a mesma medida. A figura 3 é, nesse caso, semelhante à figura 2. Podemos ainda dizer que a figura 2, quando comparada com a 3, possui uma escala de ampliação constante. A escala corresponde à relação que se estabelece entre as medidas da figura original e da sua representação. Essa relação é apresentada na expressão E = D/R, considerando: E = escala, D = Medida do desenho e R medida do objeto original ou medida real. A escala é sempre expressa da forma 1/M (para reduções) e M/1 (para ampliações). Quando são mantidas constantes as medidas, usamos o termo escala natural (1/1). Ela ainda pode ser numérica, como na figura 5, ou gráfica. A escala em uma figura semelhante possui a mesma medida da razão de semelhança, uma vez que a medida do objeto real corresponde à medida da figura e a medida do desenho (representação do objeto real) corresponde à medida da imagem (transformação).

Voltando ao exemplo das figuras 2, 3 e 4, quando comparamos a figura 2 com a 4, observamos que elas não são semelhantes, a figura 4 foi deformada. Podemos, usando a noção de escala, afirmar que as escalas utilizadas no eixo horizontal e no eixo vertical são diferentes. Este último tipo de transformação geométrica é muito usado em gráficos estatísticos para ressaltar determinados elementos do eixo vertical ou horizontal. Pode-se observar, também, esse tipo de representação com escalas diferentes em projetos de estradas. Neste último

[2] Um objeto tridimensional só pode ser ampliado ou reduzido em um outro objeto tridimensional. O mesmo principio deve ser considerado para objetos bidimensionais. No desenho técnico ampliamos ou reduzimos as projeções que são bidimensionais.

exemplo, são usadas para destacar o volume de cortes e aterro de uma terraplenagem (figura 5).

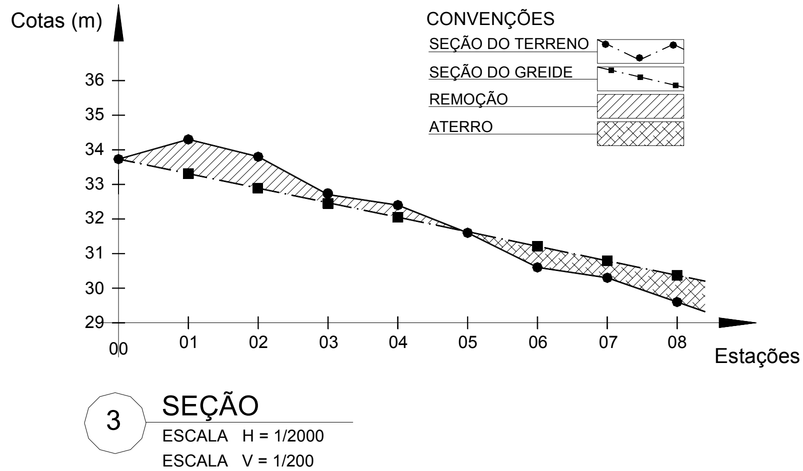


Figura 5 – Seção de um terreno usado na elaboração de um projeto de uma estrada.

As escalas são muito utilizadas em projetos e correspondem a uma aplicação prática dos conceitos estudados nas semelhanças e homotetias. Elas envolvem a idéia de ampliação e redução que possuem inúmeras aplicações em diferentes áreas do conhecimento e no cotidiano das pessoas. Uma nova maneira de compreender as semelhanças, congruências, ampliações e reduções é por meio do estudo das transformações geométricas. As homotetias são transformações geométricas. Dessa forma, consideramos relevante para apresentação do conceito de homotetia uma introdução as transformações geométricas.

2.1.3 Transformações geométricas

As transformações geométricas constituem um rico campo para a exploração da Geometria. O termo transformação tem o mesmo significado de correspondência, relação, função. Na análise Matemática, é mais comum utilizar o termo função, enquanto, na Geometria, é mais usual o termo transformação (SANCHEZ-MARMOL e PEREZ-BEATO, 1945). Em uma transformação, temos uma relação de elementos de um conjunto de saída com um conjunto de chegada. Esse conjunto de saída é também chamado de figura, e o de chegada, de imagem (COSTA, 1994). Uma transformação de um conjunto A em um conjunto B pode ser expressa como T(x) = y tal que x é um elemento de A e y um elemento[3] de B. Os conjuntos A e B

[3] Em uma transformação T(x) =y os elementos x e y que se correspondem se chamam homólogos (SANCHEZ-MARMOL e PEREZ-BEATO, 1945, p.17).

podem ser formados por um ponto ou um conjunto de pontos. Quando a figura e a imagem estão no mesmo plano, dizemos que se trata de uma transformação T do plano π no plano π (T: $\pi \rightarrow \pi$). O estudo das transformações está ligado ao conceito de grupo[4] das transformações. Segundo Costa (1994, p. 52) "Cada grupo de transformação se caracteriza pelas propriedades da figura objeto que persistem na figura imagem. É o que se chama de invariante da transformação". As isométricas foram as primeiras transformações estudadas na Geometria (COSTA, 1994). Nesse grupo, as invariantes são as medidas das figuras (lineares e angulares).

Essas noções de grupo tiveram um grande impulso no ensino de Geometria através do trabalho de Felix Klein (1849-1925). Entusiasmado com as possibilidades de utilização de uma forma unificadora do conceito de grupo, Klein dedicou-se a "desenvolver e popularizar a noção" (MABUCHI, 2000, p.16). Um marco, nesse sentido, foi uma aula inaugural, em 1872, em que Felix Klein se tornou professor da Universidade de Erlanger. Nela, "Klein mostrou como o conceito de grupo podia ser aplicado para caracterizar as diferentes Geometrias elaboradas até o século XIX tal conferência ficou conhecida como Programa Erlanger" (Idem). Para entendermos melhor essas noções introduzidas por Klein, tomemos como exemplo as transformações isométricas e as transformações por semelhança. Cada uma dessas transformações forma um grupo de transformação. O primeiro grupo, das isometrias, preserva as medidas lineares e angulares. São exemplos desse grupo: a reflexão, simetria central ou meio giro, a rotação, as translações e a composição[5] dessas transformações. O segundo grupo, das semelhanças, é formado pelas transformações por homotetia, como também a composição de homotetias ou de homotetias e isometrias. Klein (apud MABUCHI, 2000, p.17) considerou o grupo das "homotetias e semelhanças como transformações mais gerais que as isometrias, e, portanto, o grupo principal da Geometria euclidiana". Dessa forma, o grupo das isometrias é um subgrupo do grupo das semelhanças. Logo, toda congruência é uma semelhança, mas nem toda semelhança é uma congruência. As propriedades do grupo principal servem para o subgrupo, mas não é verdadeira a recíproca[6].

---

[4] O estudo dos grupos de transformações foi iniciado por E. Galois sendo conduzido depois pelo alemão Felix Klein (1849-1925). O conceito de grupo de transformações fundamenta a moderna classificação das propriedades das figuras (PINHEIRO, 1986).

[5] Alguns autores utilizam o termo "composição" (LIMA, 1996; WAGNER, 1993) outros utilizam "composição" e "produto" (SANCHEZ-MARMOL, 1945; PINHEIRO, 1986), optamos por utilizar as duas formas.

[6] Esses princípios se aplicam às outras Geometrias, como Geometria afim, Geometria projetiva, topologia, Geometrias não-euclidianas.

Além da noção de grupo, é necessário definir que tipo de transformação é a homotetia. Em uma transformação, ou função, nós temos um conjunto de saída (domínio) e um conjunto de chegada (contradomínio). Para que se trate de uma transformação, cada elemento do conjunto domínio deve corresponder a um elemento no conjunto contradomínio. O conjunto dos elementos do conjunto contradomínio que correspondem a um ou a mais elementos do conjunto domínio é chamado de imagem. Nas figuras 6, 7 e 8, temos, através do diagrama de Venn, exemplificado esse conceito. Nas figuras 6 e 8, o conjunto imagem se confunde com o próprio conjunto contradomínio. Na figura 7, o conjunto imagem é formado pelos pontos D, E e F. Na figura 6, nós temos uma função sobrejetora. Nesse tipo de função, todo elemento do conjunto contradomínio é imagem de pelo menos um elemento do conjunto domínio. Na figura 7, temos uma função injetora. Nela, todo elemento do conjunto domínio tem sempre imagens distintas. Na figura 8, temos uma função bijetora. Essa função é, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora. O grupo das semelhanças e, conseqüentemente, o das isometrias são transformações do tipo bijetoras.

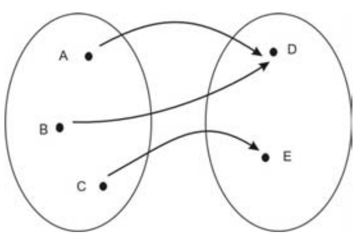


Figura 6 – Função sobrejetora

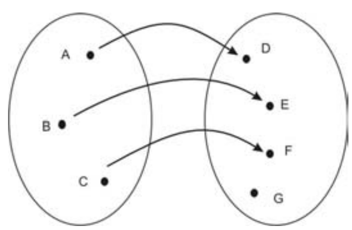


Figura 7 – Função injetora

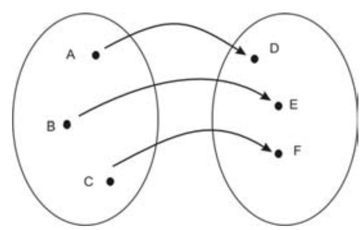


Figura 8 – Função bijetora

Toda transformação bijetora possui uma inversa. Esta ocorre da imagem para a figura. Na figura 9 temos um exemplo de uma transformação (homotetia), em que: f (A) = E a sua inversa (ou recíproca) é representada por $f^{-1}(E) = A$.

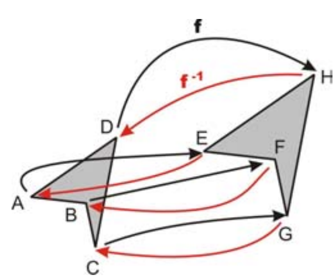


Figura 9 – Transformação geométrica por homotetia (ampliação) da figura ABCD (figura ou domínio) na figura EFGH (imagem)

Além das transformações diretas, podemos ter transformações obtidas pela composição de duas outras transformações. Na figura 10, temos um exemplo de duas figuras semelhantes.

Elas não são isométricas, nem resultantes de uma transformação direta por homotetia. A figura A2B2C2 é o resultado do produto de uma transformação por homotetia (ampliação) e isometria (rotação). Na figura 11, temos representada a figura A1B1C1 (não mostrada na figura 10), que foi resultado da transformação de ABC por homotetia. A figura A2B2C2 é resultante da rotação da figura A1B1C1. Podemos, então, representar o produto dessas duas transformações por H . R, em que H[7] representa a transformação por homotetia, e R, por rotação[8]. Podemos representar por [R .H] (x) = R [H(x)] (SANCHEZ-MARMOL e PEREZ-BEATO, 1945, p.17). No exemplo apresentado nas figuras 10 e 11, a transformação do ponto A em A2 é definida por R[H(A)] = A2. Se considerarmos o triângulo ABC, que foi transformado em A2B2C2, teremos R[H(ABC)] = A2B2C2. Podemos, ainda, representar o produto de duas homotetias por $H^2(x) = y$. Para o produto de n homotetias, teremos $H^n(x) = y$.

Esta pesquisa se limitará a uma seqüência didática sobre homotetia. Nela, não consideraremos o produto de homotetias ou de homotetias por isometrias. Ao compararmos uma transformação homotética com uma não-homotética, estamos considerando por transformação homotética uma transformação de uma figura diretamente por homotetia. Nesse caso, ABC e A2B2C2 (figura 10) não são homotéticas. A seguir apresentamos uma introdução as transformação por homotetia.

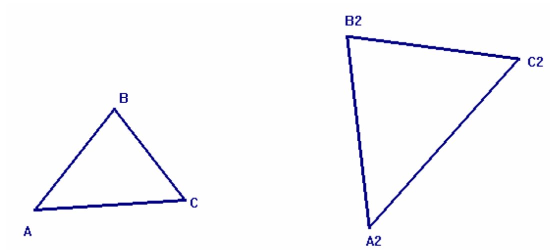


Figura 10 – Os triângulos ABC e A2B2C2 são semelhantes. O triângulo A2B2C2 não foi resultado de apenas uma transformação por homotetia.

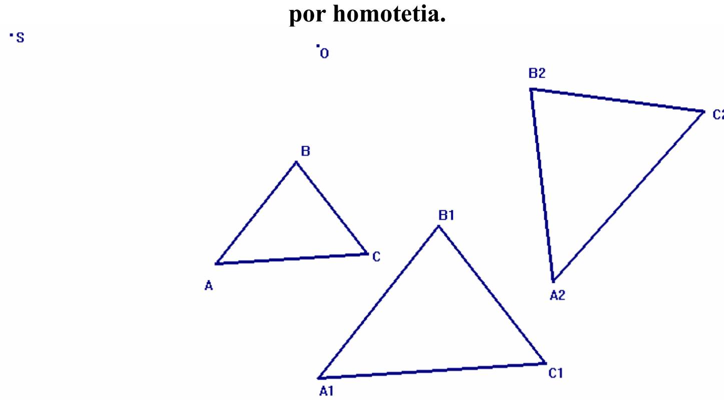


Figura 11 – O triângulo A1B1C1 foi gerado por uma transformação homotetica de ABC. O triângulo A2B2C2 é imagem de A1B1C1 por uma rotação de centro O.

[7] Utilizaremos para representar uma transformação por homotetia a letra H assim como: R para rotação; T para translação; S para reflexão (inicial da palavra latina speculum, espelho); L para meio giro (inicial da palavra latina libra, balança); S para o centro de homotetia e O para o centro de rotação e meio giro. Os termos em latim fora também empregados por Pinheiro (1986).

[8] Sanchez-Marmol (1945) chama o produto de uma homotetia por uma rotação de Rotohomotetia que representa por Rh.

2.1.4 Homotetia

O triângulo ABC, representado na figura 12, foi transformado por homotetia no triângulo A1B1C1. O triângulo ABC é chamado de figura e o triângulo A1B1C1 de imagem de ABC. Cada ponto do triângulo ABC possui um ponto homólogo (correspondente) em A1B1C1. Ao unirmos dois pontos homólogos, definimos uma reta chamada de raio de homotetia (PINHEIRO, 1986, p.176) ou raio vetores homólogos (CARVALHO, 1967, p. 57). Na figura 12, as retas SB, SC e SA são raios de homotetia. A interseção de dois ou mais raios de homotetia define um ponto chamado de centro de homotetia, representado na figura 12 pelo ponto S. A razão definida pela distância do centro de homotetia a um ponto da imagem de uma figura pela distância do centro de homotetia ao ponto homólogo da figura é chamada de razão de homotetia: ela é igual à razão de semelhança, que, por sua vez, é igual à escala. A razão de homotetia e a razão de semelhança estão representadas neste trabalho por K[9]. Na figura 12, temos: K = SA1/SA = SB1/SB = SC1/SC (razão de homotetia). Podemos ainda representar uma transformação homotética do ponto A em A1 (figura 12), com uma razão K e centro S por: $H_{S,\ K}$ (A) = A1. Considerando K = 1,5, teremos: $H_{S,\ 1.5}$ (A) = A1. O valor de K pode ser positivo ou negativo.

Na figura 13, temos S como centro de homotetia, X como figura e X1 e X2 como imagens de X. Para cada ponto X transformado por uma homotetia de centro S, o valor positivo é definido pelo vetor $\overrightarrow{SX}$. Dessa forma, na figura 13, o ponto X1 é imagem de X por uma homotetia positiva, e X2 é imagem de X por uma homotetia negativa. A origem das retas orientadas que passam por cada ponto da figura e imagem e pelo centro de homotetia é o centro de homotetia. Neste exemplo e no da figura 14, a distância entre S e X, X e X1 e S e X2 é igual a uma unidade. Na figura 13, uma vez que S representa o centro de homotetia, ele é a origem da reta (valor 0), o ponto X possui valor 1, X1 valor 2 e X2 valor -1. Com isso, o valor de K para X1 é 2 (K = SX1/SX = 2/1) e para X2 é -1 (K = SX2/SX = -1/1). Ao mudarmos a posição desses pontos (figura 14), as regras permanecem. Dessa forma, na figura 14, X1 é a imagem transformada por homotetia positiva de X e X2 representa a imagem transformada por uma homotetia negativa de X. O triângulo ABC, da figura 15, foi ampliado por uma homotetia de razão positiva igual a 1,5, gerando o triângulo A1B1C1, e foi reduzido no triângulo A2B2C2

---

[9] Essa notação pode ser vista em diversas publicações a exemplo de Pinheiro (1986), Sanchez-Marmol (1945) e Wagner (1993).

com uma razão negativa de -0,8. Na figura 15, na reta orientada pelo vetor $\overrightarrow{SA}$, o ponto A1 é positivo, e o ponto A2 é negativo. Na reta orientada pelo vetor $\overrightarrow{SB}$, o ponto B1 é positivo e B2 negativo. O mesmo vale para a reta orientada pelo vetor $\overrightarrow{SC}$. Quando a razão for positiva, chamaremos de homotetia positiva; e, quando for negativa, de homotetia negativa[10].

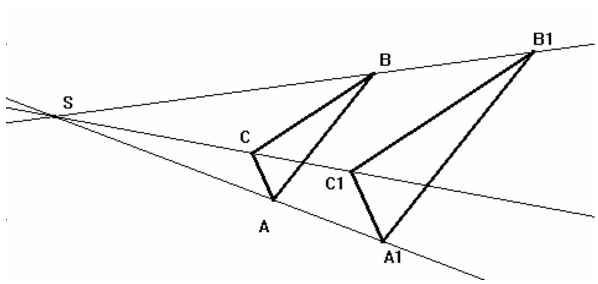


Figura 12 – Transformação por homotetia

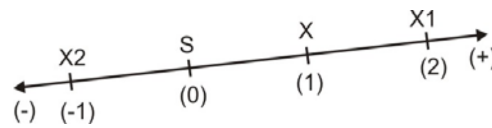


Figura 13 – Sinal da transformação.

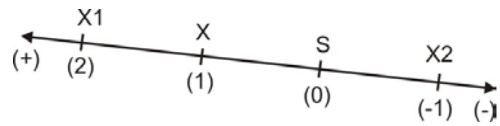


Figura 14 – Sinal da transformação.

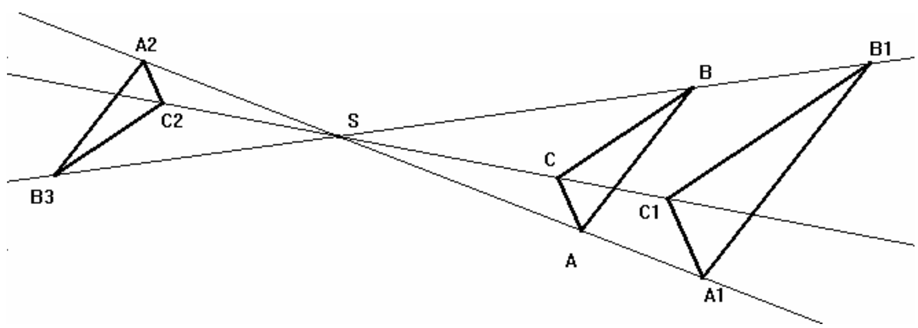


Figura 15 – Homotetia de razão positiva e homotetia de razão negativa

Considerando K (razão de homotetia), X (um ponto qualquer da figura), X1 (um ponto homólogo do ponto X na imagem) e S (centro de homotetia), o valor de K é igual a: K = SX1/SX. Em uma transformação por homotetia, em função do valor de K, pode-se ter[11]:

- $K > 1$, SX1 será maior do que SX e a figura terá a sua imagem ampliada.
- $K = 1$, SX1 será igual a SX logo a figura e a imagem serão coincidentes.
- $0 < K < 1$, SX1 será menor do que SX e a figura terá a sua imagem reduzida.
- $K \neq 0$ não pode ser nulo, uma vez que, para esse caso, SX1 seria igual a zero e não teríamos imagem.

---

[10] Sanchez-Marmol (1945, p.337) chama a homotetia de positiva ou direta e negativa ou inversa. Pinheiro (1986, p. 167) usa apenas homotetia negativa e positiva, que considera mais adequado do que homotetia direta ou inversa.

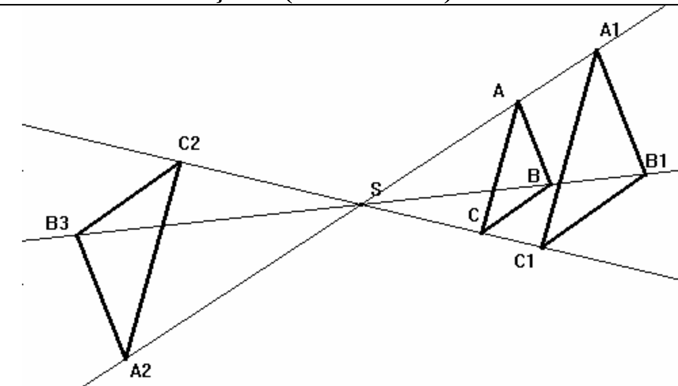
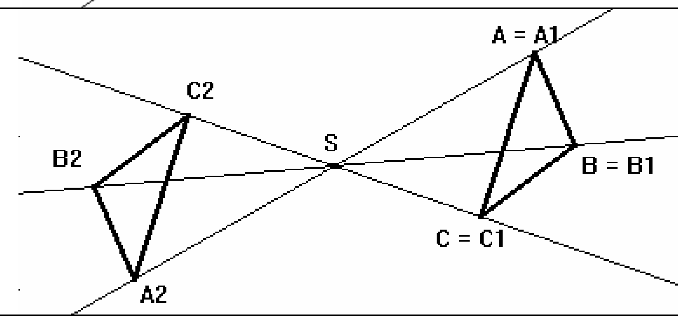
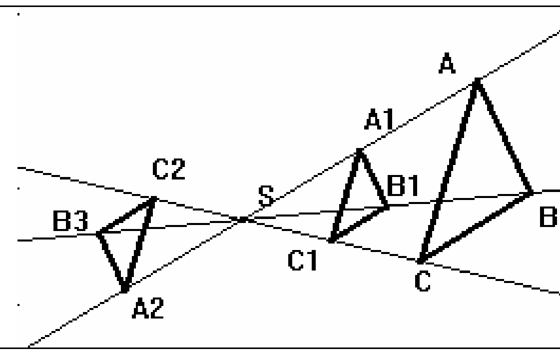
[11] Quando a figura se limitar a um ponto não faz sentido falar em ampliação, redução e mesmas medidas quando estivermos nos referindo a figura e a sua imagem.

- K < -1, SX1 será em modulo maior que SX e a figura terá a sua imagem ampliada e rotacionada. Nesse caso, poderíamos comparar com o efeito de uma ampliação por homotetia positiva de mesmo valor da negativa e, em seguida, um meio-giro com o centro coincidente com o centro de homotetia.
- K = -1, SX1 terá as mesmas medidas de S. É como se tivéssemos aplicado um meio-giro de centro S, ou, ainda, uma rotação com amplitude ± 180. Podemos representar, nessa transformação, uma igualdade da homotetia (com K = -1) com o meio-giro (representado por L) e com a rotação (de amplitude 180º em qualquer sentido): $H_{S,-1}(X) = L_S(X) = R_{S,\pm 180}(X) = X1$.
- 0 > K > -1, SX1 terá, em módulo, uma medida menor do que SX, e a imagem será reduzida. O resultado será semelhante a uma redução por homotetia positiva seguida de um meio-giro.

Com base nessas observações, construímos o quadro 1. Nele, consideramos o valor da constante em módulo. Dessa forma, agrupamos os casos em três tipos: ampliação, redução e isometria. Neste último, as medidas não sofrem alteração na imagem – a imagem pode coincidir com a figura (k=1), como no triângulo A1B1C1 (linha 3 no quadro 1), ou não (k = -1), como no triângulo A2B2C2 (linha 3 no quadro 1).

Na figura 16, temos um outro exemplo de transformação homotética. O triângulo ABC foi transformado por homotetia em A1B1C1 e em A2B2C2. Em uma transformação por homotetia (como já comentado), os lados homólogos são proporcionais e a razão entre eles corresponde à razão de semelhança que é igual à razão de homotetia. Com base nessas propriedades, podemos afirmar que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo A1B1C1, assim como o triângulo SAC é semelhante a SA1C1. O mesmo podemos dizer para os triângulos ABC e A2B2C2 e SAC e SA2C2. Com isso, é possível afirmar que na homotetia, tal como na semelhança, os ângulos homólogos são congruentes. Também é licito afirmar que os lados homólogos são paralelos, uma vez que SAC é proporcional a SA1C1. Como são paralelos, na homotetia, a direção é preservada. O sentido, porém, muda quando K é menor do que 0. Na figura 16, os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{A2C2}$ possuem mesma direção e sentido contrário. Como a homotetia mantém o paralelismo, ela preserva também os alinhamentos (figura 17).

Quadro 1 – Tipos de transformações em uma homotetia

VALOR	TRANSFORMAÇÃO	REPRESENTAÇÃO (EXEMPLO)
|K| > 1	Ampliação	
|K| = 1	Isometria (as medidas não se alteram)	
|K| < 1	Redução	

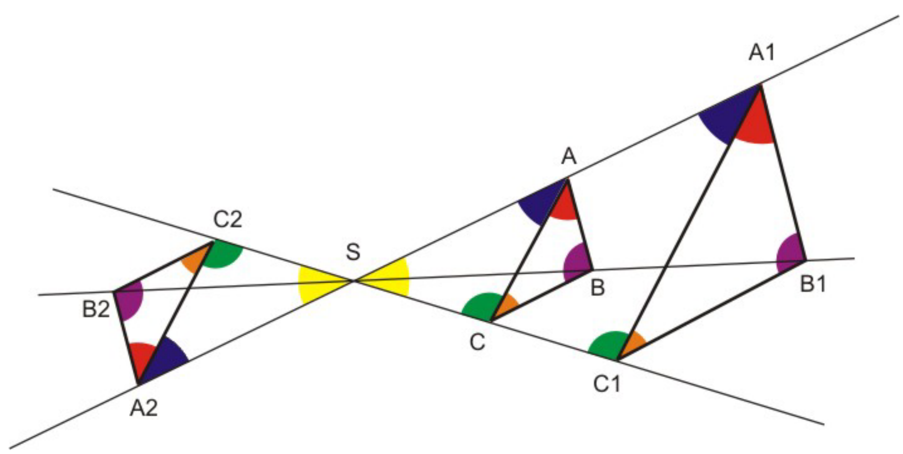


Figura 16 – Na homotetia, os ângulos homólogos são congruentes; pode-se observar também o paralelismo de lados homólogos (segmentos de reta, semi-reta e reta).

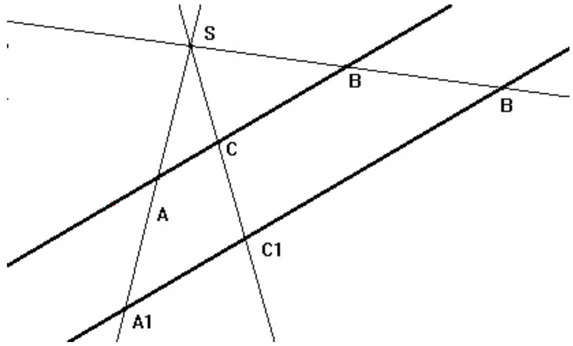


Figura 17 – Na homotetia, os alinhamentos são preservados.

2.1.5 Recomendações do MEC para o ensino de homotetia no Ensino Fundamental

O estudo das transformações geométricas, por homotetia, faz parte das recomendações do MEC encontradas nos PCN para o quarto ciclo do Ensino Fundamental. Podemos observar isso nos quadros 2 e 3. Neles, apresentamos parte das recomendações para Área de Matemática no Ensino Fundamental e Médio.

Quadro 2 – Distribuição dos conteúdos relacionados à homotetia no Ensino Fundamental

CICLO	APLICAÇÃO	REFERÊNCIA
ENSINO FUNDAMENTAL		
1°	Dimensionamento de espaços, percebendo relações de tamanho e forma.	(BRASIL, 2000, p.72-73)
2°	Ampliação e redução de figuras planas pelo uso de malhas	(BRASIL, 2000, p.88-89)
3°	Ampliação e redução de figuras planas segundo uma razão e identificação de elementos que não se alteram (medida de ângulos) e dos que se modificam (medida dos lados, do perímetro e da área)	(BRASIL, 1998, p.72-73)
4º	Desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliação ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro). Produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança. As atividades de transformação são fundamentais para que o aluno desenvolva habilidades de percepção espacial e podem favorecer a construção da noção de congruência de figuras planas (isometrias). De forma análoga, o trabalho de ampliação e redução de figuras permite a construção na noção de semelhança de figuras planas (homotetias).	(BRASIL, 1998, p.89) (BRASIL, 1998, p.82) (BRASIL, 1998, p.86)

Quadro 3 – Distribuição de conteúdos relacionados com o conceito de homotetia no Ensino Médio

SÉRIE	APLICAÇÃO	REFERÊNCIA
ENSINO MÉDIO		
1ª	Semelhança e congruência	(BRASIL, 2002, p.128)

Conforme apresentado nos quadros 2 e 3, a homotetia e os conteúdos da Área de Matemática relacionados com esse conceito estão distribuídos ao longo dos ensinos Fundamental e Médio. Esses conteúdos deveriam fazer parte da formação inicial do licenciando de Matemática, pois, dentre as suas atribuições, está a preparação para lecionar Matemática nos ensinos Fundamental e Médio. Assim, o estudo dos referidos conteúdos se mostra relevante nos cursos de licenciatura em Matemática. Vale lembrar que o conceito de homotetia se interliga a diferentes conteúdos, tais como semelhanças, transformações geométricas, razão, proporção, escalas, ampliação, redução, congruência e representação de figuras. Apesar da sua relevância, em um mundo em constantes mudanças como o nosso, o ensino de apenas um conceito não prepara os alunos para o futuro. Esse ensino deve ser articulado com uma prática pedagógica atual que privilegie a pesquisa e leve os alunos a experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjeturar, abstrair, generalizar e demonstrar. Desta forma, os futuros professores poderão desenvolver o espírito investigativo necessário para as adaptações às constantes mudanças em nosso planeta. Essa prática pedagógica vai de encontro a uma outra prática, que privilegia a memorização e a reprodução de conhecimentos, sem uma maior reflexão e posicionamento crítico dos alunos. As mudanças, quando incorporadas à prática pedagógica dos licenciandos, podem levar a transformações importantes no ensino. A seguir, trataremos dessa prática (saber pedagógico).

2.2 SABER PEDAGÓGICO

O saber pedagógico, ao longo do tempo, sofre mudanças, que conduzem ao aperfeiçoamento de antigas práticas de ensino. No ensino de matemática se desenvolve a área de didática da Matemática.

2.2.1 Didática da Matemática

Inicialmente, ensinar Matemática "era considerado uma arte e, como tal, dificilmente suscetível de ser analisado, controlado e submetido a regras" (CHEVALLARD et al, 2001, p. 73). O importante nessa concepção de ensino era o domínio da Matemática pelo professor. A aprendizagem dos alunos dependia "somente do grau em que o professor dominasse tal arte e, em certo sentido, da vontade e capacidade dos próprios alunos para se deixarem moldar pelo artista" (idem). De certa forma, elementos dessa concepção ainda estão presentes em muitos professores que afirmam que, para ensinar Matemática, é necessário apenas o conhecimento da Matemática e o interesse dos alunos.

Com o desenvolvimento da didática da Matemática surge, em oposição à visão anterior, uma perspectiva de ensino da Matemática que Chevallard et al. (2001) chamam de clássica. Nela, destaca-se a "necessidade de analisar os processos envolvidos na aprendizagem da Matemática para poder incidir sobre o rendimento dos alunos" (idem). Essa noção de didática da Matemática possuía algumas limitações, como não incluir como objeto de estudo as noções de "ensinar Matemática" e "aprender Matemática". A fim de superar essas limitações, surge uma nova concepção, na qual o conhecimento matemático passa a ser considerado como objeto de estudo da didática da Matemática, e não como noções transparentes (não-questionáveis). Esse novo paradigma da didática da Matemática tem início nos anos 70, quando o pesquisador francês Guy Brousseau:

> vislumbrou, pela primeira vez ... a necessidade de a didática utilizar um modelo próprio da atividade Matemática, visto que os modelos epistemológicos usuais não haviam sido construídos para responder aos mesmos problemas que a didática coloca. Corresponde, historicamente, às primeiras formulações da Teoria das Situações[12] (CHEVALLARD et al., 2001, p.77)

Para a construção da teoria das situações didáticas, Brousseau utiliza a idéia de aprendizagem por adaptação, tomando como referência os esquemas de assimilação e acomodação propostos por Piaget. Podemos observar isso quando Brousseau (1986, p.48-49, tradução livre) afirma que:

> Os alunos aprendem a se adaptar a um meio que é fator de contradição, de dificuldade, de desequilíbrio, um pouco como faz a sociedade humana. Esse saber, fruto da adaptação do aluno, se manifesta pelas respostas novas que são a prova da aprendizagem [...] Esse processo psicogenético piagetiano é o oposto do dogmatismo escolástico.

Situações didáticas

Uma situação didática estabelece diferentes relações entre o professor, o aluno e o saber. Essas relações envolvem vários conceitos como o de transposição didática, contrato didático, obstáculos epistemológicos. Para que ocorra uma situação didática, devem estar presentes o professor, o aluno e o saber. Porém, eles são insuficientes para englobar todo o "fenômeno cognitivo", sendo necessário o estabelecimento de "outros elementos do sistema didático como: objetivos, métodos, posições teóricas, recursos didáticos, entre outros" (PAIS, 2002, p. 66).

---

[12] Teoria das situações didáticas

Na teoria das situações didáticas, Brousseau procura estabelecer relações entre o matemático, o aluno e o professor. O matemático, para comunicar a sua descoberta, utiliza uma linguagem que não corresponde à que foi empregada no caminho trilhado para a descoberta. Essa forma de apresentar é justificável tendo em vista a necessidade de validar o seu conhecimento. Nesse processo, o pesquisador deve:

> suprimir todas as reflexões inúteis, os traços dos erros cobrados e os encaminhamentos errados. Deve-se esconder as razões que se tem conduzido dentro dessa direção e as condições pessoais que tem presidido esse resultado, problematizar habilmente mesmo as lembranças um pouco banais, mas evitar as trivialidades... Deve-se ainda procurar as teorias mais gerais dentre as quais os resultados ficam válidos... Assim, o produtor do saber despersonaliza, descontextualiza e destemporaliza o mais possível seus resultados. (BROUSSEAU, 1986, p.36, tradução livre)

O trabalho do aluno, em alguns momentos, deve ser comparado ao do cientista. Ele não deve simplesmente aplicar as definições e os teoremas. Tal como o cientista, o aluno deve encontrar boas questões de modo a formular modelos, linguagens, conceitos e trocar essas experiências com outros, conduzindo à descoberta. Nesse processo, ele deve "reconhecer os que estão de acordo com a cultura, os que o ajudam, os que lhe são úteis" (BROUSSEAU, 1986, p.37, tradução livre). O professor, então, deve "imaginar e propor aos alunos situações que eles possam viver e que dentre as quais os conhecimentos vão aparecer como a solução ótima e revelável aos problemas postos" (idem). Por fim, o aluno deve ser conduzido a *redescontextualizar* e *redespersonalizar* seu saber, de modo a identificar a sua produção com o saber cientifico e cultural da sua época (idem).

Na teoria das situações didáticas, uma das atividades principais do professor é a devolução e a institucionalização. Na devolução, o professor deve fazer uma escolha adequada de problemas, de tal forma que o aluno os aceite como seus e que possam conduzi-lo a agir, falar, refletir a partir da sua interação com o problema. Brousseau classifica esses momentos como situações adidáticas, uma vez que neles o "mestre se recusa a intervir como aquele que propõe os conhecimentos que ele quer ver aparecer" (1986, p.49, tradução livre). Na institucionalização, o professor procura relacionar esse conhecimento produzido pelo aluno com "o saber cultural ou científico e com o projeto didático, dá uma leitura dessas atividades e lhe dá um status" (p.88). Um outro conceito utilizado por Brousseau é o de "situação Matemática".

A situação Matemática é uma noção primitiva que deve ser modelada em um jogo formal. Uma situação Matemática é específica de um conhecimento concreto quando pode ser transmitida sem o uso deste conhecimento; a situação ótima do jogo é obtida utilizando, para isso, o conhecimento a ser apreendido (CHEVALLARD et al., 2001). Chevallard apresenta como exemplo de situação Matemática um jogo denominado "A corrida até o 20". Desse jogo, participam dois jogadores. Ele inicia com um jogador dizendo um número x menor que 20. O seu adversário, então, deve dizer outro número com 1 ou 2 unidades maiores que x ($x + m$ com $m < 3$). O vencedor será aquele que disser 20 primeiro. Nesse jogo, o conhecimento matemático que deve aparecer é a divisão euclidiana. A estratégia é achar números que deixem o mesmo resto que 20 na divisão por três. Assim, teríamos como estratégia vencedora escolher os números: 17, 14, 11, 8, 5, 2. Todos esses números e o número 20 têm, na divisão por 3, 2 como resto. Na nossa seqüência, a situação Matemática será utilizada para determinar o que é homotetia. Nesse caso, o conhecimento matemático que deve aparecer é o das propriedades que permanecem inalteradas com a manipulação, como o paralelismo, a proporção dos lados homólogos e a congruência dos ângulos. Elas serão determinadas pela manipulação de figuras.

Em uma situação Matemática, uma situação especifica de um conhecimento concreto em que por si mesma, e sem utilizar razões didáticas e na ausência de toda indicação intencional conduza o jogador a mudanças de estratégias é chamada de situação adidática. Essas mudanças de estratégia devem possuir uma certa estabilidade em relação ao tempo e às variáveis da situação. O fracasso de certas estratégias espontâneas é decorrente de algumas características da situação adidática (CHEVALLARD et al, 2001).

Em uma situação adidática, intervém a noção de variável. A variável de uma situação Matemática corresponde aos elementos que podem assumir diferentes valores. Nessa mudança de valor, eles provocam variações na estratégia vencedora. Tomando como exemplo o jogo "A corrida até o 20", Chevallard et al (2001) apresentam como exemplo de variação na estratégia vencedora a mudança no valor final (N) e no valor máximo ($m - 1$) que cada adversário pode dizer. Desse modo, considerando:

- $N = 20$ e $m < 3$, a estratégia vencedora é dizer um dos números: 2, 5, 8 , 11, 14 17 e 20, que são números cujo resto na divisão por 3 (m) é igual a 2;
- $N = 45$ e $m < 7$, a estratégia vencedora é dizer um dos números: 3, 10, 17, 24, 31, 38 e 45, que são números cujo resto na divisão por 7 (m) é igual a 3;

- N = 100 e m =12, a estratégica vencedora é dizer um dos números 4, 16, 28, 40, 52, 64, 76, 88 e 100.

Na seqüência didática, trabalhamos com diferentes variáveis como a figura utilizada (ponto, segmento, triângulo, bandeira etc.), o valor de K (razão de homotetia), a indicação ou não do centro de homotetia. Em cada situação, os alunos tiveram acesso a instrumentos específicos que foram manipulados de acordo com as situações adidáticas criadas, de modo a possibilitar que, em cada caso, a estratégia ótima seja a que conduza à construção dos conhecimentos relativos à homotetia específicos para cada situação.

Essas variáveis em uma situação adidática são chamadas de variáveis didáticas quando os seus valores podem ser alterados pelo professor. Partindo de um conhecimento concreto e de uma situação adidática específica desse conhecimento, as mudanças dos valores das variáveis didáticas dessa situação adidática possibilitam a produção de um tipo de problema que corresponde a diferentes técnicas ou estratégias de solução (CHEVALLARD et al, 2001).

Para a construção de um conhecimento matemático, é necessário que o aluno possa adaptar-se a uma situação adidática específica desse conhecimento. Nesse processo, o aluno passa por mudanças de estratégias que o conduzem a colocar em prática a estratégia vencedora de maneira estável no tempo, bem como a diferentes valores das variáveis da situação adidática. Um conhecimento matemático, nesse caso, é caracterizado por uma ou mais situações adidáticas que dão significado a esse conhecimento. As referidas situações devem estar ao alcance do aluno. Na construção da seqüência didática, elaboramos as situações adidáticas com base nos conhecimentos prévios dos alunos, obtidas no pré-teste sobre homotetia. Partindo do conhecimento dos alunos, o professor seleciona situações adidáticas adequadas que possam fazer emergir o conhecimento matemático a ser estudado. Essas situações adidáticas adaptadas aos fins didáticos dão significado não apenas ao conhecimento ensinado em um determinado momento, como também ao sentido particular que esse conhecimento terá na instituição escolar (CHEVALLARD et al., 2001). Os conhecimentos adquiridos na seqüência serão utilizados pelos licenciandos na construção do conceito de homotetia, no Ensino Fundamental. Em função desse objetivo, utilizamos como referência, na elaboração das situações adidáticas, as orientações dos PCN para o ensino de homotetia, apresentadas na introdução desta dissertação. Desse modo, procuramos adequar o conhecimento a ser construído ao sentido particular que ele terá na instituição escolar.

Conforme se viu, a situação adidática é importante no ensino, uma vez que o meio que vivemos é adidático. Porém, as situações adidáticas com o objetivo didático estão inseridas dentro das instituições de ensino dentro de um conjunto mais complexo de relações que incluem instrumentos e objetos; o professor com o objetivo de criar condições para que ocorra a aprendizagem. Nesse ambiente de aprendizagem, está incluída a noção de meio matemático, que corresponde aos objetos matemáticos que os alunos conhecem, utilizam com segurança e cujas propriedades são inquestionáveis para os alunos. No ambiente escolar, também se incluem diferentes dispositivos para o estudo, como a "aula de Matemática" e o "livro didático". Na situação didática, temos a intervenção do professor sobre os alunos em interação com um meio com o objetivo de fazer com que as situações adidáticas funcionem promovendo a aprendizagem. As situações adidáticas, portanto, fazem parte de uma situação mais ampla, que é a situação didática. Dessa forma, não podemos considerar, na construção do conhecimento, apenas as situações adidáticas. Chevallard et al (2001, p.216) esclarecem que:

> Embora Brousseau tenha aceito inicialmente a idéia de Piaget de que a construção do conhecimento é realizada mediante uma adaptação pessoal (feita de assimilações e acomodações) ao meio, demonstrou, posteriormente que a teoria de Piaget, ao supervalorizar a aprendizagem "natural" ou "espontânea", corre o risco de fazer recair no professor toda a responsabilidade didática e cair em um novo tipo de empirismo.

Nas situações didáticas, cabe ao professor, no lugar de comunicar um conhecimento, fazer a devolução de um bom problema. Se o aluno aceita as regras do "jogo" tomando para si a responsabilidade sobre a resolução do problema e essa devolução se opera, ocorre a aprendizagem. Nesse jogo, tanto o professor quanto o aluno possuem responsabilidades. A responsabilidade do aluno em aceitar o desafio, e do professor em criar condições adequadas para a devolução do problema. Porém, e se o aluno se recusa a resolver o problema ou não consegue resolvê-lo? O professor terá como obrigação auxiliar o aluno e se justificar por ter colocado o aluno em uma situação mais difícil. Brousseau (1986, p.51, tradução livre) esclarece que "este sistema de obrigações recíprocas lembra um contrato". A parte desse contrato que é específica do conteúdo é chamada por Brousseau de contrato didático. Ele possui características que o impedem de se configurar como um verdadeiro contrato. Entre essas características, Chevallard et al (2001) enumeram algumas, como:

- Ele não pode tornar-se totalmente explícito, uma vez que se refere ao resultado do ensino de um dado conhecimento matemático e, como tal, as cláusulas de rupturas e realização do contrato não podem ser definidas antecipadamente;
- Um contrato em que fossem definidas regras imutáveis de comportamento entre o professor e o aluno estaria fadado ao fracasso. Tomemos um exemplo: se uma das regras fosse que o professor ensinasse para o aluno os resultados (o conhecimento a ser adquirido). Nesse caso, o aluno não propôs os resultados por si mesmo e, portanto não aprendeu Matemática;
- O professor e o aluno aceitam responsabilidades que não podem controlar indicando uma "irresponsabilidade jurídica". O professor aceita a responsabilidade de organizar situações adequadas, a construção de um dado conhecimento, e o aluno, de resolver os problemas que fazem parte dessas situações e para os quais qual não lhe foi dada a solução.

Essas condições para que não se possa chamar o contrato didático de um verdadeiro contrato conduzem a rupturas. O aluno, ao não conseguir resolver um dado problema, sente surpresa e revolta. O professor considera que os seus serviços foram adequadamente prestados. Essas rupturas conduzem à renegociação e a uma busca de um novo contrato em função dos novos conhecimentos adquiridos ou apontados. Brousseau (1986, p. 52, tradução livre) esclarece que "o conhecimento será justamente o que resolverá as crises resultantes dessas rupturas".

Como vimos, as situações adidáticas são necessárias na construção do conhecimento. Uma das contribuições mais importantes da teoria das situações didáticas foi o de propor um método para estudar estas situações adidáticas do ponto de vista teórico e "em estreita relação com as diversas formas dos conhecimentos matemáticos e os correspondentes modos de funcionamento desses conhecimentos" (CHEVALLARD et al, 2001, p.220). Brousseau propõe três tipos de situações adidáticas: situação de ação, situação de formulação e validação.

Situações adidáticas de ação

As situações de ação são aquelas em que ocorrem as mudanças de informações não codificadas. Nessa fase, o aluno atua sobre o problema de forma mais experimental e intuitiva do que teórica. Brousseau (1986, p.95, tradução livre) assinala que, nesse tipo de situação, ocorrem "as mudanças de informação não codificadas ou sem linguagem: as ações e as decisões que agem diretamente sobre outro protagonista". O aluno deve atuar sobre o problema sem ter que se preocupar em apresentar argumentos. Nessa situação:

> Existem interações em que o jogador exprime suas escolhas e decisões sem algum código lingüístico, pelas ações sobre o meio. Nós assimilaremos a esta classe de interações aquelas em que aparecem as mensagens de um código tão fácil para relacionar à ação que ele não jogará regra alguma dentro do jogo. Até mesmo aquelas onde existem as mudanças de mensagens, mas sem relação com a solução do problema. Por exemplo, o jogador exprime ou entretém uma conversação pouco importante com um terceiro sem esperar uma retroação (BROUSSEAU, 1986, P.95, tradução livre)

PAIS (2002, p. 72) esclarece que, nesse tipo de situação, "o aluno fornece a solução correta de um certo problema, mas não sabe explicitar os argumentos por ele utilizados na sua elaboração". PAIS (2002) acredita que, na situação de ação, do ponto de vista pedagógico, o aluno deve ser colocado diante de um problema sobre o qual possa agir diretamente, sem ter de explicitar argumentos. Nesse tipo de situação, prevalece o aspecto experimental.

Voltando ao jogo "a corrida até o 20", Chevallard et al. assinalam que, na fase correspondente à ação, "cada jogador produz unicamente uma série de decisões, não tem nenhum interesse em indicar suas estratégias. Começa o jogo em um certo estado e o deixa em outro". A situação de ação ocorreu, na seqüência que propusemos, na medida em que o aluno se deparou com um problema e procurou agir diante dele de forma experimental, procurando uma resposta para o problema proposto.

Situações adidáticas de formulação

Nas situações de formulação, o aluno passa a utilizar um raciocínio mais elaborado, uma estrutura de natureza mais teórica na resolução do problema. Brousseau (1996, p.95, tradução livre) esclarece que, nesse caso, temos "as mudanças de informação codificadas em uma linguagem". Ele acrescenta, que nesse tipo de situação

> Existem as interações em que o jogador se preocupa em emitir uma mensagem à intenção do meio antagonista, sem que essa mensagem signifique a intenção de emitir um julgamento. Ele não quer somente classificar em certa categoria as ordens, as questões, etc., mas também todas as informações. Certamente, a maior parte dessas informações é implicitamente acompanhada de uma afirmação de validade. Mas, à medida que o emissor não indica explicitamente essa validade, se ele não espera ser contradito ou chamado a verificar sua informação, se o contexto não lhe dá uma certa importância à questão de saber se a informação é verdadeira, como e por que, ou se essa validade é susceptível de ser estabelecida sem dificuldade, então

> a mensagem será classificada, simplesmente, como informativa. A informação, assim, dada é suposta mudar ao menos a incerteza do meio e em geral seu estado.

Como observamos em Brousseau, o aluno, diante do problema, procura emitir uma resposta. Nesse processo, ocorre a troca de informações com um ou mais alunos. Ele formula justificativas para a solução encontrada do problema sem, contudo, esperar ser contradito. Esse tipo de situação ocorreu em nossa seqüência quando o aluno apresentou justificativas para a solução do problema à dupla com que estava trabalhando sem uma preocupação maior em justificar as suas formulações.

Chevallard et al (2001, p. 222), para exemplificar a situação de formulação, utilizam a “a corrida até 20”. Nesta segunda fase:

> Os alunos são agrupados em duas equipes que competem uma contra a outra. O professor chama os alunos com a letra nominada para disputar uma partida no quadro. O restante dos alunos não tem o direito de intervir nem de falar. É concedido um ponto à equipe do jogador ganhador: entre as partidas os alunos da mesma equipe discutem entre si as melhores estratégias. O êxito de cada equipe depende da ação e da compreensão que cada jogador manifesta sobre as estratégias discutidas.

Situações de validação

No terceiro tipo de situação, ocorre uma mudança de juízo. Nesse caso, o aluno possui estruturas de prova e o conhecimento apresenta uma natureza mais teórica. Brousseau (1986, p.96, tradução livre) esclarece que, nesse tipo, “as mensagens mudadas com o meio são as asserções, os teoremas, as demonstrações, emitidas e recebidas como tais”.

Sobre esse tipo de situação, Pais (2002) esclarece que ela está relacionada com a questão da justificativa de um conhecimento, ou seja, com a veracidade do conhecimento. Observa-se, historicamente, que é praticamente impossível assegurar a universalidade do conhecimento. Uma solução histórica foi limitar essa argumentação a paradigmas internos restritos a territórios especializados. No caso específico da escola, o que se observa é um território de natureza distinta das comunidades científicas. Nesse território, é importante fomentar no aluno o desafio da validação, ainda que limitado pelas características do ambiente escolar, que, por sua vez, é delimitado pelo contrato didático. Para Pais (2002, p. 73), “O trabalho intelectual do aluno não se refere somente a informações sobre o saber, mas envolve também afirmações, elaborações, declarações a propósito da validade do saber”.

Para melhor definir essas situações de validação, Balacheff (1990 apud PAIS, 2002) propõe uma distinção entre explicação, prova e demonstração. A explicação de uma validade se limita ao campo individual. Na prova, temos uma justificativa restrita a um contexto social limitado como a sala de aula. Na demonstração, esse contexto social se amplia, sendo a validação submetida a uma comunidade cientifica. Na presente pesquisa, os alunos se limitaram ao campo de validação da explicação e da prova. Para exemplificar uma situação de validação, tomemos mais uma vez Chevallard et al. (2001, p. 223). Ele propõem que, nesta fase, o professor mude o jogo:

> Cada equipe, após a discussão, pode propor uma explicação ou método para ganhar; pode criticar uma explicação da outra equipe e tentar provar que é falsa e, por último, pode obrigá-la a jogar uma partida utilizando o método que propôs. Nessa última fase, os alunos aprendem, sem intervenção do professor: a enunciar "teoremas" (como, por exemplo, "é necessário enunciar 17"), a discutir sua validade ("eu enunciei 17 e perdi"), e a produzir demonstrações ("se ele enunciar 17, eu só posso dizer 18 ou 19, nos dois casos poderá dizer 20").

Nesta pesquisa, isso ocorreu durante a seqüência quando o aluno tentou (1) enunciar teoremas a sua dupla, ao professor, ou, ainda a outros alunos (como por exemplo: "a homotetia preserva a congruência dos ângulos"), (2) discutir a sua validade (como na afirmação: "eu acho que isso não se aplica a todos os casos?"), (3) e, partindo de outros conhecimentos, já demonstrados em uma outra etapa da seqüência didática, procurar produzir demonstrações (como "na homotetia os lados homólogos são paralelos, dois lados que definem um ângulo serão paralelos aos seus homólogos, preservando, dessa forma, o ângulo por eles formado").

Brousseau (1986) faz uma comparação dessas situações adidáticas, conduzidas na sala de aula com o desenvolvimento histórico da Matemática. Neste cotejo, ele mostra a mudança no estatuto de determinados conhecimentos matemáticos ao longo do tempo. Essa separação que ele apresenta pode ser mais visível do ponto de vista histórico, contudo, na sala de aula, ela é mais sutil, conforme esclarece Pais (2002, p. 74) :

> Na classificação das situações didáticas é preciso destacar que elas, quase sempre, encontram-se fortemente entrelaçadas entre si. A separação proposta serve para operacionalizar uma análise didática e não para induzir uma separação nítida

A devolução e a institucionalização

Como foi visto, duas atividades principais do professor são a devolução e a institucionalização. Na devolução de uma situação adidática, o professor deve não apenas apresentar as regras do jogo, mas também conduzir o aluno a se responsabilizar pelo resultado que deseja atingir. Isso implica no cumprimento de uma parte essencial do contrato didático. Chevallard et al. (2001, p. 218) esclarece que:

> Tradicionalmente, a problemática que engloba a devolução foi analisada em termos de motivação do aluno; as solução preconizadas são, de natureza psicológica, psicoafetiva ou pedagógica. Brousseau propõe que a análise parta, ao contrário, da situação adidática e do conhecimento especifico C que a situação caracteriza.

Na institucionalização, o saber passa para o aluno de um nível subjetivo para o status de conhecimento e, nesse caso, adquire uma dimensão histórica e cultural. Para Pais (2002, p.74), essa situação se justifica: "pela exigência de fixar, por uma convenção, o estatuto de um saber, pois certas situações exigem o reconhecimento externo, capaz de lhe conferir uma validade social, mesmo que seja no espaço da sala de aula". Esse tipo de situação ocorreu no final de cada sessão, quando o professor levantou as soluções encontradas e os conceitos construídos por cada dupla. O professor fez uma comparação entre conceitos divergentes, levando ao debate, e, por fim, conduziu os alunos ao saber socialmente aceito.

Nas situações didáticas, um ponto importante é a interação, bastante discutida por Vigotsky, que a considerava um meio de promover a aprendizagem. A interação está presente nas situações adidáticas de formulação e validação, ocorrendo, ainda, na institucionalização. No nosso trabalho, a seqüência didática foi dividida em duas fases. Na primeira, os alunos foram agrupados em duplas e, na segunda, em equipes de até 6 alunos. Essa distribuição permitiu a interação proposta por Brousseau. A teoria das situações didáticas de Brousseau vem sendo empregada em diversas pesquisas (ARAÚJO, 2000; MABUCHI, 2000; PATAKI, 2003; PRETTI, 2002; SOUZA, 2001).

Na figura 18, procuramos sintetizar os conceitos vistos nesta seção, destinada ao saber pedagógico.

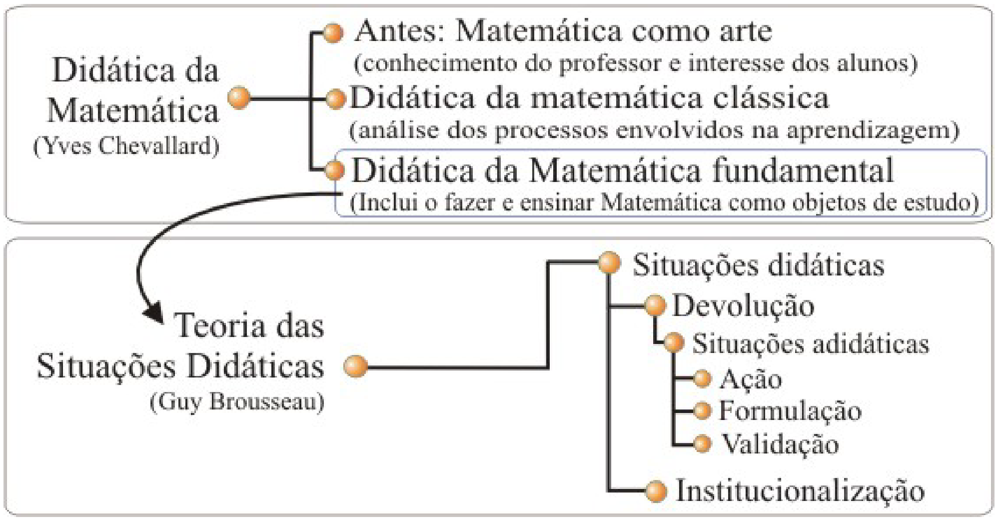


Figura 18 – Síntese da seção "saber pedagógico"

A utilização de recursos, como uso de instrumentos tradicionais de desenho (tais como régua e compasso) e de *softwares* de Geometria Dinâmica, pode auxiliar na construção de um ambiente rico para o emprego das situações didáticas. O emprego desses recursos na seqüência será discutido na próxima seção.

2.3 RECURSOS NO ENSINO DE GEOMETRIA

Nesta seção apresentaremos os recursos utilizados na primeira fase da seqüência: os instrumentos de desenho tradicionais e o recurso informático.

2.3.1 Os instrumentos de desenho tradicionais

As construções com régua e compasso tiveram uma enorme importância no desenvolvimento da Matemática grega. No lugar de utilizar uma régua graduada e outros instrumentos auxiliares de desenho, os gregos restringiam-se, nas construções geométricas, ao uso de apenas compasso e régua sem graduação. Essa prática, segundo Keihn e Retz (1992), foi atribuída a Platão (390 a.C.). A restrição, segundo Milies e Bussab (1999, p.37), "possibilitou o desenvolvimento de um extraordinário espírito e de regras de raciocínio muito precisas". O uso desses instrumentos é observado nos três primeiros postulados dos Elementos, neles "Euclides enuncia as três construções permitidas na Geometria: (1) traçar uma reta por dois pontos; (2) prolongar uma reta limitada continuamente segundo uma reta; (3) descrever um círculo com qualquer centro e qualquer distância" (KEIHN e RETZ, 1992, p.29). Wagner

(1993) esclarece que, na Grécia antiga, a palavra número era aplicada apenas para inteiros. A fração era uma razão entre números e foi representada por meio de segmentos. Neste período, resolver um problema era o mesmo que construir. Uma equação do tipo ax = bc poderia ser resolvida encontrando a altura x de um retângulo de base a que tivesse a mesma área de um retângulo de dimensões b e c. Durante muito tempo, os instrumentos referidos foram utilizados em demonstrações e no desenvolvimento do raciocínio geométrico. Atualmente, eles são recomendados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, no Ensino Fundamental, para o seu uso no desenvolvimento do raciocínio geométrico. Os PCN, quando tratam dos procedimentos, assinalam:

> Os procedimentos não devem ser encarados apenas como aproximação metodológica para aquisição de um dado conceito, mas como conteúdos que possibilitem o desenvolvimento de capacidades relacionadas com o saber fazer, aplicáveis a distintas situações. Esse "saber fazer" implica construir as estratégias e os procedimentos, compreendendo os conceitos e processos neles envolvidos. Nesse sentido os procedimentos não são esquecidos tão facilmente. Exemplos de procedimentos: resolução de uma equação, traçar uma mediatriz de um segmento com régua e compasso, cálculo de porcentagens etc (BRASIL, 1998, p.50)

No exemplo dado, ao construir uma mediatriz, quando limitado a régua e o compasso, o estudante pode, com essa atividade, desenvolver o conceito de lugar geométrico de forma mais efetiva do que simplesmente memorizando definições. Ao utilizar os instrumentos de desenho na construção de homotetia, os alunos poderão explorar as propriedades, compreender relações geométricas que definem a homotetia de forma mais significativa do que simplesmente utilizando procedimentos meramente analíticos. As construções com régua e compasso podem ser usadas também para validar propriedades como as condições para que um triângulo possa ser construído. Esses instrumentos de desenho são recomendados, pelos PCN, para uso no bloco espaço e forma, quando se afirma que:

> O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações (BRASIL, 1998, p.51).

O uso dos instrumentos de desenho também é importante no estabelecimento de relações geométricas com a noção de ângulo, como relação entre raio e corda. Podemos também utilizar o transferidor, que não era utilizado pelos gregos nas construções geométricas, para a demarcação de medidas angulares e, de forma prática, em situações do dia-a-dia como demarcar um terreno. Em nossa seqüência, utilizamos o transferidor para comprovar propriedades da homotetia, como preservar as medidas angulares. Além do uso dos instrumentos de desenho na seqüência didática, utilizaremos recursos computacionais, que oferecem importantes meios para o desenvolvimento do ensino de Geometria.

2.3.2 O uso do computador

O uso da informática no ensino vem evoluindo. O seu uso na sala de aula depende, além de um ambiente com computadores e *softwares* adequados aos fins propostos, da concepção de ensino-prendizagem do professor e do programa que se pretende usar. As teorias de aprendizagem comportamentalista e construtivistas influenciaram a elaboração de *softwares* para o ensino. As teorias comportamentalistas tiveram uma grande influência no ensino através do computador com a instrução programada de Skinner. Moreira (1999) aponta como princípios básicos da instrução programada:

- A divisão do conteúdo a ser ensinado em pequenas e fáceis etapas: com isso, as possibilidades de reforço das respostas consideradas adequadas ao conteúdo ensinado aumentam e a possibilidade de erro diminui;
- O aluno participa de cada etapa e, com isso, aprende melhor;
- O aluno pode verificar a sua resposta imediatamente aprendendo mais;
- Cada aluno tem um tempo próprio, podendo trabalhar mais rápido ou lentamente, de acordo com o ritmo que determinar;
- O programa pode ser testado pelas respostas dos alunos, quando ele apresenta falhas em alguma página, terá repercussão nas respostas dos alunos.

A instrução programada constituiu-se na primeira tentativa do uso do computador voltado para a educação (WEISS e CRUZ, 1999). A idéia de utilização de uma máquina no ensino é bastante antiga. Em 1924, o Dr. Sidney Pressey criou uma máquina para corrigir testes de múltiplas escolhas (VALENTE, 1991). Nos anos 50 e 60, a instrução programada de Skinner foi utilizada de forma impressa, porém, essa metodologia nunca teve grande sucesso. Na opinião de Valente (1991), isso se deveu ao fato de dificuldades na produção do material instrucional e à falta de padronização desse material. Nos anos 60, com o desenvolvimento dos computadores, verificou-se a possibilidade do uso da instrução programada no ensino utilizando o computador, que passou a ser chamada de “instrução auxiliada por computador” ou “computer-aided instruction” (CAI), no Brasil recebe o nome de “programas educacionais por computador” (PEC) (idem). Valente (1991) aponta diversas experiências utilizando o CAI, entre elas, o PLATO. Ela foi desenvolvida no início dos anos 70 pela Control Data Corporation (fábrica de computadores) junto com a Universidade de Illinois. O PLATO foi utilizado em terminais sensitivos ao toque. Na sua versão 4, era formada de 950 terminais, em 140 localidades, com 8.000 horas de material produzido por 3.000 autores. Posteriormente, a disseminação da instrução programada nas escolas foi possível graças ao desenvolvimento dos microcomputadores. Valente (1991) aponta como exemplo de aplicação do CAI os tutorias, exercícios-e-práticas (drill-and-practice). Essa modalidade de *softwares* também foi chamada por Papert (1994) de instrucionista. Ele compara essa tendência a uma outra, proposta por ele e influenciada pelo cognitivismo, em especial pelas idéias de Piaget – trata-se do que Papert chamou construcionismo. Comparando as duas vertentes, Papert (1994, p. 124-125) afirma que:

> A palavra instrucionismo visa significar algo muito diferente da pedagogia, ou arte de ensinar. Ela deve ser lida num nível mais ideológico ou programático como expressando a crença de que a via para uma melhor aprendizagem deve ser o aperfeiçoamento da instrução – se a Escola é menos que perfeita, então sabemos o que fazer: ensinar melhor. O construcionismo é uma filosofia de uma família de filosofias educacionais que nega esta “verdade óbvia”. Ele não coloca em dúvida o valor da instrução como tal. Isso seria tolo: mesmo a afirmativa (endossada, quando não originada, por Piaget) de que cada ato de ensino priva a criança de uma oportunidade para a descoberta, não é um imperativo categórico contra ensinar, mas um lembrete paradoxalmente expressado para mantê-la sobre checagem.

Desta forma, Papert esclarece que o ato de ensinar deveria ser muito mais do que apenas repassar informações para serem armazenadas pelos alunos de modo a responder adequadamente às questões elaboradas para verificar essas informações. Na sua concepção de ensino, Papert valoriza o papel da descoberta, que, para ele, oferece melhores resultados do que apenas aprender pelo ensino tradicional, em que o conhecimento é transmitido sem uma adequada reorganização cognitiva feita pela descoberta e investigação[13]. Para comparar estas duas concepções de ensino, Papert utiliza um provérbio africano: “se um homem tem fome, você pode dar-lhe um peixe, mas é melhor dar-lhe uma vara e ensiná-lo a pescar” (p.125). No ensino tradicional, avalia-se o que os cidadãos precisam conhecer (peixe) e se procura, com

[13] Uma outra forma de ver o construcionismo pode ser com base na teoria das situações didáticas. Nela a descoberta (que faz parte das situações a-didáticas) está inserida dentro de um contexto maior (situações didáticas) em que o professor deve ser também responsável pela escolha adequada das situações que possam conduzir a aprendizagem e junto com o aluno negociar as mudanças de direção tendo em vista ao objetivo maior que é o aprendizado. Essa concepção é desenvolvida nesta dissertação.

base nisso, alimentar as pessoas com o peixe. No construcionismo, considera-se que as pessoas aprendam melhor descobrindo (pescando) “por si mesmas o conhecimento específico de que precisam” (PAPERT, 1994, p. 125). Para pescar, é necessária a utilização de boas linhas e anzóis (por isso, a importância do uso do computador), que devem ser utilizadas em águas adequadas para pesca. Empregam-se, para tanto, materiais e atividades ricas e capazes de se adaptar a mudanças não previstas inicialmente. Esse ambiente rico foi chamado por Papert de “micromundos”. Para a implementação de sua proposta de ensino auxiliado por computador, Papert, em 1968, liderando uma equipe de pesquisadores do Massachsetts Institute of Technology (MIT) de Boston (EUA), desenvolveu uma linguagem de programação chamada de Logo (VALENTE, 1991). O Logo teve um papel importante na divulgação do construcionismo e pode ter influenciado o desenvolvimento de outros programas, como os de Geometria Dinâmica, que surgiram na década de 80.

A Geometria Dinâmica

A idéia de figura dinâmica não é recente[14]. “Ela permite considerar e conceber uma representação de objetos matemáticos abstratos em várias configurações, podendo modificar as suas posições relativas” (BELLEMAIN, 2001, p.1314). Essas modificações são, para os matemáticos, resultantes de uma ação intelectual (BELLEMAIN, 2001). A informática possibilitou a implementação de forma concreta desta concepção por meio dos *softwares* de Geometria Dinâmica que surgem a partir de 1986 (idem). Rodrigues (2002) aponta como principais características deste tipo de *software*:

> A interface é baseada em WIMP[15], com ênfase no estilo de interação em manipulação direta. Os elementos geométricos podem ser transformados de forma interativa, isto é, ao controle do mouse, pelo ato de ‘clicar’ e arrastar, os objetos criados podem ser reescalados, transladados e rotacionados.
> É um sistema baseado em restrições (FOLEY ET AL., 1996; WINROTH, 1999). Uma instância isolada de um objeto geométrico na tela representa uma classe completa de objetos com a mesma definição. Um quadrado na tela é estático, mas se um de seus vértices for movido, ele também mudará de aparência. Mesmo assim, as propriedades da definição de um quadrado serão mantidas, ou seja, todos os lados terão comprimentos iguais e os ângulos medirão 90 graus. Como no mundo físico real, muitos objetos se movem de forma dependente das condições impostas por outros objetos. Conceitos como paralelismo, perpendicularidade e pertinência a

[14] Bellemain, 2001, p.1315 destaca a obra “Éléments de géométrie” do geômetra Aléxis Clairaut, que foi publicada em 1741. Nela “Clairaut evidencia algumas vantagens da consideração das figuras geométricas em movimento, seja para melhor perceber suas propriedades, seja como elemento de prova de teoremas.”
[15] WIMP é uma abreviatura em inglês para janelas, ícones, menus e apontador.

> lugares geométricos, entre outros, permitem a construção de elementos que dependem de regras preestabelecidas.

Bellemain (2001) destaca, como características importantes desses *softwares,* o princípio da manipulação e do estudo das propriedades geométricas, que são invariantes gráficos na manipulação direta. Os invariantes gráficos são as propriedades geométricas de uma determinada figura que permanecem inalteradas após a sua manipulação. Esses recursos constituem ferramentas importantes para a aprendizagem.

A utilização dos programas de Geometria Dinâmica no ensino é feita em torno da problemática desenho-figura (BELLEMAIN, 2001). O desenho consiste nas representações geométricas de uma determinada figura. Ao representarmos uma figura de um pentágono regular através do desenho, estamos apresentando uma das inúmeras possibilidades de representação dessa figura, que possui determinadas propriedades geométricas. À figura do pentágono regular, podemos relacionar infinitas representações gráficas. O que permanecer invariante nessas representações corresponde às propriedades da figura.

A representação gráfica da figura, no quadro ou em um papel, possui alguns problemas. Ela não corresponde exatamente à figura, uma vez que existem limites de precisão. No caso do pentágono, em sua representação, todos os ângulos deveriam possui a mesma medida, o que não ocorre para as representações citadas, pelos limites de precisão desses instrumentos. Nos programas de Geometria Dinâmica, podemos medir distâncias e ângulos obtendo o seu valor com o grau de precisão necessário para conferir as propriedades geométricas das figuras. Um outro problema é o aluno considerar uma representação gráfica (desenho) de uma figura como a própria figura. É necessário, pois, distinguir a figura que corresponde ao objeto teórico do desenho que é o objeto material. Bellemain (2001, p.1325) esclarece que:

> Uma das dificuldades do ensino da Geometria é que o desenho é, em geral o obstáculo de raciocínio do aluno, enquanto o professor aborda a figura. Em particular, é difícil conduzir o aluno a ter uma leitura geométrica do desenho (DUVAL, 1988; MESQUITA, 1989; PADILHA, 1990). Uma das contribuições da Geometria Dinâmica ao ensino vem assim do fato que ela disponibiliza representações gráficas de objetos geométricos que aproximam o objeto material da tela do computador (desenho) do objeto teórico (a figura). Ela favorece o desenvolvimento para o sujeito de uma leitura geométrica do desenho. Consideramos então que a manipulação pelo aluno das representações gráficas da Geometria Dinâmica deve conduzi-lo a construir conhecimentos geométricos.

Não pretendemos, neste trabalho, determo-nos em um estudo mais detalhado da Geometria Dinâmica. No entanto, a sua aplicação no ensino conduz a um repensar o papel do professor na sala de aula. A idéia do professor como transmissor de conhecimentos levaria a um uso reduzido e limitado dessa poderosa ferramenta. A atuação do professor como alguém que propõe situações de aprendizagem em que o aluno, através da manipulação dos objetos geométricos na tela do computador, percebe respostas, formula hipóteses e procura validá-las (conforme ocorre nas situações adidáticas propostas por Brousseau, 1986) oferece situações ricas para o crescimento do aluno e de uma maneira inovadora.

Dentre os diversos programas de Geometria Dinâmica, escolhemos o Tabulae. Esse programa, além de possuir um custo mais acessível do que outros programas de Geometria Dinâmica, oferece vários recursos que se revelam importantes instrumentos na construção do conceito de homotetia. Por uma questão de custo e pelos recursos oferecidos pelo *software*, escolhemos o Tabulae para ser usado na seqüência didática.

O *software* Tabulae

O nome “tabulae” era dado a um conjunto de tábuas de ceras que eram usadas pelos antigos gregos e romanos para rabiscar diagramas e mensagens (ALVES e SOARES, 2003). Alves e Soares apontam como algumas das principais razões para a criação desse programa – considerações de custo e de disponibilidade para os professores que se formam no curso de Licenciatura Plena em Matemática e que fazem especialização. As considerações de custo foram as que inicialmente nos conduziram a adotar esse *software* na seqüência didática.

Esse programa oferece uma interface amigável, possuindo muitos recursos que se tornam facilitadores do desenvolvimento cognitivo dos alunos. Apresentamos, a seguir, alguns problemas no ensino de Geometria e as vantagens da adoção desse *software* para minimizá-los.

A problemática desenho/figura[16]

[16] O termo figura também é usado nas transformações geométricas como conjunto domínio de uma transformação (ver página 14).

Em uma pesquisa realizada por Gravina (1996) com alunos do primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, pode-se perceber os problemas acarretados pela relação entre desenho e figura. Em uma questão (ITEM 3), pedia-se para traçar a altura dos triângulos relativa aos lados destacados, indicados na figura 19. O índice de acerto foi de 90% (triângulo 1), 17% (triângulo 2) e 49 % (triângulo 3).

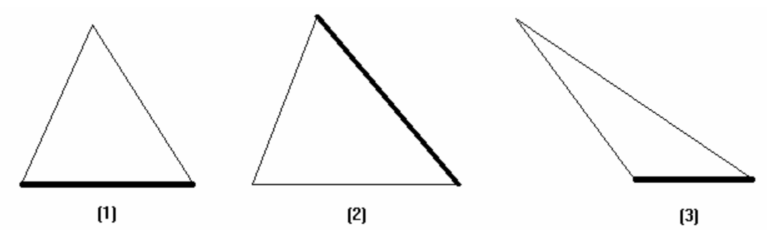


Figura 19 – Questão sobre altura dos triângulos

Esses resultados apontam para uma falha na formação do educando, que consegue identificar a altura do triângulo quando relativa a um lado na horizontal, conforme apresentado em muitos livros. Ao fazer isso, ele percebe as características do desenho como propriedades da figura e, quando diante de soluções de problemas não prototípicos, é incapaz de oferecer uma resolução adequada.

Uma grande vantagem do uso de programas de Geometria Dinâmica, como o Tabulae, é a sua concepção, que permite a criação de desenhos que podem ser manipulados mantendo as características que definem a sua construção. Ao construímos um triângulo retângulo com o Tabulae usando a ferramenta "ponteiro" (com o auxílio do mouse), podemos movimentar o triângulo, alterar a posição dos vértices, de modo a manter as características da figura triângulo retângulo, modificando, apenas, a representação do desenho. O objeto representado ganha dinamismo.

O Tabulae oferece, além das construções primitivas como ponto, reta, e derivadas (segmento, circulo, polígono etc.), a construção de outras primitivas geométricas que são geradas a partir destas, como uma reta paralela (a uma outra reta, segmento, lado de uma linha poligonal), uma reta perpendicular, mediatriz, bissetriz. Com o uso dessas ferramentas, podemos ter dois tipos de desenho: os com características relativas a uma figura como polígono de três lados e os com características específicas que permitem compreender melhor uma dada figura, como um triângulo retângulo.

Ao construirmos um triângulo utilizando a ferramenta “triângulo”, teremos apenas um triângulo qualquer como resultado. Ao construirmos uma reta e, por ela, traçarmos uma perpendicular, teremos uma característica que se mantém com a manipulação. Ao deslocarmos a reta inicial, o programa faz com que a reta perpendicular movimente-se de modo a permanecer ortogonal à primeira. Ao construirmos um triângulo usando como um dos vértices o encontro de duas retas perpendiculares e um ponto de cada reta, teremos como resultado um triângulo retângulo. Se movimentarmos esse triângulo, as características que definem a figura do triângulo retângulo permanecerão, mudando apenas o desenho inicial. O mesmo pode ser feito com a construção da altura de um triângulo. O aluno tem a possibilidade de, ao construir uma altura de um triângulo (utilizando as propriedades que a definem), explorar essa propriedade em uma infinidade de representações em tempo real resultantes da manipulação do triângulo original.

As características do software que foram apresentadas são um poderoso recurso para o estudo das transformações geométricas, como as homotetias. Tomemos, como exemplo, a representação de um pentágono e da sua imagem, transformada por homotetia, no Tabulae. Ao modificarmos a forma do pentágono original, a sua imagem muda também, preservando as características de uma transformação por homotetia. Essas propriedades podem ser investigadas utilizando as ferramentas do programa conduzindo o aluno à descoberta dessas propriedades.

O uso de recursos específicos na construção de uma figura transformada por homotetia

Além das construções mais simples (como retas paralelas, perpendiculares etc), podemos também utilizar instrumentos voltados a construções de figuras resultantes de transformações isométricas (rotação, translação, simetria central, simetria axial) e homotéticas. Para utilizarmos essas ferramentas, é necessário empregar as propriedades dessa transformação. Usando a ferramenta “homotetia”, é necessário definir o centro, a figura e a razão[17] de homotetia para obtermos a imagem. O mesmo ocorre com as demais transformações. O aluno pode utilizar essas ferramentas para percepção das relações entre o quadro numérico e o geométrico. Por meio da manipulação do número apresentado na tela do programa, que indica a razão de homotetia, é possível perceber que, quando o número é menor do que 1, o desenho

[17] A razão ao contrário da grandeza comprimento não têm unidade. Ao usar o programa isto pode ser confirmado pelo software e explorado em uma situação a-didática.

é reduzido; quando é igual a 1, ele possui a mesma dimensão da figura original; e, quando é maior que ele, é ampliado. Sem uma manipulação prévia, ele pode também chegar a essas situações. Considere-se a hipótese formulada: ao mudar a razão de homotetia de uma figura que foi ampliada e cuja razão é igual a 2 para 0,5 a imagem será reduzida? Diante da hipótese, o aluno, com base na mudança do valor da razão indicada na tela do Tabulae, verificará se a imagem resultante na tela do programa pode ser comprovada ou não (validação). A manipulação pode levar também à construção errônea de conceitos. Decorre daí a necessidade da institucionalização quando os conceitos construídos são discutidos com outros alunos e o professor.

A problemática grandeza

As grandezas têm um papel fundamental de ligação do quadro geométrico com o quadro algébrico. Percebemos que, muitas vezes, essa ligação não fica muito evidente. Quando um aluno afirma que um triângulo possui como medida dos lados 3, 4 e 5, não está demonstrando a compreensão que os números isolados não podem representar a grandeza comprimento. Nesse sentido o Tabulae oferece uma importante ferramenta para explorar as grandezas. Este software possui recursos para medição de ângulo, perímetro, segmentos, distância entre pontos. As medidas são sempre expressas acompanhadas da unidade.

As ferramentas “medir ângulos” e “medir comprimento” podem ser usadas para explorar as propriedades das transformações por homotetia. Ao construirmos uma imagem obtida por meio de uma transformação homotética, medirmos os lados da figura imagem e dividirmos pelas medidas dos lados homólogos da figura objeto, teremos uma razão constante (razão de semelhança) que muda ao ampliarmos ou reduzirmos a figura imagem.

A ferramenta esconder/mostrar

O Tabulae oferece um outro importante instrumento, que é a possibilidade de esconder algumas representações geométricas, que podem se tornar invisíveis na tela do computador. Com isto, existe a possibilidade de levar os alunos a deduzirem propriedades de uma dada figura para, só depois, utilizarmos o termo associado àquela figura. Tomemos o exemplo da altura de um triângulo. Ao pedir para um aluno observar quais as características de um segmento que foi previamente construído como altura de um triângulo, ele vai observar, pela manipulação no triângulo, que, independentemente da posição em que o triângulo esteja representado, o segmento vai sempre partir do mesmo vértice e estar em uma perpendicular (não visualizada) à reta suporte (não visualizada) do lado oposto ao vértice.

Esse recurso foi aplicado na seqüência didática quando, ao comparar uma figura transformada por homotetia com a sua imagem, o aluno, sem visualizar as construções geométricas que geraram essa transformação, identificou as características invariantes dessa transformação, com recurso à manipulação da imagem e da figura.

2.4 O ENSINO DE HOMOTETIA

Nas etapas anteriores da fundamentação teórica, apresentamos noções de homotetia, uma introdução às teorias pedagógicas e como as utilizamos nessa pesquisa; depois, passamos ao uso dos recursos no ensino. Nesta última etapa, contemplaremos, de forma bastante sintética, algumas mudanças epistemológicas/didáticas na Geometria e, mais especialmente, nas transformações geométricas, com foco na homotetia. Para compreender esse processo, apresentamos, inicialmente, as etapas do desenvolvimento geométrico estudadas por Piaget e Garcia (1983 apud SILVA 2003). Essas fases são denominadas "intrafigural", "interfigural" e "transfigural". Piaget e Garcia utilizam essas fases para marcar o desenvolvimento da criança e fazem uma comparação com o desenvolvimento histórico das noções geométricas. Essas fases podem corresponder, historicamente, aos períodos (SILVA, 2003, p.21):

> Dos geômetras gregos até o século XVIII;
> Que compreende os primórdios da Geometria projetiva até a época de Charles e Poncelet;
> Que se inicia com a concepção global da Geometria, formulada por Felix Klein.

Na fase intrafigural são observadas apenas as relações internas das figuras. Não se consideram as relações das figuras no espaço, tampouco as transformações das figuras (SILVA, 2003). Nessa fase, ao se estudar uma figura, são discutidas as suas propriedades, como medida dos lados, ângulos internos etc. Pode-se, ainda, elaborar comparações entre as relações internas entre as figuras, como as usadas para estabelecer relações de semelhança e congruência.

Na fase interfigural, a posição da figura se torna relevante. Ao compararmos duas figuras, passamos a relacionar a posição da figura objeto com a figura imagem. Nessa fase, temos a construção das noções projetivas como um círculo e a sua projeção em forma elíptica (idem). Ela contempla as transformações como as isometrias e homotetias.

Na etapa transfigural, a Geometria passa a ser vista em função do tipo de espaço[18] e do grupo a que pertence a transformação[19]. Ela toma como referência a proposta elaborada por Felix Klein, em seu Programa Erlanger (SILVA, 2003). Podemos ver também essas etapas da evolução geométrica apresentada por Lemonidis (1991, p. 300, tradução livre):

> 1) Relações intrafigurais, quer dizer, propriedades a respeito das configurações na ausência da idéia de transformar uma figura em uma outra; tem-se, então, a idéia de uma correspondência entre figuras, mas não a de transformação de uma figura;
> 2) Transformações geométricas apreendidas como ferramentas; uma transformação geométrica é percebida como uma aplicação de um conjunto de pontos do plano nele mesmo;
> 3) Transformações geométricas compreendidas como objetos matemáticos: a pesquisa ou a busca da transformação resultante da composição de duas ou mais transformações é típica dessa concepção.

Lemonidis ressalta que, ao pularmos a primeira etapa, estamos criando problemas no ensino de Matemática. Esses problemas podem se constituir como obstáculos ao aprendizado. Lemonidis esclarece que, no ensino francês, esse obstáculo se torna mais evidente nas transformações por homotetia, uma vez que noções como de simetria são estudadas pelos alunos bem antes do homotetia e em um nível mais elementar, a partir da 6ª série do collège (equivalente à 5.ª série do ensino fundamental no Brasil).

Para evitar esses obstáculos, consideramos necessária a passagem pelas fases propostas por Piaget. Na pesquisa desenvolvida por Lemonidis (1991), podemos observar uma preocupação de se explorar, no Lycée na França (equivalente ao Ensino Médio no Brasil), o estudo da homotetia nas fases interfigural e intrafigural. Essa preocupação está presente em pesquisas mais recentes, como as desenvolvidas no Brasil por Pretti (2002), Silva (2003) e Mabuchi (2000). Em nossa seqüência didática, procuramos, através da comparação de figuras geométricas, o estabelecimento das relações intrafigural e interfigural.

Um outro obstáculo para o desenvolvimento das homotetias que não está presente nas isometrias é a ligação entre os aspectos figurativos e numéricos. Na homotetia, o centro de

---

[18] Espaço da Geometria afim, da Geometria euclidiana, da Geometria projetiva, da Geometria hiperbólica etc.
[19] Isto foi discutido na página 22.

homotetia e a posição da figura orientam o sinal (-/+) da transformação (ver página 26). Isso requer uma maior complexidade para a sua compreensão do que nas transformações isométricas. Lemonidis (1991, p.301, tradução livre) esclarece como esse obstáculo se desenvolve ao longo do tempo:

- Durante o período grego, as relações de grandeza eram consideradas como distintas dos números (isto é patente nos "Elementos"). Assim, Euclides trata da "razão" das grandezas (relação figurativa) no seu livro V e do quociente de inteiros (relação numérica), no seu livro VII, consagrado à aritmética. Não se encontram definidas por Euclides, de maneira geral, as operações como adição ou a multiplicação das razões.
- Durante toda a Idade Média, árabe ou européia, têm-se uma busca para numerização das razões pela prática das proporções. Foi necessário esperar-se pelo final do século XVI, com S. Stevin (1585), para a unificação do conceito de número positivo (com os desenvolvimentos decimais).
- A ambigüidade em relação aos números negativos continua até o momento em que a Geometria orientada (PONCELET 1864) considera o sentido do segmento, fazendo corresponder um sinal a um número que mede o comprimento de um segmento sobre um eixo. A natureza dos números negativos ficou por muito tempo obscura na natureza. O seu estatuto não era justificado. Uma testemunha confirma a desconfiança que Lazere Carnot demonstrou em relação aos números negativos na sua obra Geometria de Posição (1803). Sobre as influências das desconfianças de Lazare Carnot em relação aos números negativos, Poncelet, em 1864, vai elaborar a Geometria orientada. A fórmula de Chasles, hoje considerada como uma relação muito simples, trouxe um progresso considerável.

O ensino das transformações geométricas por homotetia, influenciado pelas mudanças no campo epistemológico, sofre alterações. Lemonidis (1991, p.300) descreve essas mudanças no ensino:

- O ensino tradicional segue a tradição da Geometria euclidiana. A semelhança é definida a partir das propriedades das figuras semelhantes e de casos de semelhança. Ao consultamos um programa desse período, constatamos que o capítulo intitulado "semelhança" ou "triângulos semelhantes" está apresentado segundo uma ordem analógica aos Elementos de Euclides. Essa definição da semelhança entre dois triângulos é apresentada de uma maneira intrafigural, quer dizer, igualdade dos ângulos e igualdade da relação entre os lados homólogos. Depois, nós encontramos, também, o caso de semelhança de dois triângulos.
- Apresentação sobre forma de grupos e utilização das transformações como ferramentas funcionais no ensino: bem antes dessa época, Julius Petersen (1866) foi um dos precursores do uso das transformações como ferramentas funcionais para a resolução de problemas geométricos. Depois do ensino tradicional, nós passamos a um período durante o qual as transformações são apresentadas sobre a forma de grupos, sobre a influência do Programa de Erlanger.
- As "Matemáticas Modernas" no ensino: o conteúdo matemático no ensino de Geometria muda completamente. Aquele quase exclusivamente baseado nos princípios da Geometria afim, que dispõem de uma ferramenta poderosa e prática: a álgebra linear. A homotetia é apresentada de uma maneira estrutural, seja como uma aplicação linear, seja como aplicação afim, sem se preocupar com figuras geométricas.

- O ensino atual: agora, não há mais interesse em uma determinação estrutural da homotetia, definindo o plano no qual ela opera; atingimos mais o conteúdo da homotetia pela apresentação dessa noção em dois contextos matemáticos diferentes, o vetorial e o analítico. As figuras geométricas estão de volta ao ensino.

Essas mudanças se refletem na pesquisa desenvolvida por Lemonidis (1991) sobre o estudo da homotetia, que passa a valorizar a exploração das figuras geométricas em diferentes combinações para dar sentido à idéia de homotetia. A preocupação na exploração geométrica está presente em diversas pesquisas no mundo (LEMONIDIS, 1991). Ela está presente em pesquisas mais recentes, como as desenvolvidas no Brasil por Araújo (2000), Pretti (2002), Silva (2003) e Mabuchi (2000).

Essas mudanças de orientações no ensino podem ser vistas no Brasil. Na década de 60, as transformações geométricas começam as ser propostas para o ensino em diversos estados. São efetivamente implantadas na década de 70, quando as mudanças são adotadas em muitos livros didáticos. Analisando documentos, do período, Mabuchi (2000, p.74) destaca que:

> a abordagem das transformações geométricas foi feita a partir da idéia de funções aplicadas a pontos do plano, dando ao aluno uma idéia mais teórica e abstrata do que intuitiva desses conceitos. Tal estrutura no ensino era muito precoce para os estudantes do ensino fundamental

Um outro problema observado nos guias curriculares das décadas de 70 e 80 é a utilização da homotetia para a construção da noção de semelhança de triângulos. Ao analisar o guia curricular para o ensino do 1.º grau – especificamente, 8.ª série do Ensino Fundamental – para o estado de São Paulo de 1975, Mabuchi (2000, p.72) destaca que "nesta série, a homotetia permitia a construção de noções básicas para a idéia de semelhança de triângulos". Sobre a proposta publicada pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo, em 1986, Mabuchi (2000) esclarece que ela se limitava a introduzir noções de simetria em figuras planas e não planas. Dessa forma, a homotetia deixava de ser contemplada. Procuramos destacar, com isso, a existência de uma restrição às possibilidades de aplicação da homotetia no ensino. Com os PCN, lançados na década de 90, essa perspectiva muda. Conforme destaca Mabuchi (2000, p. 81):

> As atividades que envolvem ampliações e reduções de figuras levam o aluno a relacionar comprimentos para observar a proporcionalidade entre eles e com a noção de homotetia desenvolve-se a de figuras semelhantes. Introduzidas por meio das transformações geométricas, as noções de congruência e de semelhança de figuras são mais amplas do que as estabelecidas para triângulos.

Essas mudanças são importantes para que se ampliem, no ensino, as possibilidades de aplicação deste conceito. Para isso, torna-se necessária a utilização de várias configurações com diferentes figuras geométricas no ensino de homotetia. Essa forma de ensinar tem como objetivo melhorar a percepção do aluno acerca do conceito. Tomemos como exemplo dos efeitos dessa antiga diretriz, um teste aplicado por nós em uma turma do sexto período do curso de Licenciatura em Matemática. Nesse teste, apresentamos alguns quadriláteros e perguntamos se seria possível aplicar o conceito de semelhança. Durante o teste, dois alunos chamaram a atenção para essa questão, afirmando que ela continha uma "casca de banana", pois semelhança só se aplicava a triângulos. O estudo de diferentes formas de apresentação de um conceito é importante, para se evitarem limitações na formação do aluno. Em sua pesquisa, Lemonidis (1991, p.297-298, tradução livre) relata mudanças no Ensino Médio (Lycée) na França:

> os programas "Matemática moderna" dos anos 70 para seções científicas do Lycée apresentam a homotetia como uma aplicação linear, relacionada com a idéia geral de isomorfismo de espaços vetoriais, e como uma aplicação afim em ligação estreita com as estruturas do plano. Isso sem se preocupar com figuras geométricas. [...] Os programas franceses dos anos 70 são reduzidos em relação àqueles das seções científicas. Porém, a homotetia não desaparece, ao contrário, mesmo, o estudo é reforçado em certos aspectos; já que a diferença entre o quadro vetorial e o quadro afim não está mais na moda, se conserva-se a ligação da homotetia com a multiplicação de um vetor por um número real; os efeitos da homotetia sobre as distâncias ou as áreas, assim como as construções são explicitamente mencionadas. Os textos franceses de 1990 diminuem a ligação com o produto de um vetor por um número conservando apenas um só sentido a essa ligação. [...] Mas o estudo é reforçado no que diz respeito às configurações, uma vez que se especifica que se fará, em primeiro lugar, estudar as transformações sobre as figuras. Isso é nitidamente mais estimulante que o tema por nós assinalados em programas anteriores. Com efeito, o que aparece a um momento dado não é um conteúdo que parece ter sido proposto anteriormente, é um outro nível, algo que não era de maneira nenhuma ensinado.

Essa mudança de direção no ensino da homotetia pode ser observada em pesquisas na década de 80, apontadas por Lemonidis (1991, p.299):

> As pesquisas didáticas, as mais recentes, a respeito das transformações, são, de fato, orientadas em direção aos estudos das concepções dos alunos ligadas às características das figuras geométricas em jogo. Por exemplo, K. Hart e D. Kuchmann (1981) identificaram, nos alunos ingleses de 11 a 16 anos, regularidades nos processos de construção, à mão livre, de imagens de figuras dadas. Nós podemos citar igualmente os estudos feitos sobre a simetria ortogonal: R. Grãs (1983), D. Grenier, C. Laborde (1988), D. Grenier (1988) e T. Bautier (1986).

A ênfase na exploração das figuras geométricas e como as transformações incidem sobre elas se refletem em pesquisas mais recentes no Brasil, como as dissertações de mestrado desenvolvidas por Araújo (2000) sobre simetria de rotação aplicada à 6.ª série do Ensino Fundamental; por Mabuchi (2000), sobre Geometria das transformações aplicada a professores estaduais com formação em Ciências, que complementavam a sua formação Matemática; por Pretti (2002), que estudou as transformações geométricas com ênfase no estudo da simetria aplicada à formação de professores; por Silva (2003), ao enfocar, na primeira série do Ensino Médio, as transformações isométricas.

Em nossa pesquisa, que trata da homotetia, seguimos a perspectiva que enfatiza o estudo figurativo, já explorado por Lemonidis (1991) em sua pesquisa sobre homotetia aplicada na primeira série do Ensino Médio na França. Destacamos, a seguir, alguns pontos importantes que foram desenvolvidos na pesquisa de Lemonidis e que se configuram como sugestões para o ensino da homotetia:

- A necessidade da exploração prévia dos diferentes tipos de figuras que podem representar uma transformação por homotetia;
- A forma como é introduzida no ensino "clássico" a noção de homotetia é figurativamente pobre e tem início com a definição de dois pontos homotéticos sobre uma reta. Essa situação pode ser trabalhada como um caso particular em um corpo de situações possíveis;
- Valorização das organizações perceptivas espontâneas (observação visual do aluno);
- O início do experimento apresenta as características das figuras homotéticas para, depois, introduzir-se o aspecto numérico.

Esses aspectos foram levados em conta na construção da nossa seqüência didática, porém, ao contrário da pesquisa mencionada, utilizamos um poderoso instrumento para o ensino de Geometria, que é a Geometria Dinâmica. Ela permite uma exploração mais rica em interações e uma resposta imediata, por meio do *software*, de algumas das especulações formuladas pelos alunos. Destacamos também, na nossa proposta, a utilização de elementos das teorias das situações didáticas.

3 METODOLOGIA

Participaram desta pesquisa alunos do 6º período do Curso de Licenciatura em Matemática da UFRPE, matriculados na disciplina Desenho Geométrico, oferecida no primeiro semestre de 2004. Conforme descrevemos na fase de Experimentação (p. 90), dos 30 alunos presentes no início da disciplina, apenas 6 participaram de todas as etapas (que incluíam 2 aulas aos sábados) e, por isso, foram selecionados para a análise dos resultados. A metodologia desta pesquisa baseou-se numa adaptação da concepção de engenharia didática proposta por Artigue (1992). No primeiro momento, fazemos uma breve introdução à engenharia didática e, depois, apresentamos as quatro fases da engenharia didática. Em cada fase, realizamos uma breve introdução à concepção de Artigue, sendo seguida pela forma como estruturamos a pesquisa. Por último, apresentamos o cronograma indicando como ela foi organizada ao longo do tempo.

3.1 A ENGENHARIA DIDÁTICA

Segundo Artigue (1992), o conceito de engenharia didática foi incorporado ao de didática da Matemática no início dos anos 80. Esse termo foi utilizado para rotular a forma do trabalho didático. Para isso, foi feita uma comparação com o trabalho do engenheiro, que utiliza os conhecimentos da ciência para lidar com tarefas mais complexas do que aquelas simplificadas da ciência, conforme ressalta Artigue (1992, p. 41, tradução livre):

> Nós podemos comparar o trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto particular, baseia-se em conhecimentos científicos sobre o tema, aceita a verificação científica, mas, ao mesmo tempo, tem que trabalhar sobre objetos mais complexos que os objetos simplificados da ciência.

Artigue (1992) esclarece que a noção de engenharia é empregada, posteriormente, em pesquisas que envolvem duas questões fundamentais: “as relações entre pesquisa e ações no sistema de ensino” e “o papel que deve ser desempenhado pela seqüência didática na sala de aula, dentro das metodologias da pesquisa didática” (p.41, tradução livre). Nesta pesquisa, deter-nos-emos na segunda, que trata do papel da seqüência didática.

Artigue (1992) aponta como características gerais da engenharia didática:

- Ser um esquema experimental baseado na seqüência didática, ou seja, baseado no desenho, na produção, observação e análise das seqüências de ensino;
- Possuir diferenças na forma de registro e nos métodos de validação usados. As pesquisas que empregam a experiência na sala de aula utilizam uma abordagem comparativa com validação externa. Nesses tipos de pesquisa, utiliza-se uma comparação estatística do desempenho de grupos experimental e de controle. Diferentemente disso, a engenharia didática possui uma validação interna, resultante da comparação entre a análise a priori e a posteriori;
- Apresenta inúmeros objetos de pesquisa, como: a aprendizagem de um conceito; aprendizagem de métodos; aplicação de estratégias didáticas globais etc. Em nossa pesquisa, trabalharemos com dois objetos: (1) a construção do conceito de homotetia, através de uma seqüência didática que utiliza elementos da teoria das situações didáticas de G. Brousseau, e (2) a mudança na concepção do processo de ensino aprendizagem, resultante da aplicação dessa seqüência.

Segundo Artigue (1992, p.45, tradução livre) “O que é, portanto, notável na engenharia didática não são seus objetivos de pesquisa, e sim, as características do seu funcionamento como metodologia”. Como metodologia, ela pode ser empregada em diferentes pesquisas e com objetivos diferentes. Como veremos a seguir, a engenharia didática constitui uma metodologia de pesquisa que se diferencia de outras pela sua forma de validação.

A engenharia didática se divide em quatro fases (ARTIGUE, 1992, tradução livre):

- Análises preliminares;
- Concepção e análise a priori;
- Experimentação;
- Análise a posteriori e validação.

3.1.1 Análises preliminares

Essa primeira fase é necessária na construção da seqüência didática. Nela, toma-se por base um conhecimento teórico já existente na área de domínio da seqüência didática. Ela é também baseada em um certo número de análises preliminares mais freqüentes (ARTIGUE, 1992, p.46, tradução livre):

> Análise epistemológica dos conteúdos de ensino;
> Análise do ensino usual e os seus efeitos;
> Análise das concepções dos estudantes, dificuldades e obstáculos que caracterizam o desenvolvimento delas;
> Análise do campo de limites no qual a produção didática efetivamente ocorrerá.

Nesta dissertação, tratamos do plano epistemológico quando apresentamos de forma introdutória, na fundamentação teórica, o saber matemático (homotetia) e também quando expomos a evolução dos conhecimentos geométricos e sua implicação no ensino (ver páginas 55-60).

A análise didática foi feita na fundamentação teórica, sendo complementada por informações que constam na introdução, e considera os seguintes aspectos:

- As deficiências dos professores de Matemática no ensino de Geometria (p.16-17);
- As mudanças no ensino de Geometria e, em especial, das homotetias associadas às mudanças no plano epistemológico (p.16-20 e p.58-64);
- As atuais propostas para o ensino deste conteúdo pelo MEC (p.18 e P.23);
- A necessidade de uma formação docente que combine o conhecimento matemático a uma concepção pedagógica contemporânea (p. 18-19 e p.33);
- As teorias de aprendizagem e a sua influência no ensino de Matemática (p.34-38);
- As mudanças na didática da Matemática, a teoria das situações didáticas e como a utilizamos em nossa seqüência (p.38-49);
- As ferramentas utilizadas no ensino de Geometria e a sua importância no processo de ensino-aprendizagem (p.49-64).

A análise das concepções dos estudantes foi feita com recurso a dois pré-testes. O primeiro tratava de avaliar a concepção de ensino-aprendizagem dos alunos, e o segundo avaliava as concepções prévias sobre homotetia e noções ligadas a esse conceito. A seguir, apresentamos os dois pré-testes, com os respectivos resultados, iniciando pelo que trata da concepção de ensino-aprendizagem. Eles foram importantes no desenvolvimento da próxima etapa da engenharia didática (análise a priori).

Pré-teste sobre a concepção de ensino-aprendizagem

O pré-teste sobre a concepção de ensino-aprendizagem é importante para justificar a necessidade da segunda parte da seqüência, em que os alunos darão aulas sobre homotetia e o pesquisador avaliará os efeitos da primeira parte da seqüência sobre essa aula (se os alunos não possuíssem uma concepção de ensino-aprendizagem que precisasse ser aperfeiçoada, essa parte da seqüência não faria sentido).

O pré-teste sobre a concepção de ensino-aprendizagem possui 6 questões. A primeira é aberta, e as outras 5, semi-abertas. Os resultados do pré-teste e do pós-teste, que tratam da concepção de ensino-aprendizagem, foram agrupados em três categorias: concepção tradicional de ensino, concepção intermediária e concepção construtivista. No Quadro 4, apresentamos um resumo das categorias e das pontuações por categoria.

Quadro 4 – Resumo das categorias e das pontuações.

CONCEPÇÃO DE ENSINO	VALOR P/ QUESTÃO	TOTAL DO TESTE	
Tradicional	1	6	Valor mínimo
Intermediária	2	12	Valor médio
Construtivista	3	18	Valor máximo

Na categoria tradicional, foram classificadas as respostas que se enquadram no que chamamos, na fundamentação teórica, de “ensino tradicional”. Na categoria construtivista, foram agrupadas as respostas que indicavam uma concepção de ensino-aprendizagem influenciada pelas teorias de aprendizagem construtivistas e, na categoria intermediária, ficaram as respostas que indicavam uma valorização de elementos das duas tendências, estando numa fase intermediária.

Na primeira questão do pré-teste, por meio de uma pergunta aberta, solicitamos que o aluno descrevesse uma aula. Com base nessa descrição, procuramos identificar em qual das categorias ele está incluído. Em cada uma das demais questões, apresentamos duas afirmações, associadas a uma concepção de ensino tradicional ou construtivista. Solicitamos aos alunos que marcassem a alternativa que consideravam mais adequada e justificassem a sua escolha. Dessa maneira, apesar de existirem apenas duas opções de resposta, a justificativa poderia indicar características que poderiam enquadrar a resposta do aluno em uma concepção intermediária ou na concepção correspondente à outra, que não assinalada pelo aluno. No anexo A, apresentamos esse pré-teste.

Resultados pré-teste concepção de ensino-aprendizagem

Utilizando os critérios de pontuação indicados no quadro 4, chegamos à tabela 1. Com base na análise dos resultados expressos na Tabela 1, observamos que apenas um dos alunos (A5) obteve, em todas as questões, uma pontuação que poderia, dentro dos critérios adotados, ser considerada construtivista. Com base nos resultados dessa tabela, construímos o gráfico 1. Ao analisar o gráfico, observamos que dois alunos tiveram uma pontuação que os coloca entre a posição intermediária (12 pontos) e a posição tradicional (6 pontos). Os outros três alunos estão em uma posição entre a categoria intermediária e construtivista.

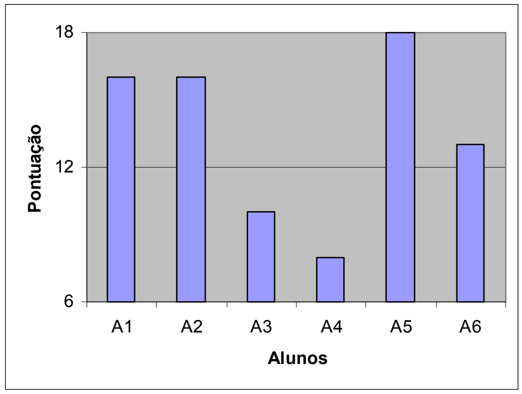
Os resultados obtidos não podem ser conclusivos, pois o formulário utilizado não garante uma representação fiel da concepção mais aproximada dos alunos; essa concepção de ensino pode se limitar ao discurso e, na prática, apresentar-se de uma forma diferente, revelando um distanciamento entre a prática e o discurso. Na fase de experimentação e análise a posteriori, teremos, junto com outros dados, um aprofundamento desses resultados, bem como o diagnóstico das mudanças. Segundo os resultados, contudo, há a possibilidade de mudanças, uma vez que apenas um aluno apresentou todas as respostas que poderiam ser classificadas como construtivistas.

Tabela 1 – Resultados do pré-teste sobre a concepção de ensino-aprendizagem

ALUNOS	PRÉ-TESTE CONCEPÇÃO DE ENSINO						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Total**
A1	1	3	3	3	3	3	16
A2	2	3	2	3	3	3	16
A3	1	1	1	3	1	3	10
A4	1	1	1	1	1	3	8
A5	3	3	3	3	3	3	18
A6	2	2	2	2	2	3	13
Média Geral	1,67	2,17	2,00	2,50	2,17	3,00	13,50

Obs.: pontuação total para concepção de ensino tradicional = 6;
pontuação total para concepção de ensino intermediaria = 12;
pontuação total para concepção de ensino construtivista = 18.

Gráfico 1 – Concepção de ensino-aprendizagem no pré-teste



Pré-teste homotetia

Dividimos esse teste em duas partes: na primeira parte, elaboramos uma questão em que perguntávamos se o aluno sabia o que era homotetia. Com base na resposta dessa questão, elaboramos a segunda parte (questões 2 a 7). Participaram da primeira parte do teste 28 alunos e, da segunda, 24 alunos; 22 participaram das duas partes. Dos 28 que participaram da primeira parte, 24 não responderam ou afirmaram que não conheciam o termo; 1 aluno afirmou que não se lembrava do que se tratava; 3 alunos tentaram responder, mas suas respostas se mostraram incorretas.

Com base nesses resultados, elaboramos a segunda parte do pré-teste. Nela, procuramos identificar se os alunos, apesar de não saberem o que é homotetia, poderiam perceber algumas relações associadas ao conceito. Elaboramos, com este objetivo, 5 questões. Em todas elas, procuramos, através da comparação de duas situações, perceber que tipo de relações o aluno identificava. No início deste teste, foi distribuído aos alunos um kit com materiais de apoio para serem utilizados em caso de necessidade. Estes materiais eram formados por uma calculadora, régua graduada, um par de esquadros e compasso. A seguir, apresentamos as questões[20] de 2 a 7.

Vale dizer que as questões deste teste não foram entregues todas ao mesmo tempo. Procuramos, com isso, evitar que uma questão influenciasse a anterior. Desse modo,

[20] Nelas, apresentamos as figuras reduzidas de modo a não ocupar muito espaço na dissertação. No teste, elas foram apresentadas em um tamanho maior de modo a não apresentar problemas para os alunos que resolverem fazer uma comparação entre as medidas lineares e angulares.

promovemos os seguintes agrupamentos: questão 2; questão 3, questão 4 e 5 e questão 6 e 7. As questões 4 e 5 foram entregues juntas, uma vez que uma poderia auxiliar na resposta da outra. O mesmo ocorreu com as questões 6 e 7, que, por sua vez, não poderiam ser entregues junto da 4 e da 5, pois o aluno poderia identificar a existência de um centro de homotetia nas questões 4 e 5 com base, apenas, na comparação com as 6 e 7. Ao comparar as questões 2 e 3, o aluno poderia perceber mais nitidamente a diferença entre uma figura que foi ampliada de uma que não foi pela comparação das figuras, não demarcando as características que permitem esta distinção; por isso, elas foram distribuídas em separado. No quadro 5, apresentamos a 2ª questão.

Quadro 5 – 2.ª questão do pré-teste sobre homotetia

Compare a figura **A** com figura **B**. Podemos dizer que a figura **B** foi ampliada da **A**? Justifique a sua resposta.

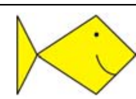


Figura A

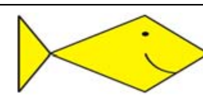


Figura B

Em uma transformação homotética, podemos ter uma transformação em que a imagem é uma ampliação da figura. Ao comparar as duas figuras, o aluno pode:

- Responder que a figura **B** é uma ampliação da figura **A**;
- Responder que a figura **B** é uma ampliação utilizando justificativas inadequadas;
- Afirmar que **B** não é uma ampliação da figura **A** sem justificar ou com justificativas inadequadas;
- Afirmar que **B** não é uma ampliação da figura **A** com justificativas parciais;
- Afirmar que **B** não é uma ampliação da figura **A**, apresentando as condições necessárias e suficientes para tal afirmação.

No quadro 6, apresentamos a 3ª questão. Nela, temos duas figuras: a figura **B** foi transformada por homotetia na figura **A**. Queremos identificar se o aluno, através da resposta a esta questão, considerou a figura **A** uma ampliação de **B**.

Quadro 6 – 3.ª questão do pré-teste sobre homotetia

Compare a figura **A** com a figura **B**. Podemos dizer que a figura **B** foi ampliada de **A**? Justifique a sua resposta.

Figura A

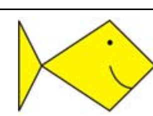


Figura B

Ao comparar as duas figuras o aluno pode:

- Responder que a figura **B** não é uma ampliação da figura **A**;
- Responder que a figura **B** não é uma ampliação utilizando justificativas inadequadas;
- Afirmar que **B** é uma ampliação da figura **A** sem justificar ou com justificativas inadequadas;
- Afirmar que **B** é uma ampliação da figura **A** com justificativas parciais;
- Afirmar que **B** é uma ampliação da figura **A**, apresentando as condições necessárias e suficientes para tal afirmação.

No quadro 7 apresentamos a 4ª questão. Procuramos com esta questão identificar quais as características de uma transformação por homotetia que os alunos, mesmo sem conhecer o que é uma transformação por homotetia, podem identificar.

Quadro 7 – 4.ª questão do pré-teste sobre homotetia

A figura **A** foi transformada por homotetia na figura **B**. Quais os elementos que caracterizam a homotetia? Justifique a sua resposta.

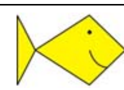


Figura A

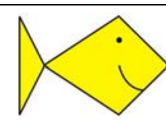


Figura B

No quadro 8, a figura D é resultante do produto de uma transformação por homotetia e uma rotação. Ao afirmarmos que elas não são homotéticas, procuramos identificar que características de uma transformação direta por homotetia (que não são encontradas nestas figuras) os alunos conseguem identificar.

Quadro 8 – 5.ª questão do pré-teste sobre homotetia

A figura **C** e a figura **D** não são homotéticas. Justifique por quê.

Figura C

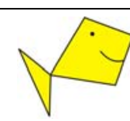
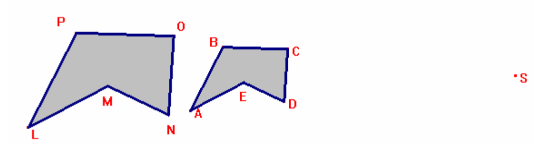


Figura D

Nos quadros 9 e 10, apresentamos as questões 6 e 7. Elas se assemelham às questões 5 e 6, com a diferença de que acrescentamos o centro de homotetia. Procuramos, com isso, avaliar se os alunos apresentam, nas suas respostas, novas características além das apontadas nas questões anteriores.

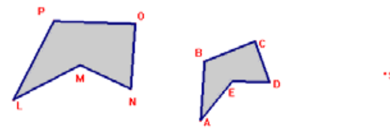
Quadro 9 – 6.ª questão do pré-teste sobre homotetia

A figura ABCDE foi transformada por homotetia na figura PONML. Quais os elementos que caracterizam a homotetia? Justifique a sua resposta.



Quadro 10 – 7.ª questão do pré-teste sobre homotetia

A figura ABCDE e a figura LMNOP não são homotéticas. Justifique por quê.



Apresentamos, a seguir, os resultados dos pré-testes que, junto com a fundamentação teórica, irão fazer parte da próxima fase (concepção e análise a priori). Expomos apenas os resultados referentes aos alunos que participaram de toda a seqüência, de modo a não apresentar informações que não vão ser úteis às conclusões desta dissertação.

Resultados pré-teste homotetia

Na primeira questão, conforme apresentado anteriormente (p. 69), as respostas indicam que os alunos não sabiam o que era homotetia. Na tabela 2, apresentamos os resultados referentes à segunda questão

Tabela 2 – Resultados da 2.ª questão do pré-teste sobre homotetia

02– Compare a figura **A** com figura **B**. Podemos dizer que a figura **B** foi ampliada da **A**? Justifique a sua resposta.

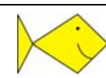


Figura A

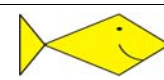


Figura B

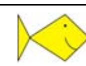
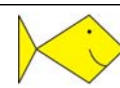
RESPOSTA (Q.2)	**ALUNOS**					
	A1	A.2	A.3	A.4	A.5	A.6
1 Erro (Responder que a figura B é uma ampliação da figura A)						
2 Acerto sem justificativa			X			
3 Acerto com argumentos que não justificam ou justificativas inadequadas.				X		
4. Acerto com argumentos que justificam (essa justificativa pode ser parcial para os casos de apenas um dos argumentos abaixo).	X	X			X	X
4. 1 Tipos de argumentos						
4.1.1 Congruência dos ângulos	X	X			X	X
4.1.2 Proporcionalidade dos lados ou razão constante entre os lados.					X	X

Obs1. O aluno A4 procurou justificar afirmando que a figura B foi esticada e não ampliada. Essa justificativa indica que ele percebeu deformações na figura B que não correspondem a uma justificativa advinda da comparação das propriedades da figura.

Com base nos resultados apresentados na tabela 2, observamos que, dos 6 alunos, apenas dois responderam utilizando justificativas necessárias e suficientes. Dois alunos utilizaram justificativas parciais. Um aluno utilizou argumentos que não serviram como justificativa. Um aluno não justificou. Essas respostas indicam que os alunos perceberam visualmente que não houve ampliação, porém, a maioria (66,67%) não utilizou as condições necessárias e suficientes para justificarem.

Na tabela 3, apresentamos os resultados da terceira questão. Nessa questão, todos os alunos perceberam que se tratava de uma ampliação; destes, apenas 1 aluno utilizou uma justificativa com argumentos necessários e suficientes; 5 alunos utilizaram argumentos parciais.

Tabela 3 – Resultados da 3ª questão do pré-teste sobre homotetia

03 – Compare a figura A com figura B. Podemos dizer que a figura B foi ampliada da A? Justifique a sua resposta.	 **Figura A**			 **Figura B**		
RESPOSTA	**ALUNOS**					
	A1	A.2	A.3	A.4	A.5	A.6
1 Erro (Responder que a figura B não é uma ampliação da figura A)						
2 Acerto sem justificativa						
3 Acerto com argumentos que não justificam ou justificativas inadequadas.	X					
4. Acerto com argumentos que justificam (essa justificativa pode ser parcial para os casos de apenas um dos argumentos abaixo).		X	X	X	X	X
4. 1 Tipos de argumentos						
4.1.1 Congruência dos ângulos					X	X
4.1.2 Proporcionalidade dos lados ou razão constante entre os lados.		X	X	X	X	

Na tabela 4, apresentamos os resultados da quarta questão. Dos estudantes, apenas um percebeu o paralelismo (A4) que, assim como o centro de homotetia, diferencia a homotetia de outras transformações por semelhança. Esse aluno também citou a congruência de ângulos. No exemplo dado nessa questão, as características referidas asseguram que as figuras sejam homotéticas. Dois alunos utilizaram como justificativas: “as figuras ampliadas estão sobre a mesma forma de visão” (A1) e “A figura B é uma ampliação da figura A” (A2). Essas respostas são imprecisas (mesma forma de visão) ou são características específicas para esse caso (ampliação e redução). Os outros alunos apresentaram justificativas parciais.

Tabela 4 - Resultados da 4ª questão do pré-teste sobre homotetia

04 – A figura **A** foi transformada por homotetia na figura **B**. Quais os elementos que caracterizam a homotetia? Justifique a sua resposta.

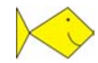


Figura A

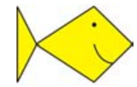


Figura B

RESPOSTA	**ALUNOS**					
	A1	A.2	A.3	A.4	A.5	A.6
1 Não respondeu ou afirmou que como não sabia não responderia						
2 Utilizou argumentos que não justificam ou justificativas inadequadas.	X	X				
3 Acerto com argumentos que justificam (esta justificativa pode ser parcial para os casos de apenas um dos argumentos abaixo).			X			
4. 1 Tipos de argumentos						
4.1.1 Congruência dos ângulos				X	X	X
4.1.2 Proporcionalidade dos lados ou razão constante entre os lados.			X		X	X
4.1.3 Semelhança						
4.1.2 Paralelismo				X		
4.1.3 Percebeu o equivalente ao centro de homotetia						

Na tabela 5, observamos que a maioria dos alunos (5, ou 83,33 %) utilizou argumentos que não justificam ou justificativas inadequadas. Apenas um aluno se referiu ao paralelismo (A5). Três alunos (A1, A4 e A5) utilizaram o termo forma de visão ou posição para designar o fato de não serem figuras homotéticas. Um aluno (A2) justificou que elas não eram homotéticas porque a figura D não era ampliação de C. Isso indica que esse aluno não sabia o que era uma ampliação.

Tabela 5 – Resultados da 5.ª questão do pré-teste sobre homotetia

05 – A figura **C** e a figura **D** não são homotéticas. Justifique por que.

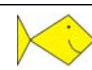


Figura C

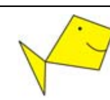


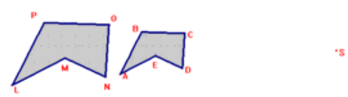
Figura D

RESPOSTA	**ALUNOS**					
	A1	A.2	A.3	A.4	A.5	A.6
1 Não respondeu ou afirmou que, como não sabia, não responderia						
2 Utilizou argumentos que não justificam ou justificativas inadequadas.	X	X	X		X	X
3 Utilizou argumentos que justificam						
4. 1 Tipos de argumentos						
4.1.1 Paralelismo (não)				X		
4.1.2 Percebeu a impossibilidade de determinar o equivalente ao centro de homotetia						

Nas duas ultimas questões, acrescentamos o centro de homotetia. Apenas um dos alunos (A3) fez menção ao ponto S, afirmando que as figuras estavam na mesma posição no espaço em relação a esse ponto. Os alunos A2 e A3 representaram as linhas homotéticas que ligavam os vértices das figuras homólogos ao centro de homotetia. Apenas o aluno A4 utilizou o termo paralelismo para a questão 6 e não paralelo para a questão 7, demonstrando perceber essa característica da homotetia. Os alunos A1 e A5 para a 6.ª e a 7.ª questões, utilizaram, respectivamente, expressões imprecisas como "mesmo ponto de visão"/'forma deslocada no que diz respeito à visão" e "mesma posição"/"estão em posições diferentes". O aluno A6, para as duas questões, utilizou argumentos similares para as duas questões. Esses procuraram justificar, esclarecendo que se tratava de figuras semelhantes, o que indica que o estudante não compreendeu a questão 7 ou, simplesmente, respondeu o que tinha percebido. Nas tabelas 6 e 7, temos uma síntese dessas respostas. Na tabela 6, que trata da 6ª questão, observamos que apenas um dos alunos utilizou argumentos imprecisos em suas respostas; os demais alunos utilizaram argumentos parciais (justificam em parte). Na 7.ª questão, apresentada na tabela 7, apenas um aluno utilizou um argumento adequado (paralelismo); os demais recorram a argumentos que não justificam ou são imprecisos.

Tabela 6 – Resultados da 6.ª questão do pré-teste sobre homotetia

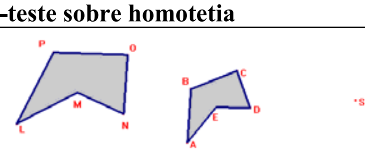
06 – A figura ABCDE foi transformada por homotetia na figura PONML. Quais os elementos que caracterizam a homotetia? Justifique a sua resposta.



RESPOSTA	ALUNOS					
	A1	A.2	A.3	A.4	A.5	A.6
1 Não respondeu ou afirmou que, como não sabia, não responderia						
2 Utilizou argumentos que não justificam ou justificativas inadequadas.	X					
3 Acerto com argumentos que justificam (essa justificativa pode ser parcial para os casos de apenas um dos argumentos abaixo).		X	X	X	X	X
4. 1 Tipos de argumentos						
4.1.1 Congruência dos ângulos						X
4.1.2 Proporcionalidade dos lados ou razão constante entre os lados.		X	X		X	X
4.1.3 Semelhança						X
4.1.2 Paralelismo				X		
4.1.3 Percebeu o equivalente ao centro de homotetia						

Tabela 7 – Resultados da 7.ª questão do pré-teste sobre homotetia

07 – A figura ABCDE e a figura LMNOP não são homotéticas. Justifique por quê.



RESPOSTA	ALUNOS					
	A1	A.2	A.3	A.4	A.5	A.6
1 Não respondeu ou afirmou que, como não sabia, não responderia						
2 Utilizou argumentos que não justificam, justificativas inadequadas ou imprecisas.	X	X	X		X	X
3 Utilizou argumentos que justificam						
4. 1 Tipos de argumentos						
4.1.1 Paralelismo (não)				X		
4.1.2 Percebeu a impossibilidade de determinar o equivalente ao centro de homotetia.						

3.1.2 Concepção e análise a priori

Nesta etapa do trabalho, é estabelecido um certo número de variáveis em que o ensino pode atuar – trata-se das variáveis de comandos. Artigue (1992) distingue dois tipos de variáveis de comando: variáveis macrodidática e microdidática. As variáveis macrodidáticas tratam da organização global da engenharia, e as variáveis microdidáticas são mais específicas, tratam da organização local da engenharia, de uma sessão, podendo ainda ser de ordem geral ou depender de um conteúdo didático que destina o estudo. Em nossa pesquisa no nível macrodidático, definimos os aspectos da homotetia que seriam utilizados na construção da seqüência didática, os problemas no ensino de tal conteúdo e as escolhas feitas, a organização da seqüência didática tomando por base a teoria das situações didáticas de Guy Brousseau (1986). Nas escolhas, no contexto microdidático, temos as características de cada sessão, como as situações adidáticas foram organizadas em cada sessão e a relação destas com o plano macrodidático.

Na análise a priori, é definido de que forma as escolhas efetuadas podem controlar o comportamento dos alunos e o sentido destes comportamentos. Ela se baseia em hipóteses e na validação ou não destas, que se fará pelo confronto (na quarta fase da engenharia didática) entre a análise a priori e a análise a posteriori.

A análise a priori, tradicionalmente, comporta uma fase descritiva e uma de previsão. Ela está centrada nas características da situação adidática construída e que foi aplicada nos alunos selecionados para a experimentação. A análise a priori deve (ARTIGUE, 1992):

- Descrever as escolhas efetuadas em nível local (possivelmente relacionando mais tarde com as escolhas globais) e as características da situação adidática resultante delas;
- Analisar o peso que o investimento nessa situação pode ter para o aluno, particularmente, pelas possibilidades de ação, de decisão, de controle e validação de um comando, uma vez efetuada a devolução, num funcionamento quase isolado do professor;
- Prever a lista dos possíveis comportamentos e tentar mostrar de que maneira a análise efetuada permite controlar o seu sentido e assumir os comportamentos esperados; se eles ocorrerem, resultaram da aplicação do conhecimento pretendido pela aprendizagem.

Com base nessas descrições, apresentamos, a seguir, a concepção da seqüência didática e a análise a priori.

Concepção da seqüência didática

As escolhas feitas relativas ao conceito de homotetia foram baseados nas recomendações dos PCN (apresentada nas páginas 18 e 23 deste trabalho) e os problemas no ensino de homotetia, discutidos na fundamentação teórica. Tomando por base esses referenciais, apresentamos algumas diretrizes:

- Tal como nas pesquisas sobre transformações geométricas e, em especial, a desenvolvida por Lemonidis (1991), procuraremos explorar diferentes tipos de figuras que podem representar uma transformação geométrica (p.59-62);
- Conforme as pesquisas apresentadas na fundamentação teórica sobre o ensino das transformações geométricas, a diferença entre o quadro vetorial e afim não está mais sendo estudado. Atualmente, o estudo se concentra nas figuras geométricas que sofrem transformações e na sua aplicação para a resolução de problemas;
- Lemonidis (1991) inicia o seu experimento apresentando as características das figuras homotéticas para, depois, introduzir o quadro numérico. Procuramos, em nossa pesquisa, (guardadas as devidas diferenças) iniciar também com as características das figuras, para, posteriormente, introduzir aos poucos as medidas angulares e, por fim. as lineares;
- Tal como na pesquisa de Lemonidis (1991), procuramos valorizar as organizações perceptivas espontâneas;
- Utilizamos, na maior parte da seqüência, um programa de geometria dinâmica (o Tabulae) que se apresenta como um poderoso recurso para o ensino das transformações por homotetia, conforme descrito na fundamentação teórica;
- As seções foram estruturadas tomando por base as situações didáticas propostas por Brousseau (1986).

A seguir, apresentamos a análise a priori das questões apresentadas em cada sessão.

Análise a priori homotetia

A seqüência didática foi dividida em duas partes; na primeira, tratamos da construção do conceito de homotetia utilizando o referencial teórico descrito na fundamentação desta pesquisa; na segunda, os alunos foram divididos em grupos para darem uma aula sobre homotetia. A segunda parte tem a função de avaliar os efeitos da primeira parte da seqüência didática na concepção de ensino-aprendizagem. Em função das características desta segunda parte, ela não foi discutida nesta fase. Apresentamos a seguir, a primeira parte da seqüência, que foi dividida em quatro seções. No quadro 11, apresentamos a forma de organização da primeira sessão.

Quadro 11 – Atividades a serem desenvolvidas na sessão 1

DT	AT	DESCRIÇÃO	CONHEC. A SER CONSTRUIDO
15/05 4 h	01, 02, 03	Comparar um par de figuras homotéticas com um par de figuras que não são homotéticas. Foram utilizados um segmento (01), uma bandeira (02) e um quadrilátero que lembra um papagaio (03).	Identificar que, em uma transformação homotética, os lados homólogos são paralelos. Os alunos podem levantar algumas hipóteses ou fazer observações que, mais à frente, serão testadas (sobre a congruência dos vértices homólogos ou a proporcionalidade dos lados homólogos).
	04	Neste exercício, apresentamos um triângulo e a sua imagem transformados por homotetia; em relação ao exercício anterior, acrescentamos o centro de homotetia e os raios homotéticos. Neste exercício foi introduzida a ferramenta "medir ângulo".	Introduzir o conceito de invariante em uma transformação homotética e verificar se os alunos conseguem identificar algum invariante. Esperamos que os alunos possam associar as relações entre as posições ocupadas por imagem, figura e o centro de homotetia, com o tipo de transformação (redução, ampliação, rotação e redução, rotação e ampliação, rotação e congruência). Utilizar a ferramenta "calcular ângulo" para constatar que os ângulos homólogos permanecem inalterados.
	05	Nesta atividade, apresentamos duas figuras transformadas por homotetias e comparamos com duas que não foram transformadas.	Esperamos que os licenciandos percebam que os alinhamentos são preservados na homotetia.
	06	Dados o centro de homotetia e a figura (representada por um quadrilátero), solicita-se a construção da imagem desta figura resultante da transformação por homotetia.	Nesta atividade, os alunos devem utilizar os conhecimentos aprendidos para a construção da imagem. Utilizando as ferramentas "criar reta", "criar segmento" e "criar paralela", os aluno devem construir a imagem da figura que preserva as características da homotetia.
	07	Esse exercício é similar ao anterior. Mudamos apenas a figura, que é um triângulo, e a posição do centro de homotetia, que é interior ao triângulo.	Procuramos, com este exercício, enriquecer a experiência desenvolvida no exercício anterior, através da mudança da posição do centro e da figura.

OBS.: DR = DATA/ DURAÇÃO; AT = ATIVIDADE

Sessão 01

Nas três primeiras atividades, procuramos, com recurso à comparação de figuras homotéticas com figuras que não são homotéticas, conduzir o aluno a perceber as características da homotetia. Dessa forma, elas se complementam. O aluno poderá, na primeira atividade, perceber algumas características, sem, contudo, ter certeza sobre a existência dessa característica, constatando-a na segunda ou na terceira atividades. Na primeira atividade, utilizamos dois segmentos; na segunda, duas bandeiras e, na terceira, um quadrilátero que lembra um papagaio[21]. A seguir, descrevemos com mais detalhe essas três atividades.

Atividade 01 (sessão 01)

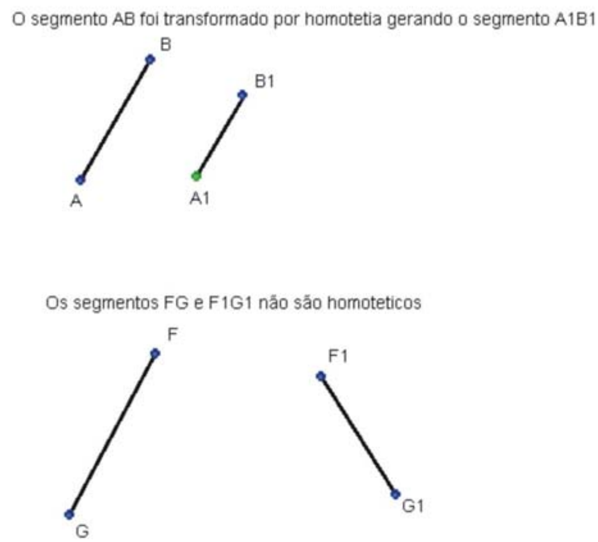


Figura 20 – Configuração inicial ao abrir o arquivo (Atividade 1/Sessão 1)

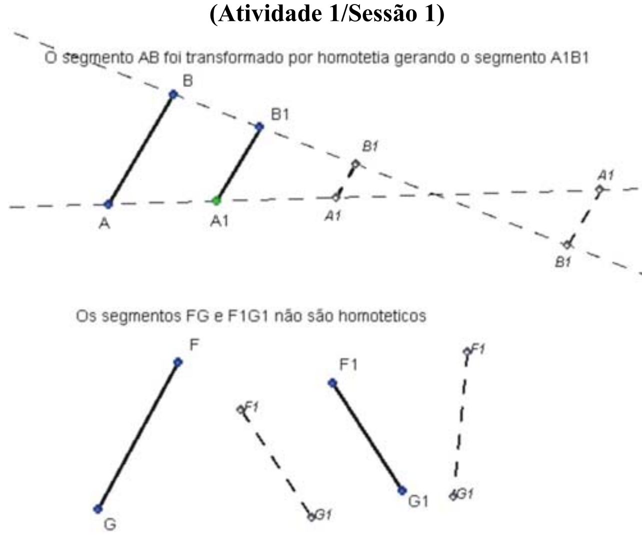


Figura 21 – Posições possíveis para a imagem (At. 1/S1).

Na primeira atividade, utilizamos um segmento de reta por acharmos que seria mais fácil de identificar o paralelismo. Na figura 20, apresentamos a configuração inicial em que temos o desenho de um segmento AB, que foi transformado em A1B1 por homotetia, e os segmentos FG e F1G1, que não são homotéticos. Ao manipular o segmento A1B1, o aluno observará que este descreve uma trajetória delimitada. O Tabulae impede que o segmento A1B1, ao ser manipulado, deixe de ser paralelo ou descreva uma trajetória diferente da que indicamos na figura 21. Nesta figura, acrescentamos linhas tracejadas que não são visíveis na tela do programa, com possíveis posições ocupadas pela figura no deslocamento. O segmento F1G1 não possui regras definidas podendo ser deslocada para quaquer posição

[21] Brinquedo que consiste em uma armação de varetas de bambu, ou de madeira leve, coberta de papel fino, e que, por meio de uma linha, se empina, mantendo-se no ar (FERREIRA, 1999).

na tela do computado. Na figura 21, algumas das possíveis posições que o segmento A1B1 e F1G1 pode ocupar ao ser deslocado com o mouse. Acreditamos que, ao movimentar o segmento A1B1, o aluno perceberá o paralelismo em relação ao segmento AB. Nossa expectativa é que o aluno possa identificar também:

- O centro de homotetia;
- A redução e a ampliação em relação à posição do centro e do segmento AB;
- A inversão após o centro de homotetia.

Como o estudante não sabe o que é um centro de homotetia, ele poderá utilizar expressões como: "após o ponto", ou "a figura é reduzida até um ponto", ou, ainda, outra expressão com esse significado. Nessa questão, o aluno poderá, também, perceber que, quanto mais próximo ao centro de homotetia, maior a redução da figura.

Atividade 02 (sessão 01)

Nessa segunda atividade, utilizamos uma figura com uma maior complexidade do que na questão anterior. Esperamos, com isso, conduzir o aluno a perceber algumas das propriedades que o mesmo possa não ter percebido na atividade anterior, como: o paralelismo dos segmentos homólogos; o centro de homotetia; a redução e ampliação em relação à posição do centro e do segmento AB; a inversão após o centro de homotetia; a proporção entre os lados homólogos que não se alteram com a ampliação ou redução (o aluno pode, ainda, referir-se à proporção da figura). Outras características poderão ser notadas pelo estudante, como a congruência dos ângulos correspondentes e a razão constante entre os lados homólogos. Alguns desses aspectos

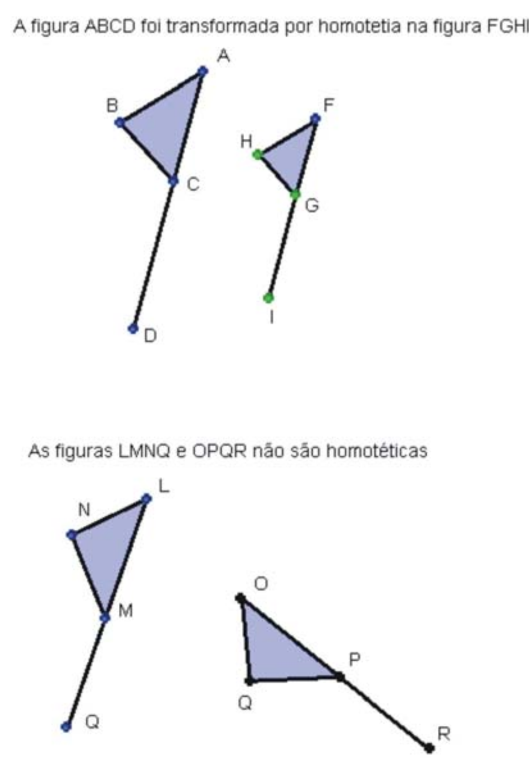


Figura 22 – Configuração inicial atividade 2/ seção 1 (At. 2/S1).

poderão ser confirmados em outras atividades, nas quais os alunos aprenderão a utilizar ferramentas do programa, como “calcular ângulo” e “calcular comprimento”. Existirá a possibilidade de essas características não serem percebidas pelo estudante, demonstrando dificuldades em analisar esse tipo de problema. Isso pode se justificar devido ao fato de o aluno não estar acostumado ao tipo de problema em pauta, ou, ainda, porque está preso ao raciocínio algébrico, tendo, em sua vida escolar, poucas oportunidades de explorar o quadro geométrico de forma intuitiva. Na figura 22, apresentamos a configuração inicial do arquivo disponibilizado para essa atividade. Na figura 23, temos com linhas tracejadas indicadas as possibilidades de deslocamentos para a imagem nas duas situações como apresentado na atividade 1.

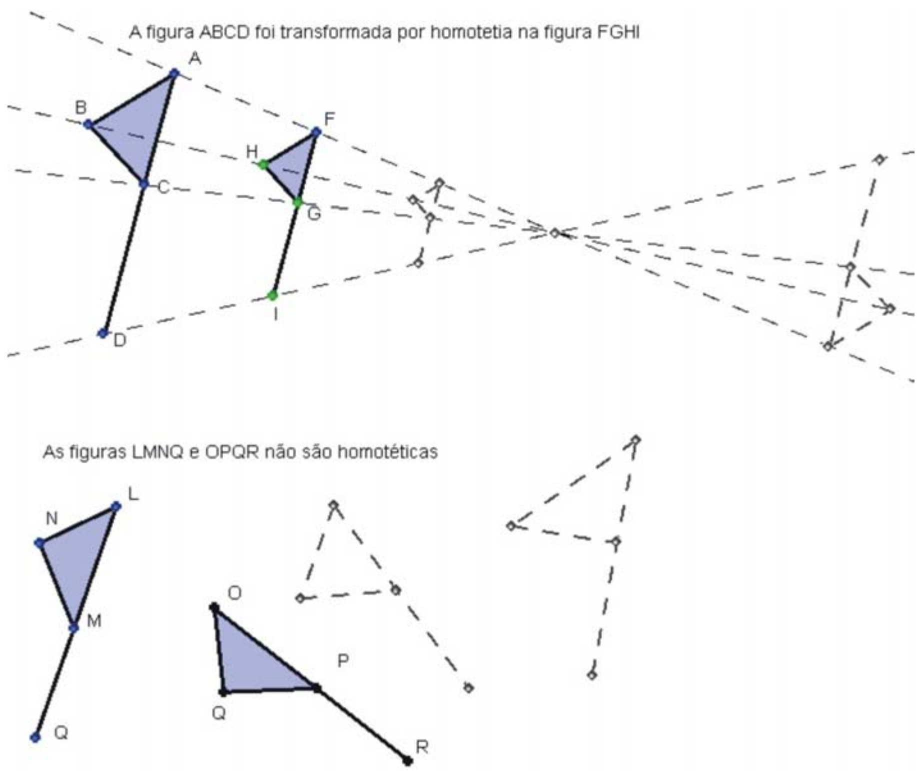


Figura 23 – Posições possíveis ao deslocar a imagem (At. 2/S1).

Atividade 03 (sessão 01)

Essa atividade complementa as duas primeiras. Tal como nas demais, apresentamos duas figuras homotéticas e duas figuras que não são homotéticas (figura 24). Utilizamos, como exemplo, um quadrilátero com duas diagonais. As duas figuras não homotéticas possuem as diagonais paralelas, porém, esse paralelismo não se aplica aos lados do quadrilátero.

Queremos, com isso, levar o aluno a perceber que, em uma homotetia, todos os segmentos da figura são paralelos aos seus homólogos na imagem. Isso não acontece no exemplo de figura não homotética. O mesmo ocorre com os ângulos entre os lados dos quadriláteros. Tal como nas atividades anteriores, apresentamos em tracejado as possíveis posições que as figuras geométricas, ao serem manipuladas, podem ocupar, bem como os raios homotéticos invisíveis na tela do computador (figura 25). Com essas atividades, queremos reforçar os objetivos de aprendizagem propostos na atividade 02 e alcançar aqueles que foram propostos para a atividade 02 e que os alunos ainda não haviam alcançado.

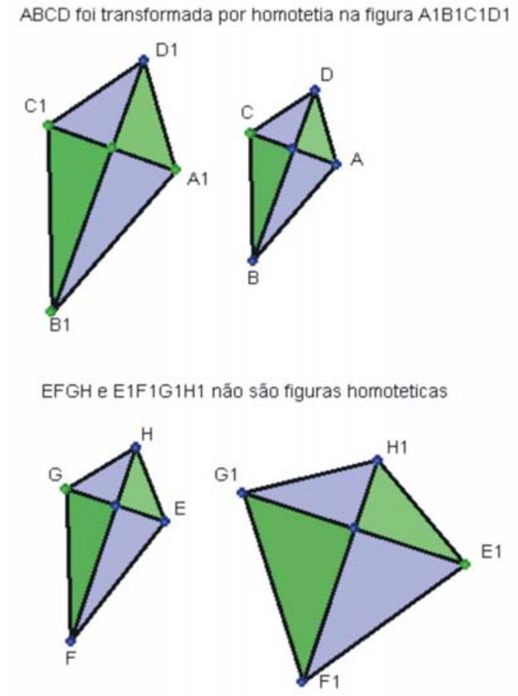


Figura 24- Tela inicial At. 3 (S1).

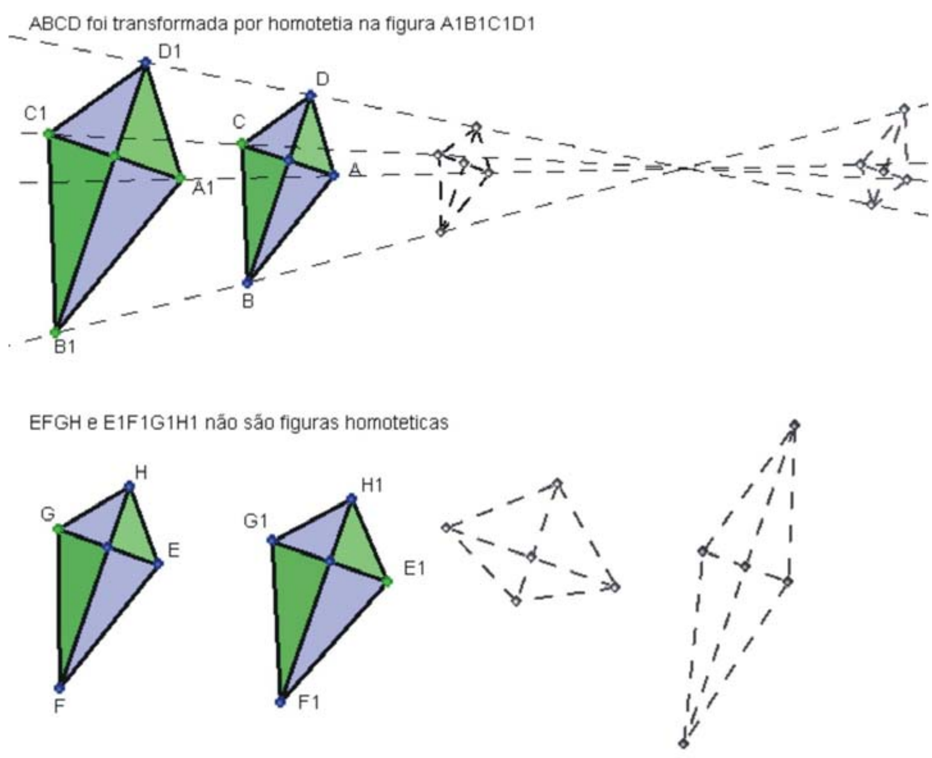


Figura 25 – Tela com possíveis situações da At. 3 (S1).

Atividade 04 (sessão 01)

Nessa atividade, acrescentamos novas informações e instrumentos. Os raios homotéticos que não apareciam nas outras atividades passam a vir no arquivo que o aluno vai utilizar na atividade (figura 26). Ela está divida em duas partes. Na primeira, solicitamos do aluno:

a) Observar o que acontece ao movimentarmos a imagem;
b) Identificar algum ponto invariante (informando o que é invariante);
c) Determinar o que muda na imagem quando está entre o centro e a figura, quando o centro está entre a imagem e a figura, e quando a figura está entre o centro e a imagem.

Na segunda parte, introduzimos a ferramenta "construir ângulos". Solicitamos que os alunos medissem os ângulos entre o centro de homotetia e cada lado da figura (SAB), o ângulo entre o centro de homotetia e cada lado da imagem e os ângulos internos da figura e imagem. Na figura 27, temos o resultado após as medições. Esperamos, com isso, que os alunos percebessem que, ao movimentar a imagem ou a figura, os ângulos correspondentes permaneceriam inalterados e que isso é uma característica da homotetia. Esses ângulos não se limitam aos ângulos internos das figuras (análise intrafigural), mas também aos ângulos externos, em relação ao centro de homotetia (análise interfigural). Dessa forma, os alunos terão a oportunidade de testar uma possível hipótese (análise intrafigural) elaborada antes do uso dessa nova ferramenta e perceber uma outra característica (análise interfigural) em relação aos ângulos formados entre os lados da figura e o centro de homotetia.

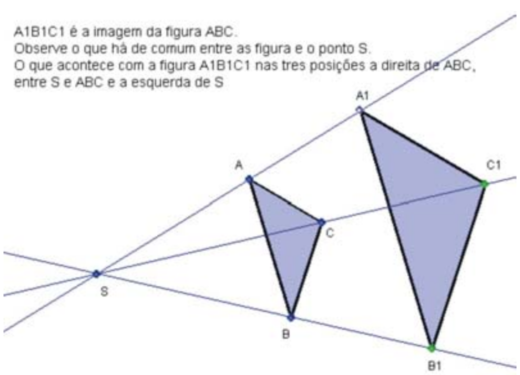


Figura 26 – situação inicial At. 4 (S1).

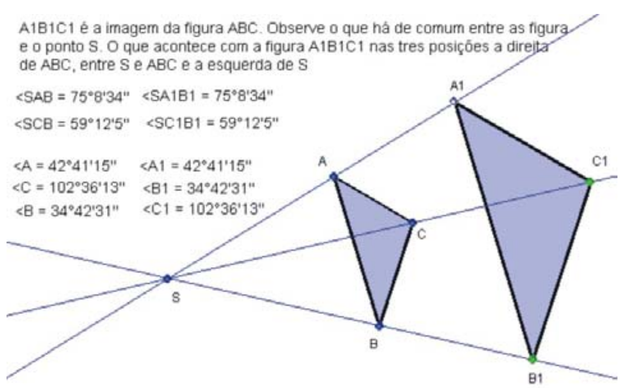


Figura 27– Medidas angulares obtidas At. 4 (S1).

Na terceira parte, elaboramos algumas perguntas com o objetivo de identificar determinados conhecimentos que poderiam não ter sido apresentados antes desta seqüência. Isso poderia ter ocorrido ou por o aluno não ter observado estas características, ou por não ter achado necessário descrevê-las. Essas perguntas tendem a levar o licenciando à formulação de hipóteses sobre a existência ou não dessas características, formular justificativas e tentar validar com a sua dupla. No quadro 12, apresentamos estes questionamentos entregues na ficha de atividade aos alunos.

Quadro 12 – Perguntas da terceira parte da atividade 4 (sessão 1)

Podemos afirmar que uma transformação homotética (sim ou não):

- Preserva o paralelismo dos lados (direção): __________
- Mantém como invariante a posição do centro de homotetia: ____________
- Preserva os ângulos entre os raios homotéticos e os lados homólogos (correspondentes): _________
- Preserva os ângulos internos a cada figura: ___________

Atividade 05 (sessão 01)

Na atividade 5, apresentamos uma par de figuras homotéticas e um par de figuras não homotéticas. Solicitaremos para os alunos que determinem se a homotetia preserva o alinhamento. Esperamos que, com a manipulação das figuras, os alunos concluam que, na homotetia, o alinhamento é preservado.

Atividade 06 e 07 (sessão 01)

Nas atividades 6 (figura 28) e 7 (figura 29), procuramos identificar se os alunos conseguem aplicar os conhecimentos apreendidos nas outras atividades para a construção da imagem de um quadrilátero e de um triângulo. Em cada arquivo entregue aos alunos, constam o centro de homotetia e a figura. Além das mudanças nas figuras na atividade 7, acrescentamos uma diferenciação em relação às outras atividades apresentadas até o momento. O centro de homotetia no desenho inicial está dentro do triângulo, e não exterior a figura (figura 29). Essa mudança pode, inicialmente, causar alguma dificuldade; entretanto, acreditamos que, com base nos conhecimentos adquiridos, os alunos poderão superá-la. Esperamos que, ao utilizar as ferramentas “criar reta”, “criar segmento”, “criar paralelas”, “criar ponto sobre objeto” e “criar ponto de interseção”, os alunos possam construir a imagem dessas figuras. Nesta atividade, não introduzimos ainda a ferramenta “criar homotetia”, pois consideramos necessário, inicialmente, aplicar os conceitos aprendidos até o momento. Para utilizá-la, seria necessário ter introduzido a idéia de razão de homotetia. Solicitamos, também, que o aluno justifique as ferramentas que empregou, de modo a verificamos se o conhecimento adquirido foi utilizado na resolução desta situação.

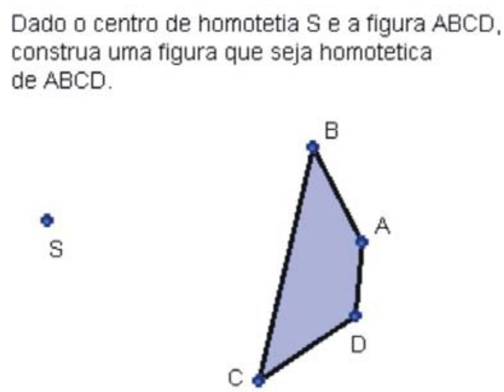


Figura 28 – situação inicial At. 6 (S1).

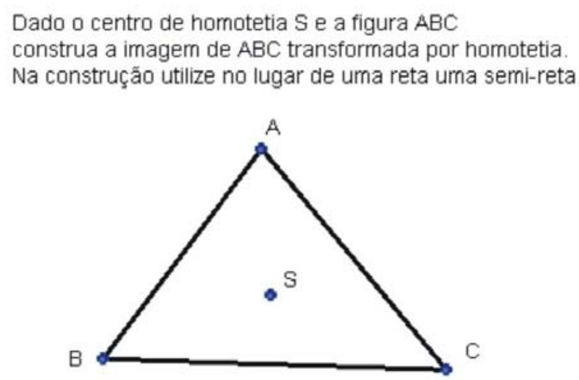


Figura 29 – situação inicial At. 7 (S1).

Sessão 02

Quadro 13 – Atividades a serem desenvolvidas na sessão 2

DT	AT.	DESCRIÇÃO	CONHEC. A SER CONSTRUIDO
17/05 1:00	01	Introduzir as ferramentas “calcular comprimento” e “calculadora” para determinar a razão de homotetia. Determinar o que muda no valor da razão de homotetia ao reduzirmos ou ampliarmos a figura e a relação desta com a posição da figura, imagem e centro de homotetia.	Através da atividade, esperamos que os alunos identifiquem que em uma transformação homotética, a razão entre a distância entre um ponto da imagem e o centro de homotetia e a distância entre o homólogo deste ponto na figura e o centro de homotetia é constante para todos os pontos. E que a mesma é chamada razão de homotetia. Esperamos que os alunos possam estabelecer as relações entre essa razão e o tipo de mudança na figura imagem (ampliação, redução, inversão) e a relação disso com a posição da figura, da imagem e centro de homotetia.
OBS.: DR = DATA/ DURAÇÃO; AT = ATIVIDADE			

No quadro 13, apresentamos uma síntese dessa seção. Nela, foi realizada apenas uma atividade que exigia um tempo maior para a realização. Essa atividade tinha início com o desenho apresentado na figura 30. Na ficha entregue ao aluno, apresentamos as informações necessárias para, utilizando o Tabulae, determinar as medidas dos segmentos SA1, SA, SB1, SB, SC1 e SC, considerando ABC figura e A1B1C1 imagem. Depois, na ficha, apresentamos instruções de como determinar as razões de homotetia. Na figura 31, temos o arquivo final da dupla de que participou o aluno A2. Nela temos, na parte superior, as medidas determinadas pelos alunos e as razões de homotetia. As medidas estão em centímetros. Ao movimentar os pontos na tela, algumas das medidas e/ou razões sofrem alterações. As medidas lineares assumem, no programa, o valor positivo; nesse caso, o programa não distingue quando a razão é positiva ou negativa. Por isso, esclarecemos verbalmente essa limitação e o porquê da importância da orientação (positivo/negativo).

Com base nas informações fornecidas pelo computador, solicitamos, na ficha, que os alunos, determinem o que muda nas figuras quando o valor de K é maior que 1, igual a 1, está entre 0 e 1 e é menor do que 0. Esperamos, com isso, que os alunos possam estabelecer uma relação entre a razão de homotetia e as mudanças na imagem. Utilizamos, no final desta atividade, um questionamento sobre a unidade (cm) indicada nos comprimentos dos segmentos e a não-existência de unidade na razão de homotetia. Esperamos evitar erros no trabalho com grandezas (observamos esse tipo de erro em nossa vivência como professor em cursos universitários).

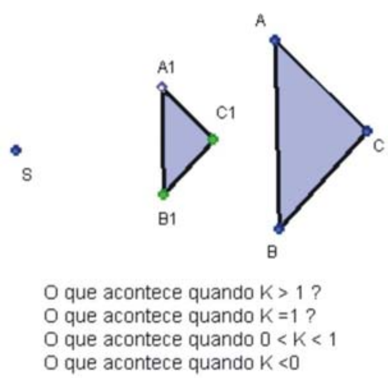


Figura 30 – situação inicial At. 1 (S2)

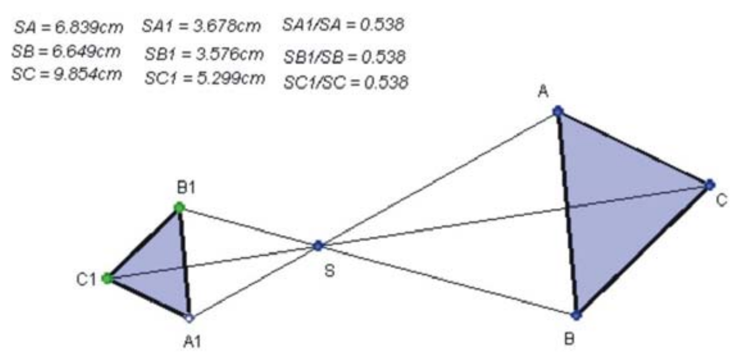


Figura 31 – Após a manipulação da figura conforme as instruções dadas, esperamos que os alunos determinem os comprimentos e razões, como nesta figura (At. 1/S2).

Sessão 03

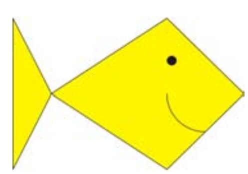


Figura 32 – Desenho de peixe usado na S3.

No quadro 14, apresentamos uma síntese dessa seção. Inicialmente, pensamos em duas atividades, mais no tempo disponível, só foi possível realizar uma atividade.

Quadro 14 – Atividades a serem desenvolvidas na sessão 3

DR	DESCRIÇÃO	CONHEC. A SER CONSTRUIDO
20/05 1:30	Nesta seção, ao contrário das outras, os alunos utilizaram materiais de desenho (régua graduada, par de esquadros, compasso, transferidor, lápis, borracha) acessórios (cola, tesoura), ficha com as instruções, cartolina com um desenho de um peixe e o centro de homotetia. Eles receberam também três outros peixes semelhantes ao primeiro, determinaram os ângulos dos vértices da linha poligonal que define os peixes, as medidas dos segmentos desta linha poligonal, encontraram as razões de semelhança e colocaram na cartolina estes desenhos, considerando que dois desenhos são ampliações e reduções com K>0. Um desenho possui a mesma medida da figura (K<0).	Procuramos conduzir os alunos a: • Observarem que essa proposta pedagógica pode ser aplicada sem o computador; • Corrigirem possíveis distorções na construção do conceito de homotetia (os alunos podem confundir propriedades do programa com propriedades da homotetia); • Utilizando os instrumentos de desenho tradicionais, aplicar o conceito de homotetia na resolução do problema proposto, ampliando, dessa maneira, a compreensão do conceito de homotetia; • Utilizarem o transferidor para averiguar a congruência dos ângulos homólogos; • Partirem das propriedades das figuras e determinarem a sua posição considerando que se trata da imagem da figura dada; • Compararem a razão de semelhança com a razão de homotetia.

Nesta sessão utilizamos no lugar da sala de informática, a sala de desenho com pranchetas para a realização desta atividade. No início da atividade foi entregue aos alunos materiais de desenho (régua graduada, transferidor, lápis, borracha, par de esquadros, compasso), acessórios (cola, tesoura), uma cartolina onde foram colados um desenho de um peixe e o centro de homotetia. Foi entregue, também, um envelope com desenhos de peixes impressos em papel sulfite e uma ficha com a instrução dos procedimentos e questionamentos a serem feitos. Em cada envelope constava 3 desenhos de peixes, um desenho de peixe com as mesmas medida do desenho que constava na cartolina, um desenho de peixe com medidas reduzidas e um outro com medidas ampliadas em relação as medidas do desenho do peixe na cartolina. Na figura 29, apresentamos uma figura semelhante a utilizada nesta atividade. Na ficha entregue aos alunos foi solicitado para: determinar os ângulos internos de todas as figuras; identificar que propriedade pode-se deduzir com base nas medidas dos ângulos internos; comparar a razão dos lados correspondentes (lado do desenho do peixe transformado/lado do desenho do peixe inicial); definir que propriedades podemos concluir com base nós resultados; considerando que os peixes A1 (ampliação) e A2 foram obtidos utilizando para isso uma razão positiva e que o peixe A3 (congruente a figura) fora obtido utilizando uma razão negativa, determinar a posição das representações dos peixes na cartolina e fixe os mesmos na cartolina.

Esperamos com essa atividade levar os alunos a: confirmar algumas propriedades da homotetia identificadas no Tabulae, como a congruência dos ângulos homólogos, utilizando instrumentos de desenho tradicionais; estabelecer uma relação entre a razão entre os lados homólogos (razão de semelhança) e a razão de homotetia e com base nesta relação posicionar adequadamente a imagem na folha. Para determinar os ângulos os alunos utilizaram o transferidor. As medidas lineares deveriam ser obtidas com a régua graduada. Para posicionar as imagens nas folhas, esperavamos que os alunos ligarão o centro de homotetia aos vértices da figura determinando assim os raios homotéticos. Uma vez definidas estas linhas, os licenciandos poderão: comparar a razão de homotetia com a semelhança e determinar com base nesta relação os vértices necessários para demarcar a posição a ser fixada as imagens na cartolina; comparar a razão de homotetia com a de semelhança e determinar um ponto de cada imagem sobre um raio homotético, por esse ponto através do traçado de paralelas com o par de esquadros determinar os lados das imagens necessários a fixação desta na cartolina; determinar um vértice de cada imagem e utilizando o compasso ou o transferidor por meio do transporte de ângulos determinar dois lados da imagem necessários para a fixação do desenho.

Sessão 04

No quadro 15, apresentamos uma síntese desta sessão.

Atividade 1 (sessão 4)

Nessa atividade, apresentamos o centro de homotetia, um ponto a ser transformado por homotetia (figura) e a razão de homotetia (K=2,5). Na figura 33, apresentamos a situação inicial para essa atividade. Solicitamos aos alunos que determinassem o ponto (X1) transformado por homotetia (imagem). Sugerimos o uso das ferramentas “criar reta”, “criar círculo” e “criar ponto de interseção”. Esperamos, que nessa atividade, os alunos construam uma reta utilizando como pontos o centro de homotetia (S) e o ponto que representa a figura (X). Utilizando a ferramenta “criar círculo”, o aluno deverá demarcar três vezes uma circunferência com raio igual à distância SX e, depois, traçar uma mediatriz, usando a ferramenta “criar círculo”, determinando, no encontro com a reta SX, o ponto X1. Essa construção é diferente das anteriores e pode, inicialmente, levar a alguma dificuldade, uma vez que, num momento anterior, a definição precisa da imagem foi feita coma régua graduada. Nessa atividade, a razão será determinada pela construção geométrica. Apresentamos algumas perguntas sobre homotetia que visam a conduzir o aluno à verificação de que, para a construção de uma única imagem, é necessário definir o centro de homotetia, a razão de homotetia e a imagem. A mudança de um desses três elementos altera a imagem (em posição ou em dimensão e posição). Acreditamos que essa construção poderá ser usada pelos alunos para refletir sobre esse problema e validar essa tese.

Quadro 15 – Atividades a serem desenvolvidas na sessão 4

DR	AT.	DESCRIÇÃO	CONHECIMENTO A SER CONSTRUIDO
22/05 4 h	01, 02, 03	Uma vez definidos o centro de homotetia, a figura e a razão, procuramos conduzir o aluno a representar a imagem através de construções geométricas.	Na atividade anterior os alunos utilizaram a régua graduada para determinarem pontos notáveis e, com eles, encontrar a imagem. Nesta atividade, os alunos utilizaram, no lugar de números e réguas, relações de proporções obtidas com as ferramentas do Tabulae como "construir ponto médio" e "circunferência". Esperamos com essa atividade conduzir o aluno a desenvolver novas estratégias reforçando o conceito de homotetia. Essa construção será utilizada para responder algumas perguntas que visão fazer refletir sobre as condições necessárias e suficientes para determinar uma, e apenas uma imagem em uma transformação homotética.
	04	Nesta atividade foi solicitada para que se determinasse a razão de homotetia sem que fossem utilizadas medidas. A partir da observação das figuras e das relações entre elas esperávamos que os alunos determinem as informações para a solução do problema.	Acreditávamos que, com esta atividade, os alunos poderão estabelecer novas relações entre a razão de homotetia e a posição da figura, imagem e o centro.
	05	Nesta atividade, exploramos a ferramenta do Tabulae "criar homotetia". Para utilizar essa ferramenta, o aluno terá que indicar o centro de homotetia, a razão e a figura. Para determinar a razão faz-se necessário à divisão de dois segmentos. Utilizando este programa, ao movimentar um dos segmentos, a razão muda de valor. Solicitamos para o aluno determinar o que muda na imagem quando a razão é igual, maior e menor do que 1.	Esperamos que os licenciandos: aprendam a utilizar essa ferramenta; identifiquem as condições necessárias e suficientes para determinarem uma dada imagem; estabeleçam as relações entre a razão de homotetia e o tipo de transformação que a imagem sofreu (congruência, ampliação, redução).
	06	Nesta atividade, foi utilizada a ferramenta "homotetia" para construir uma homotetia de razão negativa.	Acreditamos que, com essa atividade, os licenciandos possam relacionar a razão negativa para os casos de ampliação, redução e congruência com rotação (meio-giro).
	07	Nesta atividade, apresentamos um problema que poderia ser solucionado por meio do conceito de homotetia. Nele, dever-se-ia inscrever um quadrado de área máxima em um triângulo qualquer.	Esperamos, com esses dois problemas, mobilizar os conhecimentos sobre homotetia desenvolvido pelos alunos para determinar a solução das questões.

OBS.: DR = DATA/ DURAÇÃO; AT = ATIVIDADE

Atividade 2 (sessão 4)

Essa atividade é similar à anterior. Na figura 34, apresentamos a imagem existente no arquivo disponibilizado para a atividade. Nela, temos o centro de homotetia (S) e o triângulo ABC. Na ficha, solicitamos que o aluno, considerando a razão de homotetia igual 0,5, construísse a imagem desse triângulo. Para a solução do problema, os alunos poderão utilizar as ferramentas construir: “reta”, “segmento”, “ponto médio”, “segmento”, “polígono”. Uma vez construída a figura, o estudante deve responder a algumas perguntas que têm por objetivo conduzir à identificação dos invariantes em uma transformação por homotetia.

Figura 33 – situação inicial At. 1 (S4)

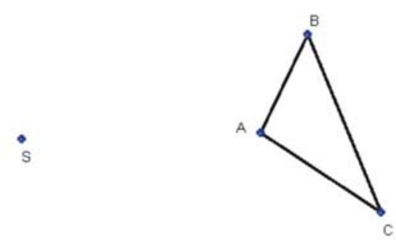


Figura 34 – situação inicial At. 2 (S4)

Atividade 3 (sessão 4)

Nessa atividade, tal como na anterior, o licenciando deve construir um triângulo. Sugerimos o uso das ferramentas construir: “reta”, “círculo”, “ponto de interseção”, “segmento”, “polígono”. A razão de homotetia, neste caso, é negativa (K= -2). Esperamos que o aluno identifique que, em uma transformação homotética, o centro de homotetia e os pontos homólogos são colineares. Acreditamos que os alunos observaram que em uma transformação homotética de razão negativa, a direção é preservada e o sentido muda.

Atividade 4 (sessão 4)

Ao contrário das outras atividades realizadas, nesta seção, temos o centro de homotetia, a figura e duas imagens. Cada imagem é resultante da transformação, utilizando razões diferentes, do círculo de centro O. Sobre o raio de homotetia, foram demarcados pontos eqüidistantes. Sobre cada ponto deste, estão demarcados os centros das três circunferências, conforme apresentado na figura 35. Solicitamos que seja determinada a razão de homotetia para cada uma das circunferências. Esperamos que o aluno, para solução do problema, aplique o conceito de razão de homotetia (igual à distância do centro de homotetia a um ponto da imagem dividido pela distância do centro de homotetia a um ponto da figura). Nesse caso, os alunos utilizaram um ponto conhecido e que não faz parte da imagem e da figura, mas que guarda as mesmas características (no caso, trata-se do centro da circunferência). Eles podem chegar à mesma conclusão (porém, com um esforço desnecessário), ainda, construindo uma outra reta que passe por um ponto da circunferência – determinado pela representação do raio existente no arquivo que estão usando e utilizando retas paralelas – por meio do teorema de Tales.

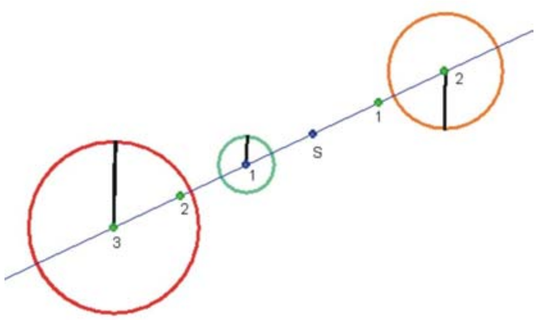


Figura 36 – situação inicial At. 4 (S4).

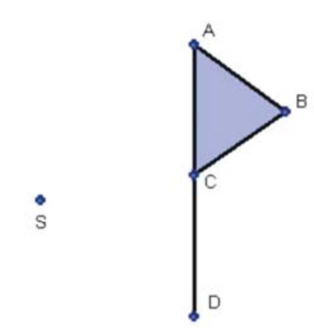


Figura 37 – situação inicial At. 5 (S4).

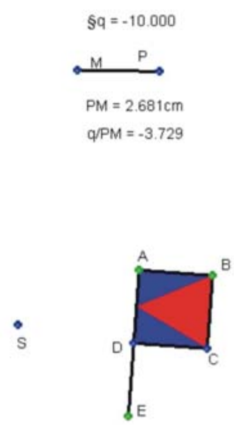


Figura 35 – situação inicial At. 6 (S4)

Atividade 5 (sessão 4)

Na figura 36, temos a situação inicial da atividade 5. No arquivo disponibilizado ao aluno foi indicados o centro S e a figura ABCD. Nessa atividade, **foi orientado para o aluno empregar a** ferramenta “criar homotetia”. Para utilizá-la, é necessário um número que determine a razão, a figura e o centro de homotetia. Para determinar a razão, o aluno construirá dois segmentos e, depois, calculará a razão das medidas dos segmentos. Com base nesses três elementos e utilizando a ferramenta “criar homotetia”, esperamos que os alunos determinem a imagem dessa transformação. Ao manipular um dos segmentos, a razão muda, alterando a imagem. Solicitamos que os alunos informassem o que acontece com a imagem quando: K=1; K<1; K>1. Nessa atividade, não estamos trabalhando com números negativos. Dessa forma, a imagem não sofrerá um giro.

Atividade 6 (sessão 4)

Na atividade 6, os alunos utilizaram a ferramenta “criar homotetia” com razão negativa. Para isso, deveriam criar um segmento obtendo, em seguida, o seu comprimento e, depois, usando a ferramenta “valor fixo”, deveriam determinar um valor negativo. Usando a ferramenta “calculadora”, deveria ser determinada a razão negativa da divisão deste número pelo número que representa o segmento. Com base no valor da razão negativa, da figura e do centro de homotetia, o aluno, com o emprego da ferramenta “construir homotetia”, deveria construir a imagem. Ao manipular o segmento, a razão muda, alterando a imagem. Solicitamos dos alunos a determinação do que ocorre com a imagem quando: $0 > K > -1$; $K = -1$; $K < -1$. Esperávamos, com isso, conduzir os alunos a identificarem através da ferramenta “criar homotetia” o que muda na imagem quando a razão é negativa.

Atividade 7 (sessão 4)

Nessa atividade, propomos aos alunos resolverem um problema. Ao abrir o arquivo, o aluno se deparou com a figura de um triângulo. Na ficha, existem informações que orientaram o estudante a construir um quadro de área máxima inscrito no triângulo. Um lado do quadrado deveria estar sobre o lado maior do triângulo. Os outros dois vértices, que não pertencem a este lado, deveriam estar apoiados em cada um dos outros dois lados do triângulo. Para solucionar o problema, os alunos poderiam aplicar os conhecimentos sobre homotetia. Construindo um pequeno quadrado apoiado no lado AC e, depois, tomando como centro de homotetia o ponto A (ou C, dependendo da posição do quadrado), determina-se um dos vértices do quadrado sobre o lado oposto ao centro de homotetia. Com esse vértice, pode-se construir a solução do problema (fig.38). Desejávamos que, nessa atividade, os alunos, a partir dos conhecimentos adquiridos, conseguissem solucionar o problema[22].

[22] C. Burgaud (1983 apud Lemonidis, 1991) constata que é muito difícil para alunos utilizar transformações na resolução de problemas de geometria.

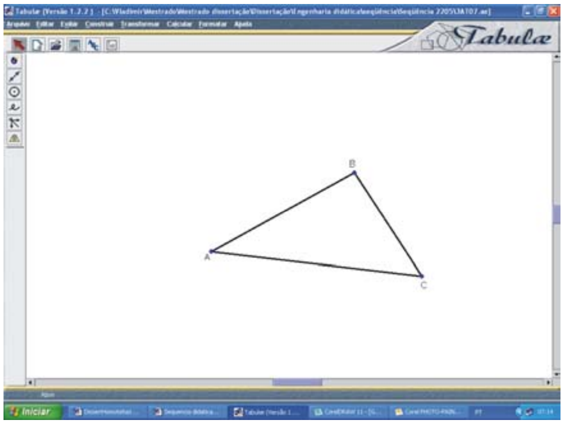


Figura 38 – situação inicial At. 7 (S4)

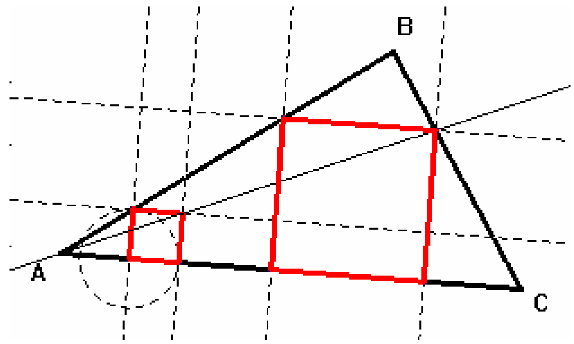


Figura 39 – Solução do problema (At. 7/S4)

3.1.3 Experimentação

Na experimentação, temos o contato do professor e do pesquisador com os alunos em um ambiente em que será construída a seqüência. Nesta pesquisa, o professor e o pesquisador são as mesmas pessoas. Apresentamos nesta fase:

- Caracterização dos alunos que participaram desta pesquisa e justificativa dos dias e horários da seqüência;
- Razões da distribuição dos alunos em duplas e em equipes;
- Seleção dos alunos;
- A caracterização das seções desta fase;
- A caracterização dos ambientes em que foi realizada a experimentação;
- A caracterização dos materiais disponibilizados para os alunos e dos instrumentos de coleta utilizados na experimentação.

Caracterização dos alunos e dos horários

A pesquisa foi feita com os alunos do sexto período do Curso de Licenciatura em Matemática da UFRPE. A seqüência foi aplicada no início do período letivo da disciplina Desenho Geométrico. Uma das características dessa disciplina é a utilização de construções geométricas. Ela era lecionada por nós, antes do nosso afastamento para realização do Mestrado. A escolha de um curso de licenciatura em Matemática atende aos objetivos desta pesquisa, que é voltada à formação inicial do professor de Matemática. A escolha da disciplina e do período foi feita tendo em vista que: os alunos no 6.º período já passaram por muitas disciplinas do curso que tratam do conhecimento matemático e pedagógico; os resultados dessa pesquisa poderão ser postos em prática por nós nesta disciplina.

A turma selecionada corresponde à dos alunos matriculados na referida disciplina para o primeiro semestre de 2004. O período de aplicação constituiu um período atípico, uma vez que o início do semestre letivo de 2004 foi no final de abril de 2004 (devido às mudanças nos calendários acadêmicos resultante dos efeitos da última greve).

A disciplina Desenho Geométrico é oferecida em dois dias, nas segundas-feiras (das 18h30 às 20h10) e nas quintas-feiras (das 20h10 às 21h50). Como não conseguimos o laboratório de informática para os dois dias e, procurando evitar uma quebra nas seqüências, acrescentamos um outro dia da semana (no qual poderíamos utilizar o laboratório) para aplicação da seqüência. O terceiro dia definido foi o sábado, no horário das 8h00 às 12h. A seqüência realizada com o uso do computador na segunda-feira teve duração de 1hora e 10 minutos (por causa do atraso de alguns alunos). A aula da quinta-feira, com o uso dos instrumentos de desenho, teve duração de 1 hora e 30 minutos (pois os alunos demoraram a chegar e pediram para sair mais cedo por causa dos horários de ônibus). A seqüência realizada no sábado teve duração de, aproximadamente, 4 horas (os alunos se atrasaram e conseguimos prolongar o tempo da seqüência de modo a manter as 4 horas previstas).

Nas quintas-feiras, utilizamos a sala de desenho. Essa limitação ofereceu algumas vantagens. Podemos destacar, em especial, a demonstração de que o uso das teorias das situações didáticas no ensino de homotetia não se limita a um ambiente informatizado; a possibilidade de explorar outros recursos, como o uso de cartazes e materiais de desenho[23]. O uso desses materiais de desenho também foi apresentado em nossa fundamentação teórica, tendo sido previsto desde o início.

Distribuição dos alunos

Durante a primeira parte da seqüência, os alunos foram distribuídos em duplas; por um lado, devido à importância da interação entre os alunos (apresentada na fundamentação, quando tratamos de Vygotsky); por outro, em decorrência das características das situações adidáticas

[23] Alguns dos alunos, durante a seqüência na quinta-feira, precisaram ser auxiliados por outros alunos pois não sabiam utilizar o transferidor.

de formulação e validação (em que é necessário um diálogo entre os alunos) descritas na fundamentação teórica. Tentamos não formar grupos com mais de dois alunos, pois o tempo de acesso ao computador teria que ser dividido por três ou mais pessoas, além do tempo usado nas discussões. Um outro ponto importante consistiu nos critérios para a distribuição das duplas.

A distribuição dos alunos pode, segundo Coll (1996, apud ARAÚJO, 2000), configurar três situações. A primeira ocorre quando temos um dos membros do grupo mais capaz, que orienta o outro, menos capaz. Esse tipo de relação é chamado de assimétrica. A segunda situação se dá quando os membros do grupo possuem o mesmo nível de competência e predomina o trabalho de cooperação. No terceiro grupo, os alunos possuem o mesmo nível de competência, porém, existem pequenas divergências entre os participantes sobre o modo de conduzir o trabalho. Para Coll, a segunda situação é a ideal. O ambiente de trabalho se torna mais rico, as idéias são compartilhadas e o *feedback* é recíproco.

Para criar as condições ideais (segundo COLL), após o pré-teste, com base nos resultados obtidos, procuramos fazer a distribuição das duplas, que foram organizadas de modo a agrupar os alunos que obtiveram um grau de dificuldade próximo no pré-teste. Na primeira seção de sábado, devido à falta de alguns alunos e o atraso de outros, a distribuição das duplas, em alguns casos, fugiu a esses critérios. Na seção do último sábado, devido à irregularidade dos alunos, tivemos um grupo com três alunos (um aluno que faltara às outras seções chegou neste dia).

Na segunda parte da seqüência, em que os alunos deveriam dar uma aula sobre homotetia, distribuímo-os em equipes maiores, que facilitariam a discussão entre eles, com a troca de experiência e que contribuiu para a redução do número de apresentações, não prolongando muito essa etapa.

Seleção dos alunos

Todos os alunos matriculados na disciplina poderiam participar da seqüência. Para análise dos resultados deveriam ser considerado apenas os alunos que participaram de todas as atividades. Em função deste critério, dos 30 alunos presentes no início da disciplina, apenas 6 estiveram presentes em todas as atividades (2 pré-testes, 8 dias da seqüência e 2 pós-testes). Por essa razão, foram escolhidos para comporem a análise dos resultados.

Ambientes em que foi realizada a experimentação

As seções foram realizadas em dois ambientes. As atividades em que se utilizou o programa Tabulae foram feitas na sala de informática (sala especialmente projetada para aulas com o uso do computador). Como a demanda por essa sala é grande, tivemos que realizar parte das seções em dois sábados pela manhã. Os testes, a seção em que utilizamos os instrumentos de desenho e as apresentações dos alunos foram feitos na sala de desenho (sala de aula em que, no lugar das bancas escolares usuais, temos pranchetas).

Instrumentos de coletas utilizados e materiais distribuídos aos alunos

Nas seqüências realizadas com o computador, os alunos foram distribuídos em duplas, obedecendo aos critérios definidos no quadro teórico. Cada dupla teve acesso a um microcomputador com um programa Tabulae. Elas receberam uma ficha impressa em papel A4 com instruções sobre os procedimentos, perguntas e quadros para serem preenchidos quando necessário. Foi pedido às duplas que preenchessem a ficha com as respostas solicitadas. Os licenciandos contaram com um material de apoio às atividades na sala de desenho (régua graduada, transferidor, lápis, borracha, par de esquadros, compasso, cola, tesoura). Na seção 3, realizada na sala de desenho, foi entregue aos alunos, além da ficha, uma cartolina (em que foram colados um desenho de um peixe e o centro de homotetia), um envelope (com três desenhos a serem usados na atividade). O material produzido pelos alunos no computador foi copiado para um disquete para análise das construções. Como material complementar, foi selecionada uma dupla que teve os seus procedimentos registrados por meio de filmadora.

3.1.4 Análise a posteriori e validação

A análise foi feita tomando por base as informações coletadas durante a seqüência. Elas foram obtidas a partir do olhar do pesquisador, tendo em vista as hipóteses construídas na fase de análise a priori. Artigue (1992, p. 55) esclarece que a experimentação:

> [...] é baseada em todos os dados coletados durante a experimentação: as observações feitas durante as seções de ensino e também o trabalho dos alunos durante a aula e fora da aula. Estes dados são freqüentementes acompanhados por dados obtidos pelo uso de metodologias externas: questionário, entrevistas individuais ou em pequenos grupos realizadas em vários momentos do ensino ou depois dele. Como já vimos, é sobre o confronto das duas análises – análise a priori e a posteriori – que a validação da hipótese concernente à pesquisa é baseada.

Nesta pesquisa, os instrumentos de coleta utilizados foram descritos na seção anterior e foi com base neles que fizemos a análise a posteriori e a validação. Em função da organização dessa dissertação, os resultados da análise a posteriori e da validação foram apresentados, respectivamente, na análise dos resultados e nas considerações finais.

3.2 Cronograma

Apresentamos, no quadro 16, o cronograma das atividades desenvolvidas com os alunos.

Quadro 16 – Descrição das etapas e cronograma da engenharia didática

ETAPA	ATIVIDADE	DATA	DESCRIÇÃO
ANÁLISES PRELIMINARES	Pré-teste 01	29/04	Concepção de ensino-aprendizagem
	Pré-teste 02A	06/05	Conhece homotetia
	Pré-teste 02B	13/05	Conceito de homotetia
CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI	Planejamento	02/01 14/05	Concepção da seqüência e análise dos testes e elaboração final da seqüência.
EXPERIMENTAÇÃO	Sessão 01	15/05	Seção de 4 horas no sábado com o uso do computador (8h20 às 12h20)
	Sessão 02	17/05	Seção com o uso do computador (19h às 20h)
	Sessão 03	20/05	Seção com uso dos materiais de desenho (20h10 às 21h40)
	Sessão 04	22/05	Seção de 4 horas no sábado com o uso do computador (8h20 às 12h20)
	Organização	24/05	Divisão das equipes e cronograma de apresentação.
	Sessão 05	31/05	Aula equipe A
	Sessão 06	03/06	Aula equipe B
	Sessão 07	07/06	Aula equipe C e D
	Sessão 08	10/06	Aula equipe E
INFORMAÇÕES COMPLEMENTARES PARA ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO	Pós-teste 01	08/07	Aplicação do pós-teste sobre concepção de ensino aprendizagem.
	Pós-teste 02/entrevistas	24/08 25/08 26/08 08/09	Antes de cada entrevista, aplicamos o teste sobre homotetia. As entrevistas foram realizadas em horários variados em função da disponibilidade dos alunos e de modo a não estarem presentes no mesmo horário dois alunos entrevistados.

4 RESULTADOS

Os resultados correspondem à análise a posteriori da engenharia didática. Eles foram divididos, em função dos objetivos da pesquisa, em duas partes. A primeira trata dos resultados referentes à construção do conceito de homotetia. A segunda parte trata dos resultados referentes à concepção de ensino-aprendizagem. Esta última parte foi apresentada no formato de artigo.

4.1 Resultados homotetia

Fazem parte dos resultados sobre a construção do conceito de homotetia:

- Análise das atividades da seqüência. Nessa etapa, fazemos um confronto da análise a priori das atividades desenvolvidas em cada seção da seqüência didática com os resultados dessas atividades. Com isso, procuramos analisar a validade das questões na construção do conceito de homotetia e os problemas que elas possam ter apresentado durante a seqüência;
- Confronto entre o pré-teste e pós-teste sobre homotetia. Com essa comparação, procuramos avaliar o que mudou nos alunos depois da seqüência;
- Entrevista com os alunos. Procuramos, na entrevista, tirar dúvidas sobre as etapas anteriores (os resultados desta parte não são apresentadas nesta fase da pesquisa, mas estão incluídos nas etapas anteriores) e levantar a avaliação dos alunos sobre essa seqüência.

4.1.1 Análise das atividades da seqüência

Com base nos resultados coletados durante a seqüência didática, passamos à análise a posteriori das questões propostas na seqüência.

Atividade 01 (sessão 01)

Os alunos, no início dessa atividade, tiveram uma certa dificuldade, pois não conheciam o Tabulae. Entretanto, aos poucos, com o manuseio e a assistência do professor, foram dadas as instruções necessárias para que se começasse a atividade. Não informamos aos alunos sobre os principais comandos do programa, limitamo-nos a oferecer aqueles comandos necessários à atividade proposta. Isso foi feito para evitar o uso de alguns recursos como medir ângulos e comprimentos, a que só deveriam recorrer-se em uma etapa posterior. Na tabela 8, apresentamos as constatações a que os alunos chegaram através do desenvolvimento dessa atividade. Conforme indicado na tabela, apenas a aluna A5 não apresentou uma descrição que associasse características significativas da transformação. Na sua resposta, ela percebeu que, na homotetia, a imagem era ampliada e reduzida e que as extremidades dos segmentos estavam sobre a mesma reta.

Tabela 8 – Solução da atividade 1 (sessão 1)

RESPOSTA	**ALUNOS**				
	A1	A2	A3/A4	A5	A6
1. Não respondeu, ou, na sua descrição não, apresentou características da transformação					
2. Não apresentou uma descrição que conduzisse a características significativas da transformação				X	
3. Identificou algumas características da transformação (análise interfigural):					
3.1 Paralelismo			X		X
3.2 Centro de homotetia	X	X	X		
3.3 Redução e ampliação em relação à posição do centro de homotetia		X	X		
3.4 A inversão após o centro de homotetia	X		X		
OBS.: Os alunos A3 e A4 fazem parte da mesma dupla, possuindo, dessa forma, a mesma resposta.					

Os alunos A1, A2, A3, A4 e A5, utilizando a ferramenta “criar reta”, construíram os raios homotéticos que definem o centro de homotetia. O aluno A6 não representou essas linhas.

Atividade 02 (sessão 01)

Tabela 9 – Solução da atividade 2 (sessão 1)

RESPOSTA	**ALUNOS**				
	A1	A2	A.3/A4	A.5	A.6
1. Não respondeu, ou não citou características da transformação					
2. Identificou algumas características da transformação (análise interfigural):					
2.1 Paralelismo	X		X	X	X
2.2 Centro de homotetia	**?**	X	**?**	X	
2.3 Redução e ampliação em relação à posição do centro de homotetia		**?**	**?**		
2.4 A inversão após o centro de homotetia	**?**		**?**		
2.5 Os pontos homólogos são colineares ao centro de homotetia		X			
3. Identificou algumas das características que permanecem entre a figura e a imagem (análise intrafigural):					
3.1 Percebeu as mudanças que ocorrem na imagem (amp., red. e inversão).				X	X
3.2 Semelhança	X		X		X
3.3 Proporcionalidade					X
3.4 Congruência de ângulos					X
3.5 Razão de semelhança					X
OBS.: Os alunos A3 e A4 fazem parte da mesma dupla, possuindo, dessa forma, a mesma resposta. OBS.2: **?** = Elementos citados na atividade anterior e não citados nesta.					

Na tabela 9, temos o resultado da atividade 2. Com base nos dados, observamos que a principal característica que pretendíamos conduzir os alunos a descobrir, era o paralelismo, foi citada por 83,33 % dos alunos. Apenas dois alunos falaram em um ponto (centro de homotetia) no encontro dos raios homotéticos. Apesar disso, todos os alunos, utilizando a ferramenta “criar reta”, construiram os raios homotéticos que definem o centro de homotetia. Nenhum dos alunos citou a mudança de sentido da transformação após o centro de homotetia. Acreditamos que, apesar de visualizarem essa mudança na atividade introdutória, ainda não possuíam elementos para especular sobre isso ou não consideraram uma característica relevante. Apesar de não previsto para essa atividade, o aluno A2 afirmou que “As figuras homotéticas possuem todos os vértices correspondentes colineares em relação a um único ponto externo a essas figuras, fato que não se percebe nas figuras que não são homotéticas”. Com base nesse resultado, acrescentamos este item na tabela 9. Na análise a priori, esperávamos que alguns alunos pudessem identificar mudanças na imagem (ampliação, redução, inversão) e algumas características da homotetia, como semelhança (congruência dos ângulos homólogos, razão constante entre os lados homólogos, proporcionalidade). Dois alunos (33,33%) citaram características relacionadas à transformação. O aluno A6 falou em ampliação, redução e inversão, e o aluno A6 afirmou que a FGHI era uma ampliação de ABCD. Dos 6 alunos, 4 identificaram a semelhança, que é a característica mais significativa na análise intrafigural. O aluno A6 citou também a proporcionalidade e a congruência dos ângulos. Consideramos que os resultados indicam uma evolução dos alunos, que precisa ser aperfeiçoada nas outras atividades da seqüência.

Atividade 03 (sessão 01)

Tabela 10 – Solução da atividade 3 (sessão 1)

RESPOSTA	**ALUNOS**				
	A1	A2	A3 / A4	A5	A6
1. Não respondeu, ou não apresentou características da transformação					
2. Identificou algumas características da transformação (análise interfigural):					
2.1 Paralelismo	X		X	X	**?**
2.2 Centro de homotetia	**X**	**?**		X	
2.3 Redução e ampliação em relação à posição do centro de homotetia					
2.4 A inversão após o centro de homotetia					
2.5 Os pontos homólogos são colineares ao centro de homotetia		**?**			
3. Identificou algumas das características que permanecem entre a figura e a imagem (análise intrafigural):					
3.1 Percebeu as mudanças que ocorrem na imagem (ampliação, redução e inversão)				X	**?**
3.2 Semelhança	**?**		X		X
3.3 Proporcionalidade			**X**		X
3.4 Congruência de ângulos					X
3.5 Razão de semelhança					**?**

OBS.1: **? =** Elementos citados na atividade anterior e não citados nesta.
OBS.2: **X** = Elementos não citados até agora

Os objetivos dessa atividade são similares aos da atividade 2. Apresentamos, nesta atividade, outras figuras, de modo a levar o aluno a uma exploração mais rica deste conceito. Na tabela 10, apresentamos um resumo dos resultados. Para os pontos não assinalados na tabela anterior que foram demarcados nesta tabela, usamos o símbolo **X,** e, para os pontos que estavam na tabela anterior e não foram citados pelos alunos nesta atividade, usamos o símbolo **?**. Acreditamos que estas características não foram demarcadas pelos alunos porque elas já haviam sido citadas na atividade anterior. As novas características citadas foram o centro de homotetia (esse termo não foi usado pelos alunos, pois desconheciam o assunto) e a proporcionalidade. Nessa atividade, o aluno A2 citou apenas elementos do programa que fazem com que as características da homotetia sejam preservadas como: ao deslocarmos um segmento da imagem, os outros segmentos se deslocam automaticamente e “nas figuras homotéticas, cada transformação efetuada numa delas, reflete automaticamente na outra, de forma proporcional”. Porém, ele não chegou as características que pretendíamos que ele alcançasse. O uso do programa, neste caso teve, um efeito diferente do previsto.

Atividade 04 (sessão 01)

Essa atividade foi dividida em três partes: A, B e C.

Atividade 04 A

No arquivo disponibilizado para os alunos, foram construídos um triângulo e a sua imagem transformada por homotetia. Estavam indicados o centro e os raios homotéticos. Inicialmente, solicitamos que os alunos movimentassem aleatoriamente A1B1C1 e observassem o que acontece. Esperávamos, com isso. que eles percebessem os elementos interfigurais de uma transformação por homotetia. Apenas uma dupla (de que o aluno A2 participava) comentou por escrito os efeitos dessa manipulação. Ela afirmou que: “a figura formada por A1,B1,C1 aumenta ou diminui proporcionalmente em relação ao ponto S, respectivamente ao afastar-se ou aproximar-se do ponto S”. Em seguida, perguntamos, informando abreviadamente o que é invariante, se havia algum ponto invariante na transformação. Em uma transformação por homotetia, temos como exemplos de invariantes intrafigural os ângulos internos e a proporção e interfigural, o paralelismo e o centro de homotetia. Após realizamos essa atividade, percebemos uma falha no enunciado: “Há algum ponto invariante (que não muda) nesse tipo de transformação (a figura ABC foi transformada)?”. Quando indagamos “há algum ponto invariante", passamos a idéia do ponto geométrico diferente da pergunta "Há algum elemento invariante (que não muda) nesse tipo de transformação?

A dupla formada pelos alunos A1 e A2 perceberam o centro de homotetia como invariante. A dupla A3-A4 afirmou: "o ponto C é invariante, permanece no mesmo segmento", apresentando uma falha na sua resposta. A dupla formada pela aluna A5 afirmou "não há nenhum ponto invariante" –, provavelmente, pela possibilidade de movimentar todos os pontos na tela do Tabulae. O aluno A6 citou os ângulos como invariante (análise intrafigural).

Na terceira pergunta, procuramos identificar o que muda na imagem quando a figura está entre o centro e a imagem (ampliação), quando a imagem está entre o centro e a figura (redução) e quando o centro está entre a imagem e a figura (inversão). Apenas um aluno (A6) apresentou uma resposta diferente da prevista. O aluno A6 considerou que, por manter a proporção e a congruência dos ângulos. não havia mudanças para os dois primeiros casos, falou ainda na correspondência biunívoca entre a figura e imagem; na terceira pergunta acrescentou que a única mudança era que ficava oposto pelo vértice.

Atividade 04 B

Nessa parte, apresentamos as ferramentas de medição de ângulo e, utilizando o mesmo arquivo da parte anterior, pedimos aos alunos que medissem os ângulos. Depois, pedimos que fossem apresentadas as conclusões sobre essa atividade. Os alunos A1, A2, A3, A4, A5 e A6 responderam que os ângulos correspondentes eram congruentes. A dupla A2 afirmou, ainda, que essa congruência permitia estabelecer a proporcionalidade dos lados correspondentes.

Atividade 04 C

Na terceira parte, fizemos algumas perguntas de modo a determinar que características da homotetia os alunos havia identificado. Todos os alunos responderam adequadamente a essa questão, conforme apresentado na tabela 11.

Tabela 11 – Resposta da 3.ª parte (atividade 4 – sessão 1)

RESPOSTA	**ALUNOS**				
	A1	**A2**	**A3/ A4**	**A5**	**A6**
Preserva o paralelismo dos lados (direção)	A	A	A	A	A
Mantém como invariante a posição do centro de homotetia	A	A	A	A	A
Preserva os ângulos entre os raios homotéticos e os lados homólogos (correspondentes)	A	A	A	A	A
Preserva os ângulos internos a cada figura	A	A	A	A	A
Tipo de resposta: Acerto (A), Erro (E)					

Atividade 05 (sessão 01)

Nessa atividade, todos os alunos responderam corretamente, pois perceberam que, em uma transformação por homotetia, os alinhamentos são preservados.

Atividade 06 (sessão 01)

Nessa atividade, os alunos deveriam, com base nos conhecimentos construídos até o momento, construir a imagem de uma figura transformada por homotetia. No arquivo disponibilizado para os alunos, estavam representados o centro de homotetia e a figura. Os alunos poderiam utilizar as ferramentas: “criar reta”; “criar ponto”; “criar paralela”; “criar segmento”; “criar polígono”. Dos alunos selecionados, 4 conseguiram atingir os objetivos (A1, A2, A3-A4). A dupla formada pela aluna A5 teve problemas com a construção, de modo que a imagem matinha as características, porém, não foi possível movê-la. Ao alterarmos a figura, contudo, a imagem acompanhava essa alteração preservando as propriedades. O aluno A6 não fez a atividade.

Atividade 07 (sessão 01)

Essa atividade tinha objetivos similares à anterior. Mudamos a figura, que, no lugar de um quadrilátero, passou a ser um triângulo, e a posição inicial do centro de homotetia no interior da figura. Os alunos A2 e A5 (que não obtiveram êxito na atividade anterior) conseguiram construir a imagem obedecendo às características da homotetia. Eles utilizaram para isso os recursos, apropriados, do programa que fazem com que as invariantes permaneçam com a manipulação. A dupla formada pelos alunos A3 e A4 tentou aproximar visualmente a resposta da prevista, porém, pode-se perceber visualmente pequenas variações que indicam que os lados homólogos não são paralelos e, ao se manipularem as propriedades, não são preservadas. Os alunos A1 (não teve tempo de fazer essa atividade) e A6 não responderam à questão.

Síntese das atividades da sessão 1

Na tabela 12, apresentamos um resumo das atividades realizadas. A primeira parte (A e B) diz respeito às características que os alunos perceberam e descreveram. Podemos observar que eles conseguiram identificar um grande número de propriedades. Algumas características que foram identificadas nessa etapa serão desenvolvidas nas próximas fases, de modo a uma melhor compreensão do que é homotetia. As falhas apresentadas neste quadro se restringem à solução da atividade 7 (já mencionada) e a erros cometidos pelo aluno A6, na resposta da terceira pergunta da atividade 4 A.

Tabela 12 – Síntese da sessão 1

RESPOSTA	**ALUNOS**				
	A1	**A2**	**A3/ A4**	**A5**	**A6**
A. Conhecimento construído na sessão 1					
A.1 Identificou algumas características da transformação (análise interfigural):					
A.1.1 Paralelismo	X	X	X	X	X
A.1.2 Centro de homotetia	X	X	X	X	X
A.1.3 Redução e ampliação em relação à posição do centro de homotetia		X	X		
A.1.4 A inversão após o centro de homotetia	X		X		
A.1.5 Os pontos homólogos são colineares ao centro de homotetia		X			
A.1.6 Mantém como invariante o centro de homotetia.	X	X	X	X	X
A.1.7 Preserva os ângulos entre os raios homotéticos e os lados homólogos (correspondentes):	X	X	X	X	X
A.2 Identificou algumas das características que permanecem entre a figura e a imagem (análise intrafigural):					
A.2.1 Percebeu as mudanças que ocorrem na imagem (amp., red. e inversão).				X	X
A.2.2 Semelhança	X		X		X
A.2.3 Proporcionalidade		X	X		X
A.2.4 Congruência de ângulos	X	X	X	X	X
A.2.5 Razão de semelhança					X
A.2.6 Preserva o alinhamento	X	X	X	X	X
B. O que muda na imagem quando:					
B.1 A figura está entre o centro e a imagem (ampliação)?	A	A	A	A	E
B.2 A imagem está entre o centro e a figura (redução)?	A	A	A	A	E
B.3 O centro está entre a imagem e a figura (inversão)?	A	A	A	A	E
C. Construir a imagem, dados o centro e a figura (quadrilátero + centro ext.)	A	A	A	A	N
D. Construir a imagem, dados o centro e a figura (triângulo + centro interior)	N	A	I	A	N

Respostas: Acerto (A), Erro (E), Aproximou-se da solução correta com falhas de precisão (I), Não respondeu (N).

Sessão 02

Nessa seção, introduzimos as ferramentas utilizadas para medir segmentos; depois, explicamos aos alunos como medir os segmentos e calcular a razão de homotetia. Uma vez construída a razão de homotetia de cada segmento, ao movimentarmos a figura ou a imagem, o valor da razão muda por igual (K =SA1/SA=SB1/SB=SC1/SC), acompanhando a transformação. Solicitamos dos alunos a identificação do que acontece quando o valor de K é maior que 1, é igual a 1, está entre 0 e 1 e quando é menor do que 0. Todos os alunos responderam corretamente a essa questão. Depois, perguntamos por que a medida de SA1 era expressa utilizando uma unidade (cm) e a razão K era expressa sem nenhuma unidade – todos responderam corretamente. Na tabela 13, temos os resultados dessa seção.

Tabela 13 – Resultados da sessão 2

RESPOSTA	**ALUNOS**				
	A1	**A2**	**A3/ A4**	**A5**	**A6**
1. Determinou as distâncias dos vértices dos triângulos ao centro de homotetia e a razão de homotetia.	A	A	A	A	A
2. O que acontece com a imagem (A1B1C1) quando o valor de K é igual a:					
a) K>1?	A	A	A	A	A
b) K = 1?	A	A	A	A	A
c) 0 < K < 1?	A	A	A	A	A
d) K < 0?	A	A	A	A	A
3. A medida SA1 expressa alguma unidade? Justifique.	A	A	A	A	A
4. A razão SA1/AS é expressa em alguma unidade? Justifique.	A	A	A	A	A
AP (%) = Aproveitamento. AP = [(Total questões realizadas – questões com erro)/ total questões realizadas] x 100.	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**
Respostas: Acerto (A), Erro (E), (I) Aproximou-se da solução correta com falhas de precisão, Não respondeu (N).					

Sessão 03

Na tabela 14, apresentamos os resultados para essa seção. A maioria dos alunos (83,33 %) respondeu de forma adequada às questões, atingindo os objetivos previstos. Uma das dificuldades que os alunos tiveram foi com a medição de ângulos usando o transferidor. Algumas duplas não sabiam como usar esse instrumento e tiveram que recorrer a outros alunos ou ao professor. A dupla formada pelo aluno A1 cometeu erros de precisão no posicionamento das figuras; um ponto que deveria ser marcado a 23,5 cm do centro foi marcado a 24,4 cm (um erro de 0,9 cm), e também na posição dos pontos nos raios homotéticos (pequeno desvio). Nessa mesma figura (A1), alguns pontos não ficaram exatamente em cima dos raios homotéticos. A dupla formada pelo aluno A6 foi a que cometeu o maior número de erros. Na primeira questão (tabela 14), ele respondeu algo completamente diferente do que foi previsto. Nessa questão pedimos para determinar a razão de homotetia (SA1/SA) e, com base nessa comparação, esperávamos que os estudantes fizessem relacionar-se essa razão às mudanças nas figuras (ampliação, redução, rotação). No lugar disso, A6 afirmou que os ângulos correspondentes eram congruentes. Trata-se da única dupla que ofereceu essa resposta. A dupla (do aluno A6), entretanto, acertou a posição dos dois desenhos de razão positiva, cometendo erros no desenho de razão negativa. Neste último, apesar de os pontos estarem sobre os raios homotéticos as distâncias não correspondem às razões de homotetia, e o paralelismo não foi preservado. Acreditamos que isso se deveu ao fato de que, na homotetia de razão negativa, existe uma maior dificuldade em se marcarem os pontos. Na quinta questão, o aluno, novamente, cometeu uma falha. Na quarta questão, a razão de homotetia era K=2/1 = 2 e, na quinta, K = ½. A dupla de A6 utilizou a mesma razão para a quarta e a quinta questões. Na figura 40, apresentamos um dos cartazes montados pela dupla A3/A4. Neste cartaz, observamos que os desenhos fixados com fita crepe estão com seus pontos homólogos alinhados com o centro de homotetia, o paralelismo foi preservado e a razão de homotetia foi aplicada de forma correta.

Tabela 14 – Resultados da sessão 3

RESPOSTA	**ALUNOS**				
	A1	**A2**	**A3/ A4**	**A5**	**A6**
1. Após medir os ângulos internos dos peixes e compara-los o que você pode afirmar?[24]	A	A	A	A	N
2. Com base na comparação dos lados correspondentes das figuras pode-se afirmar:					
a) Figura A1	A	A	A	A	E
b) Figura A2	A	A	A	A	E
c) Figura A3	A	A	A	A	E
3. Determinar a posição dos desenhos na folha usando os princ. homotetia.	I	A	A	A	I
4. Quanto à razão de homotetia para o desenho A1/A	A	A	A	A	A
5. Quanto à razão de homotetia para o desenho A2/A	A	A	A	A	E
6. Quanto à razão de homotetia para o desenho A3/A	A	A	A	A	A
AP (%) = Aproveitamento. AP = [(Total questões realizadas – questões com erro)/ total questões realizadas] x 100.	**100**	**100**	**100**	**100**	**42,9**
Respostas: Acerto (A), Erro (E), (I) Aproximou-se da solução correta com falhas de precisão, Não respondeu (N).					

[24] Consideramos como acerto (A) na resposta quando o aluno, ao comparar as medidas dos ângulos, respondeu a esta questão afirmando que os ângulos homólogos são possuem a mesma medida.

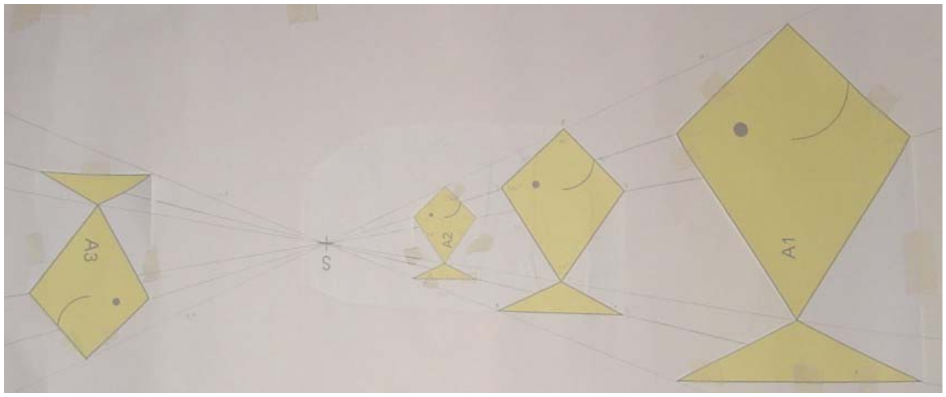


Figura 40 – Cartaz montado pela dupla formada pelos alunos A3 e A4

Sessão 04

Essa seção foi dividida em 7 atividades.

Na primeira atividade, os alunos tiveram dificuldades em determinar a posição da imagem (X1). Inicialmente, eles tentaram marcar o valor da razão em um segmento para determinar a posição de X1, pois estavam condicionados à aplicação dos números em uma régua ou instrumento do programa para determinar a imagem. Esse problema foi superado depois de várias tentativas. A dupla formada pelo aluno A1 descreve esse problema quando assinala que "no primeiro momento não conseguimos porque raciocinamos a fazer a partir de uma noção para a medida numérica"[sic]. O mesmo problema foi relatado pela dupla formada pelo aluno A2: "dificuldade: fixar o ponto X1 com a medida encontrada". No final, todos os alunos conseguiram chegar à solução (fig.41).

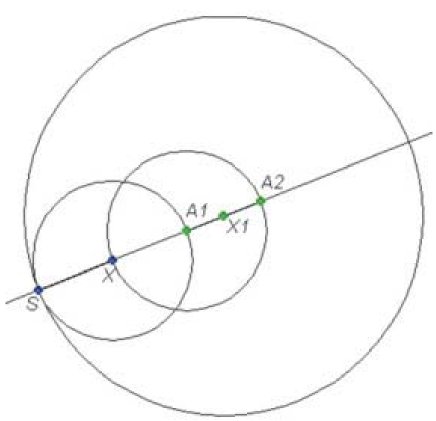


Figura 41 – Solução At. 1 (S4) dupla formada pelo aluno A1.

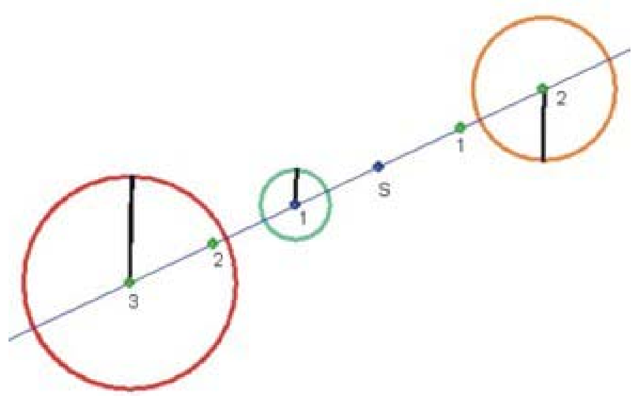


Figura 42 – Situação inicial At. 4 (S4)

Pelos resultados das atividades dessa seção, na tabela 15, observa-se um aproveitamento acima da média (entre 90% e 69,2%). Em todas as atividades, os alunos não apresentaram erros nas questões que exigiam a aplicação do conhecimento de homotetia para a construção de uma figura. A maioria dos erros (84,6 %) foi nas questões em que o objetivo era levar os alunos a identificarem as condições necessárias para determinar uma única imagem em uma transformação por homotetia. Os alunos deveriam constatar que, em uma transformação por homotetia, uma vez definido o centro de homotetia, a posição e a razão de homotetia, é possível determinar uma única imagem.

Tabela 15 – Resultados da sessão 4

RESPOSTA	**ALUNOS**				
	A1	**A2**	**A3 / A4**	**A5**	**A6**
1. Construindo a imagem com razão positiva (ponto)					
a) Construiu a imagem utilizando o programa de forma adequada	A	A	A	A	A
b) Percebeu que, com centro, razão e figura, teremos uma única imagem.	A	A	E	A	E
c) A posição da imagem é resultante da figura, razão e centro.	A	E	A	A	A
d) Com o centro e a figura, não determinaremos a posição exata da imagem.	E	A	A	E	A
2. Construindo a imagem com razão positiva (triângulo)					
a) Construiu a imagem utilizando o programa de forma adequada	A	A	A	A	I
b) Ao movimentarmos o centro, a razão permanece constante (no arquivo)	A	A	A	A	A
c) Com a figura e a razão, não podemos determinar exatamente a posição da imagem.	E	A	E	E	E
d) Uma vez definidas a figura e a razão de homotetia, é necessário o centro de homotetia para determinar a posição exata da imagem.	E	A	A	E	A
3. Construir a imagem com razão negativa (triângulo)					
a) Construiu a imagem utilizando o programa de forma adequada	A	A	A	A	A
b) Em uma transformação homotética, cada ponto da imagem é colinear ao ponto correspondente na figura e o centro de homotetia.	A	A	A	A	A
c) Em uma homotetia negativa, a direção é preservada, e o sentido, mudado	A	A	A	A	A
4. Utilizando circunferências, definidos o centro, a imagem e a figura					
a) Qual a razão de homotetia do círculo de centro O1?	A	A	A	A	E
b) Qual a razão de homotetia do círculo de centro O2?	A	A	A	A	E
5. Utilizando a ferramenta “criar homotetia” com razão positiva					
a) Utilizou de forma adequada a ferramenta	A	A	A	A	N
b) Quando $\overline{OP} > \overline{MN} \rightarrow K < 1$	A	A	A	A	N
c) Quando $\overline{OP} = \overline{MN} \rightarrow K = 1$	A	A	A	A	N
d) Quando $\overline{OP} < \overline{MN} \rightarrow K > 1$	A	A	A	A	N
e) Quando $K > 1$	A	A	A	A	N
f) Quando $K = 1$	A	A	A	A	N
g) Quando $0 < K < 1$	A	A	A	A	N
6. Utilizando a ferramenta “criar homotetia” com razão negativa					
a) Utilizou a ferramenta de forma adequada	A	A	N	A	N
b) Quando $0 > K > -1$	A	A	N	A	N
c) Quando $K = -1$	A	A	N	A	N
d) Quando $K < -1$	A	A	N	A	N
7. Aplicando o conhecimento de homotetia para resolução de problemas					
a) Resolveu o problema encontrando a solução pedida	A	N	N	A	N
AP (%) = Aproveitamento. AP = [(Total questões realizadas – questões com erro)/ total questões realizadas] x 100.	88,0	95,8	90,0	88,0	69,2

Respostas: Acerto (A), Erro (E), (I) Aproximou-se da solução correta com falhas de precisão, Não respondeu (N).

Durante a entrevista, refizemos essa pergunta ao aluno A2, que ofereceu uma resposta correta, afirmando que, ao fixarmos o valor da razão, o centro e a figura, poderíamos construir apenas uma imagem. Ao questionarmos sobre a forma como ele havia respondido, disse acreditar que deve ter desconsiderado a razão, pois, variando a razão, pode-se representar infinitas imagens. O aluno A3, na entrevista, afirmou que era necessário definir a distância ao centro, caso contrário, teríamos infinitas imagens. Quando foi questionado sobre se a razão de homotetia não daria essa distância, ele mudou de opinião, percebendo a falha na sua resposta. O aluno A4, ao ser questionado sobre esse problema, considerou que se poderia ter infinitas imagens. Perguntamos a ele se, mantendo a figura, o centro de homotetia e não podendo alterar o valor da razão, quantas imagens poderíamos representar. Ele percebeu que teríamos apenas uma imagem.

As respostas obtidas indicam que houve problemas na interpretação do enunciado. O restante dos erros nas questões (15,4%), responsabilidade do aluno A6, foi na atividade 4 que exigia do aluno, através da proporção, determinar a razão de homotetia entre circunferências (figura 42) . Essa era uma questão nova, que se diferenciava das demais. Muitos licenciandos, inicialmente, nessa questão, tentaram utilizar o instrumento de medição para as distâncias. Depois de algumas tentativas, esclarecemos que não seria necessário medir, o que levou os alunos a procurarem a estratégia vencedora. O aluno A6, no lugar de dividir $\overline{S1}/\overline{S3}$ e $\overline{S2}/\overline{S3}$ (considerando S o centro de homotetia, **O** como centro da figura, **1** e **2** como centro das imagens das circunferências transformadas por homotetia) para obter as respostas esperadas (1/3 e -2/3), considerou como resposta para essa atividade os números 3 e – 2.

4.1.2 Comparação do pré-teste homotetia com o pós-teste

Apresentamos, a seguir, uma análise comparativa das questões. A primeira pergunta foi feita em uma data diferente das demais. Queríamos, inicialmente, saber se os alunos sabiam o que era homotetia. Com base na resposta, formulamos as demais perguntas.

1.ª questão

Na primeira pergunta do pré-teste, identificamos que os alunos não conheciam o que era homotetia. No pós-teste, os alunos citaram algumas das características que haviam aprendido durante a seqüência (na pergunta, não solicitamos que o aluno citasse todas as características). Na tabela 16, apresentamos uma síntese das respostas a essa primeira pergunta.

Com base na tabela 16, observamos que todos os alunos citaram o paralelismo. Essa característica permite, na maioria dos casos, distinguir uma figura transformada diretamente por homotetia de uma outra figura semelhante, sendo, portanto uma das características mais relevantes na transformação. Acrescentamos, nesse quadro, a expressão "mesma forma", que apesar de ser usual, é imprecisa (a aluna A5 pode esta se referindo a semelhança, mas podem ser apenas características gerais como triângulo, quadrilátero). O aluno A6 apontou a homotetia como recurso para auxiliar no estudo da semelhança de triângulos.

Tabela 16 – Resultado da 1.ª questão do pré-teste/pós-teste

01 – O QUE VOCÊ COMPREENDE POR HOMOTETIA?												
RESPOSTA	**ALUNOS**											
	A1		A.2		A.3		A.4		A.5		A.6	
	A	D	A	D	A	D	A	D	A	D	A	D
A Não conhece	X		X		X		X		X		X	
B Conhece		X		X		X		X		X		X
C. Justificou (característica)		X		X		X		X		X		X
C.1 Apresentou algumas características da transformação (análise interfigural):												
C.1.1 Paralelismo		X		X		X		X		X		X
C.1.2 Centro de homotetia		X								X		X
C.1.3 Razão de homotetia								X		X		
C.2 Apresentou algumas das características que permanecem entre a figura e a imagem (análise intrafigural):												
C.2.1 Semelhança		X		X				X				X
C.2.2 Mesma forma									X	X		
C.2.3 Proporção						X		X		X		X
C.2.3 Ângulo congruente						X						X
C.2.4 Razão constante		X				X						
C.2.5 Congruência				X						X		X
C.2.6 Ampliação e redução		X		X		X				X		X
Obs.: Para cada aluno, temos a resposta A (antes – pré-teste) e D (depois – pós-teste)												

Como, na primeira questão do pré-teste, identificamos que os alunos não sabiam o que era homotetia, formulamos as demais perguntas para verificar que noções geométricas relacionadas com a homotetia o aluno poderia identificar. Entre essas noções, temos as características que podem ser observadas na comparação entre elementos das figuras (análise intrafigural) e as características que dependem do posicionamento dos elementos no plano (análise interfigural). As primeiras características fazem parte do conceito de semelhança, que inclui a razão de semelhança, a congruência dos ângulos correspondentes, a proporcionalidade dos lados correspondentes, a ampliação e redução de figuras. Entre as características que dependem do posicionamento, temos a convergência das retas definidas pelos pontos homólogos para um ponto (centro de homotetia), o paralelismo, a ampliação e a redução em relação ao centro de homotetia, a relação entre figura e a imagem, o centro de homotetia. Com base nesses elementos, organizamos as demais questões, apresentadas a seguir.

2.ª questão

Uma vez que, no pré-teste, o aluno não conhecia o que era homotetia, nós procuramos avaliar algumas características que distinguiam uma figura ampliada de outra, não ampliada. Na segunda questão (tabela 17), procuramos identificar se o aluno sabe o que não é uma ampliação/redução. No pré-teste, todos os alunos assinalaram que a figura B não corresponde à ampliação de A. Dos alunos selecionados, 4 justificaram afirmando que elas não eram proporcionais; um aluno não justificou (A3): e um outro utilizou o termo esticamento, afirmando que uma medida havia sido preservada e a outra, esticada. Esse termo foi usado por outros alunos que não foram selecionados. Um desses alunos, que era webdesign, utilizou uma representação comum nos programas de edição de imagem, em que, ao se clicar em uma figura, aparecem pontos em que o usuário pode esticar uma figura em apenas um sentido.

O resultado desse pré-teste indica que os alunos já possuíam uma percepção do que não é ampliação. No pós-teste 5, os estudantes perceberam que não se tratava de uma ampliação, e um aluno considerou que se tratava de uma ampliação (A1). Apesar de ter sido apenas um aluno, esse resultado fugiu às nossas expectativas, uma vez que o estudante mencionado respondeu corretamente, à altura do pré-teste e, durante a seqüência, teve um bom desempenho. Ele procurou justificar, afirmando: “porque ela representa a figura A com aumento em suas dimensões”. Essa resposta pode indicar a idéia de um aumento proporcional, o que tornaria a justificativa aceitável, se isso ocorresse. Acreditamos que, nessa questão, ele não fez nenhuma medição, utilizando apenas a percepção visual para responder. Para solucionar essa dúvida, buscamos, na entrevista, uma resposta. Mostramos a resposta que o aluno deu a essa questão no pré-teste, em que ele afirma: “verifiquei relações diferentes na construção de B. Destaco a relação em (b) na figura B”. Essa relação corresponde a um segmento demarcado pelo aluno na figura. Na entrevista, ele procurou justificar, dizendo que, ao comparar as figuras, as razões dos lados correspondentes deveriam ser constantes, o que não acontece. Essa entrevista foi feita após o pós-teste, o que indica que, no pós-teste, o aluno, apesar de saber o que caracteriza a ampliação, colocou a resposta sem se preocupar em medir e comparar as razões, sendo levado ao erro na percepção visual. Um problema que observamos no pós-teste é que vários alunos utilizaram o conhecimento de homotetia para justificar a sua resposta. Lembramos que a homotetia pode justificar a semelhança, porém, nem toda semelhança é uma homotetia. A utilização de elementos de uma homotetia (centro, paralelismo etc.), para justificar a resposta, não é adequado nesse caso. Os problemas expostos não são decorrentes da seqüência didática, mas apontam para a necessidade do estudo da semelhança que não era o objetivo da seqüência.

Tabela 17 – Resultados da 2.ª questão do pré-teste/pós-teste homotetia.

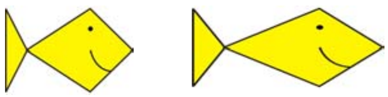


Figura A **Figura B**

02– Compare a figura **A** com a figura **B**. Podemos dizer que a figura **B** foi ampliada da **A**? Justifique a sua resposta.

	ALUNOS											
	A1		**A.2**		**A.3**		**A.4**		**A.5**		**A.6**	
RESPOSTA	**A**	**D**	**A**	**D**	**A**	**D**	**A**	**D**	**A**	**D**	**A**	**D**
1.1 Erro		X										
1.2 Acerto	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2. Justificou	X		X			X		X	X	X	X	X
3. Utilizou justificativas adequadas												
3.1 Não são semelhantes												
3.2 Não são proporcionais[25]	X		X			X			X	X	X	
3.3 Os ângulos são diferentes									X		X	X
4. Apresentou argumentos que se aplicam apenas na homotetia, sendo inadequados para justificar essa situação.												
4.1 Não possui centro de homotetia				X								
4.2 Não possui razão de homotetia				X				X				
4.3 Não existe paralelismo												X
4.4 A figura não foi ampliada pois não obedece as às regras da homotetia												X
5. Utilizou expressões imprecisas												
5.1 A segunda figura sofreu um esticamento e não uma ampliação[26].							X	X				
Obs.: Para cada aluno, temos a resposta A (antes – pré-teste) e a D (depois – pós-teste)												

3.ª questão

Na tabela 18, apresentamos os resultados para essa questão no pré-teste e pós-teste. Nos dois casos, nenhum dos alunos apresentou uma resposta errada. Todos perceberam que se tratava de uma ampliação. Os alunos A1 e A5, no pós-teste, apresentaram duas justificativas que são imprecisas (aumento nas dimensões e mesma forma).

---

[25] O aluno A2 afirmou que B não cresce proporcionalmente em relação a A.

[26] Justificativa apresentada pelos alunos

Tabela 18 – Resultados da 3.ª questão do pré-teste/pós-teste homotetia.

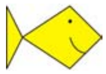


Figura A

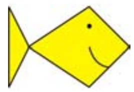


Figura B

03 – Compare a figura **A** com a figura **B.** Podemos dizer que a figura **B** foi ampliada da **A**? Justifique a sua resposta.

	ALUNOS											
	A1		**A.2**		**A.3**		**A.4**		**A.5**		**A.6**	
RESPOSTA	**A**	**D**	**A**	**D**	**A**	**D**	**A**	**D**	**A**	**D**	**A**	**D**
1.1 Erro												
1.2 Acerto	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2. Justificou			X	X	X	X	X	X	X	X	X	
3. Utilizou justificativas adequadas (análise intrafigural)												
3.1 Justificou aplicando semelhança de triângulos.											X	
3.2 São proporcionais	X		X		X		X	X	X	X		
3.3 Os ângulos homólogos são congruentes				X					X		X	
3.4 Razão constante				X								
4. Apresentou argumentos ligados ao conceito de homotetia que se aplicam nesse caso (análise interfigural).												
4.1 Paralelismo				X				X				
4.2 Centro de homotetia				X		X						
5. Procurou justificar utilizando expressões imprecisas												
5.1 Aumento nas dimensões		X										
5.2 Mesma forma										X		

Obs.: Para cada aluno, temos a resposta A (antes – pré-teste) e a D (depois – pós-teste)

4.ª questão

Tabela 19 – Resultado da 4.ª questão.

04 – A figura **A** foi transformada por homotetia na figura **B**. Quais os elementos que caracterizam a homotetia? Justifique a sua resposta.

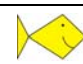


Figura A

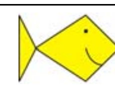


Figura B

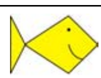
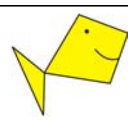
RESPOSTA	**ALUNOS**											
	A1		A.2		A.3		A.4		A.5		A.6	
A Falha		**X**										
B. Justificou				**X**	X	X	X	**X**	X	**X**	X	
C. Apresentou algumas características da transformação (análise interfigural):												
D.1 Paralelismo				**X**		**X**	X	**X**		**X**		
D.2 Direção										**X**		
D.3 Centro de homotetia				**X**						**X**		
E. Apresentou algumas das características que permanecem entre a figura e a imagem (análise intrafigural):												
E.1 PROPORÇÃO				X		**X**		**X**	X	**X**	X	
E.2 RAZÃO CONSTANTE				X	X					**X**		
E.3 SEMELHANÇA				X				**X**				
E.4 SEMELHANÇA TRIÂNGULOS											X	
Ângulos congruentes							X	**X**	X	**X**	X	
F. Respostas imprecisas que não justificam												
F.1 Posição (imprecisa)	X								X			
F.2 FORMA (imprecisa)									X	**X**		
F.3 AMPLIAÇÃO			X		X							

Obs.: Os termos posição/forma de visão e forma, apesar de serem pouco precisos, foram mantidos para indicar a justificativa usada pelo aluno.

Nessa questão, apresentamos duas figuras homotéticas e procuramos avaliar, no pré-teste, se os alunos conseguem identificar características desta transformação. No pós-teste, procuramos avaliar os efeitos da seqüência. Nesse caso, não poderia haver erro no pré-teste. No pós-teste, houve um erro (marcado na tabela) que foi cometido pelo aluno A1. Como o centro de homotetia estava fora dos limites do papel, esse aluno considerou que não havia centro de homotetia e, logo, não se tratava de uma transformação por homotetia. Esse tipo de problema não poderia ocorrer no Tabulae e não ocorreu na seção em que utilizamos o papel para marcar a transformação. Os demais alunos conseguiram perceber que o centro estava fora dos limites do papel. Os alunos A2, A3, A4 e A5 apresentaram várias características da transformação no pós-teste, em número maior do que no pré-teste. O aluno A6, no pós-teste, procurou justificar afirmando: “Sim, são figuras homotéticas, pois são mantidas as mesmas características da figura reduzida. Mantêm-se as correspondências e suas regras de homotetia”. Na sua resposta, não apresentou características que possam se enquadrar como justificativas. Isso não significa que ele não conheça essas características, apenas, que, no instrumento utilizado para avaliá-las, ele interpretou certas afirmativas com suficientes para caracterizar a sua resposta.

5.ª questão

Tabela 20 – Resultados da 5.ª questão.

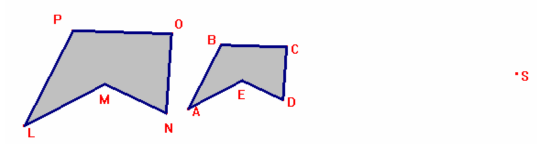
 **Figura C**  **Figura D**	05 – A figura **C** e a figura **D** não são homotéticas. Justifique por quê.											
	ALUNOS											
	A1		A.2		A.3		A.4		A.5		A.6	
RESPOSTA	A	**D**	A	**D**	A	**D**	A	**D**	A	**D**	A	**D**
A. Justificou		**X**		**X**		**X**	X	**X**		**X**		**X**
A.1 Paralelismo (não)		**X**		**X**		**X**	X			**X**		
A.2 Centro de homotetia (não)		**X**		**X**				**X**		**X**		**X**
A.3 Direção (não)										**X**		

Nessa questão, apresentamos duas figuras semelhantes, porém, não foram transformadas diretamente por homotetia (nesse exemplo, a figura D é o resultado do produto de uma homotetia por uma rotação). A justificativa para essa questão seria o não-paralelismo (ou os segmentos homólogos não estão na mesma direção), a não-existência de centro de homotetia. Qualquer outra resposta, como as ligadas à semelhança (congruência de ângulos, proporção etc), não é justificativa. No pré-teste, apenas um aluno (A4) apresentou uma justificativa adequada (paralelismo). No pós-teste, todos os alunos apresentaram uma ou mais justificativas adequadas.

6.ª questão

Nessa questão, acrescentamos o centro de homotetia. Queremos identificar se os alunos conseguem perceber a relação com o centro de homotetia. Procuramos limitar a análise das respostas que identificam a relação entre o ponto S, a figura e a imagem. Isso pode ser feito através do traçado dos raios homotéticos ou por uma descrição em que se percebe essa associação. Na tabela 21, apresentamos os resultados. No pré-teste, apenas dois alunos fizeram essa associação; e, no pós-teste, todos os alunos fizeram a ligação.

Tabela 21 – Resultados da 6.ª questão.

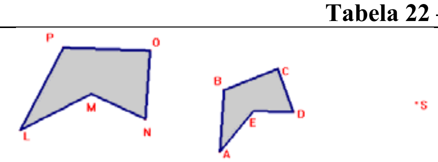


	05 – A figura ABCDE foi transformada por homotetia na figura PONML. Quais os elementos que caracterizam a homotetia? Justifique a sua resposta.											
	ALUNOS											
	A1		A.2		A.3		A.4		A.5		A.6	
RESPOSTA	A	**D**	A	**D**	A	**D**	A	**D**	A	**D**	A	**D**
A. Percebeu a relação entre as figuras e o centro		**X**	**X**	**X**	**X**			**X**		**X**		**X**

7.ª questão

Adotamos os mesmos critérios usados na questão anterior. Na tabela 22, apresentamos os resultados. No pré-teste, apenas o aluno A2 percebeu que o ponto, nessa configuração, não está alinhado com os vértices correspondentes. No pós-teste, todos os alunos perceberam essa dissociação.

Tabela 22 – Resultados da 7.ª questão.



	06 – A figura ABCDE e a figura LMNOP não são homotéticas. Justifique por que.											
	ALUNOS											
	A1		A.2		A.3		A.4		A.5		A.6	
RESPOSTA	A	**D**	A	**D**	A	**D**	A	**D**	A	**D**	A	**D**
A. Percebeu que não existe relação entre as figuras e o centro de homotetia.		**X**		**X**	**X**	**X**		**X**		**X**		**X**

4.1.3 Entrevistas homotetia

As entrevistas sobre homotetia foram úteis para tirar dúvidas sobre a forma como os alunos responderam às atividades. Elas foram realizadas em um período de recesso escolar, de modo a não criar nenhum tipo de constrangimento ou receio quanto à maneira como deveriam responder. Elas serviram para indicar se uma resposta não prevista correspondia a um desconhecimento do assunto ou a uma interpretação errônea dos alunos. Percebemos que, muitas vezes, tratava-se da maneira como os alunos interpretavam as questões. Nas etapas anteriores, utilizamos essas respostas para elucidar certas questões. As entrevistas também foram importantes como depoimentos dos alunos sobre o processo de aprendizagem do conceito. O pós-teste foi realizado quase três meses depois da seqüência didática, em um período de recesso escolar (ver quadro 17, p. 94). Esse distanciamento foi percebido e comentado pelo aluno A2. Ao perguntamos a este aluno se a forma de ensino utilizada foi melhor do que a forma tradicional, ele afirmou "tanto é, que a gente veio fazer esse teste com o senhor e eu não tinha estudado. Não precisei nem relembrar. Não é relembrar, são coisas que a gente já tem naturalmente". Um outro ponto importante, assinalado pelo aluno A1, foi que o conhecimento não foi decorado; cada aluno pode interpretar e construir a sua visão sobre o assunto e, com isso, aprender de maneira significativa. Podemos perceber isso nesse depoimento:

> No início, a gente teve dificuldades em perceber qual era o objetivo ou a forma como ocorreria a aprendizagem. Ou se a gente conseguiria aprender, mas, quando a gente começou, principalmente através do computador, a ser guiado e a responder às perguntas e movimentar, como se a gente tivesse visualizando e manipulando os objetos (só que através do computador), a gente pôde, realmente, perceber que estava se desenvolvendo e aprendendo. E de uma forma que não foi decorada ou repassada. A gente pode realmente desenvolver a aprendizagem e construir. Dar os nossos próprios conceitos.

Para o aluno A6, as aulas com a geometria dinâmica foram muito importantes para a construção do conhecimento sobre homotetia. Ele afirmou que:

> As aulas no computador, lá no centro de informática, por si só foram boas [...] Eu consegui ver isso tudo que eu não conseguia ver aqui. Que eu não conseguia ver tão nitidamente, eu consegui ver lá com precisão. Com mais clareza. Quer dizer que aquelas aulas foram muito válidas. Até hoje, estou com isso na cabeça [...] e nunca mais eu fui lá ao centro de informática

4.2 Resultados concepção de ensino-aprendizagem (artigo)

Os resultados desta seção estão apresentados em formato de artigo, como segue.

Avaliação dos Efeitos de uma Seqüência Didática sobre a Concepção de Ensino-Aprendizagem dos Licenciandos em Matemática

Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade[1]; Heloisa Flora Brasil Nóbrega Bastos[2]
[1]Mestrando/UFRPE; [2]Profª Orientadora do DE/UFRPE

Resumo

Neste artigo, apresentamos parte dos resultados da dissertação de mestrado desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências da UFRPE, em que procuramos responder a duas questões: O uso de uma seqüência didática, com utilização dos princípios da teoria das situações didáticas propostos por Brousseau (1986), facilita a construção do conceito de Homotetia? Ao utilizar essa metodologia, os licenciandos mudam seus conceitos sobre o papel do professor no ensino de Matemática? Neste artigo, apresentamos os resultados referentes à segunda questão. A pesquisa foi realizada com alunos da disciplina Desenho Geométrico, oferecida no 6.º período do Curso de Licenciatura em Matemática da UFRPE.

Palavras-chave: Construtivismo, Teoria das Situações Didáticas, Ensino de Geometria, homotetia, papel do professor.

Abstract

In this article we present the results of the Master´s dissertation developed in the Postgraduate Programme in the Teaching of Science at UFRPE, in which we seek to answer two questions: first, does the use of a didactic sequence, utilising the principles of didactic situations proposed by Brousseau (1986), help to construct the concept of homothety? Second, when this methodology is used, do the student teachers change their concepts concerning the role of the teacher in the teaching of mathematics? In this article we present the results concerning to the second question. The research was carried out with student teachers studying geometric drawing, offered in the sixth semester of the mathematics teacher education course in mathematics at UFRPE.

Keywords: Constructivism. Theory of didactic situations. Teaching of geometry. Homothety. Teacher´s role.

Introdução

Na formação de docentes em Matemática, dois aspectos são relevantes: o conhecimento de Matemática e o uso de uma prática pedagógica que reflita as atuais necessidades de formação do cidadão. Esses conhecimentos deveriam estar interligados, contudo, não é o que acontece, como ressalta Pires (2000, p.11), ao falar sobre os cursos de Licenciatura em Matemática:

> Isso faz com que um dos problemas centrais destes cursos seja a falta de articulação entre conteúdos e metodologias, especificamente entre o saber matemático e saber pedagógico, embora se saiba que abordar de forma associada os conteúdos e o respectivo tratamento didático é condição para uma adequada formação docente.

A mudança de uma prática docente para outra requer, além do saber pedagógico e do saber matemático, a combinação dos dois. Para que isso ocorra, o licenciando terá que mudar sua concepção de ensinar Matemática, que foi formada ao longo da sua vida (desde o Ensino Fundamental às vivências na Universidade), para uma nova, na qual articule o saber pedagógico adquirido no curso de licenciatura[27] com seu saber matemático. Esse processo pode levar a diferentes posturas, como, por exemplo: pensar que o que aprendeu nas disciplinas pedagógicas é adequado para o ensino dos conteúdos dessas disciplinas, mas que não serve para ensinar Matemática; considerar válidos esses conhecimentos, mas não saber como aplicá-los em um outro contexto.

Acreditamos que uma forma de mudar a concepção de ensino seja a vivência de uma prática pedagógica que combine o saber matemático com o saber pedagógico. Esse saber pedagógico é influenciado por diferentes teorias de aprendizagem. Nos anos 60 e 70 as teorias conexionista ou teoria E – R (estímulo-resposta) tiveram "uma enorme influência em materiais e métodos usados em sala de aula, no ensino de qualquer disciplina" (MOREIRA, 1999, p.49). Nesse período, destaca-se o trabalho de Skinner. A concepção de Skinner é periférica. Ele se preocupava essencialmente com os processos de estímulos e respostas, não levando em consideração o que ocorre na mente do indivíduo. Um exemplo de aplicação das teorias de Skinner é a Instrução Programada. Nos anos 80, essas teorias entraram em declínio. Uma das principais críticas a esse enfoque era a ênfase na aprendizagem mecânica, automática em vez de se buscar a aprendizagem significativa (MOREIRA, 1999). Para muitos professores cuja prática foi influenciada (direta ou indiretamente) por essas teorias,

[27] Influenciado pelas teorias de aprendizagem construtivistas e humanistas.

basta organizar o conteúdo de forma adequada e transmiti-lo, para que o receptor (aluno) possa aprender. Através de listas de exercícios e provas, o professor pode conferir se a mensagem foi adequadamente captada e organizada tal como foi transmitida. Eles funcionam também como estímulos ou punições. Neste artigo, o termo “transmitir o conhecimento” e ensino “tradicional” estão, na maioria das vezes, ligados a essa antiga prática. Em contrapartida, temos as teorias de aprendizagem classificadas como construtivistas, nas quais há uma postura que “implica deixar de ver o aluno como um receptor de conhecimentos, não importando como os armazena e organiza em sua mente” (MOREIRA, 1999, p. 5). No construtivismo, o aluno passa a atuar diretamente como agente construtor do seu conhecimento.

Em paralelo a essas teorias de aprendizagem e influenciada por elas surgiu, no campo da Matemática, a área de didática da Matemática. Em um primeiro momento, o ensino de Matemática “era considerado uma arte e, como tal, dificilmente suscetível de ser analisado, controlado e submetido a regras” (CHEVALLARD et al., 2001, p. 73). Com o desenvolvimento da didática da Matemática, surge, em oposição à perspectiva anterior, uma visão de ensinar Matemática que Chevallard chama de clássica. Nela, destaca-se a “necessidade de analisar os processos envolvidos na aprendizagem da Matemática para poder incidir sobre o rendimento dos alunos” (idem). Essa noção de didática da Matemática possuía algumas limitações, como não incluir como objeto de estudo as noções de “ensinar Matemática” e “aprender Matemática”. A fim de superar essas limitações, surge uma nova concepção, na qual o conhecimento matemático passa a ser considerado como objeto de estudo da didática da Matemática, e não como noções transparentes (não-questionáveis). Esse novo paradigma da didática da Matemática tem início nos anos 70, quando o pesquisador francês Guy Brousseau:

> vislumbrou, pela primeira vez ... a necessidade de a didática utilizar um modelo próprio da atividade Matemática, visto que os modelos epistemológicos usuais não haviam sido construídos para responder aos mesmos problemas que a didática coloca. Corresponde, historicamente, às primeiras formulações da Teoria das Situações[28] (CHEVALLARD et al., p.77)

Uma situação didática estabelece diferentes relações entre o professor, o aluno e o saber. Essas relações envolvem vários conceitos, como o de transposição didática, contrato didático, obstáculos epistemológicos. Para que ocorra uma situação didática, devem estar

---

[28] Teoria das situações didáticas

presentes o professor, o aluno e o saber. No entanto, eles são insuficientes para englobar todo o "fenômeno cognitivo", sendo necessário o estabelecimento de "outros elementos do sistema didático como: objetivos, métodos, posições teóricas, recursos didáticos, entre outros" (PAIS, 2002, p. 66). Na teoria das situações didáticas, Brousseau procura estabelecer relações entre o matemático, o aluno e o professor. O matemático, para comunicar a sua descoberta, utiliza uma linguagem que não corresponde ao caminho utilizado para chegar à descoberta. Essa forma de apresentar é justificável, tendo em vista a necessidade de validar o seu conhecimento. Neste processo, "o produtor do saber despersonaliza, descontextualiza e destemporaliza o mais possível o resultado" (BROUSSEAU, 1986, p.36). O trabalho do aluno, em alguns momentos, deve ser comparado ao do cientista – ele não deve simplesmente, aplicar as definições e os teoremas. Tal como o cientista, o aluno deve encontrar boas questões, de modo a formular modelos, linguagens, conceitos e trocar experiências com outros alunos, conduzindo à descoberta. Neste processo, o aluno deve "reconhecer os que estão de acordo com a cultura, os que o ajudam e são úteis" (idem). O professor, então, deve "imaginar e propor aos alunos situações que eles possam viver e que dentre as quais os conhecimentos vão aparecer como a solução ótima e revelável aos problemas postos" (idem). Por fim, o aluno deve ser conduzido a redescontextualizar e redespersonalizar seu saber de modo a identificar a sua produção com o saber científico e cultural da sua época (idem).

Brousseau organiza as situações didáticas em dois momentos: a devolução e a institucionalização. Na devolução, o professor deve fazer uma escolha adequada de problemas, de tal forma que o aluno os aceite como seus e que possam conduzi-lo a agir, falar, refletir a partir da sua interação com o problema. Ele classifica esses momentos como situações adidáticas, uma vez que, neles, o "mestre se recusa a intervir como aquele que propõe os conhecimentos que ele quer ver aparecer" (BROUSSEAU, 1986, p.49, tradução livre). Na institucionalização, o professor procura relacionar esse conhecimento produzido pelo aluno com "o saber cultural ou científico e com o projeto didático, dá uma leitura dessas atividades e lhe dá um status" (p. 88). Essas situações didáticas vêm sendo empregadas em diversas pesquisas (ARAÚJO, 2000; MABUCHI, 2000; PATAKI, 2003; PRETTI, 2002; SOUZA, 2001).

Neste artigo, apresentamos parte dos resultados de uma pesquisa que procura avaliar os efeitos de uma seqüência didática, em que estão previstas essas situações adidáticas e de institucionalização, sobre a concepção de ensino-aprendizagem de Matemática e sobre a construção do conceito de homotetia. Parte dessa seqüência foi construída utilizando o Tabulae, um programa de geometria dinâmica que vem sendo desenvolvido pelo Instituto de

Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Participaram dessa pesquisa alunos matriculados na disciplina Desenho Geométrico, oferecida no sexto período do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE). Neste artigo, limitar-nos-emos a apresentar os resultados que tratam da mudança de concepção de ensino-aprendizagem de Matemática.

Material e métodos

Como metodologia de pesquisa, utilizamos elementos da Engenharia Didática, que constitui uma "forma de sistematizar a aplicação de um determinado método na pesquisa didática" (PAIS, 2001, p.100). Nesta pesquisa, o referido método é utilizado para construir e avaliar os efeitos de uma seqüência didática que emprega elementos da teoria das situações didáticas de Brousseau. A engenharia didática se divide em quatro fases (ARTIGUE, 1992):

- Análises preliminares;
- Concepção e análise a priori;
- Experimentação;
- Análise a posteriori e validação.

Na primeira fase (análise preliminar), aplicamos dois pré-testes. O primeiro foi elaborado para avaliar a concepção de ensino-aprendizagem dos alunos. No segundo, procuramos identificar as concepções prévias sobre homotetia. Na segunda fase, (concepção e análise a priori), com base nos resultados obtidos nos dois pré-testes, foi feita uma análise dos conhecimentos prévios dos alunos. Ainda nessa fase, com relação à concepção, tendo-se por base os resultados dessa análise, foi construída a seqüência didática aplicada na terceira fase (experimentação).

A seqüência didática foi dividida em duas partes. Na primeira, tivemos quatro sessões, duas aos sábados (dias 15 e 22/05/04, com 4 horas cada) e duas durante a semana (dias 17 e 20/05/04, com 1 hora e 20 minutos cada). Das quatro sessões, três foram realizadas com um programa de computador chamado Tabulae. Na terceira sessão (dia 20/05/04), foram usados apenas instrumentos tradicionais de desenho, como transferidor, régua e compasso. As atividades desenvolvidas nessas quatro sessões foram realizadas em duplas. Em cada uma das sessões, os alunos foram conduzidos a passar por situações adidáticas (ação, formulação e validação); ao final de cada sessão, tivemos a institucionalização. Na segunda parte da seqüência, tivemos 5 sessões (dias 31/05, 03/06, 07/06 (2 sessões), 10/06). Em cada sessão, uma equipe com até 6 alunos deveria ministrar uma aula de 40 minutos sobre homotetia, que seria utilizada para avaliar a compreensão sobre o conteúdo e, de forma indireta, as concepções sobre ensino, após terem vivenciado uma metodologia construtivista. As sessões também se constituíam como um importante momento para reflexão sobre a seqüência vivenciada, fazendo parte, dessa forma, da experimentação.

Após a seqüência, passamos para a 4.ª e última etapa (análise a posteriori e validação). Os materiais utilizados nessa etapa foram: o pós-teste (aplicado após a seqüência didática e similar ao pré-teste, aplicado na primeira etapa); o material colhido durante a seqüência (documentos levantados durante a aula, filmagens, anotações, material impresso entregue pelos alunos); e a entrevista (realizada após o pós-teste). O pós-teste, sobre a concepção de ensino, foi realizado no dia 08/07/2004, mais de um mês depois de concluída a seqüência, e a entrevista foi feita mais de dois meses depois da conclusão da seqüência. Procuramos, com isso, aferir o que realmente marcou o aluno.

Os resultados do pré-teste e do pós-teste, que tratam da concepção de ensino-aprendizagem, foram agrupados em três categorias: concepção tradicional de ensino, concepção intermediária e concepção construtivista. No Quadro 17, apresentamos um resumo das categorias e das pontuações por categoria.

Quadro 17 – Resumo das categorias e das pontuações

CONCEPÇÃO DE ENSINO	VALOR P/ QUESTÃO	TOTAL DO TESTE	
Tradicional	1	6	Valor mínimo
Intermediária	2	12	Valor médio
Construtivista	3	18	Valor máximo

Na categoria tradicional, foram classificadas as respostas que se enquadram no que chamamos, no início deste artigo, de “ensino tradicional”. Na categoria construtivista, foram agrupadas as respostas que indicavam uma concepção de ensino-aprendizagem influenciada pelas teorias de aprendizagem construtivistas e, na categoria intermediária, ficaram as respostas que indicavam uma valorização de elementos das duas tendências estando numa fase intermediária. O pré-teste (que também foi usado como pós-teste) era constituído por 6 questões. A primeira questão era aberta, e as outras 5 eram semi-abertas (pois incluíam uma justificativa livre).

Para participar dessa pesquisa, era necessária a presença dos alunos em todas as etapas. Dessa maneira, muitos dos alunos foram descartados da análise dos resultados em função de terem faltado a um ou a mais dias de aulas. As aulas realizadas no sábado tiveram uma freqüência baixa, uma vez que muitos alunos do curso trabalhavam no sábado pela manhã e não puderam participar da etapa. Alguns alunos, que eram militares, em função do seu trabalho, faltaram a algumas atividades. Dessa forma, dos 30 alunos presentes no início da disciplina, apenas 6 participaram de todas as atividades (2 pré-testes, 8 dias da seqüência e 2 pós-testes). Por essa razão, foram escolhidos para a nossa análise.

Resultados e discussão

Dividimos os resultados em função dos instrumentos de coleta utilizados, em três categorias: pré-teste/pós-teste, aula e entrevista.

Pré-teste e pós-teste

Na Tabela 23, apresentamos os resultados obtidos no pré-teste e no pós-teste, que tratam da concepção de ensino-aprendizagem, assim como o percentual de variação do escore total do pós-teste, em relação ao pré-teste.

Tabela 23 – Comparação dos resultados do pré-teste com o pós-teste

ALUNOS	PRÉ-TESTE CONCEPÇÃO DE ENSINO							PÓS-TESTE CONCEPÇÃO DE ENSINO							CR.
	1	2	3	4	5	6	Total	1	2	3	4	5	6	Total	%
A1	1	3	3	3	3	3	16	2	3	3	3	3	3	17	6,25
A2	2	3	2	3	3	3	16	2	3	3	3	3	3	17	6,25
A3	1	1	1	3	1	3	10	1	3	1	3	3	3	14	40,00
A4	1	1	1	1	1	3	8	1	3	2	3	2	3	14	75,00
A5	3	3	3	3	3	3	18	2	3	3	3	3	3	17	-5,56
A6	2	2	2	2	2	3	13	1	3	3	3	3	3	16	23,08
Média Geral	1,67	2,17	2,00	2,50	2,17	3,00	13,50	1,50	3,00	2,50	3,00	2,83	3,00	15,83	17,28

Obs.: CR. Corresponde ao crescimento dos alunos de uma concepção para outra. CR = [(total pós-teste - total pré-teste) / total pré-teste] x 100. Quando, ao invés de crescimento houver uma queda, o valor será negativo.

Conforme a Tabela 23, dos 6 alunos selecionados, 5 apresentaram um crescimento na pontuação. Os melhores resultados foram daqueles cuja concepção de ensino mais se aproximava do modelo tradicional. O aluno A4, com pontuação mais próxima do modelo tradicional, teve a maior mudança (passou de 8 para 14 – crescimento de 75%), sendo seguido pelo aluno A3 (passou de 10 para 14 – crescimento de 40%) e pelo aluno A6 (passou de 13 para 16 – crescimento de 23,08 %). Os alunos com melhor desempenho no pré-teste não poderiam crescer muito no pós-teste, uma vez que sua pontuação já se aproximava da pontuação máxima. Apenas um dos alunos (A5) teve um pequeno decréscimo no escore do pós-teste, quando comparado com o do pré-teste. Ela obteve a pontuação máxima no pré-teste. Não poderia crescer mais e qualquer pequena mudança no pós-teste – como, de fato, ocorreu – poderia levar a essa perda de pontuação. Durante a entrevista, ao discutir sobre as diferenças entre a respostas dadas à mesma questão no pré-teste e no pós-teste, ela afirmou que se tratava de aulas com conteúdos diferentes e, por isso, na primeira, procurou utilizar materiais de manipulação e, na segunda, deteve-se a uma aula expositiva. Considerando a média das pontuações, os alunos tiveram um crescimento positivo de 17,28 %. Pelos resultados apontados nos testes, houve uma mudança na concepção de ensino-aprendizagem da maioria dos alunos. Será que essas mudanças tiveram repercussão na sua prática? Passemos então, para o segundo instrumento de análise, as aulas dadas durante a seqüência.

Aulas

Nas aulas, observamos uma nítida diferença entre os alunos que participaram de todas as atividades da seqüência e os alunos que não participaram. Ao todo foram cinco equipes (A, B, C, D e E). Os alunos selecionados foram distribuídos em três equipes (C, D e E). Os licenciandos, que apresentaram o trabalho da equipe C se limitaram a ir ao quadro e transmitir o conteúdo. Fazia parte dessa equipe a aluna A5. Ela não chegou a apresentou o trabalho, ficou apenas como suporte na apresentação. O motivo para essa atitude ficou mais nítido na entrevista. A aluna tinha muita dificuldade de falar, era extremamente tímida. Durante a entrevista, mostramos o vídeo da apresentação da equipe, da qual essa aluna fazia parte e perguntamos o que achava da apresentação da sua equipe. A seguir apresentamos esse trecho da entrevista:

ENT Você acha que a forma como o aluno está dando aula está adequada?
A 5 Não... Não! Ele está passando para turma um assunto que ele já viu. Mas a postura dele não está adequada.
ENT Por quê?
A 5 Porque ele colocou um cartaz, fez um desenho e só fez jogar conceitos. Se ele estivesse em uma turma que não conhecesse, ela teria muita dificuldade de entender esse assunto.
ENT Como seria o ideal?
A 5 Olhe eu gostei muito de trabalhar com o computador. Porque realmente a gente tinha ali uma visão para trabalhar com homotetia. E trabalhar apenas com o quadro, o lápis, o giz, fica difícil para quem não viu entender.
ENT E essa forma de trabalhar com o computador poderia ser aplicada sem o computador?
A 1 Poderia... Poderia. Depois a gente fez um teste em que tínhamos que fazer mais ou menos o que fizemos no computador.

Pela entrevista, podemos perceber uma diferença entre a apresentação da equipe e a concepção de ensino dessa aluna. Apesar de participar de uma equipe cuja apresentação enquadramos em uma concepção de ensino tradicional, a aluna mostrou-se contrária a essa postura e percebeu a seqüência vivenciada como um caminho mais adequado. Ela também percebeu em sua resposta que as situações vivenciadas com o computador poderiam ser vivenciadas sem o mesmo, ou seja, o importante era a proposta pedagógica que estava sendo aplicada. Pela sua resposta, percebemos uma coerência entre sua concepção de ensino, obtida através do pré e pós-testes e a sua visão da aula dada pela sua equipe.

A equipe D foi a que apresentou o maior número de alunos selecionados (do total de 5 alunos, 4 foram selecionados). A apresentação da equipe D foi a que mais se assemelhou à seqüência didática aplicada por nós. Os alunos utilizaram dois pantógrafos como instrumento de ensino. Foram formados dois grandes grupos. Essa equipe solicitava que cada grupo manipulasse o equipamento, enquanto levantavam questões, gerando dúvidas e promovendo o debate para a construção dos conceitos. O aluno A3 sintetizou o trabalho dessa equipe quando, durante a entrevista, afirmou que essa aula foi construtivista e influenciada pela experiência com o computador. Destacamos um trecho do relato no qual podemos perceber a influência da vivência com o computador:

> A gente viu, através das aulas práticas, com o senhor aqui, que a prática no computador foi mais estimulante com a turma do que simplesmente chegar e desenhar no quadro, passar uma atividade para responder. Quando a gente começou a envolver os alunos, todo mundo quis fazer no pantógrafo, todo mundo quis desenhar, todo mundo quis ver um triângulo, como fazia 180º na prática. Quando você pega e vê. Vai aí! Vê o que você faz aí! Vimos que a prática foi melhor do que ficar apenas na teoria.

Pela sua resposta, observamos a influência das situações adidáticas vivenciadas pelo aluno, quando o estudante afirma que é mais importante o fazer e tentar resolver por si um problema do que a aula tradicional, em que o professor vai ao quadro, transmite uma determinada informação e, depois, passa exercícios. Da equipe E, apenas um aluno participou da seleção, o aluno A6. Durante a aula, ele se limitou a apresentar os conceitos, utilizando como apoio o quadro branco. Algumas vezes ele fez algumas perguntas, para logo em seguida respondê-las. Pela classificação que utilizamos neste trabalho, essa apresentação seria tradicional. Ao apresentarmos a filmagem da aula para esse aluno, ele considerou que o ponto negativo de sua aula foi o fato de em alguns momentos ter ficado de costas para a turma. Ele afirmou ainda que, ao fazer perguntas aos demais alunos, estaria ministrando uma aula adequada. Essa forma de apresentação divergiu do modo como ele se posicionou nos testes e, sobretudo, durante a entrevista. A seguir, apresentamos um trecho da entrevista em que discutimos a resposta que ele deu à primeira questão do pré-teste:

ENT Essa idéia de transmitir seria o professor chegar no quadro e começar a falar?
A 6 Veja como eu estava sendo errado antigamente. Eu não queria ser o centro das atenções. Conhecimento não se transmite. Conhecimento se constrói. Ao afirmar que o conhecimento se transmite, eu estou sendo totalmente tradicional. Aí eu mudaria isso aí. Eu estava sendo totalmente tradicional. E, nos dias de hoje, esse tradicional está esquecido. Vai ser banido, vai ser afastado do mercado de trabalho.

O que podemos perceber, quando comparamos a aula ministrada por esse aluno com os dados da entrevista, do pré-teste e do pós-teste, é um distanciamento entre a prática na sala e a forma de compreensão dos conceitos. Ele não percebeu claramente as diferenças entre os conceitos defendeu no discurso e os que colocou em prática durante a aula que ministrou.

As equipes A e B foram formadas por alunos que não fizeram parte do grupo selecionado. A equipe A trouxe três experimentos interessantes para apresentar à turma. No primeiro experimento, a luz da sala foi apagada e, usando uma vela e uma caixa furada, foi possível perceber que a projeção da vela sobre a parede, após passar pelo furo da caixa, sofria um meio-giro, como na homotetia de razão negativa. Nessa experiência, os alunos procuraram relacionar homotetia com ótica e o seu uso nas máquinas fotográficas (tipo lambe-lambe). Eles distribuíram monóculos e procuraram relacionar o monóculo com a homotetia. Um outro experimento foi criado com tubos de papel. A maneira de utilizar os experimentos foi tradicional, porque se limitou a mostrar o fenômeno, sem dar chance ao aluno de explorar suas idéias. A equipe B se concentrou em uma aula expositiva, usando o retroprojetor, mostrando algumas aplicações ilustradas por fotografias. Depois distribuiu um material para uma atividade de aplicação das idéias apresentadas, no final da aula.

De todas as equipes, a equipe E foi a que apresentou uma postura que mais se aproximava dos objetivos da seqüência. A maioria dos alunos dessa equipe (4 de um total de 5) fazia parte dos alunos selecionados.

Além da aula e dos testes, as entrevistas foram um importante instrumento na pesquisa. Por meio delas, pudemos compreender melhor a concepção dos alunos e aprofundar a discussão sobre a seqüência didática. A seguir, apresentamos os pontos principais da entrevista, por aluno. Dessa forma, podemos avaliar as possíveis mudanças em cada um dos alunos de maneira global e não-fragmentada.

Entrevistas

Através das entrevistas, pudemos complementar as informações obtidas nos testes e nas aulas. Os alunos entrevistados já tinham estudado o que era o construtivismo, porém, existe uma diferença entre conhecer um conceito e considerá-lo como válido no ensino. Durante as entrevistas, os alunos demonstraram, através das suas respostas, que essa seqüência didática conduziu a novas percepções do processo de ensino-aprendizagem. Essas mudanças não foram uniformes. Procuramos sintetizar os resultados obtidos na entrevista na tabela 24. Nela, apresentamos um resumo dos principais aspectos utilizados para identificar o que mudou nos alunos.

No primeiro item da tabela 24, procuramos identificar as concepções prévias dos alunos. Isso poderia ser resumido com a pergunta: antes desta seqüência didática os alunos consideravam o construtivismo como adequado ao ensino ou estavam presos as antigas práticas? 50 % dos alunos consideravam o ensino tradicional como o mais adequado e 50 % já consideravam o construtivismo como adequado ao ensino. Considerar adequado ao ensino não significa aplicá-lo no ensino de Matemática. O aluno A6, por exemplo, durante a entrevista, mostrou-se um defensor do construtivismo, porém, não conseguiu perceber que a sua aula era tradicional.

No 2º item da tabela 24, procuramos identificar se os alunos perceberam a seqüência como construtivista. Na seqüência, utilizamos as situações adidáticas e a institucionalização em que estão presentes a idéia de construtivismo. Embora os alunos não tenham estudado essa metodologia, conseguiram, em sua maioria, identificá-la como construtivista (83,33 %), com exceção do aluno A4. Este tentou adaptar a seqüência na sua concepção de ensino-aprendizagem. No seu modelo, o professor deveria dar a teoria e, depois, aplicá-la em exercícios (prática). Para o aluno A4, o pré-teste correspondeu à primeira etapa, "dar a teoria", e a seqüência à segunda etapa, "dar a prática".

No terceiro item da tabela 24, procuramos identificar se os alunos mudaram a sua forma de pensar. Depois da seqüência, nenhum deles continuou achando a forma tradicional como a mais adequada (a). Dois alunos (33,33 %) que tinham uma visão tradicional de ensino consideraram que existiam casos em que deveríamos utilizar uma metodologia e casos em que deveríamos utilizar a outra metodologia (e, ainda, situações que deveríamos combinar as duas). Em relação à visão anterior, esse ponto de vista pode ser considerado como uma mudança. Dois outros alunos passaram a achar que, na maioria dos casos, deveria-se utilizar uma metodologia similar à empregada na seqüência (um destes, antes da seqüência considerava a forma tradicional como a mais adequada). Essa mudança pode ser vista no trecho da entrevista reproduzido a seguir:

ENT[29] O que você achou desta experiência que nós vivenciamos?

A 1[30] Eu achei nova. Desde o Ensino Primário, Fundamental, a gente nunca teve a oportunidade de aprender desta forma. Foi uma coisa nova. No início, a gente teve dificuldades em perceber qual era o objetivo ou a forma como ocorreria a aprendizagem, ou se a mesma a gente conseguiria aprender. Quando a gente começou, principalmente através do computador, a nos guiar e responder às perguntas e movimentar como se a gente tivesse visualizando e manipulando os objetos só que através do computador. A gente pode realmente perceber que estava desenvolvendo e aprendendo. E de uma forma que não foi decorada ou repassada. A gente pôde realmente desenvolver a aprendizagem e construir os nossos próprios conceitos.

No item 3, tivemos, ainda, dois alunos que já possuíam uma visão construtivista. Nesse caso, o que observamos é que, para estes, a seqüência teve a função de validar essa concepção e apresentar uma maneira de aplicá-la.

No item 4, procuramos identificar se os alunos consideraram essa seqüência como adequada ao ensino de Matemática. Nenhum dos alunos considerou essa seqüência como inadequada. Apenas um aluno (A4) considerou que o uso da seqüência estaria condicionado pelo conteúdo.

O item 5, foi elaborado a partir de um problema que identificamos na entrevista: um dos alunos (A4) procurou relacionar essa seqüência ao emprego do computador e dos instrumentos de desenho. Ele afirmou que essa metodologia seria difícil de aplicar em escolas públicas (ele estudou em uma escola pública), em que os alunos não teriam acesso ao computador ou instrumentos de desenho como régua, compasso, esquadro. Com isso, o estudante estabeleceu um vínculo com o uso desses materiais e não percebeu que essa seqüência não estava restrita ao uso de determinados recursos tecnológicos. Isso poderia ser um problema para a seqüência. Procuramos, então, avaliar os outros alunos, que não colocaram esses instrumentos como limitadores da concepção de ensino-aprendizagem defendida.

No item 6, procuramos identificar se os alunos compreenderam as etapas utilizadas na seqüência didática. Um dos alunos (A4) tentou enquadrar essa seqüência no seu modelo de ensino tradicional. Dois alunos, durante a entrevista, descreveram as etapas da seqüência (sem utilizar termos próprios desta metodologia, uma vez que não era o objetivo da seqüência o ensino das teorias das situações didáticas). Três alunos, apesar de considerarem importante a seqüência, não fizeram menção a essas etapas.

---

[29] Abreviatura de ENTREVISTADOR

[30] Abreviatura de ALUNO 1. Os demais alunos terão o mesmo sistema nas transcrições. Desta forma o ALUNO 2 será abreviado por A2, o ALUNO 3 será abreviado por A 3 e assim sucessivamente.

Tabela 24 – Diagnóstico da seqüência do ponto de vista da concepção de ensino-aprendizagem.

DIAGNÓSTICO DA SEQÜÊNCIA	ALUNOS						
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	TOTAL
1. Como os alunos pensavam antes?							
a) Considerava a forma tradicional como mais adequada para o ensino de Matemática	X	-	X	X	-	-	3
b) Achava as idéias construtivistas válidas	-	X	-	-	X	X	3
c) Não comentou	-	-	-	-	-	-	0
2. Os alunos perceberam a seqüência como construtivista?							
a) Não percebeu a seqüência como construtivista	-	-	-	-	-	-	0
b) Percebeu a seqüência como construtivista	X	X	X	-	X	X	5
c) Não comentou	-	-	-	X	-	-	1
3. Os alunos mudaram a sua forma de pensar?							
a) Continuou achando a forma tradicional como mais adequada	-	-	-	-	-	-	0
b) Passou a perceber que existem casos em que se deve usar uma forma e existem casos que se deve usar outra metodologia.	-	-	X	X	-	-	2
c) Considerou que na maioria dos casos a metodologia construtivista como a mais adequada.	X	X	-	-	-	-	2
d) Já possuía uma visão construtivista	-	-	-	-	X	X	2
4. Os alunos acharam a seqüência adequada para o ensino?							
a) Achou a seqüência inadequada para o ensino	-	-	-	-	-	-	0
b) Percebeu a seqüência como uma forma nova e válida para o ensino de Matemática.	X	X	X	-	X	X	5
c) Achou que a sua aplicação depende do conteúdo e dos casos.	-	-	-	X	-	-	1
5. Os alunos acharam que a seqüência estava limitada ao computador ou a outros recursos, como materiais de desenho?							
a) Considerou que essa seqüência estava limitada ao computador e/ou materiais de desenho.	-	-	-	X	-	-	1
b) Considerou que essa seqüência poderia ser utilizada sem o computador ou outros instrumentos de desenho, ou não colocou o computador como limitador.	X	X	-	-	X	-	3
c) Não comentou	-	-	X	-	-	X	2
6. Os alunos compreenderam as etapas dessa metodologia?							
a) Tentou enquadrá-la no modelo tradicional.	-	-	-	X	-	-	1
b) Percebeu as etapas dessa metodologia	X	X	-	-	-	-	2
c) Não percebeu ou não fez menção a elas.	-	-	X	-	X	X	3
7. Os alunos perceberam essa seqüência como importante na aprendizagem?							
a) Não percebeu a importância da seqüência aprendizagem.	-	-	-	-	-	-	0
b) Percebeu a seqüência como importante na construção do conhecimento, evitando a memorização e levando a uma aprendizagem significativa	X	X	-	-	-	-	2
c) Percebeu a aula como mais estimulante ao aprendizado do que a forma tradicional	-	-	X	-	X	X	3
d) Considerou que depende do caso	-	-	-	X	-	-	1

Ao comparar essa seqüência com a forma tradicional de ensino, será que os alunos consideraram a seqüência proposta como mais estimulante? No item 7, apresentamos um diagnóstico dessa questão construído com base na entrevista. Nenhum dos alunos considerou essa seqüência como sem importância para aprendizagem. Dois alunos consideraram-na como importante, mostrando-se mais válida do que um ensino baseado na repetição e na memorização, conduzindo o aluno a uma aprendizagem significativa. Dois alunos julgaram-na mais estimulante ao aprendizado do que a forma tradicional. Apenas um aluno (A4) considerou que dependeria do caso.

Considerações finais

Diante das análises dos resultados, podemos concluir que:

- No instrumento de análise pré-teste/pós-teste, a maioria dos alunos (83,33 %), após a seqüência didática, apresentou mudanças de uma concepção tradicional para uma concepção construtivista. Apenas um dos alunos não apresentou mudanças. Ela já tinha obtido o escore máximo no pré-teste e, no pré-teste, caiu um ponto. Essa mudança no escore não representou uma mudança na concepção, uma vez que a estudante afirmou, na entrevista, que tudo se deveu aotipo de aula pensada em cada um dos testes;
- Nas entrevistas, percebemos que o aluno (A4) que teve um melhor escore (75%) nos testes ainda estava preso ao modelo tradicional de ensino;
- Observamos, também, que todos os alunos apresentaram algum tipo de mudança validando a seqüência;
- Nenhum dos alunos continuou a acreditar apenas na forma tradicional como a mais adequada para o ensino de Matemática;
- Nenhum dos alunos achou essa seqüência inadequada ao ensino de Matemática. Sendo que 83,33 % consideraram-na como nova e válida para o ensino de Matemática, e 16,67 % acharam que dependeria do conteúdo a ser ensinado;
- Todos os alunos consideraram que o uso da seqüência foi importante na construção do conceito de homotetia.

Apesar do curto espaço de tempo em que foi realizada a seqüência didática, os resultados apontam para uma melhoria na formação dos professores. Esses resultados poderiam se ampliar com o emprego das situações didáticas em outros conteúdos e disciplinas e por um período maior de tempo, para isso, faz-se necessário outras pesquisas abordando outros conteúdos e com outros recursos.

Referências Bibliográficas

ARAÚJO, Abraão Juvêncio. **Simetria de rotação**: uma seqüência didática com o Cabri-géomètre. 2000. 182 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2000.

ARTIGUE, Michele. Didactic engineering. In: DOUADY, Régine; MERCIER, Alain. (Org.) **Research in didactique of Mathematics**: Selected papers. Grenoble cedex: La Pensée Sauvage, 1992. p. 41-65.

BROUSSEAU, G. **Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactiques des Mathématiques**. v.7, nº2, pp.33-116. Grenoble, 1986.

CHEVALLARD, Yves, BOSCH, Marianna, GASCÓN, Josep. **Estudar Matemáticas**: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001. 336 p.

MABUCHI, Setsuko Takara. **Transformações geométricas**: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores. 2000. 259 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

MOREIRA, Marcos Antonio. **Teorias de Aprendizagem**. São Paulo: EPU, 1999.

PATAKI, Irene. **Geometria esférica para a formação de professores**: uma proposta interdisciplinar. 2003. 181 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

PIRES, Célia Maria Carolino. Novos desafios para os cursos de licenciatura em Matemática. **Educação Matemática em Revista**. São Paulo, Ano 7, n.8, p. 10-15, Jun. 2000.

PRETTI, Esther do Lago. **Transformações geométricas**: uma experiência na formação de professores utilizando um ambiente informatizado. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) PUC/SP.

SOUZA, Maria José Araújo. **Informática educativa na educação Matemática**: estudo de Geometria no ambiente do *software* Cabri-géomètre-Géomètre. 2001. 214 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira – Mestrado) Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2001.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, apresentamos as principais conclusões obtidas a partir das análises realizadas. Tomamos por referência os dois aspectos abordados nesta pesquisa: a construção do conceito de homotetia e a mudança na concepção de ensino-aprendizagem. Ao final, apresentamos algumas conclusões sobre o resultado da articulação desses dois aspectos.

5.1 A construção do conceito de homotetia

Ao longo da seqüência didática, pudemos observar importantes avanços na construção do conceito de homotetia, que teve como pontos positivos:

- A utilização dos elementos da teoria das situações didáticas na construção da seqüência contribuiu para uma consolidação dos conceitos sobre homotetia, que não foram memorizados, mas compreendidos. Cada aluno pode formular suas hipóteses, tentar validá-las, confrontá-las com os conhecimentos existentes, de modo a formar uma opinião própria sobre o assunto. Ao contrário de outras metodologias, em que os conceitos são memorizados e, logo depois, esquecidos pelos alunos, os resultados indicam que houve uma construção gradativa dos conceitos, sendo incorporados de maneira significativa. Foi possível comprovar isso através dos instrumentos utilizados durante a seqüência, do pré-teste/pós-teste sobre homotetia e das entrevistas. O pós-teste sobre homotetia e as entrevistas foram realizados mais de dois meses após a seqüência didática;
- No pré-teste, constatamos que os alunos não demonstravam saber o que era homotetia. No pós-teste, eles apresentaram uma definição do conceito citando as suas principais propriedades. O paralelismo e a semelhança foram as características mais citadas;
- Nas demais questões do pré-teste, como os alunos não demonstravam saber o que era homotetia, procuramos identificar características como ampliação e redução, paralelismo e convergência para um ponto de vértices homólogos (centro de homotetia) em figuras homotéticas e não-homotéticas. No pré-teste, observamos que a maioria dos alunos (83,33%), na maior parte das questões, não citou elementos de uma análise interfigural. Já no pós-teste, a maioria dos alunos identificou alguns destes aspectos, indicando uma mudança da percepção geométrica;

- A utilização do *software* Tabulae, de Geometria Dinâmica, teve um papel fundamental na construção dos conceitos e na utilização da teoria das situações didáticas. Ao conservar as propriedades das figuras transformadas por homotetia, o Tabulae permitiu aos alunos elaborarem uma investigação sobre essas propriedades. As respostas rápidas do programa às ações dos alunos liberavam mais tempo para que esses pudessem refletir sobre os resultados das próprias ações. A precisão desse instrumento permitia validar as respostas do programa às ações dos alunos. A utilização do programa, associada a uma concepção pedagógica baseada na teoria das situações didáticas, possibilitou aos alunos atingir os objetivos propostos com a aquisição do conhecimento desejado;
- O uso dos instrumentos de desenho tradicionais foi muito importante, pois ofereceu um outro ambiente para aplicação dos conceitos que vinham sendo desenvolvidos com o uso do computador. Acreditamos que o emprego desses instrumentos facilitou a diferenciação das propriedades do Tabulae das propriedades da homotetia. Esse ambiente abriu novas possibilidades de percepção do conceito. Por último, pode-se afirmar que esse instrumento permitiu o desenvolvimento de habilidades que, com o uso do computador, não era possível. Os alunos tiveram um bom desempenho na resolução das questões nesse ambiente.

Durante a seqüência didática, observamos alguns problemas, que procuramos superar ao longo das atividades, como:

- Observamos, na atividade 3, (seção 1), por parte do aluno A2, a identificação de características do programa como propriedades da homotetia. Essa constatação nos levou a uma atenção redobrada, para evitar que esse problema permanecesse. Acreditamos que as atividades com os instrumentos tradicionais de desenho foram importantes para isso. Essa problemática pode servir de orientação a futuras pesquisas;
- Na atividade em que foram utilizados os instrumentos de desenho tradicionais, várias duplas tiveram dificuldades com o uso do transferidor e não sabiam utilizar o par de esquadros para traçar paralelas. Para superar essas dificuldades, algumas duplas recorreram a outras duplas, que sabiam como utilizar esses instrumentos, e ao professor. Essa habilidade é importante no Ensino Fundamental, na construção do conceito de ângulo e na sua aplicação em atividades práticas, como medição de um terreno ou elaboração do *layout* de um produto. Ela deveria ser do domínio do professor de matemática. Nas respostas, observamos ainda alguma imprecisão na marcação dos ângulos, devido às dificuldades no uso do transferidor;

- O aluno A6 teve algumas dificuldades na compreensão de algumas perguntas (descritas na análise a posteriori), o que indica a necessidade de as reformular;
- Os alunos tiveram dificuldades, que foram superadas, no início da atividade 1 da seção 4. Inicialmente, eles estavam presos à solução numérica e à medição para determinar a razão de homotetia. Não tinham observado que os pontos demarcados em um dos raios homotéticos poderiam ser usados como unidades de medida. Através da formulação de hipóteses e da tentativa de validação entre as duplas, esse obstáculo foi superado. Ele indica a necessidade de uma melhor formação dos licenciandos na área de geometria.

Existem outros aspectos relevantes da homotetia que ou não foram explorados, ou foram poucos explorados. Isso se deve ao fato que, nessa seqüência, procuramos nos limitar aos elementos mais significativos, que dão sentido ao conceito de homotetia. Dessa forma deixamos de explorar alguns aspectos como:

- A investigação pelo aluno do número de centros de homotetia. Não criamos situações em que o aluno pudesse determinar mais de um centro de homotetia e, assim, estudar as condições para que isso acontecesse (estudadas por LEMONIDIS, 1991);
- A determinação do centro de homotetia em figuras cujos pontos homólogos não estão bem definidos, como na circunferência (estudadas por LEMONIDIS, 1991);
- A resolução de problemas. Apresentamos apenas um problema para a última atividade da seção 4. Esse problema, apesar da dificuldade inicial, foi resolvido por dois alunos. Os demais não chegaram a realizar essa tarefa dentro do tempo da aula, deixando o item em branco;
- O estudo da semelhança para os casos em que não existe uma transformação por homotetia direta, mas sim o produto de uma homotetia por uma isometria (que exige um conhecimento prévio das isometrias).

5.2 A mudança na concepção de ensino-aprendizagem

Tomando por base a análise dos resultados, apresentada no artigo, podemos concluir que:

- No instrumento de análise pré-teste/pós-teste, a maioria dos alunos (83,33 %), após a seqüência didática, apresentou mudanças de uma concepção tradicional para uma concepção construtivista. Apenas um dos alunos não apresentou mudanças. Ela já tinha obtido o escore máximo no pré-teste e, no pós-teste, caiu um ponto. Essa mudança no escore não representou uma mudança na concepção, uma vez que a estudante afirmou, na entrevista, que tudo se deveu ao tipo de aula pensada em cada um dos testes;

- Nas entrevistas, observamos que o aluno (A4), que teve o melhor escore (75%) nos testes, pelas suas respostas demonstrava que ainda estava preso ao modelo tradicional de ensino;
- Observamos, também, que todos os alunos apresentaram algum tipo de mudança, validando a seqüência;
- Nenhum dos alunos continuou a acreditar apenas na forma tradicional como a mais adequada para o ensino de Matemática;
- Nenhum dos alunos achou essa seqüência inadequada ao ensino de Matemática, sendo que 83,33 % consideraram-na como nova e válida para o ensino de Matemática, e 16,67 % acharam que dependeria do conteúdo a ser ensinado;
- Todos os alunos consideraram que o uso da seqüência foi importante na construção do conceito de homotetia;
- O uso de mais de um ambiente de aprendizagem (sala de desenho/sala de informática) foi importante para evitar que os alunos pensassem que essa concepção pedagógica fosse restrita apenas ao ambiente computacional. Podemos constatar isso nas entrevistas;
- Pelo relato de alguns alunos, nas entrevistas, observamos mudanças no que diz respeito à percepção do trabalho em duplas na sala de aula. Um aluno esclareceu que, no início da seqüência, não achava interessante dividir o computador com uma dupla. Após a seqüência, ele percebeu que foi mais estimulante essa troca de informações do que o trabalho individual. Observamos, em um outro relato, observações que indicam uma percepção semelhante. Esse tipo de prática é necessário nas situações adidáticas de formulação e validação e está presente na institucionalização.

Apesar do curto espaço de tempo em que foi realizada a seqüência didática, os resultados dela apontam para uma melhoria na formação dos professores. Esses resultados poderiam se ampliar com o emprego das situações didáticas em outros conteúdos e disciplinas e por um período maior de tempo. Para isso, são necessárias outras pesquisas, abordando outros conteúdos e com outros recursos.

5.3 Articulação em uma seqüência didática do conhecimento pedagógico e matemático

A articulação entre uma prática pedagógica atual e a construção do conceito de homotetia teve uma repercussão positiva na formação dos licenciandos. Alguns licenciados, antes da seqüência didática, não achavam a prática construtivista adequada para o ensino de matemática, uma vez que não conseguiam vislumbrar como essa prática poderia ser aplicada na construção de um conteúdo específico da área em questão. Só foi possível mudar essa perspectiva por meio de uma seqüência que articulasse esses dois aspectos. Essa característica diferencia o presente trabalho de outros que pesquisamos, em que não foi estudada a duplicidade de papéis necessários na formação inicial do licenciando em matemática. Essa articulação, também, foi percebida pelos licenciandos do ponto de vista da aprendizagem, uma vez que, ao contrário de mais um conjunto de informações que deveriam ser decoradas e, naturalmente, esquecidas, revelou-se como uma maneira de aprender significativamente. Torna-se importante, desse modo, a realização de outras pesquisas em que se possa, de forma articulada, desenvolver esse duplo aspecto, tendo em vista avaliar os efeitos na formação do licenciando em matemática, de modo a conduzir ao aprimoramento da formação inicial.

REFERÊNCIAS

ALVES, George de Souza; SOARES, Benevides Adriana. Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do *software* Tabulae. In: Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, 23., 2003, Campinas: **Anais** ... Campinas: UNICAMP, 2003.

ARAÚJO, Abraão Juvêncio. **Simetria de rotação**: uma seqüência didática com o Cabri-géomètre. 2000. 182 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2000.

ARTIGUE, Michele. Didactic engineering. In: DOUADY, Régine; MERCIER, Alain. (Org.) **Research in didactique of Mathematics**: Selected papers. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1992. p. 41-65.

BELLEMAIN, Franck. Geometria Dinâmica: diferentes implementações, papel da manipulação direta e usos na aprendizagem. In: International Conference on Graphics Engineering for Arts and Design. 4., 2001, São Paulo: **Anais** ... São Paulo: USP, 2001.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Prefácio: Isaac Asimov. Tradução: Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996. 496 p.

BRASIL, Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática, terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretária de Educação Fundamental. **PCN + Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. 2 ed. Rio de Janeiro: DP e A, 2000. v.3.

BROUSSEAU, G. **Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactiques des Mathématiques**. Grenoble, v.7, nº2, p.33-116, 1986.

CARVALHO, Benjamin de A. **Desenho Geométrico**. 3. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro técnico, 1967. 332 p.

CHEVALLARD, Yves, BOSCH, Marianna, GASCÓN, Josep. **Estudar Matemáticas**: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001. 336 p.

COSTA, Mario Duarte; COSTA, Alcy Vieira. **Geometria Gráfica Tridimensional**. Recife: UFPE, 1994. 307 p. (transformações projetivas, v.3)

FERREIRA, AURELIO BUARQUE DE HOLANDA. **Novo Aurélio Século XXI**: dicionário da língua portuguesa. 3. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999.

GRAVINA, Maria Alice. Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 7º ,1996, Belo Horizonte: **Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**. Belo Horizonte: UFMG, 1996. p. 1-13.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Microdicionário de Matemática**. São Paulo: Scipione, 1998.

JACOBINI, Maria Leticia de Paiva. **Metodologia do Trabalho Acadêmico**. Campinas: Alínea, 2003. 110 p.

KEIHN, Meta Darlene e RETZ, Merlyn. Construções com régua e compasso. In: EVES, Howard. **Historia da Geometria**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

LEMONIDIS, C. Analyse et réalisation d´une expérience d´enseignement de l´homothétie. **Recherches en didactique des mathématíques**, Grenoble, v.11, nº2, p.295-324, 1991.

LIMA, Elon Lages. **Isometrias**. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

LORENZATO, Sergio. Por que não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista**, Blumenau, ano 3, n.4, p. 3-13, 1 sem. 1995.

MABUCHI, Setsuko Takara. **Transformações geométricas**: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores. 2000. 259 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

MILHOLLAN, Frank; FORISHA, Bill F. **Skinner x Rogers**: Maneiras contrastantes de encarar a educação. São Paulo: Summus, 1978.

MILIES, Francisco César Polcino e BUSSAB, José Hugo de Oliveira. **A Geometria na antiguidade clássica**. São Paulo: FTD, 1999.

MOREIRA, Marcos Antonio. **Teorias de Aprendizagem**. São Paulo: EPU, 1999.

OLIVEIRA, Maria Marly. **Como fazer projetos, relatórios, monografias, dissertações e teses**. Recife: Bagaço, 2003.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 2ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. 128 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 3).

PAPERT, Seymour. **A maquina das crianças**: repensando a escola na era da informática. Tradução: Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

PATAKI, Irene. **Geometria esférica para a formação de professores**: uma proposta interdisciplinar. 2003. 181 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

PAVANELO, Regina Maria; ANDRADE, Roseli Nozaki Grave. Formar professores para ensinar Geometria: um desafio para as licenciaturas de Matemática. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, ano 9, edição especial, p. 78-87, mar. 2002.

PINHEIRO, Virgílio Athayde. **Geometrografia 2**. Rio de Janeiro: Aula, 1986. 290 p. il. 22 cm.

PIRES, Célia Maria Carolino. Novos desafios para os cursos de licenciatura em Matemática. **Educação Matemática em Revista**. São Paulo, Ano 7, n.8, p. 10-15, Jun. 2000.

PRETTI, Esther do Lago. **Transformações geométricas**: uma experiência na formação de professores utilizando um ambiente informatizado. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) PUC/SP.

RAMPAZZO, Lino. **Metodologia científica**: para alunos do curso de graduação e pós-graduação. São Paulo: Loyola, 2002.

RODRIGUES, Daniel Wyllie Lacerda. **Uma avaliação comparativa de interfaces homem-computador em programas de Geometria Dinâmica**. 2003. 147 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.

SANCHEZ-MARMOL, L. PEREZ-BEATO, M. **Geometria métrica, proyectiva y sistemas de representacion**. 2 e. Madri: Saeta, 1945.

SEVERINO, Antônio Joaquim**. Metodologia do trabalho científico**. 22. ed. rev. e ampl. São Paulo: Cortez, 2002.

SILVA, Claudia Dias Pestana. **Problemas de transformações geométricas**: diferentes apreensões de figuras em ambiente de Geometria dinâmica. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação) PUC/SP.

SOUZA, Maria José Araújo. **Informática educativa na educação Matemática**: estudo de Geometria no ambiente do *software* Cabri-géomètre-Géomètre. 2001. 214 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira – Mestrado) Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2001.

VALENTE, José Armando. **Liberando a mente**: computadores na educação especial. Campinas: UNICAMP, 1991.

WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: SBM, 1993.

WEISS, Alba Maria Lemme, CRUZ, Mara Lúcia R. Monteiro da. **A informática e os problemas escolares de aprendizagem**. 2 ed. Rio de Janeiro: DP e A, 1999. 104 p.

ANEXO A: PRÉ-TESTE/PÓS-TESTE SOBRE A CONCEPÇÃO DE ENSINO-APRENDIZAGEM

1. Pense em um conteúdo de Matemática e descreva como você ministraria esse conteúdo. Na descrição, apresente todas as fases da aula. Não é necessário detalhar o conteúdo; a ênfase deve ser dada ao planejamento da aula.

As questões a seguir apresentam duas concepções sobre o papel do professor. Analisando as afirmações A e B, qual você considera mais adequada? Justifique.

2.

a) Um bom professor é aquele que vai ao quadro e transmite adequadamente as informações ao seu aluno

b) Um bom professor é aquele que cria condições para que o aluno, através da pesquisa, debate e investigação possa tirar as suas próprias conclusões sobre o assunto.

3.

a) Para uma boa aula, o número de alunos não é tão importante como os recursos audiovisuais e a habilidade do professor em transmitir os conteúdos.

b) O número de alunos em uma sala de aula tem uma forte influência no processo de ensino-aprendizagem, uma vez que se fazem necessárias, em uma aula a troca de idéias e a discussão.

4.

a) O professor deve conduzir o aluno a atividades que o levem a experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e demonstrar.

b) Um professor deve utilizar métodos de ensino que privilegiem a aquisição de conhecimento, memorização de informações e procedimentos e reprodução dos conhecimentos transmitidos por ele.

5.

a) O papel do professor deve ser o de transmissão adequada de fatos, teorias e conceitos.

b) O professor deve criar condições para que o aluno possa desenvolver o espírito investigativo, que possa debater as suas idéias e construir a sua própria percepção dos fatos.

6.

a) O professor deve partir dos conhecimentos dos alunos para a introdução de novos conteúdos, de modo a explorar as suas potencialidades, e avaliar adequadamente o processo de crescimento do aluno.

b) O professor deve cumprir com os conteúdos estabelecidos nos programas, cabendo aos alunos procurar acompanhar o professor.

ANEXO B: PRÉ-TESTE/PÓS-TESTE SOBRE O CONCEITO DE HOMOTETIA

PARTE 1

1) O que você compreende por homotetia?

PARTE 2

02) Compare a figura A com figura B. Podemos dizer que a figura B foi ampliada da A? Justifique a sua resposta.

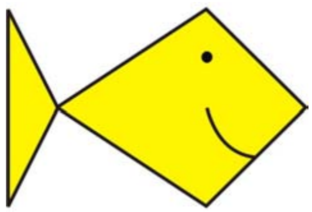


Figura A

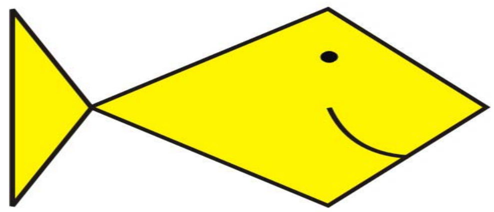


Figura B

03) Compare a figura A com figura B. Podemos dizer que a figura B foi ampliada da A? Justifique a sua resposta.

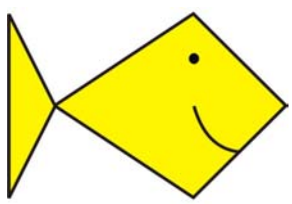


Figura A

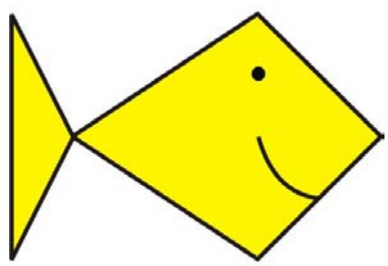


Figura B

04) A figura A foi transformada por homotetia na figura B. Quais os elementos que caracterizam a homotetia? Justifique a sua resposta.

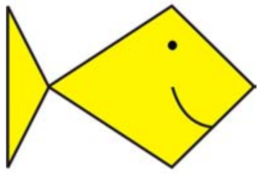


Figura A

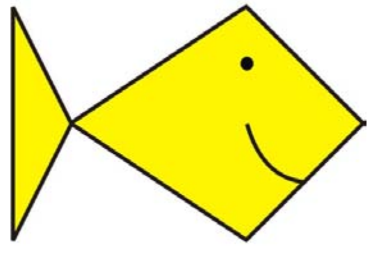


Figura B

05) A figura C e a figura D não são homotéticas. Justifique por quê.

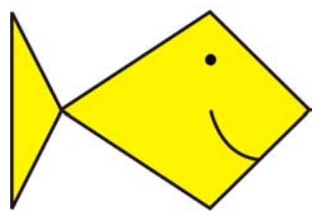


Figura C

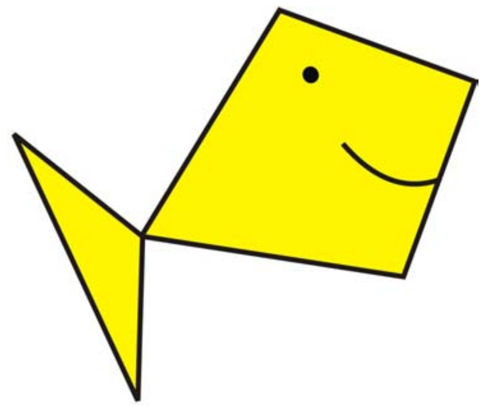
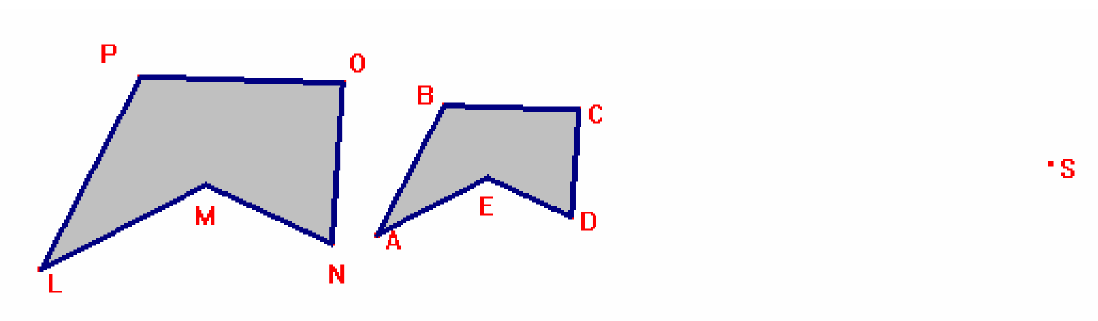
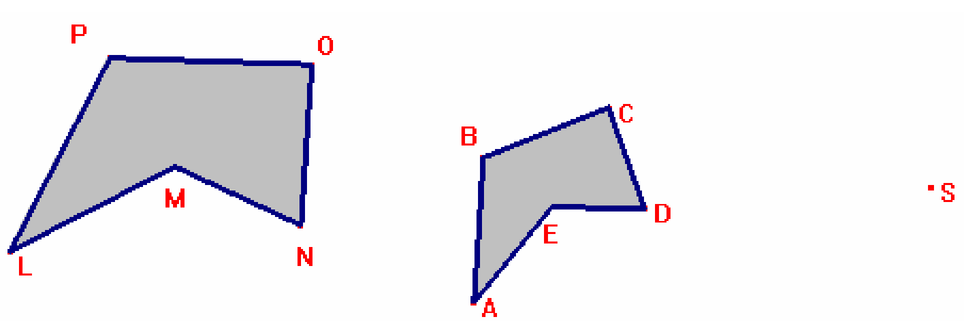


Figura D

06) A figura ABCDE foi transformada por homotetia na figura PONML. Quais os elementos que caracterizam a homotetia? Justifique a sua resposta.



06 – A figura ABCDE e a figura LMNOP não são homotéticas. Justifique por quê.



ANEXO C: SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

<u>SESSÃO 01</u>

ATIVIDADE 01:

Abra o arquivo **AT01.ae**, para isso, vá à barra de ferramentas horizontal, ícone abrir, ou no menu opção ARQUIVO – ABRIR ou ainda digite CTRL A. O arquivo está na pasta C:\AAATabulae. Inicialmente, salve (MENU – ARQUIVO – GRAVAR COMO) o arquivo com as duas iniciais de cada aluno da dupla (ex. Marcelo e Paulo = **MA**P**A**AT**01**.ae).

Atividade:
Com a ferramenta “ponteiro” (seta), selecione com o botão esquerdo do mouse o segmento A1B1 e movimente. Observe o que acontece. Compare com os segmentos que não são homotéticos. Você percebe alguma característica dos segmentos homotéticos que os distingue dos outros? Justifique.

ATIVIDADE 02:

Abra o arquivo AT02.ae e salve com outro nome, tal como na atividade anterior.

Atividade:
Compare as figuras homotéticas com as que não são homotéticas. O que você percebe? Movimente as figuras homotéticas. Quais são as características que você identifica na figura homotética?

ATIVIDADE 03:

Abra o arquivo AT03.ae e salve com outro nome.

Atividade:
Compare as figuras homotéticas com as que não são homotéticas. O que você percebe? Movimente as figuras homotéticas. Quais são as características que você identifica na figura homotética?

ATIVIDADE 04 A

Abra o arquivo AT04.ae e salve com outro nome. Com a ferramenta “ponteiro” (seta), selecione com o botão esquerdo do mouse a figura A1B1C1 e, segurando o botão, movimente essa figura para esquerda e para direita. Observe o que acontece.

- Há algum ponto invariante (que não muda) nesse tipo de transformação (a figura ABC foi transformada)?
- O que ocorre quando A1B1C1 está à direita do triângulo ABC?
- O que ocorre quando A1B1C1 está entre o ponto S e a figura ABC?
- O que ocorre quando A1B1C1 está à esquerda do ponto S.

Clique na ferramenta “vetor” e selecione a opção “criar ângulo”. Meça os ângulos SAB e SA1B1. Movimente a figura e observe o que acontece. Meça os ângulos SCB e SC1B1. Comparando os ângulos formados entre os raios homotéticos e os lados homólogos (correspondentes) o que podemos observar?

ATIVIDADE 04 B

Utilizando ainda o arquivo AT04.ae, meça os ângulos A, B e C e A1, B1 e C1. Compare os ângulos. A que conclusões você chegou quanto à medida dos ângulos homólogos (correspondentes)?

ATIVIDADE 04 C

Utilizando ainda o arquivo AT04.ae, podemos afirma que uma transformação homotética (sim ou não):

- Preserva o paralelismo dos lados (direção): __________
- Mantém como invariante a posição do centro de homotetia: ____________
- Preserva os ângulos entre os raios homoteticos e os lados homólogos (correspondentes): ____
- Preserva as medidas dos lados (é uma transformação isométrica): ____________
- Preserva os ângulos internos a cada figura _______________

ATIVIDADE 05

Abra o arquivo AT05.ae e salve com outro nome. Movimente o ponto F e observe o que acontece.

Podemos afirmar que uma transformação homotetica:

a) Preserva o alinhamento
b) Não preserva o alinhamento

ATIVIDADE 06

Abra o arquivo AT06.ae e salve com outro nome. Dados o centro de homotetia S e a figura ABCD, represente a imagem A1B1C1D1 desta transformada por homotetia. Quais as ferramentas que você usou na construção? Justifique.

ATIVIDADE 07

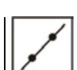
Abra o arquivo AT07.ae e salve com outro nome. Dados o centro de homotetia S e a figura ABCD, represente a imagem A1B1C1D1 desta transformada por homotetia. Quais as ferramentas que você usou na construção? Justifique.

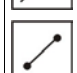
SESSÃO 02

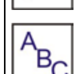
Abra o arquivo 2**AT01.ae**, para isto vá a barra de ferramentas horizontal ícone abrir ou no menu opção ARQUIVO – ABRIR ou ainda digite CTRL A. O arquivo esta na pasta C:\AAATabulae. Inicialmente salve (MENU – ARQUIVO – GRAVAR COMO) o arquivo com as duas iniciais de cada aluno da dupla (ex. Marcelo e Paulo = **MA**PA**AT01**.ae).

Parte 01: Obtendo as medidas e a razão dos segmentos.

Determinar a razão de homotetia entre a figura ABC e a transformada por homotetia A1B1C1. Determine as medidas de SA, SB e SC. Para isto na caixa de ferramentas, clique na ferramenta "reta", e selecione a opção "segmento". Construa um segmento unindo SA, SB e SC. Com a opção "seta" ativa clique no segmento SA. Este segmento ficara ativado e na cor vermelha.


Ferramenta "reta"


Opção "segmento" dentro da ferramenta "reta"



Ferramenta "formatar identificador".

Na Barra de menu selecione CALCULAR opção COMPRIMENTO. Do lado esquerdo da tela aparecerá a medida do segmento SA. Selecione esta medida e clique na ferramenta “formatar identificador”. Apague o valor indicado e escreva SA. Faça o mesmo para os outros segmentos.

Repita a operação criando os segmentos SA1, SB1 e SC1.

Use a ferramenta “calculadora”, no menu “calcular”. Esta ferramenta abre uma calculadora. Clique na medida de SA1 em seguida na opção dividir (/) e depois na medida SA clique em OK. Com isto temos o valor da razão SA1/SA faça o mesmo para obter SB1/SB e SC1/SC (observe que sempre dividimos a medida do segmento da imagem pelo da figura e não o inverso).

Parte 02:

Movimente a figura A1B1C1 e observe o que acontece com as razões de homotetia.

Considerando o valor de K = SA1/SA (razão de homotetia) o que acontece com A1B1C1 quando[31]:

a) $K > 1$ ____

b) $K = 1$ ____

c) $0 < K < 1$ ____

d) $K < 0$ (homotetia negativa) ________________________________

Observe a medida de SA1 ela é expressa utilizando alguma unidade? Porque?

Observe a razão SA1/SA ela é expressa em alguma unidade? Porque?

SESSÃO 03

Vocês receberam uma cartolina com um peixe (peixe A) junto com o centro de homotetia. Receberam também quatro outros peixes (A1, A2, A3, A4).

- Compare os ângulos internos dos peixes (coloque no desenho os ângulos encontrados). Com base nas medidas dos ângulos o que você pode afirmar?

---

[31] A figura é ampliada, reduzida, rotacionada (180º), não altera a medida ou sofre outro tipo de transformação?.

- Compare a razão dos lados correspondentes (lado do peixe transformado / lado do peixe A) e apresente abaixo. Com base nesta comparação o que pode-se afirmar?

Considere que os peixes A1 e A2 foram obtidos usando razão de homotetia positiva e os peixes A3 e A4 razão de homotetia negativa. Determine, usando as propriedades das figuras, a posição dos peixes na folha e fixe os mesmos usando fita crepe.

Qual a razão de homotetia:

- do peixe A para peixe A1?
- do peixe A para peixe A2:
- do peixe A para peixe A3:
- do peixe A para peixe A1:

Determinar o ângulo entre os lados das figuras e o centro de homotetia.

SESSÃO 04

ATIVIDADE 01

Abra o arquivo **3AT01**.ae. e salve com o nome da equipe. Neste arquivo temos o ponto X (que deve ser transformado em X1) e o ponto S centro de homotetia. Pede-se para determinar X1 considerando que a razão de homotetia é igual a 2,5 (K = 2,5).

Ferramentas utilizadas: “reta”, “círculo”, “ponto de interseção”

Podemos afirmar (CERTO ou ERRADO)

A. Em uma transformação homotetica, uma vez definido o centro de homotetia, a razão de homotetia e a figura (objeto a ser transformado) podemos obter apenas uma imagem da figura transformada.	___________
B. Quando usamos o TABULAE ao modificarmos a posição do centro ou a posição da figura (X) a figura transformada (X1) muda de posição mantendo a razão de homotetia. Isso serve para demonstrar que a posição do ponto X1 é resultante da combinação dos três elementos (centro de homotetia, figura e razão de homotetia) e que ao mudarmos um destes elementos mudamos também a imagem (X1)	___________
C. Com apenas o centro de homotetia (S) e a figura (X) podemos determinar a posição exata da imagem (X1).	___________

ATIVIDADE 02

Abra o arquivo **3AT02.ae** e salve com o nome da equipe. Neste arquivo temos um triângulo ABC e o centro de homotetia S. Queremos construir o triângulo A1B1C1 com a razão de homotetia (k) igual a 0,5. Ferramentas utilizadas: “reta”, “segmento”, “ponto médio”, “segmento”, “polígono”. Uma vez construída a figura tente movimentar o centro de homotetia, a figura (ABC) e a imagem (A1B1C1).

Podemos afirmar (CERTO ou ERRADO):

A. Ao movimentarmos o centro de homotetia do triângulo ABC a razão de homotetia permanece constate.	____________
B. Podemos determinar a posição exata da imagem em uma transformação homotética através da razão de homotetia e da figura a ser transformada.	____________
C. Uma vez definida a razão de homotetia e a figura (ABC) para determinar a imagem (A1B1C1) é necessário localizar o centro de homotetia. Para cada posição do centro de homotetia temos uma imagem diferente.	____________

ATIVIDADE 03

Abra o arquivo **3AT03.ae** e salve com o nome da equipe. Neste arquivo temos o triângulo ABC e o centro de homotetia S. Queremos construir o triângulo A1B1C1 com a razão de homotetia (k) igual a - 2. Ferramentas utilizadas: “reta”, “círculo”, “ponto de interseção”, “segmento”, “polígono”. Uma vez construído o triângulo A1B1C1 clique nos círculos criados e nas teclas Ctrl e H ao mesmo tempo. Os círculos serão escondidos (Não esconda os pontos gerados pelo círculo).

Podemos afirmar que (certo ou errado):

Em uma transformação homotética cada ponto da imagem é colinear (na mesma linha) ao ponto correspondente na figura e o centro de homotetia.	________
Em uma transformação homotética de razão negativa a direção é preservada e o sentido muda.	________

ATIVIDADE 04

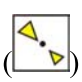
Abra o arquivo **3AT04.ae** e salve com o nome da equipe. O círculo de centro O foi transformado por homotetia no círculo de centro O1 e O2. Observe a posição das marcas dos centros. Considere que entre cada marca a distância é constante.

- Qual a razão de homotetia do círculo de centro O1?
- Qual a razão de homotetia do círculo de centro O2?

ATIVIDADE 05

Abra o arquivo **3AT05.ae** e salve com o nome da equipe. Neste arquivo temos uma bandeira formada pelo triângulo ABC e o segmento de reta CD (Vamos nomeá-la de bandeira ABCD). Vamos definir uma razão de homotetia através de dois segmentos. Utilizando a ferramenta "segmento" construa dois segmentos no canto superior da tela. Usando a ferramenta "formatar identificador", identifique os segmentos com as letras MN e OP. Com a ferramenta "calcular comprimento" determine a medida dos dois segmentos. Usando a "calculadora" (do Tabulae) determine a razão MN/OP. Movimente os segmentos.

- O que acontece com o valor da razão quando OP é maior do que MN?
- O que acontece quando OP é igual a MN?
- O que acontece quando OP é menor do que MN?
- Movimente os segmentos e deixe com um valor da razão entre 2 e 3.

Usando a ferramenta "homotetia" () que fica dentro da barra de ferramenta reflexão () clique no centro de homotetia S, depois clique no triângulo existente na bandeira e por ultimo clique no número que expressa a razão MN/OP. Repita a operação para construção da homotetia dos segmentos AB, BC, AC e CD.
Desta forma, construímos a imagem da bandeira. Observe o que acontece ao modificarmos as medidas de MN e de OP, alterando a razão de homotetia. Na divisão utilizamos apenas comprimentos de segmentos que são medidos em módulo não possuindo razão negativa. Por isto, nesta atividade, trabalhamos apenas com homotetia direta (positiva).

O que acontece quando:

K>1 : ____

K=1 : ____

0 < K< 1: ____

ATIVIDADE 06

Abra o arquivo 3AT06.ae e salve com o nome da equipe. Neste arquivo temos uma bandeira (formada pelo quadrado ABCD e o segmento de reta DE) e o centro de homotetia S. Usando a ferramenta “valor fixo” (no menu “calcular”) determinamos o valor -10. Em seguida construímos o segmento MP e obtemos o seu valor. Usando a ferramenta “calculadora” determinamos a razão q/MP. Com a razão, o centro de homotetia e a figura podemos determinar a imagem. Utilize a ferramenta “homotetia” para criar a imagem de ABCD. Em seguida movimente o segmento MP e observe o que acontece com a figura gerada por homotetia. O que acontece quando:

0 > K > -1

K = -1

K < -1

Para usar a ferramenta “homotetia” o programa solicita três informações:

ATIVIDADE 07

Abra um arquivo em branco e construa um quadrado qualquer. Tente movimentar o quadrado e observe se as suas características permanecem constantes. Caso as características não permaneçam constantes tente refazer o quadrado. Abra o arquivo **3AT07.ae** e salve com o nome da equipe. Neste arquivo, temos o triângulo ABC e queremos construir dentro do triângulo um quadrado MNOP. O lado OP do quadrado deve estar contido no segmento AC do triângulo e o os pontos M e N devem estar posicionados sobre os outros dois lados do triângulo. Com base nestas informações represente o quadrado MNOP.

Como você resolveu o problema? Justifique a sua resposta.

ANEXO D: NORMA DA REVISTA, PARA ONDE SERÁ ENVIADO O ARTIGO 1.

BOLEMA – BOLETIM DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O BOLEMA é constituído de Artigos, Resenhas, Resumos e Notícias. Os trabalhos submetidos à publicação passarão pela análise de componentes do Conselho Consultivo da revista.

Não há prazo determinado para o envio de artigos. O fluxo de recebimento e processamento é contínuo.

As seguintes normas devem ser atendidas:

- Enviar o trabalho em disquete, acompanhado de três cópias impressas, ao Editor, sendo **duas sem identificação**, digitado em espaço 1.5, fonte Times New Roman, tamanho 12, em papel ofício A4, Word 6.0 ou superior para Windows.
- Títulos e sub-títulos em negrito, com as iniciais das palavras importantes em maiúsculo, e tamanho 16.
- As palavras Resumo e Abstract em maiúsculo, centradas, em negrito e tamanho 12.
- O(s) nome(s) do(s) autor(es) e respectivos endereços eletrônicos deve(m), juntamente com o nome da instituição de origem, vir digitados em folha separada.
- Cada texto deve conter resumo em português e em inglês ou francês, de 100 a 150 palavras, e não deve ultrapassar o total de 15 páginas.
- As referências bibliográficas devem ser colocadas no final do texto, em ordem alfabética, segundo as normas da ABNT.